

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**СТРОЕНИЕ ЯДРА И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЯВЛЕНИЙ  
ДЕЛЕНИЯ***Д. Хилл и Дж. Уиллер \*)*

Авторами сделана попытка объединить в одной картине почерпнутые из опыта характерные черты строения ядра, отвечающие как модели жидкой капли, так и модели независимых частиц. В качестве исходного предположения для исследования этого обобщающего представления — коллективной модели ядра — принято предположение о сильной связи, согласно которому потенциал нуклона внутри ядра почти не зависит от положения других нуклонов и падает на малом расстоянии от поверхности ядра. В этой модели проводится различие между нуклонным состоянием системы, определяющимся состояниями индивидуальных нуклонов и состояниями колебаний и вращений ядра, как целого. На основе квантово-механических соображений показано, каким образом можно объяснить кинетическую энергию этих движений в терминах степеней свободы индивидуальных частиц. В случае ядра, так же как и в случае электронно-колебательно-вращательно-го описания молекулы, имеет смысл рассматривать сумму энергий состояний индивидуальных частиц и энергий взаимодействия как потенциальную энергию деформации, зависящую от формы системы. Различные состояния совокупности индивидуальных частиц приводят к различным многолистным потенциальным энергетическим поверхностям. Заданный лист потенциальной поверхности касается другого, смежного с ним, верхнего или нижнего, только в определённых изоцированных «воронках», как и в случае многоатомных молекул. Для того чтобы представление о коллективной модели было пригодным, необходимо, чтобы частота неадиабатических переходов с одной поверхности на другую была мала по сравнению с частотой вращений и поверхностных колебаний, с тем, чтобы эти коллективные движения имели вполне определённый смысл. Математическая трактовка коллективной модели ещё недостаточно разработана для того, чтобы можно было дать полный или даже приближённый ответ на вопрос, выполняется ли такое условие самосогласованности достаточно хорошо, или только приближённо, или же, наконец, вообще не выполняется ни для какого интервала энергии возбуждения. Частоты колебаний в общем соответствуют частотам, отвечающим простой модели жидкой капли, однако с некоторыми характерными квантово-механическими отличиями. Признаны основные тождества принципа Франка-Кондона по аналогии с многоатомными молекулами. Обсуждены некоторые выводы, вытекающие из коллективной модели или из упрощающей её модели жидкой капли, в отношении уровней энергии.

\*) D. L. Hill and J. A. Wheeler, Phys. Rev. 83, 1102 (1953).

совместимости сильного захвата нейтронов с эффектами в энергии связи индивидуальных частиц, квадрупольных моментов,  $\alpha$ -распада, порогов деления, фотоделения, спонтанного деления, асимметрии ядерного деления, гидродинамики процесса деления,  $\alpha$ -частиц деления и возбуждения осколков.

## I. ЖИДКАЯ КАПЛЯ И НЕЗАВИСИМЫЕ ЧАСТИЦЫ

Деление ядер является ядерным процессом необычного типа. Если система, состоящая из многих нуклеонов, делится на две примерно равные части, то это явление невозможно объяснить, исходя из движения одного нуклеона или малого числа нуклеонов. Мы встречаемся здесь с коллективным поведением ядра, как целого, которое может быть представлено в идеале моделью жидкой капли. Поведение ядерного вещества аналогично поведению капли почти несжимаемой жидкости, обладающей более или менее равномерной объёмной плотностью электрического заряда и примерно одинаковой энергией связи на каждую частицу. К этому надо добавить влияние энергии электростатического взаимодействия отдельных частей жидкости и уменьшение энергии связи частиц, расположенных вблизи поверхности, которое пропорционально величине поверхности капли и приводит к появлению поверхностного натяжения, аналогичному поверхностному натяжению в обычных жидкостях<sup>1, 2</sup>. Такая система может подвергаться деформациям (рис. 1)\*).

Стабилизирующее действие поверхностного натяжения превосходит разрушающее действие электростатических сил отталкивания даже в тяжёлых ядрах, имеющих нормальную, приблизительно сферическую, конфигурацию. Следовательно, малые возмущения вызывают колебания вокруг равновесной формы. Однако значительное «гантелеобразное» изменение формы ядра приводит к преобладанию электростатического отталкивания обеих частей системы над силами поверхностного натяжения, стягивающими каплю<sup>3</sup>. Таким образом, значительная деформация тяжёлого ядра приводит ядро к неустойчивости. Возникает ещё большее растяжение, при котором убыль электростатической энергии идёт быстрее, чем возрастание энергии поверхностного натяжения, движение начинает ускоряться и, в конце концов, ядро делится на две (или более) части. Акт деления (fission) проходит через несколько стадий<sup>4</sup>: 1) увеличение энергии возбуждения ядра до определённого уровня; 2) концентрация значительной части этой энергии в энергии поверхностных колебаний, достаточной для получения критической деформации (рис. 2 и 3); 3) самопроизвольное увеличение этой деформации (рис. 4); 4) разделение (scission) на осколки неправильной формы; 5) отдаление осколков друг от друга; 6) «успокоение» новых ядер.

\*) Рисунки и пояснения к ним помещены в «дополнении», в конце статьи.

Хотя процесс деления указывает на способность ядра к коллективным формам движения, за последнее время накопилось большое число данных, отвечающих поведению нуклеонов, как частиц, обладающих индивидуальными и почти независимыми состояниями<sup>5-8</sup>. Эти данные почерпнуты из измерений спинов и магнитных моментов ядер и из закономерностей в энергиях связи ядер, выражающихся в оболочечной структуре. Таким образом, мы вынуждены заключить, что две столь различные точки зрения, как модель жидкой капли и модель независимых частиц, являются различными сторонами некоторой более общей картины. Следовательно, необходимо рассмотреть и понять поведение ядра как коллектива, исходя из свойств индивидуальных нуклеонов. Став на такой путь, мы должны вычислить из гидростатических представлений общий характер зависимости критической энергии деления от атомного номера и массового числа и объяснить возможные отклонения от этих средних величин у различных ядер индивидуальным характером ядерных состояний.

Величины квадрупольных моментов ядер ясно показывают, что ни модель жидкой капли, ни модель индивидуальных нуклеонов, двигающихся в сферически-симметричном поле, не являются, каждая сама по себе, полноценными (рис. 5 и 29). Обе модели не могут объяснить столь большую асимметрию в распределении электрического заряда ядра, которая наблюдается в большом числе случаев<sup>9, 10</sup>. Необходимо, однако, учесть, что давление, оказываемое несколькими нуклеонами на поверхность ядра, приведёт к изменению формы всего ансамбля ядерных зарядов (рис. 6). Учёт этого явления приводит к правильному порядку величины квадрупольных моментов, как это впервые было указано Рейнвотером<sup>11</sup>.

Квадрупольные моменты показывают, что взаимодействие нуклеонов друг с другом через посредство поверхности ядра оказывается более сильным, чем непосредственное взаимодействие нуклеонов. Этот вывод подтверждается экспериментальными данными относительно ядерных энергий связи. Энергия нуклеона, окружённого со всех сторон соседними нуклеонами на расстоянии порядка  $10^{-13}$  см, мало зависит от того, имеются ли ещё другие нуклеоны на большем расстоянии или нет. Более того, в обоих случаях нет заметного влияния на среднее пространственное распределение ближайших соседей. Почему ядерные силы насыщаются и каково происхождение этих сил, нам неизвестно<sup>12, 13</sup>. Нам неясно также, почему величины спинов и магнитных моментов и тонкая структура ядерных уровней энергии связи согласуются с моделью индивидуальных нуклеонов, двигающихся почти независимо в среднем потенциальном поле. Тем не менее, экспериментальные данные заставляют нас принять идеализированную картину, в которой каждая частица движется в потенциальной яме приблизительно постоянной глубины внутри всего ядра и внезапно исчезающей на расстоянии порядка  $r_0$  от поверхности ядра.

Более тонкие детали структуры ядерных оболочек привели к гипотезе, в которой индивидуальные нуклеоны подвержены действию не только ядерного потенциального поля, но и спин-орбитальной связи<sup>3</sup>. Ни в коем случае не подвергая сомнению эту плодотворную гипотезу, мы всё же вправе вначале пренебречь влиянием спин-орбитальной связи при рассмотрении связи между моделью независимых частиц и другими моделями ядра, предполагающими более тесное взаимодействие частиц.

## II. КОЛЛЕКТИВНАЯ МОДЕЛЬ ЯДРА

Рассмотрим коллективную модель ядра, основанную на следующих предположениях:

### 1. Предположения, справедливые при любой модели

- 1) Примерно постоянная плотность — одна частица на объём  $\frac{4}{3}\pi r_0^3$ , где  $r_0 \sim 1,4 \cdot 10^{-13}$  см =  $\frac{e^2}{2mc^2}$ .
- 2) Максимальная кинетическая энергия  $F$  на нуклеон почти не зависит от массового числа и равна  $\sim 24$  Мэв.
- 3) Распределение заряда по объёму равномерно с точностью 25% (или лучше).
- 4) Энергия связи нуклеонов лежит в пределах  $5 \div 10$  Мэв; средняя потенциальная энергия порядка — 30 Мэв.
- 5) Насыщение ядерных сил.

### 2. Специальные предположения

1) Сильное насыщение; потенциальное поле для типичного нуклеона внутри ядра почти не зависит от положения других нуклеонов; потенциал быстро спадает на малом расстоянии от поверхности ядра. Эта идеализация противоположна модели непроницаемой жидкой капли, в которой силы резко зависят от положения соседних нуклеонов независимо от того, находится ли рассматриваемая частица внутри ядра или вблизи его поверхности. В модели жидкой капли прямое взаимодействие между частицами считается настолько сильным, что индивидуальные состояния нуклеонов не имеют никакого смысла. (Наблюдения, которые отвечают понятию почти независимых орбит частиц, относятся большей частью к основным и низко лежащим возбуждённым уровням.) У нас нет серьёзных аргументов ни за ни против такого представления. Тем не менее, для коллективной модели пренебрежение этим прямым взаимодействием частиц в сравнении с прямым взаимодействием, происходящим через посредство подвижной

границы потенциальной ямы (поверхности ядра), является существенной исходной идеализацией. С этой точки зрения коллективная модель является первым приближением к истине, справедливость которого может быть установлена только при полном рассмотрении вытекающих из него следствий. Теория коллективной модели находится ещё в слишком ранней стадии развития, не позволяющей провести полное сопоставление с экспериментом.

2) Состояние всей системы в первом приближении определяется состояниями движений индивидуальных нуклонов или, как это будет видно ниже, одной из многих потенциальных кривых и соответствующими квантовыми числами вращения системы и коллективных колебаний вдоль этой потенциальной кривой. В действительности, благодаря связи обеих форм движения через поверхность ядра будет происходить с определённой вероятностью обмен энергией между колебаниями ядра и возбуждением отдельных частиц. Этот обмен не является случайной стороной явления в коллективной модели; он является существенной стороной кинетики процесса. Но если частота обмена станет сравнимой с частотой колебаний, то разделение энергии на часть, присущую коллективу, и часть, присущую отдельным частицам, не сможет быть проведено строго, и коллективная модель потеряет свой смысл. Мы должны, таким образом, выяснить, является ли коллективная модель самосогласованной. До сих пор мы не в состоянии провести детальное сравнение частоты обмена с частотой колебаний. Грубые оценки, приведённые ниже, указывают на возможность реализации промежуточного случая, в котором обе частоты сравнимы по величине и в котором разделение на колебания и движения отдельных нуклонов окажется частично смазанным. Сейчас ещё рано исключать как возможность того, что соотношение между обоими частотами окажется более благоприятным, так и возможность того, что численные значения окажутся такими, что польза от коллективной модели будет сильно ограничена. В этом случае останутся незатронутыми общие заключения относительно влияния квадрупольных моментов на  $\alpha$ -распад, относительно флуктуаций высоты барьера деления от элемента к элементу и т. д., но большинство количественных приложений модели окажется почти бесполезным. Мы, однако, надеемся на непротиворечивость предположения 2), а потому мы исследуем в этой работе некоторые математические детали коллективной модели и её приложений.

### 3. Сравнение ядер с атомами и молекулами

Идеализация, которую мы примем для описания поведения нуклонов в ядре, во многом отталкивается от представления о движении электронов в атомном поле. Имеются аналогичные основания говорить об индивидуальных квантовых состояниях

и вероятностях переходов. Можно использовать те же соображения при расчёте самосогласованного ядерного потенциала. Однако существует важное различие в основах. В случае электронов поле сил определяется ядром. Действие поля на один электрон в многоэлектронном атоме меняется относительно немного, если другой электрон пересекает орбиту первого. Потенциал можно рассматривать как статический.

В случае ядра величина потенциала внутри ядра в идеале не зависит от орбиты любого индивидуального нуклеона, но границы этого потенциала с точки зрения некоторой частицы очень сильно зависят от движений небольшого числа других составляющих ядро частиц. В этом смысле потенциальное поле флуктуирует или осциллирует.

Мы могли бы пренебречь флуктуациями в положении ядерной поверхности, если бы наше рассмотрение было ограничено основными состояниями ядер, при которых амплитуда колебаний<sup>4</sup> порядка  $r_0$ . Однако необходимо рассмотреть также возбуждённые состояния и процесс деления, когда амплитуда колебаний сравнима с размерами ядра. Как можем мы описать квантово-механическим образом систему многих независимых частиц с характерными новыми чертами коллективных форм движения?

Полезным является сравнение коллективной модели ядра с типичной молекулой. В случае молекулы электроны движутся с большой скоростью в поле сил, которое само меняется благодаря изменению расстояния между ядрами с частотой в  $10 \div 100$  раз меньшей. Таким образом, каждый электрон успевает почти адиабатически следовать за мгновенными значениями потенциала. С другой стороны, полная энергия системы электронов в каждый данный момент имеет некоторый запас потенциальной энергии. Из этого источника молекула может черпать кинетическую энергию для междуядерного движения, которую она возвращает обратно, когда амплитуда колебаний достигает своих границ. Аналогично этой картине, характеристическое время радиального движения нуклеона, обладающего средней кинетической энергией  $T = 15 \text{ Мэв}$ , равно для  $U^{236}$

$$t_{\text{нукл}} = \oint \left[ \frac{2T}{M} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{M^2 r^2} \right]^{-1/2} dr =$$

$$= \frac{2R}{[2T/M]^{1/2}} \left[ 1 - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2MTR^2} \right]^{1/2} < \frac{2R}{[2T/M]^{1/2}} \equiv \frac{2R}{v} = \frac{2A^{1/3}r_0}{0,18c} =$$

$$= 0,3 \cdot 10^{-21} \text{ сек.} \quad (1)$$

т. е. в пятнадцать раз меньше периода поверхностных колебаний низшего порядка для того же ядра, равного

$$t_2 = \frac{2\pi\hbar}{\hbar\omega_2} = 2\pi \cdot 0,658 \cdot 10^{-21} \frac{\text{Мэв сек}}{0,8 \text{ Мэв}} = 5 \cdot 10^{-21} \text{ сек.} \quad (2)$$

Таким образом, в случае ядер можно также ожидать, что состояния частиц будут следовать за изменениями границы ядра; при этом вероятность неадиабатического скачка от одного состояния к другому будет мала, если только рассматриваемые деформации будут простыми.

#### 4. Взаимодействие нуклонов с поверхностью ядра

В случае сложных деформаций поверхности частице требуется больше времени для того, чтобы «прощупать» всю поверхность, и адиабатические условия не будут удовлетворяться столь просто. Представляется разумным потребовать, чтобы при деформациях поверхности  $n$ -го порядка величина  $\frac{n}{2} t_{\text{нукл}}$  была бы меньше периода  $t_n$  деформации — условие, которое, очевидно, не может быть удовлетворено при деформациях очень высокого порядка (например, при  $n > \sim 6$ ). Такие деформации не имеют определённого смысла в коллективной модели.

Естественным минимальным пределом площади деформаций, могущих вызвать ответную реакцию ядра, является, очевидно, квадрат длины волны Де-Бройля частицы

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Время, необходимое для этой ответной реакции, должно быть порядка произведения числа столкновений (необходимого для прикосновения ко всем участкам поверхности  $S$ ) на промежуток времени между двумя столкновениями, т. е.

$$\sim \frac{S}{\lambda^2} \cdot \frac{R}{v} \sim \frac{V}{\lambda^3} \frac{h}{E} \sim \frac{h}{\Delta E},$$

где  $V$  — доступный частице объём,  $E$  — её кинетическая энергия и  $\Delta E$  — типичное расщепление (рис. 11) между индивидуальными уровнями в заданной области. Это расщепление так мало и соответствующий интервал времени так велик по сравнению с периодом колебаний, что не может быть речи об адиабатических условиях при малых ячейкообразных возмущениях. Если в движении участвуют две частицы и они сильно взаимодействуют друг с другом, то время, необходимое для ответной реакции этой системы двух частиц на малые ячейкообразные возмущения поверхности, возрастает в  $\frac{V}{\lambda^3}$  раз (число различных положений второй частицы внутри объёма  $V$ ). Если число сильно взаимодействующих частиц растёт, то это время возрастает в  $\frac{V}{\lambda^3}$  раз на каждую частицу для различных частиц и несколько менее для частиц,

удовлетворяющих принципу Паули; однако возрастание всегда таково, что рассматриваемый интервал времени равен  $\hbar$ , делённому на расщепление уровней всей системы. Очевидно, такие времена будут слишком велики для адиабатической реакции на колебания поверхности. Это значит, что коллективная модель может быть оправдана только тогда, когда взаимодействие отдельных частиц друг с другом по закону сильного насыщения не зависит от положения любой другой частицы внутри ядра.

Если мы будем придерживаться аналогии с молекулярными кривыми потенциальной энергии, как функции межядерных расстояний, то придём к представлению о кривой ядерной потенциальной энергии, как функции деформации поверхности ядра. Так же, как в многоатомной молекуле имеется много независимых степеней свободы, в случае ядра необходимо ввести в рассмотрение некоторое число параметров для определения формы поверхности ядра (рис. 1). Таким образом, мы будем иметь дело с потенциальной энергетической поверхностью. Как известно, в молекулах минимумы различных потенциальных поверхностей не совпадают друг с другом; тем более этого не происходит в случае ядер. Равновесный квадрупольный момент меняется от состояния к состоянию в соответствии с особенностями взаимодействия лишнего (по отношению к замкнутой оболочке) нуклеона с поверхностью. Энергия системы будет состоять из энергии нуклеонов, энергии колебаний и энергии вращений.

### 5. Кинетическая энергия коллективного движения

В случае молекул колебательная кинетическая энергия явно связана с движением атомов. Можно ли в случае ядер указать массу, движение которой отвечает колебательной кинетической энергии?

Разве энергия движения нуклеонов уже не включена в энергетическую кривую колебательного потенциала? Этот колебательный потенциал определён, как сумма потенциальных и кинетических энергий всех индивидуальных состояний нуклеона, подсчитанных при статической конфигурации деформированного ядра. Однако такой подсчёт по своей природе не учитывает медленных изменений формы ядра. Эти изменения с необходимостью вызывают перемещения значительных масс с одного места на другое. При таком положении вещей неизбежно возникает кинетическая энергия всей нуклеонной системы дополнительно к энергии, приписываемой индивидуальным нуклеонам, находящимся в статической потенциальной яме. Эта дополнительная кинетическая энергия может быть интерпретирована как колебательная энергия движения системы.

В квантово-механическом описании (рис. 7 и 8) движение ядерной жидкости проявляется в перемещении узлов волновой функции связанного нуклона от места к месту в согласии с движениями поверхности. В простейшем случае узловые поверхности движутся как чернильные линии, переносимые целиком при безвихревом движении воображаемой жидкости. Волновая функция нуклона  $\psi$  в любой момент времени в течение медленной деформации поверхности отличается от величины  $u$ , которую она имела бы при неподвижной поверхности такой же формы, на множитель, равный (в этом при-

ближённом описании движения узлов)  $e^{\frac{iM\varphi}{\hbar}}$ , где  $\varphi$  — потенциал скорости рассматриваемого движения жидкости. Из этого следует, что кинетическая энергия нуклона больше того значения, которое она имела бы в отсутствии движения поверхности ядра, на величину, пропорциональную квадрату скорости движения этой поверхности. Коэффициент пропорциональности равен коэффициенту пропорциональности, вычисленному для классического безвихревого движения жидкости, заключённой в такую же ограничивающую поверхность.

Особый интерес среди движений поверхности представляет движение, которое оставляет неизменным её форму, т. е. чистое вращение поверхности.

В этом случае количество вещества, перемещающегося с места на место, определяется не полной массой тела, а величиной отклонения поверхности от сферической формы. Эффективный момент инерции системы оказывается значительно меньше момента, соответствующего вращению системы, как целого. Соответствующие вращательные уровни лежат значительно выше. Все эти явления, вытекающие из квантовой картины вращений ядра, указаны А. Бором<sup>14, 15</sup>, который также указал на их важность для анализа ядерных спинов и магнитных моментов.

Энергия низших вращательных уровней хотя и много больше энергии уровней, соответствующих вращению твёрдого тела, равной всего нескольким десяткам  $kэв$ , всё же остаётся меньше большинства квантов колебательной энергии. Поэтому представляется возможным следовать манере изложения, принятой в молекулярной физике, и в тех случаях, когда вращательный момент количества движения исчезает или пренебрежимо мал, применять термин «потенциальная энергетическая поверхность».

Вращательные моменты большей величины вызывают в потенциальной поверхности изменения такого же типа, какие известны в молекулярной спектроскопии<sup>16</sup>. Эти изменения потенциальной поверхности, вызванные вращением, приводят к ряду сложных и интересных эффектов. Однако в этой статье мы пренебрежём ими в сравнении с явлениями колебания поверхности и возбуждения нуклонов.

При некоторых обстоятельствах деформация поверхности приводит к такому движению узловых поверхностей, которое больше не может быть описано даже приближённо как безвихревое движение жидкости. Тогда необходимо рассмотреть вихревое движение несущей жидкости. Его влияние на волновую функцию нуклонов (рис. 10) может быть представлено квантовой аналогией вихрей, возникающих в классической жидкости. Поскольку эти эффекты проявляются лишь в одном из многих состояний нуклонов, кинетическая энергия всей системы при наличии таких деформаций не будет сильно отличаться от величины, отвечающей простой модели жидкой капли.

### 6. Квантовое описание коллективного движения

Принимая, что кинетическая энергия капельной модели проявляется в коллективном движении ядра при заданном движении его поверхности, рассмотрим, каким образом можно представить движение поверхности само по себе как часть квантово-механического описания системы  $N$  частиц, а не как нечто заданное извне.

Разве нельзя всё объяснить полным набором степеней свободы, не используя понятия движения поверхности? Как описать колебание поверхности в терминах степеней свободы, если их нет у поверхности?

Физически это означает, что флуктуации в положении поверхности и коллективный характер их воздействий на систему из  $N$  частиц является неизбежным следствием сильной связи частиц вблизи поверхности ядра. Математически это можно описать следующим образом. Пусть положение поверхности определяется внешними параметрами  $\alpha$ , тогда волновая функция системы — отвлекаясь от несущественных деталей — будет иметь вид детерминанта

$$\Psi_{\text{стационар.}} = \begin{vmatrix} u(1, x_1; \alpha) & \dots & \dots & \dots & u(1, x_N; \alpha) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ u(N, x_1; \alpha) & \dots & \dots & \dots & u(N, x_N; \alpha) \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где  $u(n, x_j; \alpha)$  представляет собой волновую функцию отдельной частицы в потенциальной яме заданной формы. При переменной деформации (вызванной внешними причинами)  $\alpha$  становится функцией времени, и для того, чтобы получить приближённое значение волновой функции системы нуклонов, детерминант справа надо умножить на

$$e^{-\frac{iM}{\hbar} [\varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_N)]}. \quad (4)$$

Здесь  $\varphi$  (выраженное в  $см^2/сек$ ) означает потенциал скорости безвихревого движения воображаемой жидкости. Обратное, если считать, что нуклеоны определяют потенциальную энергию деформации, соответствующую координате  $\alpha$ , то колебательное состояние системы — если его вообще можно считать существующим самостоятельно — будет характеризоваться величиной  $h_n(\alpha)$ , соответствующей квазигармоническому осциллятору. Было бы неправильным написать волновую функцию всей системы в виде произведения детерминанта на потенциал скорости и функцию гармонического осциллятора, так как в этом произведении оказалось бы слишком много независимых переменных для системы  $N$  частиц. Однако интегрирование этого произведения по  $\alpha$  приводит к волновой функции, зависящей только от координат частиц \*)

$$\Phi(x_1, \dots, x_N) = \int \Psi(x_1, \dots, x_N; \alpha) e^{-\frac{iM}{\hbar} \sum_j \varphi(x_j)} h_n(\alpha) d\alpha. \quad (5)$$

Тем не менее эта функция даёт описание рассматриваемого коллективного движения, имеющее физический смысл: а) Она антисимметрична. б) Она велика в окрестности классических точек поворота колебаний; смысл этого положения заключается в том, что если один нуклеон отстоит на некотором небольшом расстоянии от среднего положения поверхности, то (с известной вероятностью) и другие нуклеоны будут находиться на таком же расстоянии от неё, и наоборот, если для некоторой частицы имеется вероятность не находиться на заданном расстоянии от среднего положения поверхности, то она сопровождается возрастанием вероятности для других нуклеонов также не находиться там; эти коррелятивные вероятности

\*) Множитель  $\alpha$  в потенциале скоростей, входящий в экспоненту (рис. 7 и 8), должен быть, конечно, перед интегрированием по  $\alpha$  заменён на оператор  $\frac{\hbar}{iM\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha}$ . Наоборот, если мы используем для  $h_n(\alpha)$  его квазиклассическое приближение (приближение Джефрейса-Венцеля-Крамерса-Бриллюэна), то экспоненциальный оператор, действующий на эту колебательную функцию, даёт два дополнительных члена. В одном из этих членов множитель  $\alpha$  задан величиной  $+\{2[E - V(\alpha)]/M\alpha\}^{1/2}$  и экспоненциальная функция множится на часть  $h_n(\alpha)$ , которая представляет собой волну, бегущую направо; так же обстоит дело и в другом члене, где  $\alpha$  задано с противоположным знаком. Хотя волновая функция (5) сформулирована на базе физических представлений, можно, конечно, наоборот, рассматривать  $h_n(\alpha)$  как почти неопределённую функцию, которая должна быть задана так, чтобы превратить  $\Phi$  в «наилучшую возможную волновую функцию» в смысле вариационного принципа Ритца. Вопрос о том, как применить этот метод приближения для вывода волновой функции для  $h_n(\alpha)$ , является в принципе идентичным с вопросом формулирования метода «резонирующих групповых структур»<sup>58</sup>. В частности, совсем не является необходимым, чтобы потенциал  $V(\alpha)$  был квазиупругим или  $h_n(\alpha)$  была волновой функцией гармонического осциллятора.

являются наибольшими, когда рассматриваемые расстояния сравнимы с амплитудами соответствующих классических поверхностных колебаний. в) Два детерминанта из числа комбинирующих друг с другом при интегрировании почти ортогональны (рис. 9), если смещения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , к которым они относятся, различаются в направлении, перпендикулярном к поверхности, на величину порядка  $\frac{r_0}{N}$ , где  $N$  — число идентичных частиц, а  $4 \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3$  — объём, отнесённый к каждой из этих частиц. Физически это означает очень высокую степень корреляции между вероятностью распределения частиц и величиной «скрытой» деформационной переменной  $\alpha$ . Эта приблизительная ортогональность функций позволяет с известным основанием считать переменную  $\alpha$  почти независимой координатой.

Деформационная координата действительно может считаться переменной величиной характеризующей частицы; коллективная модель вовсе не требует безграничного увеличения общего числа степеней свободы. Как можем мы вообще оправдать подсчёт числа состояний системы, которым мы приписываем не только индексы индивидуальных состояний частиц, но также квантовые состояния поверхностных осцилляторов? Система функций является полной, когда квантовые числа осцилляторов имеют определённые значения. Если бы мы захотели просуммировать ещё по колебательным квантовым числам, то получили бы тот же самый ряд ещё несколько раз.

Решение этого парадокса заключается в том, что эти лишние суммирования не подразумеваются математически и не имеют смысла физически. Только колебания низших порядков имеют вполне определённый физический смысл. Более того, скорость обмена энергией между колебательным и нуклеонным движением зависит от выбора потенциальной поверхности и становится тем больше, чем выше возбуждение нуклеонов в рассматриваемом состоянии. Таким образом, имеется предельная величина энергии, выше которой колебания любого вида теряют смысл. Проблема коллективной модели заключается не в том, что мы имеем слишком много состояний, а в том, что их слишком мало. Непригодность модели при энергиях выше нескольких десятков *Мэв* может быть показана из физических соображений. Сильно возбуждённое ядро может развалиться на несколько частей, как это видно из наблюдений звёзд в космических лучах. Коллективная модель пригодна только при не слишком больших возбуждениях.

Обычное разложение ядерной волновой функции на индивидуальные состояния частиц в сферическом потенциальном поле оказывается весьма неприспособленным для описания коллективных колебаний и вращений. Число видов многократных возбуждений нуклеонов, необходимое для описания комбинаций колебательных и нуклеонных возбуждений, при этом было бы огромным.

### III. ДЕФОРМАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

#### 1. Определение и общая формула

Ключом к коллективному описанию является понятие потенциальной энергии деформации, под которой подразумевается сумма кинетической и потенциальной энергий отдельных нуклеонов, движущихся внутри ядерной поверхности фиксированной формы. При начальном рассмотрении энергетических поверхностей имеет смысл сделать следующие упрощения: а) Пренебречь спин-орбитальной связью. б) Считать, что внутриядерные силы имеют столь сильное насыщение, что потенциальная энергия частицы постоянна внутри ядерного вещества, а у поверхности испытывает резкий скачок. В действительности, волновая функция проникает в область отрицательных кинетических энергий на расстояние порядка  $r_0$ . При оперировании с волновыми функциями связанных нуклеонов часто бывает удобно считать скачок потенциала у граничной поверхности бесконечно большим. Тогда расчётная волновая функция нуклеонов вовсе не проникает за граничную поверхность. Этот эффект и его влияние на смещение узловых поверхностей внутри потенциальной ямы и изменение собственных значений энергии могут быть скорректированы с достаточным приближением путём соответствующего изменения величин, принятых для ядерных размеров. Тогда вклад каждой частицы в общую энергию равен соответствующему собственному значению  $\nabla^2\psi_n + \frac{2ME_n}{\hbar^2} \psi = 0$ , удовлетво-

ряющему краевым условиям, уменьшённому на постоянную величину  $B_0$  порядка  $14 \text{ Мэв}$ , представляющую собой насыщенную энергию связи на нуклеон. в) Представим уменьшение энергии связи частиц у ядерной поверхности с помощью члена (в полной нуклеонной энергии системы), пропорционального площади поверхности  $S$ . Коэффициент пропорциональности мы обозначим  $O_p$  (потенциальный) и будем полагать, что он равен не полному поверхностному натяжению <sup>17</sup> ядерного вещества  $O = O_p + O_k \sim \frac{14}{4\pi r_0^2} \text{ Мэв}$ , а только

той его части, которая связана со специфическими ядерными силами. Остальная часть  $O_k$  (кинетическая) обычного поверхностного натяжения связана с той частью полной кинетической энергии частиц, которая зависит от поверхности потенциальной ямы, а не от её объёма. Эта кинетическая часть уже включена в б). Каково бы ни было различие в зависимости кинетической энергии от величины деформации при статистическом анализе (для которого типичны константы  $O_k$ ) или при детальном анализе (посредством суммирования собственных значений  $E_n$ ), последний следует рассматривать как более определённый. Что касается зависимости специфичной нуклеонной потенциальной энергии от деформации, то было бы

несколько более точным, если это практически возможно, оценить ожидаемую величину энергии взаимодействия из волновой функции, имеющей вид детерминанта, построенного из собственных функций  $\Psi_n$ , чем воспользоваться выражением  $-AB_0 + O_p S$  для  $A$  нуклеонов, как статистическим способом оценки этого нуклеонного выражения. Различие между обоими способами оценки тем меньше, чем ближе действительные силы взаимодействия между нуклеонами к той высшей степени насыщения, которая имеется в виду в идеализированной коллективной модели. г) Электрическая энергия взаимодействия протонов также может быть оценена посредством волновой функции, построенной в виде детерминанта, но опять-таки имеет смысл приближённо представить кулоново взаимодействие через электрическую энергию однородно заряженной жидкости, заключённой в заданной границе:

$$V_e = \rho_e^2 \iint \frac{d(v_0 l)_1 d(v_0 l)_2}{2r_{12}}.$$

Можно было бы рассмотреть, хотя мы этого не будем здесь делать, уточнение этого анализа, при котором: 1) для протонов и нейтронов принимаются слегка различные границы объёмов, в которых они движутся<sup>18</sup>; 2) движение обеих частиц рассматривается в двух различных потенциальных ямах; 3) обе потенциальные ямы имеют непостоянную глубину; 4) градиент потенциала таков, что число протонов во внешней части ядра и число нейтронов во внутренней части несколько больше числа, соответствующего однородному протон-нейтронному отношению<sup>19</sup> и 5) возможны колебания нейтронов в целом по отношению к протонам, как это было указано Гольдгабером и Теллером и Иенсенем и Штейнвелделем<sup>20 \*</sup>, в особенности в связи с наблюдаемым максимумом сечения ядерной фотоабсорбции в области  $10 \div 20$  Мэв.

Таким образом, в коллективной модели рассматривается деформационная потенциальная функция  $V(\alpha_2, \alpha_3, \dots; n_1, \dots)$ , зависящая от координат  $\alpha_2, \alpha_3$  и т. д., определяющих форму потенциальной поверхности, и от квантовых чисел  $n_1$  и т. д. занятых нуклеонных состояний. Эта потенциальная функция имеет следующий вид:

$$V(\alpha, n) = -AB_0 + O_p S(\alpha) + \Sigma E_n(\alpha) + V_e(\alpha). \quad (6)$$

## 2. Плотность уровней

Представляет интерес рассмотреть зависимость деформационного потенциала от деформации при фиксированном состоянии  $n = (n_1, \dots)$  всей системы нуклеонов и от изменений квантового состояния при заданной конфигурации стенки ядра (ограничивающей поверхности

\* На наличие таких колебаний было указано ещё в 1940 г. А. Б. Мигдалом<sup>57</sup>. (Ред.)

ядра). Изменение потенциала при изменении конфигурации стенок определяет некоторую поверхность в пространстве  $(V, \alpha)$ . Можно представить, что точка, представляющая систему, движется по потенциальной поверхности, как шарик. Потенциальная поверхность обычно имеет по крайней мере один минимум — точку равновесия коллективных колебаний нуклеонной системы. Положение минимума определяет нормальную равновесную деформацию (фигуру) ядра. Первое, грубое приближение для кривизны потенциальной поверхности вблизи минимума получается при приравнивании выражения  $V(\alpha, n)$  с точностью до аддитивной постоянной и смещения начала координат  $\alpha$ -пространства выражению

$$V_{\text{жидкой капли}}(\alpha) = (O_p + O_k) S(\alpha) + V_e(\alpha).$$

При фиксированном значении деформационной координаты  $\alpha$   $V$  может принимать различные значения в зависимости от индивидуальных состояний нуклеонов. Пространственное расположение соответствующих потенциальных поверхностей качественно следует распределению уровней сферического ядра, состоящего из  $A$  частиц и имеющего то же статистическое соотношение между плотностью собственных значений полной энергии и плотностью собственных значений индивидуальных состояний нуклеонов<sup>21</sup>: а) Низший уровень всей системы находится путём заполнения индивидуальных уровней частиц (начиная снизу) до тех пор, пока не будут использованы все  $A$  частиц (кинетическая энергия для наивысшего состояния одной частицы равна  $F \sim 24 M\epsilon v$  и для всех частиц вместе  $\Sigma E_n \sim \frac{3}{5} AF$ ). б) Несколько первых возбуждённых уровней всей системы отстоят друг от друга на величину того же порядка, что величина среднего расстояния между уровнями  $\Delta E_F$  одиночной частицы с возбуждением  $F$ . в) При возбуждениях  $E_N = \Sigma E_N$ , в несколько раз превышающих  $\Delta E_F$ , но все ещё много меньших  $AF$  (при котором коллективная модель уже давно недействительна), плотность системы уровней растёт грубо экспоненциально (пренебрегая возможными степенными множителями)

с показателем степени  $\pi \sqrt{\frac{8EN}{3\Delta E_F}}$ . Следовательно, число потенциальных поверхностей ядра, так же как соответствующее число потенциальных поверхностей многоатомной молекулы, растёт всё быстрее и быстрее с возбуждением нуклеонов в одном случае и электронов в другом случае.

Плотность состояний  $\frac{dZ}{dE}$  в коллективной ядерной модели при соответствующих энергиях возрастает с энергией даже быстрее, чем плотность потенциальных поверхностей  $\frac{dZ_N}{dE}$ , так как имеется много путей, по которым общая энергия  $E = E_N + E_{\text{колеб}}$  может

быть распределена между возбуждением индивидуальных частиц и коллективными колебаниями:

$$\frac{dZ}{dE} = \int_0^E \left( \frac{dZ}{dE} \right)_{E_N} \left( \frac{dZ_{\text{колеб}}}{dE} \right)_{E-E_N} dE_N \quad (7)$$

Как показал Вергеланд<sup>22</sup>, плотность уровней поверхностных колебаний возрастает с энергией со скоростью, также определяемой экспоненциальным фактором, который зависит от энергии примерно так же, как фактор для плотности нуклеонных уровней. Однако вместо того, чтобы сравнивать оба выражения для плотности уровней, мы комбинируем их посредством указанного интегрирования. В результате показатель степени в выражении для плотности уровней возрастает примерно в  $\sqrt{2}$  раз для тех возбуждений, которые ещё не настолько велики, чтобы выйти за пределы применимости коллективной модели. Мы не будем рассматривать расщепление уровней, связанное с моментом количества движения, а также не будем проводить сравнение с экспериментальными данными, собранными в обзоре Блатта и Вейскопфа<sup>21</sup>.

### 3. «Пересечение» и «скольжение»

Интересным и важным свойством коллективной модели является связность многолистной потенциальной поверхности. Имеются две возможности: а) Потенциальные поверхности никогда не пересекаются и даже не касаются, если только рассматриваемые конфигурации граничной поверхности не имеют симметрии ни вращения, ни отражения, ни инверсии. Пусть точка, представляющая систему, отстоит далеко от тех вырожденных областей  $\alpha$ -пространства, которые соответствуют симметричным формам. Далее, пусть скачки с одной поверхности на другую исключены. Тогда связность листов такова, что не существует путей в  $\alpha$ -пространстве, даже очень извилистых, которые могли бы переместить представляющую систему точку с одного листа на другой. Поверхности можно пронумеровать единственным образом, и эта каноническая классификация  $V_1(\alpha)$ ,  $V_2(\alpha)$ , ... остаётся неизменной при любых  $\alpha$ , если только  $\alpha$  не лежит в запрещённой области «симметричных форм».

б) Если деформации обладают одной или несколькими симметриями, то разные энергетические поверхности перекрещиваются при изменении того или другого деформационного параметра. Следовательно, существуют такие  $\alpha$ , для которых две последовательные поверхности  $V_k(\alpha)$  и  $V_{k+1}(\alpha)$  касаются друг друга. При соответствующих симметриях возможна встреча более чем двух поверхностей и точка соприкосновения имеет более высокий порядок.

Если представляющая систему точка свободна в выборе значений  $\alpha$ , то при соответствующем выборе пути она может подняться

вверх от поверхности к поверхности, скользя плавно от  $V_k$  к  $V_{k+1}$  в одной точке  $\alpha$ -пространства и от  $V_{k+1}$  к  $V_{k+2}$  в другой точке. Этот фундаментальный процесс, который мы будем называть «скольжением», имеет аналог в теории многоатомных молекул, известный под названием «нерационного перехода»<sup>23</sup>. Для описания формы потенциальной поверхности вблизи точки перекрещивания мы будем применять также термин — «воронка».

Для количественного описания многолистной потенциальной поверхности требуется: а) приписать соответствующий ряд индексов каждой точке пересечения, указывающий число встречающихся поверхностей и наименьшую величину отклонения  $\delta\alpha$  от величины, отвечающей точке пересечения, при которой вырождение исчезает; б) определить величину коэффициентов в первых членах разложения энергии вокруг этой точки; в) оценить частотное распределение переходных точек в  $\alpha$ -пространстве для типичной потенциальной поверхности; г) определить порядок высоты или глубины вершины: воронки (в энергетической шкале) по отношению к окружающей потенциальной поверхности; д) определить порядок величины кривизны данной поверхности (в целом), отвлекаясь от воронок; эта величина описывается коэффициентами кривизны по различным осям  $\alpha$ -пространства.

Для того чтобы обсудить детально эти пункты, необходимо сделать несколько больше в этом направлении, чем было сделано до сих пор. Тем не менее, рассмотрение этого предмета с различных сторон (рис. 10—25) может дать некоторое представление о положении дела. Следует упомянуть, что в большинстве идеализированных случаев, которые мы рассматриваем, необходимо обратить внимание на поведение энергии индивидуальной частицы  $E_n(\alpha)$ , а не на поведение общей потенциальной колебательной энергии  $V_k(\alpha)$  [уравнение (6)]. Разумеется, каждое пересечение поверхностей вызывает пересечение поверхностей  $E_n(\alpha)$ , так что связь между этими двумя типами поверхностей не является отдаленной.

#### 4. Обзор поведения энергетических уровней

На рис. 10 изображены два энергетических уровня частицы, находящейся в прямоугольной потенциальной яме. Потенциальная яма имеет высокую степень симметрии, которая нарушена лишь небольшой иррегулярностью стенок ямы. Этой иррегулярности достаточно, чтобы не допустить пересечения энергетических поверхностей, которое иначе имело бы место.

В рассматриваемом случае функция имеет определенное число узловых поверхностей, нормальных к каждой координатной поверхности, — число, которое не меняется в течение всей деформации. Энергия состояния убывает или возрастает в соответствии с тем, параллельно или перпендикулярно направлению распространения главной

части волны к направлению растяжения, как это следует ожидать из аналогичной классической задачи. Интересно провести сравнение с одномерным случаем, в котором растяжение в одном направлении понижает все уровни энергии; два уровня никогда не пересекаются. Таков характер поведения уровней и в трёхмерной задаче в отсутствие симметрии.

Рис. 11 и 12 связывают однопуклонные кривые  $E_n(\alpha)$  с общими потенциальными кривыми  $V_k(\alpha)$ . Необходимо, однако, указать, что на рис. 12 представлено поперечное сечение энергетических поверхностей вдоль специально выбранной линии в пространстве деформаций, а именно выбран срез, который пересекает все поверхности так, чтобы показать их пересечения. Если бы на рассматриваемые деформации была бы наложена некоторая иррегулярность, то каждое пересечение было бы заменено кривой, аналогичной кривой рис. 10.

Примечательна качественная связь между «зазубренной» потенциальной кривой и гладкой кривой, вытекающей из статистической концепции кинетического поверхностного натяжения. В этом простом примере в энергию поверхностного натяжения не включены потенциальная энергия и электростатическая энергия. Можно видеть, что статистическая концепция постоянного поверхностного натяжения ограничена в точности.

Легко оценить частоту пересечения уровней энергии индивидуальных частиц. Растяжение системы в одном направлении на относительную величину  $\alpha$  повышает или понижает уровни энергии  $F$  на величину порядка  $F\alpha$ , в соответствии с тем, является ли вектор распространения вначале перпендикулярным или параллельным к направлению растяжения. Среднее расстояние между уровнями частицы, не имеющей спина, вблизи  $\frac{A}{4}$ -го уровня — этот уровень имеет энергию  $F$  — порядка  $\frac{8F}{3A}$  (рис. 11). Следовательно, увеличение  $\alpha$  на величину порядка  $\frac{1}{A}$  будет в среднем достаточным для того, чтобы заданный уровень пересёкся ещё один раз с уровнем, расположенным вначале над ним или под ним, если только симметрия поверхности позволяет пересечение.

Многое можно сказать относительно уровней энергии одиночной частицы, находящейся внутри эллипсоидальной ямы. Неравенство трёх полуосей (рис. 13) снимает симметрию вращения и оставляет только симметрию отражения и инверсии. Рис. 14—18 иллюстрируют расщепление уровней, вызванное малым эллипсоидальным отклонением от сферичности. Большие отклонения, приводящие сферу к делению, рассмотрены на рис. 19—22; при этом предполагается, что стенка ямы аксиально симметрична, и мы имеем дело с нетипичным случаем многих пересечений.

Связь между уровнями индивидуальной частицы и уровнями системы частиц освещена далее на рис. 23. Эта диаграмма показывает, как квадрупольные силы в почти сферических ядрах возрастают до максимума, когда число нуклеонов таково, что заполнена почти половина оболочки. Приведённая диаграмма становится непригодной при существенных отклонениях от симметрии, так как тогда уровни меняют свой характер, как это видно из рис. 10 и рис. 19—22. Дальнейшие сведения, касающиеся расщепления уровней одиночной частицы и поведения в целом уровней системы частиц, даны на рис. 24—25. Иррегулярности в кривой полной потенциальной энергии системы многих частиц вряд ли будут по порядку величины больше выступов в потенциальной кривой, соответствующей высшим состояниям одиночной частицы. Возрастание низшего заполненного уровня в виде «перевернутой воронки» и падение следующего более высокого уровня в виде «прямой воронки» представляют собой возмущения, которые, будучи сложены вместе, значительной мере исключают друг друга.

#### IV. КВАДРУПОЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ

На рис. 26 рассмотрена ожидаемая качественная зависимость квадрупольных моментов от степени заполнения оболочек; при этом предполагается, что деформации не так велики, чтобы привести систему к «воронке».

На рис. 27 выясняются возможные последствия существования двух хорошо разграниченных минимумов в потенциальной поверхности основного состояния системы при тех же ограничивающих условиях относительно величины деформаций. Так как для прохождения тяжёлого ядра через высокий барьер такого рода, повидному, требуется значительно больший промежуток времени в сравнении с характерным ядерным временем, то с большей лёгкостью может иметь место обход барьера в  $\alpha$ - $\gamma$  плоскости (рис. 28) через последовательность неравносных эллипсоидов. Наши знания относительно потенциальных поверхностей, отвечающих деформациям ядра, ещё слишком скудны, чтобы провести достаточно хорошо обоснованное обсуждение энергии и продолжительности жизни таких деформационно-изомерных состояний.

На рис. 29 собраны экспериментальные данные относительно периодичности ядерных квадрупольных моментов. Сейчас ещё рано подробно обсуждать связь экспериментальных данных с рассматриваемой моделью, не имея более подробных сведений о потенциальных поверхностях (см. статью Форда<sup>58</sup> на эту тему).

Точные измерения величины квадрупольных моментов имеют существенное значение для интерпретации явлений  $\alpha$ -распада, как указано на рис. 30 и 31. Квадрупольные моменты должны вызвать также размытие минимумов в ядерном дифракционном рассеивании

(рис. 32) — эффект, который, повидимому, можно будет наблюдать, если падающий пучок будет достаточно ограничен по разбросу энергии и направления и будет иметь достаточно малую длину волны. Асимметрия в форме ядра не является, как видно, изолированным явлением, а, напротив, тесно связана с важными принципиальными вопросами ядерной физики. Повидимому, для развития ядерной физики важно изучить квадрупольные моменты значительно большего числа ядер, в особенности тяжёлых ядер и  $\alpha$ -излучателей. В этой связи дифракционное рассеяние, аномалии в периодах  $\alpha$ -распада (рис. 31) и в изотопических смещениях<sup>24</sup> и расщепление уровней  $\mu$ -мезонного  $K$ -излучения<sup>25</sup> представляют собой дополнительные средства для увеличения экспериментальных данных.

*(Окончание в следующем выпуске)*

#### ДОПОЛНЕНИЕ. РИСУНКИ И КОММЕНТАРИИ

##### Рисунок 1

Показаны три первых порядка малых колебаний жидкости, движущейся под влиянием сил поверхностного натяжения. Добавление равномерного объёмного электрического заряда, присущего модели жидкой

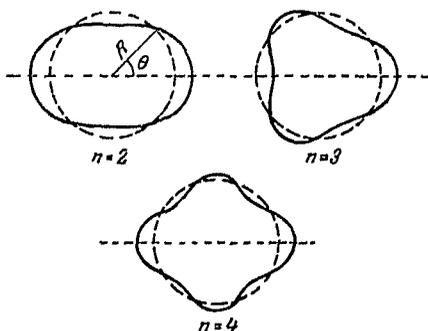


Рис. 1. Независимые типы малых колебаний жидкой капли.

капли, не влияет на форму ортогональных колебаний, но несколько изменяет их частоту, так как уменьшение кулоновской энергии частично компенсирует увеличение поверхностной энергии при отклонении фигуры капли от равновесной сферической фигуры.

Чтобы оценить частоты этих колебаний, например, для модели ядра урана, заметим, что эти колебания представлены (за исключением члена

с индексом  $l=1$ , отвечающего лишь смещению центра масс) в выражении

$$R(\mu) = a_0 \left[ 1 + \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i(\mu) \right]$$

для расстояния  $R$  от центра масс до поверхности аксиально-симметричного ядра членами, пропорциональными полиномам Лежандра от  $\mu = \cos \theta$  ( $a_0$  — выбрано для нормировки объёма). Найдя коэффициенты в квадратичной форме кинетической и потенциальной энергии малых колебаний, найдём частоту колебания порядка  $n$  в виде:

$$\nu_n = A^{-1/2} \left[ \frac{O}{3M_p r_0^2} n(n-1) \frac{(2n+1)(n+2) - 20x}{2n+1} \right]^{1/2},$$

где  $M_p$  — масса протона, а остальные обозначения даны в подписи к рис. 2. Квантование поверхностных колебаний даёт для нулевой энергии  $\langle E_n \rangle_{\text{нулев}} = \frac{1}{2} \hbar \nu$  и для средней квадратичной величины нулевой амплитуды

$$\langle \alpha_n^2 \rangle_{\text{нулев}} = A^{-1/2} \left\{ \frac{\hbar^2}{12 M_p r_0^2 (4\pi r_0^2 O)} \times \right. \\ \left. \times \frac{n(2n+1)^2}{(n-1)[(2n+1)(n+2) - 20x]} \right\}^{1/2}.$$

Вычисляя эти величины для колебаний первых трёх порядков, получим:

$n$	$\nu_n$ в $\text{сек}^{-1}$	$\langle E_n \rangle_{\text{нулев}}$ в $M\text{эв}$	$\langle \alpha_n^2 \rangle_{\text{нулев}}^{1/2}$
2	$2,15 \cdot 10^{20}$	0,45	0,064
3	$6,21 \cdot 10^{20}$	1,29	0,054
4	$10,78 \cdot 10^{20}$	2,23	0,053

Необходимо отметить, что приведённые в таблице средние квадратичные величины  $\alpha_n$  примерно в 5—6 раз меньше величин, соответствующих ортогональным колебаниям, представленным на рисунке. Последние вычислены в предположении  $\alpha_n = 0,3$  при остальных  $\alpha_l = 0$ .

Бесконечная последовательность возможных колебаний жидкой капли должна быть ограничена для атомного ядра числом  $n$ , лежащим между 6 и 10, ввиду конечного числа нуклеонов, входящих в ядро. Определив размытие ядерной поверхности коллективной модели ядра в основном состоянии формулой

$$\alpha_{\text{эфф}} = \left[ \sum_{l=2}^N \langle \alpha_n^2 \rangle \right]^{1/2},$$

получим общую неопределённость в положении поверхности порядка 15% ядерного радиуса.

## Рисунок 2

Приведённые критические фигуры неустойчивого равновесия зависят (в приближении простой модели жидкой капли) только от отношения квадрата заряда к первой степени массового числа или, в более удобной форме, от безразмерного параметра

$$x = \frac{(\text{заряд})^2}{10 \times \text{объём} \times \text{поверхностное натяжение}} = \frac{Z^2 e^2}{10A \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3 O} = \frac{(Z^2/A)}{(Z^2/A)_{\text{пред}}},$$

где

$$(Z^2/A)_{\text{пред}} = 2 \frac{4\pi r_0^2 O}{\frac{5}{3} \frac{e^2}{r_0}} \cong 47,8.$$

Для воображаемого ядра «космий», находящегося далеко за известным пределом стабильности,  $x = 1$  и ядро будет неустойчивым в отношении деления даже при сферической фигуре. При  $x$ , близких к единице, критические фигуры описываются уравнением<sup>4</sup>

$$R = R_0 \sum a_n P_n(\cos \theta),$$

где  $R_0$  — первоначальный радиус,  $a_0 = 1$ ,  $a_2 = \frac{7}{3} (1 - x)$ , остальные коэффициенты  $a$  ничтожно малы.

Для четырёх значений  $x$  критические фигуры вычислены Франклем и Метрополисом<sup>27</sup>. Последовательность фигур, изображённая на рисунке,

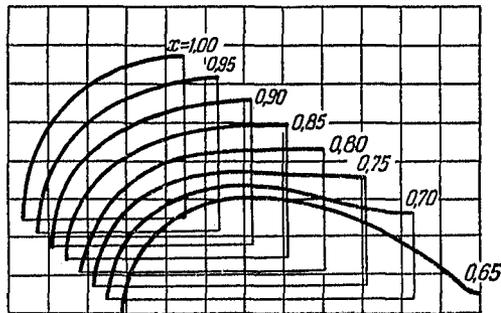


Рис. 2. Критические фигуры неустойчивого равновесия.

найдена путём интерполяции и экстраполяции их данных. Каждая фигура является равновесной для соответствующего ядра. Можно рассматривать также эту последовательность фигур, как последовательность изменений фигуры заданного ядра, т. е. ядра с фиксированным  $x$ , в процессе возможных деформаций. В этом смысле изображённые фигуры не должны рассматриваться как равновесные фигуры. С этой точки зрения удобно характеризовать каждую индивидуальную фигуру величиной параметра

$y = 1 - x$ . Тогда  $y$  описывает форму фигуры, а  $x$  — отношение квадрата заряда к массе для той капли, которая имеет заданную критическую фигуру; мы можем, следовательно, говорить о деформации  $y$  для систем с различным  $x$ .

Кривые вычислены по интерполяционным и экстраполяционным формулам:

$$a_0 = 1 - y^2 \left[ 1,06 + \frac{9,76 \cdot 10^{-4}}{(0,49 - y)^4} \right],$$

$$a_2 = y \left[ 2,3 + \frac{5,42 \cdot 10^{-4}}{(0,49 - y)^4} \right],$$

$$a_4 = y^2 \left\{ 1,6 + y \left[ 3,0 + \frac{2,84 \cdot 10^{-3}}{(0,49 - y)^4} \right] \right\},$$

$$a_6 = - \frac{2,36 \cdot 10^{-5}}{(0,49 - y)^4},$$

$$a_8 = - \frac{4,72 \cdot 10^{-5}}{(0,49 - y)^4},$$

остальные  $a$  равны нулю. Возможно, что при значениях  $x$ , близких к 0,65, симметричная равновесная фигура не соответствует самому низкому перевалу в многомерной зависимости энергии от формы. Может быть, что две асимметричные фигуры, являющиеся зеркальными изображениями друг друга, отвечают более низким значениям. Возможно также, что сжимаемость ядра и перераспределение нейтронов и протонов между периферийной и внутренней частью ядра могут изменить как сами фигуры, так и величины  $x$ , отвечающие преимущественному образованию асимметричных фигур. Эти эффекты оказывают тем меньшее влияние, чем ближе  $y$  к нулю, если только полагать  $y = 1 - x^*$ . Здесь  $x^* = x + z$ , где  $x$  имеет определенное выше значение и  $z$  — мера сжимаемости и эффекта перераспределения, впервые введенная Финбергом<sup>61</sup> и Святецким<sup>71</sup> и равная для ядер в области урана по порядку величины 0,04 (с точностью до множителя порядка двух). Введение величины  $z$  требует изменения величины  $(Z^2/A)_{\text{пред}} = 47,8$  с тем, чтобы высота барьера деления осталась неизменной.

### Рисунок 3

Каждая кривая этого семейства соответствует отношению энергии деформации к полной поверхностной энергии сферы для фигур деформации рис. 2. Различные кривые отвечают ядрам с различными  $x$ . Необходимо отметить, что в общей формуле

$$\xi(x, y) = 2,178(1 - x)y^2 - 4,09(1 - 0,645x)y^3 + \\ + 18,64(1 - 0,894x)y^4 - 13,33y^5$$

величина  $y$ , соответствующая максимальному значению  $\xi$  при заданном  $x$ , отвечает критической фигуре неустойчивого равновесия данного ядра. Следовательно, подставляя  $y = 1 - x$ , мы получим выражение для энергии порога деления в зависимости от  $x$

$$\xi_{\text{макс}} = 0,728(1 - x)^3 - 0,661(1 - x)^4 + 3,330(1 - x)^5.$$

Рассмотрение поверхностей деформационного потенциала (см. рис. 4) показывает, что для последовательности фигур, определённых величинами  $y$ ,

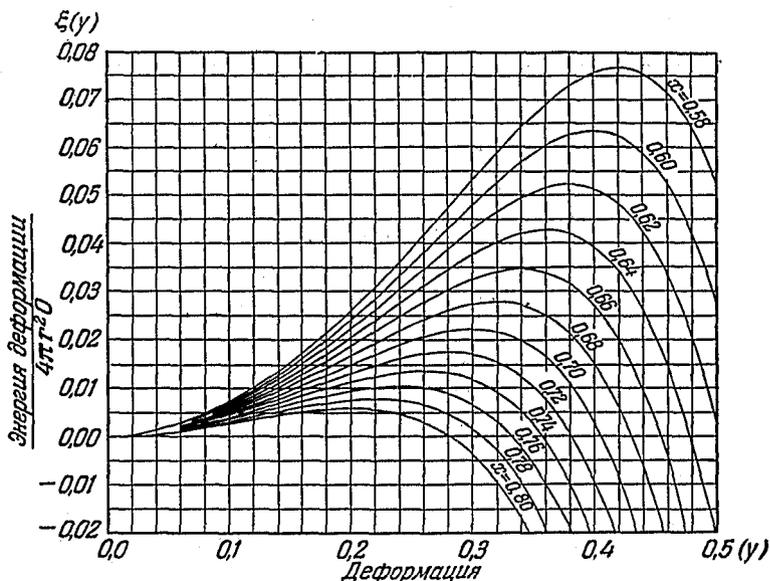


Рис. 3. Зависимость энергии от деформации.

кривые  $\xi(x, y)$  являются аппроксимацией кратчайшего пути к делению вдоль «долины» на потенциальной поверхности, отвечающей заданному  $x$ .

#### Рисунок 4

Последовательность фигур, приводящих ядро урана к делению, показана в связи с потенциальными поверхностями, отвечающими деформациям в плоскости  $\alpha_2$ — $\alpha_4$  (см. рис. 1) (заимствовано из статьи Франкля и Метрополиса<sup>27</sup>). Последовательность событий, приводящих к делению, описывается следующим образом. При захвате нейтрона ядро урана превращается в возбуждённое промежуточное ядро, в котором энергия возбуждения распределена между внутренним движением индивидуальных нуклеонов и коллективным движением всего ядра. Типичные компоненты второго типа движения представлены на рис. 1. Коллективное движение может быть представлено как движение представляющей систему точки по энергетической гиперповерхности. Показанная на рисунке поверхность представляет собой проекцию гиперповерхности на плоскость  $\alpha_2$ — $\alpha_4$ . Представляющая система точка описывает фигуры Лиссажу с амплитудой, меняющейся по мере того, как энергия ядра переходит от одной формы возбуждения (внутренней) к другой (коллективной).

Рассмотрим случай, в котором общее возбуждение лишь немного превышает высоту перевала на потенциальной поверхности, соответствующего порогу деления. Такой случай имеет место при захвате ураном теплового нейтрона. Тогда деление не может произойти до тех пор, пока 1) почти всё возбуждение сосредоточится в коллективном движении, 2) фазы и амплитуды различных типов коллективного движения сложатся так, чтобы провести точку, представляющую систему, вдоль «долины»

потенциальной поверхности к перевалу. Ясно, что благодаря большому числу степеней свободы внутреннего и коллективного движений системы пройдёт много «ядерных эпох», прежде чем захват медленного нейтрона приведёт, в среднем, к делению. Такие же рассуждения относятся к конкурирующему процессу испускания нейтрона или  $\gamma$ -кванта.

Если, однако, представляющая систему точка пройдёт перевал, то увеличение поверхностной энергии при дальнейшем удлинении станет

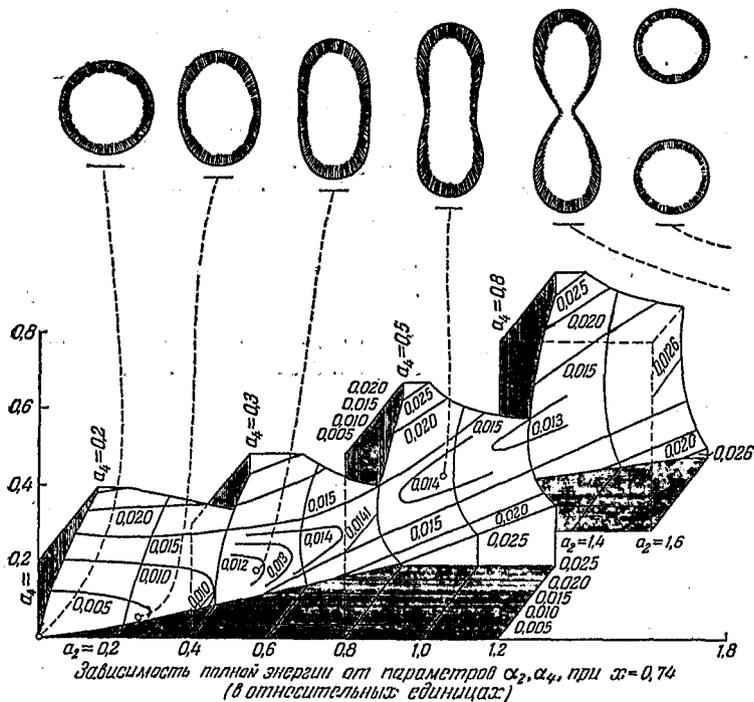


Рис. 4. Последовательность событий при делении.

больше компенсирующего снижения кулоновской энергии и движение самоускорится до тех пор, пока не произойдёт деление. Результирующие осколки будут сильно возбуждены как внутренними, так и коллективными формами возбуждения и испустят нейтроны и  $\gamma$ -кванты.

Рисунок 5

Ни модель жидкой капли, ни модель независимых частиц не могут объяснить величины квадрупольных моментов или асимметрию в распределении электрического заряда типичных ядер. Отрицательный квадрупольный момент возникает в модели жидкой капли, если предположить, что равномерно заряженное ядро целиком вращается с моментом количества движения  $l$ . Для ядра размера урана, минимизируя сумму энергии деформации (рис. 3) и энергии вращения, найдём  $T^2$ :

$$\frac{Q}{eR^2} = \frac{6\alpha Z}{5} = -\frac{l^2 2,8 Z A^{-1/3}}{1 - \alpha}$$

Поскольку спин ядра редко превышает 4, то величина квадрупольного момента в этой модели должна была бы резко зависеть от величины орбитального момента количества движения, который согласно опытным данным меняется в пределах от 1 до 10 единиц. Кроме того, в модели жидкой капли трудно себе представить механизм, приводящий к удлинению капли, т. е. к положительному квадрупольному моменту.

Модель независимых частиц также не может оправдать величины наблюдаемых квадрупольных моментов. Заштрихованная кольцеобразная область является областью большой амплитуды волновой функции одиночного протона, избыточного по отношению к конфигурации замкнутых



Рис. 5. Квадрупольные моменты и ядерные модели.

оболочек (сферической симметрии). Соответствующий ему квадрупольный момент в типичных случаях в 5—15 раз меньше наблюдаемого. Из волновой функции  $\Psi_{1n}(r)$  частицы в сферической потенциальной яме квадрупольный момент можно вычислить, предполагая, что плотность заряда, зависящая от рассматриваемого протона, пропорциональна  $|\Psi_{1n}(r)|^2$ . Принимая полную величину определённого таким образом заряда равной единице, мы найдём, что наибольшая величина относительного квадрупольного момента  $\left(\frac{Q}{eR^2}\right)$  даже для больших моментов количества движения и любых квантовых чисел  $n$  равна 0,5, а ожидаемая в среднем величина равна 0,2. Таким образом, если бы даже влияния 4 или 5 нуклеонов просто складывались, то и в этом случае нельзя было бы объяснить наблюдаемые величины.

Однако Рейнвотер<sup>11</sup> указал, что давление нуклеона на поверхность ядра действует против сил поверхностного натяжения и может вызвать заметную деформацию. Результирующее большое смещение заряда приводит к увеличению квадрупольного момента на порядок по отношению к величине, обязанной непосредственно лишней частице. Таким образом, изучение квадрупольных моментов даёт нам первое убедительное доказательство возможности взаимодействия нуклеонов с поверхностью, что является основным предположением коллективной модели ядра.

Рисунок 6

На верхнем рисунке представлена зависимость энергии отдельной частицы от статической деформации. Если момент количества движения параллелен оси, то волны распространяются азимутально и длина волны возрастает при сплюсненной конфигурации.

На нижнем рисунке представлена зависимость суммы энергии периферийной частицы и энергии оставшихся заполненных оболочек ядра от

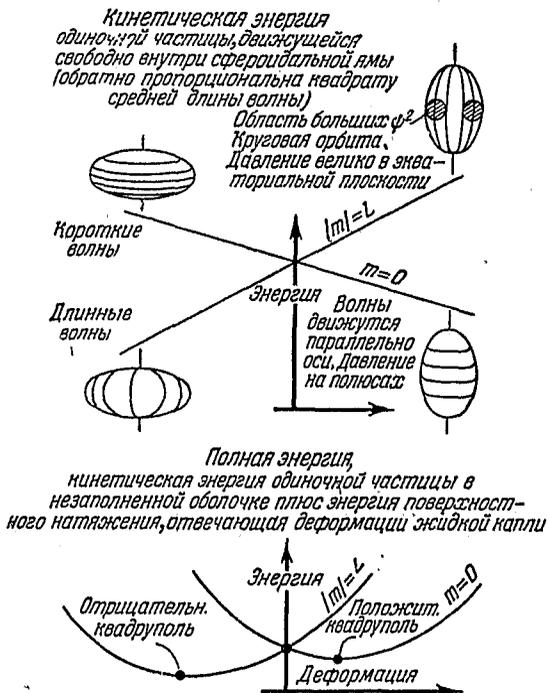


Рис. 6. Деформации, вызванные избыточным нейтроном.

деформации; изображенные параболы рассчитаны, исходя из следующей идеализации: (энергия) =  $2/5 \times (\text{радиус})^2 \times (\text{поверхностное натяжение}) \times (\text{деформация}, \phi)^2$ . Знак результирующего квадрупольного момента меняется в зависимости от величины проекции момента количества движения на ось симметрии.

Рисунок 7

В случае неподвижной границы волновая функция равна

$$\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin \frac{n\pi x}{L} \exp\left(-i \int_0^t E \frac{dt}{\hbar}\right),$$

где

$$E = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ML^2} = \text{const.}$$

В случае медленно движущейся стенки в это выражение вносится предполагаемая известной зависимость  $L$  от  $t$  и множитель  $\exp\left(-\frac{Mv(x,t)}{h}\right)$ . Здесь  $\varphi(x,t)$  — классический потенциал скорости; его производная  $v(x,t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$  равна скорости, с которой классический газ (скорость звука

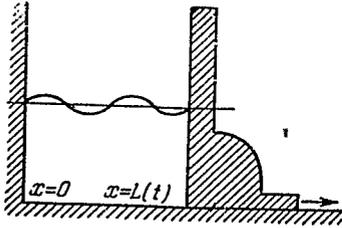


Рис. 7. Влияние движения границы на состояние частицы в одномерном случае.

бесконечно велика) отвечает на движение границы. Благодаря члену, содержащему потенциал скорости, волновая функция удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \hbar \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) = 0.$$

Оно описывает движение вещества направо при движении границы в этом же направлении. Результирующая волновая функция удовлетворяет свободному от потенциала скорости волновому уравнению в пространстве между ограничивающими стенками, если расстояние  $L$  меняется линейно со временем. В случае

более общей зависимости  $L$  от времени волновая функция удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{Mx^2 \ddot{L}}{2L} \psi.$$

Здесь дополнительный член справа пренебрежимо мал при малых ускорениях ограничивающей стенки. В этом приближении эффект движения стенки на состояние частицы полностью описывается множителем, содержащим классический потенциал скорости.

Рисунок 8

Мы докажем здесь, что энергия нескольких одинаковых частиц, заключённых внутри медленно меняющейся поверхности, ограничивающей

Деформация смещает узлы.

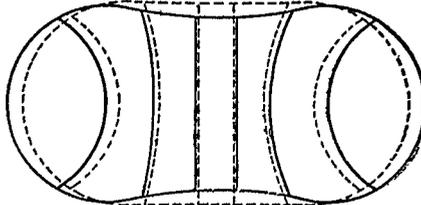


Рис. 8. Влияние движения границы на состояние частицы в трёхмерном случае.

постоянный объём, в каждый данный момент времени равна энергии частиц при неподвижной поверхности плюс кинетическая энергия несжимаемой жидкости той же массы  $M$ , приведённой в безвихревое движение той же ограничивающей поверхностью. Пусть  $x$  означает три пространственные координаты одной частицы,  $\alpha$  определяет конфигурацию границы,

$f(x, \alpha)$  и  $E(\alpha)$  — волновую функцию и энергию при неподвижной границе и  $\varphi(x, \alpha, \dot{\alpha})$  — потенциал скорости классического движения жидкости;

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \frac{p}{\rho} = 0; \quad \nabla^2 \varphi = 0;$$

—  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  означает нормальную скорость границы. Представим волновую функцию частицы в приближённом виде:

$$\psi(x, t) = f(x, \alpha(t)) \exp \left[ -i \int \frac{E(\alpha(t)) dt}{\hbar} - \frac{iM\varphi}{\hbar} \right] = f(x, \alpha(t)) \exp[*].$$

Подставляя эту функцию в уравнение Шредингера, получим:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \exp[*] \left[ i\hbar \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} + E + M \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] f.$$

Предположим теперь, что в первом приближении узлы и величины  $f$  переносятся с классической скоростью жидкости так, что:

$$\dot{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = (-1)^2 \nabla \varphi \cdot \nabla f.$$

Тогда

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \exp[*] \left[ i\hbar \nabla \varphi \cdot \nabla f - \frac{\hbar^2}{2M} (\nabla^2 f) + \frac{Mf}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{Mp}{\rho} f \right] = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi + \frac{Mp}{\rho} \psi. \end{aligned}$$

Мы видим, что рассматриваемая волновая функция удовлетворяет приближённо уравнению Шредингера в членах, зависящих от скорости; в нём можно пренебречь только членами, содержащими ускорение в форме (давление/плотность). Кинетическая энергия состояния равна:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2M} \int (\nabla \psi^*) (\nabla \psi) d\Omega = \\ = \frac{\hbar^2}{2M} \int (\nabla f^*) (\nabla f) d\Omega + \frac{i\hbar}{2} \int (f^* \nabla f - f \nabla f^*) \nabla \varphi d\Omega + \frac{M}{2} \int (\nabla \varphi)^2 f^* f d\Omega, \end{aligned}$$

где  $\Omega$  — объём.

Можно показать, что последний член в этом выражении (суммированный по всем занятым состояниям) переходит при больших квантовых числах в кинетическую энергию классической жидкости. Первый член представляет энергию частиц в статической потенциальной яме. Второй член представляет взаимодействие непарных частиц с вращением границы.

### Рисунок 9

Общие принципы иллюстрированы на примере одномерной потенциальной ямы, простирающейся от  $x=0$  до  $x=a=R_0(1+\alpha)$  или до  $x=b=R_0(1+\alpha)(1+\epsilon)$ , в соответствии с тем, имеем ли мы дело с одним или другим значением  $\alpha$ . Детерминантная волновая функция  $\Phi$  системы  $N$  частиц составляется из волновых функций индивидуальных частиц  $u(n, x) = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin \frac{n\pi x}{a}$ . Матричный элемент волновых функций одного,

и того же нуклеонного состояния, но при слегка различных  $\alpha$ , равен:

$$\sum_{\substack{\text{перестановки} \\ 1, 2, \dots, N \\ \alpha, \beta, \dots, \nu}} (-1)^P u(n_1, x, a) u(n_2, x, b) dx \times \dots \times \\ \times \int u(n_N, x, a) u(n_\nu, x, b) dx,$$

где подразумевается суммирование по всем перестановкам  $P$  индексов  $n_1, \dots, n_N$  занятых состояний. Если индексы в одном из интегралов одинаковы, то приближённое значение интеграла равно

$$1 - \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{8} + \frac{n^2 \pi^2}{6} \right],$$

а если индексы различны, то это значение равно

$$\varepsilon (-1)^{n+m} \frac{2mn}{m^2 - n^2}.$$

Представляя множители  $(1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2) \dots (1 - \varepsilon_N)$  в виде экспоненты  $\exp(-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \dots - \varepsilon_N)$ , получим для величины скалярного произведения  $\int \dots \int \Psi_a \Psi_b d\Omega$  приближённую формулу

$$\exp \left[ -\varepsilon^2 \left\{ \frac{N}{4} + \frac{41}{288} + \frac{(6N^2 + 6N + 1) \ln 3,562N}{12} \right\} \right],$$

из которой следует результат, приведённый в тексте. Таким образом, волновые функции одномерной системы приблизительно ортогональны при

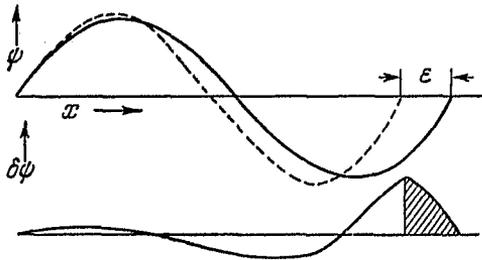


Рис. 9. Приблизительная ортогональность нуклеонных волновых функций уравнения (3) в случае двух слегка различных значений деформационного параметра  $\alpha$ .

относительном растяжении  $\varepsilon \sim N^{-1} (\ln 3,562N)^{-1/2}$  или относительном изменении объёма  $(\ln 3,562N)^{-1/2}$  ячейки, занятой типичной частицей. При обобщении на три измерения мы предполагаем, что волновые функции системы нуклеонов становятся практически ортогональными, как только объём, не являющийся общим для обеих конфигураций, превысит некоторую малую долю одной ячейки.

Рисунок 10

Рассмотрим смешение двух состояний частицы в потенциальной яме, имеющей вид прямоугольного ящика с малой иррегулярностью при условии, что два измерения ящика меняются так, чтобы его объем оставался неизменным. На рисунке показаны узловые линии общей волновой функции при последовательных ступенях деформации. В отсутствие иррегулярности границы два уровня перекрещиваются без взаимодействия в процессе деформации. Благодаря имеющейся иррегулярности волновые функ-

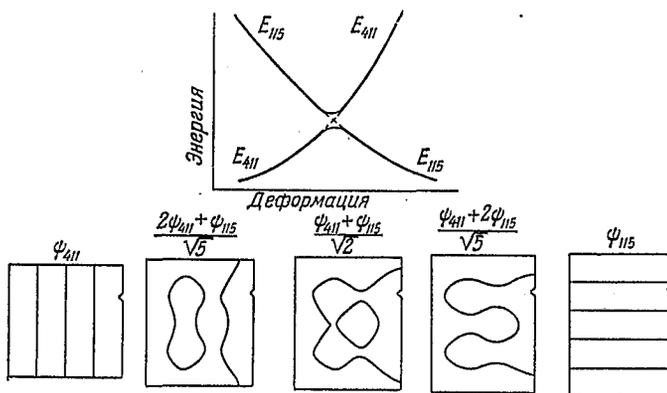


Рис. 10. Влияние малой асимметрии на смешение двух состояний, ортогональных в отсутствии асимметрии.

ции смешиваются в сравнимой пропорции только вблизи точки перекрещивания. Узлы найдены путём решения уравнения  $R \sin 4x \cdot \sin z + \sin x \times \times \sin 5z = 0$ , где  $x$  и  $z$  — расстояния от нижнего угла прямоугольника, нормированные так, что  $x = \pi$  и  $z = \pi$  для противоположного по диагонали угла.

Рисунок 11

Мы «выведем» здесь асимптотическую формулу для числа решений уравнения  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ ,  $\psi_{\text{пов}} = 0$  с волновыми числами в интервале от  $k$  до  $k + dk$ :

$$dN = \frac{Vk^2}{2\pi^2} dk - \frac{Sk}{8\pi} dk + \frac{\int \kappa dS}{8\pi^2} dk.$$

Здесь  $V$  — объём рассматриваемой области,  $S$  — её поверхность и  $\kappa$  — полная локальная кривизна поверхности. Рассмотрим случай прямоугольного параллелепипеда с размерами  $a, b, c$ . Каждому собственному решению  $\sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z$  соответствует точка в  $k$ -пространстве с координатами  $k_x = \frac{l\pi}{a}$ ,  $k_y = \frac{m\pi}{b}$ ,  $k_z = \frac{n\pi}{c}$ , с которой связан объём элементарной ячейки  $\frac{\pi}{a} \cdot \frac{\pi}{b} \cdot \frac{\pi}{c}$ . Когда состояния заполнены до заданного волнового числа  $k_{\text{макс}}$ , то элементарные ячейки заполняют октант сферы (левый рисунок), кроме небольших областей вблизи координатных поверхностей. Исключённые области показаны более детально на правом рисунке (в случае, когда рассматривается число состояний между  $k$  и  $k + dk$ ). Их

объём равен объёму оболочки минус поправка на объём кольцеобразных полосок, плюс поправка на объём уголков, вычитаемый дважды при подсчёте объёма колец:

$$\frac{4\pi}{8} k^2 dk - \frac{\pi}{2} k dk \left[ \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{2b} + \frac{\pi}{2c} \right] + dk \left[ \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{\pi}{2b} + \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{\pi}{2c} + \frac{\pi}{2b} \cdot \frac{\pi}{2c} \right].$$

Разделив на объём элементарной ячейки, получим число состояний:

$$dN \cong abc k^2 \frac{dk}{2\pi^2} - (2ab + 2bc + 2ac) \frac{k dk}{8\pi} + (4a + 4b + 4c) \frac{dk}{16\pi}.$$

Обобщение этого выражения на полость не слишком иррегулярной формы даёт приведённую выше формулу. Тогда число состояний с волновым числом менее  $k$  равно:

$$N \cong \frac{Vk^3}{6\pi^2} - \frac{Sk^2}{16\pi} + \frac{Lk}{8\pi^2},$$

а их полная кинетическая энергия  $E$  задаётся выражением

$$\frac{2ME}{\hbar^2} = \frac{V \cdot \frac{1}{2} k^5}{10\pi^2} - \frac{Sk^4}{32\pi} + \frac{Lk^3}{24\pi^2} = \frac{V}{10\pi^2} \left( \frac{6\pi^2 N}{V} \right)^{5/3} + \frac{S}{32\pi} \left( \frac{6\pi^2 N}{V} \right)^{4/3} + \frac{6\pi^2 N}{V} \left( \frac{S^2}{128V} - \frac{L}{12\pi^2} \right).$$

Пропорциональность части этой энергии величине поверхности отвечает вкладу в поверхностное натяжение кинетического происхождения

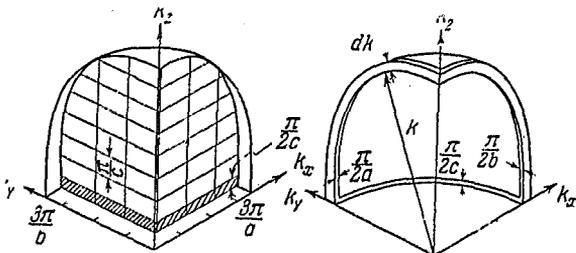


Рис. 11. Асимптотическая частота собственных значений.

ния<sup>73,61</sup>. Для ядер, имеющих примерно одинаковое число нейтронов и протонов и объём на частицу  $\frac{4}{3} \pi r_0^3$ , соответствующий член в поверхностном натяжении равен

$$O_{\text{кин}} = \frac{4\hbar^2}{64\pi M} \left( \frac{9\pi}{8r_0^3} \right)^{1/3},$$

т. е.

$$4\pi r_0^2 O_{\text{кин}} = 28 \text{ Мэв.}$$

Это вычисленное значение в два раза больше экспериментальной величины 14 Мэв, равной сумме кинетического и потенциального членов

в поверхностном натяжении. Однако вычисленное значение снижается до более разумной величины, если считать глубину потенциальной ямы не бесконечной, а конечной<sup>74</sup>.

После того, как статья была написана нами, проф. Финберг любезно ознакомил нас с диссертацией Хаммака<sup>75</sup>, в которой рассмотрена асимптотическая плотность уровней независимых частиц в потенциальной яме бесконечной и конечной глубины и предложена трёхчленная асимптотическая формула, приведённая выше.

Рисунок 12

Энергия деформации зависит от нуклеонного состояния системы, так же как и от амплитуды деформации. Каждая потенциальная кривая диаграммы получена путём суммирования энергий 60 частиц, занимающих 60.

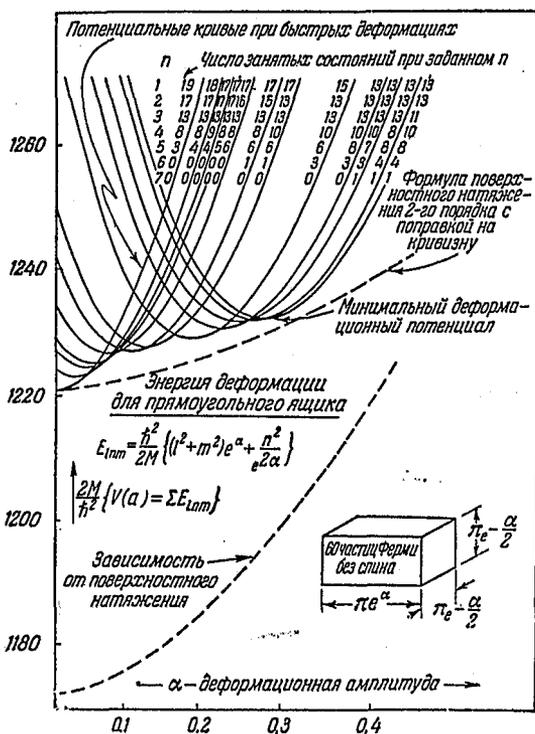


Рис. 12. Потенциальные кривые деформируемого прямоугольного ящика.

различных состояний. Для того чтобы система частиц сохраняла минимальное значение энергии, необходимо, чтобы распределение частиц по состояниям изменялось в процессе деформации. Зубчатая кривая даёт качественное представление о типе потенциальной кривой реальных ядер. Если деформация происходит так быстро, что вероятность перехода системы с одной потенциальной кривой на другую мала или такие переходы вообще запрещены вследствие высокой симметрии системы, как в случае

ящика с гладкими прямоугольными стенками, то распределение частиц по состояниям не будет меняться в процессе деформации. Тогда энергия, необходимая для возмущения, будет много больше энергии, определённой из поверхностного натяжения. Пунктирная кривая получена при применении статистических соображений и формулы рис. 11 к настоящей задаче при  $N = 60$ , объёме  $\pi^3$ , поверхности  $2\pi^2 e^{-\alpha} + 4\pi^2 e^{\alpha/2}$  и средней кривизне  $2\pi^2 e^{\alpha} + 4\pi^2 e^{-\alpha/2}$

$$\sum \frac{2ME}{\hbar^2} = \frac{\pi}{10} \left(\frac{360}{\pi}\right)^{5/3} + \frac{\pi}{16} \left(\frac{360}{\pi}\right)^{4/3} (e^{-\alpha} + 2e^{\alpha/2}) + \dots + \frac{45}{4} e^{-2\alpha} + \left(45 - \frac{120}{\pi}\right) e^{-\frac{\alpha}{2}} + \left(45 - \frac{60}{\pi}\right) e^{\alpha}.$$

Рисунок 13

Эллипсоидальная деформация с сохранением объёма может быть представлена в полярных координатах на плоскости:  $\alpha$  — амплитуда деформации,

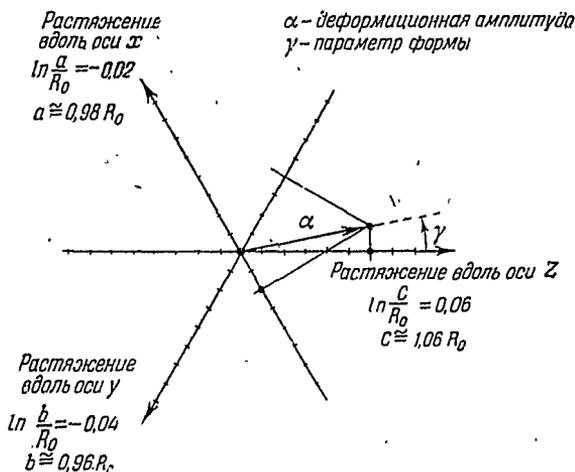


Рис. 13. Координаты  $(\alpha, \gamma)$  эллипсоидальной деформации, сохраняющей объём.

ции,  $\gamma$  — параметр формы. Эти координаты связаны с главными полуосями эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  уравнениями:

$$a = R_0 \exp \left[ \alpha \cos \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \right) \right], \quad b = R_0 \exp \left[ \alpha \cos \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right) \right], \\ c = R_0 \exp [\alpha \cos \gamma],$$

которые удовлетворяют условию постоянства объёма  $abc = R_0^3$ . Так, например, деформация, заключающаяся в изменении осей  $x, y, z$  на  $-1\%$ ,  $-2\%$ ,  $+3\%$  или на некоторую малую величину, кратную этим величинам, описывается положительным значением деформационной амплитуды  $\alpha$  и параметром формы  $\gamma = 10,895^\circ$ .

Другой пример: пусть  $\alpha$  — заданное положительное число, например 0,02, и пусть  $\gamma$  растёт, начиная с  $\gamma = 0^\circ$ . Тогда эллипсоид изменяется следующим образом:

$\gamma$	$\frac{a}{R_0}$	$\frac{b}{R_0}$	$\frac{c}{R_0}$	Форма	Оси симметрии
$0^\circ$	0,990	0,990	1,020	удлинённый сфероид	$x$
$30^\circ$	1,000	0,983	1,017	эллипсоид	нет
$60^\circ$	1,010	0,980	1,010	сплюснутый сфероид	$y$
$90^\circ$	1,017	0,983	1,000	эллипсоид	нет
$120^\circ$	1,020	0,990	0,990	удлинённый сфероид	$z$

С дальнейшим увеличением  $\gamma$  цикл повторяется при условии циклической перестановки индексов  $x, y, z; a, b, c$ .

Рисунок 14

При рассмотрении этого эффекта пренебрегаем спин-орбитальной связью. Эта диаграмма и несколько следующих рисунков должны рассмат-

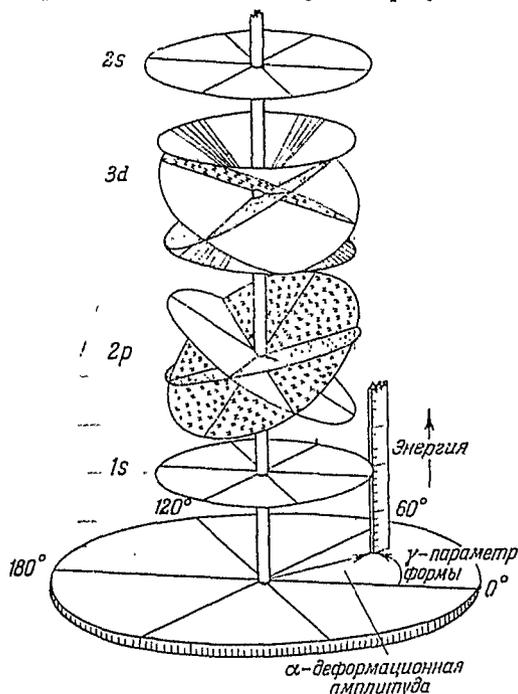


Рис. 14. Качественная картина влияния малых эллипсоидальных отклонений от сферичности на несколько первых уровней одиночного нуклона.

риваться как иллюстративные. Деформация эллипсоида выражена в полярных координатах  $\alpha$  и  $\gamma$  (рис. 13). Простейшим случаем является деформация

в удлинённый сфероид, аксиально-симметричный относительно оси  $z$  ( $\gamma = 0$ ). Тогда квантовое число  $m$  имеет определённый смысл. Уровень с орбитальным моментом количества движения  $l\hbar$  распадается на подуровни, отстоящие от первоначального уровня на величину

$$\delta E = 2\alpha E \frac{3m^2 - l(l+1)}{(2l-1)(2l+3)},$$

зависящую от квантового числа  $m$ . Уровни с  $m = +|m|$  и  $m = -|m|$  совпадают. На диаграмме не показаны следующие детали:

1) Влияние смещений на энергетические поверхности так велико, что  $\delta E$  более не пропорционально  $\alpha$ . Тогда необходимо принять во внимание члены порядка выше первого. Результирующая кривизна энергетических поверхностей соответствует отталкиванию поверхностей друг от друга повсюду, за исключением окрестностей особых точек. В этих точках две поверхности обычно образуют двойную воронку, как показано на рис. 35. На увеличенной диаграмме было бы видно много таких воронок.

2) Зависимость энергии от деформаций порядка выше второго не показана здесь ввиду недостатка места. При изучении асимметрии ядерного деления необходимо рассмотреть деформации третьего порядка ( $n = 3$ ), так же как эллипсоидальные деформации ( $n = 2$ ), представленные на этом рисунке.

Рисунок 15

На диаграмме представлено смещение уровня  $\delta E$ , отвечающее малой деформации  $\alpha$ , в зависимости от параметра  $\gamma$ .  $E$  — кинетическая энергия

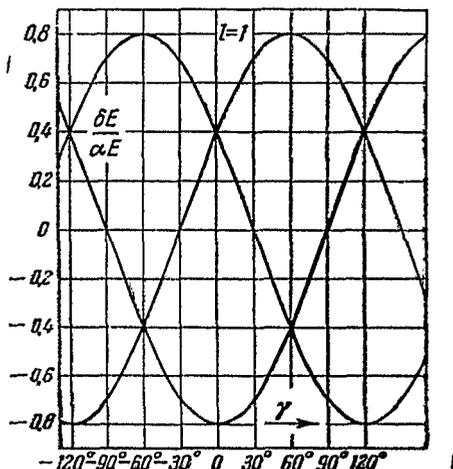


Рис. 15. Расщепление уровней  $p$ -частицы (орбитальный момент количества движения  $l = 1$ ) в потенциальной яме постоянной глубины в случае, когда её границы получили небольшую эллипсоидальную деформацию при сохранении объёма.

нуклеона в первоначальной сферической потенциальной яме,  $\alpha$  и  $\gamma$  определены на рис. 13. Заметим, что  $p$ -частица имеет минимально возможную энергию, когда она является составной частью ядра, имеющего вид удлинённого сфероида.

Рисунок 16

Пять подуровней сливаются в три подуровня при аксиально-симметричной деформации ( $\gamma = 0^\circ, \pm 60^\circ, \pm 120^\circ$  и т. д.). Энергия одиночного  $d$ -нуклона, соответствующая наименьшему подуровню, в первом приближении не зависит от параметра формы  $\gamma$ . Рассматриваемый случай ( $l=2$ )

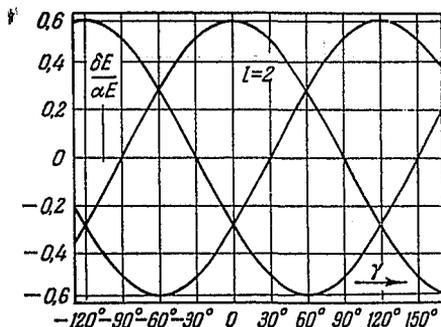


Рис. 16. Расщепление уровней  $d$ -частицы (орбитальный момент количества движения  $l=2$ ) в зависимости от параметра  $\gamma$  эллипсоидальной деформации.

является в известном смысле нейтральным. При  $l=1$  деформация удлинения даёт наибольшее понижение энергии, при  $l=3$  или более деформация сплющивания энергетически более выгодна.

Рисунок 17

Одиночная  $g$ -частица принимает минимально возможную энергию в сплюсненном эллипсоиде ( $\gamma = 0, \pm 60^\circ, \pm 180^\circ$ ). Расчёт величины смещения

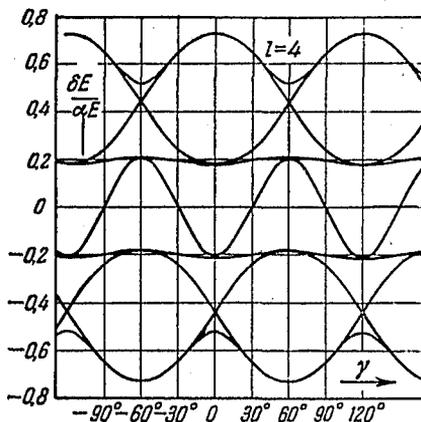


Рис. 17. Устранение девятикратного вырождения  $g$ -нуклона ( $l=4$ ) при малой эллипсоидальной деформации.

энергии в первом приближении проделан следующим образом: пусть  $u_1$  — волновая функция, исчезающая на поверхности сферы и удовлетворяющая

уравнению  $\nabla^2 u_1 + k_1^2 u_1 = 0$  внутри сферы; пусть слегка отличная функция  $u_2$  исчезает на поверхности эллипсоида и удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 u_2 + k_2^2 u_2 = 0$  внутри эллипсоида. Тогда согласно уравнению Грина

$$k_2^2 - k_1^2 = \frac{\int \left( u_2^* \frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1 \frac{\partial u_2^*}{\partial n} \right) dS}{\int u_1 u_2^* d\Omega},$$

где интеграл в знаменателе взят по объёму, общему для обоих тел, а интеграл в числителе взят по поверхности, охватывающей этот общий объём. Пусть  $S_1$  — участок поверхности сферы, лежащий внутри эллипсоида. Тогда на  $S_1$   $u_1 = 0$  и, вводя нормальное смещение  $\delta n$  поверхности эллипсоида  $S_2$  по отношению к поверхности  $S_1$ , найдём:

$$u_2 = -\delta n \frac{\partial u_2}{\partial n} = -\delta n \frac{\partial u_1}{\partial n}.$$

Такой же результат будет, если  $S_1$  лежит вне поверхности  $S$ . Пренебрегая членами порядка выше первого, получим:

$$\delta(k^2) = -\frac{\int \left| \frac{\partial u_1}{\partial n} \right|^2 \delta n \cdot dS}{\int |u_1|^2 d\Omega},$$

если только разность между  $u_2$  и  $u_1$  мала, т. е. если мы выберем для  $u_1$ , как это будет сделано ниже, подходящую линейную комбинацию волновых функций первоначальных, вырожденных уровней. Обозначим соответствующую линейную комбинацию сферических гармоник

$$Y(\theta, \varphi) = \sum c_m Y_L^{(m)}.$$

Пусть также  $F_l(\rho)$  обозначает регулярное решение радиального уравнения

$$\frac{d^2 F_l}{d\rho^2} + \left[ 1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] F_l = 0,$$

так что

$$\int_0^\rho F_l^2 d\rho = \frac{1}{2} \rho [(F_l)^2 + (F_l')^2] - \frac{1}{2} F_l \cdot F_l' - \frac{l(l+1)}{2\rho} F_l^2 = \frac{1}{2} \rho (F_l')^2,$$

если  $\rho$  — узел. Тогда невозмущённая волновая функция равна

$$u_1 = \frac{1}{r} F_l(kr) Y(\theta, \varphi),$$

а возмущение энергии первого порядка равно

$$\frac{\delta E}{\alpha E} = \frac{\delta(k^2)}{\alpha k^2} = -\frac{\frac{2}{\alpha R_0} \int Y^* (\delta R) Y d\Omega}{\int Y^* Y d\Omega}.$$

Пусть  $I$  — оператор, который, действуя на любую поверхностную гармонику

$$U = \sum_{l, m} b_{l, m} Y_{l, m}(\theta, \varphi),$$

аннулирует все члены, кроме отвечающих интересующей нас величине  $l$ . Эти последние он оставляет неизменными. Тогда

$$\int Y^* \Lambda Y d\Omega = \int Y^* I \Lambda Y d\Omega,$$

где  $\Omega$  — телесный угол и  $\Lambda$  — сокращённое обозначение возмущения

$$\Lambda = - \frac{2\delta R(\theta, \varphi)}{\alpha R_0}.$$

Подходящая линейная комбинация  $Y$  удовлетворяет характеристическому уравнению

$$I \Lambda(\theta, \varphi) Y(\theta, \varphi) = \lambda Y(\theta, \varphi),$$

где  $\lambda$  — численная константа. Это — вековое уравнение для коэффициентов  $c_m$  и смещения энергии

$$\delta E = \lambda \alpha E.$$

Напишем уравнения эллипсоида в виде:

$$x = (R_0 + \delta R) \sin \theta \cos \varphi, \quad y = (R_0 + \delta R) \sin \theta \sin \varphi, \quad z = (R_0 + \delta R) \cos \theta$$

и подставим эти уравнения в формулы для полуосей  $a, b, c$  в функции от  $\alpha$  и  $\gamma$  (рис. 13). Изменение  $\delta R$  длины радиуса вектора от начала координат до поверхности в первом приближении задаётся уравнением

$$\Lambda(\theta, \varphi) = - \frac{2\delta R(\theta, \varphi)}{\alpha R_0} = 3^{1/2} \sin^2 \theta \cos 2\varphi \sin \gamma - 2P_2(\cos \theta) \cos \gamma.$$

Из этого выражения видно, что матричный элемент сферических гармоник при одном и том же значении  $l$  (интересующем нас) и разных  $m$  исчезает, за исключением следующих случаев:

1) равные  $m$  (диагональные элементы матрицы)

$$\Lambda_{m, m} = \frac{2 \cos \gamma [3m^2 - l(l+1)]}{(2l-1)(2l+3)},$$

2) величины  $m$  отличаются на 2 единицы

$$\Lambda_{m \pm 1, m \mp 1} = \frac{3^{1/2} \sin \gamma [l^2 - m^2]^{1/2} [(l+1)^2 - m^2]^{1/2}}{(2l-1)(2l+3)}.$$

Решение векового уравнения:

$$\text{детерминант } |\Lambda_{jk} - \lambda| = 0$$

даёт величину смещения энергии в этом и предыдущих случаях.<sup>1</sup>

Здесь рассчитано влияние деформаций на смещение уровней энергии в случае бесконечной потенциальной ямы; полученные величины, как указано Финбергом и Хаммаком<sup>8</sup>, уменьшаются в случае конечной потенциальной ямы.

Рисунок 18

В этом случае вековое уравнение (рис. 17) имеет так много корней, что их распределение можно представить статистически. По горизонтали отложена величина корня векового уравнения

$$\lambda = \frac{\delta E}{\alpha E}.$$

По вертикали отложено относительное число корней на единичный интервал  $\lambda$

$$\int \frac{df}{d\lambda} d\lambda = 1.$$

Каково бы ни было значение параметра формы  $\gamma$ , функция распределения имеет особенность при одном значении безразмерного параметра величины

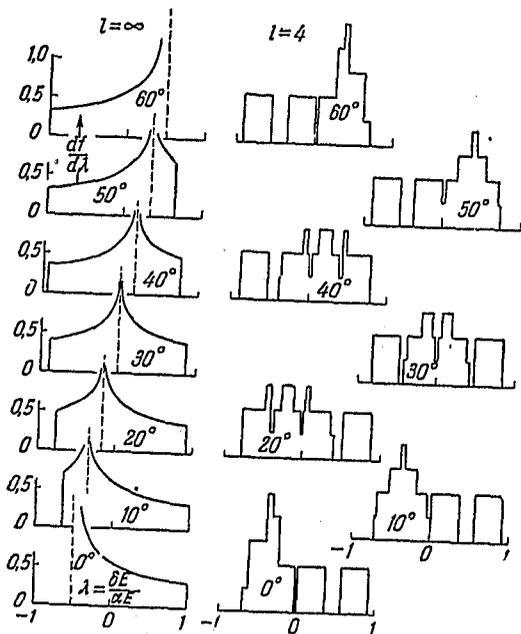


Рис. 18. Расщепление уровней в случае малых эллипсоидальных деформаций, но очень больших орбитальных моментов.

смещения уровня  $\lambda$ . Другими словами, в окрестности особого значения  $\lambda_{\text{особ}}$  имеется много уровней;

$$\lambda_{\text{особ}} = \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right),$$

если  $\gamma$  находится в интервале  $0-60^\circ$ . Экстремальные величины смещения уровней в рассматриваемом случае больших  $l$  суть:

$$\lambda_{\text{мин}} = \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{и} \quad \lambda_{\text{макс}} = \cos \gamma.$$

Справа для сравнения представлено распределение уровней, найденное из векового уравнения в случае  $l=4$ , причём каждый уровень расширен так, чтобы приблизиться к непрерывному распределению. Имеется качественное соответствие между распределением уровней при  $l=4$  и  $l=\infty$ . По мере того, как выводы квантовой механики при больших квантовых числах приближаются к выводам классической механики, метод расчёта может быть заменён следующим:

$$\lambda = \frac{\delta E}{\alpha E} = \left( \begin{array}{l} \text{средней величине возмущения, } \Lambda(\theta, \varphi) = \\ = -\frac{2\delta R(\theta, \varphi)}{\alpha R_0} \text{ сверх невозмущённого классического движения} \end{array} \right).$$

В случае невозмущённого классического движения частица перемещается в плоскости, проходящей через центр сферы. Её движение представляет собой серию прямых сегментных линий, внезапно меняющих своё направление при ударе частицы о поверхность. Для всех орбит, за исключением множества меры нуль, период движения несоизмерим с  $2\pi$  и частица будет с течением времени подходить сколь угодно близко к любой точке некоторого большого круга. Пусть нормаль к этому большому кругу имеет полярные углы  $\theta^*$  и  $\varphi^*$ . Тогда средняя величина  $\Lambda$  в этом большом круге равна:

$$\Lambda_{\text{ср}} = \lambda = \cos \gamma P_2(\cos \theta^*) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma \sin^2 \theta^* \cos 2\varphi^*.$$

Если потребовать, чтобы эта величина лежала в пределах интервала  $\lambda$  и  $\lambda + d\lambda$ , то необходимо выбрать на поверхности сферы полосу точек, каждая из которых определяет направление момента количества движения соответствующей орбиты. Телесный угол, стягиваемый этой полосой, даёт нам долю собственных значений, лежащих между  $\lambda$  и  $\lambda + d\lambda$ .

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Omega}{d\lambda} = \pi^{-1} 3^{-1/4} (\sin \gamma)^{-1/2} (\cos \gamma - \lambda)^{-1/2} K(x),$$

где  $K$  — полный эллиптический интеграл, а

$$x = \left\{ \frac{(\lambda - \cos 120^\circ + \gamma) \sin 120^\circ + \gamma}{(\cos \gamma - \lambda) \sin \gamma} \right\}^{1/2}.$$

Это выражение имеет смысл, если  $\gamma$  лежит в интервале  $0-60^\circ$  и, кроме того,  $\lambda$  лежит в интервале  $\lambda_{\text{мин}} - \lambda_{\text{особ}}$ . Если  $\lambda$  лежит в интервале  $\lambda_{\text{особ}} - \lambda_{\text{макс}}$ , то соответствующая формула принимает вид

$$\pi^{-1} 3^{-1/4} (\lambda - \cos 120^\circ + \gamma)^{-1/2} (\sin 120^\circ + \gamma)^{-1/2} K(x^{-1}).$$

По этим формулам были построены кривые распределения  $\frac{df}{d\lambda}$ .

### Рисунок 19

Для определённости рассматривается последовательность фигур Франкля-Метрополиса. По вертикали отложена безразмерная величина энергии

$$\rho^2 = \frac{2MR_0^2 E}{\hbar^2},$$

где  $R_0$  — радиус начальной сферы. Величина деформации определяется параметром

$$\alpha_2 = \frac{7}{3} y = \frac{7}{3} (1 - x),$$

где  $x$  и  $y$  имеют значение, приданное им на рис. 2. Это определение  $\alpha_2$  согласуется с определениями, данными на рис. 1 и рис. 13 при малых возмущениях, но все три определения различны при больших возмущениях.

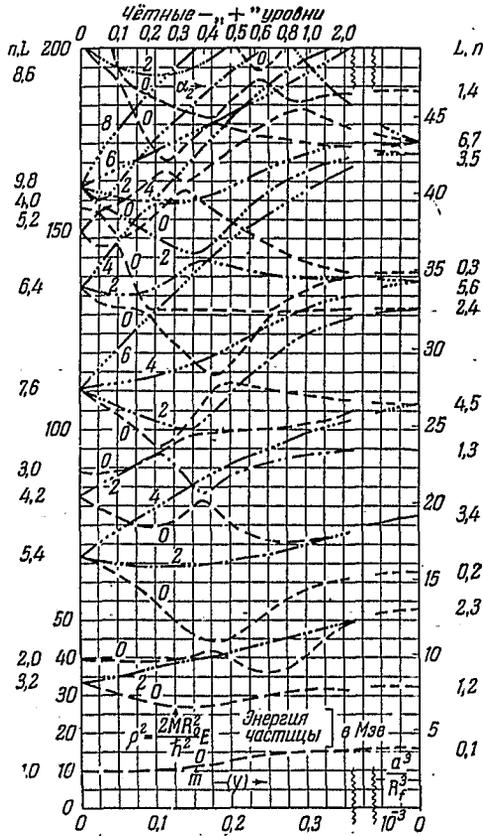


Рис. 19. Влияние деформации, приводящей к делению, на чётные «+» уровни одиночной частицы.

С правой стороны диаграммы отложены уровни энергии в случае, когда ядро деформировано в две сферы половинного объема, соединённые друг с другом малой горловиной. Какова бы ни была величина единственного рассматриваемого здесь деформационного параметра, граница инвариантна по отношению к инверсии  $(x, y, z \rightarrow -x, -y, -z)$  и отражению в плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной оси симметрии  $(x, y, z \rightarrow x, y, -z)$ .

Следовательно, уровни распадаются на 4 класса:

		Отношение величин волновых функций в двух зеркальных точках = $(-1)^{l+m}$	
		« + »	« - »
Отношение величин волновых функций в двух инверсных точках = $(-1)^l$	чётн.	$l$ чётн. $m$ чётн.      рис. 19	$l$ чётн. $m$ нечётн.      рис. 20
	нечётн.	$l$ нечётн. $m$ нечётн.      рис. 22	$l$ нечётн. $m$ чётн.      рис. 21

На этом рисунке представлены только чётные «+» уровни. На рис. 19, 20, 21 и 22 показаны детально только те уровни, которые отвечают квантовым числам проекции момента количества движения на ось симметрии  $m = 0$  или  $m = 3$ . Кривые, нанесённые сплошными линиями, вычислены, как указано в подписи к рис. 21. Кривые, нанесённые пунктиром, являются схематичными. Количественными основаниями для них явились только начальные и конечные ординаты, а также наклоны и точки перегиба, выбранные так, чтобы обеспечить надлежащие скачки уровней, сохраняющие необходимое отношение между числом  $n$  узловых поверхностей в начальной и конечной волновых функциях.

Р и с у н о к 20

Диаграмма уровней энергии удовлетворяет хорошо известному корреляционному принципу: два уровня не пересекаются тогда и только тогда (имея в виду произвольную амплитуду деформаций), когда они принадлежат одновременно к одному и тому же классу симметрии из четырёх возможных (в данном случае к чётному «-» классу) и характеризуются одинаковыми значениями  $m$ . Этот принцип применим постольку, поскольку система имеет аксиальную симметрию. Если же, напротив, поверхность представляет собой неравноосный эллипсоид, то  $m$  не является квантовым числом и ни один уровень, из числа принадлежащих к одному и тому же классу симметрии, не пересекается с другим. Для конфигураций, близких к начальной сфере, уровни энергии

$$E = \frac{\hbar^2 \rho^2}{2MR_0^2}$$

вычисляются из формулы возмущений (рис. 17)

$$\rho^2 = \rho_{n,l}^2 \left[ 1 + 2a_2 \frac{3m^2 - l(l+1)}{(2l-1)(2l+3)} \right].$$

Здесь  $\rho_{n,l}$  является  $(n-l)$ -м корнем регулярного решения  $F(\rho)$  диффе-

ренциального уравнения

$$\frac{d^2 F}{d\rho^2} + \left[ 1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] F = 0$$

для радиальной части волновой функции!

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} F(kr) P_l^{(m)} \cos \theta e^{im\varphi}.$$

Все значения  $\rho_n^2$  менее 200 [см. таблицы сферических бesselевых функций] приведены на стр. 127.

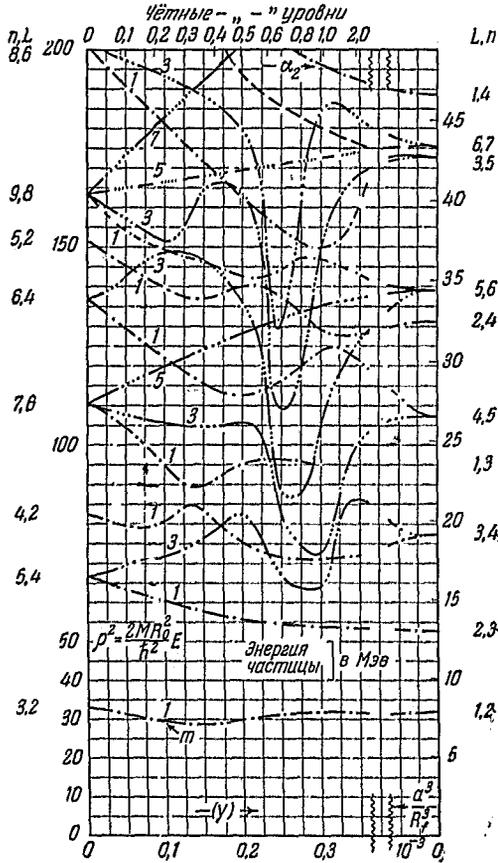


Рис. 20. Чётные « — » уровни фигуры Франкля-Метрополиса.

Число  $n$  представляет собой в случае сферической или близкой к ней конфигурации общее число узловых поверхностей волновой функции, подсчитанное следующим образом:  $m$  в направлении координаты  $\varphi$ ,  $l - m$

$\begin{array}{c} n-l \\ \backslash \\ l \end{array}$	1	2	3	4
0	9,870	39,479	88,897	157,914
1	20,191	59,679	118,899	197,858
2	33,218	82,719	151,854	
3	48,831	108,516	187,635	
4	66,955	137,005		
5	87,531	168,130		
6	110,519	201,850		
7	135,886			
8	163,605			
9	193,649			

в направлении координаты  $\theta$  и  $n-l$  в радиальном направлении (считая граничную поверхность узловой). С увеличением величины деформации  $l$  перестаёт быть квантовым числом и даже общее число  $n$  узловых поверхностей становится непостоянным, так как поверхности перемещаются к внешней границе или сливаются внутри. Единственный неизменный принцип упорядочения заключается в требовании непересечения уровней с одним и тем же  $m$ .

Рисунок 21

Детально представлены только уровни, отвечающие  $m=0$ . Волновые функции удовлетворяют уравнению  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$  внутри поверхности и условию  $\psi = 0$  на поверхности бесконечной потенциальной ямы. Эльзассер<sup>76</sup> и Моргенау<sup>77</sup> получили в этом приближении расщепление уровней нуклеонов в ядрах, имеющих сферическую форму. Пренебрежение проникновением волновой функции в область отрицательных кинетических энергий (т. е. за пределы границ конечной потенциальной ямы) может быть приближённо скомпенсировано соответствующим малым изменением размеров фигуры: смещением перпендикулярно поверхности на расстояние  $\frac{\hbar}{2M(W-E)^{1/2}}$ , где  $W$  — высота потенциальной ямы и  $E$  — кинетическая энергия рассматриваемого состояния. При точных расчётах (гладкие кривые) волновая функция нечётных «-» уровней с квантовым числом  $m$  была представлена в виде произведения множителя  $e^{im\varphi}$  на сумму

$$\sum C_l j_l \frac{\rho r}{R_0} P_l^{(m)}(\cos \theta),$$

где  $R_0$  — начальный радиус сферы и  $\rho^2 = \frac{2MR_0^2 E}{\hbar^2}$  — безразмерная единица энергии. Суммирование производится по чётным значениям  $l$  в случае уровней положительной чётности и по нечётным значениям  $l$  в случае уровней отрицательной чётности. Эта волновая функция автоматически удовлетворяет дифференциальному уравнению. Исчезновение решения на

граничной поверхности  $\frac{r}{R_0} = f(\cos \theta)$ , определённой на рис. 2, приводит к наложению непрерывного континуума условий на бесконечное множество коэффициентов  $C_l$ . Приближение, применённое в расчётах, заключалось в использовании только пяти членов суммы и в требовании равенства суммы нулю только в 5 точках поверхности, для которых  $\mu = \cos \theta = \mu_s$ ,

где  $\mu_s = 0,19; 0,38; 0,57; 0,76; 0,95$  в «—» уровнях и  $\mu_s = 0,105; 0,315; 0,525; 0,735; 0,945$  в «+» уровнях. Система пяти уравнений с пятью неиз-

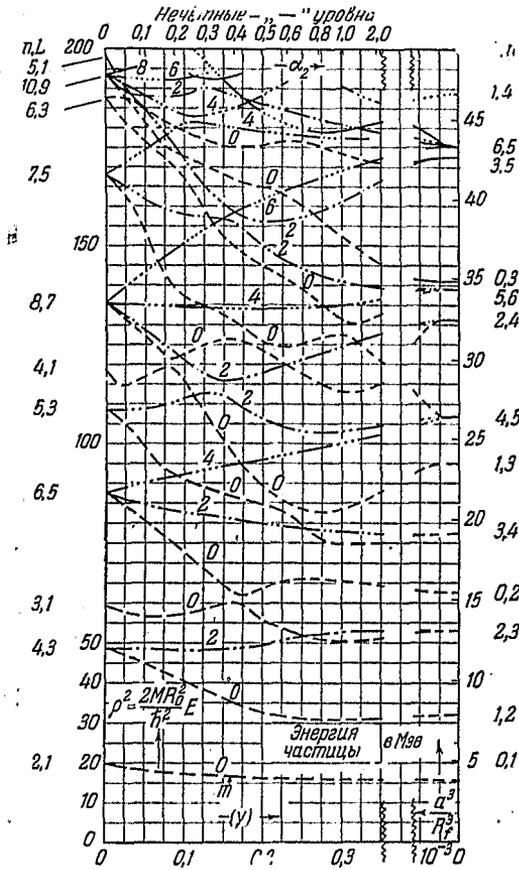


Рис. 21. Нечётные «—» уровни в последовательности фигур Франкля-Метрополиса.

вестными коэффициентами  $C_l$  имеет решение тогда и только тогда, когда  $\rho$  обращает в нуль детерминант

$$\left| j_l(\rho f_s) P_l^{(m)}(\mu_s) \right|,$$

где  $s = 1, 2, \dots, 5$  — индексы колонок, а  $l = 0, 2, 4, 6, 8$  — индексы рядов в случае  $m = 0$  и положительной чётности и  $l = 1, 3, 5, 7, 9$  в случае  $m = 0$  и отрицательной чётности. Функции  $j$  и  $P$  были рассчитаны на электронной счётной машине; функции Лежандра (делённые на  $(1 - \mu^2)^{m/2}$ ) — из конечных степенных выражений; сферические бesselовы функции  $j(x)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dj}{dx} \right) + \left[ 1 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] j = 0,$$

— из обычного разложения в степенной ряд, если отношение  $\frac{x}{\sqrt{1+\frac{3}{2}}}$  менее 5, а при больших значениях аргумента — из известного выражения  $\left(\text{конечный полином от } \frac{1}{x}\right) \times \sin x + \left(\text{конечный полином от } \frac{1}{x}\right) \times \cos x$ . Корни  $\rho$  детерминанта были найдены подбором.

Рисунок 22

В правой части этого рисунка, так же как и на трёх предыдущих, отмечены уровни двух сфер с радиусом  $R_f = \frac{R_0}{\sqrt{2}}$ , связанных отверстием

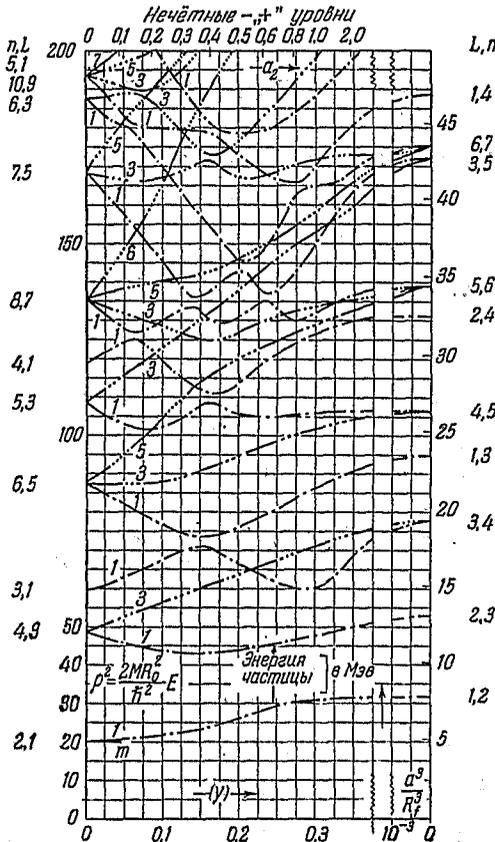


Рис. 22. Нечётные «+» уровни в последовательности фигур Франкля-Метрополиса, приводящей к делению.

с радиусом  $a$ , малым по сравнению с  $R_0$ . Когда  $a=0$ , уровни совпадают с уровнями сферы и соответствующие величины безразмерного параметра энергии

$\rho^2$  в  $2^{1/2}$  раза больше величин, приведённых в подписи к рис. 20. Когда отверстие слегка увеличивается, волновые функции в обеих сферах объединяются и необходимо различать два случая: 1) «+» случай — волновые функции обеих сфер объединяются так, что в точке соединения не образуется узла (зеркальная симметрия по отношению к плоскости отверстия); 2) «-» случай — в точке соединения образуется узел общей волновой функции (волновая функция антисимметрична в отношении отражения в плоскости отверстия). Сфера половинного объёма содержит вплоть до заданной энергии (границы распределения Ферми) примерно вдвое меньшее число уровней, чем сфера полного объёма. Таким образом, удвоение числа состояний вследствие двух возможностей в объединении волновых функций через отверстие даёт правильное число состояний индивидуальных частей всей системы. Энергии «-» состояний в первом приближении не зависят от размеров отверстия (волновая функция исчезает в точке возмущения). Энергии «+» состояний, наоборот, уменьшаются по мере раскрытия отверстия и относительная величина этого уменьшения равна

$$\frac{1}{\rho^2} \delta(\rho^2) \cong -\frac{2}{3\pi} (2l+1) \frac{a^3}{R_f^3}$$

для состояний с  $m=0$  и значительно больше (большая степень  $\frac{a}{R_0}$ ) при больших значениях  $m$ . Этот результат можно получить путём сравнения «+» волновой функции  $\psi_0$ , отвечающей полностью закрытому отверстию, и функции  $\psi_1$ , отвечающей малому раскрытию. Обе функции всюду совпадают, за исключением точек, отстоящих от центра отверстия на расстояние порядка  $a$ .

Волновая функция в левой сфере равна  $\psi_0 = \frac{1}{r} F_l(kr) P_l^{(m)}(\cos \theta) e^{im\varphi}$  (в правой сфере волновая функция представляет собой зеркальное изображение волновой функции левой сферы) и ведёт себя при положительных  $m$  приближённо, как  $\psi_0 = Qz\rho^m e^{im\varphi}$ , где  $z$  — расстояние по перпендикуляру от отверстия к центру левой сферы,  $\rho$  — соответствующая цилиндрическая полярная координата и константа  $Q$  имеет значение

$$Q = -R_f^{-1-m} k F_l(kR_f) \cdot \frac{(l+m)!}{2^m m! (l-m)!}$$

В случае  $m=0$  приближённое значение  $\psi_0$  возрастает линейно с увеличением расстояния от поверхности. Мы имеем дело с волново-механической аналогией постоянного электрического поля. Согласно электрической терминологии увеличение отверстия шейки приводит к утечке силовых линий. На линейно меняющийся электрический потенциал накладывается другой член — местное возмущение, — который также приближённо удовлетворяет уравнению Лапласа. Вторые производные этого члена в направ-

лениях, перпендикулярном и параллельном плоскости отверстия  $\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} \right.$  и  $\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)$ , противоположны по знаку и обе велики по сравнению с  $k_1^2 \psi$ .

Величиной  $k_1^2 \psi$  мы пренебрегли при рассмотрении поправки  $\delta\psi = \psi_1 - \psi_0$  в волновой функции. Следовательно, мы вычислим эту разность, решая уравнение Лапласа, удовлетворяющее граничным условиям: 1)  $\delta\psi$  спадает относительно  $\psi_0$  при больших расстояниях от отверстия,

2)  $\frac{\partial(\delta\psi)}{\partial z}$  исчезает на всех участках поверхности (рассматриваемых здесь как плоские), кроме отверстия, 3) у отверстия поправочный член имеет такую нормальную производную, которая обращает производную собственно  $\psi_1$  в нуль (условие зеркальной симметрии), т. е.  $\frac{\partial(\delta\psi)}{\partial z} = -Q\rho^m e^{im\varphi}$ . В последнем уравнении подразумеваются положительные  $m$ , так как случай  $m = 0$  не представляет интереса. Переходя к новым координатам:  $z = avv$ ,  $\rho = a[(1-u^2)(1+v^2)]^{1/2}$ , приводим уравнение Лапласа к уравнению с разделяющимися переменными типа  $P_n^{(m)}(u)f(v)e^{im\varphi}$ . Здесь функция  $f$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dv}(1+v^2)\frac{df}{dv} + \left[ \frac{m^2}{1+v^2} - n(n+1) \right] f = 0.$$

Начальная волновая функция  $\psi_0$  на расстояниях, не слишком далёких от средней плоскости, имеет точно такую же форму, при  $n = m + 1$  и  $f(v)$ , кратном  $P_{m+1}^{(m)}(iv)$ :

$$\psi_0 = Qa^{m+1} u(1-u^2)^{m/2} v(1+v^2)^{m/2} e^{im\varphi}.$$

В соответствующем выражении для  $\delta\psi$  всё остаётся таким же, с тем, однако, исключением, что функция  $f_{m+1}^{(m)}(v)$  убывает при больших положительных  $v$ :

$$\delta\psi \cong Qa^{m+1} u(1-u^2)^{m/2} v(1+v^2)^{m/2} e^{im\varphi} \frac{\int_0^\infty v^{-2}(1+v^2)^{-m-1} dv}{\int_0^\infty v^{-2}[1-(1+v^2)^{-m-1}] dv}.$$

Здесь определённый интеграл в знаменателе нормирует  $\delta\psi$  так, чтобы удовлетворить граничным условиям. Изменение волнового числа, вызванное возмущением, в первом приближении находится путём подстановки в числитель точного уравнения Грина

$$k_1^2 - k_0^2 = \frac{\int \psi_1^* \left( \frac{\partial\psi_0}{\partial n} \right) dS}{\int \psi_1^* \psi_0 d\Omega}$$

выражения  $\psi_1 = \psi_0 + \delta\psi$  в эллипсоидальных координатах

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial n} = -Qa^m (1-u^2)^{m/2} e^{im\varphi},$$

$$\psi_1^* = \delta\psi^* = Qa^{m+1} u(1-u^2)^{m/2} e^{-im\varphi} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2m)}{\pi \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m+1)}$$

и путём замены в знаменателе  $\psi_1^*$  на  $\psi_0^*$

$$\int \psi_1^* \psi_0 d\Omega = \frac{R_f}{2} [F_\nu(kR_f)]^2 \frac{4\pi}{2l+1} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

Таким образом, смещение «+» уровней, вызванное малым отверстием равно:

$$\frac{k_1^2 - k_0^2}{k_0^2} = -\frac{2(2l+1)}{\pi} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \cdot \frac{1}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2m+1)^2 \cdot (2m+3)} \left(\frac{a}{R_f}\right)^{2m+3}$$

Эта формула была использована для построения кривых в правой части диаграмм «+» уровней.

Рисунок 23

Полная энергия нуклеонов, заполняющих замкнутую оболочку и частично  $g$ -оболочку до указанного числа частиц, в случае малых эллипсоидальных деформаций  $a$ , равна  $E = E_0 + aE_g f(\gamma) + ca^2$  в приближении, отвечающем идеализированной коллективной модели ядра. Здесь  $f(\gamma)$  представлена графически в функции от параметра формы  $\gamma$  (рис. 13), а  $E_0$ ,  $E_g$

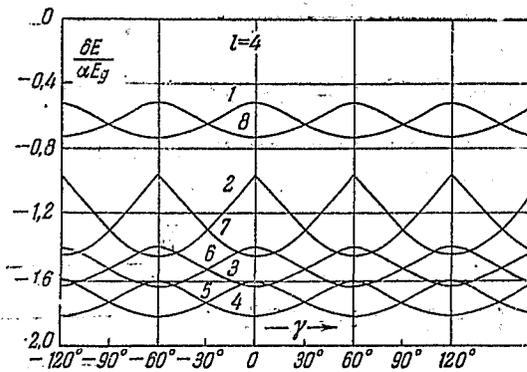


Рис. 23. Зависимость полной нуклеонной энергии от  $\gamma$  в случае, когда в состоянии  $l=4$  находится от одного до девяти нуклеонов.

и  $c$  — константы, причём  $E_g$  — кинетическая энергия одного нуклеона с  $l=4$ . Диаграмма для простоты начерчена так, как будто нуклоны не имеют спина и для заполнения оболочки необходимо иметь только 9 частиц. Необходимая поправка на вдвое большее число нуклеонов легко может быть сделана. Величина  $f(\gamma)$  получена путём суммирования соответствующих коэффициентов индивидуальных частиц рис. 17 по числу принятых в рассмотрение нуклеонов, принимая в каждом случае наименьшую энергию (или наиболее отрицательный коэффициент), разрешённую принципом Паули. Из приведённой диаграммы видно, что квадрупольные силы, измеряемые величиной  $f(\gamma)$ , возрастают до максимума при наполовину заполненной оболочке, а затем падают. Сплюснутые деформации предпочтительнее в начале заполнения оболочки, удлинённые — в конце. Разумеется, эти рассуждения относятся только к внутренним квадрупольным моментам, а не к моментам, усреднённым благодаря прецессии вокруг оси ядерного спина.

Рисунок 24

Уровни, которые пересекаются без взаимодействия при деформациях высокой симметрии, испытывают взаимное отталкивание при деформациях низкой симметрии. В случае аксиально-симметричных деформаций пересе-

кающиеся уровни обычно сами по себе дважды вырождены, за исключением случая  $m = 0$ , так что при введении дополнительной небольшой эллиптичности возникает 4 уровня. Деформационная координата  $\eta = \alpha \sin \gamma$  (рис. 13) перпендикулярна к плоскости верхней диаграммы. Цилиндр, показанный в перспективе, пересекает четырёхлистную поверхность уровня

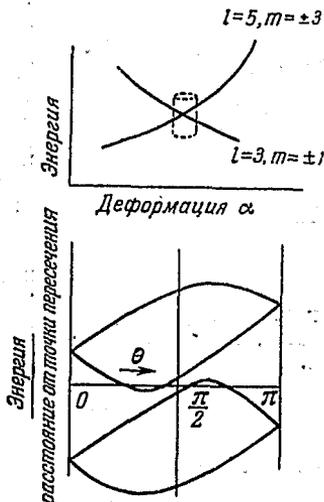


Рис. 24. Расщепление двух двойных уровней вблизи точки перекрещивания.

энергии по четырём кривым, представленным в функции от угла на нижней диаграмме. На рисунках показан пример пересечения дважды вырожденных уровней  $l = 3, m = \pm 1$  и  $l = 5, m = \pm 3$ .

Пусть  $\xi = \alpha \cos \gamma - \alpha_0$  означает расстояние от точки пересечения, видимое на верхней диаграмме. Тогда вблизи точки пересечения матрица энергии четырёх уровней (опускаем несущественные детали) имеет вид

$$H = \begin{vmatrix} s\xi + t\eta & 0 & f\eta & -g\eta \\ 0 & s\xi - t\eta & g\eta & -f\eta \\ f\eta & g\eta & -s\xi + u\eta & 0 \\ -g\eta & -f\eta & 0 & -s\xi - u\eta \end{vmatrix},$$

где  $s, t, u, f, g$  — постоянные, а диагональные элементы представляют положение уровней в отсутствии связи между одной парой уровней и другой. Обозначив  $\xi = r \cos \theta$ ,  $\eta = r \sin \theta$  и  $y = \frac{\text{энергия}}{r}$ , получим вековое уравнение для четырёх корней, графически представленных на нижней диаграмме:

$$y^4 - [2s^2 \cos^2 \theta + (2f^2 + 2g^2 + t^2 + u^2) \sin^2 \theta] y^2 + [2s(u^2 - t^2) \cos \theta \sin^2 \theta] y + s^4 \cos^4 \theta + \dots + s^2(2f^2 + 2g^2 - t^2 - u^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (g^2 - f^2 + ut)^2 \sin^4 \theta = 0,$$

Рисунок 25

На рисунке схематически изображён нижний лист многолистной потенциальной поверхности в зависимости от эллипсоидальных деформационных параметров  $\alpha$ ,  $\gamma$  (рис. 13). Этот лист касается поверхности, лежащей над ним, только вершинами обращённых «воронки», т. е. только при сфероидальных деформациях сплющивания и удлинения, при которых  $\gamma = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ$  и т. д. Не показанный на рисунке верхний лист в свою очередь имеет как прямые, так и обращённые «воронки». Вероятность скольжения с одной поверхности на другую, расположенную выше или ниже, существенно зависит от общей кривизны поверхности и,

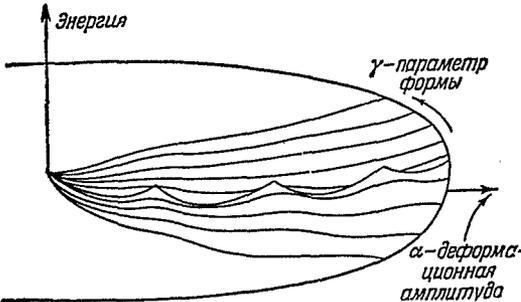


Рис. 25. Качественная картина перевёрнутых «воронки» на нижней потенциальной поверхности.

в особенности, от величины области поверхности, доступной системе при заданной величине полной (потенциальной + колебательной кинетической) энергии.

Рисунок 26

На рисунке представлена качественная картина влияния степени заполнения оболочек на внутренний квадрупольный момент, т. е. на фигуру



Рис. 26. Ожидаемая зависимость деформационных потенциалов и квадрупольных моментов от степени заполнения оболочек.

ядра. При этом имеется в виду фигура ядра с точки зрения движущихся внутри ядра частиц, а не с точки зрения атомных электронов, так как

в последнем случае добавляется усреднение ядерной прецессии — усреднение, которое сводит к нулю квадрупольный момент в атомных спектрах, когда ядерный спин равен  $1/2$  или 0 (чётно-чётные ядра). Несколько нуклонов в частично заполненной оболочке приводят к деформациям так же, как и один нуклон (рис. 6), со следующими поправками:

а) Частицы объединяются. Связь с поверхностью приводит орбиту второй частицы в плоскость первой, что оказывается энергетически более выгодным. В первом приближении деформация, вызванная двумя частицами, вдвое больше, а понижение энергии (по отношению к сферической конфигурации) вчетверо больше, чем в случае одной частицы.

б) С увеличением числа частиц квадрупольные силы (см., например, рис. 23) проходят через максимум, обнаруживая некоторую симметрию между началом заполнения оболочки (сплюснутые фигуры энергетически более выгодны) и концом заполнения оболочки (удлиненные фигуры энергетически более выгодны).

в) При заполнении оболочек, грубо говоря, в пределах от  $1/3$  до  $2/3$  обе конфигурации, сплюснутая и удлиненная, отвечают относительным минимумам энергетических кривых, что означает возможность конфигурационно-изомерных фигур одного и того же ядра.

г) Все эти рассуждения проведены в предположении, что вклад всех остальных замкнутых оболочек в деформационный потенциал является квадратичной функцией деформационного параметра  $\alpha$ . В действительности, большое возмущение приводит к перераспределению порядка уровней и даже термин «замкнутая оболочка» больше не имеет простого смысла. Благодаря этому обстоятельству не следует ожидать регулярных изменений квадрупольных моментов с увеличением степени заполнения внешней оболочки.

Рисунок 27

Мутации фигуры ядра от сплюснутой к удлиненной, или обратно, в зависимости от знака высвобождаемой энергии, согласно данным

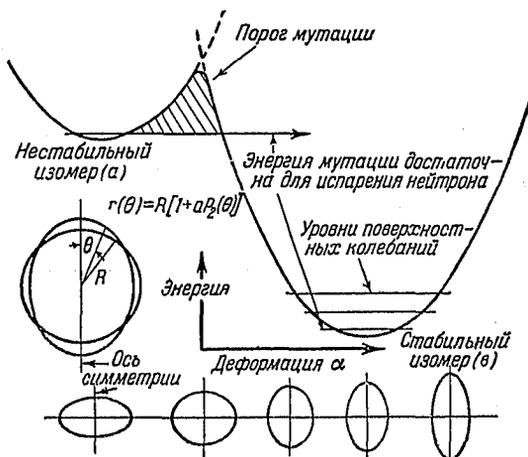


Рис. 27. Мутации фигуры ядра.

рис. 26, возможны в ядрах, в которых оболочка заполнена от  $1/3$  до  $2/3$ . Кажется невероятным, что при таких больших деформациях деформаци-

онная энергия замкнутых оболочек всё ещё пропорциональна  $\alpha^2$ . Следовательно, надлежит рассматривать эту диаграмму только как идеализированную схематизацию действительной потенциальной поверхности и только для сферондальных фигур ядра (аксиальная симметрия). Сферическая конфигурация является потенциальным барьером против переходов от стабильных к нестабильным изомерным фигурам.

Рисунок 28

Энергия идеализированно представлена как сумма энергии поверхности и энергии одиночных нуклонов, занимающих возможно более низкое положение в потенциальной яме заданной формы. Минимумы полной энергии имеют место в случаях, когда моменты количества движения

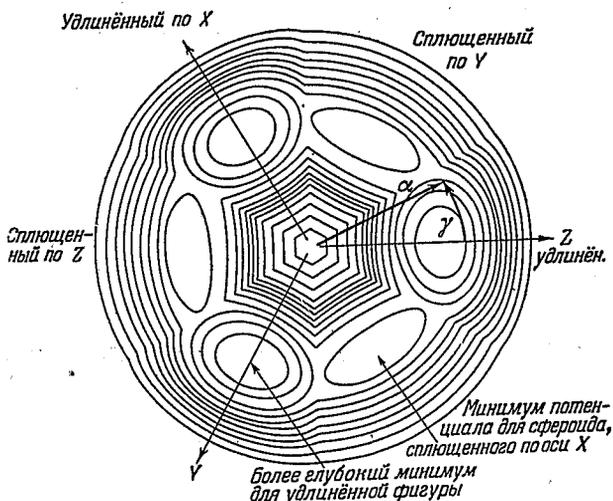


Рис. 28. Контурная диаграмма зависимости энергии от деформационных переменных  $\alpha$  и  $\gamma$  рис. 13 для основного состояния тяжёлых ядер с оболочкой, заполненной чуть больше половины.

нуклонов направлены возможно ближе параллельно или антипараллельно к оси симметрии (сплюснутая фигура) или когда они направлены возможно ближе к перпендикуляру к оси симметрии (удлинённая фигура). Для перехода от удлинённой фигуры к сплюснутой через сферическую, требуется большая энергия. Как указал Теллер, наиболее доступным путём является переход по гребню потенциальной поверхности. Этому гребню отвечает фигура неравноосного эллипсоида.

Рисунок 29

Кружками обозначены моменты ядер, имеющих нечётное число протонов или нечётные числа протонов и нейтронов (кроме  $\text{Li}^6$  и  $\text{Cl}^{35}$ ), в зависимости от числа протонов. Крестиками обозначены моменты ядер, имеющих нечётное число нейтронов, в зависимости от числа нейтронов.

Стрелки указывают заполнение главных нуклеонных оболочек. Сплошная линия отмечает области точно установленных квадрупольных моментов

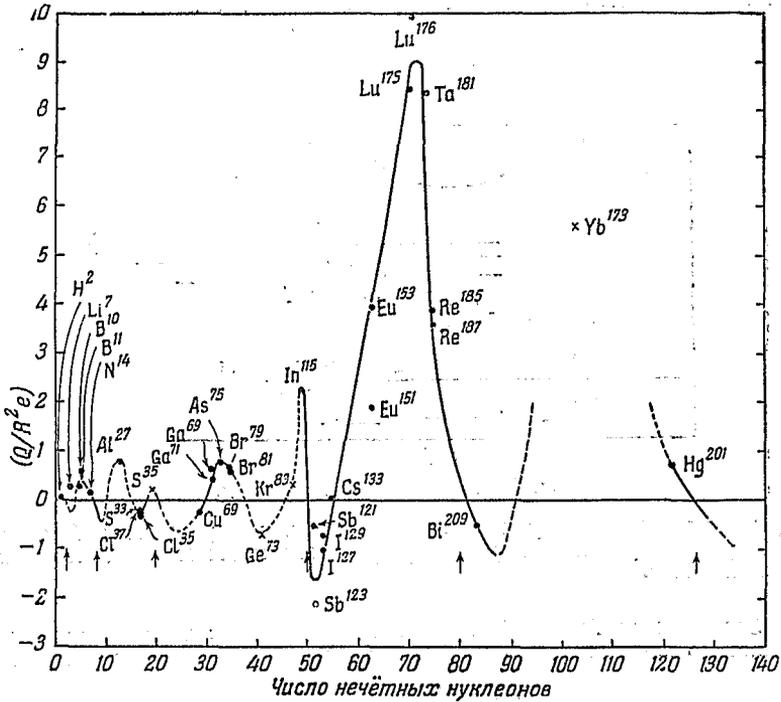


Рис. 29. Эффективные ядерные квадрупольные моменты сверхтонкой структуры, делённые на квадрат радиуса ядра ( $1,5 \cdot 10^{-13} \text{А}^{1/3}$ )<sup>2</sup>.

тов, пунктирная линия — сомнительные области. Рисунок заимствован из статьи Таунса и др.<sup>10</sup>. Связь между  $Q$  и  $\alpha$  дана на рис. 5.

Рисунок 30

$\alpha$ -активные ядра обычно имеют квадрупольный момент и поэтому испускают  $\alpha$ -частицы преимущественно из выступающих участков поверхности, где высота потенциального барьера понижена. Длина волны  $\lambda = \frac{\lambda}{2\pi}$   $\alpha$ -частицы с энергией 5 Мэв, равная  $1 \cdot 10^{-13}$  см, мала по сравнению

с диаметром типичного тяжёлого ядра порядка  $18 \cdot 10^{-13}$  см. Следовательно, излучение будет направленным по отношению к оси ядра — факт, который устанавливается лучше, чем корреляция ядерных осей, самих по себе, по отношению к выделенному направлению в пространстве. В частности, ядерное состояние с угловым моментом, равным нулю, характеризуется изотропным  $\alpha$ -излучением в лабораторной системе координат, хотя в ядерной системе координат излучение анизотропно по отношению к ядерной поверхности. Максимальная направленность будет наблюдаться при одновременном выполнении следующих условий: ядерный спин  $I$  велик, его проекция  $I_z$  на выделенную ось (сильное магнитное поле,

низкая температура) равна  $\pm I$  и рассматриваемое ядро в среднем во времени удлинено вдоль оси ядерного спина  $I$ . В этом случае излучение будет иметь преимущественное направление параллельно и анти-

Направленное  $\alpha$ -излучение

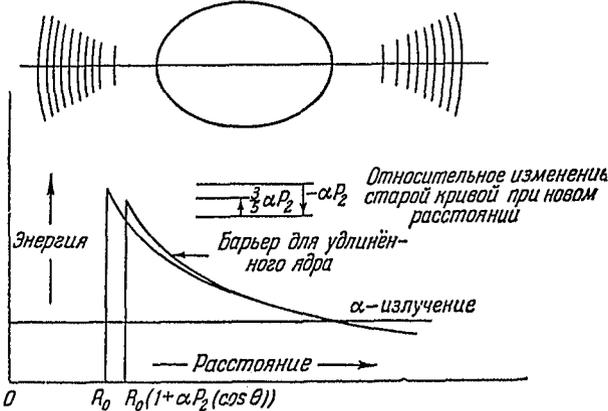


Рис. 30. Направленный  $\alpha$ -распад.

параллельно магнитному полю. Если в тех же условиях наблюдается максимум в направлении, перпендикулярном к полю, это означает, что эллипсоид сплюснут.

Рисунок 31

Соотношение Гейгера-Нэттола между энергией  $\alpha$ -частиц и продолжительностью жизни ядра в отношении  $\alpha$ -распада не является однозначным,

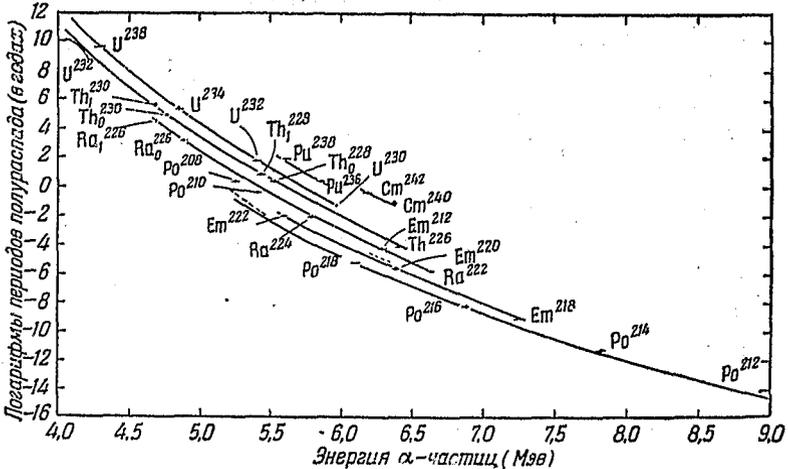


Рис. 31. Периоды полураспада в зависимости от энергии  $\alpha$ -частиц.

как это показано в недавнем обзоре чётно-чётных ядер Перлмана, Гиорсо и Сиборга <sup>78</sup> (см. также <sup>79-81</sup>). Перлман <sup>78</sup> и др. привели анало-

гичные кривые для ядер других классов. Этой однозначности и не следовало ожидать. Трактовка прохождения через барьер приводит к формуле (см. также §2)

$$\left( \begin{array}{c} \text{Вероятность} \\ \alpha\text{-распада} \\ \text{в секунду} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Внутренняя} \\ \text{вероятность} \\ \alpha\text{-излучения} \end{array} \right) \cdot e^{-2 \frac{2Z}{137} \sqrt{\frac{2M_\alpha c^2}{E_\alpha}} \cdot f(u)}$$

в которую входит не только энергия  $\alpha$ -частиц (мы отвлекаемся здесь от хорошо известной малой поправки на конечность массы и энергию ядра отдачи), но также заряд и радиус ядра

$$u = \frac{E_\alpha}{\text{высота барьера}} = \frac{E_\alpha R_0}{2Ze^2} = \frac{E_\alpha A^{1/3}}{4\pi mc^2 Z},$$

$$f(u) = \arccos u^{1/3} - u^{1/3} (1 - u^{1/3}).$$

Тем не менее, отклонения точек на диаграмме от гладкой кривой, со ответствующей заданной  $Z$ , кажутся слишком большими и нерегулярными, чтобы быть связанными исключительно со следующей отсюда зависимостью от  $Z$  и  $A$ . Аномалии в энергии связи вблизи заполненных оболочек приводят к нерегулярным вариациям  $E_\alpha$  от элемента к элементу, но эти вариации в энергии сами по себе не могут объяснить отклонения от формулы проницаемости барьера. Однако наличие квадрупольных моментов приводит к отклонениям от этой формулы, весьма чувствительным к заполнению нуклеонных оболочек — или более точно, чувствительным к деформациям фигуры ядра, вызванным асимметричным давлением на поверхность нуклеонов незаполненных оболочек. Для деформации  $R = R_0 [1 + \alpha P_2(\cos \theta)]$  потенциальная энергия  $\alpha$ -частицы вне ядра в первом приближении равна

$$V = \frac{2Ze^2}{r} \left[ 1 + \frac{3R_0^2}{5r^2} \alpha P_2(\cos \theta) \right].$$

Оценив заново интеграл

$$\frac{2}{h} \int_{R(\theta)}^{\text{точка поворота}} [2M_\alpha (V - E_\alpha)] dr,$$

в экспоненте формулы для проницаемости барьера найдём, что множитель  $f(u)$  изменяется на величину

$$\delta f(u) = -\frac{2}{5} \alpha P_2(\cos \theta) u^{1/3} (1 - u^{1/3}) (2 - u).$$

Мы пренебрегли здесь тем фактом, что площадь поверхности, с которой происходит заметное излучение, в действительности несколько меньше  $4\pi R_0^2$ . Это обстоятельство с избытком компенсируется увеличением проницаемости барьера между уменьшения его толщины. Соответственно мы подставляем значения угла  $\theta$ , отвечающие максимальному испусканию:

$$\begin{aligned} -\alpha P_2(\cos \theta) &= -\alpha \text{ для удлинённых эллипсоидов,} \\ -\alpha P_2(\cos \theta) &= \alpha/2 \text{ для сплюснутых эллипсоидов,} \\ \delta f(u) &\text{— отрицательное число в обоих случаях.} \end{aligned}$$

Увеличение скорости  $\alpha$ -распада при эллипсоидальной деформации характеризуется множителем

$$\exp \left[ -2 \frac{2Z}{137} \sqrt{\frac{2M_\alpha c^2}{E}} \delta f(u) \right],$$

равным при  $Z = 90$ ,  $A = 234$ , высоте барьера  $30 \text{ Мэв}$  до деформации, энергии  $\alpha$ -распада  $E = 5 \text{ Мэв}$ , полной энергии  $\alpha$ -частицы  $Mc^2 = 3700 \text{ Мэв}$  и безразмерном отношении  $u = \frac{5 \text{ Мэв}}{30 \text{ Мэв}}$ ,

$$\exp(-101 \delta f) = \exp[-101(-0,273\alpha P_2)] = \begin{cases} \exp 28\alpha \text{ (удлинён.)} \\ \exp(-14\alpha) \text{ (сплющен.)} \end{cases}$$

Таким образом, деформация удлинения оси на  $\alpha = 0,1$  — величину, лежащую в пределах, соответствующих наблюдаемым квадрупольным моментам, может привести к увеличению скорости распада примерно в  $e^{2,8} = 16$  раз. Конечно, по данным скоростей распада, связанным с заданным процессом  $\alpha$ -распада, нельзя одновременно определить радиус ядра и квадрупольный момент. Можно определить только некоторую комбинацию обеих величин, которую обычно обозначают в отсутствие других явлений эффективным радиусом ядра. Между эффективным радиусом, радиусом сферы равного объёма и квадрупольным моментом существует соотношение

$$R_{\text{эфф}} = \frac{2Ze^2}{E_\alpha} u_{\text{эфф}} = \frac{2Ze^2}{E_\alpha} \left[ u + \frac{\delta f}{\left(\frac{df}{du}\right)} \right] = R_0 \left[ 1 + \frac{2}{5}(2-u)\alpha P_2 \right],$$

или с точностью, достаточной для большинства ядер,

$$\frac{R_{\text{эфф}} - R_0}{R_0} = 0,533\alpha P_2 = \begin{cases} 0,533\alpha \text{ (удлинён.)} \\ -0,267\alpha \text{ (сплющен.)} \end{cases}$$

Представляет интерес в связи с этими выводами рассмотреть  $\alpha$ -активность самария. Измерения энергии  $\alpha$ -частиц, проведённые Иессом и Садаускисом<sup>83</sup>, дали величину  $2,18 \text{ Мэв}$ , и активность приписана изотопу  $\text{Sm}^{147}$  (см. <sup>84, 85</sup>). Мы обязаны обсуждением этого примера Перлману, который принял радиус ядра равным  $7,81 \cdot 10^{-13} \text{ см}$  и вычислил величину периода полураспада  $2,9 \cdot 10^{12}$  лет<sup>86</sup>, в 10—20 раз больше экспериментальной. Перлман нашёл также, что увеличение энергии  $\alpha$ -распада на  $80 \text{ Мэв}$  или увеличение радиуса ядра примерно на  $10\%$  устранило бы расхождение. С другой стороны, мы можем отметить, что удлинение

на  $\frac{10\%}{0,533} = 19\%$  или сплющивание на  $\frac{10\%}{0,267} = 37\%$  привело бы к тому же

результату, если только принятый радиус  $7,81 \cdot 10^{-13} \text{ см}$  действительно является подходящим приближением для радиуса сферы такого же объёма. Квадрупольные деформации такого порядка были найдены на опыте для ядер в непосредственной близости от самария. Брикс и Копферман<sup>87</sup> высказали ряд соображений относительно периода полураспада самария. Конечно, уменьшение времени жизни, происходящее у  $\text{Sm}^{147}$  в сильной степени, происходит также в большей или в меньшей степени у большинства других ядер. Следовательно, ядерные радиусы, найденные из анализа данных  $\alpha$ -распада, должны быть в среднем несколько больше соответствующих радиусов сфер равного объёма. С этой точки зрения, радиусы

изотопов полония<sup>80</sup>, ранее считавшиеся аномально малыми, должны сейчас рассматриваться как нормальные величины. Очевидно, что прямые измерения квадрупольных моментов  $\alpha$ -активных ядер, где они возможны, были бы весьма желательны. Необходимо также упомянуть об аномалиях в изотопических смещениях атомных спектров<sup>24</sup>, которые легко объясняются, если предположить, что вследствие эллипсоидальной деформации увеличивается электронно-эффективный радиус ядра (обстоятельство, отмеченное Вилетсом). Возможно, что удастся развить новый экспериментальный метод изучения квадрупольных моментов путём исследования так называемого излучения Чанга, связанного с переходом  $\mu$ -мезона с боровской орбиты  $2p$  на  $1s$ . Этот метод должен быть близок к методу изучения атомных спектров с той, однако, разницей, что смещения и расщепления термов в процентном отношении здесь во много раз больше, чем в атомных спектрах, вследствие большего промежутка времени, проводимого  $\mu$ -мезоном вблизи ядра. Период полураспада  $\alpha$ -излучения зависит не только от проникаемости барьера (формула Герни-Кондона), но также от принципа Франка-Кондона, т. е. не только от равновесной деформации первоначального ядра, но также от различия между начальным и конечным состоянием нуклеонов. Если это различие велико, то мало вероятно, что остаточное ядро образуется в состоянии нулевых колебаний. За этот счёт произойдёт уменьшение скорости  $\alpha$ -распада, не принятое во внимание в вышеприведённых рассуждениях. Переходы в низшее колебательное состояние будут запрещены относительно переходов в колебательные состояния, предпочтительные с точки зрения принципа Франка-Кондона. Это обстоятельство должно быть принято во внимание при интерпретации тонкой структуры  $\alpha$ -спектров.

## Р и с у н о к 32

Можно ли экспериментально отличить диффракционное или теневое рассеяние на эллипсоидальных ядрах от рассеяния на сферических ядрах? Качественный анализ, проведённый на этом рисунке, показывает, что отношение минимума к максимуму при диффракции на случайно ориентированных ядрах данной формы действительно является чувствительным показателем ядерной деформации. Это отношение равно нулю (в идеализированной картине диффракционного рассеяния) только в случае сферических рассеивающих центров. Количественный анализ может быть проделан следующим образом: пусть  $f$  и  $g$  — главные оси проекции эллипсоида на плоскость приёмника, а  $X$  и  $Y$  — оси, ориентированные параллельно  $f$  и  $g$ . Вклад части  $dS = d\xi d\eta$  площади проекции эллипсоида в амплитуду рассеянной волны на расстоянии  $r_{12}$ , при не очень большом угле  $\theta$  к первоначальному направлению, равен

$$-\frac{ik}{2\pi r_{12}} \exp(ikr_{12}) dS,$$

где  $k$  — волновое число. Дифференциальное сечение рассеяния равно:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{k}{2\pi} \int \exp \left[ \frac{-ik(x\xi + y\eta)}{r} \right] d\xi d\eta \right|^2.$$

Здесь направление рассеяния определено отношениями  $\frac{x}{r}$  и  $\frac{y}{r}$ . Обозначая  $\xi = fu \cos \theta$ ,  $\eta = gu \sin \theta$  и интегрируя вначале по  $\theta$ , затем по  $u$  от 0 до 1, получим:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left\{ \frac{kfgJ_1 \left[ k^2 f^2 \frac{x^2}{r^2} + k^2 g^2 \frac{y^2}{r^2} \right]^{1/2}}{\left( k^2 f^2 \frac{x^2}{r^2} + k^2 g^2 \frac{y^2}{r^2} \right)^{1/2}} \right\}^2$$

для рассеяния от одной ориентации эллипсоида. Суперпозиция таких кривых даёт окончательное распределение. Ричардсон, Бэлл, Лейт

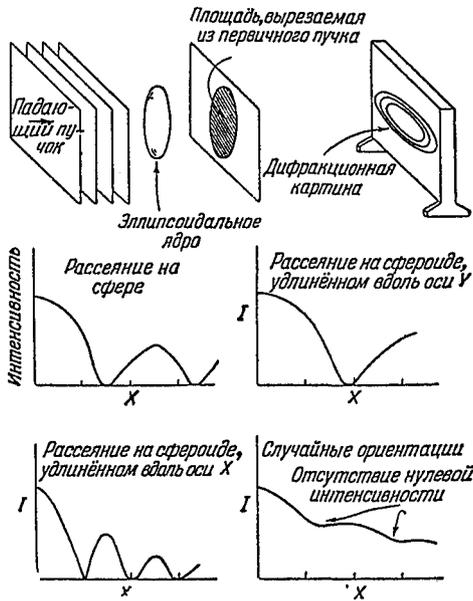


Рис. 32. Диффракция на эллипсоидальных ядрах.

и Мойер<sup>00</sup> впервые упомянули об этом эффекте, который, однако, при существующей точности экспериментов остаётся незамеченным.

(Окончание в следующем выпуске)