# УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

535.4

## ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

#### Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский

#### введение

Как известно, движение заряженных частиц в оптически неоднородной среде сопровождается излучением электромагнитных волн. Типичным примером является переходное излучение, возникающее при пересечении равномерно движущейся заряженной частицей границы двух однородных сред с различными оптическими свойствами 1. Другим примером может служить дифракционное излучение, возникающее при пролете источников электромагнитного поля вблизи идеально проводящих тел<sup>2,3</sup>. Рядом специфических физических особенностей обладает излучение заряженной частицы, пролетающей мимо периодически повторяющихся неоднородностей. Разбору именно этого случая и посвящена данная статья. Рассмотрение излучения заряженных частиц в периодических структурах представляет интерес в связи с рядом возможных физических приложений. Одним из них является генерация электромагнитного излучения пучком заряженных частиц, взаимодействующих с периодической структурой. Еще одним возможным приложением является определение характеристик излучающей частицы (скорости, заряда, траектории) по свойствам излученного ею поля. Рассмотрение взаимодействия заряженных частиц с периодическими структурами представляет интерес и потому, что на таком взаимодействии основано устройство многих приборов в современной электронике (например, линейных ускорителей). Перезисленные причины сбъясняют, по крайней мере частично, тот факт, что в последние годы появилось большое количество экспериментальных и теоретических работ, посвященных взаимодействию заряженных частиц с периодически неоднородными средами. В опубликованных работах рассматривались в основном два круга вопросов: возможность генерации излучения в заданном участке оптического диапазона при взаимодействии заряженных частиц с периодической системой (дифракционная решетка) и возможность регистрации релятивис ских заряженных частиц по их излучению в периодической среде. В настоящее время обе указанные возможности уже осуществлены экспериментально. Хотя полученные результаты во многом следует рассматривать как предварительные, целесообразно обсудить состояние теории и эксперимента в этой области, чтобы яснее представлять себе возможные пути развития.

В первой части обзора рассмотрено излучение заряженных частиц, движущихся вблизи дифракционной решетки. При этом внимание уделено не исследованию конкретных моделей, а выяснению общих свойств излучения в периодических структурах.

1 УФН. т. 94. вып. 3

электронов в пучке. Видно, что с ростом энергии длина волны излучения палает. Интенсивность излучения в работе<sup>5</sup> не измерялась.

Анализ результатов опыта Перселла и Смита может быть проведен на основании простых качественных соображений. Представим себе заряженную частицу, равномерно движущуюся вблизи плоской дифракционной решетки (рис. 2). Как будет показано, спектр излучения определяется лишь периодом решетки и не зависит от других ее особенностей (например. от профиля решетки или от того, прозрачная она или отражающая). Поэтому мы проведем рассмотрение для плоской прозрачной решетки с периодом d. Пусть при прохождении заряда мимо одного из штрихов решетки возникает плоская волна излучения exp {*i*kr — *i*ω*t*}, где k — волновой вектор, направленный под углом в к скорости заряда. Тогда при пролете слепующего штризаряда мимо

испускается решетки волна xa  $\exp \{i\mathbf{k} (\mathbf{r} - \mathbf{d}) - i\omega (t - \Delta t)\},$  где  $\Delta t =$ = d/u — время прохождения зарядом одного периода структуры. Очевидно, излучение от соседних штрихов решетки не будет погашено, если разность фаз соответствующих волн кратна 2 л:

$$\omega \Delta t - \mathbf{k} \mathbf{d} = \omega \frac{d}{u} - kd \cos \theta =$$
$$= \frac{\omega d}{u} (1 - \beta \cos \theta) = 2\pi n, \quad (1)$$



где использовано соотношение  $k - \omega/c$ . Подобное

рассуждение, справедливо для отражательной дифракционной решетки, а также любой другой периодической структуры. Как следует из формулы (1), под заданным углом наблюдения в испускаются волны различных частот

конечно.

$$\omega_n \quad \frac{2\pi n \frac{u}{d}}{1-\beta\cos\theta} \ . \tag{2}$$

Формулы (1), (2) дают зависимость частоты излучения от скорости источника, угла наблюдения и величины периода структуры. Спектрограммы излучения, полученные Смитом и Перселлом, являются количественным подтверждением этих формул. Действительно, полагая, как это было в эксперименте,  $d = 1.67 \cdot 10^{-4}$  см,  $\theta = 20^{\circ}$ ,  $\beta = 0.8$  (что соответствует энергии электронов 300 кэв), получим из формулы (2) для n = 1 (основная частота излучения) длину волны излучения, близкую к 5000 Å (см. рис. 1). Авторы наблюдали также частоты, кратные основной, соответствующие значениям *n* от 1 до 5.

Почти через десять лет после опытов Перселла и Смита появились указания на создание генератора электромагнитного излучения, основанного на том же принципе 6. Прибор этот был разработан в лабораториях фирмы «Варо» и назван варотроном. Источником излучения в нем служат электроны, движущиеся вблизи плоскости оптической дифракционной решетки. Варотрон позволял легко менять излучаемую частоту в диапазоне длин волн от 10<sup>-4</sup> до 0,5·10<sup>-4</sup> см, т. е. в инфракрасной области спектра до границ видимого света. Наряду с излучением на основной гармонике варотрон давал также излучение на высших гармониках вплоть. до ультрафиолета. С использованием варотрона была осуществлена передача человеческой речи как с помощью частотной, так и с помощью амплитудной модуляции.

Недавно появилось описание еще одного прибора, основанного на взаимодействии электронного луча с периодической дифракционной структурой <sup>7</sup>. Схема прибора, названного авторами оротроном (прибор с открытым резонатором и отражающей решеткой), изображена на рис. 3. Открытый резонатор образован плоским и сферическим зеркалами, расстояние между которыми можно плавно изменять. На поверхно-



Рис. 3. Схема оротрона. 1 — электронная пушка; 2 — электронный пучок; 3 — сферическое зеркало; 4 — волновод; 5 — каустика, ограничивающая поле; 6 — гребенчатая замедляющая структура. сти плоского зеркала нанесена гребенка. Генерируемая в резонаторе мощность выводится из него через отверстие в сферическом зеркале. Плоский электронный пучок создавался диодной пушкой, формировался с помощью диафрагмы и ускорялся постоянным или импульсным напряжением. Фокусировка пучка осуществлялась сильным продольным магнитным полем. В приборе наблюдалась генерация волн миллиметрового диапазона, причем частота зависела от расстояния между зеркалами и ускоряющего напряжения. Выходная мошность практически линейно зависела от тока пучка. Импульсная выходная мощность была довольно значительна. Так, при токе ~1 а импульсная выходная мощность на длине волны 8,1 мм составляла около 4 вт.

Описанный прибор является автогенератором сверхвысокочастотных колебаний с электронным пучком. Обратная связь,

осуществляемая с помощью открытого резонатора, позволяет преобразовать некогерентное излучение электронного пучка, проходящего над периодической структурой, в когерентное монохроматическое излучение.

Соотношения (1), (2), дающие спектр излучения, возникающего при движении заряда вблизи периодической структуры, можно вывести из законов сохранения энергии и импульса, используя кроме них только факт периодичности структуры.

Рассмотрим особенности поля в линейной периодической структуре. Как известно из теории уравнений с периодическими коэффициентами, компонента поля, отвечающая заданной частоте ω, в периодической системе может быть представлена в виде суперпозиции полей:

$$\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{i\varkappa(\omega)z}, \qquad (3)$$

где  $\varkappa$  ( $\omega$ ) определяется решением краевой задачи электродинамики, а **A** (**r**) — периодическая функция переменной *z* с периодом структуры *d* (предполагается, что рассматриваемая система периодична по оси *z*). Разлагая **A** (**r**) в ряд Фурье по переменной *z*, получим

$$\mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_n(x, y) e^{\mathbf{i} \left[\varkappa(\omega) + \frac{2\pi n}{d}\right]z}.$$
 (4)

Как видно из формулы (4), при заданной частоте со поле представляет собой сумму волн, у которых значения продольной компоненты волнового вектора

$$k_z = \varkappa (\omega) + \frac{2\pi}{d} n \tag{5}$$

отличаются на величину, кратную

$$k_0 = \frac{2\pi}{d} . \tag{6}$$

На основании известного квантовомеханического соотношения, связывающего импульс с волновым вектором:

$$\mathbf{p} = h\mathbf{k},\tag{7}$$

можно утверждать, что продольная компонента импульса фотона в линейной периодической среде может меняться лишь на величину, кратную элементарному импульсу

$$\mathbf{p}_0 = hk_0 \mathbf{z}_0 = \frac{2\pi h}{d} \, \mathbf{z}_0,\tag{8}$$

где z<sub>0</sub> — единичный вектор, направленный по оси периодичности системы. Это утверждение эквивалентно тому, что линейная периодическая система может принимать на себя целое кратное элементарного импульса р<sub>0</sub>.

Пусть теперь заряд, движущийся в периодической системе, излучает квант света с импульсом hk и энергией hw. Напишем законы сохранения энергии и импульса. Обозначив энергию Е и импульс р заряда до излучения индексом 1, а после излучения — индексом 2, получим

.

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \Delta \mathbf{p} = h\mathbf{k} + nh\mathbf{k}_0,$$
  

$$E_1 - E_2 = \Delta E = h\omega.$$
(9)

. .

Умножим первое из равенств скалярно на скорость заряда и. Воспользовавшись соотношением и  $\Delta \mathbf{p} = \Delta E$ , справедливым при малом изменении энергии частицы, получим

$$\mathbf{u}\,\Delta\mathbf{p} = \Delta E = h\boldsymbol{\omega} = h\mathbf{k}\mathbf{u} + nh\mathbf{k}_0\mathbf{u}.\tag{10}$$

Отсюда с учетом соотношения  $k = \omega/c$  получаем

$$\omega = \frac{n \left(\mathbf{k}_0 \mathbf{u}\right)}{1 - \frac{u}{c} \cos \theta}, \qquad (11)$$

где  $\theta$  — угол между скоростью заряда и направлением излучения.

В частном случае, когда скорость частицы и параллельна вектору **k**<sub>0</sub> (или, что то же самое, скорость частины параллельна оси периоличности системы), получаем из (11) приведенное ранее соотношение (2). В связи с полученными формулами заметим прежде всего, что, несмотря на квантовый вывод, формулы для спектра излучения оказываются чисто классическими (в них не входит постоянная Планка h). Причина заключается в уже отмеченном предположении о малости изменения энергии заряда в процессе излучения. Из вывода очевидно, что спектр излучения не зависит от конкретного вида структуры и определяется только ее периодом.

Выражение (11) поддается простому физическому истолкованию. Действительно, в числителе формулы (11) стоит величина n (**k**<sub>0</sub>**u**) — целое кратное «частоты прохождения» зарядом одного периода структуры; знаменатель же содержит характерный допилеровский множитель, учитывающий движение частицы. Движение частицы в периодической структуре сопровождается наведением заряда на стенках структуры. Индуцированный заряд периодически изменяется во времени с основным периодом T = d/u, равным времени прохождения частицей одной ячейки структуры. Этот периодически изменяющийся наведенный заряд, перемещающийся вместе с равномерно движущейся заряженной частицей, и является источником излучения.

отличаются на величину, кратную

$$k_0 = \frac{2\pi}{d} . \tag{6}$$

На основании известного квантовомеханического соотношения, связывающего импульс с волновым вектором:

$$\mathbf{p} = h\mathbf{k},\tag{7}$$

можно утверждать, что продольная компонента импульса фотона в линейной периодической среде может меняться лишь на величину, кратную элементарному импульсу

$$\mathbf{p}_0 = hk_0 \mathbf{z}_0 = \frac{2\pi h}{d} \mathbf{z}_0,\tag{8}$$

где  $z_0$  — единичный вектор, направленный по оси периодичности системы. Это утверждение эквивалентно тому, что линейная периодическая система может принимать на себя целое кратное элементарного импульса  $p_0$ .

Пусть теперь заряд, движущийся в периодической системе, излучает квант света с импульсом  $h\mathbf{k}$  и энергией  $h\omega$ . Напишем законы сохранения энергии и импульса. Обозначив энергию E и импульс р заряда до излучения индексом 1, а после излучения — индексом 2, получим

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \Delta \mathbf{p} = h\mathbf{k} + nh\mathbf{k}_0,$$
  

$$E_1 - E_2 = \Delta E = h\omega.$$
(9)

Умножим первое из равенств скалярно на скорость заряда и. Воспользовавшись соотношением и  $\Delta \mathbf{p} = \Delta E$ , справедливым при малом изменении энергии частицы, получим

$$\mathbf{u}\,\Delta\mathbf{p} = \Delta E = h\boldsymbol{\omega} = h\mathbf{k}\mathbf{u} + nh\mathbf{k}_0\mathbf{u}.\tag{10}$$

Отсюда с учетом соотношения  $k = \omega/c$  получаем

$$\omega = \frac{n \left(\mathbf{k}_0 \mathbf{u}\right)}{1 - \frac{u}{c} \cos \theta}, \qquad (11)$$

где  $\theta$  — угол между скоростью заряда и направлением излучения.

В частном случае, когда скорость частицы и параллельна вектору  $\mathbf{k}_0$  (или, что то же самое, скорость частицы параллельна оси периодичности системы), получаем из (11) приведенное ранее соотношение (2). В связи с полученными формулами заметим прежде всего, что, несмотря на квантовый вывод, формулы для спектра излучения оказываются чисто классическими (в них не входит постоянная Планка h). Причина заключается в уже отмеченном предположении о малости изменения энергии заряда в процессе излучения. Из вывода очевидно, что спектр излучения не зависит от конкретного вида структуры и определяется только ее периодом.

Выражение (11) поддается простому физическому истолкованию. Действительно, в числителе формулы (11) стоит величина n ( $\mathbf{k}_0 \mathbf{u}$ ) — целое кратное «частоты прохождения» зарядом одного периода структуры; знаменатель же содержит характерный допплеровский множитель, учитывающий движение частицы. Движение частицы в периодической структуре сопровождается наведением заряда на стенках структуры. Индуцированный заряд периодически изменяется во времени с основным периодом T = d/u, равным времени прохождения частицей одной ячейки структуры. Этот периодически изменяющийся наведенный заряд, перемещающийся вместе с равномерно движущейся заряженной частицей, и является источником излучения. Из соотношений (2) и (11) видно, что на заданной частоте о может сиществовать несколько воли издучения различающихся значениями угла



из закона убывания поля равномерно движущегося источника. Для определения остальных свойств излучения, например углового или спектрального распределения, необходимо рассматривать конкретную физическую модель периодической структуры.

Первая оценка интенсивности излучения была сделана в уже обсуждавшейся работе Смита и Перселла <sup>5</sup>. Приведем здесь ход их рассуждений.

Пусть отражательная дифракционная решетка представляет собой идеально отражающую гофрированную поверхность (рис. 4). При движении заряда над такой поверхностью в ней индуцируются токи. Если поверхность не очень сильно отличается от плоской (т. е. гофрировка имеет малую глубину и большой период) и если заряд летит близко к

поверхности, то наводимые токи можно свести к движению точечного заряда-изображения, т. е. заряда той же величины и противоположного знака, расположенного симметрично источнику относительно поверхности решетки. Из рис. 4 видно, что, когда источник находится над «горбом» решетки, расстояние между источником и его изображением меньше, чем в том случае, когда источник находится над впадиной. Таким образом,



движущийся исгочник и его изображение образуют диполь, величина которого периодически меняется во времени. Излучение этого переменного диполя и отождествляется с излучением источника, движущегося над решеткой. Такое представление дает для спектра излучения полученную выше формулу (2). Интенсивность излучения можно оценить, воспользовавшись выражением для энергии излучения осциллятора с моментом p на длине волны  $\lambda$ <sup>8</sup>:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{16\pi^4 c}{3\lambda^4} p^2 \tag{18}$$

(здесь используется формула для энергии излучения покоящегося осциллятора, т. е. пока не учитывается его движение). В формуле (18) p означает амплитуду изменения дипольного момента, определяемую расстоянием от заряда до решетки. Пусть электроны проходят вблизи решетки, так что расстояние их от решетки равно десятой доле периода (такая оценка была принята в <sup>5</sup>). Тогда  $p = \epsilon d/10$ , где  $\epsilon$  — величина заряда, летящего над решеткой. Подстановка в (18) параметров, соответствующих опытам Смита и Перселла, дает для числа фотонов, излучаемых на 1 см пути над решеткой, величину порядка нескольких сотен. Такое же по порядку величины число фотонов излучается в эффекте Вавилова — Черенкова.

Простая модель дифракционной решетки, принятая Смитом и Перселлом для оценки интенсивности излучения, была использована также в работе Ишигуро и Тако<sup>9</sup>. В этой работе делается попытка построить более точно изображение источника относительно криволинейной идеально ироводящей поверхности и оценить влияние формы отражающей решетки на величину и ориентацию дипольного момента эффективного источника излучения. Как можно видеть из рис. 5, эффективный диполь имеет составляющие как вдоль оси z, так и по оси y. Пусть заряд расположен в точке с координатами (z, s). Легко видеть, что линия, соединяющая заряд с его изображением, пересекает поверхность решетки в точке ( $z + \xi$ , y ( $z + \xi$ )), где y = y (z) — уравнение поверхности решетки. Величина  $\xi$ , пропорциональная составляющей диполя по оси z, определяется из уравнения  $\xi = [(s - y) y']_{z+\xi}$ . Если решетка достаточно гладкая  $(y' \ll 1)$ , причем глубина модуляции много меньше периода, то продольной составляющей эффективного диполя, пропорциональной малой величине  $\xi$ , можно пренебречь по сравнению с вертикальной его составляющей (по



Рис. 5.

крайней мере при оценке полной интенсивности излучения). До сих пор при оценках интенсивности излучения не учитывался допплеровский сдвиг частоты эффективного осциллятора, образованного движущимся зарядом и его изображением в решетке. Можно это сделать, воспользовавшись вы-

ражением для углового распределения излучения движущейся системы зарядов<sup>8</sup>. Если рассматриваемое излучение описывается с помощью модели движущегося осциллятора, ориентированного перпендикулярно плоскости дифракционной решетки, то для углового распределения излучения получаем<sup>10</sup>

$$dI = \frac{p^{24}\pi^{3}}{c^{3}} \left(\frac{u}{d}\right)^{4} \frac{(\cos\theta - \beta)^{2}}{(1 - \beta\cos\theta)^{5}} d\theta, \tag{19}$$

где угол наблюдения в отсчитывается от плоскости решетки, а *р* — момент эффективного диполя. Момент эффективного диполя определим для от-

ражательной решетки прямоугольного профиля (с периодом d, шириной канавки a, глубиной канавки l), изображенной на рис. 6. Очевидно, если заряд движется, почти касаясь кромки решетки, то эффективный дипольный момент равен  $2\varepsilon l$ в течение времени a/u (при пролете над канавкой) и равен нулю в течение времени (d - a)/u

Рис. 6.

(при пролете над выступом). Вычисляя амплитуду первой гармоники в разложении дипольного момента в ряд Фурье:

$$p(t) = \sum p_n e^{2\pi t \frac{u}{d}nt},$$
(20)

получаем

$$|p_1| = \frac{2el}{\pi} \sin \frac{\pi a}{d} . \tag{21}$$

Эту величину следует подставить в (19) в качестве p для оценки интенсивности спектра первого порядка. Как видно, эффективный дипольный момент имеет порядок величины  $\varepsilon l$  (если считать, что sin  $\pi a/d \approx 1$ ).

Заметим, что модель «эффективного диполя» не дает экспоненциальной зависимости интенсивности излучения от прицельного параметра *b* и, следовательно, применима лишь в случае малых *b*.

В случае, когда дифракционная решетка представляет собой слабо гофрированную металлическую поверхность, для вычисления поля, возбуждаемого движущимся источником, можно воспользоваться теорией возмущений. Пусть нам известны решения уравнений поля, удовлетворяющие граничным условиям на заданных идеально проводящих поверхностях. Тогда, если поверхности слабо деформируются, оказывается возможным выразить возникающие при этом изменения поля через смещения поверхности в каждой ее точке. Соответствующая формула имеет вид <sup>11, 12</sup>

$$\Delta H = \frac{i\omega}{4\pi} \int_{S_0} \left( E_n^0 E_n' + H_t^0 H_t' \right) h\left( S \right) dS.$$
<sup>(22)</sup>

Здесь  $\Delta H$  — изменение поля, возникающее при смещении поверхности  $S_0$  на величину h(S);  $E^0$ ,  $H^0$  — поля, удовлетворяющие граничным условиям на неискаженной поверхности  $S_0$ ; E', H' — поля вспомогательного единичного диполя, расположенного в точке наблюдения. Индексы n и t означают компоненты поля, соответственно нормальные и тангенциальные к неискаженной поверхности  $S_0$ . Вычисление интенсивности излучения с помощью теории возмущений было проведено в работе В. Н. Парыгина <sup>13</sup>. В качестве поверхности  $S_0$  удобно выбрать плоскость. Пусть над идеально проводящей плоскостью, расположенной при y = 0, движется плоский модулированный электронный поток, плотность тока в котором задается формулой

$$j = j_0 \delta\left(y - b\right) e^{i\frac{\omega}{u}(z - ut)} \tag{23}$$

(b - paccтояние от потока частиц до поверхности металла). В этой задачеполе, удовлетворяющее заданным граничным условиям на плоскости<math>y = 0, отыскивается без труда. Теперь деформируем поверхность  $S_0$  по гармоническому закону, т. е. в каждой заданной точке *z* сместим поверхность на величину

$$h(z) = h \sin \frac{2\pi}{d} z.$$
 (24)

Тогда по формуле (22) можно найти часть поля, возбуждаемую при движении плоского модулированного пучка над гофрированной поверхностью:

$$\Delta H = \frac{2\pi j_0 h}{c} \frac{\frac{\omega}{u} \left(\frac{\omega}{u} + \frac{2\pi}{d}\right) - \frac{\omega^2}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{u} + \frac{2\pi}{d}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} \exp\left\{-\sqrt{\frac{\omega^2}{u^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}b - \left[\sqrt{\left(\frac{\omega}{u} + \frac{2\pi}{d}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}y + i\left(\frac{\omega}{u} + \frac{2\pi}{d}\right)z - i\omega t\right] - \frac{2\pi j_0 h}{c} \frac{\frac{\omega}{u} \left(\frac{\omega}{u} - \frac{2\pi}{d}\right) - \frac{\omega^2}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{u} - \frac{2\pi}{d}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} \exp\left\{-\sqrt{\frac{\omega^2}{u^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}b + i\left[\sqrt{\frac{\omega^2}{u^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}z + i\left[\sqrt{\frac{\omega^2}{u^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}z + i\left(\frac{\omega}{u} - \frac{2\pi}{d}z - \frac{\omega^2}{c^2}z\right)\right]\right\}.$$
 (25)

Первое слагаемое в полученном выражении для возбуждаемого поля определяет поверхностную волну, распространяющуюся вдоль гофрированной поверхности несколько медленнее волны тока источника. Этот член не может описывать излучающееся поле, так как он экспоненциально убывает с ростом у. Второй член при определенных условиях может описывать излученную волну. Излучение возможно, если скорость волны тока и период структуры удовлетворяют неравенствам (15), где следует взять m = 1. Таким образом, формула (25) описывает спектр излучения первого порядка. Высшие порядки в спектре излучения не могут быть описаны в рассматриваемом приближенном (линейном по возмущению поверхности) расчете. Как видно из выражения для возбуждаемого поля, интенсивность излучения резко (экспоненциально) убывает с ростом прицельного параметра. В случае, когда  $k \approx \pm \left(\frac{\omega}{u} - \frac{2\pi}{d}\right)$  (т. е. вблизи границ зоны излучения первой пространственной гармоники поля), амплитуда поля, определяемого согласно формуле (25), сильно возрастает и, таким образом, пределы применимости теории возмущения нарушаются.

В недавно появившейся работе <sup>14</sup> задача об излучении источников, движущихся вблизи открытой периодической структуры с профилем весьма общего вида, также рассматривается на основе теории возмущений.

## Приближение Кирхгофа

При выводе формулы (2) для спектра излучения заряда над дифракционной решеткой были использованы простые соображения, основанные на принципе Гюйгенса. Естественно попытаться применить те же соображения и к расчету интенсивности излучения. Это было сделано в работе <sup>15</sup> для случая плоской прозрачной дифракционной решетки. Эта решетка, в отличие от отражательной, состоит из параллельных металлических полос, лежащих в одной плоскости и разделенных щелями (см. рис. 2). Пусть ширина щели решетки равна a, тогда ширина полосы есть d - a, где d — период решетки. Согласно принципу Гюйгенса, при движении заряда над решеткой поле в пространстве под решеткой определяется значениями поля на щелях в плоскости решетки. Если отвлечься от векторного характера электромагнитного поля, то значения поля под решеткой связаны с его значениями на щелях известным соотношением Гюйгенса — Кирхгофа, которое широко используется в скалярной теории дифракции:

$$g(x, y, z) = \int \frac{kg_0(x', 0, z')}{2\pi i R} e^{ihR} dS_n.$$
 (26)

Здесь  $k = \omega/c$ ;  $g_0$  и g — спектральные компоненты функций поля, отвечающие частоте  $\omega$ ; R — расстояние между точкой наблюдения и точкой интегрирования;  $dS_n$  — произведение элемента площади dS на косинус угла между лучом падающего света и нормалью к поверхности:

$$dS_n = dS\left(\mathbf{n}\,\frac{\mathbf{k}}{k}\right)\,,\tag{27}$$

k — волновой вектор падающей на отверстие волны. Интегрирование проводится по «просветам» (щелям) в плоскости решетки. При этом считается, что поле g в отверстиях на экране определяется тем же выражением, что и в отсутствие экрана. Пусть над решеткой на расстоянии l от нее параллельно оси z движется с постоянной скоростью и частица с зарядом є. Поле свободно движущегося заряда будем описывать скалярной функцией

$$g_0(x, y, z) = A_{z\omega}(x, y, z), \qquad (27')$$

где  $A_{z\omega}$  — компонента Фурье составляющей вектор-потенциала по оси z. В плоскости решетки (y=0)  $A_{z\omega}$  имеет следующий вид:

$$g_0(x, 0, z) = A_{z\omega}(x, 0, z) = \frac{i\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \int \frac{dk_x}{\sigma(k_x, \omega)} e^{i\left(\sigma b + k_x x + \frac{\omega}{u}z\right)}, \quad (28)$$

где

$$\sigma(k_x, \omega) = \sqrt{(\beta^2 - 1)\frac{\omega^2}{u^2} - k_x^2} = k_y$$
(29)

— проекция волнового вектора падающей волны на ось y. Подставим выражение (28) для  $g_0(x, 0, z)$  в формулу (26). Тогда векторный потенциал

дифрагированного поля будет иметь следующий вид (в волновой зоне — на больших расстояниях  $R_0$  от решетки):

$$g(x, y, z) = \frac{\epsilon a}{c} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \frac{\sin \frac{a}{2} \left(\frac{\omega}{u} - k_z\right)}{\frac{a}{2} \left(\frac{\omega}{u} - k_z\right)} e^{i\sigma b + i \left(\frac{\omega}{u} - k_z\right) \frac{a}{2}} \sum_{n = -\infty}^{\infty} \delta\left[\left(\frac{\omega}{u} - k_z\right) d - 2\pi n\right].$$
(30)

Наличие б-функций в формуле (30) соответствует уже обсужденному нами ранее соотношению (2), которому должно удовлетворять излучение заряда, летящего над решеткой. Действительно, так как  $k_z = \frac{\omega}{c} \cos \theta$ , условие обращения в нуль аргумента б-функции эквивалентно соотношению (2); для остальных направлений излучение данной частоты отсутствует.

Зная вектор-потенциал поля излучения, можно вычислить энергию излучения, приходящуюся на частотный интервал  $\omega$ ,  $\omega - d\omega$  и на телесный угол  $d\Omega$ <sup>8</sup>:

$$dW_{\omega} = ck^2 |g|^2 R_0^2 \sin^3 \theta \, d\varphi \, d\omega \tag{31}$$

( $\varphi$  — угол между отрицательным направлением оси *y* и проекцией волнового вектора на плоскость *x*, *y*). В этой формуле величина *g* определяется соотношением (30). После несложных преобразований получаем

$$dW_{\omega} = \frac{\varepsilon^{2}a^{2}k^{2}}{2\pi c} \frac{uT}{d} \frac{\sin^{2}\frac{a\omega}{2u}\left(1-\beta\cos\theta\right)}{\left[\frac{a\omega}{2u}\left(1-\beta\cos\theta\right)\right]^{2}} e^{-2b\frac{\omega}{u}\sqrt{1-\beta^{2}\left(1-\sin^{2}\theta\sin^{2}\theta\sin^{2}\phi\right)}} \times \sum_{n} \delta\left[\frac{\omega}{u}\left(1-\beta\cos\theta\right)d - 2\pi n\right]\sin^{3}\theta \,d\theta \,d\psi \,d\omega, \quad (32)$$

где суммирование ведется по тем значениям индекса *n*, которые отвечают излучаемым спектральным линиям (см. неравенство (13)), *T* — время пролета заряда над решеткой.

Можно получить спектральное распределение энергии излучения, соответствующее *n*-й линии, в интервале углов  $d\varphi$ , проинтегрировав выражение (32) по углу  $\theta$ :

$$dW_{n,\omega} = \frac{\varepsilon^2}{2\pi c} kL \left(\frac{\sin n\pi \frac{a}{d}}{n\pi}\right)^2 \times \\ \times \exp\left\{-2bk \sqrt{\gamma^2 + \left[1 - \left(\frac{1}{\beta} - \frac{2\pi n}{kd}\right)^2\right] \sin^2 \varphi}\right\} d\omega d\varphi.$$
(33)

Здесь L-длина дифракционной решетки.

Интегрируя (32) по частотам, получим угловое распределение потерь для *n*-й спектральной линии:

$$dW_{n}(\theta, \phi) = \frac{2\pi\varepsilon^{2}a^{2}}{c^{3}} \frac{uT}{d} \left(\frac{u}{d}\right)^{3} \left(\frac{\sin n\pi \frac{a}{d}}{\frac{\pi a}{d}}\right)^{2} \times \exp\left\{-\frac{4\pi nb}{d\left(1-\beta\cos\theta\right)}\sqrt{1-\beta^{2}\left(1-\sin^{2}\theta\sin^{2}\phi\right)}\right\} \frac{\sin^{3}\theta \,d\theta \,d\phi}{\left(1-\beta\cos\theta\right)^{3}}.$$
 (34)

Из полученных формул видно, что интенсивность излучения экспоненциально убывает по мере удаления источника от плоскости решетки. При этом показатель спадания интенсивности пропорционален номеру гармоники излучения.

Подсчет излучения для рассматриваемой модели плоской прозрачной решетки можно также провести следующим наглядным образом. Движущийся под решеткой заряд будет «виден» наблюдателю, расположенному над решеткой, лишь в те промежутки времени, когда он находится над щелями. Поэтому наблюдателю движение заряда будет казаться неравномерным: для наблюдателя заряд появляется на краю щели и исчезает на другом ее краю через время a/u, а затем через время (d - a)/u появляется над следующей щелью. Ток, связанный с зарядом, будет тогда отличен от нуля для значений времени t, определяемых неравенством

$$\frac{md}{u} \leqslant t \leqslant \frac{md+a}{u} , \tag{35}$$

где *m* — любое целое число, положительное или отрицательное. Излучение заряда, движущегося по такому закону в пустоте, можно определить, воспользовавшись известной формулой <sup>8</sup>:

$$\mathbf{A}_{\omega} = \frac{ee^{ikR_0}}{2ncR_0} \int \mathbf{u}(t) \ e^{i\left[\omega t - \mathbf{kr}(t)\right]} dt, \tag{36}$$

где  $A_{\omega}$  — компонента Фурье вектор-потенциала,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}$  (t) — закон, определяющий движение точечного заряда,  $\mathbf{u}$  (t) =  $d\mathbf{r}/dt$ .

Если вычислить интеграл (36) по интервалам, определяемым неравенством (35), и с помощью полученного выражения определить интенсивность излучения, мы придем к выражениям, которые отличаются от формул (32) —(35) только отсутствием экспоненциального множителя. Таким образом, если пролетный параметр b мал в сравнении с абсолютной величиной 1/о (см. формулу (29)), то оба метода дают одинаковые результаты (величина о определяет расстояние, на котором поле источника затухает в е раз). Если же пролетный параметр b велик, то формула (36) неприменима, так как она не учитывает дифракционных эффектов на краях полос. Эти эффекты приводят к тому, что заряд как бы становится «виден» наблюдателю в момент времени более ранний, чем md/u, и пропадает из поля зрения в момент времени более поздний, чем (md + a)/u. Таким образом, из-за дифракции на ребрах цолос возникает неопределенность выбора пределов интегрирования в (36). По мере удаления траектории заряда от решетки эта неопределенность растет, и расчет характеристик излучения с использованием выражения (36) становится неприменимым.

На основе результатов, полученных для точечного заряда, легко получить решение двумерной задачи, когда источником поля служит бесконечная однородно заряженная нить или модулированная плоская электронная волна. В этом случае поле излучения определяется формулой

 $g(y, z) = \frac{k}{2} \int_{\Sigma} g(0, z') H_{0}^{(1)}(kR') dz', \qquad (37)$ 

где

$$R' = \sqrt{y^2 + (z - z')^2}.$$

В качестве функции g (0, z) следует взять

$$A_{z\omega}(x, 0, z) = \frac{\varepsilon}{\omega \gamma} e^{-k\gamma b + i \frac{\omega}{u} z}, \qquad (38)$$

где є — погонная плотность заряда линейного источника. Выражения (37) и (38) получаются из (26) и (28) соответственно интегрированием по поперечной координате x.

Векторный потенциал дифрагированного поля в двумерной задаче принимает вид

$$A_{z\omega}(y, z) = \epsilon a \sqrt{\frac{2\pi}{\omega c}} \frac{\sin \frac{ka}{2\beta}(1-\beta\cos\theta)}{\frac{ka}{2\beta}(1-\beta\cos\theta)} \frac{e^{ikR_0+i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{R_0}} \times e^{-k\gamma b+i\frac{ka}{2\beta}(1-\beta\cos\theta)} \sum_n \delta \left[ d\left(\frac{\omega}{u} - k\cos\theta\right) - 2\pi n \right].$$
(39)

С помощью этого выражения для погонных потерь на излучение, сонровождающее пролет заряженной нити вблизи плоской решетки, получаем

$$dW_{\omega,n} = ck^{2} |A_{z\omega}|^{2} \sin^{2} \varphi R \, d\varphi = \varepsilon^{2} ka \, \frac{u}{c} \frac{a}{d} T \sin^{2} \theta \left[ \frac{\sin \frac{ka}{2\beta} (1 - \beta \cos \theta)}{\frac{ka}{2\beta} (1 - \beta \cos \theta)} \right]^{2} \times e^{-2k\gamma b} \sum_{n} \delta \left[ d \left( \frac{\omega}{n} - \cos \theta \right) - 2\pi n \right] d\theta. \quad (40)$$

Приведенные формулы получены с помощью скалярной теории дифракции, в которой поле описывается одной скалярной функцией. Однако скалярная функция не дает полного описания векторного электромагнитного поля. В частности, скалярная теория дифракции оказывается недостаточной для определения поляризации поля излучения заряда, движущегося над дифракционной решеткой. Предыдущее приближенное рассмотрение можно обобщить, применив для вычисления излучаемого зарядом поля векторную электродинамическую формулировку принципа Гюйгенса — Кирхгофа. Согласно этой формулировке, рассеянное поле описывается двумя векторными функциями A<sup>e</sup> и A<sup>m</sup>, определяемыми «падающими» на отверстие е экрана электрическим и магнитным полями E<sup>0</sup>, H<sup>0</sup>:

$$\mathbf{A}^{e} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{e^{ikR}}{R} [\mathbf{n}\mathbf{H}^{0}] dS, \quad \mathbf{A}^{m} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{e^{ikR}}{R} [\mathbf{n}\mathbf{E}_{0}] dS, \quad (41)$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль к плоскости отверстия,  $\Sigma$  — площадь отверстия. Выражение (41) заменяет в данном случае соответствующее скалярное соотношение (26).

Поля E и H определяются через  $A^e$  и  $A^m$  по известным формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{ik} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}^{e} + k^{2} \mathbf{A}^{e}) - \operatorname{rot} \mathbf{A}^{m},$$
  

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}^{e} - \frac{1}{ik} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}^{m} + k^{2} \mathbf{A}^{m}).$$
(42)

Если в формулы (41) подставить значения поля равномерно движущегося заряда, а за поверхность, по которой производится интегрирование, принять щели решетки, мы получим из (42) поле излучения. Соответствующие расчеты были предприняты В. И. Гайдуком и Б. М. Болотовским.

Для компонент векторов  $A^e$  и  $A^m$  вычисления приводят к следующим формулам для отличных от нуля составляющих  $A^e$  и  $A^m$ :

$$\begin{array}{l}
 A_{z}^{e} = -i\beta B, \\
 A_{x}^{m} = \frac{\omega}{u\sigma} \left(1 - \beta^{2}\right) B, \\
 A_{z}^{m} = \frac{k_{x}}{\sigma} B,
\end{array}$$
(43)

где о определяется формулой (29), а

$$B = \frac{\varepsilon}{u} \frac{e^{i\hbar R}}{R} e^{-\sigma b + i\frac{\omega}{u}\frac{a}{2}(1-\beta\cos\theta)} \times \frac{\sin\frac{\omega}{u}(1-\beta\cos\theta)\frac{a}{2}}{\frac{\omega}{u}(1-\beta\cos\theta)} \sum_{n} \delta\left[\frac{\omega}{u}(1-\beta\cos\theta)d + 2\pi n\right]. \quad (44)$$

Формулы (43), (44) определяют спектральные компоненты векторов  $A^e$ и  $A^m$ , отвечающие частоте  $\omega$ . Поля Е и Н выражаются через  $A^e$  и  $A^m$ по формулам (42). Для энергии излучения получаем следующее выражение:

$$dW_{\omega} = \frac{\varepsilon^{2}a^{2}}{8\pi c} k^{2} \frac{uT}{d} \left[ \frac{\sin\frac{a\omega}{2u} (1-\beta\cos\theta)}{\frac{a\omega}{2u} (1-\beta\cos\theta)} \right]^{2} e^{-2b \frac{\omega}{u} \sqrt{1-\beta^{2} (1-\sin^{2}\theta\sin^{2}\theta)}} \times \\ \times \left\{ \sin^{2}\theta + \frac{1}{\beta^{2}} \frac{\beta^{2}\sin^{2}\theta\cos^{2}\varphi + (1-\beta^{2}) - \sin^{2}\theta\cos^{2}\varphi \left[\beta\cos\theta - (1-\beta^{2})\right]^{2}}{1-\beta^{2} (1-\sin^{2}\theta\cos^{2}\varphi)} \right\} \times \\ \times \sum \delta \left[ \frac{\omega}{u} d (1-\beta\cos\theta) - 2\pi n \right] \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, d\omega.$$
(45)

Как видно из формул (43)—(45), векторная формулировка принципа Гюйгенса указывает на более сложный характер поляризации излучения и углового распределения его. Однако по порядку величины в значительной области углов интенсивность излучения по скалярной теории оказывается такой же, как и по векторной.

В работе <sup>16</sup> для вычисления интенсивности излучения заряженной частицы, движущейся возле дифракционной решетки, были использованы сходные допущения.

## III. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ИСТОЧНИКА ВБЛИЗИ РЕШЕТКИ

Исследованные выше модели дифракционных решеток были близки к реальным конфигурациям, но не допускали строгого рассмотрения. Поэтому в основу решения приходилось в каждом случае класть различные физические предпосылки, упрощающие расчет. Большой интерес представляет отыскание точных решений задачи, позволяющих полнее выяснить картину явления и оценить пределы применимости полученных приближенных результатов. Такие решения удается получить лишь в редких случаях, обычно при сильной идеализации модели дифракционной решетки.

#### 1. Излучение модулированного электронного потока вблизи импедансной плоскости

Простейшая из задач указанного выше типа была рассмотрена Хесселем <sup>17</sup>. Дифракционная решетка является поверхностью, оптические свойства которой меняются от точки к точке. Можно охарактеризовать свойства этой поверхности, задав в каждой точке отношение тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей:

$$\frac{E_t}{H_t} = \zeta. \tag{46}$$

390

Величина ζ называется импедансом поверхности. Задание поверхностного импеданса удобно как в случае хорошо проводящих тел, так и для аппроксимации оптических свойств неровных поверхностей, если характерный период неровностей мал по сравнению с длиной волны электромагнитного поля. В работе <sup>17</sup> дифракционная решетка аппроксимировалась плоскостью у == 0 с периодически меняющимся чисто реактивным импедансом

$$\zeta(z) = -iX_s \left(1 + M\cos\frac{2\pi}{a}z\right), \qquad (47)$$

где M и a — соответственно глубина модуляции и период ее,  $X_s$  — величина постоянной составляющей импеданса. Электромагнитное поле, возбуждаемое плоским модулированным электронным пучком с распределением плотности заряда по закону

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \left[ \mathbf{1} + \alpha \cos \frac{k}{\beta} (z - ut) \right] \delta(y - b),$$

расположенным параллельно описанной импедансной плоскости, может быть представлено в виде суперпозиции пространственных гармоник:

$$H(y,z) = e^{i\frac{\hbar}{\beta}z} \sum_{h=-\infty}^{\infty} I_n e^{i\frac{2\pi}{a}nz} e^{i\sqrt{\frac{\hbar^2}{h^2-\left(\frac{\hbar}{\beta}+\frac{2\pi}{a}n\right)^2y}}.$$
 (48)

Каждая из парциальных плоских волн, в зависимости от соотношения между фазовой скоростью волны модуляции  $\beta = u/c$  и периодом изменения импеданса, либо имеет характер поверхностной волны, затухающей экспоненциально при удалении

от плоскости  $y = \bar{0}$ , либо распространяется без затухания. В последнем случае направление распространения плоской гармоники связано с периодом решетки, частотой и скоростью пучка ранее полученными соотношениями (1), (12). Требуя, чтобы полное поле удовлетворяимпедансным граничным ЛO условиям (46), (47) на поверхности «решетки», получим систему рекуррентных уравнений для амплитуд плоских пространственных гармоник I<sub>n</sub>. Из этой системы уравнений для амплитуд  $I_n$  получаются выражения в виде непрерывных дробей, которые поддаются численному анализу. Исследование показывает, что зависимость  $I_n$  от переменной k/β при заданном значении параметра ka имеет резко выраженные резонансные максимумы. Типичный пример ре-



зонансной зависимости коэффициентов  $I_n$  показан на рис. 7, взятом из работы <sup>17</sup>. На графике изображены две амплитуды  $I_n$ , отвечающие n = -1 и n = -2. При выбранных значениях параметров ( $ka = 1.6\pi$ , M = 0.2,  $X_s = 1$ ,  $ka/4.64\pi < \beta < ka/3.52\pi$ ) амплитуда  $I_{-1}$  соответствует

затухающей волне, а амплитуда  $I_{-2}$  определяет незатухающую волну излучения. Видно, что обе амплитуды имеют резкий максимум при  $kd/\beta = 4,26\pi$ .

Характерное поведение кривых  $I_n$   $(k/\beta)$  вблизи максимумов аналогично изломам спектральных зависимостей коэффициента отражения плоской однородной волны от периодической ленточной решетки (см. например, § 52 в <sup>18</sup>). Подобные резкие контрасты в распределении интенсивности по дифракционному спектру впервые наблюдались Вудом и иногда называются «аномалиями Вуда». Качественное рассмотрение этого эффекта было проведено в <sup>39</sup>, где резкое изменение интенсивности в дифракционном спектре было связано с возникновением новых дифракционных спектральных линий. Аналогичным образом соотношение величины волнового числа k и скорости источника  $\beta$ , при котором происходит резкое убывание интенсивности излучения наблюдаемой пространственной гармоники (излом кривой  $I_n\left(\frac{k}{\beta}\right)$ ), соответствует условию «зарождения» новой излучающейся пространственной гармоники.

2. Излучение заряженной нити и точечного заряда, пролетающих вблизи периодической структуры из идеально проводящих полуплоскостей

Еще одной простой моделью дифракционной решетки, допускающей точное аналитическое исследование, является периодическая система равноотстоящих идеально проводящих тонких полуплоскостей (рис. 8).



Электромагнитное поле излучения источника при пролете вблизи такой структуры может быть определено методом Винера — Хопфа — Фока<sup>18, 19</sup>. Подробное рассмотрение этого метода содержится в обзоре<sup>2</sup> (см. также работы <sup>20-23</sup>). В том же обзоре описано отыскание решения для случая, когда источником излучения служит однородно заряженная нить, движущаяся вдоль структуры. В работе<sup>22</sup> получено также аналитическое решение задачи в случае, когда источником излучения является

точечная заряженная частица. Ниже мы остановимся в основном на анализе полученных количественных результатов \*).

1) В случае, когда источником является однородно заряженная нить (или плоский модулированный пучок электронов), электромагнитное поле полностью описывается единственной отличной от нуля составляющей магнитного поля, определяемой следующими выражениями:

$$H_{x\omega} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} R_m \cos \frac{m\pi}{a} z e^{iw_m y} & \text{при } y > 0, \\ H_{x\omega}^0 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_m e^{i\left(\frac{\omega}{u} - \frac{2\pi}{a}m\right)z + i\hat{w}_m y} & \text{при } y < 0. \end{cases}$$
(49)

Поле в каждом из плоских волноводов, образующих структуру (y > 0,  $an \ll z \ll a (n + 1)$ ), состоит из набора волноводных гармоник, распро-

<sup>\*)</sup> Количественные результаты, описанные в этом и следующих разделах, получены Е. В. Авдеевым и Г. В. Воскресенским.

страняющихся вглубь от открытого конца. Коэффициенты возбуждения  $R_m$  этих собственных волноводных волн определяются формулами

$$R_{m} = \alpha_{m} (-1)^{mn} \frac{2\varepsilon k\gamma e^{-k\gamma b + i\frac{\omega}{u}an}}{ua(1+i\gamma)} \frac{L_{1}(w_{m})}{L_{1}(ik\gamma)} \frac{(k+w_{m})\left[1-(-1)^{m}e^{i\frac{k}{\beta}a}\right]}{w_{m}(w_{m}^{2}+k^{2}\gamma^{2})};$$

$$\alpha_{m} = \begin{cases} -1/2 & \text{при} \quad m=0, \\ 1 & \text{при} \quad m \ge 1, \end{cases} \quad \gamma = \frac{\sqrt{1-\beta^{2}}}{\beta}, \quad w_{m} = \sqrt{k^{2}-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^{2}} \end{cases}$$
(50)

- постоянные распространения волноводных гармоник.

Входящие в (50) функции L<sub>1</sub> (w) и связанные с ними функции L<sub>2</sub> (w) выражаются явно в виде бесконечных произведений по формулам \*)

$$L_{1,2}(w) = \sqrt{\frac{\gamma^2}{2} \frac{ka \sin ka}{\cos ka - \cos \frac{ka}{\beta}}} e^{\mp i \frac{wa}{\pi} \ln 2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 \pm \frac{w}{w_m}\right)}{\left(1 \pm \frac{w}{\hat{w}_m}\right)\left(1 \pm \frac{w}{\hat{w}_{-m}}\right)}.$$
 (51)

Верхний знак в сомпожителях соответствует первому индексу определяемой функции, нижний знак — второму индексу.

Поле в свободном пространстве представляется в виде суммы собственного поля источника  $H^{\mathfrak{s}}_{x\omega}$ , движущегося в пустоте, и поверхностной волны с амплитудой  $Q_0$ , распространяющейся вдоль структуры синхронно с источником, а также суперпозицией гармоник с амплитудами  $Q_m$ и с волновыми векторами

$$k_{zm} = \hat{v}_m = \frac{\omega}{u} - \frac{2\pi}{a} m, \quad k_{ym} = \hat{w}_m = \sqrt{k^2 - k_{zm}^2}.$$
 (50a)

Амплитуды гармоник поля в свободном пространстве выражаются формулами

$$Q_{0} = -\frac{\varepsilon e^{-k\gamma b}}{u^{2}(1+i\gamma)^{2}} \frac{L_{1}(-ik\gamma)}{L_{1}(ik\gamma)},$$

$$Q_{m} = \frac{ik\gamma \varepsilon e^{-k\gamma b}}{u(1+i\gamma)L_{1}(ik\gamma)} \frac{1}{\hat{w}_{m}} \frac{\frac{2\pi}{a}m - \frac{\omega}{u}}{L_{2}(-\hat{w}_{m})} \frac{1}{k + \hat{w}_{m}}$$

$$(m = \pm 1, \pm 2, \pm 3).$$
(506)

В зависимости от значения проекции волнового вектора  $k_{ym} = \hat{w}_m$  гармоники могут иметь характер поверхностных (экспоненциально затухающих при удалении от края структуры) волн или (при действительных  $\hat{w}_m$ ) представлять излучаемые плоские волны. Требование реальности  $\hat{w}_m$  совпадает с полученными выше условиями (12), (15).

Полные потери энергии на излучение равномерно движущейся заряженной нити можно определить, вычисляя реакцию излучения, т. е. работу излучаемого поля, совершаемую над источником на единице пути \*\*):

$$\frac{dW}{dz} = -2\operatorname{Re}\int_{0}^{\infty} \varepsilon E_{z\omega} \left(z = ut, \ y = -b\right) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{0}^{\infty} \frac{dW_{\omega}}{dz} d\omega, \qquad (52)$$

2 УФН, т. 94, вып. 3

<sup>\*)</sup> Здесь мы пользуемся случаем, чтобы исправить неточность, допущенную при определении функций  $L_{1,2}(w)$  в  $^{20-23}$ . Введение экспоненциальных множителей exp [ $\mp i \frac{wa}{\pi} \ln 2$ ] обеспечивает правильное асимптотическое поведение функций. Кроме того, запись функций  $L_{1,2}(w)$  в более симметричном виде (51) удобнее для проведения расчетов.

<sup>\*\*)</sup> Выражения (52), (53) для двумерного источника определяют погонные потери, относящиеся к единице длины нити.

где  $\varepsilon$  — погонная плотность заряда нити. Для спектральной плотности потерь при пролете источником одного периода структуры ( $0 \ll z \ll a$ ) согласно (49), (51) и (52) получим

$$W_{\omega}^{\text{полн}} = \frac{2\varepsilon^2 \gamma a}{u\beta} e^{-2k\gamma b} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{(1+i\gamma)^2} \frac{L_1(-ik\gamma)}{L_1(ik\gamma)} \right\} = \\ = -\frac{4\varepsilon^2 a (1-\beta^2)}{c |L_1(ik\gamma)|^2} e^{-2k\gamma b} \left\{ \operatorname{Re} A + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \operatorname{Im} A \right\}, \quad (53)$$

где величина А представляется в виде конечных произведений:

$$A = \prod_{n} \frac{k\gamma + iw_{n}}{k\gamma - iw_{n}} \prod_{m} \frac{k\gamma - i\hat{w}_{m}}{k\gamma + i\hat{w}_{m}}, \qquad (54)$$

причем множители содержат лишь чисто действительные (при данных значения частоты и скорости) волновые числа  $w_n$  и  $\hat{w}_m$ . В различных



частных случаях выражение (53) может сильно упрощаться. Так, в случае, когда в волноводной ячейке может распространяться лишь волна типа TEM ( $ka \ll \pi$ ), а излучение в свободное пространство происходит лишь

на первой пространственной гармонике, спектральная плотность потерь на периоде принимает вид

$$W_{\omega}^{\text{полн}} = \frac{\epsilon^2 a}{\pi c} \frac{1 - \beta^2}{|L_1(\iota k\gamma)|^2} e^{-2k\gamma b} \frac{(\hat{w}_1^2 - k^2\gamma^2) - (1 - \gamma^2)k\hat{w}_1}{\frac{\pi}{a} - \frac{k}{B}}.$$
 (53')

Был проведен количественный анализ зависимости сиектральной плотности потерь от скорости нити  $\beta$  и частоты излучения при различных значениях прицельного параметра. На рис. 9 приведены для плюстрации кривые зависимостей  $W_{\omega}^{\text{полн}} / \frac{4\epsilon^2 a}{c}$  от безразмерной частоты  $q = \frac{ka}{2\pi} \equiv \frac{a}{\lambda}$ для трех значений скорости  $\beta$  (0,2; 0,6 и 0,95) при b/a = 0 и 0,1. Отметим, что реакция излучения обращается в нуль при условии  $q = n\beta$ . Это соответствует отсутствию потерь на излучение на частотах, кратных «частоте прохождения» периода структуры (см. также<sup>2</sup>, стр. 244).

В случае, когда параметры задачи удовлетворяют соотношению  $2\pi q\gamma b/a \ge 1$ , спектральное распределение потерь можно довольно точно описать лишь экспоненциальным множителем в (53). При этом можно, интегрируя по частотам, получить очень простое приближенное выражение для полных потерь энергии заряженной нитью:

$$W = 2\epsilon^2 \beta^2 \gamma \frac{a}{b + \frac{\ln 2a}{\pi}} \equiv 2\epsilon^2 \beta^2 \gamma \frac{a}{b_{\pi p \mu B}} .$$
 (55)

Полученная приближенная оценка справедлива в двух предельных случаях. Для малых скоростей нити ( $\gamma \approx 1/\beta$ ) излучение сосредоточено в основном в области низких частот; при этом полные потери пропорциональны

скорости источника. Для ультрарелятивистских скоростей нити ( $\beta \approx 1$ ) излучение занимает широкий диапазон, вплоть до очень высоких частот; при этом полные потери убывают обратно пропорционально энергии источника. В обоих указанных случаях полные потери обратно пропорциональны прицельному параметру источника ( $b_{np}/a$ ). На рис. 10 изображены зависимости полных потерь источника от скорости для двух зпачений,  $b_{np}/a = 1/3$  и 2/3, прицельного параметра ( $b_{np}$  — приведен-



ное значение b). Приводимые кривые получены интегрированием по частотам точного выражения для потерь (53). Видно, что начальный и конечный участки кривых на рис. 10 хорошо описываются приближенным выражением (55).

Потери на излучение в свободное полупространство определим по потоку энергии через плоскость, параллельную краю структуры (x, z)и расположенную пиже трасктории источника (y < -b). Вычисляя поток вектора Пойнтинга через полосу ширины *a* на этой плоскости, получим искомую спектральную плотность потерь на периоде структуры:

$$W_{\omega}^{cb} = -\frac{4\varepsilon^2 a}{c} \frac{(1-\beta^2)}{|L_1(\iota k\gamma)|^2} e^{-2k\gamma b} \frac{q}{\beta^2} \sum_m \frac{\hat{w}_m}{1-\frac{2q}{m\beta}} \frac{q-\hat{w}_m}{q+\hat{w}_m} A_m(q,\beta), \quad (56)$$
$$A_m = \prod \prod \frac{\hat{w}_m - w_n}{q+\hat{w}_m} \frac{\hat{w}_m + \hat{w}_l}{q+\hat{w}_m}.$$

$$u = \prod_n \prod_l \frac{w_m - w_n}{\hat{w}_m + w_n} \frac{w_m + w_l}{\hat{w}_m - \hat{w}_l}.$$

Суммирование в (56) распространяется лишь на значения индекса m, соответствующие излучаемым пространственным гармоникам, а функция  $A_m$  (q,  $\beta$ ) аналогична по характеру величине A в формуле (53). Приведем также простое выражение для потерь в случае, когда может излучаться лишь первая гармоника ( $\beta/(1 + \beta) \ll q \ll 1/2$ ):

$$W_{\omega}^{\text{CB}\,\text{f}} = -\frac{4\epsilon^2 a\pi\gamma^2}{c \,|\,L_1\,(ik\gamma)\,|^2} \, e^{-2k\gamma b} \, \frac{k \hat{w}_1\,(k-\hat{w}_1)^2}{\left(\frac{k}{\beta} - \frac{2\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi}{a} - \frac{k}{\beta}\right)} \,. \tag{56'}$$

Свойства излучения в свободное полупространство можно проиллюстрировать приведенными на рис. 11 спектральными распределениями интенсивности первой гармоники при различных скоростях источника



 $(\beta = 0.15; 0.3; 0.4; 0.6; 0.8)$ . Излучение, как видно, сосредоточено в двух частотных областях, причем интенсивность «высокочастотного лепестка» заметно убывает с ростом скорости. Кроме того, с ростом скорости источника область излучения смещается в сторону больших частот (особенно сильно смещается «высокочастотный лепесток»). При этом асимметрия излучения вперед — назад становится еще более явной. На рис. 12 изображены в полярных координатах кривые углового распределения интенсивности излучения на первой пространственной гармонике. При малой скорости источника угловое распределение излучения описывается гладкой двухлецестковой диаграммой направленности. С ростом скорости

нити, в соответствии с усложнением структуры поля излучения, появляется изрезанность лепестков диаграммы направленности, причем каждый

провал соответствует началу возбуждения очередной волноводной гармоники.

Аналогично определению излучения в свободное полупространство можно вычислить поток энергии, излучаемой в волноводную ячейку периодической структуры. При этом, как можно убедиться, выполняется уравнение баланса полных потерь на излучение и работы поля излучения над источником, что служит проверкой правильности полученных аналитических выражений для потерь.

2) Если источником излучения является не заряженная нить, а точечный заряц, то все компоненты векторов электромагнитного поля отличны от нуля. В этом случае удается 22 математическую формулировку задачи свести к решению системы четырех «парных» интегральных уравнений для неизвестных распределений токов на пластинах замедляющей структуры. Не останавли-



Рис. 12. Диаграммы направленности излучения первой пространственной гармоники для двух значений прицельного параметра:  $b/a = 0_{-}$  сплошная кривая, b/a = 0, 1-штриховая.

Направление движения источника показано стрелкой. a)  $\beta = 0.8$ ; b)  $\beta = 0.6$ ; e)  $\beta = 0.4$ ; e)  $\beta = 0.15$ .

ваясь на отыскании решения, приведем лишь окончательные выражения для компонент поля излучения в свободное пространство вдали от края периодической замедляющей структуры:

$$E_{\mathbf{x}\omega}(\mathbf{r}) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi r} u} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-b\sqrt{h^{2}\gamma^{2} + \hat{w}_{m}^{2}\sin^{2}\phi}}}{L_{1}\left(i\sqrt{k^{2}\gamma^{2} + \hat{w}_{m}^{2}\sin^{2}\phi}\right)} \frac{\hat{w}_{m}^{1/2}\sin\phi}{L_{2}\left(\hat{w}_{m}\cos\phi\right)} e^{i\hat{w}_{m}r + i\hat{v}_{m}r}, (57)$$

$$H_{\mathbf{x}\omega}(\mathbf{r}) = -\frac{ikee^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi r} u} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-b\sqrt{h^{2}\gamma^{2} + \hat{w}_{m}^{2}\sin^{2}\phi}}}{L_{1}\left(i\sqrt{k^{2}\gamma^{2} + \hat{w}_{m}^{2}\sin^{2}\phi}\right)} \frac{1}{\hat{w}_{m}^{1/2}L_{2}\left(\hat{w}_{m}\cos\phi\right)} \times \frac{\hat{v}_{m}\sqrt{k^{2}\gamma^{2} + \hat{w}_{m}^{2}\sin^{2}\phi}}{\left[\hat{w}_{m}\cos\phi - \sqrt{k^{2}\cos^{2}\phi + \hat{v}_{m}^{2}\sin^{2}\phi}\right] \left[\sqrt{k^{2}\cos^{2}\phi + \hat{v}_{m}^{2}\sin^{2}\phi} + i\sqrt{k^{2}\gamma^{2} + \hat{w}_{m}^{2}\sin^{2}\phi}\right]},$$

где  $\hat{w}_m = -\sqrt{k^2 - \hat{v}_m^2}$ ,  $\hat{v}_m = \frac{k}{\beta} - \frac{2\pi}{a}m$ , а *г* и  $\varphi$  — полярные координаты в плоскости *x*, *y* (отсчет  $\varphi$  производится от отрицательной полуоси *y*). Выражения (57) получены в предположении, что заряд движется в плоскости *y*, *z* на расстоянии *b* от края структуры. Как видно из (57), поле излучения в свободном пространстве образуется суперпозицией конических



1 -

волн, расходящихся от оси z, причем волновой вектор *m*-й пространственной гармоники составляет с осью z угол

$$\theta_m = \arccos\left(\frac{1}{\beta} - \frac{2\pi m}{a}\right)$$
.

Зависимость частоты излучения от угла наблюдения  $\theta_m$  определяется, как и в случае линейного источника, допплеровской формулой (2) для любого значения угла  $\varphi$ . Поле излучения симметрично относительно плоскости *y*, *z*. В этой плоскости ( $\varphi = 0$ ) выражения (57) с точностью до



Рис. 14.

постоянного множителя переходят в соответствующие формулы для поля плоской задачи (составляющая  $E_{x\omega}$  при этом обращается в нуль).

Потери энергии на излучение в свободное полупространство определим по потоку энергии через поверхность кругового цилиндра большого радиуса, описанного возле оси z. Спектральная плотность потерь на излучение на периоде структуры в интервал углов  $\varphi$ ,  $\varphi + d\varphi$  оказывается равной

$$W_{\omega}(\theta, \varphi) = \frac{\varepsilon^{2}ak}{4\pi c} \sum_{m} e^{-2b \sqrt{k^{2}\gamma^{2} + \hat{w}_{m}^{2} \sin^{2}\varphi}} \times \frac{\hat{w}_{m}^{2}}{\beta^{2}} \sin^{2}\varphi + (k^{2}\gamma^{2} + \hat{w}_{m}^{3} \sin^{2}\varphi) \frac{\sqrt{k^{2}\cos^{2}\varphi + \hat{v}_{m}^{2} \sin^{2}\varphi} + \hat{w}_{m}\cos\varphi}{\sqrt{k^{2}\cos^{2}\varphi + \hat{v}_{m}^{2} \sin^{2}\varphi} - \hat{w}_{m}\cos\varphi}, \quad (58)$$

где суммирование распространено лишь на излучаемые гармоники. Для иллюстрации свойств направленности излучения приведем графики (рис. 13) углового распределения излучения на первой пространственной гармонике при различных ( $\beta = 0.15$ ; 0.4; 0.6; 0.8) скоростях частицы. На рис. 13, a - e приведены кривые зависимостей интенсивности излучения от угла  $\theta$  ( $W_{\omega} = W_{\omega}$  ( $\theta$ )) в плоскостях, соответствующих различным фиксированным значениям угла  $\varphi$ . Нетрудно представить себе трехмерные поверхности распределения излучения. Видно, что имеется интенсивное излучение в небольшой сектор углов у нормали к траектории частицы. При небольших скоростях ( $\beta \ll 0.5$ ) излучение в поперечном направлении может в несколько раз превышать максимум излучения в направлении движения. Для релятивистских скоростей излучение вперед в сильной степени «зарезается», тогда как излучение в поперечном направлении остается весьма интенсивным. Выражение (58) существенно упрощается для двух «главных» плоскостей:  $\varphi = 0^{\circ}$  и  $\theta_m = 90^{\circ}$ . В плоскости, проходящей через траекторию заряда и нормальной к ребрам пластин ( $\varphi = 0^{\circ}$ ), диаграмма направленности излучения отличается от соответствующего углового распределения в двумерном случае лишь множителем sin  $\theta$ . В плоскости, нормальной к траектории источника ( $\theta = 90^{\circ}$ ), излучение гармоники номера *m* происходит лишь на частоте  $\omega = 2\pi mu/a$ , кратной частоте «прохождения» источником периода структуры. Угловое распределение излучения в этой плоскости для различных скоростей источника показано на рис. 14.

3. Излучение линейного источника при пролете вблизи гребенчатой структуры

При получении точного решения в предыдущем разделе в качестве периодической структуры принималась сильно идеализированная модель, состоящая из набора полуплоскостей. Больший практический интерес



Рис. 15.

представляет рассмотрение гребенчатых замедляющих структур, у которых размеры «резонаторной» области (глубина) конечны. Изучение таких структур позволяет выяснить зависимость интенсивности излучения от глубины ячейки. Эта зависимость в ряде случаев оказывается резонансной.

Двумерная гребенчатая замедляющая структура изображена на рис. 15, *a*. Она состоит из бесконечно длинных (вдоль оси x) параллельных, тонких, идеально проводящих лент ширины *l*. Ленты укреплены на металлической плоскости (y = 0) — «подложке» и отстоят друг от друга на расстояние *a*. В качестве источника поля рассмотрим однородно заряженную нить, параллельную оси x и движущуюся с постоянной скоростью *u* на «прицельном расстоянии» *b* от края структуры.

При формулировке задачи удобно воспользоваться методом изображений. Искомое поле движущейся нити, очевидно, совпадает при  $y \leqslant 0$  с полем источника и его изображения относительно плоскости y = 0(нить с погонной плотностью заряда — $\varepsilon$ , расположенная при y = b + l), движущихся вблизи периодического набора параллельных, идеально проводящих лент шириной 2l (рис. 15, 6). Задачу можно сформулировать в виде системы интегральных уравнений для неизвестного распределения токов, наводимых источником на пластинах структуры. Метод получения таких уравнений был подробно рассмотрен в обзоре<sup>2</sup>, и здесь мы приведем уравнения без вывода:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(w) L(w) \cos wy \, dw = -\frac{\varepsilon \omega}{\pi i u} e^{-(l+b)ky} \operatorname{ch} k\gamma y \quad \text{при} \quad |y| < l,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(w) \cos wy \, dw = 0 \quad \text{при} \quad |y| > l.$$
(59)

Здесь F(w) — амплитуда Фурье распределения плотности тока на пластине номера m = 0:

$$j_{0y}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \cos wy \, dw.$$
(60)

Представление (60) отражает то обстоятельство, что распределение индуцированного тока и его изображения относительно плоскости «подложки» (на ленте шириною 2*l*) четно. Наведенный ток  $j_{0y}(y)$  определяет поле излучения. Полное поле равно сумме поля излучения и поля источника и его изображения, движущихся в свободном пространстве. Ядро L(w)определяется формулой (6,10) обзора<sup>2</sup>:

$$L(w) = \frac{v \sin va}{\cos av - \cos a \frac{\omega}{u}}.$$
 (61)

Решение системы уравнений (59) может быть получено методом факторизации<sup>18</sup>. Оно отыскивается в виде

$$F(w) = \frac{e^{iwl}}{(k-w)L_2(w)} \left( K + \sum_{t=0}^{\infty} K_t \frac{w-w_t}{w+w_t} \right) + \frac{e^{-iwl}}{(k+w)L_1(w)} \left( K + \sum_{t=0}^{\infty} K_t \frac{w+w_t}{w-w_t} \right), \quad (62)$$

где  $w_t$  определяется формулой (50), а  $L_1$  (w) и  $L_2$  (w) — формулой (51). Постоянные коэффициенты K и  $K_t$  требуется определить так, чтобы удовлетворялись уравпения (59).

Выбранный вид решения для F(w) соответствует представлению тока на лентах, ограничивающих ячейку структуры, в виде суперпозиции волн тока (отвечающих полям собственных волноводных воли для этой области), бегущих как в глубь ячейки, так и к ее открытому концу. Как нетрудно проверить, решение (62) удовлетворяет (при сходимости ряда  $\sum_{t} K_{t}$ ) изве-

стным условиям на ребре пластин  $(y = \pm l) : F(w) \sim w^{3/2}$  при  $w \to \infty$ . Заметим также, что при  $w \to 0$  функция F(w), определяемая формулой (62), ведет себя совершенно аналогично решению задачи о системе полубесконечных пластин. Это говорит об одинаковом законе убывания электромагнитного поля с расстоянием в дальней зоне для обеих задач. Подстановка выражения (62) в систему интегральных уравнений (59) дает линейную неоднородную систему алгебраических уравнений для коэффициентов K и K<sub>t</sub>:

$$K_{t} = \Gamma_{t} \left( K + \sum_{m=0}^{\infty} K_{m} \frac{w_{t} - w_{m}}{w_{t} + w_{m}} \right) \qquad (t = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots),$$

$$K + \sum_{m=0}^{\infty} K_{m} \frac{ik\gamma - w_{m}}{ik\gamma + w_{m}} = -\frac{\varepsilon \omega \gamma a}{4\pi^{2} iu \ (1 + i\gamma) \ L_{1} \ (ik\gamma)} \ e^{-k\gamma b}.$$
(63)

Здесь введена величина

$$\Gamma_{t} = \alpha_{t} \frac{\left[1 + (-1)^{t} \cos \frac{ka}{\beta}\right] (k + w_{t})^{2}}{a^{2} w_{t}^{2} (w_{t}^{2} + k^{2} \gamma^{2})} L_{1}^{2} (w_{t}) e^{2iw_{t}t}, \qquad (64)$$
$$\alpha_{t} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } t = 0, \\ 1 & \text{при } t \ge 1. \end{cases}$$

Отметим, что при любой частоте волновые числа  $w_t$  становятся чисто мнимыми, начиная с некоторого значения индекса t, близкого к величине  $ka/\pi$ . При этом соответствующие волноводные гармоники перестают распространяться в волноводе, образованном двумя соседними пластинами. Коэффициенты  $\Gamma_t$  при чисто мнимых  $w_t$  содержат экспоненциально малые множители ( $\sim \exp \{-2\pi \frac{e}{a} t\}$  при больших t). Поэтому бесконечную систему (63) приближенно можно заменить на систему с конечным числом неизвестных, опустив экспоненциально малые коэффициенты  $K_t$ . Решение укороченной системы дает приближенные значения коэффициентов K и  $K_t$ . Увеличение числа неизвестных на единицу (т. е. учет одной из затухающих волноводных гармоник в резонаторной области) повышает каждый раз точность приближения.

Рассмотрим несколько последовательных приближений. В случае очень глубоких ячеек, когда глубина ячейки *l* значительно превышает ее период *a*, все коэффициенты *K<sub>t</sub>* экспоненциально малы. Приближенное решение в этом случае имеет вид

$$K_{t} = 0,$$

$$K = -\frac{\varepsilon \omega \gamma a e^{-k \gamma b}}{4\pi^{2} i u (1 + i \gamma) L_{1} (i k \gamma)} \equiv B.$$
(65)

Это решение может быть принято за нулевое приближение. Оно совпадает с решением рассмотренной ранее задачи об излучении источника, движущегося вблизи системы полубесконечных пластин. Заметим, что для получения предельного перехода  $l \rightarrow \infty$  необходимо предположить, что волна отражения от подложки отсутствует. Это может быть достигнуто при наличии бесконечно малого затухания.

В полосе частот

$$0 \leqslant \frac{a}{\lambda} = \frac{ka}{2\pi} \leqslant \frac{1}{2} \tag{66}$$

в ячейке может распространяться лишь волна типа TEM, для которой  $w_0 = k$  (постоянные распространения всех остальных волноводных гармоник чисто мнимые). Поэтому в первом приближении бесконечная система

(63) сводится к двум уравнениям для коэффициентов К и К<sub>0</sub>:

$$K + K_0 \frac{i\gamma - 1}{i\gamma + 1} = B,$$
  

$$K\Gamma_0 - K = 0.$$
(67)

Таким образом, решение в первом приближении имеет вид

$$K = -\frac{B}{\Delta_1}, \quad K_0 = \Gamma_0 K, \tag{68}$$

где

$$\Delta_{1} = -\left(1 + \Gamma_{0} \frac{i\gamma_{0} - 1}{i\gamma_{0} + 1}\right).$$

Второе приближение для полосы частот (66), т. е. решение с учетом экспоненциально малых  $K_i$  и  $\Gamma_i$ , определяется выражениями

$$K = \frac{B}{\Delta_2} \left[ 1 + \Gamma_1 \Gamma_0 \left( \frac{k - w_1}{k + w_1} \right)^2 \right],$$
  

$$K_0 = \frac{B}{\Delta_2} \Gamma_0 \left[ 1 - \Gamma_1 \frac{w_1 - k}{w_1 + k} \right],$$
  

$$K_1 = \frac{B}{\Delta_2} \Gamma_1 \left[ 1 - \Gamma_0 \frac{k - w_1}{k + w_1} \right],$$
(69)

где

$$\Delta_2 = \mathbf{1} + \Gamma_0 \frac{i\gamma - 1}{i\gamma + 1} + \Gamma_1 \frac{ik\gamma - w_1}{ik\gamma + w_1} + \Gamma_0 \Gamma_1 \frac{k - w_1}{k + w_1} \left( \frac{k - w_1}{k + w_1} - \frac{ik\gamma - w_1}{ik\gamma + w_1} + \frac{i\gamma - 1}{i\gamma + 1} \right) \,.$$

Для численных расчетов удобно пользоваться явным выражением коэффициентов  $\Gamma_t$  в виде бесконечного произведения:

$$\Gamma_{t} = e^{2tw_{t}} \frac{a}{\pi} \left( n \frac{l}{a} - \ln 2 \right) \prod_{\substack{m=0\\m\neq t}}^{\infty} \frac{w_{m} + w_{t}}{w_{m} - w_{t}} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(\hat{w}_{-m} - w_{t}) (\hat{w}_{+m} - w_{t})}{(\hat{w}_{-m} + w_{t}) (\hat{w}_{+m} + w_{t})} .$$
(70)

Как следует из представления (70), указанные приближения сходятся лишь при условии

$$r = \frac{!}{a} > \frac{\ln 2}{\pi} \approx 0,22,\tag{71}$$

т. е. для достаточно частых или глубоких структур. При нарушении условия (71) выбор решения в виде супернозиции волноводных гармоник, очевидно, нецелесообразен.

При рассмотрении излучения на более высоких частотах в качестве первого приближения следует брать систему более высокого порядка. Так, нахождение приближенного решения в полосе частот

$$\frac{s-1}{2} \leqslant q = \frac{ka}{2\pi} \leqslant \frac{s}{2}$$

естественно начинать с системы порядка s + 1, так как коэффициенты  $K_t$  становятся экспоненциально малыми лишь при t > s + 1.

Определение коэффициентов K и  $K_t$  решает задачу об отыскании спектральной компоненты тока F(w) (62). С помощью F(w) легко записать единственную отличную от нуля составляющую магнитного поля  $H_{\omega x}$ :  $H_{\omega x}(y, z) =$ 

$$=H_{x}^{0}+\frac{2\pi}{c}e^{i\frac{\hbar}{\beta}an}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)\frac{\cos v\left[z-a\left(n+1\right)\right]-e^{i\frac{\hbar}{\beta}a}\cos v\left(z-an\right)}{\cos av-\cos\frac{ak}{\beta}}\cos wy\,dw\quad(72)$$

$$(an\leqslant z\leqslant a\ (n+1)),$$

где  $H^{0}_{\omega x}$  — поле заряженной нити и ее изображения в металлической плоскости y = 0. Интегрирование проводится с помощью вычетов. Физические особенности поля зависят от того, где оно вычисляется — в резонаторной ячейке (-l < y < 0) или в свободном пространстве (y < -l). В ячейке структуры полное поле представляет собой суперпозицию стоячих волн, образованных волноводными гармониками, распространяющимися в глубь ячейки и отраженными от подложки:

$$H_{\omega x}(y, z) = -\frac{16\pi^{2} \iota}{c} e^{i \frac{k}{\beta} an} \sum_{m=0}^{a} K_{m} \frac{(-1)^{mn} e^{iwml} \cos w_{m} y \cos \frac{m\pi}{a} z}{(k+w_{m}) L_{1}(w_{m}) \left[1-(-1)^{m} e^{-i \frac{k}{\beta} a}\right]}$$
(73)  
$$(-l \leqslant y \leqslant 0).$$

Магнитное поле заряженной нити, возбуждаемое в свободном полупространстве, имеет вид

$$H_{\omega x}(y, z) = -\frac{\varepsilon}{c} \operatorname{sgn}(y+b+l) e^{-k\gamma |y+b+l|+i\frac{h}{\beta}z} + \frac{2\pi^2}{ac} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\hat{v}_t}{\hat{w}_t (k+\hat{w}_t) L_1(\hat{w}_t)} \left(K + \sum_{m=0}^{\infty} K_m \frac{\hat{w}_t + w_m}{\hat{w}_t - w_m}\right) e^{i\hat{w}_t(y+l)+i\hat{v}_t z} \qquad (y < -l),$$

$$\hat{v}_t = \frac{k}{\beta} - \frac{2\pi}{a} t.$$
(74)

Первое слагаемое определяет здесь собственное поле движущейся заряженной нити; второе слагаемое в (74) описывает суперпозицию плоских электромагнитных волн, возбуждаемых источником. Член суммы, соответствующий индексу t = 0, дает поверхностную волну, распространяющуюся вдоль структуры синхронно с источником; остальные слагаемые суммы — пространственные гармоники той же частоты, что и поверхностная волна. Действительным значениям волновых чисел  $\hat{w}_t$  отвечают электромагнитные волны, излучаемые движущимся источником; мнимым  $w_t$  соответствуют неоднородные плоские волны, бегущие вдоль структуры со скоростью

$$u_t = u \left( 1 - \frac{\lambda}{a} \frac{u}{c} t \right) ,$$

отличной от скорости источника.

Рассмотрим теперь энергетические характеристики излучения, возникающего при движении заряженной нити вблизи гребенки. Полные потери энергии движущимся источником можно определить, вычислив реакцию излучения, т. е. работу возбуждаемого поля над источником. При пролете источником одного периода структуры ( $0 \le z \le a$ ) потери на излучение имеют вид

$$W = -\int_{0}^{a} dz \cdot 2 \operatorname{Re} \int_{0}^{\infty} \varepsilon E_{z\omega} \left( z = ut, \ y = -l - b \right) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{0}^{\infty} W_{\omega} d\omega.$$
(75)

Спектральная плотность потерь  $W_{\omega}$  на излучение равна

$$W_{\omega}^{\text{HOAH}} = -\frac{8\pi^2 \varepsilon}{ku} e^{-k\gamma b} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{(1+i\gamma) L_1(ik\gamma)} \left(K + \sum_{t=0}^{\infty} K_t \frac{ik\gamma + w_t}{ik\gamma - w_t}\right)\right\}.$$
 (76)

404

Следует отметить, что в выражение для реакции излучения на частоте о вносит вклад лишь замедленная пространственная гармоника, движущаяся синхронно с зарядом. Фаза поля остальных пространственных гармоник той же частоты в месте расположения источника периодически меняется из-за различия скоростей этих гармоник и заряженной нити. Поэтому работа поля этих пространственных гармоник над источником в среднем за период равна нулю.

Выражение для потерь движущегося источника на излучение можно также получить непосредственным вычислением потока энергии через удаленную от гребенки плоскость, параллельную x, z. Поток вектора Пойнтинга через полосу шириною a на этой плоскости определяет искомую спектральную плотность потерь на излучение на периоде структуры:

$$W_{\omega}^{\text{H3D}} = -c \int_{an}^{a(n+1)} E_{\omega z} H_{-\omega x} dz =$$

$$= \frac{16\pi^4}{a\omega} \sum_{t} \frac{\hat{v}_t^2}{\hat{w}_t (k + \hat{w}_t)^2} \left| \frac{1}{L_1(\hat{w}_t)} \left( K + \sum_{m=0}^{\infty} K_m \frac{\hat{w}_t + w_m}{\hat{w}_t - w_m} \right) \right|^2, \quad (77)$$

где суммирование по t распространяется на все излучаемые пространственные гармоники ( $\hat{w}_t$  действительно на рассматриваемой частоте).

Используя в выражениях (76), (77) приближенные значения для коэффициентов K и  $K_t$ , определяемые, например, по формулам (68) или (69), можно вычислять потери на излучение с различной желаемой степенью точности. Величина потерь на излучение зависит от частоты излучения  $\omega$ , периода структуры a, глубины ячейки l, скорости движения источника u, прицельного параметра b. Удобно ввести три безразмерных параметра:

$$q = \frac{ka}{2\pi}, \quad r = \frac{l}{a}, \quad \beta = \frac{u}{c}.$$
(78)

При фиксированном значении прицельного параметра b величина потерь зависит только от этих трех параметров. Ниже мы приведем результаты численных расчетов для случая b = 0. В расчетах фиксировались две из трех величин (78) и рассматривалась зависимость W от третьей переменной. На рис. 16 изображена зависимость полных потерь на излучение  $W_{\omega}^{\text{поли}}$  от безразмерной глубины ячейки *г* при различных фиксированных значениях параметра q и  $\beta$ . Видно, что зависимость  $W_{\omega}^{\text{полн}}$  от r близка к периодической. На графиках приведены для сравнения результаты, полученные в цервом, втором и третьем приближениях. Все графики рис. 16 получены для значения  $\beta = 0.9$  (релятивистское движение источника) и значений q, равных 0,80; 0,60 и 0,48. Обращает на себя внимание резкая резонансная зависимость от r. Так, при  $\hat{q} = 0.80$  потери на излучение в резонансе (r = 1.85) превосходят потери на той же частоте в случае бесконечно глубокой структуры в 30 раз \*). Видно, что при q>0.5первое приближение неприменимо, а при q < 0.5 результаты в первом и втором приближениях удовлетворительно согласуются. Второе и третье приближения в рассматриваемых случаях дают близкие результаты. С ростом r согласие между приближениями разного порядка улучшается. Следует напомнить, что при малых r (r < 0.22) используемый метод расчета неприменим. На рис. 17 приведены для сравнения аналогичные зависимости  $W_{\omega}(r)$  при  $\beta = 0.4$  (нерелятивистское движение источника) и q, равных 0.570 и 0.480.

<sup>\*)</sup> Величина резонансного максимума при q = 0.874 и r = 1.6 превышает потери на бесконечно глубокой структуре при тех же условиях приблизительно в 200 раз (!).



Перейдем теперь к рассмотрению спектрального состава потерь, т. е. зависимости W от q при фиксированных значениях  $\beta$  и r. На рис. 18 приведены графики зависимости  $W_{\omega}(q)$  ( $0 \leq q \leq 1$ ) для  $\beta = 0.9$  при двух значениях безразмерной глубины ячейки r (r = 1 и r = 5). Результат получен в третьем приближении, которое очень хорошо согласуется со вторым приближением. Графики показывают ярко выраженную резонансную зависимость интенсивности излучения от частоты. Излучение сконцентрировано в узких резонансных полосах частот, где интенсивность



принимает большие значения. Интересно сравнить кривые рис. 18 с изображенным на рис. 9 спектральным распределением потерь на излучение при пролете источника возле периодической структуры из полуплоскостей  $(r \rightarrow \infty)$ . Видно, что излучение в структуре с r = 1 при  $\beta = 0.9$  на частоте q = 0.82 приблизительно в 20 раз превышает интенсивность излучения в той же спектральной области для бескопечно глубокой структуры. При увеличении глубипы структуры число линий в спектре излучения (т. е. число резонансных максимумов) возрастаст, при этом спектральные линии становятся у́же. На рис. 19 приведены соответствующие спектральные зависимости интенсивности для нерелятивистского движения источника ( $\beta = 0.2$ ). Излучение и в этом случае имеет резонансный характер, хотя максимальные значения интенсивности не так велики.

Рисунки 20, а и б помогают составить представление о рельефе функции  $W(q, \beta)$  над плоскостью значений  $q, \beta$  при выбранной глубине структуры r (на рис. 20, a r = 1, на рис. 20,  $\delta r = 5$ ). На этих рисунках нанесены положение и величина резонансных максимумов. Как следует из приведенных цифровых значений, рельеф функции  $W(q, \beta)$  напоминает горные цепи, почти параллельные оси  $\beta$ . Нанесенные на график прерывистые линии показывают, как расположены вершины этих «горных цепей». Сплошными линиями изображены границы области излучения пространственных гармоник, определяемые неравенствами (15). Более подробный анализ количественных результатов, а также ряд наглядных качественных объяснений характеристик дифракционного излучения в рассмотренном случае можно найти в работе <sup>25</sup>. Заметим также, что совершенно аналогично может быть получено решение задачи об излучении источников при



пролете возле прозрачной решетки из тонких лент конечной высоты, изображенной на рис. 15, б. В последнем случае необходимо решать задачу об отыскании как четного, так и нечетного распределения тока на пластинах периодической структуры.

## 4. Другие методы расчета излучения источников, движущихся вблизи периодических структур

Использование метода факторизации, рассмотренное выше, приводит к решению в виде последовательных приближений, очень быстро сходящихся к точному решению. Однако этот метод применим лишь для исследования периодических структур рассмотренного типа. Более широкие возможности дают методы анализа, развитые в работах  $^{26-30}$ . В этих работах авторам удалось найти точное решение задачи об излучении плоского модулированного электронного пучка вблизи плоской дифракционной решетки, образованной тонкими лентами при произвольном соотношении ширины ленты и периода структуры; получены также количественные характеристики излучения в случае решетки из толстых брусьев и для открытой гребенчатой структуры с зубцами конечной толщины. Более подробно мы рассмотрим, следуя  $^{26, 27}$ , получение решения и количественные результаты для случая плоской дифракционной решетки из тонких лент (см. рис. 2). Источником поля считаем плоский модулированный пучок электронов, параллельный решетке и проходящий на расстоянии *b* от нее:

$$\rho(z, t) = \rho_0 \delta(y-b) e^{i\left(\frac{\omega}{u}z-\omega t\right)}.$$
(79)



Поле, отвечающее такому распределению тока в свободном пространстве, имеет единственную компоненту магнитного вектора:

$$H_{x}(y, z) = -2\rho_{0}\pi\beta e^{-h\gamma|y-b}\operatorname{lsgn}(y-b)e^{i\left(\frac{\omega}{u}z-\omega t\right)}.$$
(80)

Остальные компоненты электромагнитного поля легко могут быть получены из (80) с помощью уравнений Максвелла. Поле излучения, порождаемое взаимодействием источника с дифракционной решеткой, может быть представлено в виде суперпозиции пространственных гармоник:

$$H_{x}(y, z) = \operatorname{sgn} y \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n} e^{i \left(\frac{\omega}{u} - 2\pi \frac{n}{d}\right) z + i \sqrt{h^{2} - \left(\frac{\omega}{u} + \frac{2\pi n}{d}\right)^{2} |y|},$$
(81)

Коэффициенты B<sub>n</sub> пропорциональны коэффициентам ряда Фурье в разложении тока, наводимого на полосах решетки.

Уравнения для определения коэффициентов  $B_n$  можно получить, потребовав, чтобы тангенциальная составляющая полного электрического поля обращалась в нуль на пластинах решетки (при nd + a < z < < (n + 1) d), а тангенциальная составляющая магнитного поля равнялась нулю на просветах решетки (т. е. при y = 0, nd < z < nd + a). Эти два условия дают следующую систему уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{u} - \frac{2\pi n}{d}\right)^2} B_n e^{-i\frac{2\pi n}{d}z} = -2\pi\rho_0 e^{-h\gamma b}$$
  
при  $nd + a < z < (n+1)d$  (на полосах решетки),  
(82)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-i\frac{2\pi n}{d}z} = 0 \quad \text{при} \quad nd < z < nd + a \quad (\text{на щелях решетки}).$$

Используя формальную замену переменной  $B_n = A_n / \hat{v_n} \rho_0$ , можно <sup>27</sup> преобразовать систему (82) к виду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{|n|}{n} e^{in\psi} = -\varepsilon + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{|n|}{n} \chi_n e^{in\psi}, \ 0 < \psi < \delta,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\psi} = 0, \qquad \delta < \psi < 2\pi,$$
(83)

где введена безразмерная переменная  $\psi = 2\pi z/d$  (соответственно  $\delta = 2\pi a/d$ ). Величины є и  $\chi_n$  определяются равенствами

. . .

а величина  $\hat{v}_n$  — проекция волнового вектора на ось z — определена формулой (50а). Для дальнейшего важно отметить, что величина  $\chi_n$  стремится к нулю ( $\sim 1/n^2$ ) с ростом |n|.

к нулю (~1/n<sup>2</sup>) с ростом | n |. Наметим здесь кратко путь решения системы уравнений (83). Интересующиеся подробностями найдут их в работе <sup>26</sup>, которой мы следуем в своем изложении. Если бы в правой части первого из уравнений (83) стояла заданная функция от ψ, то система (83) была бы эквивалентна задаче Римана — Гильберта, в которой аналитическая функция определяется по условиям, заданным на границе некоторой области. Действительно, рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\sum_{\mathbf{n}} A_n e^{in\psi} \frac{|\mathbf{n}|}{n} = f(e^{i\psi}), \qquad 0 < \psi < \delta,$$

$$\sum_{\mathbf{n}} A_n e^{in\psi} = 0, \qquad \delta < \psi < 2\pi.$$
(85)

Введем функцию комплексного переменного z, определив ее разложением по степеням  $z = |z| e^{i\psi}$ :

$$X(z) = \begin{cases} X^{+}(z) = \sum_{n \ge 0} A_{n} z^{n}, & |z| < 1, \\ X^{-}(z) = -\sum_{n < 0} A_{n} z^{n}, & |z| > 1. \end{cases}$$
(86)

Тогда левые части уравнений, входящих в систему (85), представляют собой соответственно сумму и разность предельных значений функции X (z) изнутри и извне единичного круга:

$$X^{+}(e^{i\psi}) + X^{-}(e^{i\psi}) = f(e^{i\psi}), \quad 0 < \psi < \delta, X^{+}(e^{i\psi}) - X^{-}(e^{i\psi}) = 0, \qquad \delta < \psi < 2\pi.$$
(87)

Первое условие определяет скачок функции X(z) при переходе через дугу окружности  $0 < \psi < \delta$ . Второе условие говорит о непрерывности z функции X(z) на остальной части окружности. Задача определения функции X(z) по этим условиям и есть задача Римана — Гильберта.



Рис. 21.

Проведем в плоскости комплексного переменного z разрез вдоль дуги  $L_1$  (рис. 21).

Образуем функцию X (z)  $V(z - \alpha)(z - \overline{\alpha})$ , где  $\alpha$  и  $\overline{\alpha}$  — крайние точки дуги  $L_1$  ( $\overline{\alpha} = 1$ ,  $\alpha = e^{i\delta}$ ). Эта функция голоморфна, однозначна и ограничена на бесконечности. Следовательно, она может быть представлена интегралом Коши

$$X(z)\sqrt{(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{X(\zeta)\sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\overline{\alpha})}}{\zeta-z} d\zeta + C, \qquad (88)$$

где контур  $\Gamma$  охватывает разрез  $L_i$ , а константа C получилась за счет вычета в бесконечно удаленной точке.

Стянем теперь контур  $\Gamma$  к дуге  $L_1$ . Учитывая, что предельные значения корня по разным берегам разреза различаются знаком, а предельные значения функции X ( $\zeta$ ) по разным берегам разреза равны  $X^+$  (z) и  $X^-$  (z), получим

$$X(z)\sqrt{(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{X^+(\zeta) + X^-(\zeta)}{\zeta - z} \sqrt{(\zeta-\alpha)(\zeta-\overline{\alpha})} \, d\zeta + C. \tag{89}$$

Подставляя в эту формулу значения  $X^+$  ( $\zeta$ ) +  $X^-$  ( $\zeta$ ) из (87), получаем решение задачи Римана — Гильберта.

Формула (89) позволяет получить связь между значениями X (z) на окружности единичного радиуса. Если точка z приближается к дуге  $L_i$ , предельное значение интеграла (89) определяется формулой Сохоцкого <sup>31</sup> и зависит от того, приближается ли точка z к дуге изнутри или извне круга. Беря полусумму этих двух предельных значений, получаем

$$\sum A_{n}e^{in\psi} = \sum A_{n}\zeta_{0}^{n} = X^{+}(\zeta_{0}) - X^{-}(\zeta_{0}) -$$
$$= \frac{R(\zeta_{0})}{\pi i} \int_{L_{1}} \frac{f(\zeta_{0})}{\zeta - \zeta_{0}} \sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \overline{\alpha})} d\zeta + 2CR(\zeta_{0}), \quad (90)$$
rge

$$R(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{V(\zeta - \alpha)(\zeta - \tilde{\alpha})} & \text{ на дуге } L_1, \\ 0 & \text{ на дуге } L_2, \end{cases}$$

а интеграл понимается в смысле главного значения. Точка  $\zeta_0$  берется на окружности единичного радиуса. Из формулы (90) следует, что  $A_n$  есть коэффициент в разложении правой части в ряд Фурье.

Пусть теперь

$$f(\zeta_0) = -\varepsilon - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{|n|}{n} \chi_n e^{in\psi},$$

как это имеет место в реальной системе уравнений (83). Подстановка этого выражения в (90) и вычисление коэффициентов Фурье для обеих частей равенства приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений для коэффициентов  $A_n$ . Эта система уравнений может быть решена с требуемой степенью точности, так как она содержит малый параметр  $\chi_n$  (напомним, что из определения (84) следует малость  $\chi_n$  для больших n). При заданной точности решения задачи бесконечную систему уравнений для коэффициентов  $A_n$  можно заменить системой с конечным числом уравнений. Требуемое число уравнений n по порядку величины равно отношению периода структуры a к длине волны  $\lambda$  (точнее,  $n > a/\lambda\beta$ ). Поскольку имеются стандартные программы решения систем линейных алгебраических уравнений, целесообразно для отыскания численных значений коэффициентов  $A_n$  использовать электронные вычислительные машины.

Величину потерь на излучение, отнесенную к периоду структуры, можно определить, вычислив поток вектора Пойнтинга через плоскость y = const. При этом следует иметь в виду, что излучение распределено симметрично относительно плоскости дифракционной решетки. Интенсивность потерь на пространственной гармонике номера  $n S_n$  пропорциональна |  $A_n$  |<sup>2</sup>. Связь между частотой и направлением распространения излучаемой волны дается допплеровскими соотношениями (2), (11), общими для всех линейных периодических систем.

В работе <sup>27</sup> приведены графики зависимости величины вектора Пойнтинга  $S_n$ , соответствующего разным пространственным гармоникам, от параметров задачи (скорости пучка  $\beta$ , безразмерного периода решетки  $d/\lambda$  и коэффициента заполнения решетки a/d), полученные на вычислительной машине описанным выше способом. На рис. 22, взятом из <sup>19</sup>, изображена зависимость  $S_n$  (при n = -1, -2, -3) от переменной  $q = l/\lambda$  при различных скоростях электронного потока ( $\beta = 0.5$ ; 0.6 и 0.7). Коэффициент заполнения решетки a/d = 0.5, т. е. ширина полосы решетки равна просвету между полосами. Из графиков видна резонансная зависимость интенсивности излучения от q. Для выбранной области изменения параметров наиболее интенсивное излучение происходит на первой пространственной гармонике. Представляет интерес зависимость  $S_n$  от коэффициента заполнения решетки при заданной скорости источника и фиксированной частоте. На рис. 23 приведены примеры таких зависимостей для первой пространственной гармоники. Излучение отсутствует, как вполне очевидно, в предельных случаях a/d = 0 и a/d = -1. При некоторых промежуточных значениях a/d существуют максимумы излучения.

Рассмотренный выше метод отыскания полей, основанный на решении краевой задачи Римана — Гильберта, применим лишь для исследования плоских решеток из бесконечно тонких лент. Больший практический



интерес представляют структуры, состоящие из объемных элементов, например дифракционные решетки из толстых брусьев или гребенчатые структуры с зубъями конечной толщины (см. рис. 24 и 6). В работах



В. П. Шестопалова, О. А. Третьякова и Э. И. Чернякова <sup>28, 29</sup> было проведено исследование излучения заряженных источников, движущихся возле таких структур, основанное на использовании численных методов. Задача о дифракционном излучении сводилась при этом к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье при представлении поля в виде суперпозиции пространственных гармоник, аналогичных системам (82). В <sup>28, 29</sup> разработаны рецепты эффективного количественного исследования полученных бесконечных алгебраических систем с помощью электронных вычислительных машин. Достаточно под-

робное изложение способа расчета, а также математического исследования полученного решения в тех случаях, когда оно возможно, приводится в работе <sup>40</sup>. Заметим, что задачи о возбуждении движущимся источником упомянутых периодических структур легко могут быть связаны с помощью метода изображений: излучение заряда над гребенчатой структурой (глубиною *l*; см. рис. 6) эквивалентно излучению, возбуждаемому при



симметричном пролете двух зарядов разного знака по обе стороны от структуры из брусьев (толщиною 2*l*). Структуры вида, изображенного на рис. 6 и 24, характеризуются, по сравнению с плоской ленточной решеткой, еще одним параметром — глубиной (или толщиной) *l* элементов структуры. Поэтому интересно исследовать зависимость характеристик излу-

чения от этого параметра. На рис. 25 приведена взятая из работы<sup>28</sup> зависимость величины вектора Пойнтинга S в гармонике n = -1 от скорости источника при трех различных значениях толщины решетки. Для сравнения штрих-пунктирной линией нанесено значение вектора Пойн-



тинга для плоской ленточной решетки. Отметим здесь, что в случае толстой решетки излучение уже несимметрично



Puc. 25. d/a = 0,2, q = 0,25.1 - l/a = 0; 2 - l/a = 0,9; 3 - l/a = 1,8.

Puc. 26.  $a/\lambda = 0.25$ ,  $\beta = 0.249$ . 1 - d/a = 0.5; 2 - d/a = 0.2.

относительно плоскости симметрии решетки y = 0. На графике приведены значения потока энергии в то полупространство (y > l/2), где находится источник. На рис. 26 изображена зависимость величины вектора Пойнтинга  $S_{-1}$  от толщины решетки l. Сплошной линией изображены характеристики излучения над решеткой, пунктирной — излучения под решеткой (y < - l/2). Отчетливо виден резонансный характер зависимости.

В работах <sup>28, 29</sup> имеется большое число графиков, которые позволяют составить представление о некоторых особенностях излучения. Однако выбранные для расчетов значения параметров относятся лишь к случаю излучения по нормали к плоскости решетки. При этом вклад в излучение от токов, параллельных оси *у* (см. рис. 24), не учитывается. В то же время, как было показано в разделе 3, подобные токи могут обусловливать сильные резонансные максимумы интенсивности излучения под углами, отличными от нормали к структуре.

Наряду со строгими методами исследования, основанными на численном анализе полученных уравнений с помощью ЭВМ, развитыми в <sup>28, 29</sup>, при рассмотрении решеток, у которых ширина щели значительно меньше размера периода, удается отыскать приближенное аналитическое решение, достаточно полно описывающее характерные особенности излучения. Такой приближенный подход основывается на формулировке задачи в виде бесконечных систем линейных алгебраических уравнений второго рода. Анализ полученного приближенного решения содержится, например, в работе <sup>41</sup>.

Ряд обобщений рассмотренных в этом разделе задач можно найти в сборнике <sup>30</sup>.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше мы рассматривали дифракционное излучение, возникающее при движении заряженных источников возле открытых периодических структур. Рассмотренные задачи обладают большим сходством с задачами об излучении заряженных частиц в слоистых периодических средах. В частности, аналогичными допплеровскими соотношениями описывается спектр излучения. Существенным различием названных задач является то, что при рассмотрении дифракционного излучения источник движется в вакууме, тогда как во втором случае оптические неоднородности вдоль траектории источника непосредственно обусловлены периодическим изменением свойств среды, в которой движется источник. Это физическое различие вызывает и отличие в методах математического анализа проблемы. Излучение в слоистых периодических средах мы не рассматриваем; приведем лишь ссылки на основные работы <sup>32–36</sup>, по этому вопросу и обзор <sup>37</sup>.

Излучение рассматривалось выше в приближении равномерного движения источника: обратное действие излучения на источник не учитывалось. Однако, если путь заряда вблизи решетки достаточно велик, а излучающие заряды или токи достаточно большие, пренебрежение реакцией излучения становится неоправданным. Реакция излучения может привести к дополнительной модуляции первоначального распределения заряда в пучке и тем самым к существенному изменению характеристик излучения. В работе <sup>38</sup> приведены предварительные результаты вычислений нарастания волн пространственного заряда в первоначально однородном пучке, движущемся в пространстве между двумя плоскими дифракционными решетками. Полученные в <sup>38</sup> результаты указывают на важность исследования самосогласованных задач для каждого конкретного случая. Отметим предпринятое И. Л. Вербицким интересное исследование о раскачке колебаний первоначально однородного моноскоростного плоского пучка электронов, движущегося над гребенчатой структурой в волноводе.

Примечание при корректуре. После того как обзор был сдан в печать, вышло несколько работ, о которых следует упомянуть хотя бы вкратце. В работе <sup>42</sup> рассматривается излучение заряженной частицы, пролетающей мимо набора идеально проводящих полуплоскостей. Результаты перекрываются с результатами цитированных выше работ. В работах <sup>41,43</sup> рассматривается пзлучение заряженной частицы, движущейся в спиральном волноводе. В работе <sup>44</sup> рассматривается теория аномалий Вуда, о которых говорилось на стр. 391—392 обзора.

Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР Радиотехнический институт АН СССР

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ 16, 15 (1946).
   Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН 88, 209 (1966).
   Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, В. И. Гайдук, Н. А. Овчинникова, А. М. Харченко, Труды XXI Всесоюзной научной сессии, секция электроники, М., 1965, стр. 12.
- 4. И. М. Франк, Изв. АН СССР, сер. физ. 6. 3 (1942). 5. S. J. Smith, E. M. Purcell, Phys. Rev. 92, 1069 (1953).
- 6. Electronics, October 19, 74 (1962).

- 7. Ф. С. Русин, Г. Д. Богомолов, Письма ЖЭТФ 4, 236 (1966). 8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшип, Теория поля, М., Физматгиз, 1960. 9. К. Ishiguro, Т. Тако, Intern. J. Optica Acta 8, 25 (1961). 10. A. J. Fox, N. W. W. Smith, Proc. IEEE 52, 429 (1955).

- 11. Б. З. Каценеленбаум, ЖТФ 25, 546 (1955). 12. В. Б. Брагинский, Радиотехника и электроника 1, 232 (1956). 13. В. Н. Парыгин, Изв. вузов (Радиофизика) 1, 139 (1958). 14. С. W. Barnes, K. G. Dedrick, J. Appl. Phys. 37, 414 (1966).
- 15. Б. М. Болотовский, А. К. Бурцев, Оптика и спектроскопия 19, 470 (1965).
- 16. G. Toraldo di Francia, Nuovo cimento 16, 61 (1960).
- 17. A. Hessel, Canad. J. Phys. 42, 1195 (1964).
- 18. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, М., «Сов. радио», 1966.
- 19. В. Нобл, Метод Винера Хопфа, М., ИЛ, 1962.
- 20. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, ЖТФ 34, 1856 (1964).
- 21. Г. В. Воскресенский, Б. М. Болотовский, ДАН СССР 156, 770 (1964).
- 22. Е. В. Авдеев, Г. В. Воскресенский, Радиотехника и электроника 11, 1560 (1966).
- 23. Е. В. Авдеев, Г. В. Воскресенский, Радиотехника и электроника 11, 1419 (1966),
- 24. Е. В. Авдеев, Г. В. Воскресенский, Радиотехника и электроника 12, 469 (1967).
- 25. Е. В. Авдеев, Г. В. Воскресенский, Изв. вузов (Радиофизика) 11 (1) (1968).
- 26. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ 32, 381 (1962).
- 27. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопалов, Радиотехника и электроника 10, 10 (1965). 28. О. А. Третьяков, Э. И. Черняков, В. П. Шестопалов, ЖТФ 36,
- 33 (1966).
- 29. О. А. Третьяков, Э. И. Черняков, В. П. Шестопалов, Изв. вузов (Радиофизика) 9, 342 (1966).
- 30. Сб. «Радиотехника», вып. 1, Х., Изд-во Харьк. госуд. ун-та, 1965. 31. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М., Гостехиздат, 1951.
- 32. Я. Б. Файнберг, Н. А. Хижняк, ЖЭТФ 32, 883 (1957). 33. М. Л. Тер-Микарлян, ДАН СССР 134, 318 (1960). 34. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ 35, 1435 (1958).

- 35. Г. М. Гарибян, И. И. Гольдман, ДАН АрмССР 31, 219 (1960). 36. L. Ronchi, G. Toraldo di Francia, Alta Frequenza 32, 558 (1963). 37. Ф. Г. Басс, В. М. Яковенко, УФН 86, 189 (1965).
- 38. I. Palocz, A. A. Oliner, A Self-consistent Theory of Cerenkov and Smith-Purcell Radiation, Proc. Symposium on Quasi-optics, Polytechnic Press Brooklyn, N. Y., 1964, crp. 217-233. 39. R. W. Wood, Phys. Rev. 48, 928 (1955).
- 40. С. А. Масалов, Дифракция электромагнитных волн на решетках, составленных из брусьев прямоугольного поперечного сечения, Диссертация (Харьков, 1965).
- 41. В. Г. Сологуб, Возбуждение электромагнитных воли в некоторых типах открытых структур (Диссертация, ИРЭ АН УССР, Харьков, 1967).
   42. J. Sam, J. Math. Phys. 8 (5), 1053 (1967).
   43. А. R. Neureuther, R. Mittra, Proc. IEEE 55 (12), 2134 (1967).
   44. Б. М. Болотовский, А. Н. Лебедев, ЖӘТФ 53, 1349 (1967).