В. С. Булыгин, Об одной формуле Рамануджана, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 3, 470–471

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm2715

Математические заметки

том 79 выпуск 3 март 2006

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ РАМАНУДЖАНА

В. С. Булыгин

Замечательная формула Рамануджана, связывающая бесконечный ряд и бесконечную непрерывную дробь (см. [1, с. 33])

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cdots}}}}}=\sqrt{\frac{1}{2}\pi e} \tag{1}$$

является частным случаем (при $x=1$) следующего соотношения, связывающего степенной ряд и функциональную непрерывную дробь (далее будем использовать линейную запись непрерывных дробей):

$$1+\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x^2}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{x^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{1x^{-1}}{1+}\,\frac{1x^{-1}}{1+}\,\frac{2x^{-1}}{1+}\,\frac{3x^{-1}}{1+}\,\frac{4x^{-1}}{1+\cdots}=\sqrt{\frac{\pi e^x}{2x}}. \tag{2}$$

Степенной ряд в (2) связан с вырожденным гипергеометрическим рядом и является разложением функции

$$\sqrt{\frac{\pi e^x}{2x}}\,\operatorname{erf}\biggl(\sqrt{\frac{x}{2}}\biggr)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)!!}, \tag{3}$$

где $\operatorname{erf}(z)$ – интеграл вероятности, поскольку (см. [2, формула (9.9.1)])

$$\operatorname{erf}(z)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-x^2}\,dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}ze^{-z^2}\Phi\Bigl(1,\frac{3}{2};z^2\Bigr),$$

где

$$\Phi(\alpha,\gamma;z)=1+\frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{z}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\,\frac{z^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\,\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

– вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера).

Из формулы Лапласа, доказанной Якоби и переоткрытой Рамануджаном (см. [1, с. 14, формула (8)]),

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{e^{-a^2}}{2a+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{2}{2a+}\,\frac{3}{a+}\,\frac{4}{2a+\cdots},$$

которую можно переписать в виде

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{a^2}[1-\operatorname{erf}(a)]=\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{2}{2a+}\,\frac{3}{a+}\,\frac{4}{2a+\cdots}$$

при $a = \sqrt{x/2}$ следует

$$\sqrt{\frac{\pi e^x}{2x}}\left[1-\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\right] = \sqrt{\frac{2}{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{2x}+}\,\frac{1}{\sqrt{x/2}+}\,\frac{2}{\sqrt{2x}+}\,\frac{3}{\sqrt{x/2}+}\,\frac{4}{\sqrt{2x}+\cdots}\right)$$
$$= \frac{1}{x+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{2}{x+}\,\frac{3}{1+}\,\frac{4}{x+\cdots} = \frac{x^{-1}}{1+}\,\frac{x^{-1}}{1+}\,\frac{2x^{-1}}{1+}\,\frac{3x^{-1}}{1+}\,\frac{4x^{-1}}{1+\cdots}$$

что после сложения с (3) доказывает формулу (2).

Поскольку основные формулы приведенного выше доказательства должны были быть известны Рамануджану, можно предположить, что ему была также известна и формула (2), с помощью которой он и записал свое эффектное соотношение (1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин В. И. Рамануджан. М.: Знание, 1968. **2**. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Физматгиз, 1966.

Московский физико-технический институт
E-mail: `bulygin@nm.ru`

Поступило
10.06.2005