1954 г. Май Т. LIII, вып. 1

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

СВОЙСТВА СИММЕТРИИ В ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ЯДЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

И. С. Шапиро

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних лет число известных физикам так называемых элементарных частиц значительно возросло. Многие из этих частиц неустойчивы и распадаются на другие частицы (нейтрон, μ-, π-, τ-мезоны, V-частицы и др.). Количество и типы частиц, появляющихся в качестве продуктов распада, определяются, прежде всего, хорошо известными законами сохранения заряда, энергии, импульса и момента количества движения. Вместе с тем, однако, современная теория указывает некоторые дополнительные правила отбора, позволяющие в ряде случаев понять, почему процесс, разрешённый упомянутыми выше основными законами сохранения, в действительности не происходит. То же самое имеет место и для различного рода ядерных превращений.

Существование разнообразных правил отбора обусловлено инвариантностью лагранжиана и уравнений движения (волновых уравнений) относительно различных групп преобразований и в первую очередь относительно группы преобразований систем отсчёта. Весьма существенно, что задание группы преобразований систем отсчёта определяет и законы преобразования физических величин при переходе от одной системы отсчёта к другой. Это происходит потому, что каждому преобразованию s системы отсчёта соответствует некое преобразование S данной физической величины и, кроме того, произведению $s_2 \cdot s_1$ двух преобразований s_1 и s_2 соответствует произведение $S_2 \cdot S_1$ преобразований S_1 и S_2. Если преобразование S линейное, а соответствие $s \rightarrow S$ однозначное (взаимная однозначность не обязательна), то говорят, что группа преобразований S является представлением группы преобразований s систем отсчёта. Однозначность соответствия $s \rightarrow S$ необходима, очевидно, в том случае, когда рассматриваемая физическая величина относится к числу непосредственно измеряемых на опыте. Если же данная физическая величина является вспомогательной (например, волновая функция частицы, задаваемая с точностью до произвольного фазового множителя), то в принципе при некоторых дополнительных условиях допустима и многозначность. Очень важным случаем использования в физике многозначного соответствия указанного выше типа является двузначное, так называемое спинорное представление, по которому преобразуются волновые функции частиц с полуцелым спином.

Настоящая статья посвящена рассмотрению свойств симметрии волновых уравнений и некоторых основывающихся на них правил отбора.

Весьма важные свойства симметрии проистекают от инвариантности лагранжиана и, следовательно, уравнений движения относительно отражений пространственных и временной осей координат. Мы начнём с рассмотрения именно этих преобразований, имея своей ближайшей целью указать возможные типы частиц с данным спином.

2. ТИПЫ ЧАСТИЦ. ВНУТРЕННЯЯ ЧЁТНОСТЬ

Рассмотрим вначале преобразования вращений и отражений относительно начала координат трёх пространственных осей. Спином частицы определяются трансформационные свойства её волновой функции относительно вращений системы координат. Точнее, указывая спин частицы, мы фиксируем неприводимое *) представление группы трёхмерных вращений, по которому преобразуется её волновая функция **). Мы ограничимся здесь изучением частиц со спинами 0, 1 и ½, так как частицы с более высокими спинами до сих пор не наблюдались.

Если нам известно поведение волновой функции при вращениях системы координат, то этим ещё не вполне определяется закон преобразования при отражении осей. Причина состоит в том, что преобразования отражения осей координат не могут быть сведены к вращениям. Поэтому в задании закона преобразования волновой функции частицы с определённым спином при отражении осей координат имеется известная свобода. Мы говорим «известная»,

*) Пусть преобразующаяся по данному представлению величина Ψ (в нашем случае — волновая функция) имеет компоненты $\Psi_1,\ldots,\Psi_n$. Тогда представление называется неприводимым, если нельзя найти $m < n$ линейных комбинаций компонент $\Psi_1,\ldots,\Psi_n$, которые бы преобразовались друг через друга при всех преобразованиях данной группы.

**) В данной статье рассматриваются только обычные, конечно-мерные представления группы Лоренца. По поводу бесконечно-мерных представлений см. работу Гельфанда и Наймарка [1] и Гельфанда и Яглома [1a]. В отношении теории представлений группы трёхмерных вращений мы отсылаем читателя к статье Гельфанда и Шапиро [2].

так как преобразования отражения и вращений всё же связаны друг с другом. Именно, любое вращение может быть получено как произведение чётного числа преобразований зеркального отражения осей относительно различных плоскостей, проходящих через начало координат. Соответственно этому преобразование, претерпеваемое волновой функцией при вращениях, также должно быть представимо в виде произведения чётного числа преобразований, связанных с отражением осей. Этим обстоятельством и ограничивается свобода выбора закона преобразования волновой функции при отражениях, если её трансформационные свойства в отношении группы вращений заданы.

Обозначим волновую функцию частицы через $\Psi(x)$. В общем случае $\Psi(x)$ — многокомпонентная величина и преобразуется при преобразованиях системы координат

$$x' = sx, \tag{1}$$

где s означает матрицу, а x — четырёхмерный радиус-вектор точки*), по закону

$$\Psi'(x) = \Psi'(s^{-1}x') = S\Psi(x). \tag{2}$$

В уравнении (2) s^{-1}, как обычно, означает преобразование, обратное s, а S — некоторую матрицу, поскольку мы будем рассматривать, за немногим исключением, только линейные преобразования**).

Если спин частицы равен 0, то её волновая функция состоит из одной компоненты, причём для всех вращений $S=1$. Матрица S для отражений пространственных осей относительно какой-либо плоскости, проходящей через начало координат, также должна состоять из одного только числа ζ, которое может быть и отлично от 1. Следовательно, при отражениях осей волновая функция частицы с нулевым спином преобразуется по закону

$$\Psi'(x) = \zeta\Psi(x). \tag{3}$$

Можно легко обнаружить, что величина ζ должна быть одинакова для отражений относительно любой плоскости, проходящей через начало. В самом деле, обозначим совокупность параметров, опре-

---

*) Мы считаем все компоненты четырёхмерного радиуса-вектора x_1, x_2, x_3 и $x_0 = ct$ действительными. Квадрат длины вектора записывается в виде

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2.$$

**) Подчеркнём, что согласно (2) рассматриваемое преобразование волновой функции $\Psi(x)$ не состоит в замене аргумента x на x'. Преобразование (2) не отвечает на вопрос, как выражается функция $\Psi(x') = \Psi(sx)$ через $\Psi(x)$. Поэтому вид функции $\Psi(x)$ может быть совершенно произвольным. Мы интересуемся в этом параграфе поведением $\Psi(x)$ при преобразованиях системы отсчёта, но не при перемещении из одной точки пространства в другую.

деляющих положение отражающей плоскости буквой a. Тогда, поскольку группа всех преобразований S является представлением группы вращений и отражений осей координат, мы должны иметь

$$\zeta(a'')\,\zeta(a')=1, \tag{4}$$

так как произведение двух отражений есть вращение.

Из (4) при $a'=a''$ получаем:

$$\zeta(a')^2=1, \tag{5}$$

и, сопоставляя (4) и (5), находим:

$$\zeta(a')=\zeta(a'')=\zeta=\pm 1. \tag{6}$$

Число ζ определяет внутреннюю пространственную чётность частицы. Можно, таким образом, указать два типа частиц со спином 0, но с различной внутренней пространственной чётностью: скалярные частицы, соответствующие $\zeta=+1$, и псевдоскалярные, характеризующиеся $\zeta=-1$. Волновые функции этих двух типов частиц при отражении пространственных осей координат преобразуются по-разному, но абсолютно одинаково ведут себя при вращениях. Примером псевдоскалярных частиц могут служить, как это следует из экспериментальных данных, $\pi^{\pm}$- и π^0-мезоны; что же касается скалярных частиц, то, возможно, таковыми являются V_2^0-частицы, распадающиеся по схеме[3]

$$V_2^0 \to \pi^+ + \pi^-.$$

Волновая функция частицы со спином 1 имеет четыре компоненты и преобразуется при вращениях так же, как радиус-вектор x. Поэтому для вращений $S=s$. Допустим, что для отражений матрица $S=A'$, а матрица $s=A$. Тогда по тем же соображениям, что и в случае частицы со спином 0, мы должны иметь для произведения любых двух отражений, определяемых параметрами a', a'':

$$A'(a'')\cdot A'(a')=A(a'')\cdot A(a') \tag{7}$$

и

$$A'^2=1, \tag{8}$$

так как $A^2=1$. Помножив (7) справа на $A'(a')$, найдём:

$$A'(a'')=A(a'')\cdot A(a')\cdot A'(a'). \tag{9}$$

Из (9) следует, что матрица $A(a)\cdot A'(a)=B$ не зависит от a. Мы можем написать:

$$A'=AB. \tag{10}$$

Принимая во внимание (8), получим:

$$BA = AB^{-1}. \tag{11}$$

Теперь используем тот факт, что вид матрицы A известен. Если выбрать в качестве параметров a составляющие единичного вектора, перпендикулярного плоскости, относительно которой производится отражение, то

$$x'_\mu = x_\mu - 2a_\mu (x_\alpha a_\alpha), \quad a_\alpha a_\alpha = 1\ ^*), \tag{12}$$

так что

$$(s)_{ij} = (A)_{ij} = \delta_{ij} - 2a_i a_j. \tag{13}$$

С помощью (13) и (11) легко получить:

$$B^2 = 1, \tag{14}$$

причём матрица B диагональна:

$$B = [-\zeta, \ -\zeta, \ -\zeta, \ 1]. \tag{15}$$

На основании (14) имеем:

$$\zeta^2 = 1, \quad \zeta = \pm 1. \tag{16}$$

Таким образом, и в случае спина 1 мы имеем два типа частиц с различной внутренней пространственной чётностью — векторные ($\zeta = -1$) и псевдовекторные или аксиально-векторные ($\zeta = +1$). Волновые функции векторных частиц преобразуются в точности так же, как радиус-вектор. Волновые функции псевдовекторных частиц преобразуются так же, как радиус-вектор, только при вращениях. Матрицы же, соответствующие отражениям пространственных осей, отличаются от матриц, дающих преобразование радиуса-вектора, тем, что элементы, стоящие на пересечении первых трёх строк и столбцов, имеют обратные знаки. Примером векторных частиц являются кванты электромагнитного поля. Возможно также, что векторными частицами окажутся упоминавшиеся выше V_2^0-частицы. Рассматривая частицы со спинами 0 и 1, мы пришли к выводу о наличии в каждом случае двух типов частиц, различающихся по своей внутренней пространственной чётности. Можно показать, что такое же положение имеет место вообще для всех частиц с целочисленным спином.

Перейдём теперь к трансформационным свойствам волновых функций частиц со спином $^1/_2$. Поведение волновых функций таких частиц при отражении пространственных осей оказывается существенно иным, а рассмотрение вопроса несколько более сложным. Это происходит потому, что соответствие $s \to S$ в данном случае неоднозначно. Каждому преобразованию s системы

$^*)$ $x_\alpha a_\alpha = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 - x_0 a_0$.

координат соответствуют две матрицы $+S$ и $-S$, осуществляющие согласно (2) преобразование волновой функции. Причина двузначности соответствия кроется в характере зависимости матрицы S от параметров, определяющих данное преобразование координатных осей (например, компоненты единичного вектора a_μ в случае отражения относительно плоскости, перпендикулярной a_μ, или, если речь идёт о вращениях — угол поворота относительно оси вращения и единичный вектор, направленный вдоль этой оси). Вместе с тем, и это особенно важно для физики, соответствию $s \rightarrow S$ может быть придана однозначность в случае бесконечно малых вращений*). Мы имеем, таким образом, представление группы вращений только «в бесконечно малом». Такое представление называется спинорным, а величины, преобразующиеся по этому представлению, — спинорами. Вращениям системы координат вокруг произвольной оси на углы φ и $\varphi+2\pi$ соответствует в уравнении (1) одна и та же матрица s. В отличие от этого матрицы S, преобразующие спинор, при таком преобразовании системы координат имеют разные знаки (см. [2] или [5]). Так как это положение остаётся в силе и для $\varphi=0$, то можно сказать, что при вращении системы координат относительно любой оси на угол 2π спинорная волновая функция меняет знак. Двузначность спинорного представления группы вращений как раз и заключается в том, что одной и той же матрице $s(\varphi)=s(\varphi+2\pi)$ соответствуют две матрицы $S(\varphi)$ и $-S(\varphi)=S(\varphi+2\pi)$. Обозначим символом $A(a_\mu)$ матрицу, преобразующую спинор при отражении осей относительно плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к единичному вектору a_μ. Ввиду двузначности спинорного представления мы теперь уже не можем, как это было в случае частиц со спинами 0 и 1, выставить в качестве категорического требования условие

$$A(a_\mu)^2=1. \tag{17}$$

Действительно, тождественному преобразованию осей координат

*) Построение тензора момента количества движения и вывод соответствующего закона сохранения из инвариантности лагранжиана относительно вращений предполагают в качестве необходимого условия, чтобы бесконечно малое изменение координатной системы вызывало бесконечно малое изменение входящих в лагранжиан волновых функций (см., например, [4]). Последнее возможно только при однозначном выборе непрерывно зависящего от параметров оператора бесконечно малого поворота. Если бы даже в случае бесконечно малых поворотов, не было возможности выбрать из двух значений матрицы S какое-либо одно, то это, другими словами, означало бы, что имеется два совершенно равноправных значения преобразованной функции $\pm\Psi'(x)$. Ясно, что если, например, $\Psi'(x)-\Psi(x)=\delta\Psi(x)$ — бесконечно малая величина, то $(-\Psi'(x))-\Psi(x)=-\delta\Psi(x)-2\Psi(x)$ не является таковой.

($s=1$) в спинорном пространстве соответствуют две матрицы $S(0)=+1$ (поворот на угол 0) и $S(2\pi)=-1$ (поворот на угол 2π). Но дважды произведённое отражение относительно одной и той же плоскости может рассматриваться с одинаковым правом и как вращение на угол 0 и как вращение на угол 2π. Поэтому вместо (17) можно было бы потребовать:

$$A'(a_\mu)^2=-1. \tag{18}$$

Представления, для матриц которых справедливы уравнения (17) и (18), как легко обнаружить, не эквивалентны*). Поэтому волновые функции, *преобразующиеся при отражениях матрицами* A и A', соответствуют разным частицам. Мы увидим (§ 4), что различие в законах преобразования (17) и (18) действительно может проявиться в наблюдаемых на опыте эффектах. Из сказанного видно, что в то время, как для частиц со спинами 0 и 1 различное поведение волновой функции при отражениях сводится к различию во внутренних чётностях, волновые функции спинорных частиц различаются в смысле преобразования при отражениях совершенно по-другому. Здесь разные знаки имеют не сами матрицы A и A', а их квадраты. Понятие же о внутренней пространственной чётности в том смысле, в каком она была определена выше, для спинорных частиц ввести невозможно. Это обстоятельство является следствием двузначности спинорного представления и может быть понято, если выписать в явном виде матрицу $A(a_\mu)$ (или $A'(a_\mu)$) как функцию компонент единичного вектора a_μ. Рассмотрим произведение двух отражений $A(a''_\mu)\cdot A(a'_\mu)$. Это преобразование есть вращение относительно некоторой оси на угол φ:

$$A(a''_\mu)\cdot A(a'_\mu)=S(\varphi).$$

Нетрудно сообразить, что вращению относительно этой же оси на угол $\varphi+2\pi$ будет соответствовать матрица

$$S(\varphi+2\pi)=A(-a''_\mu)\cdot A(a'_\mu)=A(a''_\mu)\cdot A(-a'_\mu).$$

Но согласно предыдущему

$$S(\varphi)=-S(\varphi+2\pi),$$

поэтому

$$A(a''_\mu)\cdot A(a'_\mu)=-A(-a''_\mu)\cdot A(a'_\mu). \tag{19}$$

---

*) Это значит, что не существует неособенной матрицы P ($\mathrm{Det}\,P\neq 0$), удовлетворяющей для всех A и A' соотношению

$$A'=PAP^{-1}.$$

Уравнение (19) свидетельствует о том, что элементы матрицы $A(a_\mu)$ являются нечётными функциями компонент единичного вектора a_μ. Легко убедиться в том, что $A(a_\mu)$ есть линейная функция a_μ. Если бы это было не так, то из (17) и (18) мы получили бы некое соотношение между компонентами a_μ, отличное от единственно возможного

$$a_\alpha a_\alpha = 1. \qquad (20)$$

В уравнении (20) $a_0 = 0$, так как мы рассматривали преобразования пространственных осей систем координат, связанных с одним и тем же телом отсчёта. Поскольку, однако, мы интересуемся всей группой Лоренца*), то необходимо рассмотреть, например, преобразования, состоящие в отражении осей относительно проходящей через начало координат плоскости и переходе к движущейся системе отсчёта**). Математически такое преобразование будет выглядеть как отражение относительно трёхмерной гиперплоскости, перпендикулярной к пространственно-подобному единичному вектору a_μ. Имея это в виду, мы можем теперь написать для матрицы $A(a_\mu)$ следующее выражение:

$$A(a_\mu) = a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + a_0 h_0. \qquad (21)$$

Аналогичный вид (h_μ заменяются на h'_μ) имеет и матрица $A'(a_\mu)$, удовлетворяющая (18). Сравним теперь уравнение (22) с уравнением (13), дающим вид матрицы s преобразования координат точки при отражении относительно гиперплоскости, перпендикулярной к пространственно-подобному вектору. В уравнение (13) компоненты a_μ входят квадратично, так что $s(a_\mu) = s(-a_\mu)$. Так и должно быть, ибо векторы a_μ и $-a_\mu$ определяют одну и ту же гиперплоскость, относительно которой производится отражение. Что же касается матрицы (21), то $A(a_\mu) = -A(-a_\mu)$. Следовательно, одной и той же матрице $s(a_\mu)$ соответствуют две матрицы $\pm A(a_\mu)$.

Таким образом, в отличие от частиц с целым спином матрицы $\pm A(a_\mu)$ дают преобразования **волновой функции одной и той же частицы с полуцелым спином** при отражении пространственных осей. Среди частиц со спином $^1/_2$ нет поэтому «спинорных» и «псевдоспинорных» в том смысле, в каком мы говорили, например, о скалярных и псевдоскалярных частицах. Вместе с тем, однако, если рассматриваются две различные спинорные частицы (например, нейтрон и протон, электрон и нейтри-

---

*) Группой Лоренца, как известно, охватываются все трёхмерные и четырёхмерные вращения, а также преобразования отражения относительно начала координат пространственных осей.

**) Все другие преобразования Лоренца, включающие в себя отражения пространственных осей, получатся как произведение нечётного числа преобразований указанного в тексте типа.

но), можно говорить об их относительной внутренней чётности. Говорят, что две спинорные частицы обладают различной относительной чётностью, если знаки матриц A, преобразующих волновые функции частиц при каждом данном отражении пространственных осей, различны. Отличие относительной внутренней чётности для спинорных частиц от рассмотренной выше внутренней чётности частиц со спинами 0 и 1 состоит в том, что в случае спина $^1/_2$ можно фиксировать только различие или совпадение знаков матриц A, но для каждой из частиц матрицу A можно взять как со знаком $+$, так и со знаком $-$ *).

Найдём теперь матрицы h_μ. Это легко сделать, если воспользоваться соотношением (17). Подставив (21) в (17), найдём:

$$h_1^2 = h_2^2 = h_3^2 = +1, \quad h_0^2 = -1, \tag{22}$$

$$h_i h_j + h_j h_i = 2\delta_{ij} \ (i, \ j = 1, \ 2, \ 3), \ h_j h_0 + h_0 h_j = 0. \tag{23}$$

Условию (22) и перестановочным соотношениям (23) удовлетворяют, как известно, матрицы γ_μ, входящие в уравнение Дирака:

$$\left(\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + m\right) \Psi(x) = 0 \ ^{**}). \tag{24}$$

Можно показать (см. [7]), что существуют только две возможности выбора матриц h_μ:

либо

$$h_\mu = \gamma_\mu, \tag{25}$$

либо

$$h_\mu = \gamma_\mu \gamma_5, \quad \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_0, \tag{26}$$

причём

$$\gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\mu = 0, \quad \gamma_5^2 = -1. \tag{27}$$

Если в уравнении (24) $m \neq 0$, то возможность (25) приходится отбросить, так как в противном случае уравнение (24) не будет инвариантным относительно отражения осей координат. В самом деле, инвариантность уравнения (24) означает, что если $\Psi(x)$ удовлетворяет (24), то $\Psi'(s^{-1}x') = A\Psi(x)$ является решением уравнения, получающегося из (24) заменой $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ на $\frac{\partial}{\partial x'_\mu}$. Произведём отражение относительно проходящей через начало координат плоскости, перпендикулярной к одной из осей, например j-й.

*) На возможность введения понятия относительной внутренней чётности для спинорных частиц обратил внимание Ландау (см. работу [6]).

**) Мы используем единицы, в которых $\hbar = c = 1$ ($\hbar$ — постоянная Планка, делённая на 2π; c — скорость света в вакууме).

Тогда, если $h_j = \gamma_j$, получим:

$$\left(-\gamma_j \frac{\partial}{\partial x'_j} + \sum_{k \neq j} \gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} + m\right) \gamma_j \Psi' = -\gamma_j \left(\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} - m\right) \Psi' = 0$$

или

$$\left(\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} - m\right) \Psi' = 0,$$

что не совпадает с (24)*). Если же выбрать h_μ по (26), то, произведя те же операции, найдём:

$$\left(-\gamma_j \frac{\partial}{\partial x'_j} + \sum_{k \neq j} \gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} + m\right) \gamma_j \gamma_5 - \Psi' =$$

$$= \gamma_j \gamma_5 - \left(\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} + m\right) \Psi' = 0,$$

откуда следует

$$\left(\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} + m\right) \Psi' = 0$$

в полном соответствии с (24).

Мы провели все вычисления для матриц A, удовлетворяющих (17). Но можно было бы также избрать матрицы A', подчиняющиеся уравнению (18). Мы получили бы в этом случае:

$$h'_\mu = i h_\mu = i \gamma_\mu \gamma_5. \tag{28}$$

Итак, существуют два типа частиц со спином $^1/_2$, волновые функции которых ведут себя по-разному при отражении пространственных осей. Преобразования волновых функций этих двух типов частиц полностью заданы матрицами (26) и (28) и отличаются тем, что квадрат отражения относительно гиперплоскости, перпендикулярной к пространственно-подобному вектору, в одном случае равен $+1$ и означает тождественное преобразование, а в другом -1, что совпадает с матрицей, преобразующей спинор при вращении системы координат на угол 2π вокруг произвольной оси. Часто для описания группы вращений и отражений пользуются тем фактом, что всякое отражение является произведением

*) Если выбрать h_μ согласно (25), то уравнением, инвариантным относительно отражений, будет:

$$\left(\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + m\gamma_5\right) \Psi = 0. \tag{24a}$$

Это уравнение приводит к неправильному соотношению $P^2 - E^2 = m^2$ между энергией E и импульсом P свободной частицы с массой m.

вращения на преобразование отражения всех трёх пространственных осей относительно координатных плоскостей (инверсия относительно начала). Матрицами инверсии будут:

$$T = \pm h_1 h_2 h_3 = \pm \gamma_0, \tag{29}$$

$$T' = \pm h'_1 h'_2 h'_3 = \pm i\gamma_0. \tag{30}$$

Для квадратов этих матриц имеем:

$$T^2 = -1, \tag{31}$$

$$T'^2 = +1. \tag{32}$$

Таким образом, два различных типа спиноров можно охарактеризовать тем, что для одного из них (уравнения (26) и (31)) квадрат инверсии пространственных осей эквивалентен вращению на угол 2π, а для другого (уравнения (28), (32)) — тождественному преобразованию.

В отличие от ситуации, имеющей место для частиц с данным целым спином и с разной внутренней чётностью, трудно допустить, с точки зрения современной теории, сосуществование спинорных частиц обоих указанных выше типов. Действительно, представим себе, что имеются две покоящиеся частицы со спином $^1/_2$, относящиеся к разным типам (31) и (32). Момент количества движения такой системы в целом может быть равным 0, либо 1. Допустим, что имеет место первое. Тогда волновая функция системы, будучи однокомпонентной, в то же время не может быть ни скаляром, ни псевдоскаляром: при отражении пространственных осей волновая функция приобретает множитель i, а при совершении n отражений — множитель i^n, равный при чётном n ± 1. Легко увидеть, что соответствие $s \to S$ в этом случае будет двузначным, но в отличие от спиноров преобразования волновой функции рассматриваемой системы не составляют представления группы вращений даже в бесконечно малом. Для величины с такими трансформационными свойствами нельзя однозначно определить оператор бесконечно малого поворота, в связи с чем возникают трудности с введением понятия момента количества движения (см. сноску на стр. 12). Из вышесказанного следует, что для спинорных частиц складывается в рамках современной теории весьма своеобразное положение: все существующие спинорные частицы должны принадлежать к какому-либо одному из двух указанных типов. На вопрос о том, к какому именно типу принадлежат реальные частицы со спином $^1/_2$, может ответить только эксперимент (см. § 4) *).

*) В связи с этим укажем на несостоятельность чисто умозрительных заключений, содержащихся в работе [8]. Отметим, что ряд соображений о невозможности сосуществования двух различных типов спинорных частиц приведён также в работе [9].

До сих пор мы рассматривали отражения только пространственных осей координат. С точки зрения формально математической существует также и преобразование отражения временно́й оси, или в общем случае отражение относительно гиперплоскости, перпендикулярной к времени-подобному вектору. Переход к новой системе отсчёта, полученной в результате отражения временно́й оси, означает, что событию, характеризовавшемуся прежде временно́й координатой x_0, теперь приписывается координата $x_0' = -x_0$. Весьма важно, что временны́е отражения не могут быть получены путём последовательного совершения лоренцевых вращений и инверсий пространственных осей. Можно легко уяснить себе это обстоятельство, если обратиться к рис. 1 и учесть, что при лоренцевых вращениях повороты в плоскости (x_j, x_0) совершаются лишь в интервале углов, задаваемых положением образующих светового конуса. Причина невозможности сведения временны́х отражений к преобразованиям группы Лоренца состоит в физической выделенности временно́й оси, что находит своё математическое выражение в различии знаков, с которыми входят квадраты пространственных и временно́й координат в фундаментальную форму. Следовательно, вводя в рассмотрение временны́е отражения, мы дополняем группу Лоренца новыми, не содержавшимися в ней преобразованиями. Расширенную с учётом временны́х отражений группу Лоренца мы будем называть полной группой Лоренца. Полная группа Лоренца охватывает кроме трансляций все преобразования четырёхмерного пространства, оставляющие инвариантными квадрат расстояния между двумя мировыми точками. Существенно, что все известные нам лагранжианы для квантованных полей и получаемые из них волновые уравнения оказываются инвариантными относительно полной группы

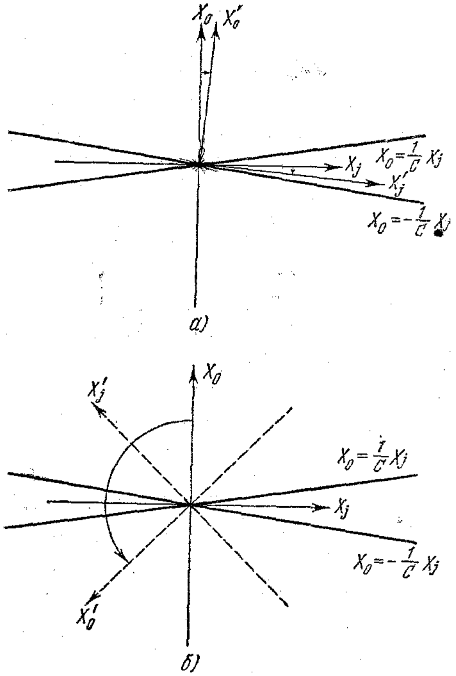

Рис. 1. Лоренцевы вращения в плоскости (x_j, x_0): *а*) возможный поворот; *б*) невозможный поворот.

Лоренца, если в согласии с общими математическими требованиями определить законы преобразования волновых функций и других входящих в эти уравнения физических величин. Можно сказать, что физические уравнения, первоначально полученные без требования инвариантности относительно временны́х отражений, в действительности потенциально такой инвариантностью обладают. Что же нового в таком случае может дать специальное рассмотрение временны́х отражений, если учёт их не приводит к появлению иных, отличных от ранее известных уравнений? Учёт временны́х отражений приводит к появлению новой характеристики частицы — её внутренней временно́й чётности. Последняя может, вообще говоря, не совпадать с пространственной чётностью, так как при фиксированных трансформационных свойствах волновой функции относительно группы Лоренца существует некоторая свобода в задании закона преобразований при временны́х отражениях. Таким образом, частицы с данными спином и внутренней пространственной чётностью могут обладать ещё различной временно́й внутренней чётностью. Это приводит к увеличению числа теоретически мыслимых типов частиц[7, 10]. Заметим, что поскольку временны́е отражения не являются производными от преобразований обычной группы Лоренца, то, исходя из одного только частного принципа относительности, нельзя прийти к выводу об обязательности учёта в теоретической физике временны́х отражений. Переход от группы Лоренца к полной группе Лоренца есть фактически подсказанная математическим аппаратом гипотеза, правда весьма естественная, но всё-таки гипотеза, следствия которой должны быть подвергнуты опытной проверке*).

Часто временны́е отражения связывают с вопросом о поведении системы «в прошлом». Поводом для такой интерпретации является тот факт, что временна́я координата $x_0 = t$ мировой точки в результате отражения временно́й оси изменит свой знак $(x'_0 = -x_0 = -t)$. Нельзя, однако, забывать, что преобразование волновой функции $\Psi(x)$ при переходе от одной системы отсчёта к другой вовсе не состоит в замене аргумента x на x' (в данном случае x_0 на $-x_0$), но определяется уравнением (2), согласно которому аргумент преобразованной функции остаётся неизменным. В квантовой механике правомерность понятия «обратимости

*) Швингер[10a], например, обратил внимание на тот факт, что из требования инвариантности лагранжиана относительно временны́х отражений вытекает необходимость квантования спинорного поля по принципу запрета (см. конец этого параграфа).

волновой функции в прошлое» вообще требует особого разбора (см., например,[11]); но если даже отвлечься от этого обстоятельства, то решение задачи сводится к аналитическому продолжению решения волнового уравнения при данных краевых условиях в область значений $x_0 < 0$, или, говоря совсем грубо, к подстановке в волновую функцию $x_0 = -t$ вместо $x_0 = t$. Ничего подобного, как мы видели, в случае преобразования системы координат не имеет места. При временны́х отражениях меняются только координаты, приписываемые мировым точкам, или, другими словами, одни и те же события рассматриваются с точки зрения разных систем отсчёта, отличающихся направлением временно́й оси. При обращении же волновой функции в прошлое рассмотрению подлежат другие события, предшествовавшие данным.

Рассмотрим теперь законы преобразования волновых функций при временны́х отражениях. Выше указывалось, что поведение волновых функций при временны́х отражениях не определяется полностью трансформационными свойствами в отношении группы Лоренца, так как преобразования временны́х отражений не содержатся в этой группе. Проистекающая отсюда свобода выбора закона преобразования при временны́х отражениях ограничена, во-первых, требованием линейности и, во-вторых, тем фактом, что произведение двух временны́х отражений входит в группу Лоренца, являясь четырёхмерным вращением. Координаты мировой точки при отражении относительно гиперплоскости, перпендикулярной к времени-подобному вектору a_μ, преобразуются по закону

$$x'_\mu = (\delta_{\mu\alpha} + 2a_\mu a_\alpha)\, x_\alpha, \quad a_\alpha a_\alpha = -1. \tag{33}$$

Учтя (33) и проведя в точности те же рассуждения, что и при рассмотрении отражений пространственных осей, мы найдём, что независимо от поведения волновой функции при инверсии пространственных осей частицы со спинами 0 и 1 могут характеризоваться внутренней временно́й чётностью $\zeta_0 = \pm 1$. В случае спина 0 временна́я чётность $\zeta_0 = +1$ соответствует временно́му скаляру, $\zeta_0 = -1$ — временно́му псевдоскаляру. Таким образом, возможны четыре типа частиц со спином 0: полностью скалярные ($\zeta = +1$, $\zeta_0 = +1$), пространственные скаляры и временны́е псевдоскаляры ($\zeta = +1$, $\zeta_0 = -1$), пространственные псевдоскаляры и временны́е скаляры ($\zeta = -1$, $\zeta_0 = +1$), полностью псевдоскалярные ($\zeta = -1$, $\zeta_0 = -1$). Точно так же для спина 1 существуют четыре типа частиц, характеризуемых различными комбинациями значений ζ и ζ_0.

Матрица преобразования спинора при отражении относительно гиперплоскости, перпендикулярной к времени-подобному вектору, получается из формулы (21), если считать вектор a_μ времени-подобным. В частности матрица, соответствующая отражению временно́й оси относительно перпендикулярной к ней гиперплоскости будет:

$$T_0 = A(\delta_{\mu 0}) = \pm h_0 = \pm \gamma_1\gamma_2\gamma_3;\ T_0^2 = -1 \tag{34}$$

или

$$T_0' = A'(\delta_{\mu 0}) = \pm ih_0 = \pm i\gamma_1\gamma_2\gamma_3,\ T_0'^2 = +1\ ^{*)}. \tag{35}$$

Весьма существенно, что выбор матриц (34) или (35) для преобразования спинора при отражении временно́й оси мы можем произвести независимо от закона преобразования при инверсии пространственных осей. Поэтому возможны четыре типа частиц со спином $^1/_2$, соответствующие различным возможным комбинациям матриц (29), (30), (34) и (35): $(T,\ T_0)$, $(T,\ T_0')$, $(T',\ T_0')$, $(T',\ T_0)$. Среди спинорных частиц указанных четырёх типов могут быть частицы с различной относительной внутренней чётностью, причём возможно несовпадение относительных внутренних пространственной и временно́й чётностей. Своеобразной особенностью спинорного поля является, кроме всего прочего, тот факт, что из неквантованных спинорных волновых функций нельзя построить лагранжиана, инвариантного относительно полной группы Лоренца. В самом деле, нетрудно убедиться, что лагранжиан свободного спинорного поля

$$L = -\frac{1}{2}\left\{\overline{\Psi}\gamma_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu \Psi\right\} - \varkappa\overline{\Psi}\Psi,\ldots, \tag{36}$$

где

$$\overline{\Psi} = \Psi^+ i\gamma_0, \tag{36a}$$

меняет знак при преобразованиях T_0 или T_0'.

Если, однако, ввести квантование спинорного поля по принципу запрета и при этом соответствующим образом определить преобразование операторов рождения и поглощения частиц, то указанный недостаток устраняется. Чтобы показать это, перейдём к импульсному представлению, положив, как обычно,

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=1,2} \int \left\{a_r(\mathbf{p})\, u_+^r(\mathbf{p})\, e^{ipx} + b_r^+(\mathbf{p})\, u_-^r(\mathbf{p})\, e^{-ipx}\right\} d^3p \ldots, \tag{37}$$

*) Матрицы (34) и (35) были найдены впервые Картаном[12]. В физической литературе их впервые рассмотрел Раха[13].

где $u_{+}^{r}(\mathbf{p})$, $u_{-}^{r}(\mathbf{p})$ — решения уравнения Дирака для положительных и отрицательных частот, индекс r указывает спиновое состояние и $a_r(\mathbf{p})$ и $b_r^{+}(\mathbf{p})$ — соответственно операторы поглощения частицы и рождения античастицы. Уравнение (37) мы перепишем в следующей более удобной для нас форме в виде интеграла по четырёхмерному объёму в p-пространстве:

$$\Psi(x)=\sum_{r=1,\,2}\int c_r(p_\mu)\,u^r(p_\mu)\,e^{ipx}\,\delta(p^2+m^2)\,d^4p. \tag{37а}$$

Здесь использованы обозначения:

$$\delta(p^2+m^2)=\left(\mathbf{p}^2+m^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left\{\delta\left(p_0-\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\,\delta\left(p_0+\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}\right)\right\}, \tag{37б}$$

причём

$$\left.\begin{aligned}(2\pi)^{-3/2}p_0^{1/2}\,c_r(p,\ p_0)&=a_r(p),\\ u^r(\mathbf{p},\ p_0)&=u_{+}^{r}(\mathbf{p}),\end{aligned}\right\} \tag{37в}$$

$$\left.\begin{aligned}(2\pi)^{-3/2}p_0^{-1/2}\,c_2(-\mathbf{p},\ -p_0)&=b_r^{+}(\mathbf{p}),\\ u^r(-\mathbf{p},\ p_0)&=u_{-}^{r}(\mathbf{p}),\end{aligned}\right\} \tag{37г}$$

если $p_0=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$.

В этих обозначениях лагранжева плотность L запишется в виде

$$L=\int d^4p\,d^4p'\left\{a^{+}(p_\mu)\,a(p'_\mu)\,e^{i(p'-p)x}\cdot\left[\bar{u}(p_\mu)\,\hat{D}u(p'_\mu)+\right.\right.$$
$$\left.+\,\bar{u}(p_\mu)\,\hat{D}'u(p'_\mu)\right]+a^{+}(p'_\mu)\,a(p_\mu)\,e^{-i(p'-p)x}\cdot\left[\bar{u}(p'_\mu)\,\hat{D}'u(p_\mu)+\right.$$
$$\left.\left.+\,\bar{u}(p'_\mu)\,\hat{D}u(p'_\mu)\right]\right\}; \tag{38}$$

$$\hat{D}=\hat{p}+m;\quad \hat{p}=ip_\mu\gamma_\mu;\quad \hat{D}'=i\hat{p}'+m.$$

При этом для упрощения записи мы опустили в (38) суммирование по переменным r и r'. После совершения преобразования инверсии временнóй оси мы получим:

$$\Psi(x)\rightarrow\Psi'(x)=\sum_{r=1,\,2}\int c'_r(p_\mu)\,(u^r(p_\mu))'\,e^{ipx}\,\delta(p_\mu^2+m^2)\,d^4p, \tag{39}$$

где

$$u^{r\prime} = T_0 u^r \tag{39а}$$

или

$$u^{r\prime} = T_0' u^r. \tag{39б}$$

Заменив в (36) Ψ на (Ψ') и потребовав

$$L = L', \tag{39в}$$

легко обнаружить, что достаточным условием для выполнения (39в) будет

$$\left.\begin{aligned} c_r^+(p_\mu)' &= c_r(p_\mu), \\ c_r(p_\mu)' &= c_r^+(p_\mu), \end{aligned}\right\} \tag{39г}$$

если спинорное поле квантовано по принципу запрета.

Нетрудно также проверить, что плотность энергии спинорного поля при преобразованиях (39) не меняет знака.

Что касается полей с целочисленными спинами, то там лагранжиан инвариантен относительно временны́х отражений не только в квантованной, но и в классической теории.

Полученные в этом параграфе результаты о возможных типах частиц с данным спином сведены для наглядности в табл. I,

Таблица I

Возможные типы частиц с данным спином

Спин	Тип	Внутренняя чётность: пространственная (ξ)	Внутренняя чётность: временная (ξ_0)	Квадрат инверсии пространственных осей	Квадрат инверсии временной оси
0; 1	$S, S_0; V, V_0$	$+1; -1$	$+1; -1$	$+1$	$+1$
	$S, P_0; V, A_0$	$+1; -1$	$-1; +1$		
	$P, P_0; A, A_0$	$-1; +1$	$-1; +1$		
	$P, S_0; A, V_0$	$-1; +1$	$+1; -1$		
$^1/_2$	T, T_0	—	—	-1	-1
	T, T_0'	—	—	-1	$+1$
	T', T_0'	—	—	$+1$	$+1$
	T', T_0	—	—	$+1$	-1

в которой буквы S, P, V, A означают соответственно пространственный скаляр, псевдоскаляр, вектор и псевдовектор (аксиальный вектор). Буквы с индексом 0 характеризуют поведение волновых функций при временных отражениях.

Рассмотрим кратко взаимодействие различного рода частиц друг с другом. Как известно, возможные гамильтонианы взаимодействий спинорных полей друг с другом и с частицами с целым спином имеют вид скалярного произведения тензоров, составленных из квантованных спинорных волновых функций и функций, описывающих поля с целочисленным спином. Тензоры (спин-тензоры), которые можно составить из двух любых, но одинакового типа спиноров Ψ_1, Ψ_2, перечислены в таблице II, где Ψ^+ означает матрицу, эрмитовски сопряжённую с Ψ, а тильда ($\sim$) — операцию транспонирования. Символом $B_{\mu\nu}$ обозначен бивектор (антисимметричный тензор второго ранга типа $x_\mu y_\nu - x_\nu y_\mu$, где x_μ, y_μ — четырёхмерные векторы), а буквы P или P_0 перед ним указывают, что знак матрицы, преобразующей данный спин-тензор при инверсии пространственных или временно́й осей, противоположен знаку матрицы, осуществляющей преобразование бивектора.

Спин-тензоры, билинейные относительно Ψ_1^+ и Ψ_2, обладают одинаковыми трансформационными свойствами независимо от того, к какому типу принадлежат спиноры, если только их внутренние относительные чётности совпадают (это предположение относится ко всей табл. II). Для тензоров же, содержащих Ψ_1 и Ψ_2, положение иное. Спин-тензор, являющийся скаляром, если, например, Ψ_1 и Ψ_2 принадлежат к типу (T, T_0'), становится псевдоскаляром при переходе к типу (T', T_0) и т. д. (это обстоятельство выяснено Жарковым[16], а также в работе[17]). Спин-тензоры типа ($\Psi_1^+ F \Psi_2$) входят в гамильтонианы взаимодействий, в результате которых рождается или поглощается частица с целым спином, рождается спинорная частица в состоянии 1 и исчезает спинорная частица в состоянии 2. Спин-тензоры ($\Psi_1 F \Psi_2$) позволяют сконструировать гамильтонианы, описывающие процессы распада частицы с целым спином на две частицы с полуцелым спином, например, распад $\pi^\pm$-мезона на $\mu^\pm$-мезон и нейтрино

$$\pi^\pm \to \mu^\pm + \nu.$$

Заметим, что этот же процесс распада может быть истолкован как рождение μ-мезона и поглощение нейтрино с отрицательного уровня, т. е. как испускание антинейтрино. Если считать, что спиноры принадлежат к типу $T'T_0'$, то при отличной от нуля массе нейтрино использование «нейтринного» и «антинейтринного» вариантов приводит к разным результатам для предсказываемых теорией наблюдаемых эффектов. Последнее свидетельствует о принципиальной различимости нейтрино и антинейтрино, на что было указано Марковым[18] *).

Таблица II

Неприводимые спин-тензоры из двух спиноров

Спин-тензор	Тип спинора			
	T, T_0	T, T_0'	T', T_0'	T', T_0
$\widetilde{\Psi}_1\delta\Psi_2$	P, S_0	P, P_0	S, P_0	S, S_0
$\widetilde{\Psi}_1\delta\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\Psi_2^{(*)}$	A, V_0	A, A_0	V, A_0	V, V_0
$\widetilde{\Psi}_1\delta\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\Psi_2^{(**)}$	$P_0B_{\mu\nu}$	$B_{\mu\nu}$	$PB_{\mu\nu}$	$PP_0B_{\mu\nu}$
$\widetilde{\Psi}_1\delta\gamma_\mu\Psi_2$	V, A_0	V, V_0	A, V_0	A, A_0
$\widetilde{\Psi}_1\delta\gamma_5\Psi_2$	S, P_0	S, S_0	P, S_0	PP_0
	Для всех типов:			
$\Psi_1^+\gamma_0\Psi_2$	S, P_0			
$\Psi_1^+\gamma_0\gamma_\mu\Psi_2$	V, A_0			
$\Psi_1^+\gamma_0\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi_2^{(**)}$	$P_0B_{\mu\nu}$			
$\Psi_1^+\gamma_0\gamma_5\gamma_\mu\Psi_2$	A, V_0			
$\Psi_1^+\gamma_0\gamma_5\Psi_2$	P, S_0			

(*) $\mu \neq \nu \neq \rho$.
(**) $\mu \neq \nu$.

Матрицы:

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij} \ (i, j = 1, 2, 3); \ \gamma_\mu\gamma_5 + \gamma_5\gamma_\mu = 0;$$

$$\delta = \gamma_1\gamma_3; \ \gamma_\mu\gamma_0 + \gamma_0\gamma_\mu = -2\delta_{\mu 0}; \ \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0; \ \gamma_5^2 = -1$$

Если мы обозначим через $\Phi_{\mu\ldots}$ тензоры, полученные из квантованных волновых функций частиц с целым спином, то плот-

*) Посвящённые этому вопросу работы Маркова с сотрудниками[19, 20] послужили исходным пунктом для выяснения трансформационных свойств различных спин-тензоров в зависимости от типа входящих в них спиноров (см.[16]).

ность гамильтониана взаимодействия этих частиц со спинорным полем будет иметь вид *)

$$H' = g\Phi_{\mu\ldots}(\Psi_1^{+} F_{\mu\ldots} \Psi_2) + \text{эрм. сопр.} \tag{40}$$

или

$$H' = g\Phi_{\mu\ldots}\left(\widetilde{\Psi}_1 F'_{\mu\ldots}\Psi_2\right) + \text{эрм. сопр.}, \tag{41}$$

где g — константы взаимодействия, а спин-тензоры должны быть выбраны так, чтобы гамильтониан H' был инвариантным относительно группы Лоренца. Тензорами $\Phi_{\mu\ldots}$ для частицы со спином 0 являются:

$$\Phi = \psi, \tag{42}$$

$$\Phi_\mu = \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}. \tag{43}$$

Для частицы со спином 1 можно написать:

$$\Phi_\mu = \psi_\mu, \tag{44}$$

$$\Phi_{\mu\nu} = \frac{\partial\psi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{45}$$

Аналогично (40) и (41) можно сконструировать гамильтониан взаимодействия четырёх частиц со спином $^1/_2$. Этот гамильтониан будет иметь вид

$$H' = \sum_F g_F (\Psi_1^{+} F_{\mu\ldots} \Psi_2)(\varphi_1^{+} F'_{\mu\ldots} \varphi_2) + \text{эрм. сопр.} \tag{46}$$

или

$$H' = \sum_F g_F \left(\widetilde{\Psi}_1 F''_{\mu\ldots}\Psi_2\right)\left(\widetilde{\varphi} F'''_{\mu\ldots}\varphi_2\right) + \text{эрм. сопр.} \tag{47}$$

3. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЧЁТНОСТЬ В СОСТОЯНИИ С ДАННЫМ УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ

Пространственная чётность волновой функции характеризует её поведение при последовательном совершении двух преобразований: инверсии T пространственных осей координат и замене аргументов x_i $(i = 1, 2, 3)$ на $-x_i$ (это преобразование в дальнейшем обозначается символом R). Преобразование $D = TR = RT$ переводит, следовательно, функцию $\Psi(x)$ в $\Psi'(x')$, когда $x'_i = -x_i$, $x'_0 = x_0$:

$$\Psi'(-x_i, x_0) = D\Psi(x_i, x_0). \tag{48}$$

*) Гамильтонианы, содержащие производные спиноров, мы не рассматриваем, так как опытные данные этого не требуют.

Если функция $\Psi(x)$ является собственной функцией оператора D, то

$$D\Psi(x) = \xi\Psi(x), \tag{49}$$

где ξ — соответствующее собственное значение.

Оператор D, как это следует из § 2, определён однозначно только для волновых функций частиц с целочисленным спином. В этом случае всегда $D^2 = 1$ и число ξ, равное ± 1, называется пространственной чётностью волновой функции.

Волновые функции частицы в состоянии с определённым угловым моментом (моментом количества движения) являются собственными функциями оператора D и при целочисленном спине могут быть чётными ($\xi = +1$) и нечётными ($\xi = -1$). Однозначная связь между чётностью волновой функции и полным угловым моментом частицы j существует только при спине, равном 0.

В этом случае

$$\xi = (-1)^j \zeta, \tag{50}$$

где ζ — внутренняя пространственная чётность частицы (см. § 2). Если спин частицы отличен от нуля, то имеется по крайней мере два состояния с одним и тем же угловым моментом, но различной пространственной чётностью. Факт существования таких состояний можно проще всего пояснить, если рассмотреть частицу с отличной от нуля массой покоя и нерелятивистской скоростью. В этом случае имеет смысл разделить полный момент количества движения (j) на спиновый (σ) и орбитальный (l) моменты, причём для данных j и σ возможны несколько значений l:

$$l = j + \sigma, \quad j + \sigma - 1, \ldots, (j - \sigma). \tag{51}$$

Число l определяет вес шаровых функций $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ (ϑ, φ — полярные углы), входящих в выражения для компонент волновой функции частицы со спином, причём все оставшиеся в нерелятивистском приближении компоненты содержат шаровые функции с одинаковым l (см. [2, 5, 21]).

Так как

$$RY_l^m(\vartheta, \varphi) = (-1)^l Y_l^m(\vartheta, \varphi), \tag{52}$$

то при данной внутренней чётности ζ число ξ будет даваться уравнением (50), если в последнем заменить j на l. В релятивистской теории число l, определяемое формулой (51), перестаёт быть физически наблюдаемой величиной*), но количество состоя-

*) Формально это происходит оттого, что релятивистская волновая функция приводима в отношении группы трёхмерных вращений. Поэтому не все компоненты релятивистской волновой функции выражаются через

ний с данным полным моментом попрежнему находится из соотношения (51), причём состояния, соответствующие числам l одинаковой чётности, обладают одинаковой пространственной чётностью волновых функций (см. Дополнение I).

Сказанное выше справедливо в полной мере лишь для частиц с отличной от нуля массой покоя. В случае частиц со спином и равной нулю массой покоя число состояний с данным угловым моментом может быть меньше предписываемого уравнением (51). Так, например, для квантов электромагнитного поля (спин $\sigma = 1$, $\zeta = \zeta_0 = +1$) существует лишь два (а не три, как это можно было бы ожидать на основании (51)) состояния с фиксированным угловым моментом j и его проекцией на одну из осей*). Эти два состояния электромагнитного поля носят название излучений электрического и магнитного мультиполей, причём для излучения электрического мультиполя

$$\xi = (-1)^j, \tag{53}$$

тогда как для излучения магнитного мультиполя

$$\xi = (-1)^{j+1}. \tag{54}$$

Оператор D коммутирует с гамильтонианом любой изолированной системы, в связи с чем пространственная чётность ξ её волновой функции, являясь интегралом движения, сохраняется во времени. Последним обусловливается наличие правил отбора по пространственной чётности, действующих как при распаде элементарных частиц, так и при различных ядерных реакциях. Благодаря этим правилам отбора осуществляются лишь те процессы, при которых пространственные чётности волновых функций начальных и конечных состояний изолированной системы совпадают.

Интересуясь процессом распада элементарной частицы с отличной от нуля массой покоя, мы, очевидно, всегда можем считать частицу покоящейся. Тогда пространственная чётность её волновой функции будет совпадать с внутренней чётностью, и действие рассматриваемых правил отбора проявится в том, что пространственная чётность ξ волновой функции системы частиц — продуктов распада должна быть равна внутренней чётности ζ распавшейся частицы. Если символом ξ_i обозначить простран-

---

шаровые функции одинакового веса l. В силу указанного обстоятельства релятивистская волновая функция частицы со спином (см. [23, 21]) не является собственной функцией оператора орбитального момента.

*) Причина, вызывающая в этом случае уменьшение числа возможных состояний сравнительно с (51), кроется в дополнительном требовании инвариантности математических ожиданий наблюдаемых величин поля относительно градиентного преобразования калибровки потенциалов (см. [22]).

ственную чётность волновой функции i-й частицы, то можно написать:

$$\xi = \prod_{i=1}^{i=N} \xi_i, \tag{55}$$

и

$$\zeta = \prod_{i=1}^{i=N} \xi_i. \tag{56}$$

В качестве примера применения правил отбора по чётности рассмотрим распад частиц с целым спином на две и три частицы со спинами 0, 1. Наиболее прост случай распада частицы с нулевым спином на два бозона, спины которых также равны нулю*).

Для такого процесса из уравнения (56) следует:

$$\zeta = \zeta_1 \cdot \zeta_2, \tag{57}$$

где ζ_1, ζ_2 — внутренние пространственные чётности частиц — продуктов распада. В самом деле, согласно (50) имеем:

$$\xi_1 = (-1)^{j_1}\zeta_1, \qquad \xi_2 = (-1)^{j_2}\zeta_2, \tag{58}$$

где j_1, j_2 — угловые моменты частиц — продуктов распада. Так как угловой момент всей системы в целом равен нулю, то обязательно должно быть

$$j_1 = j_2 = j. \tag{58a}$$

Воспользовавшись теперь уравнениями (56), (58), (58a), получим (57). Из правила отбора (57) непосредственно видно, что распады скалярных (S) и псевдоскалярных (P) частиц на две частицы с нулевыми спинами по схемам

$$S \to S,\ P; \qquad P \to S,\ S; \qquad P \to P,\ P \tag{59}$$

запрещены абсолютно. Именно поэтому V_2^0-частица, если её продуктами распада являются два π-мезона, не может быть псевдоскалярной.

Рассмотрим теперь распад бозона со спином σ на два бозона с нулевыми спинами. В системе координат центра инерции сумма импульсов частиц — продуктов распада — равна нулю. По этой причине волновая функция конечного состояния системы будет зависеть только от разности пространственных координат обеих частиц. Вместе с тем волновая функция конечного состояния, являясь билинейной комбинацией волновых функций частиц с нулевым спином, может быть только скаляром или псевдоскаляром.

---

*) Бозоном называется частица, подчиняющаяся статистике Бозе-Эйнштейна и обладающая, следовательно, целочисленным спином.

Учитывая сказанное, а также закон сохранения углового момента, для волновой функции конечного состояния, можно написать:

$$\Psi(x_j, x_0) = Y_\sigma^m(\vartheta, \varphi) \cdot R(r, x_0),$$

где ϑ и φ — полярные углы вектора x_j, а r — его абсолютная величина (расстояние между частицами). Уравнение (56) для данного случая примет вид

$$\zeta = (-1)^\sigma \zeta_1 \zeta_2. \tag{60}$$

Если $\zeta_1 = \zeta_2$, что осуществляется, например, при распаде V_2^0-частицы на два π-мезона ($\zeta_1 = \zeta_2 = -1$), то

$$\zeta = (-1)^\sigma. \tag{61}$$

Из (61) следует, в частности, что распадающаяся на два π-мезона V_2^0-частица не может быть псевдовекторной ($\zeta = +1$, $\sigma = 1$).

Можно также указать на применимость правила отбора (60) и в ядерной физике, если вместо ζ, ζ_1, ζ_2 подставить пространственные чётности ξ, ξ_1, ξ_2 волновых функций, описывающих начальное состояние системы и внутренние состояния ядер с равными нулю спинами, получающихся в результате реакции. Рассмотрим, например, фоторасщепление чётно-чётного ядра на α-частицу и остаточное ядро с равным нулю угловым моментом *). Используя (53), (54) и (60), легко показать, что при равенстве пространственных чётностей волновых функций, характеризующих внутренние состояния участвующих в реакции ядер и α-частицы, фоторасщепление будет осуществляться только квантами электрических 2^j-полей, входящих в состав падающей на мишень плоской фотонной волны. Из общей теории следует, что основной вклад в сечение реакции будет при этом принадлежать дипольным ($j = 1$) квантам. Если же пространственные чётности волновых функций начального и остаточного ядер будут различны, то фоторасщепление может быть вызвано только квантами магнитных 2^j-полей, главным образом магнитным дипольным излучением, что приведёт к существенному уменьшению эффективного сечения процесса сравнительно со случаем одинаковых пространственных чётностей.

Выше рассматривался распад на две частицы с нулевыми спинами. Переходя к случаям, когда среди продуктов распада имеются частицы со спином 1, укажем прежде всего на абсолютную запрещённость распада бозона со спином 0 на фотон (спин 1) и бозон со спином 0. Это правило отбора, сформулированное в работе [24], является следствием равенства нулю массы покоя электромагнитного поля. Дело в том, что для частицы с нулевой

---

*) Чётно-чётным называется ядро, состоящее из чётного числа нейтронов и чётного числа протонов. Такие ядра обладают в основных состояниях нулевыми спинами.

массой покоя при фиксированном импульсе возможны только два независимых состояния, при которых проекция углового момента на направление движения равна $\pm\sigma$, где σ — спин частицы (см.[22]) *). В общем же случае отличной от нуля массы покоя проекция полного момента на направление движения может принимать $2\sigma+1$ значений от $+\sigma$ до $-\sigma$; более высокие значения проекции исключаются ввиду осевой симметрии (ось симметрии — направление движения частицы). При распаде на две частицы имеет место их разлёт вдоль одной прямой. Согласно изложенному проекция момента, образовавшегося в результате распада бозона с нулевым спином, на эту прямую будет равна нулю, тогда как проекция момента фотона равна либо $+1$ либо -1. Следовательно, проекция суммарного момента всей системы по абсолютной величине должна быть равна 1, что невозможно, так как исходная частица имела спин 0. Распад бозона со спином 0 на частицу с нулевым спином и фотон запрещён, таким образом, из-за несохранения углового момента, хотя на первый взгляд кажется, что этот закон сохранения может быть соблюдён, если образующаяся в результате распада частица с нулевым спином получит отличный от нуля орбитальный момент (например, равный 1).

Если бозон со спином 1 имеет отличную от нуля массу покоя, то имеют место правила отбора:

$$\zeta = -\zeta_1 \zeta_2. \tag{62}$$

Правилами отбора по чётности и угловому моменту запрещены, следовательно, распады скалярных и псевдоскалярных частиц по схемам [23—25]

$$S \to P,\ V; \qquad S \to S,\ A; \qquad P \to P,\ A, \tag{62a}$$

где все продукты распада могут иметь массу покоя, отличную от нуля. Эти правила отбора проще всего получить, основываясь на общей теории представлений группы трёхмерных вращений и отражений (см. Дополнение II).

При распаде частиц с произвольным целым спином на две векторные частицы (см.[24]), вообще говоря, не возникает каких-либо «неожиданностей», обусловленных правилами отбора по пространственной чётности и угловому моменту. Однако в специальном случае, когда продуктами распада являются два фотона, имеют место впервые рассмотренные Ландау[26] (см. также[26, 27, 28]) дополнительные ограничения, связанные, во-первых, с тем, что электромагнитное поле характеризуется нулевой массой покоя, и, во-вторых, с тем, что два фотона представляют собой тождественные Бозе-частицы. Рассматривая распад бозона на два фотона, будем

*) Для фотона эти два независимых состояния являются состояниями с различной поляризацией (линейной или циркулярной).

исходить из того, что волновая функция фотона должна быть вектором. Поэтому волновую функцию системы из двух фотонов можно представить в виде тензора второго ранга, сконструированного билинейно из компонент электромагнитного поля фотонов *). Для дальнейшего существенно, что суммарный импульс фотонов, образовавшихся в результате распада покоящейся частицы, равен нулю. Поэтому волновая функция будет зависеть от разности координат фотонов

$$x_j^{(2)} - x_j^{(1)} = x_j = a_j r, \tag{63}$$

где a_j — единичный вектор, параллельный радиусу-вектору x_j, r — абсолютная величина последнего.

В отношении группы трёхмерных вращений и отражений всякий трёхмерный тензор разбивается на следующие неприводимые части: скаляр S, эквивалентный псевдовектору антисимметричный тензор второго ранга A_{ik} и симметричный тензор второго ранга S_{ik} с равным нулю следом $\left(\sum_i S_{ii} = 0\right)$. Рассмотрим состояния, описываемые каждой из этих неприводимых волновых функций. Прежде всего, из условия перестановочной симметрии получаем:

$$\begin{gathered} S(-a_j) = S(a_j); \\ A_{ik}(-a_j) = A_{ki}(a_j) = -A_{ik}(a_j); \\ S_{ik}(-a_j) = S_{ki}(a_j) = S_{ik}(a_j). \end{gathered} \tag{64}$$

Так как внутренняя чётность тензора второго ранга, составленного билинейно из компонент векторов, равна $+1$, то на основании (64) имеем:

$$DS = +S, \qquad DA_{ik} = -A_{ik}, \qquad DS_{ik} = +S_{ik}, \tag{65}$$

поскольку подстановка $-a_j$ вместо a_j эквивалентна рассмотренному в начале этого параграфа преобразованию R. Согласно (65) S и S_{ik} описывают чётные ($\xi = +1$), а A_{ik} — нечётные ($\xi = -1$) состояния системы из двух фотонов. Рассмотрим сначала нечётные состояния. Тензор A_{ik}, из шести компонент которого только три независимые, является, по существу, псевдовектором, параллельным единичному вектору a_j. Последнее вытекает из поперечности поля фотонов (результат равенства нулю массы покоя) и может быть проще всего установлено, если представить A_{ik} в виде векторного произведения векторов $E_j^{(1)}$, $E_j^{(2)}$, характеризующих элек-

*) В дальнейшем изложении мы в основном следуем работе [26].

тромагнитные поля каждого из фотонов:

$$A_{ik} = E_i^{(1)} E_k^{(2)} - E_k^{(1)} E_i^{(2)} \text{ *}), \tag{66}$$

$$a_j E_j^{(1)} = a_j E_j^{(2)} = 0, \qquad A_{ik} a_i = a_{ik} a_k = 0. \tag{67}$$

Таким образом,

$$A_{ik} = A'_l = a_l \varphi(a_j) \varepsilon \quad (l \neq i, k; \quad i \neq k), \tag{68}$$

где $\varphi(a_j)$ есть скалярная функция, а ε — псевдоскаляр, не зависящий от a_j. Сопоставляя (64) и (68), находим:

$$\varphi(a_j) = \varphi(-a_j). \tag{69}$$

Если мы рассматриваем состояния с данным моментом количества движения I, то угловая часть функции φ выразится через шаровую функцию Лапласа порядка I, причём согласно (69) момент I должен быть либо чётным, либо равным нулю. Следовательно, тензор A_{ik} описывает состояния систем из двух фотонов с чётным моментом и нечётной ($\xi = -1$) волновой функцией. Легко заметить, что в этих состояниях ($I = 0, 2, 4, \ldots, \xi = -1$) оба фотона поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях. В самом деле, $A' = E^{(1)} E^{(2)} \sin \vartheta$, где ϑ — угол между векторами $E_j^{(1)}$, $E_j^{(2)}$. Так как, далее, для фотона существует лишь два независимых состояния поляризации — параллельное и перпендикулярное к какой-либо из плоскостей, содержащей волновой вектор,—то угол ϑ может быть равен либо 0 либо $\frac{\pi}{2}$. Первый случай, однако, невозможен, ибо при $\vartheta = 0$ $A_{ik} = 0$. Укажем сразу же некоторые приложения полученных результатов. Если бы, например, удалось опытным путём установить перпендикулярность поляризаций двух гамма-квантов, на которые распадается π^0-мезон, то, поскольку спин его равен нулю, можно было бы с уверенностью утверждать, что π^0-мезон является псевдоскалярной частицей.

Хорошей иллюстрацией к полученным правилам может также служить двухфотонная аннигиляция пара-позитрония (спины электрона и позитрона антипараллельны, полный момент равен 0). Аннигиляционные кванты оказываются при этом поляризованными в перпендикулярных направлениях[29]. Последнее свидетельствует о том, что волновая функция позитрония является псевдоскаляром. Этот же результат может быть получен и прямым расчётом (см. Дополнение III). Обратимся теперь к рассмотрению чётных состояний, описываемых скаляром S и симметричным тензором S_{ik}.

*) Везде в дальнейшем при выражении тензоров A_{ik}, S_{ik}, S через векторы поля фотонов $E_j^{(1)}$, $E_j^{(2)}$ мы опускаем нормировочные коэффициенты, которые для нашего рассмотрения несущественны.

Из уравнений (64), (65) видно, что скалярная функция описывает чётные состояния с чётным моментом (включая нуль). Поляризации фотонов в этих состояниях параллельны, так как скаляр S может быть представлен в виде скалярного произведения векторов $E_j^{(1)}$ и $E_j^{(2)}$. В отношении симметричного тензора S_{ik} с равным нулю следом заметим, прежде всего, что он, так же как и тензор A_{ik}, удовлетворяет условию поперечности

$$S_{ik}\,a_i = S_{ik}\,a_k = 0 \tag{70}$$

и может быть представлен в форме

$$S_{ik} = E_i^{(1)}\,E_k^{(2)} + E_k^{(1)}\,E_i^{(2)} - \frac{2}{3}\,\delta_{ik}\,E_j^{(1)}\,E_j^{(2)}. \tag{71}$$

Пользуясь (67), (70) и (71), легко установить, что в состояниях, описываемых тензором S_{ik}, поляризации фотонов перпендикулярны. В самом деле,

$$S_{ik}\,a_i = -\frac{2}{3}\,akE_j^{(1)}\,E_j^{(2)} = 0, \tag{72}$$

откуда

$$E_j^{(1)}\,E_j^{(2)} = E^{(1)}E^{(2)}\cos\vartheta = 0, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2},$$

так как среди компонент a_k по крайней мере одна компонента отлична от нуля. Если бы тензор S_{ik} не удовлетворял условию поперечности (70), можно было бы очень просто подсчитать число описываемых им чётных ($\xi = +1$) состояний с данным угловым моментом I. Действительно, как указывалось выше, всякий симметричный тензор второго ранга S'_{ik} с равным нулю следом неприводим в отношении группы вращений. При этом среди его шести тождественно не равных друг другу компонент только пять независимых (ввиду условия равенства нулю следа). Следовательно, спиновый момент системы с волновой функцией S'_{ik} равен 2, так как $2\sigma + 1 = 2\cdot 2 + 1 = 5$. Воспользовавшись этим, можно найти все состояния с данным I и $\xi = +1$ по формуле (51), если учесть, что из-за равенства $\xi = +1$ число l должно быть чётным. Поступив так, мы сразу же найдём:

$$N'_0 = N'_1 = 1; \qquad N'_{I=2n} = 3; \qquad N'_{I=2n+1} = 2, \tag{73}$$

где N'_I — число чётных состояний, описываемых тензором S'_{ik}. При таком подсчёте не учтено дополнительное ограничение (70), которое может привести, и действительно приводит, к уменьшению числа состояний. Для того чтобы учесть (70), представим S'_{ik} в форме

$$S'_{ik} = S_{ik} + P_{ik},$$

где S_{ik} удовлетворяет, а P_{ik} не удовлетворяет условию поперечности (70). Таким образом, состояние некой воображаемой системы с волновой функцией S'_{ik} представлено нами в виде суперпозиции состояний S_{ik} и P_{ik}. Поскольку мы знаем полное число состояний N'_l с данным моментом l и чётностью $\xi = +1$, то количество состояний N_l для S_{ik} можно найти, вычитая из N'_l число состояний N''_l, описываемых тензором P_{ik}. Этот последний имеет вид

$$P_{ik} = B_i \cdot a_k + B_k a_i,$$

причём B_j — некоторый вектор. Число N''_l совпадает поэтому с количеством состояний, описываемых векторной функцией $B_j(a_j)$, характеризуемой нечётными числами l, ибо тензор P_{ik} в целом,

Таблица III

Состоян... системы из двух фотонов с равным нулю суммарным импульсом

Полный угловой момент	Число состояний			
	чётные состояния ($\xi = +1$)		нечётные состояния ($\xi = -1$)	
	Поляризация		Поляризация	
	параллельная	перпендикулярная	параллельная	перпендикулярная
0	1	0	0	1
1	0	0	0	0
$2n$	1	1	0	1
$2n+1$	0	1	0	0

по условию, чётен относительно замены $a_j \to -a_j$. С помощью уравнения (51), полагая $\sigma = 1$ и l нечётным, находим:

$$N''_0 = N''_1 = 1, \quad N''_{l=2n} = 2, \quad N_{l=2n+1} = 1. \qquad (74)$$

Вычитая (74) из (73), получаем:

$$N_0 = N_1 = 0, \quad N_{l=2n} = 1, \quad N_{l=2n+1} = 1. \qquad (75)$$

Перечень полученных выше результатов представлен в табл. III *).

*) Примечание при корректуре. Таблица III совпадает с приведённой в работе [28], если в последнюю внести некоторые исправления, см. Ю. М. Широков, ЖЭТФ 26, 128 (1954).

Как видно из этой таблицы, для двух фотонов с одинаковыми энергиями и противоположными по знаку импульсами не существует, во-первых, состояний с угловым моментом, равным 1, и, во-вторых, нечётных состояний ($\xi = -1$) с нечётным угловым моментом. Отсутствие состояний с угловым моментом 1 означает, что распад векторной или псевдовекторной частицы на два фотона запрещён абсолютно. Отсюда, в частности, следует, что спин π^0-мезона, распадающегося на два фотона, не может быть равен 1 (как известно, совокупность экспериментальных данных определённо свидетельствует о спине 0). По этой же причине запрещена аннигиляция орто-позитрония с испусканием двух фотонов [30].

Говоря об относительной поляризации фотонов, мы предполагали, что оба фотона поляризованы линейно. Можно, разумеется, провести рассмотрение и в предположении циркулярной поляризации фотонов. При этом в состояниях S, A_{ik} циркулярные поляризации имеют одинаковые знаки, а в состояниях S_{ik} — противоположные.

Мы рассматривали распад бозона с произвольным спином на две частицы с целочисленными спинами. Распад на три частицы с целочисленными спинами пока теоретически исследован недостаточно. Из имеющихся по этому вопросу результатов укажем на следующее правило отбора [23, 25]: распад бозона с нулевым спином на три бозона, также обладающих нулевыми спинами, запрещён абсолютно, если одна или три из четырёх участвующих в процессе частиц являются псевдоскалярными. Иначе говоря, запрещены распады типа $S \to S, S, P$, $S \to P, P, P$, $P \to S, S, S$ и т. п. Это правило отбора может быть записано в виде соотношения

$$\zeta = \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdot \zeta_3 \tag{76}$$

и доказывается совершенно аналогично правилу отбора (57) (см. также Дополнение II). Из правила отбора (76) следует, в частности, что τ-мезон, распадающийся на три π-мезона, не может быть скалярной частицей.

В отношении распада бозона с произвольным спином на три частицы со спинами 1 теоретически наиболее подробно исследован распад на три фотона. Применение правил отбора по моменту количества движения и пространственной чётности не приводит здесь к каким-либо существенным ограничениям, если, например, не считать того факта, что для нейтральных скалярных и псевдоскалярных частиц распад на три фотона с равными энергиями запрещён абсолютно [31]. Значительно более сильные запреты выявляются в том случае, если кроме описанных в этом параграфе правил отбора использовать ещё симметрию относительно преобразования зарядового сопряжения (см. § 4). Тогда, в частности, оказывается, что распад некоторых нейтральных частиц на три фотона вообще невозможен.

До сих пор речь шла о пространственной чётности частиц с целым спином. Волновая функция частицы с полуцелым спином и данным полным угловым моментом удовлетворяет уравнению (49), так же как это имеет место в случае бозонов. Однако говорить об определённой чётности волновой функции нельзя, поскольку оператор $D = TR$ определён теперь с точностью до знака из-за матрицы T, входящей в него в качестве сомножителя (см. § 2). В то же время очевидно, что если мы рассматриваем волновые функции двух спинорных частиц с фиксированными внутренними относительными чётностями, то мы всегда можем установить равенство или неравенство собственных значений ξ_1 и ξ_2 оператора D, хотя каждая из этих величин сама по себе определена лишь с точностью до знака. Заметим также, что ξ_1 и ξ_2 не обязательно равны ± 1, поскольку оператор $D^2 = T^2R^2 = T^2$ в зависимости от типа частиц может быть равен как $+1$, так и -1 (см. § 2). Отношение величин ξ_1 и ξ_2 мы будем называть относительной пространственной чётностью волновых функций частиц с полуцелым спином. Правила отбора по пространственной чётности, выражаемые уравнением (55), могут быть обобщены теперь на случай систем с произвольным спином, если только для спинорных частиц подразумевать под ξ_i отношение ξ_i/ξ, а в левой части (55) заменить величину ξ на $+1$.

4. ЗАРЯДОВОЕ СОПРЯЖЕНИЕ. ПРАВИЛА ОТБОРА ПО ЗАРЯДОВОЙ ЧЁТНОСТИ

Рассмотрим волновое уравнение

$$\left\{\sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - ieA_j\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - ieA_0\right)^2 - m^2\right\}\Psi = 0 \tag{77}$$

для частицы с нулевым спином и зарядом e, находящейся в электромагнитном поле с векторным потенциалом $A_j, - A_0\,(j = 1, 2, 3)$. Уравнение для функции Ψ^*, комплексно сопряжённой Ψ, согласно (77) будет:

$$\left\{\sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + ieA_j\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + ieA_0\right)^2 - m^2\right\}\Psi^* = 0, \tag{78}$$

так как A_j, A_0 считаем действительными. Уравнения (77) и (78) отличаются лишь знаком при e. Можно поэтому интерпретировать Ψ^* как волновую функцию частицы с противоположным знаком заряда. Справедливость такой трактовки подтверждается рассмотрением выражения для четырёхмерного вектора плотности тока и заряда

$$\left.\begin{aligned} j_k &= e\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_k}\Psi - \frac{\partial\Psi}{\partial x_k}\Psi^*\right), \\ j_0 &= -e\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_0}\Psi - \frac{\partial\Psi}{\partial x_0}\Psi^*\right), \quad k=1,2,3, \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

который меняет знак при замене Ψ на Ψ^*. Обозначив $\Psi_+ = \Psi$, $\Psi_- = \Psi^*$, можем, следовательно, написать:

$$\Psi_- = \Psi^*_+. \tag{80}$$

Соотношение (80) лоренц-инвариантно, так как при преобразованиях системы отсчёта Ψ и Ψ^* преобразуются одинаково (не меняются совершенно, если Ψ — скаляр, и меняют знак при инверсии осей, если Ψ — псевдоскаляр). Функции Ψ_+ и Ψ_- мы будем называть сопряжёнными по знаку заряда, а преобразование $\Psi_+ \to \Psi_-$ — зарядовым сопряжением.

В случае частиц со спином $^1/_2$, подчиняющихся уравнению Дирака, связь между зарядово-сопряжёнными функциями несколько сложнее *). Уравнение Дирака при наличии внешнего электромагнитного поля имеет, как известно, вид

$$\left\{\gamma_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - ieA_\alpha\right) + m\right\}\Psi = 0 \tag{81}$$

или

$$\left\{\gamma^*_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + ieA_\alpha\right) + m\right\}\Psi^* = 0. \tag{82}$$

Мы видим, что Ψ^* не удовлетворяет уравнению (81), если в последнем изменить только знак перед e, так как в (82) входят матрицы γ^*_α вместо γ_α. Можно, однако, получить функцию Ψ_-, сопряжённую по знаку заряда функции $\Psi_+ = \Psi$, если помножить слева уравнение (82) на некоторую неособенную матрицу C и потребовать

$$C\gamma^*_\alpha = \gamma_\alpha C. \tag{83}$$

Выбрав γ_α так, чтобы, например, матрица γ_2 была действительной, а остальные три матрицы чисто-мнимыми **), сразу же находим, использовав коммутационные соотношения, приведённые в табл. II:

$$C = \gamma_2. \tag{84}$$

---

*) По поводу зарядовой сопряжённости для других релятивистски инвариантных уравнений см. работу Гельфанда и Яглома [32].

**) Если γ_α определены согласно § 2, это всегда можно сделать, причём γ_1, γ_2, γ_3 будут эрмитовыми, γ_0 — антиэрмитово (матрицы γ_1, γ_2, γ_3 определены так же, как в [4], матрица γ_0 отличается от γ_4 в [4] множителем i).

Отсюда следует:

$$C = C^*, \quad C = \tilde{C}, \quad C^2 = 1. \tag{85}$$

Таким образом, неособенная матрица C, удовлетворяющая (83), действительно существует. Мы можем поэтому написать:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_- &= C\Psi^*_+, \\ \Psi_+ &= C\Psi^*_-. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Легко обнаружить, что лоренц-инвариантность (86) имеет место только для спиноров типа T, T_0 (см. § 2), для которых квадраты матриц, соответствующих инверсиям пространственных и временной осей, равны -1.

Вектор плотности тока и заряда для спинорного поля имеет вид

$$j_k = e\Psi^+\gamma_0\gamma_k\Psi, \quad j_0 = e\Psi^+\Psi, \quad k = 1,\ 2,\ 3\,^*), \tag{87}$$

или

$$j_k = e\tilde{\Psi}_- C\gamma_0\gamma_k\Psi_+, \quad j_0 = e\tilde{\Psi}_- C\Psi_+. \tag{88}$$

Если мы теперь произведём в (88) замену $\Psi_+ \rightleftarrows \Psi_-$, то j_α не изменит знака, как это имело место для частиц с нулевым спином. Зато при таком преобразовании изменяется знак компонент тензора энергии-импульса поля

$$\left.\begin{aligned} T_{44} &= \frac{1}{2i}\left\{ C\tilde{\Psi}_- \frac{\partial\Psi_+}{\partial x_0} - \frac{\partial \widetilde{C\Psi_-}}{\partial x_0}\Psi_+ \right\}, \\ T_{4k} &= \frac{1}{2i}\left\{ C\tilde{\Psi}_- \frac{\partial\Psi_+}{\partial x_k} - \frac{\partial \widetilde{C\Psi_-}}{\partial x_k}\Psi_+ \right\}, \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

что недопустимо. Как хорошо известно (см., например, [4]), этот недостаток устраняется квантованием спинорного поля по принципу запрета (т. е. с учётом запрета Паули), при котором требуемое поведение j_α и $T_{\mu\nu}$ при перестановке $\Psi_+ \leftrightarrows \Psi_-$ достигается тем, что операторы Ψ_+ и Ψ_-, действующие на волновую функцию от чисел заполнения, антикоммутируют. Резюмируя изложенное, можно, следовательно, сказать, что в квантованной теории спинорного поля операторы Ψ_+ и Ψ_- соответствуют частице и «античастице», тогда как неквантованные волновые функции Ψ_+

*) Напомним, что в наших обозначениях $\Psi^+ = \tilde{\Psi}^*$.

и Ψ_- описывают состояния с положительной и отрицательной энергией и противоположными знаками импульсов.

Из требования лоренц-инвариантности (86) следует, что функции Ψ_+ и Ψ_- преобразуются при изменении системы отсчёта одинакового, т. е. обладают одинаковой внутренней чётностью в том смысле, в каком это понятие было определено в § 2. Вместе с тем, интересно отметить, что волновая функция системы из частицы и античастицы (например, электрона и позитрона), обладающих нулевым относительным орбитальным моментом, может быть только либо вектором (орто-состояние), либо псевдоскаляром (пара-состояние)*). Именно этим последним обстоятельством, как указывалось в § 3, объясняется перпендикулярность поляризаций при двухфотонной аннигиляции пара-позитрония**).

Зарядовое сопряжение может быть использовано для получения некоторых дополнительных правил отбора, если потребовать инвариантность гамильтониана относительно этого преобразования, т. е. относительно замены частица $\rightleftarrows$ античастица. Рассмотрим волновую функцию Ψ_q от чисел заполнения для системы частиц, античастиц и электромагнитного поля. Индекс $q = (N_f^+, N_f^-, N_s^\prime)$ указывает состояние системы в целом, характеризующееся наличием N_f^+ частиц, N_f^- античастиц и $N_f^\prime$ квантов электромагнитного поля в индивидуальных состояниях f, s, причём, вообще говоря $N_f^+ \neq N_f^-$. Введём оператор U, определяемый соотношениями

$$U\Psi_q = \Psi_{q'};\; q=(N_f^+, N_f^-, N_s^\prime),\quad q'=(N_f^-, N_f^+, N_s^\prime), \tag{90}$$

$$UF_\pm U^{-1} = F_\mp , \tag{91}$$

где состояние q' отличается от состояния q тем, что число античастиц теперь равно N_f^+, а число частиц N_f^-. Символом $F_\pm$ в уравнении (91) обозначен произвольный оператор, действующий на переменные чисел заполнения частиц (знак $+$) или античастиц (знак $-$). Таким образом, оператор U осуществляет замену

---

*) Это утверждение справедливо вообще для любых двух частиц со спином $^1/_2$ и нулевыми орбитальными моментами, если их волновые функции характеризуются одинаковой относительной внутренней чётностью и преобразуются при инверсии осей по представлению $T = -1$ (доказательство см. в Дополнении III).

**) В работе [33] электрон и позитрон трактуются как частицы с различной внутренней чётностью. Укажем в связи с этим, что понятия внутренней чётности, введённые в [33] и в настоящей статье различны. В работе [33] под внутренней относительной чётностью двух спинорных частиц понимается совпадение или различие знаков множителя, приобретаемого при инверсии осей единственной отличной от нуля компоненты волновой функции частицы, рассматриваемой в системе координат, в которой частица покоится.

частица $\rightleftarrows$ античастица, причём, очевидно,

$$U^2 = 1. \tag{92}$$

Оператор Гамильтона для рассматриваемой системы запишем в форме

$$H = H_p + H_r + H' = H_0 + H', \tag{93}$$

где H_p — гамильтониан системы свободных частиц и античастиц, H_r — гамильтониан электромагнитного поля в вакууме и H' — оператор энергии взаимодействия всех заряженных частиц с электромагнитным полем. Легко понять, что U коммутирует с H_p, так как замена свободной частицы такой же античастицей ввиду точного равенства их масс не меняет энергии системы. То же самое имеет место и в отношении коммутации U с H_r, поскольку оператор U вообще не меняет числа фотонов. Таким образом,

$$[UH_0]_- = UH_0 - H_0U = 0. \tag{94}$$

Вопрос о коммутации U и H' должен быть рассмотрен детальнее. Как известно, оператор H' имеет вид

$$H' = \int j_\alpha A_\alpha \, dv, \quad dv = dx_1 dx_2 dx_3, \tag{95}$$
$$\alpha = 0, 1, 2, 3.$$

Здесь j_α и A_α — операторы плотности тока и потенциалов электромагнитного поля, действующие на соответствующие числа заполнения. Оператор U антикоммутирует с j_α, так как при замене частица $\rightleftarrows$ античастица вектор плотности электрического тока меняет знак. В связи с этим, если мы требуем инвариантности гамильтониана в целом относительно преобразования зарядового сопряжения, необходимо допустить

$$UA_\alpha = -A_\alpha U. \tag{96}$$

Оператор U можно искать в виде произведения двух коммутирующих операторов U_p и U_r, действующих соответственно на числа заполнения частиц и фотонов. Нам теперь нужно выяснить, возможно ли найти такой оператор U_r, чтобы одновременно удовлетворить (93) и (95). Так как операторы потенциалов A_α содержат линейно операторы рождения и поглощения фотонов, то мы удовлетворим (95), если определим действие U_r на волновую функцию системы согласно уравнению

$$U_r \Psi_{N^r} = (-1)^{N^r} \Psi_{N^r}, \tag{97}$$

где N^r — полное число фотонов.

С другой стороны, определённый согласно (97) оператор U_r, наверное, коммутирует с H_0, поскольку последний не изменяет числа фотонов N^r. Таким образом, оператор $U = U_p U_r$, удовлетворяющий одновременно (94) и (96), а значит, и соотношению

$$[UH]_- = 0, \tag{98}$$

действительно существует. Как уже указывалось выше, U антикоммутирует с оператором тока $I_\alpha = \int j_\alpha \, dV$, четвёртая компонента которого I_0 есть оператор полного заряда системы. По этой причине U не может иметь с I_0 общих собственных функций, за исключением того случая, когда собственное значение I_0 равно 0, т. е. когда полный заряд системы равен 0. Так как реально осуществляющиеся состояния физических систем есть всегда состояния с определённым полным зарядом, то волновые функции Ψ_q будут собственными функциями оператора U только для нейтральных систем. При этом последнем условии

$$U\Psi_q = \nu\Psi_q, \quad \nu = \nu_p \nu_r, \quad \nu_r = (-1)^{N^r} \tag{99}$$

и

$$U_p \Psi_q = \nu_p \Psi_q, \tag{100}$$

причём

$$\nu_p = \pm 1 \tag{101}$$

ввиду уравнения (92).

В развитом выше аппарате (см.[34]), пока речь идёт об электродинамике, нет ничего гипотетического. Фактически, исходя из предсказания теории о существовании частиц и античастиц (т. е. частиц, отличающихся только знаком заряда), мы нашли ещё один дополнительный к рассмотренным в § 3 интеграл движения для нейтральной системы — зарядовую чётность волновой функции ν. Возникающие в этом случае правила отбора по зарядовой чётности являются в такой же степени точными, как и правила отбора по пространственной чётности.

Исследуем теперь с точки зрения полученных правил отбора по зарядовой чётности аннигиляцию электрона и позитрона в пара- и орто-состояниях. Волновую функцию такой системы в пара-состоянии можно представить в следующей форме *):

$$\Psi_{\text{пара}} = F\Psi_0, \quad F = \frac{1}{2} \sum_{m_\sigma^+, m_\sigma^-} \left\{ \tilde{u}_+^* Q u_-^* - \tilde{u}_-^* Q u_+^* \right\},$$

$$m_\sigma^+ + m_\sigma^- = 0. \tag{102}$$

Здесь u_+, u_- — квантованные амплитуды дираковских волновых

*) Для простоты, мы полагаем электрон и позитрон свободными. Это предположение никак не скажется на результате (см.[34]).

функций электрона и позитрона с проекциями спинов на ось квантования m_σ^+, m_σ^-, Q — матрица, обеспечивающая необходимые трансформационные свойства $\Psi_{\text{пара}}$ в отношении преобразований системы отсчёта, Ψ_0 — волновая функция вакуума. Уравнение (102) действительно описывает нужное нам состояние, так как u_+^* и u_-^* содержат операторы рождения электрона и позитрона, которые, действуя на функцию Ψ_0, превращают её в функцию Ψ_q, характеризующуюся числами заполнения $N^+=N^-=1$, $N^r=0$. Преобразуя $\Psi_{\text{пара}}$ с помощью оператора U, получаем:

$$U\Psi_{\text{пара}}=UFU^{-1}\,U\Psi_0=UFU^{-1}\,\Psi_0, \tag{103}$$

так как волновую функцию вакуума можно без какого-либо ограничения общности считать зарядово-чётной. Использовав (91) и (92), найдём:

$$UFU^{-1}=\frac{1}{2}\sum_{m_\sigma^+,\,m_\sigma^-}\left\{\widetilde{u_-^*}Qu_+^*-\widetilde{u_+^*}\widetilde{Q}u_-^*\right\}. \tag{104}$$

Выше указывалось, что волновая функция пара-позитрония является псевдоскаляром (см. также Дополнение III). Поэтому матрица $Q=\delta$ (см. табл. II). Так как

$$\widetilde{\delta}=-\delta, \tag{105}$$

то, подставив (105) в (104), находим:

$$UFU^{-1}=F \tag{106}$$

или

$$U\Psi_{\text{пара}}=\Psi_{\text{пара}}. \tag{107}$$

Уравнение (107) показывает, что волновая функция пара-позитрония зарядово-чётная ($\nu=+1$). Отсюда следует невозможность трёхфотонной аннигиляции пара-позитрония. В самом деле, зарядовая чётность системы из трёх фотонов согласно (96) будет $\nu=\nu_r=(-1)^3=-1$, тогда как для пара-позитрония $\nu=+1$. Аналогичным образом могут быть исследованы и другие состояния позитрония (классификация этих состояний дана в табл. IV). Можно указать простой способ нахождения зарядовой чётности состояний позитрония, основывающийся на полученных выше результатах. Из антикоммутации операторов u_+ и u_- следует, что волновая функция позитрония в конфигурационном представлении должна быть антисимметрична относительно перестановки пространственных, спиновых и зарядовых координат электрона и позитрона. Если ограничиться нерелятивистским приближением и пренебречь обменным аннигиляционным взаимодействием (см.[33]),

Таблица IV

Пространственная и зарядовая чётности состояний позитрония

Спиновое состояние	Орбитальный момент	Пространственная чётность ξ	Зарядовая чётность ν	Запрет аннигиляции по зарядовой чётности	
				двухфотонная аннигиляция	трёхфотонная аннигиляция
синглетное	чётный	-1	$+1$		запрещена
	нечётный	$+1$	-1	запрещена	
триплетное	чётный	-1	-1	запрещена	
	нечётный	$+1$	$+1$	*)	запрещена

*) В состояниях с полным моментом 1 двухфотонная аннигиляция запрещена согласно табл. III. То же самое имеет место для всех состояний с нечётным полным моментом и нечётной волновой функцией ($\xi = -1$). В этих последних случаях запреты по табл. III и IV совпадают.

Результаты, указанные в табл. IV, получены также путём непосредственных расчётов в работе[61].

то можно представить волновую функцию позитрония в виде произведения трёх функций:

$$\Psi = \Psi_{\text{спин}} \Psi_{\text{орб}} \Psi_{\text{зар}}. \tag{108}$$

В состоянии $^1S_0$, например, $\Psi_{\text{спин}}$ антисимметрична, $\Psi_{\text{орб}}$ — симметрична. Поэтому для антисимметричности Ψ необходимо, чтобы $\Psi_{\text{зар}}$ была симметричной. Но в случае системы из двух частиц симметрия $\Psi_{\text{зар}}$ совпадает с зарядовой чётностью Ψ. Таким образом, ясно, что волновая функция пара-позитрония должна быть зарядово-чётной, а волновая функция орто-позитрония (состояние $^3S_1$) в силу симметричности $\Psi_{\text{спин}}$ и $\Psi_{\text{орб}}$ должна быть зарядово-нечётной. Этот нестрогий метод определения зарядовой чётности позитрония оказывается, однако, вполне точным, так как поправки к волновой функции (108), обусловленные наличием запаздывающего взаимодействия, не меняют зарядовой чётности, что легко показать с помощью развитого выше формализма.

Учёт правил отбора по зарядовой чётности приводит к ряду существенных результатов и для распада нейтральных элементарных частиц. Так, для нейтральных скалярных частиц оказывается абсолютно запрещённым трёхфотонный распад. Это получается вследствие того, что волновая функция нейтральной скалярной частицы должна быть зарядово-чётной (в противном случае оператор U не коммутирует с гамильтонианом системы, содержащим члены взаимодействия рассматриваемого скалярного поля с заряженными скалярным, спинорным или векторным полями). Поскольку нейтральный псевдоскалярный π^0-мезон распадается на два фотона, его волновая функция согласно изложенному выше должна быть зарядово-чётной. Отсюда следует, что для зарядово-нечётных нейтральных частиц запрещены распады типа

$$X^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0.$$

Можно также показать, что для нейтральной зарядово-нечётной частицы запрещён распад на пару электрон-позитрон

$$X^0 \rightarrow e^- + e^+.$$

Для зарядово-чётных нейтральных бозонов запрещены распады по схеме

$$Y^0 \rightarrow \text{любое число } \pi^0 + \text{нечётное число } \gamma\text{-квантов}.$$

Касаясь других возможностей использования операции зарядового сопряжения, укажем прежде всего на проблему бета-распада. Общий вид гамильтониана взаимодействия нуклеонов с полем лёгких частиц (электрон-нейтрино) приведён в § 2 (уравнения (46), (47)). Если потребовать инвариантности гамильтониана относительно операции зарядового сопряжения для нуклеонов и лёгких частиц, то все константы g_F оказываются действительными [36, 37]. Ещё более существенным является требование инвариантности гамильтониана, с точностью до энергии кулоновского взаимодействия, относительно преобразования зарядового сопряжения только для лёгких частиц. Смысл этого требования состоит в том, что различие электронных и позитронных спектров при данной верхней границе и степени запрета перехода предполагается происходящим исключительно от различия взаимодействия электронов и позитронов с кулоновским полем ядра — продукта бета-распада. Нетрудно проверить, что указанное требование симметрии приводит к следующему результату: в гамильтониане (46) могут быть одновременно отличны от нуля либо константы g_S, g_A, g_P, соответствующие скалярному, псевдовекторному и псевдоскалярному взаимодействиям, либо константы g_V, g_T (векторное и тензорное взаимодействия) [36, 37].

Для частиц со спином $^1/_2$ релятивистски инвариантная связь между зарядово-сопряжёнными функциями Ψ_+ и Ψ_- имеет место, как об этом уже говорилось ранее, только для спиноров типа T_1T_0 (см. табл. I). В этом случае возможно существование нейтральных волновых спинорных полей, для которых частица и античастица тождественны. В самом деле, для спинора $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$ имеем:

$$\Psi_{\text{античаст}} = C\Psi^* = C\Psi^*_+ + C\Psi^*_- = C \cdot C\Psi_- + C \cdot C\Psi_+ = \\ = \Psi_+ + \Psi_- = \Psi. \quad (109)$$

Вектор плотности тока и заряда для такого поля автоматически обращается в нуль (см.[4]), вследствие чего спинор (109) описывает нейтральные частицы с равным нулю магнитным моментом. Из известных нам нейтральных частиц со спином $^1/_2$, только нейтрино может оказаться частицей такого типа (для нейтрона подобная возможность исключена из-за наличия магнитного момента). Это обстоятельство может быть использовано в теории бета-распада, причём для процессов обычного бета-распада или K-захвата отождествление нейтрино и антинейтрино не даёт ничего нового. Однако для так называемого двойного бета-распада, при котором заряд ядра меняется сразу на две единицы, использование нейтринного поля (109) оказывается весьма существенным [38, 39]. Дело в том, что с точки зрения теории возмущений двойной бета-распад является процессом второго порядка, состоящим из двух виртуальных переходов, в каждом из которых заряд ядра меняется на единицу. Если применяется обычный вариант теории, то в каждом виртуальном переходе испускается электрон или нейтрино, так что в результате всего процесса будет испущено четыре частицы — два электрона и два нейтрино. Если же для нейтрино взять волновые функции типа (109), возможно, кроме того, испускание нейтрино в одном виртуальном переходе и поглощение его в другом, так что, в конце концов, окажутся испущенными только два электрона. Вероятность двойного бета-распада с испусканием только двух электронов более чем в 10^6 раз превосходит вероятность двойного бета-распада, идущего по обычной схеме. Так как период полураспада при энергии перехода порядка $2 \div 3$ *Мэв* составляет в последнем случае $10^{23} - 10^{24}$ лет, то при современном состоянии техники эксперимента на опыте может быть наблюдаем только двойной бета-распад, сопровождающийся испусканием двух частиц и возможный лишь при тождестве нейтрино и антинейтрино, описываемых волновой функцией (109). Но для существования спинорного поля типа (109) необходимо, чтобы оно принадлежало к типу T, T_0. Таким образом, двойной бета-распад относится к числу наблюдаемых эффектов, при которых проявляется различие свойств спинорных полей, по-разному преобразующихся при инверсии осей системы координат. К сожалению, имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные относительно наблюдения двойного бета-распада (см. [40, 41]) не являются вполне достоверными и требуют дальнейшей опытной проверки. Подчеркнём, что для теории было бы исключительно ценным надёжное установление хотя бы самого факта существования двойного бета-распада и приблизительная (с точностью даже до порядка величины) оценка периода полураспада.

Кроме приведённых выше примеров использования преобразования зарядового сопряжения, последнее находит также применение при получении неточных правил отбора, основанных на теории возмущений. Эти правила отбора рассматриваются в § 6.

5. СИММЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ИЗОТОПИЧЕСКОГО СПИНА

Понятие изотопического спина возникло впервые в ядерной физике при рассмотрении процессов бета-распада, в результате которых происходит превращение нейтрона в протон или протона в нейтрон. Это обстоятельство навело на мысль о том, что нейтрон и протон являются как бы разными состояниями одной и той же частицы-нуклеона. Разумеется, подобное утверждение может означать что-либо большее, чем новое наименование старых фактов, только в том случае, если оно найдёт своё отражение в количественном аппарате теории.

Как известно, системы тождественных частиц характеризуются в квантовой механике определённой перестановочной симметрией волновых функций. В частности, волновая функция системы одинаковых частиц с полуцелым спином антисимметрична относительно перестановки пространственных и спиновых координат частиц. Необходимо поэтому выставить требование антисимметрии волновой функции любой системы протонов и нейтронов как относительно перестановки одноимённых частиц, так и относительно перестановки протон $\leftrightarrows$ нейтрон. С этой целью введём переменную m_τ, принимающую значения $\pm 1/2$ в зависимости от того, находится ли нуклеон в «протонном» $\left(m_\tau = +\frac{1}{2}\right)$ или «нейтронном» $\left(m_\tau = -\frac{1}{2}\right)$ состояниях. Можно теперь сказать, что в нерелятивистском приближении волновая функция нуклеона будет зависеть от пространственных координат x_j спиновой переменной $m_\sigma = \pm\frac{1}{2}$ (проекция спина на ось квантования) и новой переменной $m_\tau = \pm\frac{1}{2}$, которую мы по аналогии с m_σ будем называть проекцией изотопического спина нуклеона на ось квантования в изотопическом пространстве. Более глубокое содержание пока что чисто внешней аналогии между m_τ и m_σ выясняется при детальном рассмотрении свойств перестановочной симметрии волновой функции системы нуклеонов, если:

а) пренебречь разностью масс нейтрона и протона;

б) пренебречь энергией кулоновского взаимодействия протонов сравнительно с энергией связи ядра;

в) предположить, что действующие между нуклеонами специфические ядерные силы не зависят от изотопического состояния нуклеонов.

Требования а) и б) для лёгких ядер могут быть выполнены. Что касается предположения в), то опытные данные о массах ядер и схемах ядерных уровней (см.[42]) говорят о справедливости этого постулата по крайней мере для взаимодействия нуклеонов с не очень большими энергиями (порядка нескольких десятков *Мэв*). При выполнении перечисленных выше условий волновая функция системы нуклеонов может быть представлена в виде

$$\Psi = \varphi(x_j^{(1)} \ldots x_j^{(A)};\ m_\sigma^{(1)} \ldots m_\sigma^{(A)})\,\chi(m_\tau^{(1)} \ldots m_\tau^{(A)}), \tag{110}$$

где A — число нуклеонов. Так как Ψ в целом антисимметрична относительно перестановки переменных x_j, m_σ, m_τ для любых двух нуклеонов, то свойства перестановочной симметрии функций φ и χ должны быть определённым образом связаны друг с другом (например, если φ антисимметрична по переменным k-го и l-го нуклеонов, то χ должна быть симметрична по переменным $m_\tau^{(k)}$, $m_\tau^{(l)}$). Поскольку переменная m_τ принимает только два значения $m_\tau = \pm\frac{1}{2}$, то ясно, что все переменные, по которым χ симметрична, могут быть сгруппированы в два ряда ($m_\tau^{(k)}$, $m_\tau^{(l)}, \ldots$), ($m_\tau^{(k')}$, $m_\tau^{(l')}, \ldots$), причём $k \neq k'$, $l \neq l'$ и т. д. Хорошо известно (см., например,[5, 43]), что различные типы перестановочной симметрии охватываются так называемыми схемами Юнга, изображёнными для нашего случая на рис. 2. В клетках строк и столбцов схемы Юнга располагаются переменные, по которым функция

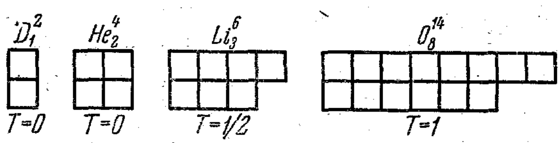

Рис. 2. Схемы Юнга для изотопической части (χ) волновых функций основных состояний некоторых ядер.

соответственно симметрична и антисимметрична. Таким образом, схема Юнга для χ будет иметь не больше двух строк, а для φ — не больше двух столбцов. Из изложенного видно, что тип перестановочной симметрии χ (а значит, и φ) при фиксированном полном числе нуклеонов можно охарактеризовать одним числом — разностью чисел клеток в первой и второй строках схемы Юнга. Половина этой разности называется изотопическим спином системы нуклеонов. Если система состоит из A нуклеонов, то изотопический спин при нечётном A будет равен полуцелому, а при чётном A — целому числу. Изотопический спин одиночного нуклеона следует, очевидно, считать равным $^1/_2$. После всего сказанного уже нетрудно понять сущность аналогии между обычным и изотопическим спином. Совершенно такая же картина в отношении перестановочной симметрии спиновой и координатной частей волновой функции имеет место для системы тождественных частиц со спином $^1/_2$, например для электронов в атоме (см. [5, 43]). В этом случае также половина разности чисел клеток в строках схемы Юнга для спиновой функции даёт значение полного спина системы. Иначе говоря, изучение перестановочной симметрии спиновой функции, скажем, системы электронов может быть заменено исследованием трансформационных свойств волновой функции при вращениях координатных осей. Последнее обстоятельство используется и в теории изотопического спина. Именно обычные волновые функции протона и нейтрона рассматриваются как компоненты единой нуклеонной волновой функции, относительно которой предполагается, что она преобразуется по спинорному представлению группы вращений какого-то вспомогательного трёхмерного пространства, не имеющего непосредственного физического смысла. Перестановке протон $\rightleftarrows$ нейтрон соответствует поворот «оси квантования» в этом пространстве на 180°, так как при подобном преобразовании проекция изотопического спина нуклеона m_τ меняет знак $\left(m_\tau = \pm\frac{1}{2} \rightarrow m_\tau = \mp\frac{1}{2}\right)$.

Операторами компонент изотопического спина τ_1, τ_2, τ_3 являются обычные матрицы Паули

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{111}$$

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \tau(\tau + 1), \quad \tau = \frac{1}{2}, \tag{112}$$

с той только разницей, что матричные элементы этих матриц сами являются двухрядными матрицами, если нуклеоны трактуются нерелятивистски (но с учётом спина), и четырёхрядными матрицами, если рассматриваются релятивистские функции.

Операторы изотопического спина для системы из A нуклеонов будут иметь вид

$$T_j = \sum_{i=1}^{i=A} \tau_j^{(i)}, \tag{113}$$

$$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = T(T + 1), \tag{114}$$

где T — целое или полуцелое число в зависимости от чётности или нечётности A. Ко всему сказанному можно ещё добавить, что сложение изотопических спинов $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ и их проекций $M_T^{(1)}$ и $M_T^{(2)}$ двух систем нуклеонов производится по тем же правилам, что и сложение обычных спинов:

$$\left.\begin{aligned} T = T^{(1)} + T^{(2)},\ T^{(1)} + T^{(2)} - 1, \ldots, |T^{(1)} - T^{(2)}|, \\ M_T = M_T^{(1)} + M_T^{(2)},\ M_T = T,\ T-1, \ldots, -T. \end{aligned}\right\} \qquad (115)$$

Если для системы нуклеонов выполнены перечисленные ранее условия а), б), в), то оператор $\sum_{j=1}^{j=3} T_j^2$ коммутирует с гамильтонианом системы, вследствие чего изотопический спин должен быть интегралом движения. По этой причине возникают правила отбора по изотопическому спину, аналогичные правилам отбора по угловому моменту. В качестве примера рассмотрим реакцию $O^{16}(d, \alpha)N^{14}$. В этой реакции при фиксированной энергии дейтеронов наблюдается несколько энергетических групп α-частиц, соответствующих образованию остаточного ядра N^{14} в различных возбуждённых состояниях. При этом не обнаружено случаев образования ядра N^{14} на первом возбуждённом уровне (энергия возбуждения 2,3 *Мэв*), хотя правилами отбора по угловому моменту и пространственной чётности такой ход процесса разрешён. Если, однако, предположить, что изотопический спин ядра N^{14} в указанном возбуждённом состоянии равен 1*), то рассматриваемый процесс будет запрещён правилами отбора по изотопическому спину, поскольку изотопические спины O^{16}, дейтерона и α-частицы равны нулю**).

Ряд интересных следствий из концепции изотопического спина имеет место и в области гамма-излучения ядер. Гамильтониан взаимодействия ядра с электромагнитным излучением может быть записан в виде

$$H' = \frac{e}{2m} \sum_{j=1}^{j=3} \sum_{i=1}^{i=A} \{ P_j^{(i)} A_j(x^{(i)})(1 + 2\tau_3^{(i)}) + [\mu_n(1 - 2\tau_3^{(i)}) + \\ + \mu_p(1 + 2\tau_3^{i})] \cdot \sigma_j^{(i)} H_j \}, \qquad (116)$$

---

*) Такое предположение согласуется с оболочечной структурой ядра и другими экспериментальными данными (см. [44]).

**) Равенство нулю изотопических спинов O^{16} и α-частицы следует из того, что в этих ядрах заполнены протонные и нейтронные оболочки. Что касается дейтерона, то его основное состояние есть $^3S_1$ (с небольшой примесью $^3D_1$). Отсюда следует, что функция φ в (110) симметрична, а изотопная функция χ антисимметрична, т. е. $T = 0$.

где P_j, A_j, σ_j, H_j — операторы компонент импульса, векторного потенциала, спина и напряжённости магнитного поля, μ_p, μ_n — магнитные моменты протона и нейтрона, e — заряд протона и m — его масса. На основании (116) можно написать:

$$H' = H'_0 + \sum_{i=1}^{i=A} f_i \tau_3^{(i)}, \tag{117}$$

причём операторы H'_0 и f_i не зависят от $\tau_3^{(i)}$. Вероятность испускания ядром гамма-кванта пропорциональна согласно общим правилам квадрату матричного элемента H'. Используя (116), (117), нетрудно определить случаи обращения в нуль матричных элементов H'. Действительно, оператор H'_0 есть скаляр в пространстве изотопического спина. Поэтому матричный элемент H'_0 равен нулю, если изотопический спин при переходе меняется. Второй член в правой части (117) при вращениях в изотопическом пространстве ведёт себя как компонента вектора, поэтому правила отбора для него будут совершенно такими же, как и для матричных элементов операторов σ_j компонент обычного спина. На основании изложенного получаем следующие правила отбора по изотопическому спину для гамма-излучения ядер:

$$\Delta T = 0, \ \pm 1, \ \Delta M_T = 0. \tag{118}$$

Заметим ещё, что при $M_T = 0$ (т. е. при равном числе протонов и нейтронов) из (116) следует запрещённость электрических дипольных переходов ядер [45, 46*]). Аналогичным образом легко получить и правила отбора по изотопическому спину для бета-процессов:

$$\left.\begin{aligned} \Delta T = 0, \ \pm 1 \ (\text{кроме } 0 \to 0), \\ \Delta M_T = \pm 1. \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

Кроме правил отбора по изотопическому спину можно указать ещё для ядер с $M_T = 0$ правила отбора по изотопической чётности [47], аналогичные правилам отбора по зарядовой чётности, рассмотренным в § 4. При этом, конечно, необходимо иметь в виду, что в отличие от правил отбора по зарядовой чётности правила отбора по изотопической чётности не являются точными и справедливы лишь в указанных ранее приближениях а), б), в). То же самое имеет место и для правил отбора по изотопическому спину.

*) В работе [46] подробно рассмотрен вопрос о гамма-излучении и фотодезинтеграции ядер в связи с изотопическим спином.

Довольно трудно оценить в общем случае степень неточности рассматриваемых правил отбора. Однако расчёт, проведённый для лёгких ядер с $T=0$ [48] (см. также [49]), показывает, что происходящая от кулоновского взаимодействия и неравенства масс протона и нейтрона примесь состояний с $T=1$ составляет всего лишь около 0,25%.

Таким образом, от проверки справедливости концепции изотопического спина путём изучения дезинтеграции лёгких ядер можно ожидать получения ценных сведений о степени зарядовой независимости ядерных сил.

В связи с изложенным выше возникает вопрос о существовании изотопической симметрии для других известных нам частиц, например $\pi^{\pm}$- и π^0-мезонов. Если под изотопической симметрией понимать определённые свойства перестановочной симметрии волновой функции, как это имело место в случае нуклеонов, то приходится признать, что введение понятия изотопического спина для π-мезонов сопряжено с трудностями. Дело в том, что у π-мезона имеется три зарядовых состояния, вследствие чего схема Юнга для функции χ может состоять из трёх строк (переменная m_τ принимает три значения 0, ± 1). Но схему Юнга с числом строк, большим чем 2, нельзя охарактеризовать одним числом *), поэтому ввести изотопический спин, основываясь только на гипотезе о свойствах перестановочной симметрии волновой функции системы π-мезонов, представляется затруднительным. Тем не менее, говорят об изотопическом спине π-мезонов, полагая его равным 1 и объединяя волновые функции $\pi^{\pm}$- и π^0-мезонов в единую трёхкомпонентную функцию — вектор в изотопическом пространстве. Совершенно очевидно, что понятие изотопического спина для π-мезонов лишено той физической определённости, какая имеет место для изотопического спина нуклеонов. Ещё менее понятным с указанной точки зрения является представление об изотопическом спине системы разных частиц, например π-мезона и нуклеона. Смысл понятия изотопического спина π-мезона, или, точнее, определение этого понятия, сводится к постулированию определённых свойств симметрии гамильтониана взаимодействия мезонного поля с нуклеонами или другими частицами.

Рассматривая чисто формально волновые функции нуклеона и π-мезона как спинор и вектор изотопического пространства и требуя инвариантности гамильтониана относительно вращений в этом пространстве, мы можем написать:

$$H' = g\Phi_{\mu}^{k}\,(U^{+}\tau_{-k}\,F_{\mu}\,U), \tag{120}$$

---

*) Если говорить о схемах Юнга для обычных спиновых функций, то при спине $> 1/2$ различные юнговские схемы могут соответствовать одному и тому же полному спину системы.

где

$$\left.\begin{aligned} k=\pm 1,0;\ \tau_{\pm 1}=\tau_1\pm i\tau_2,\ \tau_0=2\tau_3, \\ U=\begin{pmatrix}\Psi_p\\ \Psi_n\end{pmatrix}, \\ \Phi_\mu^{+1}=\Phi_{+\mu}^*+i\Phi'_{-\mu};\ \Phi_\mu^{-1}=\Phi_{+\mu}-i\Phi_{-\mu}^*; \\ \Phi_\mu^0=\Phi_{0\mu}+\Phi_{0\mu}^*, \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

причём $\Phi_{+\mu}$, $\Phi_{-\mu}$, $\Phi_{0\mu}$ — какой-либо из тензоров (42), (43) для положительных, отрицательных и нейтральных мезонов, а матрицы F_μ имеют такой же смысл, что и в уравнениях (40), и предполагаются эрмитовыми. Гамильтониан (120) является скаляром в изотопическом пространстве, поскольку он представляет собой скалярное произведение двух изотопических векторов Φ_μ^k и $(U^+\tau_{-k}F_\mu U)$. Такой гамильтониан будет инвариантен относительно вращений оси 3 в изотопическом пространстве на 90° (замена $\pi^\pm \rightleftarrows \pi^0$) и 180° (замена $\pi^\pm \rightleftarrows \pi^\mp$ и нейтрон $\rightleftarrows$ протон). Характерная особенность гамильтониана (120) состоит в том, что им обусловливается различие знаков константы взаимодействия нейтрального мезона с протонами и нейтронами. Действительно,

$$g\Phi_\mu^0(U^+\tau_0F_\mu U)=g\Phi_\mu^0\{(\Psi_p^+F_\mu\Psi_p)-(\Psi_n^+F_\mu\Psi_n)\}= \\ =g_p\Phi_\mu^0(\Psi_p^+F_\mu\Psi_p)+g_n\Phi_\mu^0(\Psi_n^+F_\mu\Psi_n), \tag{122}$$

так что

$$g_p=-g_n. \tag{123}$$

Справедливость (123) может быть проверена экспериментально, например, путём изучения фоторождения π^0-мезонов на дейтеронах. В этом случае возможны два процесса:

$$\gamma+\mathrm{d}\to\mathrm{d}+\pi^0, \tag{124а}$$

$$\gamma+\mathrm{d}\to\mathrm{n}+\mathrm{p}+\pi^0. \tag{124б}$$

Расчёт (см.[50]) показывает, что при справедливости (123) оба эти процесса обладают одинаковыми по порядку величины эффективными сечениями; если же отказаться от (123) и положить $g_p=g_n$, то сечение процесса (124а) оказывается значительно меньше сечения реакции (124б). Известные в настоящее время опытные данные не позволяют считать вполне установленной справедливость утверждения (123), а вместе с тем и гамильтониана (120). Можно лишь с уверенностью говорить об инвариантности гамильтониана взаимодействия π^+-мезонов с нуклеонами относительно поворота оси 3 в изотопическом пространстве на 180°. При этом гамильтониан взаимодействия запишется в виде

$$H' = g \sum_{k'=\pm 1} \Phi_{\mu}^{k'} (U^{+}\tau_{-k'} F_{\mu} U). \tag{125}$$

Концепция изотопического спина для мезонного и нуклеонного полей позволяет использовать для расчёта относительной вероятности некоторых эффектов *) результаты теории представлений группы трёхмерных вращений. Полученные этим путём данные не связаны с применением теории возмущений и не зависят от конкретного вида Φ_{μ}^{k} и F_{μ} в гамильтониане (120), что даёт возможность в ряде случаев надёжно предсказать следствия, вытекающие из гипотезы изотопического спина. Подробное рассмотрение указанного круга вопросов выходит, однако, за рамки настоящей статьи.

6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРАВИЛА ОТБОРА В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

При использовании теории возмущений для расчёта вероятностей распадов элементарных частиц возникают некоторые дополнительные правила отбора, впервые рассмотренные Фарри [52] (см. также [53—56]). Строгий вывод этих правил отбора приведён в Дополнении IV. Здесь же для выявления существа дела мы ограничимся не вполне строгим, но физически наглядным изложением.

Рассмотрим распад нейтрального бозона B_0 на N других нейтральных бозонов $B_1 \ldots B_N$. Допустим при этом, что все участвующие в процессе бозоны взаимодействуют непосредственно с каким-либо одним и тем же полем спинорных частиц, например нуклеонным. Тогда в наименьшем порядке теории возмущений процесс распада представится в виде цепи виртуальных переходов следующего, например, типа: рождение бозоном B_0 пары нуклеон-антинуклеон, последовательное рождение нуклеоном бозонов $B_1 \ldots B_{N-1}$, аннигиляции нуклеона и антинуклеона с рождением бозона B_N. Матричный элемент для перехода указанного типа может быть представлен в виде

$$M_{\text{нукл}} = g^{(0)} g^{(1)} \ldots g^{(N)} M, \tag{126}$$

где $g^{(0)}, g^{(1)}, \ldots, g^{(N)}$ — константы взаимодействия бозонов с полем нуклеонов. Так как теория симметрична относительно нукле-

*) Например, реакций (124а) и (124б), процессов $p + p \to p + n + \pi^{+}$ и $p + p \to p + p + \pi^{0}$, различных путей распада заряженной V^{+}-частицы (см. [51]) и т. п.

онов и антинуклеонов, причём в конечном состоянии ни тех ни других не имеется, то мы получим в точности такой же матричный элемент, если произведём замену нуклеон $\rightleftarrows$ антинуклеон. Обозначив этот матричный элемент через $M_{\text{ант}}$, можем написать:

$$M_{\text{ант}} = g^{(0)\prime} g^{(1)\prime} \ldots g^{(N)\prime} M \tag{127}$$

($g^{(0)}$, $g^{(1)\prime} \ldots g^{(N)\prime}$ — константы взаимодействия бозонов с антинуклеонами). Поскольку

$$M_{\text{ант}} = M_{\text{нукл}}, \tag{128}$$

то

$$g^{(0)\prime} g^{(1)\prime} \ldots g^{(N)\prime} = g^{(0)} g^{(1)} \ldots g^{(N)}, \tag{129}$$

если только M в (126) и (127) не равно нулю. Нетрудно показать, пользуясь табл. II и результатами § 4, что константа взаимодействия бозонов с нуклеонами меняет знак при переходе к антинуклеонам в случае векторной и тензорной связей (для векторного варианта это особенно ясно, так как векторная связь имеет место при взаимодействии заряженных частиц с электромагнитным полем):

$$\left.\begin{aligned} g'_V &= -g_V, \\ g'_T &= -g_T. \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

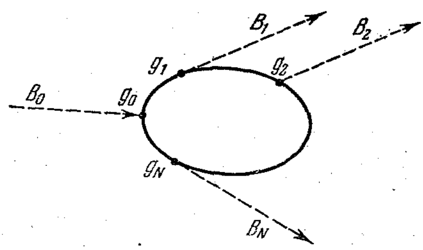

Рис. 3. Распад бозона на N бозонов через промежуточное нуклеонное поле.

Если среди участвующих в процессе бозонов имеется нечётное число частиц, взаимодействие которых с нуклеонами характеризуется векторной или тензорной связями, то равенство (129) не будет выполнено. Тогда для справедливости (128) необходимо, чтобы $M = M_{\text{ант}} = M_{\text{нукл}} = 0$. Другими словами, при нечётном числе бозонов с векторной и тензорной связями процесс в рассматриваемом порядке теории возмущений будет запрещён. Конечно, этот запрет не является абсолютным — его может не существовать в более высоком порядке теории возмущений. Чтобы выяснить, для каких именно цепочек виртуальных переходов указанный запрет не имеет места, удобно изображать эти цепочки графически в виде диаграмм (см. [57—59]). Диаграмма, соответствующая матричному элементу (126), имеет вид петли и показана на рис. 3, где пунктиром условно изображены мировые линии бозонов, а сплошной чертой — мировая линия нуклеона, причём антинуклеон представлен как движущийся «попятно во времени» нуклеон. Каждому узлу диаграммы (пересечению нуклеонной и бозонной линий) соответствует одна из констант $g^{(i)}$. Если с данным узлом ассоциирована одна из констант (130), то мы его будем называть нечётным. Полученное выше правило отбора для распада нейтрального бозона B_0 на нейтральные бозоны $B_1, B_2, \ldots, B_N$ может быть теперь сформулировано так: матричные элементы для замкнутых нуклеонных петель с нечётным числом нечётных узлов равны нулю. Из сказанного видно, что диаграммы, отличающиеся от рис. 3 наличием внутренних виртуальных бозонных линий (рис. 4, *а*), хотя и соответствуют более высокому порядку теории возмущений, но не снимают рассмотренных выше запретов, так как чётность числа нечётных узлов остаётся неизменной. С другой стороны, если диаграмма на рис. 4, *а* соответствует равному нулю матричному элементу, то диаграмма 4, *б* даёт, вообще говоря, отличный от нуля матричный элемент для того же процесса, но в более высоком порядке теории возмущений (диаграмма 4, *б* соответствует следующей цепочке виртуальных переходов: поглощение B_0 и рождение пары нуклеон-антинуклеон, рождение бозонов B_1, B' нуклеоном, аннигиляция протона и антипротона с рождением бозона B_2; поглощение бозоном B_1 бозона B', который является, таким образом, виртуальным).

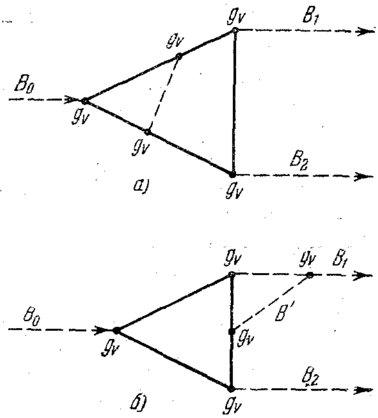

Рис. 4. Распад на два бозона: *а*) матричный элемент равен нулю; *б*) матричный элемент отличен от нуля.

В развитых выше соображениях не учитывалась симметрия в пространстве изотопического спина. Если предположить, что она существует, то удобней всего раздельно рассмотреть два случая:

а) все участвующие в процессе бозоны нейтральны (этот случай без учёта изотопической симметрии и был рассмотрен выше);

б) среди участвующих в процессе бозонов имеются заряженные.

Рассмотрим сначала случай а). Учитывая, что нейтральные бозоны могут рождаться и поглощаться как протонами так и нейтронами, мы должны написать для матричных элементов любой цепочки виртуальных переходов:

$$M_{\text{нукл}} = M_{\text{p}} + M_{\text{n}}, \tag{131}$$

где M_{p} и M_{n} даются уравнением (126), в котором под $g^{(0)}, \ldots, g^{(N)}$ следует теперь разуметь константы взаимодействия бозонов с протонами и нейтронами соответственно. Из уравнения (131) мы сразу же получим новый результат, если предположим, что взаимодействие некоторых из бозонов описывается гамильтонианом (120), а для остальных бозонов имеет место равенство $g_p = g_n$. Поскольку для бозонов типа (120) $g_p = -g_n$, то при нечётном числе их матричный элемент (131) обратится в нуль (в силу изотопической симметрии M_p и M_n отличаются только константами $g_p^{(i)}$ и $g_n^{(i)}$). Таким образом, в случае а) мы получаем следующие правила отбора: матричный элемент равен нулю, если замкнутая нуклеонная петля содержит нечётное число нечётных узлов или нечётное число внешних линий бозонов типа (120). Перейдём теперь к рассмотрению случая б). Для определённости предположим, что бозон B_0 является отрицательно заряженным и распадается на заряженный бозон B_1^- и нейтральные бозоны $B_2, B_3, ..., B_N$. Тогда первый виртуальный переход можно себе представить так: протон в состоянии с отрицательной энергией поглощает B_0, превращаясь при этом в нейтрон с положительной энергией (оставшаяся в состояниях с отрицательной энергией «дырка» символизирует собой антипротон). После этого возможно превращение нейтрона в протон с испусканием B_1^-, а затем рождение протоном бозонов $B_2, \ldots, B_N$, причём одна из этих нейтральных частиц рождается при аннигиляции протона и антипротона (т. е. при возвращении протона в начальное состояние с отрицательной энергией). Заметим теперь, что матричный элемент перехода не будет в рассматриваемом случае инвариантен относительно преобразования зарядового сопряжения для нуклеонного поля, поскольку при используемом варианте теории (изотопический спин нуклеона равен $^1/_2$) «антипротонный вакуум» поглощать отрицательно заряженную частицу не может*). Операция зарядового сопряжения для нуклеонов должна быть в данном случае совмещена с заменой протон $\rightleftarrows$ нейтрон. Обозначая соответствующие матричные элементы через M_p и $\overline{M}_p$ ($\overline{M}_p$ — матричный элемент, полученный из M_p путём указанных двух преобразований), мы можем написать для каждого из них уравнение (126) и, исходя из зарядовой и изотопической симметрии, потребовать:

$$M_p = \overline{M}_p. \tag{132}$$

Сравнив (126) и (132), мы сразу же найдём, что $M_p = \overline{M}_p = 0$, если:

1) замкнутая нуклеонная петля содержит нечётное число внешних линий нейтральных бозонов типа (120) и чётное число нечётных узлов;

---

*) Если бы это было возможно, то в виртуальных переходах фигурировал бы «нуклеон» с удвоенным элементарным зарядом, т. е. $e\,|m_\tau| = \frac{3}{2}$, $\tau = \frac{3}{2}$.

2) замкнутая нуклеонная петля содержит чётное число внешних линий нейтральных бозонов типа (120) и нечётное число нечётных узлов.

Иначе говоря, если обозначить через $N(\tau_3)$ число участвующих в процессе нейтральных бозонов типа (120), а через $N(V)$ и $N(T)$ — числа узлов с векторными и тензорными связями, то в рассматриваемом порядке теории возмущений процесс будет запрещён, когда сумма $N(\tau_3)+N(V)+N(T)$ для данной нуклеонной петли нечётна. Это правило отбора будет справедливо, разумеется, не только для рассмотренного нами частного вида распада $(B_0^- \to B_1^- + B_2 + \ldots + B_N)$, но вообще для любых процессов с участием заряженных бозонов.

Полученные в этом параграфе правила отбора приведены в табл. V*). Используя табл. V, рассмотрим в качестве примеров

Таблица V

Правила отбора для замкнутых петель в теории возмущений

Тип процесса	$N(\tau_3)+N(V)+N(T)$		$N(\tau_3)$ или $N(V)+N(T)$	
	$=2n$	$=2n+1$	$=2n$	$=2n+1$
С участием заряженных бозонов	разрешён	запрещён		
Без участия заряженных бозонов			разрешён	запрещён

Примечание. $N(\tau_3)$ — число нейтральных мезонов типа (120) (см. § 5); $N(V)$ — число векторных связей; $N(T)$ — число тензорных связей.

распады V_2^0-частицы и τ-мезона. Согласно результатам § 3 V_2^0-частица может быть либо векторной, либо скалярной. Если V_2^0 есть векторная частица типа (120), то её распад на два заряженных π-мезона разрешён в наименьшем мыслимом порядке теории возмущений, ибо в этом случае

$$N(\tau_3)=1, \quad N(V)+N(T)=1, \quad N(\tau_3)+N(V)+N(T)=2\,^{**}).$$

Если же для V_2^0-частицы имеет место $g_n = g_p$, то распад на два

*) В связи с правилами отбора, помещёнными в табл. V, необходимо указать, что в опубликованной автором данной статьи работе [60] получен неверный результат из-за вкравшейся в расчёт ошибки.

Если, однако, вместо рассматривавшихся в цитированной статье скалярных нейтральных мезонов со скалярной связью использовать, например, скалярные мезоны с векторной связью, то запретов, перечисленных в табл. V, можно избежать.

**) Мы считаем π-мезоны псевдоскалярными частицами.

заряженных π-мезона в наинизшем возможном порядке теории возмущений запрещён. Эти же правила отбора будут справедливы в том случае, если V_2^0-частица является скалярной, но характеризуется векторной связью с нуклеонами. Пользуясь табл. V, легко также обнаружить, что распад V_2^0-частицы по схеме

$$V_2^0 \rightarrow 2\pi^0$$

в наинизшем порядке запрещён, если взаимодействие V_2^0-частицы с нуклеонным полем описывается гамильтонианом (120). Распад

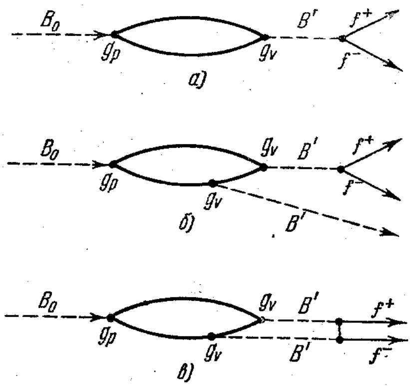

Рис. 5. Распад нейтрального бозона на пару частиц с полуцелым спином (f^+, f^-):

а) распад на пару $f^\pm$, $f-$ запрещён; *б*) разрешён распад на пару $f+$, f^- и бозон B; *в*) запрет для распада на пару f^+, f^- снят в более высоком порядке теории возмущений.

τ-мезона на три заряженных π-мезона разрешён в наинизшем возможном порядке теории возмущений только в том случае, если τ-мезон является псевдоскалярной или псевдовекторной частицей. При этом условии будет, кроме того, разрешён распад [60]

$$\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm + 2\pi^0$$

независимо от того, описываются ли π^0-мезоны гамильтонианом (120) или нет. Приведённые в табл. V правила отбора могут быть также использованы и для суждения о степени запрещённости процессов распада нейтрального бозона через промежуточное нуклеонное поле на пару частиц с полуцелым спином. Соответствующая такому процессу диаграмма изображена на рис. 5, *а*. Если бозон B_0 является, например, π^0-мезоном, а бозон B' — фотоном, то распад на пару электрон-позитрон в указанном на диаграмме 5, *а* порядке теории возмущений будет запрещён. Этот запрет снимается, однако, при переходе к более высоким порядкам (см. рис. 5, *б*, 5, *в*).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в данной статье свойства симметрии могут быть на основании изложенного разбиты на два класса. В первый из них входят правила точной симметрии — пространственной и зарядовой, во второй — неточная в принципе и проблематичная в смысле самого факта существования симметрия в пространстве изотопического спина. Этот последний вид симметрии в настоящее время изучен недостаточно не только с экспериментальной, но и с теоретической точки зрения, в особенности для частиц с целым изотопическим спином.

В отношении свойств симметрии пространства — времени мы отметим здесь, что исследование вопроса о роли в теории временны́х отражений фактически только начато.

Вместе с тем, накопленный в настоящее время опытный и теоретический материал о разнообразных свойствах симметрии позволяет уже сейчас сделать ценные заключения о природе некоторых элементарных частиц и ходе ряда ядерных процессов. Особое значение полученных таким путём выводов состоит в том, что в большинстве своём они не связаны с использованием расчётных схем, в справедливости которых при современном состоянии теории можно было бы сомневаться.

Дополнение I

О ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЯХ СОСТОЯНИЙ С ДАННЫМ УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ

Как указано в тексте § 3, релятивистская волновая функция приводима в отношении группы трёхмерных вращений. Однако для нахождения числа возможных состояний с полным угловым моментом достаточно рассмотреть все возможности для неприводимой части волновой функции, имеющей наибольшее число компонент ($2\sigma+1$, если σ — спин частицы). Рассмотрим сначала состояния частиц с целым спином. Из теории представлений группы трёхмерных вращений и отражений следует, что неприводимое представление $D_j^{\xi'}$, по которому образуется главная часть волновой функции состояния с полным моментом j и пространственной чётностью $\xi=(-1)^j\xi'$, содержится в прямом произведении неприводимых представлений D_l^+, $D_\sigma^{\xi'}$, где $\zeta'=(-1)^\sigma\zeta$ (ζ — внутренняя чётность частицы), а l — некоторое целое число. Действительно, согласно теореме Клебша-Жордана имеем:

$$D_l^+ \times D_\sigma^{\zeta'} = D_{l+\sigma}^{+\zeta'} + D_{l+\sigma-1}^{-\zeta'} + \ldots$$
$$\ldots + D_{l+\sigma-k}^{\zeta'(-)^k} + \ldots + D_{|l-\sigma|}^{\zeta'(-)^n}, \quad \text{(Ia)}$$

где

$$\left.\begin{array}{lll} n=2l, & 0\leqslant k\leqslant 2l & \text{при } \sigma\geqslant l, \\ n=2\sigma, & 0\leqslant k\leqslant 2\sigma & \text{при } \sigma\leqslant l. \end{array}\right\} \tag{Iб}$$

Выбирая l и k так, чтобы было

$$l+\sigma-k=j, \tag{Iв}$$

получим (51). Пространственная чётность функции, преобразующейся по представлению $D^{\zeta'(-)^k}_{l+\sigma-k=j}$, будет:

$$\xi=(-1)^{l+\sigma}\zeta'=(-1)^l\zeta. \tag{Iг}$$

Таким образом, при данном ζ, ξ целиком определяется чётностью или нечётностью числа l.

В случае полуцелого спина понятие чётности носит относительный характер. Поэтому (Iа) заменится формулой

$$D_l^+\times D_\sigma=D^+_{l+\sigma}+D^-_{l+\sigma-1}+\ldots$$
$$\ldots+D^{(-)^k}_{l+\sigma-k}+\ldots+D_{|l-\sigma|}, \tag{Iд}$$

где $(-)^k$ при символах D указывают на относительную пространственную чётность функций, преобразующихся по представлениям группы вращений $D_{l+\sigma}$ и $D_{l+\sigma-k}$.

Следует заметить, что при конструировании релятивистской волновой функции из неприводимых в отношении пространственных отражений и вращений частей внутренние чётности этих неприводимых частей могут оказаться различными. В этом случае вместо (Iд), например, следует рассмотреть прямые произведения $D_l^+\times D_\sigma^+$, $D_l^+\times D_{\sigma'}^{\zeta'}$, $D_l^+\times D_{\sigma''}^{\zeta''}$ и т. д., где ζ', ζ'' — относительные внутренние чётности спиноров размерностей $2\sigma+1$, $2\sigma'+1$, $2\sigma''+1$ и т. д., входящих в состав релятивистской волновой функции.

Рассмотрим несколько подробней важный случай $\sigma={}^1/_2$. Релятивистская волновая функция Ψ будет четырёхкомпонентной и приводимой в отношении группы трёхмерных вращений. Она распадается на два двухкомпонентных спинора φ и $\dot\varphi$ $\left(\Psi=\left\{\begin{matrix}\varphi\\ \dot\varphi\end{matrix}\right\}\right)$, преобразующихся по неприводимому представлению D_j этой группы. Хорошо известно (см., например, [2,12]), что при определённом виде матриц h_α (или h'_α), рассмотренных в § 2, матрице T (или T'), соответствующей инверсии пространственных осей, может быть придана форма

$$T=\begin{pmatrix}0 & \hat\tau\\ \hat\tau & 0\end{pmatrix},$$

где $\hat\tau$ — двухрядная матрица. Таким образом, при инверсии пространственных осей $\varphi \to \tau\varphi$, $\dot\varphi \to \tau\dot\varphi$. Если перейти к новому эквивалентному представлению, положив

$$\Phi = P\Psi = \begin{Bmatrix}\Psi_I \\ \Psi_{II}\end{Bmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & -\hat{1}\end{pmatrix}, \quad \hat{1} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\varphi = \frac{1}{2}(\Psi_I + \Psi_{II}), \quad \dot\varphi = \frac{1}{2}(\Psi_I - \Psi_{II}),$$

то для преобразования спиноров Ψ_I и Ψ_{II} при инверсии пространственных осей получим:

$$\left.\begin{aligned} \Psi'_I &= \hat\tau\dot\varphi + \hat\tau\varphi = \hat\tau\Psi_I, \\ \Psi'_{II} &= \hat\tau\dot\varphi - \hat\tau\varphi = -\hat\tau\Psi_{II}. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{Ie})$$

Из равенства (Ie) следует, что дираковская волновая функция приводима не только в отношении трёхмерных вращений, но и в отношении пространственных отражений, причём спиноры Ψ_I и Ψ_{II} обладают различной внутренней чётностью. Если при вращениях и отражениях Ψ_I (или Ψ_{II}) преобразуется по представлению D_j^+, содержащемуся в прямом произведении $D^+_{j-\frac{1}{2}} \times D_{\frac{1}{2}}$, то Ψ_{II} (или Ψ_I) преобразуется по представлению $D_j^{-\zeta}$, входящему в состав прямого произведения $D^+_{j+\frac{1}{2}} \times D^\zeta_{\frac{1}{2}} = D^\zeta_{j+1} + D_j^{-\zeta}$, где ζ — относительная внутренняя чётность Ψ_I и Ψ_{II}. Так как $\zeta = -1$, то, в конечном счёте, оба спинора преобразуются по одному и тому же представлению D_j.

Дополнение II

РАСПАД БОЗОНА С НУЛЕВЫМ СПИНОМ

Докажем сначала справедливость правил отбора (62). Во всех случаях распада на две частицы волновая функция распадающейся частицы должна преобразоваться при трёхмерных вращениях и отражениях по неприводимому представлению $D_\sigma^{\zeta'}$, содержащемуся в прямом произведении $D_l^+ \times D_{\sigma_1}^{\zeta'_1} \times D_{\sigma_2}^{\zeta'_2}$, где l — орбитальный момент относительного движения продуктов распада, σ, σ_1, σ_2 — спины участвующих в процессе частиц, ζ', ζ'_1, ζ'_2 — величины, указанные в Дополнении I; в нашем случае

$$\sigma = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_1 = 1, \quad \zeta' = \zeta, \quad \zeta'_2 = \zeta_2, \quad \zeta'_1 = -\zeta_1.$$

Развёртывая по формуле (Iа) прямое произведение $D_l^+ \times D_1^{-\zeta_1}$, убеждаемся, что в силу $\sigma = 0$ l должно быть равно 1. Поэтому

$$D_l^+ \times D_1^{-\zeta_1} = D_1^+ \times D_1^{-\zeta_1} = D_2^{-\zeta_1} + D_1^{\zeta_1} D_0^{-\zeta_1},$$

$$D_l^+ \times D_1^{-\zeta_1} \times D_0^{\zeta_1} = D_2^{-\zeta_1\zeta_2} + D_1^{\zeta_1\zeta_2} + D_0^{-\zeta_1\zeta_2}.$$

Распад будет разрешён, если

$$D_0^{\zeta} = D_0^{-\zeta_1\zeta_2}$$

или

$$\zeta = -\zeta_1\zeta_2,$$

что и требовалось.

При распаде бозона со спином 0 на три бозона с нулевыми спинами имеет место правило отбора (76). Чтобы убедиться в этом, разложим прямое произведение

$$D_{l_1}^+ \times D_{l_2}^+ \times D_0^{\zeta_1} \times D_0^{\zeta_2} \times D_0^{\zeta_3} = D_{l_1}^+ \times D_{l_2}^+ \times D_0^{\zeta_1\zeta_2\zeta_3}$$

на неприводимые части (l_1, l_2 — орбитальные моменты частиц 1 и 2 относительно частицы 3). В силу сохранения углового момента должно быть

$$l_1 = l_2 = l.$$

Согласно Дополнению I

$$D_l^+ \times D_l^+ = D_{2l}^+ + \ldots + D_0^+.$$

Поэтому

$$D_{l_1}^+ \times D_{l_2}^+ \times D_0^{\zeta_1\zeta_2\zeta_3} = D_{2l}^{\zeta_1\zeta_2\zeta_3} + \ldots + D_0^{\zeta_1\zeta_2\zeta_3}.$$

Так как волновая функция распадающейся частицы преобразуется по неприводимому представлению D_0^{ζ}, то условием возможности распада будет:

$$D_0^{\zeta} = D_0^{\zeta_1\zeta_2\zeta_3},$$

откуда и следует (76).

Дополнение III

ТРАНСФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ СПИНОРНЫХ ЧАСТИЦ С НУЛЕВЫМИ ОРБИТАЛЬНЫМИ МОМЕНТАМИ

Как указано в Дополнении I, релятивистская волновая функция частицы со спином $^1/_2$ может быть разбита на два неприводимых в отношении пространственных вращений и отражений двухкомпонентных спинора, преобразующихся по представлению D_j^+.

Поэтому волновая функция системы из двух частиц с одинаковой относительной внутренней чётностью будет при фиксированном угловом моменте преобразовываться по одному из представлений, содержащихся в прямом произведении $D^{+}_{j_1} \times D^{+}_{j_2}$. Если $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$ и рассматриваемые спинорные частицы принадлежат к типу T, T_0 или T, T'_0 (см. табл. I), то

$$D^{+}_{1/2} \times D^{+}_{1/2} = D^{+}_{1} + D^{-}_{0}. \qquad \text{(IIIa)}$$

Таким образом, при нулевом орбитальном моменте и полном моменте $I = 1$ имеем, используя обозначения Дополнения I,

$$\xi' = (-1)^{I} \xi = -\xi = -\zeta = 1$$

или

$$\zeta = -1,$$

т. е. волновая функция является вектором. Если полный момент системы равен нулю, то согласно (IIIa) волновая функция преобразуется по представлению D^{-}_{0} и, следовательно, является псевдоскаляром.

Если спинорные частицы принадлежат к типу $T'T'_0$ или $T'T_0$, то разложение $D'^{+}_{1/2} \times D'^{+}_{1/2}$ будет иметь вид

$$D'^{+}_{1/2} \times D'^{+}_{1/2} = D^{-}_{1} + D^{+}_{0}.$$

В этом случае при $I = 1$ получаем псевдовектор, а при $I = 0$ — скаляр.

Дополнение IV

ВЫБОР ПРАВИЛ ОТБОРА ФАРРИ

Матричный элемент перехода для диаграммы, изображённой на рис. 3, может быть записан в форме*)

$$M = M_1 + M_2,$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \int \mathrm{Sp}\,\{Q_0 K(0,\ N)\, Q_N \ldots Q_1 K(1,\ 0)\}\, d^4p, \\ M_2 &= \int \mathrm{Sp}\,\{K(0,\ 1)\, Q_1 \ldots Q_N K(N,\ 0)\, Q_0\}\, d^4p. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IVa)}$$

Два слагаемых в уравнении (IVa) появляются в связи с двумя возможными направлениями обхода петли на диаграмме рис. 3

*) В (IVa) опущены все несущественные для данного вывода константы.

(M_1 соответствует направлению обхода, показанному на рис. 3). Буквами Q_l обозначены умноженные на матрицу γ_0 фурье-компоненты операторов, входящих в гамильтониан взаимодействия (120), причём для нашего вывода существенна лишь та их часть, которая состоит из произведения матриц τ и F, так что в дальнейшем будем писать:

$$\left.\begin{aligned} &Q_l=\tau^i f^i, \\ &\tau^i=\tau_{r_i}, \quad f^i=\gamma_0 F^i, \quad r_i=0, \pm 1, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IVб)}$$

опуская, для краткости, нижний индекс у матриц (ср. с (120)). Символами $K(l,\ m)$ обозначены матрицы

$$\left.\begin{aligned} &K(1,\ 0)=\left(\hat{p}+m\right)\left(\hat{p}{}^2-m^2\right)^{-1}\ldots \\ &\qquad\ldots K(N,\ 0)=\left(\hat{p}_N+m\right)\left(\hat{p}{}_N^2-m^2\right)^{-1}, \\ &K(0,\ 1)=\left(-\hat{p}+m\right)\left(\hat{p}{}^2-m^2\right)^{-1}\ldots \\ &\qquad\ldots K(0, N)=\left(-\hat{p}_N+m\right)\left(\hat{p}{}_N^2-m^2\right)^{-1}, \\ &\qquad \hat{p}_1=\hat{p}-\hat{k}_1, \quad \hat{p}_{l+1}=\hat{p}_l-\hat{k}_{l+1}, \\ &\qquad\quad \hat{p}=i\gamma_\alpha p_\alpha, \quad \hat{k}_j=i\gamma_\alpha k_\alpha^j, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IVв)}$$

где k_α^j — четырёхмерный импульс j-го бозона.

Сравним теперь M_1 и M_2. Учитывая что τ^i коммутируют со всеми f^i и $K(l,\ m)$, пишем:

$$\left.\begin{aligned} &M_1=a\int \operatorname{Sp}\{f^0K(0,\ N)\ \ldots\ f^1K(1,\ 0\}\, d^4p, \\ &M_2=a'\int \operatorname{Sp}\{K(0, 1)\, f^1\ \ldots\ K(N, 0)\, f^0\}\, d^4p, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IVг)}$$

причём

$$a=\operatorname{Sp}(\tau^0\tau^N\ldots\tau^1), \quad a'=\operatorname{Sp}(\tau^1\ \ldots\ \tau^N\tau^0). \qquad \text{(IVд)}$$

Если заряженные бозоны в процессе не участвуют, то операторы под знаком следа в (IVд) содержат только матрицы $\tau_0=2\tau_3$. При нечётном числе их $a=a'=0$. Таким образом, если

$$N(\tau_{\pm 1})=0, \quad N(\tau_3)=2n+1, \qquad \text{(IVе)}$$

то

$$M_1=M_2=0. \qquad \text{(IVж)}$$

Допустим, что $N(\tau_{\pm 1}) \neq 0$. Тогда, как легко показать,

$$a' = (-1)^{N(\tau_3)} a. \tag{IVз}$$

Замечая далее, что $\mathrm{Sp} A = \mathrm{Sp} \breve{A}$, можем написать:

$$\mathrm{Sp}\{K(0, 1) f^1 \ldots K(N, 0) f^0\} = \\ = \mathrm{Sp}\left\{\tilde{f}^0 \breve{K}(N, 0) \ldots \tilde{f}^1 \breve{K}(0, 1)\right\}. \tag{IVи}$$

Используя (IVв), табл. II и уравнение (83) из § 4, находим:

$$\left.\begin{aligned} &-\breve{\gamma}_\mu = \overline{C}\gamma_\mu \overline{C}^{-1}, \quad \overline{C} = \gamma_0 C, \\ &f = \gamma_\alpha \gamma_\beta \ldots f_\varkappa; \quad \tilde{f} = \breve{\gamma}_\varkappa \ldots \breve{\gamma}_\beta \breve{\gamma}_\alpha; \\ &\tilde{f} = \gamma_\varkappa \ldots \gamma_\beta \gamma_\alpha = -\gamma_5 f \gamma_5, \\ &\tilde{f} = \overline{C} \overline{f} \overline{C}^{-1}, \\ &\breve{K}(l, m) = \overline{C} K(l, m) \overline{C}^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{IVк}$$

Подставив IVк в IVи, находим:

$$\mathrm{Sp}\{K(0, 1) f^1 \ldots K(N, 0) f^0\} = \\ = \mathrm{Sp}\{\overline{C}\,\overline{f}^0 \overline{C}^{-1} \overline{C} K(0, N) \overline{C}^{-1} \ldots \overline{C}\,\overline{f}^1 \overline{C}^{-1} \overline{C} K(1, 0) \overline{C}^{-1}\}. \tag{IVл}$$

Учитывая, что всегда $\mathrm{Sp} SAS^{-1} = \mathrm{Sp} A$, получаем:

$$M_2 = \int \mathrm{Sp}\{\overline{f}^0 K(0, N) \ldots \overline{f}^1 K(1, 0)\}\, d^4 p. \tag{IVм}$$

Используя (IVб) и табл. II, сразу же получаем:

$$\overline{f} = -f \tag{IVн}$$

для векторного и тензорного взаимодействий и

$$\overline{f} = f \tag{IVо}$$

для скалярных, псевдоскалярных и псевдовекторных связей. На основании (IVз), (IVм) — (IVо) можем написать

$$M_1 = (-1)^{N(\tau_3) + N(V) + N(T)} M_2,$$

что и требовалось.

Если $N(\tau_{\pm 1}) = 0$, но $N(\tau_3) = 2n$, то, использовав (IVм) — (IVо), получим

$$M_1 = (-1)^{N(V) + N(T)} M_2$$

в согласии с табл. V.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем. **11**, 411 (1947).
1а. И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, ЖЭТФ **18**, 703 (1948).
2. И. М. Гельфанд, З. Я. Шапиро, УМН **7**, 3 (1952).
3. А. И. Алиханов, УФН **50**, 481 (1953).
4. В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, Москва, 1947.
5. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Квантовая механика, ч. 1, Гостехиздат, 1948.
6. В. Б. Берестецкий, И. Я. Померанчук, ЖЭТФ **19**, 756 (1949).
7. И. С. Шапиро, ЖЭТФ **22**, 524 (1952).
8. E. R. Caianiello, Phys. Rev. **86**, 564 (1952).
9. E. P. Wigner, C. G. Wick, A. S. Wightman, Phys. Rev. **88**, 101 (1952).
10. S. Watanabe, Phys. Rev. **84**, 1008 (1951).
10а. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 914 (1951) (см. перевод в сборнике «Новейшее развитие квантовой электродинамики» ИЛ, 1954, стр. 115).
11. В. А. Фок, ЖЭТФ **18**, 737 (1948).
12. Э. Картан, Теория спиноров, ИЛ, Москва, 1947.
13. G. Racah, Nuovo Cimento **14**, 322 (1937).
14. И. С. Шапиро, ЖЭТФ **23**, 412 (1952).
15. E. P. Wigner, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math. Phys. 546 (1932).
16. Г. Ф. Жарков, ЖЭТФ **20**, 493 (1950).
17. C. N. Yang, I. Tiomno, Phys. Rev. **79**, 495 (1950).
18. М. А. Марков, ЖЭТФ **18**, 903 (1948).
19. Ю. Ломсадзе, М. Марков, ЖЭТФ **19**, 178 (1949).
20. В. Лебедев, М. Марков, ЖЭТФ **19**, 292 (1949).
21. В. Б. Берестецкий, А. З. Долгинов, К. А. Тер-Мартиросян, ЖЭТФ **20**, 527 (1950).
22. M. Fierz, H.P.A. **12**, 3 (1939).
23. L. Michel, Progress in Cosmic Ray Physics, Amsterdam, 1952.
24. D. C. Peaslee, H.P.A. **23**, 845 (1950).
25. L. Michel, C. R. **234**, 703, 2161 (1952).
26. Л. Д. Ландау, ДАН **60**, 207 (1948).
27. C. N. Yang, Phys. Rev. **77**, 242 (1950).
28. Ю. М. Широков, ЖЭТФ **24**, 14 (1953).
29. Н. А. Власов, Изв. АН СССР, сер. физич. **14**, № 2 (1950).
30. И. Я. Померанчук, ДАН **60**, 213 (1948).
31. F. G. Fumi, L. Wolfenstein, Phys. Rev. **90**, 498 (1953).
32. И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, ЖЭТФ **18**, 1105 (1948).
33. В. В. Берестецкий, ЖЭТФ **21**, 93 (1951).
34. L. Wolfenstein, D. G. Ravenhall, Phys. Rev. **88**, 279 (1952).
35. В. Б. Берестецкий, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **19**, 673 (1949); В. Б. Берестецкий, ЖЭТФ **19**, 1130 (1949).
36. H. A. Tolhoek, S. R. de Groot, Phys. Rev. **84**, 150 (1951); Physica, **16**, 456 (1950).
37. L. C. Biedenharn, M. E. Rose, Phys. Rev. **83**, 459 (1951).
38. W. H. Furry, Phys. Rev. **56**, 1184 (1939).

39. Л. А. Слив, ЖЭТФ 20, 1035 (1950).
40. П. Ш., УФН 50, 135 (1953).
41. H. W. Fulbricht, Physica 18, 1026 (1952).
42. Б. С. Джелепов, Изв. АН СССР, сер. физич. 15, 496 (1951); ДАН 87, 365 (1952).
43. H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2-е изд., 1931 г., гл. V.
44. R. K. Adair, Phys. Rev. 87, 1044 (1952).
45. L. A. Radicati, Phys. Rev. 87, 521 (1952).
46. M. Gell-Mann, V. L. Telegdi, Phys. Rev. 91, 169 (1953).
47. N. M. Kroll, L. Foldy, Phys. Rev. 88, 1177 (1952).
48. L. A. Radicati, Proc. Phys. Soc. 66A, 139 (1953).
49. D. M. Wilkinson, D. H. Wilkinson a. G. Jones, Phys. Rev. 90, 721, 722 (1953).
50. А. Балдин, В. Михайлов, ДАН 91, 479 (1953).
51. D. C. Peaslee, Phys. Rev. 86, 127 (1952).
52. W. H. Furry, Phys. Rev. 51, 125 (1937).
53. H. Fukuda, Y. Miyamoto, Progr. Theor. Phys. 4, 389 (1949).
54. C. B. van Wyk, Phys. Rev. 80, 487 (1950).
55. A. Pais, R. Jost, Phys. Rev. 87, 871 (1952).
56. K. Nishijima, Progr. Theor. Phys. 6, 614 (1951).
57. R. P. Feynman, Phys. Rev. 76, 749 (1949) (сокращённый перевод содержится в сборнике «Проблемы современной физики», сер. 3, вып. 11, ИЛ, Москва, 1951).
58. F. I. Dyson, Phys. Rev. 75, 1736 (1949) (сокращённый перевод содержится в цитированном выше сборнике «Проблемы современной физики»).
59. В. Б. Берестецкий, УФН 46, 231 (1952).
60. И. С. Шапиро, ЖЭТФ 21, 731 (1951).
61. В. Б. Берестецкий, ДАН 92, 519 (1953).
62. К. А. Туманов, ЖЭТФ 25, 386 (1953).