

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

Конденсаты Бозе – Эйнштейна

Б.Б. Кадомцев, М.Б. Кадомцев

Создание бозе-эйнштейновских конденсатов в атомных газах щелочных элементов, удерживаемых в магнитных ловушках, открыло новую область исследований в физике сверхнизких температур. В статье в простой форме объясняются теоретические основы конденсации Бозе – Эйнштейна в разреженных газах, а затем дается очень краткий обзор экспериментальных результатов.

PACS numbers: 05.30.Jp, 32.80.Pj, 52.55.Lf

Содержание

1. Введение (649).
 2. Основное состояние (650).
 3. Равновесие газа (652).
 4. Плотный газ (653).
 5. Коллективные движения (654).
 6. Элементарные возбуждения (656).
 7. Фононы (657).
 8. Длины рассеяния (658).
 9. Магнитное удержание бозе-конденсата (659).
 10. Эксперименты с бозе-конденсатами (660).
 11. Заключение (661).
 12. Приложения (662).
- 12.1. Акустические солитоны. 12.2. Длина рассеяния.
- Список литературы (663).

1. Введение

В 1995 г. были опубликованы первые три работы [1–3], по созданию и исследованию бозе-эйнштейновских конденсатов в газах щелочных элементов при сверхнизких температурах. Конденсаты из диамагнитных атомов удерживались в миниатюрных магнитных ловушках, дополняемых иногда лазерными "пробками" для управления формой потенциальной ямы. Тем самым скромное семейство бозе-конденсатов, состоявшее всего лишь из сверхтекучего гелия II и экситонных капель, пополнилось новыми членами с необычными и интригующими физическими свойствами. В физике сверхнизких температур открыта новая страница исследований [4, 10].

Создание конденсатов щелочных атомов оказалось возможным благодаря объединению новых идей и

технологий, развитых в других областях физики. Для удержания конденсата создается прежде всего магнитная ловушка. Такие ловушки были предложены вначале для удержания высокотемпературной плазмы: на основе теоретических представлений [11, 12] об устойчивости диамагнитной плазмы в магнитном поле Иоффе с сотрудниками создали магнитную ловушку с квадрупольным стабилизирующим полем [13]. В этой ловушке была впервые продемонстрирована возможность устойчивого магнитного удержания диамагнитной плазмы. Позднее Притчард [14] предложил использовать ловушки такого типа для удержания нейтральных атомов в диамагнитном состоянии.

Заполнение магнитных ловушек газом осуществляется с помощью лазерного охлаждения. Напомним принцип такого охлаждения. Допустим, что в нашем распоряжении имеются лазеры, настроенные на частоту чуть ниже частоты поглощения атомов. Тогда покоящийся атом не сможет поглощать кванты лазерного излучения. Но атом, движущийся навстречу лазерному пучку, благодаря эффекту Доплера, может поглотить квант света. При этом атом получает импульс от кванта в сторону, противоположную направлению движения атома. Через некоторое время возбужденный атом излучит квант света в среднем изотропно по всем направлениям. Таким образом, если облучать атомы со всех сторон одновременно, можно шаг за шагом затормозить их в магнитной ловушке.

Лазерное охлаждение позволяет заполнить ловушку газом при очень низкой температуре. Следующим шагом является испарительное охлаждение газа. Форму потенциальной ямы можно подобрать таким образом, чтобы с добавлением ВЧ-поля более теплые атомы легко уходили за ее пределы. Комбинацией таких методов удается опуститься до субмикрокельвинских температур. При таких температурах и происходит конденсация Бозе – Эйнштейна газов щелочных элементов.

В настоящей статье сначала дается достаточно простое изложение некоторых теоретических аспектов физики конденсатов Бозе – Эйнштейна, а затем кратко описываются результаты соответствующих экспериментов.

Б.Б. Кадомцев, М.Б. Кадомцев. Российский научный центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, пл. Курчатова 1
Тел. (095) 196-98-14
Факс (095) 943-00-73
E-mail: kadomtse@ufn.msk.su

Статья поступила 24 марта 1997 г.

2. Основное состояние

Опишем прежде всего основное состояние разреженного бозе-газа при нулевой температуре. При этом удобно опираться на качественные соображения Фейнмана [15].

Пусть газ находится в сосуде большого объема V . Одна частица в таком газе имеет нормированную волновую функцию $\bar{\psi} = 1/\sqrt{V}$. Пусть в точке $r = 0$ находится точно такая же, но закрепленная при $r = 0$, частица. Наличие второй частицы должно немного изменить волновую функцию первой частицы $\psi(\mathbf{r})$. А именно, допустим, что потенциал взаимодействия между частицами $U(r)$ имеет простейшую форму отталкивания двух упругих шаров:

$$U(r) = \begin{cases} \infty & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r \geq a. \end{cases} \quad (1)$$

Параметр a отвечает величине минимального сближения двух частиц, т.е. он равен диаметру упругого шарика.

Волновая функция $\psi(\mathbf{r})$ должна быть равна нулю при $r = a$, а при $r > a$ она должна удовлетворять уравнению Шрёдингера для свободного движения: $\Delta\psi = 0$. Отсюда находим:

$$\psi(r) = \bar{\psi} \left(1 - \frac{a}{r}\right), \quad \text{где } \bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{V}}. \quad (2)$$

Можно сказать, что функция (2) учитывает S -волну, рассеянную на неподвижном центре.

В выборе решения уравнения Шрёдингера в виде функции (2) имеется одна неточность. Строго говоря, функция $\psi(\mathbf{r})$ должна была бы обратиться в нуль на границе объема V . Поэтому в выражении для средней кинетической энергии ε_0 можно произвести интегрирование по частям, так что

$$\varepsilon_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \psi \Delta \psi \, d\mathbf{r} = \frac{\hbar^2}{2m} \int \bar{\psi}^2 \left(\nabla \frac{a}{r}\right)^2 \, d\mathbf{r},$$

где интегрирование производится по объему V . Прямым интегрированием можно убедиться, что $\varepsilon_0 = 2\pi\hbar^2 a/V$, где учтено, что $\bar{\psi}^2 = 1/V$. Величина ε_0 , безусловно, очень мала, если объем V является макроскопическим. Поэтому приближение (2) может считаться вполне обоснованным.

Допустим теперь, что в сосуде объемом V находится $N \gg 1$ тождественных частиц. Будем считать, что газ таких частиц является разреженным, так что $N \ll Va^{-3}$. Волновая функция любых двух частиц на близких расстояниях выглядит как функция (2), где r — взаимное расстояние этих частиц друг от друга. Кинетическую энергию $2\varepsilon_0$ таких частиц можно рассматривать как энергию их взаимодействия. Если величину $2\varepsilon_0$ умножить на число возможных пар частиц $N(N-1)/2 \cong N^2/2$, то мы получим полную энергию частиц $E = N2\pi\hbar^2 na/m$, где $n = N/V$ — плотность частиц. На каждую частицу приходится энергия ε , отличающаяся от ε_0 заменой объема V на объем n^{-1} , приходящийся на одну частицу.

Подойдем теперь к этому вопросу с несколько иных позиций. Очевидно, что на близком расстоянии волновая функция двух частиц не должна сильно отличаться от выражения (2). Поэтому, закрепив одну из частиц в начале координат $\mathbf{r} = 0$, будем искать решение уравне-

ния Шрёдингера для второй частицы в виде:

$$\psi(\mathbf{r}) = \bar{\psi} [1 - \varphi(\mathbf{r})]. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор второй, пробной частицы. Допустим, что все остальные частицы распределены равномерно по объему со средней плотностью $n = (N-2)/V \cong N/V$. Для удобства рассуждений закрепим временно также и пробную частицу с координатами $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$. Пусть \mathbf{r}_j обозначает радиус-вектор частицы с номером j . Взаимодействие пробной частицы с частицей номера j создает волновую функцию вида (2) с той лишь разницей, что $\bar{\psi}$ следует заменить на $\bar{\psi}(\mathbf{r}_j)$ по формуле (3), а величину r следует заменить на $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|$. Тем самым мы учитываем перераспределение волны пробной частицы на частице j . Имеем

$$\psi(\mathbf{r}) = \bar{\psi} [1 - \varphi(\mathbf{r}_j)] \left[1 - \frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}\right]. \quad (4)$$

Здесь множитель $[1 - \varphi(\mathbf{r}_j)]$ берется в точке \mathbf{r}_j .

Легко видеть, что выражение a/r выглядит как электрический потенциал "заряда" a на расстоянии r от заряда. Если попытаться найти влияние всех частиц на волновую функцию пробной частицы, то следует просуммировать все вклады от многих частиц. В силу очень медленного убывания "потенциала" a/r с радиусом r , другие частицы будут давать далекодействующие вклады, которые следует аккуратно учесть. Функцию $\varphi(r)$ следует считать совпадающей с a/r только на близком расстоянии от второй частицы, а на далеких расстояниях $\varphi(r)$ будет "закранирована" другими частицами. Согласно (4) получаем соотношение

$$\psi(r) \equiv \bar{\psi} \left[1 - \frac{a}{r} - A + \sum_j \frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \varphi(\mathbf{r}_j)\right]. \quad (5)$$

Здесь второе слагаемое в квадратных скобках учитывает результат взаимодействия пробной частицы с частицей, закрепленной при $r = 0$, согласно соотношению (2). А сумма по всем оставшимся частицам, учитывает тот вклад от других частиц, который возник из линейного по $\varphi(\mathbf{r})$ члена в соотношении (4). Кроме того, в соотношении (5) имеется константа A

$$A = \sum_j \varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|), \quad (6)$$

которую мы вычислим несколько позднее.

Если $na^3 \ll 1$, то суммирование в (5) производится по очень большому числу частиц. Поэтому приближенно сумму \sum_j можно заменить на интеграл вида $\int n \, d\mathbf{r}'$ по переменной $\mathbf{r}_j \equiv \mathbf{r}'$. Учитывая, что волновая функция $\psi(r)$ в левой части (5) дается выражением (3), получаем интегральное уравнение для $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = \frac{a}{r} - \int \frac{an}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \varphi(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' + A. \quad (7)$$

Учтем, что функция $1/r$ удовлетворяет уравнению $\Delta(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$. Применяя операцию Δ к уравнению (6), запишем его в виде

$$-\Delta\varphi + \varkappa_0^2\varphi = 4\pi a\delta(\mathbf{r}), \quad (8)$$

где константа $\varkappa_0^2 = 4\pi an$.

Решение уравнения (8) хорошо известно. Оно имеет вид:

$$\varphi(r) = \frac{a}{r} \exp(-\kappa_0 r). \quad (9)$$

Как мы видим, учет вклада от других частиц приводит к "потенциалу Дебая–Хюккеля". В разреженном газе величина $a^2 \kappa_0^2 = 4\pi a^3 N/V$ должна считаться много меньшей единицы, так что "экранировка заряда" происходит на достаточно большом расстоянии от каждого из атомов. Поскольку согласно соотношениям (2), (3) функцию $\varphi(r)$ следует считать равной единице при $r < a$, по решению (9) можно пользоваться только при $r > a$. Поэтому "заряд" в уравнении (8) следовало бы считать расположенным не в центре, а на поверхности сферы радиуса a . Разумеется, при $r > a$ решение не зависит от профиля распределения "заряда".

В вышеприведенных рассуждениях нам иногда приходилось "закреплять частицы". Это было сделано исключительно в целях упрощения формул. На самом деле, любые две взаимодействующие частицы, скажем с номерами i и j , не закреплены. Но сумму лапласианов $\Delta_i + \Delta_j$ можно представить в виде суммы $(1/2)\Delta_R + 2\Delta'$, где Δ_R – лапласиан по отношению к координате центра масс $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j)/2$, а Δ' – лапласиан относительного движения с координатой $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Двойка перед Δ' соответствует появлению приведенной массы $m_* = m/2$. При свободном движении частиц с покоящимся центром масс $\Delta_R \psi = 0$, $\Delta' \psi = 0$, так что соотношения (2), (3) (9) остаются в силе, но относятся к волновой функции двух частиц при $r = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ (с учетом экранировки, производимой многими частицами).

В выражении (6) для константы A можно опять заменить сумму на интеграл, так что в газовом приближении ($na^3 \ll 1$) получаем

$$A = \frac{4\pi a n}{\kappa_0^2} = 1.$$

Найдем теперь энергию пробной частицы, возникающую из-за взаимодействия с другими $N - 1 \cong N$ частицами. Она равна

$$\varepsilon = N \int_a^{R_0} \left(\psi \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi \right) 4\pi r^2 dr. \quad (10)$$

Здесь радиус $R_0 \gg a$ формально выбран таким образом, чтобы удовлетворялось условие нормировки $4\pi R_0^2 \bar{\psi}^2 / 3 = 1$. Поскольку волновая функция $\psi(r) = \bar{\psi} [1 - \varphi(r)]$ обращается в нуль при $r = a$ и функция $\varphi(r)$ достаточно быстро убывает с r , то в соотношении (10) можно произвести интегрирование по частям, так что $\psi \Delta \psi$ заменится на $-\bar{\psi}^2 (\nabla \varphi)^2$. В газовом приближении получим

$$\varepsilon = \hbar^2 \kappa_0^2 / 2m = \frac{2\pi \hbar^2 a n}{m}. \quad (11)$$

Эта энергия была вычислена нами при закреплённой второй частице. Более правильным было бы вычисление энергии двух частиц при заданной функции $\varphi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ относительного движения. Переходя к относительной переменной $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, мы получим энергию с приведенной массой $m/2$ с взаимодействием, зависящим от $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. В результате суммарная энергия (покоящейся пары частиц)

удвоится, но на каждую из частиц придется прежняя энергия ε .

Полная энергия частиц в газовом приближении равна $E = N\varepsilon$, т.е.

$$E = N\varepsilon = \frac{2\pi \hbar^2 a n^2}{m} V. \quad (12)$$

Ее иногда будет удобно представлять в виде

$$E = \frac{2\pi \hbar^2 a N^2}{mV}. \quad (13)$$

Выражение (3) было написано нами для случая взаимодействия пробной частицы с одной единственной второй частицей (с последующим учетом экранировки). В общем случае волновую функцию индивидуальной частицы с номером i следует записать в виде

$$\psi(\mathbf{r}_i) = \bar{\psi} \left\{ 1 + A - \sum_{j \neq i} \varphi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \right\}, \quad (14)$$

где $\bar{\psi}$ может быть функцией \mathbf{r}_i , но в однородном конденсате $\bar{\psi} = \text{const} = 1/\sqrt{V}$. Здесь константа A добавлена нами для компенсации среднего значения от суммы. В газовом приближении $A = 1$.

Как мы видим, функция (14) зависит от координат всех остальных частиц, т.е. она не может считаться вполне независимой одночастичной функцией, в то время как $\bar{\psi}$ является одночастичной функцией. В силу неразличимости частиц общая волновая функция N частиц может быть записана в виде произведения индивидуальных функций вида (14):

$$\Psi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N) = \bar{\psi}^N \prod_i \left\{ 1 + A - \sum_j \varphi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right\}. \quad (15)$$

Однако, если индекс i пробегает все возможные значения, то каждое из парных взаимодействий будет учтено дважды. Поэтому можно было бы попытаться считать $j > i$, но при такой записи трудно усмотреть симметричность функции (15). Поэтому мы поступим несколько иным образом. Учитывая, что в газовом приближении $A = 1$, а величину $1 - \sum_j \varphi(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ можно считать малой, представим произведение (15) в виде

$$\Psi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N) = \bar{\psi}^N \exp \left\{ \frac{N}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \varphi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \right\}, \quad (16)$$

где первое слагаемое в фигурных скобках компенсирует среднее значение суммы по $i \neq j$. Выражение (16) не является вполне точным при $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \sim a$, но оно удобно для получения общего представления о структуре многочастичной волновой функции.

Выражение (16) полностью симметрично относительно перестановок частиц. Каждый из сомножителей $\bar{\psi}$ в общем случае конденсата во внешнем поле должен считаться функцией только от одной из координат, скажем $\bar{\psi}(\mathbf{r}_i)$. В случае однородного конденсата экспонента в (16) дает лишь малую поправку к нормировке, так что по-прежнему

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{V}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{N}}, \quad (17)$$

для каждой из тождественных частиц.

Нетрудно убедиться, что функция (16) удовлетворяет уравнению Шрёдингера свободного движения в области $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| > a$. В самом деле, любой из операторов вида Δ_s при действии на функцию (16) выбирает члены $\varphi(|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_j|) + \varphi(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_s|)$ суммы, так что в результате получаются суммы вида

$$\sum_j \Delta_s \varphi(|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_j|) - \sum_{jk} \nabla_s \varphi(|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_j|) \nabla_s \varphi(|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_k|).$$

В первой сумме $\Delta_s \varphi$ можно заменить на $\kappa_0^2 \varphi$ согласно соотношению (8) в области $r > a$. А во второй сумме достаточно сохранить лишь члены с $j = k$ (остальные сокращаются в силу симметрии). Если опять перейти к интегрированию вместо суммирования, то нетрудно увидеть, что полная энергия равна нулю. Этот результат вполне естествен, поскольку мы построили наше решение путем перекомпозиции исходных решений вида (1) с нулевой энергией. Что касается энергии взаимодействия (12), то ее можно получить с помощью усреднения полного гамильтониана свободного движения частиц с функцией (16) и с использованием интегрирования по частям.

Поскольку индивидуальные функции (14) выглядят совершенно одинаково для всех частиц, то для описания конденсата можно пользоваться именно функциями (14), опуская индекс "i" при \mathbf{r}_i . Если речь идет о равновесии или о коллективных комбинациях конденсата, то функцию (14) следует считать зависящей от координат и времени.

3. Равновесие газа

Зная выражение (13) для полной энергии газа, можно найти его давление p с помощью хорошо известного термодинамического соотношения

$$p = - \frac{\partial E}{\partial V} = \frac{2\pi\hbar^2 a N^2}{mV^2} = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m} n^2 = \varepsilon n. \quad (18)$$

Так как уравнение адиабаты выглядит как $pV^\gamma = \text{const}$, то согласно (18) показатель адиабаты $\gamma = 2$.

Найдем еще квадрат скорости звука c_s^2 :

$$c_s^2 = \frac{1}{m} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m^2} n. \quad (19)$$

Отсюда видно, что энергию частицы ε можно представить в виде

$$\varepsilon = \frac{mc_s^2}{2}. \quad (20)$$

Если к конденсату добавить одну частицу при постоянном давлении, то его энергия возрастет на величину $\varepsilon + p/n$, поскольку объем, приходящийся на одну частицу, равен $V/N = 1/n$. Отсюда видно, что химический потенциал $\mu = 2\varepsilon$. Именно химический потенциал и следует считать равным энергии, рассчитанной на одну частицу.

Допустим, что рассматриваемый нами газ находится во внешнем потенциале $U(\mathbf{r})$. Тогда из условия равновесия

$$\nabla p + n \nabla U = 0 \quad (21)$$

находим

$$n = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a} (U_0 - U). \quad (22)$$

Константа U_0 должна находиться из условия нормировки $\int n dV = N$.

Рассмотрим сначала простейший пример, когда газ находится в поле силы тяжести. При этом $U = mgz$, где z — вертикальная координата. Тогда плотность $n(z)$ будет убывать с высотой по линейному закону:

$$n(z) = n_0 - \frac{m^2 g}{4\pi\hbar^2 a} z. \quad (23)$$

Здесь $n_0 = n(z=0)$. При $z = H = 4\pi\hbar^2 a n_0 / m^2 g$ плотность газа обращается в нуль. Это значит, что бозе-газ можно "налить в сосуд" (рис. 1), и при этом его плотность будет возрастать с глубиной по линейному закону. Получается что-то среднее между жидкостью и газом.

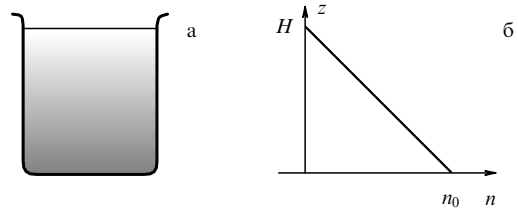


Рис. 1. Разреженный бозе-газ при нулевой температуре можно "налить в сосуд". Его плотность $n(z)$ меняется линейно с z от $n = n_0$ вблизи дна сосуда до $n = 0$ на высоте H . Высота H определяется соотношением $H^2 = 8\pi\hbar^2 a N / m^2 g S$, где N — полное число частиц, S — площадь сосуда.

С помощью (23) нетрудно получить соотношение

$$H^2 = \frac{8\pi\hbar^2 a N}{m^2 g S}. \quad (24)$$

Оно определяет высоту H слоя "налитого" в сосуд газа при заданных числе частиц N и площади сосуда S . Как мы видим, глубина слоя газа H возрастает с N/S по закону $H \sim (N/S)^{1/2}$.

Более реалистичным представляется сферически симметричный осцилляторный потенциал

$$U = \frac{\alpha r^2}{2}, \quad (25)$$

где α — "коэффициент упругости". Обозначим через n_0 плотность газа при $r = 0$ и через $\varepsilon_0 = 2\pi\hbar^2 a n_0 / m$ энергию частицы при $r = 0$. Тогда распределение (22) может быть представлено в виде

$$n = n_0 - \frac{n_0}{2\varepsilon_0} U = n_0 \left(1 - \frac{\alpha}{4\varepsilon_0} r^2 \right). \quad (26)$$

Как мы видим, плотность газа убывает с r по параболическому закону, обращаясь в нуль при $r = r_0 = 2(\varepsilon_0/\alpha)^{1/2}$. С помощью соотношения (26) и условия нормировки находим

$$n_0 = \frac{15^{2/5}}{8\pi} \left(\frac{\alpha m}{\hbar^2 a} \right)^{3/5} N^{2/5}, \quad (27)$$

$$r_0^2 = \frac{8\pi\hbar^2 a}{\alpha m} n_0 = 15^{2/5} \left(\frac{\hbar^2 a}{\alpha m} \right)^{2/5} N^{2/5}. \quad (28)$$

Как мы видим, плотность газа в центре "капли" возрастает с числом частиц как $N^{2/5}$, а объем "капли" бозе-газа возрастает как $N^{3/5}$.

Найдем еще некоторые соотношения. С помощью (11) и (22) находим

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(U_0 - U). \quad (29)$$

Отсюда следует, что у частицы сохраняется величина

$$\mu + U = 2\varepsilon + U = U_0 = \text{const}, \quad (30)$$

где $\mu = 2\varepsilon$ — химический потенциал.

Второе интересное соотношение можно получить из (20) и (29):

$$mc_s^2 + U = U_0 = \text{const}. \quad (31)$$

Из него следует, что скорость звука обращается в нуль на границе "капли газа", т.е. при $U = U_0$. При "погружении" внутрь "капли" скорость звука возрастает, достигая максимума при $U = 0$, т.е. в центре капли: $c_s(0) = \sqrt{U_0/m}$.

4. Плотный газ

Чтобы узнать, какова область применимости написанных выше простых соотношений в газовом приближении, полезно выяснить, что происходит при повышении плотности. Не претендуя на количественно точные выражения, попытаемся найти приближенные соотношения, которые показали бы, в каком направлении следует ожидать изменений в полученных соотношениях. При этом в качестве отправной можно принять идею об "экранировке" волновых функций согласно соотношениям (3), (8), (14). Кроме того, оказывается удобным поочередно рассмотреть разные эффекты, возникающие при повышении плотности, и только затем можно просуммировать их вместе.

Первый эффект, который мы здесь рассмотрим, состоит в следующем. При составлении соотношений (4), (5) мы предполагали, что функция $\varphi(\mathbf{r}_j)$ слабо изменяется на длине порядка a , что и позволило записать отклик на функцию $\varphi(\mathbf{r}_j)$ в виде $a\varphi(\mathbf{r}_j)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|$. При значениях параметра κa не очень малых следует учитывать изменение $\varphi(\mathbf{r}_j)$ на размере $\sim a$. Если $\nabla\varphi(\mathbf{r}_j) \neq 0$, то из требования обращения в нуль волновой функции пробной частицы на границе шарика радиуса a в точке \mathbf{r}_j следует выражение

$$\psi(r) = \bar{\psi} \left[1 - \frac{b}{r} + \sum_j \frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \varphi(\mathbf{r}_j) + \sum_j \frac{a^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \nabla\varphi(\mathbf{r}_j) \right], \quad (32)$$

где b — не известная пока константа. Мы учли в (32) дипольный вклад, кроме ранее использованного центрально-симметричного вклада, т.е. к рассеянной S -волне мы добавили P -волну. Если опять заменить сумму на

интеграл, то вместо (6) получим интегральное уравнение

$$\varphi(r) = \frac{b}{r} - \int \frac{an}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \varphi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \int \frac{na^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla\varphi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (33)$$

где параметр b должен быть найден из условия $\varphi(a) = 1$.

К этому уравнению можно опять применить операцию Δ с учетом соотношения $\Delta(\mathbf{d}\mathbf{r}/r^3) = 4\pi(\mathbf{d}\nabla)\delta(\mathbf{r})$, где \mathbf{d} — произвольный постоянный вектор (дипольный момент). После интегрирования с $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ функцией получим

$$-(1 + \kappa_0^2 a^2)\Delta\varphi + \kappa_0^2\varphi = 4\pi b\delta(\mathbf{r}). \quad (34)$$

Введем новое обозначение

$$\kappa^2 = \frac{\kappa_0^2}{1 + \kappa_0^2 a^2}. \quad (35)$$

Тогда решение уравнения (34) можно записать в виде

$$\varphi(r) = \frac{a}{r} \exp[-\kappa(r - a)]. \quad (36)$$

Это выражение по внешнему виду выглядит, как уточнение выражения (8). Параметр κ , согласно (35), возрастает линейно с плотностью при малых плотностях, а при больших плотностях насыщается на величине $\kappa = 1/a$.

С помощью функции (36) нетрудно найти энергию ε одной частицы. Она оказывается равной

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 \kappa_0^2}{2m} \left(1 + \frac{a\kappa}{2} \right), \quad (37)$$

где κ дается выражением (35). При малых плотностях поправка $a\kappa/2 \cong a\kappa_0/2 = \sqrt{\pi a^3 n}$, а при больших плотностях эта поправка равна $1/2$.

Пользуясь полученными соотношениями, обсудим качественно некоторые свойства сверхтекучего гелия. При этом параметр $a^2 \kappa_0^2$ можно считать большим, так что выражение в круглых скобках соотношения (37) равно просто 1,5. Это выражение описывает ту часть кинетической энергии атомов гелия, которая относится к далекой части распределения волновых функций, т.е. когда пробные атомы расположены далеко друг от друга. Но, кроме того, следует учесть потенциальную энергию взаимодействия атомов и ту часть кинетической энергии (энергию нулевых колебаний), которая связана с локализацией атомов вблизи минимумов потенциальной энергии. Эту вторую часть энергии назовем условно потенциальной энергией U_s . Ее можно считать функцией от плотности атомов. Вблизи минимума, $U_s = -U_m$, ее можно представить в виде параболической функции от разности $n - n_0$, где n_0 соответствует плотности с минимальной потенциальной энергией. Таким образом, суммарную энергию, приходящуюся на один атом, можно представить в виде

$$\varepsilon = \frac{3\pi\hbar^2 an}{m} - U_m + \frac{3\pi\hbar^2 an}{2mn_0} B(n - n_0)^2. \quad (38)$$

Здесь квадратичный по разности $(n - n_0)$ член мы записали таким образом, чтобы он был размерно сходен с первым слагаемым (константа B является безразмерной).

Из условия $\partial\varepsilon/\partial n = 0$ нетрудно найти выражение для равновесной плотности и равновесного значения потенциальной энергии U_0 :

$$\frac{n}{n_0} = 1 - \frac{1}{B}, \quad U_0 = U_m - \frac{3\pi\hbar^2 a n_0}{3mB}. \quad (39)$$

Условие $\partial\varepsilon/\partial n = 0$ эквивалентно равенству нулю внешнего давления. С помощью соотношений (18), (19), (38) находим новое выражение для квадрата скорости звука:

$$c_s^2 = \frac{n^2}{m} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n^2} = \frac{3\pi\hbar^2 a n^2 B}{m^2 n_0} = \frac{3\pi\hbar^2 a n}{m^2} (B - 1). \quad (40)$$

Это выражение содержит один неизвестный параметр B . Сравнивая выражение (40) с экспериментальным значением $c_s = 2,4 \times 10^4$ см с^{-1} и зная значения $a = 2,7 \times 10^{-8}$ см, $n = 2,2 \times 10^{22}$ см $^{-3}$, находим $B \cong 5$, что представляется разумным. Кроме того, с помощью соотношений (22), (40) находим

$$U_m = \frac{4\pi\hbar^2 n a}{m} - \frac{3\pi\hbar^2 a n_0}{2mB}. \quad (41)$$

С помощью известных значений для n , a , B нетрудно проверить, что второе слагаемое в (41) не превышает 20% от первого слагаемого. По абсолютной величине значение U_m представляется вполне разумным, если иметь в виду, что у каждого атома имеется шесть ближайших соседей, а потенциал парного притяжения атомов имеет порядок величины нескольких градусов Кельвина.

Заметим, что экспериментальное значение квадрата скорости звука в гелии II примерно в три раза больше (19), так что без учета близкосодействующих сил притяжения скорость звука в гелии II вычислить нельзя.

5. Коллективные движения

Вернемся опять к случаю разреженного газа. Согласно (16) волновая функция атомов газа может быть представлена в виде

$$\Psi = \Psi_0 \Phi \equiv \bar{\psi}^N \exp \left[1 + N - \sum_{i \neq j} \varphi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \right]. \quad (42)$$

В покоящемся однородном газе $\Psi_0 = \bar{\psi}^N = V^{-N/2}$. Но если газ привести в движение со скоростью \mathbf{v} , то каждая из волновых функций $\bar{\psi}$ приобретет фазовый множитель $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_i)$, где $\mathbf{k} = m\mathbf{v}/\hbar$. Поэтому функция Ψ_0 станет равной

$$\Psi_0 = V^{-N/2} \exp(i\mathbf{K}\mathbf{R}), \quad (43)$$

где $\mathbf{R} = N^{-1} \sum \mathbf{r}_j$ — координата центра масс, $\mathbf{K} = M\mathbf{v}/\hbar$, $M = mN$ — масса газа.

Волновую функцию Ψ_0 конденсата в случае более сложных течений можно представить в виде

$$\Psi_0 = V^{N/2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_i \theta(\mathbf{r}_i) \right], \quad (44)$$

где функция θ определяет скорость \mathbf{v} соотношением

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m} \nabla \theta. \quad (45)$$

В случае конденсата при нулевой температуре функция Ψ_0 равна произведению $\bar{\psi}^N$, поэтому все рассуждения относительно Ψ_0 можно вести в терминах индивидуальных функций $\bar{\psi}$. В общем случае $\bar{\psi}$ следует считать функцией времени t и координаты \mathbf{r} любой из тождественных частиц. Если $\bar{\psi}$ зависит от \mathbf{r} , то нормировать на единицу нужно $|\bar{\psi}(\mathbf{r})|^2$. А величину $N|\bar{\psi}(\mathbf{r})|^2$ следует считать равной плотности частиц $n(\mathbf{r})$, так что $\int n dV = N$.

Составим теперь уравнение Шрёдингера для волновой функции (42):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi. \quad (46)$$

Здесь гамильтониан H равен сумме кинетических энергий N частиц при дополнительном граничном условии обращения в нуль волновой функции на границе минимального сближения любых двух атомов. Если функции $\bar{\psi}$ мало меняются на расстояниях порядка κ^{-1} , то для функции Φ можно сохранить стационарное решение (42): $H\Phi = N\varepsilon\Phi$. В этом случае течения конденсата описываются функцией Ψ_0 , которая равна произведению одиночных функций $\bar{\psi}$. Таким образом, течения конденсата можно описывать в терминах одиночных волновых функций.

Составим теперь уравнение Шрёдингера для волновой функции одиночной частицы $\bar{\psi}$. При этом, казалось бы, мы должны были бы учесть в ее гамильтониане коллективный вклад только в виде энергии ε . Однако это не совсем так. Дело в том, что энергия $N\varepsilon$ получена суммированием "парных взаимодействий". Можно сказать, что $N\varepsilon = N(N-1)2\varepsilon_0/2$, где $2\varepsilon_0$ — энергия парного взаимодействия, т.е. кинетическая энергия двух частиц при условии обращения в нуль волновой функции на границе их минимального сближения. Энергия взаимодействия некоторой частицы со всеми остальными частицами равна $2\varepsilon_0(N-1) = 2\varepsilon = \mu$, т.е. удвоенной энергии ε или химическому потенциалу. Одна доля ε принадлежит самой частице, а другая доля ε находится в конденсате, но связана с присутствием данной пробной частицы. Таким образом, уравнение для волновой функции $\bar{\psi}$ одиночной частицы следует записать в виде

$$i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \bar{\psi} + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} N |\bar{\psi}|^2 \bar{\psi} + U \bar{\psi}. \quad (47)$$

Это нелинейное уравнение Шрёдингера получило название уравнения Гросса – Питаевского [16–19]. В уравнении (47) величина $U(\mathbf{r})$ представляет собой потенциальную энергию частицы, а величина $N|\bar{\psi}|^2$ равна локальной плотности $n(\mathbf{r})$. Входящую в (47) величину $\sqrt{N}\bar{\psi}$ представим в виде

$$\sqrt{N}\bar{\psi} = \sqrt{n} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \theta(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (48)$$

Подставим это выражение в (47) и разделим мнимую и действительную части. Тогда мы получим два уравнения

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}) = 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla \theta)^2 = -\frac{4\pi\hbar^2 a}{m} n - U + \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\Delta n}{n}, \quad (50)$$

где $\mathbf{v} = \nabla \theta/m$.

Покажем, что в квазиклассическом приближении мы получаем уравнения идеальной газодинамики. Для этого пренебрежем последним членом в правой части уравнения (50) и возьмем градиент от этого уравнения. Тогда получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) = 0, \quad (51)$$

$$m \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \right] + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \nabla n + \nabla U = 0. \quad (52)$$

Отсюда видно, что условие равновесия конденсата выглядит как

$$\frac{4\pi\hbar^2 a n}{m} + U = 2\varepsilon + U = \text{const}. \quad (53)$$

Как мы видим, оно совпадает с уравнением (30). Отсюда видно, что рассмотренное в разделе 3 равновесие конденсата не учитывает "квантового давления", описываемого последним слагаемым в уравнении (50). Подчеркнем еще раз, что уравнения (51), (52) относятся только к безвихревым течениям: $m\mathbf{v} = \nabla\theta$. Их можно записать в форме уравнений газодинамики с давлением $p = 2\pi\hbar^2 a n^2/m$. Поэтому эти уравнения имеют решения газодинамического вида.

Например, при $U \equiv 0$ можно искать решения, зависящие только от x, t . В частности, если считать, что плотность n является функцией от скорости v , то мы придем к решению типа волны Римана или прогрессивной волны. Эта волна описывается уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \pm c_s) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (54)$$

$$\sqrt{n} = \sqrt{n_0} \pm v \sqrt{\frac{m^2}{16\pi\hbar^2 a}}. \quad (55)$$

Здесь фактически написаны две системы уравнений: для волны, распространяющейся вдоль оси x , и для волны, распространяющейся в обратном направлении. Если выбрать направление оси x вдоль направления распространения волны, то в уравнениях (54), (55) достаточно сохранить лишь знак "+".

В линейном приближении уравнение (54) описывает звуковую волну. А в нелинейном случае оно приводит к волне Римана. В такой волне передний фронт укручивается и приближается к "прокидыванию", так что у производных $\partial v/\partial x$, $\partial^2 v/\partial x^2$ должна появиться особенность. Это означает, что в общем случае нельзя отбрасывать последнее слагаемое в (50), учитывающее дисперсию волны.

Если амплитуда волны невелика, т.е. число Маха $v/c_s \ll 1$, то из уравнения (49) можно найти связь между малым возмущением плотности n' и скоростью v : $n' = n_0 v k / \omega$. Если подставить это выражение в линеаризованное уравнение (50), то при $k \ll \kappa_0$ получим для волны, распространяющейся направо вдоль оси x : $\omega = c_s k + c_s k^3 / 8\kappa_0^2$. Второе слагаемое здесь возникло из-за последнего члена в правой части уравнения (50). С учетом нелинейного члена уравнение для слабонелинейной волны с учетом дисперсии принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v + c_s) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{c_s}{8\kappa_0^2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}. \quad (56)$$

Уравнение такого типа хорошо известно в гидродинамике и в физике плазмы. Оно называется уравнением Кортевега–де Вриза и описывает, например, волны на мелкой воде с учетом положительной дисперсии [20]. Как известно, уравнение вида (56) имеет решения в виде уединенных волн или солитонов:

$$v = -v_0 \cosh^2 \left[\frac{x - (c_s - c)t}{\Delta} \right], \quad (57)$$

где $c = v_0/3$, v_0 — амплитуда солитона. Ширина солитона Δ связана с его амплитудой соотношением

$$\Delta^2 v_0 = \frac{3c_s}{2\kappa_0^2} = \text{const}.$$

У солитона (57) скорость v отрицательна, так что возмущение плотности n' также отрицательно, т.е. солитон выглядит как небольшая "ложбинка" на плотности, движущаяся со скоростью, близкой к c_s .

Если амплитуда солитона v_0 значительно меньше скорости звука, то $\Delta^2 \kappa_0^2 \gg 1$, т.е. солитон оказывается достаточно широким. Наряду с одномерными солитонами можно рассмотреть нелинейные решения, слабо зависящие от поперечной координаты y . Такие решения описываются уравнением Кадомцева–Петвиашвили. В системе координат, движущейся вдоль оси x со скоростью c_s , уравнение Кадомцева–Петвиашвили для дисперсии, описываемой уравнением (56), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{c_s}{8\kappa_0^2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) = \frac{c_s}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (58)$$

Это уравнение имеет решение в виде двумерного солитона, локализованного как по x -, так и y -координатам. Кроме того, после замены правой части (58) на

$$\frac{c_s}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

можно получить решение для трехмерных солитонов (см. приложение).

Если $U \neq 0$, то с помощью уравнений (49), (50) можно описать равновесие и малые колебания конденсата вблизи этого равновесия. Наиболее просто описываются дипольные колебания, когда конденсат как целое смещается на малое расстояние ξ . При этом $v = \dot{\xi}$ (точка означает дифференцирование по времени), а потенциал $\theta = \dot{\xi}x$. При $\hbar^2 = 0$ плотность n в уравнении (50) возмущается на величину $n' = -\xi(\partial n_0/\partial x)$. А соответствующее возмущение первого слагаемого равно просто $-(\partial U/\partial x)\xi$ в силу условия равновесия (53). Поэтому в случае гармонического потенциала $U = (\alpha/2)r^2$ при $\theta = \dot{\xi}x$ получаем

$$m\ddot{\xi} = -\alpha\xi.$$

Как мы видим, "капля конденсата" колеблется по гармоническому закону как свободная частица в потенциале U . Нетрудно получить уравнения и для других типов колебаний, например, для сферических, $\theta = \dot{\xi}r^2$, или квадрупольных, $\theta = \dot{\xi}(x^2 - y^2)$. Для этого достаточно лишь составить соответствующее выражение для функции Лагранжа и затем получить нужное уравнение движения.

Рассмотрим еще решение в виде вихревой нити. Пусть эта нить расположена вдоль оси z цилиндрической системы координат r, ϕ, z . Функция θ у такого решения имеет вид $\theta = \hbar\phi$, так что функция (48) не изменяется при изменении угла ϕ на 2π . В однородном конденсате при $U = 0$ стационарное уравнение (50) с учетом того, что

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{4\pi\hbar^2 a}{m} n_0,$$

принимает вид

$$n \left[\frac{1}{r^2} + 8\pi\hbar^2 a(n - n_0) \right] = \frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dn}{dr} \right). \quad (59)$$

Здесь n_0 — плотность при $r \rightarrow \infty$. Если пренебречь правой частью уравнения (59), то получим просто $n - n_0 = -1/8\pi\hbar^2 r^2 a$. Отсюда видно, что плотность конденсата обращается в нуль при $r \leq (8\pi\hbar^2 a n_0)^{-1/2}$. Радиус образующей полости тем меньше, чем больше плотность n_0 . Поэтому, если n_0 зависит от z , как, например в случае конденсата, "налитого" в сосуд (см. рис. 1), то форма полости (в пренебрежении членом в правой части (59)) будет напоминать воронку в воде, вытекающей из ванны через сливное отверстие (рис. 2).

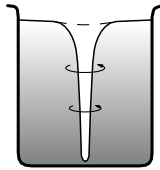


Рис. 2. Вихревая нить в газовом слое, "налитом" в сосуд, при наличии поля тяжести напоминает воронку в воде, вытекающей из ванны через сливное отверстие.

Учет члена в правой части уравнения (59) лишь немного изменяет форму $n(r)$ (см. [21]). Более точные расчеты потоков во вращающемся конденсате, находящемся в магнитной ловушке, были выполнены в работе [22].

6. Элементарные возбуждения

Рассмотрим теперь малые возбуждения в бозе-конденсате. Как мы увидим, они выглядят как своеобразные квазичастицы — фононы. На первый взгляд кажется, что малые возбуждения можно было бы описывать линейризованными уравнениями (49), (50), относящимися к коллективным течениям. Чтобы лучше понять связь между такими коллективными колебаниями и квазичастицами, мы и начнем с линеаризации уравнений (49), (50). При этом величину θ следует считать малой, а плотность n можно представить в виде $n = n_0 + \tilde{n}$, где $n_0 = \text{const}$ — равновесная плотность однородного конденсата, а величина $\tilde{n} \ll n_0$.

Рассмотрим простейшее решение в виде плоской волны: $\tilde{n} = n' \cos(\omega t - kx)$; $\theta = \theta' \sin(\omega t - kx)$. Тогда из уравнений (49), (50) получаем

$$m\omega n' = n_0 k^2 \theta'; \quad m^{-1} n_0 \omega \theta' = c_s^2 n' + \frac{\hbar^2 k^2 n'}{4m^2}, \quad (60)$$

где $c_s^2 = 4\pi\hbar^2 n_0 a / m^2$.

Из уравнений (60) находим дисперсионное соотношение для частоты:

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2} = \hbar^2 k^2 \left(\kappa_0^2 + \frac{k^2}{4} \right) m^{-2}. \quad (61)$$

В обозначениях $\varepsilon_B = \hbar\omega$, $p = \hbar k$ соотношение (61) выглядит как

$$\varepsilon_B = \left[p^2 c_s^2 + \frac{p^4}{4m^2} \right]^{1/2}. \quad (62)$$

Это хорошо известное выражение Боголюбова для спектра элементарных возбуждений в бозе-газе. Частоту ω в соотношении (61) условимся обозначать через ω_B , так что $\varepsilon_B = \hbar\omega_B$. В соотношении (62) мы оставили только знак плюс в правой части, хотя формально ω может иметь любой знак.

Как видно из соотношения (61), при $k^2 \ll \kappa_0^2$ частота $\omega \cong kc_s$, т.е. мы имеем просто звуковую волну. А при $k^2 \gg \kappa_0^2$ происходит переход к свободной квантовой частице: частица со столь большим импульсом не имеет возможности "почувствовать" корреляции своего движения с возмущениями конденсата.

Из выражения (48) для $\tilde{\psi}$ видно, что в линейном приближении волновая функция равна

$$\psi = \bar{\psi} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{n}}{n_0} + \frac{i}{\hbar} \theta \right) \equiv \bar{\psi} (1 + \tilde{\psi}), \quad (63)$$

где $\bar{\psi} = 1/\sqrt{V}$.

Поскольку все $\tilde{\psi}(\mathbf{r}_j)$ считаются тождественными, то в линейном приближении имеем

$$\Psi = \bar{\psi}^N \left[1 + \sum_j \tilde{\psi}(\mathbf{r}_j) \right]. \quad (64)$$

Функции $\tilde{\psi}(\mathbf{r}_j)$ в линейном приближении считаются очень малыми, поэтому выражение (64) можно записать в эквивалентной форме

$$\Psi = \bar{\psi}^N \exp \left[\sum_j \tilde{\psi}(\mathbf{r}_j) \right]. \quad (65)$$

Отсюда видно, что волновая функция N частиц может быть представлена в виде произведения однотипных сомножителей вида $\bar{\psi} \exp[\tilde{\psi}(\mathbf{r}_j)]$. Поэтому линеаризованная функция (63) должна удовлетворять линеаризованному уравнению для коллективной моды. Другими словами, волновая функция $\tilde{\psi}$ должна удовлетворять линеаризованному уравнению (47).

В нулевом приближении получаем просто уравнение равновесия. При очень большом числе частиц N оно принимает вид $m c_s^2 + U = 0$, что соответствует малости первого слагаемого в правой части (47), т.е. малости кинетической энергии. В следующем приближении имеем

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \tilde{\psi} + m c_s^2 (\tilde{\psi} + \tilde{\psi}^*) + U \tilde{\psi}. \quad (66)$$

Если $U = 0$, то решение этого уравнения можно искать в виде плоской волны, так что полная волновая функция одиночной частицы принимает вид

$$\psi = \bar{\psi} [1 + b_1 \exp(-i\omega t + ikx) + b_2 \exp(i\omega t - kx)]. \quad (67)$$

Эту волновую функцию хотелось бы рассматривать как суперпозицию трех состояний: конденсата и двух возбуждений с положительной и отрицательной частотами. Однако такая прямая интерпретация сталкивается с формальной математической трудностью. Дело в том, что уравнение (66) содержит не только ψ , но и ψ^* , поэтому ψ может удовлетворять принципу суперпозиции только с действительными коэффициентами, комбинируя различные решения вида (67). А в каждом из таких решений амплитуды b_1, b_2 связаны между собой определенными соотношениями, следующими из однородных уравнений для этих амплитуд. Например, если b_1, b_2 считать действительными числами, то при $\omega > 0$ нетрудно получить соотношение

$$\frac{b_1}{b_2} = - \left(1 + \frac{k^2}{2\kappa_0^2} + \frac{k}{\kappa_0} \sqrt{1 + \frac{k^2}{4\kappa_0^2}} \right). \quad (68)$$

Отсюда видно, что при $k^2 \gg \kappa_0^2$ амплитуда b_2 мала, так что у волновой функции (67) остается только первая экспонента с положительной частотой, описывающая свободную частицу. Но при $k^2 \ll \kappa_0^2$ получаем $b_2 = -b_1$, так что обе амплитуды оказываются равными по абсолютной величине.

Тем не менее решения с положительной и отрицательной частотами могут существовать независимо друг от друга. Это легко показать с помощью следующих рассуждений.

Как нетрудно видеть, уравнение (47) инвариантно относительно преобразования $\psi \rightarrow \bar{\psi} \exp(i\alpha)$, где α — произвольный угол. Естественно, что и решение (67) инвариантно относительно такого преобразования. Возьмем теперь функцию (67) и составим с помощью ее новое решение ψ_α с помощью суперпозиции

$$\psi_\alpha(x, t) = \exp(i\alpha)\psi \left(x, t + \frac{\alpha}{\omega} \right) + \exp(-i\alpha)\psi \left(x, t - \frac{\alpha}{\omega} \right). \quad (69)$$

Такая суперпозиция, очевидно, является решением исходного линеаризованного уравнения. Нетрудно теперь установить, что при $\alpha = \pi/4$ решение (69) превращается в суперпозицию волновых функций конденсата и экспоненты с положительной частотой. Аналогичным образом можно построить решение в виде суперпозиции конденсата и экспоненты с отрицательной частотой. В этом смысле волновую функцию вида (67) действительно можно считать аналогом суперпозиции конденсата и двух волновых функций вида $\exp(-i\omega t + ikx)$ и $\exp(i\omega t - ikx)$. Такая суперпозиция реально может возникнуть при взаимодействии конденсата с некоторой внешней системой на частоте ω .

Однако физически более реальной представляется ситуация, когда в конденсате создается возмущение с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$. Тогда в качестве единственного состояния возникнет конденсат из $N - 1$ частиц и один фотон с волновой функцией $\psi \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Можно сказать, что в отсутствие жесткой когерентной связи с внешней системой, бозе-конденсат может существовать либо в основном состоянии, либо в состоянии с одним (или несколькими) фотонами.

Если в бозе-газе возбуждаются фотоны с разными волновыми числами, то в силу линейности уравнений для малых колебаний они ведут себя независимо друг от

друга (если не учитывать их нелинейного взаимодействия).

В неоднородном конденсате описание фононов в виде плоских волн нужно понимать в смысле квазиклассического приближения в терминах волновых пакетов. Нетрудно представить себе следующую картину создания возбуждений. Пусть в начальном состоянии имеется конденсат из N_s частиц. Если добавить к этому конденсату частицу с нулевым значением химического потенциала, то мы получим конденсат из $N_s + 1$ частиц. А если вновь добавляемая частица имеет энергию $\hbar\omega$, то внутри конденсата она проявит себя как фотон с той же самой энергией $\hbar\omega$. Добавляя частицу за частицей, можно построить систему из $N = N_s + N_p$ частиц, в которой N_s частиц находится в конденсате, и кроме того, имеется N_p различных возбуждений. Если потенциал $U(\mathbf{r})$ понизить на периферии конденсата до нуля, то N_p возбуждений вылетят наружу в виде свободных частиц, оставив внутри только N_s частиц конденсата.

7. Фононы

Возбуждения со спектром Боголюбова (62) условимся называть фононами. При $k^2 \ll 4\kappa_0^2$ энергия фонона $\hbar\omega_{\text{В}}$ приближенно равна $\hbar kc_s$. А при $k^2 \gg 4\kappa_0^2$ энергия $\hbar\omega_{\text{В}}$ соответствует кинетической энергии свободной частицы: $\hbar\omega_{\text{В}} = \hbar^2 k^2 / 2m$. Переход от кванта звука к частице приближенно можно считать происходящим при $k = 2\kappa_0$.

Допустим, что газ находится в потенциальной яме $U(\mathbf{r})$, отсчет которой выбран таким образом, что $mc_s^2 + U(\mathbf{r}) = 0$. Это значит, что на границе конденсата, где плотность $n(\mathbf{r})$ обращается в нуль, $U(\mathbf{r}) = 0$. А в центре конденсата U достигает своего минимума, равного $-U_0$: мы в самом деле имеем "яму". Отсюда видно, что скорость звука является функцией точки: она обращается в нуль на границе конденсата и достигает максимума в центре ямы.

Рассмотрим теперь некоторый фотон с энергией $\hbar\omega$. Волновую функцию такого фонона можно представить себе в виде волнового пакета $a(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, где огибающая пакета $a(\mathbf{r})$ имеет размеры, гораздо большие $1/k$. В силу закона сохранения энергии частота $\omega = \text{const}$, т.е. она является как бы адиабатическим инвариантом. А вот импульс $\hbar\mathbf{k}$ такого пакета оказывается функцией координат. Для каждого значения частоты ω можно найти такую точку, где удовлетворится соотношение

$$\omega = kc_s = \frac{\hbar k^2}{2m}. \quad (70)$$

В этой точке $k = 2m c_s / \hbar = \omega / c_s$, т.е.

$$c_s^2 = \frac{4\pi\hbar^2 n a}{m^2} = \frac{\hbar\omega}{2m}. \quad (71)$$

Из этого соотношения находим плотность в точке "превращения" фонона в частицу:

$$n = \frac{m\omega}{8\pi\hbar a}. \quad (72)$$

По мере увеличения энергии $\hbar\omega$ точка превращения фонона в частицу передвигается все глубже и глубже в конденсат, пока n не достигнет своего максимального значения $n_{\text{max}} = n(0)$. Таким образом, при частотах

$$\omega > \frac{8\pi\hbar n(0)a}{m} \quad (73)$$

все элементарные возбуждения являются свободными частицами.

В области с плотностью, большей, чем (72), возбуждения являются фононами с дисперсией $\omega = c_s k$. Отсюда видно, что импульс фонона $p = \hbar k = \omega/c_s$ увеличивается по мере того, как фонон распространяется от центра ямы к его периферии. При плотности (72) он превращается в свободную частицу и его импульс остается постоянным вплоть до самой границы ямы, т.е. $U = 0$. При вылете за пределы ямы его импульс начинает уменьшаться в силу закона сохранения энергии

$$\frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}) = \hbar\omega = \text{const.} \quad (74)$$

Из этого соотношения можно найти то расстояние, до которого может пройти данная частица. Такие частицы образуют газовое гало вокруг конденсата, если температура газового облака не равна нулю. Таким образом, с точки зрения импульса частица находится в некоторой эффективной потенциальной яме $U_p(\mathbf{r})$, одномерный вариант которой изображен на рис. 3.

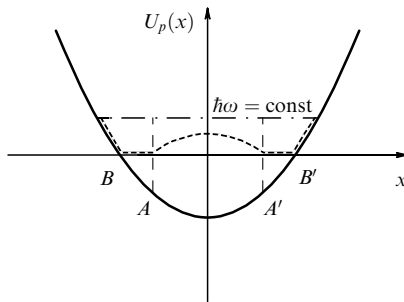


Рис. 3. Эффективная потенциальная яма $U_p(x)$ для фонона с энергией $\hbar\omega = \text{const}$. Снаружи от точек A, A' элементарное возбуждение становится свободной частицей, находящейся в потенциале $U_p(x)$, изображенном пунктирной линией. А внутри точек A, A' импульс частицы $p = \hbar k = \hbar\omega/c_s$. Так как внутри конденсата плотность газа меняется таким образом, что удовлетворяется соотношение $mc_s^2 = -U(x)$, то квадрат импульса фонона $p^2 = \hbar^2\omega^2/c_s^2 = m\hbar^2\omega^2/|U(x)|$. Поэтому с точки зрения импульса эффективная "яма" $U_p(x)$ выглядит так, как изображено пунктирной линией. При $\omega \rightarrow 0$ точки A, A' приближаются к точкам B, B' , а пунктирная линия приближается к отрезку BB' оси x .

Как мы видим, снаружи от точек A, A' возбуждение движется как свободная частица. А внутри точек A, A' частица превращается в фонон, импульс которого меняется таким образом, как если бы он находился на потенциальном холме $U_p(x)$, изображенном пунктирной линией на рис. 3.

Если газ нагревать, то число частиц в конденсате будет уменьшаться, а число возбуждений — фононов увеличиваться. Мысленно построить такое состояние можно, начав с некоторого заданного числа частиц в конденсате, скажем N_s . Тогда уровень отсчета потенциальной энергии $U(x)$ или $U(r)$ можно выбрать так, как указано на рис. 3. При этом конденсат будет находиться в области $U < 0$. Все частицы конденсата имеют энергию, равную нулю. Такое состояние с точки зрения частиц выглядит как бозе-конденсат с нулевой энергией. При

перемещении любой частицы внутри ямы изменение ее потенциальной энергии в точности компенсируется изменением энергии mc_s^2 , возникшей из-за парных взаимодействий с другими частицами. По этой причине форма потенциальной ямы никак не влияет на равенство нулю полной энергии любой частицы конденсата.

Будем добавлять теперь новые "теплые" частицы газовой "нормальной" фазы. Их химический потенциал должен быть равен нулю. Из этого условия можно найти зависимость от температуры числа частиц N_n нормальной фазы. Сумма $N_s + N_n = N$ при этом равна полному числу частиц. Сам конденсат выглядит как совокупность N_s частиц с нулевым химическим потенциалом.

8. Длины рассеяния

Все приведенные выше рассуждения опирались на простейшую модель взаимодействия атомов между собой — модель жестких шаров. На самом деле это взаимодействие выглядит гораздо сложнее. А именно, на далеких расстояниях друг от друга на атомы действует сила Ван-дер-Ваальса с потенциалом $U(r) = -b/r^6$, где b — некоторая константа. Этот потенциал оказывается достаточно глубоким и протяженным, так что в некотором интервале расстояний оказывается применимым квазиклассическое приближение. При этом импульс частицы с почти нулевой энергией изменяется с расстоянием по закону $p \sim r^{-3}$, и соответственно, длина волны де Бройля λ_B зависит от радиуса, как $\lambda_B \sim r^3$. Производная $d\lambda_B/dr$ пропорциональна r^2 , так что при увеличении r можно достигнуть некоторого радиуса r_0 , где эта производная станет больше единицы. Вблизи этого радиуса квазиклассическим приближением пользоваться нельзя.

При очень больших расстояниях, где кинетическая энергия $\varepsilon \gg b/r^6$, снова применимо квазиклассическое приближение. Таким образом, задача о рассеянии сводится к сшивке двух квазиклассических решений в области, где $\varepsilon \approx b/r^6$. Так как в области взаимодействия волновая функция имеет очень много узлов, то величина длины рассеяния a определяется игрой многих специфических особенностей поведения $U(r)$.

Вычислить теоретически величину длины рассеяния очень трудно. Но из условия сшивки квазиклассических волновых функций можно найти "вероятность" того или иного знака длины рассеяния. Оказывается (см. приложение), что взятый наугад щелочной атом имеет "вероятность" положительной длины рассеяния, равную $3/4$, а для отрицательной длины рассеяния эта вероятность равна $1/4$. В частности, в проведенных к настоящему времени трех экспериментах [1–6] у двух веществ длина рассеяния была положительна и только у третьего (^7Li) эта длина отрицательна.

Рассмотрим теперь, как величина длины рассеяния влияет на характеристики бозе-конденсата. Начнем с равновесия. Если умножить правую часть уравнения (47) на $\bar{\psi}$ и проинтегрировать результат по объему, то мы получим величину химического потенциала μ в равновесном состоянии. Если учесть, что согласно (48) в равновесии $\bar{\psi} = \sqrt{n/N}$, то получим

$$N\mu = \int \left(\frac{\hbar^2}{8\pi m} |\nabla n|^2 + g_0 a n^2 + nU \right) dv, \quad (75)$$

где $g_0 = 4\pi\hbar^2/m = \text{const}$.

Равновесное распределение плотности $n(\mathbf{r})$ должно находиться из условия минимума (75) при заданном числе частиц $N = \int n dv$. Из соотношения (75) видно, что при $a = 0$ атомы конденсата заполняют нижний уровень в потенциальной яме $U(\mathbf{r})$. При этом конденсат заполняет область с размером $L_0 \sim (\hbar^2/\alpha m)^{1/4}$, если $U = \alpha r^2/2$. При увеличении $a > 0$ атомы отталкиваются друг от друга, и если можно пренебречь первым слагаемым подынтегрального выражения, то условие равновесия принимает более простой вид типа соотношения (22): $ag_0n + U = \text{const}$.

Рассмотрим теперь конденсат из двух сортов атомов. Пусть n_1, n_2 обозначают их плотности, a_1, a_2 — соответствующие длины рассеяния, а через a_{12} обозначим их взаимную длину рассеяния. Тогда выражение для химического потенциала усложнится. Рассмотрим частный пример $N_1 = N_2 = N$. Тогда получим

$$2N\mu = \int \left[\frac{\hbar^2}{8mm_1} (\nabla n_1)^2 + \frac{\hbar^2}{8mn_2} (\nabla n_2)^2 + g_0(a_1n_1^2 + 2a_{12}n_1n_2 + a_2n_2^2) + (n_1 + n_2)U \right] dv. \quad (76)$$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи. При $a_{12} = 0$ два конденсата независимы друг от друга и заполняют ловушку одинаковым образом. При $a_{12}^2 = a_1a_2$ ловушка заполняется газом с плотностью $n = n_1 + n_2$, а концентрации $c_1 = n_1/n, c_2 = n_2/n$ могут быть совершенно произвольными функциями \mathbf{r} , с одним лишь условием $c_1 + c_2 = 1$. Еще один интересный случай имеет место при $a_{12}^2 \gg a_1a_2$. При этом энергетически выгодно иметь $n_1n_2 = 0$. Это означает, что конденсаты атомов сорта 1 и сорта 2 выпадают в разные фазы, причем в центре ловушки собирается фаза с меньшей величиной длины рассеяния, т.е. с меньшей "упругостью".

Интересные эффекты возникают при отрицательной длине рассеяния. Если в выражении (75) длина рассеяния отрицательна, то второе слагаемое в подынтегральном выражении (75) будет соответствовать не отталкиванию, а притяжению атомов. Если сравнить это слагаемое с первым слагаемым и принять, что характерный размер конденсата равен L , то с учетом $n \sim N/L^3$ видно, что первое слагаемое пропорционально L^{-5} , а второе $\sim L^{-6}$. Отсюда следует, что равновесие возможно только при не очень большом числе атомов конденсата, когда $N < N_c \sim L_0/a$, где L_0 — размер равновесного конденсата с невысокой плотностью. При $N > N_c$ конденсат должен "стягиваться в точку": возникает эффект коллапса, который в терминах нелинейного уравнения Шрёдингера вида (47) был впервые исследован Захаровым [23] в применении к лэнгмюровскому солитону в плазме (см. также [24–28]). Питаевский показал [29], что точно такой же коллапс должен происходить в бозе-конденсате. К чему должен привести такой коллапс, пока не очень ясно. Стуф [30] полагает, что перед или вместо бозе-конденсации газ атомов с отрицательной длиной рассеяния должен распадаться на фазы или создавать молекулы. А в работе Кагана, Шляпникова, Вальравена [31] рассмотрен вариант образования плотных кластеров. Надо полагать, что окончательную ясность в этом вопросе могут внести дополнительные экспериментальные исследования.

9. Магнитное удержание бозе-конденсата

Газовые конденсаты при сверхнизких температурах [1–6] создаются из атомов щелочных элементов. Такие атомы могут быть диамагнитными, поэтому удобным устройством для их удержания являются магнитные ловушки.

Магнитные ловушки были предложены вначале для удержания высокотемпературной плазмы. Один из простейших типов таких ловушек был предложен Будкером [32] в нашей стране и Постом [33] в США. Будкер назвал ее ловушкой с магнитными пробками. В простейшем виде — это соленоид, по торцам которого поле B усиливается по сравнению с полем в центральной области. Таким образом, в продольном направлении создается "магнитная яма", т.е. область с минимумом B . Но оказывается, что в поперечном направлении магнитное поле убывает к периферии. В ловушке для плазмы это приводит к неустойчивости плазмы [11, 12], а в применении к диамагнитным атомам она теряет свойство ловушки. Для устойчивого удержания плазмы или диамагнитного конденсата требуется ловушка с абсолютным минимумом магнитного поля. Такая ловушка была создана Иоффе с сотрудниками [13]. На ней впервые была показана возможность устойчивого удержания плазмы.

Позднее ловушка такого типа была предложена для удержания диамагнитных нейтральных атомов [14].

Поясним принцип такой ловушки. Для этого достаточно рассмотреть, как выглядит магнитное поле вблизи его минимума, т.е. вблизи центра ловушки. Пусть магнитное поле имеет вид $\mathbf{B} = \nabla\phi$, где ϕ — соответствующий потенциал. В случае однородного магнитного поля $\phi = B_0z$, где z — координата цилиндрической системы координат (r, φ, z) . Добавим теперь к B_0z величину $\alpha z^3/3$. Тогда магнитное поле на оси $r = 0$ станет равным $B_0 + \alpha z^2$, т.е. оно будет возрастать в обе стороны от точки $z = 0$. Оказывается, однако, что магнитное поле должно убывать в поперечном направлении. Дело в том, что вследствие условия $\text{div}\mathbf{B} = 0$ функция ϕ должна удовлетворять уравнению $\Delta\phi = 0$. Поэтому вблизи $z = 0, r = 0$ функцию ϕ следует представить в виде

$$\phi = B_0z + \frac{\alpha z^3}{3} - \frac{\alpha z r^2}{3}. \quad (77)$$

Отсюда видно, что поле $B_z = B_0 + \alpha z^2 - \alpha r^2/3$ убывает с увеличением r , т.е. обеспечить удержание диамагнитной субстанции в поперечном направлении невозможно. Для преодоления этого недостатка простой симметричной ловушки в работе [13] было добавлено квадрупольное магнитное поле. В этом случае потенциал ϕ дается выражением

$$\phi = B_0z + \frac{\alpha z^3}{3} - \frac{\alpha z r^2}{3} + \frac{1}{2} \beta (x^2 - y^2), \quad (78)$$

где $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.

Согласно (78) квадрат величины магнитного поля равен

$$B^2 = \left[B_0 + \alpha z^2 - \frac{\alpha r^2}{3} \right]^2 + \beta^2 r^2. \quad (79)$$

Отсюда видно, что при $\beta^2 > 2\alpha B_0/3$ магнитное поле нарастает во всех направлениях от точки $z = 0, r = 0$. Мы получаем ловушку с абсолютным минимумом B . Именно такого типа ловушки и используются в экспериментах с бозе-конденсатами из атомов щелочных элементов.

Но возможностей для создания магнитных ловушек существует гораздо больше. Например, для удержания холодной плазмы используется иногда "магнитная сетка" [34]. В простейшем виде она представляет собой стержни с током, расположенные в одной плоскости параллельно друг другу. Токи ближайших соседей направлены в противоположные стороны, так что в поперечном сечении образуется магнитная конфигурация, изображенная на рис. 4.

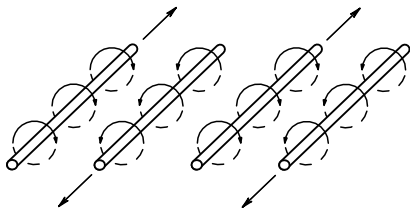


Рис. 4. "Магнитная сетка" представляет собой набор проводников (стержней с током) таких, что токи ближайших соседей направлены в противоположные стороны. При этом вблизи от проводников образуется область с достаточно сильным магнитным полем.

С помощью магнитных сеток можно конструировать "магнитные сосуды", так что налитый в сосуд конденсат (см. рис. 1) можно, в принципе, реализовать в лабораторных условиях. Мы приведем здесь лишь один из таких идеализированных сосудов: "магнитный бокал" на рис. 5. Он выглядит в виде двойной спирали (с токами, направленными в противоположные стороны у каждой из спиралей), расположенной на поверхности воображаемого сосуда.

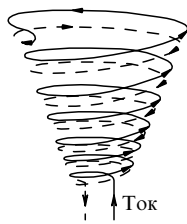


Рис. 5. "Магнитный бокал".

10. Эксперименты с бозе-конденсатами

Первые три конденсата были приготовлены с помощью атомов рубидия-87 [1], натрия [2] и лития-7 [3]. В рубидии и натрия длина рассеяния положительна, а в литии — отрицательна. Все конденсаты приготавливались по сходным сценариям, хотя и отличавшимся друг от друга в некоторых деталях.

Эксперимент начинается с заполнения магнитной ловушки атомами в диамагнитном состоянии. Атомы щелочных элементов имеют целочисленные спины,

поэтому их квантовые магнитные моменты могут быть направлены по полю, против поля и с нулевой проекцией момента на направление поля. Для заполнения ловушки пригодны лишь те атомы, магнитные моменты которых направлены против поля. Энергия $-\mu\mathbf{B}$ у таких атомов имеет минимум в центре магнитной ловушки.

В первой фазе заполнения ловушки атомами газа используется лазерное охлаждение. Затем наступает вторая фаза — фаза индуцированного охлаждения. Если на атом подействовать импульсом высокочастотного магнитного поля, то спин атома можно повернуть так, чтобы он не удерживался в магнитной ловушке. Подбирая частоту ВЧ-поля, можно избирательно выбрасывать атомы с периферии ловушки, где находятся самые "теплые" частицы. Таким образом удается существенно снизить температуру и попасть в область значений T меньше микрокельвина. При этом и возникает бозе-конденсация. С помощью дополнительных лазерных лучей удается контролировать форму магнитной ловушки, меняя тем самым параметры бозе-конденсата.

В последних экспериментах с ^{87}Rb [35] число атомов в конденсате было доведено до 4×10^4 при температуре 280 нК. Интересно, что температура конденсации T_c оказалась близкой к критической температуре невзаимодействующих атомов. Авторам удалось возбудить и исследовать коллективные моды в конденсате [4]. Эти моды хорошо интерпретируются как коллективные когерентные состояния. Наблюдались две моды: $m = 0$ и $m = 2$. Мода $m = 0$ соответствует аксиально-симметричным колебаниям, когда сжатие "капли" конденсата по радиусу сопровождается ее удлинением в продольном направлении. Мода $m = 2$ соответствует эллиптической деформации капли в поперечном направлении. Частоты соответствующих колебаний оказались в хорошем согласии с рассчитанными теоретически. Амплитуда моды $m = 2$ была достаточно велика, так что оказалось возможным обнаружить нелинейный эффект квадратичного приращения частоты с амплитудой. Экспериментально было показано, что время затухания колебаний достаточно велико, что требует еще дополнительного теоретического обоснования.

В экспериментах с конденсатами из атомов натрия [2, 5, 6, 36] число атомов конденсата удавалось поднимать до 5×10^6 . В соответствии с простейшей теорией (без учета эффекта выталкивания возбуждений из конденсата) число атомов конденсата N_s должно изменяться с температурой как $N_s = N - N(T/T_c)^3$, где N — полное число атомов, T_c — критическая температура. Такая зависимость действительно наблюдалась экспериментально, когда доля частиц в конденсате была ниже 50 %.

В экспериментах с натриевым конденсатом также удалось наблюдать коллективные моды [36]. Эти колебания также оказались достаточно медленно затухающими. Наблюдавшиеся в работе [36] две различные моды имеют частоты, хорошо согласующиеся с теорией коллективных мод конденсата.

Большой интерес теоретиков к конденсатам в ^7Li [3] связан с тем, что атомы лития имеют отрицательную длину рассеяния. Это эквивалентно отрицательному эффективному потенциалу, т.е. наличию сил притяжения между атомами. В этих условиях конденсат, с точки зрения теории, не может быть устойчивым, если число атомов в конденсате достаточно велико [29–31]. В первых сообщениях [3] утверждалось, что эксперимен-

тально достигнутое число атомов конденсата выше критического значения.

Но более поздние эксперименты показали [37], что максимальное число частиц в бозе-конденсате N_0 составило величину всего лишь 1300, что находится в очень хорошем соответствии с теоретическим пределом 1400, найденным в работах [22, 31, 38–40].

Когерентные состояния в виде бозе-конденсатов дают возможность исследовать еще целый ряд интересных квантовых эффектов. Например, на обложке мартовского номера *Physics Today* [41] была помещена цветная иллюстрация, изображающая падающие вниз капли конденсата в виде полумесяцев. Под иллюстрацией помещена надпись: "Atom Laser". Эта иллюстрация была предоставлена журналу авторами работы [42], нацеленной на создание атомного лазера по идеям работ [43, 44].

Речь идет фактически о некоторой аналогии между бозе-конденсатом и лазером. В схеме лазера можно представить себе ситуацию, когда в резонаторе накапливается лазерное излучение вследствие атомных переходов с верхнего возбужденного уровня на более низкий уровень. Открытие затвора устраняет одно из зеркал и позволяет импульсу света выйти в свободное пространство. В бозе-конденсате накопление холодных атомов в ловушке аналогично накоплению фотонов в резонаторе. Если выключить ловушку или повернуть магнитные моменты атомов с помощью импульса ВЧ-поля, то можно освободить либо весь конденсат, либо его часть. Именно такие свободные капли конденсата и изображены на обложке *Physics Today*.

Пока такая аналогия между лазером и бозе-конденсатом представляется несколько искусственной. Но в бозе-конденсате могут иметь место более сложные эффекты коллективного поведения атомов. Например, образование трехмерных солитонов может привести к выбросу когерентных сгустков материи, что больше соответствует нашим интуитивным представлениям о когерентных лазерных импульсах света.

Другой интересный эффект наблюдался в работе [45] (см. также [41]). Речь идет об интерференции между двумя бозе-конденсатами. Магнитная ловушка для атомов натрия в этом эксперименте создавалась таким образом, что бозе-конденсат имел вид сильно вытянутой сигары. С помощью дополнительного лазерного луча прямоугольного сечения этот конденсат можно было разделить на две части с некоторым расстоянием d между конденсатами. После этого происходило одновременное выключение ловушки и лазерного луча, так что две половинки конденсата быстро расширились в поперечном направлении и сравнительно медленно двигались навстречу друг другу. В области их перекрытия образовывалась хорошо наблюдаемая картина интерференции с расстоянием между пучностями, равным половине длины волны де Бройля λ . А сама длина волны хорошо описывалась соотношением $\lambda = ht/md$, где $h = 2\pi\hbar$, t — время наблюдения, m — масса атома, d — расстояние между конденсатами перед выключением лазерного луча и ловушки. Экспериментально наблюдаемая картина интерференции волн вещества с $15\ \mu\text{m}$ периодом соответствует кинетической энергии 0,5 нК, в то время как перед разлетом энергия частиц бозе-конденсата имела порядок величины 100 нК. Благодаря радиальному разлету конденсата его плотность сильно

уменьшалась, так что при интерференции ψ -волны соответствовали свободным частицам. Наблюдаемая картина является наглядной демонстрацией неразличимости частиц: ψ -функции двух конденсатов соответствовали единой волновой функции одних и тех же частиц.

Проведенные эксперименты открывают новые возможности для исследования когерентных атомных пучков. В частности, очень интересным представляется вопрос о том, можно ли экспериментально найти и изучить эффекты, возникающие при изменении разности фаз между двумя бозе-конденсатами. Использование когерентных эффектов может позволить найти новые возможности и для атомных лазеров.

У экспериментальных исследований открыто еще очень большое поле деятельности по изучению многих физических эффектов в бозе-конденсатах щелочных элементов.

11. Заключение

Создание бозе-конденсатов из атомов щелочных элементов в миниатюрных магнитных ловушках открыло новую интересную область как для экспериментальных, так и для теоретических исследований. Прогресс в экспериментах будет в значительной мере зависеть от разработки новых средств диагностики и от тех вопросов, которые будут адресованы к экспериментам.

А в теории может развиваться своя линия исследований. Прежде всего развитие теории требуется для объяснения и описания проведенных уже экспериментов. А именно, необходимо более подробно описать кинетику нормальной фазы, т.е. кинетику фононов. Результаты такого рассмотрения должны позволить рассчитать величину затухания коллективных мод. В некоторых экспериментах наблюдаются разлетающиеся газовые облака [5]. При этом возникает вопрос, способствует ли разлет нормальной газовой фазы сжатию конденсата за счет своеобразной реактивной "отдачи", или этот эффект мал.

Более подробного изучения заслуживают сценарии образования конденсатов в газах с отрицательной длиной рассеяния. Поскольку такой конденсат неустойчив при большом числе частиц, желательнее еще более подробно (по сравнению с теоретическими работами [29–31]) изучить, к чему может привести его эволюция.

Совсем недавно проведенные эксперименты [46] показали, что в конденсате с числом атомов более 1400 наблюдаются микровзрывы, сопровождающиеся быстрым сжатием и разлетом облака атомов (см. *УФН* 167 688 (1997)). Такой микровзрыв свидетельствует о коллапсе, т.е. о скачке в новое квантовое состояние с большей плотностью. Схлопывание части конденсата сопровождается выделением тепла и взрывом конденсата. Обнаруженное явление напоминает взрыв сверхновой звезды, где гравитационное притяжение "преодолевают" принцип Паули. А в конденсате притяжение "преодолевают" соотношения неопределенностей Гейзенберга.

Создание "капель" бозе-конденсата в магнитных ловушках поставило перед теоретиками некоторые более общие вопросы. Дело в том, что для описания бозе-газов достаточно широко используются методы квантовой теории поля с введением операторов рождения и уничтожения частиц. Бозе-конденсация в такой теории выглядит как появление среднего значения у

полевого оператора. При этом фаза не коммутирует с оператором числа частиц. Даже это обстоятельство вызывает недоуменные вопросы у экспериментаторов [10], не говоря уже о том, что при таком подходе можно рассуждать о спонтанном нарушении симметрии. В настоящей статье этот трудный вопрос теории обойден с помощью использования только уравнения Шрёдингера при нулевой температуре. Но и в формализме уравнения Шрёдингера волновая функция конденсата может иметь произвольный множитель вида $\exp(i\alpha)$, где α — фаза. Поэтому разность фаз между различными конденсатами из тождественных частиц может иметь вполне определенный физический смысл. Надо полагать, что последующие эксперименты позволят найти и изучить соответствующие эффекты.

Операторный подход оказывается удобным для описания некоторых тонких физических явлений в бозе-конденсатах. В частности, при соприкосновении двух бозе-конденсатов могут происходить интерференционные эффекты [47] типа эффекта Андерсона. Надо надеяться, что усовершенствование экспериментальной техники и диагностики в области сверхнизких температур позволит наблюдать эти эффекты в прямых экспериментах.

12. Приложения

12.1. Акустические солитоны

Солитоны, т.е. волновые образования в виде одиночных нелинейных импульсов, хорошо известны в гидродинамике и физике плазмы [20]. Оптические солитоны используются для передачи информации по оптическим волокнам. Акустические солитоны менее известны. Это связано с тем, что существует не так много сред, в которых звуковые волны обнаруживали бы дисперсию при увеличении волнового числа. Но уравнения (51), (52) и соотношение (61) показывают, что в бозе-конденсате у акустических волн дисперсия возникает при приближении волнового числа к κ_0 . Соответственно, слабо нелинейная простая волна, описываемая уравнением (56), может порождать солитоны. Одиночный одномерный солитон имеет вид (57), где амплитуда v_0 связана с шириной солитона Δ . Дисперсию вида (61), когда фазовая скорость $v_\phi = \omega/k$ возрастает с увеличением k , принято называть положительной. Известно [20], что в случае положительной дисперсии наряду с одномерными солитонами могут существовать двумерные и трехмерные солитоны. Они описываются уравнением Кадомцева–Петвиашвили. Тем, кто не встречался ранее с этим уравнением, поясним, о чем идет речь. В линейном приближении уравнение (56) для плоской волны вида $\exp(-i\omega t + ikx)$ приводит к дисперсионному соотношению

$$\omega = c_s k + \frac{c_s k^3}{8\kappa_0^2}. \quad (\text{П.1})$$

Допустим, что волна похожа на одномерную, но слабо от нее отличается, так что ее можно считать имеющей вид суперпозиции плоских волн вида $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, причем $k_\perp \ll k_\parallel$. Тогда в соотношении (П.1) волновое число k можно считать равным $k = (k_x^2 + k_\perp^2)^{1/2} \cong k_x + k_\perp^2/2k_x$. При втором слагаемом в

(П.1) добавку, пропорциональную k_\perp^2 , учитывать не следует, поскольку по предположению $k^2 \ll \kappa_0^2$. Поэтому соотношение (П.1) запишется в виде

$$k_x \left(\omega - c_s k_x - \frac{c_s k_x^3}{8\kappa_0^2} \right) = \frac{c_s k_\perp^2}{2}. \quad (\text{П.2})$$

Это соотношение можно умножить на v и заменить ω , k_x , k_\perp^2 на операторы:

$$\omega = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad k_x = -i \frac{\partial}{\partial x}, \quad k_\perp^2 = -\Delta_\perp.$$

Если учесть еще нелинейный член, то получится уравнение Кадомцева–Петвиашвили (58). Вводя соответствующие масштабы вдоль осей x и y, z , уравнение (58) можно записать в безразмерном виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) = \Delta_\perp v. \quad (\text{П.3})$$

Это уравнение имеет решение вида $v(x-t)$, соответствующее стационарной нелинейной волне типа солитона. В случае двумерного солитона, когда $\Delta_\perp v = \partial^2 v / \partial y^2$, решение имеет сравнительно простой аналитический вид

$$v = \frac{24(3 - x^2 + y^2)}{(3 + x^2 + y^2)^2}. \quad (\text{П.4})$$

Аналитический вид решения для трехмерного солитона неизвестен, но можно думать, что он не очень сильно отличается от (П.4). Поэтому поступим следующим образом: положим $y = \alpha r$ и подберем константу α таким образом, чтобы выражение (П.4) было близко к трехмерному солитону. Для этого умножим

$$\Delta_\perp v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$$

на v , проинтегрируем результат по y и потребуем, чтобы это выражение было близко к интегралу от функции $v(\partial^2 v / \partial y^2)$. Такой расчет дает следующее значение для константы α^2 : $\alpha^2 = 2/7$. Это значит, что как функция цилиндрического радиуса r трехмерный солитон примерно вдвое шире двумерного солитона (П.4).

Трехмерный солитон выглядит как "лепешечка" с пониженной плотностью, движущаяся со скоростью, чуть меньшей скорости звука, в направлении по нормали к "лепешке". Толщина солитона имеет порядок величины $\Delta \sim \kappa_0^{-1} (c_s/v_0)^{1/2}$, где v_0 — амплитуда солитона (по абсолютной величине). А диаметр трехмерного солитона имеет порядок величины $2r_0 \sim \Delta (c_s/v_0)^{1/2}$. В случае солитона малой амплитуды, $v_0 \ll c_s$, поперечный размер r_0 трехмерного солитона значительно превышает его продольный размер Δ .

12.2. Длина рассеяния

Взаимодействие ориентированных в магнитном поле щелочных атомов, подобно атому водорода, определяется триплетным молекулярным термом, имеющим симметрию $^3\Sigma_u^+$. На близких расстояниях атомы отталкиваются вследствие антисимметрии координатной волновой функции электронов. А на далеких расстояниях

действуют ван-дер-ваальсовские силы притяжения с потенциалом $U = -b/r^6$, где r — расстояние между атомами. У атомов щелочных металлов вследствие большей поляризуемости эти силы гораздо больше, чем у атома водорода. Поэтому в ван-дер-ваальсовской яме имеется много уровней связанных состояний. Это обстоятельство сказывается как на величине, так и на знаке длины рассеяния.

При сферически симметричном S -рассеянии уравнение Шрёдингера для двух щелочных атомов имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + U(r)\psi = E\psi, \quad (\text{П.5})$$

где $m_* = m/2$ — приведенная масса, а остальные обозначения общеприняты.

С помощью обычного перехода к новой функции $\chi = r\psi$ запишем (П.5) при $E = 0$ и $U = -b/r^6$ в виде

$$r^6 \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \gamma^2 \chi = 0, \quad (\text{П.6})$$

где $\gamma^2 = mb/\hbar^2$.

Если перейти к новым переменным $x = \gamma/2r^2$, $\chi = \varphi\sqrt{r}$, то уравнение (П.6) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi}{dx} + \left[1 - \frac{1}{(4x)^2} \right] \varphi = 0, \quad (\text{П.7})$$

т.е. к уравнению Бесселя.

Его общее решение имеет вид

$$\varphi = C_1 J_{-1/4}(x) - C_2 J_{1/4}(x). \quad (\text{П.8})$$

При больших x , т.е. при малых r , функции Бесселя имеют квазиклассическую асимптотику, т.е. выражаются через косинусы. Если теперь поставить граничное условие обращения (П.8) в нуль при некотором значении x_0 (т.е. на близких расстояниях), то нетрудно получить соотношение

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\cos(x_0 - \pi/8)}{\cos(x_0 - 3\pi/8)}. \quad (\text{П.9})$$

Теперь с помощью соотношений (П.8), (П.9) находим волновую функцию $\psi(r)$ на больших расстояниях:

$$\psi(r) = \left(\frac{4}{\gamma}\right)^{1/4} \frac{1}{\Gamma(3/4)} \left(1 - \frac{a}{r}\right), \quad (\text{П.10})$$

где длина рассеяния a дается выражением

$$a = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)} \frac{\cos(x_0 - \pi/8)}{\cos(x_0 - 3\pi/8)}. \quad (\text{П.11})$$

Как мы видим, порядок величины длины рассеяния определяется фактором $\sqrt{\gamma}$. Для тяжелых атомов он может достигать сотни ангстрем. А знак длины рассеяния определяется последним множителем в соотношении (П.11). Поскольку $x_0 \gg 1$, то фазу x_0 можно считать случайной величиной, и тогда согласно соотношению (П.11) "вероятность" получить положительную длину рассеяния равна $3/4$.

Для того, чтобы можно было пользоваться приближением S -волны и понятием длины рассеяния, энергия

относительного движения должна быть мала, а именно,

$$E \ll \frac{\hbar^3}{m^{3/2} b^{1/2}}. \quad (\text{П.12})$$

Это значит, что температура конденсата должна быть существенно меньше 10^{-3} К.

Список литературы

1. Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A *Science* **269** 198 (1995)
2. Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, van Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969 (1995)
3. Bradley C C, Sackett C A, Tollett J J, Hulet R G *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687 (1995)
4. Jin D S, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A *Phys. Rev. Lett.* **77** 420 (1996)
5. Mewes M O, Andrews M R, van Druten N J, Kurn D M, Durfee D S, Ketterle W *Phys. Rev. Lett.* **77** 416 (1996)
6. Andrews M R, Mewes M O, van Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W *Science* **273** 84 (1996)
7. Collins G P *Phys. Today* **49** (3) 18 (1996)
8. Collins G P *Phys. Today* **49** (8) Part 1 18 (1996)
9. Walraven J T M *Europhys. News* **27** 173 (1996)
10. Laloe F *Europhys. News* **27** 174 (1996)
11. Rosenbluth M N, Longmire C T *Ann. Phys. (NY)* **1** 120 (1957)
12. Кадомцев Б Б *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций* Т. IV (М.: АН СССР, 1958) с. 16
13. Готт Ю В, Иоффе М С, Тельковский В Г *Nucl. Fusion Suppl.* **3** 1045 (1962)
14. Pritchard D E *Phys. Rev. Lett.* **59** 672 (1987)
15. Фейнман Р *Статистическая механика* (М.: Мир, 1978) с. 366
16. Гинзбург В Л, Питаевский Л П *ЖЭТФ* **34** 1240 (1958)
17. Gross E P *Nuovo Cimento* **20** 454 (1961)
18. Питаевский Л П *ЖЭТФ* **40** 646 (1961)
19. Gross E P *J. Math. Phys.* **4** 195 (1963)
20. Кадомцев Б Б *Коллективные явления в плазме* (М.: Наука, ФМЛ, 1988)
21. Лифшиц Е М, Питаевский Л П *Статистическая физика* Ч. 2 (М.: "Наука" ФМГ-М, 1978) с. 146
22. Dalfovo F, Stringari S *Phys. Rev. A* **53** 2477 (1996)
23. Захаров В Е *ЖЭТФ* **62** 1745 (1972)
24. Власов С Н, Петрищев В А, Таланов В И *Изв. вузов. Радиофизика* **14** (9) 1353 (1971)
25. Weinstein M I *Comm. Math. Phys.* **87** 567 (1983)
26. Kuznetsov E A, Rubenchik A M, Zakharov V E *Phys. Rep.* **142** 103 (1986)
27. Turitsyn S K *Phys. Rev. E* **47** R13 (1993)
28. Kuznetsov E A, Rasmussen J J, Rypdal K, Turitsyn S K *Physica D* **87** 273 (1995)
29. Pitaevskii L P *Phys. Lett. A* **221** 14 (1996)
30. Stoof H T C *Phys. Rev. A* **49** 3824 (1994)
31. Kagan Yu, Shlyapnikov G V, Walraven J M T *Phys. Rev. Lett.* **76** 2670 (1996)
32. Будкер Г И *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций* Т. III (М.: АН СССР, 1958) с. 3
33. Post R F *Rev. Mod. Phys.* **28** 338 (1956)
34. Фирсов О Б *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций* Т. III (М.: АН СССР, 1958) с. 327
35. Ensher J R, Jin D S, Mathews M R, Wieman C E, Cornell E A *Phys. Rev. Lett.* **77** 4984 (1996)
36. Mewes M O, Andrews M R, van Druten N J, Kurn D M, Durfee D S, Townsend C G, Ketterle W *Phys. Rev. Lett.* **77** 988 (1996)
37. Bradley C C, Sackett C A, Hulet R G *Phys. Rev. Lett.* **78** 985 (1997)
38. Ruprecht P A, Holland M J, Burnett K, Edwards M *Phys. Rev. A* **51** 4704 (1995)
39. Dodd R J et al. *Phys. Rev. A* **54** 661 (1996)
40. Houbiers M, Stoof H T C *Phys. Rev. A* **54** 5055 (1996)
41. Levi B G *Physics Today* **50** 17 (1997)
42. Mewes M O, Andrews M R, Kurn D M, Durfee D S, Townsend C G, Ketterle W *Phys. Rev. Lett.* **78** 582 (1997)

43. Holland M et al. *Phys. Rev. A* **54** R1757 (1996)
44. Spreuw R Y C, Pfau T, Janicke U, Wilkens M *Europhys. Lett.* **32** 469 (1995)
45. Andrews M R, Townsend C G, Miesner H-Y, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W *Science* **275** 637 (1997)
46. *Science* <http://sciencenow.sciencemag.org/>
47. Андреев А Ф *Письма в ЖЭТФ* **63** 963 (1996)

Bose – Einstein condensates

B.B. Kadomtsev, M.B. Kadomtsev

*Russian Research Center 'Kurchatov Institute', Institute of Nuclear Fusion,
pl. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russia*

Tel. (095) 196-98-14

Fax: (095) 943-00-73

E-mail: kadomtse@ufn.msk.su

The production of Bose – Einstein condensates in magnetically confined alkaline atomic gases has opened up a new research area in the physics of ultralow temperatures. In the present paper a simple account of the theoretical principles of Bose – Einstein condensation in dilute gases is given and the relevant experimental data are very briefly reviewed.

PACS numbers: 05.30.Jp, 32.80.Pj, 52.55.Lf

Bibliography — 47 references

Received 24 March 1997