А. А. Логунов

Релятивистская теория гравитации

НАУКА

А. А. Логунов

Релятивистская ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

МОСКВА НАУКА 2006

УДК 531
ББК 22.31
Л 69

Логунов А.А.
Релятивистская теория гравитации / А. А. Логунов. – М.: Наука, 2006. – 253 с. – ISBN 5-02-035510-0.

В рамках специальной теории относительности (СТО), как теории пространства-времени, построена релятивистская теория гравитации (РТГ). Она является альтернативой общей теории относительности (ОТО). Ее выводы, особенно в сильных гравитационных полях, кардинально отличаются от выводов ОТО. В РТГ источником гравитационного поля является сохраняющийся тензор энергии-импульса всех полей материи, включая и гравитационное поле. Гравитационное поле рассматривается как физическое поле со спинами 2 и 0, развивающееся в пространстве Минковского. В теории имеют место законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения для всей материи, включая гравитационное поле. Полевой подход позволяет однозначно построить теорию гравитационного поля как калибровочную теорию. Теория объясняет результаты всех гравитационных эффектов в Солнечной системе. В теории открылось новое свойство гравитационного поля не только замедлить своим действием ход времени, но и остановить процесс замедления, а следовательно, и процесс сжатия вещества. Возникает явление "*самоограничения*" гравитационного поля, которое играет важную роль во Вселенной. Согласно РТГ, однородная и изотропная Вселенная может быть только "плоской" и развивается циклически от некоторой максимальной плотности до минимальной и т.д. При этом теория устраняет известные проблемы ОТО: сингулярности, причинности (горизонта), плоскостности (евклидовости). Эффект "*самоограничения*" *поля* исключает также возможность образования "черных дыр". Из теории следует, что помимо наблюдаемой материи во Вселенной должна существовать большая скрытая масса "темной" материи.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов, студентов старших курсов, специализирующихся в области теоретической физики.

ISBN 5-02-035510-0

Содержание

Предисловие

В данной монографии излагается релятивистская теория гравитации (РТГ). Она является альтернативой общей теории относительности (ОТО). Ее содержание основано на исследованиях [2–6; 8–13; 31; 34–38; 46]. Подробные ссылки на ранние работы приведены в монографии [10], написанной совместно с проф. М. А. Мествиришвили и изданной в 1989 г. Данная монография по сравнению с [45] включает исследования, опубликованные в статьях [31; 46; 47], она подводит некоторые итоги и вносит уточнения. Поскольку монография создавалась, в основном, путем объединения статей, в ней неизбежно возникли повторения по некоторым вопросам.

При изложении, как правило, используется система единиц, в которой $G = c = \hbar = 1$. Однако в окончательных выражениях восстанавливается зависимость от постоянных $G, c, \hbar$. В книге индексные греческие буквы принимают значения 0,1,2,3, тогда как латинские буквы – 1,2,3.

В разделе 16 излагаются элементы тензорного анализа и римановой геометрии.

В основе РТГ лежит гипотеза о том, что гравитационное поле, как и все другие физические поля, развивается в пространстве Минковского, а его источником является сохраняющийся тензор энергии-импульса материи, включая и само гравитационное поле. Такой подход позволяет однозначно построить теорию гравитационного поля как калибровочную теорию. При этом благодаря универсальности гравитации и тензорному характеру гравитационного поля с необходимостью возникает эффективное полевое риманово пространство.

В ОТО пространство предполагается римановым из-за наличия вещества, а поэтому гравитация рассматривается как следствие искривленности пространства-времени.

В РТГ гравитационное поле обладает спинами 2 и 0 и является физическим полем в духе Фарадея-Максвелла, а поэтому возможна локализация гравитационной энергии. В ОТО локализация гравитационной энергии невозможна [48].

Полевой подход к гравитации с необходимостью потребовал введения массы покоя гравитона. Полная система уравнений РТГ непосредственно следует из принципа наименьшего действия. *Поскольку все физические поля развиваются в пространстве Минковского, в РТГ строго выполняются фундаментальные физические принципы – интегральные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения.*

Ускорение, в отличие от ОТО, имеет абсолютный смысл. Это означает, что в РТГ сохранено понятие инерциальной системы координат.

Силы инерции и силы гравитации разделены, и они имеют разную природу.

Теория однозначно объясняет результаты всех гравитационных эффектов в Солнечной системе.

Согласно ОТО гравитационное поле обладает свойством: *замедлять ход времени.* Однако, теория не дает ограничение на процесс замедления.

В РТГ наиболее полно раскрылось свойство гравитационного поля: своим действием не только замедлить ход времени, но и остановить процесс замедления времени, а следовательно, и процесс сжатия вещества. Открылось новое свойство: "самоограничение поля", которое играет важную роль в эволюции Вселенной.

При анализе развития однородной и изотропной Вселенной РТГ приводит к выводу, что Вселенная бесконечна и она "плоская". Ее развитие идет циклически от некоторой максимальной плотности до минимальной и т. д.

Таким образом, никакого Большого *точечного* взрыва в прошлом не было, а было состояние с большой плотностью и высокой температурой в каждой точке пространства.

Согласно РТГ, так называемое космологическое "расширение" Вселенной, наблюдаемое по красному смещению, объясняется изменением гравитационного поля во времени, а не относительным движением – разбеганием галактик, которого нет. *Вещество во Вселенной находилось в состоянии покоя относительно инерциальной системы координат. Пеку-*

лярные скорости галактик относительно инерциальной системы возникли из-за некоторой структуры неоднородности распределения вещества в период, когда Вселенная стала прозрачной.

Из РТГ следует, что Вселенная “плоская” и в ней существует помимо наблюдаемой массы также большая скрытая масса “темной” материи.

Такой вывод из РТГ был сделан в 1984 г. в статье [3], он был получен из теории без гипотезы об инфляции.

В связи с данными, полученными из наблюдений, свидетельствующих об ускоренном “расширении” Вселенной, в теории возникла необходимость использовать, следуя В. Л. Калашникову [52], уравнение состояния “квинтэссенции”, чтобы объяснить это явление.

Согласно РТГ, из-за эффекта *“самоограничения”* гравитационного поля “черные дыры” невозможны: коллапсирующая звезда не может уйти под свой гравитационный радиус.

Объекты больших масс могут существовать, и они характеризуются не только массой и распределением плотности вещества, но и другими физическими свойствами.

Я благодарен акад. С. С. Герштейну и проф. М. А. Мествиришвили за совместные работы, которые излагаются в монографии, а также за ряд ценных советов и замечаний, которые я старался учесть при написании книги.

Я также признателен доктору физ.-мат. наук А. А. Власову, профессорам В. И. Денисову, В. В. Киселеву, Ю. М. Лоскутову, В. А. Петрову, Н. Е. Тюрину, О. А. Хрусталеву, кандидатам физ.-мат. наук Н. П. Ткаченко и Ю. В. Чугрееву за совместные работы, полезные дискуссии и ценные замечания, а также Г. М. Александрову за большую работу по подготовке рукописи к печати и составление именного и предметного указателей.

А. А. Логунов
сентябрь 2006 г.

1. Геометрия пространства-времени

В основу развиваемой релятивистской теории гравитации положена псевдоевклидова геометрия пространства-времени, справедливая для всех физических полей, в том числе и для гравитационного. *Таким образом, теория строится в рамках специальной теории относительности (СТО). Гравитационное поле рассматривается как физическое поле в духе Фарадея-Максвелла.* Пространство Минковского нельзя считать априорно существующим, поскольку оно отражает свойства материи, следовательно, оно неотделимо от нее. Хотя формально, именно в силу независимости структуры пространства от вида материи, оно иногда рассматривается абстрактно в отрыве от материи. В галилеевых координатах инерциальной системы интервал, характеризующий структуру псевдоевклидовой геометрии пространства-времени, и впервые открытый Анри Пуанкаре, имеет вид [1]

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \qquad (1.1)$$

Здесь dx^ν – дифференциалы координат. Интервал является инвариантом, а поэтому он справедлив как в инерциальных, так и в неинерциальных системах. Однако, такой, казалось бы, вполне очевидный вывод долгое время не был сделан по причине непонимания главного, что СТО и есть геометрия пространства-времени, определяемая интервалом (1.1)

Даже такой крупный физик как Л. И. Мандельштам писал: “*...Как идут ускоренно движущиеся часы и почему их ход меняется, на это специальная теория относительности ответить не может, ибо она вообще не занимается вопросом об ускоренно движущихся системах отсчета*” [17].

Такие неправильные утверждения [см., например, 27, 19, 20, 30] можно объяснить тем, что пространство Минковского рассматривалось не как открытие геометрии пространства-времени, а как якобы некоторая удобная геометрическая

---

[1] *Poincaré H.* // Sur la dynamique de l'électron. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1906. Vol. XXI. P. 129.

интерпретация СТО в галилеевых координатах инерциальной системы. Это произошло из-за того, что на передний план были выдвинуты такие ограниченные понятия, как: постоянство скорости света, синхронизация часов. Именно с этими частными понятиями долго и отождествляли СТО. Но в неинерциальной системе координат, в принципе, нельзя говорить о синхронизации часов и постоянстве скорости света [7]. Все это существенно ограничило рамки понимания теории и за частностями скрыло главное, что СТО – это есть псевдоевклидова геометрия пространства-времени.

Таким образом, специальная теория относительности – это есть псевдоевклидова геометрия пространства-времени, в которой протекают все физические процессы. Но именно отсюда и следует, что в ней (геометрии) можно пользоваться любыми координатами как инерциальными (галилеевыми), так и неинерциальными. При переходе к новым координатам от инерциальных галилеевых координат, как впрочем и от других, необходимо, чтобы осуществлялось взаимно однозначное отображение, т. е. имел место *диффеоморфизм*.

В произвольной системе координат интервал принимает форму

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \ ,$$

$\gamma_{\mu\nu}(x)$ – метрический тензор пространства Минковского.

В общей форме тензор $\gamma_{\mu\nu}$ выражается через четыре независимые функции $f^\nu(x)$, которые осуществляют связь с галилеевыми координатами, и имеет вид

$$\gamma_{\mu\lambda}(x) = \sum_{\nu=0}^{3} \varepsilon^\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\lambda}, \quad \varepsilon^\nu = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Из представления, что специальная теория относительности справедлива только в инерциальных системах координат, Эйнштейн и пришел к выводу, что *“в рамках специальной теории относительности нет места для удовлетворительной теории тяготения”*[2].

[2]*Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов. М.: Наука, 1967. Т. IV, ст. 76. С. 282.

Но РТГ построена именно в рамках специальной теории относительности, как теории пространства-времени.

Свободное движение пробного тела в произвольной системе координат происходит по геодезической линии пространства Минковского:

$$\frac{DU^\nu}{d\sigma} = \frac{dU^\nu}{d\sigma} + \gamma^\nu_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 0\,,$$

где $U^\nu = dx^\nu/d\sigma$, $\gamma^\nu_{\alpha\beta}(x)$ – символы Кристоффеля, определяемые выражением

$$\gamma^\nu_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2}\gamma^{\nu\sigma}(\partial_\alpha \gamma_{\beta\sigma} + \partial_\beta \gamma_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma \gamma_{\alpha\beta})\,.$$

В 1921 г. в статье "Геометрия и опыт" Эйнштейн писал: "*...Вопрос о том, имеет этот континуум евклидову, риманову или какую-либо другую структуру, является вопросом физическим, ответ на который должен дать опыт, а не вопросом соглашения о выборе на основе простой целесообразности ...* "[3] Это, конечно, правильно. Но при этом сразу возникает вопрос: какой опыт? Опытных фактов может быть достаточно много. Так, например, изучая движение света и пробных тел, можно, в принципе, однозначно установить геометрию пространства-времени. Необходимо ли ее и положить в основу физической теории? На первый взгляд, на этот вопрос можно ответить утвердительно. И, казалось бы, вопрос исчерпан. Именно по этому пути и пошел Эйнштейн при построении ОТО. Пробные тела и свет движутся по геодезическим линиям риманова пространства-времени. Риманово пространство он и положил в основу теории. Однако ситуация в действительности гораздо сложнее. Все виды материи подчиняются законам сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Эти законы, возникшие путем обобщения многочисленных опытных данных, характеризуют общие динамические свойства всех форм материи, вводя универсальные характеристики, которые позволяют количественно описать превращение одних форм материи в другие. Ведь все это

[3] *Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов. М.: Наука, 1966. Т. II, ст. 61. С. 87.

тоже опытные данные, ставшие фундаментальными физическими принципами. Как быть с ними? Если следовать Эйнштейну и положить в основу риманову геометрию, тогда от них следует отказаться. Однако, более естественно сохранить их для всех физических полей, в том числе и для гравитационного. Но в этом случае в основу теории необходимо положить пространство Минковского, т. е. псевдоевклидову геометрию пространства-времени. Этот путь мы и избрали, следуя Пуанкаре. Фундаментальные принципы физики, отражающие многочисленные опытные факты, указывают нам, какую геометрию пространства-времени необходимо положить в основу теории гравитации.

Таким образом, действительно вопрос о структуре геометрии пространства-времени является вопросом физическим, ответ на который должен дать опыт, только с нашей точки зрения структура геометрии пространства-времени определяется не частными опытными данными о движении пробных тел и света, а фундаментальными физическими принципами, опирающимися на всю совокупность опытных фактов. *Именно в этом пункте наши исходные посылки построения теории гравитации совершенно отличаются от представлений, которые Эйнштейн положил в основу ОТО.* Но они находятся в полном соответствии с представлениями Пуанкаре. В основу теории гравитации мы положили псевдоевклидову геометрию, а следовательно, в противоположность ОТО, сохранили *закон инерции* и как следствие, *понятие – инерциальные системы координат*, но это отнюдь не означает, что и эффективное пространство также будет псевдоевклидовым. Под действием гравитационного поля можно ожидать, что эффективное пространство будет уже другим. Этот вопрос мы подробно рассмотрим в следующем разделе. Метрика пространства Минковского позволяет ввести понятия эталонной длины и промежутка времени при отсутствии гравитационного поля.

Полевой подход к гравитации, которому мы следуем, имеет долгую историю. Еще Пуанкаре в работах 1905–1906 гг. рассматривал гравитационное поле как физическое поле в рамках специальной теории относительности. Гораздо позднее в 1960-х годах В. Тирринг[4] и Р. Фейнман[5] также развивали этот подход, но пришли к тем же уравнениям общей теории относительности Эйнштейна, и следовательно, к тем же физическим следствиям.

Так, например, Тирринг писал: *"Таким образом, подход, полученный из принципов лоренц-инвариантных теорий, приводит автоматически к таким же концепциям и следствиям, как и теория Эйнштейна"*.

Сформировалось мнение, что полевой подход ничего нового, кроме интерпретации, дать не может. Однако, оказалось, что это далеко не так. Ряд *принципиальных* моментов не был учтен. Именно полевой подход с необходимостью приводит к другой системе гравитационных уравнений, которая отлична от уравнений Гильберта-Эйнштейна, а следовательно, и приводит в ряде важных случаев к *кардинально* другим физическим выводам. Полевой подход с необходимостью требует введения массы покоя гравитона. Масса покоя гравитона является необходимым элементом полевой теории гравитации.

---

[4] *Thirring W. E.* // Ann. Phys. 1961. P. 96–117.

[5] *Фейнман Р. Ф., Мориниго Ф. Б., Вагнер У. Г.* Фейнмановские лекции по гравитации. М.: Янус-К, 2000. С. 130.

2. Тензор энергии-импульса материи как источник гравитационного поля

Благодаря наличию в пространстве Минковского группы движения Пуанкаре, для любой замкнутой физической системы существуют десять интегралов движения, т. е. имеют место законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Любое физическое поле в пространстве Минковского характеризуется плотностью тензора энергии-импульса $t^{\mu\nu}$, являющейся общей универсальной характеристикой для всех форм материи, которая удовлетворяет закону сохранения как локальному, так и интегральному. В произвольной системе координат локальный закон сохранения записывается в форме

$$D_\mu t^{\mu\nu} = \partial_\mu t^{\mu\nu} + \gamma^\nu_{\alpha\beta} t^{\alpha\beta} = 0 \, .$$

Здесь $t^{\mu\nu}$ – суммарная сохраняющаяся плотность тензора энергии-импульса всех полей материи; D_μ – ковариантная производная в пространстве Минковского. Мы здесь и в дальнейшем всегда будем иметь дело с плотностями скалярных и тензорных величин, определяемых по правилу

$$\tilde{\phi} = \sqrt{-\gamma}\phi \, , \; \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\phi^{\mu\nu}, \; \gamma = \det(\gamma_{\mu\nu}) \, .$$

Введение плотностей обусловлено тем, что в произвольных координатах инвариантный элемент объема в пространстве Минковского определяется выражением

$$\sqrt{-\gamma}\, d^4x \, ,$$

а инвариантный элемент объема в римановом пространстве – выражением

$$\sqrt{-g}\, d^4x, \; g = \det(g_{\mu\nu}) \, .$$

Поэтому принцип наименьшего действия имеет вид

$$\delta S = \delta \int L d^4x = 0 \, ,$$

где L – скалярная плотность лагранжиана материи.

При получении уравнений Эйлера с помощью принципа наименьшего действия мы будем автоматически иметь дело с вариацией именно плотности лагранжиана. Плотность тензора энергии-импульса $t^{\mu\nu}$, согласно Гильберту, выражается через скалярную плотность лагранжиана L следующим образом:

$$t^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}}\,, \tag{2.1}$$

где

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma\left(\frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}}\right), \quad \gamma_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\,.$$

В силу универсальности гравитации естественно выдвинуть гипотезу, что источником гравитационного поля является сохраняющаяся плотность тензора энергии-импульса всех полей материи $t^{\mu\nu}$. Далее мы воспользуемся аналогией с электродинамикой, в которой источником электромагнитного поля является сохраняющаяся плотность векторного тока, а само поле описывается плотностью векторного потенциала $\tilde{A}^\nu$:

$$\tilde{A}^\nu = (\tilde{\phi}, \tilde{A}^i)\,.$$

Уравнения электродинамики Максвелла в отсутствии гравитации в произвольных координатах имеют вид

$$\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{A}^\nu + \mu^2\tilde{A}^\nu = 4\pi j^\nu,$$

$$D_\nu\tilde{A}^\nu = 0\,.$$

Мы для общности ввели параметр μ, который в системе единиц $\hbar = c = 1$ является массой покоя фотона.

Поскольку источником гравитационного поля мы объявили сохраняющуюся плотность тензора энергии-импульса $t^{\mu\nu}$, то естественно считать гравитационное поле тензорным и описывать его плотностью симметрического тензора $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$:

$$\tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\phi^{\mu\nu}.$$

Следует отметить, что именно Эйнштейн открыл тензорный характер гравитационного поля, когда связал его с метрикой $g_{\mu\nu}$ риманова пространства.

В полной аналогии с электродинамикой Максвелла уравнения гравитационного поля можно записать в виде

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\phi}^{\mu\nu} + m^2 \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \lambda t^{\mu\nu} , \qquad (2.2)$$

$$D_\mu \tilde{\phi}^{\mu\nu} = 0 . \qquad (2.3)$$

Здесь $m = (m_g c)/\hbar$, m_g – масса покоя гравитона, λ – некоторая постоянная, которая, исходя из принципа соответствия с законом тяготения Ньютона, должна быть равна 16π. Мы ввели понятие массы покоя гравитона, а поэтому и вошла в гравитацию постоянная Планка $\hbar$. Но в формулах $\hbar$ всегда будет содержаться в комбинациях, образуя величину m. Уравнение (2.3) исключает спины 1 и $0'$, оставляя поляризационные свойства поля, соответствующие только спинам 2 и 0.

Ранее в [3] уравнения (2.3) мы вводили как дополнительные к уравнениям Гильберта-Эйнштейна. Так возникла полная общековариантная система уравнений. Уравнения (2.3) вводились нами из физических соображений, чтобы гравитационное поле обладало только спинами 2 и 0. Фактически, на этом этапе, мы исходя из специальной теории относительности и полевого подхода, придали уравнениям гравитации В. А. Фока универсальный общековариантный характер. Заметим, что введение уравнений (2.3) сразу выводит за рамки ОТО, поскольку появляется пространство Минковского, а следовательно, и новые инварианты, например, инвариант $g_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}$, который для решения Шварцшильда имеет сингулярность, неустранимую координатными преобразованиями. Однако, система уравнений в [3] имела существенный недостаток; она не следовала из принципа наименьшего действия и к тому же не исключала полностью зависимость физических величин от калибровки поля.

Теперь уравнения (2.3) естественно возникают из-за наличия массы покоя гравитона и закона сохранения в пространстве Минковского источника гравитационного поля – тензора энергии-импульса всех полей материи, включая и гравитационное поле. Все это сделало полевой подход логически последовательным, и более того, он с необходимостью привел к введению массы покоя гравитона.

Это и позволило перейти от системы уравнений [3] к системе гравитационных уравнений (5.19) и (5.20), следующей из принципа наименьшего действия. Но об этом подробно позднее.

Плотность тензора энергии-импульса материи $t^{\mu\nu}$ состоит из плотности тензора энергии-импульса гравитационного поля $t_g^{\mu\nu}$ и плотности тензора энергии-импульса вещества $t_M^{\mu\nu}$. Под веществом мы подразумеваем все поля материи, за исключением гравитационного поля:

$$t^{\mu\nu} = t_g^{\mu\nu} + t_M^{\mu\nu} .$$

Взаимодействие гравитационного поля с веществом учитывается в плотности тензора энергии-импульса вещества $t_M^{\mu\nu}$.

Эйнштейн еще в 1913 г. писал, что *"тензор гравитационного поля $\vartheta_{\mu\nu}$ является источником поля наравне с тензором материальных систем $\Theta_{\mu\nu}$. Исключительное положение энергии гравитационного поля по сравнению со всеми другими видами энергии привело бы к недопустимым последствиям"* [28]. Именно эта идея Эйнштейна и положена в основу построения релятивистской теории гравитации. При построении общей теории относительности Эйнштейну не удалось ее реализовать, поскольку вместо тензора энергии-импульса гравитационного поля в ОТО возник псевдотензор гравитационного поля. Все это произошло из-за того, что Эйнштейн не рассматривал гравитационное поле как физическое поле (типа Фарадея-Максвелла) в пространстве Минковского. Именно поэтому в уравнениях ОТО не содержится метрика пространства Минковского.

Из уравнений (2.2) следует, что они будут нелинейными и для собственно гравитационного поля, поскольку плотность тензора $t_g^{\mu\nu}$ является источником гравитационного поля.

Уравнения (2.2), (2.3), *которые мы формально по аналогии с электродинамикой объявили уравнениями гравитации, нам необходимо получить, основываясь на принципе наименьшего действия, ибо только в этом случае мы будем иметь явное выражение для плотности тензора энергии-импульса гравитационного поля и полей вещества.* Но для этого необходимо построить плотность лагранжиана вещества и гравитационного поля. При этом чрезвычайно важно это построение осуществить исходя из общих положений. Только в этом случае можно говорить о теории гравитации. Исходную скалярную плотность лагранжиана материи можно записать в виде

$$L = L_g(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{\phi}^{\mu\nu}) + L_M(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{\phi}^{\mu\nu}, \phi_A) ,$$

здесь L_g – плотность лагранжиана гравитационного поля; L_M – плотность лагранжиана полей вещества; ϕ_A – поля вещества.

Уравнения для гравитационного поля и полей вещества, согласно принципу наименьшего действия, имеют вид

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{\phi}^{\mu\nu}} = 0 , \tag{2.4}$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta \phi_A} = 0 . \tag{2.5}$$

Уравнения (2.4) отличаются от выражений (2.2) прежде всего тем, что в них вариационная производная от плотности лагранжиана берется по полю $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$, тогда как в правой части уравнения (2.2), согласно определению (2.1), входит вариационная производная от плотности лагранжиана по метрике $\gamma_{\mu\nu}$.

Для того чтобы для любой формы материи уравнения (2.4) сводились к уравнениям (2.2), следует предположить, что тензорная плотность $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ всегда входит в плотность лагранжиана совместно с тензорной плотностью $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ через некоторую единую плотность $\tilde{g}^{\mu\nu}$ в форме

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\phi}^{\mu\nu}, \ \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}. \tag{2.6}$$

Так возникает эффективное риманово пространство с метрикой $g^{\mu\nu}(x)$. Поскольку гравитационное поле $\tilde{\phi}^{\mu\nu}(x)$, как и все другие физические поля в пространстве Минковского, описывается в одной системе координат, то из выражения (2.6) *очевидно, что величина $\tilde{g}^{\mu\nu}(x)$ также полностью определяется в одной системе координат.*

В ОТО в галилеевых координатах такое гравитационное поле $\tilde{\phi}^{\mu\nu}(x)$ рассматривалось в работе [49]. Здесь оно естественно возникает (см. Приложение Е). Для описания эффективного риманова пространства, возникающего из-за действия гравитационного поля, не нужен атлас карт, который обычно необходим для описания риманова пространства общего вида. *Это означает, что наше эффективное риманово пространство имеет простую топологию. В ОТО в общем случае топология непростая. Именно поэтому ОТО в принципе не может быть построена на основе представлений о гравитации как о физическом гравитационном поле в пространстве Минковского.*

Если учесть условие (2.6), плотность лагранжиана L принимает вид

$$L = L_g(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}) + L_M(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A) \ .$$

Следует подчеркнуть, что условие (2.6) позволяет вариационную производную по $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ заменить вариационной производной по $\tilde{g}^{\mu\nu}$, а вариационную производную по $\gamma_{\mu\nu}$ выразить через вариационную производную по $\tilde{g}^{\mu\nu}$ и вариационную производную по $\gamma_{\mu\nu}$, явно входящую в плотность лагранжиана L. Действительно, используя (2.4) и (2.6), получим

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{\phi}^{\mu\nu}} = \frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = 0 \ , \tag{2.7}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} \ . \tag{2.8}$$

Вывод последней формулы подробно изложен в приложении А (А. 17). Звездочкой в (2.8) обозначена вариационная производная от плотности лагранжиана по явно входящей в L метрике $\gamma_{\mu\nu}$. Согласно (2.1) и (2.8) имеем

$$t^{\mu\nu} = -2\frac{\delta^\star L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} . \qquad (2.9)$$

Сравнивая уравнение (2.9) с уравнением (2.2), находим условие

$$-2\frac{\delta^\star L}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi}\left[\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{\phi}^{\mu\nu} + m^2\tilde{\phi}^{\mu\nu}\right] , \qquad (2.10)$$

которое в случае его выполнения обеспечивает возможность получения уравнений гравитационного поля (2.2) и (2.3), основываясь на принципе наименьшего действия. Поскольку в правую часть (2.10) не входят поля вещества, то это означает, что вариация плотности лагранжиана вещества L_M по явно входящей метрике $\gamma_{\mu\nu}$ должна быть равна нулю. Чтобы не возникало каких-либо дополнительных ограничений на движение вещества, определяемое уравнением (2.5), отсюда непосредственно следует, что тензор $\gamma_{\mu\nu}$ не входит явно в выражение для плотности лагранжиана вещества L_M. Тогда условие (2.10) принимает вид

$$-2\frac{\delta^\star L_g}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi}\left[\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{\phi}^{\mu\nu} + m^2\tilde{\phi}^{\mu\nu}\right] . \qquad (2.11)$$

Таким образом, все сводится к тому, чтобы найти плотность лагранжиана собственно гравитационного поля L_g, которая удовлетворяла бы *условию* (2.11).

В то же время из предыдущих рассуждений мы приходим к важному выводу, что плотность лагранжиана материи L имеет вид

$$L = L_g(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}) + L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A) . \qquad (2.12)$$

Это означает, что в плотность лагранжиана вещества L_M не вошла метрика $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского.

Таким образом, из требования, чтобы плотность тензора энергии-импульса материи являлась источником гравитационного поля, естественно следует, что движение вещества *должно происходить в эффективном римановом пространстве.* Это утверждение равнозначно теореме. Отсюда становится ясным, почему возникло эффективное риманово пространство, а не какое-либо другое. Именно это обстоятельство даст нам возможность в разделе 3 сформулировать калибровочную группу, а затем построить плотность лагранжиана (4.24), удовлетворяющую согласно (Б. 20) (см. приложение Б) и (2.3), условию (2.11).

Возникает интересная картина: движение вещества в пространстве Минковского с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$ под действием гравитационного поля $\phi^{\mu\nu}$ тождественно движению вещества в эффективном римановом пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$, определяемой из выражения (2.6). Такое взаимодействие гравитационного поля с веществом мы назвали *принципом геометризации.* Принцип геометризации явился следствием исходного предположения, что источником гравитационного поля является универсальная характеристика материи – плотность тензора энергии-импульса.

Такая структура плотности лагранжиана вещества свидетельствует о том, что реализуется уникальная возможность, когда в плотности лагранжиана вещества гравитационное поле подключается непосредственно к плотности тензора $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$.

Эффективное риманово пространство имеет в буквальном смысле слова полевое происхождение, обязанное присутствию гравитационного поля.

Таким образом, причиной того, что эффективное пространство риманово, а не какое-либо другое, является гипотеза о том, что источник гравитации есть универсальная, сохраняющаяся в пространстве Минковского величина – полная плотность тензора энергии-импульса материи.

Поясним фундаментальное свойство гравитационных сил на примере сравнения их с электромагнитными силами.

Как известно, движение заряженной частицы в пространстве Минковского для случая однородного магнитного поля, благодаря силе Лоренца, происходит по окружности в плоскости, перпендикулярной к направлению магнитного поля. Однако это движение далеко не одинаково даже для заряженных частиц, если отношение заряда к массе у них различно. Кроме того, существуют нейтральные частицы, а их траектории в магнитном поле вообще прямолинейны. Поэтому в силу неуниверсальности электромагнитных сил их действие нельзя свести к геометрии пространства-времени. Другое дело – гравитация. Она универсальна, движение любых пробных тел происходит по траекториям, одинаковым при тождественных начальных условиях. В этом случае в силу гипотезы о плотности тензора энергии-импульса материи как источнике гравитационного поля удается описать эти траектории геодезическими линиями в эффективном римановом пространстве-времени, возникшем благодаря присутствию гравитационного поля в пространстве Минковского. В тех областях пространства, где имеется сколь угодно слабое гравитационное поле, мы имеем метрические свойства пространства, с большой точностью приближающиеся к непосредственно наблюдаемым свойствам псевдоевклидова пространства. Когда же гравитационные поля являются сильными, метрические свойства эффективного пространства становятся римановыми. Но и в этом случае псевдоевклидова геометрия не исчезает бесследно – она наблюдаема и проявляется в том, что движение тел в эффективном римановом пространстве не является свободным по инерции, а происходит с ускорением по отношению к псевдоевклидову пространству в галилеевых координатах. *Именно поэтому ускорение в РТГ, в отличие от ОТО, имеет абсолютный смысл. Следовательно, "лифт Эйнштейна" не может быть инерциальной системой координат. Это проявится в том, что заряд, покоящийся в "лифте Эйнштейна", будет излучать электромагнитные волны. Данное физическое явление также должно свидетельствовать о наличии пространства Минковского.* Как мы увидим далее, метрика пространства Минковского может быть определена на основании изучения распределения вещества и движения пробных тел и света в эффективном римановом пространстве. К этому вопросу мы вернемся в разделе 7.

В уравнение движения вещества не входит метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского. Пространство Минковского будет сказываться на движении вещества только через метрический тензор $g_{\mu\nu}$ риманова пространства, определяемый, как мы увидим далее, из уравнений гравитации, в которые входит метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского. Поскольку эффективная риманова метрика возникает на основе физического поля, заданного в пространстве Минковского, то уже отсюда следует, что эффективное риманово пространство имеет простую топологию и задается в одной карте. Если, например, вещество сосредоточено в области островного типа, то в галилеевых координатах инерциальной системы гравитационное поле $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ не может убывать медленнее, чем $1/r$, но это обстоятельство накладывает сильное ограничение на асимптотическое поведение метрики $g_{\mu\nu}$ эффективной римановой геометрии

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 0\left(\frac{1}{r}\right), \text{ здесь } \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)\ . \quad (2.13)$$

Если же исходить просто из римановой метрики, не предполагая, что она возникла из-за действия физического поля, то такие ограничения не возникают, поскольку асимптотика метрики $g_{\mu\nu}$ зависит даже от выбора трехмерных пространственных координат. Тогда как физические величины от выбора трехмерных пространственных координат в принципе не могут зависеть. В РТГ не возникает каких-либо ограничений на выбор системы координат. Координатная система может быть любой, лишь бы она осуществляла взаимнооднозначное соответствие для всех точек инерциальной системы координат пространства Минковского (необходимо, чтобы имел место *диффеоморфизм*) и обеспечивала выполнение неравенств

$$\gamma_{00} > 0,\ dl^2 = s_{ik}dx^i\,dx^k > 0;\ (i, k = 1, 2, 3),$$

где

$$s_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}},$$

необходимых для введения понятий времени и пространственной длины. Интервал при этом принимает вид

$$d\sigma^2 = c^2 d\tau^2 - dl^2 ,$$

где

$$c d\tau = \frac{\gamma_{0\nu} dx^\nu}{\sqrt{\gamma_{00}}} .$$

В нашей теории гравитации геометрические характеристики риманова пространства возникают как полевые величины в пространстве Минковского, а поэтому их трансформационные свойства становятся тензорными, тогда как ранее, в обычном понимании, они таковыми не были. Так, например, символы Кристоффеля, заданные как полевые величины в галилеевых координатах пространства Минковского, уже являются тензорами третьего ранга. Аналогично обычные производные в декартовых координатах пространства Минковского от тензорных величин также являются тензорами.

Может возникнуть вопрос: почему бы и в ОТО не использовать разделение метрики в форме (2.6), введя понятие гравитационного поля в пространстве Минковского?

В уравнения Гильберта-Эйнштейна входит только величина $g_{\mu\nu}$, а следовательно, нельзя однозначно сказать, с помощью какой метрики $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского мы должны определить согласно (2.6) гравитационное поле. Но трудность не только в этом, а в том, что решения уравнений Гильберта-Эйнштейна в общем случае находят не в одной карте, а в атласе карт. Такие решения для $g_{\mu\nu}$ описывают риманово пространство со сложной топологией, тогда как римановы пространства, получаемые с помощью представления гравитационного поля в пространстве Минковского, описываются в одной карте и имеют простую топологию. *Именно по этим причинам полевые представления не совместимы с ОТО, поскольку они весьма жесткие. Но это означает, что никакой полевой формулировки ОТО в пространстве Минковского, в принципе, не может быть.*

Аппарат римановой геометрии предрасположен к возможности введения ковариантных производных в пространстве Минковского, чем мы и воспользовались при построении РТГ. Но чтобы это осуществить, потребовалось ввести метрику пространства Минковского в гравитационные уравнения, и тем самым осуществить функциональную связь метрики риманова пространства $g_{\mu\nu}$ с метрикой пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$. Так впервые удалось установить связь инерциальной системы координат с распределением вещества во Вселенной. Но на этом мы подробно остановимся в последующих разделах.

3. Калибровочная группа преобразований

Поскольку плотность лагранжиана вещества в эффективном римановом пространстве имеет вид

$$L_M(\tilde{g}^{\mu\nu},\, \phi_A), \tag{3.1}$$

то легко найти калибровочную группу преобразований, при которых плотность лагранжиана вещества меняется только на дивергенцию. Для этой цели воспользуемся инвариантностью действия

$$S_M = \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu},\, \phi_A)\, d^4x \tag{3.2}$$

при произвольном бесконечно малом изменении координат

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x), \tag{3.3}$$

где ξ^{α} – бесконечно малый четырехвектор смещения. При этих координатных преобразованиях полевые функции $\tilde{g}^{\mu\nu}$, ϕ_A изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{g}'^{\mu\nu}(x') &= \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \delta_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \xi^{\alpha}(x) D_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}(x), \\ \phi'_A(x') &= \phi_A(x) + \delta_\xi \phi_A(x) + \xi^{\alpha}(x) D_\alpha \phi_A(x), \end{aligned} \tag{3.4}$$

где выражения

$$\begin{aligned} \delta_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}(x) &= \tilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha \xi^{\nu}(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha \xi^{\mu}(x) - D_\alpha(\xi^{\alpha} \tilde{g}^{\mu\nu}), \\ \delta_\xi \phi_A(x) &= -\xi^{\alpha}(x) D_\alpha \phi_A(x) + F^{B;\alpha}_{A;\beta}\, \phi_B(x) D_\alpha \xi^{\beta}(x) \end{aligned} \tag{3.5}$$

являются вариациями Ли.

Операторы δ_ξ удовлетворяют условиям алгебры Ли, т. е. коммутационному соотношению

$$[\delta_{\xi_1},\, \delta_{\xi_2}](\cdot) = \delta_{\xi_3}\,(\cdot) \tag{3.6}$$

и тождеству Якоби

$$[\delta_{\xi_1},\, [\delta_{\xi_2},\, \delta_{\xi_3}]] + [\delta_{\xi_3},\, [\delta_{\xi_1},\, \delta_{\xi_2}]] + [\delta_{\xi_2},\, [\delta_{\xi_3},\, \delta_{\xi_1}]] = 0, \tag{3.7}$$

где

$$\xi_3^\nu = \xi_1^\mu D_\mu \xi_2^\nu - \xi_2^\mu D_\mu \xi_1^\nu = \xi_1^\mu \partial_\mu \xi_2^\nu - \xi_2^\mu \partial_\mu \xi_1^\nu.$$

Для того чтобы имело место (3.6), необходимо выполнение следующих условий:

$$F_{A;\,\nu}^{B;\,\mu}\, F_{B;\,\beta}^{C;\,\alpha} - F_{A;\,\beta}^{B;\,\alpha}\, F_{B;\,\nu}^{C;\,\mu} = f_{\nu\beta;\,\sigma}^{\mu\alpha;\,\tau}\, F_{A;\,\tau}^{C;\,\sigma}, \tag{3.8}$$

где структурные постоянные f равны

$$f_{\nu\beta;\,\sigma}^{\mu\alpha;\,\tau} = \delta_\beta^\mu \delta_\sigma^\alpha \delta_\nu^\tau - \delta_\nu^\alpha \delta_\sigma^\mu \delta_\beta^\tau. \tag{3.9}$$

Легко убедиться, что они удовлетворяют тождеству Якоби

$$f_{\beta\mu;\,\tau}^{\alpha\nu;\,\sigma}\, f_{\sigma\varepsilon;\,\delta}^{\tau\rho;\,\omega} + f_{\mu\varepsilon;\,\tau}^{\nu\rho;\,\sigma}\, f_{\sigma\beta;\,\delta}^{\tau\alpha;\,\omega} + f_{\varepsilon\beta;\,\tau}^{\rho\alpha;\,\sigma}\, f_{\sigma\mu;\,\delta}^{\tau\nu;\,\omega} = 0 \tag{3.10}$$

и обладают свойством антисимметрии:

$$f_{\beta\mu;\,\sigma}^{\alpha\nu;\,\rho} = -f_{\mu\beta;\,\sigma}^{\nu\alpha;\,\rho}.$$

При координатном преобразовании (3.3) вариация действия равна нулю:

$$\delta_c S_M = \int\limits_{\Omega'} L'_M(x')\, d^4x' - \int\limits_{\Omega} L_M(x)\, d^4x = 0. \tag{3.11}$$

Первый интеграл в (3.11) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega'} L'_M(x')\, d^4x' = \int\limits_{\Omega} J\, L'_M(x')\, d^4x,$$

где

$$J = \det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right).$$

В первом порядке по ξ^α детерминант J равен

$$J = 1 + \partial_\alpha \xi^\alpha(x). \tag{3.12}$$

Учитывая разложение

$$L'_M(x') = L'_M(x) + \xi^\alpha(x)\frac{\partial L_M}{\partial x^\alpha},$$

а также (3.12), выражение для вариации можно представить в форме

$$\delta_c S_M = \int\limits_\Omega \left[\delta L_M(x) + \partial_\alpha(\xi^\alpha L_M(x))\right] d^4x = 0\,.$$

В силу произвольности объема интегрирования Ω имеем тождество

$$\delta\, L_M(x) = -\partial_\alpha\big(\xi^\alpha(x) L_M(x)\big)\,, \tag{3.13}$$

где вариация Ли δL_M

$$\begin{aligned}\delta L_M(x) \quad &= \quad \frac{\partial L_M}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}\,\delta\tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu})}\,\delta(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}) + \\ &+ \quad \frac{\partial L_M}{\partial \phi_A}\,\delta\phi_A + \frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\alpha\phi_A)}\,\delta(\partial_\alpha\phi_A).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Отсюда, в частности, следует, что если скалярная плотность зависит только от $\tilde{g}^{\mu\nu}$ и ее производных, то при преобразовании (3.5) она также изменится только на дивергенцию

$$\delta L\big(\tilde{g}^{\mu\nu}(x)\big) = -\partial_\alpha\Big(\xi^\alpha(x)\, L\big(\tilde{g}^{\mu\nu}(x)\big)\Big)\,, \tag{3.13a}$$

где вариация Ли δL

$$\begin{aligned}\delta L\big(\tilde{g}^{\mu\nu}(x)\big) &= \frac{\partial L}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}\,\delta\tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu})}\,\delta(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}) + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta \tilde{g}^{\mu\nu})}\delta(\partial_\alpha\partial_\beta \tilde{g}^{\mu\nu})\,.\end{aligned} \tag{3.14a}$$

Вариации Ли (3.5) были установлены в контексте координатных преобразований (3.3) Однако возможна и другая точка зрения, согласно которой преобразования (3.5) можно рассматривать как калибровочные преобразования. В этом случае произвольный бесконечно малый четырехвектор $\xi^\alpha(x)$ будет уже калибровочным вектором, а не вектором смещения координат. В дальнейшем, чтобы подчеркнуть отличие калибровочной группы от группы координатных преобразований, для группового параметра мы будем использовать обозначение $\varepsilon^{\alpha}(x)$, а преобразование полевых функций

$$\begin{aligned} &\tilde{g}^{\mu\nu}(x) \to \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \delta_{\varepsilon}\tilde{g}^{\mu\nu}(x)\,, \\ &\phi_A(x) \to \phi_A(x) + \delta_{\varepsilon}\phi_A(x) \end{aligned} \tag{3.15}$$

с приращениями

$$\begin{aligned} &\delta_{\varepsilon}\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\alpha}D_{\alpha}\varepsilon^{\nu}(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha}D_{\alpha}\varepsilon^{\mu}(x) - D_{\alpha}(\varepsilon^{\alpha}\tilde{g}^{\mu\nu}), \\ &\delta_{\varepsilon}\phi_A(x) = -\varepsilon^{\alpha}(x)D_{\alpha}\phi_A(x) + F^{B;\,\alpha}_{A;\,\beta}\,\phi_B(x)\,D_{\alpha}\,\varepsilon^{\beta}(x) \end{aligned} \tag{3.16}$$

будем называть *калибровочными преобразованиями.*

В полном соответствии с формулами (3.6) и (3.7) операторы удовлетворяют той же алгебре Ли, т. е. коммутационному соотношению

$$[\delta_{\varepsilon_1},\, \delta_{\varepsilon_2}](\cdot) = \delta_{\varepsilon_3}(\cdot) \tag{3.17}$$

и тождеству Якоби

$$\big[\delta_{\varepsilon_1},\, [\delta_{\varepsilon_2},\, \delta_{\varepsilon_3}]\big] + \big[\delta_{\varepsilon_3},\, [\delta_{\varepsilon_1},\, \delta_{\varepsilon_2}]\big] + \big[\delta_{\varepsilon_2},\, [\delta_{\varepsilon_3},\, \delta_{\varepsilon_1}]\big] = 0\,. \tag{3.18}$$

Здесь аналогично предыдущему имеем

$$\varepsilon_3^{\nu} = \varepsilon_1^{\mu}D_{\mu}\varepsilon_2^{\nu} - \varepsilon_2^{\mu}D_{\mu}\varepsilon_1^{\nu} = \varepsilon_1^{\mu}\partial_{\mu}\varepsilon_2^{\nu} - \varepsilon_2^{\mu}\partial_{\mu}\varepsilon_1^{\nu}\,.$$

Калибровочная группа возникла из геометризованной структуры скалярной плотности $L_M(\tilde{g}^{\mu\nu},\, \phi_A)$, *описывающей взаимодействие вещества и гравитационного поля, которая в силу тождества* (3.13) *изменяется только на дивергенцию при калибровочных преобразованиях* (3.16). *Таким образом, принцип геометризации, который определил универсальный характер взаимодействия вещества и гравитационного поля, дал нам возможность сформулировать некоммутативную бесконечномерную калибровочную группу* (3.16).

Существенная разница между калибровочными и координатными преобразованиями проявится в решающем месте в теории при построении скалярной плотности лагранжиана собственно гравитационного поля. Разница возникает из-за того, что при калибровочном преобразовании метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ не изменяется, следовательно, в силу (2.6) имеем

$$\delta_\varepsilon \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \delta_\varepsilon \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x).$$

На основании (3.16) следует преобразование для поля

$$\delta_\varepsilon \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\mu(x) - D_\alpha(\varepsilon^\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}),$$

но это преобразование существенно отличается от его преобразования при смещении координат:

$$\delta_\xi \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x) = \tilde{\phi}^{\mu\alpha} D_\alpha \xi^\nu(x) + \tilde{\phi}^{\nu\alpha} D_\alpha \xi^\mu(x) - D_\alpha(\xi^\alpha \tilde{\phi}^{\mu\nu}).$$

При калибровочных преобразованиях (3.16) уравнения движения для вещества остаются неизменными, поскольку при любых таких преобразованиях плотность лагранжиана вещества изменяется только на дивергенцию.

4. Плотность лагранжиана и уравнения движения для собственно гравитационного поля

Как известно, используя только тензор $g_{\mu\nu}$, невозможно построить скалярную плотность лагранжиана собственно гравитационного поля относительно произвольных координатных преобразований в виде квадратичной формы производных не выше первого порядка. Поэтому в такую плотность лагранжиана будет обязательно входить наряду с метрикой $g_{\mu\nu}$ также и метрика $\gamma_{\mu\nu}$. Но, так как при калибровочном преобразовании (3.16) метрика $\gamma_{\mu\nu}$ не изменяется, следовательно, чтобы при этом преобразовании плотность лагранжиана собственно гравитационного поля изменялась только на дивергенцию, должны возникнуть сильные ограничения на ее структуру. Именно здесь и возникает принципиальная разница между калибровочным и координатным преобразованиями.

В то время как координатные преобразования не накладывают почти никаких ограничений на структуру скалярной плотности лагранжиана собственно гравитационного поля, калибровочные преобразования позволят нам найти плотность лагранжиана. Прямой общий метод построения лагранжиана приведен в монографии [10]. Изберем более простой метод построения лагранжиана. На основании (3.13a) заключаем, что простейшие скалярные плотности $\sqrt{-g}$ и $\tilde{R}=\sqrt{-g}R$, где R– скалярная кривизна эффективного риманова пространства, при калибровочном преобразовании (3.16) изменяются следующим образом:

$$\sqrt{-g} \to \sqrt{-g} - D_\nu(\varepsilon^\nu \sqrt{-g})\,, \tag{4.1}$$

$$\tilde{R} \to \tilde{R} - D_\nu(\varepsilon^\nu \tilde{R})\,. \tag{4.2}$$

Скалярная плотность $\tilde{R}$ выражается через символы Кристоффеля

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{4.3}$$

следующим образом:

$$\tilde{R} = -\tilde{g}^{\mu\nu}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\,\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}) - \partial_\nu(\tilde{g}^{\mu\nu}\,\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma}\,\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma})\,. \quad (4.4)$$

Поскольку символы Кристоффеля не являются тензорными величинами, каждое слагаемое в (4.4) не является скалярной плотностью. Однако, если ввести тензорные величины $G^{\lambda}_{\mu\nu}$

$$G^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,g^{\lambda\sigma}(D_\mu g_{\sigma\nu} + D_\nu g_{\sigma\mu} - D_\sigma g_{\mu\nu})\,, \quad (4.5)$$

которые в декартовых координатах совпадают с символами Кристоффеля, то скалярную плотность можно тождественно записать в виде

$$\tilde{R} = -\tilde{g}^{\mu\nu}(G^{\lambda}_{\mu\nu}\,G^{\sigma}_{\lambda\sigma} - G^{\lambda}_{\mu\sigma}\,G^{\sigma}_{\nu\lambda}) - D_\nu(\tilde{g}^{\mu\nu}\,G^{\sigma}_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma}\,G^{\nu}_{\mu\sigma})\,. \quad (4.6)$$

Заметим, что в (4.6) каждая группа членов в отдельности ведет себя при произвольных координатных преобразованиях как скалярная плотность. Мы видим, что аппарат римановой геометрии предрасположен к введению вместо обычных производных ковариантных в пространстве Минковского, однако метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$, с помощью которого определяются ковариантные производные, при этом никак не фиксируется.

Учитывая (4.1) и (4.2), выражение

$$\lambda_1(\tilde{R} + D_\nu Q^\nu) + \lambda_2\sqrt{-g} \quad (4.7)$$

при произвольных калибровочных преобразованиях изменяется только на дивергенцию. Выбирая векторную плотность Q^ν равной

$$Q^\nu = \tilde{g}^{\mu\nu}\,G^{\sigma}_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma}\,G^{\nu}_{\mu\sigma}\,,$$

мы исключаем из предыдущего выражения члены с производными выше первого порядка и получаем следующую плотность лагранжиана:

$$-\lambda_1\tilde{g}^{\mu\nu}(G^{\lambda}_{\mu\nu}\,G^{\sigma}_{\lambda\sigma} - G^{\lambda}_{\mu\sigma}\,G^{\sigma}_{\nu\lambda}) + \lambda_2\sqrt{-g}\,. \quad (4.8)$$

Таким образом, мы видим, что требование, чтобы плотность лагранжиана собственно гравитационного поля при калибровочном преобразовании (3.16) изменялась только на дивергенцию, однозначно определяет структуру плотности лагранжиана (4.8), но только с произвольными параметрами λ_1, λ_2. Но если ограничиться только этой плотностью, тогда уравнения гравитационного поля будут калибровочно инвариантными, а метрика пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$ не войдет в систему уравнений, определяемых плотностью лагранжиана (4.8). Поскольку в таком подходе исчезает метрика пространства Минковского, то и исключается возможность представления гравитационного поля как физического поля типа Фарадея-Максвелла в пространстве Минковского.

При плотности лагранжиана (4.8) введение метрики $\gamma_{\mu\nu}$ с помощью уравнений (2.3) не спасает положение, поскольку физические величины – интервал и тензор кривизны риманова пространства, а также тензор $t_g^{\mu\nu}$ гравитационного поля – будут зависеть от выбора калибровки частного вида (4.10), что физически недопустимо. Так, например,

$$\delta_\epsilon R_{\mu\nu} = -R_{\mu\sigma} D_\nu \epsilon^\sigma - R_{\nu\sigma} D_\mu \epsilon^\sigma - \epsilon^\sigma D_\sigma R_{\mu\nu} \, ,$$

$$\delta_\epsilon R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\sigma\nu\alpha\beta} D_\mu \epsilon^\sigma - R_{\mu\sigma\alpha\beta} D_\nu \epsilon^\sigma -$$

$$- R_{\mu\nu\sigma\beta} D_\alpha \epsilon^\sigma - R_{\mu\nu\alpha\sigma} D_\beta \epsilon^\sigma - \epsilon^\sigma D_\sigma R_{\mu\nu\alpha\beta} \, .$$

Для того чтобы сохранить представления о поле в пространстве Минковского и исключить такую неоднозначность, необходимо добавить в плотность лагранжиана гравитационного поля член, нарушающий калибровочную группу. Именно здесь появляется принципиально новый путь, который долгое время ускользал из поля зрения. На первый взгляд, может показаться, что здесь возникает большой произвол в выборе плотности лагранжиана гравитационного поля, так как нарушить группу можно весьма различными способами. Однако оказывается, что это не так, поскольку наше физическое требование на поляризационные свойства гравитационного поля как поля со спинами 2 и 0, накладываемое уравнениями (2.3), приводит к тому, что член, нарушающий группу (3.16), должен быть выбран таким образом, чтобы уравнения (2.3) являлись следствиями системы уравнений гравитационного поля и полей вещества, ибо только в этом случае у нас не возникает переопределенная система дифференциальных уравнений. Для этой цели в скалярную плотность лагранжиана гравитационного поля введем член вида

$$\gamma_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu}\,, \tag{4.9}$$

который при наличии условий (2.3) и при преобразованиях (3.16) изменяется также на дивергенцию для векторов, удовлетворяющих условию

$$g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu \varepsilon^\sigma(x) = 0\,. \tag{4.10}$$

Почти аналогичная ситуация имеет место в электродинамике с массой покоя фотона, отличной от нуля. С учетом (4.8), (4.9) общая скалярная плотность лагранжиана имеет вид

$$\begin{aligned} L_g = &-\lambda_1\tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu}\,G^\sigma_{\lambda\sigma} - G^\lambda_{\mu\sigma}\,G^\sigma_{\nu\lambda}) + \\ &+\lambda_2\sqrt{-g} + \lambda_3\,\gamma_{\mu\nu}\,\tilde{g}^{\mu\nu} + \lambda_4\sqrt{-\gamma}\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Последний член в (4.11) мы ввели, чтобы с его помощью обратить в нуль плотность лагранжиана при отсутствии гравитационного поля. Сужение класса калибровочных векторов из-за введения члена (4.9) автоматически приводит к тому, что уравнения (2.3) будут следствиями уравнений гравитационного поля. В этом мы непосредственно убедимся ниже.

Согласно принципу наименьшего действия, уравнения для собственного гравитационного поля имеют вид

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \lambda_1 R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\lambda_2\,g_{\mu\nu} + \lambda_3\,\gamma_{\mu\nu} = 0\,, \tag{4.12}$$

здесь

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{\partial L_g}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} - \partial_\sigma\Big(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma \tilde{g}^{\mu\nu})}\Big)\,,$$

где $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи приведен к форме

$$R_{\mu\nu} = D_\lambda G^\lambda_{\mu\nu} - D_\mu G^\lambda_{\nu\lambda} + G^\sigma_{\mu\nu} G^\lambda_{\sigma\lambda} - G^\sigma_{\mu\lambda} G^\lambda_{\nu\sigma} . \qquad (4.13)$$

Поскольку в случае отсутствия гравитационного поля уравнения (4.12) должны тождественно выполняться, отсюда следует

$$\lambda_2 = -2\lambda_3 . \qquad (4.14)$$

Найдем теперь плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля в пространстве Минковского

$$t_g^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_g}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = 2\sqrt{-\gamma}\left(\gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}\right)\frac{\delta L_g}{\delta\tilde{g}^{\alpha\beta}} +$$
$$+\lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3\tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4\tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \qquad (4.15)$$

где

$$J^{\mu\nu} = D_\alpha D_\beta(\gamma^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu}\tilde{g}^{\beta\mu} - \gamma^{\alpha\beta}\tilde{g}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta}), \qquad (4.16)$$

(см. приложения Б (Б. 19) и (Е)). Если в выражении (4.15) учесть динамические уравнения (4.12), то мы получим уравнения для собственно гравитационного поля в форме

$$\lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3\tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4\tilde{\gamma}^{\mu\nu} = t_g^{\mu\nu}. \qquad (4.17)$$

Для того чтобы это уравнение в случае отсутствия гравитационного поля удовлетворялось тождественно, необходимо положить

$$\lambda_4 = -2\lambda_3 . \qquad (4.18)$$

Поскольку для собственно гравитационного поля всегда имеет место равенство

$$D_\mu t_g^{\mu\nu} = 0 , \qquad (4.19)$$

из уравнения (4.17) следует

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0 . \qquad (4.20)$$

Таким образом, уравнения (2.3), определяющие поляризационные состояния поля, непосредственно вытекают из уравнений (4.17). С учетом выражения (4.20) полевые уравнения (4.17) можно записать в виде

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\phi}^{\mu\nu} - \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \tilde{\phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t_g^{\mu\nu} . \tag{4.21}$$

В галилеевых координатах это уравнение имеет простой вид

$$\Box \tilde{\phi}^{\mu\nu} - \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \tilde{\phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t_g^{\mu\nu} . \tag{4.22}$$

Числовому фактору $-\lambda_4/\lambda_1 = m^2$ естественно придать смысл квадрата массы гравитона, $m = (m_g c)/\hbar$, m_g – масса гравитона, а значение $-1/\lambda_1$, согласно принципу соответствия, необходимо взять равным 16π. Таким образом, все неизвестные постоянные, входящие в плотность лагранжиана, определены:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{16\pi}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = -2\,\lambda_3 = \frac{m^2}{16\,\pi} . \tag{4.23}$$

Отсюда видно, что в РТГ космологический член обязательно должен присутствовать, но с определенным знаком, соответствующим притяжению.

Построенная скалярная плотность лагранжиана собственно гравитационного поля будет иметь вид

$$\begin{aligned} L_g \; = \; & \frac{1}{16\,\pi} \tilde{g}^{\mu\nu} (G^\lambda_{\mu\nu} G^\sigma_{\lambda\sigma} - G^\lambda_{\mu\sigma} G^\sigma_{\nu\lambda}) - \\ - \; & \frac{m^2}{16\,\pi} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} - \sqrt{-g} - \sqrt{-\gamma} \right) . \end{aligned} \tag{4.24}$$

Соответствующие ей динамические уравнения для собственно гравитационного поля могут быть записаны в форме

$$J^{\mu\nu} - m^2 \tilde{\phi}^{\mu\nu} = -16\pi\, t_g^{\mu\nu} , \tag{4.25}$$

или

$$R^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} (g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \gamma_{\alpha\beta}) = 0 . \tag{4.26}$$

Эти уравнения форминвариантны относительно преобразований Лоренца.

Построенная выше плотность лагранжиана приводит к уравнениям (4.26), из которых следует, что уравнения (4.20) являются их следствиями, а поэтому вне вещества мы будем иметь десять уравнений для десяти неизвестных полевых функций. С помощью (4.20) неизвестные полевые функции $\phi^{0\alpha}$ легко выражаются через полевые функции ϕ^{ik}, где индексы i и k пробегают значения $1, 2, 3$.

Таким образом, в плотности лагранжиана собственно гравитационного поля структура массового члена, нарушающего калибровочную группу, однозначно определяется поляризационными свойствами гравитационного поля. *Полевой подход к гравитации с объявлением источником поля тензора энергии-импульса всей материи с необходимостью требует введения в теорию массы покоя гравитона.*

5. Уравнения движения для гравитационного поля и вещества

Полная плотность лагранжиана вещества и гравитационного поля равна

$$L = L_g + L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A), \tag{5.1}$$

где L_g определяется выражением (4.24).

На основании (5.1) с помощью принципа наименьшего действия получим полную систему уравнений для гравитационного поля и вещества:

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = 0, \tag{5.2}$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta \phi_A} = 0. \tag{5.3}$$

Поскольку при произвольном бесконечно малом изменении координат вариация действия $\delta_c S_M$ равна нулю,

$$\delta_c S_M = \delta_c \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A)\, d^4x = 0,$$

отсюда можно получить тождество (см. приложение В (В.16)) в форме

$$g_{\mu\nu}\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = -D_\nu\Big(\frac{\delta L_M}{\delta \phi_A}\, F^{B;\,\nu}_{A;\,\mu}\, \phi_B(x)\Big) - \frac{\delta L_M}{\delta \phi_A}\, D_\mu\, \phi_A(x). \tag{5.4}$$

Здесь $T^{\lambda\nu} = -2(\delta L_M/\delta g_{\lambda\nu})$ – плотность тензора вещества в римановом пространстве; ∇_λ – ковариантная производная в этом пространстве с метрикой $g_{\lambda\nu}$. Из тождества (5.4) следует, что если выполняются уравнения движения вещества (см. (5.3)), то имеет место уравнение

$$\nabla_\lambda\, T^{\lambda\nu} = 0. \tag{5.5}$$

В том случае, если число уравнений (5.3) *для вещества равно четырем, вместо них можно использовать эквивалентные* *им уравнения* (5.5). Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело только с такими уравнениями для вещества, всегда можно пользоваться уравнениями для вещества в форме (5.5). Таким образом, полная система уравнений для гравитационного поля и вещества будет иметь вид

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = 0\,, \tag{5.6}$$

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0\,. \tag{5.7}$$

Вещество будет описываться скоростью $\vec{v}$, плотностью ρ, и давлением p. Гравитационное поле определяется десятью компонентами тензора $\phi^{\mu\nu}$.

Итак, мы имеем 15 неизвестных. Для их определения необходимо к 14-ти уравнениям (5.6), (5.7) добавить уравнение состояния вещества. Если принять во внимание соотношения (см. приложение Б* (Б*.18), (Б*.19))

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\,\pi}\,R_{\mu\nu} + \frac{m^2}{32\,\pi}\,(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}), \tag{5.8}$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,T\Big), \tag{5.9}$$

то систему уравнений (5.6), (5.7) можно представить в форме

$$\Big(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}R\Big) + \\ + \frac{m^2}{2}\Big[g^{\mu\nu} + (g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,g^{\alpha\beta})\gamma_{\alpha\beta}\Big] = \frac{8\,\pi}{\sqrt{-g}}\,T^{\mu\nu}, \tag{5.10}$$

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0\,. \tag{5.11}$$

В силу тождества Бьянки

$$\nabla_\mu\Big(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,R\Big) = 0$$

из уравнений (5.10) имеем

$$m^2\sqrt{-g}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\nabla_\mu\,\gamma_{\alpha\beta} = 16\,\pi\,\nabla_\mu\,T^{\mu\nu}. \tag{5.12}$$

Учитывая выражение

$$\nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = -G^\sigma_{\mu\alpha}\gamma_{\sigma\beta} - G^\sigma_{\mu\beta}\gamma_{\sigma\alpha}\,, \tag{5.13}$$

где $G^\sigma_{\mu\alpha}$ определено формулой (4.5), найдем

$$\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\mu\lambda}g^{\mu\nu}(D_\sigma\, g^{\sigma\lambda} + G^\beta_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\lambda})\,, \tag{5.14}$$

но так как (см. формулу (Б*.20))

$$\sqrt{-g}(D_\sigma\, g^{\sigma\lambda} + G^\beta_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\lambda}) = D_\sigma\,\tilde{g}^{\lambda\sigma}, \tag{5.15}$$

выражение (5.14) принимает вид

$$\sqrt{-g}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\mu\lambda}\,g^{\mu\nu}\,D_\sigma\,\tilde{g}^{\lambda\sigma}. \tag{5.16}$$

С помощью (5.16) выражение (5.12) может быть представлено в форме

$$m^2\gamma_{\mu\lambda}\,g^{\mu\nu}D_\sigma\tilde{g}^{\lambda\sigma} = 16\pi\,\nabla_\mu\,T^{\mu\nu}.$$

Полученное выражение можно переписать в виде

$$m^2D_\sigma\tilde{g}^{\lambda\sigma} = 16\,\pi\,\gamma^{\lambda\nu}\nabla_\mu\,T^\mu_\nu\,. \tag{5.17}$$

С помощью этого соотношения уравнение (5.11) можно заменить уравнением

$$D_\sigma\tilde{g}^{\nu\sigma} = 0\,. \tag{5.18}$$

Таким образом, система уравнений (5.10), (5.11) сводится к системе гравитационных уравнений

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}R\right) + \frac{m^2}{2}\left[g^{\mu\nu} + (g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,g^{\alpha\beta})\gamma_{\alpha\beta}\right] = \frac{8\,\pi}{\sqrt{-g}}\,T^{\mu\nu}, \tag{5.19}$$

$$D_\mu\,\tilde{g}^{\mu\nu} = 0\,. \tag{5.20}$$

Эти уравнения общековариантны относительно произвольных координатных преобразований и форминвариантны только относительно преобразований координат, оставляющих метрику Минковского $\gamma_{\mu\nu}(x)$ форминвариантной. Отсюда, в частности, следует, что в любой инерциальной (галилеевой) системе координат явления описываются одинаковыми уравнениями.

Уравнения ОТО – это уравнения Гильберта-Эйнштейна

$$\sqrt{-g}\Big(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\Big) = 8\pi T^{\mu\nu},$$

но эта система уравнений неполна, она добавляется нековариантными координатными условиями, которые могут быть различными. Иначе говоря, они не универсальны.

В РТГ как полевой теории вместо уравнений Гильберта-Эйнштейна возникли уравнения (5.19), а вместо неуниверсальных и необщековариантных координатных условий возникли универсальные общековариантные полевые уравнения (5.20), которые оставляют в тензорном поле только неприводимые представления, соответствующие спинам 2 и 0. При этом возникшее эффективное риманово пространство имеет только простую топологию.

При соблюдении *диффеоморфизма* описание природы возможно в любой системе координат, но выделенными являются инерциальные системы.

Уравнения с массой гравитона возникали и ранее[6]*, однако, из-за длительно сложившегося непонимания фундаментального факта, что специальная теория относительности есть теория пространства-времени, а следовательно, она справедлива не только в инерциальных, но и в неинерциальных системах координат, они в то время серьезно не рассматривались, поскольку считались не общековариантными.* (О не общековариантности пишут сами авторы). Обычно считали, что

[6]См., например: *Ogievetsky V. I., Polubarinov I. V.* // Ann. Phys. 1965. Vol. 35. P. 167–208; *Peter G. O. et al.* // Astrophys. J. 1969. Vol. 157. P. 857–867.

величина

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

является *тензором только* относительно *линейных преобразований* координат. Но эта *величина на самом деле* есть не что иное как *метрика псевдоевклидовой геометрии* $\gamma_{\mu\nu}(x)$, а поэтому она является *тензором* относительно произвольных координатных преобразований. Удивительно, но само открытие *псевдоевклидовой геометрии пространства-времени* (Пуанкаре, Минковский) еще долгое время не было осознано и понято.

Система уравнений (5.19), (5.20) – гиперболическая, а для статических задач – эллиптическая. Добавляя к системе уравнений (5.19), (5.20) уравнение состояния, мы получим полную систему уравнений для определения неизвестных физических величин $g_{\mu\nu}$, $\vec{v}$, ρ, p в той или иной постановке задачи.

Конкретная инерциальная галилеева система координат выделяется самой постановкой физической задачи (начальными и граничными условиями). Описание данной поставленной физической задачи в разных инерциальных (галилеевых) системах координат, конечно, различно, но это не противоречит принципу относительности. Если ввести тензор

$$N^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}\left[g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right], \;\; N = N^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\,,$$

то систему уравнений (5.19), (5.20) можно записать в форме

$$N^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}N = \frac{8\,\pi}{\sqrt{-g}}\,T^{\mu\nu}, \qquad (5.19a)$$

$$D_\mu\,\tilde{g}^{\mu\nu} = 0\,. \qquad (5.20a)$$

Она может быть представлена также в виде

$$N^{\mu\nu} = \frac{8\,\pi}{\sqrt{-g}}(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,T)\,, \qquad (5.21)$$

$$D_\mu\tilde{g}^{\mu\nu} = 0\,, \qquad (5.22)$$

или

$$N_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, T)\,, \qquad (5.21a)$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0\,. \qquad (5.22a)$$

Здесь

$$N_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu})\,.$$

Следует особо подчеркнуть, что как в систему (5.21), так и в систему уравнений (5.22) входит метрический тензор пространства Минковского.

Введение в уравнения гравитационного поля метрического тензора пространства Минковского в форме (5.21) сразу делают систему уравнений полной, а топологию эффективного риманова пространства простой.

Преобразования координат, которые оставляют метрику пространства Минковского форминвариантной, связывают физически эквивалентные системы отсчета. Простейшими из них будут инерциальные системы. Поэтому возможные калибровочные преобразования, удовлетворяющие условиям Киллинга

$$D_\mu \varepsilon_\nu + D_\nu \varepsilon_\mu = 0\,,$$

не выводят нас из класса физически эквивалентных систем отсчета.

Остановимся на этом вопросе подробнее. В дальнейшем для упрощения формул мы через $T^{\mu\nu}$ будем обозначать не плотность тензора $T^{\mu\nu}$, а сам тензор. Запишем уравнения РТГ (5.21), (5.22) в развернутой форме:

$$R^{\mu\nu}(x) - \frac{m^2}{2}\left[g^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \gamma_{\alpha\beta}(x)\right] =$$
$$= 8\pi \left[T^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T(x)\right], \qquad (5.23)$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0\,. \qquad (5.24)$$

Пусть, при соответствующих условиях задачи, в инерциальной системе в галилеевых координатах x эти уравнения имеют решение $g^{\mu\nu}(x)$ при распределении вещества $T^{\mu\nu}(x)$. В другой инерциальной системе в галилеевых координатах x', удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned} &x'^{\nu} = x^{\nu} + \epsilon^{\nu}(x), \\ &D^{\mu}\epsilon^{\nu} + D^{\nu}\epsilon^{\mu} = 0\,, \end{aligned} \tag{5.25}$$

с помощью тензорных преобразований получим

$$\begin{aligned} &R'^{\mu\nu}(x') - \frac{m^2}{2}\left[g'^{\mu\nu}(x') - g'^{\mu\alpha}g'^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}(x')\right] = \\ &= 8\pi\left[T'^{\mu\nu}(x') - \frac{1}{2}g'^{\mu\nu}T'(x')\right]. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Поскольку уравнения (5.23) форминвариантны относительно преобразований Лоренца, мы можем вернуться к исходным переменным x:

$$\begin{aligned} &R'^{\mu\nu}(x) - \frac{m^2}{2}\left[g'^{\mu\nu}(x) - g'^{\mu\alpha}g'^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}(x)\right] = \\ &= 8\pi\left[T'^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}g'^{\mu\nu}T'(x)\right]. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Отсюда очевидно, что решение $g'^{\mu\nu}(x)$ соответствует не распределению вещества $T^{\mu\nu}(x)$, а другому распределению $T'^{\mu\nu}(x)$. В уравнениях (5.27) величина $g'^{\mu\nu}(x)$ равна

$$g'^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x) + \delta_\epsilon g^{\mu\nu}, \tag{5.28}$$

где

$$\delta_\epsilon g^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda}D_\lambda\epsilon^{\nu} + g^{\nu\lambda}D_\lambda\epsilon^{\mu} - \epsilon^{\lambda}D_\lambda g^{\mu\nu}. \tag{5.29}$$

При преобразованиях (5.25) имеем

$$\begin{aligned} &R'^{\mu\nu}(x) = R^{\mu\nu}(x) + \delta_\epsilon R^{\mu\nu}, \\ &T'^{\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}(x) + \delta_\epsilon T^{\mu\nu}, \\ &T'(x) = T(x) + \delta_\epsilon T. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\delta_\epsilon R^{\mu\nu} = R^{\mu\lambda} D_\lambda \epsilon^\nu + R^{\nu\lambda} D_\lambda \epsilon^\mu - \epsilon^\lambda D_\lambda R^{\mu\nu}, \\
&\delta_\epsilon T^{\mu\nu} = T^{\mu\lambda} D_\lambda \epsilon^\nu + T^{\nu\lambda} D_\lambda \epsilon^\mu - \epsilon^\lambda D_\lambda T^{\mu\nu}, \\
&\delta_\epsilon T = -\epsilon^\lambda D_\lambda T = -\epsilon^\lambda \partial_\lambda T.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Мы получили выражение (5.27) с помощью координатных преобразований (5.25), но точно такие же уравнения получаются и при калибровочном преобразовании (5.29) с векторами ϵ^λ, удовлетворяющими условию (5.25). Таким образом, калибровочные преобразования приводят к метрическому полю $g'^{\mu\nu}(x)$ при распределении вещества $T'^{\mu\nu}(x)$. Хотя мы рассматривали переход от одной инерциальной системы в галилеевых координатах к другой, приведенные нами формулы (5.25), (5.31) имеют общий характер, они справедливы и для неинерциальной системы в пространстве Минковского. Точно такая же ситуация имеет место в электродинамике.

Если мысленно допустить возможность экспериментального измерения характеристик риманова пространства и движения вещества со сколь угодно большой точностью, то на основании уравнений (5.21a), (5.22a) мы можем определить метрику пространства Минковского и найти галилеевы (инерциальные) системы координат. Таким образом, пространство Минковского является, в принципе, наблюдаемым.

Существование пространства Минковского находит отражение в законах сохранения, а поэтому экспериментальное исследование их является в то же время проверкой структуры пространства-времени.

Следует особо отметить, что как в систему уравнений (5.19), так и в систему уравнений (5.20) входит метрический тензор пространства Минковского.

Как известно, в ОТО присутствие космологического члена в уравнениях не является обязательным, и этот вопрос обсуждается до сих пор.

В РТГ наличие космологического члена в уравнениях гравитации обязательно. Однако космологический член возникает *в уравнениях* (5.19) *в комбинации с членом, связанным с метрикой* $\gamma_{\mu\nu}$ *пространства Минковского, причем с той же постоянной, равной половине квадрата массы гравитона.*

Наличие члена в уравнениях (5.19), связанного с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$ существенно изменяет характер коллапса и развития Вселенной.

Согласно уравнениям (5.19), при отсутствии вещества и гравитационного поля метрика пространства становится метрикой Минковского, причем она точно совпадает с выбранной ранее при постановке физической задачи. Если бы в уравнениях гравитационного поля метрика пространства Минковского отсутствовала, то было бы совершенно неясно, в какой системе координат пространства Минковского мы оказались при отсутствии вещества и гравитационного поля.

Масса покоя гравитона имеет принципиальное значение для данной теории, поскольку только с ее введением удается построить теорию гравитации в пространстве Минковского. Масса гравитона нарушает калибровочную группу.

Остановимся теперь на принципе соответствия. Любая физическая теория должна удовлетворять принципу соответствия. Гравитационные взаимодействия изменяют уравнения движения вещества. Требование принципа соответствия сводится к тому, чтобы эти уравнения движения при выключении гравитационного взаимодействия, т. е. при обращении в нуль тензора кривизны Римана, становились обычными уравнениями движения СТО в выбранной системе координат.

При постановке физической задачи в РТГ мы выбираем некоторую систему координат с метрическим тензором пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}(x)$. Уравнение движения вещества в эффективном римановом пространстве с метрическим тензором $g_{\mu\nu}(x)$, определяемом из уравнений гравитационного поля (5.19), (5.20), имеет вид

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0 . \qquad (\sigma)$$

В качестве примера возьмем пылевидную материю с тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, равным

$$T^{\mu\nu}(x) = \rho U^\mu U^\nu, \quad U^\nu = \frac{dx^\nu}{ds},$$

где ds – интервал в римановом пространстве.

На основании уравнений (σ), используя выражение для $T^{\mu\nu}$, найдем уравнение для геодезической линии в римановом пространстве

$$\frac{dU^\nu}{ds} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}(x) U^\alpha U^\beta = 0.$$

При выключении гравитационного взаимодействия, т. е. при обращении тензора кривизны Римана в нуль, из уравнений гравитационного поля (5.19), (5.20) следует, что риманова метрика $g_{\mu\nu}(x)$ переходит в ранее выбранную метрику пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}(x)$. При этом уравнение движения вещества принимает вид

$$D_\mu t^{\mu\nu}(x) = 0. \qquad (\lambda)$$

Здесь тензор энергии-импульса $t^{\mu\nu}(x)$ равен

$$t^{\mu\nu}(x) = \rho u^\mu u^\nu, \quad u^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma},$$

где $d\sigma$ – интервал в пространстве Минковского.

На основании (λ), используя выражение для $t^{\mu\nu}$, найдем уравнения для геодезической линии в пространстве Минковского

$$\frac{du^\nu}{d\sigma} + \gamma^\nu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0,$$

т. е. мы пришли к обычным уравнениям для свободного движения частиц в СТО в выбранной ранее координации с метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}(x)$. *Таким образом, уравнение движения вещества в гравитационном поле в выбранной координации автоматически переходит при выключении гравитационного взаимодействия, т. е. при обращении тензора кривизны Римана в нуль, в уравнение движения вещества в пространстве Минковского в той же координации с метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}(x)$, значит, принцип соответствия выполняется.*

Это утверждение в РТГ имеет общий характер, поскольку при обращении тензора Римана в нуль плотность лагранжиана вещества в гравитационном поле $L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A)$ переходит в обычную плотность лагранжиана $L_M(\tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \Phi_A)$ СТО в выбранной координации.

В заключение отметим, что РТГ возвращает в физику все понятия (инерциальная система координат, закон инерции, ускорение по отношению к пространству, законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения), имеющие место в классической механике Ньютона и в специальной теории относительности, от которых Эйнштейну пришлось отказаться при построении ОТО.

А. Эйнштейн в 1955 г. писал: *«Существенное достижение общей теории относительности заключается в том, что она избавила физику от необходимости вводить "инерциальную систему" (или "инерциальные системы")»*[7].

Поля инерции и гравитации, с нашей точки зрения, даже локально нельзя отождествлять, поскольку они совершенно разной природы. Если первые можно устранить выбором системы координат, то поля гравитации никаким выбором системы координат устранить нельзя, даже локально. *"В теории Эйнштейна"*, как особенно подчеркивал Дж. Синг, *"в зависимости от того, отличен от нуля тензор кривизны Римана или равен нулю, гравитационное поле присутствует или отсутствует. Это свойство абсолютно"*[8].

[7] *Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов. М.: Наука, 1966. Т. II, ст. 146. С. 854.
[8] *Синг Дж.*. Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. л-ры, 1963. С. 9.

6. Принцип причинности в РТГ

РТГ построена в рамках СТО подобно теориям других физических полей. Согласно СТО, любое движение какого-либо точечного пробного тела (в том числе и гравитона) всегда происходит внутри светового конуса причинности пространства Минковского. Следовательно, неинерциальные системы отсчета, реализуемые пробными телами, также должны находиться внутри конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Тем самым определяется весь класс возможных неинерциальных систем отсчета. Локальное равенство трехмерной силы инерции и гравитации при действии на материальную точку будет иметь место, если световой конус эффективного риманова пространства не выходит за пределы светового конуса причинности пространства Минковского. Только в этом случае трехмерную силу гравитационного поля, действующую на пробное тело, можно локально скомпенсировать, перейдя в допустимую неинерциальную систему отсчета, связанную с этим телом.

Если бы световой конус эффективного риманова пространства выходил за пределы светового конуса причинности пространства Минковского, то это означало бы, что для такого "гравитационного поля" не существует допустимой неинерциальной системы отсчета, в которой это "силовое поле" при действии на материальную точку можно было бы скомпенсировать.

Иными словами, локальная компенсация трехмерной силы гравитации силой инерции возможна лишь тогда, когда гравитационное поле как физическое поле, воздействуя на частицы, не выводит их мировые линии за пределы конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Данное условие следует рассматривать как принцип причинности, позволяющий отбирать решения системы уравнений (5.19) и (5.20), которые имеют физический смысл и соответствуют гравитационным полям.

Принцип причинности не выполняется автоматически. Но в этом нет ничего необычного, ибо и в электродинамике, да и в других физических теориях всегда добавляется (но не всегда отмечается) к основным уравнениям условие причинности для материи в форме

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \geq 0\,,$$

которое и обеспечивает невозможность движения любой формы материи со скоростями, большими, чем скорость света.

В нашем случае мы должны учесть, что гравитация входит в коэффициенты при вторых производных в уравнениях поля, т. е. возникает эффективная геометрия пространства-времени. Эта особенность присуща только гравитационному полю. Взаимодействие всех других известных физических полей обычно не затрагивает вторых производных уравнений поля и поэтому не изменяет исходную псевдоевклидову геометрию пространства-времени.

Дадим теперь аналитическую формулировку принципа причинности в РТГ.

Поскольку в РТГ движение вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве-времени эквивалентно движению вещества в соответствующем эффективном римановом пространстве-времени, то для причинно-связанных событий (мировых линий частиц и света), с одной стороны, мы должны иметь условие

$$d\,s^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \;\geq\; 0\,, \tag{6.1}$$

а с другой – для таких событий должно обязательно выполняться неравенство

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \;\geq\; 0\,. \tag{6.2}$$

Для выбранной системы отсчета, реализуемой физическими телами, имеет место условие

$$\gamma_{00} > 0\,. \tag{6.3}$$

В выражении (6.2) мы выделим времени- и пространственно-подобные части

$$d\sigma^2 = \left(\sqrt{\gamma_{00}}\,dt + \frac{\gamma_{0i}\,dx^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}\right)^2 - s_{ik}\,dx^i\,dx^k, \tag{6.4}$$

где

$$s_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}}, \tag{6.5}$$

является метрическим тензором трехмерного пространства в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве-времени. Квадрат пространственного расстояния определяется выражением

$$dl^2 = s_{ik}\,dx^i\,dx^k. \tag{6.6}$$

Представим скорость $v^i = dx^i/dt$ в виде $v^i = ve^i$, где v – величина скорости, e^i – произвольный единичный вектор в трехмерном пространстве

$$s_{ik}e^i\,e^k = 1\,. \tag{6.7}$$

При отсутствии гравитационного поля скорость света в выбранной системе координат легко определяется из выражения (6.4), полагая его равным нулю:

$$\left(\sqrt{\gamma_{00}}\,dt + \frac{\gamma_{0i}\,dx^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}\right)^2 = s_{ik}\,dx^i\,dx^k.$$

Отсюда находим

$$v = \sqrt{\gamma_{00}}\Big/\left(1 - \frac{\gamma_{0i}\,e^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}\right). \tag{6.8}$$

Таким образом, произвольный четырехмерный изотропный вектор u^ν в пространстве Минковского имеет вид

$$u^\nu = (1,\, v\,e^i)\,. \tag{6.9}$$

Для одновременного выполнения условий (6.1), (6.2) *достаточно, чтобы для любого изотропного вектора*

$$\gamma_{\mu\nu}\,u^\mu\,u^\nu = 0 \tag{6.10}$$

выполнялось условие причинности

$$g_{\mu\nu}\, u^{\mu}\, u^{\nu} \;\leq\; 0\,, \tag{6.11}$$

которое и означает, что световой конус эффективного риманова пространства не выходит за пределы светового конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Условия причинности можно записать в следующей форме:

$$g_{\mu\nu}\, v^{\mu}\, v^{\nu} = 0\,, \tag{6.10a}$$

$$\gamma_{\mu\nu} v^{\mu}\, v^{\nu} \;\geq\; 0\,. \tag{6.11a}$$

В ОТО физический смысл имеют только такие решения уравнений Гильберта-Эйнштейна, которые удовлетворяют в каждой точке пространства-времени неравенству

$$g < 0\,,$$

а также требованию, называемому условием энергодоминантности, которое формулируется следующим образом. Для любого времениподобного вектора K_ν должно выполняться неравенство

$$T^{\mu\nu}\, K_{\mu}\, K_{\nu} \;\geq\; 0\,,$$

а величина $T^{\mu\nu}\, K_\nu$ для данного вектора K_ν должна образовывать непространственноподобный вектор.

В нашей теории физический смысл имеют такие решения уравнений (5.21a) и (5.22a), *которые наряду с этими требованиями должны также удовлетворять условию причинности* (6.10a), (6.11a).

Последнее на основании уравнения (5.21a) можно записать в следующей форме:

$$R_{\mu\nu}\, K^{\mu} K^{\nu} \;\leq\; 8\,\pi\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, T\Big)\, K^{\mu} K^{\nu} + \frac{m^2}{2}\, g_{\mu\nu}\, K^{\mu} K^{\nu}\,. \tag{6.12}$$

Если плотность тензора энергии-импульса вещества взять в форме

$$T_{\mu\nu} = \Big[(\rho + p) U_{\mu} U_{\nu} - p g_{\mu\nu}\Big]\,,$$

то на основании (5.21a) можно установить между интервалами пространства Минковского $d\sigma$, и интервалом эффективного риманова пространства ds следующую связь:

$$\frac{m^2}{2}d\sigma^2 = ds^2\left[4\pi(\rho + 3p) + \frac{m^2}{2} - R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu\right],$$

здесь $U^\mu = dx^\mu/ds$.

В силу принципа причинности имеет место неравенство

$$R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu < 4\pi(\rho + 3p) + m^2/2\,,$$

которое является частным случаем неравенства (6.12) или

$$R_{\mu\nu}\, v^\mu v^\nu \;\leq\; 8\,\pi T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu. \qquad (6.12a)$$

Рассмотрим теперь движение пробного тела под действием гравитации в ОТО и РТГ.

Эйнштейн в 1918 г. дал принципу эквивалентности следующую формулировку: *«Инерция и тяжесть тождественны; отсюда и из результатов специальной теории относительности неизбежно следует, что симметричный "фундаментальный тензор" ($g_{\mu\nu}$) определяет метрические свойства пространства, движения тел по инерции в нем, а также и действие гравитации»*[9].

Отождествление в ОТО гравитационного поля с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ риманова пространства позволяет выбором системы координат сделать равными нулю все компоненты символа Кристоффеля во всех точках произвольной несамопересекающейся линии [22]. Именно поэтому движение по геодезической в ОТО считается свободным. Но при этом и в ОТО гравитационное поле выбором системы координат не исключается, поскольку движение двух близких материальных точек не будет свободным из-за наличия тензора кривизны, который в силу тензорных свойств никогда нельзя обратить в нуль выбором системы координат.

[9] *Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов. М.: Наука, 1965. Т. I, ст. 45. С. 613.

В РТГ гравитационное поле является физическим полем в духе Фарадея-Максвелла, а поэтому сила гравитации описывается четырехвектором, следовательно, путем выбора системы координат, только при выполнении условий (6.10) и (6.11) можно силами инерции уравновесить трехмерную часть силы гравитации, действующую на пробное тело. Движение же материальной точки в гравитационном поле никогда не может быть свободным.

Последнее особенно очевидно, если уравнение геодезической линии записать в форме уравнения движения в пространстве Минковского

$$\frac{dp^\nu}{ds} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = 0,\ p^\nu = \frac{dx^\nu}{ds},\ ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu > 0\,. \quad (6.13)$$

Согласно определению ковариантной производной в пространстве Минковского, имеем

$$\frac{Dp^\nu}{ds} = \frac{dp^\nu}{ds} + \gamma^\nu_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta\,. \quad (6.14)$$

Используя (6.13) и (6.14), получим

$$\frac{Dp^\nu}{ds} = -G^\nu_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta\,. \quad (6.15)$$

Здесь

$$G^\nu_{\alpha\beta} = \Gamma^\nu_{\alpha\beta} - \gamma^\nu_{\alpha\beta}\,. \quad (6.16)$$

Запишем левую часть соотношения (6.15) в форме

$$\frac{Dp^\nu}{ds} = \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 \left[\frac{DV^\nu}{d\sigma} + V^\nu \frac{d^2\sigma/ds^2}{(d\sigma/ds)^2}\right],\ \ V^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}\,. \quad (6.17)$$

Здесь V^ν – времениподобный четырехвектор скорости в пространстве Минковского, удовлетворяющий условию

$$\gamma_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 1,\ \ d\sigma^2 > 0\,. \quad (6.18)$$

Подставляя (6.17) в (6.15), получим

$$\frac{DV^\nu}{d\sigma} = -G^\nu_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta - V^\nu \frac{d^2\sigma/ds^2}{(d\sigma/ds)^2}\,. \quad (6.19)$$

На основании (6.18) имеем

$$(d\sigma/ds)^2 = \gamma_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta. \tag{6.20}$$

Дифференцируя это выражение по ds, получим

$$\frac{d^2\sigma/ds^2}{(d\sigma/ds)^2} = -\gamma_{\lambda\mu}G^\mu_{\alpha\beta}V^\lambda V^\alpha V^\beta. \tag{6.21}$$

Подставляя это выражение в (6.19), находим [41]

$$\frac{DV^\nu}{d\sigma} = -G^\mu_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta(\delta^\nu_\mu - V^\nu V_\mu)\,. \tag{6.22}$$

Отсюда очевидно, что движение пробного тела в пространстве Минковского происходит под действием четырехвектора силы F^ν:

$$F^\nu = -G^\mu_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta(\delta^\nu_\mu - V^\nu V_\mu), \quad V_\mu = \gamma_{\mu\sigma}V^\sigma. \tag{6.23}$$

Легко убедиться, что

$$F^\nu V_\nu = 0\,. \tag{6.24}$$

Левая часть уравнения (6.22) по определению равна

$$\frac{DV^\nu}{d\sigma} = \frac{dV^\nu}{d\sigma} + \gamma^\nu_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta. \tag{6.25}$$

Из (6.22) и (6.25) *следует, что для пробного тела закон инерции в инерциальной системе координат является точным, но идеализированным понятием, поскольку он имеет место только при отсутствии гравитационного поля и других сил.*

Следует особо отметить, что движение пробного тела по геодезической линии эффективного риманова пространства может быть представлено как движение в пространстве Минковского под действием силы F^ν, только если выполняется принцип причинности.

Сила гравитации и тензор кривизны Римана, возникающие на основе гравитационных уравнений (5.19) и (5.20), взаимно связаны. Так, если тензор кривизны равен нулю, то в силу уравнений (5.19) и (5.20) будет равна нулю и сила гравитации. В том случае, когда тензор кривизны отличен от нуля, и так как $R_{\mu\nu} \neq 0$, то сила гравитации также не равна нулю. И наоборот, если сила гравитации F^ν, возникающая на основе уравнений (5.19) и (5.20), отлична от нуля, то и кривизна Римана не равна нулю. Обращение силы гравитации F^ν в нуль приводит к равенству нулю тензора кривизны Римана.

В СТО между силами инерции и физическими силами имеется принципиальная разница. Силы инерции всегда могут быть обращены в нуль простым выбором системы отсчета, тогда как физические силы никаким выбором системы отсчета в принципе нельзя обратить в нуль, поскольку они имеют векторную природу в пространстве Минковского. Так как в РТГ все силы, в том числе и гравитационные, имеют векторную природу, то это означает, что они не могут быть обращены в нуль выбором системы координат. Выбором системы координат можно силой инерции скомпенсировать трехмерную силу, действующую на материальную точку, любой природы, в том числе и гравитационную. В ОТО, как отмечал Дж. Синг, *"...Понятие силы гравитации отсутствует, так как гравитационные свойства органически входят в структуру пространства-времени и проявляются в кривизне пространства-времени, т. е. в том, что тензор Римана R_{ijkm} отличен от нуля"*. Именно в этой связи Дж. Синг писал: *"Согласно знаменитой легенде, Ньютон был вдохновлен на создание своей теории гравитации, наблюдая однажды за падением яблока с ветки дерева, и изучающие ньютонову физику даже теперь стали бы утверждать, что ускорение (980 см/с^2) падающего яблока обусловлено гравитационным полем. Согласно теории относительности* (речь идет об ОТО. – А.Л.), *эта точка зрения совершенно ошибочна. Мы предпримем тщательное изучение этой проблемы и убедимся, что в явлении свободного падения гравитационное поле (т. е. тензор Римана) играет, в действительности, чрезвычайно малую роль, а ускорение 980 см/с^2 обусловлено фактически кривизной мировой линии ветки дерева"* [23].

Согласно РТГ, гравитационное поле является физическим полем, а поэтому, в отличие от ОТО, она полностью сохраняет понятие силы гравитации. Благодаря силе гравитации и происходит падение тела, т. е. происходит все так, как это имеет место в ньютоновой физике. Все гравитационные эффекты в Солнечной системе (смещение перигелия Меркурия, отклонение света Солнцем, временное запаздывание радиосигнала, прецессия гироскопа) вызваны именно действием силы гравитации, а не тензора кривизны пространства-времени, который в Солнечной системе достаточно мал.

В локальной тождественности инерции и гравитации Эйнштейн увидел главную причину равенства инертной и гравитационной масс. Однако, по нашему мнению, как это следует из уравнений (2.2), причина этого равенства заключается в том, что источником гравитационного поля является сохраняющаяся суммарная плотность тензора вещества и гравитационного поля. *Именно поэтому равенство инертной и гравитационной масс не требует локального отождествления сил гравитации и инерции.*

В заключение остановимся на метрическом поле пространства Минковского.

Из условий причинности (6.10) и (6.11) следует, что если вектор L^ν удовлетворяет условию

$$\gamma_{\mu\nu} L^\mu L^\nu < 0\,, \tag{6.26}$$

то должно выполняться также неравенство

$$g_{\mu\nu} L^\mu L^\nu < 0\,. \tag{6.27}$$

Свернем уравнение (5.21а) с помощью вектора L^ν, определяемого неравенством (6.26),

$$m^2\gamma_{\mu\nu}L^\mu L^\nu = 16\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)L^\mu L^\nu - 2R_{\mu\nu}L^\mu L^\nu + m^2 g_{\mu\nu}L^\mu L^\nu\,. \tag{6.28}$$

Поскольку мы рассматриваем только метрические поля пространства Минковского, уравнение (6.28) упрощается:

$$m^2\gamma_{\mu\nu}L^\mu L^\nu = 16\pi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)L^\mu L^\nu + m^2 g_{\mu\nu}L^\mu L^\nu\,. \tag{6.29}$$

Для идеальной жидкости тензор энергии-импульса вещества имеет вид

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu}, \tag{6.30}$$

$$T = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \rho - 3p, \quad U^\nu = dx^\mu/ds\,.$$

Поскольку вектор L^μ пространственно-подобный, а вектор U_μ времениподобный, то в силу произвольности вектора L^μ его можно выбрать таким образом, чтобы произведение $(U_\mu L^\mu)$ равнялось нулю. Подставляя (6.30) в (6.29) и учитывая предыдущее, получим

$$m^2 \gamma_{\mu\nu} L^\mu L^\nu = -8\pi g_{\mu\nu} L^\mu L^\nu \left(\rho - p - \frac{m^2}{8\pi}\right). \tag{6.31}$$

Чтобы при наличии вещества ни одно метрическое поле пространства Минковского не являлось решением гравитационных уравнений, необходимо положить

$$\rho \geq p + \frac{m^2}{8\pi}\,. \tag{6.32}$$

Такое требование исключает предельно жесткое уравнение состояния вещества $p = \rho$. В случае отсутствия вещества $\rho = p = 0$ уравнение (6.31) имеет единственное решение

$$g_{\mu\nu}(x) = \gamma_{\mu\nu}(x)\,. \tag{6.33}$$

7. Принцип Маха

Ньютон при формулировке законов механики ввел понятие абсолютного пространства, которое остается всегда одинаковым и неподвижным. Именно по отношению к этому пространству он и определял ускорение тела. Это ускорение имело абсолютный характер. Введение такой абстракции, как абсолютное пространство, оказалось чрезвычайно плодотворным. Отсюда, в частности, возникли понятия инерциальных систем отсчета во всем пространстве, принцип относительности для механических процессов и сложилось представление о физически выделенных состояниях движения. Эйнштейн по этому поводу в 1923 г. писал следующее: *"Системы координат, находящиеся в таких состояниях движения, отличаются тем, что сформулированные в этих координатах законы природы принимают наиболее простой вид"*. И далее: *«...Согласно классической механике существует "относительность скорости", но не "относительность ускорения"»*[10].

Так утвердилось в теории представление об инерциальных системах отсчета, в которых материальные точки, не подвергающиеся действию сил, не испытывают ускорения и находятся в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения. Однако абсолютное пространство Ньютона или инерциальные системы отсчета введены, фактически, априорно в отрыве от характера распределения материи во Вселенной.

Мах проявил достаточную смелость, подвергнув серьезной критике основные положения механики Ньютона. Как он сам позднее писал, ему с большим трудом удалось опубликовать свои идеи. Хотя Мах и не построил физическую теорию, свободную от указанных им недостатков, но он оказал огромное влияние на ее развитие и привлек внимание ученых к анализу основных физических понятий.

Приведем ряд высказываний Маха, которые получили в ли-

[10] *Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов. М.: Наука, 1966. Т. II, ст. 70. С. 122.

тературе название "принципа Маха". *"Никто не может ничего сказать об абсолютном пространстве и абсолютном движении, это нечто лишь мыслимое, на опыте не обнаружимое"*. И далее: *"Вместо того чтобы относить движущееся тело к пространству (к какой-нибудь координатной системе), будем рассматривать непосредственно его отношение к* ***телам*** *мира, посредством которых только и можно* ***определить*** *систему координат ...даже в простейшем случае, когда мы будто бы рассматриваем взаимодействие только* ***двух*** *масс,* ***невозможно*** *отвлечься от остального мира. ... Если тело вращается относительно неба неподвижных звезд, то возникают центробежные силы, а если оно вращается относительно* ***другого*** *тела, а не относительно неба неподвижных звезд, то центробежных сил нет. Я ничего не имею против, чтобы первое вращение назвать* ***абсолютным****, если только не забывать, что это не означает ничего другого, кроме вращения* ***относительно*** *неба неподвижных звезд"* [18].

Поэтому Мах писал: *"...Нет необходимости связывать закон инерции с каким-то особым абсолютным пространством. Самый естественный подход настоящего естествоиспытателя таков: сначала рассматривать закон инерции как достаточно приближенный, соотнести его пространственно с неподвижным звездным небом, ... и затем следует ожидать поправок или развития наших знаний на основе дальнейшего опыта. Недавно Ланге опубликовал критическую статью, в которой он излагает, как можно было бы, согласно его принципам, ввести* ***новую*** *систему координат, если бы обычное грубое отнесение к неподвижному звездному небу оказалось больше непригодным вследствие более точных астрономических наблюдений. Между мной и Ланге нет различия во мнениях относительно* ***теоретической*** *формальной ценности заключений Ланге, а именно, что в настоящее время неподвижное звездное небо является единственной* ***практически*** *пригодной системой отсчета, а также относительно метода определения новой системы отсчета посредством постепенных поправок"* [18]. Далее Мах приводит высказывания К. Неймана: *"Так как все движения должны быть отнесены к системе альфа (системе инерции), она, очевидно, представляет некую косвенную связь между всеми процессами, происходящими во Вселенной, и, следовательно, содержит в себе, можно сказать, столь же загадочный, сколь и сложный универсальный закон"*. Мах по этому поводу замечает: *"Я думаю, что с этим согласится всякий"* [18].

Из высказываний Маха очевидно, что, поскольку речь идет о законе инерции, согласно которому по Ньютону *"...Всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения ... "*, то, естественно, встает вопрос об инерциальных системах координат и о их связи с распределением материи. Мах и его современники вполне ясно понимали, что такая связь должна иметь место в природе. Именно такой смысл далее и будет вкладываться в понятие "принцип Маха".

Мах писал: *"Хотя я и думаю, что астрономические наблюдения сделают необходимыми сначала лишь очень незначительные поправки, я все же допускаю, что закон инерции в той простой форме, которую ему придал Ньютон, имеет для нас, людей, лишь ограниченное и преходящее значение"* [18]. Как мы увидим далее, относительно закона инерции Мах не оказался прав. Он не дал также математического оформления своей идеи, а поэтому весьма часто разные авторы вкладывают в принцип Маха свой смысл. Мы здесь пытаемся сохранить тот смысл, который вкладывал в него сам автор, когда относил движение тела к *телам мира*.

Пуанкаре, а позднее Эйнштейн обобщили принцип относительности на все физические явления. В формулировке Пуанкаре он звучит так: *"...Принцип относительности, согласно которому законы физических явлений должны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа определять, находимся ли мы в подобном движении или нет"* [40].

Применение этого принципа к электромагнитным явлениям привело Пуанкаре, а затем и Минковского к открытию псевдоевклидовой геометрии пространства-времени и тем самым еще в большей степени укрепило гипотезу о существовании инерциальных систем координат. Такие системы являются физически выделенными, а поэтому ускорение относительно них имеет абсолютный смысл.

В общей теории относительности отсутствуют инерциальные системы координат. Эйнштейн об этом в 1929 г. писал: *"Исходным пунктом теории служит утверждение, что не существует физически выделенного состояния движения, т. е. не только скорость, но и ускорение не имеет абсолютного смысла"*[11].

Принцип Маха в его формулировке в ОТО оказался невостребованным. Следует, однако, отметить, что представления об инерциальных системах координат имеют достаточно весомую экспериментальную основу, поскольку, например, переходя от системы координат, связанной с Землей, к системе координат, связанной с Солнцем, а затем к Метагалактике, мы все с большей точностью приближаемся к инерциальной системе. Поэтому нет никаких серьезных оснований для отказа от такого важного понятия, как инерциальная система. С другой стороны, наличие фундаментальных законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения также с необходимостью приводит к существованию инерциальных систем координат. Псевдоевклидова геометрия пространства-времени отражает общие динамические свойства материи и в то же время вводит инерциальные системы. Хотя псевдоевклидова геометрия пространства-времени возникла при изучении материи, а поэтому и неотделима от нее, тем не менее можно формально говорить о пространстве Минковского в отсутствии материи. Однако так же, как и ранее в механике Ньютона, в специальной теории относительности нет ответа на вопрос, как инерциальные системы связаны с распределением материи во Вселенной.

[11] *Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов. М.: Наука. 1966. Т. II, ст. 92. С. 264.

Открытие псевдоевклидовой геометрии пространства и времени позволило с единой точки зрения рассмотреть не только инерциальные, но и ускоренные системы координат. Большая разница проявилась между силами инерции и силами, вызванными физическими полями. Она состоит в том, что силы инерции всегда можно сделать равными нулю, путем выбора соответствующей системы координат, тогда как силы, вызванные физическими полями, в принципе, нельзя обратить в нуль выбором системы координат, так как они имеют векторную природу в четырехмерном пространстве-времени. Поскольку в РТГ гравитационное поле является физическим полем в духе поля Фарадея-Максвелла, силы, вызванные таким полем, не могут быть обращены в нуль выбором системы координат.

Основные уравнения РТГ (5.19), (5.20), благодаря наличию массы покоя гравитационного поля, содержат, наряду с римановой метрикой, также метрический тензор пространства Минковского, но это означает, что, в принципе, метрику этого пространства можно выразить через геометрические характеристики эффективного риманова пространства, а также через величины, характеризующие распределение вещества во Вселенной. Это легко осуществить, перейдя в уравнениях (5.19) от контравариантных величин к ковариантным. Таким путем мы получим

$$\frac{m^2}{2}\,\gamma_{\mu\nu}(x) = 8\,\pi\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,T\Big) - R_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}\,g_{\mu\nu}\,. \qquad (7.1)$$

Отсюда мы видим, что в правой части уравнений содержатся только геометрические характеристики эффективного риманова пространства и величины, определяющие распределение вещества в этом пространстве.

Экспериментально изучая движения частиц, света в римановом пространстве, в принципе, можно найти метрический тензор пространства Минковского, а следовательно, и построить инерциальную систему координат. *Таким образом, РТГ, построенная в рамках специальной теории относительности,* *позволяет установить связь инерциальной системы с распределением материи.* Само пространство Минковского, а следовательно, и инерциальная система координат скрыты под покровом материи Вселенной или, иначе говоря, под эффективным римановым пространством. Поэтому движение относительно инерциальной системы координат есть движение относительно вещества Вселенной, но это означает, что движение относительно пространства инерциальной системы также есть движение относительно вещества Вселенной. *Закон инерции* является точным, но идеализированным понятием, поскольку он выполняется только при отсутствии гравитационного поля и других сил. Закон по-прежнему сохранил тот же смысл, который придал ему И. Ньютон.

Но поскольку Вселенная одна, то существует только одна выделенная инерциальная галилеева система координат. Именно пространство этой единственной инерциальной галилеевой системы координат и есть то *"абсолютное пространство"*, которое вводил Ньютон. Но это пространство определено распределением вещества во Вселенной.

Наличие инерциальной системы координат, определяемой распределением материи во Вселенной, делает ускорение абсолютным. Мы видим, что специальный принцип относительности имеет всеобщее значение независимо от вида материи.

Для гравитационного поля его требования выражаются в условии форминвариантности уравнений (5.19), (5.20) относительно группы Лоренца. Форминвариантность физических уравнений относительно преобразований Лоренца остается важнейшим физическим принципом при построении теории, поскольку именно этот принцип дает возможность ввести универсальные характеристики для всех форм материи. Эйнштейн в 1950 г. писал: *"...Не следует ли в конце концов попробовать сохранить понятие инерциальной системы, оставив все попытки объяснить фундаментальную черту гравитационных явлений, которая проявляет себя в системе Ньютона как эквивалентность инертной и тяготеющей масс?"* [12]

[12] *Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов. М.: Наука. 1966. Т. II, ст. 137. С. 724.

В РТГ сохранено понятие инерциальной системы и в то же время показано, что эквивалентность инертной и тяготеющей масс есть прямое следствие гипотезы, что сохраняющаяся плотность тензора энергии-импульса материи является источником гравитационного поля. Таким образом, равенство инертной и тяготеющей масс ни в коей мере не противоречит существованию инерциальной системы координат. Более того, эти положения органически дополняют друг друга и лежат в основе РТГ.

В противоположность нашему выводу Эйнштейн на поставленный им вопрос ответил следующим образом: *"Тот, кто верит в постижимость природы, должен дать ответ – нет"*. Наличие инерциальных систем координат позволяет устранить парадокс Маха, ибо только в этом случае можно говорить об ускорении относительно пространства инерциальной системы. Фок по этому поводу писал: *«Что касается парадокса Маха, то он основан, как известно, на рассмотрении вращающегося жидкого тела, имеющего форму эллипсоида, и невращающегося, имеющего форму шара. Парадокс возникает здесь только в том случае, если считать лишенным смысла понятие "вращение по отношению к пространству"; тогда действительно оба тела (вращающееся и невращающееся) представляются равноправными, и становится непонятным, почему одно из них шаровидно, а другое – нет. Но парадокс исчезает, коль скоро мы признаем законность понятия "ускорения по отношению к пространству"»* [25].

В РТГ движение тела относительно пространства инерциальной галилеевой системы координат есть движение относительно вещества Вселенной или, как писал Мах, движение относительно *тел мира*. *Но отсюда видно, что согласно РТГ, подход Ньютона о движении тела относительно "абсолютного пространства" и подход Маха о движении тела относительно тел мира, приводят к одному и тому же, если заменить слова "абсолютное пространство" на пространство инерциальной системы координат, которая связана с распределением вещества уравнением* (7.1).

Идеи Маха оказали глубокое влияние на взгляды Эйнштейна на гравитацию при построении общей теории относительности. В одной из работ Эйнштейн пишет: *“Принцип Маха: G-поле полностью определено массами тел”*. Но оказывается, что в ОТО и это положение не выполняется, поскольку имеются решения и в отсутствии материи. Попытка устранения этого обстоятельства путем введения λ-члена не дала желаемого результата. Оказалось, что и уравнения с λ-членом в отсутствии материи также имеют решения, отличные от нуля. Мы видим, что Эйнштейн вложил в понятие “принцип Маха” совсем другой смысл. Но и в таком понимании принцип Маха не нашел своего места в ОТО.

Имеет ли место принцип Маха в формулировке Эйнштейна в РТГ? В отличие от ОТО в этой теории в силу принципа причинности имеются пространственноподобные поверхности во всем пространстве (глобальные поверхности Коши). И если на одной из таких поверхностей вещество отсутствует, то на основании требования энергодоминантности, налагаемого на тензор вещества, оно будет отсутствовать всегда [26]. В разделе 11.6 также отмечено, что без вещества гравитационное поле не может возникнуть.

Физический смысл имеют решения только системы неоднородных гравитационных уравнений, когда в какой-либо части пространства или во всем пространстве имеется вещество. Это означает, что гравитационное поле и эффективное риманово пространство не могут возникнуть без вещества. *Физическое решение уравнений для метрики эффективного риманова пространства без вещества необходимо рассматривать как предельный случай решения, полученного для однородного и изотропного распределения вещества в пространстве, при последующем стремлении плотности вещества к нулю.* Мы видим, что и в формулировке Эйнштейна принцип Маха реализуется в релятивистской теории гравитации.

Имеется, однако, существенное различие в понимании G-поля в нашей теории и в ОТО. Под этим полем Эйнштейн понимал риманову метрику, тогда как в нашем представлении гравитационное поле есть физическое поле. Такое поле входит в риманову метрику наряду с псевдоевклидовой метрикой, а поэтому при отсутствии вещества и гравитационного поля метрика не исчезает, а остается метрикой пространства Минковского.

В литературе имеются и другие формулировки принципа Маха, отличные по смыслу от идей Маха и Эйнштейна, но поскольку они, по нашему мнению, не сформулированы достаточно определенно, мы их не рассматривали. Так как гравитационные силы в РТГ обязаны физическому полю типа Фарадея-Максвелла, то ни о какой единой сущности сил инерции и гравитации, в принципе, не может быть и речи. Силы инерции, непосредственно определяются не физическими полями, а строго определенной структурой геометрии и выбором системы координат.

Псевдоевклидова геометрия пространства-времени, отражая динамические свойства, общие для всех форм материи, с одной стороны, подтвердила гипотезу о существовании инерциальных систем, а с другой стороны, показала, что силы инерции, возникающие при соответствующем выборе системы координат, выражаются через символы Кристоффеля пространства Минковского. Поэтому они не зависят от природы тела. Все это стало ясным, когда было показано, что специальная теория относительности применима не только в инерциальных системах, но и в неинерциальных (ускоренных).

Это позволило дать принципу относительности более общую формулировку: *“Какую бы физическую систему отсчета мы ни избрали (инерциальную или неинерциальную), всегда можно указать бесконечную совокупность других систем отсчета, таких, в которых все физические явления протекают одинаково с исходной системой отсчета, так что мы не имеем и не можем иметь никаких экспериментальных возможностей различить, в какой именно системе отсчета из этой бесконечной совокупности мы находимся”* [7]. Математически это выражается так: пусть в некоторой системе координат пространства Минковского интервал равен

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu,$$

тогда существует другая система координат x':

$$x'^\nu = f^\nu(x),$$

в которой интервал принимает форму

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu,$$

где метрические коэффициенты $\gamma_{\mu\nu}$ имеют тот же функциональный вид, что и в исходной системе координат. В этом случае говорят, *что метрика форминвариантна* относительно таких преобразований, а все *физические уравнения также форминвариантны*, т. е. имеют одинаковый вид как в штрихованной, так и в нештрихованной системе координат. Преобразования координат, оставляющие метрику форминвариантной, образуют группу. В случае галилеевых координат в инерциальной системе это обычные преобразования Лоренца.

В РТГ между силами инерции и гравитации имеется существенное различие: по мере удаления от тел гравитационное поле становится достаточно слабым, тогда как силы инерции в зависимости от выбора системы координат могут быть сколь угодно большими. И только в инерциальной системе координат они равны нулю.

Построение РТГ позволило впервые установить связь инерциальной системы координат с распределением материи во Вселенной и тем самым глубже понять природу сил инерции и их различие с материальными силами. В нашей теории силам инерции отведена такая же роль, которую они играют в любых других полевых теориях.

8. Постньютоновское приближение

Для изучения гравитационных эффектов в Солнечной системе вполне достаточно постньютоновского приближения. В данном разделе мы построим это приближение. Наше построение в техническом плане использует многое, ранее полученное Фоком [25], при этом удается еще более упростить метод нахождения постньютоновского приближения.

Основные уравнения теории запишем в форме (см. приложение Г)

$$\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} + m^2 \sqrt{-\gamma}\, \tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} = -16\pi g (T^{\epsilon\lambda} + \tau_g^{\epsilon\lambda}), \tag{8.1}$$

$$D_\lambda \tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} = 0. \tag{8.2}$$

где $T^{\epsilon\lambda}$ – тензор энергии-импульса вещества; $\tau_g^{\epsilon\lambda}$ – тензор гравитационного поля.

Выражение для тензора энергии-импульса гравитационного поля может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
-16\pi g \tau_g^{\epsilon\lambda} = {} & \frac{1}{2}\left(\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\right)\left(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\mu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\tau\sigma}\tilde{g}_{\nu\mu}\right) \times \\
& \times D_\alpha \tilde{\Phi}^{\tau\sigma} D_\beta \tilde{\Phi}^{\mu\nu} + \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma} D_\alpha \tilde{\Phi}^{\epsilon\tau} D_\beta \tilde{\Phi}^{\lambda\sigma} - \tilde{g}^{\epsilon\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma} D_\alpha \tilde{\Phi}^{\lambda\sigma} \times \\
& \times D_\beta \tilde{\Phi}^{\alpha\tau} - \tilde{g}^{\lambda\alpha}\tilde{g}_{\tau\sigma} D_\alpha \tilde{\Phi}^{\beta\sigma} D_\beta \tilde{\Phi}^{\epsilon\tau} + \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\tau\sigma} D_\alpha \tilde{\Phi}^{\sigma\beta} D_\beta \tilde{\Phi}^{\alpha\tau} + \\
& + D_\alpha \tilde{\Phi}^{\epsilon\beta} D_\beta \tilde{\Phi}^{\lambda\alpha} - \tilde{\Phi}^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} - \\
& - m^2\left(\sqrt{-g}\tilde{g}^{\epsilon\lambda} - \sqrt{-\gamma}\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} + \tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right).
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Это выражение записано в произвольной координатной системе в пространстве Минковского. В дальнейшем все вычисления будут проводиться в галилеевых координатах инерциальной системы

$$\gamma_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1). \tag{8.4}$$

При построении ряда теории возмущений в качестве малого параметра естественно использовать величину, равную

$$v \sim \epsilon,\ U \sim \epsilon^2,\ \Pi \sim \epsilon^2,\ p \sim \epsilon^2. \tag{8.5}$$

Здесь U – ньютонов потенциал гравитационного поля; Π – удельная внутренняя энергия тела; p – удельное давление. Для Солнечной системы параметр ϵ^2 имеет порядок

$$\epsilon^2 \sim 10^{-6}\,. \tag{8.6}$$

Будем исходить из разложений компонент плотности тензора:

$$\tilde{g}^{00} = 1 + \overset{(2)}{\tilde{\Phi}^{00}} + \overset{(4)}{\tilde{\Phi}^{00}} + \ldots, \tag{8.7}$$

$$\tilde{g}^{0i} = \overset{(3)}{\tilde{\Phi}^{0i}} + \overset{(5)}{\tilde{\Phi}^{0i}} + \ldots, \tag{8.8}$$

$$\tilde{g}^{ik} = \tilde{\gamma}^{ik} + \overset{(2)}{\tilde{\Phi}^{ik}} + \overset{(4)}{\tilde{\Phi}^{ik}} + \ldots\,. \tag{8.9}$$

В качестве модели вещества возьмем идеальную жидкость, тензор энергии-импульса которой имеет вид

$$T^{\epsilon\lambda} = \big[p + \rho(1+\Pi)\big]u^\epsilon u^\lambda - pg^{\epsilon\lambda}, \tag{8.10}$$

где ρ – инвариантная плотность идеальной жидкости, т. е. плотность массы в сопутствующей системе отсчета; p – удельное изотропное давление; u^λ – четырехвектор скорости.

Напишем теперь разложение по малому параметру ϵ для тензора энергии-импульса вещества:

$$T^{00} = \overset{(0)}{T^{00}} + \overset{(2)}{T^{00}} + \ldots, \tag{8.11}$$

$$T^{0i} = \overset{(1)}{T^{0i}} + \overset{(3)}{T^{0i}} + \ldots, \tag{8.12}$$

$$T^{ik} = \overset{(2)}{T^{ik}} + \overset{(4)}{T^{ik}} + \ldots\,. \tag{8.13}$$

В ньютоновом приближении, т. е. когда пренебрегаем силами гравитации, для четырехвектора скорости имеем

$$u^0 = 1 + 0(\epsilon^2),\;\; u^i = v^i\big(1 + 0(\epsilon^2)\big)\,. \tag{8.14}$$

Используя эти выражения в (8.10), найдем

$$\overset{(0)}{T}{}^{00} = \rho, \ \overset{(1)}{T}{}^{0i} = \rho v^i, \ \overset{(0)}{T}{}^{ik} = 0. \tag{8.15}$$

В этом приближении на основании (5.7) имеем

$$\partial_0 \rho + \partial_i(\rho v^i) = 0. \tag{8.16}$$

Отсюда видно, что в ньютоновом приближении полная инертная масса тела является сохраняющейся величиной:

$$M = \int \rho d^3x. \tag{8.17}$$

В ньютоновом приближении на основании уравнений (8.1) имеем

$$\Delta \overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} = -16\pi\rho, \tag{8.18}$$

$$\Delta \overset{(3)}{\tilde{\Phi}}{}^{0i} = -16\pi\rho v^i, \tag{8.19}$$

$$\Delta \overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{ik} = 0. \tag{8.20}$$

Масса гравитона, ввиду малости, в инерциальной системе координат для эффектов Солнечной системы не играет роли, а поэтому мы при получении уравнений (8.18)–(8.20) ее не учитывали. Хотя и в этом случае ее влияние сказалось в том, что наряду с системой уравнений (8.1) обязательно должны иметь место и уравнения (8.2). В теории гравитации Фока такие уравнения в галилеевых координатах также использовались, но они, в отличие от РТГ, не следовали из принципа наименьшего действия, а поэтому было неясно, почему именно их надо использовать, а не какие-либо другие. Фок их выбрал как координатные условия и применил для изучения островных систем. *В РТГ эти уравнения возникают из принципа наименьшего действия, а поэтому они универсальны.* Именно благодаря уравнениям (8.2), мы и получаем полную систему уравнений для определения физических величин. Следует отметить, что в общем случае неинерциальной системы отсчета или для сильных гравитационных полей член с массой гравитона m опускать уже нельзя. Так, например, даже для статического тела в области, близкой к сфере Шварцшильда, влияние массы гравитона весьма велико, поэтому пренебрегать ею уже невозможно.

Решение уравнений (8.18) – (8.20) имеет вид

$$\overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} = 4U, \quad U = \int \frac{\rho}{|x - x'|} d^3x', \tag{8.21}$$

$$\overset{(3)}{\tilde{\Phi}}{}^{0i} = -4V^i, \quad V^i = -\int \frac{\rho v^i}{|x - x'|} d^3x', \tag{8.22}$$

$$\overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{ik} = 0. \tag{8.23}$$

На основании уравнений (8.2) имеем

$$\partial_0 \overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} + \partial_i \overset{(3)}{\tilde{\Phi}}{}^{0i} = 0. \tag{8.24}$$

Подставляя в это уравнение (8.21) и (8.22), находим

$$\partial_0 U - \partial_i V^i = 0. \tag{8.25}$$

Отсюда очевидно, что при дифференцировании потенциала U по времени порядок малости по ϵ увеличивается. Это обстоятельство в дальнейшем нами будет использоваться при вычислениях тензора энергии-импульса гравитационного поля $\tau_g^{\epsilon\lambda}$. Заметим, что уравнение (8.25) тождественно выполняется в силу уравнений (8.16).

На основании (8.22), (8.23) следует, что из всех компонент плотности тензора $\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}$ во втором приближении остается только одна компонента $\overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00}$, определяемая выражением (8.21). Именно это обстоятельство существенно упрощает метод нахождения постньютоновского приближения, когда мы на каждом этапе построения пользуемся плотностями тензорных величин.

Используя (8.21)–(8.23) с точностью до второго порядка включительно, получим

$$\sqrt{-g}g^{00} = 1+4U,\ \sqrt{-g}g^{11} = \sqrt{-g}g^{22} = \sqrt{-g}g^{33} = -1\,. \quad (8.26)$$

Отсюда имеем

$$-g = 1 + 4U\,, \quad (8.26a)$$

следовательно,

$$g_{00} = 1 - 2U, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -(1 + 2U)\,. \quad (8.27)$$

Мы видим из (8.26), *что в ньютоновом приближении, когда можно ограничиться только одной компонентой плотности тензора вещества* T^{00}, *как этого и следовало ожидать, гравитационное поле описывается только одной компонентой* $\tilde{\Phi}^{00}$, *тогда как метрический тензор* $g_{\mu\nu}$ *имеет и в этом приближении, согласно* (8.27), *несколько компонент*. Работа с компонентами поля $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$, а не с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, в значительной степени упрощает весь вычислительный процесс построения постньютоновского приближения. Именно поэтому введение плотности тензора гравитационного поля $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$ имеет не только общетеоретическое, но и практическое значение. Итак, метрический тензор эффективного риманова пространства равен

$$g_{00} = 1 - 2U, \quad g_{0i} = 4\gamma_{ik}V^k, \quad g_{ik} = \gamma_{ik}(1 + 2U)\,. \quad (8.28)$$

Из выражения (8.21) для U следует, что инертная масса (8.17) равна активной гравитационной массе. В РТГ, как мы видели, это равенство возникло из-за того, что источником гравитационного поля является тензор энергии-импульса.

Перейдем теперь к построению следующего приближения для компоненты метрического тензора g_{00}. С этой целью найдем вклад от тензора энергии-импульса гравитационного поля. Поскольку в выражении (8.3) под знаком производной необходимо учитывать только $\overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00}$, то первый член (8.3) даст

вклад, равный
$$2(\operatorname{grad} U)^2, \tag{8.29}$$
а второй
$$-16(\operatorname{grad} U)^2. \tag{8.30}$$

Вклад от всех остальных членов в этом приближении будет равен нулю. Отброшены также члены с производными по времени от потенциала U, поскольку в силу (8.25) они также более высокого порядка малости по ϵ. На основании (8.29) и (8.30) имеем
$$-16\pi g\tau_g^{00} = -14(\operatorname{grad} U)^2. \tag{8.31}$$

Используя (8.31), уравнение (8.1) в этом приближении для компоненты $\tilde{\Phi}^{00}$ принимает вид
$$\Delta \overset{(4)}{\tilde{\Phi}^{00}} = 16\pi g T^{00} + 14(\operatorname{grad} U)^2 + 4\partial_0^2 U\,. \tag{8.32}$$

Поскольку на основании (8.28) во втором порядке по ϵ интервал равен
$$ds = dt(1 - U + \frac{1}{2}v_i v^i)\,, \tag{8.33}$$
отсюда получим
$$u^0 = \frac{dt}{ds} = 1 + U - \frac{1}{2}v_i v^i. \tag{8.34}$$

Подставляя это выражение в (8.10), находим
$$\overset{(2)}{T^{00}} = \rho\big[2U + \Pi - v_i v^i\big]\,. \tag{8.35}$$

На основании (8.26*а*) и (8.35) из уравнений (8.32) получим
$$\Delta \overset{(4)}{\tilde{\Phi}^{00}} = -96\pi\rho U + 16\pi\rho v_i v^i +$$
$$+14(\operatorname{grad} U)^2 - 16\pi\rho\Pi + 4\partial_0^2 U. \tag{8.36}$$

Воспользуемся очевидным тождеством

$$(\operatorname{grad} U)^2 = \frac{1}{2}\Delta U^2 - U\Delta U. \tag{8.37}$$

Но поскольку

$$\Delta U = -4\pi\rho\,, \tag{8.38}$$

то уравнение (8.36), после использования (8.37) и (8.38), принимает вид

$$\Delta(\overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} - 7U^2) = 16\pi\rho v_i v^i - 40\pi\rho U - 16\pi\rho\Pi + 4\partial_0^2 U. \tag{8.39}$$

Отсюда имеем

$$\overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} = 7U^2 + 4\Phi_1 + 10\Phi_2 + 4\Phi_3 - \frac{1}{\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x-x'|}d^3x', \tag{8.40}$$

где

$$\begin{gathered}\Phi_1 = -\int \frac{\rho v_i v^i}{|x-x'|}d^3x', \quad \Phi_2 = \int \frac{\rho U}{|x-x'|}d^3x', \\ \Phi_3 = \int \frac{\rho\Pi}{|x-x'|}d^3x'.\end{gathered} \tag{8.41}$$

Итак, в постньютоновом приближении находим

$$\begin{gathered}\tilde{g}^{00} = 1 + 4U + 7U^2 + 4\Phi_1 + 10\Phi_2 + \\ +4\Phi_3 - \frac{1}{\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x-x'|}d^3x'.\end{gathered} \tag{8.42}$$

Нам необходимо теперь найти величину детерминанта g в постньютоновом приближении. Для этой цели представим $\tilde{g}^{ik}$ в форме

$$\tilde{g}^{ik} = \tilde{\gamma}^{ik} + \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{ik}. \tag{8.43}$$

Следует особо подчеркнуть, что вычисление детерминанта g наиболее просто осуществить, если воспользоваться плотностью тензора $\tilde{g}^{\mu\nu}$ и учесть, что

$$g = \det(\tilde{g}^{\mu\nu}) = \det(g_{\mu\nu})\,. \tag{8.44}$$

На основании (8.42) и (8.43) найдем

$$\sqrt{-g} = 1 + 2U + \frac{3}{2}U^2 + 2\Phi_1 + 5\Phi_2 +$$
$$+2\Phi_3 - \frac{1}{2}\Phi - \frac{1}{2\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x - x'|} d^3x'. \qquad (8.45)$$

Здесь

$$\Phi = \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{11} + \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{22} + \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{33}. \qquad (8.46)$$

Так как в рассматриваемом приближении в силу малости произведения

$$g_{0i} g^{i0},$$

имеет место равенство

$$g_{00} g^{00} = 1,$$

то из выражений (8.42) и (8.45) получим

$$g_{00} = 1 - 2U + \frac{5}{2}U^2 - 2\Phi_1 - 5\Phi_2 -$$
$$-2\Phi_3 - \frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{2\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x - x'|} d^3x'. \qquad (8.47)$$

Для определения g_{00} нам необходимо вычислить величину Φ. Поскольку Φ, согласно (8.46), получена суммированием, то можно воспользоваться уравнением (8.1) и путем суммирования непосредственно получить уравнения для функции Φ.

Из (8.3) путем суммирования получим из первого члена следующее выражение:

$$-16\pi g \tau_g^{ii} = -2(\mathrm{grad}\, U)^2. \qquad (8.48)$$

Все остальные члены, входящие в выражение (8.3), в данном приближении не дают вклада. С помощью формулы (8.10) для тензора энергии-импульса вещества найдем

$$-16\pi g \overset{(2)}{\tilde{T}}{}^{ii} = -16\pi \rho v_i v^i + 48\pi p. \qquad (8.49)$$

Учитывая (8.48) и (8.49), уравнение для $\varPhi$ можно представить в форме

$$\Delta\varPhi = 16\pi\rho v_i v^i - 48\pi p + 2(\operatorname{grad} U)^2. \tag{8.50}$$

Воспользовавшись тождеством (8.37) и уравнением (8.38), получим

$$\Delta(\varPhi - U^2) = 16\pi\rho v_i v^i + 8\pi\rho U - 48\pi p\,. \tag{8.51}$$

Отсюда находим

$$\varPhi = U^2 + 4\,\varPhi_1 - 2\,\varPhi_2 + 12\,\varPhi_4\,, \tag{8.52}$$

где

$$\varPhi_4 = \int \frac{p}{|x - x'|} d^3x'.$$

Подставляя выражение (8.52) в (8.47), имеем

$$g_{00} = 1 - 2\,U + 2\,U^2 - 4\,\varPhi_1 - 4\,\varPhi_2 - \\ -2\,\varPhi_3 - 6\,\varPhi_4 + \frac{1}{2\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x - x'|} d^3x'. \tag{8.53}$$

Используя тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{U}{|x - x'|} d^3x' = - \int \rho |x - x'| d^3x',$$

выражение (8.53) запишем в форме

$$g_{00} = 1 - 2\,U + 2\,U^2 - 4\,\varPhi_1 - 4\,\varPhi_2 - \\ -2\,\varPhi_3 - 6\,\varPhi_4 - \partial_0^2 \int \rho |x - x'| d^3x'. \tag{8.54}$$

Полученные решения (8.54) и (8.28) *вычислены в инерциальной системе в галилеевых координатах. Возникшая эффективная риманова метрика обязана наличию гравитационного* *поля, при этом силы инерции полностью исключены.* Совершенно очевидно, что эти решения сохраняют свою функциональную форму в любой инерциальной системе в галилеевых координатах. Поскольку от преобразования временной переменной все физические величины не зависят, то если совершить преобразование

$$x'^0 = x^0 + \eta^0(x), \ \ x'^i = x^i, \tag{8.55}$$

метрические коэффициенты изменятся следующим образом:

$$g'_{00} = g_{00} - 2\partial_0\eta^0, \ g'_{0i} = g_{0i} - \partial_i\eta^0, \ g'_{ik} = g_{ik} \,. \tag{8.56}$$

Следует отметить, что преобразование (8.55) не выводит нас из инерциальной системы отсчета, поскольку такое преобразование есть не что иное, как другой выбор часов. Все физически измеряемые величины не зависят от этого выбора.

Принимая функцию η^0

$$\eta^0 = -\frac{1}{2}\partial_0 \int \rho|x - x'|d^3x', \tag{8.57}$$

и учитывая тождество

$$\begin{aligned} \partial_i\eta^0 &= \frac{1}{2}(\gamma_{ik}V^k - N_i), \\ N_i &= \int \frac{\rho v^k(x_k - x'_k)(x_i - x'_i)}{|x - x'|^3} d^3x' \,, \end{aligned} \tag{8.58}$$

после подстановки в (8.56) выражений (8.28) для g_{0i} и g_{ik}, а также выражения (8.54) для g_{00} с учетом (8.57) и (8.58), найдем метрические коэффициенты эффективного риманова пространства в так называемой "канонической форме":

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - 2U + 2U^2 - 4\Phi_1 - 4\Phi_2 - 2\Phi_3 - 6\Phi_4 \,, \\ g_{0i} &= \frac{7}{2}\gamma_{ik}V^k + \frac{1}{2}N_i \,, \\ g_{ik} &= \gamma_{ik}(1 + 2U) \,. \end{aligned} \tag{8.59}$$

Для статического сферически-симметричного тела постньютоновское приближение, согласно (8.59), вдали от тела имеет вид

$$
\begin{aligned}
&g_{00} = 1 - \frac{2MG}{r} + 2\Big(\frac{MG}{r}\Big)^2, \quad g_{0i} = 0\,, \\
&g_{ik} = \gamma_{ik}\Big(1 + \frac{2MG}{r}\Big), \quad M = \int \rho(x) d^3x\,.
\end{aligned}
\qquad (8.59a)
$$

На основании выражений (8.59) постньютоновские параметры Нордтведта-Уилла в РТГ равны следующим значениям:

$$\gamma = 1,\ \beta = 1,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_W = 0\,.$$

Метрические коэффициенты (8.59) вычислены нами в РТГ в инерциальной системе отсчета. Приведем теперь выражения для компонент тензора энергии-импульса вещества, по сравнению с (8.15), в следующем приближении. Учитывая выражение (8.34) для u^0, а также что

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = v^i\Big(1 + U - \frac{1}{2}v_k v^k\Big)\,,$$

из формулы (8.10) находим

$$\overset{(3)}{T}{}^{0i} = \rho v^i(2U + \Pi - v_k v^k) + p v^i,$$

$$\overset{(2)}{T}{}^{ik} = \rho v^i v^k - p\gamma^{ik}.$$

Компонента $\overset{(2)}{T}{}^{00}$ определяется выражением (8.35). На основании (8.59), используя уравнения геодезической линии, можно рассчитать все эффекты в Солнечной системе. Объединяя (8.15) и (8.35), получим

$$T^{00} = \rho[1 + 2U + \Pi - v_i v^i]\,. \qquad (8.60)$$

Инвариантная плотность ρ зависит от метрики $g_{\mu\nu}$, а следовательно, зависит от гравитационного поля. Она удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\nu(\rho u^\nu) = 0\,,$$

т. е. уравнению

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}\,\rho u^\nu) = 0\,.$$

Отсюда, сравнивая с обычным уравнением непрерывности, следует, что сохраняющаяся плотность ρ^*, *равная*

$$\rho^* = \rho\sqrt{-g}\,u^0\,,$$

не зависит от метрики $g_{\mu\nu}$. В работе [25] подробно показано, что

$$\delta_g(\rho\sqrt{-g}\,u^\nu) = 0\,.$$

Учитывая (8.34) и (8.45), находим

$$\rho^* = \rho\Big(1 + 3U - \frac{1}{2}v_i v^i\Big)\,.$$

Подставляя это выражение в (8.60), получим

$$T^{00} = \rho^*\Big[1 - U + \Pi - \frac{1}{2}v_i v^i\Big]\,. \tag{8.61}$$

В нашем приближении согласно [25] имеем

$$\nabla_\nu T^{0\nu} = \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} + \frac{\partial U}{\partial t}T^{00} = 0\,.$$

Интегрируя это выражение по объему системы тел и учитывая (8.61), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho^*\Big[1 - U + \Pi - \frac{1}{2}v_i v^i\Big][dx]^3 + \int \rho^*\frac{\partial U}{\partial t}[dx]^3 = 0\,. \tag{8.62}$$

С помощью равенства

$$\int\Big[\rho^*\frac{\partial U}{\partial t} - U\frac{\partial \rho^*}{\partial t}\Big][dx]^3 = 0$$

представим второй интеграл в (8.62) в виде производной по времени, тогда выражение (8.62) примет форму

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho^*\Big[1 - \frac{1}{2}U + \Pi - \frac{1}{2}v_i v^i\Big][dx]^3 = 0\,.$$

Отсюда полная масса системы тел равна [25]

$$M = \int \rho^* \left[1 - \frac{1}{2}U + \Pi - \frac{1}{2}v_i v^i\right] [dx]^3 = 0\,. \qquad (8.63)$$

Здесь и ранее: $(-v_i v^i) = v^2$.

Первый член в (8.63) представляет полную массу покоя частиц жидкости, другие члены выражают гравитационную, внутреннюю и кинетическую энергию жидкости. *Еще раз особо отметим, что плотность ρ^* не зависит от гравитационного поля.* В связи с возникающими вопросами поясняю: при решении задач внешнее решение для гравитационного поля тела сшивается с внутренним решением на поверхности тела. Таким образом, только гравитационное поле на поверхности тела и определяет воздействие внешнего поля на тело. *Поэтому поле вне тела после сшивания решений никакого вклада в массу тела в принципе не может дать.*

В. А. Фок при расчете гравитационных эффектов пользовался гармоническими условиями в декартовых координатах. Он называл их координатными условиями. Так, в работе [24] он писал: *"При решении уравнений Эйнштейна мы пользовались координатной системой, которую мы называли гармонической, но которая заслуживает названия инерциальной".* Далее в этой же статье он отмечал: *"Нам кажется, что возможность введения в общей теории относительности однозначным образом определенной инерциальной координатной системы заслуживает быть отмеченной".* И, наконец, в работе [25] он писал: *"Принцип относительности, выражаемый преобразованиями Лоренца, возможен и в неоднородном пространстве, общий же принцип относительности невозможен".*

Все эти высказывания Фока были продиктованы стремлением внести ясность в физическую суть ОТО, освободив ее от не имеющей физического смысла общей относительности. Однако при этом Фок фактически вышел за пределы ОТО. Именно благодаря такому выходу он и пришел к поразительному утверждению о справедливости принципа относительности в неоднородном пространстве. Если оставаться в римановом пространстве, а в ОТО другого пространства и нет, то это утверждение противоречит правильному выводу Фока, что *"в общей теории относительности нет, вообще говоря, никакой относительности"* [25]. Но чтобы осуществить его замысел, необходимо ввести представления о гравитационном поле в пространстве Минковского. Где же Фок совершил выход из ОТО? *При использовании гармонических условий он фактически использовал декартовы (галилеевы) координаты*

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0\,, \tag{8.64}$$

x^μ – декартовы координаты. В декартовых (галилеевых) координатах $\gamma(x) = \det \gamma_{\mu\nu} = -1$. Поэтому согласно тензорному закону преобразований имеем

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}\frac{\tilde{g}^{\alpha\beta}(y)}{\sqrt{-\gamma(y)}}\,. \tag{8.65}$$

Запишем уравнение (8.64) в форме

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial y^\tau}{\partial x^\mu}\frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}(x)}{\partial y^\tau}\,. \tag{8.66}$$

Для дальнейших вычислений приведем формулы

$$\frac{\partial}{\partial y^\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\gamma^\lambda_{\tau\lambda}\,, \quad \gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\sigma}\,. \tag{8.67}$$

После подстановки (8.65) в (8.66) и учитывая (8.67), получим

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma}\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\sigma}(y)}{\partial y^\alpha} + \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\tilde{g}^{\alpha\beta}(y)\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = 0\,.$$

Множитель второго члена запишем в форме

$$\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma}\frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\tau}\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma}\gamma^\sigma_{\alpha\beta}\,.$$

Подставляя это выражение в предыдущее, найдем

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \left(\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\sigma}(y)}{\partial y^\alpha} + \gamma^\sigma_{\alpha\beta}(y) \tilde{g}^{\alpha\beta}(y) \right) = 0 ,$$

т. е. имеем

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} D_\mu \tilde{g}^{\mu\sigma}(y) = 0 . \qquad (8.68)$$

Итак, мы установили, что плотность тензора $\tilde{g}^{\mu\sigma}(y)$ в произвольных координатах автоматически удовлетворяет общековариантному уравнению

$$D_\lambda \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0 ,$$

если исходное условие гармоничности (8.64) записано в декартовых координатах. Но это означает, что условие гармоничности (8.64), взятое в декартовых координатах, является не координатным условием, а полевым уравнением в пространстве Минковского.

Полученное выше уравнение совпадает с уравнением (5.20) РТГ. В РТГ оно следует из принципа наименьшего действия. Переходя от координат y к координатам z, получим (см. приложение Д (Д. 12))

$$\Box\, y^\lambda = -\gamma^\lambda_{\alpha\beta}(y) g^{\alpha\beta}(y) ,$$

где через $\Box$ обозначен оператор

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-g(z)}} \frac{\partial}{\partial z^\nu} \left(\tilde{g}^{\nu\sigma} \frac{\partial}{\partial z^\sigma} \right) .$$

Поэтому, когда Фок записывал гармонические условия в форме

$$\Box\, y^\lambda = 0 ,$$

он фактически имел дело с декартовыми координатами, для которых $\gamma^\lambda_{\alpha\beta}(y) = 0$, т. е. с пространством Минковского в галилеевых координатах. *Фок, выбирая гармонические координаты в виде условий* (8.64), *в действительности использовал* *пространство Минковского в галилеевых координатах, а уравнения* (8.64) *играли роль не координатных условий, а полевых уравнений.* Но почему необходимо добавить к уравнениям Гильберта-Эйнштейна именно уравнения (8.64) в галилеевых координатах, а не какие-либо другие или те же самые гармонические, но в других недекартовых координатах, чтобы получить полную систему уравнений гравитации в подходе Фока, оставалось неясным. Здесь Фок, по-видимому, руководствовался физической интуицией, а также возникающим при вычислении математическим упрощением.

Пытался ли Фок рассматривать гравитационное поле в пространстве Минковского? Нет, он был далек от этой мысли и писал об этом: *"Мы упоминаем здесь о ней только в связи с наблюдаемым иногда стремлением (которого отнюдь не разделяем) уложить теорию тяготения в рамки евклидова пространства"* [24]. Подход Фока оказался ближе к представлениям РТГ. Все то, что Фок стремился внести в теорию гравитации (инерциальные системы, ускорение относительно пространства), полностью содержится в РТГ, но это достигается путем рассмотрения гравитационного поля, как и всех других физических полей в пространстве Минковского. При этом все геометрические характеристики риманова пространства уже являются полевыми величинами в пространстве Минковского.

При анализе гравитационных эффектов в Солнечной системе Фок также фактически пользовался пространством Минковского, поскольку все вычисленные гравитационные эффекты он относил к инерциальной системе координат. Именно это обстоятельство и позволило ему получить правильные выражения для эффектов. Так, например, он писал: *"Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты x_1, x_2, x_3? Нам представляется единственно правильным второе определение. Фактически мы им и пользовались, когда говорили о том, что луч света вблизи Солнца имеет форму гиперболы"* [25].

В РТГ гравитационные эффекты определяются однозначно, поскольку согласно уравнениям (8.1), (8.2), записанным в галилеевых координатах инерциальной системы, движение света или пробного тела при выключении гравитационного поля действительно происходит по прямой линии, являющейся геодезической в пространстве Минковского. В неинерциальной системе координат геодезическая линия в пространстве Минковского уже не будет прямой линией. Но это означает, что в РТГ в неинерциальной системе координат для нахождения гравитационного эффекта движение в эффективном римановом пространстве необходимо сравнивать именно с геодезическим движением в ускоренной системе координат.

При вычислении эффектов гравитации в Солнечной системе, когда влиянием массы гравитона можно пренебречь, система уравнений (8.1) и (8.2) РТГ только в галилеевых координатах совпадает с системой уравнений, которую решал Фок в гармонических (декартовых) координатах. Если оставаться в рамках ОТО, то в любой другой системе, например, неинерциальной, они уже существенно отличаются. Это происходит потому, что система уравнений Фока, как сам он отмечает, не общековариантна, тогда как система уравнений РТГ общековариантна. Фок полную систему гравитационных уравнений (для островных систем) получил путем добавления гармонических условий к уравнениям Гильберта-Эйнштейна.

Согласно РТГ полная система гравитационных уравнений (8.1), (8.2) возникает из принципа наименьшего действия.

Отсюда и становится ясным, почему появляются условия (8.2), а не какие-либо другие. Эти уравнения становятся универсальными, справедливыми не только для островных систем. В декартовых координатах они совпадают с гармоническими условиями. Как мы уже отмечали ранее, гармонические условия в декартовых координатах, которые с успехом использовал Фок, вывели его за рамки ОТО Эйнштейна. Это обстоятельство в свое время отмечал Л. Инфельд, который в 1957 г. писал: *“Тем самым для Фока выбор гармонического координатного условия становится некоторым фундаментальным законом* *природы, изменяющим сам характер эйнштейновской общей теории относительности и превращающим ее в теорию гравитационного поля, справедливую только в инерциальных системах координат"*[13].

Если оставаться в рамках ОТО, то совершенно непонятно, с точки зрения физики, почему необходимо выбирать гармонические условия в декартовых координатах, а не какие-либо другие или даже гармонические, но в других координатах. *Тогда как в РТГ из-за наличия массы гравитона эти условия возникают как следствие выполнимости уравнений для вещества* (см.(5.7) и (5.17)), *т. е. они вытекают из принципа наименьшего действия, а поэтому имеют универсальное значение.*

В РТГ гравитационные уравнения (5.19), (5.20) *общековариантны, но не форминвариантны относительно произвольных преобразований. Они форминвариантны относительно лоренцевых преобразований.* Но это означает, что в лоренцевых координатах, если имеет место решение $G(x)$ при тензоре вещества $T_{\mu\nu}(x)$, то в новых лоренцевых координатах x' имеет место решение $G'(x')$ при тензоре вещества $T'_{\mu\nu}(x')$, а следовательно, в координатах x решение $G'(x)$ возможно только при тензоре вещества $T'_{\mu\nu}(x)$.

В РТГ устанавливается взаимно однозначное соответствие между римановой метрикой и метрикой Минковского, что и позволяет при вычислении гравитационного эффекта сравнить движение под действием гравитационного поля с движением в его отсутствии. В РТГ при выключении гравитационного поля обращается в нуль тензор Римана, и одновременно совершается переход от римановой метрики к метрике Минковского, ранее выбранной при постановке физической задачи. Это и обеспечивает в РТГ выполнимость принципа соответствия.

[13] *Инфельд Л.* Новейшие проблемы гравитации. М.: Изд-во иностр. л-ры. 1961. С. 162.

Для вычисления гравитационного эффекта необходимо сравнить движение в римановом пространстве с движением в отсутствии гравитационного поля. Именно так определяется гравитационный эффект.

В заключение данного раздела отметим, что постньютоновское приближение (8.59) удовлетворяет принципу причинности (6.11).

9. О равенстве инертной и гравитационной масс

Так как источником гравитационного поля является плотность тензора энергии-импульса, то полевой подход к гравитации позволяет совершенно просто получить метрику эффективного риманова пространства в первом приближении по гравитационной постоянной G. Это особенно легко установить из уравнений (2.2). Для сферически-симметричного статического тела в галилеевых координатах инерциальной системы уравнения (2.2) имеют вид

$$\Delta\tilde{\Phi}^{00} - m^2\tilde{\Phi}^{00} = -16\pi t^{00}, \tag{9.1}$$

$$\Delta\tilde{\Phi}^{0i} - m^2\tilde{\Phi}^{0i} = 0, \;\; \Delta\tilde{\Phi}^{ik} - m^2\tilde{\Phi}^{ik} = 0, \;\; i,k = 1,2,3\,. \tag{9.2}$$

Для статического тела только одна компонента t^{00} отлична от нуля.

Из уравнений (9.2) имеем

$$\tilde{\Phi}^{0i} = 0, \;\; \tilde{\Phi}^{ik} = 0\,. \tag{9.3}$$

Вдали от тела из уравнения (9.1) находим

$$\tilde{\Phi}^{00} \simeq \frac{4M}{r}e^{-mr}, \;\; M = \int t^{00}d^3x\,, \tag{9.4}$$

M – инертная масса тела, создающего гравитационное поле. В Солнечной системе экспоненциальный множитель, ввиду малости величины mr, можно опустить, т. е.

$$\tilde{\Phi}^{00} \simeq \frac{4M}{r}\,. \tag{9.5}$$

Найдем компоненты плотности метрического тензора эффективного риманова пространства $\tilde{g}^{\mu\nu}$. На основании (2.6) имеем

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\Phi}^{\mu\nu}, \;\; \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}, \;\; \tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\,\gamma^{\mu\nu}. \tag{9.6}$$

Отсюда, учитывая (9.3) и (9.5), получим следующие, отличные от нуля, компоненты $\tilde{g}^{\mu\nu}$

$$\tilde{g}^{00} = 1 + \frac{4M}{r}, \quad \tilde{g}^{11} = \tilde{g}^{22} = \tilde{g}^{33} = -1. \tag{9.7}$$

Они точно удовлетворяют уравнению (2.3). На основании (9.7) находим

$$g_{00} = \frac{\sqrt{-g}}{1 + \frac{4M}{r}}, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\sqrt{-g}\,. \tag{9.8}$$

$$-g = -\tilde{g}^{00}\tilde{g}^{11}\tilde{g}^{22}\tilde{g}^{33} = \left(1 + \frac{4M}{r}\right). \tag{9.9}$$

Подставляя выражения для g в формулы (9.8), получим

$$g_{00} \simeq \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right). \tag{9.10}$$

Следует особо подчеркнуть, что на том месте, где в соответствии с законом тяготения Ньютона должна находиться активная гравитационная масса, возникла инертная масса M. *Таким образом равенство инертной и активной гравитационной масс является прямым следствием того, что источником гравитационного поля является плотность тензора энергии-импульса. Так что причиной равенства инертной и гравитационной масс является не локальная тождественность сил инерции и гравитации, а универсальность сохраняющегося источника гравитационного поля – тензора энергии-импульса материи.*

Интервал в эффективном римановом пространстве имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 + \frac{2M}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dr^2)\,. \tag{9.11}$$

Классические эффекты гравитации, такие как гравитационное красное смещение спектральных линий, отклонение луча света Солнцем, временное запаздывание радиосигнала, прецессия гироскопа на земной орбите, полностью описываются этим интервалом.

Следует особо отметить, что для сферически-симметричного статического тела имеется только одна компонента тензора t^{00}. *В полевом описании ей соответствует только одна компонента поля* $\tilde{\Phi}^{00}$, *а следовательно, только одна существенная компонента* $\tilde{g}^{00}$, *тогда как в величинах* $g_{\mu\nu}$ *для этой задачи существенны все четыре компоненты* g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33}. *Именно это обстоятельство и указывает на естественное определение гравитационного поля* $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ *в форме* (9.6).

Из выражения (9.10) очевидно, что силы гравитации в этом приближении являются силами притяжения, поскольку величина M, как инертная масса, всегда положительна.

10. Гравитационное поле сферически-симметричного статического тела

Вопрос о том, что происходит в окрестности сферы Шварцшильда при наличии массы покоя гравитона, впервые был рассмотрен в релятивистской теории гравитации в работе [2] *и сделан вывод: в вакууме на сфере Шварцшильда метрический коэффициент эффективного риманова пространства g_{00} отличен от нуля, тогда как g_{11} имеет полюс. Эти изменения, возникшие в теории из-за массы гравитона, приводят к отсутствию "черных дыр".*

В дальнейшем в [14] был проведен подробный анализ этой задачи, который уточнил ряд вопросов. В разделе 11 будет показано, что в той точке в вакууме, где метрический коэффициент эффективного риманова пространства g_{11}, имеет полюс, другой метрический коэффициент g_{00}, не обращается в нуль. Возникшая вследствие этого особенность не устранима выбором системы координат, а поэтому невозможно сшить решение внутри тела с внешним решением. Это обстоятельство и приводит к заключению, что радиус тела не может быть меньше радиуса Шварцшильда. Все это будет подробно рассмотрено в разделе 11.

Запишем уравнения (5.19), (5.20) в форме

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R + \frac{1}{2}m^2\left(\delta^\mu_\nu + g^{\mu\alpha}\gamma_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu g^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right) = \kappa T^\mu_\nu\,, \quad (10.1)$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0\,. \quad (10.2)$$

Здесь $\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$, $g = \det\ g_{\mu\nu}$, R^μ_ν – тензор Риччи, $\kappa = (8\pi G)/c^2$, G – гравитационная постоянная; D – ковариантная производная в пространстве Минковского; $\gamma_{\mu\nu}(x)$ – метрический тензор пространства Минковского в произвольных криволинейных координатах.

Определим теперь гравитационное поле, создаваемое сферически-симметричным статическим источником. Общий вид интервала эффективного риманова пространства для такого источника имеет вид

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{01}dtdr + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\Phi^2, \quad (10.3)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} &g_{00}(r) = U(r),\ g_{01}(r) = B(r)\,, \\ &g_{11}(r) = -\left[V(r) - \frac{B^2(r)}{U(r)}\right], \\ &g_{22}(r) = -W^2(r), \quad g_{33}(r,\theta) = -W^2(r)\sin^2\theta. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Компоненты контрвариантного метрического тензора равны

$$\begin{aligned} &g^{00}(r) = \frac{1}{U}\left(1 - \frac{B^2}{UV}\right),\ g^{01}(r) = -\frac{B}{UV}\,, \\ &g^{11}(r) = -\frac{1}{V}\,, \\ &g^{22}(r) = -\frac{1}{W^2},\ g^{33}(r,\theta) = -\frac{1}{W^2\sin^2\theta}\,. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Детерминант метрического тензора $g_{\mu\nu}$ равен

$$g = \det g_{\mu\nu} = -UVW^4\sin^2\theta\,. \quad (10.6)$$

Для решения, имеющего физический смысл, должно выполняться условие

$$g = \det g_{\mu\nu} = -UVW^4\sin^2\theta < 0\,. \quad (10.7)$$

Для сферических координат допускается обращение g в нуль только в точке $r = 0$. На основании (10.5) и (10.6) найдем компоненты плотности метрического тензора

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}. \quad (10.8)$$

Они имеют вид

$$\begin{aligned} &\tilde{g}^{00} = \frac{W^2}{\sqrt{UV}}\left(V - \frac{B^2}{U}\right)\sin\theta,\ \tilde{g}^{01} = -\frac{BW^2}{\sqrt{UV}}\sin\theta, \\ &\tilde{g}^{11} = -\sqrt{\frac{U}{V}}W^2\sin\theta\,, \\ &\tilde{g}^{22} = -\sqrt{UV}\sin\theta,\ \ \tilde{g}^{33} = -\frac{\sqrt{UV}}{\sin\theta}\,. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Все рассмотрение будем проводить в инерциальной системе в сферических координатах. Интервал в пространстве Минковского имеет вид

$$d\sigma^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2)\,. \tag{10.10}$$

Отличные от нуля символы Кристоффеля в пространстве Минковского, определяемые по формуле

$$\gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\sigma}(\partial_\mu\gamma_{\sigma\nu} + \partial_\nu\gamma_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\gamma_{\mu\nu})\,, \tag{10.11}$$

равны

$$\begin{aligned} &\gamma^1_{22} = -r,\ \gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta,\ \gamma^2_{12} = \gamma^3_{13} = \frac{1}{r},\\ &\gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,\ \gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta\,. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Запишем уравнение (10.2) в развернутом виде

$$D_\mu\tilde{g}^{\mu\nu} = \partial_\mu\tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^\nu_{\lambda\sigma}\tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0\,. \tag{10.13}$$

В галилеевых координатах пространства Минковского они имеют вид

$$\partial_\mu\tilde{g}^{\mu\nu} = 0\,. \tag{10.14}$$

В случае статического гравитационного поля из (10.14) имеем

$$\partial_i\tilde{g}^{i0} = 0\,. \tag{10.15}$$

Используя тензорный закон преобразования, можно выразить компоненты $\tilde{g}^{i0}$ в декартовых координатах через компоненты в сферических координатах

$$\tilde{g}^{i0} = -\frac{BW^2}{\sqrt{UV}}\frac{x^i}{r^3}\,,\quad \sqrt{-g} = \sqrt{UV}W^2r^{-2}. \tag{10.16}$$

где x^i – пространственные декартовы координаты. Полагая в (10.15) $\nu = 0$ и интегрируя по сферическому объему после применения теоремы Гаусса-Остроградского, получим интеграл по поверхности сферы

$$\oint \tilde{g}^{i0} ds_i = -\frac{BW^2}{r^3\sqrt{UV}} \oint (\vec{x} d\vec{s}) = 0 . \qquad (10.17)$$

Принимая во внимание равенство

$$\oint (\vec{x} d\vec{s}) = 4\pi r^3 , \qquad (10.18)$$

получим

$$\frac{BW^2}{\sqrt{UV}} = 0 . \qquad (10.19)$$

Поскольку уравнение (10.14) справедливо как внутри вещества, так и вне его, (10.19) должно выполняться для любого значения r. Но так как в силу (10.7) U, V и W не могут равняться нулю, то из (10.19) следует

$$B = 0 . \qquad (10.20)$$

Интервал (10.3) эффективного риманова пространства принимает вид

$$ds^2 = Udt^2 - Vdr^2 - W^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2) . \qquad (10.21)$$

На основании (10.20) следует, что не существует статического решения уравнений Гильберта-Эйнштейна в гармонических координатах, содержащего в интервале член вида

$$B(r)dtdr. \qquad (10.22)$$

Тензор энергии-импульса вещества имеет вид

$$T^\mu_\nu = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) v^\mu v_\nu - \delta^\mu_\nu \frac{p}{c^2} . \qquad (10.23)$$

В выражении (10.23) ρ – плотность массы вещества, p – изотропное давление, а

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \text{ – четырехскорость,} \qquad (10.24)$$

удовлетворяющая условию

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 1\,. \tag{10.25}$$

Из уравнений (10.1) и (10.2) следует

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0\,, \tag{10.26}$$

где ∇_μ – ковариантная производная в эффективном римановом пространстве с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$. В случае статического тела

$$v^i = 0,\ \ i = 1,2,3\,;\ \ v^0 = \frac{1}{\sqrt{U}}\,, \tag{10.27}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} &T^0_0 = \rho(r),\ \ T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -\frac{p(r)}{c^2}\,,\\ &T^\mu_\nu = 0,\ \ \mu \neq \nu\,. \end{aligned} \tag{10.28}$$

Для интервала (10.21) символы Кристоффеля, отличные от нуля, равны

$$\begin{aligned} &\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2U}\frac{dU}{dr}\,,\ \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2V}\frac{dU}{dr}\,,\ \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2V}\frac{dV}{dr}\,,\\ &\Gamma^1_{22} = -\frac{W}{V}\frac{dW}{dr},\ \Gamma^1_{33} = \sin^2\theta\,\Gamma^1_{22}\,,\\ &\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{W}\frac{dW}{dr}\,,\ \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta\,,\quad \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta\,. \end{aligned} \tag{10.29}$$

Используя выражение для тензора Риччи

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\,,\ R^\mu_\nu = g^{\mu\lambda}R_{\lambda\nu}\,, \tag{10.30}$$

и подставляя в него выражения для символов Кристоффеля из (10.29), уравнения (10.1) для функций U, V и W можно привести к виду

$$\begin{aligned} &\frac{1}{W^2} - \frac{1}{VW^2}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 - \frac{2}{VW}\frac{d^2W}{dr^2} - \frac{1}{W}\frac{dW}{dr}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{V}\right) +\\ &+\frac{1}{2}m^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right) - \frac{r^2}{W^2}\right] = \kappa\rho\,, \end{aligned} \tag{10.31}$$

$$\frac{1}{W^2} - \frac{1}{VW^2}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 - \frac{1}{UVW}\frac{dW}{dr}\,\frac{dU}{dr} +$$

$$+\frac{1}{2}m^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right) - \frac{r^2}{W^2}\right] = -\varkappa\frac{p}{c^2}, \qquad (10.32)$$

$$-\frac{1}{VW}W'' - \frac{1}{2UV}U'' + \frac{1}{2WV^2}W'V' + \frac{1}{4VU^2}(U')^2 +$$
$$+\frac{1}{4UV^2}U'V' - \frac{1}{2UVW}W'U' +$$
$$+\frac{1}{2}m^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V}\right)\right] = -\varkappa\frac{p}{c^2}. \qquad (10.33)$$

Уравнение (10.13) с учетом (10.12), (10.9) и (10.20) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dr}\left(\sqrt{\frac{U}{V}}W^2\right) = 2r\sqrt{UV}. \qquad (10.34)$$

Заметим, что в силу тождества Бьянки и уравнения (10.2) одно из уравнений (10.31) – (10.33) является следствием остальных. В дальнейшем в качестве независимых мы возьмем уравнения (10.31), (10.32) и (10.34).

Выражение (10.26) запишем в развернутом виде

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu \equiv \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\alpha\mu}T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}T^\mu_\alpha = 0. \qquad (10.35)$$

Используя формулы (10.28) и (10.29), получим

$$\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho + (p/c^2)}{2U}\frac{dU}{dr}. \qquad (10.36)$$

Принимая во внимание тождество

$$\frac{1}{W^2(dW/dr)}\frac{d}{dr}\left[\frac{W}{V}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2\right] = \frac{1}{VW^2}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 +$$

$$+\frac{2}{VW}\,\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{W}\frac{dW}{dr}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{V}\right), \qquad (10.37)$$

уравнение (10.31) можно записать в форме

$$1 - \frac{d}{dW}\left[\frac{W}{V(dr/dW)^2}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}m^2\left[W^2 - r^2 + \frac{W^2}{2}\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right)\right] = \kappa W^2 \rho . \quad (10.38)$$

Аналогично преобразуем уравнение (10.32):

$$1 - \frac{W}{V\left(dr/dW\right)^2}\frac{d}{dW}\ln(UW) +$$

$$+\frac{1}{2}m^2\left[W^2 - r^2 - \frac{W^2}{2}\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right)\right] = -\kappa\frac{W^2 p}{c^2} . \quad (10.39)$$

Уравнения (10.34) и (10.36) запишем в виде

$$\frac{d}{dW}\left(W^2\sqrt{U/V}\right) = 2r\sqrt{UV}\frac{dr}{dW} . \quad (10.40)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dW} = -\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{1}{2U}\frac{dU}{dW} . \quad (10.41)$$

Об условии причинности

В сферических координатах пространства Минковского интервалы пространства Минковского и эффективного риманова пространства имеют вид

$$d\sigma^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2) , \quad (10.42)$$

$$ds^2 = U(r)dt^2 - V(r)dr^2 - W^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2) . \quad (10.43)$$

Введем вектор скорости

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} , \quad v^i = ve^i , \quad (x^i = r, \theta, \Phi) , \quad (10.44)$$

e^i – единичный вектор относительно метрики пространственной части пространства Минковского

$$\kappa_{ik}e^i e^k = 1 . \quad (10.45)$$

В общем случае κ_{ik} имеет вид

$$\kappa_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}}. \qquad (10.46)$$

В случае (10.42)

$$\kappa_{ik} = -\gamma_{ik}. \qquad (10.47)$$

Условие (10.45) для метрики (10.42) приводит к равенству

$$(e^1)^2 + r^2\left[(e^2)^2 + \sin^2\theta(e^3)^2\right] = 1. \qquad (10.48)$$

Определим четырехвектор скорости равенством

$$v^\mu = (1, ve^i) \qquad (10.49)$$

и потребуем, чтобы он был изотропным в пространстве Минковского

$$\gamma_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0. \qquad (10.50)$$

Подставляя (10.49) в (10.50) и учитывая (10.48), находим

$$v = 1. \qquad (10.51)$$

Отсюда изотропный четырехвектор v^μ равен

$$v^\mu = (1, e^i). \qquad (10.52)$$

Так как, согласно специальной теории относительности, движение всегда происходит внутри или на границе конуса причинности Минковского, то для гравитационного поля имеет место принцип причинности

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \le 0, \qquad (10.53)$$

т. е.

$$U - V(e^1)^2 - W^2[(e^2)^2 + (e^3)^2\sin^2\theta] \le 0. \qquad (10.54)$$

Учитывая (10.48), выражение (10.53) можно записать в виде

$$U - \frac{W^2}{r^2} - \left(V - \frac{W^2}{r^2}\right)(e^1)^2 \le 0. \qquad (10.55)$$

Пусть

$$V - \frac{W^2}{r^2} \geq 0. \tag{10.56}$$

В силу произвольности $0 \leq (e^1)^2 \leq 1$ неравенство (10.55) будет выполняться, только если

$$U - \frac{W^2}{r^2} \leq 0. \tag{10.57}$$

Из неравенств (10.56) и (10.57) следует

$$U \leq V. \tag{10.58}$$

В том случае, если

$$V - \frac{W^2}{r^2} < 0, \tag{10.59}$$

запишем неравенство (10.55) в форме

$$U - V - \left(\frac{W^2}{r^2} - V\right)(1 - (e^1)^2) \leq 0. \tag{10.60}$$

В силу произвольности e^1, выражение (10.60) будет выполняться для любых значений $0 \leq (e^1)^2 \leq 1$, только в случае, если

$$U \leq V. \tag{10.61}$$

Таким образом, принцип причинности РТГ приводит во всех случаях к неравенству

$$U(r) \leq V(r). \tag{10.62}$$

11. Самоограничение гравитационного поля и его роль во Вселенной

11.1. Введение

Когда А. Эйнштейн в 1913 г. связал гравитационное поле с метрическим тензором риманова пространства, оказалось, что такое поле вызывает замедление хода времени физического процесса. Это замедление, в частности, можно проиллюстрировать на примере решения Шварцшильда, сравнивая ход времени в присутствии гравитационного поля с ходом времени для удаленного наблюдателя. Однако в общем случае в ОТО присутствует только метрический тензор риманова пространства, а поэтому в уравнениях Гильберта-Эйнштейна отсутствуют какие-либо признаки инерциального времени пространства Минковского.

Возникновение эффективного риманова пространства в полевой теории гравитации при сохранении пространства Минковского как основного пространства *позволяет сравнить ход времени в гравитационном поле с ходом времени t в инерциальной системе координат пространства Минковского при отсутствии гравитации*. Чтобы показать, что изменение хода времени ведет к появлению силы, обратимся к уравнению Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\,. \tag{11.1}$$

Если в этом уравнении формально перейти от инерциального времени t ко времени τ по правилу

$$d\tau = U(t)dt, \tag{11.2}$$

то легко получить

$$m\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{1}{U^2}\left\{F - m\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\ln U\right\}. \tag{11.3}$$

Отсюда видно, что изменение хода времени, определяемое функцией U, ведет к появлению эффективной силы. Но все это здесь имеет чисто формальный характер, поскольку в данном случае нет физической причины, которая изменила бы ход времени. Но именно этот формальный пример показывает, что если в природе идет процесс замедления хода времени, то он неминуемо создает эффективные полевые силы, которые необходимо обязательно учитывать в теории. Физическое гравитационное поле изменяет как ход времени, так и параметры пространственных величин, по сравнению с теми же величинами в инерциальной системе пространства Минковского при отсутствии гравитации.

Полевой подход дает возможность глубже понять природу гравитационного поля и прийти к выводу, что гравитационное поле обладает как свойством замедлять течение инерциального времени, так и свойством останавливать процесс замедления времени, а следовательно, и останавливать процесс сжатия вещества. Именно отсюда возникла способность поля к ограничению своей величины (*самоограничение*) и невозможность остановки течения времени гравитационным полем. *Таким образом, согласно РТГ замедление течения инерциального времени и остановка процесса замедления есть одно общее свойство гравитационного поля.*

Это соответствует общему утверждению: *Если согласно физической теории гравитационное поле обладает свойством замедлить ход времени, то та же теория должна и остановить процесс замедления времени, в противном случае это привело бы к остановке течения времени гравитационным полем, что физически неприемлемо.*

Именно это и находится в соответствии с высказыванием А. С. Эддингтона:[14] *"Звезда должна излучать и излучать, сжиматься и сжиматься – до тех пор пока, как я полагаю, ее радиус не уменьшится до нескольких километров, когда притяжение становится достаточно сильным, чтобы удержать излучение, и звезда обретет, наконец, покой. Тем самым, я вынужден прийти к выводу, что это почти reduction ad absurdum (приведение к абсурду) формулы для релятивист-*

[14] *Eddington A. S.* // The Observatory. 1935. Vol. 58. P. 373.

ского вырожденного газа. Возможные случайные обстоятельства могли бы предотвратить такое поведение звезды, но я хочу, чтобы был более сильный запрет на такую эволюцию звезды. Я думаю, что должен был бы существовать Закон Природы, который бы не допускал эволюцию звезды столь абсурдным способом".

Как видим Эддингтон не допускал возможности неограниченного сжатия тела.

Оказывается, что в полевых представлениях о гравитации все это содержится в физическом свойстве гравитационного поля останавливать *процесс* замедления течения времени и, тем самым, ограничивать свой потенциал, что и останавливает *процесс* сжатия вещества.

Далее мы на примерах коллапса и эволюции однородной и изотропной Вселенной рассмотрим как возникает *самоограничение* потенциала гравитационного поля, которое останавливает как процесс замедления времени, так и процесс сжатия вещества.

11.2. Уравнения сферически-симметричного статического гравитационного поля

В инерциальной системе координат интервал в пространстве Минковского в сферических координатах имеет вид

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dr)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,, \qquad (11.4)$$

здесь $x^0 = ct$. Интервал в эффективном римановом пространстве для сферически симметричного статического поля записывается в форме

$$ds^2 = U(r)(dx^0)^2 - V(r)dr^2 - W^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,. \quad (11.5)$$

Уравнения РТГ представим в форме

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R + \frac{m^2}{2}\Big(\delta^\mu_\nu + g^{\mu\alpha}\gamma_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu g^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\Big) = \varkappa T^\mu_\nu\,, \quad (11.6)$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0\,. \qquad (11.7)$$

В развернутом виде уравнение (11.7) имеет вид

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^\nu_{\lambda\sigma}\tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0\,. \tag{11.8}$$

Здесь $\gamma^\nu_{\lambda\sigma}$ – символы Кристоффеля пространства Минковского.

Для сферически-симметричного статического источника компоненты тензора T^μ_ν записываются как

$$T^0_0 = \rho(r), \quad T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -\frac{p(r)}{c^2}\,, \tag{11.9}$$

здесь ρ – плотность массы, p – изотропное давление.

Для определения метрических коэффициентов U, V и W можно воспользоваться уравнениями (11.6) для значений индексов $\mu = 0$, $\nu = 0$; $\mu = 1, \nu = 1$, и они на основании (10.31) и (10.32). принимают вид

$$\frac{1}{W^2} - \frac{1}{VW^2}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 - \frac{2}{VW}\frac{d^2W}{dr^2} - \frac{1}{W}\frac{dW}{dr}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{V}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}m^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right) - \frac{r^2}{W^2}\right] = \varkappa\rho\,, \tag{11.10}$$

$$\frac{1}{W^2} - \frac{1}{VW^2}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 - \frac{1}{UVW}\frac{dW}{dr}\frac{dU}{dr} +$$
$$+\frac{1}{2}m^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right) - \frac{r^2}{W^2}\right] = -\varkappa\frac{p}{c^2}\,. \tag{11.11}$$

Уравнение (11.8) на основании (10.34) принимает вид

$$\frac{d}{dr}\left(\sqrt{U/V}\,W^2\right) = 2r\sqrt{UV}\,. \tag{11.12}$$

Учитывая тождество

$$\frac{dr}{dW}\frac{1}{W^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{W}{V}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{VW^2}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 + \frac{2}{VW}\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{W}\frac{dW}{dr}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{V}\right),$$

и переходя от производных по r к производным по W уравнения (11.10) – (11.12) можно записать в форме

$$1-\frac{d}{dW}\left[\frac{W}{V(dr/dW)^2}\right]+\frac{1}{2}m^2\left[W^2-r^2+\frac{W^2}{2}\left(\frac{1}{U}-\frac{1}{V}\right)\right]=\varkappa W^2\rho\,, \tag{11.13}$$

$$1-\frac{W}{V(dr/dW)^2}\frac{d}{dW}[\ln(UW)]+$$
$$+\frac{1}{2}m^2\left[W^2-r^2-\frac{W^2}{2}\left(\frac{1}{U}-\frac{1}{V}\right)\right]=-\varkappa W^2\frac{p}{c^2}\,, \tag{11.14}$$

$$\frac{d}{dW}\left[\sqrt{U/V}\,W^2\right]=2r\sqrt{UV}\,\frac{dr}{dW}\,. \tag{11.15}$$

В солнечной системе влиянием массы покоя гравитона m_g можно, с большой точностью, пренебречь, и система уравнений (11.13) – (11.15) вне источника в инерциальной системе координат принимает вид

$$1-\frac{d}{dW}\left[\frac{W}{V(dr/dW)^2}\right]=0\,,$$

$$1-\frac{W}{V(dr/dW)^2}\frac{d}{dW}[\ln(UW)]=0\,,$$

$$\frac{d}{dW}\left[\sqrt{U/V}\,W^2\right]=2r\sqrt{UV}\,\frac{dr}{dW}\,.$$

Первые два уравнения точно такие же как в ОТО, но записанные в гармонических координатах. Последнее уравнение следует из уравнения (11.7), которое в инерциальной системе координат точно совпадает с гармоническим координатным условием. Такую систему уравнений рассматривал в ОТО В. А. Фок. Легко увидеть, что эта система уравнений для источника с массой M имеет решение

$$ds^2=\frac{r-r_g/2}{r+r_g/2}c^2dt^2-\frac{r+r_g/2}{r-r_g/2}dr^2-(r+r_g/2)^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\,,$$

здесь $r_g=2GM/c^2$ – радиус Шварцшильда.

Отсюда для отклонения световых лучей в поле Солнца и для смещения перигелия Меркурия, а также других гравитационных эффектов в Солнечной системе, мы получим точно такие же выражения, как и в ОТО, но только в гармонических координатах. *Особо подчеркнем, что совпадение возможно только в гармонических координатах.*

Далее мы будем исследовать систему уравнений (11.13) – (11.15) и (10.41) для различных уравнений состояния вещества. Именно на основе этих уравнений в разделах 11.3, 11.4 и 11.6 будет показано, что гравитационное поле обладает свойством *самоограничения*, которое и устанавливает границу для замедления течения времени гравитационным полем.

11.3. Внешнее решение для сферически-симметричного статического тела

В данном разделе будет показано, что наличие массы покоя у гравитона кардинально изменяет характер решения в окрестности сферы Шварцшильда.

Вычитая уравнение (11.14) из уравнения (11.13) и вводя новую переменную

$$Z = \frac{UW^2}{V\dot{r}^2}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad t = \frac{W - W_0}{W_0}, \tag{11.16}$$

получим

$$\frac{dZ}{dW} - \frac{2Z}{U}\frac{dU}{dW} - 2\frac{Z}{W} - \frac{m^2W^3}{2W_0^2}\left(1 - \frac{U}{V}\right) = -\varkappa\frac{W^3}{W_0^2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)U\,. \tag{11.17}$$

Складывая уравнения (11.13) и (11.14), находим

$$1 - \frac{1}{2}\frac{W_0^2}{W}\frac{1}{U}\frac{dZ}{dW} + \frac{m^2}{2}(W^2 - r^2) = \frac{1}{2}\varkappa W^2\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right). \tag{11.18}$$

Рассмотрим уравнения (11.17) и (11.18) вне вещества в области, определяемой неравенствами

$$\frac{U}{V} \ll 1, \quad \frac{1}{2}m^2(W^2 - r^2) \ll 1\,. \tag{11.19}$$

В этой области уравнение (11.18) имеет вид

$$U = \frac{1}{2}\frac{W_0^2}{W}\frac{dZ}{dW} = \frac{1}{2}\frac{W_0}{W}\frac{dZ}{dt}. \qquad (11.20)$$

Как будет видно в дальнейшем (*см. (11.44)*) *это уравнение в силу положительности Z имеет место только в физической области* $t \geq 0$.

Принимая во внимание (11.20), приведем уравнение (11.17) к виду

$$Z\frac{d^2Z}{dW^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{dZ}{dW}\right)^2 + \frac{1}{4}m^2\frac{W^3}{W_0^2}\frac{dZ}{dW} = 0. \qquad (11.21)$$

Введем согласно (11.16) переменную t. Тогда уравнение (11.21) примет форму

$$Z\ddot{Z} - \frac{1}{2}\dot{Z}^2 + \alpha(1+t)^3\dot{Z} = 0, \qquad (11.22)$$

здесь $\alpha = m^2W_0^2/4$, $\dot{Z} = dZ/dt$. Для значений t, определяемых неравенством

$$0 \leq t \ll 1/3, \qquad (11.23)$$

уравнение (11.22) упрощается:

$$Z\ddot{Z} - \frac{1}{2}\dot{Z}^2 + \alpha\dot{Z} = 0. \qquad (11.24)$$

Оно имеет решение

$$\lambda\sqrt{Z} = 2\alpha\ln\left(1 + \frac{\lambda\sqrt{Z}}{2\alpha}\right) + \frac{\lambda^2}{2}t. \qquad (11.25)$$

Здесь λ – произвольная постоянная.

На основании (11.20) и (11.16) имеем

$$U = \frac{1}{2}\frac{W_0}{W}\dot{Z}, \quad V\dot{r}^2 = \frac{1}{2}W_0W\frac{\dot{Z}}{Z}. \qquad (11.26)$$

Используя (11.25), находим

$$\dot{Z} = 2\alpha + \lambda\sqrt{Z}. \qquad (11.27)$$

Подставляя (11.27) в (11.26), получим

$$U = \frac{W_0}{W}\left(\alpha + \frac{\lambda}{2}\sqrt{Z}\right), \quad V\dot{r}^2 = W_0 W \frac{\alpha + \lambda\sqrt{Z}/2}{Z}. \tag{11.28}$$

При $\alpha = 0$ на основании (11.25) имеем

$$\sqrt{Z} = \frac{\lambda}{2} t. \tag{11.29}$$

Подставляя это выражение в (11.28), находим

$$U = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{W - W_0}{W}. \tag{11.30}$$

Но это выражение для U должно точно совпадать с решением Шварцшильда

$$U = \frac{W - W_g}{W}, \quad W_g = \frac{2GM}{c^2}. \tag{11.31}$$

Сравнивая (11.30) и (11.31), получим [15]

$$\lambda = 2, \quad W_0 = W_g. \tag{11.32}$$

Таким образом находим

$$U = \frac{W_g}{W}(\alpha + \sqrt{Z}), \quad V\dot{r}^2 = W_g W \frac{\alpha + \sqrt{Z}}{Z}. \tag{11.33}$$

Нам необходимо теперь определить зависимость r от W с помощью (11.15).

Подставляя (11.33) в уравнение (11.15) и переходя к переменной

$$l = r/W_g, \tag{11.34}$$

получим

$$\frac{d}{d\sqrt{Z}}\left[(1+t)\frac{dZ}{dt}\frac{dl}{d\sqrt{Z}}\right] = 4l. \tag{11.35}$$

[15] Строго говоря постоянная λ зависит от параметра α. Но ввиду малости α учет этой зависимости несущественен.

Учитывая (11.27) и совершая дифференцирование по $\sqrt{Z}$ в (11.35), находим

$$(1+t)(\alpha+\sqrt{Z})\frac{d^2l}{(d\sqrt{Z})^2}+(1+t+\sqrt{Z})\frac{dl}{d\sqrt{Z}}-2l=0\,. \quad (11.36)$$

Так как нас интересует область значений t, определяемая неравенством (11.23), то уравнение (11.36) в этой области упрощается и имеет вид

$$(\alpha+\sqrt{Z})\frac{d^2l}{(d\sqrt{Z})^2}+(1+\sqrt{Z})\frac{dl}{d\sqrt{Z}}-2l=0\,. \quad (11.37)$$

Общее решение уравнения (11.37) будет

$$l = Al_1 + Bl_2\,, \quad (11.38)$$

где

$$l_1 = F[-2,\,1-\alpha,\,-(\alpha+\sqrt{Z})],$$
$$l_2 = (\alpha+\sqrt{Z})^\alpha F[-2+\alpha,\,1+\alpha,\,-(\alpha+\sqrt{Z})]\,.$$

Здесь A и B – произвольные постоянные, F – вырожденная гипергеометрическая функция.

Анализ решения (11.38) приводит в области, определяемой неравенствами (11.19) и (11.23) к равенству

$$\dot{r} = W_g\,. \quad (11.39)$$

Перейдем теперь к анализу решения (11.25). Рассмотрим предельный случай:

$$\sqrt{Z} \gg \alpha\,. \quad (11.40)$$

В этом случае из выражения (11.25) с учетом (11.32) имеем

$$\sqrt{Z} = t\,. \quad (11.41)$$

Подставляя это выражение в (11.28) и учитывая (11.32) и (11.39), получаем решение Шварцшильда

$$U = \frac{W-W_g}{W}, \quad V = \frac{W}{W-W_g}, \quad (11.42)$$

которое применимо только вне сингулярности.

Отсюда следует, что поскольку в Солнечной системе влиянием массы покоя гравитона можно пренебречь, то на основании (11.42), применяя уравнение для геодезического движения пробного тела, легко объяснить известные эффекты в Солнечной системе (отклонение луча света в поле Солнца, смещение перигелия Меркурия и т. д.).

Перейдем теперь к другому предельному случаю, где влияние массы гравитона существенно. Пусть теперь имеет место неравенство

$$\sqrt{Z} \ll \alpha . \tag{11.43}$$

В этом приближении из выражения (11.25) с учетом (11.32) находим

$$Z = 2\alpha t , \tag{11.44}$$

отсюда следует, что

$$W \geq W_g .$$

Это неравенство на основании (11.45) следует также из условия причинности (10.62).

Подставляя выражение (11.44) в (11.28) и учитывая (11.32) и (11.39), получим [2]

$$U = \alpha \frac{W_g}{W}, \quad V = \frac{1}{2} \frac{W}{W - W_g} . \tag{11.45}$$

Это решение согласно (11.43) и (11.44) *справедливо в окрестности особенности*

$$t \ll \frac{\alpha}{2} \text{ т. е. } W - W_g \ll \frac{1}{2} W_g \left(\frac{m_g c}{\hbar} \frac{W_g}{2} \right)^2 ,$$

если бы она была в вакууме. На основании (11.45) и (11.4) *следует, что инвариант $g_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}$ имеет особенность, которая не может быть устранена выбором системы координат.*

Из (11.45) следует, что масса гравитона m_g не допускает обращения величины U в нуль. *Масса покоя гравитона устанавливает для любого тела свой предел на замедление хода* *времени*. Этот предел для U определяется линейной функцией от радиуса Шварцшильда, т. е. от массы тела, и равен

$$\frac{1}{2}\frac{m_g c}{\hbar}W_g\,.$$

В ОТО такой предел отсутствует. Такое свойство гравитационного поля ведет к кардинальному изменению в движении пробного тела в гравитационном поле.

Движение пробного тела происходит по геодезической линии риманова пространства

$$\frac{dv^\mu}{ds}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0\,. \tag{11.46}$$

Здесь $v^\mu = dx^\mu/ds$ – четырехвектор скорости; v^μ удовлетворяет условию

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 1\,. \tag{11.47}$$

Рассмотрим радиальное движение

$$v^\theta = v^\phi = 0, \quad v^r = dr/ds\,. \tag{11.48}$$

Принимая во внимание, что символ Кристоффеля

$$\Gamma^0_{01}=\frac{1}{2U}\frac{dU}{dr}\,, \tag{11.49}$$

из уравнения (11.46) находим

$$\frac{dv^0}{ds}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dr}v^0v^r=0\,. \tag{11.50}$$

Решая уравнение (11.50), получим

$$\frac{d}{dr}\ln(v^0U)=0\,. \tag{11.51}$$

Отсюда имеем

$$v_0=\frac{dx^0}{ds}=\frac{U_0}{U}\,, \tag{11.52}$$

где U_0 – постоянная интегрирования. Если принять скорость падающего пробного тела на бесконечности равной нулю, то получим $U_0 = 1$. Из соотношения (11.47) находим

$$\frac{dr}{ds} = -\sqrt{\frac{1-U}{UV}}\,. \tag{11.53}$$

Подставляя в это выражение (11.45) и учитывая (11.39), получим

$$\frac{dW}{ds} = -\left(\frac{\hbar}{m_g c}\right)\frac{2}{W_g}\sqrt{2\frac{W}{W_g}\left(1-\frac{W_g}{W}\right)}\,. \tag{11.54}$$

Отсюда видно, что возникает точка поворота. Дифференцируя (11.54) по s, находим

$$\frac{d^2W}{ds^2} = 4\left(\frac{\hbar}{m_g c}\right)^2\frac{1}{W_g^3}\,. \tag{11.55}$$

Мы видим, что в точке поворота ускорение положительно, т. е. имеет место отталкивание, и оно значительное. Интегрируя (11.54), получим выражение

$$W = W_g + 2\left(\frac{\hbar}{m_g c}\right)^2\frac{(s-s_0)^2}{W_g^3}\,, \tag{11.56}$$

из которого ясно, что *пробное тело не может пересечь* сферу Шварцшильда.

Согласно выражениям (11.45) *скалярная величина* g/γ, *где* $g = \det\, g_{\mu\nu}$, $\gamma = \det\, \gamma_{\mu\nu}$, *имеет сингулярность в точке* $W = W_g$, *которая не может быть устранена выбором системы координат*. Именно поэтому наличие такой сингулярности в вакууме *недопустимо*, поскольку в противном случае нельзя было бы сшить внешнее решение с решением внутри тела.

Отсюда следует вывод, что радиус тела больше радиуса Шварцшильда, а следовательно, особенность в решении (11.45) не реализуется в природе.

Так в РТГ возникает *самоограничение* на величину поля и тем самым исчезает сама причина появления “шварцшильдовской особенности”, что полностью соответствует мнению Эйнштейна, которое он выразил еще в 1939 г. в статье [27]: «*Основным результатом проведенного исследования является* ***четкое понимание того, что в реальном мире отсутствуют “шварцшильдовские сингулярности”*** (выделено мной. – *А. Л.*)». И далее: «*Шварцшильдовская сингулярность отсутствует, так как вещество нельзя концентрировать произвольным образом; в противном случае частицы, образующие скопления,* ***достигнут скорости света*** (выделено мной. – *А. Л.*)». Эйнштейн, как видим, из физических соображений отверг возможность существования в природе такой сингулярности.

С другой стороны, он, конечно, видел, что наличие сингулярности Шварцшильда нарушает его основной принцип: “*признать все мыслимые* (мы не будем здесь касаться некоторых ограничений, вытекающих из требования однозначности и непрерывности) *координатные системы принципиально равноправными для описания природы*” [16].

Отсюда, очевидно, что путь к “черным дырам”, по которому следуют, ведет к отходу от этого важного физического положения Эйнштейна.

Таким образом, согласно РТГ, благодаря свойству “*самоограничения поля*” в природе могут существовать объекты больших масс, которые характеризуются не только массой и плотностью, но и другими физическими свойствами. Именно свойство “*самоограничения поля*” и исключает возможность образования “черных дыр”.

В качестве примера рассмотрим теперь гравитационное поле в сжимающейся (синхронной) системе координат. Переход к этой системе координат от инерциальной осуществляется с

[16] *Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов. М.: Наука, 1965. Т. I, ст. 38. С. 459.

помощью преобразований

$$dt = \frac{1}{U}[d\tau - dR(1-U)], \quad dW = \sqrt{\frac{1-U}{U\tilde{V}}}(dR - d\tau)\,,$$

здесь

$$\tilde{V} = V\Big(\frac{dr}{dW}\Big)^2.$$

Заметим, что в ОТО в шварцшильдовой метрике эти преобразования становятся сингулярными, а поэтому они не обеспечивают взаимно однозначное отображение (диффеоморфизм). Именно поэтому при использовании шварцшильдовой метрики их нельзя применять. Обычное устранение шварцшильдовой особенности [48, 51] осуществляется сингулярными преобразованиями с нарушением *диффеоморфизма*, что недопустимо. В нашем случае, на основании (11.45), эти преобразования несингулярны.

В синхронной системе координат интервалы риманова и псевдоевклидова пространства-времени имеют вид

$$ds^2 = d\tau^2 - [1 - U(X)]dR^2 - W^2(X)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,,$$

$$d\sigma^2 = d\tau^2\,\frac{1 - \dot{r}^2U^2}{U^2} + 2\,dR\,d\tau\,\frac{\dot{r}^2U^2 - (1-U)}{U^2} - \\ - dR^2\,\frac{\dot{r}^2U^2 - (1-U)^2}{U^2} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,.$$

Здесь $X = R - \tau$, $\dot{r} = dr/dX$.

Уравнения РТГ

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\Big) + \frac{m^2}{2}(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu})\,, \qquad (a)$$

$$D_\nu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0\,,$$

для задачи, определяемой интервалами ds^2 и $d\sigma^2$, приводят вне вещества к уравнениям вида

$$R_{01} = \frac{2\ddot{W}}{W} + \frac{1}{(1-U)W}\dot{U}\dot{W} = \frac{m^2}{2}\Big(\frac{1-U}{U^2} - \dot{r}^2\Big)\,, \qquad (b)$$

$$R_{00} + R_{01} = \frac{1}{1-U}\left[\frac{1}{2}\ddot{U} + \frac{\dot{U}^2}{4(1-U)} + \frac{1}{W}\dot{U}\dot{W}\right] = -\frac{m^2}{2}\frac{1-U}{U}, \qquad (c)$$

В области изменения переменной X, где массой гравитона в силу ее малости можно пренебречь, из этих уравнений находим

$$W = W_g^{1/3}\left[\frac{3}{2}X\right]^{2/3}, \quad 1 - U = \left[\frac{2}{3}W_g\right]^{2/3} X^{-2/3}, \qquad (d)$$

Из выражения (d) для функции U следует, что она убывает с уменьшением X, а ее производная $\dot{U}$ положительна. Это убывание функции U продолжается и в области меньших значений X, так как величина $\dot{U}$ остается положительной.

В приближении (11.19) из уравнения (a) вне вещества находим

$$R_{22} = -\frac{UW}{1-U}\ddot{W} - \frac{U}{1-U}\dot{W}^2 - \frac{W(2-U)}{2(1-U)^2}\dot{U}\dot{W} + 1 = 0.$$

В области малых значений $0 < U \ll 1$ уравнение несколько упрощается и принимает вид

$$UW\ddot{W} + U\dot{W}^2 + W\dot{U}\dot{W} - 1 = 0.$$

Это уравнение имеет решение

$$\dot{W} = \frac{X}{UW}.$$

В точке остановки

$$\dot{W} = 0,$$

согласно уравнениям (b) и (c) вторая производная $\ddot{W}$ при малых значениях U положительна, что свидетельствует о наличии силы отталкивания. Именно от этой точки и начинается процесс расширения, который останавливается в области X, где выполняются равенства (d). В этой области $\ddot{W}$ отрицательна:

$$\ddot{W} = -\frac{1}{2}W_g^{1/3}\left[\frac{3}{2}X\right]^{-4/3},$$

а следовательно, имеет место притяжение. Таким образом, если бы точка остановки находилась вне вещества, то после расширения началось бы сжатие, затем остановка и опять расширение и т. д. Однако реальное гравитационное поле такой режим движения исключает.

Если в ОТО для падающего пробного тела, когда $dR/d\tau{=}0$, имеет место формула

$$W = \left[\frac{3}{2}\left(R - c\tau\right)\right]^{2/3} W_g^{1/3},$$

то в данном случае мы получим выражение

$$W = W_g + 2\left(\frac{\hbar}{m_g c}\right)^2 \frac{(R - c\tau)^2}{W_g^3},$$

которое исключает движение пробного тела к точке $W = 0$. Это означает, что возникла сила отталкивания

$$\frac{d^2W}{d\tau^2} = \frac{4c^2}{W_g^3}\left(\frac{\hbar}{m_g c}\right)^2.$$

Поскольку гравитационное поле создано веществом и само гравитационное поле ограничивает свой потенциал, из приведенного примера следует, что для получения физического решения необходимо сшить решение внутри вещества с внешним решением, но для этого требуется, чтобы потенциал гравитационного поля на поверхности тела был по абсолютной величине ограничен неравенством

$$\frac{|\phi|}{c^2} < 1 .$$

Именно такое решение, которое соответствует реальному гравитационному полю и приводит к тому, что точка остановки не может быть в вакууме. Поэтому мировые линии частиц, покоящиеся относительно сжимающейся системы координат, будут сталкиваться с веществом источника поля. Причем эти столкновения будут происходить за конечное время для любого наблюдателя. Все это и исключает режим движения, о котором мы писали выше. В тоже время это исключает и возникновение “черных дыр”.

Поскольку выводы РТГ относительно поведения больших масс принципиально отличаются от выводов ОТО, то для проверки необходимы более детальные данные наблюдений.

Например, в РТГ сферически-симметричная аккреция вещества на тело большой массы, находящееся на заключительной стадии эволюции (когда ядерные ресурсы исчерпаны), будет сопровождаться значительным энерговыделением из-за падения вещества на поверхность тела. Тогда как в ОТО при сферически-симметричной аккреции вещества на “черную дыру” энерговыделение будет крайне малым, поскольку падающее вещество уносит энергию в “черную дыру”.

Данные наблюдений за такими объектами могли бы дать ответ о том, что происходит со звездами большой массы на заключительной стадии эволюции, когда все ядерные ресурсы исчерпаны.

Перейдем теперь к анализу внутреннего решения.

11.4. Внутреннее решение типа Шварцшильда

В статье [17] Шварцшильд нашел сферически-симметричное статическое внутреннее решение уравнений общей теории относительности. Для *однородного шара* радиуса a оно описывается интервалом

$$ds^2 = c^2\Big(\frac{3}{2}\sqrt{1-qa^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-qW^2}\Big)^2 dt^2 -$$
$$-(1-qW^2)^{-1}dW^2 + W^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,. \quad (11.57)$$

Здесь

$$q = (1/3)\varkappa\rho = \frac{2GM}{c^2a^3}, \quad \varkappa = \frac{8\pi G}{c^2}, \quad \rho = \frac{3M}{4\pi a^3}\,.$$

[17] *Schwarzschild K.* Sitz.-Ber. Preu. Akad. d. Wiss. Berlin, 1916. P. 424.

Общее свойство внешнего и внутреннего решения в ОТО проявляется в том, что при определенном значении W метрические коэффициенты при дифференциале dt^2 в интервалах обращаются в нуль, а это означает, что гравитационное поле своим действием может не только замедлить ход времени, но даже и *остановить течение времени*. Для внешнего решения метрический коэффициент U обращается в нуль при равенстве $W = W_g$. Чтобы исключить такую возможность, которую теория не запрещает, обычно вынуждены предположить, что радиус тела удовлетворяет неравенству

$$a > W_g\,. \tag{11.58}$$

Для внутреннего решения это происходит при равенстве

$$W^2 = 9a^2 - 8(a^3/W_g)\,. \tag{11.59}$$

Чтобы исключить такую возможность обращения в нуль метрического коэффициента U внутри тела, необходимо предположить, что

$$a > (9/8)W_g\,. \tag{11.60}$$

Следует подчеркнуть, что неравенства (11.58) и (11.60) *не являются следствием ОТО.*

Внутреннее решение Шварцшильда несколько формально, но интересно прежде всего тем, что оно является точным решением уравнений ОТО. В разделе 11.3 на примере внешнего решения Шварцшильда показано, что в релятивистской теории гравитации как полевой теории неравенство (11.58) точно возникает из-за остановки процесса замедления хода времени. Ниже мы в рамках РТГ рассмотрим внутреннее решение типа Шварцшильда.

Внутреннее решение Шварцшильда возникло на основании уравнений Гильберта-Эйнштейна

$$\begin{aligned} &1 - \frac{d}{dW}\left[\frac{W}{V}\right] = \varkappa W^2 \rho\,, \\ &1 - \frac{1}{V} - \frac{W}{UV}\frac{dU}{dW} = -\varkappa \frac{W^2}{c^2} p\,. \end{aligned} \tag{11.61}$$

Поскольку согласно (11.57) метрические коэффициенты равны, то

$$U=\left(\frac{3}{2}\sqrt{1-qa^2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-qW^2}\right)^2,\quad V=(1-qW^2)^{-1}. \tag{11.62}$$

Отсюда находим

$$\frac{\acute{U}}{U}=\frac{qW}{\sqrt{1-qW^2}\left(\frac{3}{2}\sqrt{1-qa^2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-qW^2}\right)},\quad \acute{U}=\frac{dU}{dW}. \tag{11.63}$$

Подставляя (11.62) и (11.63) в уравнение (11.61), получим выражение для давления

$$\frac{p}{c^2}=\frac{\rho}{2}\frac{\sqrt{1-qW^2}-\sqrt{1-qa^2}}{\sqrt{U}}. \tag{11.64}$$

Отсюда, в частности видно, что если бы не было исключено равенство (11.59), то давление внутри тела на окружности, определяемой этим равенством, обратилось бы в бесконечность. Сингулярность, которая возникает из-за обращения метрического коэффициента U в нуль, нельзя устранить выбором системы координат, поскольку ее также имеет и скалярная кривизна R:

$$R=-8\pi G\frac{3\sqrt{1-qa^2}-2\sqrt{1-qW^2}}{\sqrt{U}}. \tag{11.65}$$

Покажем теперь на примере внутреннего решения типа решения Шварцшильда, что в РТГ благодаря остановке процесса замедления хода времени ситуация принципиально изменяется. Тот же механизм самоограничения поля, который в РТГ привел к неравенству (11.58) во внешнем решении Шварцшильда, приведет к неравенству типа (11.60) для внутреннего решения Шварцшильда.

Уравнения для данной задачи мы получим из уравнений (11.13) и (11.14). Вводя новую переменную

$$Z=\frac{UW^2}{V\acute{r}^2},\quad \acute{r}=\frac{dr}{dW},$$

и складывая уравнения (11.13) и (11.14), получаем

$$1 - \frac{1}{2UW}\acute{Z} + \frac{m^2}{2}(W^2 - r^2) = \frac{1}{2}\varkappa W^2\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right). \quad (11.66)$$

Вычитая уравнение (11.14) из уравнения (11.13), находим

$$\acute{Z} - 2Z\frac{\acute{U}}{U} - 2\frac{Z}{W} - \frac{m^2}{2}W^3\left(1 - \frac{U}{V}\right) = -\varkappa W^3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)U. \quad (11.67)$$

В нашей задаче компоненты тензора энергии-импульса вещества равны

$$T_0^0 = \rho, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -\frac{p(W)}{c^2}.$$

Уравнение вещества

$$\nabla_\nu(\sqrt{-g}\,T_\mu^\nu) = \partial_\nu(\sqrt{-g}\,T_\mu^\nu) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{\sigma\nu}\partial_\mu g^{\sigma\nu} = 0$$

для данной задачи сводится к следующему:

$$\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dW} = -\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{1}{2U}\frac{dU}{dW}. \quad (11.68)$$

Поскольку давление возрастает к центру шара, это приводит к неравенству

$$\frac{dU}{dW} > 0, \quad (11.69)$$

которое свидетельствует, что по мере приближения к центру шара функция U убывает, а следовательно, идет замедление хода времени по сравнению с инерциальным. Поскольку во внутренней задаче Шварцшильда плотность ρ принята *постоянной*, уравнение (11.68) легко решается:

$$\rho + \frac{p}{c^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{U}}. \quad (11.70)$$

Сравнивая (11.64) и (11.70), находим постоянную α:

$$\alpha = \rho\sqrt{1 - qa^2}. \quad (11.71)$$

Уравнения (11.66) и (11.67) в предположении, что

$$m^2(W^2 - r^2) \ll 1, \quad (U/V) \ll 1,$$

после введения независимой переменной $y = W^2$ принимают вид

$$\overset{\prime}{Z} = U(1 - 3qy) + \frac{\alpha\varkappa}{2} y\sqrt{U}\,, \tag{11.72}$$

$$\sqrt{U}\overset{\prime}{Z} - \frac{1}{y} Z\sqrt{U} - 4Z(\sqrt{U})' + \frac{\alpha\varkappa}{2} yU - \frac{m^2}{4} y\sqrt{U} = 0\,. \tag{11.73}$$

Здесь и далее мы пользуемся обозначением $\overset{\prime}{Z} = dZ/dy$.

В разделе 11.3 при анализе внешнего сферически-симметричного решения Шварцшильда мы видели, что благодаря гравитационной эффективной силе отталкивания метрический коэффициент U, определяющий замедление хода времени по сравнению с инерциальным, даже в сильном гравитационном поле не обращается в нуль.

Именно поэтому ниже мы будем исследовать поведение решения этих уравнений в области малых значений y. При массе гравитона равной нулю, из выражения (11.62) для малых значений переменной y имеем

$$\sqrt{U} \simeq \frac{1}{2}(3\sqrt{1 - qa^2} - 1) + \frac{qy}{4} + \frac{1}{16} q^2 y^2\,. \tag{11.74}$$

Из этого выражения также видно, что функция $\sqrt{U}$ для внутреннего решения Шварцшильда может стать равной нулю в центре шара, если

$$3\sqrt{1 - qa^2} = 1\,, \tag{11.75}$$

что и приводит к бесконечному значению в центре шара как давления p, так и скалярной кривизны R, а также к остановке времени. Поскольку при наличии массы покоя гравитона уравнения (11.72), (11.73) останавливают процесс замедления хода времени, то естественно ожидать, что равенство (11.75) не может иметь места в физической (вещественной) области для функции $\sqrt{U}$. На основании (11.74) будем искать решение уравнений (11.72), (11.73) для функции $\sqrt{U}$ в форме

$$\sqrt{U} = \beta + \frac{qy}{4} + \frac{1}{16}q^2y^2\,, \tag{11.76}$$

здесь β – неизвестная постоянная, которую необходимо определить, используя уравнения (11.72), (11.73).

Подставляя выражение (11.76) в уравнение (11.72) и интегрируя, находим

$$Z = \beta^2 y + \frac{y^2}{2}\left(\frac{\beta q}{2} - 3\beta^2 q + \frac{\alpha\varkappa\beta}{2}\right) + \frac{y^3}{3}\left[\frac{q^2}{8}\left(\beta + \frac{1}{2}\right) - \frac{3\beta}{2}q^2 + \frac{\alpha\varkappa q}{8}\right]. \tag{11.77}$$

Учитывая выражения (11.76) и (11.77) в уравнении (11.73), и пренебрегая малыми членами порядка $(my)^2$, получим для определения постоянной β уравнение

$$2\beta^2 q + \beta(q - \alpha\varkappa) + m^2/3 = 0\,. \tag{11.78}$$

Заметим в качестве пояснения, что член содержащий y^2 имеет следующий вид

$$-\frac{qy^2}{48}\left\{7[2\beta^2 q + \beta\,(q - \alpha\varkappa)] + 3m^2\right\}.$$

Принимая во внимание уравнение (11.78), его можно записать как

$$-\frac{q}{72}m^2y^2\,.$$

Учитывая, что по определению

$$\alpha\varkappa - q = \frac{\varkappa\rho}{3}\left(3\sqrt{1 - qa^2} - 1\right),$$

из уравнения (11.78) находим

$$\beta = \frac{3\sqrt{1 - qa^2} - 1 + \left[\left(3\sqrt{1 - qa^2} - 1\right)^2 - (8m^2)/\varkappa\rho\right]^{1/2}}{4}\,. \tag{11.79}$$

Таким образом, метрический коэффициент U, определяющий процесс замедления хода времени по сравнению с инерциальным, отличен от нуля.

Если массу покоя гравитона положить равной нулю, выражение (11.79), как и следовало ожидать, точно совпадает с постоянным членом выражения (11.74). Из формулы (11.79) можно определить минимальное значение величины β:

$$\beta_{\min} = \left(\frac{m^2}{2\varkappa\rho}\right)^{1/2}. \tag{11.80}$$

Величина β в функции $\sqrt{U}$ определяет границу для процесса замедления хода времени гравитационным полем шара. Это означает, что дальнейшее замедление хода времени гравитационным полем невозможно. Именно поэтому скалярная кривизна, определяемая выражением (11.65) в отличие от ОТО будет всюду конечна. Таким образом, само гравитационное поле благодаря массе покоя гравитона останавливает процесс замедления хода времени, а следовательно, и процесс сжатия вещества, исключая возможность остановки течения времени в центре шара.

Согласно (11.79) равенство (11.75) благодаря наличию массы покоя гравитона *невозможно*, поскольку имеет место неравенство

$$3\sqrt{1 - qa^2} - 1 \geq 2\sqrt{2}\left(\frac{m^2}{\varkappa\rho}\right)^{1/2}. \tag{11.81}$$

Принимая во внимание по определению равенство

$$qa^2 = W_g/a\,,$$

на основании неравенства (11.81) для $\varkappa\rho \gg m^2$ находим

$$a \geq \frac{9}{8}W_g\left(1 + \sqrt{m^2/2\varkappa\rho}\right). \tag{11.82}$$

Из неравенства (11.81) следует также ограничение на плотность ρ

$$\rho \geq \frac{m^2c^2}{4\pi G}.$$

Ограничение на радиус тела, возникающее при изучении внутреннего решения *более сильное*, чем ограничение (11.58), полученное в разделе 11.3 при анализе внешнего решения. Неравенство (11.82), как мы видим, непосредственно следует из теории, тогда как в ОТО, чтобы избежать бесконечного давления внутри тела неравенство (11.60) вынуждены вводить дополнительно.

На основании (11.70) и (11.71) находим для давления выражение

$$\frac{p}{c^2} = \frac{-\rho\sqrt{U} + \rho\sqrt{1 - qa^2}}{\sqrt{U}} .$$

Учитывая равенство (11.80), получим максимальное давление в центре шара

$$\frac{p}{c^2} \simeq \rho\left[\frac{2\varkappa\rho}{m^2}(1 - qa^2)\right]^{1/2} .$$

Давление в центре шара конечно, тогда как в ОТО согласно (11.64) и (11.75) оно бесконечно.

Возникающее в релятивистской теории самоограничение на величину гравитационного поля принципиально отличает ее от ОТО Эйнштейна и от ньютоновской теории гравитации, в которых господствуют только *силы притяжения*. В полевой теории гравитации наличие массы покоя гравитона и фундаментальное свойство гравитационного поля останавливать процесс замедления хода времени приводят к тому, что *гравитационная сила* может быть не только *силой притяжения*, но при определенных условиях (в сильных полях) она проявляется как *эффективная сила торможения*. Именно она останавливает процесс замедления хода времени гравитационным полем, а следовательно, и останавливает процесс сжатия вещества.

Таким образом, согласно РТГ гравитационное поле в принципе не может остановить течение времени физического процесса, поскольку оно обладает фундаментальным свойством самоограничения.

В разделах 11.3 и 11.4 мы видели, что в ОТО метрический коэффициент U, определяющий замедление течения времени гравитационным полем, может обратится в нуль. Это обстоятельство отмечал и Р. Фейнман и по этому поводу писал: "...*Если наша формула для замедления времени была бы правильной, то физические процессы должны были бы остановиться в центре вселенной, так как время там не шло бы совсем. Это не только физически неприемлемое предсказание; так как мы могли бы ожидать, что вещество вблизи края вселенной должно было бы взаимодействовать быстрее, то свет от удаленных галактик должен был бы иметь фиолетовое смещение. На самом деле, хорошо известно, что он сдвинут в сторону более низких, более красных частот. Таким образом, наша формула для замедления времени очевидно нуждается в том, чтобы быть обсужденной в дальнейшем в связи с анализом возможных моделей вселенных. Последующая дискуссия является чисто качественной и предназначена только для того, чтобы стимулировать более мудрые мысли по этому поводу*"[18].

Самоограничение потенциала, как мы видели, является важным свойством гравитационного поля. Именно это свойство обеспечивает наличие границы замедления времени. Такая граница с необходимостью должна быть, поскольку противоположное заключение физически неприемлемо. Поэтому любая метрическая полевая теория гравитационного поля должна принять это общее положение как *физический принцип*.

11.5. Наблюдаемо ли пространство Минковского?

Теперь несколько подробнее остановимся на вопросе: наблюдаемо ли в принципе пространство Минковского? Для этой

[18] *Фейнман Р. Ф., Мориниго Ф. Б., Вагнер У. Г.* Фейнмановские лекции по гравитации. М.: Янус-К, 2000. С. 130.

цели запишем уравнения (5.21a) в форме

$$\frac{m^2}{2}\gamma_{\mu\nu} = 8\pi G\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\Big) - R_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}g_{\mu\nu}\,.$$

Отсюда видно, что в правой части уравнений содержатся только геометрические характеристики эффективного риманова пространства и величины, определяющие распределение вещества в этом пространстве.

Воспользуемся теперь теоремой Вейля-Лоренца-Петрова[19], согласно которой "*зная ... уравнения всех времениподобных и всех изотропных геодезических линий, можно определить метрический тензор с точностью до постоянного множителя*". Отсюда следует, что путем экспериментального изучения движения частиц и света в римановом пространстве можно *в принципе* определить *метрический тензор* $g_{\mu\nu}$ эффективного риманова пространства. Подставляя далее $g_{\mu\nu}$ в уравнение можно определить *метрический тензор* пространства Минковского. После этого с помощью координатных преобразований можно осуществить переход в *инерциальную* галилееву систему координат. Таким образом, будет установлена связь инерциальных галилеевых координат с координатами эффективного риманова пространства.

Так что пространство Минковского в принципе наблюдаемо, но оно скрыто под римановой геометрией пространства-времени.

Здесь уместно привести слова Фока [25]: "*Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты x_1, x_2, x_3? Нам представляется единственно правильным второе определение*". И далее по этому поводу: "*Соображения, что прямая, как луч света, более непосредственно наблюдаема, не имеет никакого значения: в определениях решающим является не непосредственная наблюдаемость, а соответствие природе,*

[19] *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.

хотя бы это соответствие и устанавливалось путем косвенных умозаключений".

Инерциальная система координат, как мы видим, связана с распределением вещества во Вселенной. Поскольку *Вселенная одна*, то и существует только *одна* выделенная инерциальная галилеева система координат. РТГ *в принципе* дает возможность определить эту *инерциальную* систему.

11.6. Эволюция однородной и изотропной Вселенной.

Уравнения эволюции масштабного фактора. Плоская Вселенная

В однородной и изотропной Вселенной интервал в эффективном римановом пространстве может быть представлен в метрике Фридмана–Робертсона–Уолкера:

$$ds^2 = c^2U(t)dt^2 - V(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right], \tag{11.83}$$

интервал в пространстве Минковского имеет вид

$$d\sigma^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2). \tag{11.84}$$

Уравнения (5.21a), (5.22a) РТГ запишем в форме

$$\frac{m^2}{2}\gamma_{\mu\nu} = 8\pi G\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\Big) - R_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}g_{\mu\nu}, \tag{11.85}$$

$$\partial_\mu\tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^\nu_{\lambda\sigma}\tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0. \tag{11.86}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
&\gamma^1_{22} = -r,\ \gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta,\ \gamma^2_{12} = \gamma^3_{13} = 1/r,\\
&\gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,\ \gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta,\\
&\tilde{g}^{00} = V^{3/2}U^{-1/2}(1-kr^2)^{-1/2}r^2\sin\theta,\\
&\tilde{g}^{11} = -V^{1/2}U^{1/2}(1-kr^2)^{1/2}r^2\sin\theta,\\
&\tilde{g}^{22} = -V^{1/2}U^{1/2}(1-kr^2)^{-1/2}\sin\theta,\\
&\tilde{g}^{33} = -V^{1/2}U^{1/2}(1-kr^2)^{-1/2}(\sin\theta)^{-1},
\end{aligned} \tag{11.87}$$

уравнения (11.86) для $\nu = 0$ и $\nu = 1$ принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V}{U^{1/3}}\right) = 0, \tag{11.88}$$

$$-\frac{d}{dr}\left[(1 - kr^2)^{1/2} r^2\right] + 2(1 - kr^2)^{-1/2} r = 0. \tag{11.89}$$

Для компонент $\nu = 2$ и $\nu = 3$ уравнения (11.86) выполняются тождественно. Из уравнений (11.88) и (11.89) следует

$$V/U^{1/3} = \mathrm{const} = \beta^4 \neq 0, \quad k = 0. \tag{11.90}$$

Таким образом, поскольку система уравнений РТГ полная, она *однозначно приводит, в отличие от ОТО, к единственному решению: плоской пространственной (евклидовой) геометрии* Вселенной. При этом при установлении плоскостности (евклидовасти) Вселенной нам не понадобилась *инфляционная гипотеза.*

Полагая

$$a^2 = U^{1/3}, \tag{11.91}$$

получаем

$$ds^2 = \beta^6 \left[c^2 d\tau_g^2 - \left(\frac{a}{\beta}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2)\right]. \tag{11.92}$$

Здесь величина

$$d\tau_g = \left(\frac{a}{\beta}\right)^3 dt \tag{11.93}$$

характеризует темп замедления хода времени в присутствии гравитационного поля по сравнению с инерциальным временем t. Общий постоянный численный множитель β^6 в интервале ds^2 одинаково увеличивает как время, так и пространственные переменные. Он отражает динамику развития Вселенной глобально, как интеграл движения. Время Вселенной определяется величиной $d\tau$ как времениподобной частью интервала ds^2

$$d\tau = \beta^3 d\tau_g = a^3 dt, \tag{11.94}$$

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \beta^4 a^2(\tau)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2). \tag{11.95}$$

Тензор энергии-импульса вещества в эффективном римановом пространстве имеет вид

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu} p\,, \tag{11.96}$$

где ρ и p соответственно – плотность и давление вещества в системе его покоя, а U_μ – его скорость. Поскольку для интервала (11.95) g_{0i} и R_{0i} равны нулю, из уравнения (11.85) следует, что

$$T_{0i} = 0 \;\text{ и }\; U_i = 0\,. \tag{11.97}$$

Это означает, что в *инерциальной системе*, определяемой интервалом (11.84), *вещество* при эволюции Вселенной находится *в состоянии покоя*. Неподвижность вещества в однородной и изотропной Вселенной (отвлекаясь от пекулярных скоростей галактик) в некотором смысле отвечает ранним (дофридмановским) представлениям Эйнштейна о Вселенной.

Так называемое *"расширение Вселенной"*, наблюдаемое по красному смещению, вызвано *не движением вещества, а изменением* со временем *гравитационного поля*. Это замечание следует иметь в виду, когда употребляется принятый термин *"расширение Вселенной"*.

При описании интервала (11.95) в собственном времени τ интервал исходного пространства Минковского (11.84) примет вид

$$d\sigma^2 = \frac{c^2}{a^6} d\tau^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,. \tag{11.98}$$

На основании (11.95) и (11.98), учитывая, что

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{11} = \beta^4(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\,, \tag{11.99}$$

$$\begin{aligned} T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T &= \frac{1}{2}(\rho + 3p), \\ T_{11} - \frac{1}{2} g_{11} T &= \frac{1}{2}\beta^4 a^2(\rho - p)\,, \end{aligned} \tag{11.100}$$

из уравнений (11.85) для масштабного фактора получим

$$\frac{1}{a}\frac{d^2a}{d\tau^2} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) - \frac{1}{6}(mc)^2\left(1 - \frac{1}{a^6}\right), \quad (11.101)$$

$$\left(\frac{1}{a}\frac{da}{d\tau}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(\tau) - \frac{1}{12}(mc)^2\left(2 - \frac{3}{a^2\beta^4} + \frac{1}{a^6}\right). \quad (11.102)$$

При отсутствии вещества и гравитационных волн уравнения (11.101), (11.102) имеют тривиальное решение: $a = \beta = 1$, т. е. эволюции пустой Вселенной не происходит и эффективное риманово пространство совпадает с пространством Минковского. *Отметим, что в развиваемой теории приобретает физический смысл абсолютное значение масштабного фактора a.*

При $m = 0$ уравнения (11.101) и (11.102) совпадают с уравнениями Фридмана для эволюции плоской Вселенной. Однако наличие членов с $m \neq 0$ существенно меняет характер эволюции при малых и больших значениях масштабного фактора.

Появление в уравнениях (11.101) и (11.102) дополнительных членов при $m^2 \neq 0$ (и, в частности, членов $\sim m^2/a^6$) связано с разным ходом инерциального времени t и физическим временем τ (11.94). Поскольку гравитация влияет на ход времени, указанные члены оказываются достаточно большими, чтобы повлиять на характер эволюции в сильных гравитационных полях (несмотря на малость массы гравитона). Именно из-за изменения хода течения инерциального времени в гравитационном поле и возникают силы, которые проявляются, как силы отталкивания при сжатии Вселенной или как силы притяжения в конечной стадии расширения. Пропорциональность членов в правой части уравнений (11.101), (11.102) квадрату массы гравитона – это проявление того, что только при $m^2 \neq 0$ эффективное риманово пространство сохраняет связь с базовым пространством Минковского.

Красное смещение

Красное смещение связано не с движением галактик, которого согласно (11.97) нет, а с изменением гравитационного поля во времени. Поэтому из-за наличия красного смещения не следует, что когда-то галактики были близки друг к другу. Тогда как, обычно считается, что *"все варианты модели Фридмана имеют то общее, что в какой-то момент времени в прошлом (десять-двадцать тысяч миллионов лет назад) расстояние между соседними галактиками должно было равняться нулю"*[20].

Остановимся несколько подробнее на природе красного смещения. Из (11.95) следует, что скорость луча света равна

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{\beta^2 a(\tau)}.$$

Выберем точку наблюдения в начале координат ($r = 0$). Пусть из точки r в течение интервала времени от τ до $\tau + d\tau$ излучается световой сигнал, который в точку $r = 0$ приходит в течение интервала времени от τ_0 до $\tau_0 + d\tau_0$, тогда для света, испущенного в момент τ и пришедшего в точку $r = 0$, в момент τ_0 имеем

$$\int\limits_{\tau}^{\tau_0} \frac{d\tau}{a(\tau)} = \beta^2 r,$$

аналогично для света, испущенного в момент $\tau + d\tau$ и пришедшего в точку $r = 0$ в момент $\tau_0 + d\tau_0$, находим

$$\int\limits_{\tau+d\tau}^{\tau_0+d\tau_0} \frac{d\tau}{a(\tau)} = \beta^2 r.$$

Приравнивая эти выражения, получим

$$\frac{d\tau}{a(\tau)} = \frac{d\tau_0}{a(\tau_0)}.$$

[20] *Хокинг С.* От большого взрыва до черных дыр. М.: Мир, 1990. С. 46.

Или, переходя к частоте света, имеем

$$\omega = \frac{a(\tau_0)}{a(\tau)}\omega_0 .$$

Отсюда очевидно, что частота света ω в точке испускания не равна частоте света ω_0 в точке его наблюдения.

Вводя *параметр красного смещения* z

$$z = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda},$$

имеем

$$z = \frac{a(\tau_0)}{a(\tau)} - 1 .$$

Нетрудно заметить, что красное смещение связано с изменением только масштабного фактора $a(\tau)$, при этом изменении, согласно (11.97), отсутствует какое-либо движение вещества. Таким образом, природа красного смещения связана не с разлетом галактик, которого нет, а с изменением гравитационного поля со временем, т. е. связано с тем, что $a(\tau_0) > a(\tau)$.

Отсутствие космологической особенности

Из ковариантного закона сохранения плотности тензора энергии-импульса $\tilde{T}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}$

$$\nabla_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\tilde{T}^{\alpha\beta} = 0,$$

(где ∇_μ – ковариантная производная, а $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ – символы Кристоффеля в римановом пространстве), следующего из уравнений (5.19), (5.20), и выражения (11.96) получается соотношение

$$-\frac{1}{a}\frac{da}{d\tau} = \frac{1}{3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)}\frac{d\rho}{d\tau} . \qquad (11.103)$$

Для уравнения состояния вещества $p = f(\rho)$ выражение (11.103) определяет зависимость плотности вещества от масштабного фактора. В случае, когда уравнение состояния имеет

вид
$$\frac{p}{c^2} = \omega\rho\,,$$
эта зависимость дается выражением
$$\rho = \frac{\text{const}}{a^{3(\omega+1)}}\,.$$

Для холодной материи, включающей темную массу и массу барионов, $\omega_{CDM} = -1$; для радиационной плотности $\omega_r = 1/3$ и для квинтэссенции $\omega_q = -1 + \nu$, $\nu < 2/3$. Таким образом, полная плотность вещества в уравнениях (11.101) и (11.102) имеет вид
$$\rho = \frac{A_{CDM}}{a^3} + \frac{A_r}{a^4} + \frac{A_q}{a^{3\nu}}\,, \tag{11.104}$$
где A_{CDM}, A_r и A_q – постоянные величины. Согласно (11.104) при малых значениях масштабного параметра $(a \ll 1)$ имеет место радиационно-доминантная стадия эволюции Вселенной:
$$\rho \approx \rho_r = \frac{A_r}{a^4}\,.$$

Обращаясь к уравнению (11.102), можно заметить, что при $a \ll 1$ отрицательный член в правой части уравнения с уменьшением масштабного фактора растет по модулю как $1/a^6$. Поскольку левая часть уравнения положительно определенная, должно существовать минимальное значение масштабного фактора
$$a_{\min} = \frac{mc}{(32\pi G A_r)^{1/2}} = \left(\frac{m^2c^2}{32\pi G\rho_{\max}}\right)^{1/6}. \tag{11.105}$$

Наличие минимального значения масштабного фактора (11.105) означает, что процесс замедления течения времени гравитационным полем при сжатии Вселенной останавливается. Поэтому гравитационное поле не может своим действием остановить течение времени.

Таким образом, *благодаря массе гравитона, а следовательно, благодаря наличию эффективных сил, связанных с изменением хода времени, устраняется космологическая особенность*, и расширение Вселенной начинается с конечного значения масштабного фактора (11.105). Именно здесь проявляется удивительное свойство гравитационного поля: создавать в сильных полях силы отталкивания, которые останавливают процесс сжатия Вселенной и далее осуществляют ее ускоренное расширение.

Следует особо отметить, что обычно употребляемые здесь слова “гравитационные силы сжатия”, “гравитационные силы отталкивания” означают, что возрастание и убывание плотности и давления вещества во Вселенной происходит не за счет градиента давления, которого в данном случае нет, а за счет изменения хода времени и объема, занимаемого данной массой, под влиянием действия изменяющегося во времени гравитационного поля.

На основании (11.101) и (11.105) определим начальное ускорение, которое явилось *“толчком”* к расширению Вселенной. Оно равно

$$\frac{1}{a}\frac{d^2a}{d\tau^2}\bigg|_{\tau=0} = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\max}\,,$$

а следовательно, в РТГ в радиационно-доминантной стадии Вселенной *в период ускоренного расширения*, который *предшествует* фридмановской стадии расширения, скалярная кривизна будет отлична от нуля и при $\tau = 0$

$$R = -\frac{16\pi G}{c^2}\rho_{\max}\,,$$

тогда как в ОТО она равна нулю. Когда масштабный фактор

$$a^2(\tau) = \frac{3}{2}a^2_{\min}\,,$$

постоянная Хаббла становится максимальной:

$$H_{\max} = 3^{-2}(32\pi G\rho_{\max})^{1/2}\,,$$

при этом скалярная кривизна

$$R = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{16\pi G\rho_{max}}{c^2},$$

а инвариант

$$R_{\rho\lambda\mu\nu}R^{\rho\lambda\mu\nu} = 8 \times 3^{-7}\left(\frac{32\pi G}{c^2}\rho_{\max}\right)^2.$$

Поскольку скалярная кривизна R и инвариант $R_{\rho\lambda\mu\nu}R^{\rho\lambda\mu\nu}$ зависят от ρ_{max}, то можно ожидать интенсивного рождения гравитонов в однородной и изотропной Вселенной в радиационно-доминантной стадии. Так может возникнуть релятивистский реликтовый гравитационный фон нетеплового происхождения (см. подробнее в разделе 14). *В ОТО в такой Вселенной в радиационно-доминантной стадии рождение гравитонов невозможно.*

Невозможность неограниченного “расширения Вселенной”

Рассматривая гравитационное поле $\phi^{\mu\nu}$ как физическое поле в пространстве Минковского, необходимо потребовать соблюдения принципа причинности. Это означает, что световой конус в эффективном римановом пространстве должен лежать внутри светового конуса пространства Минковского, т. е. для $ds^2 = 0$ выполняется требование $d\sigma^2 \geqslant 0$. Записав $d\sigma^2$ в сферической системе координат

$$d\sigma^2 = c^2dt^2 - \left(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2\right), \qquad (11.106)$$

и определив пространственную часть интервала из условия $ds^2 = 0$, имеем

$$d\sigma^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{a^4}{\beta^4}\right) \geqslant 0,$$

т. е.

$$(a^4 - \beta^4) \leqslant 0. \qquad (11.107)$$

Таким образом, масштабный фактор (a) ограничен условием $a \leqslant \beta$, поэтому естественно было бы принять его максимальное значение

$$a_{\max} = \beta\,.$$

При таком выборе $a_{\max}$ темп хода времени $d\tau_g$ в точке остановки расширения Вселенной становится равным темпу хода инерциального времени t в пространстве Минковского, хотя вторая производная $\ddot{a}$, а следовательно, и скалярная кривизна R отличны от нуля. От этой точки идет сжатие под действием сил притяжения и будет происходить замедление темпа хода времени $d\tau_g$ вплоть до точки остановки сжатия, когда под действием уже сил отталкивания начнется обратный процесс ускорения темпа хода времени $d\tau_g$ до темпа хода инерциального времени t пространства Минковского. *Именно все эти физические следствия с необходимостью требуют выполнения условия* $a_{\max} = \beta$. Как мы увидим далее (см. (11.120)), значение величины β определяется интегралом движения.

Условие (11.107) *не допускает неограниченного роста масштабного фактора со временем, т. е. неограниченного "расширения" Вселенной (в указанном выше смысле)*. Отметим, что сама Вселенная при этом бесконечна, поскольку радиальная координата определена в области $0 \leq r \leq \infty$.

Эволюция ранней Вселенной

В радиационно-доминантной стадии Вселенной $(\rho = \rho_r)$ уравнения (11.101), (11.102) принимают вид

$$\left(\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{\tau_r^2}\left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)\frac{1}{\xi^4}, \tag{11.108}$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{1}{\tau_r^2}\left(\frac{2}{\xi^2} - 1\right)\frac{1}{\xi^4}, \tag{11.109}$$

где

$$\xi = \frac{a(\tau)}{a_{\min}}, \quad \tau_r = \left(\frac{3}{8\pi G\rho_{\max}}\right)^{1/2}.$$

Решением уравнения (11.108) является

$$\frac{\tau}{\tau_r} = \frac{1}{2}\left\{\xi(\xi^2-1)^{1/2} + \ln[\xi + (\xi^2-1)^{1/2}]\right\}. \qquad (11.110)$$

При $\xi - 1 \ll 1$ $(\tau \ll \tau_r)$:

$$a \simeq a_{\min}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\tau_r}\right)^2 - \frac{7}{24}\left(\frac{\tau}{\tau_r}\right)^4\right\}.$$

Складывая уравнения (11.108) и (11.109), получим

$$\ddot{a}/a + (\dot{a}/a)^2 = (mc)^2/12a^6, \text{ где } \dot{a} = da/d\tau.$$

В ОТО левая часть этого уравнения в радиационно-доминантной области точно равна нулю, а поэтому имеет место стадия Фридмана, когда масштабный фактор $a(\tau)$ изменяется со временем по закону $\tau^{1/2}$.

В РТГ согласно этому уравнению существует в радиационно-доминантной фазе "дофридмановская" стадия развития Вселенной, где скалярная кривизна

$$R = -\frac{1}{2}m^2\frac{1}{a^6}.$$

Горизонт частиц при этом равен

$$R_{\text{part}}(\tau) = a(\tau)\int\limits_0^\tau \frac{c\,d\tau'}{a(\tau')} \simeq c\tau\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\tau^2}{\tau_r^2}\right).$$

Ускоренное расширение происходит, согласно (11.109), до значений $\xi = \sqrt{2}$ (т. е. $a = \sqrt{2}\,a_{\min}$) за время

$$\tau_{in} = \tau_r\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right) \simeq 1.15\tau_r.$$

Величина $\dot{a}/a$ достигает своего максимального значения $[\dot{a}/a]_{max} = 2/3\sqrt{3}\tau_r$ несколько раньше: при $a/a_{min} = \sqrt{3/2}$

и при $\tau \sim 0{,}762\,\tau_r$. *Большое ускорение при росте масштабного фактора от его минимального значения* $(\ddot{a}/a)_0 = 1/\tau_r^2$ *связано с эффективными силами, возникающими из-за различия хода времени* t *и* τ (см. уравнение (11.94)), *обусловленного действием гравитации.* Именно эти силы вызваны членом m^2/a^6 в уравнениях (11.101), (11.102). При $\tau > \tau_{in}$ ускорение сменяется замедлением. При $\xi \gg 1$ расширение (11.110) выходит на фридмановский режим, соответствующий радиационно-доминантной стадии

$$a(\tau) = a_{\min}\,\xi \simeq a_{\min}\left(\frac{2\tau}{\tau_r}\right)^{1/2}$$

и известной для этого режима зависимости

$$\rho \simeq \rho_r(\tau) = \frac{3}{32\pi G\tau^2}, \quad \tau \gg \tau_r. \qquad (11.111)$$

Для выполнения в первые секунды после начала расширения условий первичного нуклеосинтеза достаточно, чтобы величина $\tau_r \lesssim 10^{-2}$с. Соответствующее этому требованию ограничение на величину $\rho_{\max}$ довольно слабое

$$\rho_{\max} > 2 \times 10^{10}\,\text{г}\,\text{см}^{-3}\,.$$

Значение $\rho_{\max}$ при энергиях $kT \simeq 1$ ТэВ, соответствующих электрослабой шкале, и при учете всех степеней свободы лептонов, кварков и т. д. составляет

$$\rho_{\max} \simeq 10^{31}\,\text{г}\,\text{см}^{-3}\,,$$

а на шкале Великого объединения $kT \simeq 10^{15}$ ГэВ

$$\rho_{\max} \simeq 10^{79}\,\text{г}\,\text{см}^{-3}\,.$$

Таким образом, поскольку масштабный фактор a не может обратится в нуль, это означает, что согласно РТГ никакого "Большого взрыва" во Вселенной не могло быть.

В прошлом всюду во Вселенной *вещество* находилось в гравитационном поле в состоянии большой плотности и высокой температуры, о чем свидетельствует реликтовое космическое излучение, затем оно развивалось так, как описано выше.

Полная относительная плотность вещества и масса гравитона

Пусть a_0 – современное значение масштабного множителя, а ρ_c^0 – критическая плотность, связанная с современным значением постоянной Хаббла $H = \left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)_0$ соотношением

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c^0.$$

Вводя переменную

$$x = \frac{a}{a_0},$$

и отношение плотностей

$$\Omega_r^0 = \frac{\rho_r^0}{\rho_c^0}, \quad \Omega_m^0 = \frac{\rho_m^0}{\rho_c^0}, \quad \Omega_q^0 = \frac{\rho_q^0}{\rho_c^0},$$

с учетом соотношения (11.104) можно записать уравнения (11.101), (11.102) в виде

$$\left(\frac{1}{x}\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = H^2\left\{\frac{\Omega_r^0}{x^4} + \frac{\Omega_m^0}{x^3} + \frac{\Omega_q^0}{x^{3\nu}} - \frac{f^2}{6}\left(1 - \frac{3}{2\beta^4 a^2} + \frac{1}{2a^6}\right)\right\}; \tag{11.112}$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d^2x}{d\tau^2}\right) = -\frac{H^2}{2}\left\{\frac{2\Omega_r^0}{x^4} + \frac{\Omega_m^0}{x^3} - 2\left(1 - \frac{3\nu}{2}\right)\frac{\Omega_q^0}{x^{3\nu}} + \frac{f^2}{3}\left(1 - \frac{1}{a^6}\right)\right\}, \tag{11.113}$$

где

$$f = \frac{mc}{H} = \frac{m_g c^2}{\hbar H}. \tag{11.114}$$

Так как $a_0 \gg 1$, то для современного значения величин из (11.112) получим

$$1 = \Omega_{\text{tot}}^0 - \frac{f^2}{6},$$

т. е. полная относительная плотность равна

$$\Omega_{\text{tot}}^0 = \frac{\rho_{\text{tot}}^0}{\rho_c^0} = \Omega_r^0 + \Omega_m^0 + \Omega_q^0 = 1 + \frac{f^2}{6}. \tag{11.115}$$

Отсюда видим, что хотя масса покоя гравитона и чрезвычайно мала, но она практически измерима, поскольку в наблюдаемую величину Ω^0_{tot} она входит в комбинации с очень большим множителем

$$m_g^2\left(\frac{c^2}{\hbar H}\right)^2.$$

Таким образом, Вселенная, обладающая (по РТГ) евклидовой пространственной геометрией, должна иметь величину $\Omega^0_{tot} > 1$, *в то время как в ОТО для плоской Вселенной она точно равна единице.*

Уравнение (11.115) предоставляет возможность оценить массу гравитона по новейшим экспериментальным измерениям Ω^0_{tot} и H.

Верхний предел на массу гравитона

Определение космологических параметров, исходя из наблюдения угловой асимметрии микроволнового реликтового излучения (CMB), систематически приводит к среднему значению $\Omega^0_{\text{tot}} > 1$. Это относится как к первым количественным экспериментам COBE [21], Maxima-1 [22] и Boomerang-98 [23], совместная обработка которых [24] дает значение

$$\Omega^0_{\text{tot}} = 1{,}11 \pm 0{,}07,$$

так и к превосходным данным эксперимента WMAP [25], которые одни (без привлечения данных по наблюдению сверхно-

[21] *Bennett C. L. et al.* // Astrophys. J. Lett. 1996. Vol. 464, No 1. L1–L4.

[22] *Hanany S. et al.* // Astrophys. J. Lett. 2000. Vol. 545, No 1. L5–L9.

[23] *Bernardis P. et al.* // Nature, 2000. Vol. 404. P. 955–959.

[24] *Jaffe A. H. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 3475–3479.

[25] *Bennett C. L. et al.* // Astrophys J.S. 2003. Vol. 148. P. 1–28; *Spergel D. N. et al.* // Astrophys J.S. 2003. Vol. 148 P. 175–194.

вых SN1a[26] и каталога галактик 2dFGRS[27] и SDSS[28]) дают в зависимости от выбора параметров значения[29]

$$\Omega^0_{\text{tot}} = 1{,}095^{+0{,}094}_{-0{,}144} \quad \text{и} \quad \Omega^0_{\text{tot}} = 1{,}086^{+0{,}057}_{-0{,}128}\,.$$

В пределах ошибок эти значения, разумеется, не противоречат значению $\Omega^0_{\text{tot}} = 1$, вытекающему из модели инфляции, однако они могут указывать и на существование ненулевой массы гравитона согласно соотношениям (11.114), (11.115). Во всяком случае, если взять значение $\Omega^0_{\text{tot}} = 1{,}3$, более чем на 2σ превышающее среднее значение Ω^0_{tot}, мы получаем из (11.114), (11.115) с вероятностью 95% верхний предел на массу гравитона. Величину f из (11.114) удобно представить в виде отношения массы гравитона к величине

$$m_H = \frac{\hbar H}{c^2} = 3{,}80 \times 10^{-66}\, h,$$

которую можно было бы назвать "массой Хаббла". При $f^2/6 = 0{,}3$ верхний предел на массу гравитона составляет

$$m_g \leqslant 1{,}34\, m_H \approx 5{,}1 \times 10^{-66}\, h\ \text{г}\,,$$

или при $h = 0{,}70$

$$m_g < 3{,}6 \times 10^{-66}\ \text{г}\,. \tag{11.116}$$

Комптоновская длина гравитона оказывается сравнимой с хаббловским радиусом Вселенной c/H

$$\frac{\hbar}{m_g c} \lesssim 0{,}75\, \frac{c}{H}.$$

[26] *Riess A. G. et al.* // Astron. J. 1998. Vol. 116. P. 1009–1038; *Perlmutter S. et al.* // Nature, 1998. Vol. 391. P. 51–54; // Astrophys. J. 1999. Vol. 517. P. 565–586.

[27] *Percival. W. J. et al.* // MNRAS, 2001. Vol. 327. P. 1297-1306; *Verde L. et al.* // MNRAS, 2002. Vol. 335 P. 432–440; // Astrophys J.S. 2003. Vol. 148. P. 195–212.

[28] *York D. G. et al.* // Astron. J. 2000. Vol. 120. P. 1579–1587; *Stoughton C. et al.* // Astron. J. 2002. Vol. 123. P. 485–548; *Abazajian K. et al.* // Astron. J. 2003. Vol. 126. P. 2081–2086.

[29] *Tegmark M. et al.* // Phys. Rev. D. 2004. Vol. 69. 103501-26 p.

Полученные ранее оценки верхнего предела на массу гравитона были основаны на том, что гравитационный потенциал при наличии ненулевой массы гравитона должен иметь форму потенциала Юкавы. Исходя из анализа динамики кластеров галактик и консервативных оценок расстояний ($\sim$ 600) кпс, на которых еще существует гравитационная связь между галактиками в кластерах, в работах[30] был получен верхний предел на массу гравитона

$$m_g < 2 \times 10^{-62}\ \text{г}\,.$$

Наша оценка (11.116) более чем в 10^4 раз усиливает указанное ограничение. Это связано с тем, что последовательное рассмотрение гравитационного поля в пространстве Минковского включает в себя не только уравнение, согласно которому потенциал слабого гравитационного поля имеет форму потенциала Юкавы, но и общие уравнения гравитации (5.19), (5.20), согласующиеся со всеми гравитационными явлениями в Солнечной системе и применимыми ко всей Вселенной, т. е. на расстояниях порядка $c/H \simeq 10^{28}$см, в 10^4 раз больших, чем расстояния между гравитационно связанными галактиками в кластерах.

Интеграл эволюции Вселенной и современное значение масштабного фактора

Воспользовавшись соотношением (11.103), можно исключить давление p в уравнении (11.101) и привести его к виду

$$\frac{1}{a}\frac{d^2a}{d\tau^2} = \frac{4\pi G}{3}\Big(a\frac{d\rho}{da} + 2\rho\Big) - \frac{1}{6}(mc)^2\Big(1 - \frac{1}{a^6}\Big)\,,$$

а в дальнейшем записать его в форме

$$\frac{d^2a}{d\tau^2} + \frac{dV}{da} = 0\,, \qquad (11.117)$$

[30] *Hiida E. K., Yamaguchi Y.* // Progr. Theor. Phys. Suppl. Extra number. 1965. P. 261–297; *Goldhaber A. S., Nieto M. M.* // Phys. Rev. D. 1974. Vol. 9. P. 1119–1121.

где

$$V = -\frac{4\pi G}{3} a^2 \rho + \frac{(mc)^2}{12}\left(a^2 + \frac{1}{2a^4}\right). \qquad (11.118)$$

Умножив обе части уравнения (11.117) на $da/d\tau$, получим

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 + V\right] = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 + V = E = \mathrm{const}. \qquad (11.119)$$

Выражение (11.119) напоминает энергию единичной массы. Если бы величина a имела размерность длины, то первый член в (11.119)соответствовал бы кинетической энергии, а второй– потенциальной.

Величина

$$\left(-\frac{4\pi G}{3}\rho a^2\right)$$

в (11.118) соответствует гравитационному потенциалу на границе шара с радиусом a, заполненному веществом с постоянной плотностью ρ, а дополнительные члены в (11.118), пропорциональные m^2, – эффективным силам, возникающим, как было отмечено выше, из-за влияния гравитации на ход времени.

Величина E является интегралом эволюции Вселенной. Она крайне мала, но при $m \neq 0$ отлична от нуля. Выразив $(da/d\tau)^2$ в равенстве (11.119) из уравнения (11.102), получим

$$E = \frac{(mc)^2}{8\beta^4}. \qquad (11.120)$$

Таким образом, постоянная β (см. с. 135), входящая в интервал (11.95) и, согласно (11.107), ограничивающая рост масштабного фактора a, выражается через интеграл движения E.

Интеграл движения теорией не определяется. Он задан, но кем?

В дальнейшем нам понадобится современное значение масштабного фактора a_0. Оценку этой величины можно получить из следующих соображений. Предполагая, что эволюция Вселенной начинается в радиационно-доминантную эпоху, для отношения $a_0/a_{\min}$ имеем

$$\frac{a_0}{a_{\min}} = \left(\frac{\rho_{\max}}{\rho_r^0}\right)^{1/4},$$

где ρ_r^0 – современная плотность радиационной энергии. В свою очередь, ρ_r^0 может быть выражена через относительную плотность Ω_r^0 и критическую плотность ρ_c^0

$$\rho_r^0 = \Omega_r^0 \rho_c^0 = \Omega_r^0 \left(\frac{3H^2}{8\pi G}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{a_0}{a_{\min}} = \left(\frac{8\pi}{3}\frac{G\rho_{\max}}{H^2\Omega_r^0}\right)^{1/4} \approx 1,34 \times 10^{10}(G\rho_{\max})^{1/4},$$

где $G\rho_{\max}$ выражено в $с^{-2}$. (При вычислении числового множителя в указанном выражении использовалось стандартное значение $H = h/3{,}0857 \times 10^{17} c$ и $\Omega_r^0 = \Omega_\gamma^0 = 2,471 \times 10^{-5}/h^2$).

Используя далее определение (11.114), можно представить значение $a_{\min}$, указанное в (11.105), в виде

$$a_{\min} = \left(\frac{f^2}{6}\right)^{1/6}\left(\frac{3}{16\pi}\frac{H^2}{G\rho_{\max}}\right)^{1/6} = 8{,}21 \times 10^{-7}\left(\frac{f^2}{6}\right)^{1/6}\frac{1}{(G\rho_{\max})^{1/6}}$$

где согласно (11.115)

$$\frac{f^2}{6} = \Omega_{\mathrm{tot}}^0 - 1,$$

$a_{\min}$ на электрослабой шкале равно

$$a_{\min} \simeq 5 \times 10^{-11},$$

а на шкале Великого объединения –

$$a_{\min} \simeq 5 \times 10^{-19}.$$

Для величины a_0 из соотношения $a_0/a_{\min}$ имеем[31]

$$a_0 = \left(\frac{f^2}{6}\right)^{1/6} \left(\frac{2\pi}{3}\frac{G\rho_{max}}{H^2}\right)^{1/12} \frac{1}{(\Omega_r^0)^{1/4}} \simeq$$
$$\simeq 1,1 \times 10^4 \left(\frac{f^2}{6}\right)^{1/6} (G\rho_{max})^{1/12}, \qquad (11.121)$$

a_0 при $\rho_{\max}$, взятом на электрослабой шкале, равно

$$a_0 \simeq 5 \times 10^5 ,$$

а на шкале Великого объединения –

$$a_0 \simeq 5{,}5 \times 10^9 .$$

Как уже отмечалось выше (см. с. 129), в РТГ приобретает смысл абсолютная величина масштабного фактора. При среднем значении $\Omega_{\mathrm{tot}} = 1{,}02$ (т. е. $f^2/6 = 0{,}02$) и $\rho_{\max} \gtrsim 10^{10}$г см$^{-3}$ величина $a_0 \gg 1$. Это оправдывает приближения, сделанные при выводе равенства (11.115).

Во Вселенной энергия вещества и гравитационного поля, отнесенная к собственному времени τ и обозначенная ниже

[31] При численной оценке в качестве относительной плотности релятивистских частиц Ω_r^0 взята относительная плотность микроволнового релятивистского излучения Ω_γ^0, поскольку из данных по нейтринным осцилляциям следует, что, по крайней мере, два типа нейтрино в настоящее время являются нерелятивистскими. При экстраполяции к ранней Вселенной следовало бы, конечно, учитывать, что температура реликтового излучения в ходе эволюции повысилась за счет аннигиляции e^+e^-, до момента аннигиляции она была равна температуре нейтринного газа, который в это время также состоял из релятивистских нейтрино и вносил свой вклад в общую плотность релятивистских частиц. Точно так же при экстраполяции к ранней Вселенной повышается плотность релятивистского газа за счет релятивизации других рождающихся частиц. Однако, благодаря тому, что величина Ω_r^0 входит в (11.121) в виде $(\Omega_r^0)^{1/4}$, численная оценка (11.121) изменится не более чем в три раза (даже если предположить, что число степеней свободы в релятивистском газе около 100).

штрихами, изменяются во времени на основании (8.1) и (11.95) согласно закону

$$a^6(\tau)\big(\acute{T}^{00} + \acute{\tau}_g^{00}\big) = \frac{(mc)^2}{16\pi G\beta^6}, \quad \text{где } \beta \gg 1.$$

С использованием плотностей это выражение принимает вид

$$\sqrt{-g}\big(\acute{T}^{00} + \acute{\tau}_g^{00}\big)a^3(\tau) = \frac{(mc)^2}{16\pi G}.$$

Отсюда видно, что в настоящее время величина

$$\big(\acute{T}^{00} + \acute{\tau}_g^{00}\big)$$

чрезвычайно мала.

Несовместимость РТГ с существованием постоянного космологического члена (ΛCDM-теория). Необходимость квинтэссенции с $\nu > 0$

Как уже отмечалось, при рассмотрении гравитационного поля в качестве физического поля в пространстве Минковского необходимо потребовать выполнения принципа причинности. Это требование, примененное к эволюции Вселенной, приводит к неравенству (11.107), согласно которому масштабный фактор ограничен неравенством $a \leqslant a_{\max} = \beta$. Другими словами, согласно РТГ, невозможно неограниченное расширение Вселенной. Математический аппарат РТГ автоматически обеспечивает выполнение этого условия в случае, *когда плотность материи уменьшается с увеличением масштабного фактора*. Действительно, структура *члена*, пропорционального m_g^2 в уравнении (11.102) такова, что благодаря положительной определенности левой части уравнения третий член в скобках обеспечивает отсутствие космологической особенности при $a \ll 1$, а первый член ограничивает минимальное значение плотности материи (и тем самым сверху величину масштабного фактора) при $a \gg 1$.

Условие

$$\frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{(mc)^2}{6} = 0\,,$$

записанное в виде

$$\frac{H^2}{\rho_c^0}\rho - \frac{(mc)^2}{6} = 0\,,$$

где H – современное значение постоянной Хаббла, приводит к равенству

$$\rho_{\min} = \frac{(mc)^2}{6H^2}\rho_c^0\,,$$

или в другой форме

$$\frac{\rho_{\min}}{\rho_c^0} = \frac{f^2}{6} = \Omega_{\text{tot}}^0 - 1. \tag{11.122}$$

Полевая теория гравитации оказывается несовместимой с существованием постоянного космологического члена, соответствующего отталкиванию и приводящего к неограниченному расширению Вселенной. Действительно, при $a \gg 1$ из уравнения (11.112) и принципа причинности (11.107) для $\nu = 0$ следует

$$\Omega_\Lambda^0 < \frac{f^2}{6}.$$

Однако это неравенство несовместимо с условием

$$\Omega_\Lambda^0 > \frac{f^2}{6}\,,$$

которое требуется, чтобы в настоящую эпоху, согласно уравнению (11.113), существовало ускоренное расширение.

Таким образом, единственной возможностью объяснения в рамках РТГ наблюдаемого в настоящее время ускоренного расширения Вселенной является существование квинтэссенции с $\nu > 0$ или какой-либо другой субстанции, плотность которой уменьшается с увеличением масштабного фактора (но *не быстрее, чем* const/a^2). *РТГ исключает возможность существования как постоянного космологического члена* ($\nu = 0$) *соответствующего отталкиванию, так и "фантомного" расширения* ($\nu < 0$)[32].

Временные границы ускорения Вселенной

Самые сильные ограничения на величину

$$\Omega^0_{\text{tot}} = 1{,}018^{+0{,}013}_{-0{,}022}\,,$$

полученные экспериментом WMAP[33] в рамках ΛCDM-модели с привлечением данных из каталога галактик SDSS и данных по сверхновым SN1a в пределах 1σ, допускают значение $\Omega^0_{\text{tot}} = 1{,}03$. Эта разность в РТГ, согласно соотношениям (11.114), (11.115), *определяет массу гравитона*

$$m_g = 0{,}424\, m_H = 1{,}6 \cdot 10^{-66}\, h.$$

В дальнейшем мы для определенности будем использовать именно это значение массы гравитона. Поскольку к началу эпохи современного ускорения $\Omega_r \ll \Omega_m$ и $a \gg 1$, то начало и конец ускоренного расширения определяются согласно (11.113) корнями $x_1 < x < x_2$ уравнения $F(x) = 0$, где функция

$$F(x) = \frac{\Omega^0_m}{x^3} - 2\left(1 - \frac{3\nu}{2}\right)\frac{\Omega^0_q}{x^{3\nu}} + \frac{f^2}{3}.$$

Этап ускорения возможен, если $\nu < 2/3$. При этом величина первого корня x_1 связана с красным смещением Z_1, соответствующим началу эпохи ускорения:

$$\frac{1}{x_1} = \frac{a_0}{a_1} = Z_1 + 1. \tag{11.123}$$

[32] *Caldwell R. R., Kamionkowski M., Weinberg N. N.* // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91, No 7. 071301-4 p.

[33] *Bennett C. L. et al.* // Astrophys J.S. 2003. Vol. 148. P. 1-28; *Spergel D. N. et al.* // Astrophys J.S. 2003. Vol. 148 P. 175-194.

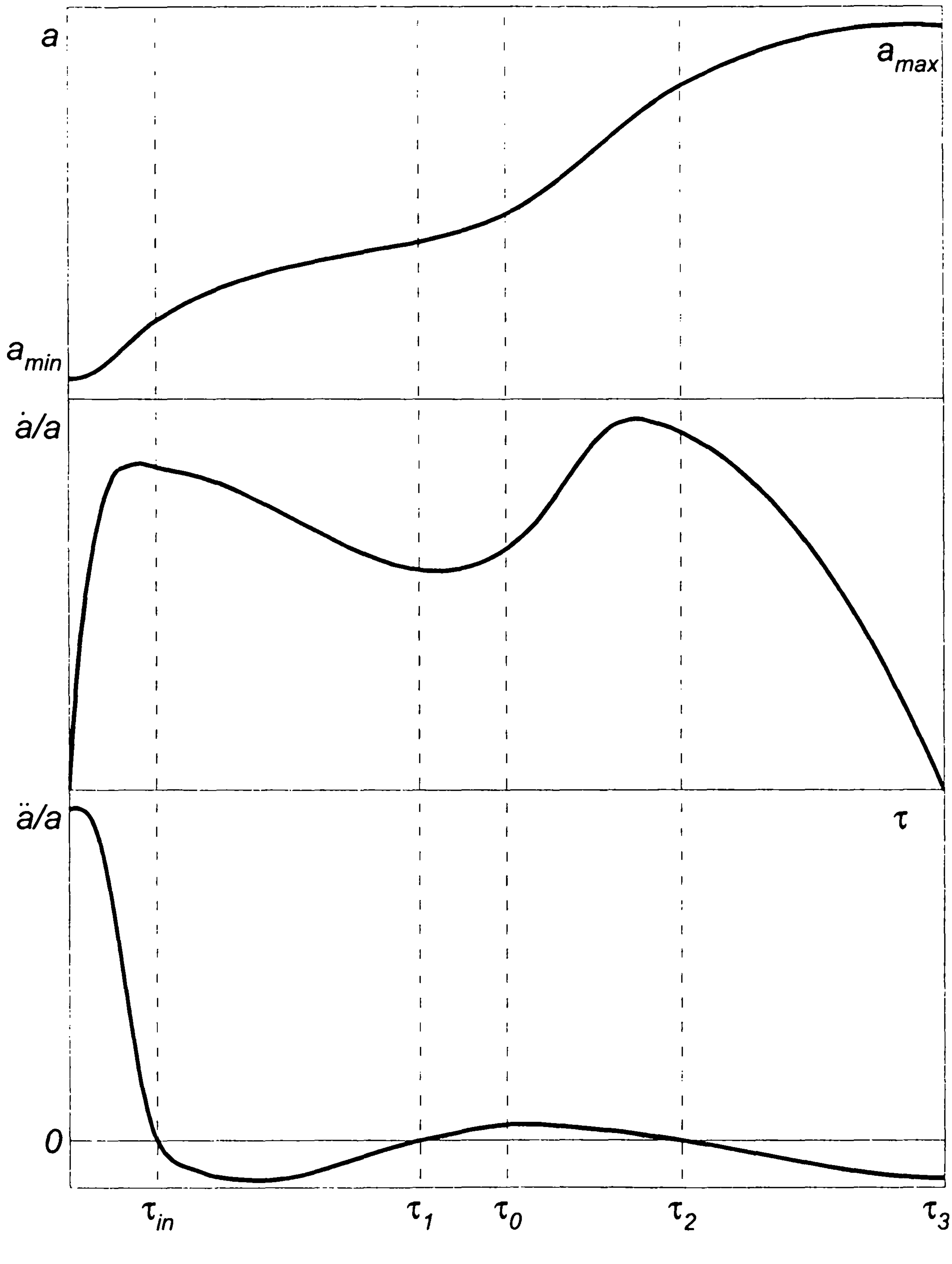

Рис. 1. Качественные кривые зависимости масштабного фактора, скорости и ускорения от времени τ. Здесь $\tau_{in} = 1{,}15\tau_r$. Через τ_0 обозначен современный момент времени.

Время от начала расширения Вселенной до начала современного ускорения можно установить из уравнения (11.112). Пренебрегая продолжительностью радиационно-доминантной эпохи и значением масштабного фактора a к концу ее, имеем

$$\tau_1 \approx \frac{1}{H}\int\limits_0^{x_1}\frac{dx}{x[\Phi(x)]^{1/2}} = \frac{1}{H}\int\limits_{Z_1+1}^{\infty}\frac{dy}{y\left(\Omega_m^0 y^3 + \Omega_q^0 y^{3\nu} - f^2/6\right)^{1/2}},$$

где

$$\Phi(x) = \frac{\Omega_m^0}{x^3} + \frac{\Omega_q^0}{x^{3\nu}} - \frac{f^2}{6}.$$

Здесь согласно[34] приняты значения $\Omega_m^0 = 0{,}27$, $\Omega_q^0 = 0{,}73$.

Соответственно время окончания эпохи ускоренного расширения и перехода к замедлению равно

$$\tau_2 = \frac{1}{H}\int\limits_0^{x_2}\frac{dx}{x[\Phi(x)]^{1/2}},$$

а современный возраст Вселенной

$$\tau_0 = \frac{1}{H}\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x[\Phi(x)]^{1/2}}.$$

Физическое расстояние, пройденное светом (горизонт частиц) к настоящему моменту времени, определяется выражением

$$D_{\text{part}}(\tau_0) = a(\tau_0)\int\limits_0^{\tau_0}\frac{d\sigma}{a(\sigma)} =$$

$$= \frac{c}{H}\int\limits_1^{a_0/a_{min}} dy\frac{1}{[\Omega_r^0 y^4 + \Omega_m^0 y^3 + \Omega_q^0 y^{3\nu} - f^2/6 \times (1 + y^6/2a_0^6)]^{1/2}} \simeq$$

$$\simeq \frac{2}{\sqrt{\Omega_m^0}}\frac{c}{H}.$$

[34] *Bennett C. L. et al.* // Astrophys J.S. 2003. Vol. 148. P. 1-28; *Spergel D. N. et al.* // Astrophys J.S. 2003. Vol. 148 P. 175-194.

Эта величина определяет размер наблюдаемой Вселенной к настоящему времени. Горизонт событий определяется формулой

$$d_c = a(\tau) \int_{\tau}^{\infty} \frac{d\sigma}{a(\sigma)} \, .$$

Поскольку этот интеграл обращается в бесконечность, горизонт событий в нашем случае отсутствует. Это означает, что из любой области Вселенной к нам придет информация о событиях, происходящих в ней в момент времени τ. Эту информацию можно получить с помощью гравитационных волн, поскольку они способны пройти через периоды, когда была большая плотность вещества.

Качественно (без соблюдения масштабов) временнáя зависимость масштабного фактора, скорости его изменения $\dot{a}$ и $\ddot{a}$ представлена на рис. 1. Вначале масштабный фактор от своего минимального значения a_{min} увеличивается с очень большим ускорением, которое за достаточно короткое время τ_{in} обращается в нуль. Скорость в этот промежуток времени увеличивается от нулевого значения до максимального. Масштабный фактор в течение этого промежутка времени изменяется незначительно: $a(\tau_{in}) = \sqrt{2}a_{min}$. Далее происходит расширение с отрицательным ускорением, которое обращается в некоторый момент времени τ_1 в нуль. Скорость при этом падает, и несколько позже τ_1 она достигает своего минимального значения. Масштабный фактор на этом отрезке времени продолжает возрастать (расширение продолжается). Движение с положительным ускорением продолжается до момента времени τ_2. Скорость и масштабный фактор при этом увеличиваются. При $\tau > \tau_2$ опять происходит расширение с отрицательным ускорением до тех пор, пока в момент времени τ_3 расширение останавливается. Масштабный фактор достигает при этом своего максимального значения, полуцикл завершается, и все повторяется в обратном порядке – эпоха расширения сменяется эпохой сжатия. Для величины $\dot{a}/a$ первый максимум расположен при $a = \sqrt{3/2}\ a_{min}$ ($\tau \sim 0{,}76\ \tau_r$) несколько ранее τ_{in}, точно так же, как второй максимум – ранее τ_2. Минимум $\dot{a}/a$, наоборот, располагается позже τ_1. Это следует из того, что величина $(d/d\tau)(\dot{a}/a) = (\ddot{a}/a) - (\dot{a}^2/a^2)$ при $\ddot{a} = 0$ отрицательна.

Максимальное значение масштабного фактора и интеграл эволюции Вселенной

Время, соответствующее концу ускоренного расширения и началу замедления, приводящего к остановке расширения, сильно зависит от параметра ν (см. табл.).

Таблица. Время начала ускоренного расширения Вселенной τ_1, его окончания τ_2 и время максимального расширения (полупериод осцилляции) $\tau_{\max}$, млрд лет

ν	τ_1	τ_2	$\tau_{\max}$
$\nu = 0{,}05$	7,0 - 8,2	980 - 1080	1220 - 1360
$\nu = 0{,}10$	7,0 - 8,2	440 - 485	620 - 685
$\nu = 0{,}15$	7,1 - 8,3	275 - 295	430 - 460
$\nu = 0{,}20$	7,1 - 8,3	190 - 205	325 - 347
$\nu = 0{,}25$	7,2 - 8,5	142 - 149	263 - 280
$\nu = 0{,}30$	7,5 - 8,7	109 - 113	227 - 235

Масштабный фактор, отвечающий остановке расширения $x_{\max}$, определяется корнем уравнения (11.112) и при малых ν с хорошей точностью равен

$$x_{\max} \simeq \left(\frac{6\Omega_q^0}{f^2}\right)^{1/3\nu} = \left(\frac{\Omega_q^0}{\Omega_{\text{tot}}^0 - 1}\right)^{1/3\nu}. \tag{11.124}$$

Подставляя в (11.124) значение a_0 из формулы (11.121), находим

$$a_{\max}^4 = \frac{1}{\Omega_r^0}\left(\frac{f^2}{6}\right)^{2/3}\left(\frac{2\pi}{3}\frac{G\rho_{max}}{H^2}\right)^{1/3}\left(\frac{\Omega_q^0}{\Omega_{\text{tot}}^0 - 1}\right)^{4/3\nu}.$$

Принимая во внимание это равенство и учитывая, что интеграл движения

$$E = \frac{(mc)^2}{8a_{\max}^4},$$

получим

$$E = \frac{(mc)^2}{8}\Omega_r^0\left(\frac{6}{f^2}\right)^{2/3}\left(\frac{3}{2\pi}\frac{H^2}{G\rho_{max}}\right)^{1/3}\left(\frac{\Omega_{\rm tot}^0 - 1}{\Omega_q^0}\right)^{4/3\nu}.$$

Отсюда видно, что интеграл движения эволюции Вселенной является очень малой величиной. Максимальная плотность, которая была во Вселенной, могла оставить какой-то след в гравитационных волнах, созданных в то время. Используя выражение для $x_{\max}$, легко определить относительное ускорение притяжения в момент остановки расширения:

$$\frac{\ddot{a}}{a} \sim -\frac{\nu}{4}\left(\frac{m_g c^2}{\hbar}\right)^2,$$

а поэтому скалярная кривизна

$$R = \frac{3\nu}{2c^2}\left(\frac{m_g c^2}{\hbar}\right)^2.$$

Существенно, что относительное минимальное значение плотности $\rho_{\min}/\rho_c^0$, отвечающей максимуму расширения, зависит только от величины $\Omega_{\rm tot}^0 - 1$, т. е. от массы гравитона (см. (11.115), (11.116)). При ($\Omega_{\rm tot}^0 = 1{,}02$) величина $\rho_{\min}$ довольно велика и даже намного превосходит *современную плотность радиации*. В работе [35] авторы исходили из приведенного в статьях [36] современного возраста Вселенной $(13{,}7\pm0{,}2)\times10^9$ лет, где он вычислен в основном из *ΛCDM-модели*. Очень важно, что новейшие наблюдения SN1a [37] в области $Z \gtrsim 1$ могут дать *непосредственную информацию* о начале современного

[35] *Герштейн С. С. и др.* // Ядерная физика, 2004. Т. 67, № 8. С. 1618–1626.

[36] *Bennett C. L. et al.* // Astrophys J.S. 2003. Vol. 148. P. 1–28; *Spergel D. N. et al.* // Astrophys J.S. 2003. Vol. 148 P. 175–194.

[37] *Tonry J. L. et al.* // Astrophys. J. 2003. Vol. 594 P. 1–24; *Riess A. G. et al.* // Astrophys. J. 2004. Vol. 607, 665–687.

ускорения. Согласно таким данным, полученным в превосходной работе [38], замедление сменилось на современное ускорение при значениях красного смещения

$$Z = 0{,}46 \pm 0{,}13\,.$$

Этот результат согласуется с излагаемой картиной эволюции. Он позволяет непосредственно получить значение x_1 (см. (11.123)) и уточнить допустимую область космологических параметров [39].

Расширение до максимального значения масштабного фактора и следующее за ним сжатие приводят к осциллирующему характеру эволюции Вселенной. Идея об осциллирующем характере эволюции Вселенной неоднократно выдвигалась ранее преимущественно из философских соображений [40]. Такой режим, в принципе, мог бы ожидаться в закрытой модели Фридмана с $\Omega_{\text{tot}} > 1$. Однако этому препятствуют, во-первых, непреодолимая трудность, связанная с переходом через космологическую особенность, а во-вторых, соображения, связанные с ростом энтропии в пространственно ограниченной Вселенной, от цикла к циклу [41].

---

[38] *Riess A. G. et all.* // Astrophys. J. 2004. Vol. 607. P. 665–687.

[39] Отметим, что расстояние до сверхновых (D_L), определяемое по соотношению $F = L/4\pi D_L^2$, где L – светимость стандартной SN1a, а F – наблюдаемый поток от нее, выражается через космологические параметры РТГ соотношением

$$D_L = \frac{c}{H}(Z+1)\int\limits_1^{1+Z}\left[\Omega_m^0 y^3 + \Omega_q^0 y^{3\nu} - \frac{f^2}{6}\right]^{-1/2} dy.$$

[40] См., например, *Сахаров А.Д.* Науч. труды. М.: Центрком, 1995; *Аман Э. Г. и др.* // ТМФ, 1984. Т. 58. С. 163-168; *Aman J. M. et al.* // Ann. Phys. 1984. Vol. 155. P. 333-357; *Tolman R. C.* Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Clarendon Press, Oxford University, 1934.

[41] *Tolman R. C.* Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Clarendon Press, Oxford University, 1934.

В РТГ для бесконечной Вселенной указанные трудности снимаются. Следует подчеркнуть, что в рамках уравнений Гильберта-Эйнштейна плоская Вселенная не может быть осциллирующей.

Поскольку в РТГ сингулярность отсутствует, то Вселенная могла существовать бесконечное время, в течение которого происходило взаимодействие между ее областями, что и привело к однородности и изотропии Вселенной с некоторой структурой неоднородности, которую мы для простоты исследования не учитывали. После установления однородности и изотропии Вселенной и началось ее циклическое развитие. Именно все это и устраняет проблему причинности (горизонта), которая имеет место в ОТО.

В указанном приближении $x_{\max}$ связан с масштабным фактором x_2, отвечающим окончанию ускоренного расширения, соотношением

$$x_2 = \left(1 - \frac{3}{2}\nu\right)^{1/3\nu} \cdot x_{\max} \approx \frac{1}{\sqrt{e}} x_{\max} \,.$$

Время, отвечающее остановке расширения (полупериод осцилляции) при выбранном в работе[42] значении массы гравитона $m_g = 0{,}49\, m_H$, составляет при $\nu = 0{,}05$ около 1300×10^9 лет, при $\nu = 0,10$ около 650×10^9 лет и при $\nu = 0{,}25$ около $270\times$ $\times 10^9$ лет.

Привлекательность осциллирующей эволюции Вселенной отмечена в недавней работе[43]. Осциллирующий режим осуществляется в ней за счет введения скалярного φ-поля, взаимодействующего с веществом, и использования идеи дополнительной размерности. При этом высказываются важные соображения о том, что фаза ускоренного расширения способствует сохранению энтропии в повторяющихся циклах эволюции.

В РТГ осциллирующий характер эволюции Вселенной достигается в результате одного лишь рассмотрения грави-

[42] *Герштейн С. С. и др.* // Ядерная физика, 2004. Т. 67, № 8. С. 1618–1626.

[43] *Steinhardt P. J. et. al.*, 2002. *e-Print Archive*: hep-th/0111030.

тационного поля с массой гравитона как физического поля, генерируемого суммарным тензором энергии-импульса в пространстве Минковского.

Именно обычный полевой подход к гравитации устраняет известные проблемы ОТО: сингулярности, причинности (горизонта), плоскостности (евклидовости) без каких-либо дополнительных экзотических гипотез. При этом нам не потребовалась *инфляция*.

12. Гравитационные эффекты в Солнечной системе

Прежде чем приступить к изучению гравитационных эффектов, остановимся на некоторых общих положениях РТГ, которые непосредственно проявляются при расчете этих эффектов. Уравнения РТГ (5.19) и (5.20) общековариантны при произвольных преобразованиях координат и форминвариантны относительно преобразований Лоренца. Иначе говоря, в РТГ имеет место та же ситуация, как и в электродинамике. Если в двух инерциальных системах в галилеевых координатах мы имеем соответственно одинаковое распределение вещества $T_{\mu\nu}[x, g_{\alpha\beta}(x)]$ и $T_{\mu\nu}[x', g_{\alpha\beta}(x')]$, то в силу форминвариантности уравнений относительно преобразований Лоренца мы получим одинаковые уравнения, которые при тождественных условиях задачи и обеспечивают выполнимость принципа относительности. С другой стороны, если в некоторой инерциальной системе координат при распределении вещества $T_{\mu\nu}(x)$ мы имеем решение $g_{\mu\nu}(x)$, то при преобразованиях Лоренца в другую инерциальную систему получим метрику $g'_{\mu\nu}(x')$, но она соответствует распределению вещества $T'_{\mu\nu}(x')$. В силу форминвариантности уравнений при лоренцевских преобразованиях мы можем вернуться к исходным переменным x и получим новое решение $g'_{\mu\nu}(x)$, соответствующее распределению вещества $T'_{\mu\nu}(x)$. То есть имеет место однозначное соответствие между распределением вещества и метрикой. Изменяется распределение вещества, соответственно изменяется и метрика. Существенным моментом в РТГ является наличие в уравнениях метрики пространства Минковского. Именно это обстоятельство позволяет осуществить сравнение движения вещества в гравитационном поле с движением вещества при отсутствии гравитационного поля.

Между уравнениями РТГ и ОТО имеется принципиальное различие и суть его в том, что уравнения РТГ не форминвариантны относительно произвольных координатных преобразований, тогда как уравнения ОТО вне вещества форминвариантны относительно этих преобразований. Уравнения РТГ форминвариантны только относительно преобразований координат, оставляющих метрику Минковского $\gamma_{\mu\nu}(x)$ форминвариантной. Отсюда, в частности, следует форминвариантность уравнений относительно преобразований Лоренца.

Вопрос о множественности решений $g_{\mu\nu}(x), g'_{\mu\nu}(x), \ldots$, в одной координации беспокоил Эйнштейна, и в четырех статьях [29] (1913 – 1914 гг.) он подробно обсуждал его и приходил к выводу об ограниченном выборе координатных систем, поскольку считал, что из общей ковариантности при одном и том же распределении вещества $T_{\mu\nu}(x)$ возникает множество метрик, что физически недопустимо. Однако основная причина неоднозначности не связана с общей ковариантностью, она связана с форминвариантностью уравнений вне вещества относительно произвольных преобразований координат. Чтобы устранить эту неоднозначность не требуется отказываться от общей ковариантности, поскольку дело не в ней, а необходимо ограничить форминвариантность уравнений в соответствии с принципом относительности.

Именно это и осуществлено в РТГ на основе полевого подхода. Можно привести простой пример из электродинамики. Пусть при токе $j_\mu(x)$ мы имеем решение $A_\mu(x)$. Совершая преобразования к новым переменным x', совпадающим с исходными переменными x в области распределения тока $j_\mu(x)$ и отличающихся от них в области вне тока, наше решение принимает вид $A'_\mu(x')$. Но совершенно очевидно, что $A'_\mu(x)$ не будет решением уравнений электродинамики в координатах x, поскольку уравнения электродинамики не форминвариантны относительно произвольных преобразований координат. Это означает, что в электродинамике при одном и том же распределении тока $j_\mu(x)$ при одинаковых условиях существует только одно распределение электромагнитного поля $\vec{E}, \vec{H}$.

Принцип относительности, как физический принцип, связан не с общей ковариантностью, а с форминвариантностью уравнений и метрики относительно преобразований координат. Фок был прав, когда писал: *"Общий принцип относительности, как физический принцип, который имел бы место по отношению к произвольным системам отсчета, невозможен"* [25].

В разделе 11.3. было показано, что поскольку радиус статического сферически-симметричного тела превышает радиус Шварцшильда, то внешнее решение уравнений РТГ в инерциальной системе в сферических координатах в области (11.40) имеет вид

$$ds^2 = \frac{r - MG}{r + MG}(dx^0)^2 - \frac{r + MG}{r - MG}(dr^2) -$$

$$-(r + MG)^2\left[(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\right]. \qquad (\alpha)$$

Именно такое решение в постньютоновском приближении и дает выражения для метрических коэффициентов эффективного риманова пространства, совпадающие с ранее полученными выражениями (8.59a), которые используются для объяснения гравитационных эффектов в Солнечной системе.

Существенным моментом является то обстоятельство, что при выключении гравитационного поля (например, удаление тела) эффективная риманова метрика переходит в метрику Минковского в галилеевых координатах

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dr)^2 - r^2[(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2].$$

При вычислении гравитационных эффектов в Солнечной системе нам необходимо вычислить траекторию движения в эффективном римановом пространстве, определяемом интервалом ds, и сравнить с соответствующей траекторией, определяемой из интервала $d\sigma$. Метрика пространства Минковского присутствует в уравнениях РТГ. Именно таким путем определяется угол отклонения светового луча и время запаздывания радиосигнала из-за действия гравитационного поля Солнца.

Что касается вычисления смещения перигелия планет, то здесь приходится сравнивать траекторию движения пробного тела вокруг Солнца, вычисленную в РТГ, с траекторией, полученной на основе ньютоновой теории гравитации.

Для вычисления гравитационного эффекта необходимо сравнить в одной координации движение по геодезической линии в римановом пространстве с геодезической линией в пространстве Минковского при выключении гравитации. Но для этого необходимо точно знать как метрику $g_{\mu\nu}(x)$, так и метрику $\gamma_{\mu\nu}(x)$. В РТГ для выбранной метрики $\gamma_{\mu\nu}(x)$ с помощью уравнений (5.19), (5.20) при соответствующих условиях однозначно определяется метрика $g_{\mu\nu}(x)$ эффективного риманова пространства, что и позволяет однозначно определить гравитационный эффект.

При расчетах эффектов в гравитационном поле Солнца в качестве идеализированной модели Солнца обычно берут статическое сферически-симметричное тело с радиусом $R_\odot$. Общий вид метрики эффективного риманова пространства в инерциальной системе в сферических координатах имеет вид

$$ds^2 = U(r)(dx^0)^2 - V(r)(dr)^2 - W^2(r)[(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2]\,. \tag{12.1}$$

В отсутствии гравитационного поля метрика имеет форму

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dr)^2 - r^2[(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2]\,. \tag{12.1a}$$

Подставляя (12.1) и (12.1a) в уравнения (5.19) и (5.20), мы и получаем внешнее решение для Солнца (α).

В разделе 5 было показано, что из уравнений РТГ (5.19) и (5.20) непосредственно следуют уравнения движения для вещества

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0\,. \tag{12.2}$$

Отсюда легко получить уравнения движения пробного тела в статическом гравитационном поле. Тензор энергии-импульса для вещества $T^{\mu\nu}$ в этом случае имеет вид

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu, \quad U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}\,. \tag{12.3}$$

Подставляя (12.3) в (12.2), получим

$$U^\mu \nabla_\nu (\rho U^\nu) + \rho U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0\,. \tag{12.4}$$

Умножая это уравнение на U_μ и учитывая $U_\mu U^\mu = 1$, получим

$$\nabla_\nu (\rho U^\nu) + \rho U^\nu U_\mu \nabla_\nu U^\mu = 0\,. \tag{12.4a}$$

Так как

$$\nabla_\nu (U_\mu U^\mu) = 2U_\mu \nabla_\nu U^\mu = 0\,,$$

из уравнения (12.4a) имеем

$$\nabla_\nu (\rho U^\nu) = 0\,. \tag{12.5}$$

Подставляя (12.5) в (12.4), находим

$$U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0\,. \tag{12.6}$$

Используя определение ковариантной производной, уравнения (12.6) можно записать в форме

$$\left[\frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} U^\sigma\right] \frac{dx^\nu}{ds} = 0\,. \tag{12.7}$$

Учитывая определение полного дифференциала, имеем

$$dU^\mu = \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \tag{12.8}$$

На основании (12.8) уравнение (12.7) принимает вид

$$\frac{dU^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} U^\nu U^\sigma = 0\,, \quad U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}\,. \tag{12.9}$$

Уравнение движения пробного тела (12.9) является уравнением геодезических линий в пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$. Символы Кристоффеля определяются формулой

$$\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\nu g_{\sigma\lambda} + \partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu\sigma})\,. \tag{12.10}$$

На основе (12.1) и (12.10) легко получить необходимые нам символы Кристоффеля:

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{W}\frac{dW}{dr}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,$$
$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{W}\frac{dW}{dr}, \quad \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta, \quad \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2U}\frac{dU}{dr}. \tag{12.11}$$

Из четырех уравнений (12.9) независимых только три, поскольку имеет место соотношение

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 1. \tag{12.12}$$

Это обстоятельство мы далее будем использовать, выбирая три наиболее простые уравнения из (12.9). Из уравнений (12.9) возьмем уравнения

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} + \frac{1}{U}\frac{dU}{dr}\frac{dx^0}{ds}\frac{dr}{ds} = 0, \tag{12.13}$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{W}\frac{dW}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0, \tag{12.14}$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{W}\frac{dW}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} + 2\operatorname{ctg}\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0, \tag{12.15}$$

и дополним их уравнением (12.12) в форме

$$U\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 - V\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - W^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - W^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 1. \tag{12.16}$$

Так как гравитационное поле сферически-симметричное, то естественно выбрать систему координат таким образом, чтобы движение происходило в экваториальной плоскости, т. е.

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \tag{12.17}$$

При нашем выборе уравнение (12.14) тождественно удовлетворяется.

Уравнения (12.13) и (12.15) соответственно можно записать в форме

$$\frac{d}{ds}\left[\ln\frac{dx^0}{ds}U\right]=0\,, \qquad (12.18)$$

$$\frac{d}{ds}\left[\ln\frac{d\varphi}{ds}W^2\right]=0\,. \qquad (12.19)$$

Отсюда находим первые интегралы движения E, J:

$$\frac{dx^0}{ds}U=\frac{1}{\sqrt{E}},\quad \frac{d\varphi}{ds}W^2=\frac{J}{\sqrt{E}}\,. \qquad (12.20)$$

Подставляя эти выражения в (12.16), получим

$$\frac{1}{EU}-V\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-\frac{J^2}{W^2E}=1\,. \qquad (12.21)$$

Из второго соотношения (12.20) находим

$$ds=d\varphi\frac{\sqrt{E}\,W^2}{J}. \qquad (12.22)$$

Переходя в (12.21) с помощью (12.22) к переменной φ, получим

$$\frac{V}{W^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{W^2}-\frac{1}{J^2U}+\frac{E}{J^2}=0\,. \qquad (12.23)$$

Из первого соотношения (12.20) находим

$$(ds)^2=EU^2(dx^0)^2. \qquad (12.24)$$

Отсюда следует, что $E>0$ для пробных тел и $E=0$ для света.

В ОТО гравитационные эффекты в Солнечной системе вычислялись различными методами. Мы здесь следуем методике вычисления С. Вайнберга [1]. *Для всех гравитационных эффектов в Солнечной системе мы получим те же результаты, что и в ОТО, но только в гармонических координатах, так как это ранее вычислял Фок* [25]. *Все эти теоретические результаты в пределах ошибок находятся в согласии с данными, полученными из наблюдений.*

12.1. Отклонение световых лучей Солнцем

Пусть фотон из удаленной области пролетает мимо Солнца. Какова траектория светового луча? Она определяется из уравнения (12.23) при $E = 0$ и имеет вид

$$d\varphi = dr\sqrt{\frac{UV}{W^2\left(\frac{W^2}{J^2} - U\right)}}\,. \tag{12.25}$$

В точке траектории светового луча (см. рис. 2), наиболее близкой к Солнцу,

$$\left.\frac{dr}{d\varphi}\right|_{r_0} = 0\,. \tag{12.26}$$

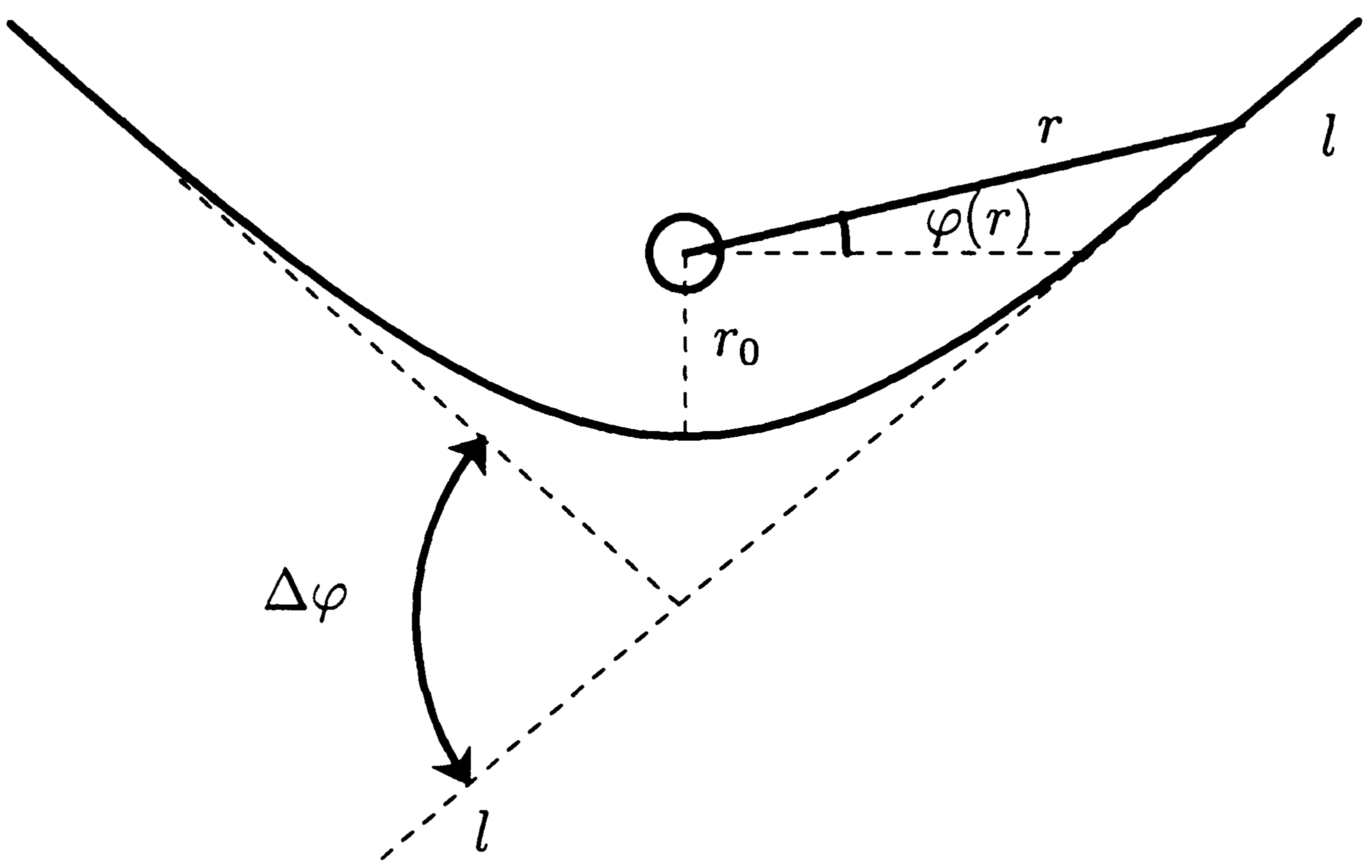

Рис. 2. Отклонение луча света

Интеграл движения J выражается через метрические параметры U_0 и W_0

$$J^2 = \frac{W^2(r_0)}{U(r_0)} = \frac{W_0^2}{U_0}\,. \tag{12.27}$$

Интегрируя (12.25), получим

$$\varphi(r) = \varphi(\infty) + \int\limits_r^\infty dr \left[\frac{V}{W^2\left(\dfrac{W^2}{W_0^2}\dfrac{U_0}{U} - 1\right)}\right]^{1/2}. \qquad (12.28)$$

Угол отклонения светового луча равен

$$\Delta\varphi = 2|\varphi(r_0) - \varphi(\infty)| - \pi\,. \qquad (12.29)$$

Здесь мы учли, что при отсутствии гравитационного поля луч света движется по прямой линии l, и именно поэтому в (12.29) *появилось* π. В инерциальной галилеевой системе координат для тела, имеющего массу Солнца, из уравнений РТГ имеем

$$U(r) = \frac{r - GM}{r + GM},\quad V = \frac{r + GM}{r - GM},\quad W^2 = (r + GM)^2. \qquad (12.30)$$

Для вычислений иногда удобно использовать независимую переменную W:

$$U(W) = 1 - \frac{2GM}{W},\quad V(W) = \frac{1}{1 - 2GM/W}\,. \qquad (12.31)$$

В первом приближении по гравитационной постоянной G метрические коэффициенты соответственно равны

$$\begin{aligned} &U(r) = 1 - \frac{2GM}{r},\quad V(r) = 1 + \frac{2GM}{r}\,,\\ &W^2 = r^2\left(1 + \frac{2GM}{r}\right). \end{aligned} \qquad (12.32)$$

Подставляя эти выражения в интеграл (12.28), получим для него следующее выражение:

$$I = r_0 \int\limits_{r_0}^\infty \frac{dr}{r\left[r^2(1 - 4MG/r_0) + 4MGr - r_0^2\right]^{1/2}}\,. \qquad (12.33)$$

Проводя замену переменных $r = 1/t$, имеем

$$I = \int\limits_0^{1/r_0} \frac{dt}{\sqrt{r_0^{-2}(1 - 2MG/r_0)^2 - (t - 2MG/r_0^2)^2}} . \qquad (12.34)$$

Используя табличный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{m^2 - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x - \frac{b}{2}}{m} + c ,$$

находим

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{2MG}{r_0} . \qquad (12.35)$$

На основании (12.29) получим

$$\Delta\varphi = \frac{4M_\odot G}{c^2 r_0}, \qquad (12.36)$$

принимая во внимание

$$\frac{M_\odot G}{c^2} = 1{,}475 \times 10^5 \text{см}, \quad R_\odot G = 6{,}95 \times 10^{10} \text{см} , \qquad (12.37)$$

находим

$$\Delta\varphi = \frac{R_\odot}{r_0} \Sigma_\odot , \qquad \Sigma_\odot = \frac{4M_\odot G}{R_\odot c^2} = 1{,}75''. \qquad (12.38)$$

Итак, отклонение луча света гравитационным полем Солнца равно

$$\Delta\varphi = 1{,}75'' \times \frac{R_\odot}{r_0} . \qquad (12.39)$$

При вычислении угла отклонения светового луча мы учли, что в отсутствии поля в инерциальной системе, в силу метрики (12.1a) луч света двигается по прямой линии l. Именно отклонение от этой прямой и есть гравитационный эффект.

12.2. Запаздывание радиосигнала

И. И. Шапиро [43] предложил и осуществил эксперимент по измерению времени, которое необходимо, чтобы радиосигнал достиг планеты Меркурий и, отразившись, вернулся на Землю. Вычислим это время, исходя из уравнений РТГ. Мы перейдем от независимой переменной φ к независимой переменной x^0. Для этой цели, используя (12.22) и (12.24), получим

$$(d\varphi)^2 = \frac{J^2 U^2}{W^4}(dx^0)^2. \tag{12.40}$$

Уравнение (12.23) с помощью (12.40) принимает вид

$$ct(r, r_0) = \int\limits_{r_0}^{r} dr \left[\frac{V}{\left(1 - \frac{W_0^2}{W^2} \cdot \frac{U}{U_0}\right) U}\right]^{1/2}. \tag{12.41}$$

Подставляя в интеграл (12.41) выражения (12.32), находим

$$ct(r, r_0) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \left[1 + \frac{2MG}{r} + \frac{2MG}{r}\frac{r_0}{r + r_0}\right]. \tag{12.42}$$

Используя табличные интегралы

$$\begin{gathered}
\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} = \ln\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0}, \\
\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}}\frac{r_0}{r + r_0} = \left[\frac{r - r_0}{r + r_0}\right]^{1/2},
\end{gathered} \tag{12.43}$$

получим

$$\begin{gathered}
ct(r, r_0) = \sqrt{r^2 - r_0^2} + 2MG\ln\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} + \\
+2MG\left[\frac{r - r_0}{r + r_0}\right]^{1/2}.
\end{gathered} \tag{12.44}$$

Пусть r_e, r_p – гелиоцентрические координаты Земли и Меркурия. Поскольку $r_e, r_p \gg r_0$, то в слагаемых выражения (12.44), содержащих гравитационную постоянную, под корнем можно пренебречь влиянием r_0, тогда

$$ct(r_p, r_e) = \sqrt{r_e^2 - r_0^2} + \sqrt{r_p^2 - r_0^2} + \\ + \frac{2MG}{c^2} \ln \frac{4r_e r_p}{r_0^2} + \frac{4MG}{c^2}. \tag{12.45}$$

На прямую, соединяющую точки r_e и r_p, опустим из центра источника гравитационного поля перпендикуляр $r_\perp$. Тогда, согласно теореме Пифагора, имеем

$$r_e^2 = R_e^2 + r_\perp^2, \quad r_p^2 = R_p^2 + r_\perp^2. \tag{12.46}$$

В первом порядке по G

$$r_0 \simeq r_\perp + R_e \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad r_0^2 - r_\perp^2 \simeq R_e r_0 \Delta\varphi, \tag{12.47}$$

$\Delta\varphi$ – угол отклонения луча света из-за влияния источника гравитационного поля (см. (12.36)).

$$\sqrt{r_e^2 - r_0^2} = R_e \sqrt{1 - \frac{r_0}{R_e}\Delta\varphi} \simeq R_e - r_0 \frac{\Delta\varphi}{2} = R_e - \frac{2MG}{c^2}, \tag{12.48}$$

аналогично

$$\sqrt{r_p^2 - r_0^2} \simeq R_p - r_0 \frac{\Delta\varphi}{2} = R_p - \frac{2MG}{c^2}. \tag{12.49}$$

С учетом (12.48) и (12.49) выражение (12.45) принимает вид

$$ct(r_p, r_e) - R = \frac{2MG}{c^2} \ln \frac{4r_e r_p}{r_0^2}, \tag{12.50}$$

здесь $R = R_e + R_p$ – расстояние между планетами.

Время запаздывания радиосигнала при его распространении от Земли до Меркурия и обратно равно

$$\Delta\tau = 2\big[t(r_p, r_e) - R/c\big] = \frac{4MG}{c^3}\ln\frac{4r_e r_p}{r_0},$$
$$r_e = r_\oplus = 15\times 10^{12}\text{см},\quad r_p = r_☿ = 5{,}8\times 10^{12}\text{см}, \tag{12.51}$$

в качестве r_0 можно взять радиус Солнца $R_\odot$

$$R_\odot = 6{,}95\times 10^{10}\text{см}\,.$$

Подставляя эти значения в (12.51) и учитывая, что

$$\frac{4M_\odot G}{c^2} = 5{,}9\times 10^5\text{см},$$

получим

$$\Delta\tau = \frac{4M_\odot G}{c^3}\ln\frac{4r_\oplus r_☿}{R_\odot^2} = 219{,}9\ \text{мкс}. \tag{12.52}$$

При вычислении эффекта запаздывания радиосигнала мы учли то обстоятельство, что в отсутствие гравитационного поля в силу (12.1a) *луч света от точки e до точки p движется в инерциальной системе координат по прямой линии. Из сравнения с этим движением и определяется гравитационный эффект. Именно поэтому в* (12.51) *и возникло слагаемое* $(2R)/c$. В наблюдениях время $(2R)/c$ определяется в период, когда Солнце удаляется от траектории светового луча, так что его влияние существенно уменьшается.

В ОТО, если искать решение уравнений Гильберта-Эйнштейна для статического сферически-симметричного тела, имеющего массу M, то в одной и той же координации можно получить внешнее решение для метрики, которое содержит две произвольные функции

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{01}dtdr + g_{22}(d\theta)^2 + g_{11}dr^2 + g_{33}(d\varphi)^2, \tag{12.31a}$$

где

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{W(r)}, \quad g_{01} = -B(r),$$
$$g_{11} = -\left(1 - \frac{2GM}{W}\right)^{-1}\left[\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 - B^2\right],$$
$$g_{22} = -W^2(r), \quad g_{33} = -W^2 \sin\theta.$$

Это решение было получено П. Пенлеве. Таким образом, в одной и той же координации для тела массы M существует неограниченное число решений. Здесь функции $B(r)$ и $W(r)$, вообще говоря, произвольны, ОТО их не определяет. Обо всем этом Пенлеве писал около 80 лет назад и подчеркивал, что выбор исходных формул чисто произволен.

В 1921-1922 гг. вопрос о множественности метрик в ОТО в одной координации широко обсуждался П. Пенлеве, М. Шази, Ж. Беккерелем, А. Гюлльстрандом, Е. Кречманом. Суть полемики сводилась к вопросу: с какой радиальной переменной в уравнениях ОТО необходимо отождествлять астрономически определенное расстояние от Солнца до планеты?

Поясним ситуацию на примере пространства Минковского. С точки зрения геометрии, пространство Минковского в инерциальной системе и в неинерциальной, по существу, остается тем же самым, поскольку тензор кривизны Римана равен нулю. В силу форминвариантности тензора Римана мы будем иметь в одной и той же координации неограниченное число метрик $\gamma_{\mu\nu}(x)$, $\gamma'_{\mu\nu}(x), \ldots$ и т. д., обращающих тензор Римана в нуль. Но в зависимости от выбора метрики мы будем иметь различные геодезические линии в одной и той же координации, что приведет к различным физическим результатам. Все это очевидно и хорошо известно, поскольку динамика в инерциальной системе отличается от динамики в неинерциальной системе из-за появления сил инерции. Именно поэтому выбор неинерциальной системы координат в четырехмерном пространстве Минковского изменяет физику.

В пространстве Минковского, однако, имеются инерциальные системы, а данные астрономических наблюдений как раз и отнесены к инерциальной системе. Этим обстоятельством и диктуется выбор координатной системы в физических уравнениях. В римановой геометрии ОТО таких систем нет, а поэтому совершенно неясно, какие координаты необходимо выбрать, чтобы сравнить теоретические расчеты с данными наблюдений. От выбора системы координат (или, другими словами, в нашем частном случае от выбора функций $B(r)$ и $W(r)$) геометрия не зависит, она как была римановой, так и останется таковой, однако физика изменяется. Конечно, для нашего случая можно подобрать произвольные функции $B(r)$ и $W(r)$ таким образом, чтобы выполнялся закон тяготения Ньютона, а постньютоновское приближение имело вид (8.59a). Однако, такой выбор в ОТО не продиктован какими-либо физическими условиями. На риманову метрику, если она не полевого происхождения, невозможно сформулировать физические требования на ее поведение, поскольку последнее зависит даже от выбора трехмерных пространственных координат. Для островных систем вопрос о выборе координат Фок решил с помощью гармонических условий. Но почему именно их необходимо выбрать, а не какие-либо другие, оставалось неясным.

Некоторые попытки связать гравитационное поле в ОТО с классом эквивалентности диффеоморфных метрик не устраняют форминвариантности уравнений Гильберта-Эйнштейна вне вещества относительно произвольных координатных преобразований[44]. Именно это обстоятельство приводит к тому, что весь набор диффеоморфных метрик возникает вне вещества в одной координации, а это, согласно теореме Вейля-Лоренца-Петрова [21], приводит к различным геодезическим линиям при одних и тех же условиях задачи, что физически недопустимо. *Суть вопроса состоит не в общей ковариантности, которая всегда должна быть, а в том, допустима ли форминвариантность физических уравнений относительно произвольных координатных преобразований?*

Общая ковариантность – это математическое требование. Поскольку при наличии сил инерции координатные системы физически неэквивалентны, то ни о какой форминвариантности физических уравнений относительно произвольных координатных преобразований не может быть и речи. Именно во

[44]См., например, *Стэчел Д.* // Тр. конф. “Jena-1980”, 1981 (DDR).

всех физических теориях имеет место форминвариантность уравнений и *метрики* относительно преобразований Лоренца – в этом состоит требование принципа относительности.

12.3. Смещение перигелия планет

Рассмотрим движение пробного тела на околосолнечной орбите. В перигелии гелиоцентрическое расстояние пробного тела минимально и равно r_-, а в афелии максимально и равно r_+. Поскольку в перигелии и афелии $dr/d\varphi = 0$, из уравнения (12.23) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{W(r_+)} - \frac{1}{J^2 U(r_+)} &= -\frac{E}{J^2}, \\ \frac{1}{W(r_-)} - \frac{1}{J^2 U(r_-)} &= -\frac{E}{J^2}. \end{aligned} \tag{12.53}$$

Отсюда находим

$$J^2 = \frac{1/U_+ - 1/U_-}{1/W_+^2 - 1/W_-^2}. \tag{12.54}$$

Теперь запишем уравнения (12.53) в другой форме

$$J^2 = W_+^2\left(\frac{1}{U_+} - E\right), \quad J^2 = W_-^2\left(\frac{1}{U_-} - E\right). \tag{12.55}$$

Отсюда получим

$$E = \frac{W_+^2/U_+ - W_-^2/U_-}{W_+^2 - W_-^2}. \tag{12.56}$$

Интегрируя уравнение (12.23), находим

$$\varphi(r) = \varphi(r_-) + \int\limits_{r_-}^{r} \sqrt{V}\left[\frac{1}{J^2 U} - \frac{1}{W^2} - \frac{E}{J^2}\right]^{-1/2} \frac{dr}{W^2}. \tag{12.57}$$

Для удобства вычислений введем новую независимую переменную

$$W = r + GM. \tag{12.58}$$

Подставляя (12.54) и (12.56) в (12.57) и переходя к новой независимой переменной W, находим

$$\varphi(W) = \varphi(W_-) +$$
$$+\int\limits_{W_-}^{W} \left\{ \frac{W_-^2[U^{-1}(W) - U_-^{-1}] - W_+^2[U^{-1}(W) - U_+^{-1}]}{W_-^2 W_+^2 [U_+^{-1} - U_-^{-1}]} \right\}^{-1/2} \times$$
$$\times \frac{\sqrt{V}dW}{W^2}. \qquad (12.59)$$

На основании (12.31) для функции $U^{-1}(W)$ во втором порядке по гравитационной постоянной G имеем

$$U^{-1}(W) = 1 + \frac{2GM}{W} + \frac{(2GM)^2}{W^2}. \qquad (12.60)$$

Мы должны учесть второй порядок в $U^{-1}(W)$, поскольку, если ограничиться только первым порядком по G, то выражение под корнем в фигурных скобках не будет зависеть от гравитационной постоянной. Но это означает, что при расчете мы из-за этого обстоятельства потеряем слагаемое, содержащее G в первом порядке. У нас будет учтено только слагаемое первого порядка по G, содержащееся в функции V. Для метрического коэффициента V достаточно учесть только первый порядок по G:

$$V(W) = 1 + \frac{2GM}{W}. \qquad (12.61)$$

В приближении (12.60) числитель подкоренного выражения в фигурных скобках (12.59) является квадратичной функцией от переменной $1/W$ следующего вида

$$2GMW_-W_+(W_+ - W_-)\left[\frac{1}{W^2} - \frac{1}{W}\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right) + \frac{1}{W_-W_+}\right] =$$
$$= 2GMW_-W_+(W_+ - W_-)\left(\frac{1}{W} - \frac{1}{W_-}\right)\left(\frac{1}{W} - \frac{1}{W_+}\right). \qquad (12.62)$$

Знаменатель подкоренного выражения в (12.59) равен

$$W_-^2 W_+^2 \left[U_+^{-1} - U_-^{-1}\right] = 2GMW_-W_+(W_- - W_+) \times$$
$$\times \left[1 + 2GM\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right)\right]. \tag{12.63}$$

Учитывая (12.62) и (12.63), находим подкоренное выражение в фигурных скобках (12.59)

$$\left[1 + 2GM\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right)\right]^{-1} \left(\frac{1}{W_-} - \frac{1}{W}\right)\left(\frac{1}{W} - \frac{1}{W_+}\right). \tag{12.64}$$

Подставляя (12.61) и (12.64) в (12.59) и ограничиваясь только членами первого порядка по гравитационной постоянной G, получим

$$\varphi(W) = \varphi(W_-) + \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right)2GM\right] \times$$
$$\times \int\limits_{W_-}^{W} \frac{(1 + MG/W)\, dW}{W^2\left[\left(\frac{1}{W_-} - \frac{1}{W}\right)\left(\frac{1}{W} - \frac{1}{W_+}\right)\right]^{1/2}}. \tag{12.65}$$

Для вычисления интеграла в (12.65) введем новую переменную ψ:

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_+} + \frac{1}{W}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_+} - \frac{1}{W_-}\right)\sin\psi. \tag{12.66}$$

Используя (12.66), получим

$$\left(\frac{1}{W_-} - \frac{1}{W}\right)\left(\frac{1}{W} - \frac{1}{W_+}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{W_-} - \frac{1}{W_+}\right)^2 \cos^2\psi. \tag{12.67}$$

После подстановки (12.66) и (12.67) находим

$$I(W) = \int\limits_{W_-}^{W} \frac{(1 + MG/W)\, dW}{W^2\left[\left(\frac{1}{W_-} - \frac{1}{W}\right)\left(\frac{1}{W} - \frac{1}{W_+}\right)\right]^{1/2}} =$$
$$= \psi + GM\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right)\psi + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_-} - \frac{1}{W_+}\right)\cos\psi\right\}\Big|_{-\pi/2}^{\psi}.$$

Отсюда получим

$$I(W_+) = \pi + GM\frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right)\pi\,. \qquad (12.68)$$

Используя (12.68), из (12.65) имеем

$$\varphi(W_+) - \varphi(W_-) = \pi + \frac{3}{2}\pi GM\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right). \qquad (12.69)$$

Отсюда изменение угла φ за один оборот равно

$$2|\varphi(W_+) - \varphi(W_-)| = 2\pi + 6\pi GM\frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right). \qquad (12.70)$$

Смещение перигелия за один оборот будет

$$\delta\varphi = 2|\varphi(W_+) - \varphi(W_-)| - 2\pi = 6\pi GM\frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_+} + \frac{1}{W_-}\right), \qquad (12.71)$$

или, возвращаясь к переменной, определяемой из (12.58), в том же приближении по G получим

$$\delta\varphi = 6\pi GM\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right). \qquad (12.72)$$

Величины r_- и r_+ выражаются через большую полуось a и эксцентриситет e

$$r_\pm = (1 \pm e)a\,. \qquad (12.73)$$

Обычно вводят фокальный параметр

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right). \qquad (12.74)$$

Используя (12.73), находим

$$L = (1 - e^2)a\,. \qquad (12.75)$$

Подставляя (12.75) в (12.74), получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) = \frac{1}{(1 - e^2)a}\,. \qquad (12.76)$$

Учитывая (12.76) в (12.72), находим

$$\delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2(1-e^2)a}\,. \tag{12.77}$$

В формуле (12.77) мы восстановили зависимость от скорости света. Для Меркурия

$$e = 0{,}2056\,, \quad a = 57{,}91 \times 10^{11}\text{см}. \tag{12.78}$$

Подставляя эти значения в формулу (12.77), получим смещение перигелия Меркурия за один оборот

$$\delta\varphi_{☿} = 0{,}1037''. \tag{12.79}$$

За столетие Меркурий совершает 415 оборотов, а поэтому смещение перигелия Меркурия за этот период равно

$$\Delta\varphi = 43{,}03''. \tag{12.80}$$

Современные данные подтверждают этот результат с точностью до 1%. Астрономы изучают смещение перигелия Меркурия в течение нескольких столетий. В 1882 г. С. Ньюкомб установил различие между наблюдениями и теоретическими расчетами, равное 43″ за столетие. В настоящее время оптические наблюдения, которые ведутся более 200 лет, дают неточность определения скорости прецессии – это приблизительно 0,4″ за столетие.

В заключение запишем уравнение (12.23) в переменных $u = 1/W$, $W = r + GM$:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{u^2}{V} - \frac{1}{J^2UV} + \frac{E}{J^2V} = 0. \tag{12.81}$$

Для статического сферически-симметричного поля в силу (12.31) имеем

$$U = V^{-1} = (1 - 2GMu)\,. \tag{12.82}$$

Дифференцируя (12.81) по φ и учитывая (12.82), получим

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{EGM}{J^2c^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2. \tag{12.83}$$

Здесь мы восстановили зависимость от скорости света. Это уравнение отличается от уравнения, получаемого на основе ньютоновой теории гравитации, дополнительным членом $\left[(3GM)/c^2\right]u^2$. Как мы видим, этот член является релятивистским, именно он и приводит к смещению перигелия планет.

Выражая интегралы движения E и J^2 через эксцентриситет и большую полуось в нерелятивистском приближении, имеем

$$\frac{GME}{c^2J^2}=\frac{1}{a(1-\epsilon^2)}\,. \tag{12.84}$$

Таким образом, в нерелятивистском приближении мы получим уравнение ньютоновой теории гравитации

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}+\sigma=\frac{1}{a(1-\epsilon^2)},\sigma=\frac{1}{r}\,. \tag{12.85}$$

Именно такое выражение находят в классической механике, если исходные уравнения Ньютона отнесены к инерциальной системе координат. В нашем расчете это естественно, поскольку исходные уравнения РТГ также записаны в инерциальной системе координат.

Сравнивая движение согласно (12.83) с движением в соответствии с формулой (12.85), мы и определяем эффект смещения перигелия за один оборот тела вокруг Солнца.

12.4. Прецессия гироскопа

Пью [42] и Шифф [44] предложили поместить гироскоп на околоземную орбиту и исследовать его прецессию для изучения гравитационного поля Земли и проверки общей теории относительности. Именно в этом эффекте проявится наличие инерциальной системы, связанной с удаленными звездами. Для простоты будем считать гироскоп точечным пробным телом. Уравнение для момента гироскопа S_μ имеет следующий вид

$$\frac{dS_\mu}{ds}=\Gamma^\lambda_{\mu\nu}S_\lambda\frac{dx^\nu}{ds}\,. \tag{12.86}$$

В системе, связанной с гироскопом, он не прецессирует, что и отражено в уравнении (12.86). В системе покоя пробного тела $S_\mu = (0, \vec{S})$, а поэтому

$$S_\mu U^\mu = 0, \quad U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \tag{12.87}$$

Из равенства (12.87) получим

$$S_0 = -\frac{1}{c} S_i v^i, \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}. \tag{12.88}$$

Уравнение (12.86) для $\mu = i$ принимает вид

$$\frac{dS_i}{dt} = c\Gamma^j_{i0} S_j - \Gamma^0_{i0} v^j S_j + \Gamma^j_{ik} v^k S_j - \Gamma^0_{ik} v^j S_j \frac{1}{c}. \tag{12.89}$$

В инерциальной галилеевой системе координат, связанной с удаленными звездами, для статического сферически-симметричного источника гравитационное поле в линейном приближении по гравитационной постоянной имеет вид

$$g_{00} = 1+2\varPhi, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1-2\varPhi, \quad \varPhi = -\frac{GM}{c^2 r}. \tag{12.90}$$

Используя эти выражения, вычислим символы Кристоффеля

$$\begin{gathered} \Gamma^j_{i0} = 0, \quad \Gamma^0_{ik} = 0, \quad \Gamma^0_{i0} = \frac{\partial \varPhi}{\partial x^i}, \\ \Gamma^j_{ik} = -\frac{\partial \varPhi}{\partial x^k}\delta_{ij} - \frac{\partial \varPhi}{\partial x^i}\delta_{jk} + \frac{\partial \varPhi}{\partial x^j}\delta_{ik}. \end{gathered} \tag{12.91}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (12.89), получим

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = -2(\vec{v}\vec{S})\nabla\varPhi - (\vec{v}\,\nabla\varPhi)\vec{S} + (\vec{S}\nabla\varPhi)\vec{v}. \tag{12.92}$$

Интегралом движения этого уравнения будет выражение

$$\vec{J}^2 = \vec{S}^2 + 2\varPhi\vec{S}^2 - (\vec{v}\vec{S})^2. \tag{12.93}$$

В этом легко убедиться, продифференцировав его по времени

$$2\vec{J}\frac{d\vec{J}}{dt} = 2\,\vec{S}\frac{d\vec{S}}{dt} + 4\,\Phi\vec{S}\frac{d\vec{S}}{dt} +$$
$$+2(\vec{v}\vec{S})\Big\{(\vec{S}\nabla\Phi) + \vec{v}\Big(\frac{d\vec{S}}{dt}\Big)\Big\}. \qquad (12.94)$$

Оставляя в этом выражении главные члены, имеем

$$2\vec{J}\,\frac{d\vec{J}}{dt} = 2\vec{S}\,\frac{d\vec{S}}{dt} + 2\,(\vec{v}\vec{S})(\vec{S}\nabla\Phi)\,. \qquad (12.95)$$

Умножая уравнение (12.92) на $\vec{S}$ и оставляя главные члены, получим

$$\vec{S}\,\frac{d\vec{S}}{dt} = -(\vec{v}\vec{S})(\vec{S}\nabla\Phi)\,. \qquad (12.96)$$

Подставляя это выражение в (12.95), находим

$$\vec{J}\,\frac{d\vec{J}}{dt} = 0\,. \qquad (12.97)$$

Таким образом, мы установили, что выражение (12.93) является интегралом движения уравнения (12.92). На основании (12.93) можно построить вектор $\vec{J}$. В пределах точности он имеет вид

$$\vec{J} = (1+\Phi)\vec{S} - \frac{1}{2}\vec{v}(\vec{v}\vec{S})\,. \qquad (12.98)$$

Дифференцируя (12.98) по времени, в пределах нашей точности получим

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = [\vec{\Omega}, \vec{J}], \quad \vec{\Omega} = -\frac{3}{2}\left[\vec{v}, \nabla\Phi\right]. \qquad (12.99)$$

Вектор $\vec{J}$, оставаясь одинаковым по величине, прецессирует со скоростью $|\vec{\Omega}|$ вокруг направления вектора $\vec{\Omega}$. В настоящее время идет подготовка такого эксперимента. *Прецессия гироскопа, определяемая формулой* (12.99), *показывает, что система координат, связанная с движущимся гироскопом, не* *является инерциальной.* С точки зрения РТГ это очевидно, поскольку движение гироскопа в гравитационном поле есть движение, ускоренное по отношению к инерциальной системе координат, связанной с удаленными звездами. *Именно поэтому система координат, связанная с гироскопом, будет неинерциальной, что и вызывает прецессию гироскопа относительно инерциальной системы, связанной с удаленными звездами.* В ОТО система координат, связанная со свободно движущимся гироскопом, считается инерциальной. Но тогда совершенно неясно, почему эта инерциальная система вращается с угловой частотой $|\vec{\Omega}|$ относительно инерциальной системы удаленных звезд.

12.5. Гравитационное смещение спектральных линий

Рассмотрим стационарное гравитационное поле, т. е. когда метрические коэффициенты не зависят от времени. Пусть из точки e исходит излучение от источника, а в точке p оно принимается приемником. Если источник испускал излучение в течение времени $(dt)_e$, то приемник будет воспринимать его также в течение того же времени, поскольку гравитационное поле стационарно.

Собственное время в точке е равно

$$(d\tau)_e = (\sqrt{g_{00}}dt)_e\,, \tag{12.100}$$

а в точке приемника p оно будет

$$(d\tau)_p = (\sqrt{g_{00}}dt)_p\,. \tag{12.101}$$

Но поскольку время $(dt)_e = (dt)_p$, из формул (12.100) и (12.101) получим

$$\frac{(d\tau)_e}{(d\tau)_p} = \sqrt{\frac{(g_{00})_e}{(g_{00})_p}}\,. \tag{12.102}$$

Таким образом, промежуток собственного времени, в течение которого источник испускал сигнал, не равен промежутку собственного времени, в течение которого приемник принимал сигнал, поскольку гравитационное поле в точке e и p было разным.

Если перейти к частоте света ω, то получим

$$\frac{\omega_e}{\omega_p} = \sqrt{\frac{(g_{00})_p}{(g_{00})_e}}\,. \tag{12.103}$$

Здесь ω_e – частота света, измеренная в точке источника e, а ω_p – частота света, пришедшего из точки e, и измеренная в точке приемника p. Изменение частоты характеризуется величиной

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\omega_e - \omega_p}{\omega_p}\,. \tag{12.104}$$

На основании (12.103) и (12.104) находим

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \sqrt{\frac{(g_{00})_p}{(g_{00})_e}} - 1\,. \tag{12.105}$$

Для слабого гравитационного поля имеем

$$g_{00} = 1 - 2U. \tag{12.106}$$

Подставляя это выражение в (12.105), получим

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = U_e - U_p\,. \tag{12.107}$$

Если источник (например, атом) находится в сильном гравитационном поле, а приемник в более слабом, то наблюдается красное смещение и величина $\delta\omega/\omega$ будет положительна.

12.6. О физическом времени, расстоянии и энергии пробного тела в гравитационном поле

Квадрат интервала запишем в форме

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = \left[\sqrt{g_{00}}\,dx^0 + \frac{g_{0i}dx^i}{\sqrt{g_{00}}}\right]^2 - \varkappa_{ik}dx^i dx^k, \tag{12.108}$$

здесь

$$\varkappa_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}. \tag{12.109}$$

Отсюда определим физическое время как времениподобную часть интервала в (12.108) и расстояние как пространственно-подобную часть того же интервала.

Физическое время

$$d\tau = \frac{1}{c}\left[\sqrt{g_{00}}\,dx^0 + \frac{g_{0i}dx^i}{\sqrt{g_{00}}}\right] = \frac{1}{c}\frac{g_{0\nu}dx^\nu}{\sqrt{g_{00}}}, \tag{12.110}$$

физическое расстояние

$$dl^2 = \varkappa_{ik}dx^i dx^k. \tag{12.111}$$

Отсюда квадрат физической скорости равен

$$v^2 = \left(\frac{dl}{d\tau}\right)^2. \tag{12.112}$$

На основании (12.110) и (12.111) интервал принимает вид

$$ds^2 = c^2 d\tau - dl^2 = c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)d\tau^2. \tag{12.113}$$

Физические величины $d\tau$ и dl^2 не должны зависеть как от выбора трехмерных координат, так и от способа выбора времени в каждой точке пространства.

Это означает, что они должны быть калибровочно инвариантны относительно преобразований[45]

$$x'^0 = f^0(x^0, x^i), \quad x'^i = f^i(x^k). \tag{12.114}$$

Введенные величины $d\tau$ и dl^2 удовлетворяют этому требованию. Покажем это на примере $d\tau$.

В силу тензорного преобразования $g_{\mu\nu}$

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}. \tag{12.115}$$

[45] *Зельманов А.Л., Агаков В.Г.* Элементы общей теории относительности. М.: Наука, 1989.

Учитывая (12.114), имеем

$$g'_{00} = g_{00}\left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}\right)^2,$$

$$g'_{0\lambda} = g_{0\beta}\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}. \tag{12.116}$$

Аналогично,

$$dx'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}dx^\sigma. \tag{12.117}$$

Принимая во внимание равенство

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} = \delta^\beta_\sigma, \tag{12.118}$$

находим

$$cd\tau = \frac{g'_{0\lambda}dx'^\lambda}{\sqrt{g'_{00}}} = \frac{g_{0\sigma}dx^\sigma}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{12.119}$$

Мы видим, что физическое время не зависит от вида преобразований (12.114).*Оно калибровочно инвариантно.* Четырехмерный координатный импульс p^α пробного тела удовлетворяет равенству

$$g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta = \left[\sqrt{g_{00}}\,p^0 + \frac{g_{0i}p^i}{\sqrt{g_{00}}}\right]^2 - \varkappa_{ik}p^ip^k = m^2c^2. \tag{12.120}$$

Отсюда энергия пробного тела определяется времениподобной частью интервала (12.120)

$$\frac{E}{c} = \left[\sqrt{g_{00}}\,p^0 + \frac{g_{0i}p^i}{\sqrt{g_{00}}}\right] = \frac{g_{0\nu}p^\nu}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{p_0}{\sqrt{g_{00}}}, \tag{12.121}$$

а импульс – пространственноподобной частью интервала

$$\vec{p}^{\,2} = \varkappa_{ik}p^ip^k. \tag{12.122}$$

Учитывая (12.121) и (12.122), выражение (12.120) запишем в форме

$$g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2. \tag{12.123}$$

Так как движущееся пробное тело обладает только двумя физическими характеристиками: массой покоя m и скоростью v, то выражение (12.121) для энергии пробного тела, учитывая равенство (12.113), можно выразить через эти единственные характеристики

$$E = c\frac{g_{0\nu}p^{\nu}}{\sqrt{g_{00}}} = mc^3\frac{d\tau}{ds} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}. \qquad (12.124)$$

Это выражение также калибровочно инвариантно относительно преобразований (12.114). Как видим, энергия пробного тела в гравитационном поле определяется так же, как и энергия в специальной теории относительности.

Из выражения (12.121) очевидно, что величина p_0 не является калибровочно инвариантной, это координатная величина.

Сравнивая (12.121) и (12.124), получим

$$p_0 = mc\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (12.125)$$

При движении пробного тела в постоянном гравитационном поле эта величина постоянна. Энергия пробного тела в гравитационном поле определяется формулой (12.124), а не формулой (12.125). Из нее очевидно, что если скорость пробного тела равна нулю, то энергия пробного тела равна

$$E_0 = mc^2.$$

13. О гравитационном потоке в релятивистской теории гравитации

Для дальнейшего нам необходимо записать уравнение (8.1) в форме

$$D_\alpha D_\beta(\tilde{\phi}^{\alpha\beta}\tilde{\phi}^{\varepsilon\lambda} - \tilde{\phi}^{\varepsilon\beta}\tilde{\phi}^{\lambda\alpha}) = -\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{\phi}^{\varepsilon\lambda} -$$
$$-m^2\sqrt{-\gamma}\,\tilde{\phi}^{\varepsilon\lambda} - 16\pi g(T^{\varepsilon\lambda} + t_g^{\varepsilon\lambda}). \qquad (13.1)$$

Здесь

$$-16\pi g t_g^{\varepsilon\lambda} = -16\pi g\tau_g^{\varepsilon\lambda} + D_\alpha D_\beta(\tilde{\phi}^{\alpha\beta}\tilde{\phi}^{\varepsilon\lambda} - \tilde{\phi}^{\varepsilon\beta}\tilde{\phi}^{\alpha\varepsilon})\,, \qquad (13.2)$$

$$-16\pi g t_g^{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}\Big(\tilde{g}^{\varepsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\varepsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\Big)\Big(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\mu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\tau\sigma}\tilde{g}_{\nu\mu}\Big) \times$$
$$\times D_\alpha\tilde{\phi}^{\tau\sigma}D_\beta\tilde{\phi}^{\mu\nu} + \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\phi}^{\varepsilon\tau}D_\beta\tilde{\phi}^{\lambda\sigma} + \frac{1}{2}\tilde{g}^{\varepsilon\lambda}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\phi}^{\sigma\beta}D_\beta\tilde{\phi}^{\alpha\tau} -$$
$$-\tilde{g}^{\varepsilon\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\phi}^{\lambda\sigma}D_\beta\tilde{\phi}^{\alpha\tau} - \tilde{g}^{\lambda\alpha}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\phi}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{\phi}^{\varepsilon\tau} -$$
$$-m^2\Big(\sqrt{-g}\tilde{g}^{\varepsilon\lambda} - \sqrt{-\gamma}\tilde{\phi}^{\varepsilon\lambda} + \tilde{g}^{\varepsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\varepsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\Big)\,,$$

где D_α – ковариантная производная в пространстве Минковского.

Поскольку уравнение (13.1) рассматривается как полевое уравнение в пространстве Минковского, порядок производных несущественен. Подъем и опускание индексов осуществляется метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$. Так, например, если контравариантный импульс гравитона имеет вид

$$p^\mu = m_g\frac{dx^\mu}{ds}\,,$$

то ковариантный импульс равен

$$p_\nu = \gamma_{\nu\mu}p^\mu,$$

а следовательно,

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = m_g^2,$$

тогда как

$$g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu \neq m_g^2.$$

Это значит, что

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{13.3}$$

тогда как

$$ds^2 \neq g^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu, \quad \text{здесь} \quad dx_\mu = \gamma_{\mu\nu}dx^\nu, \tag{13.4}$$

при этом

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \gamma^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu\,.$$

Отсюда следует, что контравариантный тензор $g^{\mu\nu}$ в нашем описании гравитационного поля $\phi^{\mu\nu}$ не осуществляет метрические свойства, хотя он и определяется равенством

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu.$$

При нашем описании гравитационного поля $\phi^{\mu\nu}$ метрические свойства осуществляет только ковариантный метрический тензор $g_{\mu\nu}$.

В дальнейшем все рассмотрение мы будем вести в инерциальной системе в галилеевых координатах. Система уравнений РТГ принимает вид

$$\partial_\alpha\partial_\beta(\phi^{\alpha\beta}\phi^{\varepsilon\lambda}-\phi^{\varepsilon\beta}\phi^{\lambda\alpha}) = -\gamma_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta\phi^{\varepsilon\lambda}-m^2\phi^{\varepsilon\lambda}-16\pi g(T^{\varepsilon\lambda}+t_g^{\varepsilon\lambda}) \tag{13.5}$$

$$\partial_\mu\phi^{\mu\lambda} = 0\,, \tag{13.6}$$

здесь $\partial^\lambda = \gamma^{\lambda\nu}\partial_\nu$.

Особенность геометризованной теории гравитации как ОТО, так и РТГ состоит в том, что в них плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля $t^{\varepsilon\lambda}$, определенная по Гильберту как вариация от плотности лагранжиана гравитационного поля по метрическому тензору $g_{\mu\nu}$, в отличие от других теорий точно равна нулю, поскольку вне источника она является уравнением гравитационного поля. Но отсюда не следует, что в теории отсутствует гравитационное излучение. Поскольку вне источника $t^{\varepsilon\lambda}$ является единственной общей тензорной характеристикой поля второго ранга, то естественно именно из нее и выделить ту часть, которая ответственна за гравитационный поток в волновой зоне.

Плотность тензора энергии-импульса $t^{\varepsilon\lambda}$ имеет вид

$$16\pi\sqrt{-g}\,t^{\varepsilon\lambda} = -\gamma_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta\phi^{\varepsilon\lambda} - m^2\phi^{\varepsilon\lambda} - 16\pi g t_g^{\varepsilon\lambda} - \\ -\partial_\alpha\partial_\beta(\phi^{\alpha\beta}\phi^{\varepsilon\lambda} - \phi^{\varepsilon\beta}\phi^{\lambda\alpha})\,. \qquad (13.7)$$

Законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения определяют тензор энергии-импульса с точностью до тензора Круткова, дивергенция от которого по каждому индексу тождественно равна нулю [25]. В выражении (13.7) четвертый член справа и представляет частную разновидность плотности тензора Круткова. В геометризованной теории гравитации плотность тензора Круткова возникает из уравнений (5.19) и (5.20). Плотность тензора в (13.7) справа состоит из двух частей: в первую часть входят первые три члена, дивергенция от которых равна нулю на основании уравнений (13.5) и (13.6), во вторую часть входит плотность тензора Круткова, дивергенция от которого равна нулю тождественно. Именно поэтому плотность тензора Круткова сама не отражает движение материи, но входит в уравнение гравитации в определенном конкретном виде. Таким образом, фактически только первая часть от плотности тензора и будет определять гравитационный поток в волновой зоне. Именно с этой частью мы и будем работать, а поток определяемый ею обозначим через J^i.

Хорошо известное выражение Эйнштейна для потока гравитационного излучения при массе гравитона равной нулю следует из J^i, если ее вычислить в волновой зоне на решении уравнения

$$\gamma_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\phi^{\varepsilon\lambda} = 0\,, \qquad (13.8)$$

которое получают, используя обычную теорию возмущений. Следуя этой процедуре в РТГ для нахождения гравитационного потока излучения необходимо было бы вычислять величину

J^i на решении волнового уравнения

$$\gamma_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\phi^{\varepsilon\lambda} + m^2\phi^{\varepsilon\lambda} = 0\,, \tag{13.9}$$

которое следовало бы согласно обычной теории возмущений. Но правильно ли его в этом случае использовать?

Согласно волновому уравнению (13.9), гравитационная волна из-за наличия перед вторыми производными метрического тензора $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского распространяется именно в этом пространстве. Но в действительности это не так даже в линейном приближении, поскольку из-за действия гравитационного поля метрический тензор $g_{\mu\nu}$ эффективного риманова пространства равен

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \phi_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\phi\gamma_{\mu\nu}, \quad \phi = \phi_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}, \tag{13.10}$$

а поэтому движение гравитационной волны происходит в римановом пространстве, скалярная кривизна которого

$$R = \frac{1}{2}m^2\phi.$$

Это означает, что движение гравитационной волны в волновой зоне следует не волновому уравнению (13.9) пространства Минковского, а волновому уравнению в римановом пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu\phi^{\varepsilon\lambda} + m^2\phi^{\varepsilon\lambda} = 0\,. \tag{13.11}$$

В этом уравнении учтены изменения метрики из-за действия гравитационного поля. *Учет поправочных членов, линейных по полю, перед вторыми производными невозможно получить, следуя обычной теории возмущений. Но именно учет таких членов, как это будет видно в дальнейшем, и позволяет исключить возможность излучения с отрицательной энергией, что обычно имеет место в линейной теории тензорного поля с массой покоя гравитона.*

Относительно теории возмущений в работе[46] было показано, что уже второе приближение может *"произвольно возрастать в противоположность предположению, сделанному в апроксимационной схеме."* ... *"Таким образом, во втором приближении g_{ik} содержит, кроме периодических членов, также и члены, квадратично возрастающие с x. В последующих приближениях появляются члены с еще более высокими степенями"*. На этом основании Мёллер сделал вывод, что *"«приближение слабого поля» непригодно для исследования таких протяженных решений уравнений поля, как гравитационные волны"*. Именно поэтому при вычислении гравитационного потока излучения необходимо осторожно пользоваться обычной теорией возмущений, особенно в том случае, когда необходимо учесть влияние даже слабого гравитационного поля на изменение метрики пространства.

На основании всего вышеизложенного следует, что *гравитационный поток J^i необходимо вычислять в волновой зоне не на решении уравнения* (13.9), *которое следует из теории возмущений, а на решении волнового уравнения* (13.11), *в котором учитывается влияние гравитационного поля на распространение волны.* В случае отсутствия массы покоя гравитона использование уравнения (13.11) вместо уравнения (13.9) приводит к тому же результату, что и применение уравнения (13.9).

Таким образом, плотность потока J^i, вычисленная в волновой зоне на решении уравнения (13.11), равна

$$16\pi J^i = -\phi_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta\phi^{0i} + \frac{1}{2}\phi\gamma_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta\phi^{0i} - 16\pi g t_g^{0i}\,. \quad (13.12)$$

Отсюда полный поток гравитационного излучения

$$J = -\oint\limits_{s\to\infty}\left\{-g t_g^{0i} - \frac{1}{16\pi}\phi_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta\phi^{0i} + \frac{1}{32\pi}\phi\gamma_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta\phi^{0i}\right\}d\sigma_i\,. \quad (13.13)$$

[46] *Мёллер X.* Сб. «Новейшие проблемы гравитации». М.: Изд-во иностр. л-ры. 1961. С. 65–84; *Møller C.* «Max Planck Festschrift». Berlin, 1958. S. 139–153.

Удерживая справа в (13.13) только квадратичные члены по полю, находим из (13.2) вклад в плотность потока от первого члена

$$-gt_g^{0i} = \frac{1}{32\pi}\left\{\gamma^{0\alpha}\gamma^{i\beta}\left(\partial_\alpha\phi_\tau^\nu\partial_\beta\phi_\nu^\tau - \frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\right)\right\}. \quad (13.14)$$

Вклад в плотность потока от второго члена на основании (5.20) равен нулю, вклад от третьего члена равен

$$-\frac{1}{32\pi}m^2\phi\phi^{0i} = -\frac{1}{16\pi}R\phi^{0i}. \quad (13.15)$$

Таким образом, суммарная плотность гравитационного потока излучения будет определяться величиной [15, 16, 39]:

$$\frac{1}{32\pi}\left[\gamma^{0\alpha}\gamma^{i\beta}\left(\partial_\alpha\phi_\tau^\nu\partial_\beta\phi_\nu^\tau - \frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\right) - m^2\phi\phi^{0i}\right], \quad (13.16)$$

которая как показано в [Там же] приведет к положительно-определенному потоку гравитационной энергии

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\omega_{\min}}^{\infty} d\omega\,\omega^2 q\left\{|T_2^1|^2 + \frac{1}{4}|T_1^1 - T_2^2|^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(mc)^2}{\omega^2}(|T_3^1|^2 + |T_3^2|^2) + \frac{3(mc)^4}{4\omega^4}|T_3^3|^2\right\}, \quad (13.17)$$

здесь $q = [1 - (mc)^2/\omega^2]^{1/2}$.

14. Рождение реликтового гравитационного фона в радиационной фазе развития Вселенной

В работах[47] подробно исследовался вопрос о возможности рождения гравитонов во Вселенной. В работе Зельдовича была получена формула для скорости рождения гравитонов в однородной и изотропной Вселенной

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{d}{dt}(\sqrt{-g}\,n_g) = \frac{1}{288\pi}R^2 \tag{14.1}$$

в предположении, что

$$\frac{R^2}{R_{\rho\lambda\mu\nu}R^{\rho\lambda\mu\nu}} \ll 1\,, \tag{14.2}$$

где R – скалярная кривизна, $R_{\rho\lambda\mu\nu}$ – тензор кривизны Римана.

В горячей Вселенной для радиационно-доминантной стадии развития имеет место уравнение состояния

$$p = \frac{1}{3}\rho c^2\,. \tag{14.3}$$

Но, поскольку на этой стадии развития Вселенной, согласно общей теории относительности (ОТО), скалярная кривизна R точно равна нулю, авторы вышеназванных работ пришли к выводу, что рождения гравитонов в горячей однородной и изотропной Вселенной не происходит. В работе Грищука было также обращено внимание на то, что рождение гравитонов, по-видимому, запрещает изотропные сингулярности, вблизи которых имеет место уравнение состояния

$$p > \frac{1}{3}\rho c^2\,. \tag{14.4}$$

[47] *Грищук Л. П.* // ЖЭТФ, 1974. Т. 67, вып. 3. С. 825–838; *Зельдович Я.Б., Старобинский А. А.* // Письма в ЖЭТФ, 1977. Т. 26, вып. 5, С. 373–377.

Этот вывод, очевидно, возник из-за того, что в этом случае скалярная кривизна R становилась бы сколь угодно большой, а поэтому должно было происходить чрезвычайно интенсивное рождение гравитонов, а следовательно, при наличии сингулярности привело бы к противоречию с современными данными по плотности материи во Вселенной.

В релятивистской теории гравитации (РТГ), которая рассматривает гравитационное поле как физическое поле со спином 2 и 0, развивающееся в пространстве Минковского, возникает совершенно другая ситуация: развитие однородной и изотропной Вселенной описывается другими уравнениями [10] (см. (11.101) и (11.102) на с. 129) и, что чрезвычайно важно, здесь отсутствуют сингулярности:

$$\frac{1}{a}\frac{d^2a}{d\tau^2} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) - 2\omega\left(1 - \frac{1}{a^6}\right), \tag{14.5}$$

$$H^2 \equiv \left(\frac{1}{a}\frac{da}{d\tau}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\omega}{a^6}\left(1 - \frac{3a^4}{a^4_{\max}} + 2a^6\right). \tag{14.6}$$

Здесь

$$\omega = \frac{1}{12}\left(\frac{m_g c^2}{\hbar}\right)^2, \quad m_g - \text{масса гравитона}. \tag{14.7}$$

Из этих уравнений следует, что для радиационно-доминантной стадии развития Вселенной в области малых значений масштабного фактора $a(\tau)$ имеет место уравнение (см. (11.108) и (11.109) на с. 135)

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\omega}{a^6}, \quad \text{где } \dot{a} = \frac{da}{d\tau}. \tag{14.8}$$

В ОТО левая часть уравнения (14.8) в радиационно-доминантной области точно равна нулю, а поэтому имеет место стадия Фридмана, когда масштабный фактор $a(\tau)$ изменяется со временем по закону $\sqrt{\tau}$. В РТГ, согласно (14.8), существует в радиационно-доминантной фазе “дофридмановская” стадия развития Вселенной. Скалярная кривизна R для однородной и изотропной Вселенной равна

$$R = -\frac{6}{c^2}\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]. \tag{14.9}$$

На основании (14.8) имеем

$$R = -\frac{1}{2}\left(\frac{m_g c}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{a^6}. \tag{14.10}$$

Из уравнений (14.6) следует, что масштабный фактор $a(\tau)$ не может обращаться в нуль, а его минимальное значение равно

$$a_{\min} = \left(\frac{\rho_{\min}}{2\rho_{\max}}\right)^{1/6}, \tag{14.11}$$

где

$$\rho_{\min} = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{m_g c^2}{\hbar}\right)^2, \tag{14.12}$$

а максимальная плотность вещества в гравитационном поле $\rho_{\max}$ является фактически интегралом движения и теорией не определяется.

На основании (14.10), (14.11) и (14.12) следует, что в момент времени, когда достигается максимальная плотность вещества, скалярная кривизна эффективного риманова пространства принимает значение

$$R = -\frac{16\pi G}{c^2}\rho_{\max}. \tag{14.13}$$

В этот момент времени "постоянная" Хаббла H точно равна нулю. *Мы видим из формулы* (14.13), *что в РТГ в отличие от ОТО скалярная кривизна R в радиационно-доминантной стадии развития Вселенной не обращается в ноль. Более того, она может быть достаточно большой, поскольку определяется максимальной плотностью вещества $\rho_{\max}$ в гравитационном поле.*

Таким образом, согласно РТГ, в радиационно-доминантной фазе развития Вселенной имеется "дофридмановская" стадия, в которой скалярная кривизна R может быть достаточно большой, поскольку она определяется максимальной плотностью вещества $\rho_{\max}$.

Для определения скорости рождения гравитонов мы не можем воспользоваться формулой (14.1), так как она получена в приближении (14.2), которое в нашем случае не выполняется.

Если из соображений размерности предположить, что скорость рождения гравитонов и в общем случае зависит только от величин

$$R^2, \quad R_{\rho\lambda\mu\nu}R^{\rho\lambda\mu\nu}, \tag{14.14}$$

то следует выбрать такой промежуток времени, в течение которого "постоянная" Хаббла достигает максимума, поскольку в дальнейшем уже вскоре наступает фридмановская стадия. Из уравнения (11.108) легко найти, что H достигает максимума в момент времени, когда масштабный фактор $a(\tau)$ равен

$$a(\tau) = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} a_{\min}. \tag{14.15}$$

Используя (14.15), из уравнения (11.108) находим максимальное значение "постоянной" Хаббла:

$$H_{\max} = 3^{-2}(32\pi G\rho_{\max})^{1/2}. \tag{14.16}$$

В момент времени, когда H достигает максимума, скалярная кривизна R равна

$$R = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 16\pi G\frac{\rho_{\max}}{c^2}, \tag{14.17}$$

величина $\ddot{a}/a$ на основании (14.9), (14.17) и (14.16) равна

$$\frac{\ddot{a}}{a} = 3^{-4}\cdot 32\pi G\rho_{\max}. \tag{14.18}$$

Инвариант, полученный путем свертки тензора кривизны, для метрики однородного и изотропного риманова пространства равен

$$R_{\rho\lambda\mu\nu}R^{\rho\lambda\mu\nu} = \frac{12}{c^4}\left[\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4\right]. \tag{14.19}$$

Подставляя в это выражение (14.16) и (14.18), получим

$$R_{\rho\lambda\mu\nu}R^{\rho\lambda\mu\nu} = 8 \times 3^{-7}\left(\frac{32\pi G}{c^2}\rho_{\max}\right)^2 . \tag{14.20}$$

Следует отметить, что “постоянная” Хаббла изменяется от нулевого значения до максимального $H_{\max}$, определяемого формулой (14.16) за весьма малый промежуток времени, равный на основании (14.15) и (11.110) значению

$$\tau = \left(\frac{3}{32\pi G\rho_{\max}}\right)^{1/2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(\sqrt{3/2} + \sqrt{1/2})\right] . \tag{14.21}$$

Если скорость рождения гравитонов определяется величинами (14.14), то за промежуток времени (14.21) может родиться достаточно большое количество гравитонов, если плотность $\rho_{\max}$ будет велика. Но если она будет намного меньше планковской плотности, то это означает, что родившиеся гравитоны сразу становятся свободными, а их энергия в дальнейшем будет уменьшаться из-за красного смещения.

Таким образом, в радиационной фазе развития Вселенной должен возникнуть релятивистский реликтовый гравитационный фон нетеплового происхождения. Наличие гравитационного фона может проявится на поляризации реликтового излучения.

Из соображений размерности плотность квантов гравитационного поля будет пропорциональна величинам

$$cR^2\tau, \quad c\,(R_{\rho\lambda\mu\nu}R^{\rho\lambda\mu\nu})\,\tau\,, \tag{14.22}$$

где величины R^2, $R_{\rho\lambda\mu\nu}R^{\rho\lambda\mu\nu}$, τ заданы выражениями (14.17), (14.20) и (14.21). Из этих формул следует, что скорость рождения гравитонов в горячей радиационно-доминантной фазе развития Вселенной в основном определяется значением максимальной плотности материи $\rho_{\max}$.

С возникновением гравитационной астрономии откроется возможность изучения процессов во время этапа сжатия Вселенной.

15. Некоторые общие физические выводы

На больших расстояниях r от статического сферически-симметричного тела метрические коэффициенты имеют вид

$$U(r) = 1 - \frac{2M}{r}e^{-mr}, \quad V(r) = 1 + \frac{2M}{r}e^{-mr},$$
$$W = r\left(1 + \frac{M}{r}e^{-mr}\right).$$

Система гравитационных уравнений (5.19), (5.20) является гиперболической, причем принцип причинности и обеспечивает существование во всем пространстве пространственноподобной поверхности, которую каждая непространственноподобная кривая в римановом пространстве пересекает только один раз, т. е., иначе говоря, существует глобальная поверхность Коши, на которой и задаются для той или иной задачи начальные физические условия. Р. Пенроузом и С. Хокингом [32] при определенных общих условиях доказаны теоремы о существовании сингулярности в ОТО. На основании уравнений (5.21a) вне вещества для изотропных векторов риманова пространства, в силу условий причинности (6.12a), имеет место неравенство

$$R_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu} \le 0\,. \tag{15.1}$$

Условия вышеупомянутых теорем противоположны неравенству (15.1) и поэтому в РТГ они неприменимы.

В РТГ пространственноподобные события в отсутствие гравитационного поля никогда не могут стать под действием гравитационного поля временеподобными.

На основании принципа причинности эффективное риманово пространство в РТГ будет обладать изотропной и временеподобной геодезической полнотой. Согласно РТГ, инерциальная система координат определяется по распределению вещества и гравитационного поля во Вселенной (принцип Маха).

В ОТО поля инерции и гравитации неразделимы. Эйнштейн об этом писал: *"...Не существует никакого реального разделения на инерцию и гравитацию, поскольку ответ на вопрос о том, находится ли тело в определенный момент исключительно под действием инерции или под комбинированным воздействием инерции и гравитации, зависит от системы координат, т. е. от способа рассмотрения"*[48]. Поля инерции удовлетворяют уравнениям Гильберта-Эйнштейна.

В РТГ гравитационное поле и поля инерции, определяемые метрическим тензором пространства Минковского, разделены, они не имеют ничего общего. Они разной природы. Поля инерции не являются решениями уравнений (5.19), (5.20) РТГ. В РТГ поля инерции задаются метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$, а гравитационное поле $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$ определяется из уравнений гравитации (5.19), (5.20).

Согласно РТГ возможна локализация гравитационной энергии, тогда как в ОТО она невозможна [25, 48].

Следует отметить, что представление о том, что можно произвольно выбирать как геометрию (Г), так и физику (Ф), поскольку якобы только сумма (Г+Ф) является предметом проверки на опыте, не совсем правильно. Выбор псевдоевклидовой геометрии с метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$ продиктован как фундаментальными физическими принципами – интегральными законами сохранения энергии-импульса и момента количества движения, так и другими физическими явлениями. Таким образом, физика (на современном этапе) однозначно определяет структуру геометрии пространства-времени, в которой развиваются все физические поля, в том числе и гравитационное. Универсальное гравитационное поле, согласно РТГ, создает эффективное риманово пространство с простой топологией, при этом пространство Минковского не исчезает, оно проявляется в уравнениях теории и отражает фундаментальный принцип – принцип относительности. Так что, именно физика определяет геометрию, а поэтому произвола в выборе геометрии почти нет.

[48] *Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов. М.: Наука, 1965. Т. I, ст. 33. С. 422.

Представление гравитационного поля как физического поля, обладающего тензором энергии-импульса, коренным образом изменяет общую картину гравитации.

Во-первых, теория гравитации становится в один ряд с другими физическими теориями, в основе которых лежит принцип относительности, т. е. исходное пространство – это пространство Минковского. Отсюда непосредственно следует, что для всех явлений природы, в том числе и гравитационных, имеют место фундаментальные физические законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Поскольку источником гравитационного поля является универсальная величина – сохраняющийся тензор энергии-импульса материи (включая и гравитационное поле), то возникает эффективное риманово пространство-время, которое имеет полевую природу. Так как эффективное риманово пространство-время образуется из-за действия гравитационного поля, то оно автоматически имеет простую топологию и описывается в одной системе координат. РТГ позволила впервые установить связь инерциальной системы координат с распределением вещества во Вселенной. Силы инерции, в отличие от ОТО, не имеют никакого отношения к силам гравитации, так как они разной природы, первые возникают из-за выбора системы координат в пространстве Минковского, тогда как вторые обязаны присутствию вещества. Теория гравитации, как и все другие физические теории, удовлетворяет принципу соответствия.

Во-вторых, полная система уравнений теории гравитации позволяет однозначно определить гравитационные эффекты в Солнечной системе и приводит к другим (качественно отличным от ОТО) предсказаниям как об эволюции объектов больших масс, так и о развитии однородной и изотропной Вселенной. *Все это возникло благодаря фундаментальному свойству гравитационного поля: не только замедлять ход времени, но и останавливать процесс замедления времени, а следовательно, и процесс сжатия вещества. Открылось явление "самоограничения" гравитационного поля.* Именно оно привело к невозможности образования "черных дыр" (объектов, не имеющих материальных границ и “отрезанных” от внешнего мира) и циклическому развитию Вселенной.

Из теории следует, что Вселенная “плоская” и в ней существует большая скрытая масса “темной” материи. Из нее также следует, что Большого взрыва не было, а когда-то (около 10-15 млрд лет) в прошлом во Вселенной было состояние с большой плотностью и высокой температурой, при этом так называемое “расширение” Вселенной, наблюдаемое по красному смещению, связано не с относительным движением вещества, а с изменением гравитационного поля со временем. Вещество покоилось в инерциальной системе отсчета. Пекулярные скорости галактик относительно инерциальной системы координат возникли из-за неоднородности в распределении плотности вещества, которая и привела к собиранию вещества в период, когда Вселенная стала прозрачной.

Универсальные интегральные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения, а также универсальные свойства материи, такие, например, как гравитационные взаимодействия, находят отражение в метрических свойствах пространства-времени. Если первые находят воплощение в псевдоевклидовой геометрии пространства-времени, то вторые – в эффективной римановой геометрии пространства-времени, возникшей из-за присутствия гравитационного поля в пространстве Минковского. В структуру эффективной геометрии можно отнести все, что имеет общий характер для всей материи. Но при этом пространство Минковского обязательно присутствует, что и приводит к интегральным законам сохранения энергии-импульса и момента количества движения, а также обеспечивает соблюдение принципа соответствия при выключении гравитационного поля и других универсальных полей.

В заключение покажем, как можно было бы прийти к уравнениям РТГ непосредственно путем некоторого изменения уравнения гравитационного поля ОТО.

В работе[49] 1917 г. Эйнштейн написал уравнение гравитационного поля с космологической постоянной λ в форме

$$R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = 8\pi\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\Big). \qquad (15.2)$$

Это уравнение не нарушает уравнения вещества

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0\,, \qquad (15.3)$$

которое непосредственно следует из уравнения (15.2)

Но система уравнений (15.2) по-прежнему неполна и она добавляется нековариантными координатными условиями. Система уравнений (15.2) имеет при $\lambda \neq 0$ существенный недостаток, поскольку при отсутствии вещества она не имеет очевидного решения в виде метрики пространства Минковского

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}. \qquad (15.4)$$

Если этот недостаток устранить в уравнении (15.2), введя дополнительный член $\lambda\gamma_{\mu\nu}$, то мы получим уравнение гравитационного поля в виде

$$R_{\mu\nu} - \lambda(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) = 8\pi\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\Big). \qquad (15.5)$$

В этом случае уравнения вещества (15.3) уже не являются следствием уравнений (15.5), и их необходимо добавить к системе уравнений (15.5).

Так, при фиксированном $\gamma_{\mu\nu}$, возникает вместе с уравнением состояния вещества полная система физических уравнений.

Система уравнений (15.3) и (15.5), как показано в разделе 5, эквивалентна системе уравнений

$$R_{\mu\nu} - \lambda(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) = 8\pi\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\Big), \qquad (15.6)$$

$$D_\nu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0\,. \qquad (15.7)$$

[49] *Эйнштейн А.* Собр. науч. трудов. М.: Наука, 1965. Т. I, ст. 44. С. 611.

Чтобы уравнения (15.6) и (15.7) удовлетворялись тождественно при отсутствии вещества и гравитационного поля, естественно положить

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \tilde{\gamma}^{\mu\nu}(x) + \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x), \quad \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x) = \sqrt{-\gamma}\,\phi^{\mu\nu}.$$

Так мы приходим к тензорному гравитационному полю $\phi^{\mu\nu}$, развивающемуся в пространстве Минковского с метрикой $\gamma^{\mu\nu}(x)$. Теперь, если положить $\lambda = m^2/2$, мы придем к системе уравнений РТГ (5.21a), (5.22a). Так раскрывается природа космологического члена λ.

Мы видим, что совершенно простое изменение уравнения Эйнштейна (15.2) оказалось принципиальным, поскольку оно вывело нас из риманова пространства и привело к понятию физического гравитационного поля $\phi^{\mu\nu}$, развивающееся в пространстве Минковского с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$, и в то же время превратило риманово пространство – в эффективное, с простой топологией.

Такой, казалось бы, простой путь, однако принципиально трудно было осуществить, поскольку в силу принципа эквивалентности рассматривалось только риманово пространство. Это было трудно сделать и потому, что метрическое поле пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}(x)$ также считалось гравитационным полем. Не было осознано главное, что СТО – это псевдоевклидова геометрия пространства-времени, а поэтому метрическое поле $\gamma_{\mu\nu}(x)$ не имеет никакого отношения к гравитации. Все эти представления и не позволили осуществить технически простой, а физически принципиальный шаг. Гравитационное поле не рассматривалось как физическое поле, развивающееся в пространстве Минковского.

Приложение А

Установим соотношение

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}}, \tag{A.1}$$

здесь

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \right), \tag{A.2}$$

$$\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \right), \tag{A.3}$$

звездочкой в формуле (A.1) обозначена вариационная производная от плотности лагранжиана по явно входящей в L метрике $\gamma_{\mu\nu}$. После дифференцирования получим

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial^\star L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}, \tag{A.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{\partial^\star L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}}. \tag{A.5}$$

Подставим эти выражения в формулу (A.2):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \right) = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \\
+ \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \right) = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \\
+ \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \right) \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} + \\
+ \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} \right) \right].
\end{gathered} \tag{A.6}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} \right). \tag{A.7}$$

Для этой цели запишем производную $g_{\alpha\beta,\sigma}$ в форме

$$g_{\alpha\beta,\sigma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \Phi_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \Phi_{\lambda\omega} \,, \tag{A.8}$$

отсюда легко найти

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \delta^\rho_\sigma \,. \tag{A.9}$$

Дифференцируя это выражение, имеем

$$\partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} \right) = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \gamma_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \Phi_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \Phi_{\lambda\omega} \,. \tag{A.10}$$

С другой стороны, дифференцируя (A.8) по $\gamma_{\mu\nu}$, имеем

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \gamma_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \Phi_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \Phi_{\lambda\omega} \,. \tag{A.11}$$

Сравнивая (A.10) и (A.11), найдем

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} \right) = 0 \,. \tag{A.12}$$

Учитывая это соотношение, в (A.6) получаем

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \right) \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \,. \tag{A.13}$$

Подставляя (A.9) в (A.13), найдем

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \left[\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \right) \right] \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \,, \tag{A.14}$$

т. е.

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} . \tag{A.15}$$

Аналогично вычисляется

$$\frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}} = \frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\lambda\rho}} \frac{\partial \tilde{g}^{\lambda\rho}}{\partial g_{\alpha\beta}} \,. \tag{A.16}$$

Используя (A.16), выражение (A.15) можно записать в виде

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\lambda\rho}} \frac{\partial \tilde{g}^{\lambda\rho}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \,. \tag{A.17}$$

Приложение Б

Плотность лагранжиана собственно гравитационного поля имеет вид

$$L_g = L_{g0} + L_{gm} \,, \tag{Б.1}$$

$$L_{g0} = -\frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\alpha\beta}\Big(G^{\tau}_{\lambda\alpha}G^{\lambda}_{\tau\beta} - G^{\tau}_{\alpha\beta}G^{\lambda}_{\tau\lambda}\Big) \,, \tag{Б.2}$$

$$L_{gm} = -\frac{m^2}{16\pi}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \sqrt{-g} - \sqrt{-\gamma}\right) . \tag{Б.3}$$

Тензор третьего ранга $G^{\tau}_{\alpha\beta}$ равен

$$G^{\tau}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\tau\lambda}(D_\alpha g_{\beta\lambda} + D_\beta g_{\alpha\lambda} - D_\lambda g_{\alpha\beta}) \,, \tag{Б.4}$$

он выражается через символы Кристоффеля риманова пространства и пространства Минковского:

$$G^{\tau}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} - \gamma^{\tau}_{\alpha\beta} \,. \tag{Б.5}$$

Вычислим вариационную производную от L_g по явно входящей метрике пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\frac{\delta^\star L_{g0}}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L_{g0}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma\left(\frac{\partial L_{g0}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}}\right) . \tag{Б.6}$$

Для этой цели проведем некоторые подготовительные вычисления:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} &= -\frac{\partial\gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}(\gamma^{\lambda\mu}\gamma^{\nu}_{\alpha\beta} + \gamma^{\lambda\nu}\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}) \,, \\
\frac{\partial G^{\lambda}_{\alpha\lambda}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} &= -\frac{\partial\gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}(\gamma^{\lambda\mu}\gamma^{\nu}_{\lambda\alpha} + \gamma^{\lambda\nu}\gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}) \,,
\end{aligned} \tag{Б.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} &= -\frac{\partial\gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} = -\frac{1}{4}\,\big[\gamma^{\lambda\mu}(\delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta} + \delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}) + \\
&+\gamma^{\lambda\nu}(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta} + \delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}) - \gamma^{\lambda\sigma}(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + \delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\mu}_{\beta})\big] \,,
\end{aligned} \tag{Б.8}$$

$$\frac{\partial G^{\lambda}_{\alpha\lambda}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} = -\frac{\partial\gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} = -\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\delta^{\sigma}_{\alpha} \,.$$

Дифференцируя (Б.2), получаем

$$\frac{\partial L_{g0}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\alpha\beta}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial G^{\tau}_{\alpha\lambda}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}G^{\lambda}_{\tau\beta} + G^{\tau}_{\lambda\alpha}\frac{\partial G^{\lambda}_{\tau\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \frac{\partial G^{\tau}_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}G^{\lambda}_{\tau\lambda} - G^{\tau}_{\alpha\beta}\frac{\partial G^{\lambda}_{\tau\lambda}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}\right].$$

Используя в этом равенстве выражения (Б.7), найдем

$$\frac{\partial L_{g0}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\alpha\beta}\Big\{G^{\tau}_{\lambda\alpha}\gamma^{\lambda\mu}\gamma^{\nu}_{\tau\beta} + G^{\tau}_{\lambda\alpha}\gamma^{\lambda\nu}\gamma^{\mu}_{\tau\beta} - \frac{1}{2}G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\mu}\gamma^{\nu}_{\alpha\beta} -$$

$$-\frac{1}{2}G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\nu}\gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}G^{\tau}_{\alpha\beta}\gamma^{\lambda\mu}\gamma^{\nu}_{\tau\lambda} - \frac{1}{2}G^{\tau}_{\alpha\beta}\gamma^{\lambda\nu}\gamma^{\mu}_{\tau\lambda}\Big\} = \frac{1}{32\pi}B^{\mu\nu}. \tag{Б.9}$$

С помощью производных (Б.8) получим

$$\frac{\partial L_{g0}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{1}{32\pi}A^{\sigma\mu\nu}, \tag{Б.10}$$

где

$$A^{\sigma\mu\nu} = \gamma^{\tau\mu}(G^{\sigma}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\nu\beta} + G^{\nu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\sigma\nu}) -$$

$$-\gamma^{\mu\nu}G^{\sigma}_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta} + \gamma^{\tau\nu}(G^{\sigma}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\mu\beta} + G^{\mu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\sigma\mu}) +$$

$$+\gamma^{\tau\sigma}(G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\mu\nu} - G^{\mu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\nu\beta} - G^{\nu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\mu\beta}). \tag{Б.10$'$}$$

Плотность тензора $A^{\sigma\mu\nu}$ симметрична по индексам μ и ν. Обычная производная от этой плотности может быть представлена в форме

$$\partial_\sigma A^{\sigma\mu\nu} = D_\sigma A^{\sigma\mu\nu} - \gamma^{\mu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\rho\nu} - \gamma^{\nu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\mu\rho}.$$

Подставляя в (Б.6) выражения (Б.9) и (Б.10), найдем

$$\frac{\delta^\star L_{g0}}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{32\pi}B^{\mu\nu} - \frac{1}{32\pi}D_\sigma A^{\sigma\mu\nu} + \frac{1}{32\pi}\gamma^{\mu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\rho\nu} + \frac{1}{32\pi}\gamma^{\nu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\mu\rho}. \tag{Б.11}$$

Запишем плотность тензора $A^{\sigma\rho\nu}$ в форме

$$A^{\sigma\rho\nu} = (G^{\sigma}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\nu\beta} - G^{\rho}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\nu\beta}) + (G^{\nu}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^{\nu}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\rho\beta}) -$$

$$-(G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\sigma\nu} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\rho\nu}) + G^{\sigma}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\rho\beta} + G^{\rho}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\sigma\beta} -$$

$$-G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\sigma\rho} - G^{\sigma}_{\alpha\beta}\gamma^{\rho\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta},$$

в скобках образованы антисимметричные члены по индексам σ и ρ. Такая запись облегчает нахождение выражения для величины $\gamma^{\mu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\rho\nu}$, поскольку при этом автоматически исчезают члены, антисимметричные по индексам σ и ρ,

$$\gamma^{\mu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\rho\nu} = 2G^{\sigma}_{\tau\beta}\gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\rho\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\sigma\rho} - G^{\sigma}_{\alpha\beta}\gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\gamma^{\nu\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta}. \tag{Б.12}$$

Аналогично представляя $A^{\sigma\mu\rho}$ в виде

$$A^{\sigma\mu\rho} = (G^{\sigma}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\mu\beta} - G^{\rho}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\mu\beta}) + (G^{\mu}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^{\mu}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\rho\beta}) +$$

$$+(G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\mu\rho} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\sigma\mu}) + G^{\sigma}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\rho\beta} + G^{\rho}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\sigma\beta} -$$

$$-G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\sigma\rho} - G^{\sigma}_{\alpha\beta}\gamma^{\mu\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta},$$

где в скобках опять образованы антисимметричные члены по индексам σ и ρ, получим

$$\gamma^{\nu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\mu\rho} = 2G^{\sigma}_{\tau\beta}\gamma^{\nu}_{\sigma\rho}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\rho\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\nu}_{\sigma\rho}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\sigma\rho} - G^{\sigma}_{\alpha\beta}\gamma^{\nu}_{\sigma\rho}\gamma^{\mu\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta}. \tag{Б.13}$$

Суммируя (Б.12) и (Б.13), легко убедиться в следующем равенстве:

$$\gamma^{\mu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\rho\nu} + \gamma^{\nu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\mu\rho} = -B^{\mu\nu}. \tag{Б.14}$$

С учетом этого равенства выражение (Б.11) запишем в форме

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{32\pi}D_{\sigma}A^{\sigma\mu\nu}. \tag{Б.15}$$

Учитывая равенства

$$G^{\lambda}_{\tau\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}D_{\tau}g_{\lambda\rho}, \; D_{\tau}\sqrt{-g} = \sqrt{-g}G^{\lambda}_{\tau\lambda},$$

найдем

$$G^{\sigma}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\nu\beta} + G^{\nu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\sigma\nu} = -D_\tau\tilde{g}^{\nu\sigma},$$

$$G^{\sigma}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\mu\beta} + G^{\mu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\sigma\mu} = -D_\tau\tilde{g}^{\mu\sigma}, \qquad (Б.16)$$

$$G^{\nu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\mu\beta} + G^{\mu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\nu\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\mu\nu} = -D_\tau\tilde{g}^{\mu\nu}.$$

Подставляя эти выражения в (Б. 10′), получаем

$$A^{\sigma\mu\nu} = \gamma^{\tau\sigma}D_\tau\tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}D_\tau\tilde{g}^{\tau\sigma} - \gamma^{\tau\mu}D_\tau\tilde{g}^{\nu\sigma} - \gamma^{\tau\nu}D_\tau\tilde{g}^{\mu\sigma}.$$

Используя это выражение в (Б.15), найдем

$$\frac{\delta^\star L_{g0}}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{32\pi}J^{\mu\nu}, \qquad (Б.17)$$

где

$$J^{\mu\nu} = -D_\sigma D_\tau\left(\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\tau\sigma} - \gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\nu\sigma} - \gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\mu\sigma}\right).$$

На основании (Б.3) имеем

$$\frac{\delta^\star L_{gm}}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = -\frac{m^2}{32\pi}\left(\tilde{g}^{\mu\nu} - \tilde{\gamma}^{\mu\nu}\right) = -\frac{m^2}{32\pi}\tilde{\Phi}^{\mu\nu}. \qquad (Б.18)$$

Таким образом, учитывая (Б.1) и используя (Б.17) и (Б.18), находим

$$\frac{\delta^\star L_g}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{32\pi}\left(J^{\mu\nu} - m^2\tilde{\Phi}^{\mu\nu}\right), \qquad (Б.19)$$

а следовательно,

$$-2\frac{\delta^\star L_g}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi}\left(-J^{\mu\nu} + m^2\tilde{\Phi}^{\mu\nu}\right). \qquad (Б.20)$$

$J^{\mu\nu}$ – есть частная разновидность тензора Круткова, обладающего свойством

$$D_\nu J^{\mu\nu} \equiv 0, \quad D_\mu J^{\mu\nu} \equiv 0.$$

Приложение Б*

В данном приложении, используя выражения (Б.2) и (Б.3) для плотности лагранжиана L_{g0} и L_{gm}, мы установим следующие равенства:

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{16\pi} R_{\alpha\beta}, \quad \frac{\delta L_{gm}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{m^2}{32\pi}(g_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}), \qquad (\text{Б}^*.1)$$

где тензоры $(\delta L_{g0})/(\delta \tilde{g}^{\alpha\beta})$, $(\delta L_{gm})/(\delta \tilde{g}^{\alpha\beta})$ по определению равны

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{\partial L_{g0}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \frac{\partial L_{g0}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}_{,\sigma}}, \quad \frac{\delta L_{gm}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{\partial L_{gm}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \frac{\partial L_{gm}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}_{,\sigma}}. \qquad (\text{Б}^*.2)$$

Тензорные соотношения (Б*.1) проще всего установить в локальной римановой системе координат, где производные от компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ по координатам равны нулю, а следовательно, равны нулю и символы Кристоффеля $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$.

На основании формулы

$$\frac{\partial \Gamma^\tau_{\lambda\alpha}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\left(g^{\mu\tau}\Gamma^\nu_{\alpha\lambda} + g^{\nu\tau}\Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\right). \qquad (\text{Б}^*.3)$$

легко установить, что в указанной системе координат имеет место равенство

$$\frac{\partial L_{g0}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right) \times$$
$$\times \left(\gamma^\tau_{\lambda\alpha}\gamma^\lambda_{\tau\beta} - \gamma^\tau_{\alpha\beta}\gamma^\lambda_{\tau\lambda}\right). \qquad (\text{Б}^*.4)$$

Здесь $\gamma^\lambda_{\tau\beta}$ – символы Кристоффеля пространства Минковского. Используя выражение

$$\frac{\partial \Gamma^\tau_{\alpha\lambda}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{1}{4}\{g^{\tau\mu}(\delta^\nu_\alpha\delta^\sigma_\lambda + \delta^\nu_\lambda\delta^\sigma_\alpha) + g^{\tau\nu}(\delta^\mu_\alpha\delta^\sigma_\lambda +$$
$$+\delta^\mu_\lambda\delta^\sigma_\alpha) - g^{\tau\sigma}(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\lambda + \delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\alpha)\}, \qquad (\text{Б}^*.5)$$

получим

$$-\frac{\partial L_{g0}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\Big[(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})(\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}) - \\ - (g^{\alpha\mu}g^{\sigma\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\sigma})(\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} - \gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda})\Big]. \qquad (Б^*.6)$$

Отсюда в локальной римановой системе координат находим

$$-\partial_\sigma \frac{\partial L_{g0}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right) \times \\ \times \left[(\partial_\sigma \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}) - (\partial_\sigma \gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda})\right]. \qquad (Б^*.7)$$

На основании (Б*.4) и (Б*.7) в локальной римановой системе координат тензор (Б*.2) равен

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\partial L_{g0}}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \frac{\partial L_{g0}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\Big(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - \\ -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\Big)\Big(\partial_\sigma \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} - R_{\alpha\beta}(\gamma)\Big). \qquad (Б^*.8)$$

В локальной римановой системе координат тензор кривизны риманова пространства второго ранга $R_{\alpha\beta}(g)$ имеет вид

$$R_{\alpha\beta}(g) = \partial_\sigma \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}. \qquad (Б^*.9)$$

В выражении (Б*.8) тензор второго ранга $R_{\alpha\beta}(\gamma)$ равен

$$R_{\alpha\beta}(\gamma) = \partial_\sigma \gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} + \gamma^{\tau}_{\alpha\beta}\gamma^{\lambda}_{\tau\lambda} - \gamma^{\tau}_{\lambda\alpha}\gamma^{\lambda}_{\tau\beta}.$$

В пространстве Минковского с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$ и символами Кристоффеля $\gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ тензор $R_{\alpha\beta}(\gamma)$ равен нулю. Учитывая (Б*.9), а также равенство тензора $R_{\alpha\beta}(\gamma)$ нулю, тензорное соотношение (Б*.8) принимает вид

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right). \qquad (Б^*.10)$$

Такое равенство впервые установил Розен [41].

Равенство (Б*.10) установлено в локальной римановой системе координат, но в силу тензорного характера оно справедливо в любой системе координат. Используя соотношение

$$dg = -g g_{\alpha\beta} dg^{\alpha\beta}, \tag{Б*.11}$$

находим

$$\frac{\partial g}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}} = g\tilde{g}_{\alpha\beta}. \tag{Б*.12}$$

На основании равенства

$$\tilde{g}^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta^\mu_\nu \sqrt{-g} \tag{Б*.13}$$

легко получить следующее соотношение:

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{-\frac{1}{2}(g_{\lambda\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\lambda\beta}g_{\nu\alpha}) + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g_{\nu\lambda}\right\}. \tag{Б*.14}$$

Поскольку на основании приложения А имеет место равенство

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{\delta L_{g0}}{\delta g_{\lambda\nu}} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}, \tag{Б*.15}$$

то, используя выражения (Б*.10) и (Б*.14), находим

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{16\pi} R_{\alpha\beta}. \tag{Б*.16}$$

Аналогично имеем

$$\frac{\delta L_{gm}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{\partial L_{gm}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{m^2}{32\pi}(g_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}). \tag{Б*.17}$$

Складывая выражения (Б*.16) и (Б*.17), получим

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{16\pi} R_{\alpha\beta} + \frac{m^2}{32\pi}(g_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}). \tag{Б*.18}$$

Нетрудно получить и следующее соотношение:

$$\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{\delta L_M}{\delta g_{\lambda\nu}} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2} T^{\lambda\nu} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-g}}\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T\right). \tag{Б*.19}$$

здесь $T^{\lambda\nu} = -2[(\delta L_M)/(\delta g_{\lambda\nu})]$ – плотность тензора энергии-импульса вещества в эффективном римановом пространстве.
В заключение приведем соотношения

$$\begin{gathered} D_\nu\sqrt{-g} = \partial_\nu\sqrt{-\gamma}\,(\sqrt{g/\gamma}) = \sqrt{-g}\,G^\lambda_{\nu\lambda}\,, \\ \partial_\nu\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\,\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}, \quad \partial_\nu\sqrt{-\gamma} = \sqrt{-\gamma}\,\gamma^\lambda_{\nu\lambda}\,, \end{gathered} \tag{Б*.20}$$

которые используются при получении равенства (5.15).

Приложение В

Для любой заданной плотности лагранжиана L, при бесконечно малом изменении координат, вариация действия

$$S = \int L d^4x$$

будет равна нулю. Вычислим вариацию действия от плотности лагранжиана L_M

$$S_M = \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A) d^4x$$

вещества и установим сильное тождество. При преобразовании координат

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \,, \tag{B.1}$$

где $\xi^{\mu}(x)$ – бесконечно малый четырехвектор смещения, вариация действия при координатном преобразовании равна

$$\delta_c S_M = \int d^4x \Big(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta_L \tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} \delta_L \Phi_A + \text{div} \Big) = 0 \,. \tag{B.2}$$

В этом выражении div обозначает дивергенциальные члены, которые несущественны для наших целей.

Эйлерова вариация определена как обычно:

$$\frac{\delta L}{\delta \Phi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \Phi} - \partial_{\mu} \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\Phi)} + \partial_{\mu}\partial_{\nu} \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\Phi)} \,.$$

Вариации Ли $\delta_L \tilde{g}^{\mu\nu}$, $\delta_L \Phi_A$ при изменении координат легко вычисляются, если использовать закон преобразования величин $g^{\mu\nu}, \Phi_A$:

$$\begin{aligned} \delta_L \tilde{g}^{\mu\nu} &= \tilde{g}^{\lambda\mu} D_{\lambda} \xi^{\nu} + \tilde{g}^{\lambda\nu} D_{\lambda} \xi^{\mu} - D_{\lambda}(\xi^{\lambda} \tilde{g}^{\mu\nu}), \\ \delta_L \Phi_A &= -\xi^{\lambda} D_{\lambda} \Phi_A + F_{A;\sigma}^{B;\lambda} \Phi_B D_{\lambda} \xi^{\sigma}, \end{aligned} \tag{B.3}$$

D_λ – ковариантные производные в пространстве Минковского. Подставляя эти выражения в (B.2) и интегрируя по частям, получаем

$$\delta S_M = \int d^4x \Big\{ -\xi^\lambda \Big[D_\alpha\Big(2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\lambda\nu}} \tilde{g}^{\alpha\nu} \Big) - D_\lambda \Big(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \Big) \tilde{g}^{\alpha\beta} + $$
$$+ D_\sigma \Big(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F^{B;\sigma}_{A;\lambda} \Phi_B \Big) + \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_\lambda \Phi_A \Big] + \mathrm{div} \Big\} = 0 . \qquad (B.4)$$

В силу произвольности вектора ξ^λ из этого равенства находим сильное тождество, справедливое независимо от выполнения уравнений движения для полей. Оно имеет вид

$$D_\alpha\Big(2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\lambda\nu}} \tilde{g}^{\alpha\nu} \Big) - D_\lambda \Big(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \Big) \tilde{g}^{\alpha\beta} =$$
$$= -D_\sigma \Big(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F^{B;\sigma}_{A;\lambda} \Phi_B \Big) - \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_\lambda \Phi_A . \qquad (B.5)$$

Введем обозначения

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad T^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta} ,$$
$$T = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}, \quad \tilde{T}_{\mu\nu} = 2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}, \qquad (B.6)$$
$$\tilde{T}^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}_{\mu\nu}} = \tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{g}^{\nu\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad \tilde{T} = \tilde{T}^{\alpha\beta} \tilde{g}_{\alpha\beta} .$$

Учитывая эти обозначения, левую часть тождества (B.5) можно записать в виде

$$D_\alpha(\tilde{T}_{\lambda\nu} \tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} D_\lambda \tilde{T}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha(\tilde{T}_{\lambda\nu} \tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\lambda \tilde{T}_{\alpha\beta} .$$

Правая часть этого равенства легко приводится к форме

$$\partial_\alpha(\tilde{T}_{\lambda\nu} \tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\lambda \tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\lambda\nu} \nabla_\alpha \Big(\tilde{T}^{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\nu} \tilde{T} \Big) , \qquad (B.7)$$

здесь ∇_α – ковариантная производная в римановом пространстве. Выразим теперь выражение под знаком ковариантной производной ∇_α через плотность тензора $T^{\alpha\nu}$. Для этой цели воспользуемся формулой (А.16):

$$\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}}, \tag{B.8}$$

где

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} g^{\alpha\beta}. \tag{B.9}$$

Используя соотношения

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\sigma} = \delta^\alpha_\sigma,$$

найдем

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}(g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}). \tag{B.10}$$

По правилу дифференцирования определителей находим

$$dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}, \tag{B.11}$$

откуда имеем

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}. \tag{B.12}$$

Подставляя выражения (В.10) и (В.12) в (В.9), получим

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\left[g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\right]. \tag{B.13}$$

Используя это соотношение в (В.8), находим

$$\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - \frac{1}{2}\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}\right). \tag{B.14}$$

Учитывая обозначения (В.6), это выражение можно записать в виде

$$\sqrt{-g} T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{T}. \tag{B.15}$$

На основании равенства (B.15) сильное тождество (B.5) с учетом (B.7) принимает вид

$$g_{\lambda\nu}\nabla_\alpha T^{\alpha\nu} = -D_\sigma\left(\frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A}F^{B;\sigma}_{A;\lambda}\Phi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A}D_\lambda\Phi_A,$$

или (B.16)

$$\nabla_\alpha T^\alpha_\lambda = -D_\sigma\left(\frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A}F^{B;\sigma}_{A;\lambda}\Phi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta\Phi_A}D_\lambda\Phi_A\,.$$

Приложение Г

Тензор кривизны второго ранга $R_{\mu\nu}$ можно записать в форме

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\tilde{g}^{\alpha\beta}(\tilde{g}_{\mu\kappa}\tilde{g}_{\nu\rho} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\kappa\rho})D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\kappa\rho} -$$
$$-\tilde{g}_{\nu\rho}D_\kappa D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho} - \tilde{g}_{\mu\kappa}D_\nu D_\rho \tilde{g}^{\kappa\rho}] + \frac{1}{2}\tilde{g}_{\nu\omega}\tilde{g}_{\rho\tau}D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa \tilde{g}^{\omega\tau} +$$
$$+\frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\omega}\tilde{g}_{\rho\tau}D_\nu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa \tilde{g}^{\omega\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\omega}\tilde{g}_{\nu\rho}D_\tau \tilde{g}^{\omega\kappa}D_\kappa \tilde{g}^{\rho\tau} -$$
$$-\frac{1}{4}(\tilde{g}_{\omega\rho}\tilde{g}_{\kappa\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\omega\tau}\tilde{g}_{\kappa\rho})D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\nu \tilde{g}^{\omega\tau} -$$
$$-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\rho\tau}(\tilde{g}_{\mu\kappa}\tilde{g}_{\nu\omega} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\kappa\omega})D_\alpha \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\beta \tilde{g}^{\omega\tau}. \quad (\text{Г.1})$$

Поднимая индексы путем умножения на $g^{\epsilon\mu}g^{\lambda\nu}$ и учитывая уравнение

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0\,, \quad (\text{Г.2})$$

получаем

$$-gR^{\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{4}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\kappa\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\kappa\rho} +$$
$$+\frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\epsilon\mu}D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa \tilde{g}^{\lambda\tau} +$$
$$+\frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\lambda\nu}D_\nu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa \tilde{g}^{\epsilon\tau} - \frac{1}{2}D_\tau \tilde{g}^{\epsilon\kappa}D_\kappa \tilde{g}^{\lambda\tau} -$$
$$-\frac{1}{4}(\tilde{g}_{\omega\rho}\tilde{g}_{\kappa\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\omega\tau}\tilde{g}_{\kappa\rho})\tilde{g}^{\epsilon\mu}\tilde{g}^{\lambda\nu}D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\nu \tilde{g}^{\omega\tau} -$$
$$-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha \tilde{g}^{\epsilon\rho}D_\beta \tilde{g}^{\lambda\tau} + \frac{1}{4}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\kappa\omega}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\beta \tilde{g}^{\omega\tau}. \quad (\text{Г.3})$$

Отсюда находим

$$-gR = \frac{1}{2}g_{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\epsilon\lambda} - g_{\kappa\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\kappa\rho} + \frac{1}{2}g_{\rho\tau}D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa \tilde{g}^{\mu\tau} -$$
$$-\frac{1}{4}(\tilde{g}_{\omega\rho}\tilde{g}_{\kappa\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\omega\tau}\tilde{g}_{\kappa\rho})\sqrt{-g}\tilde{g}^{\mu\nu}D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\nu \tilde{g}^{\omega\tau} -$$
$$-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\alpha\beta}g_{\epsilon\lambda}D_\alpha \tilde{g}^{\epsilon\rho}D_\beta \tilde{g}^{\lambda\tau} + \tilde{g}_{\rho\tau}g_{\kappa\omega}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\beta \tilde{g}^{\omega\tau}. \quad (\text{Г.4})$$

С помощью выражений (Г.3) и (Г.4) найдем

$$
\begin{gathered}
-g\left(R^{\epsilon\lambda}-\frac{1}{2}g^{\epsilon\lambda}R\right)= \\
=-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\kappa}\frac{1}{2}\tilde{g}_{\nu\kappa}\tilde{g}_{\tau\sigma}\right)\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}D_\alpha\tilde{g}^{\sigma\tau}D_\beta\tilde{g}^{\nu\kappa}-\right. \\
-\frac{1}{4}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\left(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\kappa}-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\nu\kappa}\tilde{g}_{\tau\sigma}\right)D_\alpha\tilde{g}^{\tau\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\nu\kappa}+ \\
+\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\sigma\tau}D_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\tau}D_\beta\tilde{g}^{\lambda\sigma}-\tilde{g}^{\epsilon\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{g}^{\lambda\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\alpha\tau}- \\
-\tilde{g}^{\lambda\alpha}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{g}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\epsilon\tau}+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{g}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\alpha\tau}+ \\
\left.+D_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\beta}D_\beta\tilde{g}^{\lambda\alpha}-\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\right\}. \qquad (\text{Г}.5)
\end{gathered}
$$

Следует особо подчеркнуть, что при нахождении выражения (Г.5) мы использовали уравнение (Г.2). Подставляя выражение (Г.5) в уравнение (5.19) и записывая полученное уравнение в форме (8.1), найдем выражения для величины $-16\pi g\tau_g^{\epsilon\lambda}$

$$
\begin{gathered}
-16\pi g\tau_g^{\epsilon\lambda}=\frac{1}{2}\left(\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\right)\left(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\mu}-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\tau\sigma}\tilde{g}_{\nu\mu}\right)\times \\
\times D_\alpha\tilde{\Phi}^{\tau\sigma}D_\beta\tilde{\Phi}^{\mu\nu}+\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\epsilon\tau}D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\sigma}-\tilde{g}^{\epsilon\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\lambda\sigma}D_\beta\tilde{\Phi}^{\alpha\tau}- \\
-\tilde{g}^{\lambda\alpha}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\tau}+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\sigma\beta}D_\beta\tilde{\Phi}^{\alpha\tau}+D_\alpha\tilde{\Phi}^{\epsilon\beta}D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\alpha}- \\
-\tilde{\Phi}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}-m^2\left(\sqrt{-g}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}-\sqrt{-\gamma}\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}+\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}\gamma_{\alpha\beta}-\right. \\
\left.-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right). \qquad (\text{Г}.6)
\end{gathered}
$$

Приложение Д

Запишем уравнение (5.20) РТГ

$$D_\sigma \tilde{g}^{\sigma\nu}(y) = \partial_\sigma \tilde{g}^{\sigma\nu}(y) + \gamma^\nu_{\alpha\beta}(y)\tilde{g}^{\alpha\beta}(y) = 0 \qquad (\Sigma)$$

в несколько другой форме. Для этой цели, используя определение для символа Кристоффеля

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(y) = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma}(\partial_\alpha g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta})\,, \qquad (Д.1)$$

найдем

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta}(y) = \sqrt{-g}\big(g^{\nu\sigma} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} g^{\alpha\beta}\partial_\sigma g_{\alpha\beta}\big)\,. \qquad (Д.2)$$

Принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\sigma g_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma\sqrt{-g(y)}\,, \\ \partial_\alpha g^{\alpha\nu} &= -g^{\nu\sigma} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha g_{\sigma\beta} \end{aligned} \qquad (Д.3)$$

перепишем (Д.2) в виде

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(y)\tilde{g}^{\alpha\beta}(y) = -\sqrt{-g}\partial_\sigma g^{\sigma\nu} - g^{\nu\sigma}\partial_\sigma\sqrt{-g} = -\frac{\partial\tilde{g}^{\sigma\nu}}{\partial y^\sigma}\,. \qquad (Д.4)$$

С учетом этого равенства исходное уравнение (Σ) принимает вид

$$(\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(y) - \gamma^\nu_{\alpha\beta}(y))g^{\alpha\beta}(y) = 0\,. \qquad (Д.5)$$

Если от координат "y" перейти к другим криволинейным координатам "z", то символы Кристоффеля принимают вид

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(y) = \frac{\partial y^\lambda}{\partial z^\sigma}\frac{\partial z^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial z^\beta}{\partial y^\nu}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(z) + \frac{\partial^2 z^\sigma}{\partial y^\mu\partial y^\nu}\frac{\partial y^\lambda}{\partial z^\sigma}\,. \qquad (Д.6)$$

Используя это выражение, находим

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(y)g^{\mu\nu}(y) = \frac{\partial y^\lambda}{\partial z^\sigma}\left[\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(z)g^{\alpha\beta}(z) + \frac{\partial^2 z^\sigma}{\partial y^\mu\partial y^\nu}\frac{\partial y^\mu}{\partial z^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial z^\beta}g^{\alpha\beta}(z)\right]. \qquad (Д.7)$$

На основании (Д.4) выражение (Д.7) запишем в форме

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(y)g^{\mu\nu}(y) = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial z^{\mu}}\left(\tilde{g}^{\mu\sigma}\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}\right) +$$
$$+g^{\mu\sigma}\frac{\partial^2 y^{\lambda}}{\partial z^{\mu}\partial z^{\sigma}} + \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}\frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial y^{\mu}\partial y^{\nu}}\frac{\partial y^{\mu}}{\partial z^{\alpha}}\frac{\partial y^{\nu}}{\partial z^{\beta}}g^{\alpha\beta}(z). \quad (Д.8)$$

Продифференцировав равенство

$$\frac{\partial z^{\sigma}}{\partial y^{\mu}}\frac{\partial y^{\mu}}{\partial z^{\alpha}} = \delta^{\sigma}_{\alpha} \quad (Д.9)$$

по переменной z^{β}, получим

$$\frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial y^{\mu}\partial y^{\nu}}\frac{\partial y^{\mu}}{\partial z^{\alpha}}\frac{\partial y^{\nu}}{\partial z^{\beta}} = -\frac{\partial z^{\sigma}}{\partial y^{\mu}}\frac{\partial^2 y^{\mu}}{\partial z^{\alpha}\partial z^{\beta}}. \quad (Д.10)$$

Учитывая это равенство в третьем члене (Д.8), находим

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(y)g^{\mu\nu}(y) = -\frac{1}{\sqrt{-g(z)}}\frac{\partial}{\partial z^{\nu}}\left(\tilde{g}^{\nu\sigma}\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}\right). \quad (Д.11)$$

Подставляя это выражение в (Д.5), получим

$$\Box\, y^{\lambda} = -\gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}(y)g^{\alpha\beta}(y)\,, \quad (Д.12)$$

где через $\Box$ обозначен оператор

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-g(z)}}\frac{\partial}{\partial z^{\nu}}\left(\tilde{g}^{\nu\sigma}\frac{\partial}{\partial z^{\sigma}}\right). \quad (Д.13)$$

Приложение Е

Установим эквивалентность тождества Бьянки тождеству для плотности тензора Круткова.

Скалярная плотность L в релятивистской теории гравитации зависит только от метрических функций $g_{\alpha\beta}(x)$, $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ и их первых частных производных. Здесь $\gamma_{\alpha\beta}$ – метрический тензор пространства Минковского.

В этом случае вариацию Ли можно записать в форме

$$\delta_L L = \left(\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}}\right)\delta_L\gamma_{\mu\nu} + \left(\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}}\right)\delta_L g_{\mu\nu} + \\ +\partial_\sigma\left(\frac{\partial L}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}}\delta_L\gamma_{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\sigma}}\delta_L g_{\mu\nu}\right), \qquad (\text{E.1})$$

здесь

$$\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\sigma\frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\sigma}}. \qquad (\text{E.2})$$

Вариации Ли для $\delta_L g_{\mu\nu}$ и $\delta_L\gamma_{\mu\nu}$ имеют вид

$$\delta_L g_{\alpha\beta} = -g_{\sigma\beta}\partial_\alpha\xi^\sigma - g_{\sigma\alpha}\partial_\beta\xi^\sigma - \xi^\sigma\partial_\sigma g_{\alpha\beta}, \qquad (\text{E.3})$$

$$\delta_L\gamma_{\alpha\beta} = -\gamma_{\sigma\beta}\partial_\alpha\xi^\sigma - \gamma_{\sigma\alpha}\partial_\beta\xi^\sigma - \xi^\sigma\partial_\sigma\gamma_{\alpha\beta}, \qquad (\text{E.4})$$

здесь $\xi^\sigma(x)$ – произвольный инфинитезимальный четырехвектор смещения.

Подставляя (Е.3) и (Е.4) в (Е.1) и учитывая тождество Гильберта

$$\delta_L L \equiv -\partial_\sigma(\xi^\sigma L), \qquad (\text{E.5})$$

получим тождество

$$\left[2\partial_\mu\left(\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}}\gamma_{\nu\sigma}\right) - \frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}}\gamma_{\mu\nu,\sigma} + 2\partial_\mu\left(\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}}g_{\nu\sigma}\right) - \frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}}g_{\mu\nu,\sigma}\right]\xi^\sigma + \\ +\partial_\sigma J^\sigma \equiv 0. \qquad (\text{E.6})$$

Здесь

$$J^\sigma = \xi^\sigma L + \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \delta_L \gamma_{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\sigma}} \delta_L g_{\mu\nu} - \\ -2\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\sigma\nu}} \gamma_{\mu\nu} \xi^\mu - 2\frac{\delta L}{\delta g_{\sigma\nu}} g_{\mu\nu} \xi^\mu , \\ \gamma_{\mu\nu,\sigma} = \partial_\sigma \gamma_{\mu\nu} . \tag{E.7}$$

Поскольку

$$\gamma_{\mu\nu,\sigma} = \gamma^\lambda_{\sigma\mu} \gamma_{\lambda\nu} + \gamma^\lambda_{\sigma\nu} \gamma_{\lambda\mu} , \tag{E.8}$$

$$g_{\mu\nu,\sigma} = \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} g_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} g_{\lambda\mu} , \tag{E.9}$$

где $\gamma^\lambda_{\sigma\mu}$ и $\Gamma^\lambda_{\sigma\mu}$ – символы Кристоффеля пространства Минковского с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$ и риманова пространства с метрикой $g_{\mu\nu}$. Учитывая равенства (Е.8) и (Е.9) в (Е.6), получим

$$\left[D_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} \gamma_{\sigma\nu} \right) + \nabla_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} g_{\sigma\nu} \right) \right] \xi^\sigma + \partial_\sigma J^\sigma \equiv 0 , \tag{E.10}$$

здесь D_μ – ковариантная производная в пространстве Минковского, ∇_μ – ковариантная производная в римановом пространстве.

Поскольку ξ^σ – произвольный вектор, то на основании (Е.10) находим тождества

$$D_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} \gamma_{\sigma\nu} \right) + \nabla_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} g_{\sigma\nu} \right) \equiv 0 , \tag{E.11}$$

$$\partial_\sigma J^\sigma \equiv 0 . \tag{E.12}$$

Выражение (Е.11) является обобщением тождества Гильберта. Тождество (Е.11) справедливо и в случае, когда функция L зависит не только от первых, но и от высших производных. Только в этом случае эйлеровская вариационная производная (Е.2) будет включать и высшие производные. Так, например, если L содержит и вторые производные, то в вариационную производную войдут и члены вида

$$\partial_\sigma \partial_\lambda \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\sigma\lambda}} , \quad g_{\mu\nu,\sigma\lambda} = \partial_\sigma \partial_\lambda g_{\mu\nu} . \tag{E.13}$$

Возьмем скалярную плотность L в виде

$$\tilde{R}(\gamma, g) = \sqrt{-g}\, R(\gamma, g) = -\tilde{g}^{\mu\nu}(G^{\lambda}_{\mu\nu} G^{\sigma}_{\lambda\sigma} - G^{\lambda}_{\mu\sigma} G^{\sigma}_{\nu\lambda}) - \\ -D_{\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu} G^{\sigma}_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma} G^{\nu}_{\mu\sigma}) , \qquad (E.14)$$

здесь

$$G^{\lambda}_{\mu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\lambda\nu}(D_{\mu} g_{\sigma\nu} + D_{\sigma} g_{\nu\mu} - D_{\nu} g_{\mu\sigma}) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} . \qquad (E.15)$$

Легко убедиться, что

$$R_{\mu\nu}(\gamma, g) = R_{\mu\nu}(g) - R_{\mu\nu}(\gamma) , \qquad (E.16)$$

где

$$R_{\mu\nu}(\gamma, g) = D_{\lambda} G^{\lambda}_{\mu\nu} - D_{\mu} G^{\lambda}_{\nu\lambda} + G^{\sigma}_{\mu\nu} G^{\lambda}_{\sigma\lambda} - G^{\sigma}_{\mu\lambda} G^{\lambda}_{\nu\sigma} .$$

Отсюда для плотности скаляра имеем

$$\tilde{R}(\gamma, g) = \tilde{R}(g) - \tilde{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\gamma), \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} . \qquad (E.17)$$

Вариационная производная по $\delta g_{\mu\nu}$ от этого выражения равна плотности тензора Гильберта

$$\frac{\delta \tilde{R}(\gamma, g)}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right) , \qquad (E.18)$$

если учесть после вычисления вариационной производной, что $R_{\mu\nu}(\gamma) \equiv 0$.

Для тензора Гильберта имеет место тождество Бьянки

$$\nabla_{\nu}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right) \equiv 0 . \qquad (E.19)$$

На основании (Е.17) вариационная производная Эйлера по $\delta\gamma_{\mu\nu}$ от величины $\tilde{R}(\gamma, g)$ равна

$$\frac{\delta \tilde{R}(\gamma, g)}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = -\frac{\delta}{\delta \gamma_{\mu\nu}} \left[\tilde{g}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}(\gamma)\right] . \qquad (E.20)$$

Плотность симметричного тензора (Е.20) линейна по $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ и содержит ковариантные производные D_σ, а также тензор Минковского $\gamma^{\mu\nu}$. Но из двух величин $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ и $\gamma^{\mu\nu}$ и ковариантных производных D_σ, учитывая линейность по $\tilde{g}^{\alpha\beta}$, можно построить только плотность тензора вида

$$J^{\mu\nu} = D_\alpha D_\beta \{a\gamma^{\alpha\beta}\tilde{g}^{\mu\nu} + b\gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta} + c\gamma^{\mu\alpha}\tilde{g}^{\nu\beta} + d\gamma^{\nu\alpha}\tilde{g}^{\mu\beta}\}\,, \quad \text{(Е.21)}$$

здесь a, b, c, d – постоянные.

Поскольку на основании (Е.19) в силу тождества (Е.11) должно иметь место тождество

$$D_\nu \frac{\delta \tilde{R}(\gamma, g)}{\delta \gamma_{\mu\nu}} \equiv 0\,, \quad \text{(Е.22)}$$

то плотность тензора $J^{\mu\nu}$ также должна удовлетворять тождествам

$$D_\nu J^{\mu\nu} \equiv 0\,, \quad D_\mu J^{\mu\nu} \equiv 0\,. \quad \text{(Е.23)}$$

Подставляя (Е.21) в первое тождество, из (Е.23) получим

$$d = -a, \quad c = -b\,. \quad \text{(Е.24)}$$

Из свойства симметрии $J^{\mu\nu}$ по индексам μ и ν находим

$$c = d\,. \quad \text{(Е.25)}$$

Учитывая (Е.24) и (Е.25) в (Е.21, (см. также [10]), получим

$$J^{\mu\nu} = aD_\alpha D_\beta \{\gamma^{\mu\alpha}\tilde{g}^{\nu\beta} + \gamma^{\nu\alpha}\tilde{g}^{\mu\beta} - \gamma^{\alpha\beta}\tilde{g}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta}\}\,. \quad \text{(Е.26)}$$

Из выражения (Е.26), возникающего благодаря плотности тензора Гильберта (Е.18), видна особая роль величины $\tilde{g}^{\mu\nu}$ для описания гравитационного поля. Именно отсюда также естественно возникает возможность введения плотности тензорного гравитационного поля $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$в форме

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\phi}^{\mu\nu}\,, \quad \text{(Е.27)}$$

здесь

$$\tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\,\gamma^{\mu\nu}, \quad \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\,\phi^{\mu\nu}.$$

Так например, величина $\phi^{\mu\nu}$ позволяет описывать слабое гравитационное поле статического источника только одной компонентой $\tilde{\phi}^{00}$. Тогда как метрические свойства эффективного риманова пространства характеризуются компонентами g_{00}, g_{11}, g_{22} и g_{33} (см. раздел 9).

Плотность тензора $J^{\mu\nu}$ является частной разновидностью плотности тензора Круткова [25], которая строится из плотности тензора четвертого ранга со свойствами

$$A^{\alpha\mu,\nu\beta} = -A^{\mu\alpha,\nu\beta} = -A^{\alpha\mu,\beta\nu},$$

$$A^{\alpha\mu,\nu\beta} + A^{\alpha\beta,\mu\nu} + A^{\alpha\nu,\beta\mu} = 0,$$

следующим образом

$$K^{\alpha\beta} = \partial_\mu \partial_\nu A^{\alpha\mu,\nu\beta}. \tag{E.28}$$

Отсюда следует

$$\partial_\alpha K^{\alpha\beta} \equiv 0, \quad \partial_\beta K^{\alpha\beta} \equiv 0. \tag{E.29}$$

Мы видим, что между плотностью тензора Гильберта (Е.18) и конкретной плотностью тензора Круткова (Е.26) существует своеобразная связь в форме тождества (Е.11). Отсюда следует, что *тождество Бьянки (Е.19) эквивалентно тождеству (Е.23).*

Возьмем теперь скалярную плотность в форме

$$L_R(\gamma, g) = -\tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu} G^\sigma_{\lambda\sigma} - G^\lambda_{\mu\sigma} G^\sigma_{\lambda\nu}). \tag{E.30}$$

Ее можно на основании (Е.14) и (Е.17) представить в виде

$$L_R(\gamma, g) = \tilde{R}(g) + D_\nu(\tilde{g}^{\mu\nu} G^\sigma_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma} G^\nu_{\mu\sigma}) - \tilde{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\gamma). \tag{E.31}$$

Поскольку вариационная производная Эйлера от второго дивергентного члена равна нулю, находим

$$\frac{\delta L_R(\gamma, g)}{\delta \gamma_{\alpha\beta}} = -\frac{\delta}{\delta \gamma_{\alpha\beta}} \left[g^{\tilde{\mu\nu}} R_{\mu\nu}(\gamma) \right], \tag{E.32}$$

что совпадает с (Е.20), а следовательно, получим

$$\frac{\delta L_R(\gamma, g)}{\delta \gamma_{\alpha\beta}} = J^{\alpha\beta}\,. \tag{Е.33}$$

Тождество

$$D_\alpha J^{\alpha\beta} \equiv 0 \tag{Е.34}$$

мы назовем тождеством Папапетру [50].

В приложении (Б) выражение (Е.26) для плотности тензора $J^{\mu\nu}$ было получено непосредственным вычислением вариационной производной от L_R.

16. Элементы тензорного анализа и римановой геометрии

Пусть в n-мерном пространстве задана некоторая координатная система $x^\alpha, i = 1, ...n$. Вместо этой системы можно выбрать и другую, определяемую выражением

$$x'^\alpha = f(x^\alpha), \quad \alpha = 1, ...n\,. \tag{16.1}$$

Эти функции должны быть непрерывными и иметь непрерывные частные производные порядка N. Если якобиан преобразования в каждой точке

$$J = \det \left| \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right| \tag{16.2}$$

отличен от нуля, то при этом условии переменные x'^α будут независимыми, а следовательно, первоначальные переменные x^α можно однозначно выразить через новые x'^α:

$$x^\alpha = \varphi(x'^\alpha)\,. \tag{16.3}$$

Физические величины не должны зависеть от выбора системы координат, а поэтому они должны выражаться через геометрические объекты. Простейшим геометрическим объектом является скаляр, который преобразуется при переходе к новым координатам следующим образом:

$$\Phi'(x') = \Phi\big(x(x')\big)\,. \tag{16.4}$$

Градиент от скалярной функции $\Phi(x)$ преобразуется по правилу дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial \Phi'(x')}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\,. \tag{16.5}$$

Здесь по одинаковым индексам β идет суммирование. Система функций, преобразующаяся при координатных преобразованиях по правилу (16.5), получила название ковариантного вектора

$$A'_\alpha(x') = A_\beta(x)\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}. \tag{16.6}$$

Соответственно величина $B_{\mu\nu}$ – ковариантный тензор второго ранга, преобразующийся по правилу

$$B'_{\mu\nu}(x') = B_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \text{ и т. д.} \tag{16.7}$$

Перейдем к другой группе геометрических объектов. Рассмотрим преобразование дифференциала координат

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}dx^\alpha. \tag{16.8}$$

Система функций, преобразующаяся при координатных преобразованиях по правилу (16.8), получила название контравариантного вектора

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}A^\alpha(x), \tag{16.9}$$

соответственно величина $B^{\mu\nu}$ – контравариантный тензор второго ранга, преобразующийся по правилу

$$B'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}B^{\alpha\beta}(x) \text{ и т. д.} \tag{16.10}$$

Выражения (16.6), (16.7), (16.9) и (16.10) позволяют записать закон преобразования тензора любого вида. Например,

$$B'^\mu_\nu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}B^\alpha_\beta(x). \tag{16.11}$$

Из трансформационных свойств тензора следует, что если все его компоненты равны нулю в одной системе координат, то они равны нулю и в другой системе координат. Легко убедиться, что преобразования ковариантных и контравариантных величин обладают групповым свойством. Например:

$$\begin{gathered} A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}A^\alpha(x), \quad A''^\nu(x'') = \frac{\partial x''^\nu}{\partial x'^\mu}A'^\mu(x'), \\ A''^\nu(x'') = \frac{\partial x''^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}A^\alpha(x) = \frac{\partial x''^\nu}{\partial x^\alpha}A^\alpha(x). \end{gathered} \tag{16.12}$$

Перейдем теперь к тензорной алгебре. Здесь возможны четыре операции: сложение, умножение, свертывание и подстановка индексов.

Сложение и вычитание тензоров

Если нам даны тензоры одинаковой структуры, т. е. имеющие одинаковое число контравариантных индексов и одинаковое число ковариантных индексов, например,

$$A^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}, \quad B^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma},$$

то можно образовать тензор

$$C^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma} = A^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma} + B^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}. \tag{16.13}$$

Умножение тензоров

Тензоры можно перемножить независимо от их строения. Например,

$$C^{\alpha\beta\lambda}_{\mu\nu\sigma\rho} = A^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma} B^{\lambda}_{\rho}. \tag{16.14}$$

При этом необходимо соблюдать как порядок множителей, так и порядок индексов.

Операция свертывания тензоров

С помощью символа Кронекера

$$\delta^{\mu}_{\nu} = \begin{cases} 0 & \text{at} \quad \mu \neq \nu \\ 1 & \text{at} \quad \mu = \nu, \end{cases} \tag{16.15}$$

который является тензором, можно осуществить операцию свертывания индексов, например,

$$A^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \cdot \delta^{\nu}_{\sigma} = A^{\alpha\beta}_{\mu\sigma}. \tag{16.16}$$

Здесь слева по одинаковым индексам идет суммирование.

Операция подстановки индексов

Посредством подстановки индексов у тензора мы получим другой тензор, если исходный тензор не был симметричен по этим индексам, например,

$$B^{\mu\nu}_{\lambda\sigma} = A^{\mu\nu}_{\sigma\lambda}\,. \tag{16.17}$$

С помощью этой операции, а также операции сложения, можно построить тензор, симметричный по нескольким индексам:

$$A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})\,. \tag{16.18}$$

Можно осуществить и построение тензора, антисимметричного по нескольким индексам:

$$A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})\,. \tag{16.19}$$

Такая операция называется альтернированием.

Риманова геометрия

Римановым пространством V_n называется вещественное дифференцируемое многообразие, в каждой точке которого задано поле тензора

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x^1, \ldots, x^n) \tag{16.20}$$

два раза ковариантного, симметричного и невырожденного

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad g = \det|g_{\mu\nu}| \neq 0\,. \tag{16.21}$$

Тензор $g_{\mu\nu}$ называется метрическим тензором риманова пространства. Функции $g_{\mu\nu}$ непрерывны и дифференцируемы по всем переменным $x^1, \ldots, x^n$ до n-порядка.

С помощью метрического тензора в римановом пространстве можно ввести инвариантную дифференциальную форму, называемую интервалом

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \tag{16.22}$$

С помощью координатных преобразований эта форма в любой фиксированной точке может быть приведена к диагональному виду. При этом в общем случае диагональные компоненты матрицы $g_{\mu\nu}$ не все будут положительными. Но в силу закона инерции квадратичных форм разность между числом положительных и числом отрицательных диагональных компонент будет постоянна. Эта разность называется сигнатурой метрического тензора. В произвольном римановом пространстве V_n интервал будет знаконеопределенным. Будем в дальнейшем его называть времениподобным $ds^2 > 0$, пространственноподобным $ds^2 < 0$ и изотропным $ds^2 = 0$. Эти названия возникли из специальной теории относительности, где пространство и время образуют единое многообразие, а интервал в декартовых (галилеевых) координатах имеет вид

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{16.23}$$

В произвольных координатах он принимает форму

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \tag{16.24}$$

Поскольку определитель $|g_{\mu\nu}| \neq 0$, то мы можем построить контравариантныи метрический тензор с помощью уравнений

$$g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta^\nu_\mu. \tag{16.25}$$

С помощью тензоров $g_{\mu\nu}$ и $g^{\lambda\sigma}$ можно осуществить подъем и опускание индексов

$$A^\nu = g^{\nu\sigma}A_\sigma, \quad A_\nu = g_{\nu\sigma}A^\sigma. \tag{16.26}$$

Геодезические линии в римановом пространстве

Геодезические линии в римановом пространстве играют такую же роль, как прямые линии в евклидовом пространстве. Они называются экстремальными линиями. Для определения экстремали мы воспользуемся вариационным исчислением.

Суть вариационного исчисления состоит в обобщении понятий максимума и минимума. Речь идет не о нахождении экстремума функции, а о нахождении экстремума функционала, т. е. поиске тех функций, которые делают его экстремальным. Расстояние между близкими точками в римановом пространстве определяется интервалом ds. Величина ds не является полным дифференциалом. Интервал между точками a и b равен

$$S = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu}\,. \tag{16.27}$$

Экстремум определяется из соотношения

$$\delta \int_a^b ds = \int_a^b \delta(ds) = 0\,. \tag{16.28}$$

То есть идет поиск таких функций $g_{\mu\nu}(x)$, которые обеспечивают экстремум функционала (интеграла):

$$\begin{aligned} \delta(ds^2) &= 2ds\delta(ds) = \delta(g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu) = \\ &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\delta x^\sigma dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\nu}(x)dx^\mu \delta(dx^\nu)\,. \end{aligned} \tag{16.29}$$

Заметим, что

$$\delta(dx^\nu) = d(\delta x^\nu)\,. \tag{16.30}$$

На основании (16.29) и (16.30) имеем

$$\delta(ds) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}U^\mu dx^\nu \delta x^\sigma + g_{\mu\nu}U^\mu d(\delta x^\nu), \ U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}\,. \tag{16.31}$$

Подставляя (16.31) в (16.28), получим

$$\delta S = \int_a^b \Big[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}U^\mu U^\nu \delta x^\sigma + g_{\mu\nu}U^\mu \frac{d(\delta x^\nu)}{ds}\Big] ds = 0\,. \tag{16.32}$$

Так как

$$g_{\mu\nu}U^\mu \frac{d(\delta x^\nu)}{ds} = \frac{d}{ds}(g_{\mu\nu}U^\mu \delta x^\nu) - \delta x^\nu \frac{d}{ds}(g_{\mu\nu}U^\mu)\,, \qquad (16.33)$$

и на пределах интегрирования $\delta x^\nu = 0$, из (16.32) получим

$$\delta S = \int_a^b \left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}U^\mu U^\nu - g_{\mu\sigma}\frac{dU^\mu}{ds} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda}U^\mu U^\lambda\right] ds\delta x^\sigma = 0\,. \qquad (16.34)$$

Представим последний член в (16.34) в форме

$$U^\mu U^\lambda \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{dx^\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu}\right) U^\mu U^\lambda. \qquad (16.35)$$

Подставляя (16.35) в (16.34), находим

$$\delta S = \int_a^b \left[U^\mu U^\lambda \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\sigma}\right) + g_{\mu\sigma}\frac{dU^\mu}{ds}\right] ds\delta x^\sigma = 0\,. \qquad (16.36)$$

Поскольку вариация δx^σ произвольна, интеграл (16.36) обращается в нуль, только если

$$g_{\mu\sigma}\frac{dU^\mu}{ds} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\sigma}\right) U^\mu U^\lambda = 0\,. \qquad (16.37)$$

Умножая (16.37) на $g^{\sigma\alpha}$, получим

$$\frac{dU^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} U^\mu U^\lambda = 0\,, \qquad (16.38)$$

где символы Кристоффеля $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ равны

$$\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(\partial_\lambda g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\lambda})\,. \qquad (16.39)$$

Символы Кристоффеля не являются тензорными величинами. Уравнения (16.38) и являются уравнениями для геодезической линии. Их четыре, но не все они независимы, поскольку имеет место условие

$$g_{\mu\nu}(x)U^\mu U^\nu = 1\,. \qquad (16.40)$$

Преобразованиями координат x^μ можно добиться обращения в нуль символов Кристоффеля вдоль любой несамопересекающейся выбранной линии [22].

Ковариантное дифференцирование

Возьмем произвольный ковариантный вектор A_λ и свернем его с вектором U^λ, тогда получим скаляр

$$A_\lambda U^\lambda, \tag{16.41}$$

продифференцировав его по ds, мы так же имеем скаляр:

$$\frac{d}{ds}(A_\lambda U^\lambda) = \frac{dA_\lambda}{ds}U^\lambda + A_\nu\frac{dU^\nu}{ds} = \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\sigma}U^\sigma U^\lambda + A_\nu\frac{dU^\nu}{ds}. \tag{16.42}$$

Подставляя в правую часть выражение (16.38), получим

$$\frac{d}{ds}(A_\lambda U^\lambda) = \left[\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\nu_{\sigma\lambda}A_\nu\right]U^\sigma U^\lambda. \tag{16.43}$$

Поскольку (16.43) скаляр, а U^σ – вектор, отсюда имеем тензор второго ранга

$$A_{\lambda;\sigma} = \frac{DA_\lambda}{dx^\sigma} = \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\nu_{\sigma\lambda}A_\nu\,. \tag{16.44}$$

Здесь и далее точка с запятой обозначает ковариантное дифференцирование, т. е. мы определили ковариантную производную от ковариантного вектора A_λ. Определим теперь ковариантную производную от контравариантного вектора A^λ.

Для этой цели запишем тот же скаляр в виде

$$\frac{d}{ds}(A^\mu U^\nu g_{\mu\nu}) = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma}U^\sigma U^\nu g_{\mu\nu} + A^\mu g_{\mu\lambda}\frac{dU^\lambda}{ds} + A^\mu U^\nu U^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}\,. \tag{16.45}$$

Подставляя в правую часть выражение (16.38), получим

$$\frac{d}{ds}(A^\mu U^\nu g_{\mu\nu}) = U^\nu U^\sigma\left[g_{\mu\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} - A^\mu g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} + A^\mu\partial_\sigma g_{\mu\nu}\right]. \tag{16.46}$$

Учитывая выражение (16.39), имеем

$$\frac{d}{ds}(A^\mu U^\nu g_{\mu\nu}) = \left[g_{\mu\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} + \frac{1}{2}(\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\sigma\mu})A^\mu\right]U^\nu U^\sigma. \tag{16.47}$$

Представляя U^ν в форме

$$U^\nu = U_\lambda g^{\lambda\nu}, \tag{16.48}$$

и подставляя его в соотношение (16.47), получим

$$\frac{d}{ds}(A^\mu U^\nu g_{\mu\nu}) = \left[\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}A^\mu\right]U^\sigma U_\lambda\,. \tag{16.49}$$

Поскольку это выражение – скаляр, отсюда следует, что контравариантная производная есть тензор

$$A^\lambda_{;\sigma} = \frac{DA^\lambda}{dx^\sigma} = \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}A^\mu. \tag{16.50}$$

Таким образом, мы определили ковариантную производную от контравариантного вектора A^λ.

Используя формулы (16.44) и (16.50), можно получить ковариантные производные и от тензора второго ранга:

$$A_{\mu\nu;\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}A_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}A_{\lambda\mu}\,, \tag{16.51}$$

$$A^{\mu\nu}_{;\sigma} = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}A^{\nu\lambda} + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda}A^{\mu\lambda}. \tag{16.52}$$

$$A^\nu_{\rho;\sigma} = \frac{\partial A^\nu_\rho}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}A^\nu_\lambda + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda}A^\lambda_\rho\,. \tag{16.53}$$

Используя выражение (16.51), легко показать, что

$$g_{\mu\nu;\sigma} \equiv 0,$$

т. е. ковариантная производная от метрического тензора равна нулю.

Тензор кривизны Римана-Кристоффеля

В римановом пространстве операция ковариантного дифференцирования некоммутативна. Ковариантное дифференцирование вектора A_λ сначала по переменной x^μ, а затем по x^ν приводит к следующему выражению:

$$A_{\lambda;\mu\nu} = \frac{\partial A_{\lambda;\mu}}{\partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\nu\lambda} A_{\tau;\mu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} A_{\lambda;\tau} \,, \tag{16.54}$$

но так как

$$\begin{aligned} A_{\lambda;\mu} &= \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\mu} - \Gamma^\tau_{\lambda\mu} A_\tau, \quad A_{\tau;\mu} = \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\tau} A_\sigma, \\ A_{\lambda;\tau} &= \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\tau} - \Gamma^\sigma_{\lambda\tau} A_\sigma, \end{aligned} \tag{16.55}$$

после подстановки этих выражений в (16.54) имеем

$$\begin{aligned} A_{\lambda;\mu\nu} = \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\lambda\mu} \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\nu\lambda} \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\mu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\tau} - \\ - A_\tau \frac{\partial \Gamma^\tau_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\tau_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\tau} A_\sigma + \Gamma^\tau_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\tau} A_\sigma \,. \end{aligned} \tag{16.56}$$

Вычислим теперь величину $A_{\lambda;\nu\mu}$:

$$A_{\lambda;\nu\mu} = \frac{\partial A_{\lambda;\nu}}{\partial x^\mu} - \Gamma^\tau_{\mu\lambda} A_{\tau;\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} A_{\lambda;\tau} \,, \tag{16.57}$$

учитывая выражения

$$\begin{aligned} A_{\lambda;\nu} &= \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\lambda\nu} A_\tau, \quad A_{\tau;\nu} = \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\nu} - \Gamma^\sigma_{\tau\nu} A_\sigma, \\ A_{\lambda;\tau} &= \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\tau} - \Gamma^\sigma_{\lambda\tau} A_\sigma, \end{aligned} \tag{16.58}$$

соотношение (16.57) принимает вид

$$\begin{aligned} A_{\lambda;\nu\mu} = \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\lambda\nu} \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\mu} - \Gamma^\tau_{\mu\lambda} \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\tau} - \\ - A_\tau \frac{\partial \Gamma^\tau_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\tau_{\mu\lambda} \Gamma^\sigma_{\nu\tau} A_\sigma + \Gamma^\tau_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\tau} A_\sigma \,. \end{aligned} \tag{16.59}$$

На основании (16.56) и (16.59) в разности остаются только члены

$$A_{\lambda;\mu\nu} - A_{\lambda;\nu\mu} = A_\sigma \left[\frac{\partial \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\tau_{\nu\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\tau} - \Gamma^\tau_{\mu\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\tau} \right]. \quad (16.60)$$

Величина $R^\sigma_{\lambda\mu\nu}$ называется тензором кривизны Римана:

$$R^\sigma_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\tau_{\nu\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\tau} - \Gamma^\tau_{\mu\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\tau}. \quad (16.61)$$

Из этого тензора можно сверткой получить тензор второго ранга – тензор Риччи:

$$R_{\lambda\nu} = R^\sigma_{\lambda\sigma\nu} = \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\tau_{\nu\lambda}\Gamma^\sigma_{\sigma\tau} - \Gamma^\tau_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\tau}. \quad (16.62)$$

Заметим, что для интервала вида (16.23) или (16.24) тензор кривизны равен нулю.

Из выражения (16.61) очевидно, что тензор кривизны антисимметричен по двум последним индексам μ, ν:

$$R^\sigma_{\lambda\mu\nu} = -R^\sigma_{\lambda\nu\mu}.$$

Можно построить тензор кривизны с нижними индексами:

$$R_{\rho\lambda\mu\nu} = g_{\rho\sigma} R^\sigma_{\lambda\mu\nu}.$$

Он обладает следующими свойствами симметрии:

$$R_{\rho\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\rho\mu\nu} = -R_{\rho\lambda\nu\mu}, \quad R_{\rho\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\lambda}.$$

Мы видим, что тензор кривизны антисимметричен по отношению как к первой паре индексов, так и ко второй. Он также симметричен и после перестановки местами пар индексов без изменения их порядка.

В римановом пространстве существует локальная система координат, в которой первые производные от компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ равны нулю. При этом, естественно, символы Кристоффеля также равны нулю. Такие координаты называются римановыми. Они удобны для нахождения тензорных тождеств, поскольку, если мы установили, что в этой системе координат некоторый тензор равен нулю, то в силу тензорных преобразований он будет равен нулю в любой системе координат.

Тензор кривизны в римановой системе координат равен

$$R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\,. \tag{16.63}$$

Ковариантная производная от него имеет вид

$$R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu;\rho} = \partial_{\rho}\partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} - \partial_{\rho}\partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\,. \tag{16.64}$$

Переставляя циклически индексы μ, ν, ρ и складывая полученные выражения, получим тождество Бьянки

$$R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu;\rho} + R^{\sigma}_{\lambda\rho\mu;\nu} + R^{\sigma}_{\lambda\nu\rho;\mu} \equiv 0\,. \tag{16.65}$$

Свертывая по индексам σ и ν, находим

$$-R_{\lambda\mu;\rho} + R^{\sigma}_{\lambda\rho\mu;\sigma} + R_{\lambda\rho;\mu} = 0\,. \tag{16.66}$$

Умножим это выражение на $g^{\lambda\alpha}$:

$$-R^{\alpha}_{\mu;\rho} + (g^{\lambda\alpha}R^{\sigma}_{\lambda\rho\mu})_{;\sigma} + R^{\alpha}_{\rho;\mu} = 0\,.$$

Мы здесь учли ранее установленное свойство для метрических коэффициентов: их можно при ковариантном дифференцировании свободно вносить или выносить из под знака производной.

Свертывая индексы ρ и α, получим

$$-R^{\rho}_{\mu;\rho} + (g^{\lambda\rho}R^{\sigma}_{\lambda\rho\mu})_{;\sigma} + \partial_{\mu}R \equiv 0\,, \tag{16.67}$$

где $R = R^{\rho}_{\rho} = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ – скалярная кривизна.

Рассмотрим под знаком производной второй член в тождестве (16.67):

$$g^{\lambda\rho}R^{\sigma}_{\lambda\rho\mu} = g^{\lambda\rho}g^{\nu\sigma}R_{\nu\lambda\rho\mu} = g^{\nu\sigma}g^{\lambda\rho}R_{\lambda\nu\mu\rho} = g^{\nu\sigma}R^{\rho}_{\nu\mu\rho} = -R^{\sigma}_{\mu}.$$

Мы здесь использовали свойства симметрии тензора кривизны и определение тензора $R_{\mu\nu}$. Подставляя это выражение в (16.67), получим

$$(R^\rho_\mu - \frac{1}{2}\delta^\rho_\mu R)_{;\rho} = \nabla_\rho(R^\rho_\mu - \frac{1}{2}\delta^\rho_\mu R) \equiv 0\,. \tag{16.68}$$

Введем обозначение

$$G^\rho_\mu = R^\rho_\mu - \frac{1}{2}\delta^\rho_\mu R\,. \tag{16.69}$$

На основании (16.53) тождество (16.68) можно записать в развернутой

$$\nabla_\nu G^\nu_\rho = G^\nu_{\rho;\nu} = \frac{\partial G^\nu_\rho}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} G^\nu_\lambda + \Gamma^\nu_{\nu\lambda} G^\lambda_\rho \equiv 0\,, \tag{16.70}$$

учитывая, что

$$\Gamma^\nu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \tag{16.71}$$

и дифференцируя детерминант g

$$\frac{\partial g}{\partial x^\lambda} = g g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\,, \tag{16.72}$$

находим путем сравнения (16.71) и (16.72)

$$\Gamma^\nu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda(\sqrt{-g})\,. \tag{16.73}$$

Подставляя это выражение в (16.70), получим

$$\nabla_\nu(\sqrt{-g}G^\nu_\rho) = \partial_\nu(\sqrt{-g}G^\nu_\rho) - \sqrt{-g}\Gamma^\lambda_{\rho\nu} G^\nu_\lambda \equiv 0\,. \tag{16.74}$$

Используя выражение (16.39) для символа Кристоффеля, находим

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}G^\nu_\rho) + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\lambda\sigma}}{\partial x^\rho}\sqrt{-g}G_{\lambda\sigma} \equiv 0\,. \tag{16.75}$$

Такое тождество впервые было получено Д. Гильбертом. Оно было необходимо при построении уравнений общей теории относительности.

В заключение покажем, что величина, определяющая объем

$$v' = \int \sqrt{-g'} dx^{0\,\prime} dx^{1\,\prime} dx^{2\,\prime} dx^{3\,\prime}, \tag{16.76}$$

является инвариантом при произвольных преобразованиях координат. При координатных преобразованиях имеем

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\lambda\sigma}(x) \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}.$$

Запишем это выражение в форме

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}.$$

Вычислим детерминант $g' = \det g'_{\mu\nu}$

$$g' = \det\left(g_{\sigma\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\right) \det\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\right) =$$
$$= \det(g_{\lambda\sigma}) \det\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\right) \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\right).$$

Отсюда имеем

$$g' = gJ^2. \tag{16.77}$$

Здесь J есть якобиан преобразования

$$J = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^{0\prime}, x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime})}. \tag{16.78}$$

Итак

$$\sqrt{-g'} = \sqrt{-g} J. \tag{16.79}$$

Подставляя это выражение в (16.76), получим

$$v' = \int \sqrt{-g} \frac{\partial(x^0 . x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^{0\prime}, x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime})} dx^{0\,\prime} dx^{1\,\prime} dx^{2\,\prime} dx^{3\,\prime} =$$
$$= \int \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \tag{16.80}$$

Но правая часть есть объем

$$v = \int \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \tag{16.81}$$

Итак, мы установили равенство

$$v' = v. \tag{16.82}$$

Отсюда следует, что величина

$$\sqrt{-g} d^4 x \tag{16.83}$$

также является инвариантом относительно произвольных координатных преобразований.

Следует отметить некоторые особенности римановой геометрии. В общем случае риманово пространство нельзя описать в одной системе координат, для его описания необходим атлас карт. Именно поэтому топология риманова пространства существенно отличается от топологии евклидова пространства. В общем случае в римановом пространстве отсутствует группа движения. В псевдоевклидовом пространстве, описываемом интервалом (16.23) или (16.24), существует десятипараметрическая группа движения пространства.

Основная характеристика римановой геометрии – тензор кривизны $R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu}$ – является форминвариантной величиной относительно преобразований координат. Также форминвариантной величиной является и тензор $R_{\lambda\nu}$. Здесь под форминвариантностью понимается не один и тот же вид функциональной зависимости тензора кривизны от выбора системы координат, а одинаковость построения тензора кривизны при заданном выражении $g_{\mu\nu}(x)$, подобно тому как выражение $\Box\, A^{\nu}(x)$ одинаково записывается в галилеевых координатах в различных инерциальных системах при заданном выражении A^{ν}. Между инвариантностью и форминвариантностью имеется существенное различие. Например, оператор $\gamma^{\mu\nu}(x) D_{\mu} D_{\nu}$ (где $\gamma^{\mu\nu}(x)$ – метрический тензор пространства Минковского) при произвольных координатных преобразованиях является инвариантом, т. е. скаляром, но он не будет при этом форминвариантным. Он будет форминвариантным только при таких преобразованиях координат, при которых тензор $\gamma^{\mu\nu}(x)$ остается форминвариантным, следовательно

$$\delta\gamma^{\mu\nu}(x) = 0\,.$$

Тензор кривизны изменяется при калибровочных преобразованиях (3.16) по следующему закону:

$$\delta_\epsilon R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\sigma\nu\alpha\beta}D_\mu\epsilon^\sigma - R_{\mu\sigma\alpha\beta}D_\nu\epsilon^\sigma - \\ -R_{\mu\nu\sigma\beta}D_\alpha\epsilon^\sigma - R_{\mu\nu\alpha\sigma}D_\beta\epsilon^\sigma - \epsilon^\sigma D_\sigma R_{\mu\nu\alpha\beta}\,.$$

Это изменение обусловлено тем, что произвольные координатные системы физически не являются эквивалентными.

В тексте книги наряду с ковариантными производными в римановом пространстве ∇_λ встречаются ковариантные производные в пространстве Минковского D_λ. Разница состоит в том, что при построении ковариантных производных D_λ необходимо в формулах (16.50) – (16.53) вместо символов Кристоффеля риманова пространства $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ поставить символы Кристоффеля пространства Минковского $\gamma^\nu_{\alpha\beta}$.

В заключение приведем теорему Вейля-Лоренца-Петрова [21]. Совпадение уравнений изотропных и времениподобных геодезических линий соответственно для двух римановых пространств с метриками $g_{\mu\nu}(x)$ и $g'_{\mu\nu}(x)$ с одинаковой сигнатурой (-2) приводит к тому, что их метрические тензоры отличаются лишь постоянным множителем. Из теоремы следует, что если в одной и той же координации x мы имеем разные метрические тензоры $g_{\mu\nu}(x)$ и $g'_{\mu\nu}(x)$, то для них будут при одинаковых условиях различные геодезические линии.

Список литературы

1. *Вайнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975; *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. N.Y.: Wiley, 1972.

2. *Власов А. А., Логунов А. А.* // ТМФ, 1989. Т. 78, № 3. С. 323 – 329.

3. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* // ТМФ, 1984. Т. 61, № 3. С. 327 – 346.

4. *Logunov A. A., Mestvirishvili M. A.* Relativistic theory of gravitation. // Progr. theor. Phys. 1985. Vol. 74, no. 1. P. 31–50.

5. *Логунов А. А.* // ТМФ, 1989. Т. 80, № 2. С. 165–172.

6. *Логунов А. А.* // ТМФ, 1992. Т. 92, № 2. С. 191–206.

7. *Логунов А. А.* Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы. М.: Наука, 1987.

8. *Логунов А. А.,* Теория классического гравитационного поля. // УФН, 1995. Т. 165, вып. 2. С. 187–203.

9. *Власов А. А., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* // ТМФ, 1984. Т. 61, № 3. С. 323–326.

0. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.

1. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* // ТМФ, 1991. Т. 86, № 1. С. 3–15.

2. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* // ТМФ, 1997. Т. 110, № 1. С. 5–24.

3. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* // ТМФ, 1999. Т. 121, № 1. С. 4–24.

4. *Лоскутов Ю. М.* // ТМФ, 1990. Т. 82, № 2. С. 304–312.

5. *Лоскутов Ю. М.* // Вестн. МГУ. Сер.3, Физика. Астрономия., 1991. Т. 32, № 4. С. 49.

16. *Лоскутов Ю. М.* // ТМФ, 1996. Т. 107, № 2. С. 329–343.

17. *Мандельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972.

18. *Мах Э.* Механика: Историко-критический очерк ее развития. А. Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979.

19. *Мёллер Х.* Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975. С. 40.

20. *Паули В.* Теория относительности. М.: Гостехиздат, 1947. С. 28.

21. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. § 44.

22. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. § 91. С. 428.

23. *Синг Дж.* Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. л-ры, 1963. С. 102–121.

24. *Фок В. А.* // ЖЭТФ, 1939. Т. 9, № 4. С. 375.

25. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1961.

26. *Хокинг С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.

27. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т. II, ст. 119. С. 531.

28. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т. I, ст. 21. С. 242.

29. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т. I, ст. 21, 28, 29, 32.

30. *Бом Д.* Специальная теория относительности. М.: Мир, 1967. С. 73.

31. *Gershtein S. S., Logunov A. A., Mestvirishvili M. A.* // Phys. Atomic Nuclei, 1998. Vol. 61, № 8. P. 1420–1429.

32. *Hawking S. W., Penrose R.* // Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1970. Vol. 314. P. 529.

33. *Kolb E. W., Turner M. S.* The early Universe. L.: Addison-Wesley, 1990.
34. *Logunov A. A.* // Theor. and Math. Phys. 1995. Vol. 104, № 3. P. 1184–1187.
35. *Logunov A. A.* Relativistic theory of gravity and the Mach principle. (Dubna, 1997).
36. *Logunov A. A.* // Phys. Particles and Nuclei, 1998. Vol. 29, № 1.
37. *Logunov A. A.* Relativistic theory of gravity. N.Y.: Nova Science Publ. 1998. Horizons in World Phys.; Vol.215.
38. *Logunov A. A., Mestvirishvili M. A.* The relativistic theory of gravitation. Moscow: Mir, 1989.
39. *Loskutov Yu. M.* // Proc. of the VI Marcel Grossman meeting on gen. relativ. 1991. Pt. B. P. 1658–1660.
40. *Poincaré H.* // Bull. Sci. Math. Ser. 2, 1904. Vol. 28. P. 302–328.
41. *Rozen N.* // Phys.Rev. 1940. Vol. 57. P. 147–150; // Phys.Rev. 1940. Vol. 57. P. 150–153.
42. *Pugh G. E.* // WSEG Res. Mem. US Dep. of Defense, 1959. № 11.
43. *Shapiro I. I.* Centenario di Einstein: Astrofisica e cosmologia gravitazione quanti e relativita. Firenze: Giuni Barbéra, 1979; То же на рус. яз.: Астрофизика: кванты и теория относительности. М.: Мир, 1982.
44. *Schiff L. I.* // Proc. Nat. Acad. Sci. US., 1960. Vol. 46. P. 871; // Phys.Lett. 1960. Vol. 4. P. 215.
45. *Логунов А. А.* Теория гравитационного поля. М.: Наука, 2000.
46. *Герштейн С. С., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Самоограничение гравитационного поля и его роль во Вселенной. // УФН, 2006. Т. 176, № 11.

47. *Герштейн С. С., Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Ткаченко Н. П.* Эволюция Вселенной в полевой теории гравитации. // ЭЧАЯ, 2005. Т. 36, вып. 5. С. 1003–1050.

48. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. М.: Мир, 1977. Т. 2. С. 104.

49. *Gupta S.* // Proc. Roy. Soc., 1952. Vol. A 65. P. 608 – 619; Новейшие проблемы гравитации. Сб. статей. М.: Изд-во иностр. л-ры, 1961. С. 342.

50. *Papapetrou A.* // Proc. of the Royal Irish Academy, 1948. Vol. 52A. P. 11–23.

51. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Физматлит. 2001.

52. *Kalashnikov V. L.* Quintessential cosmological scenarios in the theory of gravitation. // Geometrical and Topological Ideas in Modern Physics. Proc. of the XXV Workshop, 2002. (Protvino, Russia). P. 250–262.

Именной указатель

Предметный указатель

Научное издание

Логунов Анатолий Алексеевич

**РЕЛЯТИВИСТСКАЯ
ТЕОРИЯ
ГРАВИТАЦИИ**

Зав. редакцией *Г.И. Чертова*
Редактор *Л.С. Чибисенков*
Художник *Т.В. Болотина*
Художественный редактор *В.Ю. Яковлев*

Компьютерный набор и верстка *Г.М. Александ*
ГНЦ "Институт физики высоких энергий"

Подписано к печати 10.11.2006
Формат 60 × 90 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Таймс
Печать офсетная
Усл.печ.л. 16,0. Усл.кр.-отт. 16,5. Уч.-изд.л. 11,3
Тираж 500 экз. Тип. зак. 4901

Издательство "Наука"
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
E-mail: secret@naukaran.ru www.naukaran.ru

ППП "Типография "Наука"
121099, Москва, Шубинский пер., 6