

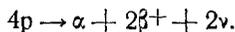
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

БЕТА-ПРОЦЕССЫ И АСТРОФИЗИКА

Д. А. Франк-Каменецкий

ВВЕДЕНИЕ

Согласно современным представлениям¹ важнейшим источником звёздной энергии для большинства звёзд являются ядерные реакции, приводящие в конечном счёте к превращению четырёх протонов в α -частицу, два позитрона и два нейтрино:

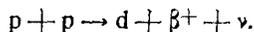


Этот процесс происходит, конечно, не при прямом столкновении четырёх частиц, что статистически крайне мало вероятно, а в результате цепи последовательных реакций γ -захвата и β -распада.

До недавнего времени казалось, что скорость выделения энергии определяют процессы γ -захвата, а β -процессы являются вторичными. В последнее время развитие теории привело к выводу, что константа β -процесса может входить множителем в суммарную скорость выделения энергии и что значение этой константы может сказываться на наблюдаемых свойствах звезды. Таким образом, возникла тесная связь между астрофизикой и теорией β -распада. Появились попытки пользоваться теорией β -распада для предвычисления свойств реальных звёзд² и даже делать заключения о константе β -взаимодействия из астрофизических данных³.

ПРОТОННАЯ РЕАКЦИЯ

Из того, что звезда находится в гидростатическом равновесии, следует, что температура в центре нормальной звезды должна быть порядка 10 миллионов градусов, т. е. в энергетических единицах порядка 1 кэв. Если нагреть чистый водород до такой температуры, то в нём должна пойти протонная реакция:



Это — своеобразный β -процесс, происходящий не из связанного состояния, а в момент соударения. Образовавшийся дейтон мгновенно превращается в α -частицу, хотя бы так^{4,5}:



Эта цепь реакций называется водородным циклом.

Скорость выделения энергии определяется первичной реакцией. Выражение для этой скорости записывается элементарно. Пусть b — радиус столкновения⁶. В данном случае — это радиус дейтона:

$$b = \frac{\hbar}{\sqrt{M\varepsilon}}, \quad (1)$$

где ε — энергия связи дейтона. Эффективное сечение соударения равно $4\pi b^2$ и время соударения $\frac{2b}{v}$, где v — относительная скорость сталкивающихся протонов. Чтобы получить сечение реакции, нужно сечение соударения умножить на барьерный множитель

$$P = \frac{2\pi e^2}{\hbar v} e^{-\frac{2\pi e^2}{\hbar v}} \quad (2)$$

и на вероятность того, что за время соударения успеет произойти β -распад. Вероятность эта равна произведению времени соударения $\frac{2b}{v}$ на вероятность β -распада за единицу времени:

$$\frac{1}{\tau} = M_{sp}^2 \Lambda^2 f g_1. \quad (3)$$

Здесь $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{8\pi P}} \frac{\int \psi_D^* \psi_p dV}{b^3}$ — безразмерный орбитальный ядерный матричный элемент, f — обычная статистическая функция Ферми, g_1 — константа триплетного β -взаимодействия, имеющая размерность обратного времени. Значение g_1 можно найти из другого чисто триплетного β -процесса, как

$$g_1 = \frac{4 \ln 2}{f t M_1^2}. \quad (4)$$

Множитель $\ln 2$ происходит от традиции пользоваться для характеристики β -процессов временем полураспада t , а не экспоненциальным временем, множитель 4 — от того, что вероятность нормируется на клетку фазового пространства, содержащую четыре состояния пары позитрон — нейтрино.

По принципу Паули спины протонов при столкновении антипараллельны. Устойчивое состояние дейтона с параллельными спинами может возникнуть только за счёт поворота спина, по правилам отбора Гамова — Теллера. Отсюда множитель в матричном элементе $M_{sp}^2 = 6$ (как в распаде He^6). Это — квадрат спинового матричного элемента. Он происходит от трёх возможных ориентаций спина конечного состояния и от того, что распадаться может любой из двух начальных протонов¹⁾.

Собирая все множители (вероятности соударения, прохождения через барьер и β -процесса), получаем окончательную формулу для сечения реакции

$$\sigma = \frac{8\pi b^3}{v} \frac{2\pi e^2}{\hbar v} e^{-\frac{2\pi e^2}{\hbar v}} \cdot 6\Lambda^2 f g_1. \quad (5)$$

По принципу Паули столкнуться могут только протоны с антипараллельными спинами. Число таких пар составляет $1/4$ от всех протонных пар. Поэтому при концентрации n протонов в единице объёма скорость реакции будет не $\frac{n^2\sigma v}{2}$, как было бы в случае бозе-частиц, но

$$w = \frac{n^2\sigma v}{8}. \quad (6)$$

Чтобы найти скорость реакции в плазме с температурой T , это выражение нужно усреднить по максвелловскому распределению относительных скоростей v . При этом используется то обстоятельство, что наиболее существенный экспоненциальный множитель

$$e^{-\frac{2\pi e^2}{\hbar v} - \frac{\mu v^2}{2kT}}$$

(μ — приведённая масса) имеет острый максимум при значении относительной скорости:

$$v_m = \sqrt[3]{\frac{2\pi e^2 kT}{\mu \hbar}}. \quad (7)$$

¹⁾ В оригинальной работе Сальпетера⁶ применяется старая система нормировки матричных элементов — не на ячейку фазового пространства, а на одно состояние пары испускаемых лёгких частиц. В этой системе спиновый множитель для протонной реакции равен не 6, а $3/2$, так как шесть состояний приходится на четыре комбинации спинов позитрона и нейтрино. При этом $g = \frac{\ln 2}{ftM^2}$, но зато все значения M^2 и универсальное время A в четыре раза меньше, чем по принятой в настоящее время нормировке.

Реакция в основном происходит именно при этой оптимальной скорости. При меньших скоростях мала вероятность прохождения через барьер, большие скорости слишком редки. Отсюда экспоненциальный множитель в скорости реакции принимает вид $e^{-\chi}$, где барьерный экспонент χ выражается как

$$\chi = 3 \sqrt[3]{\frac{\pi^2 e^4 \mu}{2 \hbar^2 k T}}. \quad (8)$$

В общем случае, если реакция происходит не между протонами, а между ядрами с зарядами Z_1 и Z_2 , величину под корнем нужно умножить на Z_1^2/Z_2^2 . Численно

$$\chi = 4250 \sqrt[3]{\frac{\bar{A} Z_1^2 Z_2^2}{T}}, \quad (9)$$

где \bar{A} — приведённая масса в единицах атомного веса, T — температура в $^{\circ}\text{K}$.

Приближённое интегрирование (6) по методу перевала приводит к выражению для усреднённой по Максвеллу скорости реакции

$$\bar{w} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma(v_m) n^2 \frac{2\pi e^2}{\hbar} e^{-\frac{\chi}{3}}, \quad (10)$$

где $\sigma(v_m)$ — сечение реакции при оптимальной скорости (7). Подстановка (5) даёт окончательную формулу Сальпетера⁶

$$\bar{w} = \frac{1}{4} \cdot \frac{16\pi}{3^{3/2}} b^3 \cdot 6\Lambda^2 f g_1 n^2 \chi^2 e^{-\chi}. \quad (11)$$

В настоящее время для характеристики β -взаимодействия вместо константы g принято пользоваться²³ универсальным временем A , которое связано непосредственно с экспериментальной величиной приведённого времени ft . Для чисто триплетного процесса

$$A_1 = ft M_1^2. \quad (12)$$

Применяемая Сальпетером константа g связана с универсальным временем так:

$$g = \frac{4 \ln 2}{A}. \quad (13)$$

Отсюда скорость протонной реакции

$$\bar{w} = \frac{16\pi}{3^{3/2}} b^3 \cdot 6\Lambda^2 f \frac{\ln 2}{A_1} n^2 \chi^2 e^{-\chi}. \quad (14)$$

Орбитальный ядерный матричный элемент Λ можно вычислить с довольно большой точностью теми же методами, какие применяются в теории дейтона или p - p -рассеяния. Это единственная ядерная система, для которой матричный элемент β -процесса может быть точно вычислен теоретически. Как показали Ландау и Смородинский⁷, все подобные расчёты практически нечувствительны к деталям формы потенциальной ямы; результаты всецело определяются энергией связи дейтона и эффективным радиусом действия ядерных сил.

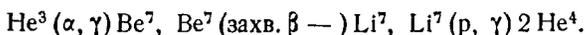
Расчёту матричного элемента для протонной реакции посвящены работы Бете и Критчфильда⁸, Фримена и Мотца⁹ и Сальпетера⁶. Ими получены следующие значения:

$$\begin{array}{ll} \text{Бете и Критчфильд} & \Lambda^2 = 8,1, \\ \text{Фримен и Мотц} & \Lambda^2 = 5,05, \\ \text{Сальпетер} & \Lambda^2 = 6,82. \end{array}$$

Наибольшая точность достигнута в работе Сальпетера, который считал двумя независимыми методами и оценивает точность результата, как $\pm 5\%$. Но, как видно из сопоставления, уже и предыдущие расчёты были практически достаточно точными. Большое недоразумение произошло от того, что Бете и Критчфильд опустили в своей формуле спиновый матричный элемент. Это было специально оговорено в работе и обосновывалось тем, что точность остальных частей расчёта не оправдывает введения в формулы безразмерных множителей порядка единицы. В данном случае точность расчётов оказалась выше, чем полагали авторы, а «безразмерный множитель порядка единицы» равен 6. Опустив его, Бете и Критчфильд сильно занизили скорость реакции, в результате чего долгие годы водородный цикл считался совершенно недостаточным источником энергии для звёзд. Поучительный пример того, как опасно легкомысленное отношение к безразмерным множителям порядка единицы!

ВОЗМОЖНЫЕ ВАРИАНТЫ

Образующийся при протонной реакции дейтерий в условиях центральной зоны звёзд практически мгновенно превращается по реакции $p\gamma$ в гелий-3. Дальнейшая судьба гелия-3 может быть различной. До сих пор мы рассматривали общепринятый в настоящее время вариант Шатцмана⁴ — Фаулера⁵, в котором два ядра гелия-3 реагируют между собой с образованием α -частицы и регенерацией двух протонов. В первоначальном варианте Бете — Критчфильда⁸ предполагалась иная цепь реакций:



В обоих случаях суммарная скорость процесса определяется протонной реакцией, дальнейшие стадии цикла протекают гораздо

быстрее и подстраиваются под первичную реакцию. По отношению к скорости выделения энергии оба варианта водородного цикла отличаются только постоянным множителем 2: в варианте Бете — Критчфильда одна α -частица образуется на каждый акт первичной реакции, в варианте Шатцмана — Фаулера — на два акта. Поэтому при той же скорости первичной реакции скорость выделения энергии в варианте Шатцмана — Фаулера будет вдвое меньше, чем в варианте Бете — Критчфильда.

Подстановка численных значений констант с учётом того, что для протонной реакции $f = 0,153$, $b^3 = 8,03 \cdot 10^{-38}$ и $\Lambda^2 = 6,82$, приводит к выражению для скорости выделения энергии

$$\mathcal{E} = 4,05 \cdot 10^{11} \frac{Q}{A_1} \chi^2 e^{-\chi} \rho X^2,$$

где \mathcal{E} — скорость выделения энергии в эрг/г сек, ρ — плотность в г/см³, X — весовая доля водорода, Q — теплота реакции в эрг/акт.

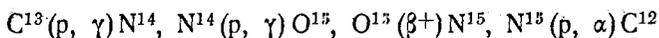
Для варианта Шатцмана — Фаулера

$$Q = 2,09 \cdot 10^{-5}.$$

Для варианта Бете — Критчфильда

$$Q = 4,18 \cdot 10^{-5}.$$

Если вещество в центральной зоне звезды состоит только из водорода и гелия, то водородный цикл является единственным термоядерным источником энергии. В присутствии углерода возможен каталитический процесс $C^{12}(\rho, \gamma)N^{13}; N^{13}(\beta+)C^{13}$,



(углеродный цикл¹). Здесь барьер гораздо выше, но зато β -процессы происходят из связанного состояния, а не в момент столкновения. Этот вид катализа резко отличается от того катализа, который мы наблюдаем в обычной «земной» химии. Земной катализ связан со снижением энергии активации, с тем, что реакция идёт в обход высокого потенциального барьера. Звёздный катализ связан с малой вероятностью β -процесса в момент столкновения. Стабилизировав состояние, из которого происходит β -процесс, можно резко повысить скорость цикла. Такой своеобразный вид катализа можно назвать β -катализом.

В углеродном цикле участвуют сложные ядерные системы, недоступные теоретическому расчёту. Скорость реакций можно оценить только экстраполяцией экспериментальных данных от гораздо более высоких энергий. Кроме того, неизвестно и содержание тяжёлых элементов в веществе центральной зоны звезды. По этим причинам об углеродном цикле можно говорить только, если водородный цикл окажется недостаточным.

ВОДОРОДНЫЕ КРИВЫЕ НА ДИАГРАММАХ СОСТОЯНИЯ ЗВЁЗД

Чтобы выяснить, достаточен ли водородный цикл для объяснения выделения энергии в реальных звёздах, решается элементарная физическая задача. Рассмотрим газовый шар из чистого водорода, помещённый в мировое пространство и пришедший в гидростатическое и тепловое равновесие. Насколько похожи будут его свойства на свойства реальной звезды той же массы? Результаты решения этой задачи² показаны на рис. 1—4, где на диаграммах состояния звёзд проведены «водородные кривые», изображающие свойства чисто водородных звёзд.

Между тремя внешними характеристиками состояния звезды: массой M , светимостью L и радиусом r_1 , существуют два независимых соотношения, определяемых двумя физическими законами: законом тепловыделения и законом теплоотвода. Анализ показывает, что

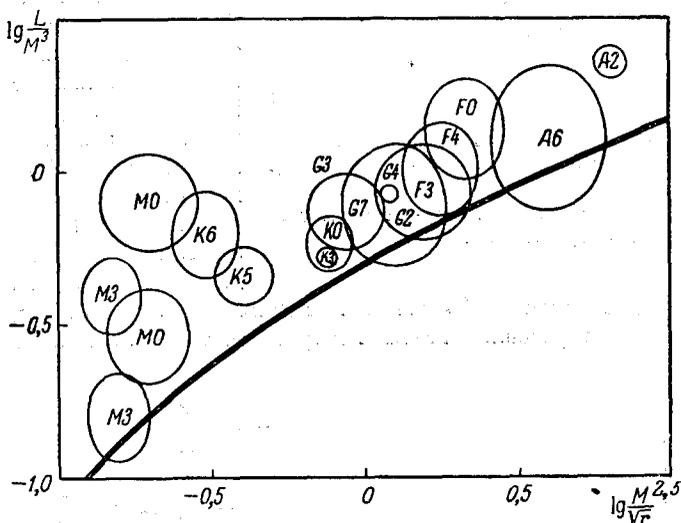


Рис. 1. Соотношение масса — светимость в координатах $\frac{L}{M^3}$ и $\frac{M^{2,5}}{\sqrt{r}}$.

соотношение масса — радиус чувствительно в основном к тепловыделению, а соотношение масса — светимость — к теплоотводу. Можно построить соотношение, совсем не чувствительное к тепловыделению и зависящее только от теплоотвода; таким оказывается¹⁰ связь между параметрами $\frac{L}{M^3}$ и $\frac{M^{2,5}}{\sqrt{r_1}}$. Радиус входит в это соотношение лишь очень слабым образом, поэтому оно рассматривается как один из видов соотношения масса — светимость.

На рис. 1 представлено соотношение масса — светимость в только что указанных, а на рис. 2 — в натуральных координатах. Данные

наблюдений на рис. 1 взяты из работы Паренаго и Масевич¹¹ и представлены овалами, оси которых отвечают неточности в определении масс. На рис. 2 точки

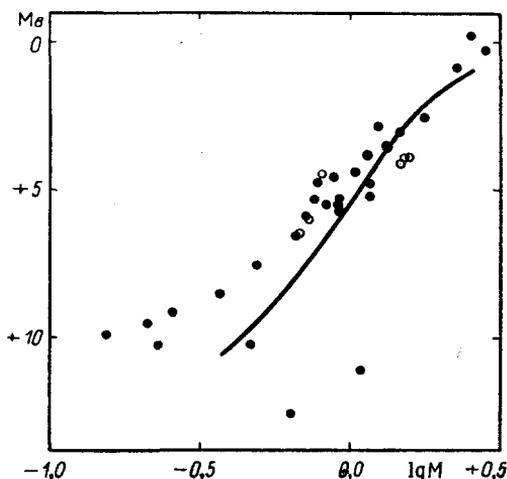


Рис. 2. Соотношение масса — светимость в координатах $M-L$.

На рис. 2 точки взяты из работы Паренаго и Масевич¹¹ и представлены овалами, оси которых отвечают неточности в определении масс. На рис. 3 горизонтальными отрезками, длина которых отвечает неточности масс.

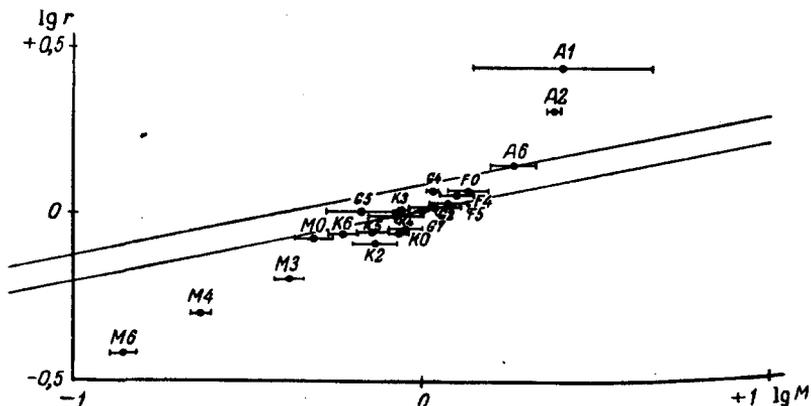


Рис. 3. Соотношение масса — радиус.

Сплошные линии представляют два крайних положения водородной кривой, отвечающие двум крайним значениям константы β -процесса, о которых мы будем говорить ниже. Совпадение этой кривой с дан-

ными на рис. 2 точки взяты из новейшей сводки Стрэнда и Холла¹², претендующей на более высокую точность. Сплошной линией представлена водородная кривая, положение которой на этих диаграммах не зависит от значения константы β -взаимодействия и вообще от закона выделения энергии, но определяется только теплопроводом. Разбавление водорода гелием должно повышать, а разбавление тяжёлыми атомами — понижать светимость при данной массе.

Рис. 3 представляет зависимость масса — радиус. Данные наблюдений, взятые из работы Паренаго и Масевич¹¹, представлены горизонтальными отрезками, длина которых отвечает неточности масс.

ными наблюдений показывает непосредственно, насколько закон выделения энергии в звёздах близок к закону водородного цикла.

Соотношение радиус — светимость получается исключением массы из двух рассмотренных соотношений и не даёт в принципе ничего нового. Практически, однако, оно позволяет резко расширить круг звёзд, доступных сопоставлению с теорией, так как массы известны только для двойных звёзд. Радиусы обычных звёзд непосредственно не измеряются, а находятся из светимости и эффективной температуры с помощью соотношения

$$L = 4\pi r_1^2 \sigma T_e^4. \tag{15}$$

Эффективная же температура оценивается по спектральному классу. Поэтому диаграмма $L - r_1$ обычно заменяется совершенно эквивалент-

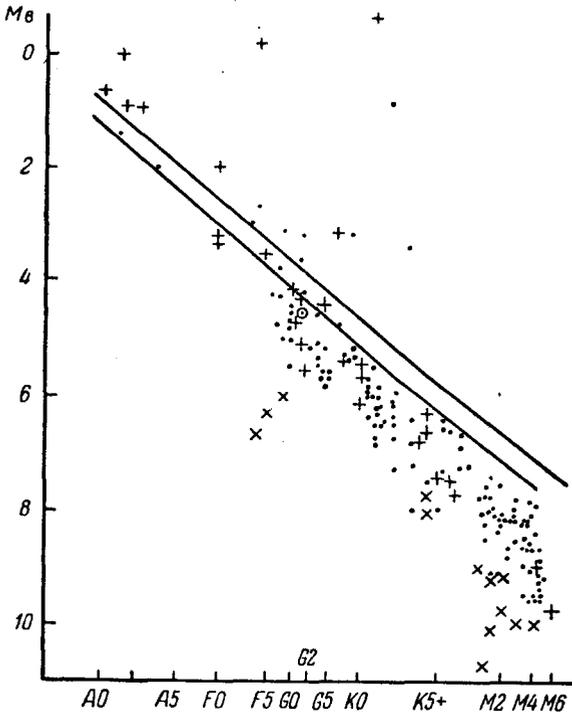


Рис. 4. Диаграмма Герцшпрунга — Рассела.

ной ей диаграммой Герцшпрунга — Рассела, в которой по одной оси откладывается абсолютная звёздная величина, т. е. логарифм светимости, а по другой — эффективная температура или прямо спектральный класс. На рис. 4 два предельных положения водородной кривой

на такой диаграмме сопоставлены с данными наблюдений, взятыми из сводки Бонди¹³. Точками представлены звёзды из ближайших окрестностей Солнца¹⁴, прямыми крестами — двойные звёзды¹⁵, косыми крестами — субкарлики¹⁶.

Наблюдательный материал здесь гораздо шире, чем на предыдущих диаграммах, где были представлены только двойные звёзды. На этой диаграмме разбавление водорода должно понижать светимость. Все графики построены в солнечных единицах и в логарифмическом масштабе.

Из рассмотрения диаграмм можно сделать довольно отчётливые выводы. Оказывается, что для средней части главной последовательности (классы F , G , K) водородная кривая ограничивает снизу область сгущения звёзд на диаграмме масса — светимость и сверху — область их сгущения на диаграмме Герцшпрунга — Рассела. Но именно так и должно быть, если эти звёзды состоят из водорода, разбавленного различными количествами гелия.

При переходе к гигантам (классы A , B , O) наблюдается резкое систематическое отступление от водородной кривой в сторону повышения светимости на всех диаграммах. Повидимому, в этих звёздах включаются какие-то особые источники энергии, отличные от водородного цикла. Но то, что отступление от водородной кривой явно замечается и на диаграмме масса — светимость, не зависящей от закона выделения энергии, свидетельствует о том, что одновременно радикально меняется и структура звезды. В настоящее время считается общепризнанным, что в звёздах-гигантах значительная часть массы собрана близ центра в плотное ядро. По одним представлениям^{17–20} это должно быть изотермическое ядро, в котором весь водород выгорел, по другим — нейтронное ядро, образование которого согласно гипотезе Ландау²¹ возможно в звёздах с массой, большей нескольких солнечных.

На противоположном конце, в области красных карликов класса M , водородная кривая продолжает ограничивать сверху область сгущения звёзд на диаграмме Герцшпрунга — Рассела, но явно отстает от области сгущения звёзд на диаграммах $M — L$ и $M — r_1$. Смысл этого противоречия можно выяснить внимательным рассмотрением рис. 4. На нём видно, что двойные звёзды класса M систематически отклоняются книзу от водородной кривой. Между тем, диаграммы $M — L$ и $M — r_1$ содержат только двойные звёзды, так как только для них известны массы.

В прежние время при анализе диаграмм состояния звёзд из теории находили не абсолютные значения параметров, а только производные (наклоны кривых). При таком методе анализа близость реальных звёзд к водородным оставалась незаметной. Причина ясна из рис. 3, дающего зависимость, непосредственно связанную с законом выделения энергии. Если провести здесь линию, наилучшим образом приближающуюся к наблюдательным точкам в широком диапазоне,

то наклон её не будет иметь ничего общего с наклоном водородной кривой. Он будет соответствовать гораздо более сильной температурной зависимости скорости реакции, откуда и возникло длительное время господствовавшее мнение, что основным источником энергии звёзд является углеродный цикл. Но из диаграммы ясно видно, что в области средней части главной последовательности абсолютные значения светимости весьма близки к вычисленным для чисто водородных звёзд. Это, конечно, гораздо убедительнее, чем «средний наклон», который на разных участках может определяться разными факторами. Если бы оказалось, что в звёздах средней части главной последовательности источником энергии является в действительности не водородный цикл, то мы должны были бы заключить, что по удивительному совпадению эти звёзды тщательно маскируются под водородные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТЫ БЕТА-ПРОЦЕССА ИЗ СВОЙСТВ СОЛНЦА

До сих пор мы занимались сопоставлением теории с областью сгущения большого числа звёзд. Неточность в значении константы β -процесса при таком статистическом сопоставлении несущественна.

Но мы можем пойти дальше и попытаться сделать точный расчёт для единственной звезды, свойства которой известны нам с большой точностью, — для Солнца. Если считать Солнце водородно-гелиевой звездой и приписывать выделяемую в нём энергию только водородному циклу, то можно сделать полный расчёт модели Солнца²², оставляя в качестве свободного параметра только универсальное время триплетного β -взаимодействия A_1 . Согласно с фактическими свойствами Солнца получается, если приписать этой константе значение

$$A_1 = 2060 \text{ сек.} \quad (16)$$

Ещё год назад мы считали, что порядок величины верен, но численное значение слишком низко. Тогда были распространены теории^{23, 24}, согласно которым константы синглетного и триплетного процессов должны быть равны; между тем, значение A_0 заведомо близко к 6000 сек.²⁵ Сейчас твёрдо установлено²⁶, что $A_1 < A_0$. Численное значение их отношения известно плохо, и пока нет эксперимента, который позволил бы его уточнить. Из распада трития с несомненностью следует^{27, 3}, что A_1 не может быть больше 3600 сек. Если принять согласно измерениям Робсона²⁸, что время полураспада свободного нейтрона не меньше 10 минут, то получится, наоборот, что A_1 не меньше 3600. Таким образом, из земных измерений на первый взгляд можно сделать вывод:

$$A_1 = 3600 \text{ сек.} \quad (17)$$

Это значение и принимается обычно в литературе²⁶. Из него же исходит и Сальпетер⁶ при выводе своей ныне общепринятой в астрофизике формулы для скорости протонной реакции.

В действительности³ значение (17) является верхним пределом для A_1 , так как оно получается из распада трития, если положить $M^2 = 3$, что отвечает полному перекрытию волновых функций начального и конечного состояний; истинное значение M^2 должно быть меньше. Таким образом, существует некоторое противоречие между экспериментальными данными о распаде трития и нейтрона, подлежащее дальнейшему выяснению.

Заметим, что неравенство констант синглетного и триплетного β -взаимодействий, повидимому, объясняется влиянием мезонных поправок^{33, 34}. Но тогда в поле ядерных сил за счёт мезонных поправок может несколько меняться значение самой константы β -взаимодействия. Таким образом, не исключена возможность, что значение A_1 для распада свободного нейтрона действительно несколько выше, чем для распада трития и протонной реакции.

В пользу такого предположения говорит ещё следующий факт. Приведённые времена распада зеркальных ядер N^{13} и O^{15} отличаются друг от друга более чем на 20%: для $N^{13} ft = 4700$ сек., для $O^{15} ft = 3750$ сек. Исходные экспериментальные данные измерены здесь с громадной точностью, так что возможная ошибка в ft не превышает 1,6%. При распаде этих ядер получаются C^{13} и N^{15} , магнитные моменты которых прекрасно ложатся на линии Шмидта; поэтому очень трудно объяснить разницу в ft неодинаковой примесью других возможных состояний, которая должна была бы не в меньшей степени сказаться и на магнитных моментах.

Между тем, в одном случае мы имеем избыток, в другом — недостаток нуклона в сравнении с симметричной чётно-чётной конфигурацией, а это может сказаться на поле ядерных сил и мезонных поправках.

Но если даже A_1 и не является точно универсальной константой, то очень трудно предположить, чтобы его значение могло меняться в столь широких пределах, как разница между (16) и (17).

«АСТРОФИЗИЧЕСКОЕ» И «ЗЕМНОЕ» ЗНАЧЕНИЯ КОНСТАНТЫ ТРИПЛЕТНОГО БЕТА-ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Как видим, все свойства Солнца и большинства других звёзд можно количественно описать простой водородно-гелиевой моделью, если только приписать универсальному времени триплетного β -взаимодействия «астрофизическое» значение (16), которое примерно в 1,8 раза ниже наиболее вероятного «земного» (17). Вполне разумно пользоваться этим астрофизическим значением как эффективным; отклонение его от истинного должно компенсировать все неточности

водородно-гелиевой модели, которые, очевидно, не выходят за пределы множителей порядка единицы.

Но необходимо оценить возможные погрешности того и другого значения. На первый взгляд астрофизическое значение кажется крайне ненадёжным из-за неточности наших знаний о химическом составе вещества в центральной зоне звёзд. Однако неожиданным образом оказывается, что при данных массе и радиусе звезды скорость протонной реакции крайне слабо чувствительна к химическому составу²⁹.

Из условия гидростатического равновесия центральная температура звезды выражается, как

$$T_0 = \frac{\mu GM}{\eta R r_1}, \quad (18)$$

где μ — средний молекулярный вес вещества в центре звезды, M — масса звезды, r_1 — её радиус, G — гравитационная постоянная, R — газовая постоянная, η — безразмерный множитель, зависящий от структуры, значение которого меняется очень мало и всегда крайне близко к единице. При данных массе и радиусе центральная температура пропорциональна молекулярному весу μ , который для смесей водорода с гелием зависит от весовой доли водорода X , как

$$\frac{1}{\mu} = 1,25X + 0,75. \quad (19)$$

Тяжёлые атомы несравненно сильнее влияют на непрозрачность, чем на молекулярный вес. Как мы видели, большинство звёзд лежит на диаграммах состояния довольно близко к водородным кривым. Значит, содержание в них тяжёлых элементов не меняет кардинальным образом непрозрачность, а следовательно, влияние их на молекулярный вес мало.

При господствующих в центральной зоне звёзд температурах порядка 10—15 миллионов градусов скорость протонной реакции примерно пропорциональна четвёртой степени температуры. Кроме того, так как реакция происходит при столкновении двух протонов, скорость её пропорциональна X^2 . При уменьшении концентрации водорода возрастают средний молекулярный вес и с ним центральная температура, что компенсирует прямое влияние концентрации на скорость реакции. При данных массе и радиусе скорость протонной реакции пропорциональна величине $X^2(1,25X + 0,75)^{-4}$, которая имеет плоский максимум при $X = 0,6$ и в широком диапазоне крайне слабо зависит от X :

X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{X^2}{(1,25X + 0,75)^4}$	1,71	4,00	5,52	6,56	6,99	7,11	7,03	6,82	6,56	6,25

Таким образом, вычисление константы β -взаимодействия из астрофизических данных оказывается гораздо более надёжным, чем можно было бы думать.

Рассмотрим другие физические факторы, которые могли бы повлиять на протекание протонной реакции в недрах звезды. Плотности там так велики, что экранирующее действие электронов на электростатическое поле ядер могло бы несколько повысить вероятность прохождения через барьер. Но оценка показывает³⁰, что количественно этот эффект для протонной реакции мал. По теории самосогласованного поля (аналогично теории электролитов Дебая и Гюккеля) потенциал φ находится из уравнения

$$\Delta\varphi = 4\pi N_0\Gamma \frac{e^2}{kT} \varphi, \quad (20)$$

где N_0 — число частиц в единице объёма,

$$\Gamma = \sum n_i Z_i^2, \quad (21)$$

n_i — доля частиц с зарядом Z_i . Отсюда

$$\varphi = \frac{Ze^2}{r} e^{-\kappa r}, \quad (22)$$

где

$$\kappa = \sqrt{4\pi N_0\Gamma \frac{e^2}{kT}}. \quad (23)$$

Обратная величина κ есть радиус экранировки (дебаевский радиус). Разлагая (22) в ряд, заключаем, что при $r \rightarrow 0$ электростатическая энергия взаимодействия зарядов Z_1 и Z_2 уменьшится по сравнению с кулоновской на величину

$$\Delta E = Z_1 Z_2 e^2 \kappa. \quad (24)$$

Мерой действия экранировки является отношение этой величины к тепловой энергии kT . В первом приближении можно считать, что барьер не изменился, но начальная энергия возросла на ΔE , т. е. вероятность прохождения через барьер увеличилась в отношении $\exp\left(\frac{\Delta E}{kT}\right)$. Численно

$$\frac{\Delta E}{kT} = 0,186 \frac{Z_1 Z_2 \sqrt{\rho\Gamma}}{T^{3/2}}, \quad (25)$$

где температура T выражена в миллионах градусов.

Для протонной реакции $Z_1 = Z_2 = 1$, $\Gamma = 1$; для нашей водородно-гелиевой модели Солнца $\rho_0 = 67,4$, $T_0 = 12,4$, откуда

$\frac{\Delta E}{kT} = 0,03$. Таким образом, электростатическая экранировка повышает скорость протонной реакции в центре Солнца всего лишь на 3%.

Сальпетер⁶ подробно проанализировал влияние некоторых других мало существенных факторов на скорость протонной реакции. Строгое усреднение по максвелловскому распределению скоростей даёт поправочный множитель на неточность метода перевала:

$$F(\chi) = \sqrt{\frac{\chi}{\pi}} e^{\chi} \int_0^{\infty} e^{-\chi \frac{\frac{2}{x} + x^2}{3}} dx. \quad (26)$$

Для больших χ это выражение может быть разложено в ряд по обратным степеням χ :

$$F(\chi) = 1 + \frac{5}{12\chi} + \frac{35}{288\chi^2} + \dots \quad (27)$$

Для протонной реакции в условиях центра Солнца поправка на неточность метода перевала повышает рассчитанную скорость реакции всего лишь на 3%.

Статистическая функция f зависит от начальной энергии и, следовательно, должна также усредняться по максвелловскому распределению. Здесь зависимость от энергии довольно слаба, и с достаточным приближением можно брать начальную энергию при оптимальной скорости v_m , определяемой формулой (7). Тогда, пользуясь для f весьма точными приближёнными формулами Финберга и Тригга³¹, Сальпетер получает:

$$f = 0,145 \left[1 + 0,054 \left(\frac{T}{15 \cdot 10^6} \right)^{2,3} \right], \quad (28)$$

где T — температура в °К. Точность этой формулы Сальпетер оценивает как $\pm 3\%$. Использованное выше значение $f = 0,153$ получено по этой формуле для $T = 15 \cdot 10^6$.

Таким образом, анализ возможных поправок приводит к выводу, что точность теоретического расчёта скорости протонной реакции составляет около 10% и что расхождение между «астрофизическим» и «земным» значениями константы β -процесса никак не может быть объяснено неточностью расчёта.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ И СТРУКТУРА ЗВЕЗДЫ

Наиболее вероятное объяснение этого расхождения²⁹ в том, что водородно-гелиевая модель занижает плотность центральной зоны звезды.

Характерная черта всех звёздных моделей — высокая степень концентрации не только выделения энергии, но и массы к центру.

В периферической зоне, занимающей заметную часть радиуса, не только не выделяется энергия, но и содержится лишь пренебрежимо малая часть массы. В этой зоне как полный тепловой поток, так и гравитирующую массу можно считать не зависящими от радиуса. Тогда уравнения гидростатического и теплового равновесия принимают вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = - \frac{GM}{r^2}, \quad (29)$$

$$k \frac{dT}{dr} = - \frac{L}{4\pi r^2}, \quad (30)$$

где k — лучистая теплопроводность. Если вещество подчиняется уравнению состояния идеального газа

$$p = \frac{RT\rho}{\mu}, \quad (31)$$

то, поделив (29) на (30), получаем:

$$\frac{d \ln p}{d \ln T} = \frac{\mu GM}{RL} k = \text{const} \cdot k. \quad (32)$$

При любой степенной зависимости лучистой теплопроводности от температуры и плотности отсюда следует, что p и T должны быть связаны соотношением

$$k = \text{const}. \quad (33)$$

Иными словами, если

$$k = \beta \frac{T^m}{\rho^s}, \quad (34)$$

то плотность и температура должны быть связаны «политропическим соотношением»

$$\rho \sim T^n, \quad (35)$$

где «показатель политропы»

$$n = \frac{m}{s}. \quad (36)$$

Если во всём диапазоне изменения параметров лучистая теплопроводность не может быть представлена одним степенным выражением, то приведённые соотношения перестают быть точными. Однако, как показывает анализ численных расчётов²⁹, качественные выводы сохраняются. Стационарное распределение плотностей и температур в звезде всегда близко к условию $k = \text{const}$. Отсюда повышение непрозрачности периферической зоны приводит к усиленной концентрации плотности (ибо с увеличением плотности центральной зоны возрастает её непрозрачность).

По этой причине малые добавки тяжёлых элементов к водороду повышают центральную плотность модели. В центральной зоне плотности столь высоки, что фотоэффект на тяжёлых атомах оказывается мало существенным по сравнению с тормозным поглощением на водороде. В центре Солнца пробег излучения примерно в три раза меньше комптоновского. По мере приближения к периферии температура и плотность падают так, что убывание температуры оказывается существеннее, чем убывание плотности, и для чистого водорода роль тормозного поглощения медленно, но неуклонно возрастает к периферии. При наличии же тяжёлых атомов при низких температурах резко возрастает относительная роль фотоэффекта, так как большую роль начинают играть связанные электроны.

Водородно-гелиевая модель отвечает наименьшей возможной центральной плотности и, следовательно, наименьшей скорости ядерных реакций. Полученное из этой модели «астрофизическое» значение универсального времени триплетного β -взаимодействия A_1 может служить надёжным нижним пределом для значения этой величины. Добавляя к водороду и гелию небольшие количества тяжёлых элементов, П. Науру удалось³² построить модель с повышенной концентрацией плотности, в которой протонная реакция обеспечивает всё энерговыделение при наиболее вероятных с «земной» точки зрения значениях $A_1 \approx 3600$ сек.

Если бы удалось независимым путём определить центральную плотность Солнца, то мы могли бы из астрофизических данных определить константу триплетного β -взаимодействия не с меньшей, а, пожалуй, даже с большей точностью, чем из земных опытов. К сожалению, все известные сейчас астрономические методы определения центральной плотности звёзд дают лишь крайне низкую точность.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Bethe, Phys. Rev. **55**, 434 (1939).
2. Д. А. Франк-Каменецкий, ДАН СССР **104**, № 1, 30 (1955).
3. Д. А. Франк-Каменецкий, ЖЭТФ **29**, 135 (1955).
4. E. Schatzmann, Comptes Rendus **232**, 1740 (1951).
5. W. A. Fowler., T. Lauritsen, Phys. Rev. **81**, 655 (1951).
6. E. E. Salpeter, Phys. Rev. **88**, 547 (1952).
7. Л. Д. Ландау, Я. А. Смородинский, Journ. Phys. USSR **8**, 154 (1944).
8. Н. А. Bethe, C. L. Critchfield, Phys. Rev. **54**, 248 (1938).
9. E. Frieman, L. Motz, Phys. Rev. **83**, 202 (1951).
10. Д. А. Франк-Каменецкий, Астр. журн. **31**, 327 (1954).
11. П. П. Паренато, А. Г. Масевич, Труды ГАИШ **20** (1951).
12. R. Aa. Strand, R. G. Hall, Astroph. J. **120**, 322 (1954).
13. H. Bondi, Monthly Not. R.A.S. **110**, 595 (1950).
14. G. P. Kuiper, Astroph. J. **95**, 201 (1942).
15. G. P. Kuiper, Astroph. J. **88**, 472 (1938).
16. A. H. Joy, Astroph. J. **105**, 96 (1947).

17. Li Hen, M. Schwarzschild, *Monthly Not.* **109**, 631 (1949).
 18. T. Gold, *Monthly Not.* **109**, 115 (1949).
 19. F. Hoyle, R. A. Lyttleton, *Monthly Not.* **102**, 218 (1949); **109**, 614 (1949).
 20. C. M. Bondi, H. Bondi, *Monthly Not.* **110**, 287 (1950); **111**, 397 (1951).
 21. Л. Д. Ландау, *Nature* **141**, 333 (1938).
 22. Д. А. Франк-Каменецкий, *Астр. журн.* **32**, 139 (1955).
 23. G. Wentzel, *Zeits. f. Phys.* **104**, 34 (1935); **105**, 738 (1936).
 24. O. Kofoed-Hansen, A. Winther, *Phys. Rev.* **86**, 428 (1952).
 25. J. B. Gerhart, *Phys. Rev.* **95**, 288 (1954).
 26. Я. А. Смородинский, *УФН* **56**, 201 (1955).
 27. J. Blatt, *Phys. Rev.* **89**, 86 (1953).
 28. J. Robson, *Phys. Rev.* **83**, 349 (1951).
 29. Д. А. Франк-Каменецкий, *Астр. журн.* **32**, 326 (1955).
 30. E. E. Salpeter, *Australian Journ. Science* **7**, 373 (1954).
 31. E. Feenberg, G. Trigg, *Rev. Mod. Phys.* **22**, 399 (1950).
 32. P. Naur, *Astroph. J.* **119**, 365 (1954).
 33. R. J. Finkelstein, S. A. Moszkowsky, *Phys. Rev.* **95**, 1687 (1954).
 34. Я. Б. Зелёдович, *УФН* **56**, 165 (1955).
-