

539.142

ФОРМА ЯДРА, ЕЕ ДЕФОРМИРУЕМОСТЬ И ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ АТОМНЫХ ЯДЕР*А. С. Давыдов*

1. ВВЕДЕНИЕ

За последние 15 лет наши представления о форме атомных ядер претерпели значительные изменения. До 1950 г. обычно считали, что все ядра имеют сферически-симметричную равновесную форму и что возбужденные состояния ядер сводятся к колебаниям поверхности ядра около равновесной сферической формы и изменению состояния движения отдельных нуклонов в некотором самосогласованном сферически-симметричном поле. Эти представления получили хорошее подтверждение большим успехом оболочечной модели ядра, предложенной в 1949 г. Гепперт-Майер и Иенсенем. Оболочечная модель ядра дала качественное объяснение магических чисел, спинов и магнитных моментов многих ядер. В то же время было установлено, что наблюдаемые квадрупольные моменты ядер элементов редких земель и ряда других почти в 30 раз превышают значения, предсказываемые оболочечной моделью. Рейнуотер¹ первый дал качественное объяснение больших отклонений формы ядра от сферической на основе учета взаимодействия внешних нуклонов с остовом ядра. Основанная на этих представлениях обобщенная модель атомных ядер, предложенная в 1952 г. О. Бором², открыла новый этап в теории атомного ядра. Теория Бора объяснила основные закономерности первых вращательных состояний несферических четно-четных ядер. В связи с работами О. Бора, а затем работами О. Бора и Моттельсона³, исследование равновесной формы атомных ядер стало одной из актуальных задач ядерной физики.

Форма ядра, а точнее симметрия самосогласованного поля, действующего на нуклоны в атомных ядрах, имеет весьма существенное значение для классификации однонуклонных и коллективных возбужденных состояний в ядрах. В случае сферической симметрии, которая, несомненно, имеется в основных состояниях дважды магических ядер, однонуклонные состояния характеризуются энергией, четностью и квантовыми числами j и m_j , определяющими соответственно квадрат и проекцию углового момента нуклона на ось квантования, направление которой произвольно. В ядрах, имеющих аксиальную симметрию, сохраняющейся величиной, кроме энергии и четности, является проекция Ω углового момента нуклона на аксиальную ось симметрии ядра. В неаксиальных ядрах ни j , ни Ω не являются интегралами движения.

В сферически-симметричных ядрах не могут наблюдаться вращательные возбужденные состояния без одновременной деформации ядра. В несферических ядрах среди возбужденных состояний значительную роль играют и вращательные состояния. Таким образом, классификация

возбужденных состояний ядер существенно зависит от характера симметрии самосогласованного поля в ядре.

Симметрия самосогласованного поля в ядре определяется пространственным (угловым) распределением нуклонов внутри ядра. Как показывает опыт, плотность нуклонов внутри ядра ($r \leq 1,2 A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ см) почти постоянна. На границе ядра плотность нуклонов быстро спадает до нуля примерно на протяжении $2 \cdot 10^{-13}$ см. Следовательно, с хорошим приближением можно говорить о поверхности и форме атомных ядер. Вследствие малой сжимаемости ядра, при возбуждениях с энергией меньше 10 Мэв изменение распределения нуклонов в ядре в основном сводится к изменению его формы без изменения плотности ядра. Следует,

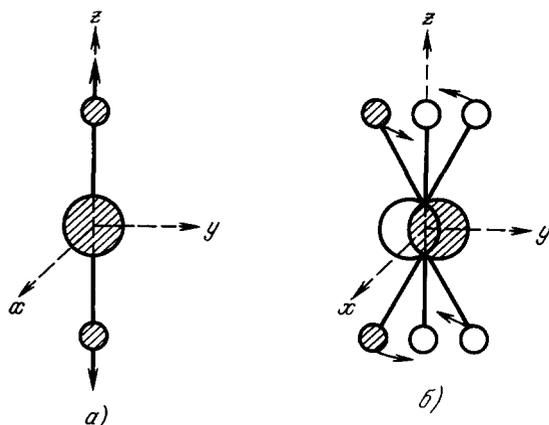


Рис. 1. Иллюстрация продольных и поперечных колебаний аксиального ядра на примере линейной трехатомной молекулы.

а) Продольные колебания; б) поперечные колебания.

форму ядра трехосным эллипсоидом. Тогда в системе координат, связанной с ядром, при заданном среднем радиусе ядра его форма будет зависеть от двух параметров. В качестве этих параметров удобно рассматривать параметры β (≥ 0) и γ ($0 \leq \gamma \leq \pi/3$), введенные О. Бором².

В адиабатическом приближении суммарная энергия однонуклонных движений в ядре зависит от формы ядра, т. е. от параметров β и γ . Эта энергия и определяет потенциальную энергию $V(\beta, \gamma)$ поверхностных колебаний ядра в данном состоянии однонуклонных движений.

Значения β_0, γ_0 , соответствующие минимуму $V(\beta, \gamma)$, характеризуют равновесную форму ядра в данном состоянии однонуклонных движений. В ядрах со сферической равновесной формой $\beta_0 = 0$ и при малых значениях β потенциальная энергия $V(\beta, \gamma) = \frac{1}{2} C \beta^2$ не зависит от γ . При $\beta_0 \neq 0$ ядро не имеет сферической симметрии и потенциальная энергия зависит как от β , так и от γ . При этом, если $\gamma_0 = 0$ или $\pi/3$, ядро является соответственно вытянутым или сплюснутым эллипсоидом вращения (аксиальное ядро).

При других значениях γ_0 ядро не имеет аксиальной оси симметрии. Изменение β около равновесного значения β_0 при фиксированном значении γ_0 носит название β -колебаний или продольных колебаний. Изменение γ относительно γ_0 при фиксированном значении $\beta_0 \neq 0$ носит название γ -колебаний или поперечных колебаний.

В аксиально-симметричном ядре ($\gamma_0 = 0$) поперечные колебания могут происходить в двух взаимно перпендикулярных плоскостях

конечно, иметь в виду, что уже в основном состоянии ядра происходят нулевые колебания поверхности ядра относительно равновесной формы. Характер этих колебаний и их амплитуда зависят от степени деформируемости и симметрии равновесной формы ядра, которые определяются числом протонов и нейтронов и состоянием их движения.

По-видимому, для объяснения многих экспериментов достаточно учесть отклонения формы ядра от сферической формы за счет деформаций квадрупольного типа, т. е. достаточно аппроксимировать

(двукратное вырождение). Два взаимно перпендикулярных поперечных колебания с разностью фаз $\pi/2$ можно рассматривать как чистое вращение. На рис. 1 приведена схема продольных вдоль оси z и поперечных (вдоль осей x и y) колебаний атомов в линейной трехатомной молекуле, которая может служить простейшей моделью аксиального ядра.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАВНОВЕСНОЙ ФОРМЫ АТОМНЫХ ЯДЕР

Теоретическому вычислению функции $V(\beta, \gamma)$ на основе некоторых модельных представлений о ядре было посвящено много работ ²⁻¹⁰. В работах ^{2-4, 7-8} ядро рассматривается как система, состоящая из остова, в который входят все нуклоны замкнутых оболочек, и остальных внешних нуклонов, движущихся в поле остова. Равновесная форма ядра определялась из условия минимума усредненной по состояниям движения внешних нуклонов энергии их взаимодействия с несферической частью поля остова ядра (сферическая часть определяет состояния движения внешних нуклонов).

В работах ²⁻⁴ постулировалась аксиальная форма ядра и отыскивалось значение β_0 при условии независимого движения внешних нуклонов. В работе Филиппова ⁸ исследовалась функция $V(\beta, \gamma)$ от обоих переменных тоже без учета взаимодействия между внешними нуклонами. Корреляция в движении внешних нуклонов учитывалась только по принципу Паули. Было показано, что в зависимости от степени заполнения протонов и нейтронами внешних оболочек возможны деформации формы ядра по двум взаимно перпендикулярным направлениям. В этих случаях форма ядра не будет иметь аксиальной симметрии. Как показал Филиппов, такие случаи должны наблюдаться у ядер, у которых либо число нейтронов, либо число протонов близко к магическому.

Теоретическая возможность неаксиальной формы некоторых ядер отмечалось в работах Гейликмана ⁵ и Заикина ⁶, которые исследовали зависимость энергии нуклонов от параметров, определяющих симметрию самосогласованного поля ядра. Однако и в этих работах не рассматривалось взаимодействие между нуклонами и эффекты спаривания.

В последнее время в Канаде ⁹⁻¹⁰ произведены весьма интересные расчеты потенциальной энергии $V(\beta, \gamma)$ с учетом остаточного взаимодействия спаривания нуклонов. Вычислялась как функция β, γ (при постоянном объеме ядра) суммарная минимальная энергия нуклонов ядра с заданным числом нейтронов и протонов, движущихся в трехмерном ангармоническом потенциале осциллятора с учетом спин-орбитального взаимодействия, поправочного члена, пропорционального l^2 , введенного Нильссоном ¹¹, и взаимодействия спаривания нуклонов. Выбирая совокупность параметров, характеризующих эти взаимодействия, такими же, как в работах Моттельсона и Нильссона ¹², Нильссона и Приора ¹³, Гани, Дас-Гупта и Престон ¹⁰ показали, что при одной и той же совокупности параметров ядра атомов редких земель должны иметь аксиально-симметричную равновесную форму, а ядра в области массовых чисел, близких к 188, должны иметь неаксиальную равновесную форму. Потенциал $V(\beta_0, \gamma)$ ядер последнего типа имеет сравнительно слабую зависимость от γ , что указывает на возможность нулевых поперечных γ -колебаний поверхности ядра с большой амплитудой.

На рис. 2 приведены в качестве примера результаты расчета ¹⁰ потенциальной энергии $V(\beta, \gamma)$ для двух ядер Hf^{180} и Os^{188} как функции β , значения которого отложены вдоль радиусов, и значений γ в основном интервале изменения $0 \leq \gamma < \pi/3$. Эквипотенциальные значения энергии

(в *Мэв*) указаны сплошными линиями (когда параметры взаимодействий подбирались в соответствии с работой ¹²) и пунктирными линиями

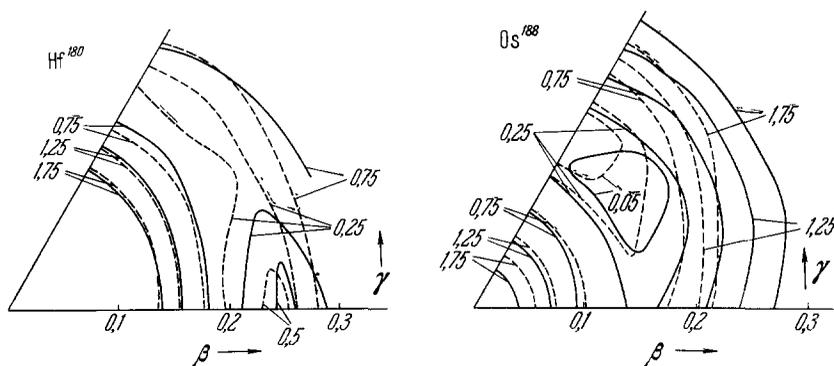


Рис. 2. Потенциальная энергия $V(\beta, \gamma)$ как функция переменных β и γ (расчеты Престона, Дас-Гупты и Гани ¹⁰).

(параметры взаимодействий взяты из работы ¹³). Энергии отсчитываются от минимального значения, соответствующего $\gamma = \gamma_0$ и $\beta = \beta_0$.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ЯДРА И ЕЕ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Теоретические расчеты потенциальной энергии $V(\beta, \gamma)$ могут претендовать только на качественные результаты. В связи с большой математической сложностью задачи и недостаточно полным знанием сил взаимодействия между нуклонами точные количественные расчеты $V(\beta, \gamma)$ в настоящее время невозможны и, по-видимому, нецелесообразны, так же, например, как и точные расчеты показателя преломления сложных веществ — стекла и др.

Необходима разработка методов экспериментального определения формы ядра и ее деформируемости при переходе в различные возбужденные состояния. В связи с тем, что свойства возбужденных состояний — последовательность значений энергий, спинов, значений вероятностей переходов между возбужденными состояниями, средних электрических квадрупольных моментов и т. д. — зависят от формы ядра и ее деформируемости, то, измеряя эти величины, можно при наличии теории определить форму ядра и ее изменение.

С точки зрения интерпретации результатов экспериментов наиболее простыми являются четно-четные ядра, хотя и для них в ряде случаев в настоящее время мы не имеем однозначной интерпретации. Основное состояние всех таких ядер имеет спин, равный нулю.

Согласно теории, развитой О. Бором и Моттelsonом ^{2, 3}, простейший спектр коллективных возбуждений должны иметь сферические ядра. Коллективные возбуждения таких ядер должны состоять из эквидистантных уровней, соответствующих возбуждению фононов с энергией $E(2)$, имеющих угловой момент 2. Если не учитывать вырождения, соответствующего разным значениям проекций углового момента, то однофононные возбуждения с энергией $E(2)$ и моментом $I = 2$ будут соответствовать невырожденному по значению спина состоянию. Двухфононные возбуждения с энергией $2E(2)$ вырождены по значению спина трехкратно ($I = 0, 2, 4$), трехфононные возбуждения вырождены пятикратно ($I = 0, 2, 3, 4, 6$) и т. д.

Сферическую форму ($\beta_0 = 0$) имеют дважды магические и близкие к ним ядра. Однако у этих ядер не наблюдается предсказываемый теорией спектр возбужденных состояний. Например, у ряда ядер с магическим числом нейтронов или протонов (O^{16} , Ge^{72} , Zr^{70}) первое возбужденное состояние имеет спин, равный нулю, а не двум. У ядер Ge^{70} , Ce^{140} , Ca^{42} уровень со спином 0 лежит в непосредственной близости к первому возбужденному состоянию, имеющему спин 2. Согласно же теории колебаний поверхности сферических ядер энергия этого уровня должна быть в два раза больше. Не наблюдается вырожденных возбужденных состояний с энергией $2E(2)$ и спинами 0, 2, 4 и у других ядер (Cd^{114} , Pd^{110}), которые принято относить к сферическим ядрам. Большая вероятность кулоновского возбуждения первых уровней этих ядер указывает на коллективную природу этих возбужденных состояний.

Приведенные вероятности электрических квадрупольных переходов из основного состояния на первый уровень со спином 2 определяются одной и той же формулой

$$B(E2; 0 \rightarrow 2) = a^2 \langle \beta^2 \rangle \quad (1)$$

как для сферических, так и для несферических четно-четных ядер. При этом $a = \frac{3ZeR_0^2}{4\pi}$, R_0 — средний радиус ядра, $\langle \beta^2 \rangle = \langle 0 | \beta^2 | 0 \rangle$ — среднее значение квадрата переменной β в основном состоянии ядра.

Если ядро сферическое ($\beta_0 = 0$), то волновая функция основного состояния ядра определяется выражением

$$|0\rangle = N \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\beta_{00}^2}\right), \quad (2)$$

где $\beta_{00} = \hbar (BC)^{-1/2}$ — амплитуда нулевых β -колебаний поверхности ядра, B — массовый параметр, C — коэффициент упругости этих колебаний. С помощью (2) находим

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{5}{2} \beta_{00}^2. \quad (3)$$

Первый возбужденный пятикратно вырожденный по значениям проекции спина уровень в сферических ядрах является вибрационным. Его спин равен 2 и энергия

$$E(2) = \hbar \sqrt{\frac{C}{B}} = \frac{\hbar^2}{B\beta_{00}^2} = \frac{\hbar^2}{B' \langle \beta^2 \rangle}, \quad (4)$$

где $B' = 2B/5$.

Если ядро не сферическое, то в основном состоянии поверхность ядра совершает нулевые продольные и поперечные колебания, волновая функция которых (см. Давыдов¹⁴) имеет вид

$$|0\rangle = N \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\beta - \beta_0}{\mu\beta_0}\right)^2 - \left(\frac{\gamma - \gamma_0}{2\Gamma}\right)^2\right\}, \quad (5)$$

где параметры μ и Γ характеризуют нулевые колебания поверхности ядра и определяются соответственно выражениями

$$\mu^2 = 2 \langle 0 | (\beta - \beta_0)^2 | 0 \rangle / \beta_0^2, \quad \Gamma^2 = \frac{1}{2} \langle 0 | (\gamma - \gamma_0)^2 | 0 \rangle. \quad (6)$$

Параметр μ был введен в работе¹⁵ и получил название параметра неадиабатичности. При $\mu = 0$ вращательное движение ядра и продольные колебания полностью разделяются.

Согласно (5) в основном состоянии несферического ядра

$$\langle \beta^2 \rangle = \beta_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \mu^2\right), \quad (7)$$

связи двух взаимодействующих между собой $f_{7/2}$ -нуклонов с колебаниями поверхности ядра. Тамура и Комаи²⁰ исследовали влияние ангармоничности относительно β - и γ -колебаний. В недавно выполненных в Киеве расчетах Овчаренко²¹ исследовалось влияние малых продольных и поперечных отклонений поверхности ядра от сферической формы. Все эти попытки, так же как и ряд других²²⁻²⁵, пока еще не привели к удовлетворительным результатам. Причина этого, по-видимому, заключается в том, что в этих работах обычно исследовались влияния одного из факторов: взаимодействие с внешними нуклонами, ангармоничность колебаний поверхности, малая несферичность и «мягкость» ядра и т. д. В действительности же все эти влияния в почти сферических ядрах, по-видимому, играют сравнимую роль, и их следует рассматривать одновременно, что приводит к весьма большим математическим трудностям.

Теория коллективных возбуждений квадрупольного типа в несферических четно-четных ядрах с учетом связи вращательных движений с продольными и поперечными колебаниями поверхности ядра развивалась в ряде работ^{14, 15, 26-28}. Основные результаты этих работ сводятся к следующему. Если предположить, что равновесное значение параметра γ_0 равно нулю, то энергия коллективных возбуждений, выраженных для каждого ядра в единицах энергии первого возбужденного уровня, определяется значениями только двух независимых параметров μ и Γ формулой

$$\frac{E(I, K, n_\beta, n_\gamma)}{E(2)} = \frac{n_\beta}{\mu^2} - \frac{\left(\frac{K}{4} + n_\gamma\right)}{\Gamma^2} - \frac{I(I+1)}{6} - \frac{K^2}{8} + \varepsilon(\mu, \Gamma, \dots), \quad (9)$$

где n_β и n_γ — квантовые числа соответственно продольных и поперечных колебаний, принимающие значения $0, 1, 2, \dots$, I — угловой момент (спин) ядра, $K (\approx 0, 2, 4, \dots)$ — приближенное квантовое число, определяющее проекцию спина на ось симметрии ядра, $\varepsilon(\mu, \Gamma, \dots)$ — добавка к энергии, характеризующая связь различных типов коллективных возбуждений между собой. В предельном случае малых значений $\varepsilon(\mu, \Gamma, \dots)$ коллективные возбуждения ядра можно разделить на вращательные и вибрационные возбуждения. В общем же случае такое разделение является весьма условным.

а) Основная полоса вращательных состояний

Возбужденные состояния (9) при значениях квантовых чисел $n_\beta = n_\gamma = 0$, $K \approx 0$, $I = 0, 2, 4, \dots$ образуют «основную» полосу вращательных состояний ядра. В очень жестких атомных ядрах ($\mu \approx 0$) энергии возбужденных состояний основной полосы удовлетворяют простому правилу интервалов:

$$1 : 10 : 3 : 7 : 12 : 55 : 3 : 26 : 35 \dots \quad (10)$$

Это правило является следствием представления энергии вращения

$$E(I) = AI(I+1), \quad I = 0, 2, \dots \quad (11)$$

Возбужденные состояния (11) соответствуют вращению ядра вокруг оси, перпендикулярной к оси симметрии ядра. При вращении все реальные ядра деформируются, и тем сильнее, чем больше параметр неадиабатичности μ . При этом простая формула (11) уже не определяет энергию возбужденных состояний. При небольших значениях I и при $\mu \ll 1$, используя теорию возмущений, можно представить энергию возбуждения ядра в виде ряда

$$E(I) = AI(I+1) + BI^2(I-1)^2 + CI^3(I+1)^3 + \dots, \quad (12)$$

где $B, C \dots$ характеризуют деформируемость поверхности ядра. Однако в «мягких» ядрах и при исследовании возбужденных состояний с большим спином (см. ниже) нельзя пользоваться формулой (12), так как обусловленные центробежными силами деформации ядра могут оказаться значительными.

При вращении ядра с угловым моментом I оно растягивается. При этом равновесное значение β_0 основного состояния заменяется значением $\beta_I = p\beta_0$, где p — корень уравнения

$$p^4 - p^3 = \frac{1}{3} \mu^4 I(I+1), \quad I = 0, 2, \dots$$

На рис. 4 изображено отношение равновесного значения деформации ядра β_I при вращении с моментом I к равновесному значению β_0 в основном состоянии в зависимости от I и μ . Мы видим, что уже при $I = 4$ и $\mu = 1,05$ значение β_0 заменяется значением $\beta_4 = 2\beta_0$. Простой характер вращения (вокруг оси, перпендикулярной к оси симметрии при $\gamma_0 = 0$ и $K \approx 0$) возможен только для аксиально-симметричных ядер с малыми значениями параметра Γ , т. е. достаточно жестких по отношению к поперечным колебаниям поверхности ядра.

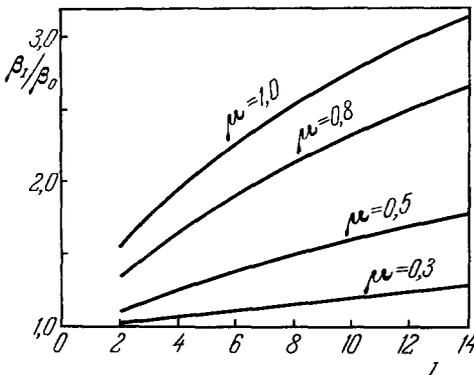


Рис. 4. Изменение равновесной деформации ядра в зависимости от спина I вращательного состояния и параметра μ .

Неаксиально-симметричные ядра и ядра аксиально-симметричные со значениями $\Gamma > 15^\circ$ совершают сложные вращательные движения. Их вращательные состояния описываются линейными суперпозициями состояний со значениями $K = 0, 2, \dots$ В основной вращательной полосе в линейной суперпозиции будут преобладать состояния с $K = 0$. Вклад же состояний с $K = 2, 4, \dots$ будет возрастать по мере приближения значения Γ или γ_0 к значению 30° .

Энергии вращательных состояний ядер с учетом продольной деформации ядра при закреплённом значении $\gamma = \gamma_0$ для всех возможных значений γ_0 были теоретически исследованы в работе Чабана и автора¹⁵. В последующих работах^{14, 23, 27} было показано, что эффекты поперечных колебаний поверхности аксиально-симметричного ядра могут быть формально учтены в расчетах¹⁵, если отождествить параметр γ этой работы со значением Γ , характеризующим амплитуду нулевых колебаний. Такая формальная замена возможна, если мы изучаем только первые возбужденные состояния, относящиеся к поперечным колебаниям поверхности ядра*). Так же, как в сферическом ядре значение $\langle \beta^2 \rangle$ эквивалентно значению β_0^2 для некоторого несферического ядра, так и в случае аксиально-симметричного ядра $\Gamma^2 = \frac{1}{2} \langle \gamma^2 \rangle$ эквивалентно γ_0^2 для некоторого неаксиального ядра.

В табл. I приведены вычисленные Маллманом и сотрудниками²⁹ на основе формул работы¹⁵ значения $R_{10}(I)$ — отношения энергии возбужденных состояний основной вращательной полосы к энергии первого

*) Эквивалентность нарушается для более высоких возбужденных состояний и для вероятностей некоторых электромагнитных переходов (см. 27). Однако относящиеся сюда экспериментальные данные недостаточны для уверенного выбора модели.

Таблица I

Отношение энергии возбуждения четно-четного ядра к энергии уровня 2^+ .
 $R_{10}(I)$ —основная вращательная полоса, $R_{11}(I)$ —вращательная полоса продольных колебаний, $R_{20}(I)$ —вращательная полоса поперечных колебаний

μ	Γ	$R_{10}(4)$	$R_{10}(6)$	$R_{10}(8)$	$R_{10}(10)$	$R_{10}(12)$	$R_{11}(0)$	$R_{11}(2)$	$R_{11}(4)$	$R_{20}(2)$	$R_{20}(3)$	$R_{20}(4)$	$R_{20}(5)$
0,10	8	3,327	6,978	11,90	18,09	25,51	94,77	95,80	98,20	25,02	26,01	27,34	28,98
0,20	8	3,299	6,823	11,47	17,12	23,68	22,77	23,88	26,43	23,25	24,11	25,26	26,66
0,40	8	2,962	5,513	8,448	11,65	15,06	5,394	6,676	9,069	14,85	15,28	15,85	16,54
0,60	8	2,597	4,149	6,444	8,536	10,69	3,160	4,407	6,216	10,56	10,83	11,18	11,61
0,80	8	2,417	3,994	5,651	7,359	9,100	2,620	3,866	5,350	8,993	9,210	9,494	9,838
1,00	8	2,323	3,770	5,272	6,805	8,360	2,401	3,659	4,966	8,265	8,475	8,710	9,016
0,10	15	3,271	6,678	11,07	16,36	22,52	85,99	87,02	89,36	6,844	7,841	9,250	10,82
0,20	15	3,241	6,533	10,66	15,49	20,95	20,67	21,78	24,26	6,691	7,638	8,966	10,44
0,40	15	2,898	5,263	7,867	10,61	13,48	4,925	6,206	8,511	5,369	5,990	6,832	7,732
0,60	15	2,543	4,264	6,045	7,854	9,688	2,914	4,154	5,898	4,338	4,770	5,347	5,954
0,80	15	2,373	3,844	5,331	6,817	8,308	2,432	3,664	5,103	3,907	4,270	4,751	5,256
1,00	15	2,285	3,633	4,990	6,334	7,667	2,238	3,476	4,752	3,696	4,027	4,465	4,922
0,10	25	2,834	5,335	8,533	12,43	17,02	69,63	70,66	72,55	2,406	3,405	5,505	6,397
0,20	25	2,809	5,226	8,243	11,82	15,91	16,75	17,86	19,86	2,390	3,365	5,388	6,237
0,40	25	2,526	4,281	6,225	8,319	10,53	4,050	5,324	7,167	2,194	2,952	4,391	4,956
0,60	25	2,248	3,550	4,914	6,329	7,786	2,449	3,675	5,081	1,989	2,573	3,630	4,031
0,80	25	2,120	3,248	4,403	5,584	6,788	2,073	3,276	4,453	1,892	2,405	3,316	3,658
1,00	25	2,055	3,100	4,160	5,235	6,324	1,923	3,122	4,177	1,841	2,320	3,163	3,477

уровня 2^+ в зависимости от значений μ и Γ . Мы видим, что в мягких ядрах должны наблюдаться существенные отклонения от правила интервалов (10) для абсолютно жесткого аксиально-симметричного ядра. Например, в ядрах с $\mu = 1$ вместо правила интервалов (10) отношения энергии

Таблица II

Сравнение экспериментальных 30 значений энергии вращательных состояний с большими спинами с теорией Давыдова—Чабана

Изотоп		2^+	4^+	6^+	8^+	10^+	12^+	14^+	16^+	% отклонения теории от эксперимента
W ¹⁷⁶	Эксп.	108,7	348,5	699,4	1140	1648	2206	—	—	0,20
	Теор.	108,7	349,1	698,8	1137	1646	2213	—	—	
W ¹⁷⁴	Эксп.	111,9	355,0	704,2	1137	1635	2186	—	—	0,16
	Теор.	111,8	355,8	705,3	1137	1633	2181	—	—	
W ¹⁷²	Эксп.	122,9	376,9	727,2	1147	1616	2129	2677	—	0,27
	Теор.	122,6	378,7	729,3	1147	1617	2126	2668	—	
Hf ¹⁷²	Эксп.	94,5	307,9	627,0	1036	1519	2063	2651	—	0,31
	Теор.	94,4	307,5	625,5	1033	1517	2066	2669	—	
Hf ¹⁷⁰	Эксп.	100,0	320,6	641,1	1041	1503	2013	2564	3147	0,22
	Теор.	100,0	320,5	639,8	1038	1500	2012	2568	3160	
Hf ¹⁶⁸	Эксп.	123,9	385,0	756,1	1212	1734	2304	—	—	0,79
	Теор.	121,7	384,9	758,6	1216	1740	2315	—	—	
Hf ¹⁶⁶	Эксп.	158,7	470,7	897,6	1407	1974	2565	—	—	1,45
	Теор.	155,7	471,3	902,2	1413	1983	2600	—	—	
Yb ¹⁶⁶	Эксп.	101,8	329,7	667,1	1097	1604	2172	—	—	0,12
	Теор.	101,9	330,2	667,7	1097	1601	2169	—	—	
Yb ¹⁶⁴	Эксп.	122,5	384,0	758,0	1219	1748	—	—	—	0,52
	Теор.	121,2	384,7	760,3	1222	1752	—	—	—	

уровней со спинами 2, 4, 6, 8, 10, 12 должны удовлетворять соотношениям

$$1 : 2, 32 : 3,77 : 5,27 : 6,80 : 8,34 \dots, \text{ если } \Gamma = 8^\circ, \quad (13)$$

и

$$1 : 2,05 : 3,10 : 4,16 : 5,24 : 6,32 \dots, \text{ если } \Gamma = 25^\circ. \quad (14)$$

Таким образом, при $\mu \approx 1$ и $\Gamma = 25^\circ$ энергетический спектр возбужденных состояний основной вращательной полосы становится почти эквидистантным.

Убедительное доказательство большой деформируемости даже таких ядер, которые при малых возбуждениях имеют хорошо выраженный вращательный спектр, было получено в работах Стивенса, Ларка и Даймонда³⁰, выполненных в 1964 г. в

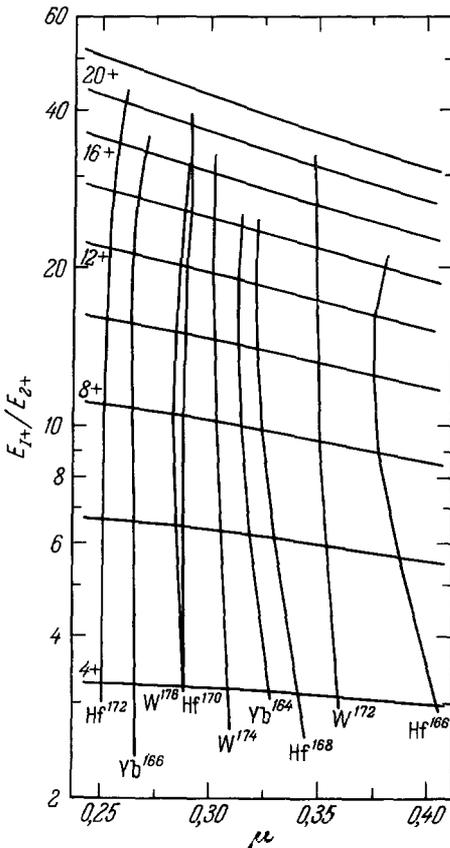


Рис. 5. Теоретические (Давыдов — Чабан¹⁵) и экспериментальные (Стивенс и др.³⁰⁻³¹) отношения энергий вращательных состояний спина I к энергии первого уровня спина 2 в зависимости от параметра μ .

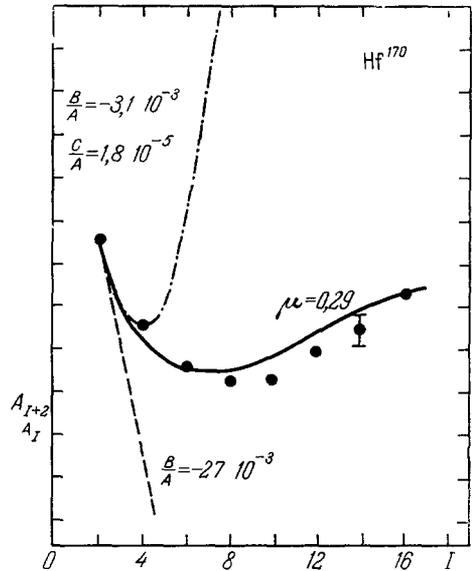


Рис. 6. Отношения последовательных вращательных констант A_I как функции спина I .

Точки — экспериментальные значения³⁰⁻³¹; сплошная кривая — теория Давыдова — Чабана¹⁵, пунктирная и штрих-пунктирные кривые соответствуют теории возмущений (формула (12)).

Калифорнийском университете. В результате ядерных реакций, вызываемых тяжелыми ионами B^{11} , N^{14} и F^{19} , были получены возбужденные состояния больших спинов у девяти ядер:

$$Yb(164, 166), Hf(166, 168, 170, 172), W(172, 174, 176).$$

Исследуя электроны конверсии и γ -кванты, испускаемые этими ядрами при каскадном переходе в основное состояние, удалось получить с весьма большой точностью (до 0,3%) значения энергий возбужденных состояний этих ядер. В табл. II, заимствованной из доклада Стивенса³⁰ на 15 Все-

союзном совещании по ядерной спектроскопии, приведены экспериментальные значения энергии вращательных состояний и теоретические значения, полученные на основе теории Давыдова — Чабана¹⁵ при значении $\Gamma = 0$. В последнем столбце табл. II указаны в процентах средние отклонения теоретических значений от экспериментальных. Если учесть, что при сравнении теории с экспериментом используется только два параметра $E(2)$ и μ , следует признать, что согласие теории с экспериментом является хорошим.

Если брать не абсолютные значения энергии, а их отношения к энергии первого уровня спина 2 в том же ядре, то сравнение теории с экспериментом позволяет определить для каждого ядра единственный параметр теории μ . Такое сравнение приведено на рис. 5 (взятом из работы³⁰). Почти горизонтальные линии на рисунке соответствуют вычисленным согласно¹⁵ значениям отношения энергии уровня спина I к энергии первого уровня спина 2 как функции параметра μ . Вертикальные линии соединяют измеренные отношения для каждого ядра. Из рис. 5 видно, что из исследованных ядер наиболее жестким ядром по отношению к продольным колебаниям является ядро Hf^{172} ($\mu \approx 0,25$), а наиболее мягким — ядро Hf^{166} ($\mu \approx 0,4$). На рис. 6 (взятом из работы³¹) приведены отношения A_{I+2}/A_I последовательных вращательных констант, определяемых с помощью равенства

$$A_I = \frac{E(I) - E(I-2)}{4I-2}.$$

Точки на рисунке соответствуют экспериментальным значениям, сплошная кривая — теории¹⁵. Пунктирная кривая соответствует теоретическому значению (12) с двумя параметрами A и B , определяемыми из значений энергий уровней 2^+ и 4^+ , штрих-пунктирная кривая соответствует теоретическому значению (12) с тремя параметрами A, B, C , определяемыми из данных об уровнях $2^+, 4^+$ и 6^+ . Мы видим, что применение теории возмущений (формула (12)) для описания вращательных состояний ядер с учетом их растяжения при вращении совершенно недопустимо.

б) В р а щ а т е л ь н а я п о л о с а п о п е р е ч н ы х к о л е б а н и й п о в е р х н о с т и я д р а

Возбужденные состояния (9) при значениях квантовых чисел $n_\beta = n_\gamma = 0, K \approx 2, I = 2, 3, 4, \dots$ будем называть вращательной полосой поперечных колебаний поверхности ядра. В грубом приближении, без учета поправочного члена ϵ (μ, Γ), согласно (9) отношение энергий этих возбужденных состояний к энергии первого уровня 2^+ определяются выражением

$$R_{20}(I) \equiv \frac{E(I, 2, 0, 0)}{E(2)} \approx \frac{1}{2I^2} + \frac{I(I+1)}{6} - \frac{1}{2}, \quad I = 2, 3, \dots$$

При учете же продольной деформации ядра отношение $R_{20}(I)$ для разных значений μ и Γ и для значений $I = 2, 3, 4, 5$ приведены (на основе теории¹⁵ и таблиц²⁹) в табл. 1.

Первый член $R_{20}(2)$ вращательной полосы поперечных колебаний соответствует поперечным колебаниям поверхности ядра. Как было указано в конце введения, если в основном состоянии ядро имеет аксиальную симметрию, два вырожденных поперечных колебания можно рассматривать как чистое вращение вокруг оси z . Волновая функция этого возбужденного состояния зависит от двух квантовых чисел K и n_γ .

Часто недостаточно обоснованно эти возбужденные состояния называют γ -колебаниями. При этом принимается, что энергия этих

колебаний определяется собственными значениями оператора (см., например, ³²)

$$H_{\gamma} = -\frac{\hbar^2}{2B_{\gamma}} \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) - \frac{I_3^2}{\gamma^2} \right] + \frac{C'}{2} \gamma^2.$$

Второе слагаемое в квадратных скобках этого оператора является частью оператора вращения. Поэтому во всех состояниях, характеризующихся отличными от нуля значениями K , собственные значения H_{γ} определяют не чистые γ -колебания, а вращательно-колебательные возбуждения или энергию двух поперечных колебаний. В истинно неаксиальных ядрах ($\gamma_0 \neq 0$) состояния R_{20} (2) соответствуют вращению ядра вокруг оси z .

Из экспериментальных данных о двух отношениях R_{10} (4) и R_{20} (2), пользуясь таблицами ²⁹ (часть этих значений приведена в табл. I), можно

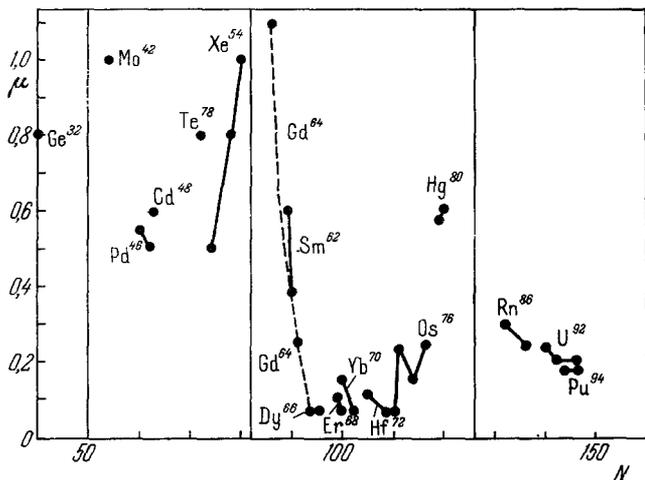


Рис. 7. Значения параметра неадиабатичности μ для четно-четных ядер в зависимости от числа нейтронов в ядре. Линиями соединены точки, относящиеся к ядрам с одинаковым числом протонов.

определить для каждого ядра два параметра μ и Γ , характеризующих деформируемость ядра по отношению к продольным и поперечным колебаниям. Таким образом, можно получить значения, которые представлены на рис. 7 и 8 для ряда четно-четных ядер, в зависимости от числа нейтронов в ядре. Из рис. 7 видно, что ядра, далекие от магических, являются сравнительно жесткими по отношению к продольной деформации. Например, в области $82 < N < 126$ и $N > 126$ значение $\mu \leq 0,2$. Однако по мере приближения числа нейтронов к магическим числам деформируемость ядра по отношению к продольным колебаниям значительно возрастает. Особенно хорошо это заметно на примере изотопов Gd и Xe. Это явление обусловлено более слабой связью нуклонов, начинающих построение новой оболочки (или дырок в почти заолненной оболочке), с остовом ядра. Аналогичная картина наблюдается в атомах, когда мы исследуем поляризуемость атома. Она особенно велика у атомов щелочных металлов.

В областях $82 < N < 126$ и $N > 126$ деформируемость по отношению к поперечным колебаниям (значение Γ) ведет себя аналогично деформируемости по отношению к продольным колебаниям. Однако в области $50 < N < 82$ почти для всех ядер $\Gamma \geq 0,4$ (т. е. $\Gamma > 20^\circ$). Это указывает либо на большую мягкость таких ядер по отношению к поперечным

колебаниям, либо на отсутствие акспальной осп симметрии уже в основном состоянии. В связи с этим атомные ядра, относящиеся к большим значениям Γ , не имеют простого вращательного спектра (11) возбужденных состояний. Как правило, возбужденные состояния в таких ядрах являются сложной суперпозицией колебательных (продольных и поперечных) и вращательных возбуждений. Неправильно, хотя это часто и делается, относить возбужденные состояния таких ядер к вибрационным возбуждениям, так же как будет неправильно, если говорить о вращательных возбуждениях.

Как следует из табл. I, при $\mu \approx 1$ и $\Gamma \approx 25^\circ$ спектр возбужденных состояний четно-четных ядер становится почти эквидистантным. Иногда

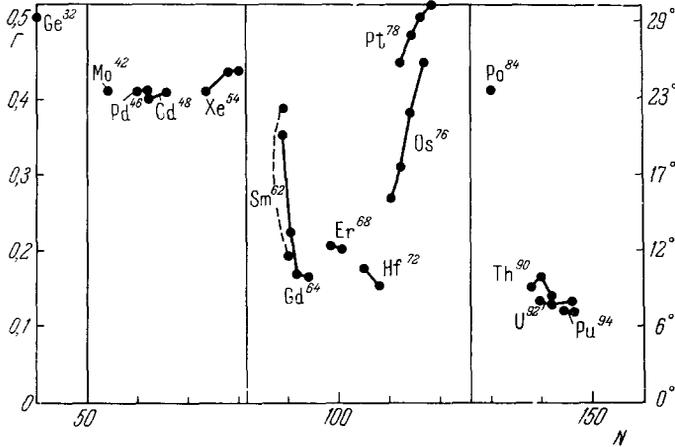


Рис. 8. Значение параметра Γ , характеризующего поперечную деформруемость (или значения γ_0) четно-четных ядер в зависимости от числа нейтронов в ядре.

Слева указаны значения Γ в радианах, справа — в градусах.

неправильно это обстоятельство рассматривают как указание на сферическую симметрию ядра, так как вибрационный спектр сферических ядер должен быть эквидистантным. Эквидистантный спектр должен быть и у несферических мягких ядер.

Зная значения μ из экспериментальных данных о R_{10} (4) и R_{20} (2) и значения $\langle \beta^2 \rangle$ из данных об электрических квадрупольных переходах с основного на первый возбужденный уровень ядра, можно с помощью формулы (7) определить вклад нулевых колебаний поверхности несферических ядер в $\langle \beta^2 \rangle$. В табл. III получены таким образом значения $\langle \beta^2 \rangle / \beta_0^2$ для некоторых ядер.

Таблица III

Роль продольных нулевых колебаний в $\langle \beta^2 \rangle$ в несферических ядрах

Ядро	$\sqrt{\langle \beta^2 \rangle}$	μ	$\Gamma, \text{ рад}$	$\langle \beta^2 \rangle / \beta_0^2$	Ядро	$\sqrt{\langle \beta^2 \rangle}$	μ	$\Gamma, \text{ рад}$	$\langle \beta^2 \rangle / \beta_0^2$
Gd ¹¹⁴	0,2	1,0	0,40	2	U ²³⁸	0,28	0,2	0,1	1,02
Pd ¹⁰⁴	0,21	0,5	0,38	1,12	Hf ¹⁷⁸	0,30	0,15	0,15	1,01
Os ¹⁹⁰	0,14	0,25	0,45	1,03					

Из табл. III мы видим, что в ядре Cd¹¹⁴ роль нулевых продольных колебаний весьма велика. Наоборот, у ядер Os¹⁹⁰, U²³⁸ и Hf¹⁷⁸ роль нулевых колебаний мала.

Теория коллективных возбуждений квадрупольного типа ^{14, 15, 26} интересна тем, что она позволяет по значениям $R_{10}(4)$ и $R_{20}(2)$ (или каким-либо двум другим отношениям энергий) определить два параметра теории μ и Γ , предсказать по таблицам ²⁹ все другие отношения (к энергии первого уровня 2^+) энергий возбужденных состояний квадрупольного типа в том же ядре и однозначно предсказать относительные вероятности переходов между возбужденными состояниями. В частности, зная μ и Γ , можно определить энергию возбуждения продольных колебаний нулевого спина и энергии вращательной полосы, связанной с этими колебаниями. В табл. IV сравниваются предсказываемые теорией отношения $R_{11}(0) = E_{\beta}(0)/E(2)$ с экспериментальными отношениями.

Таблица IV

Сравнение теоретических и экспериментальных отношений $R_{11}(0) = E_{\beta}(0)/E(2)$

Ядро	μ	Γ	$R_{11}(0)$		Ядро	μ	Γ	$R_{11}(0)$	
			теория	эксперимент				теория	эксперимент
Pu ²⁴⁰	0,22	8,0	19,3	20,0	Os ¹⁸⁸	0,25	19,0	11,6	11,4
Pu ²³³	0,21	7,8	21,1	21,38	Er ¹⁶⁶	0,20	12,7	21,1	18,12
U ²³⁸	0,2	8,0	22,8	22,2	Gd ¹⁵⁶	0,25	10,5	13,8	11,7
U ²³⁴	0,2	8,7	22,5	18,66	Gd ¹⁵⁴	0,37	13	5,2	5,53
U ²³²	0,25	8,8	14,1	14,6	Sm ¹⁵²	0,37	11,5	6,1	5,62
Th ²³²	0,25	8,9	14,1	14,7	Cd ¹¹⁴	0,54	22,5	2,6	2,03
Th ²³⁰	0,25	9,5	13,9	11,9					

Согласно (9), кроме возбужденных состояний $E_{\beta}(0)$ нулевого спина с квантовыми числами $n_{\beta} = 1$, $n_{\gamma} = 0$, $I = K = 0$, которые можно назвать однофононными возбуждениями продольных колебаний поверхности ядра, в четно-четных ядрах возможны возбуждения нулевого спина $E_{\gamma}(0)$, соответствующие однофононным возбуждениям поперечных колебаний ядра, т. е. возбуждения с квантовыми числами $n_{\gamma} = 1$, $n_{\beta} = 0$, $I = K = 0$. Такие возбуждения рассматривались в работах ^{14, 26, 28}; их свойства существенно отличаются от возбуждений $E_{\beta}(0)$.

В аксиально-симметричных ядрах отношения $E_{\beta}(0)/E_{\gamma}(0)$, так же как и другие отношения энергий возбуждений квадрупольного типа, определяются значениями только двух параметров теории μ и Γ . Как показано в работе ²⁶, в грубом приближении должны выполняться равенства

$$\frac{\Gamma}{\mu} \approx \sqrt{\frac{E_{\beta}(0)}{E_{\gamma}(0)}}, \quad 2E_{20}(2) - E_{10}(2) \approx E_{\gamma}(0). \quad (15)$$

Два уровня со спином 0 наблюдались Кингом и Джонсом ³³ в ядре Os¹⁸⁸. При этом были найдены значения энергии (в кэв): $E_{10}(2) = 80,7$, $E_{20}(2) = 788$, $E_{\gamma}(0) = 1086$ и $E_{\beta}(0) = 1765$. Если учесть, что для ядра Os¹⁸⁸ значения $\mu = 0,25$ и $\Gamma = 0,33$ (19°), мы убедимся, что соотношение (15) для ядра Os¹⁸⁸ выполняется сравнительно хорошо.

В неаксиальных ядрах, кроме параметров μ и Γ , отношения энергий зависят от значения γ_0 — третьего параметра теории. Для таких ядер не должны выполняться и соотношения (15). Следует отметить, что в настоящее время еще нет достаточно строгой теории коллективных возбуждений неаксиальных ядер, которая учитывала бы одновременно вращения и продольные и поперечные колебания поверхности ядра.

Среди экспериментальных методов обнаружения деформации ядра в момент квантового перехода особое значение имеет исследование элек-

трических монополюных ($E0$) переходов между состояниями одинакового спина ($0 \rightarrow 0, 2 \rightarrow 2$ и т. д.). Вероятность таких переходов определяется исключительно изменением радиального распределения электрического заряда внутри ядра в момент квантового перехода. Теория этого явления развивалась в работе автора и Ростовского²⁸ для аксиально-симметричных ядер с учетом связи продольных и поперечных колебаний ядра. Было показано, что ядерные матричные элементы $E0$ -переходов выражаются через значения β_0, Γ и μ .

Кроме рассмотренных выше коллективных возбуждений, соответствующих квадрупольным деформациям поверхности ядра и имеющих всегда положительную четность, в четно-четных ядрах наблюдаются³⁴⁻³⁶

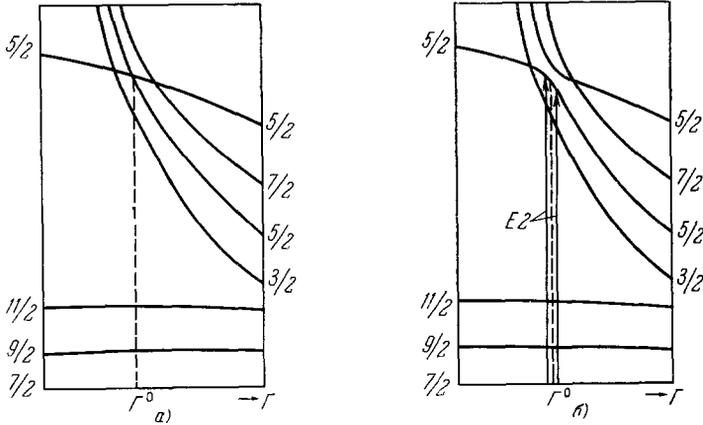


Рис. 9. Схема некоторых возбужденных состояний нечетного ядра:
 а) без учета взаимодействия коллективных и одночастичных возбуждений;
 б) при учете взаимодействия одночастичных и коллективных возбуждений.

коллективные возбужденные состояния отрицательной четности (3^-). По-видимому, такие возбуждения соответствуют октупольным колебаниям поверхности ядра. Их энергия для ядер среднего и большого A лежит в области $1-3$ Мэв. Теория октупольных возбужденных состояний четно-четных атомных ядер находится еще в начальной стадии развития³⁷.

В этом обзоре не рассматривались возбужденные состояния нечетных ядер. В нечетных ядрах энергия одночастичных возбуждений — одного порядка с энергией коллективных возбуждений, поэтому часто разделение возбуждений на коллективные и одночастичные мало оправдано. В нечетных ядрах имеют существенное значение корполисовы взаимодействия, приводящие к смешиванию состояний, различающихся значениями K и Ω . Теория возбужденных состояний нечетных ядер развивалась в ряде работ на основе простых моделей ядра³⁸⁻⁴². Здесь мы отметим только важное явление смешивания одночастичных и коллективных возбуждений в нечетном ядре, которое может играть существенную роль при оценке вероятностей переходов между основным и возбужденными состояниями нечетного ядра. На рис. 9, а изображена, без учета взаимодействия одночастичных и коллективных движений, зависимость энергии возбужденных состояний нечетного ядра от величины Γ , характеризующей деформируемость поверхности ядра по отношению к поперечным колебаниям. Уровни со спином $9/2$ и $11/2$ соответствуют коллективным возбуждениям, относящимся к основной вращательной полосе. Их энергия слабо зависит от Γ . Три возбужденных состояния со спинами $3/2, 5/2$ и $7/2$, энергия которых сильно зависит от Γ , относятся к коллективным возбуждениям, включающим поперечные колебания поверхности

ядра. И, наконец, слабо зависящий от Γ уровень $5/2$ относится к одночастичным возбуждениям. На рис. 9, б изображена та же схема при учете взаимодействия одночастичного и коллективных возбуждений. Мы видим, что состояния со спином $5/2$ в области $\Gamma \approx \Gamma_0$ полностью «перепутываются». В связи с этим вероятности двух $E2$ -переходов, указанные на рис. 9, б двумя стрелками, будут существенно отличаться друг от друга. Вне области «перепутывания» уровни $5/2$ и $7/2$, расположенные над уровнем $3/2$, можно рассматривать как второй и третий члены вращательной полосы, начинающейся с уровня $3/2$. Но в области «перепутывания» ($\Gamma \approx \Gamma_0$) для уровня со спином $5/2$ такое представление теряет смысл. Уровень со спином $5/2$ по всем своим свойствам (положение, вероятность перехода) «выпадает» из вращательной полосы. Было бы весьма интересно получить непосредственное экспериментальное доказательство этого явления.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. Rainwater, Phys. Rev. **79**, 432 (1950).
2. A. Bohr, Kgl. Dansk. Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd. **26**, No. 14 (1952).
3. A. Bohr and B. Mottelson, Kgl. Dansk. Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd. **27**, No. 16 (1953); О. Бор и Б. Моттelson, Атомная энергия **14**, 41 (1963).
4. K. Ford, Phys. Rev. **90**, 29 (1953).
5. Б. Т. Гейликман, ЖЭТФ **35**, 989 (1958).
6. Д. А. Заикин, ЖЭТФ **35**, 529 (1958).
7. А. С. Давыдов и Г. Ф. Филиппов, ЖЭТФ **36**, 1497 (1959).
8. Г. Ф. Филиппов, ЖЭТФ **38**, 1316 (1960).
9. S. Das Gupta and M. A. Preston, Nucl. Phys. **49**, 401 (1963).
10. M. R. Gunye, S. Das Gupta and M. A. Preston, Phys. Letts. **13**, 246 (1964).
11. S. G. Nilsson, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. **29**, 16 (1956).
12. B. Mottelson, S. G. Nilsson, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. **1**, No 8 (1959).
13. S. G. Nilsson and O. Prior, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. **32**, No 16 (1960).
14. А. С. Давыдов, Nucl. Phys. **24**, 682 (1961).
15. А. С. Давыдов и А. А. Чабан, Nucl. Phys. **20**, 499 (1960).
16. P. Stelson and F. McGowan, Phys. Rev. **110**, 489 (1958).
17. K. Alder, A. Bohr, T. Haus, B. Mottelson and A. Winter, Rev. Mod. Phys. **28**, 432 (1956).
18. G. Sharff-Goldhaber and I. Weneser, Phys. Rev. **98**, 212 (1955).
19. B. I. Raz, Phys. Rev. **114**, 1116 (1959); **129**, 2622 (1963).
20. T. Tamura and L. G. Komai, Phys. Rev. Letts. **3**, 344 (1959).
21. В. И. Овчаренко, Укр. физ. ж. **10**, 486 (1965).
22. N. Macdonald, Nucl. Phys. **48**, 500 (1963).
23. С. Т. Беляев, В. Г. Зелевинский, Изв. АН СССР, сер. физ. **28**, 127 (1964).
24. Giu Do Dang and A. Klein, Phys. Rev. **133B**, 257 (1964).
25. T. Tamura and T. Udagawa, Nucl. Phys. **53**, 33 (1964).
26. А. С. Давыдов, В. С. Ростовский и А. А. Чабан, Вест. Моск. ун-та. сер. физ. **3**, 67 (1961); Nucl. Phys. **27**, 134 (1961).
27. В. И. Беляк и Д. А. Заикин, Изв. АН СССР, сер. физ. **25**, № 9 (1961); Nucl. Phys. **30**, 442 (1962).
28. А. С. Давыдов и В. С. Ростовский, Nucl. Phys. **60**, 529 (1964).
29. C. A. Malliman, P. P. Day, E. D. Klemm, Table of Energy Levels of Asymmetric Even Nuclei with Beta-Vibration-Rotation Interaction, ANL-6220 (1960).
30. F. S. Stephens, Доклад на 15 Всесоюзном совещании по ядерной спектроскопии, Минск, январь, 1965 г.; см. также: F. S. Stephens, N. L. Lark, R. M. Diamond, Nucl. Phys. **63**, 82 (1965).
31. F. S. Stephens, N. Lark, R. M. Diamond, Phys. Rev. Letts. **12**, 225 (1964).
32. Б. Л. Бирбраир, Л. К. Пекер, Л. А. Слив, ЖЭТФ **36**, 803 (1959).
33. W. I. King and M. W. Johns, Can. J. Phys. **37**, 755 (1959).
34. A. M. Lane and E. D. Pendlebury, Nucl. Phys. **15**, 39 (1960).
35. O. Hansen and O. Nathan, Nucl. Phys. **42**, 197 (1963).
36. K. Matsuda, Nucl. Phys. **33**, 536 (1962).
37. P. O. Lipas and I. P. Davidson, Nucl. Phys. **26**, 80 (1961), Д. П. Лепер. Nucl. Phys. **50**, 234 (1964).
38. А. С. Давыдов и Р. А. Сардарян, ЖЭТФ **40**, 1429 (1961).
39. А. С. Давыдов и Р. А. Сардарян, Nucl. Phys. **37**, 106 (1962).
40. K. Hecht and G. R. Satchler, Nucl. Phys. **32**, 286 (1962).
41. L. W. Parson and I. O. Rasmussen, Nucl. Phys. **36**, 666 (1962).
42. В. В. Пашкевич и Р. А. Сардарян, ОИЯИ, P-1574 (1964).