

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
КУРСОВАЯ РАБОТА

«Моделирование нейтронной звезды»

Выполнил студент
211 группы:
Насакин Артур Игоревич

подпись студента

Научный руководитель:
ст. н. с.
Третьякова Татьяна Юрьевна

подпись научного руководителя

Москва
2020

Содержание

1 Введение	2
2 Что нам известно?	3
3 Уравнение Оппенгеймера-Волкова и его решение	4
4 Нейтронный Ферми газ	6
5 Учтем протоны и электроны в модели Ферми газа	8
6 Вывод	10
7 Список литературы	11
A Экспериментальные данные	12
B Программа	13

1 Введение

Нейтронные – звезды один из немногих космических объектов, которые были предсказаны теоретически до их открытия наблюдателями. Впервые идея о существовании звезд с увеличенной плотностью была высказана Л.Д.Ландау еще до открытия нейтрана. [1].

Однако найдена первая такая звезда была только в 1967 году аспиранткой Энтони Хьюиша - Джоселин Белл. Она обнаружила объект, излучающий регулярные радиопульсы, это явление было объяснено узкой направленностью радиолуча от быстро вращающегося космического объекта. Проблема заключалась в том, что любая обычная звезда разрушилась бы под действием центробежной силы при такой скорости вращения. На роль подобного объекта подходили только нейтронные звезды.

Наше понимание нейтронных звезд кардинально изменилось с 1966, когда не было известно ни одной нейтронной звезды, и дискуссия состояла из полностью теоретического подхода к сжатым плотным звездам. Изменения произошли в последнее десятилетие, когда обнаружение и точно синхронизированные наблюдения пульсаров происходили с все более высокой скоростью. Рентгеновские и гамма-телескопы нового поколения предоставили высококачественные наборы данных, а большой объем теоретических работ по свойствам излучения нейтронных звезд позволил в последнее время значительно улучшить нашу способность моделировать эти экстремальные объекты и интерпретировать их наблюдения [2].

Целью работы является модельный расчет в приближении нуклонного ферми-газа зависимости массы нейтронной звезды от ее радиуса.

2 Что нам известно?

Нейтронными звездами называется класс космических объектов, состоящих в основном из нейтронов, образовавшихся в процессе обратного бета-распада и покрытых тонкой корой вещества в виде тяжелых атомных ядер и электронов [3].

На данный момент мы знаем точные массы для ~ 35 нейтронных звезд, охватывающие диапазон от $1,17$ до $2,0 M_{\odot}$, и можем определить радиусы более десятка в диапазоне $10\text{--}11,5$ км. Сочетание самой тяжелой из известных масс нейтронных звезд с существующими измерениями радиуса уже накладывает существенные ограничения на уравнение состояния холодной плотной материи вплоть до плотностей, в $5\text{--}10$ раз превышающих ядерную плотность [2].

Подавляющее большинство точных измерений массы нейтронных было выполнено с использованием радионаблюдений вращающихся пульсаров. В настоящее время в Галактике известно более 2500 пульсаров, большинство из которых можно характеризовать как радиопульсары, но также некоторые из них наблюдаются в рентгеновских лучах, а все большее количество обнаруживается в гамма-лучах.

Около 90% радиопульсаров являются изолированными. Их массы не могут быть измерены, потому что все современные методы основаны на точном отслеживании орбитальных движений по времени прихода наблюдаемых пульсаций. Остальные 250 пульсаров находятся в бинарных системах (три из них в многокомпонентных системах). Текущие исследования сосредоточены исключительно на них.

Измерения радиуса нейтронных значительно продвинулись за последнее десятилетие, и был использован ряд различных методов. Большинство методов основано на обнаружении теплового излучения с поверхности звезды либо для измерения ее кажущегося углового размера, либо для определения влияния искривления пространства-времени нейтронной звезды на это излучение. Подходы можно широко разделить на спектроскопические и временные измерения [2].

Несмотря на разнообразие способов, количество нейтронных звезд, у которых известны одновременно и масса, и радиус, крайне мало. Поэтому основные экспериментальные ограничения, налагаемые на массу и радиус, вытекают из анализа закономерностей в существующих данных.

Конечной целью всех подобных работ является построение адекватной модели, по которой можно будет судить о внутренней структуре нейтронной звезды. Примеры экспериментальных данных приведены в Приложении (A).

3 Уравнение Оппенгеймера-Волкова и его решение

В работе используется следующая система уравнений [3, 4],

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dr} &= -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{c^2r^2} \left[1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)}\right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)c^2}\right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2r}\right]^{-1} \\ \frac{dM}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r) = \frac{4\pi r^2 \epsilon(r)}{c^2} \\ M(r) &= 4\pi \int_0^r r'^2 dr' \rho(r') = 4\pi \int_0^r r'^2 dr' \epsilon(r')/c^2\end{aligned}$$

где p - давление, M - масса звезды заключенная в сфере радиуса r , ρ - плотность вещества на расстоянии r от центра звезды, а ϵ - плотность энергии на расстоянии r от центра звезды.

Они представляют собой нелинейную систему дифференциальных уравнений которую мы будем решать численно.

Для начала сведем величины к безразмерным:

$$\bar{p} = p/\epsilon_0, \quad \bar{\epsilon} = \epsilon/\epsilon_0, \quad \bar{M} = M/M_\odot, \quad \bar{r} = r/r_0,$$

где M_\odot - масса солнца, а $r_0 = 1\text{км}$. Что касается ϵ_0 , то эту постоянную мы будем подбирать в каждом конкретном случае для более удобного решения. Подставляя выражения для безразмерных величин в систему получим:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{p}}{d\bar{r}} &= -\underbrace{\frac{GM_\odot}{r_0 c^2}}_{\alpha} \frac{\bar{\epsilon} \bar{M}}{\bar{r}^2} \left[1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\epsilon}}\right] \left[1 + \underbrace{\frac{4\pi r_0^3 \epsilon_0}{c^2 M_\odot} \frac{\bar{r}^3 \bar{p}}{\bar{M}}}_{\beta}\right] \left[1 - \underbrace{\frac{2GM_\odot}{r_0 c^2} \frac{\bar{M}}{\bar{r}}}_{\gamma}\right]^{-1} \\ \frac{d\bar{M}}{d\bar{r}} &= \underbrace{\frac{4\pi r_0^3 \epsilon_0}{c^2 M_\odot}}_{\beta} \bar{r}^2 \bar{\epsilon}\end{aligned}$$

$$\text{где } \alpha = 1.476, \quad \gamma = 2.953, \quad \text{а } \beta = 7.03 \cdot 10^{-39} \left(\frac{\text{см}^3}{\text{эрг}}\right) \cdot \epsilon_0$$

Таким образом, задавая ϵ_0 , получаем систему уравнений, которую мы уже непосредственно будем решать.

$$\begin{cases} \frac{d\bar{p}}{d\bar{r}} = -\alpha \frac{\bar{\epsilon} \bar{M}}{\bar{r}^2} \left[1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\epsilon}}\right] \left[1 + \beta \frac{\bar{r}^3 \bar{p}}{\bar{M}}\right] \left[1 - \gamma \frac{\bar{M}}{\bar{r}}\right]^{-1} \\ \frac{d\bar{M}}{d\bar{r}} = \beta \bar{r}^2 \bar{\epsilon} \end{cases}$$

Как можно видеть, из системы необходимо исключить третью неизвестную - $\bar{\epsilon}$. Для этого нам понадобится зависимость $\bar{\epsilon}(\bar{p})$, ее мы получим когда будем рассматривать конкретные модели.

Переходя непосредственно к численному решению системы [4], воспользуемся языком программирования Python и библиотекой “scipy.integrate”, которая позволяет реализовать решение системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты. Основное преимущество данной библиотеки перед собственными написанной реализацией данного метода состоит в хорошем автоподборе начальных коэффициентов.

Говоря о начальных условиях: $\bar{M}(0) = 0$, т.к в сфере нулевого радиуса не заключена масса, что касается $\bar{p}(0) \neq 0$, то это значение варьируется от выбора ϵ_0 и точки на кривой $M(R)$, которую мы хотим получить. К примеру, в ходе построения кривой для нейтронного Ферми газа значение $\bar{p}(0)$ изменялось от 0.0005 до 1000.

Когда мы подаем на вход функции “odient” функцию, рассчитывающую значения производных для произвольных \bar{M} , \bar{p} и \bar{r} (реализующую исходные уравнения), начальные условия и массив значений \bar{r} , для которых надо найти решение, на выход мы получаем массив значений \bar{M} и \bar{p} в заданных точках. Так как критерием того, что “звезда закончилась”, служит условие $\bar{p} = 0$, после чего решение данной системы не принадлежит множеству действительных чисел, то мы должны, постепенно увеличивая диапазон значений \bar{r} , ожидать появления ошибки в последней строчке выходного массива. После чего мы можем считать, что достигли границы звезды, а значит искомые радиус и масса найдутся в предпоследних ячейках своих массивов.

Таким образом, меняя \bar{r} , мы получили одну точку на плоскости $M-R$, теперь постепенно меняя $\bar{p}(0)$ получим множество таких точек - они и составят искомую кривую $M(R)$.

В данной реализации существует два тонких места:

1) В нахождении первых производных при $\bar{r} = 0$ и $\bar{M} = 0$. Так как и радиус, и масса присутствуют в знаменателе уравнения Оппенгеймера-Волкова, то формальное вычисление даст ошибку. Решение проблемы заключается в присвоении значений производным в этих случаях: при $\bar{r} = 0$ - обе производные приравнять 0, при $\bar{M} = 0$ приравнять нулю только производную давления.

2) Начальные условия необходимо выбирать близкими к реальным физическим значениям, иначе результат может быть практически произвольным вплоть до ошибки в ходе выполнения программы. К примеру, выбирая $\bar{p}(0)$ слишком маленьким вы рискуете получить звезду радиусом в 50000 км или в обратном случае 10^{-10} м. Это можно увидеть по спиралям на получившихся рисунках.

Текст программы для случая нейтронного Ферми газа можно посмотреть в Приложении В.

4 Нейтронный Ферми газ

Для свободных нейтронов количество доступных состояний на единицу объема определяется максимальным импульсом k_F [3, 4].

$$dn = \frac{d^3k}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$n = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad (1)$$

Тогда плотность вещества определяется, как $\rho = nm_N$, где m_N - масса нейтрона, а плотность энергии, как

$$\epsilon(k_F) = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} (k^2 c^2 + m_N^2 c^4)^{1/2} k^2 dk \quad (2)$$

1) В реалистическом случае $kc \gg m_N c^2$ и потому можно принебречь вкладом массы в плотность энергии, тогда

$$\epsilon(k_F) = \frac{k_F^4 c}{4\pi^2\hbar^3}$$

2) В нерелятивистском случае $kc \ll m_N c^2$ и пренебрегаем вкладом импульса в плотность энергии, получим

$$\epsilon(k_F) = \frac{m_N c^2 k_F^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

Теперь рассмотрим давление. Из первого закона термодинамики следует

$$p = n^2 \frac{d(\epsilon/n)}{dn} = \frac{8\pi c^2}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 c^2 + m_N^2 c^4)^{1/2}} dk \quad (3)$$

Рассуждая аналогично случаю с плотностью энергии получим
1) В реалистическом случае

$$p = \frac{k_F^4 c}{12\pi^2\hbar^3} = \epsilon/3$$

2) В нерелятивистском случае

$$p = \frac{k_F^5}{15\pi^2\hbar^3 m_N} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_N} \left(\frac{3\pi^2 \epsilon}{m_N c^2} \right)^{5/3}$$

Окончательную же зависимость $\epsilon(p)$ мы представим в виде:

$$\bar{\epsilon} = A_{NR} \bar{p}^{3/5} + A_R \bar{p}$$

Где $\bar{p} = p/\epsilon_0$ и $\bar{\epsilon} = \epsilon/\epsilon_0$ - безразмерные величины, а ϵ_0 выбирается из соображений удобства. Мы выбрали именно такую функцию, потому что аналитическое нахождение зависимости $\epsilon(p)$ в произвольном случае сопряжено с трудностями. Представив общую зависимость в виде линейной комбинации нерелятивистского(NR) и релятивистского(R) случаев, мы получили функцию, стремящуюся к релятивистской зависимости при $\bar{p} \rightarrow \inf$ и к нерелятивистской при $\bar{p} \rightarrow 0$, и плавно переходящую от одной к другой. Коэффициенты A_{NR} и A_R получим аппроксимируя численную зависимость $\epsilon(p)$, полученную интегрированием уравнений (2) и (3), предложенной функцией. В нашем случае значения получаются следующими:

$$\epsilon_0 = \frac{m_N^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} = 5.4883 \cdot 10^{36} \frac{\text{Эрг}}{\text{см}^3}, \quad A_{NR} = 2.4216, \quad A_R = 2.8663$$

На рисунке 1 показана зависимость, полученная с использованием вышеописанной методики.

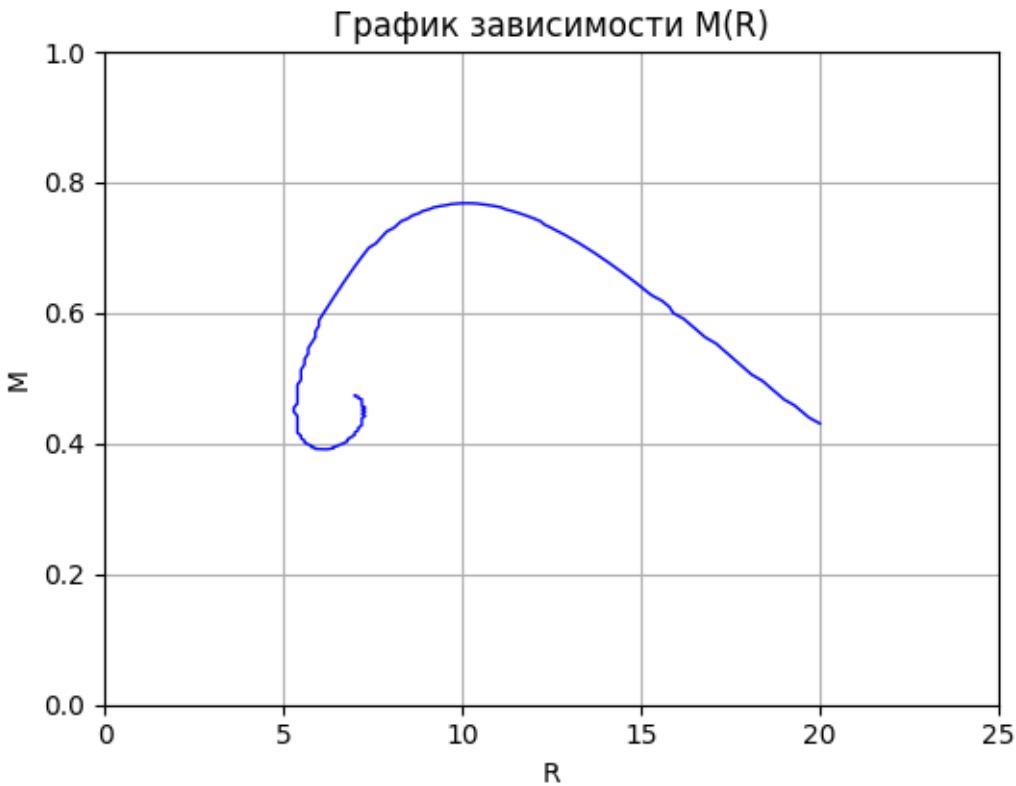


Рис. 1: Зависимость массы M (в M_\odot) от радиуса R (в км) для нейтронной звезды в модели нейтронного Ферми газа.

На графике видно, что в данной модели предельная максимальная масса нейтронной звезды составляет менее 0.8 масс Солнца, а соответствующий радиус звезды около 10 км.

5 Учтем протоны и электроны в модели Ферми газа

Безусловно [3, 4], нейтронные звезды не состоят из одних только нейтронов, причиной этому служит тот факт, что в свободном состоянии нейтроны испытывают слабый распад



и имеют среднее время жизни примерно 15 минут.

В ходе данного распада выделяется энергия в 0.778 МэВ, большую часть которой уносит нейтрино. Так что на протон и электрон приходится лишь малая доля. Кроме того, так как протоны и электроны - фермионы, после того, как они займут все доступные энергетические уровни, принцип Паули предотвратит дальнейшие распады.

Но поскольку нейтронные звезды электрически нейтральны количество электронов будет совпадать с количеством протонов.

$$n_e = n_p \Rightarrow k_{F,e} = k_{F,p} \text{ (как было показано в формуле (1))} \quad (4)$$

Кроме того мы должны учесть и обратный процесс, $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$, равновесие между ними может быть записано в терминах химических потенциалов.

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e, \text{ где } \mu_i(k_{F,i}) = \frac{d\epsilon_i}{dn_i}, \quad i = n, p, e \quad (5)$$

Так как мы работаем в модели Ферми газа, то, воспользовавшись формулами аналогичными (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_i}{dk_{F,i}} &= \frac{d\epsilon_i}{dn_i} \cdot \frac{dn_i}{dk_{F,i}} = \frac{d\epsilon_i}{dn_i} \cdot \frac{k_{F,i}^2}{\pi^2 \hbar^3} \\ \frac{d\epsilon_i}{dk_{F,i}} &= \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} (k_{F,i}^2 c^2 + m_i^2 c^4)^{1/2} k_{F,i}^2 \\ \frac{d\epsilon_i}{dn_i} &= (k_{F,i}^2 c^2 + m_i^2 c^4)^{1/2} \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) и учитывая (4), получим:

$$(k_{F,n}^2 c^2 + m_n^2 c^4)^{1/2} - (k_{F,p}^2 c^2 + m_p^2 c^4)^{1/2} - (k_{F,p}^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2} = 0$$

Выразим $k_{F,p}$ из этого уравнения.

$$k_{F,p} = \frac{[(k_{F,n}^2 + m_n^2 - m_e^2)^2 - 2m_n^2(k_{F,n}^2 + m_n^2 + m_e^2)^2 + m_p^4]^{1/2}}{2(k_{F,n}^2 + m_n^2)^{1/2}}$$

Таким образом получаем, что задав $k_{F,N}$, мы задаем все $k_{F,i}$, а значит и все

$$\epsilon_i(k_{F,i}) = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_{F,i}} (k^2 c^2 + m_i^2 c^4)^{1/2} k^2 dk$$

$$p_i(k_{F,i}) = \frac{8\pi c^2}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_{F,i}} \frac{k^4}{(k^2 c^2 + m_i^2 c^4)^{1/2}} dk$$

Так мы рассматриваем Ферми газ. то

$$\epsilon_{total} = \sum_{i=N,p,e} \epsilon_i \quad p_{total} = \sum_{i=N,p,e} p_i$$

$$\bar{\epsilon}_i = A_{NR,i} \bar{p}_i^{3/5} + A_{R,i} \bar{p}_i$$

где черта над переменной означает, что та была нормирована на ϵ_0 . Найдя ϵ_{total} и p_{total} для различных $k_{F,N}$ и пронормировав их на ϵ_0 , мы получим точки для аппроксимации зависимости $\bar{\epsilon}_{total}(\bar{p}_{total})$ функцией

$$\bar{\epsilon}_{total} = A_{NR} \cdot \bar{p}_{total}^{3/5} + A_R \cdot \bar{p}_{total}$$

Стоит заметить, что тот факт, что

$$\sum_{i=N,p,e} \bar{p}_i^{3/5} \neq \left(\sum_{i=N,p,e} \bar{p}_i \right)^{3/5}$$

вносит меньшую ошибку, чем само приближение степенной функцией, так как нерелятивисткий член вносит ощутимый вклад в сумму только при малых $k_{F,N}$, а значит при малых p_i .

Задав $\epsilon_0 = 5.4883 \cdot 10^{36} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$ получим $A_{NR} = 2.572$, $A_R = 2.891$. И снова применив вышеописанный метод получим график $M(R)$. Как можно заметить график отличается от предыдущего незначительно, что приводит нас к выводу, что для получения более реалистичной картины необходимо учесть взаимодействие между частицами, то есть уточнять и расширять вышеописанную модель.

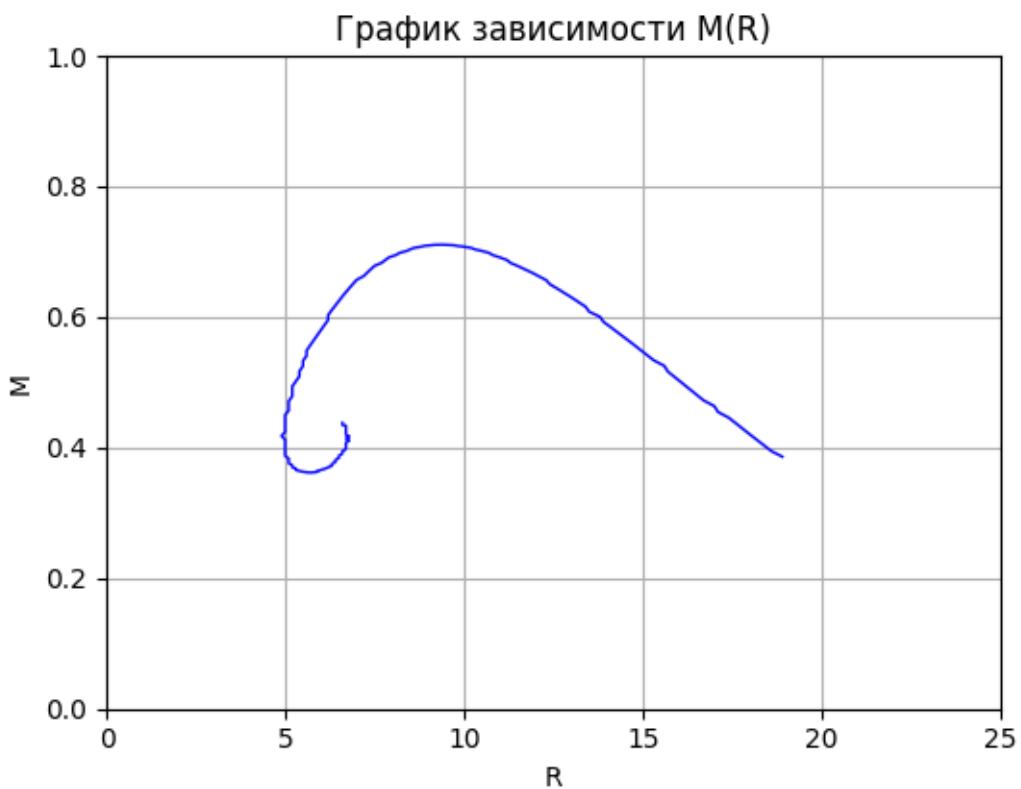


Рис. 2: Зависимость массы от радиуса для нейтронной звезды в модели нейтронного Ферми газа с учетом протонов и электронов. Масса отсчитывается в массах Солнца, а радиус в километрах.

6 Вывод

1) Рассмотрена модель нейтронной звезды, в которой для описания звездного вещества используется приближение невзаимодействующих частиц.

2) Проведены расчеты зависимости массы нейтронной звезды от ее радиуса для случая чисто нейтронной материи и с учетом бета-распада. Оба варианта расчета дают близкие результаты с максимальной массой звезды около 0,8 масс Солнца и радиусом менее 10 км.

Улучшить и дополнить модель можно следующими способами:

1) Учесть ядерное взаимодействие.
2) Добавить в рассмотрение новые частицы, присутствующие в нейтронной звезде.

3) Учесть вращение и деформации нейтронной звезды и решить уравнение Оппенгеймера-Волкова для этого случая.

4) Улучшить алгоритм построения $M(R)$ - сделать возможным численное задание $\bar{\epsilon}(\bar{p})$.

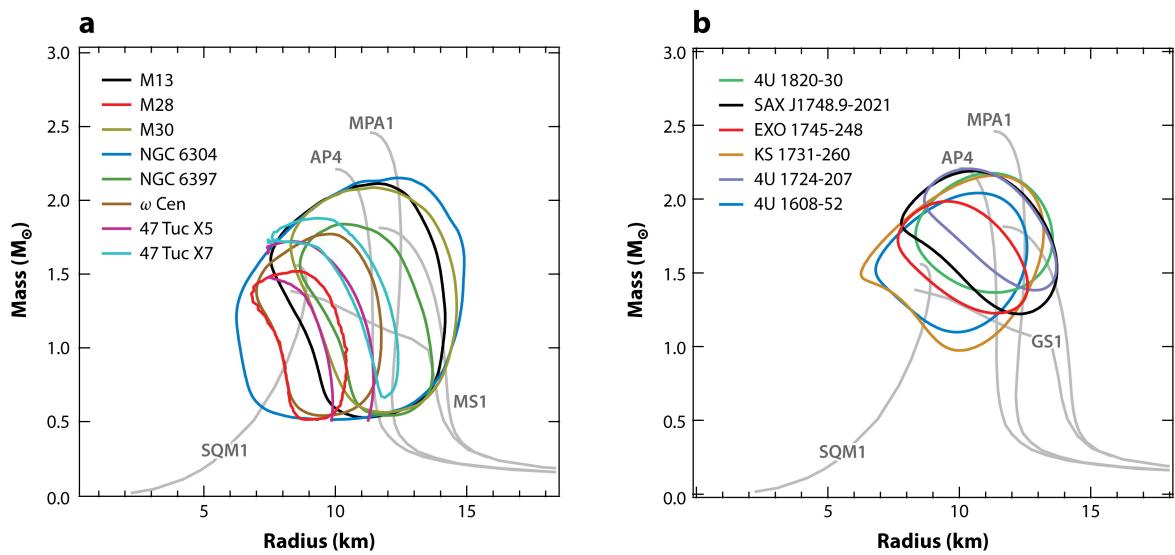
Каждый шаг будет делать нашу модель более правдоподобной, а результаты - более достоверными. И возможно однажды, на очередном шаге мы получим достаточно достоверную картину, позволяющую судить о структуре нейтронной звезды.

7 Список литературы

Список литературы

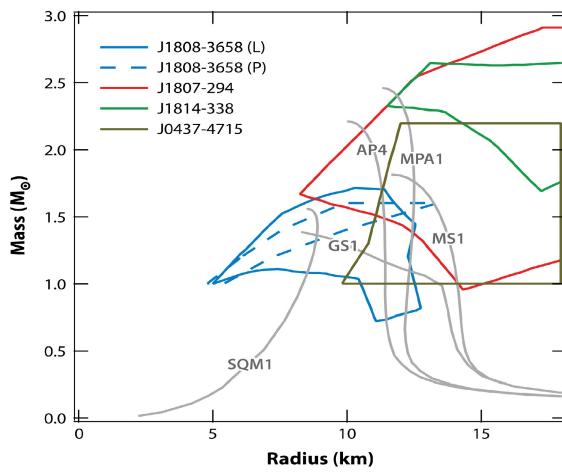
- [1] Л.Д.Ландау, *Собрание трудов, в 2 т. Т. 1.*/Под ред. Е.М. Лифшица. - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2008. С. 103.
- [2] F. Özel and P. Freire, *Masses, Radii, and the Equation of State of Neutron Stars*// (<https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081915-023322>)
- [3] С.Л. Шапиро и С.А. Тьюколски, *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды: В 2-х ч. Ч. 1* Пер. с англ. - М.:Мир, 1985.
- [4] R. Silbar and S. Reddy, *Neutron Stars for Undergraduates* // (arXive:nucl-th/0309041v2)

A Экспериментальные данные



Özel F, Freire P. 2016.
 Annu. Rev. Astron. Astrophys. 54:401–40

Рис. 3: Комбинированные ограничения по массе и радиусу нейтронной звезды, полученные из (а) всех нейтронных звезд малой массы в двойных системах. (б) всех нейтронных звезд с термоядерными вспышками.



Özel F, Freire P. 2016.
 Annu. Rev. Astron. Astrophys. 54:401–40

Рис. 4: Ограничения радиусов, полученные из анализа осцилограмм от аккреционных и вращающихся миллисекундных пульсаров.

Серыми линиями на всех рисунках обозначены теоретические зависимости, соответствующие различным уравнениям состояния.

B Программа

```
from scipy.integrate import odeint
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def energy(p):          # Функция задающая зависимость энергии от давления
    return (p**0.6)*2.4216+2.8663*p)

def vectorfield(w, t, e0): #функция задающая систему дифференциальных уравнений
    p, M =w
    r=t
    e=energy(p)
    alfa=1.476
    beta=7.03e-39*e0
    gamma=2.953
    if (r!=0) and (M!=0):
        f = [-alfa*e*M/r/r*(1+p/e)*(1+p*r*r/M*beta)/(1-M/r*gamma),
              beta*e*r*r]      #система дифференциальных уравнений
    if (M==0):           #Оговорки для работоспособности программы
        f = [0,
              beta*e*r*r]
    if (r==0):
        f= [0,0]
    return f

def solut(p0):          #функция находящая массу и радиус звезды
    M0=0
    e0=5.346e+36
    numpoints = 100
    j=0
    z=0
    sol=np.zeros((3))
    while (z==0) and (j<10000):
        stoptime = j*0.1      #постепенное
        j=j+1                  #изменение радиуса
        t = [stoptime * float(i) / (numpoints - 1) for i in range(numpoints)]
        w0 = [p0,M0]
        wsol = odeint(vectorfield, w0, t, args=(e0,)) #вызов функции численного решения
        if not(wsol[numpoints-1,0]>0): z=1           #проверка на ошибку в последней строке
        else:
            sol[0:2]=wsol[numpoints-1,:]
            sol[2]=t[numpoints-1]
    return sol

p0=0.0005                #нижняя граница давления
i=0
sol=np.zeros((1000,2))
while (p0<1000):          #верхняя граница давления
    sol[i,:]=solut(p0)[1:3] #нахождение и сохранение
    p0=p0*1.1               #решений для
    i=i+1                   #различных p0
```