



Общероссийский математический портал

В. С. Булыгин, Об одной формуле Рамануджана, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 3, 470–471

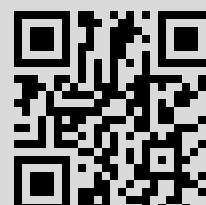
DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2715>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 109.252.45.222

14 марта 2018 г., 16:21:07





КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ РАМАНУДЖАНА

В. С. Булыгин

Замечательная формула Рамануджана, связывающая бесконечный ряд и бесконечную непрерывную дробь (см. [1, с. 33])

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \dots}}}}} = \sqrt{\frac{1}{2}\pi e} \quad (1)$$

является частным случаем (при $x = 1$) следующего соотношения, связывающего степенной ряд и функциональную непрерывную дробь (далее будем использовать линейную запись непрерывных дробей):

$$1 + \frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{x^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1x^{-1}}{1+} \frac{1x^{-1}}{1+} \frac{2x^{-1}}{1+} \frac{3x^{-1}}{1+} \frac{4x^{-1}}{1+} \dots = \sqrt{\frac{\pi e^x}{2x}}. \quad (2)$$

Степенной ряд в (2) связан с вырожденным гипергеометрическим рядом и является разложением функции

$$\sqrt{\frac{\pi e^x}{2x}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!!}, \quad (3)$$

где $\operatorname{erf}(z)$ – интеграл вероятности, поскольку (см. [2, формула (9.9.1)])

$$\operatorname{erf}(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z e^{-z^2} \Phi\left(1, \frac{3}{2}; z^2\right),$$

где

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

– вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера).

Из формулы Лапласа, доказанной Якоби и переоткрытой Рамануджаном (см. [1, с. 14, формула (8)]),

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-a^2}}{2a+} \frac{1}{a+} \frac{2}{2a+} \frac{3}{a+} \frac{4}{2a+} \dots,$$

которую можно переписать в виде

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{a^2} [1 - \operatorname{erf}(a)] = \frac{1}{2a+} \frac{1}{a+} \frac{2}{2a+} \frac{3}{a+} \frac{4}{2a+} \dots$$

при $a = \sqrt{x/2}$ следует

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi e^x}{2x}} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) \right] &= \sqrt{\frac{2}{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{2x}+} \frac{1}{\sqrt{x/2}+} \frac{2}{\sqrt{2x}+} \frac{3}{\sqrt{x/2}+} \frac{4}{\sqrt{2x}+\dots} \right) \\ &= \frac{1}{x+} \frac{1}{1+} \frac{2}{x+} \frac{3}{1+} \frac{4}{x+\dots} = \frac{x^{-1}}{1+} \frac{x^{-1}}{1+} \frac{2x^{-1}}{1+} \frac{3x^{-1}}{1+} \frac{4x^{-1}}{1+\dots} \end{aligned}$$

что после сложения с (3) доказывает формулу (2).

Поскольку основные формулы приведенного выше доказательства должны были быть известны Рамануджану, можно предположить, что ему была также известна и формула (2), с помощью которой он и записал свое эффектное соотношение (1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин В. И. Рамануджан. М.: Знание, 1968. 2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Физматгиз, 1966.

Московский физико-технический институт
E-mail: bulygin@nm.ru

Поступило
10.06.2005