1,50к.

Дж. Уилер • Гравитация, нейтрино и Вселенная

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ

Дж. Уилер

Гравитация нейтрино и Вселенная

NEUTRINOS, GRAVITATION AND GEOMETRY

JOHN A. WHEELER

Palmer Physical Laboratory, Princeton University, Princeton, New Jersey

Rendiconti
della
Scuola Internazionale di Fisica
„Enrico Fermi"
Corso XI
pp. 67—196

VARENNA SUL LAGO DI COMO
29 GIUGNO — 11 LUGLIO
1959

BOLOGNA 1960

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ

Дж. **Уилер**

ГРАВИТАЦИЯ, НЕЙТРИНО и ВСЕЛЕННАЯ

Перевод с английского
Н. В. МИЦКЕВИЧА

Под редакцией
Д. ИВАНЕНКО

646188

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1962

Книга представляет собой перевод лекций известного американского физика-теоретика Дж. А. Уилера в Международной летней школе физики им. Энрико Ферми в Варенне (Италия); в дополнении помещены оригинальные статьи автора и других крупных зарубежных ученых (Мак-Витти, Хойля, Мизнера). В целом книга содержит изложение ряда проблем гравитации, космологии и теории элементарных частиц.

Основное внимание уделяется попытке объединенного описания гравитационного и электромагнитного полей (геометродинамика), включающего топологические обобщения; обсуждаются также такие актуальные вопросы, как взаимные превращения гравитации и элементарных частиц, роль нейтрино и гравитационных волн в общем балансе энергии во Вселенной.

Книга рассчитана на широкий круг физиков, астрономов и математиков, интересующихся современными проблемами гравитационной физики и космологии.

Редакция литературы по физике

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

Предлагаемые вниманию читателей новые работы по гравитации и смежным вопросам принадлежат крупному американскому физику-теоретику Джону Арчибальду Уилеру, профессору Принстонского университета. Уилер известен в науке прежде всего как соавтор теории деления ядер, развитой им совместно с Н. Бором в 1939 г. и одновременно с Я. И. Френкелем. Ему принадлежат расчеты мезоатомов, стабильности ядер и работы по квантовой электродинамике, выполненные совместно с его учеником Р. Фейнманом, получившим в свою очередь столь большую известность.

В последние годы Уилер обратился к теории тяготения наряду с Дираком, Мёллером, Вебером, Д. И. Блохинцевым и другими учеными, работавшими в области квантовой механики, физики ядра, электроники, оправдывая полушутливое эмпирическое «правило», что физики, подобно Эйнштейну, обращаются к гравитации во второй половине жизни.

§ 1. Геометродинамика Уилера

Уилер вместе с Мизнером, Брилем и другими сотрудниками развивает концепцию совместного описания гравитации и электромагнетизма, названную геометродинамикой. Предприняты попытки квантования геометродинамики и включения в нее нейтрино. Хотя еще не может идти речи о законченной теории, претендующей на объединенное описание физической реальности на базе геометрии, уже получен ряд интересных результатов, связанных с топологическими обобщениями, учетом роли нейтрино во Вселенной и гипотезой «геонов». Под

электромагнитным «геоном» понимается огромная концентрация электромагнитного излучения, дающая столь сильное искривление пространства, что подобное образование оказывается метастабильным и способным существовать долгое время при относительно малой утечке энергии. В дальнейшем были набросаны контуры теории нейтринных и гравитационных геонов. Последние представляют собой огромные сгустки гравитационных волн, опять-таки вызывающих сильное искривление пространства и поэтому метастабильно удерживаемых, наглядно говоря, в эффективной потенциальной яме, созданной этими же волнами.

В квантовой геометродинамике существенную роль играют квантовые флуктуации метрики. Флуктуации слабого гравитационного поля рассматривались прежде как для случая вакуумных флуктуаций (наши работы), так и недавно в работах Д. И. Блохинцева для случая флуктуаций, вызванных в свою очередь флуктуациями обычной материи [4, 6]. Уилер, однако, делает следующий шаг, замечая, что на расстояниях порядка $L \approx (\hbar\varkappa/c^3)^{1/2} \sim \sim 10^{-33}$ *см* флуктуации метрики или гравитационных потенциалов будут столь велики, что они смогут существенно изменять даже топологический характер пространства. В нем могут образовываться топологические ручки (или рукава), наглядно именуемые «червячьими (или кротовыми) норами», дырки, различные многосвязные области. Уилер пытается сопоставить ручкам и их горловинам реальные физические объекты, например электрические заряды, хотя настойчиво предупреждает, что геоны, ручки, горловины и другие объекты «зоопарка» классической геометродинамики не имеют никакого непосредственного отношения к элементарным частицам или объектам реальной космологии. Лишь дальнейшая квантовая теория сможет привести к возможности сопоставления с элементарными частицами.

По справедливому мнению Уилера, по-видимому, укрепившемуся после дискуссий на гравитационной конференции в Руайомоне — Париже (1959 г.), наибольшей трудностью той или иной геометризованной трактовки элементарных частиц является включение нейтрино, электронов, протонов и других фермионов со спином

$^1/_2$ в теорию. В самом деле, в основе римановой геометрии лежит симметричный тензор 2-го ранга $g_{\mu\nu}$ (играющий роль компонент гравитационного потенциала, или, в конце концов, волновой функции гравитационного поля). После выделения продольного гравитационного поля оставшаяся поперечная часть, по крайней мере для случая слабого поля, будет соответствовать гравитационным волнам (гравитонам), способным излучаться и уносить энергию. В дальнейшем подобные гравитоны могут даже, согласно нашей гипотезе, поддерживаемой Уилером, превращаться в электроны — позитроны, нейтрино — антинейтрино и другие пары элементарных частиц. Обратно, эти пары электронов, нейтрино могут превращаться в гравитоны. Наши расчеты подобных процессов были продолжены И. Пийром [9] для случая фотонов и Брилем и Уилером [10] для случая аннигиляции нейтрино — антинейтрино (см. также § 6 гл. IV настоящей книги). Однако последние ограничились лишь получением формулы общего вида, не вычисляя коэффициентов. Точная формула была получена недавно Ю. С. Владимировым [4] для случая аннигиляции e_-—e_+, т. е. аналогичных спинорных частиц,

$$d\sigma = \frac{\varkappa^2}{4(4\pi)^2}\frac{p^3}{16k_0}\sin^4\theta\left\{1+\frac{2p^2}{k_0^2-p^2\cos^2\theta}-\frac{2p^4\sin^4\theta}{(k_0^2-p^2\cos^2\theta)^2}\right\}.$$

В нерелятивистском пределе получается прежний результат

$$\sigma\sim r_g^2\left(\frac{c}{v}\right)\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^2,$$

где $r_g=\varkappa m/c^2$ (в обычных обозначениях).

Таким образом, поперечное гравитационное поле в значительной мере эквивалентно обычному веществу. Вместе с тем из тензорных функций бозонного поля непосредственно нельзя перейти к спинорам. Это обстоятельство подчеркивается Уилером в данной книге (Введение, гл. II). Следовательно, последняя серьезная попытка геометризации всей физики в лице геометродинамики впредь до дальнейших радикальных изменений, которые предварительно обсуждаются Уилером, не может претендовать на окончательный успех.

В целом Уилер дает широкую картину космологических и элементарных процессов, рассматриваемых с новой точки зрения. Автор считает себя продолжателем традиции Римана, Клиффорда, Эйнштейна в смысле геометризации физики. Оправдывая замечание Лауэ о преимущественном интересе человечества к проблемам пространства — времени, Уилер приводит даже ряд высказываний древних (Конфуций, Упанишады). Для лучшего понимания работ Уилера дадим самое краткое резюме современной ситуации в теории гравитации, отсылая за подробностями к сборнику «Новейшие проблемы гравитации» [3] и нашей вступительной статье к нему, вместе с тем дополняя эту статью, в частности, материалами 1-й Советской гравитационной конференции [4] и Ужгородской конференции 1961 г. по теоретической физике [5].

§ 2. Теория Эйнштейна

Фундаментом понимания гравитации ныне является эйнштейновская теория, полученная в рамках общей теории относительности и значительно обобщающая ньютоновскую теорию [1]). Во-первых, по аналогии с электродинамикой или мезодинамикой можно было построить «гравидинамику», обобщая статическое уравнение, описывающее порождение поля распределением масс с плотностью ρ, беря справа в качестве источника весь тензор $T_{\alpha\beta}$ плотности энергии-импульса-натяжений, включающих ρ как одну из 16 компонент; поэтому и в левой части следует ввести обобщенный потенциал в виде симметричного тензора $h_{\alpha\beta}$.

Действительно, гравитационное поле порождается не только материей с массой покоя, но и, например, фотонами и нейтрино, а также за счет кинетической энергии. Так как гравитационное поле может порождаться самим гравитационным полем, например гравитационными волнами, то новые уравнения будут нелинейными.

[1]) Килмистер [11] обсуждает вариант нелинейной теории, сохраняющей абсолютное время и вместе с тем удовлетворяющей принципу эквивалентности.

(Нелинейность тесно связана с принципом эквивалентности.) Подобные обобщения поднимают тензорное гравитационное поле по богатству свойств до уровня векторного электромагнитного, псевдоскалярного мезонного и других полей. Квантование этого поля приведет к гравитонам со спином 2, аналогичным фотонам и т. д.

Однако главная специфика эйнштейновской теории заключается в том, что «нормальная» гравидинамика непригодна, так как по ряду оснований гравитационное поле оказывается резко отличающимся от других полей, будучи теснейшим образом связанным с геометрией пространства-времени [1]. Гравитационные потенциалы, или волновые функции, совпадают с компонентами метрического тензора $g_{\alpha\beta}^{(\text{метр.})} \equiv g_{\alpha\beta}^{(\text{грав.})}$, характеризующего риманову геометрию искривленного от точки к точке 4-пространства.

В случае слабого поля и незначительного искривления

$$g_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \qquad (\varepsilon_\alpha = -1,\ -1,\ -1,\ +1).$$

Ограничиваясь низшими (вторым) производными, но отбрасывая ограничение линейностью, в конце концов получаем знаменитые уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\alpha\beta},$$

где $\Lambda g_{\alpha\beta}$ — космологический член, эмпирически крайне малый, но для отбрасывания которого необходимы дополнительные теоретические или наблюдательные данные. (Факт его введения Эйнштейном для космологии и затем отбрасывания после установления фридмановской теории нестационарной Вселенной, сам по себе любопытен с точки зрения истории, но не является решающим аргументом; кроме того, фридмановские решения и т. д. применимы как в отсутствие, так и при наличии $\Lambda g_{\alpha\beta}$.) Здесь R — скаляр, а $R_{\alpha\beta}$ — тензор Риччи, построенные из кристоффелей $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ и их производных. Кристоффели являются аналогами напряженности поля, и в свою очередь построены из первых производных от $g_{\alpha\beta}$ по координатам.

Из уравнений Эйнштейна (чаще всего рассматриваемых с $\Lambda=0$) вытекает множество следствий, из которых наибольшее значение приобрело решение Шварцшильда, дающее потенциалы поля сферически-симметричной массы и обобщающее закон Ньютона. Отсюда вытекают три предсказания, подтвержденных астрономическими и земными наблюдениями: 1) сдвиг перигелия Меркурия (43″ в столетие), 2) отклонение луча света от звезды в поле Солнца (1″,75) и 3) красное смещение спектральных линий в поле тяготения, наиболее убедительно подтвержденное в 1960 г. в опытах с γ-лучами (Паунд и Ребка; Крэншоу). 4) Кроме того, в применении ко всей известной части Вселенной теория приводит к нестационарной расширяющей Вселенной Фридмана как наиболее правдоподобной картине [1]). Неоднократно подчеркивалось неприятное ощущение из-за небольшого числа (3+1) подтверждений теории, означающей столь радикальный переворот в представлениях о пространстве-времени и тяготении.

Утонченные средства ядерной физики в виде безотдачных γ-лучей Мёссбауэра, использование элементарных частиц, применение молекулярных и атомных стандартов частоты («атомных часов») [16], расширение астрономических и радиоастрономических наблюдений, предстоящее развитие нейтринной астрономии вместе с замечательной возможностью использования спутников и ракет лишь в последние годы создали новую ситуацию. На очереди стоит открытие поправок, обязанных вращению тел (Тирринг — Лензе, Шифф) (см. [17]), открытие нестационарных гравитационных полей, гравитационных волн и измерение их скорости [14, 18], открытие возможной экранировки [19], следствий квантованной и различных обобщенных теорий.

За истекшие годы было проделано большое число теоретических исследований, среди которых наибольшее значение приобрели 1) получение уравнений движения

[1]) Основы общей теории относительности и ее приложения см. в монографиях, процитированных в нашей вступительной статье к сборнику [3]. См. также монографии Синга [12], Петрова [13] и Вебера [14]. Критический обзор новейшей литературы дан также в нашей статье [15].

тел из уравнений поля[1]) (Эйнштейн — Гофман — Инфельд с сотрудниками, В. А. Фок с Н. М. Петровой и другими сотрудниками), 2) анализ алгебраической структуры уравнений Эйнштейна и открытие трех типов решений (А. З. Петров, далее Пирани, Кундт, Хлаватый и др. [3, 4, 13]).

Много работ было посвящено проблеме энергии, волнам, затем космологии, единой теории поля, квантованию поля и связи гравитации с элементарными частицами. В целом физика ныне вступает в третий (после Ньютона и Эйнштейна) период исследования гравитации, который коротко можно назвать «атомно-космическим».

В самое последнее время в этих направлениях получены интересные результаты. В частности, проблема энергии гравитационного поля продвинулась вперед благодаря недавнему исследованию Мёллера [20], которое должно содействовать и анализу гравитационных волн. Ищется «комплекс» T_i^k, удовлетворяющий следующим условиям: 1) Комплекс должен быть аффинной тензорной плотностью, зависящей алгебраически от g^{ik} и их 1-х и 2-х производных. 2) Должен выполняться закон сохранения $T^k_{i,k} \equiv (\partial T_i^k/\partial x^k) = 0$. 3) Для замкнутой системы, когда 4-пространство плоско на бесконечности, где асимптотически допустимы прямоугольные координаты, величины

$$P_i = \frac{1}{c}\int T_i^4 (d^3x) \qquad (x^4 = \text{const})$$

постоянны во времени и преобразуются как ковариантные компоненты вектора при линейных преобразованиях координат (это существенно для интерпретации интегрального выражения как импульса и энергии). 4) T_4^k преобразуется как плотность 4-вектора при чисто пространственных преобразованиях; тогда полная энергия в конечном объеме не будет зависеть от пространственных координат. Это есть условие локализуемости энергии.

Только старое выражение Эйнштейна удовлетворяло условиям «1», «2», «3»; однако оно нарушало условие

[1]) Проблема уравнений движения в связи с объединенным описанием гравитационного и электромагнитного полей (геометродинамикой) рассмотрена в недавней работе Уилера [23].

«4». Комплекс Мёллера — Мицкевича не удовлетворял условию «3», но являлся единственным в смысле удовлетворения условий «1», «2» и «4». Предлагается искать выход в совсем другом направлении, конструируя комплекс энергии не из компонент метрического тензора, а из тетрад или компонент ортогонального репера, сопоставленных каждой точке 4-пространства [21, 22]. Как известно, для описания взаимодействия спинора с гравитационным полем требуется ввести подобные величины (Фок — Иваненко, Вейль): $g_{ik} = h_i(a)\, h_k(a)$. Тогда 16 реперных компонент определяют метрику, но при заданных g_{ik} компоненты $h_i\ (a)$ определены лишь с точностью до лоренцова вращения. Образуя из реперных компонент лагранжиан L, можно прийти к искомому комплексу энергии, удовлетворяющему всем условиям «1» — «4»:

$$T_i^k = \sqrt{-g}\,(T_i^{k\,(\text{метр.})} + t_i^k) = U_{i,\,l}^{kl},$$

где суперпотенциал U_i^{kl} представляет собой уже истинную тензорную плотность 3-го ранга, антисимметричную по двум значкам:

$$U_i^{kl} = \frac{1}{4k}\left(\frac{\partial L}{\partial h^i\,(a)_{;\,l}}\, h^k(a) - \frac{\partial L}{\partial h^i\,(a)_{;\,k}}\, h^k(a)\right),$$

$$L = h\left(h^r(a)_{;\,s} \cdot h^s(a)_{;\,s} - h^r(a)_{;\,r} \cdot h^s(a)_{;\,s}\right);$$

однако для получения однозначного выражения энергии необходимо еще установить условия, фиксирующие относительную ориентацию тетрад в различных точках пространства.

Сложность уравнений гравидинамики и желательность выделения различных аспектов, обязанных, например, наличию 10 компонент, или нелинейности, или отсутствию антигравитации в обычных условиях и т. д., требует развития приближенных трактовок. Ввиду наглядности представляет интерес проведение аналогии между гравидинамикой и электродинамикой, которая неоднократно подчеркивается Уилером и была в специальной форме развита Мёллером [24], М. Дубининым, а также Форвардом [25]. В линейном приближении можно ввести вместе с Ю. Б. Румером [26] аналоги скалярного и векторного потенциалов, тензор напряженности

поля и рассмотреть гравитационные волны, а также ряд других эффектов. До сих пор неизвестен ввиду своей малости квазимагнитный гравитационный эффект.

§ 3. Компенсирующие поля

Наряду с «нормальной» гравидинамикой, трактующей гравитацию как погруженное в 4-пространство поле, и эйнштейновской геометризованной трактовкой, недавно стала вырисовываться третья точка зрения, подсказанная теорией элементарных частиц и сближающая гравитационное и прочие поля на базе законов сохранения. С точки зрения иерархии взаимодействий гравитация относится к ультраслабым и стоит после слабых (фермиевских), средних (электромагнитных) и сильных (барион-пионных) взаимодействий. Ослаблению взаимодействий соответствует понижение симметрии, уменьшение числа инвариантов и соответственно этому, в духе теоремы Нетер, уменьшение числа законов сохранения. Лишь для сильных взаимодействий сохраняется изоспин, странность и барионное число; для слабых — не сохраняется четность и т. д. Поэтому риманова геометрия общей теории относительности, соответствующая отсутствию какой-либо однородности 4-пространства, отвечает предельно слабому, гравитационному взаимодействию. В этом смысле риманова геометрия и общая теория относительности не включается в рамки эрлангенской программы Ф. Клейна, как отметил Картан [27].

Можно пытаться искать наличие некоторой однородности для гравитации и существование группы, обобщающей группу Лоренца. (Если бы это имело место для реального гравитационного поля, то естественно было бы допустить наличие еще более слабых взаимодействий, связанных с отсутствием однородности.) Для ее отыскания предположим, что параметры преобразований Лоренца являются не константами, а функциями координат; иначе говоря, перейдем к локальной группе. Можно исходить либо из бесконечно малых поворотов в касательном пространстве [28], либо сразу из конечных преобразований [29, 30]. Тогда в уравнениях поля появятся дополнительные члены, содержащие производные от параметров поворота, и для устранения этих членов с

целью сохранения инвариантности приходится ввести компенсирующие члены, которые можно считать обязанными некоторому полю. Тогда оказывается, что компенсирующее поле, введенное путем перехода от постоянных к локальным параметрам группы Лоренца, играет роль гравитационного поля, по крайней мере в отношении членов взаимодействия (но в общем случае может содержать вклад от кручения наряду с искривлением). Это проверяется для случаев скалярных или псевдоскалярных частиц в уравнении Клейна — Гордона, и спинорных частиц в уравнении Дирака, что означает получение новым способом коэффициентов связности.

Указанная процедура вполне аналогична ситуации с инвариантностью уравнений относительно фазового преобразования $\psi' = \psi \exp \alpha(x)$, так как в случае, когда α не является постоянной, компенсация членов $\partial\alpha/\partial x_\mu$ происходит за счет одновременного калибровочного (градиентного) преобразования вектор-потенциала электромагнитного поля $A'_\mu = A_\mu + (\partial\alpha/\partial x_\mu)$. Вместе с Сакураи [31] можно сказать, что электромагнитное поле вводится как «компенсирующее» при переходе от постоянной к локальной фазе. С этой общей точки зрения были рассмотрены преобразования в изопространстве, приводящие к новым компенсирующим полям [32]. В случае неточного сохранения соответствующее поле обладает массой покоя (подобно пионам).

Будущее развитие интересных идей компенсирующего поля, обращающих на себя в последние месяцы все большее внимание [33—44], покажет, имеем ли мы здесь только лишь новую ценную интерпретацию эйнштейновской теории, сближающую ее с другими бозонными полями, или же речь может идти даже о более общей теории гравитации [45—47].

§ 4. Единая теория поля

В связи с попыткой Уилера построить единую картину материи — пространства-времени (в которую, впрочем, еще не удается включить фермионы) дадим классификацию геометризованных единых теорий.

Лишнерович [50] приводит классификацию всего по двум признакам: а) обобщенная связанность, б) варианты пятимерия. Эта схема является слишком узкой и не учитывает, например, топологии. Будем исходить из римановой геометрии, характеризуемой: 1) интервалом

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

с симметричными $g_{\alpha\beta}$, 2) параллельным переносом вектора $\delta A^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} A^\beta \delta x^\gamma$, где кристоффели $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ задаются через производные $g_{\alpha\beta}$, 3) эвклидовой топологией 4-пространства, 4) непрерывным характером изменения координат; кроме того, 5) имеется в виду 4-мерное пространство-время и 6) допускаются любые преобразования координат, т. е. максимальная неоднородность 4-пространства. Различные обобщения, применявшиеся в единых теориях в том или другом из указанных пунктов, выходили за рамки римановой геометрии [3]. В самом деле, геометрии Вейля, Эддингтона, Скаутена и др. вводили обобщенные $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. Вейль сверх того рассматривал конформно-инвариантные интервалы. Эйнштейн допускал несимметрию $g_{\alpha\beta}$. Пятимерные геометрии вслед за Калузой рассматривали О. Клейн, В. А. Фок, П. Иордан, О. Веблен, В. Паули, И. Тири, Э. Шмутцер, В. И. Родичев, Ю. В. Румер и др., в частности вводя или не вводя условия периодичности по пятой координате. Компоненты электромагнитного вектор-потенциала пытались вводить за счет пятого измерения, так же как за счет несимметричной метрики. В связи с изотопическими свойствами элементарных частиц, характеризующими внутренние степени свободы (изоспин, барионное число, странность; вероятно, также лептонное число) и вместе с тем взаимные связи частиц внутри изомультиплетов ($p - n$, $\Sigma^+ - \Sigma^0 - \Sigma^-$ и др.), была развита теория изопространства: 3-мерного, 4-мерного (эвклидова и псевдоэвклидова). Возникла идея объединения 4-пространства Минковского с изопространством (Иваненко — Бродский—Соколик, Хоанг—Фонг, Пайс, Юкава, Райский, Зайков и др.), и были развиты теории 6-, 7- и 8-мерных пространств разных типов [52, 53].

Уилер относится резко отрицательно к модификациям римановой геометрии типа единых теорий 20-х годов и ищет обобщения лишь в направлении топологии, вводя топологические ручки, дырки, многосвязные области при сохранении римановой геометрии и обычной топологии в малом (см. настоящую книгу). Поводом к подобным обобщениям, как подчеркивает Уилер, послужил анализ сингулярностей центрально-симметричного решения Шварцшильда (см. § 10, 12 и др. гл. I настоящей книги). Замечание Уилера о неизбежности квантовых флуктуаций метрики на самых малых расстояниях порядка универсальной длины $L^* \approx (hG/c^3)^{1/2} \approx$ $\approx 10^{-33}$ *см* (гл. 1, § 7 и 11 настоящей книги) и возможности благодаря этим флуктуациям изменения топологии, следует считать очень сильным. Недавно Ч. Мизнер и Д. Финкельштейн указали, что число переверток типа листа Мёбиуса дает даже в неквантованной теории целое число, которое они пытаются сопоставить с барионным числом или странностью [54]. Не следует ли допустить возможности перехода к дискретному 4-пространству благодаря подобным флуктуациям?

Что касается непрерывности координат, то, как известно, с целью устранения расходимостей были рассмотрены многие варианты дискретного пространства [22, 55]: примитивная решетка точек (Амбарцумян — Иваненко, Гейзенберг), операторы координат (Снайдер, см. [55]); Кадышевский [56], считая, что новая геометрия индуцирована слабым взаимодействием частиц, аналогично тому, как искривление 4-пространства обязано наличию гравитирующих масс, и проявляется при длинах волн порядка универсальной фермиевской длины $\sim 10^{-17}$ *см,* вводит искривленное импульсное пространство (М. Борн [57]). Тогда вновь получаются операторы Снайдера, причем прерывный характер пространственных и непрерывный характер временно́й координат сопоставляется несохранению пространственной и сохранению временно́й четности. Коиш [58] и И. С. Шапиро [59] использовали поле Галуа, например поле вычетов, т. е., наглядно говоря, конечное число точек в некоторой области; при этом интегралы заменяются суммами и расходимости исчезают. Теория оказывается очень жесткой

в случае дискретного пространства, как в известной мере предвидел Риман. В частности, она приводит к сохранению не пространственной, а комбинированной четности (*PC*-инвариантность).

Остановимся на теории пространства с кручением, введенного Картаном еще в 20-х годах, но не давшего ранее каких-либо физических результатов [51]. Однако недавно В. И. Родичев [60] и Р. Финкельштейн [61], а затем Ю. С. Владимиров [62] обратили внимание на то, что поведение спиноров (а не векторов и тензоров, которые только и исследовались раньше самим изобретателем спиноров Картаном) в закрученном пространстве представляет интерес, позволяя, в частности, дать геометрическую интерпретацию нелинейного добавка в спинорном дираковском уравнении (типа нашего и Гейзенберга). Пусть обобщенные коэффициенты связности несимметричны по нижним индексам:

$$\Gamma^* = \tilde{\Gamma} + C,$$

где кручение определяется несимметричной частью C, а геодезические линии определяются лишь $\tilde{\Gamma}$. Задав метрику, разлагаем коэффициенты связности на метрическую часть (кристоффели) и неметрическую часть:

$$^*\Gamma = \Gamma + G - S,$$

$$G_{\mu,\nu\sigma} = C_{\sigma\mu,\nu} + C_{\sigma\nu,\mu} + C_{\mu\nu,\sigma},$$

$$S_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2}\{^*(g_{\nu\sigma})_\mu + {}^*(g_{\mu\sigma})_\nu - {}^*(g_{\mu\nu})_\sigma\},$$

где $^*(g_{\mu\nu})_\sigma$ — обобщенная ковариантная производная, не равная нулю. Для простоты возьмем частный случай закрученного пространства, когда метрика галилеева и геодезические линии прямые, а длина вектора сохраняется при параллельном переносе ($S = 0$) (но геометрия еще неэвклидова!); тогда

$$^*\Gamma_{\sigma\mu,\sigma} = C_{\sigma\mu,\sigma} = \Phi_{[\sigma\mu\nu]}$$

антисимметрично по трем индексам и

$$^*R = \Phi_{[\alpha\beta\sigma]}\ \Phi_{[\alpha\sigma\beta]}.$$

Задавая параллельный перенос спинора в виде $d\psi = {}^*B_\sigma \psi\, dx^\sigma$, получаем

$${}^*B_\sigma = \frac{1}{4}\,{}^*\Delta_\sigma(\alpha\beta)\,\gamma(\alpha)\,\gamma(\beta) + \mathrm{i}\Gamma\varphi_\sigma,$$

где ${}^*B_\sigma$ обобщают для закрученного пространства полученные ранее (Фок — Иваненко [63, 64]; см. также [55], ч. II, § 4) выражения для искривленного пространства; здесь φ_σ — электромагнитный потенциал, ${}^*\Delta_\sigma(\alpha\beta)$ — обобщенные коэффициенты вращения Риччи. В рассматриваемом частном случае

$${}^*\Delta_{\sigma,\,\mu\nu} = \Phi_{[\sigma\mu\nu]}.$$

Из вариационного принципа

$$\delta \int \{L - b\,{}^*R\}\,(dx) = 0,$$

где

$$L = L_{\text{Дирак.}} - \frac{1}{4}\,\Phi_{[\alpha\beta\sigma]}\;P_{\alpha\beta\sigma},$$

($P_{\alpha\beta\sigma}$ — билинейное в ψ выражение плотности момента) получается дираковское уравнение (для фундаментального спинора) с нелинейной добавкой, притом псевдовекторного типа, выбранного Гейзенбергом на основе условий инвариантности по отношению к преобразованиям Паули — Гюрши и Салама — Тушека. Ю. С. Владимиров для кручения полагает

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\varphi_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial\varphi_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\right),$$

вводя потенциалы в виде антисимметричного тензора 2-го ранга, который можно рассматривать как антисимметричную часть метрического тензора. Квантование поля кручения дает его кванты — «торсионы». С другой стороны, Р. Финкельштейн пытается при помощи закрученной метрики дать геометрическую интерпретацию электродинамики и мезодинамики.

Недавно Мёллер, использовав для построения выражения энергии гравитационного поля в качестве основных величин 16 реперных компонент, пришел к уравне-

ниям, близким к теории «далекого параллелизма» Эйнштейна, причем пространство оказывается обладающим кручением. Ему представляется естественным попытаться применить добавочные 6 компонент для описания электромагнитного поля [20, 65].

Все эти интересные результаты (как и недавние работы А. Е. Левашова и О. С. Иваницкой по классическому закрученному пространству [45, 66, 67]) показывают важность рассмотрения спиноров в обобщенных геометриях, парируя в известной мере одно из возражений Уилера (гл. I, § 11.15 настоящей книги) против нелинейной спинорной теории, связанное с прежним отсутствием в ней геометрического толкования.

Нелинейная спинорная теория поля представляется перспективным вариантом единой теории всех элементарных частиц, включая гравитоны (но не продольную часть гравитационного поля). В этом отношении мы не можем солидаризироваться с Уилером, считающим идеи слияния де-Бройля, а также нелинейную спинорную теорию слишком узкими. Однако с Уилером в этом пункте можно согласиться в том, что для объяснения «естественной» картины мира, т. е. реальной части Вселенной, подверженной расширению и обладающей конкретной преимущественной концентрацией частиц, а не античастиц, положений одной только нелинейной спинорной «локальной», не космологической теории, конечно, недостаточно.

Хотя построение единой нелинейной спинорной теории поля еще далеко не завершено, за последние годы был произведен ряд интересных исследований и продолжался переход на эти позиции ряда крупных ученых (Маршак, Намбу, И. Е. Тамм и др.). Маршак и Окубо рассмотрели нелинейные спинорные уравнения как с массовым членом (наш первоначальный вариант), так и без массового члена (гейзенберговский вариант), подчеркнув неаналитическую зависимость решений от нелинейной константы l. Это согласуется с тем, что, хотя исходное «безмассовое» уравнение инвариантно относительно группы Тушека, из него в конце концов получаются уравнения нуклонов, обладающих массой и, следовательно, тушек-неинвариантные.

Гейзенберг, Дюрр и др. [68] развивают работу Намбу [69], отметившего аналогию между нелинейным членом спинорной теории и 4-фермионным членом в лагранжиане теории сверхпроводимости (Дж. Бардин, Н. Н. Боголюбов с сотрудниками). Что касается вывода не только масс протонов и констант сильной и средней связи (Гейзенберг с сотрудниками) из нелинейной спинорной теории, но и получения из нее гравитонов, то отметим любопытную оценку гравитационной константы (Грановский [70]). Из четырех функций, необходимых для получения гравитона как частицы спина 2, можно построить 4^4 матричных элемента, $16 \cdot 4^4$ инвариантных волновых функций. После разложения по полной системе дираковских матриц каждая из этих функций будет иметь множитель $1/(16 \cdot 4^4) = 2^{-12}$. Следовательно, и выражение для энергии взаимодействия будет содержать множитель $2^{-24} \approx (1/17) \cdot 10^{-6}$, что очень близко к требуемому значению $(1/15) \cdot 10^{-6}$. Этот подсчет обобщает, очевидно, на гравидинамику рассуждения при выводе зоммерфельдовской константы тонкой структуры (по существу совсем в духе Эддингтона!).

§ 5. Космология

В работах Уилера весьма характерным является стремление связать проблемы космологии и теории элементарных частиц; он подчеркивает роль нейтрино и гравитационных волн в балансе энергии Вселенной и подробно обсуждает различные реакции трансмутации частиц между собой и гравитонами. Эти обстоятельства оправдывают название настоящей книги: «Гравитация, нейтрино и Вселенная».

Одной из основных проблем космологии является выбор между моделями расширяющихся Вселенных «взрывного» фридмановского типа, обладающих началом или точкой поворота, и моделями «стационарного» типа (Хойль — Голд — Бонди). Хойль [71] отмечает трудность примирения относительно короткой шкалы времени взрывных моделей с возрастом старых звезд ($\approx 2 \cdot 10^{10}$ лет) при наилучшем эмпирическом значении хаббловской константы $h_1 \approx 75$—100 *км/сек · Мпс*.

Согласно Мак-Витти [73], метрику однородной модели, как обычно, запишем в виде

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{c^2}\,\frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2}{\left(1+\frac{kr}{4}\right)^2},$$

($k = +1, -1, 0$ соответственно для закрытой, открытой и плоской моделей), причем в стационарной модели

$$R = R_0 \exp\frac{t-T}{T},$$

а в кинематической теории Милна

$$R = ct,\quad k = -1.$$

Красное смещение

$$\delta = \frac{R(t_0)}{R(t)} - 1 = h_1(t_0 - t) - \frac{2h_1^2 - h_2}{2}(t_0 - t)^2 + \ldots,$$

где константы Хаббла:

$$h_1 = \frac{R_0'}{R_0},\quad h_2 = \frac{R_0''}{R_0} = -q_0 h_1^2$$

(причем Хойль принимает $h_1 = 1/T$, $h_2 = 1/T_2 = +h_1^2$, а Милн: $h_1 = 1/t_0$, $h_2 = 0$).

Эйнштейновская теория дает

$$8\pi G\rho = \frac{3(kc^2 + R'^2)}{R^2} - \Lambda,\quad 8\pi G\left(\frac{p}{c^2}\right) = -\frac{2R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2} - \frac{kc^2}{R^2} + \Lambda,$$

тогда как в теории Хойля имеем $\Lambda = 0$; но во втором уравнении справа добавляется член $+3(c/a)(R'/R)$ (от вектора «порождения материи»).

Согласно Мак-Витти, наилучшие значения дают значения $h_2 = -q_0 h_1^2$, $q_0 \gtrsim 1{,}5$. Следовательно, в согласии с первоначальным заключением Хаббла соотношение между светимостью и скоростью является линейным. С другой стороны, по Хойлю следовало бы взять $h_2 > 0$ (по Милну $h_2 = 0$).

Таким образом, заключения Мак-Витти (как и Сэндиджа [72]) совпадают в смысле приемлемости обычных взрывных моделей фридмановского типа и отрицания

стационарной модели Хойля. Кроме того, Мак-Витти, резко возражая против авторов, отбрасывающих космологический член, заключает, что $\Lambda < 0$. Это означает наличие универсальной силы притяжения, препятствующей разбеганию галактик, помимо обычного гравитационного притяжения. Вместе с тем пространство оказывается гиперболическим, т. е. пространством Лобачевского, если взять лучшие данные для $\rho = 10^{-31}$ $г \cdot см^{-3}$ (Оорт). Однако, как настойчиво подчеркивает Уилер, до сих пор не учитывалась плотность нейтрино и гравитационных волн, наличие которых действует в сторону благоприятствования положительной кривизне пространства, а также в пользу стационарной модели. Заметим, что применение уравнений Эйнштейна и сравнение их выводов с эмпирическими значениями как в случае однородных изотропных, так неизотропных моделей (Гекман и Шюкинг [74], А. Л. Зельманов [75]) является наиболее разумной процедурой в противоположность более формальному аргументу Уилера, который вслед за Эйнштейном говорит об априорных преимуществах модели замкнутой Вселенной. В модели Лемэтра галактики конденсировались в определенную эпоху, а в стационарной модели материя рождается непрерывно вновь за счет допущения нового поля, которое предотвращает обращение ρ в нуль за какой-либо конечный промежуток времени; тогда оказывается, что галактики непрерывно образуются за счет межгалактического газа. Вместе с тем Хойль отмечает, что в его стационарной модели, по-видимому, необходимо допустить наличие негравитационных сил для обеспечения конденсации. Если материя возникает непрерывно, то должны наблюдаться, в частности, продукты аннигиляции протонов — антипротонов и других частиц — античастиц; часть космических лучей также должна образовываться в межгалактическом пространстве. Эти следствия стационарной модели доступны экспериментальной проверке.

По мнению Хойля, открытие молодых галактик (Бэрбриджи) и, по-видимому, молодых, странных комплексов галактик Б. А. Воронцова-Вельяминова [76] качественно говорит в пользу стационарной модели, тогда как другие данные не противоречат этой теории,

связанной, как мы видим, с введением добавочных предположений, выходящих за рамки собственно эйнштейновской теории.

Однако Сэндэйдж, рассматривая существующие наблюдательные данные (полученные с помощью 200-дюймового паламарского телескопа), касающиеся величины отклонения от линейности в законе красного смещения, шкалы времени, соотношения между угловым диаметром и красным смещением, а также соотношения между красным смещением и наблюдаемой величиной, приходит (как и Мак-Витти [73]) к выводу, что данные о коэффициенте замедления расширения противоречат теории стационарной Вселенной.

Отметим возобновление дискуссии об особой точке (начало «взрыва») моделей расширяющейся Вселенной. Е. М. Лифшиц, В. В. Судаков и И. М. Халатников [77] считают, что им удалось показать существование решения, не обладающего особенностями в виде бесконечной плотности и т. д., в общем случае произвольного распределения материи.

М. Ф. Широков и И. З. Фишер [78], а также Г. И. Храпко [79] предложили в эйнштейновских уравнениях космологической проблемы, наряду с обычным усреднением распределения материи в правой части, усреднить также левую метрическую часть. При этом возникают добавочные члены, эффективно эквивалентные отрицательному давлению Хойля и Мак-Кри (или, заметим, космологическому затравочному члену). Тогда сингулярности в виде бесконечной плотности не возникают.

Обращаем также внимание на исследования А. Л. Зельмановым [80] анизотропных и неоднородных моделей Вселенной, указывающих, например, что анизотропия на ранних стадиях должна была иметь большее значение, чем ныне.

Ввиду важности обсуждения проблем космологии с новых точек зрения оказалось целесообразным поместить в качестве дополнения к настоящей книге перевод двух работ авторитетных астрономов — Дж. Мак-Витти и Ф. Хойля, которые дают ценное сравнение всех наиболее правдоподобных космологических моделей с

наблюдательными данными последнего времени (см. Дополнения III и IV). Во многих пунктах работы Мак-Витти и Хойля дополняют работы Уилера и перекрываются с ними.

Таким образом, многочисленные теоретические исследования, так же как и новые наблюдения, связывающие космологию с физикой элементарных частиц (в частности, стимулирующие работы Уилера, публикуемые в данном сборнике), в ряде пунктов продвинули наше понимание Вселенной, хотя решающих успехов следует ожидать лишь в будущем, в частности благодаря применению новых наблюдательных средств.

§ 6. Нейтрино и гравитационные волны

В данной связи приобретают большой интерес первые шаги «нейтринной астрономии» и оценки плотности нейтрино — антинейтрино во Вселенной, произведенные Дж. Уилером (настоящая книга), Я. А. Смородинским и Б. М. Понтекорво [81, 82] и В. М. Харитоновым [83]. Энергия симметричного нейтринного фона была, вероятно, на первых этапах эволюции Вселенной очень велика; она даже сейчас, вероятно, сравнима с плотностью нуклонов. Следует иметь в виду, что так как сечения взаимодействия нейтрино с веществом очень малы ($\sim 10^{-43}$ *см*^{2} для медленных и $\sim 10^{-37}$ *см*^{2} для быстрых нейтрино), то время жизни в межгалактическом веществе быстрых нейтрино будет $\sim 10^{21}$ лет. Таким образом, известная часть Вселенной практически прозрачна для нейтрино, и они могут дать ценную информацию о первых стадиях ее эволюции.

Наряду с нейтрино особую важность приобретают поиски гравитационных волн в земных и астрономических условиях и наметки «гравитационной астрономии». Наиболее подробно различные волновые решения уравнений Эйнштейна и принципиальные проекты генерации и детектирования волн рассмотрены в монографии Дж. Вебера [14] (см. также его статью в сборнике [2]).

Развивая проекты Вебера генерации и регистрации гравитационных волн при помощи колебаний в пьезоэлектрике, В. Б. Брагинский и Г. И. Рукман [18] пред-

лагают дифференциальный эксперимент, в котором применяются две группы возбужденных цилиндров, причем наблюдаются разницы потерь на гравитационное излучение при синфазном и антифазном возбуждении. Например, при возбуждении упругих продольных колебаний с относительной амплитудой 10^{-5} в системе из 10^4 цилиндров с поперечным сечением 10^4 *см*^{2} мощность гравитационного излучения составит 10^{-25} *вт* [при скорости звука $(4—5) \cdot 10^4$ *см/сек* и плотности 5 *г* · *см*$^{-3}$]. При частоте 10^6 и механической добротности 10^3 мощность, необходимая для возбуждения, будет 10^6 *вт*. При $T = 300°$ К время, необходимое для регистрации с достоверностью 0,99 сигнала со столь малой мощностью, как 10^{-25} *вт*, должно составить около 8 суток; при использовании титаната бария объем детектора должен составить 40 *м*^{3}. Таким образом, подобные опыты находятся на пределе возможностей эксперимента.

Обратим теперь внимание на предложение Н. Г. Басова и др. [16] использовать для проверки сдвига частот в поле тяготения и других гравитационных эффектов (экранировка гравитации, гипотеза уменьшения константы тяготения, анизотропии масс и др.) современные молекулярные и атомные «часы», т. е. стандарты частоты, дающие точность 10^{-10}, которая, очевидно, будет еще повышена до 10^{-12}. Тогда, в частности, опыт типа Паунда можно произвести не с γ-лучами и разностью высот в несколько метров, но с радиоволнами (например, с $\lambda = 21$ *см* в обычном генераторе Рамзея на атомах водорода со стабильностью $10^{-12} — 10^{-14}$) и расстояниями порядка радиусов орбит искусственных спутников Земли.

С помощью молекулярного генератора уже был повторен опыт Майкельсона с точностью, в 1000 раз превышающей точность оптического опыта. Отметим проект Лилестранда измерения искривления световых лучей с установок на искусственных спутниках Земли и баллонах с точностью до $0'',01$, и повторно подчеркнутую желательность и возможность наблюдения эффекта вращения и близкого эффекта релятивистской прецессии оси вращения гироскопа, находящегося на Земле или искусственном спутнике [84].

А. А. Бонч-Бруевич и Я. Э. Карисс [85] обратили внимание на возможность измерения анизотропии масс при помощи маятников и на возможность сравнения скорости гравитационного воздействия с оптическим эффектом от Солнца.

В заключение отметим предложения проверить наличие экранировки [86, 87], анизотропии массы (возможно, индуцированной распределением масс во Вселенной), предсказываемое отклонение от равенства инертной и тяжелой масс и возможные антигравитационные свойства анти-K-мезонов, превращения которых особенно чувствительны к величине и знаку массы [88], а также вековое уменьшение гравитационной константы, возможно являющееся причиной расширения Земли и Солнца [86, 87]. Таким образом, современные экспериментальные методы позволяют приступить к новым гравитационным опытам, которые будут иметь большое значение в физике элементарных частиц, гравитации и космологии.

Резюмируя, можно сказать, что ценность работ Уилера, соприкасающихся с рядом важных исследований других авторов, заключается не столько в отдельных интересных результатах, сколько в эвристическом их характере, который никого не оставляет равнодушным; даже (не столь редкие) пункты, с которыми трудно согласиться тому или другому читателю, побуждают к дальнейшим исследованиям или, наоборот, к попыткам опровержения. В этом смысле стиль Уилера (кстати сказать, трудный для перевода) напоминает манеру Эддингтона и отчасти Фейнмана. Так или иначе смелые, полные новых результатов и идей работы Уилера, несомненно, имеют большое стимулирующее значение и займут заметное место в новейшей литературе по гравитации, теории элементарных частиц и учении о Вселенной.

В заключение мы хотим выразить благодарность профессору Дж. А. Уилеру за присылку препринтов своих интересных работ, что содействовало подготовке настоящего сборника.

Д. Иваненко

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, 1955.
2. «Принцип относительности», Сборник работ классиков релятивизма, М. — Л., 1935.
3. Сборник «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, 1961.
4. Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции (27—30 июня 1961 г.), Изд. МГУ, 1961.
5. Тезисы и программа докладов 3-й Всесоюзной межвузовской конференции по теории квантованных полей и элементарных частиц (2—8 октября 1961 г.), Изд. Ужгородского университета, 1961.
6. Блохинцев Д. И., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 90.
7. Иваненко Д., Соколов А., Вестник МГУ, № 8 (1947).
8. Соколов А., Вестник МГУ, № 9 (1952).
9. Пийр И., Теоретические труды Института физики и астрономии Эстонской АН, Тарту, 1957.
10. Brill D., Wheeler J., Rev. Mod. Phys., **29**, 465 (1957). (См. перевод в сборнике «Новейшие проблемы гравитации, ИЛ, 1961.)
11. Kilmister C. W., Pre-print, King's College, London, 1961.
12. Synge J., Relativity, v. 2, General Theory, Amsterdam, 1950.
13. Петров А. З., Пространства Эйнштейна, М., 1961; Петров А. З., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 3; Кайгородов В. Р., там же, стр. 17; Голиков В. И., там же, стр. 16; Schell J. F., Journ. Math. Phys., **2**, 202 (1961); Goldberg J. N., Kerr R. P., Journ. Math. Phys., **2**, 332; **3**, 332 (1961).
14. Weber J., General Relativity and Gravitational Waves, London — New York 1961. (См. перевод: Вебер Дж., Общая теория относительности и гравитационные волны, ИЛ, 1962.) Bondi H., Endeavour, **20**, 121 (1961)
15. Иваненко Д., Бюлл. «Новые книги за рубежом», сер. А, ИЛ (1961).
16. Басов Н. Г., Крохин Д. Н., Ораевский А. Н., Страховский Г. М., Чихачев Б. М., УФН, **75**, 3 (1961).
17. Гинзбург В. Л., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 122; УФН, **63**, 119 (1957); сборник «Эйнштейн и развитие физико-математической мысли», М., 1962.

18. Брагинский В. Б., Рукман Г. И., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 133; ЖЭТФ, **41**, 34 (1961).
19. Bergmann P. G., Pre-print, 1961.
20. Møller C., Kgl. Danske Selsk. Vid., Mat.-Fys. Medd., в печати.
21. Картан Э., Геометрия Римана в ортогональном репере, Изд. МГУ, 1960.
22. Levi-Civita T., The absolute differential Calculus, London, 1927.
23. Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **33**, 63 (1961).
24. Møller C., Theory of Relativity, London, 1952.
25. Forward F. A. E., Proc. IRE (May, 1961).
26. Румер Ю. Б., Тезисы Ужгородской конференции, 1961, стр. 104.
27. Картан Э., В сборнике «Основания геометрии», М., 1956.
28. Utiyama R., Phys. Rev., **101**, 1590 (1956).
29. Бродский А., Иваненко Д., Соколик Г., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 57; Тезисы Ужгородской конференции, 1961, стр. 82.
30. Бродский А., Иваненко Д., Соколик Г., ЖЭТФ, **41**, 1307 (1961).
31. Sakurai J. J., Ann. of Phys., **11**, 1 (1960).
32. Yang C. N., Mills R. L., Phys. Rev., **96**, 191 (1954).
33. Salam A., Ward J. C., Nuovo Cimento, **19**, 165; **20**, 419, 1228 (1961).
34. Salam A., Rev. Mod. Phys., **33**, 426 (1961).
35. Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В., Препринт ОИЯИ, 1961.
36. Glashow S. L., Gell-Mann M., Gauge Theories of Vector Particles, Pre-print, 1961.
37. Gupta V., Nucl. Phys., **18**, 149 (1960); Nuovo Cimento, **19**, 580 (1961). Mandelstam S., Pre-print, 1961.
38. Nakamura H., Toyoda T., Nucl. Phys., **22**, 524 (1961).
39. Kroljkowski W., Bull. Acad. Polon. Sci., **9**, 105 (1961).
40. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **98**, 1051 (1955).
41. Bludman S. A., Phys. Rev., **100**, 372 (1955).
42. Ikeda M., Miyachi Y., Progr. Theor. Phys., **16**, 527 (1956).
43. Майер М. Е., Препринт ОИЯИ, Р-212, 1958.
44. Fujii Y., Progr. Theor. Phys., **21**, 827 (1959).
45. Иваницкая О. С., Левашов А. Е., Тезисы Ужгородской конференции, 1961, стр. 63.
46. Воронцов В. И., Левашов А. Е., Тезисы Ужгородской конференции, 1961, стр. 64.
47. Kibble T. W. B., Journ. Math. Phys., **2**, 212 (1961).

48. de Witt B., Journ. Math. Phys., **2**, 151 (1961).
49. Sciama D., Ann. Inst. Poincaré, **17**, § 11 (1961).
50. Lichnerowicz A., Theories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme, Paris, 1955.
51. Møller C., Ann. of. Phys., **12**, 118 (1961); Weitzenboek R., Berl. Ber., 466 (1928); Einstein A., Berl. Ber., 156, 217 (1929); Levi-Civita T., Berl. Ber., 137 (1929); 401 (1930).
52. Иваненко Д., Соколик Г., Nuovo Cimento, **6**, 226 (1957); Бродский А., Иваненко Д., ДАН СССР, **120**, 995 (1958).
53. Хоанг Фонг, Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 114.
54. Finkelstein D., Misner A., Ann. of. Phys., **3**, 230 (1959).
55. Соколов А., Иваненко Д., Квантовая теория поля, ч. II, М., 1951.
56. Кадышевский В. Г., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 88; ЖЭТФ, **41**, № 6 (1961).
57. Born M., Proc. Roy. Soc., **A 165**, 291 (1938).
58. Coish H. R., Phys. Rev., **114**, 383 (1959).
59. Шапиро И. С., Nucl. Phys., **21**, 474 (1960).
60. Родичев В. И., ЖЭТФ, **40**, 1469 (1961); Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 75.
61. Finkelstein R., Ann. of Phys., **12**, 200 (1960), **15**, 223 (1961).
62. Владимиров Ю. С., Тезисы Ужгородской конференции, 1961, стр. 89.
63. Фок В. А., Иваненко Д., Phys., Zs., **30**, 648 (1929); Compt. Rend., **188**, 1470 (1929).
64. Фок В. А., Zs. f. Phys., **57**, 216 (1929).
65. Møller C., Ann. of Phys., **12**, 118 (1961).
66. Левашов А. Е., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 69 и 72.
67. Иваницкая О. С., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 74.
68. Duerr, Heisenberg W. *at al.*, Zs. f. Naturforsch., **14a**, 441 (1959). (См. перевод в сборнике «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, 1959).
69. Nambu Y., Доклад на 10-й Рочестерской конференции, 1960.
70. Грановская Я. И., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 100.
71. Hoyle J., Proc. Phys. Soc., **A77**, 1 (1961). (См. Дополнение IV настоящей книги.)

72. Sandage A., Astrophys. Journ., **133**, 355 (1961).
73. McVittie G. C., Доклад на конференции в Руайомоне — Париже, 1959. (См. Дополнение III настоящей книги.)
74. Heckmann O., Schuecking E., Handbuch der Physik, Bd. 53, 1959, S. 489, 520.
75 Зельманов А. Л., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 145.
76. Воронцов-Вельяминов Б. А., Trans. of 10 Congr. Astr. Union, Москва, 1958.
77. Лифшиц Е. М., Судаков В. В., Халатников И. М., ЖЭТФ, **40**, № 6 (1961); Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 142; Phys. Rev. Lett., **6**, 311 (1961).
78. Широков М. Ф., Фишер И. З., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 143.
79. Храпко Г. И., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 144.
80. Зельманов А. Л., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 145; ДАН СССР, **135**, 1367 (1960).
81. Смородинский Я. А., Понтекорво Б. М., ЖЭТФ, **41**, 239 (1961).
82. Смородинский Я. А., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 170.
83. Харитонов В. М., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 152.
84. Зельманов А. Л., Тезисы 1-й Советской гравитационной, конференции, 1961, стр. 156.
85. Бонч-Бруевич А. А, Карисс Я. Э., Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 141.
86. Egyed L., Zs. f. Geophys., **24**, 260; Ann. Univ. Budapest, **3**, 35 (1960).
87. Иваненко Д., Сагитов М., Вестник МГУ, № 6 (1961).
88. Подгорецкий М. И., Оконов Э. О., Хрусталев О. А. Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, 1961, стр. 134.

НЕЙТРИНО, ГРАВИТАЦИЯ И ГЕОМЕТРИЯ

Лекции в Международной школе физики им. Энрико Ферми (Варенна)

ВВЕДЕНИЕ

Центральная роль нейтрино в физике элементарных частиц

Интерес к физике нейтрино очевиден не только из очень важных исследований проблемы четности в последние два года, но также из превосходных и систематических курсов лекций по слабым взаимодействиям и превращениям элементарных частиц, прочитанных в летней школе в Варенне. Сейчас нельзя в одной лекции, как это было возможно несколько лет назад, исчерпывающим образом изложить теорию β-распада, которая не имела бы отношения к нейтрино. Внушительные эксперименты Рейнса и Коуэна с сотрудниками [1] вполне убедили нас в том, что нейтрино переносит энергию через пространство.

Нейтрино обнаруживается ныне в «фамильном дереве» каждой элементарной частицы: в мезонных распадах

$$\mu \to e + \nu + \bar{\nu}, \quad \pi \to \mu + \nu, \quad K \to \mu + \nu \tag{1}$$

и, следовательно, также в родословных тяжелых частиц; каждая из последних может поглощать или испускать, а также может быть приведена в возбужденное состояние с последующим испусканием π- или K-мезона:

$$\text{Барион} \to (\pi\text{- или } K\text{-мезон}) \to \nu. \tag{2}$$

Нейтрино представляет собой единственный фермион, не имеющий массы и заряда. Оно переносит энергию со скоростью света. Невозможно каким-либо образом «догнать» нейтрино и привести его в состояние покоя. В этом смысле нейтрино имеет скорее характер поля, чем частицы, в противоположность, например, электрону. Таким образом, можно считать, что для нейтринного

поля не существует проблем внутренней структуры в том же смысле, как это имеет место и в случае электромагнитного поля. Следовательно, нейтрино есть единственное известное нам поле Ферми, которое является истинно простым и фундаментальным. Это единственное поле, которое имеет спин 1/2 и антисимметричную статистику и которое можно считать фундаментальным в том же смысле, что и гравитационное и электромагнитное поля. Если мы хотим знать, почему и как спин 1/2 и статистика Ферми — Дирака приложимы к элементарным частицам, естественно начать с нейтрино. Физика нейтрино занимает центральное место в физике элементарных частиц.

Таблица 1

Сравнение эффективной энергии взаимодействия Ферми g_β/L^3, энергии гравитационного взаимодействия двух протонов GM^2/L, энергии электростатического взаимодействия e^2/L и энергии флуктуаций поля $\hbar c/L$

Сравнение дается при различных предположениях относительно расстояния L [1]). (Все энергии даны в *эв*.)

Расстояние L, *см*	Комптоновская длина волны λ электрона $\hbar/mc$, $4\cdot10^{-11}$	Классический радиус электрона e^2/mc^2, $3\cdot10^{-13}$	Комптоновская длина волны λ нуклона $\hbar/Mc$, $2\cdot10^{-14}$	Характеристическая длина L флуктуаций метрики $(\hbar G/c^3)^{1/2}$ $2\cdot10^{-33}$
Энергия гравитационного взаимодействия двух нуклонов	$2\cdot10^{-33}$	$3\cdot10^{-31}$	$4\cdot10^{-30}$	$4\cdot10^{-11}$
Эффективная энергия β-взаимодействия, сконцентрированная в области с размерами $\sim L$	10^{-6}	3	10^4	10^{61}
Энергия электростатического взаимодействия	$4\cdot10^3$	$5\cdot10^5$	$7\cdot10^6$	$7\cdot10^{25}$
Энергия флуктуаций	$5\cdot10^5$	$7\cdot10^7$	$9\cdot10^8$	10^{28}

[1]) Мы благодарны д-ру С. Л. Глэшоу за участие в составлении таблицы.

Слабость нейтринных взаимодействий

Вопреки только что подчеркнутой важности нейтрино, его взаимодействия долго рассматривались как слабые по сравнению со всеми другими, кроме гравитационных. Количественное сравнение двух слабых взаимодействий зависит от некоторых допущений о масштабе длин, относящихся к β-взаимодействию, поскольку величины

$$GM_p^2 = 6{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-24})^2 = 1{,}7 \cdot 10^{-55}\ эрг \cdot см \quad (3)$$

и

$$g_\beta = 1{,}3 \cdot 10^{-49}\ эрг \cdot см^3,$$

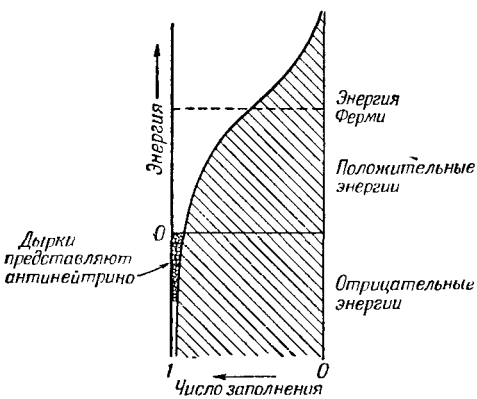
характерные для двух связей, имеют разные размерности (табл. 1). Слабость β-взаимодействия нейтринного поля представляет собой фундаментальную особенность природы, которой пока не было дано удовлетворительного объяснения.

Законы сохранения и равновесие в нейтринной физике

Процессы испускания и поглощения нейтрино обеспечивают способ достижения равновесия. Какова же природа такого идеального состояния равновесия? Анализ Ферми теплового равновесия частиц, подчиняющихся антисимметричной статистике, говорит о том, что для характеристики этого равновесия одной температуры недостаточно. Само существование температуры связано с тем фактом, что полная энергия системы взаимодействующих частиц сохраняется. Однако мы знаем, что для системы фермионов существует другой первый интеграл уравнений движения: разность между числом частиц и античастиц, или, в нашем случае, лептонное число. Вследствие этого, как известно, не только температура $T = kT_{(\text{градусы})}$, но также и энергия Ферми μ_ν необходима для определения (фиг. 1) среднего числа заполнения нейтринного состояния, имеющего энергию E:

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp[(E-\mu_\nu)/T]+1}. \quad (4)$$

Когда энергия Ферми положительна и больше или по крайней мере сравнима с тепловой энергией T, как показано на диаграмме (см. фиг. 1), в равновесии число нейтрино превосходит число антинейтрино. Когда энергия Ферми равна нулю, число частиц и дырок одинаково. В этом случае типичная энергия тех и других будет порядка T,



Фиг. 1. Равновесное распределение нейтрино, сходное с аналогичным законом, следующим из электронной теории металлов.

При указанных здесь условиях число антинейтрино значительно меньше числа нейтрино.

число заполненных состояний ν или $\bar{\nu}$ в единичном объеме составит $\sim (T/\hbar c^3)$ и общая плотность энергии [1])

$$\varepsilon_\nu = \frac{7\pi^2}{120}\frac{T^4}{(\hbar c)^3}. \qquad (5а)$$

Для сравнения приведем плотность энергии электромагнитного излучения черного тела:

$$\varepsilon_{\text{э. м.}} = \frac{8\pi^2}{120}\frac{T^4}{(\hbar c)^3}, \qquad (5б)$$

которая немного выше плотности энергии нейтрино, поскольку числа заполнения в этом случае не ограничены

[1]) См. [5]. В этом выводе предполагается, что задание импульса нейтрино (или антинейтрино) единственным образом определяет направления их спинов.

единицей, как это имеет место для нейтрино в силу принципа Паули.

Так же как излучатель электромагнитной энергии не может находиться в состоянии теплового равновесия, если окружающее пространство не заполнено излучением черного тела при температуре T, система элементарных частиц, способная излучать и поглощать нейтрино, не может находиться в состоянии равновесия, пока температура T и энергия Ферми μ_ν нейтринного излучения не будут согласовываться с T и μ_ν системы элементарных частиц.

Пока большое количество материи не сжато до ядерной плотности, ее прозрачность остается, конечно, очень высокой[1]). Следовательно, обычно невозможно поддерживать плотность нейтринной радиации вокруг материи на уровне, достаточном для обеспечения β-распадного равновесия этой материи. Только в случае, когда температура материи падает до абсолютного нуля и ее энергия Ферми μ_ν также становится равной нулю, в принципе возможно сохранение β-распадного равновесия для материи при отсутствии вокруг нее нейтрино.

Гамов и Шёнберг [7] еще давно подчеркивали, что нормальная звездная система не в состоянии удержать нейтрино. Они указали на нестабильность разогретой сжатой звездной материи по отношению к β-распаду в том смысле, что урка-процесс

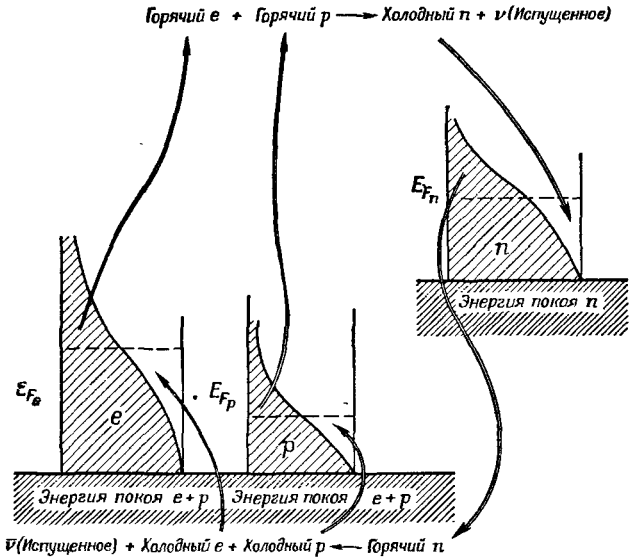
$$\left.\begin{aligned} &p\,(\text{горячий}) + e\,(\text{горячий}) \rightarrow \\ &\qquad \rightarrow n\,(\text{холодный}) + \nu\,(\text{испущенное}), \\ &n\,(\text{горячий}) \rightarrow p\,(\text{холодный}) + e\,(\text{холодный}) + \\ &\qquad + \bar{\nu}\,(\text{испущенное}) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

будет развиваться все быстрее с повышением температуры и плотности звезды на последних стадиях гравитационного сжатия (фиг. 2). В настоящее время мы недостаточно знаем об энергии, освобождающейся в сверхновых звездах, чтобы сказать, доминирует ли урка-процесс в любой из наблюдаемых вспышек. По мере развития теории и средств наблюдения эволюции звезд, по-види-

[1]) Отиосительно прозрачности материи по отношению к нейтрино в зависимости от плотности и температуры см. [6].

мому, увеличиваются возможности проверки предсказаний физики нейтрино.

Снова приходится рассматривать звезды, когда возникает вопрос, какова та наибольшая масса *холодной*



Фиг. 2. Энергия в форме нейтрино и антинейтрино может бесконечно рассеиваться за счет урка-процесса до тех пор, пока ядерная материя находится под давлением и нагрета и пока не существует „контейнера", который дает возможность нейтрино и антинейтрино прийти в термодинамическое равновесие с этой материей. В каждом случае E_F означает соответствующую энергию Ферми. Если бы температура была равна нулю, то точное равновесие и отсутствие реакций обеспечивалось бы равенством

$$(M_p c^2 + E_{F_p}) + (M_e c^2 + E_{F_e}) = (M_n c^2 + E_{F_n}).$$

(Диаграмма Ювемы.)

материи, пришедшая к последней стадии термоядерной эволюции, которая может выдерживать собственное гравитационное сжатие. Разнообразные аргументы указывают на то, что *не существует стабильного конечного состояния для системы,* состоящей из более чем $1{,}5 \cdot 10^{57}$ нуклонов, что примерно на 20% превышает количество

нуклонов в Солнце[1]). Но ничто не препятствует нам добавить столько нуклонов, сколько мы желаем! Отсутствие какого-либо стабильного решения при большем числе нуклонов вызывает серьезные сомнения в справедливости закона сохранения числа нуклонов при крайних условиях, когда плотность материи во много раз больше ядерной. Поэтому возникают также сомнения, сохраняется ли даже для одного ядра количество нуклонов в нем за большой промежуток времени, в особенности когда ядро подвергнуто давлениям, высоким с точки зрения ядерных масштабов.

До настоящего времени не обнаружено ни малейшего отступления от закона сохранения нуклонов. Было найдено, что нуклоны имеют период полураспада 10^{24} лет или больше для любого типа распада, сопровождающегося испусканием ионизирующего излучения высокой энергии [9]. Если нуклоны действительно распадаются под большим давлением, то динамика такого процесса полностью неизвестна[2]). Однако представляется разумным оставить три закона сохранения: 1) закон сохранения энергии-импульса, 2) закон сохранения электрического заряда, 3) несколько обобщенный вариант закона сохранения лептонного числа, чтобы при тепловом равновесии равновесие между процессами распада и образования регулировался известной энергией Ферми μ_ν. Короче говоря, «закон сохранения нуклонов» должен быть принят сегодня не как теорема, а как вопрос; и вопрос этот будет ставиться тем острее, чем дольше остаются без решения трудности, связанные со сверх-массами. Эти трудности лежат на еще неисследованной границе между гравитацией и физикой элементарных частиц.

Элементарные слабые взаимодействия

Проблема рассеяния фотонов на фотонах и тесно связанная с ней проблема когерентного рассеяния электро-

[1]) Обзор литературы и новые вычисления см. в работе [8].

[2]) А. Бродский и Д. Иваненко [10] предположили, что закон сохранения барионов справедлив только по модулю 4 (см. также [11]).

магнитного излучения кулоновским полем атомных ядер, как известно, сыграли важную роль в эволюции новейшей квантовой электродинамики. Поэтому представляются уместными аналогичные вопросы о взаимодействии нейтринного и гравитационного полей друг с другом и с элементарными частицами. В связи с этим наиболее интересными являются процессы

$$\nu + \bar{\nu} \to \begin{pmatrix} \text{пара} & e^- + e^+ \\ \text{или} & e^- + \mu^+ \\ \text{или} & \text{другие промежуточные состояния} \end{pmatrix} \to \nu' + \bar{\nu}' \quad (7а)$$

(нелинейный эффект в нейтринном поле, обусловленный вакуумом),

$$G\ (\text{гравитон}) + G \begin{cases} \nearrow e^+ + e^- \\ \searrow \nu + \bar{\nu} \end{cases} \quad (7б)$$

(неклассические эффекты в гравитационном поле), а также реакция

$$\bar{\nu} + e^- \to (\bar{\nu})' + (e^-)', \quad (7в)$$

которая, вероятно, сможет быть обнаружена в ближайшее десятилетие и будет служить проверкой универсальности взаимодействия Ферми.

Также большой интерес представляет новое теоретическое доказательство того, что концепция гравитационного излучения имеет определенный смысл и что некоторые простые типы гравитационных волн несут определенную положительную энергию. Возможности генерации и обнаружения гравитационных волн подверглись широкому исследованию, и серьезная экспериментальная работа в настоящее время направлена на окончательное наблюдение или установление верхней границы плотности космической гравитационной радиации. Другими словами, в настоящее время гравитационное излучение начинает занимать подобающее ему место, подобно тому, как это было несколько лет назад с нейтринным излучением.

Описание нейтринного поля в пространстве

Исторически электромагнитное поле появилось в физике в виде пары векторов, компоненты которых могут быть определены в каждой точке пространства. Лишь позднее оно было разложено на независимые гармонические колебания. Еще позже появилось квантовое описание электромагнитного поля, которое дает другой способ представления поля через квантовые числа или числа заполнения, связанные с каждой из независимых гармоник. Однако квантовая механика, очевидно, дает широкий простор в выборе представления поля. Каково бы ни было это представление, важно то, что состояние определяет амплитуду вероятности для любой мыслимой конфигурации электромагнитного поля. Эту конфигурацию можно описать заданием квантового числа каждого осциллятора поля:

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k,\ \ldots. \tag{8}$$

С таким же успехом можно задать и амплитуды каждого осциллятора поля

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_k. \tag{9}$$

В этом представлении основное состояние электромагнитного поля, например, имеет форму бесконечного произведения волновых функций гармонического осциллятора:

$$\psi = N \exp\left[-\xi_1^2 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_k^2 - \ldots\right]. \tag{10}$$

Наконец, пространственное описание поля можно дать полностью путем задания амплитуд не *осцилляторов* поля, а *самого поля* в каждой отдельной точке, например магнитного поля:

$$\mathbf{H}(x_a),\ \mathbf{H}(x_b),\ \mathbf{H}(x_c),\ \ldots\ . \tag{11}$$

При таком описании волновая функция основного состояния принимает вид

$$\psi = N \exp\left[-\frac{1}{16\pi^3\hbar c}\int \frac{\mathbf{H}(1)\cdot\mathbf{H}(2)}{r_{12}^2}\, d^3x_1\, d^3x_2\right]. \tag{12}$$

Хотя представления (8), (9) и (11) эквивалентны, удобство применения первых двух зависит от возможности применения к ним разложения Фурье для поля. Этот подход не является естественным при рассмотрении вопросов, связанных с искривленным пространством, которое должно использоваться в вопросах гравитации, геометрии и общей теории относительности. Поэтому естественно сосредоточить внимание на пространственноподобном описании квантового состояния электромагнитного или гравитационного полей или того и другого. Такое описание имеет разумный смысл и было подробно проанализировано в деталях главным образом Мизнером [12].

Чтобы завершить анализ, имеется серьезное основание искать аналогичным образом *пространственное описание квантового состояния нейтринного поля.* Для поисков такого описания, естественно, имеются и дополнительные соображения: лучше понять природу простейшего спинорного поля, подчиняющегося статистике Ферми, и посмотреть, каким образом свойства этого поля связаны с аналогичными свойствами гравитационного и электромагнитного полей.

Связь нейтринного поля с геометрией

Являются ли поля и частицы инородными объектами, движущимися на арене пространства-времени? Или же они являются объектами, некоторым образом сконструированными из пространства? Является ли метрический континуум некой магической средой, которая, будучи определенным образом искривлена, представляет гравитационное поле, будучи покрыта «рябью», представляет электромагнитное поле и, будучи локально скручена, представляет долгоживущие концентрации массы-энергии? Другими словами, является ли физика в основе своей чистой геометрией? Является ли геометрия только *ареной* или же она есть всё?

Мы очень далеки сегодня от того, чтобы высказать окончательное суждение о подобном взгляде на физику, в развитие которого внесли вклад Риман, Клиффорд и Эйнштейн. Однако проблема «нейтрино, грави-

тации и геометрии» позволяет нам по-новому посмотреть на этот старый вопрос. Можно констатировать прогресс за последние годы в установлении чисто геометрической трактовки гравитации, заряда, массы и электромагнитного поля. Мы снова вернемся к перечисленным здесь в обратном порядке вопросам об отношении простейшего фермионного поля к геометрии, о том, как сформулировать пространственное описание нейтринного поля, о слабых взаимодействиях и о законе сохранения нуклонов.

Глава I

ГЕОМЕТРОДИНАМИКА

ЧИСТО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ГРАВИТАЦИИ, ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА, НЕКВАНТОВАННОГО ЗАРЯДА И ДОЛГОЖИВУЩИХ ЧИСТО КЛАССИЧЕСКИХ КОНЦЕНТРАЦИЙ МАССЫ-ЭНЕРГИИ

Тот факт, что общая теория относительности Эйнштейна и уравнения Максвелла могут быть объединены на основе чистой геометрии без введения новых постулатов и без каких-либо изменений, стал вообще известен лишь недавно [13], хотя основные уравнения такой «исконно единой теории поля» были давно получены Райничем [14, 15]. Так как этот анализ имеет дело исключительно с геометрией и ее изменениями во времени, эту теорию лучше всего назвать «геометродинамикой», что, несомненно, лучше отражает существо дела, чем название «общая теория относительности плюс электромагнетизм».

§ 1. Измерительные стержни

Измерительные стержни и атомные часы играют важную роль при изложении общей теории относительности. Однако ссылки на атомы, жесткость и упругость вовсе не требуются, поскольку общая теория относительности является классической теорией. Постоянная Планка должна быть введена в теорию при квантовании, а не включаться в нее с самого начала на классическом уровне теории. Еще меньше сведений требуется об атомах и их свойствах для определения величин, с которыми имеет дело общая теория относительности.

Более того, представляется сомнительным, дают ли обычные стандарты длины действительно точно определенный метр. Длина парижского эталона метра, например, есть кратное постоянной металлической решетки. Следовательно, этот метр есть некоторая безразмерная

величина, кратная основной единице $\hbar^2/me^2$, которая характеризует все атомные размеры:

$$L_1 = N_1\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right). \tag{13}$$

Недавно вошел в употребление метр, определенный как некоторое число длин волн, соответствующих некоторой спектральной линии, принадлежащей одному из изотопов ртути. Расщепление двух энергетических уровней, между которыми совершается этот переход, мало зависит от спин-орбитальной связи и других эффектов тонкой структуры. Таким образом, длина волны линии ртути выражается через ту же комбинацию констант ($\hbar^3c/me^4$), которые определяют длины волн характеристических линий спектра водорода. Следовательно, заново определенный метр является кратным этой другой атомной единицы

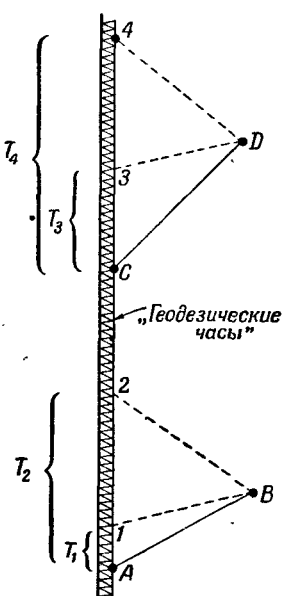
$$L_2 = N_2\left(\frac{\hbar^3 c}{me^4}\right). \tag{14}$$

В основе этих двух определений метра лежат атомные единицы, отличающиеся безразмерным множителем

$$\frac{\hbar c}{e^2} = 137{,}0366 \pm 0{,}0005.$$

Дирак [16], Дике [17, 18] и другие выдвинули предположение, что $\hbar c/e^2$ и другие безразмерные физические отношения величины, возможно, меняются со временем по мере расширения Вселенной. Наиболее надежные данные при определении соотношения между красным смещением и расстоянием [1]) приводят к значению обратной константы Хаббла, равному $14 \cdot 10^9$ лет. Другими словами, на протяжении 14 лет расстояния увеличиваются на 10^{-9}. За эти 14 лет некоторые безразмерные физические константы могут претерпевать изменения, согласно гипотезе Дирака, не слишком отличающиеся по порядку от 10^{-9}. В этом случае два метра, L_1 и L_2, не будут более совпадать друг с другом; поэтому они не могут быть более в согласии со стандартным метром общей теории относительности, и нет никакой уверенности в том, что

[1]) См., например, добавление Сэндэйджа в книге [8].



Фиг. 3. Устройство для измерения неизвестного интервала с помощью стандартного интервала (геометродинамический метр) AB в плоской области пространства-времени.

Среди различных идеальных пробных частиц, движущихся в пространстве-времени, выбрана одна (α), проходящая через события A и C. Вторая пробная частица (β), движущаяся по параллельной мировой линии на некотором расстоянии от α, определяет вместе с α „геодезические часы". Свет от α достигает β и возвращается к α через характерное собственное время τ. Зигзаги повторяют этот интервал бесконечное число раз в прошлое и будущее.

какой-либо из них сможет служить надежным стандартом. Тем самым пока что стержни и атомные часы не могут считаться надежными для измерения таких фундаментальных для общей теории относительности величин, как пространственно-временные интервалы.

Поэтому существенно, что общая теория относительности сама содержит процедуры сравнения любого интервала CD со стандартным интервалом AB, что было впервые показано Марзке [19]. Это сравнение, во-первых, не использует масштабы или атомные часы и, во-вторых, не использует координаты для обозначения точек в пространстве и во времени. Вместо этого точка — будь то A, B, C, D или какая-либо другая — рассматривается, согласно Эйнштейну, как пересечение мировых линий двух пробных частиц или одной пробной частицы со световым конусом, или трех световых конусов и т. д. Измерительная техника сама по себе использует световые конусы и траектории нейтральных пробных частиц. Эти измерительные средства применяются вместо линейки и циркуля в геометрии Эйнштейна.

Две первоначально параллельные мировые линии и свет, распространяющийся туда и обратно между ними, образуют, согласно Марзке, «геодезические часы». Эти часы отсчитывают во

времени очень короткий временно́й интервал t (*сек*) или соответствующий ему интервал ковремени τ (*см*). Когда кривизна пространства в интересующей нас области порядка L незначительна, здесь можно положиться на показания наших часов. Тогда AB и CD сравниваются, как показано на фиг. 3. Интервал $\mathcal{J}_{AB}$ проектируется на геодезические часы посредством двух световых лучей. Пусть точка B имеет координаты x, T относительно точки A, взятой в качестве начала отсчета локальной лоренцовской системы, где геодезические часы покоятся; тогда

$$\begin{aligned} T_1 &= T - x, \\ T_2 &= T + x, \\ T_1 T_2 &= T^2 - x^2 = \mathcal{J}^2_{AB}. \end{aligned} \tag{15}$$

Ковремена T_1 и T_2 непосредственно выражаются через интервал повторения τ геодезических часов; например, на диаграмме $T_1 = 5\tau$ и $T_2 = 21\tau$. Следовательно, характеристическое время часов выражается через стандартный интервал

$$\tau = \frac{\mathcal{J}_{AB}}{(5 \cdot 21)^{1/2}},$$

или, в общем виде,

$$\tau = \mathcal{J}_{AB} (N_1 N_2)^{1/2}. \tag{16}$$

Таким же образом интервал $\mathcal{J}_{CD}$ может быть записан в виде

$$\mathcal{J}_{CD} = (T_3 T_4)^{1/2} = (N_3 N_4)^{1/2} \tau. \tag{17}$$

В конечном итоге *неизвестный интервал выражается через геометродинамический стандарт длины:*

$$\mathcal{J}_{CD} = \left(\frac{N_3 N_4}{N_1 N_2}\right)^{1/2} \mathcal{J}_{AB} \tag{18}$$

или, в нашем примере,

$$\mathcal{J}_{CD} = \left(\frac{12 \cdot 28}{5 \cdot 21}\right)^{1/2} = 1{,}790 \mathcal{J}_{AB}.$$

Когда эффективный радиус кривизны пространства не является более пренебрежимой величиной, а представляет собой величину порядка R, геодезические часы

дают относительную ошибку порядка $(L/R)^2$. В этом случае удобно рассматривать последовательность повторяющихся интервалов τ не для одних часов, а для последовательности N часов. Две мировые линии частиц в каждых часах теперь должны оставаться примерно

	AZORES	BERLIN	BOMBAY	BUENOS AIRES	CAIRO	CAPETOWN	CHICAGO	GUAM	HONOLULU	LONDON	MELBOURNE	NEW YORK	PANAMA	RIO DE JANEIRO	SAN FRANCISCO	SANTIAGO	SHANGHAI	SINGAPORE	TOKYO	WELLINGTON
AZORES		2148	5930	5385	3325	5670	3305	8985	7421	1562	12190	2604	3918	4312	5114	5718	7324	8138	7370	11475
BERLIN	2148		3947	7411	1873	5949	4458	7158	7384	575	9982	4026	5902	6246	5744	7842	5823	6206	8623	11384
BOMBAY	5930	3947		9380	2698	5133	8144	4838	8172	4526	6140	7875	9832	8438	8523	10929	3219	2425	4247	7752
BUENOS AIRES	5385	7411	9380		7428	4332	5558	10516	1653	6319	7336	5795	3378	1230	6487	731	12295	9940	11601	6341
CAIRO	3325	1823	2698	7428		4476	6231	7175	8925	2218	8120	5701	7230	6242	7554	8100	5290	5152	6005	10360
CAPETOWN	5670	5949	5133	4332	4476		8551	8918	11655	5975	6510	7845	7090	3850	10340	5080	8179	6025	9234	7149
CHICAGO	3305	4458	8144	5598	6231	8551		7510	4315	4015	9837	711	2320	5320	1855	5225	7555	9475	6410	8465
GUAM	8985	7158	4838	10516	7175	8918	7510		3896	7625	3457	8115	9220	11710	5952	9946	1945	3990	1506	4208
HONOLULU	7421	7384	8172	7653	8925	11655	4315	3896		7320	5581	5051	5347	8400	2409	6585	5028	6814	3940	4678
LONDON	1562	575	4526	6319	2218	5975	4015	7625	7320		10590	3500	5310	5747	5440	7275	5841	6818	6050	11790
MELBOURNE	12190	9952	6140	7336	8120	6510	9837	3457	5581	10590		10548	9211	8340	7970	7130	4967	3768	5172	1655
NEW YORK	2604	4026	7875	5795	5701	7845	711	8115	5051	3500	10548		2291	4810	2568	5134	7460	9617	6846	9067
PANAMA	3918	5902	9832	3378	7230	7090	2320	9220	5347	5310	9211	2291		3391	3349	3400	9430	11800	8568	7580
RIO DE JANEIRO	4312	6246	8438	1230	6242	3850	5320	11710	8400	5747	8340	4810	3391		6653	1852	11510	9875	11600	7518
SAN FRANCISCO	5114	5744	8523	6487	7554	10340	1855	5952	2407	5440	7970	2568	3349	6655		5960	6245	8440	5250	6800
SANTIAGO	5718	7842	10929	731	8100	5080	5325	9946	6935	7275	7130	5134	3400	1852	5960		11850	10270	10850	5925
SHANGHAI	7324	5823	3219	12295	5290	8179	7555	1945	5028	5841	4967	7460	9430	11510	6245	11850		2395	1095	6080
SINGAPORE	8138	6206	2425	9940	5152	6025	9475	3990	6814	6818	3768	9617	11800	9875	8440	10270	2395		3350	5360
TOKYO	7370	8623	4247	11601	6005	9234	6410	1506	3940	6050	5172	6846	8568	11600	5250	10850	1095	3350		5730
WELLINGTON	11475	11384	7752	6341	10360	7149	8465	4208	4678	11790	1655	9067	7580	7518	6800	5925	6080	5360	5730	

Фиг. 4. Расстояние между близлежащими точками пространства-времени дает всю необходимую согласно Риману и Эйнштейну информацию для полного определения геометрии 4-мерного многообразия, включая все детали его кривизны. При этом не требуется никакого упоминания о каких-либо координатах. Требуемая информация при этом описании природы в одном отношении является менее исчерпывающей, а в другом отношении более обширна, чем информация типа содержащейся в таблице расстояний между некоторыми городами по воздушным путям: более длинные расстояния не требуются, ибо они могут все быть получены на основании более коротких. Однако более короткие расстояния должны быть приведены во всех деталях. (Таблица расстояний по воздуху воспроизведена из „The 1960 General Electric Diary".)

параллельными только на меньшем расстоянии L/N. Относительная ошибка для каждых часов будет порядка $(L/NR)^2$. Полная относительная ошибка всего процесса распространения от AB до CD есть

$$N\left(\frac{L}{NR}\right)^2 \tag{19}$$

и может быть сделана сколь угодно малой путем увеличения числа часов.

Анализ Марзке может быть коротко резюмирован словами: «измерительные стержни без измерительных стержней». Любой интервал $\mathcal{I}_{CD}$ может быть выражен через интервал $\mathcal{I}_{AB}$ между двумя выбранными вспышками света, которые вполне могли произойти пятьдесят лет назад. Никаких ссылок на координаты не требуется, как и подобает чисто геометрической теории.

Сказать, что отношение $\mathcal{I}_{CD}/\mathcal{I}_{AB}$ не зависит от пути, на котором происходит сравнение, значит сделать заявление огромного содержания, заявление, которое в принципе может быть проверено тысячами экспериментов (фиг. 4). Фундаментальной гипотезой общей теории относительности является утверждение, что физический мир в этом смысле есть риманово многообразие, но это вместе с тем гипотеза, доступная проверке. Наиболее очевидный способ проверки требует возвращения к атомной физике, а именно использования полной тождественности между атомами, прошедшими различные пути в пространстве-времени.

§ 2. Ничего, кроме длин

Представляется непоследовательным употребление футов для измерения ширины шоссе и миль для измерения его длины. Однако от этого недалеко уходит измерение интервалов в одном направлении в секундах,

Фиг. 5. Отклонение луча света в гравитационном поле.

а в других — в сантиметрах. Множитель перехода от одной из этих метрических единиц длины к другой, $3 \cdot 10^{10}$, в такой же степени вещь историческая и случайная по своему характеру, как и множитель перехода 5280 от одной английской единицы длины к другой. Чтобы оставить попытки «объяснить» $3 \cdot 10^{10}$, достаточно начать попытки «объяснять» 5280.

Согласно общей теории относительности, время не есть новое и независимое понятие, а по существу есть длина; масса также есть длина, выраженная другим способом. Например, масса m^* (*см*) Солнца может быть определена путем измерения отклонения θ света (фиг. 5), проходящего на расстоянии r от него:

$$m^* = \frac{r\theta}{4} = (6{,}94 \cdot 10^{10}\ см/4) \times$$

$$\times \begin{cases} 8{,}50 \cdot 10^{-6}\ радиан\ \text{(предсказано)}, \\ (9{,}8 \pm 1{,}3) \cdot 10^{-6}\ \text{(наблюдение 1947 г.)}, \\ (8{,}2 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-6}\ \text{(наблюдение 1952 г.)} \end{cases} \qquad (20)$$

или

$$m^* = 1{,}5 \cdot 10^5\ см.$$

Выражение для массы m (в граммах) имеет вид

$$m = \frac{c^2}{G} m^* = (1{,}347 \cdot 10^{28}\ г/см)(1{,}5 \cdot 10^5\ см) = 2{,}0 \cdot 10^{33}\ г. \qquad (21)$$

Однако множитель перехода в этой формуле в той же мере является делом соглашения, как c и 5280. Масса, время и длина в равной степени являются объектами чистой геометрии. То же относится и к электромагнитным полям. В принципе они могут быть определены с помощью кривизны $R_{\mu\nu}$, создаваемой ими в пространстве-времени:

$$R_{\mu\nu}(см^{-2}) \sim (\text{Поле})^2. \qquad (22)$$

«Геометризованные» выражения $f_{\mu\nu}$ для компонент электромагнитного поля измеряются в $см^{-1}$. Они связаны с обычными компонентами поля $F_{\mu\nu}$ ($г^{1/2} \cdot см^{-1/2} \cdot сек^{-1}$, или *гаусс*, или *в/см*) формулой

$$f_{\mu\nu} = \left(\frac{G^{1/2}}{c^2}\right) F_{\mu\nu} = (2{,}874 \cdot 10^{-25}\ см^{-1}/гаусс)\, F_{\mu\nu}. \qquad (23)$$

Тот же множитель перехода связывает обычную меру заряда

$$q\ (г^{1/2} \cdot см^{3/2} \cdot сек^{-1}\ \text{или ед. CGSE})$$

и чисто геометрическую меру заряда q^* (*см*)

$$q^* = \left(\frac{G^{1/2}}{c^2}\right) q = (2{,}874 \cdot 10^{-25}\ см/\text{ед. CGSE})\, q. \qquad (24)$$

Короче говоря, классическая физика — гравитация плюс электромагнетизм — оперирует только *с длинами и ни с чем другим*; однако во многих случаях исторически сложившаяся терминология скрывает этот факт.

Имеет смысл выписать основные уравнения классической физики в этих чисто геометрических единицах длины. Четыре уравнения Максвелла принимают вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_{23}}{\partial x^1}+\frac{\partial f_{31}}{\partial x^2}+\frac{\partial f_{12}}{\partial x^3}=0, && (\operatorname{div}\mathbf{h}=0),\\
&\frac{\partial f_{32}}{\partial x^0}+\frac{\partial f_{03}}{\partial x^2}+\frac{\partial f_{20}}{\partial x^3}=0, && \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots && \left(-\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial T}-\operatorname{rot}\mathbf{e}=0\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots &&
\end{aligned} \tag{25}$$

или, короче,

$$[\alpha\beta\gamma\delta]\frac{\partial f_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta}=0 \qquad (\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{26}$$

Здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам; символ [0123] имеет значение 1, а $[\alpha\beta\gamma\delta]$ меняет знак при перестановке любых двух индексов. Другие четыре уравнения Максвелла включают в себя не только напряженности электромагнитного поля

$$\left.\begin{aligned} e_x&: f_{01}\\ e_y&: f_{02}\\ e_z&: f_{03}\end{aligned}\right\}\ \text{Геометризованные компоненты напряженности электрического поля} \qquad \text{Геометризованные компоненты напряженности магнитного поля}\ \left\{\begin{aligned} f_{23}&: h_x,\\ f_{31}&: h_y,\\ f_{12}&: h_z,\end{aligned}\right. \tag{27}$$

но также компоненты метрики, которая описывает интервал между бесконечно близкими точками:

$$ds^2=g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu. \tag{28}$$

Пусть через g обозначен определитель метрического тензора, а через $g^{\mu\nu}$ — обратная матрица этого тензора. Положим также, что поднятый индекс означает результат действия этой обратной матрицы на любой тензор, так что

$$\begin{aligned} f^\alpha_\nu&=g^{\alpha\mu}f_{\mu\nu},\\ f^{\alpha\beta}&=g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}f_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{29}$$

Тогда остальные четыре уравнения Максвелла запишутся в виде

$$\frac{1}{(-g)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[(-g)^{1/2}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}f_{\mu\nu}\right]=4\pi\rho^\alpha \qquad (30)$$

или

$$\operatorname{div}\mathbf{e}=4\pi\rho^* \qquad (\alpha=0)$$

и

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}-\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial T}=4\pi\mathbf{j}^* \qquad (\alpha=1,\ 2,\ 3).$$

Плотность энергии поля $(E^2+H^2)/8\pi$ и вектор Пойнтинга $(c/4\pi)$ **[EH]** являются четырьмя из шестнадцати компонент максвелловского тензора энергии-импульса-натяжений; этот тензор после умножения на $8\pi G/c^4$ представляет собой выражение для источника в уравнениях Эйнштейна для метрики, которая определяет геометрию пространства-времени. Ковариантное обобщение оператора Даламбера $\Box g_{\mu\nu}$ в этих уравнениях достигается с помощью определенной комбинации первых и вторых производных метрического тензора, или, другими словами, комбинацией тензора кривизны Риччи $R_{\mu\nu}$ и инварианта кривизны $R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Когда поле выражено в геометризованной форме $f_{\mu\nu}$ $(см^{-1})$, эти уравнения принимают вид

$$\underbrace{R_\mu^\nu-\frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R}_{\text{Эйнштейновская кривизна}}=\underbrace{2f_{\mu\alpha}f^{\nu\alpha}-\frac{1}{2}\delta_\mu^\nu f_{\sigma\tau}f^{\sigma\tau}}_{\text{Геометризованный тензор Максвелла}}. \qquad (31)$$

Уравнение движения бесконечно малой пробной частицы имеет вид

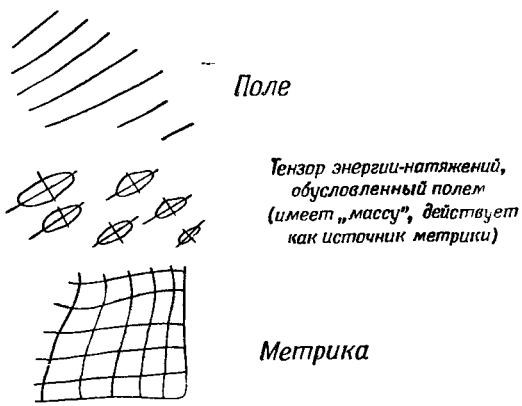
$$m^*\left(\frac{d^2x^\mu}{d\mathcal{S}^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\mathcal{S}}\frac{dx^\beta}{d\mathcal{S}}\right)=q^*f^\mu_\alpha\frac{dx^\alpha}{d\mathcal{S}}, \qquad (32)$$

где $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ — определенная комбинация метрического тензора и его первых производных.

§ 3. Нахождение электромагнитного поля на основании геометрических измерений

3.1. Следы электромагнитного поля на метрике. Поле накладывает настолько характерные отпечатки на кривизну пространства, что по ним обратно почти все-

гда можно узнать все необходимое об электромагнитном поле (фиг. 6). Даже более того, можно проверить, обязано ли искривление пространства только классическим источникам — гравитационным или электромагнитным. Не каждая мыслимая геометрия 4-мерного пространства-времени, не каждый тензор кривизны



Фиг. 6. Следы электромагнитного поля на метрике.

Эйнштейна может быть отождествлен с тензором натяжений Максвелла. Кривизна должна удовлетворять некоторым условиям для того, чтобы вообще существовало какое-либо электромагнитное поле $f_{\mu\nu}$ (либо **e** и **h**), которое может вызвать эту кривизну. Условия, накладываемые на кривизну и остающиеся в силе в общем случае, проще всего могут быть выведены для случая, когда искривление производится «нормальным» электромагнитным полем, т. е. полем, для которого отношение потока вектора Пойнтинга к плотности энергии меньше скорости света. Это отношение в точности равно скорости света для плоской волны, но оно меньше c для волны, исходящей от локализованного источника, и меньше c для суперпозиции плоских волн, распространяющихся в различных направлениях. Другими словами, в нормальном случае соотношение

$$1 \operatorname{th} 2\theta = \frac{2[\mathbf{eh}]}{\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2} \qquad (33)$$

дает определенное значение для направления единичного вектора $\mathbf{l}$ и вещественное значение для гиперболического угла θ. Допустим теперь, что это поле анализируется новым наблюдателем, чья местная лоренцова система отсчета движется со скоростью

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \mathbf{l} \operatorname{th} \theta \tag{34}$$

по отношению к прежней системе отсчета. В этой системе отсчета поток вектора Пойнтинга равен нулю [1]). Напряженности электрического и магнитного полей ($\mathbf{e}'$ и $\mathbf{h}'$ в $см^{-1}$) будут, следовательно, параллельны. Ось, которой они параллельны, назовем осью x'. Тогда в этой системе отсчета все компоненты тензора энергии-натяжений [правая часть уравнения (31)] обращаются в нуль, за исключением компонент, указанных в табл. 2.

В этой системе отсчета тензор энергии-натяжений диагонален, обладая диагональными компонентами $(-\xi^2, -\xi^2, \xi^2, \xi^2)$. Следовательно, тензор энергии-натяжений имеет два очевидных свойства: 1) его след, т. е. сумма его диагональных элементов, равен нулю; 2) его квадрат есть произведение ξ^4 на единичную матрицу. Более того, оба эти свойства *ковариантны* в том смысле, что если они выполняются в одной системе отсчета, то они выполняются во всех системах. Специальная лоренцова система отсчета помогла нам выяснить эти свойства тензора энергии-импульса-натяжений [2]) и, следовательно, те же свойства тензора кривизны Эйнштейна. Теперь можно обратить наше внимание на общую систему отсчета. Совершенно общим является тот факт, что если

[1]) Может показаться разумным отождествить $\mathbf{v}/c$ с отношением $2\,[\mathbf{eh}]/(\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2)$, как было ошибочно сделано на фиг. 1 в работе [13] (см. Дополнение I к настоящей книге). Это было бы возможно в том случае, если бы выражения $[\mathbf{eh}]$ и $\frac{1}{2}(\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2)$ были компонентами 4-вектора. Однако они представляют собой 4 из 16 компонент тензора — тензора Максвелла. Поэтому коэффициенты преобразования есть не $\operatorname{sh}\theta$ и $\operatorname{ch}\theta$, а выражения типа $\operatorname{sh}^2\theta$, $\operatorname{sh}\theta \cdot \operatorname{ch}\theta$ и $\operatorname{ch}^2\theta$, откуда и появляется двойной угол в соотношении (33).

[2]) Проф. В. Баргман любезно указал на свойства «1» и «2» тензора энергии-импульса-натяжений Ч. Мизнеру и автору в 1955 г., заметив, что они были независимо обнаружены многими исследователями (Райнич, Рейх, Синг, Боинор и Марио).

Таблица 2

Ненулевые компоненты тензора энергии-натяжений Максвелла для нормального электромагнитного поля, вычисленные в надлежащим образом выбранной лоренцовой системе отсчета

Выписанные компоненты — правая часть уравнения (31) — имеют размерность $см^{-2}$ и просто равны соответствующим компонентам тензора кривизны Эйнштейна. Чтобы получить плотность энергии-натяжений в $эрг/см^3$ или $дин/см^2$, их надо разделить на $8\pi G/c^4$.

Верхние и нижние индексы компонент	Значение в общем случае	Значение в специально выбранной лоренцовой системе отсчета	Интерпретация этих результатов в теории Максвелла
$\binom{0}{0}$	$-e_x^2-e_y^2-e_z^2-h_x^2-h_y^2-h_z^2$	$-e_x^2-h_x^2$	Плотность энергии с отрицательным знаком
$\binom{1}{1}$	$-e_x^2+e_y^2+e_z^2-h_x^2+h_y^2+h_z^2$	$-e_x^2-h_x^2$	Натяжение параллельно силовым линиям
$\binom{2}{2}$	$e_x^2-e_y^2+e_z^2+h_x^2-h_y^2+h_z^2$	$e_x^2+h_x^2$	Давление перпендикулярно силовым линиям
$\binom{3}{3}$	$e_x^2+e_y^2-e_z^2+h_x^2+h_y^2-h_z^2$	$e_x^2+h_x^2$	То же

искривление пространства обязано своим появлением классическим причинам (например, электромагнитному полю), то, во-первых, необходимо, чтобы обращался в нуль следующий след:

$$0=R_\alpha^\alpha-\frac{1}{2}\delta_\alpha^\alpha R=R-2R=-R$$

или, более просто,

$$R_\alpha^\alpha=0. \tag{35}$$

Когда это условие выполнено, эйнштейновский тензор кривизны в левой части уравнения (31) сводится к тензору кривизны Риччи R_μ^ν. Во-вторых, если искривление пространства приписывается электромагнитному полю,

необходимо также, чтобы квадрат тензора кривизны Эйнштейна и, следовательно, квадрат тензора кривизны Риччи были кратными единичной матрицы:

$$R^{\alpha}_{\mu}R^{\nu}_{\alpha} = \delta^{\nu}_{\mu}\left(\frac{R^{\tau}_{\sigma}R^{\sigma}_{\tau}}{4}\right). \tag{36}$$

В-третьих, необходимо, чтобы плотность энергии не была отрицательно определенной

$$R^{0}_{0} \leqslant 0. \tag{37}$$

3.2. «Фаза» поля. Как обстоит дело, когда посредством пробной частицы и луча света измерена кривизна Риччи в некоторой протяженной области пространства-времени и найдено, что она удовлетворяет условиям (35) — (37)? Рассмотрим нормальный случай, т. е. случай, когда величина

$$\xi^4 = \frac{R^{\tau}_{\sigma}R^{\sigma}_{\tau}}{4}, \tag{38}$$

эквивалентная

$$(e^2 + h^2)^2 - (2\,|\mathbf{eh}|)^2$$

или

$$(h^2 - e^2)^2 + (2\mathbf{e}\cdot\mathbf{h})^2,$$

не обращается в нуль. Тогда в каждой точке P рассматриваемой здесь пространственно-временной области существует соответствующая лоренцова система отсчета L_p, такая, что тензоры кривизны Риччи и Эйнштейна в этой точке диагональны в этой системе отсчета и диагональные элементы равны $-\xi^2$, $-\xi^2$, ξ^2, ξ^2. Другими словами, наблюдаемое искривление может рассматриваться обязанным электрическому и магнитному полям, которые параллельны друг другу и оси x, а их амплитуды таковы, что $e^2 + h^2 = \xi^2$. Точная «фаза» этого электромагнитного поля, правда, неизвестна; в этой специальной системе отсчета можно только написать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= (\xi,\ 0,\ 0)\cos\alpha, \\ \mathbf{h} &= (\xi,\ 0,\ 0)\sin\alpha, \end{aligned} \tag{39}$$

где угол α *определяет* «фазу» (complexion) поля.

Уместно сказать несколько слов о «фазе» электромагнитного поля. Когда $\alpha = 0$, можно сказать, что поле ($\mathbf{e} = \xi, 0, 0; \mathbf{h} = 0, 0, 0$) имеет «чисто электрическую фазу». Если тензор электромагнитного поля $\xi_{\mu\nu}$ рассматривается в этом случае не в стандартной системе координат, то он, конечно, будет иметь как электрическую, так и магнитную компоненту; тем не менее *«фаза»* поля все-таки будет чисто электрической. При $\alpha = \pi/2$ *«фаза»* поля будет «чисто магнитной». Поле в этом случае называется *дуальным* по отношению к полю, для которого $\alpha = 0$. Его компоненты в произвольной системе отсчета [1]) обозначаются символом ${}^*\xi_{\mu\nu}$. Итак, в произвольной системе отсчета *электромагнитное поле наиболее общего вида, которое воспроизводит наблюдаемое искривление пространства* [при выполнении условий (35)—(37)] *имеет вид*

$$f_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu} \cos\alpha + {}^*\xi_{\mu\nu} \sin\alpha. \qquad (40)$$

Здесь $\xi_{\mu\nu}$ и ${}^*\xi_{\mu\nu}$ — функции координат, однозначно определенные в нормальном случае, если кривизна известна.

3.3 Нахождение «фазы» по кривизне. «Фаза» α является все еще неизвестной функцией координат. Не означает ли это обстоятельство, что следы электромагнитного поля на метрике недостаточно отчетливы для

[1]) Эти компоненты можно вычислить по общей формуле

$${}^*\xi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,[\mu\nu\alpha\beta]\,\xi^{\alpha\beta}.$$

Например, для любой локальной лоренцовой системы отсчета

$${}^*\xi_{23} = [2\ 3\ 0\ 1]\,\xi^{01} = \xi^{01} = -\xi_{01} = \xi_{10};$$

другими словами, x-компонента магнитной составляющей дуального электромагнитного поля равна x-компоненте электрической составляющей исходного электромагнитного поля. Аналогично

$${}^*\xi_{01} = [0\ 1\ 2\ 3]\,\xi^{23} = \xi_{23}$$

или

$${}^*\xi_{10} = -\xi_{23};$$

иначе говоря, x-компонента электрической составляющей дуального электромагнитного поля равна со знаком минус x-компоненте магнитной составляющей первоначального электромагнитного поля. Поле, дуальное дуальному полю, есть исходное поле с отрицательным знаком.

того, чтобы можно было вернуться от чисто геометрических измерений к полному описанию электромагнитного поля?

Однако была использована еще не вся доступная информация. Необходимо также потребовать, чтобы электромагнитное поле [соотношение (40)] удовлетворяло уравнениям Максвелла. Понятно, что это требование должно определить изменение «фазы» поля от точки к точке. При фиксированном градиенте «фазы»

$$\alpha_\mu = \frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu} \tag{41}$$

уравнения Максвелла вместе с (40) позволяют определить электромагнитное поле во всей рассматриваемой области пространства-времени, с точностью до аддитивной постоянной интегрирования

$$\alpha(x) = \int_0 \alpha_\mu(x)\, dx^\mu + \alpha_0. \tag{42}$$

Соответствующая формула для этой цели выведена впервые Райничем [14, 15] и затем независимо Мизнером и Уилером [13][1]):

$$\alpha_\mu \equiv \frac{(-g)^{1/2}\,[\mu\alpha\beta\nu]\, R^{\alpha\rho;\,\beta}R^{\nu}_{\rho}}{R^{\eta}_{\xi}R^{\xi}_{\eta}} \tag{43}$$

(определение α_μ). В эту формулу входят только геометрические величины, так что поставленная цель выполнена: *электромагнитное поле выражено через чисто геометрические величины.*

3.4. Исконно единая теория поля и закон структуры пространства-времени. Электромагнитное поле, определяемое соотношениями (40), (42) и (43), не будет *последовательно* определено, пока величина α не является независимой от пути интегрирования. Для этого необходимо, чтобы ротор вектора α_μ обращался в нуль:

$$\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x^\mu} = 0. \tag{44}$$

[1]) Точка с запятой перед β в формуле (43) означает ковариантную производную от $R^{\alpha\rho}$ по x^β.

Это — требование, накладываемое на метрику. Вектор α_μ содержит первые производные кривизны и, таким образом, (44) содержит ее вторые производные. Следовательно, (44) содержит производные метрического тензора вплоть до четвертого порядка. Эта система уравнений 4-го порядка плюс алгебраические соотношения Райнича (35) — (37) в нормальном случае ($R^\tau_\sigma R^\sigma_\tau > 0$) полностью воспроизводят содержание уравнений Максвелла для пустого пространства плюс эйнштейновские уравнения поля с максвелловским тензором энергии-импульса в качестве источника. Одна система уравнений 4-го порядка — чисто геометрических по своему характеру — эквивалентна двум системам уравнений 2-го порядка. Полученный таким путем формализм может быть назван «исконно единой теорией поля». Это — переформулировка обычной общей теории относительности, созданной Эйнштейном в 1916 г. В этом отношении она сильно отличается от более поздних так называемых единых теорий поля, которые отбрасывают гипотезу Римана о существовании интервала

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu.$$

Ни одна из модифицированных подобным образом теорий не оказалась свободной от возражений. В противоположность этому против первоначальной теории Эйнштейна не было выдвинуто ни одного возражения логического или принципиального характера, не было замечено ни одного противоречия с наблюдениями. Взамен не было выдвинуто ни одной теории, близкой к общей теории относительности по своей простоте и общности.

Более уместно объединенному аппарату теории гравитации и электромагнетизма дать название «геометродинамика» как более отвечающее его характеру, чем название «общая теория относительности». Поскольку можно сказать, что геометродинамика содержит всю физику, которая на сегодняшний день известна как чисто классическая, постольку можно сказать, что вся эта физика резюмируется в уравнениях (35) — (37) и (44). *Эти уравнения устанавливают структуру пространства-времени.* Они отбирают из всего множества мыслимых римановых пространств такие 4-мерные пространства.

которые согласуются с классическими законами гравитации и электромагнетизма.

3.5. Геометродинамика не содержит констáнт связи. Когда законы взаимодействия электромагнитного и гравитационного полей записаны в обычной форме уравнений Эйнштейна и в обычных единицах, то в правой части появляется множитель

$$\frac{8\pi G}{c^4} = \frac{8\pi(6{,}670\cdot 10^{-8}\ см^3/г\cdot сек^2)}{(2{,}9979\cdot 10^{10}\ см/сек)^4} = 2{,}07\cdot 10^{-48}\ (гаусс\cdot см)^{-2}, \tag{45}$$

о котором часто говорят, что «константа связи гравитационного поля очень мала». Однако такого рода утверждение в рамках классической физики лишено какого-либо смысла, ибо не существует естественного масштаба для сравнения физических эффектов. Из двух констант G и c невозможно образовать комбинации, имеющей размерность длины, массы или времени. Уравнения геометродинамики в «исконно единой» форме не содержат упоминания о каких-либо константах связи. Положительной чертой теории представляется тот факт, что нет необходимости добавлять каких-либо констант, которые должны быть в будущем объяснены некоторой более фундаментальной классической теорией. То, что квантовая теория должна вносить что-то новое, это, конечно, особый вопрос. В рамках классической теории геометродинамика является самосогласованной. Короче говоря, она обеспечивает описание *взаимодействия без константы взаимодействия.*

3.6. Оценка исконно единой теории поля. Если под «классической физикой» понимать всю ту физику, которая не зависит от кванта действия или от частиц с квантованными зарядом и массой, то вся классическая физика содержится в законах структуры пространства-времени, задаваемых уравнениями (35)—(37) и (44). Как в таком случае показать, что эти уравнения являются наиболее естественными? Если это не так, то какие выводы можно сделать из этого обстоятельства?

Шарп [20] предположил, что эти уравнения можно вывести из вариационного принципа

$$\delta \int L(-g)^{-1/2}\, d^4x = 0,$$

исходя из инвариантной плотности лагранжиана

$$L = R - \frac{1}{2}(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})^{1/2}\cos 2\int_0^x \alpha_\beta\, dx^\beta,$$

где α_β выражено через величины, характеризующие кривизну, формулой (43). Из этого принципа Шарп вывел уравнение (44). До сих пор не известно, могут ли другие основные алгебраические уравнения быть выведены из этого вариационного принципа.

Как предложенный вариационный принцип, так и само первоначальное («роторное») уравнение (44) содержат инвариант кривизны в знаменателе. Следовательно, градиент «фазы» есть некоторая неопределенная величина там, где отсутствует электромагнитное поле. Пенроуз [1]) отметил, что это обстоятельство создает принципиальные трудности для исконно единой теории поля в следующем частном случае. Пусть электромагнитное поле существует в областях A и B, но не в пространстве между ними. Исходя из одной лишь метрики, в этом частном случае всюду в *такой специальной области трехмерного пространства,* невозможно определить «фазу» поля в области A *относительно* поля в области B (табл. 3). Однако, если конфигурации I и II изменяются во времени, поля будут распространяться из областей A и B, будут встречаться и перекрываться все более и более. Совершенно различные результаты в области наложения полей будут наблюдаться в зависимости от того, какова была первоначальная конфигурация: I, II или что-нибудь промежуточное. Измерения искривления пространства, произведенные в такой момент времени, совершенно достаточны для определения *результатов* в случаях I и II, хотя «исконно единый» вариант геометродинамики был не в состоянии установить различие в *начальных* состояниях I и II.

Эйнштейн-максвелловский вариант геометродинамики не имеет этого недостатка. Этот недостаток появляется лишь в том случае, когда две системы уравнений 2-го

[1]) Автор выражает благодарность д-ру Р. Пенроузу за сообщение об этом неопубликованном результате, а также ему, Д. Шарпу и проф. Ч. Мизнеру за обсуждение его смысла.

Таблица 3

Поля двух различных конфигураций (I и II), определенные в пространственно-подобной 3-поверхности, выглядят тождественными с точки зрения геометродинамики

Поля могут иметь тождественные метрику, кривизну и тензор энергии-импульса. Однако они могут быть очень различны, если их рассматривать с другой возможной и более привычной точки зрения обычной эйнштейновской теории, которая рассматривает потенциалы как метрического, так и электромагнитного полей. Для возникновения такой ситуации необходимо, чтобы существовали области 3-мерного пространства, содержащие электромагнитные поля, целиком окруженные пространством, свободным от электромагнитных полей.

Конфигурация	Поле в области A	Поле в области B	Поле в остальном пространстве
I	Только E	Только H	0
II	Только E	Только E	0

порядка объединяются в одну чисто геометрическую систему уравнений 4-го порядка. Существуют истинно физические различия между «фазами» в областях A и B, даже если нет способа установить «фазу» в трехмерном пространстве между ними. Ограничиваясь этим 3-пространством, исконно единая формулировка теории не может при известных обстоятельствах прослеживать различие между значениями «фазы» в двух или более областях.

Эта трудность снимается, когда мы рассматриваем полную историю поля (а не ситуацию на исходной 3-гиперповерхности) с чисто геометрической точки зрения. Возникает следующая альтернатива. Либо 1) заданные в двух областях поля распространяются и перекрываются при изменении относительной «фазы». Тогда в пространстве-времени должны существовать пути, соединяющие указанные две области, причем, двигаясь вдоль них, можно определить их относительные «фазы» чисто геометрическими способами. Либо 2) рассматриваемые поля никогда не имеют области перекрытия. Тогда нет разницы в относительной «фазе» этих двух

областей и она не нуждается в определении. Короче говоря, когда существенна относительная «фаза», она может быть полностью определена путем чисто геометрических измерений, если только с ними можно проникнуть в любые области пространства-времени.

Однако, будучи ограничены определенными 3-гиперповерхностями и определенными условиями, чисто геометрические измерения не могут служить для определения различия значений «фазы» в разделенных областях. Однако Природа умеет «вести учет» различия «фаз». Значит, если Природа сводится к геометрии, «фаза» также должна быть сводима к геометрии. Однако «фаза» не всегда отчетливо отражает чисто геометрический характер исконно единой теории поля. Не впадает ли эта теория в чрезмерную узость, используя исключительно средства *дифференциальной* геометрии — геометрии в непосредственной окрестности точки? Не является ли ее пороком невозможность признания общности между отдаленными точками? Не являются ли обычные геометрические средства непригодными потому, что они, так сказать, вводят слишком много точек и допускают различимость этих точек в качестве постулата, не подлежащего сомнению? Не существует ли какой-либо возможности отбросить подобные неудачные основы и все же сохранить существенные черты глобальной структуры? Не достаточно ли одной точки? Не может ли эта точка повторять свою роль вновь и вновь, подобно тому, как электронный луч в телевизионной трубке, пробегая достаточно быстро, воспроизводит все изображение. Не будет ли взаимная «фаза» двух точек играть более важную роль, если между точками будет иметь место более глубокая внутренняя связь этого типа? Конечно, здесь не идет речь об *изменении* теорий Эйнштейна и Максвелла; мы лишь ищем другую *формулировку* этой теории. *Существование в основных законах классического пространства-времени величины такого типа как относительная «фаза» двух отдельных точек приводит исследователей, ищущих чисто геометрическое описание природы, к заключению, что понятие «фазы» еще не нашло своего наиболее удачного геометрического средства выражения.*

Относительная «фаза» выступает на передний план также в другой нерешенной проблеме: почему все заряды в природе имеют одну и ту же «фазу»?

В заключение можно сказать, что исконно единая теория поля дает нам разумные основания для утверждения, что вся классическая физика может быть сформулирована геометрическим образом. Однако эта теория не является наиболее удобным средством трактовки соответствующей геометрии. Дуалистический язык электромагнитных полей и метрики до сих пор оказывался наиболее удобным.

§ 4. Уравнения движения без уравнений движения

Лишь спустя длительное время после создания общей теории относительности в 1916 г. было найдено, что теория содержит важное новое следствие. Оказалось, что не нужно отдельно постулировать уравнение движения пробной частицы в известном геометродинамическом поле [уравнение (32)], как это принято во всех других формулировках физических теорий. Вместо этого было показано, что уравнения движения объектов получаются как *следствие* уравнений поля [1]). Эта ситуация наводит на мысль о следующей аналогии. Представьте себе темные пятна, передвигающиеся по поверхности озера в поле зрения наблюдателя, смотрящего с высокой башни. Он изучает их движение достаточно тщательно, чтобы вывести уравнения движения и закон

[1]) Общая идея была высказана Эйнштейном и Громмером [21]. Рассмотрение случая медленно движущихся масс в асимптотически плоском пространстве см. в работе Эйнштейна, Инфельда и Гоффмана [22]. Случай бесконечно малой нейтральной пробной частицы, движущейся с произвольной скоростью в пространстве с заданной метрикой, рассмотрен Инфельдом и Шильдом [23], а случай заряженной пробной частицы — Чейзом [24] и Инфельдом [25]. Применение того же метода к последнему варианту «единой теории поля» Эйнштейна (который теперь все отвергли) показывает, что, согласно этой теории, пробная частица должна двигаться как незаряженная — при любой величине ее заряда [26]. (Никакой циклотрон не смог бы тогда работать!) Общий обзор этой проблемы см. в монографии Инфельда и Плебанского [27]. [См. также J. A. Wheeler, Rev. Mod. Phys., 33, 63 (1961), где цитируются работы В. А. Фока и его сотрудников, посвященные этой же проблеме. — *Прим. ред.*]

эффективных сил, действующих между этими «пятнами». Кроме того, из других исследований ему известны законы гидродинамики жидкости в озере. В один прекрасный день, воспользовавшись новым биноклем большей разрешающей силы, он видит, что «пятна» вообще не являются чуждыми объектами. Они являются вихрями в среде, свойства которой он уже знает. Тогда он возвращается к уравнениям гидродинамики и *выводит* из них законы движения завихрений и их взаимодействия. Это дает гораздо более глубокое понимание увиденного.

Уравнения движения не могут быть выведены из уравнений поля, если последние линейны. Уравнения электродинамики, например, позволяют рассчитывать поля, возникающие как при невозможных движениях зарядов, так и при возможных. Тот факт, что уравнения движения пробной частицы и лоренцова сила могут быть выведены из общей теории относительности или геометродинамики, означает, что эта теория в некотором смысле является «руководящей теорией» физики. Какая-либо иная более узкая формулировка физического закона не обладает такой мощью.

§ 5. Геон: масса без массы

5.1. Прежние модели массы. Вывод уравнений движения из уравнений поля предполагает *существование* объектов с массой.

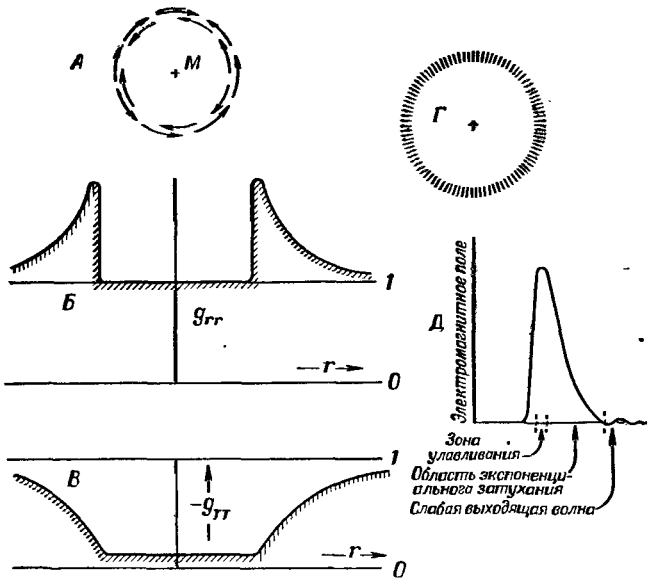
Введение в самосогласованную во всех иных отношениях теорию таких чужеродных объектов вызывает возражения, которые осознаются при трактовке проблемы движения. Такой анализ сам по себе примыкает к теории относительности, но объекты здесь рассматриваются как сингулярности метрики. В связи с этим возникает много вопросов. Должны ли сингулярности предполагаться сферически симметричными? Как можно определить такую симметрию? Допустимы ли иные симметрии, а если да, то какие? Если где-нибудь допустить существование сингулярности, то не означает ли это в принципе допущение сингулярностей всюду? Можно ли составлять из непрерывного распределения сингулярностей

источники произвольного вида, фигурирующие как правые части уравнений? Если же такой член может быть свободно введен, то как наилучшим образом определять при этом структуру теории? Другой подход сводится к поискам устранения сингулярности через рассмотрение каждого объекта как массы жидкости, подчиняющейся тому или иному уравнению состояния. Тогда метрика всюду регулярна. В такой модели масса, очевидно, обладает внутренними степенями свободы, которые могут быть возбуждены внешними силами. Свойства этих степеней свободы критически зависят от выбора уравнений состояния. Более того, уравнение состояния само по себе является чем-то чуждым для чистой геометродинамики, соотношением, вводимым извне. Таким образом, ни один подход не ведет к замкнутой теории движения.

5.2. Равновесие между давлением радиации и гравитационным сжатием в геоне. Таким образом, интересно отыскать третий путь для рассмотрения концепции тела в общей теории относительности. Объект в принципе может быть построен из электромагнитного излучения, которое сдерживается своим собственным гравитационным притяжением в течение весьма длительного периода времени. Гравитационное ускорение, *необходимое* для удержания излучения на круговой орбите радиуса r, по порядку величины составляет c^2/r. Ускорение, имеющее место вследствие гравитационного притяжения в сгустке лучистой энергии с массой M, по порядку величины равно GM/r^2, где $G = 6{,}670 \cdot 10^{-8}$ *см*^{3}/*г* · *сек*^{2} — ньютоновская константа тяготения. Оба эти ускорения совпадают по порядку величины, когда радиус

$$r \sim \frac{GM}{c^2} = (0{,}742 \cdot 10^{-28}\ \text{см/г}) \cdot M. \qquad (46)$$

Сгусток излучения, которое таким образом удерживает само себя («гравитационно-электромагнитный объект», или геон [28—30]), является чисто классическим объектом (фиг. 7). Он не имеет прямого отношения к миру элементарных частиц. Его структуру и устойчивость можно рассматривать всецело в рамках классической геометродинамики при условии, что принимаемый при



Фиг. 7. Условия внутри геона и в его окрестности.

А — Фотоны, циркулирующие по круговым орбитам под действием достаточно концентрированной и достаточно большой массы M, расположенной в центре. По мере все большего накапливания электромагнитной энергии на орбите радиация сама по себе вносит все больший вклад в стабилизирующее гравитационное поле. При этом масса может уменьшаться. В итоге масса M вообще может быть устранена, и тогда получается геон, т. е. иначе говоря, стоячая электромагнитная волна, которая обладает достаточной массой-энергией, чтобы удерживать самое себя. Тогда гравитационное поле служит волноводом для этой энергии. Такое поле в случае простого сферического геона описывается метрикой

$$ds^2 = g_{TT}\,dT^2 + g_{rr}\,dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2).$$

Б — Радиальный фактор этой метрики можно записать в виде

$$g_{rr} = \left[1 - 2r^{-1}m^*(r)\right]^{-1}.$$

Здесь величина $m^*(r)$ представляет собою массу (в *см*) внутри сферы радиуса r. Эта масса скачком возрастает в „активной области", где сконцентрирована бо́льшая часть излучения.

В — Временной фактор метрики в случае простого сферического геона имеет значение $-g_{TT} = {}^1/_9$ всюду внутри геона и значение $1 - 2m^*(\infty)/r$ — всюду вне геона. Радиус активной области геона составляет $r_{\text{актив.}} = ({}^9/_4)\,m^*(\infty)$. Стандартные часы внутри геона „идут" в три раза медленнее, чем стандартные часы вдали от геона.

Г — Схематическое представление электромагнитных волн в активной области геона.

Д — Более подробное изображение зависимости напряженности электромагнитного поля от r, что показывает аналогию с α-распадом как прохождения через потенциальный барьер (в данном случае — утечку излучения через барьер, обладающий некоторым показателем преломления).

этом рассмотрении размер его достаточно велик, чтобы квантовые эффекты еще не проявлялись. На больших расстояниях такие объекты не отличаются по своим гравитационным свойствам от любой другой массы. Более того, они движутся в пространстве как единое целое и испытывают отклонения под действием медленно меняющихся силовых полей точно так же, как это происходит с любой другой массой. И все же внутри геона нельзя указать места, где сосредоточена масса в обычном смысле этого слова. Геон обязан своим существованием локализованному (но всюду регулярному) искривлению пространства-времени и ничему более. Короче говоря, геон описывает *массу без массы.*

5.3. Утечка энергии из геона. Полная стабильность геона также невозможна, как невозможно удерживание излучения внутри конечного куска стекла в течение сколь угодно долгого времени за счет одного полного внутреннего отражения. Оптический волновод, образованный поверхностями стекло — воздух, аналогичен электромагнитному волноводу, образованному метрикой (фиг. 7). Известно, что стекло дает идеальный эффект при удержании излучения, если поверхности стекла плоские: электромагнитное возмущение в «запрещенной» зоне экспоненциально затухает с характерной длиной затухания порядка $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/2\pi = c/\omega$. Менее известен тот факт, что вне стеклянной сферы радиуса a экспоненциальное затухание имеет место лишь до расстояния также порядка a, с последующими осцилляциями в виде группы слабых волн. Поэтому происходит утечка уловленного излучения из стеклянной сферы, а также из геона, что напоминает утечку α-частиц из радиоактивных ядер. Можно сказать, что барьер в случае куска стекла и геона имеет центробежную природу, в то время как в случае α-частиц он обусловлен главным образом кулоновскими силами. Постоянная распада, связанная с механизмом утечки из геона, содержит экспоненту типа введенной Гамовым:

$$\exp\left[-4{,}56 \cdot \frac{\text{Радиус активной зоны}}{\lambda\!\!\!^{-}}\right]. \qquad (47)$$

Вычисленные скорости утечки энергии из двух сферических геонов приведены в табл. 4.

Таблица 4

Утечка радиации из двух простых сферических геонов

Последний столбец дает коэффициент изменения масштаба, в пределах которого геон остается классическим объектом (электрическое поле в активной области остается малым по сравнению с критическим полем, которое требуется для порождения электронных пар непосредственно из вакуума). Для сравнения заметим, что масса Солнца составляет $1{,}987 \cdot 10^{33}$ *г*, радиус Солнца — $6{,}94 \cdot 10^{10}$ *см*, средняя плотность — 1,42 *г/см*^{3}, среднее расстояние до Земли — $1{,}497 \cdot 10^{13}$ *см*.

Свойство	Геон I	Геон II	Масштабный фактор
Масса, *г*	10^{42}	10^{42}	$\times n$
Радиус активной зоны, *см*	$1{,}67 \cdot 10^{14}$	$1{,}67 \cdot 10^{14}$	$\times n$
Число волн по окружности (см. фиг. 7, *г*)	10	$8{,}43 \cdot 10^{9}$	Неизменен
Круговая частота излучения, *рад/сек*	$6{,}00 \cdot 10^{-4}$	$5{,}06 \cdot 10^{5}$	$\times (1/n)$
Длина волны вне геона, *см*	$3{,}14 \cdot 10^{14}$	$3{,}72 \cdot 10^{5}$	$\times n$
Протяженность активной зоны, *см*	$\sim 3{,}59 \cdot 10^{13}$	$\sim 4{,}02 \cdot 10^{7}$	$\times n$
Потеря массы-энергии электромагнитного колебания на 1 *рад*	$2{,}5 \cdot 10^{-7}$	$10^{-3570000000}$	$\times 1$
Время сжатия в предположении, что влияет только утечка и что поведение геона на всех стадиях распада является классическим	212 *лет*	$\sim \infty$	$\times (1/n)$

Продолжение

Свойство	Геон I	Геон II	Масштабный фактор
Средние квадратичные значения напряженности электрических (и магнитных) полей в наиболее активной зоне (*эл. стат. ед.*)	$4{,}66 \cdot 10^{10}$	$4{,}41 \cdot 10^{13}$	$\times (1/n)$
Критическое значение медленно меняющегося электрического поля, связанное с механизмом рождения пар (e^+, e^-) в вакууме (*эл. стат. ед.*)	$4{,}41 \cdot 10^{13}$	$4{,}41 \cdot 10^{13}$	Постоянная
Плотность массы-энергии в активной зоне, *г/см*^{3} . .	0,192	$1{,}72 \cdot 10^5$	$\times (1/n^2)$

Второй механизм, посредством которого геон может рассеивать энергию, был любезно указан нам проф. Мак-Милланом в частной дискуссии. Если объект пересекает космическое пространство даже в сильно разреженных межгалактических областях, то он будет встречать протоны и электроны от 10^{-1} до 10 в 1 *м*^{3}. Его слабо меняющиеся, но весьма интенсивные внутренние электрические поля будут ускорять эти заряженные частицы (ионы) до весьма значительных энергий за счет геона. Быстрота рассеяния энергии будет пропорциональна поперечному сечению геона и его скорости. Если скорость геона сравнима со скоростью света, то рассеяние будет весьма быстрым. Наиболее благоприятным является случай, когда относительные скорости оказываются порядка скоростей хаотического движения типичных космических облаков газа, скажем 100 *км/сек*:

$$-\frac{d\,(\text{Энергия})}{dt} \sim (\text{Плотность частиц}) \cdot (\text{Скорость облака}) \times$$
$$\times\,(\text{Сечение геона}) \cdot (\text{Энергия испускания}).$$

Например, в случае геона I (или II) из табл. 4 это произведение может быть порядка

$$(10^{-6}\,см^{-3})\cdot(10^{7}\,см/сек)\cdot(10^{29}\,см^{2})\cdot\begin{pmatrix}20\,дин\cdot 5\cdot 10^{13}\,см\\ 2\cdot 10^{4}\,дин\cdot 6\cdot 10^{4}\,см\end{pmatrix}\rightarrow$$
$$\rightarrow\begin{pmatrix}\text{или}\\ \end{pmatrix}\begin{matrix}10^{45}\ эрг/сек\\ 10^{39}\ эрг/сек\end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\text{или}\\ \end{pmatrix}\begin{matrix}10^{24}\ г/сек\\ 10^{18}\ г/сек\end{matrix}\begin{matrix}\text{(I)}\\ \text{(II)}\end{matrix}\qquad(48)$$

что приводит к времени жизни геона порядка

$$\begin{matrix}10^{18}\ сек,\ \text{т. е. } 3\cdot 10^{10}\ лет & \text{(I)}\\ \text{или}\\ 10^{24}\ сек,\ \text{т. е. } 3\cdot 10^{16}\ лет & \text{(II)}\end{matrix}$$

для геона в пространстве между галактиками; внутри же галактики, где плотность ионизованной материи примерно в миллион раз больше, время жизни геона примерно в миллион раз меньше. Таким образом, не существует убедительных причин в пользу того, что геоны могли бы сохраниться в течение всей прошедшей истории Вселенной. Но нет и каких-либо очевидных соображений в пользу того, что они могли бы возникать прежде всего именно при тех экстремальных условиях, которые были характерны для ранней стадии развития Вселенной. Другими словами, геонами имеет смысл интересоваться не потому, что они могут объяснить что-либо реально наблюдаемое, а ввиду того, что с их помощью можно получить некоторое представление об исключительном *богатстве физических явлений в искривленном пустом пространстве*, предсказываемых общей теорией относительности.

5.4. Место геона в рамках классической физики. Рассмотрение геона в качестве модели масс или тел, которые фигурируют в классической физике, позволяет более глубоко понять некоторые стороны геометродинамики.

Во-первых, ясно, что уравнение движения тела по геодезической является идеализацией. Зависящие от положения величины, фигурирующие в этих уравнениях, следует рассматривать как «фон» — гравитационные и электромагнитные поля, которые должны существовать в отсутствие геона. Можно лишь говорить о поле подобного фона, определенного разумным образом, только в тех случаях, когда полное поле, обязанное фону и

геону, медленно меняется на расстояниях, сравнимых с линейными размерами геона. В этом случае подобный объект будет ускоряться когерентно под действием внешних сил. Это поведение укладывается в рамки физики Ньютона — Максвелла: существующие в готовом виде тела являются источниками сил и сами испытывают воздействие этих сил. Такая классическая схема уравнений движения не нарушается включением поправок, связанных со специальной и общей теорией относительности.

Во-вторых, когда поля вне геона оказываются существенно неоднородными, то геон не может реагировать на воздействие как одно целое. Возмущение испытывают его внутренние степени свободы. Когда же внешние неоднородности сильны, система распадается на две и более частей.

Специальным примером такого взаимодействия, приводящего к разрушению, является столкновение между двумя геонами сравнимых размеров, когда расстояние максимального сближения сравнимо или мало по сравнению с размерами обоих объектов. При этом возникнет не только значительное отклонение от эффективного закона обратной пропорциональности квадрату расстояния для сил, но будет иметь место обмен энергией и потери энергии. Там, где потенциальный барьер, характеризуемый показателем преломления, окажется наиболее узким, будет иметь место перетекание излучения от одного тела к другому. При этом увеличится энергия некоторых гармоник колебаний уловленного излучения, которые прежде были возбуждены слабо или вовсе не были возбуждены; энергия же других гармоник будет уменьшаться. Таким образом, два тела расходятся с соотношением масс, отличным от того, с которым они сходились. Их общая масса за это же время будет уменьшаться как за счет быстрой вынужденной утечки радиации, так и вследствие локальных возмущений гравитационного поля, которое отклонит и выведет часть световых лучей со своих орбит, прежде относительно стабильных.

Когда же два геона сталкиваются еще более непосредственно, то они будут расходиться без значительной

потери масс только в исключительных случаях. Тогда происходит почти все, что только может происходить. Будет иметь место существенная потеря энергии в форме свободного излучения. Будут возбуждаться коллективные движения, а отдельные электромагнитные гармоники приобретут совершенно новые амплитуды. Силы будут действовать так, чтобы вызвать деление первоначальных геонов на более мелкие фрагменты. Ввиду такого богатства явлений уже не имеет смысла описывать взаимодействие двух сблизившихся классических геонов с помощью эффективного закона сил или с помощью потенциалов. Вместо этого необходимо использовать более сложный язык физики трансмутаций, когда главное внимание уделяется распределению продуктов реакции по массам, скоростям и направлениям. Короче говоря, мы имеем *физику трансмутаций без трансмутаций.*

Существование геонных трансмутаций делает ясным третье соображение относительно классической релятивистской физики. Это соображение сводится к тому, что в принципе не существует никакого резкого различия между геонами как концентрациями электромагнитной энергии, способными к распаду и слиянию, и «свободными» электромагнитными волнами, которые распространяются в пространстве между геонами, испытывая рассеяние, поглощение и испускание геонами. Формально выражаясь, состояние Вселенной с точки зрения классической физики описывается свободными от сингулярностей электромагнитными и гравитационными амплитудами в каждой точке и ничем более.

§ 6. Проблема начальных условий. Уравнения поля без уравнений поля

6.1. Начальные условия в электродинамике. Какая информация должна быть задана в данный момент времени, т. е. на трехмерной пространственно-подобной поверхности σ, чтобы определить однозначно и непротиворечиво все будущее (и прошлое) геометродинамического поля? Хотя уравнения поля общей теории относительности были установлены в 1916 г., важный вопрос о начальных значениях был решен лишь три

десятилетия спустя в важной работе Лишнеровица [31—33] и Фурес-Брюа [34, 35][1]).

Аналогичная проблема хорошо известна в теории свободных (без источников) электромагнитных полей. Там достаточно знать электрическое и магнитное поля на одной пространственно-подобной 3-поверхности σ (координаты u, v, w), чтобы можно было предсказать поля на поверхности, сдвинутой на интервал собственного времени $d\mathcal{T}(u, v, w)$, нормальный к σ. Уравнения, которые требуются для предсказания полей $\mathbf{e} + d\mathbf{e}$ и $\mathbf{h} + d\mathbf{h}$ на новой поверхности, лучше всего известны для случая плоского пространства-времени[2])

$$\frac{d\mathbf{e}}{dT} = \operatorname{rot} \mathbf{h}, \qquad \frac{d\mathbf{h}}{dT} = -\operatorname{rot} \mathbf{e}. \tag{49}$$

[1]) См. в особенности книгу Лишнеровица [36].

[2]) В искривленном пространстве-времени эти уравнения сохраняются, если члены истолковывать в соответствующем ковариантном смысле. Тогда $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ являются векторами, или l-формами, на пространственно-подобной гиперповерхности σ. Дуальными для них, *отнесенными к метрике* ${}^{(3)}g_{mn}$ в 3-пространстве на σ, являются $*\mathbf{e}$ и $*\mathbf{h}$ с компонентами $(*\mathbf{e})_{mn} = ({}^3g^{lk})[mnp]({}^3g^{pq})e_q$. Эти 2-формы, или антисимметричные тензоры, отождествляются с проекциями 4-мерной 2-формы, или антисимметричного тензора, поля $\mathbf{f}$ и ему дуального на гиперповерхности σ:

$$*\,\mathbf{h} = \text{Проекция } f \text{ на } \sigma,$$
$$*\,\mathbf{e} = \text{Проекция } *f \text{ на } \sigma.$$

Определим дополнительно обобщенный ротор, или «внешнюю производную» $\mathbf{da}$, от любого вектора или антисимметричного тензора следующим соотношением:

$$(\mathbf{da}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{p+1}}) = \sum_{\substack{\text{По всем перестановкам } P}} (-1)^p \frac{\partial a_{\beta_2\cdots\beta_{p+1}}}{\partial x^{\beta_1}}.$$

Тогда уравнения Максвелла преобретают форму

$$\mathbf{d} * \mathbf{h} = 0, \quad \frac{\partial (*h)}{\partial T} = -\mathbf{de},$$

$$\mathbf{d} * \mathbf{e} = 0, \quad \frac{\partial (*e)}{\partial T} = \mathbf{dh}$$

Об этих уравнениях и других аспектах геометродинамики см. работу [13].

Начальные условия в электродинамике для величин $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ на σ не могут выбираться произвольно, несмотря на отсутствие в этом пункте каких-либо явных запретов со стороны уравнений (49). Эти данные должны удовлетворять *уравнениям для начальных значений*:

$$\operatorname{div}\mathbf{e}=0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{h}=0. \tag{50}$$

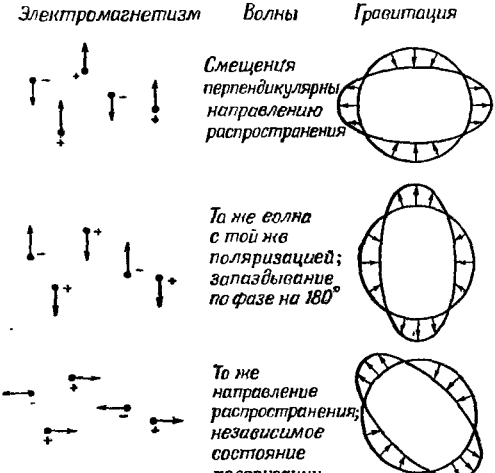
Тогда уравнения (49) гарантируют, что те же условия с дивергенцией выполняются для поля и на новой поверхности:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}+d\mathbf{e}&=\mathbf{e}+(dT)\operatorname{rot}\mathbf{h},\\ \mathbf{h}+d\mathbf{h}&=\mathbf{h}-(dT)\operatorname{rot}\mathbf{e}.\end{aligned} \tag{51}$$

В результате уравнения (50) уменьшают число независимых переменных, значения которых заданы в точке пространства, с шести (по три компоненты у векторов напряженности электрического и магнитного полей) до четырех. Этот стандартный результат можно связать с более знакомыми выражениями, относящимися к плоскому пространству. Перейдем от координатного пространства к пространству волновых чисел. Для каждой точки в пространстве волновых чисел известны 4 свободные константы, связанные с электромагнитным полем: координата и импульс (или амплитуда и фаза) двух осцилляторов, связанных с двумя независимыми состояниями поляризации. Поэтому не удивительно, что и в координатном пространстве мы находим 4 свободные константы для каждой точки. Такое своеобразное и неявное отождествление числа точек в координатном пространстве с числом точек в пространстве волновых чисел дает полезный инструмент не только для теории электромагнетизма, но и в теории гравитации.

6.2. Условия для задания начальных значений в геометродинамике. Слабые гравитационные волны уже давно изучались самим Эйнштейном и другими. В том приближении, когда отклонения от плоского пространства малы, понятие волнового числа имеет определенный смысл. Для этих волн точно так же, как для электромагнитных волн, существует два поперечных состояния поляризации для каждого волнового числа. Однако поляризация носит тензорный характер, а не векторный

(фиг. 8). Так как гравитационные волны требуют для своего определения 4 константы [(2 константы на одно состояние поляризации) × (2 состояния поляризации на одно волновое число)] в каждой точке пространства волновых чисел (когда координатное пространство почти плоское), то разумно ожидать, что для задания начальных условий в гравитационном поле необходимы



Фиг. 8. Сравнение поляризации электромагнитных и гравитационных волн.

Гравитационная волна идет перпендикулярно плоскости чертежа и воздействует на группу пробных частиц, расположенных по краю круга, изменяя их положения, как показано на схеме. Два независимых состояния поляризации отличаются на 45°, а не на 90°, как в случае электромагнитных волн.

четыре величины в точке 3-пространства, помимо и сверх четырех величин в точке, необходимых для задания начальных условий в электромагнитном поле. Поэтому весьма удовлетворительно найти эти величины, появляющиеся в анализе проблемы начальных значений, выполненном Лишнеровицем и Фурес-Брюа. Они показали, что для определения будущего и прошлого необходимо и достаточно задавать на 3-поверхности σ не только магнитное поле $\mathbf{h}$ и электрическое $\mathbf{e}$, но также и 3-мерную метрику этого пространства ${}^{(3)}g_{mn}$ и скорость ее из-

менения $2^{(3)}P_{mn}$ по отношению к собственному ковремени, измеряемому по нормали к 3-пространству σ. Аналогично тому, как начальные данные для электромагнитного поля подчиняются условию обращения в нуль дивергенции, или (на языке внешних дифференциальных форм) условиям

$$\mathbf{d} * \mathbf{e} = 0, \qquad \mathbf{d} * \mathbf{h} = 0, \tag{52}$$

геометрические данные ${}^{(3)}g_{mn}$ и ${}^{(3)}P_{mn}$ нельзя задавать совершенно произвольно; их значения подчиняются условиям, в которых фигурирует вектор Пойнтинга и максвелловская плотность энергии:

$$\left(P_k^m - \delta_k^m P_s^s\right)_{;m} = -2\,|*(\mathbf{e} \wedge \mathbf{h})|_k, \tag{53}$$

а также

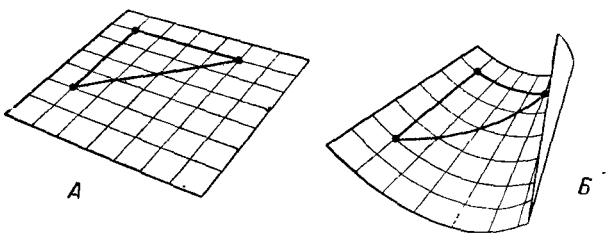
$$(P_s^s)^2 - P_s^t P_t^s + {}^{(3)}R = 2 * (\mathbf{e} * \mathbf{e} + \mathbf{h} * \mathbf{h}). \tag{54}$$

Здесь ${}^{(3)}R$ — инвариантная кривизна для 3-пространства σ. Эта величина относится только к той кривизне, которая присуща пространству (фиг. 9), в то время как величины P_{mn} или P_m^n описывают внешнюю кривизну этого же 3-пространства и внутри окружающего все еще неизвестного 4-пространства. Поэтому условие (54) можно переписать в виде:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Внутренняя}\\ \text{инвариантная}\\ \text{кривизна } \sigma\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{Внешняя}\\ \text{инвариантная}\\ \text{кривизна } \sigma\end{array}\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Плотность энергии электромагнитного поля в соответствующих единицах}\end{array}\right]. \tag{55}$$

Требование, чтобы дивергенция электрического и магнитного полей обращалась в нуль, очевидным образом сводит 6 степеней свободы до требуемого числа 4. Однако условия, накладываемые на начальные данные в теории гравитации, представленные четырьмя соотношениями (53) и (54), с первого взгляда кажутся недостаточными для сведения двенадцати величин, характеризующих метрику в каждой точке (6 компонент ${}^{(3)}g_{mn}$ и 6 компонент ${}^{(3)}P_{mn}$), к четырем величинам, поскольку, естественно, 12—4 отнюдь не равно 4! Но это расхождение на 4 можно понять следующим образом. Часть информации, содержащейся в шести компонентах

метрического тензора ${}^{(3)}g_{mn}$, вовсе не является настоящей информацией о *геометрии* 3-пространства σ, а является лишь информацией *о системе координат*, которая почему-либо здесь использована для описания. Следовательно, имеется не более шести существенных компонент ${}^{(3)}g_{mn}$ для каждой точки.



Фиг. 9. Элементарный пример различия между внутренней и внешней кривизнами.

В данном примере лист бумаги взят плоским, так что внутренняя кривизна листа равна нулю ${}^{(2)}R=0$. Поэтому в данном примере справедлива теорема Пифагора для треугольника, изображенного на листе бумаги. Вместе с тем теорема Пифагора справедлива и на поверхности свернутого листа бумаги (схема *Б*). Следовательно, геометрия, внутренняя в отношении 2-поверхности — в данном случае такой геометрией оказалась эвклидова геометрия — безразлична к тому, каким образом данная 2-поверхность вложена в окружающее 3-пространство. С другой стороны, внешняя кривизна зависит от того, каким образом осуществлено это вложение. „Внешняя" кривизна равна 0 в случае *А* и отлична от нуля в случае *Б*. Аналогичные понятия применимы в общей теории относительности, в которой задача о начальных значениях имеет отношение к внутренней геометрии для первичного 3-пространства σ, а также к внешней кривизне этого 3-пространства в окружающей 4-геометрии — геометрии, которая вначале совершенно неизвестна, если не считать информации, содержащейся во внутренней и внешней кривизне поверхности σ, но которая восстанавливается однозначно из начальных данных совместно с уравнениями поля Эйнштейна.

Быть может, уместно более наглядно обрисовать эту ситуацию. Крылья автомобилей Форда штампуются из листовой стали и — хотя они все одинаковы — поступают из прессового цеха на конвейер разным разметчикам, одни из которых наносят один тип координатной сетки, другие — другой тип. Поэтому расстояния между точками с координатами (7, 11, 57) и (7,01; 11,01; 57,01) на разных крыльях будут значительно отличаться, или, иными словами, будут сильно различаться метрические коэффициенты g_{mn}. Однако внутренняя геометрия очевидным образом тождественна у всех крыльев. Чтобы разобраться в этом пункте, можно воспользоваться стандартными математическими приемами для вычисления

инвариантов кривизны по метрическим коэффициентам. Тогда из зависимости g_{mn} от положения можно сразу же заключить, не пользуясь какими-либо дополнительными данными, что крылья с метриками, кажущимися столь различными, на самом деле одинаковы. Те же самые приемы послужат и для того, чтобы отличить крыло автомобиля «Фиат» от крыла автомобиля «Форд». Однако нет необходимости углубляться в рассмотрение инвариантов кривизны, чтобы разобраться в том, сколько из шести компонент ${}^{(3)}g_{mn}$ в точке существенны геометрически в случае 3-пространства σ. Для этого достаточно заметить, что координаты u, v, w в 3-пространстве не зависят от любого изменения переменных типа

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}(u, v, w), \\ \bar{v} &= \bar{v}(u, v, w), \\ \bar{w} &= \bar{w}(u, v, w) \end{aligned} \tag{56}$$

— трех величин на одну точку пространства. Таким образом, метрические коэффициенты ${}^{(3)}g_{mn}$ дают всего $6 - 3 = 3$ величины, характеризующие геометрию для каждой точки пространства. Другими словами, $6 + 6 = 12$ компонент ${}^{(3)}P_{mn}$ и ${}^{(3)}g_{mn}$ совместно дают всего лишь $12 - 3 = 9$ существенных компонент в точке.

Для чего же служит эта геометрическая информация? Знание внутренней и внешней геометрии начальной поверхности σ совместно с эйнштейновскими уравнениями поля дает возможность определить геометрию близлежащей 3-поверхности σ', а затем отсюда — геометрию следующей близлежащей 3-поверхности σ'' и т. д. Таким образом, шаг за шагом неизвестная геометрия 4-пространства может быть определена, исходя из начальных данных на поверхности σ плюс из уравнений поля. Этот прием является геометродинамическим аналогом приема электродинамики, с помощью которого восстанавливают всю историю поля по значениям **e** и **h** на σ. Здесь же мы восстанавливаем всю геометрию 4-пространства.

Каждый набор начальных значений ведет к единственной геометрии 4-пространства; однако геометрия,

удовлетворяющая уравнениям Эйнштейна — структурным законам пространства-времени, — не определяет однозначным образом набор начальных значений. Причина этого проста. Имеется колоссальный произвол в выборе 3-поверхности σ, которая, вообще говоря, является искривленной. Любой данный выбор соответствует произвольному рассечению 4-пространства с помощью кривого и волнистого лезвия на области «до» поверхности σ и «после» σ. На этой поверхности ${}^{(3)}g_{mn}$ и ${}^{(3)}P_{mn}$ задают девять геометрически существенных величин, причем все эти величины имеют определенные значения. Однако, если сечение произведено несколько иначе, в результате будем иметь иную 3-поверхность σ' и эти девять величин будут иметь несколько иные значения.

Расстояние по нормали от σ до σ' может быть представлено как интервал собственного ковремени, который зависит от трех пространственных координат на σ. В этом смысле можно сказать, что *для задания положения на 3-поверхности σ' требуется одно число для каждой пространственной точки.* Может существовать много разных способов установить это число. Но как бы ни было *установлено* это число, в конце концов оно *выводится* указанным выше способом по 9 геометрически существенным величинам, содержащимся в ${}^{(3)}g_{mn}$ и ${}^{(3)}P_{mn}$ на поверхности σ'.

Можно еще остановиться более детально на том, как проводить различие между σ и σ'. Зададим ${}^{(3)}g_{mn}$ и ${}^{(3)}P_{mn}$ на σ (плюс **e** и **h**) и вычислим из эйнштейновских уравнений поля (плюс уравнения Максвелла в кривом пространстве-времени) всю геометродинамическую историю («4-мерное крыло»). Зададим соответствующие данные для σ', повторим расчеты и получим новую геометродинамическую историю, со всей *ее* историей геонов, столкновениями между ними, электромагнитными и гравитационными волнами и их рассеянием и взаимодействием. Сравним эти две истории, т. е. как бы два 4-мерных «крыла». Если между ними есть несовпадение, то два альтернативных набора начальных значений относятся к различным физическим задачам, так что на этом обсуждение заканчивается. Если же они

«согласуются», то два 4-пространства можно отождествить одно с другим точка за точкой. Более того, если отсутствуют необычные виды симметрии пространства, это отождествление будет *единственным*: та точка в одном 4-пространстве, в которой инвариант его кривизны максимален, может быть отождествлена с точкой другого пространства, где такой же инвариант кривизны также имеет максимум, и т. д. Таким образом, относительные положения σ и σ' в 4-пространстве определены; это же можно сказать и относительно промежутка между ними.

Отсюда следует, что из девяти величин в ${}^{(3)}g_{mn}$ и ${}^{(3)}P_{mn}$, содержащих геометрическую информацию, одна просто указывает, *где* находится данная поверхность, а восемь служат только для отличия одной физической ситуации от другой. Кроме того, соотношения для начальных значений (53) и (54) накладывают четыре условия на каждую точку пространства. Таким образом, остаются только $8 - 4 = 4$ произвольные величины в каждой точке пространства, которые действительно произвольны при описании гравитационных степеней свободы, точно так же, как имеются четыре электромагнитные степени свободы для каждой пространственной точки, что мы попытались показать[1]).

6.3. Число различных историй. В то время как уравнения Максвелла в заданном плоском пространстве-времени могут иметь, выражаясь несколько вольным языком, число решений

$$N_{EM} = \left[\left\{ \begin{array}{c} \text{Число значений,} \\ \text{информация о которых} \\ \text{может быть получена} \\ \text{в одной точке} \end{array} \right\}^{\left(\begin{array}{c} \text{Число видов} \\ \text{информации} \\ \text{в точке} \end{array} \right)} \right]^{\left(\begin{array}{c} \text{Число} \\ \text{точек} \end{array} \right)} = \infty^{4\infty^3}, \quad (57)$$

уравнения геометродинамики, т. е. уравнения объединенной теории гравитации и электромагнетизма, согласно

[1]) Автор выражает признательность Ч. Мизнеру и Д. Шарпу за обсуждение, которое существенно помогло установлению данной трактовки проблемы начальных значений.

предыдущему обсуждению, имеют число решений

$$N_{GMD} = \infty^{8\infty^3}. \tag{58}$$

Начальные значения на 3-поверхности служат для выбора единственной из возможных историй среди этого множества решений; кроме того, задание этих начальных значений служит для выбора одной из 3-поверхностей в выбранном таким образом 4-мерном пространственно-временном континууме.

Формулировка задачи с начальными значениями, которую мы обсуждаем, близка к привычной задаче динамики частицы с одной степенью свободы. В данный момент времени t достаточно задать координату x и импульс p, чтобы предсказать все будущее и воспроизвести все прошлое частицы. Здесь принято говорить о числе динамических координат, равном только двум, несмотря на тот факт, что в задаче фигурируют три числа. Это происходит потому, что в другой момент времени t' другие значения координаты x' и импульса p' могут быть заданы так, что получающаяся история будет той же самой. Иными словами, имеется ∞^2 возможных историй, а не ∞^3. Новая особенность геометродинамики заключается в том, что трудно разбить каким-либо простым способом аналоги этих трех чисел на два числа, относящихся к динамическим переменным, и одно — относящееся ко времени. Никто не нашел способа разделить

$$N_{GMD}^{(\text{Начальн.})} = \infty^{9\infty^3} \tag{59}$$

различных вариантов начальных значений [все они совместимы с уравнениями для начальных значений гравитационного и электромагнитного полей (53), (54) и (52)] на два класса (табл. 5) таким образом, чтобы все утверждения о начальных условиях, которые принадлежат к одному и тому же классу, принадлежали бы и к *той же самой* из

$$N_{GMD} = \infty^{8\infty^3}$$

возможных историй. Выберем *одну* историю. Другими словами, возьмем один большой класс задач с началь-

ными значениями. В этом классе две задачи с начальными значениями отличаются друг от друга тем, что они соответствуют двум различным способам выреза 3-поверхности в 4-мерном континууме *той же самой* кривизны. Очевидно, что вся динамика гравитационного поля и свободного от источников электромагнитного поля объединяется в геометрию единого пространственно-временного континуума — в единую историю. Такое объединение является также гораздо более компактным, чем совокупность всех возможных 3-мерных срезов, которые являются совокупностями всех возможных задач с начальными значениями, совместимыми с данной историей. В этом смысле можно сказать, что история более фундаментальна, чем любые начальные данные или динамические уравнения. Тем не менее эти данные и эти уравнения более привычны как рабочие аппараты динамики, чем сама история.

6.4. Соотношения для начальных значений плюс ковариантность дают уравнения поля. Углубление понимания соотношения между начальными данными и историей следует из рассмотрения требований, которым должны удовлетворять эти данные на 3-поверхности σ. В случае электромагнетизма эти требования (обращение в нуль $\mathrm{div}\,\mathbf{h}$ и $\mathrm{div}\,\mathbf{e}$) наиболее просто выписываются в ковариантной форме через тензор электромагнитного поля $f_{\mu\nu}$ и дуальный ему тензор $*f_{\mu\nu}$ соответственно в следующем виде:

$$\frac{\partial f_{23}}{\partial x^1}+\frac{\partial f_{31}}{\partial x^2}+\frac{\partial f_{12}}{\partial x^3}=0 \qquad (60а)$$

и

$$\frac{\partial *f_{23}}{\partial x^1}+\frac{\partial *f_{31}}{\partial x^2}+\frac{\partial *f_{12}}{\partial x^3}=0. \qquad (60б)$$

Теперь левая часть соотношения (60а) является с точностью до множителя $(-g)^{-1/2}$ временной компонентой 4-вектора V^μ, иначе говоря, компонентой V^0 4-вектора V^μ, которая перпендикулярна 3-поверхности σ. Допустим, что поле $f_{\mu\nu}$ и вектор V^μ, а также соотношение (60а) для начальных значений ковариантным образом преобразованы (в смысле тензорного исчисления). Тогда в любой данной точке P пространства-времени соотношения для начальных значений (60а) должны

Сравнение «одноповерхностной» формулировки условий, требуемых для установления истории, с «двухповерхностной» формулировкой

В данной таблице не приводится случай, когда одновременно рассматриваются электромагнитные и гравитационные степени свободы (см. [20]).

	Механика частицы с одной степенью свободы	Свободное от источников электромагнитное поле в		Свободное от источника гравитационное поле
		лоренцовом пространстве-времени	искривленном пространстве-времени	
Данные, требуемые для выбора истории системы («одноповерхностная» формулировка)	$x = x'$ и $p = p'$ при $t = t'$	$\mathbf{e} = \mathbf{e}'(x, y, z)$ $\mathbf{h} = \mathbf{h}'(x, y, z)$ при T'	$f_{\mu\nu} = f'_{\mu\nu}$ на пространственно-подобной поверхности $x^\alpha = x^\alpha(u, v, w)$	${}^{(3)}g'_{mn}(u, v, w)$ ${}^{(3)}P'_{mn}(u, v, w)$ [1]
Число существенных данных на точку пространства	3	6	7	6+6—3 [2]) = 9
Являются ли подобные величины произвольными?	Да	$\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ $\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$	$\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ $\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$	Нет
Число условий на точку пространства	0	2	2	4
Число свободно задаваемых и существенных данных в точке пространства, требуемых для решения задачи с начальными данными	3	4	5	5
Уравнения движения плюс данные, определяющие историю . . .	$x = x(t)$ $p = p(t)$	$\mathbf{e} = \mathbf{e}(T, x, y, z)$ $\mathbf{h} = \mathbf{h}(T, x, y, z)$	$f_{\mu\nu}(x^\alpha)$	${}^{(4)}g_{\mu\nu}(x^\alpha)$

	Механика частицы с одной степенью свободы	Свободное от источников электромагнитное поле в	
		лоренцовом пространстве-времени	искривленном пространстве-времени
Число различных историй	∞^2	$\infty^{4\infty^3}$	$\infty^{4\infty^3}$
Число различных вариантов выбора начальных данных	∞^3	$\infty^{1+4\infty^3}$	$\infty^{5\infty^3}$
«Двухповерхностная» формулировка дает координаты и не дает импульсы	$x = x'$ при t' $x = x''$ при t''	$\mathbf{h}'(x, y, z)$ при T' $\mathbf{h}''(x, y, z)$ при T''	$(f_{\mu\nu})'_{\text{поверх.}}$ на $x = x'(u, v, w)$ и $(f_{\mu\nu})''_{\text{поверх.}}$ на $x = x''(u, v, w)$
Число данных на точку пространства, имеющих физическое значение	$(2 \cdot 1) + (2 \cdot 1) = 4$	$2 \cdot 3 = 6$	$(2 \cdot 3) + (2 \cdot 1) = 8$
Являются ли эти данные произвольными? . .	Да	$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$	$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$
Число условий на точку пространства	0	$2 \cdot 1 = 2$	$2 \cdot 1 = 2$
Число произвольных условий на точку пространства	4	4	6
Число различных выборов начальных данных	∞^4	$\infty^{2+4\infty^3}$	$\infty^{6\infty^3}$

быть пригодны не только на одной 3-поверхности σ, проходящей через эту точку, но и на каждой 3-поверхности, проходящей через эту точку. Иными словами, временна́я компонента вектора V^μ должна обращаться в нуль не только в данной лоренцовой системе отсчета, но и в каждой лоренцовой системе отсчета. Этому условию нельзя удовлетворить до тех пор, пока не обращаются в нуль *все* компоненты вектора V^μ. Другими словами, одно условие (60а), наложенное на начальные значения в типичной точке P плюс принцип ковариантности требуют, чтобы в этой точке обращались в нуль все *четыре* величины типа (60а):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f_{23}}{\partial x^1}+\frac{\partial f_{31}}{\partial x^2}+\frac{\partial f_{12}}{\partial x^2}=0 \\ &\frac{\partial f_{03}}{\partial x^2}+\frac{\partial f_{32}}{\partial x^0}+\frac{\partial f_{20}}{\partial x^3}=0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \sim \text{„rot}\,\mathbf{e}+\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial T}\text{“}=0, \quad \sim \text{„div}\,\mathbf{h}\text{“}=0,$$

или, более кратко,

$$\frac{[\alpha\beta\gamma\delta]\,\partial f_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta}=0. \tag{61а}$$

Аналогичное соотношение можно записать для величин типа (60б)

$$\frac{[\alpha\beta\gamma\delta]\,\partial * f_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta}=0. \tag{61б}$$

Таким образом, из условий обращения дивергенции в нуль и принципа ковариантности можно вывести *все* уравнения Максвелла для электромагнитного поля. Динамические уравнения могут быть названы не больше и не меньше как гарантией того, что соотношения $\operatorname{div}\mathbf{e}=0$, $\operatorname{div}\mathbf{h}=0$ будут выполнены на *каждой* 3-поверхности, проведенной через каждую точку P пространства-времени. В этом смысле *вся теория свободного от источников электромагнитного поля сводится к единственному утверждению, что «силовые линии не имеют концов».*

Если мы смогли сократить восемь уравнений Максвелла до двух таких элементарных соотношений, то уравнения общей теории относительности, тензорные по

своему характеру, можно редуцировать еще сильнее, а именно свести десять уравнений к одному. Достаточно заметить, что (00)-компонента тензора

$$R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}R - \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu}^{\nu} \tag{62}$$

будет обращаться в нуль в каждой системе отсчета, чтобы гарантировать обращение в нуль каждой компоненты этого тензора в одной (и во всех) системах отсчета. Это простое требование, аналогичное условиям обращения дивергенции в нуль в электродинамике, имеет вид

$$^{(3)}R - P_m^k P_k^m + (P_m^m)^2 = 2 * (\mathbf{e} * \mathbf{e} + \mathbf{h} * \mathbf{h}), \tag{63}$$

иными словами

$$\left(\begin{array}{c}\text{Инвариант «внутреиней»}\\ \text{кривизны любой 3-поверх-}\\ \text{ности, проходящей через } P\end{array}\right) - \left\{\begin{array}{c}\text{Инвариант «виешней»}\\ \text{кривизны той же 3-по-}\\ \text{верхности, проходящей}\\ \text{через ту же точку } P\end{array}\right\} =$$

$$= 16\pi\left(\begin{array}{c}\text{Плотность энергии } (см^{-2}) \text{ электромагнитного}\\ \text{поля в точке } P \text{ на этой же 3-поверхности}\end{array}\right).$$

Все уравнения поля в общей теории относительности могут быть выведены из утверждения о том, что внутренняя кривизна минус внешняя кривизна равна плотности энергии.

Если сравнивать 4-мерное многообразие с автомобильными крыльями, то соотношение (63) можно сравнить со специальным шаблоном, который используют для проверки правильностн изготовления крыла. Проверка будет полной только в том случае, когда шаблон прикладывают к крылу всюду и по всем направлениям — с севера на юг, с запада на восток, и по всем промежуточным направлениям. Аналогичным образом простое условие (63) вместе с соотношениями $\operatorname{div}\mathbf{e} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{h} = 0$ достаточно для проверкн того, удовлетворяют ли всем законам электродинамики и общей теории относительности совместно произвольно заданная история электромагнитного поля и метрическая история. Короче говоря, *уравнения для начальных значений дают уравнения движения без уравнений движения.*

§ 7. Задание начальных условий по слоям и свобода выбора топологии

7.1. Граничные условия для вариационного принципа. Уравнения динамики чаще выводятся из вариационного принципа, чем из соотношений для начальных значений. Эти два способа вывода уравнений соответствуют двум способам получения характеристических решений. Особенности вариационного метода лучше всего напомнить на примере частицы с одной степенью свободы. Находится экстремум интеграла

$$\int_{x_1,\,t_1}^{x_2,\,t_2} L(x,\,\dot{x},\,t)\,dt \tag{64}$$

при граничных условиях «послойного» типа:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \quad \text{при} \quad t = t_1, \\ x &= x_2 \quad \text{при} \quad t = t_2. \end{aligned} \tag{65}$$

Эти условия определяют искомую историю. В противоположность этому, при «одновременной» формулировке начальных значений задают координату, *а также* импульс в данный момент времени $t = t_1$. Соответственно при одновременной формулировке электродинамики роль координат играет магнитное поле **H**, заданное на начальной 3-мерной пространственно-подобной гиперповерхности, а роль импульсов — электрическое поле **E**. Однако, применяя вариационный принцип к электродинамике, вообще удобно рассматривать только магнитное поле (или только вектор-потенциал), заданное на *двух* пространственно-подобных гиперповерхностях. Соотношение между этими двумя подходами легче всего видеть при переходе к пределу, когда два момента времени или две поверхности весьма близки: Δt или $\Delta T = c\Delta t$. Тогда задание x в оба момента времени эквивалентно заданию x и dx/dt в один и тот же момент времени; иными словами, это эквивалентно заданию координаты и импульса. Аналогично обстоит дело и в случае магнитного поля.

7.2. Эквивалентность «послойной» и одновременной формулировок задачи с начальными значениями в гео-

метродинамике. В геометродинамике ситуация аналогична ситуации в электродинамике, что легче всего видеть из рассмотрения специального случая, когда отсутствует электромагнитное поле. Конфигурационными координатами в этом случае являются величины, которые определяют *внутреннюю* 3-геометрию $\mathscr{G}$ на начальной 3-мерной пространственно-подобной гиперповерхности. (Все эти величины содержатся в 3-мерной метрике ${}^{(3)}g_{mn}$, которая не зависит от выбора системы координат.) Импульсы же являются числами, необходимыми для задания *внешней* кривизны этого 3-пространства в свободной от координат формулировке. При «послойной» формулировке опять имеет смысл считать, что задаются только координаты (т. е. только 3-геометрии $\mathscr{G}_1$ и $\mathscr{G}_2$) для двух пространственно-подобных 3-поверхностей [1]). В качестве проверки такой точки зрения Шарп рассмотрел случай близких 3-поверхностей; он пришел к выводу, что в этом случае «послойная» формулировка, как и в электродинамике, во всех деталях эквивалентна одновременной формулировке. Конечно, вполне возможны всякие неожиданности в случае, когда эти поверхности достаточно удалены одна от другой. Если это не имеет места, то в постановке задачи в геометродинамике можно обойтись отысканием 3-геометрии $\mathscr{G}$ и внешней кривизны P лишь на одной поверхности, которые должны быть согласованы друг с другом в смысле соотношения для начальных условий (63). Вместо этого *достаточно задать совершенно свободно какие угодно две 3-геометрии $\mathscr{G}_1$ и $\mathscr{G}_2$; тогда уравнения геометродинамики позволяют строить из этих двух 3-геометрий 4-геометрию, определяя при этом «расстояние» между двумя 3-поверхностями, а также их внешнюю кривизну.* Какая чрезвычайно простая и красивая ситуация!

7.3. Тонкости учета времени в «послойных» данных. При «послойной» формулировке задачи одной частицы имело место четкое различие между временными координатами t_1, t_2 и конфигурационными координатами x_1, x_2. Здесь это не так. Достаточно задать геометрии $\mathscr{G}_1$ и $\mathscr{G}_2$

[1]) Автор выражает признательность Д. Шарпу за сообщение неопубликованных результатов по данной задаче, а также ему же и проф. Ч. Мизнеру за весьма ценное обсуждение этой задачи.

и ничего более, чтобы задать не только пространственную геометрию в эти два момента времени, но также и указать, *где* находятся эти 3-мерные детали относительно друг друга и относительно всех иных деталей пространства-времени, которое они определяют. Данные, содержащиеся в $\mathscr{S}_1$ и $\mathscr{S}_2$, хотя и относятся к чисто пространственно-подобным поверхностям, тем не менее представляют собой неразрывную комбинацию информации о *пространстве-времени*. Шарп, например, смог ограничиться рассмотрением случая пары 3-поверхностей, которые близки одна к другой, ограничиваясь случаем, когда обе 3-геометрии были почти одинаковыми. В этом случае он смог *вывести* явное выражение для временно-подобного расстояния между этими двумя 3-поверхностями.

7.4. Пересчет числа историй. Легко произвести еще одну проверку согласованности данного анализа, если снова подсчитать число различных историй (для простоты в частном случае отсутствия электромагнитного поля). Для каждой пространственной точки на одной поверхности число независимых данных равно

$$6\,({}^{(3)}g_{mn}) - 3 \text{ (свобода выбора 3-координат)} = 3. \quad (66)$$

Из этих трех данных два можно считать соответствующими амплитуде гравитационных волн в двух различных состояниях поляризации; любое изменение третьей приводит к сдвигу данной окрестности на гиперповерхности вперед либо назад по времени. Хотя анализ Фурье непригоден в искривленном пространстве, следует напомнить для связи с привычными образами, что задание амплитуд поля осциллятора на двух параллельных пространственно-подобных поверхностях обычно бывает достаточным для задания его амплитуды и положения в один и тот же момент времени. Оценка числа различных историй, очевидно, с помощью данных или других аналогичных способов дает

$$N_{\text{грав.}} = \infty^{1\infty^3}. \quad (67)$$

На этом подсчет заканчивается. Обратим внимание на то, что совершенно невозможно сказать, какая из трех величин, заданных для некоторой точки в $\mathscr{S}_1$, описывает *время!*

7.5. Связь с квантовой теорией. «Послойная» формулировка динамической задачи представляет значительный интерес вследствие того, что переменные, задаваемые на двух поверхностях, являются в точности теми же переменными на одной поверхности, которые являются независимыми переменными волновой функции в квантовой механике:

$$\left.\begin{array}{r} \psi(x, t) \text{ — для гармонического осциллятора;} \\ \psi(H(x), t) \text{ — для электромагнитного поля [соотношение (12)];} \\ \psi(\mathscr{G}) \text{ — для чисто гравитационных возмущений [1].} \end{array}\right\} \quad (68)$$

7.6. Какова свобода в выборе топологии? Близкая связь двухповерхностной формулировки и квантовой теории поднимает вопрос, насколько *общей* может быть геометрия $\mathscr{G}$? Насколько широкий класс топологий следует рассматривать? Чтобы глубже понять эту проблему, быть может, имеет смысл обратиться к классической вариационной проблеме. Какова свобода выбора топологии на двух сторонах $\mathscr{G}_1$ и $\mathscr{G}_2$ нашего «сэндвича»? Проф. Ч. Мизнер информировал меня, что проф. Р. Том в рамках своей теории «кобордизма» доказал теорему, которая в несколько вольном изложении состоит в следующем. Задание любых двух несингулярных топологических (не обязательно метрических) 3-пространств позволяет построить между ними несингулярное топологическое 4-пространство. При этом нет необходимости в том, чтобы топологии двух 3-пространств были одинаковыми. Это обстоятельство наводит на мысль, что *на обеих поверхностях в классической геометродинамике можно выбрать какую угодно топологию.* Это приводит к мысли, что волновой функционал $\psi(\mathscr{G})$ *должен рассматриваться определенным при всех топологиях.*

§ 8. Новая топология, обнаруженная в старом решении. Метрика Шварцшильда

8.1. Внешнее решение; его применение и максимальное продолжение. Из всех следствий уравнений Эйнштейна

[1]) Мы признательны проф. Б. де-Витту, проф. Ч. Мизнеру и Д. Шарпу за ценные дискуссии по этому третьему пункту. См. [12].

Таблица 6

Некоторые предсказания общей теории относительности

Эффект	Предсказание	Наблюдения
Отклонение света, проходящего около Солнца	1,751″ для света, проходящего у края диска Солнца	Имеется много наблюдаемых значений отклонения [1]), из которых два типичные значения, полученные в 1947 и 1952 гг., соответственно дают [38] 2,01″ ± 0,27 и 1,70″ ± 0,10
Гравитационное красное смещение, пересчитанное на эквивалентный допплер-эффект	Солнце ($M_\odot$, $R_\odot$): 0,6 *км/сек*	Слишком мало для надежных измерений ввиду значительных скоростей потоков газов ([39]; см., однако, [40])
	40 Eri B (0,43 $M_\odot$, 0,016 $R_\odot$): (17 ± 3) *км/сек*	21 ± 4 *км/сек* [41] [2])
	Sirius B (1,0 $M_\odot$, 0,008 $R_\odot$): 79 *км/сек*	Неудобно для надежных измерений [42] [2])
	Две точки на Земле, разделенные по высоте на 22,5 *м*: $\Delta\nu/\nu = 4{,}92 \cdot 10^{-15}$	Измерено при использовании эффекта Мёссбауэра [44]: $\Delta\nu/\nu = (5{,}13 \pm 0{,}51) \cdot 10^{-15}$
Прецессия перигелия орбиты (в секундах дуги в столетие)	Меркурий 43,03 Венера 8,63 Земля 3,84 Марс 1,35	42,56 ± 0,94 [3]) 4,6 ± 2,7 [3])

Продолжение

Эффект	Предсказание	Наблюдения
Динамические эффекты во Вселенной	Вселенная постоянной кривизны будет расширяться и снова сжиматься. Экстраполированное время с начала расширения будет превышать действительное время в 1,5 раза. Оба эти числа вместе допускают предсказание нижней и верхней границ средней плотности массы-энергии во Вселенной	Расширение действительно наблюдается. Значения двух соответствующих времен могут быть определены лишь с точностью до множителя по крайней мере 2. Никакая убедительная проверка согласия этого отношения с предсказанием пока что невозможна. Средняя плотность массы-энергии также слишком неопределенна для убедительной проверки теории [3])

[1]) Прекрасную сводку наблюдений во время затмений Солнца и результатов возможных уменьшений наблюдаемых значений см. в книге Мак-Витти [37].

[2]) Согласно Дж. Куперу (как цитировано в книге Мак-Витти [37]), рассеянное в земной атмосфере излучение, первоначально обязанное Sirius A, примешивается к прямому излучению от Sirius B, что дает излучение с измененным красным смещением, требующим поправки. Относительно белых карликов и дальнейшего обсуждения см. в книге [43]. Автор выражает признательность проф. У. Бнделману и проф. М. Шварцшильду за обсуждение астрофизических доказательств.

[3]) Дальнейшее обсуждение см. в гл. V настоящей книги.

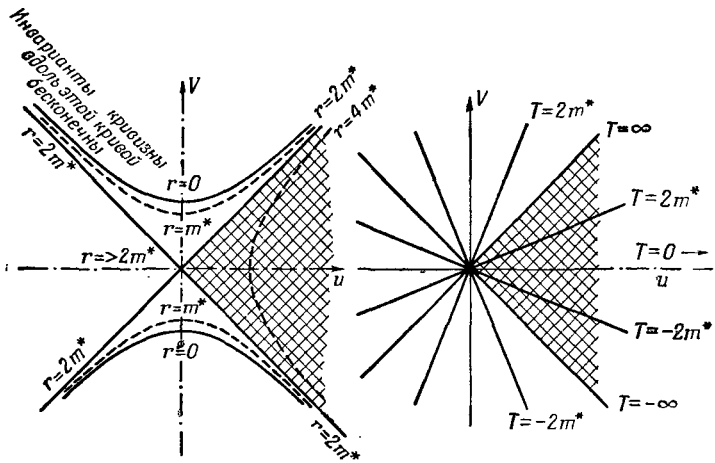
более всего известна формула Шварцшильда для интервала — решение в частном случае сферической симметрии и в отсутствие электромагнитного поля:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m^*}{r}\right) dT^2 + \frac{dr^2}{1 - 2m^*/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{69}$$

Из этого решения в области вне массы следуют три наиболее известных предсказания общей теории относительности: гравитационное красное смещение, отклонение света гравитационным полем Солнца, прецессия перигелия орбиты (табл. 6).

Решение (65) иногда называют «внешним» решением в отличие от другого решения, с которым оно сшивается

и которое справедливо в области с ненулевой плотностью «реальной» массы. Такое «внутреннее» решение



Фиг. 10. Представление Крускала для шварцшильдовской метрики в координатах u (пространственно-подобных) и v (временно-подобных).

Это представление имеет преимущество перед обычными координатами, поскольку в нем отсутствует свойственная обычному представлению сингулярность при $r=2m^*$ и подчеркивается присущая задаче сингулярность при $r=0$. Крускал записывает метрическую форму в виде

$$ds^2=f^2(-dv^2+du^2)+r^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2),$$

где

$$\left[\left(\frac{r}{2m^*}\right)-1\right]\exp\left[\frac{r}{2m^*}\right]=u^2-v^2,$$

$$\frac{T}{2m^*}=\operatorname{arcth}\frac{2uv}{u^2+v^2}$$

и

$$f^2=\frac{32m^{*3}}{r}\exp\left[-\frac{r}{2m^*}\right]=(\text{Трансцендентная функция от } u^2-v^2).$$

Нулевые геодезические проходят под углом $\pm 45°$. Для конечной (и только для конечной) области значений временной координаты v метрика свободна от каких-либо сингулярностей. Геометрия пространства, неразрывно связанная с решением Шварцшильда, лучше всего видна при $v=0$. Пространственная часть метрики описывает два эвклидовых пространства, плавно переходящих одно в другое через рукав (см. фиг. 11). Если ограничиваться только рассмотрением области $r \geqslant 2m^*$ в обычном представлении шварцшильдовской метрики (заштрихованная область на схеме), то это приведет к выбрасыванию большой и совершенно регулярной части пространственно-временно́го многообразия, части, которая, кроме того, необходима для прослеживания истории всех возможных геодезических линий.

имеет смысл рассматривать в некоторых приложениях. Но более интересен здесь принципиальный вопрос: ка-

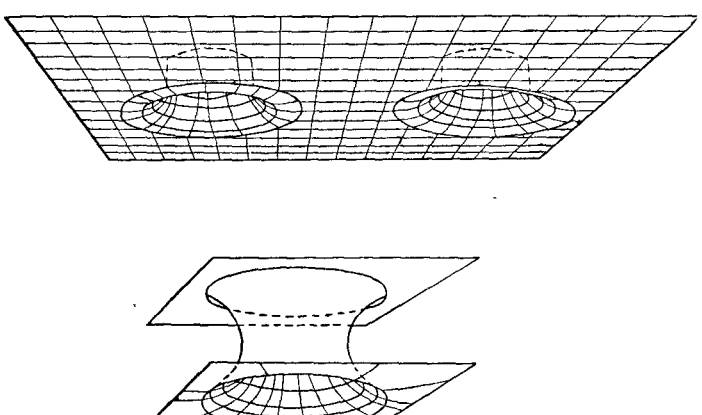
ковы следствия предположения о *всюду пустом* искривленном пространстве?

В отсутствие «реальных» масс требование сферической симметрии неизбежно приводит к метрике, которая, допуская возможность преобразований координат, эквивалентна (69), что давно было показано Биркгофом. Такая метрика обладает неприятной особенностью: g_{rr} становятся бесконечными, а g_{tt} обращаются в нуль, если $r = 2m^*$. Однако многие авторы отметили, что сингулярность при $r = 2m^*$ является лишь кажущейся. Она возникает вследствие используемой системы координат, а не за счет чего-то сингулярного в самой внутренней геометрии при $r = 2m^*$. В этой точке *все величины, которые описывают кривизну многообразия инвариантным образом, являются конечными.* Крускал [1] показал, что существует система координат, в которой метрика регулярна в какой-то начальный момент, если судить по инварнантам кривизны, и остается регулярной для конечного собственного времени в прошлом и будущем (фиг. 10). Эта метрика представляет собой *максимальное расширение метрики Шварцшильда:* только такое расширение пространства позволяет продолжить каждую геодезическую первоначальной области до тех пор, пока она либо уйдет на бесконечность, либо войдет в область (верхняя и нижняя гиперболы на фиг. 10, обозначенные $r = 0$), где внутренняя кривизна бесконечна.

8.2. Новая топология, включающая «ручку». Геометрия, к которой нас неотвратимо ведут эти рассуждения, не имеет эвклидовой топологии. Вместо этого следует представить картину, изображенную на фнг. 11. Мы видим не одно, а два эвклидовых пространства, соединенных «мостом», если употребить терминологию Эйнштейна и Розена [49]. В качестве другой возможности можно представить себе два листа как две различные части одного и того же эвклидового пространства, в действительности столь удаленных друг от друга, что никогда не проявляется никакого их взаимного влияния через «наружное пространство». В таком случае соединение мо-

[1]) См. [47]; эта работа в некоторых отношениях предвосхищена Фронзделом [48], которому мы выражаем признательность за сообщение результатов своей работы до ее опубликования.

жет быть названо для наглядности «кротовой норой» [1]), или, пользуясь принятым топологическим термином, «ручкой». Если бы пространство было статическим, то птица могла бы влететь в одну горловину и вылететь из другой. Расстояние вдоль этой ручки от одной горловины до другой не имеет какой-либо связи с расстоянием



Фиг. 11. Две интерпретации трехмерной „максимально расширенной шварцшильдовской метрики" Крускала при ковремени $T = ct = 0$.

Вверху. Связь в смысле Эйнштейна—Розена между двумя пространствами, которые в других отношениях эвклидовы. *Внизу.* Ручка [28], связывающая две области *одного и того же* эвклидова пространства, в предельном случае, когда эти области чрезвычайно сильно удалены одна от другой, по сравнению с длиной ручки.

в открытом пространстве между этими же самыми горловинами. Элементарной иллюстрацией этого будет лист бумаги с малым отверстием в верхней половине листа (это будет одна горловина) и с таким же отверстием в нижней половине листа; затем согнем без изломов лист так, чтобы обе «горловины» накладывались. В этом случае длина рукава нулевая, а внутренняя геометрия его все еще осталась эвклидовой. В аналогичном этому 3-мерном случае птица пролетела бы почти мгновенно из

[1]) У автора используется термин «wormhole» (буквально «нора червя»). Здесь и в дальнейшем мы будем пользоваться термином «ручка», принятым в топологии, а также термином «рукав». — *Прим. ред.*

одного места в другое, удаленное на мили, если измерять это расстояние в «верхнем пространстве». Однако метрика Шварцшильда, которая кажется статической в координатах соотношения (69), далеко не статическая в координатах Крускала. Используя его координаты, можно доказать, что частице никогда не хватит времени для того, чтобы пройти из достаточно удаленной точки верхнего пространства в достаточно удаленную точку нижнего пространства. В этом смысле не возникает противоречий с элементарным понятием причинности.

8.3. Ручка допускает чисто геометрическое описание задачи двух тел. Две удаленные друг от друга горловины ручки имеют массу в том смысле, что метрика в окрестности каждой горловины имеет шварцшильдовский характер аналогично метрике вблизи «реальной» массы. В силу этого они должны испытывать ньютоновское притяжение. Таким образом, ручка обеспечивает свободный от сингулярностей и чисто геометрический вариант ньютоновской задачи двух одинаковых масс. Анализ типа Эйнштейна — Инфельда — Гоффмана показывает, что эти два «объекта» будут притягиваться друг к другу ожидаемым образом просто как следствие уравнений поля самих по себе. Иными словами, кривизна будет расти у ближайших сторон горловин и уменьшаться у удаленных сторон, так что две искривленные области будут сближаться.

Только что описанная ситуация с двумя телами представляет собой типичную задачу чистой геометродинамики. Все прошлое и будущее определяется, если заданы соответствующие геометрические параметры на начальной пространственно-подобной поверхности. Однако начальные данные еще не определены! Они могут задаваться с гораздо большей степенью произвола, чем можно ожидать для 6 начальных координат и 6 начальных импульсов в теории Ньютона. Смысл этого нетрудно понять. Массы будут посылать гравитационные волны, поскольку они ускоряются навстречу друг другу. Но гравитационное излучение может, и в общем случае будет уже иметь место и циркулировать по пространству, как только массы начнут сближаться. Таким образом, имеется неограниченное множество задач двух тел, подлежащих

анализу. Среди этого множества Мизнер [50] выбрал некоторые задачи, которые оказались особенно простыми. Он сформулировал для них точные самосогласованные начальные данные. Дальнейший анализ одной из этих задач и полный расчет всей судьбы ручки является актуальной задачей, подлежащей анализу, по-видимому, с помощью электронной вычислительной машины.

§ 9. Заряд без заряда

9.1. Сохранение потока через ручку. Если наиболее известные решения уравнений Эйнштейна заставляют нас рассматривать понятие многосвязного пространства, то к каким следствиям приведет многосвязность в присутствии электромагнитного поля? Такой вопрос приводит непосредственно к классическому образу электрического заряда [28].

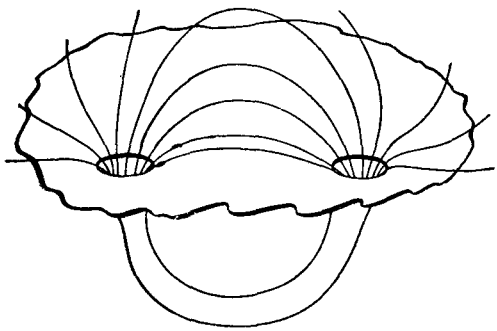
Фиг. 12 иллюстрирует ситуацию, при которой электрические силовые линии проходят через ручку. Они всюду удовлетворяют уравнениям Максвелла. Вследствие этого полный поток напряженности электрического поля через горловину ручки не может меняться со временем, причем не имеет значения, насколько нерегулярно электромагнитное поле или насколько сильно искривлено пространство и как изменяется со временем размер горловин и удаленность их друг от друга, пока не меняется топология[1]). Следовательно, *этот поток* удовлетворяет закону сохранения электрического заряда и *может быть отождествлен с электрическим зарядом.* Обратим внимание на то, что здесь нигде нет какого-либо «реального» заряда. Таким образом, имеем чисто геометрическое описание электрического заряда с помощью метрики и топологии искривленного пустого пространства, или, короче говоря, *заряд без заряда.*

Заряд, изображенный на фиг. 12, является чисто классическим типом заряда. Он не имеет какого-либо отношения к квантованному заряду элементарных частиц, для которого предполагается совершенно иное описание.

9.2. Геометродинамический «зоопарк». Итак, теперь можно считать, что положено начало заселению «зооло-

[1]) Эта теорема сформулирована Мизнером (см. [13]).

гического сада» геометродинамики. В нем имеются теперь: 1) электромагнитные волны, 2) электромагнитные геоны, 3) гравитационные волны, 4) гравитационные геоны, 5) незаряженные горловины ручек, которые дви-



Фиг. 12. Символическое изображение *классического* электрического заряда: ручка, через которую проходит электрический поток.

Наблюдателю, располагающему инструментами с низкой разрешающей силой, две горловины представляются электрическими зарядами, равными по величине и противоположными по знаку. С точки зрения 3-пространства наблюдатель обнаружит, что силовые линии выходят из отверстия, заполняя телесный угол 4π.

В другой области он обнаружит сходящиеся силовые линии, также заполняющие телесный угол 4π. Он может построить ограничивающую замкнутую поверхность вокруг правого заряда, определить поток через эту „границу", некорректным образом применяя теорему Гаусса, и „вывести" отсюда, что внутри этой поверхности находится заряд. Но это не граница. То, что ею охватывается, фигурально выражаясь, может войти в горловину ручки, пройти через рукав, выйти из другой горловины ручки и возвратиться через окружающее почти эвклидово пространство.

Силовые линии нигде не кончаются. Уравнения Максвелла нигде не теряют силу. Нельзя указать, где находится некоторый заряд. Эта классическая модель электрического заряда не имеет никакого непосредственного отношения к квантованию заряду элементарных частиц. В данном случае имеется свобода выбора потока через ручку, а также характера связи между двумя зарядами, совершенно чуждая зарядам в физике элементарных частиц (относительно мыслимой модели элементарной частицы см. фиг. 17). Для большей наглядности число измерений пространства на схеме сведено к двум; изображенное здесь третье измерение не имеет физического смысла — оно представляет собою лишнее измерение, в которое для наглядности вложена эта поверхность.

жутся подобно нейтральным объектам (но имеют электрическую поляризуемость), 6) горловины, или ручки, содержащие потоки, которые описывают заряды и которые движутся подобно заряженным объектам, и, наконец, 7) объекты, которые составлены из объектов 1—6. Однако ни одно из этих образований не имеет сколько-нибудь прямого отношения к элементарным частицам, наблюдаемым на опыте.

§ 10. О возможности уравнений без разумных решений?

10.1. Об алгоритме для построения всех решений. Вообще говоря, нам не представляется исключенным, что может быть найден путь, позволяющий строить и классифицировать все истории, являющиеся решениями уравнений Эйнштейна 1) в случае чистой гравитации и даже, возможно, 2) в случае геометродинамики, т. е. объединенной теории гравитации и электромагнитного поля без источников. *Но существуют ли вообще нетривиальные решения, свободные от сингулярностей?*

Иногда утверждают, что эти уравнения даже в случае чистой гравитации крайне сложны. В случае, когда уравнения гравитации записываются в явном виде через частные производные 1-го и 2-го порядков от $g_{\mu\nu}$ и обратную ему матрицу, это утверждение действительно оказывается справедливым. В этой форме уравнения являются явно нелинейными. Однако в другом смысле эти уравнения крайне просты; из них лишь следует, что 4-мерное многообразие должно быть таким, чтобы в каждой точке P и на каждой 3-поверхности, проходящей через эту точку, выполнялось условие:

$$\begin{pmatrix}\text{Инвариант внутренней}\\ \text{кривизны}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Инвариант внешней}\\ \text{кривизны}\end{pmatrix}. \qquad (70)$$

Трудно представить себе какое-либо более изящное соотношение, имеющее геометрическую интерпретацию, чем (70).

Возможность нахождения простого алгоритма, позволяющего решить (70), представляется соблазнительной также и потому, что существует другая знаменитая задача, несколько аналогичная сформулированной здесь (также существенно нелинейная), для которой такой алгоритм удалось найти.

Погрузим замкнутую проволочную рамку, изогнутую произвольным образом, в мыльный раствор и вынем из него, чтобы образовалась мыльная пленка, натянутая на рамку. Пленка будет представлять собой *минимальную поверхность* в силу минимальности энергии пленки, равной произведению поверхностного натяжения на поверхность пленки. Уравнение такой поверхности известно;

оно имеет сугубо нелинейную форму и может быть выражено через расстояния z от плоскости (x, y) и производные 1-го и 2-го порядков $z_x = \partial z/\partial x$, $z_{xx} = \partial^2 z/\partial x^2$ и т. д.:

$$(1+z_x^2)z_{yy}+(1+z_y^2)z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}=0. \qquad (71)$$

В пределе почти плоской поверхности это уравнение, подобно уравнениям общей теории относительности, сводится к обычному линейному уравнению $(z_{xx}+z_{yy}=0)$. Тем не менее при решении (71) мы не пользуемся непосредственно ни упомянутым обстоятельством, ни какими-либо другими приближениями [51][1]). Рассмотрим вместо этого «какую-либо вещественную плоскую алгебраическую кривую C в плоскости s, t», $s = s(\lambda)$ и $t = t(\lambda)$ (являющуюся аналогом потенциальной кривой) и построим абелевы интегралы:

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}\int \frac{2s}{1+s^2}\,it\,ds, \\ y &= \mathrm{Re}\int \frac{1-s^2}{1+s^2}\,it\,ds, \\ z &= \mathrm{Re}\int t\,ds. \end{aligned} \qquad (72)$$

Пусть число s, вещественное вначале, становится комплексным: $s = \alpha + i\beta$ (переход в комплексную плоскость). Тогда вместо трех интегралов (72) получим три функции от двух параметров α и β. Эти функции позволяют получить параметрическое представление уравнения поверхности, автоматически удовлетворяющее нелинейному уравнению (71) при выполнении следующих условий (Липман Берс):

---

[1]) Относительно более ранних решений задачи о мыльной пленке — знаменитой задачи Плато см. [52]. Уравнение (71) представляет собой один из нескольких способов записи уравнения при обращающейся в нуль *сумме* главных кривизн в некоторой точке: $\varkappa = (1/R_1) + (1/R_2) = 0$, т. е. при нулевой полной внешней кривизне. Здесь R_1 и R_2 означают главные радиусы кривизны в данной точке на поверхности. В отличие от этого общая геометрия имеет дело с внутренними кривизнами 4-пространства, построенными из *произведений* типа $(1/R_mR_n)$, где R_m и R_n — главные радиусы кривизны.

1) для каждой точки (s, t) на C из вещественности s следует вещественность t;

2) функции $x(\alpha, \beta)$ и $y(\alpha, \beta)$ однозначны на той части F римановой поверхности C, где $\beta \geqslant 0$.

Упомянутый результат теории минимальных поверхностей позволяет построить модель весьма общих решений уравнений Эйнштейна. Мы исходим из произвольной функции [в данном случае $t = t(s)$] и конструируем из нее решение. Из свойств формализма, с помощью которого получается решение, можно сделать вывод о сингулярностях и других основных свойствах решения.

Оказывается, что единственные всюду регулярные (для всех x и y) решения уравнений минимальных поверхностей являются тривиальными и представляют собой плоскости: $z = c_1 x + c_2 y$. Эта изящная теорема, доказанная С. Н. Бернштейном, является аналогом известной теоремы, которая заключается в том, что уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{73}$$

нигде не имеет никаких регулярных конечных решений при всех значениях x, y и z, кроме тривиального $\psi = \text{const}$. В связи с этими теоремами возникает глубокий и важный вопрос. *Существуют ли всюду регулярные решения уравнений Эйнштейна, отличные от тривиального решения, соответствующего плоскому пространству-времени?* Хотя в настоящее время окончательного ответа на этот вопрос не существует, можно привести некоторые рассуждения, касающиеся этого вопроса.

10.2. Регулярная метрика Крускала — Шварцшильда становится в конечном счете сингулярной. Наиболее известный случай решения геометродинамических уравнений в отсутствие электромагнитного поля описывается метрикой Шварцшильда (69). Если перейти к координатам Крускала при $v = 0$, геометрия 3-мерного пространства будет всюду регулярной. Более того, она остается регулярной для конечного интервала собственного времени в будущем и прошлом. Однако по прошествии конечного промежутка собственного времени инварианты кривизны обращаются в бесконечность в связи с особенностью в точке $r = 0$ в (68). Кроме того, такая интерпре-

тация решения Шварцшильда является единственно возможной в том смысле, что она основана на полной информации о траекториях световых лучей и элементарных частиц. Любая несингулярная координатная система должна описывать то же явление. Другими словами, решение, которое ранее считалось регулярным во времени и сингулярным в пространстве, оказывается при более тщательном рассмотрении регулярным в пространстве в начальный момент, но *по существу* сингулярным по истечении определенного промежутка собственного времени. Это согласуется с упомянутым отсутствием нетривиальных сингулярных решений.

10.3. Сингулярность геодезических координат не означает еще сингулярности геометрии. В работах Райчаудхури [53] и Кóмара [54] исследовалась более общая задача. Они рассматривали произвольную начальную гиперповерхность σ в 4-мерном многообразии, удовлетворяющую уравнениям общей теории относительности. Рассмотрение проводилось в произвольной координатной системе u, v, w в этом трехмерном пространстве. На пересечениях координатных поверхностей помещались бесконечно малые пробные тела. Затем прослеживались траектории этих тел с течением времени, определялось протекшее собственное время при движении тела вдоль траектории, которое использовалось в качестве временнóй координаты. Пользуясь языком геометрии, можно сказать, что эти авторы анализировали 4-мерное пространство с помощью семейства геодезически параллельных пространственно-подобных гиперповерхностей. Исходя из эйнштейновских уравнений поля, они показали, что эти гиперповерхности становятся сингулярными по истечении конечного промежутка времени в одной из областей светового конуса в будущем или в прошлом (но не обязательно одновременно в будущем и в прошлом), если исходное пространство не является плоским и не свободно от наличия концентраций массы-энергии. Отсюда естественно было бы сделать вывод об отсутствии регулярных решений, за исключением тривиального решения для плоского пространства-времени точно так же, как делается вывод об отсутствии несингулярных решений уравнений для минимальных поверхностей, за ис-

ключением решений, описывающих плоские поверхности. Однако Кóмар подчеркивает, что сингулярной, вообще говоря, становится не обязательно внутренняя геометрия, а лишь представление геометрии через семейство геодезически параллельных пространственно-подобных гиперповерхностей.

10.4. Пример: гравитационные волны, симметричные по времени и регулярные во всех точках пространства и (предположительно) времени. Представляется разумным предположить в качестве гипотезы, что действительно существуют решения уравнений геометродинамики, асимптотически плоские на бесконечности, регулярные во все моменты времени и переносящие энергию. Несмотря на регулярность такого решения в любом временнóм интервале, возможно лишь сингулярное представление решения с помощью семейства геодезически параллельных пространственно-подобных гиперповерхностей. Рассмотрим в качестве простого примера гравитационную волну, приходящую издалека в пространство, до этого плоское, достигающую состояния максимальной концентрации и снова расходящуюся со скоростью света. Предположим, что это решение обладает временнóй симметрией [55] в том смысле, что существует такая координатная система, в которой метрика имеет следующие свойства:

$$\begin{gathered} g_{00}(T, x, y, z) = g_{00}(-T, x, y, z), \\ g_{m0} = g_{0m}(T, x, y, z) = -g_{0m}(-T, x, y, z), \\ g_{mn}(T, x, y, z) = g_{mn}(-T, x, y, z). \end{gathered} \tag{74}$$

Тогда достаточно знать лишь внутреннюю 3-мерную геометрию в 3-мерном пространстве, обладающем временнóй симметрией относительно $T = 0$, чтобы полностью определить метрику и внутреннюю геометрию 4-мерного многообразия в прошлом и в будущем. Таким образом, для этой специальной гиперповерхности *внешняя* кривизна, заданная путем погружения в окружающее 4-мерное пространство, равна нулю

$$^{(3)}P_{mn}\left(\sim \frac{\partial g_{mn}}{\partial T}\right) = 0. \tag{75}$$

Полученное значение внешней кривизны автоматически удовлетворяет трем из четырех соотношений [(53) и (54)], которые приходится конкретизировать с помощью начальных условий. Для удовлетворения четвертого условия достаточно потребовать равенства нулю *внутренней* кривизны гиперповерхности, на которой имеет место временна́я симметрия:

$$^{(3)}R = 0. \tag{76}$$

Подсчет степеней свободы не представляет трудностей. В нашем распоряжении имеется 6 компонент метрического тензора на каждую пространственную точку гиперповерхности $T = 0$. Однако тремя координатами мы можем свободно распоряжаться, так что имеется $6 - 3 = 3$ внутренних геометрических параметра на пространственную точку. Кроме того, они должны удовлетворять одному условию (76) на пространственную точку. Поэтому окончательно мы имеем два независимых параметра на пространственную точку.

Гравитационная волна, обладающая временно́й симметрией, аналогична электромагнитному полю, удовлетворяющему условиям временно́й симметрии:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(T, x, y, z) &= -\mathbf{e}(-T, x, y, z), \\ \mathbf{h}(T, x, y, z) &= \mathbf{h}(T, x, y, z). \end{aligned} \tag{77}$$

Электрическое поле тождественно обращается в нуль в момент времени, относительно которого имеет место симметрия. Магнитное поле, подчиняющееся условию $\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$, имеет лишь две независимые компоненты в каждой точке пространства. На языке анализа Фурье можно сказать: 1) в пространстве волновых чисел возможны два состояния поляризации на каждую точку пространства; 2) каждому состоянию поляризации соответствует осциллятор; 3) каждый осциллятор обладает одной координатой и одним импульсом, но 4) в момент времени, относительно которого имеет место симметрия, все импульсы обращаются в нуль в частном случае поля, обладающего временно́й симметрией. В этом случае обычные четыре независимые величины в каждой точке сводятся к двум.

10.5. Распределение эффективной энергии в случае гравитационной волны. Бриль развил метод построения

всюду регулярной 3-мерной метрики, удовлетворяющей условию (76), которая ввиду этого может быть использована в качестве начальных условий для гравитационной волны [56] (см. также [57]). Он ограничился случаем, когда 3-мерное пространство обладает аксиальной симметрией. При этом метрику он записывает в форме, предложенной Бонди:

$$ds^2 = \psi^4(\rho, z)\{\exp[2\lambda q_1(\rho, z)](d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2\}. \quad (78)$$

Здесь множитель $q_1(\rho, z)$ может быть качественно интерпретирован как распределение эффективной энергии гравитационного поля в момент временной симметрии. Рассматриваются лишь такие распределения q_1, которые равны нулю вне сферы конечного радиуса:

$$(\rho^2 + z^2)^{1/2} = r \leqslant a. \quad (79)$$

Величина λ определяет напряженность поля в гравитационной волне. Одна свободная переменная, которая остается на точку пространства [т. е. на точку в меридиональной плоскости (ρ, z)], в случае аксиальной симметрии сводится к функции $\lambda q_1(\rho, z)$. Множитель ψ не является произвольным и определяется начальным условием равенства нулю внутренней кривизны: ${}^{(3)}R = 0$, принимающим вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \left[\frac{\lambda}{4}\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial z^2}\right)\right]\psi = 0,$$

или, более кратко,

$${}^{(3)}\nabla^2 \psi + \frac{\lambda}{4}({}^{(2)}\nabla^2 q_1)\psi = 0. \quad (80)$$

Качественно можно считать, что множитель ψ описывает гравитационное поле, обусловленное распределением эффективной массы-энергии в гравитационной волне, причем само распределение описывается функцией $\lambda q_1(\rho, z)$.

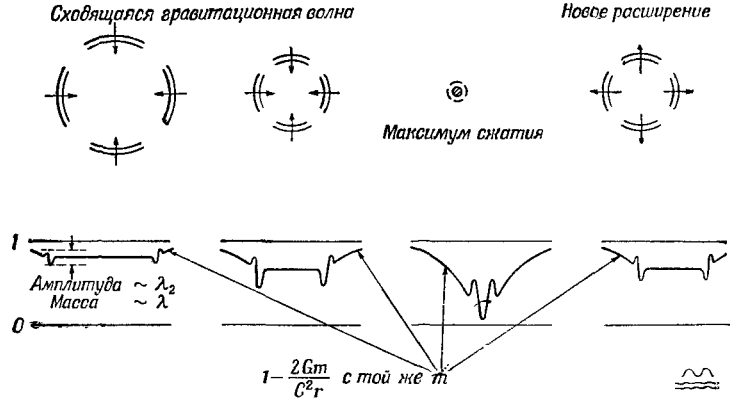
Можно думать, что уравнение (80) допускает бесконечное число решений для множителя ψ. Однако решения, которые ограничены на конечных расстояниях, имеют, как правило, узлы на конечных расстояниях или же обращаются в бесконечность на больших расстояниях. В обоих случаях им соответствуют внутренние син-

гулярные 3-геометрии. Трехмерная геометрия только тогда свободна от сингулярностей и описывает локальную концентрацию энергии в асимптотически плоском пространстве, если 1) множитель ψ имеет асимптотическую форму

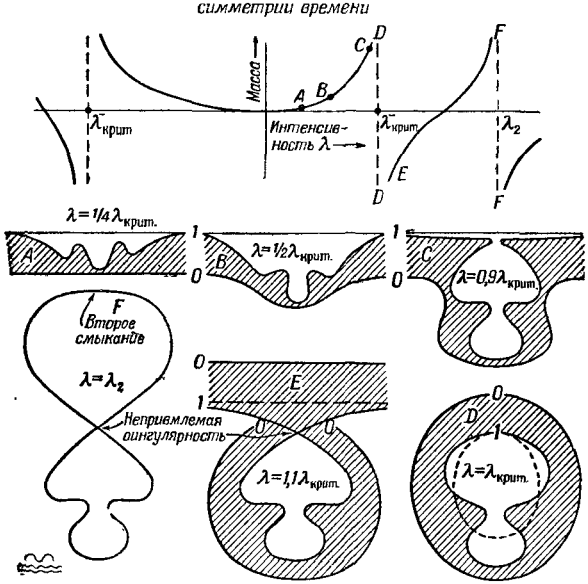
$$\psi(\rho, z) \sim A(\lambda) + \frac{1}{r} B(\lambda) = A(\lambda)\left[1 + \frac{m^*(\lambda)}{2r}\right] \qquad (81)$$

и 2) напряженность λ в распределении $q(\rho, z) = \lambda q$ не превышает определенного критического предела $\lambda = \lambda_1$. Согласно Брилю, для каждого положительного значения λ, не превышающего критического предела, существует одно и только одно регулярное решение $\psi(\rho, z)$, удовлетворяющее требованию (81). Это решение описывает локализованную гравитационную волну с массой-энергией, равной m^* (*см*) или $(c^2/G)m^* = m(g)$.

10.6. Сходящаяся и вновь расходящаяся гравитационная волна, регулярная для всех моментов времени. Этот род гравитационной волны чрезвычайно близок сходящимся электромагнитным волнам, обладающим временно́й симметрией, которые при этом достигают конфигурации с максимальной плотностью энергии, как бы подходя к фокусу линзы с апертурой, превышающей 2π, после чего уходят в бесконечность. Не существует сходящейся электромагнитной волны с постоянной интенсивностью в полном телесном угле, равном 4π, и невозможно построить поле векторов поляризации, равных по модулю на поверхности единичной сферы, не вводя при этом сингулярности. Точно так же не существует строго сферически симметричных гравитационных волн. Тем не менее существуют решения задачи с начальными условиями, обладающие в случае гравитационных, а также электромагнитных волн почти сферической симметрией; поэтому есть основания полагать, что, задаваясь тем или иным произвольным решением в момент временно́й симметрии, мы приходим к гравитационным волнам, с течением времени затухающим подобно электромагнитным волнам (фиг. 13). Другими словами, представляется естественным *предположить, что существуют регулярные, но нетривиальные пространственно-временны́е многообразия, описываемые уравнениями Эйнштейна для*



Волны различных интенсивностей, сравниваемые в момент симметрии времени



Ф и г. 13. Сходящаяся и расходящаяся гравитационные волны.

Вверху приведена качественная схема гравитационной волны, приходящей издалека, достигающей стадии максимального сжатия в момент временной симметрии и затем распространяющейся во внешнее пространство. *В центре* приведена качественная диаграмма, иллюстрирующая изменение метрики со временем при сжатии и расширении гравитационной волны, причем показан шварцшильдовский характер асимптотического приближения к плоскому пространству на больших расстояниях. Масса, связанная с этой асимптотикой (по-

гравитационных волн без источников, в случае если пространство является асимптотически плоским.

Можно думать, что доказанное математически Брилем существование гравитационных волн, симметричных по времени и, по-видимому, несущих конечную энергию, регулярных в прошлом и будущем, не будет нарушать в силу упомянутой регулярности решений теорему Райчаудхури и Кóмара. Чтобы исследовать этот вопрос, рассмотрим сферическую группу пробных тел с центром в точке схождения волны, покоящихся задолго до прихода волны. Что же случится с частицами после того, как волна придет, снова начнет расходиться и уйдет, оставив пространство в окрестности частиц таким же плоским, как и до ее прихода? Частицы приобретут скорости, хотя и небольшие, но конечные и притом не одинаковые по величине и направлению [1]). В результате сфера постепенно изменит форму и станет сингулярной поверхностью. Геометрически это означает, что геодезические линии, нормальные 3-мерной гиперсфере в далеком прошлом (вместе с семейством последовательно расположенных геодезически параллельных поверхностей, перпендикулярных упомянутым геодезическим), в конце концов образуют сингулярное многообразие. Однако отсюда вовсе не следует наличие какой-либо внутренней сингулярности в геометрии пространства-времени.

Мы видим, что имеются несингулярные решения уравнений геометродинамики для гравитационных волн, ко-

[1]) Относительно исследования поведения пробных частиц в аналогичном случае цилиндрической гравитационной волны см. [55].

рядка $1/r$), не меняется в течение всего процесса. *Внизу* дается более детальная схема волны в момент временной симметрии. Сегмент, вырезанный в этот момент в 4-пространстве, имеет собственную характерную трехмерную геометрию. Типичная компонента метрики, связанной с этой трехмерной геометрией, тем более отлична от единицы, чем больше напряженность гравитационной волны в данный момент (здесь мы имеем дело с различными задачами, а не с одной задачей в разные моменты времени).

При некотором критическом значении напряженности гравитационной волны пространство искривляется настолько, что становится замкнутым, причем при увеличении напряженности метрика становится сингулярной и перестает быть приемлемой. При критическом же значении напряженности трехмерная геометрия всюду вполне регулярна и сохраняет регулярность в течение конечного промежутка собственного времени. Однако высказывается предположение, что при изменении метрики *замкнутого пространства* со временем в ней непременно появится сингулярность независимо от первоначального выбора метрики.

торые являются нетривиальными, в то время как каждое несингулярное решение при отсутствии граничных условий уравнений для мыльной пленки является тривиальным и соответствует плоскости. Подобное обстоятельство на первый взгляд несколько ослабляет параллелизм между этими двумя задачами. Сходство, однако, вновь выступает особенно ярко, если ограничиться решениями уравнений геометродинамики, соответствующими многообразиям, *замкнутым в пространстве*. В этом случае можно привести веские доводы в пользу утверждения, что *внутренняя геометрия всегда становится сингулярной в пределах определенного промежутка собственного времени*.

10.7. Замкнутая Вселенная в общей теории относительности Эйнштейна. Эйнштейн приводит следующие доводы в пользу концепции Вселенной, ограниченной в пространстве [58].

1) «С точки зрения общей теории относительности, условие для замкнутой поверхности много проще соответствующих краевых условий на бесконечности при наличии квазиэвклидовой структуры Вселенной».

2) «Принцип Маха, утверждающий, что инерция зависит от взаимодействия тел, содержится в первом приближении в уравнениях теории относительности, из которых следует, что инерция зависит, по крайней мере частично, от взаимодействия между массами. Поскольку предположение о том, что инерция обусловлена частично взаимодействием масс, а частично независимым свойством пространства, является неудовлетворительным, то принцип Маха выигрывает в правдоподобии. Но эта идея Маха соответствует только конечной Вселенной, ограниченной в пространстве, и ни в коем случае не соответствует бесконечной, квазиэвклидовой Вселенной. Поэтому, с гносеологической точки зрения, более удовлетворительно считать, что механические свойства пространства полностью определяются материей, а это имеет место только в случае пространственно-ограниченной Вселенной».

10.8. Сферическая Вселенная расширяется и снова сжимается. Чтобы получить некоторое представление о геометродинамике 4-мерного многообразия, ограничен-

ного в пространстве, полезно рассмотреть известную в космологии идеализированную сферически симметричную Вселенную. В наши дни ситуация в этой задаче много проще, чем во времена Эйнштейна, который исследовал в своей работе устойчивость Вселенной, равномерно заполненной пылью. При этом оказалось, что рассматриваемая система не остается в состоянии покоя и начнет сжиматься. Иными словами, сферически симметричная Вселенная, подобно совокупности разбросанных, взаимно притягивающихся камней, должна будет либо расширяться, либо сжиматься, но никогда не окажется статической.

В те времена этот вывод казался настолько абсурдным, что Эйнштейну позднее пришлось ввести в уравнения поля искусственное отрицательное давление, или «космологический член», чтобы уравнения поля давали статическую Вселенную. Позднее Хаббл показал, что красное смещение спектральных линий свидетельствует *в пользу* расширяющейся Вселенной, предложенной Фридманом. Эти наблюдения могли бы рассматриваться в качестве четвертого экспериментального обоснования общей теории относительности (превосходящего по важности эффект отклонения лучей света звезд, проходящих вблизи Солнца, прецессию орбиты Меркурия и гравитационное красное смещение), если бы первоначальные предсказания теории относительности были сделаны достаточно уверенно.

После того как Хабблом и другими было установлено существование красного смещения, почти пропорционального расстоянию между наблюдателем и изучающей галактикой, Эйнштейн отказался от космологического члена как математически искусственного и физически неоправданного. Уравнения геометродинамики без этого добавочного члена соответствуют именно тому, что ныне обычно понимается под термином «общая теория относительности». В период 20-х и начала 30-х годов под этим термином понималось нечто другое. Это был период интенсивного исследования различных космологических моделей Вселенной, зависящих от выбора значения «космологической постоянной». В наши дни дело обстоит много проще.

10.9. Динамика, однозначно заданная уравнением состояния. Если исходить из уравнений Эйнштейна в их первоначальной простой форме и принять в качестве удобной идеализации доводы Эйнштейна в пользу замкнутости и сферической симметрии Вселенной, то *динамика расширения и повторного сжатия Вселенной однозначно определяется уравнением состояния источника энергии-массы, заполняющей пространство.* Обозначим через a радиус кривизны, а через $T = ct$ — ковремя, прошедшее с начала расширения. Расстояние, пройденное фотоном за короткий интервал времени, будучи разделено на радиус кривизны в тот же момент времени, дает угловой параметр η, пригодный для измерения времени, который произвольно приравнивается нулю в момент начала расширения:

$$d\eta = a^{-1}d \text{ (расстояние в 3-пространстве)}. \tag{82}$$

Тогда начальные условия на последовательных пространственно-подобных поверхностях

$$-(\text{Инвариант внешней кривизны}) + \begin{pmatrix}\text{Инвариант внутренней}\\ \text{кривизны}\end{pmatrix} = \\ = \text{const} \cdot (\text{Плотность энергии}) \tag{83}$$

принимают вид

$$\frac{3}{a^4}\left[\left(\frac{da}{d\eta}\right)^2 + a^2\right] = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot (\text{Плотность энергии}). \tag{84}$$

Уравнение состояния описывает изменение давления и плотности при адиабатическом расширении и повторном сжатии [59]:

$$\frac{3\,da}{a} + \frac{d\,(\text{Плотность энергии})}{(\text{Плотность энергии} + \text{Давление})} = 0. \tag{85}$$

Система уравнений (82), (84) и (85) полностью описывает динамику этого процесса.

Из любого уравнения состояния следует наличие давления, лежащего между двумя крайними случаями: между нулевым давлением («модель Вселенной, равномерно заполненной пылью») и максимальным давлением («Вселенная, заполненная излучением»).

В этих двух случаях уравнения имеют следующие точные решения:

а) Вселенная Фридмана. Пыль. Нулевое давление:

$$T = \frac{1}{2} a_0 (\eta - \sin \eta),$$
$$a(T) = \frac{1}{2} a_0 (1 - \cos \eta). \tag{86}$$

Эти уравнения представляют собой уравнения циклоиды в параметрической форме, причем $0 < \eta < 2\pi$. Фотон как раз успевает обойти сферическое пространство и вернуться снова в точку с исходными угловыми координатами в сферическом пространстве в течение всего времени расширения и повторного сжатия. В момент максимального расширения масса Вселенной связана с радиусом кривизны a_0 соотношением

$$M = \frac{3\pi c^2 a_0}{4G}. \tag{87}$$

Величина, остающаяся постоянной при расширении Вселенной, аналогична сумме энергии покоя, кинетической энергии и потенциальной энергии данной системы:

$$Mc^2 + Mc^2 \left(\frac{da}{dT}\right)^2 - \frac{4GM^2}{3\pi a} = 0. \tag{88}$$

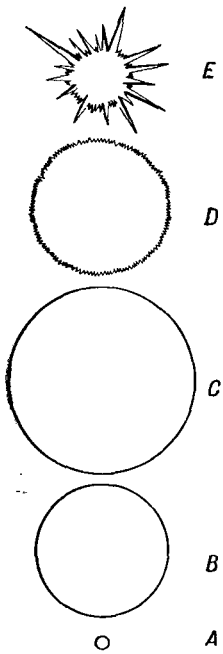
Однако величина, определяемая левой частью уравнения (аналогичная *полной энергии Вселенной*), *не является произвольной константой интегрированця*. Иначе говоря, невозможно придать замкнутой Вселенной достаточно большую энергию, чтобы она расширялась безгранично. В этом отношении аналогия между динамикой Вселенной и движением системы разбросанных камней, испытывающих взаимное гравитационное притяжение, уже не имеет места.

б) Вселенная Толмена, заполненная излучением. Давление равно $^1/_3$ плотности энергии:

$$T = a_0 (1 - \cos \eta),$$
$$a(T) = a_0 \sin \eta. \tag{89}$$

Эти уравнения задают окружность, на которой параметр η пробегает значение от 0 до π. В течение времени сжатия и повторного расширения фотон как раз успевает достигнуть противоположной точки 3-мерной сферы.

10.10. Гипотеза: каждая замкнутая метрика со временем становится сингулярной. Эти два предельных слу-



Фиг. 14. Схематическое изображение поведения пузырька воздуха под водой, сжимающегося до минимального объема и вновь расширяющегося.

Схема построена на основе фотографий таких пузырьков, приведенных в книге Коула [60]. Законно ли предположить, что это дает схематическое представление о поведении замкнутой Вселенной вблизи стадии максимального сжатия? Приводит ли численное интегрирование уравнений геометродинамики методом последовательных шагов к переходу через эту фазу благодаря метрике, всегда свободной от сингулярностей? В тексте разбирается соображение, согласно которому такое однозначно определенное продолжение начальных условий *никогда* не может быть свободно от сингулярностей.

чая столь подробно исследованы нами здесь потому, что они приводят по прошествии некоторого конечного промежутка собственного времени к истинной сингулярности во внутренней геометрии 3-мерного пространства. По-видимому, то же самое имеет место для каждого промежуточного уравнения состояния. Эта ситуация напоминает *гипотезу, что для любой замкнутой Вселенной, имеющей топологию 3-сферы и подчиняющейся уравнениям геометродинамики, всегда имеются геодезические траектории пробной частицы, которые не могут быть бесконечно продолжены, поскольку в конце концов они достигают области с сингулярной метрикой.*

Этот вывод о внутренней сингулярности решений, соответствующих замкнутому пространству, заслуживает более глубокого рассмотрения ввиду того обстоятельства, что появление сингулярностей, возможно, связано с необоснованным использованием понятия уравнений состояния в теории Фридмана и Толмена. С точки зрения микроанализа ни пыль, ни радиация не являются однородными. Как можно показать, масштаб неоднородностей мог бы выбираться в качестве минимального расстояния, с точностью до которого процесс повторного сжатия происходил бы в соответствии с предсказанием теории. Можно предположить, что

после этого динамическая картина в основном пройдет эволюцию, знакомую нам по поведению пузырьков в воде. При сжатии такого объекта (фиг. 14) образуются рога и пики. В результате обращение движения происходит не везде в одно и то же время, но в разные моменты времени в разных местах, подобно тому как можно выворачивать перчатку наизнанку палец за пальцем. Возможность более детального описания процесса вовсе не означает, что гидродинамический цикл свободен от сингулярностей. Кавитация, являющаяся одним из наиболее сингулярных гидродинамических явлений, по-видимому, имеет место во время последовательных циклов максимального сжатия в подводных пузырьках, образованных сильным взрывом (см. [60]). Поскольку эта гидродинамическая модель может служить для некоторой ориентации в вопросе о том, что можно ожидать от решения уравнений Эйнштейна, она наводит на *мысль, что каждое решение проблемы надлежащим образом замкнутой Вселенной приводит где-либо к сингулярности по прошествии конечного интервала собственного времени.* Очевидно, можно говорить лишь о степени правдоподобия этого предположения. В пользу последнего говорят: 1) несколько односторонняя аналогия с теорией минимальных поверхностей (табл. 7), 2) наблюдаемые нестабильности при сжатии подводных пузырьков, 3) сходные нестабильности, возникающие при сжатии почти сферической релятивистской Вселенной, заполненной пылью, в момент приближения к стадии максимального сжатия [61] и 4) анализ динамики Вселенной, полностью замкнутой благодаря содержащемуся в ней чисто гравитационному излучению (неопубликованные работы Д. Бриля).

Бриль исследует частный случай Вселенной, допускающей симметрию в некоторый момент времени и аксиальную симметрию [см. соотношение (78) — (81)]. Им было доказано существование замкнутых 3-мерных пространств, удовлетворяющих начальным условиям

$$^3R = 0 \tag{90}$$

и свободных от сингулярности. Упомянутые начальные условия могут быть без появления сингулярности про-

Таблица 7

Аналогия между теорией минимальных поверхностей и решениями уравнений Эйнштейна для свободного от источников поля

Теорема Бернштейна о минимальных поверхностях	Предварительная формулировка аналогичного утверждения относительно уравнений Эйнштейна	Предварительное суждение об этой формулировке
Каждая нетривиальная (неплоская) минимальная поверхность обладает сингулярностью	1. Каждое неплоское решение имеет где-либо сингулярность	1. Неверно. Отметим регулярное поведение слабой симметричной во времени гравитационной волны в асимптотически плоском пространстве
	2. Каждое решение, не являющееся асимптотически плоским, обладает где-либо сингулярностью	2. Неверно. Следует учесть бесконечную плоскую волну (Бонди, Розен, Робинсон, Пенроуз, Такено, Компанеец)
	3. Каждое решение, описывающее замкнутое пространство, иногда становится сингулярным	3. Неверно. Рассмотрим 3-мерный куб в плоском 3-пространстве и отождествим топологически противоположные грани, получив, таким образом, замкнутое пространство с топологией 3-тора. Будучи плоской, метрика не меняется со временем и, следовательно, не возникает никакой сингулярности

Продолжение

Теорема Бернштейна о минимальных поверхностях	Пробная формулировка аналогичного утверждения относительно уравнений Эйнштейна	Предварительное суждение об этой формулировке
Каждая нетривиальная (неплоская) минимальная поверхность обладает сингулярностью	4. Каждое решение, описывающее «надлежащим образом замкнутое» пространство, в некоторый момент становится сингулярным. Понятие «надлежащим образом замкнутое» пока не может быть точно определено. Для более точного определения, по-видимому, потребуется исследование принципа Маха	4. Предположение настоящей работы. Понятие «надлежащим образом замкнутого» пространства включает топологию 3-сферы [(топология 2-сферы) $\times$ (топология окружности)] и целый класс связанных топологий; при этом исключается топология эвклидова 3-пространства, топология 3-тора и, возможно, другие топологии

должны на *конечный* промежуток времени в будущее и прошлое, согласно работам Лишнеровица [62] и Фурес-Брюа [63], посвященным задаче Коши в общей теории относительности. Поскольку динамика действует в любом направлении от момента временно́й симметрии, объем 3-мерного пространства, как это было доказано Брилем [1]), всегда имеет тенденцию к уменьшению. Другими словами, *симметрия по времени* может быть совместима с фазой максимального расширения, но *никогда не совместима с фазой максимального сжатия*. Хотя из этих результатов не следует прямого доказательства отсутствия свободных от сингулярностей решений уравнений Эйнштейна без источников для Вселенной, проходящей через стадию расширения, они, несомненно, указывают на такую возможность. Последний аргумент в пользу правдоподобия такого вывода следует из решения Шварцшильда [12],

[1]) Автор признателен Д. Брилю за разрешение привести здесь его результат.

обсуждавшегося ранее и также подтверждающего появление, в конечном счете, сингулярностей в решениях, соответствующих замкнутой Вселенной.

10.11. Каким образом классическое пространство-время может стать сингулярным? Если верно, что любое надлежащим образом замкнутое пространство, удовлетворяющее уравнениям Эйнштейна, становится сингулярным по истечении некоторого промежутка собственного времени, то частный случай, в котором имеет место шварцшильдовская «горловина», может использоваться в качестве иллюстрации по крайней мере одного из возможных путей появления сингулярности при постепенном стремлении кривизны к бесконечности. Другие пути, приводящие к сингулярностям, пока неизвестны, поскольку не существует систематического и не зависящего от координат анализа сингулярностей, которые могут встречаться в решениях уравнений Эйнштейна, регулярных всюду.

10.12. Новые, действительно фундаментальные черты общей теории относительности. Если справедливы доводы Эйнштейна о том, что только надлежащим образом замкнутая Вселенная имеет физический смысл [58], и если верно предположение, что, изменяясь согласно классическим релятивистским уравнениям поля, такая Вселенная неизбежно становится сингулярной, то геометродинамика отличается от любого линеаризированного варианта теории поля даже более существенным образом, чем это предполагалось ранее. Будучи настолько своеобразной, общая теория относительности Эйнштейна должна обсуждаться с ее собственной точки зрения в свете наиболее общих принципов, а не с точки зрения привычных средств и понятий, применяемых в линейной теории поля.

1) Для замкнутой Вселенной полная энергия не является определенной величиной. При обычном выводе закона сохранения энергии рассматривается 3-мерное пространство, в котором вводится 2-мерная поверхность, охватывающая все части рассматриваемой системы. Однако в замкнутой Вселенной поверхности, располагающиеся все дальше и дальше от данной точки P, в конце концов должны стягиваться в точку в «антипод-

ной» области пространства. Тогда закон сохранения энергии сводится к тривиальному тождеству $0=0$. В качестве противоположного случая рассмотрим динамику большого числа малых тел, выброшенных с общей скоростью из общего центра находящихся под действием ньютоновских сил в плоском пространстве. В этом случае полная энергия

$$E=\frac{M}{2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2-\frac{GM^2}{2a} \tag{91}$$

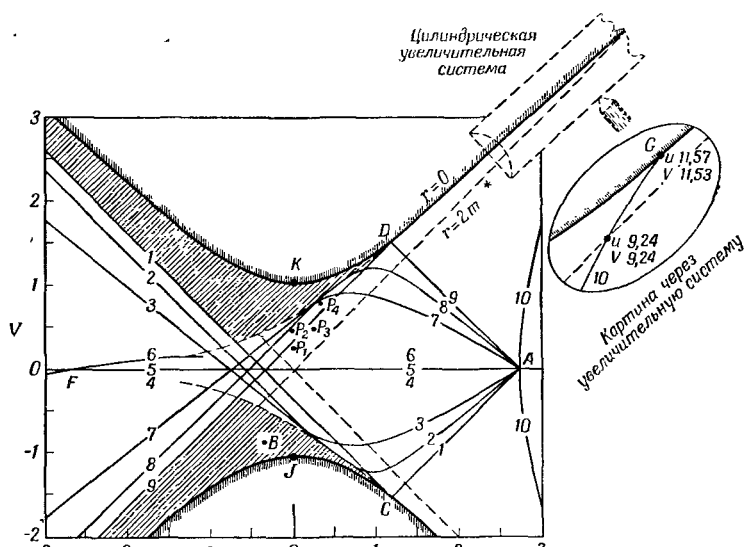
может быть положительной, отрицательной или равной нулю; массы снова могут упасть одна на другую (на центр) или же навсегда разлететься. В случае замкнутой Вселенной о такой свободе не может быть и речи [см. уравнение (88)].

2) Уже не говоря о том, что для линеализованного поля полная энергия является в этом случае определенной, она к тому же может быть представлена как сумма вкладов отдельных возбужденных состояний. Напротив, нет ни малейших указаний на возможность естественного описания геометродинамической Вселенной с помощью возбуждений нормальных колебаний.

Отсутствие полной энергии и нормальных колебаний являются двумя характерными чертами геометродинамики. Имеется и третья ее особенность.

3) Существуют ситуации, когда имеются *пары точек в 4-мерном пространстве, которые не могут быть соединены геодезической линией.* Наиболее исследованным примером такой ситуации является метрика Шварцшильда. На фиг. 15 никакая геодезическая линия, выходящая из A, не может достигнуть B и наоборот. С этой особенностью тесно связана другая деталь. Последовательность равноудаленных событий P_1, P_2, P_3, ... может заполнить вполне конечный и, вероятно, очень малый отрезок собственного времени и тем не менее быть ненаблюдаемой даже для наблюдателя, ожидающего их в течение неограниченного промежутка собственного времени. В частности, он может ждать до бесконечности, но даже не принять светового сигнала, который дал бы ему понять, что кривизна в горловине метрики Шварцшильда стремится к бесконечности. Вне горловины он может

с успехом изучать прецессию пробного тела, красное смещение и отклонение света в искривленном пространстве, и его нисколько не будет беспокоить возможная сингу-



Ф и г. 15. Заштрихованные зоны, недостижимые никакими радиальными геодезическими, выходящими из точки *A*.

Радиальные геодезические изображены в временно-подобной и пространственно-подобной координатах Крускала u и v, в которых шварцшильдовская метрика имеет вид

$$ds^2 = f^2\,(du^2 - dv^2),$$

где $f^2 = (32m^{*3}/r)\cdot\exp\left[-r/2m^*\right]$ и $|(r/2m^*)-1|\cdot\exp\left[r/2m^*\right] = u^2 - v^2$.

Пространственно-подобные геодезические обозначены номерами 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. В предельном случае пространственно-подобные геодезические 1 и 9 дают световой конус (геодезические 1 и 9). *Не существует радиальных геодезических, соединяющих A и какую-либо точку B в заштрихованной зоне.*

Пространственно-подобные геодезические, выходящие из A, никогда не проходят через $r=0$ (гипербол $v^2-u^2=1$), где внутренняя кривизна обращается в бесконечность. С другой стороны, проходящая из A временно-подобная геодезическая, которая является траекторией идеальной пробной частицы, всегда заходит хотя бы одним концом за этот барьер. Если же энергия частицы недостаточна для того, чтобы уйти от центра притяжения, оба конца геодезической лежат за барьером. Геодезическая 10 соответствует тому частному случаю, когда шварцшильдовская координата r пробной частицы достигает своего максимума в точке A. Эта геодезическая заканчивается в точке C, *не* касаясь гиперболы в плоскости (u, v).

Наблюдатель, находящийся далеко справа, никогда не примет световых сигналов P_1, P_2, P_3, P_4, как бы долго он не ждал. Однако интервал собственного ковремени между J и K вполне конечен и равен $(2\pi m^*)$. Вычисления, на основании которых был построен этот график, выполнены Р. В. Фуллером и будут направлены для опубликования в другом месте.

лярность метрики. Это случится, но не в его будущем! Другими словами, даже бесконечный интервал собственного времени в искривленном пространстве-времени, доступный наблюдателю, мог бы оказаться недостаточным для того, чтобы принять сигналы источника света, посылаемые в течение конечного интервала собственного времени.

10.13. Значение вопроса о сингулярностях. Можно ли при наличии таких неожиданных черт геометродинамики заключить, что она физически бессмысленна или внутренне противоречива (или то и другое вместе)? Этот вопрос, очевидно, является центральным при любой оценке того, что может дать общая теория относительности для развития физики. В такой оценке недостаточно указать на цель геометродинамики — на способность теории Эйнштейна описывать гравитацию без гравитации, электромагнетизм без электромагнетизма, массу без массы и заряд без заряда. Необходимо еще разобраться в вопросе о сингулярностях. Если бы этот вопрос не возникал, было бы нетрудно согласиться с другими непривычными чертами геометродинамики: с отсутствием должным образом определенной энергии в замкнутой Вселенной, с невозможностью анализа независимых видов возбуждений, с существованием различных масштабов времени на различных мировых линиях. Может ли проясниться общая картина геометродинамики, пока не решен этот вопрос?

§ 11. Геометродинамика и квант действия

11.1. Аналогичная проблема сингулярностей, существующая с раннего периода развития атомной физики. Пока что невозможно сказать последнее слово по вопросу о сингулярностях, так как не все наиболее общие следствия из уравнений Эйнштейна исследованы в достаточной степени [1]). Однако можно сослаться на задачу, возникшую на более раннем этапе развития физики, которая получила свое решение в рамках квантовой механики. Эта задача могла бы служить интересным аналогом проблемы сингулярностей в геометродинамике.

[1]) Обзор современного состояния квантовой теории гравитации дан Бергманом и Кѳмаром [64].

Около 1910 г. благодаря теореме Ирншоу стало ясно, что система заряженных частиц не может иметь равновесной конфигурации. Очевидное противоречие этого факта со стабильностью атомных систем породило множество предложений, ведущих к пересмотру закона сил, действующих между частицами. Теперь, разумеется, ясно, что закон Кулона выполняется на фантастически малых расстояниях, т. е. до очень больших отрицательных степеней десяти. В те же годы стало ясно, что, согласно классической электродинамике, электрон должен был бы все быстрее приближаться к ядру по спирали, так как движущийся с ускорением заряд излучает энергию. Делались попытки избежать этой трудности путем произвольного изменения законов электродинамики. В настоящее время законы взаимодействия с полем излучения проверены с огромной точностью путем сравнения теории лембовского сдвига $2s$-уровня водорода с экспериментом; это сравнение показывает прекрасное согласие теории с экспериментом.

Сингулярности в связанном состоянии пары заряженных частиц можно избежать не путем изменения закона взаимодействия электрона и ядра или отказа от законов электромагнитного излучения, а путем введения квантового постулата. Электрон не может быть локализован в слишком малой области с размерами L без связанного с этим достаточно большого разброса по импульсу $\Delta p \sim \hbar/L$ и соответствующей кинетической энергии $\hbar^2/2mL^2$, чтобы можно было с избытком компенсировать кулоновскую энергию $-e^2/L$. Излучение электрона прекращается не вследствие того, что электромагнитное поле более не в состоянии поглощать энергию, а ввиду отсутствия еще более низкого уровня, на который мог бы перейти электрон. Иными словами, квант действия предписывает физическим процессам более гладкую зависимость от пространственно-временных переменных, чем можно было ожидать из неквантованного варианта законов движения.

11.2. Возможная связь квантовых эффектов с проблемой сингулярности. Может ли квантовый постулат, будучи примененным к геометродинамике, подобным образом помочь предотвратить появление сингулярности?

Имеет ли смысл сравнивать сингулярности, возникающие в геометрии при повторном сжатии замкнутой Вселенной, с загибающимися гребнями, образующимися на волнах в океане, когда они проходят на мелководье? В гидродинамическом случае действие капиллярности ограничивает остроту появляющихся сингулярностей. Вытягиваясь и становясь более тонким, слой воды на гребне волны рассыпается, превращаясь в мелкие капли и пену под действием поверхностного натяжения. Имеется ли подобное эффективное ограничение кривизны пространства-времени благодаря кванту действия? В гидродинамическом случае имеет место громадное несоответствие между длиной волны прибоя (несколько метров) и размерами капель (миллиметры), которые образуются, когда волна обрушивается на отлогий берег. В случае геометродинамики имеет место еще бо́льшая несоразмерность масштабов величин, которые естественно считать эффективными: 1) радиус кривизны Вселенной (по-видимому, $\sim 10^{10}$ световых лет, или $\sim 10^{28}$ *см*) или размеры какой-либо ее макроскопической части и 2) естественные масштабы квантовых флуктуаций метрики, следующих из простых соображений размерности и равные

$$L^* = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-33} \text{ см}. \qquad (92)$$

При этом важно не то, что эта длина мала, а то, что вообще существует некоторая характеристическая длина. Существование такой длины гарантирует невозможность появления сингулярностей кривизны пространства, предсказанных классической геометродинамикой. Появление сингулярностей не означает, однако, внутренней противоречивости классической общей теории относительности. Напротив, они означают, что классическая динамика кривизны прямо приводит к явлениям, которые можно удовлетворительно объяснить лишь в квантовой теории. В этом отношении существует самая тесная аналогия между появлением сингулярности в кривизне в геометродинамике и спиральным движением электрона к ядру в атомной физике.

11.3. Проливает ли геометродинамика какой-либо свет на проблему элементарных частиц? Можно сказать,

что динамическая эволюция искривленного пустого пространства может привести к совершенно новым специфическим особенностям на малых расстояниях, являющимся следствиями введения квантового постулата. Гораздо труднее указать, в чем состоят эти особенности, хотя необходимо так или иначе ответить на этот вопрос. Объяснить то, что электрон в атоме не движется по спирали и не падает на ядро, это значит объяснить существование атомов и вообще реальность физического мира. Аналогично объяснение невозможности обращения кривизны в бесконечность может оказаться ключом к решению вопроса о том, почему вообще существует материя как таковая.

Геоны не являются обычной материей, хотя и имеют массу. Их огромные размеры и вполне классическая структура исключают непосредственную связь с элементарными частицами. Аналогично *классические* заряды, проявляющиеся при искривлении пустого многосвязного пространства, никак не связаны с *квантованными* зарядами теории элементарных частиц. Это, разумеется, не означает, что элементарные частицы всегда должны рассматриваться как исходные необъясненные и необъяснимые сущности. В то же время это не означает, что основное содержание физики всегда будет связано (как это теперь имеет место в современных предварительных феноменологических попытках трактовки элементарных частиц) с представлением о наборе взаимодействующих друг с другом полей: электронного, мезонного, нейтринного и др. В этом последнем случае развитие физики было бы навсегда затруднено наличием некоторого набора постулируемых затравочных констант: значений характеристических масс полей, входящих в теорию, и констант взаимодействия между ними. Принять любую из этих точек зрения означало бы принять концепцию пространства-времени лишь как *арены* для физики и отказаться от эйнштейновской концепции искривленного пустого пространства как единственной физической реальности. Конечно, в настоящее время никто не может дать сравнительную оценку плодотворности различных направлений исследований. Однако нет никаких оснований игнорировать чисто геометрическое описание при-

роды особенно теперь, когда геометродинамика (и только геометродинамика) способна объяснить не только

гравитацию без гравитации и
уравнения движения без уравнений движения, но также и
массу без массы,
электромагнетизм без электромагнетизма,
константы связи без констант связи и, наконец,
заряд без заряда.

Можно ли тогда интерпретировать элементарные частицы просто как квантовые аспекты пустого искривленного пространства?

11.4. Необходимость искать руководящие идеи в физике элементарных частиц и квантовой электродинамике. На современном этапе развития физики напрасно было бы надеяться на возможность построения чего-нибудь подобного конкретной квантово-геометродинамической модели элементарной частицы. Разумеется, можно представить себе, что области 4-мерного пространства могут рассыпаться на элементарные частицы, когда они становятся все острее и кривизна возрастет подобно тому, как морская волна, обрушиваясь на берег, превращается в пену и брызги. Однако эта картина слишком качественна и легковесна для того, чтобы иметь четкость модели. Кроме того, если в гидродинамике и можно найти полезные указания о нелинейных уравнениях общей теории относительности, то пройдет еще много времени, пока в этих уравнениях действительно будет найдено все феноменологическое богатство, которое в них содержится. Вихри, ударные волны, нестабильности Гельмгольца и нестабильности Рэлея — Тейлора, а также генерация звука турбулентностью были открыты экспериментально до того, как они были исследованы теоретически [1]). Поэтому в поисках чисто геометрического описания элементарных частиц разумно было бы руководствоваться не только всем, что известно об уравнениях Эйнштейна, но и всей информацией, относящейся

[1]) См. [30], где приведена таблица аналогий между гидродинамикой и геометродинамикой.

как к теории элементарных частиц, так и к экспериментальным данным о последних.

11.5. Согласно квантовой электродинамике, во всем пространстве происходят сильные возмущения. Самым поразительным в теории элементарных частиц является то обстоятельство, что эта теория относится ко всему пространству сразу. Например, Вселенная, содержащая один электрон, бессмысленна. Как было уже давно показано Дираком, электрон в этом случае перешел бы в состояние с отрицательной энергией через фантастически малое время. Наблюдаемая стабильность электрона относительно радиационной катастрофы такого типа требует, чтобы все состояния с отрицательной энергией были заполнены. Электрон может обрести реальность, возникнув где-либо из этого ненаблюдаемого, но бесконечного резервуара, что подтверждается известными экспериментами по рождению пар.

Все пространство проникнуто не только электронным полем, но и электромагнитными флуктуациями, имеющими место даже в «вакуумном» или основном состоянии электромагнитного поля. Эти флуктуации неизбежно возникают подобно хорошо доказанным нулевым колебаниям атомов в кристаллических решетках. Точно так же полевые флуктуации действуют, например, на электрон в 2*s*-состоянии атома водорода, вызывая флуктуации порядка $\langle r^2\rangle_{\text{ср.}}$ около состояния равновесия, в котором находился бы электрон при отсутствии флуктуаций. Тем самым к энергии электрона в поле атома с потенциалом $V(\mathbf{r})$ добавляется энергия вакуума

$$\Delta E_{\text{Лэмб.}} = \left\langle \frac{r^2}{6} \right\rangle_{\text{ср.}} \langle \nabla^2 V\rangle_{\text{ср.}}. \qquad (93)$$

Зная величину $\langle \nabla^2 V\rangle_{\text{ср.}}$ и измерив сдвиг Лэмба — Ризерфорда $\Delta E_{\text{Лэмб.}}$, получаем значение величины $\langle r^2\rangle_{\text{ср.}}$. Это значение дает возможность убедительно проверить теорию флуктуаций электромагнитного поля [1]).

11.6. Центральное положение «голого» электрона. Если вообще возможно чисто геометрическое описание элементарных частиц, то пространство необходимо будет

[1]) Этот способ описания лэмбовского сдвига изложен в лекциях Дайсона [65]; см. также [66].

рассматривать как место бурных флуктуаций, связанных с электронами, электромагнитным и другими полями (это с необходимостью следует как из квантовой электродинамики, так и из эксперимента). Второй вывод состоит в том, что квантовая электродинамика указывает также на возрастающую важность понятия «голого» электрона или какого-то близкого понятия, при этом значение этого понятия особенно важно, поскольку именно оно не позволяет сформулировать квантовую электродинамику как замкнутую теорию. Эта теория имеет дело с математическими объектами — «голыми» электронами, — масса и заряд которых отличаются от наблюдаемых массы и заряда множителями, которые формально обращаются в бесконечность, но которые в действительности, по-видимому, очень велики. Взаимодействие дираковских частиц с электромагнитным полем (а также через его посредство с другими электронами бесконечного океана электронов отрицательной энергии) образует «шубу» заряда, являющуюся сложной системой виртуальных пар и виртуальных фотонов, которая отождествляется с «одетым» электроном. Большинство рассуждений в теории электрона можно провести таким образом, чтобы рассматривались только «перенормированные» заряд и масса «одетого» электрона [67][1]), что подтверждает физическую разумность основных положений теории. Однако такой способ обойти проблему структуры «одетого» или «голого» электронов непригоден для объяснения наблюдаемых значений заряда и массы.

В заключение отметим, что геометродинамика внесет существенный вклад в решение проблемы элементарных частиц только в том случае, если будет выяснено, что представляет собой «голый» электрон и в каком смысле все пространство является ареной сильных флуктуаций. Не связаны ли эти проблемы между собой?

[1]) Относительно последующего развития квантовой электродиамики в работах Томонаги, Швингера, Фейнмана, Дайсона см., например, монографию Тирринга [68]. [См. также Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М., 1958; А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, М., 1960; А. А. Соколов, Введение в квантовую электродинамику, М., 1958; В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956. — *Прим. ред.*]

Как уже давно было показано Пуанкаре и Лоренцом, при попытках объяснить структуру заряженной частицы возникают новые проблемы [69, 70][1]). Энергия и импульс электромагнитного поля являются компонентами тензора и в известном смысле изменяются при преобразованиях системы координат вдвое быстрее, чем компоненты 4-вектора. Пуанкаре дал физическую интерпретацию этого факта: существуют неэлектрические натяжения, удерживающие части заряженной частицы и обеспечивающие ее устойчивость. Имея в виду это заключение, интересно отметить, что две изолированные горловины топологической ручки, содержащей поток электромагнитного поля, представляют собой хорошую модель пары заряженных объектов, причем гравитационные силы как раз играют роль неэлектрических натяжений, о которых говорил Пуанкаре. Геон является другим объектом, в котором гравитационное притяжение преодолевает электромагнитное давление таким образом, чтобы полная энергия и импульс правильно преобразовались при переходе от одной координатной системы к другой. Наконец, сама Вселенная является третьим подобным объектом, структура которого существенно зависит от наличия гравитационных сил.

И все же ни один из перечисленных примеров не имеет прямого отношения к проблеме «голого» электрона, так же как и к бурным флуктуациям во всем пространстве. Если «голый» электрон или вакуумные флуктуации и связаны каким-либо образом с гравитацией и геометрией искривленного пустого пространства, то причина этого лежит не в каком-нибудь непосредственном вкладе классического гравитационного поля или классической кривизны пространства, а *в новых эффектах, обязанных квантовым флуктуациям этих величин.*

11.7. Природа и следствия флуктуаций метрики. Можно рассмотреть порядок величины и качественный характер геометродинамических флуктуаций [72]. Интенсивность вариаций поля зависит от размеров изучаемой области. Если протяженность этой области в простран-

[1]) Обзор истории этих проблем см. в работе Пайса [71].

стве и в ковремени по порядку величины равна L, то кванты, вносящие наибольший вклад в флуктуации, обладают энергией порядка $\hbar c/L$. При этом плотность энергии поля будет порядка $\hbar c/L^4$. Поэтому сами напряженности поля с точностью до множителя перехода к соответствующим единицам будут порядка $(\hbar c)^{1/2}/L^2$ (табл. 8).

Таблица 8

Порядок величины флуктуаций поля в частном случае, когда изучаемая область в пространстве и в ковремени имеет протяженность порядка L

Величина L^* равна $(\hbar G/c^3)^{1/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-33}$ *см*. В случае электромагнетизма прописными большими буквами обозначены величины в системе CGS, в то время как строчные буквы отнесены к геометризованным единицам: безразмерным потенциалам и напряженностям полей (в $см^{-1}$).

	Электромагнетизм	Гравитация
Потенциал	$\Delta A_\mu \sim \dfrac{(\hbar c)^{1/2}}{L}$ или $\Delta a_\mu \sim \dfrac{L^*}{L}$	$\Delta\varphi_{\text{Ньют.}} \sim \dfrac{c^2 L^*}{L}$ или $\Delta g_{\mu\nu} \sim \dfrac{L^*}{L}$
Напряженность поля	$\Delta F_{\mu\nu} \sim \dfrac{(\hbar c)^{1/2}}{L^2}$ или $\Delta f_{\mu\nu} \sim \dfrac{L^*}{L^2}$	Δ (ускорение) $\sim \dfrac{c^2 L^*}{L^2}$ или $\Delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \sim \dfrac{L^*}{L^2}$
Кривизна пространства	—	$\Delta R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \sim \dfrac{L^*}{L^3}$

На расстояниях L порядка приведенной комптоновской длины волны

$$L_m = \frac{\hbar}{mc} = 3{,}85 \cdot 10^{-11}\ см \qquad (94)$$

от электрона статическое гравитационное поле и статическое возмущение метрики, разумеется, фантастически малы:

$$\Delta g_{\text{стат.}} \sim \frac{2Gm}{c^2 L_m} \sim \left(\frac{L^*}{L_m}\right)^2 \sim 10^{-44}. \tag{95}$$

Чрезвычайно малы также и флуктуации метрики

$$\Delta g_{\text{флукт.}} \sim \frac{L^*}{L_m} \sim 10^{-22}. \tag{96}$$

На еще меньших расстояниях статическое поле электрона не увеличивается по порядку, так как энергия и масса частицы не локализированы в области, меньшей L_m.

Наоборот, на вычисленные флуктуации метрики близость к частице не влияет. Эти флуктуации имеют отношение только к размерам изучаемой области. С точки зрения атомных масштабов, пространство плоско (подобно поверхности моря, рассматриваемой с самолета). При ближайшем рассмотрении отклонение от регулярности становится, очевидно, все заметнее. Наконец, на расстояниях порядка L^* флуктуации метрической компоненты $g_{\mu\nu}$ становятся сравнимыми по порядку величины с самими $g_{\mu\nu}$. Тогда, как показано схематически на фиг. 16, в геометрии появляются новые черты.

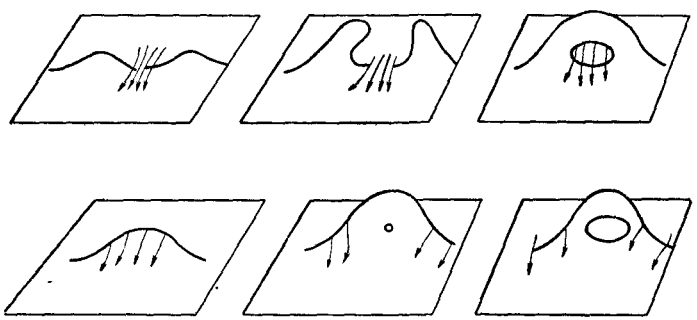
Многосвязность развивается точно так же, как и на морской поверхности, когда на волнах появляются гребни с брызгами и пеной. Разумеется, необязательно указывать способ, позволяющий наблюдать флуктуации, чтобы заметить, насколько непосредственно и неизбежно они вытекают из квантовой теории метрики. Вовсе незачем употреблять слово «наблюдения»! Вместо этого достаточно сказать:

1) Квантовомеханическое состояние метрического поля является функционалом 3-мерной внутренней геометрии $\mathcal{G}$ пространственно-подобной поверхности σ:

$$\Psi = \Psi(\mathcal{G}). \tag{97}$$

2) Амплитуда вероятности Ψ имеет характерный быстрый спад при *крупномасштабных* отклонениях от гладкой метрики, причем спад амплитуды очень мал

при отклонениях от гладкой метрики порядка $L^* = (\hbar G/c^2)^{1/2}$ или меньше. Кроме того, следует ожидать, что быстрота этого спада будет не очень сильно различаться в зависимости от того, остается ли топология неизменной при отклонении от гладкости или эти отклонения вводят многосвязности высокого порядка, или



Фиг. 16. Схематическая иллюстрация роста флуктуаций метрики пространства вплоть до превращения пространства в многосвязное.

Вверху, слева направо: флуктуации, запирающие силовые линии в топологической ручке. Интеграл от напряженности поля по горловине ручки отличен от нуля. Сама ручка обладает зарядом. *Внизу, слева направо:* появление многосвязности того же типа через последовательность таких геометрий, что силовые линии никогда не могут проходить сквозь ручку. В этом случае заряд ручки равен нулю.

даже бесконечно разветвленную топологию. Как было отмечено Вейлем [73], «более детальное исследование поверхности может показать, что объект, казавшийся нам элементарным, на самом деле имеет тонкие топологические ручки, изменяющие связность этого объекта, причем микроскоп с более сильным увеличением мог бы обнаружить новые топологические усложнения и так *до бесконечности*».

11.8. Смысл флуктуаций. В этом обсуждении слово «флуктуация» употребляется как краткое обозначение конфигураций системы, о которой идет речь (в данном случае геометрии), описываемой некоторой заметной амплитудой вероятности. Согласно этой терминологии, элементарный гармонический осциллятор с массой m и

циклической частотой ω, описываемый волной функцией

$$\Psi = N \exp\left[-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right], \tag{98}$$

«испытывает флуктуации положения» порядка

$$\Delta x \sim \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}.$$

Аналогичным образом, электромагнитное поле в почти плоском пространстве-времени часто описывается в координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... бесконечной системы гармонических осцилляторов. Основное состояние волновой функции задается нормированным произведением гауссовских функций:

$$\Psi = N \exp\left[-\frac{\sum_n \mu_n \xi_n^2}{2\hbar}\right]. \tag{99}$$

Тогда флуктуации амплитуд соответствующих осцилляторов поля будут порядка

$$\Delta\xi_n \sim \left(\frac{\hbar}{\mu_n}\right)^{1/2}, \tag{100}$$

где μ_n — константы.

11.9. Калибровочная инвариантность функционала состояний электромагнитного поля. Другой способ анализа является более удобным для пространственно-подобного описания флуктуаций электромагнитного поля, таких, которые представляют интерес также в геометродинамике. Амплитуда координаты ξ_n типичного осциллятора поля может быть записана в виде интеграла по всему пространству от магнитного поля $\mathbf{H}(x)$, умноженного на соответствующим образом выбранную периодическую функцию координат. Таким образом волновая функция (99) основного состояния электромагнитного поля становится представленной в виде *функционала* магнитного поля [1]):

$$\Psi = N \exp\left[-(16\pi^3\hbar c)^{-1}\right] \int\int \mathbf{H}(x) \cdot \mathbf{H}(y)\, |x-y|^{-2}\, d^3x\, d^3y. \tag{101}$$

[1]) Автор выражает благодарность слушателям курса кваитовой механики, в частности Г. Демистеру, за вычисления экспоненты в этом выражении. Здесь требуется, чтобы дивергенция магнитного поля обращалась в нуль.

Это выражение дает возможность вычислить и сравнить амплитуды вероятности для любой произвольно выбранной конфигурации магнитного поля: $\mathbf{H}_1(x)$, $\mathbf{H}_2(x)$, ..., $\mathbf{H}_k(x)$, ..., определенного во всем пространстве и имеющего нулевую дивергенцию. Разумеется, совершенно необязательно ограничиваться основным состоянием электромагнитного поля. Можно рассмотреть и состояние, соответствующее более высокому энергетическому уровню, или даже состояние, вообще не являющееся собственным вектором оператора энергии, как, например, функционал

$$\Psi = N \exp\left[-\varepsilon^{-2}\right] \int \left(\mathbf{H}(x) - \frac{[\mathbf{kx}]}{a^2 + x^2}\right)^2 d^3x, \qquad (102)$$

(дополнительное условие $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$), где ε — очень малое число. Полученный функционал описывает состояние, в котором наиболее вероятной конфигурацией магнитного поля является

$$\mathbf{H}(x) = \frac{[\mathbf{kx}]}{a^2 + x^2}, \qquad (103)$$

где a и $\mathbf{k}$ — константы.

Для изучения динамики электромагнитного поля часто применяется векторный потенциал $\mathbf{A}$, связанный с $\mathbf{H}$ соотношением

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \qquad (104)$$

Тогда амплитуда вероятности вычисляется сразу как функционал от $\mathbf{A}$. Лишь позже обнаруживается как следствие градиентной инвариантности, что $\mathbf{A}$ входит в выражение для функционала состояния только в виде $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$.

11.10. Калибровочная инвариантность функционала состояний в геометродинамике. Для начала рассмотрим амплитуду вероятности при любой заданной 3-мерной геометрии $\mathcal{G}$ на пространственно-подобной поверхности σ как функционал компонент метрического тензора

$$^{(3)}g_{mn} \qquad (105)$$

на всей поверхности. Однако преобразование координат на поверхности σ изменит только компоненты метрики

${}^{(3)}g_{mn}$, не изменив внутреннюю геометрию $\mathscr{G}$. Совершенно аналогичную картину мы имеем в электродинамике, где (градиентное) преобразование

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{иов.}} + \operatorname{grad}\lambda \tag{106}$$

изменяет потенциал **A**, оставляя напряженность поля **H** неизменной. Отсюда следует, что функционал состояния в теории относительности без источников в конечном счете зависит не от 6 функций g_{mn}, а только от внутренней геометрии:

$$\Psi = \Psi(\mathscr{G}). \tag{107}$$

Величина флуктуаций может быть большой или малой в зависимости от того, рассматривается отдельный механический осциллятор или же множество квантовых состояний, допустимых для данной элементарной системы. Электромагнитному полю доступно еще большее множество квантовых состояний [1]). Поэтому можно полагать, что для описания флуктуаций электромагнитного поля потребуется еще большее число параметров. Это во всяком случае имеет место для крупномасштабных флук-

[1]) Может ли метрическое поле находиться в каком-либо из большого числа квантовых состояний? Если допустить состояния, описывающие асимптотически плоскую метрику, появляется большая свобода выбора. Таким образом, при наличии шварцшильдовской массы, характеризующей быстроту приближения к плоскому пространству в крупном масштабе, сама масса может иметь то или иное значение, подобно соответствующему случаю электромагнитного поля, где существует произвол в выборе состояния системы. Однако, вообще говоря, не обязательно такая же свобода будет иметь место в случае «надлежащим образом замкнутого пространства» в соответствии с рассмотрением Эйнштейна. Поскольку энергия замкнутой Вселенной даже не является поддающейся определению величиной, невозможно говорить о системе, находящейся в одном из возможных состояний собственной энергии. Еще более важны новые обстоятельства, связанные с замкнутой Вселенной в общей теории относительности [74, 75]. Невозможно наблюдать систему со стороны, поскольку вне ее нет ничего, что могло бы вызвать переход из одного состояния в другое. Поэтому возникает вопрос, как различать одно состояние от другого. Либо имеются такие граничные условия в случае замкнутой Вселенной, что возможно лишь одно квантовое состояние? Существует ли единственная *«универсальная»* в этом смысле *волновая функция*? Это, пожалуй, один из наиболее интересных вопросов, связанных с квантованием общей теории относительности (см. в этой связи [12]).

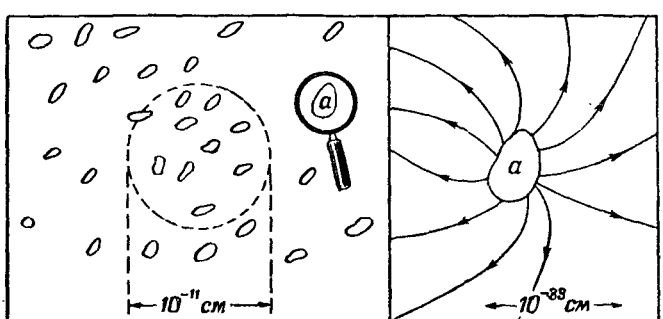
туаций поля. Их амплитуда может быть малой или большой в зависимости от исходного состояния системы. Однако функционал состояния непрерывного поля приобретает новые черты при рассмотрении мелкомасштабных флуктуаций, если этот функционал несингулярен. Амплитуда флуктуаций малого масштаба приближается к стандартному уровню, типичному только для этого масштаба (см. табл. 8), при условии, что этот масштаб меньше масштаба любых особенностей, отраженных в самом функционале [1]).

11.11. Виртуальная пенообразная структура пространства. На этом мы заканчиваем изложение формального аппарата, позволяющего описывать функции состояния, и обсуждение неизбежности мелкомасштабных флуктуаций в электродинамике и в геометродинамике. Вернемся теперь к физическим следствиям этих флуктуаций, связанным с природой пространства и с природой «голого» электрона.

На фиг. 17 приведено символическое изображение типичной конфигурации, для которой функционал состояния совокупности гравитационного и электромагнитного полей дает амплитуду вероятности, лишь немного меньшую ее максимального значения. Эта конфигурация обладает следующими свойствами. 1) Пространство имеет пенообразную структуру, обладая не только макрокривизной масштаба Вселенной, но и микрокривизной масштаба L^*. 2) Почти всюду появляются горловины ручек, размеры которых и расстояния между которыми порядка L^*. 3) Через ручку с размерами порядка L (не обязательно точно порядка L^*) проходит, как правило, поле порядка $E \sim (\hbar c)^{1/2}/L^2$. Следовательно, ручка содержит поток, а ее два конца являются эффективными зарядами порядка $\sim L^2 E \sim (\hbar c)^{1/2} \sim 12\,e$. 4) Этот заряд на порядок больше элементарного квантованного заряда, но он не квантован и не имеет никакого прямого отношения к заряду элементарной частицы. 5) Плотности энергии $E^2/8\pi$ и массы $E^2/8\pi c^2$, связанные с полем, огромны по сравнению с привычными значениями для

[1]) Обсуждение связанных с этим вопросов см. в работе Бора и Розенфельда [76].

теории элементарных частиц и оказываются соответственно равны $\sim \hbar c/L^{*4}$ и $\sim \hbar/L^{*4}c = c^5/\hbar G^2 = 5 \cdot 10^{93}$ *г/см*^{3}.



Фиг. 17. Конфигурация геометрии 3-пространства (и электромагнитного поля), для которой амплитуда вероятности только незначительно уменьшена по сравнению со своим максимальным значением.

Малыми замкнутыми контурами обозначены горловины ручек, задающих связность пространства. Характеристическая длина этой топологии имеет порядок $L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-33}$ *см*, что гораздо меньше любой длины, имеющей какое-либо непосредственное отношение к проблеме элементарных частиц ($\hbar/mc = 3{,}9 \cdot 10^{-11}$ *см*). Как можно видеть на увеличенном изображении горловины ручки (*a*) справа, с типичной ручкой, подобной *a*, связана не только большая кривизна пространства, но и большое поле, как показано силовыми линиями в увеличенном виде справа.

6) Так же обстоит дело с электрической массой-энергией ручки

$$m_1 = \left(\frac{\hbar}{cL^{*4}}\right) L^{*3} = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-5}\ г \text{ (или } \sim 10^{28}\ эв). \quad (108)$$

7) Гравитационная энергия взаимодействия двух типичных соседних горловин ручек будет порядка

$$E_{\text{грав.}} \sim -\frac{Gm_1^2}{L^*}. \quad (109)$$

Связанное с ней уменьшение массы

$$\frac{E_{\text{грав.}}}{c^2} \sim -\frac{G}{c^2}\frac{\hbar c}{G}\left(\frac{c^3}{\hbar G}\right)^{1/2} = -m_1 \quad (110)$$

будет того же порядка, что и положительная масса двух взаимодействующих сгустков электромагнитной энергии. Другими словами, гравитационные взаимодействия

вносят решающий вклад в компенсацию нулевой энергии электромагнитного поля, которая при вычислении столь многими способами оказывается бесконечной. Например, если каждый осциллятор поля обладает энергией $\hbar\omega/2$, то общая энергия поля, вычисленная с точностью до круговой частоты, равной c/L, будет

$$2\int_0^{\omega}\frac{\hbar\omega}{2}\,4\pi\left(\frac{\omega}{2\pi c}\right)^2 d\,\frac{\omega}{2\pi c}\sim\frac{\hbar c}{L^4}. \qquad (111)$$

Эта величина является расходящейся, если перейти к бесконечно малым расстояниям. Однако на расстояниях L порядка L^* и меньше вступают в игру совершенно новые геометрии, которые совершенно меняют анализ проблем электромагнитной нулевой энергии. Указанных трудностей нельзя избежать произвольным вычитанием нулевой энергии. В общей теории относительности нет произвольной аддитивной константы энергии, поскольку энергия связана с массой, а масса искривляет пространство. Поэтому весьма существенно, что *квантовая* геометродинамика приводит к радикально новым и многообещающим точкам зрения на проблему расходящейся энергии поля.

11.12. Отождествление флуктуационной ручки с «голым» электроном. Таким образом, квантовая геометродинамика имеет много общего с такой более разработанной теорией, как квантовая электродинамика, с точки зрения рассмотрения всего пространства как арены бурных флуктуаций. Но как обстоит дело с другой характерной чертой электродинамики, а именно с «голым» электроном? *Если существует какое-либо соответствие между чистой квантовой геометродинамикой* (без добавочных полей, без констант взаимодействия и искусственных гипотез) и *квантовой электродинамикой, «голый» электрон должен быть отождествлен с элементарной ручкой.* Его масса будет порядка $m_1 = 2{,}2\cdot10^{-5}$ *г*, заряд — порядка $(\hbar c)^{1/2}\sim 12e\sim 56\cdot10^{-10}$ *CGSE* и размеры — порядка $L^* = 1{,}6\cdot10^{-33}$ *см*. Только путем такого отождествления можно получить в квантованной общей теории относительности естественную картину

рождения пар, с необходимостью требуемую квантовой электродинамикой.

11. 13. Перенормировка массы и заряда. Нельзя считать возражением против геометрической интерпретации «голого» электрона тот факт, что эта интерпретация не позволяет получить точно определенные заряд и массу. В квантовой электродинамике уже была развита теория перенормировок [77, 68], трактующая распределение значений массы для «голого» электрона. Аналогичным образом, разброс значений заряда этого объекта нисколько не противоречит атомистической, квантовой природе заряда наблюдаемого электрона.

11. 14. Следствия флуктуаций малого масштаба в феноменологической теории. Если понятие «голого» электрона имеет какое-либо отношение к действительности, то становится понятен тот интерес, который представляет физический вакуум (даже в отсутствие каких-либо реальных электронов) с его колоссальными концентрациями электромагнитной энергии, многосвязностью и флуктуациями чрезвычайно малого масштаба. Масштабы всех этих явлений на много порядков отличаются от масштабов обычных атомных процессов или процессов в области элементарных частиц. Поэтому феноменологическая теория этих явлений не должна содержать в явном виде массы m_1 и длины L^*. В известном смысле такая теория напоминает феноменологическую теорию упругости, в которой не фигурируют ни атомы или молекулы, ни законы их взаимодействия. Квантовая электродинамика (или вычитательная физика) является именно такой теорией. Она может иметь дело с широким классом проблем, не задаваясь вопросом, откуда черпают свои заряд и массу «одетые» и «голые» электроны.

Наиболее поразительный успех (точность предсказания) и наиболее поразительная неудача теории (ее принципиальные расходимости) становятся несколько более понятными, если геометродинамическая картина «одетого» электрона имеет смысл. С этой точки зрения, успехи и трудности обусловлены одной и той же причиной: крайней малостью характеристической длины фи-

зики вакуума L^* по сравнению с характеристической длиной физики электрона $L_m = \hbar/mc$ [1]).

11.15. Частицы, интерпретируемые как коллективные возмущения, наложенные на вакуум. Согласно этому чисто геометрическому описанию природы, вклад частицы в возмущение вакуума оказывается ничтожно малым в процентном отношении по сравнению с бурными процессами в вакууме. Если сравнить вакуум с твердым телом, то электрон следует сравнивать с проходящим фононом. Эти коллективные возмущения, соответствующие фонону, не вносят почти никакого вклада в относительно огромные энергии атомных электронов в каком-либо атоме твердого тела. Точно так же электрон должен рассматриваться в микроскопических масштабах геометродинамики относительно маловажным элементом данной схемы. Поскольку соответствующая плотность массы-энергии будет порядка

$$\frac{m}{L_m^3} \sim \frac{m^4c^3}{\hbar^3} = 1{,}57 \cdot 10^4 \text{ г/см}^3, \tag{112}$$

то для вакуума она составит

$$\frac{m_1}{L^{*3}} \sim 5 \cdot 10^{93} \text{ г/см}^3. \tag{113}$$

Объяснить с этой точки зрения массу электрона — то же самое, что интерпретировать скорость коллективных возбуждений, подобных фонону; при этом существование частиц с различными характеристическими массами несколько напоминает существование различных типов коллективных возбуждений в жидком гелии или различные ветви кривой, выражающей зависимость частоты от волнового числа. Специфические неэлектрические силы, действующие между некоторыми частицами, и слабые специфические силы, действующие между электроном и μ-мезоном, следует сравнивать с взаимодействием между фононами, или экситонами, или спиновыми вол-

[1]) Возможная роль гравитации в проблеме элементарных частиц и возникающее за счет ее эффективное обрезание на малых расстояниях расходящейся собственной энергии электрона были отмечены Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосовым, И. М. Халатниковым [78], Д. Иваненко [79, 80], Паули [81]; см. также [82].

нами, различающимися характером поляризации или другими свойствами [1]).

Это чисто геометродинамическое описание элементарных частиц еще не стало определенной теорией, которую можно было бы проверить или опровергнуть экспериментально. Более того, нет никакой связи между этой теорией и недавними попытками интерпретации элементарных частиц как состояний единого фундаментального спинорного поля, заданного в плоском пространстве-времени и, следовательно, не имеющем очевидной связи с геометрией. Эта идея была высказана еще Иваненко [84, 85, 79, 80] и недавно была активно поддержана (в несколько измененном виде) Гейзенбергом и др. [86—89]. Нелинейные уравнения спинорного поля [2]) содержат элементарную длину l:

$$\gamma^{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\mu}} + l^2\gamma_{\sigma}\gamma_5\psi(\bar{\psi}\gamma^{\sigma}\gamma_5\psi) = 0. \qquad (114)$$

[1]) О взаимодействии экситонов см., например, [83].

[2]) Иногда в шутку говорят: «Так как и природа, и нелинейные уравнения сложны, то природа должна описываться нелинейными уравнениями». Однако следует отметить, насколько существенно нелинейность общей теории относительности отличается от нелинейности нелинейного спинорного уравнения. Прежде всего спинорное уравнение является локально нелинейным. Наоборот, «нелинейные» уравнения гравитации локально *линейны* в этом смысле, т. е. систему координат в любой точке P всегда можно выбрать так, что метрика в этой точке будет иметь локально лоренцовский характер. Отклонения от лоренцовской метрики входят лишь пропорционально квадрату расстояния от P. В окрестности этой точки в данной координатной системе уравнения для таких отклонений линейны. Иными словами, так называемые нелинейные черты общей теории относительности проявляются только в областях пространства-времени большей протяженности и имеют очень тонкий и специальный характер. Это обстоятельство становится особенно существенным при обсуждении топологических и глобальных свойств решений уравнений Эйнштейна. Обычно решения считаются приемлемыми в некоторой заданной области лишь в том случае, если метрика в окрестности каждой точки в этой области вполне регулярна. Этот локально лоренцовский характер пространства-времени, конечно, диктуется принципом эквивалентности Эйнштейна, согласно которому ускорения в данной точке всегда можно исключить соответствующим выбором системы отсчета.

В первоначальной формулировке принципа эквивалентности рассматривались ускорения лишь гравитационного происхождения. Для заряженных частиц необходим другой подход. Однако, с точки зре-

не имеющую никакого отношения к характеристической длине L^* квантовой геометродинамики. Разумеется, вполне возможно, что решение проблемы элементарных частиц лежит в этом или в каком-нибудь совершенно отличном направлении. Однако если более консервативный подход в какой-то мере обоснован, если есть некоторая надежда на решение проблемы элементарных частиц в рамках теорий Максвелла и Эйнштейна, а также современной квантовой теории без новых добавлений и изменений, если не вводятся извне поля́ и константы связи, если вся физика есть чистая геометрия, то изложенная нами теория является единственным возможным вариантом. Последнее заключение следует из того, что не представляется возможным установить соответствие между выводами квантовой электродинамики и наиболее очевидными чертами геометродинамики иначе, чем это было изложено выше. Тогда, по-видимому, нельзя избежать представления о частицах как о чрезвычайно слабых *коллективных возмущениях в физически содержательном искривленном пустом пространстве, имеющем виртуальную «пенообразную» структуру.*

11.16. Совершенно различный характер классических и квантовых заряженных объектов. Этот краткий обзор почти всего, что известно в настоящее время о природе квантовой геометродинамики, подчеркивает, насколько велико различие между физическими заряженными частицами, с одной стороны, и одним из геонов или одной из горловин ручек классической геометро-

---

ния классической геометродинамики, заряженные частицы являются нелокализуемыми объектами. В любой точке никогда не появляется что-либо напоминающее заряд. В любой окрестности размера l, малого по сравнению с размерами горловины ручки, вопрос об ускорении заряда просто не может возникнуть. В такой окрестности и в соответствующим образом выбранной системе координат электромагнитное поле вносит нелоренцовский вклад в метрику только порядка l^2.

В этом микроскопическом смысле и в рамках классической геометродинамики принцип эквивалентности можно применять в равной мере как при наличии электромагнитного поля, так и в случае чисто гравитационных полей. Другими словами, принцип эквивалентности Эйнштейна играет в настоящее время еще более фундаментальную роль, требуя строгой *локальной линейности* уравнений поля.

Таблица 9

Сравнение современной геометродинамической концепции классического и квантового заряда

Природа элементарного заряженного объекта	Классическая теория	Квантовая теория
Название	Горловина ручки	Элементарная частица
Наблюдаемость	Не наблюдался	Наблюдался
Размеры, L	Макроскопические, L	$L \sim 10^{-12}$ или 10^{-13} *см*
Топологическое описание объекта	Горловина отдельной топологической ручки	Порядка 10^{60}—10^{63} виртуальных ручек в области с линейными размерами $\sim 10^{-12}$ *см*; ее окрестности вплоть до бесконечного расстояния имеют практически равную плотность виртуальных ручек
Поток силовых линий через одиночную ручку (заряд ручки)	Любой от 0 вплоть до $\sim\left(\frac{c^2}{G^{1/2}}\right)L$ или $\sim\left(\frac{c^2}{G^{1/2}}\right)\left(\frac{G}{c^2}\right)\times$ $\times$ (масса) $\sim G^{1/2}\cdot$ (масса)	Изменяется от ручки к ручке, но обычно порядка $(\hbar c)^{1/2} \sim 12e$ и, следовательно, огромный по сравнению с классическим пределом $G^{1/2}\cdot(10^{-27}\ г)$ или $\sim 10^{-21}\ e$

Продолжение

Природа элементарного заряженного объекта	Классическая теория	Квантовая теория
Полный заряд заряженного объекта	Такой же, как в предыдущем случае	Квантованное кратное велнчины e; величина кванта заряда не зависит от поля, в котором движется объект, согласно квантовой электродинамике
Важность квантовых флуктуаций метрики при описании этого заряженного объекта	Флуктуации не рассматриваются классической геометродинамикой	Чрезвычайно важны
Отношение среднего квадратичного поля вдали от объекта к среднему квадратичному полю в непосредственной близости	Пренебрежимо до тех пор, пока рассмотрение совершенно классическое и пока действительные флуктуации в реальном вакууме упускаются из вида	$1 : 10^{\sim 80}$
Избыточная кривизна пространства, обязанная присутствию заряженного объекта по отношению к кривизне в его отсутствие	Огромна	Пренебрежима по сравнению с $1 : 10^{\sim 80}$

Продолжение

Природа элементарного заряженного объекта	Классическая теория	Квантовая теория
Связь посредством ручки между зарядом этого объекта и противоположным зарядом где-либо в пространстве	Вполне определенная связь с некоторой горловиной ручки в пространстве	Не одна ручка, а огромное множество их. Не реальная и классическая, а виртуальная и квантовая. Связь устанавливается со всем окружением, а не с единичным совершенно определенным зарядом противоположного знака
Упрощенное резюме этой концепции заряженного объекта	Простая топологическая ручка, содержащая силовые линии	Коллективное возмущение почти пренебрежимой величины в пеноподобной среде

динамики — с другой (табл. 9). Эйнштейн и Розен [49] в более поздний период, так же как Рейснер и Нордстрем в первые годы теории Эйнштейна, пришли к заключению, что заряженные частицы по своей природе не допускают описания в рамках общей теории относительности. Геометризованная масса электрона, например

$$m^* = \frac{Gm}{c^2} = (9{,}1 \cdot 10^{-28}\ г)(0{,}74 \cdot 10^{-28}\ см/г) = 6{,}8 \cdot 10^{-56}\ см, \tag{115}$$

и его геометризованный заряд

$$e^* = \frac{G^{1/2}e}{c^2} = (4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{CGSE})(2{,}9 \cdot 10^{-25}\ см/\text{CGSE}) = 1{,}4 \cdot 10^{-34}\ см \tag{116}$$

не удовлетворяют энергетическому критерию

$$(m^*)^2 > (e^*)^2, \tag{117}$$

применимому к сферически симметричному решению объединенной системы уравнений гравитационного и электромагнитного полей. Исходя из этого обстоятельства, они пришли к выводу, что необходимо либо изменить уравнения общей теории относительности, либо перейти к совершенно иной точке зрения. Однако такой проблемы не возникает, если отказаться от мысли, что электрон можно сравнивать с каким-либо *классическим* объектом (см. отличие между собой двух последних столбцов табл. 9). Поэтому необходимо сохранить резкое отличие между двумя совершенно разными картинами электрически заряженного объекта: 1) отдельная классическая ручка в пространстве и 2) коллективное возмущение в высшей степени квантового характера в среде топологически столь многосвязной, что она напоминает пену. Что следует из этого различия в природе элементарных частиц? Во-первых, нет оснований бояться, что чисто *геометрическому* описанию не хватает красок для описания всей многогранности физического мира. В конечном рассмотрении могут выявиться глубокие тонкости в природе «геометрии», но уже на данной стадии анализа оказывается, что 4-мерный римановский пространственно-временной континуум геометродинамики обладает многими неподозревавшимися ранее возможностями.

Во-вторых, *топология* оказалась необходимой для чисто геометрического описания заряда. Следовательно, есть все основания искать дальнейшие применения многосвязности для трактовки спина, нейтрино и свойств симметрии элементарных частиц. В-третьих, вновь возникли основания рассматривать физику вакуума как чрезвычайно богатую по своим возможностям, а также как существенную основу для понимания строения элементарных частиц. Наконец, открывается возможность *выводить* из чистой геометрии (и ничего более) *величины,* имеющие наиболее важное значение для физики.

В настоящее время применение концепций чистой геометрии и топологии, вакуума и связанных с этим величин к физике нейтрино и элементарных частиц находится в самой начальной стадии.

Наиболее существенно то, что в современной схеме геометродинамики не находится вполне естественного места для нейтрино. Следовательно, все проблемы нейтринной физики, как решенные, так и нерешенные, оказываются вне этого рассмотрения. Но прежде, чем перейти к ним, следует несколько вернуться назад и окинуть взглядом основные темы настоящей главы — геометродинамику и кваитовый постулат, чтобы отыскать какой-либо ключ к более широкому кругу идей, включающих в себя как то, так и другое.

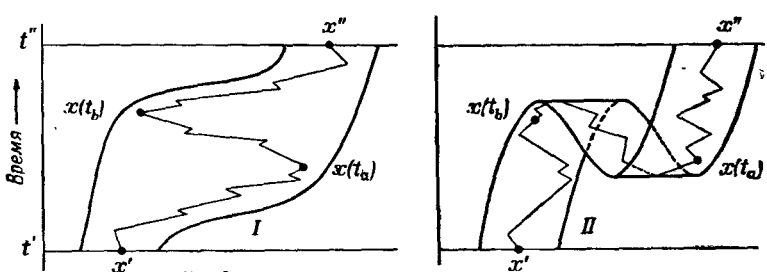
11.17. Топологический аспект квантовой теории. Одной из характерных черт квантования классической системы оказывается его топологический характер [1]).

Эта черта особенно ясно обнаруживается в формулировке квантовой механики фейнмановским методом сумм по историям [90—92]. *Значение суммы по историям зависит от топологии класса историй, по которым производится суммирование* (фиг. 18). Разность между значениями суммы для различных классов историй дает коммутатор из операторной формулировки квантовой механики. Тем не менее некоммутативные операторы нигде явно не вводятся в основы фейнмановского метода. Вместо этого коммутаторы приобретают топологический характер.

Чтобы проследить появление топологии в квантовой механике после ее столь поразительного появления в геометродинамике, возникает вопрос, существует ли какое-либо глубокое, в настоящее время лишь частично обнаруженное, топологическое единство между этими двумя аспектами физики. Пока неизвестно, в каком направлении следует искать ответ на этот вопрос. Поэтому последующее краткое изложение суммирования по историям и топологического описаиия коммутаторов будет ограничено чистыми фактами и некоторыми деталями, которые будут использованы в дальнейшем при рассмотрении квантовой теории нейтрино.

[1]) Этот способ формулировки вопроса возник при изложении теории поля в курсе квантовой механики в 1955 г. и был описан в «лоренцовских лекциях» в Лейдене в 1956 г. (неопубликовано). Автор выражает признательность Х. Демпстеру за выяснение многих сторон этой формулировки квантовой механики частиц и полей.

11.18. Фейнмановский метод суммирования по историям. Чтобы проследить основные идеи этого метода, достаточно рассмотреть динамическую систему с одной степенью свободы. *Конфигурация* системы в момент времени t' описывается единственным числом x[1]. *История* H



Фиг. 18. Структура историй развивается по-разному в I и II.

Истории имеют различные топологии в этих двух случаях, что иллюстрируется двумя различными путями, которые переводят одинаковые начальные конфигурации в одинаковые конечные конфигурации. Обозначим через I_H классическое действие для истории H гармонического осциллятора. Пусть $\sum_H$ означает суммирование по всем историям, с одинаковым весом для каждой и нормированное таким образом, чтобы сумма

$$\langle x''t'' \mid x't' \rangle = \sum_H \exp\left(iI_H/\hbar\right)$$

была унитарна. Тогда это выражение будет функцией распространения. Оно имеет одно и то же значение независимо от того, проводится ли суммирование по истории типа I или II. Однако значение суммы

$$\langle x''t'' \mid x(t_b)\, x(t_a) \mid x't' \rangle = \sum_H x(t_b)\, x(t_a) \exp\left(iI_H/\hbar\right)$$

не будет одинаковым для этих двух классов историй. Разность их равна коммутатору *операторов* $x(t_b)$ и $x(t_a)$ операторного формализма, несмотря на то, что $x(t_b)$ и $x(t_a)$ являются обыкновенными c-числами, а не операторами.

описывается функцией $x_H(t)$. Ограничимся историями H, которые совместимы с начальной и конечной конфигурациями в том смысле, что

$$x_H(t') = x',$$
$$x_H(t'') = x''.$$

Центральной идеей квантовой механики является существование *амплитуды вероятности* $\psi(x, t)$, которая развивается во времени согласно дифференциальному

уравнению Шредингера, или, что эквивалентно, согласно интегральному уравнению

$$\psi(x'', t'') = \int \langle x''t'' | x't' \rangle \psi(x', t')\, dx'. \qquad (118)$$

Величина $\langle x''t'' | x't' \rangle$, представляющая собой *функцию распространения*, может быть найдена из любой классической функции Лагранжа $L(x, \dot{x}, t)$, являющейся функцией квадратов скоростей с помощью одного из двух способов.

1) Определяются импульсы $p = \partial L/\partial \dot{x}$ и гамильтониан $H = p\dot{x} - L = H(p, x, t)$. Записывается уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \langle xt | x't' \rangle}{\partial t} = H\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, x, t\right) \langle xt | x't' \rangle, \qquad (119)$$

в котором необходимо рассмотреть вопрос о правильном порядке некоммутирующих сомножителей в H. Уравнение Шредингера решается при граничном условии: функция распространения в момент времени $t = t'$ обращается в нуль всюду, кроме точки $x = x'$. Это решение умножают на нормировочный множитель с тем, чтобы функция распространения для различных моментов времени подчинялась *закону композиции*:

$$\int \langle x'''t''' | x''t'' \rangle\, dx'' \langle x''t'' | x't' \rangle = \langle x'''t''' | x't' \rangle. \qquad (120)$$

2) Альтернативный способ заключается в определении сетки историй (skeleton history) путем указания последовательности промежуточных моментов времени $t' < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$ и задания конфигурации в эти моменты времени: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. С помощью конечных разностей типа

$$v \to \frac{x_{k+1} - x_k}{t_{k+1} - t_k}$$

вместо производных вычисляем теперь функцию Лагранжа и разностный вариант классического интеграла действия

$$I_H = \int L(x_H(t), \dot{x}_H(t), t)\, dt. \qquad (121)$$

Отметим, что имеется некоторая неоднозначность в том, как выражать производные через разности; эта неоднозначность тесно связана с вопросом об упорядочении сомножителей в гамильтониане. Теперь просуммируем выражения $\exp(iI_H/\hbar)$ по всей сетке промежуточных историй, интегрируя по координатам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (x' и x'' остаются фиксированными) и учитывая соответствующий нормировочный множитель перед интегралом. Затем переходим к пределу бесконечно мелкого разбиения промежутка времени. Предельное значение интеграла («сумма по всем историям») определяет функцию распространения:

$$\langle x''t''|x't'\rangle = \underset{H}{S}\exp\left(\frac{iI_H}{\hbar}\right). \qquad (122)$$

В случае свободной частицы функция распространения, найденная тем или иным способом, имеет одно и то же значение, которое совпадает с величиной, полученной для наиболее простой мыслимой сетки, связанной со сдвигом, линейно зависящим от времени:

$$\langle x''t''|x't'\rangle = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\,(t''-t')}\right)^{1/2}\exp\frac{im\,(x''-x')^2}{2\hbar\,(t''-t')}. \qquad (123)$$

Для частицы в потенциальной яме гармонического осциллятора экспонента в функции распространения снова равна экстремальному значению классического действия, т. е. функции Гамильтона:

$$\langle x''t''|x't'\rangle = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega\,(t''-t')}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\exp\frac{im\omega\,(x''^2+x'^2-2x''x'\cos\omega\,(t''-t'))}{2\hbar\sin\omega\,(t''-t')}. \qquad (124)$$

Обобщение этой процедуры дает метод, достаточный для квантования классического *поля*, как, например, электромагнитного поля. Пространство разбивается на конечные отрезки так же, как и время. Это дает четырехмерную решетку точек в пространстве-времени. Она ограничена в прошлом и будущем пространственно-подобными поверхностями σ' и σ'', т. е. двумя трехмерными решетками. Задание значений поля в каждой точке на σ' означает задание *конфигурации поля* C'. Задание поля в каждой точке четырехмерной решетки

определяет *историю поля H*. Ограничимся историями, которые на σ' согласуются с конфигурацией C' и переходят в C'' на σ''. Во всех точках решетки между σ' и σ'' переменные поля трактуются теперь как переменные интегрирования. Таким путем еще раз вычисляется сумма по историям, что дает нам функцию распространения для поля:

$$\langle C''\sigma''|C'\sigma'\rangle = \sum_H \exp\left(\frac{iI_H}{\hbar}\right) \qquad (125)$$

в пределе все более и более мелкого разбиения пространства и времени. Функция распространения снова нормируется так, чтобы она удовлетворяла закону композиции

$$\sum_{C''} \langle C'''\sigma'''|C''\sigma''\rangle \langle C''\sigma''|C'\sigma'\rangle = \langle C'''\sigma'''|C'\sigma'\rangle. \qquad (126)$$

В случае общей теории относительности без источников переменные C, задающие конфигурацию и параметры, а также поверхность σ, переплетаются неразрывным образом и образуют единый образ, соответствующий внутренней 3-геометрии $\mathcal{G}$.

11.19. Топологически различные истории. При применении закона композиции, например, в его элементарной форме (120) совершенно не обязательно, чтобы момент времени t'' лежал между t' и t'''. Функцию распространения для эволюции системы от t' до t'', где $t'' > t'''$, можно объединить с функцией распространения обратной эволюции от t'' к t''' и получить функцию распространения для непосредственного перехода из t' в t'''; при этом не играет роли, какое значение имеет t''. В то время как функции распространения обладают этим композиционным свойством, матричные элементы, вообще говоря, им не обладают.

Матричный элемент произведения координат x в два определенных и различных момента времени t_a и t_b определяется [65] как сумма по историям

$$\langle x'''t'''|x(t_b)\,x(t_a)|x't'\rangle = \sum_H x(t_b)\,x(t_a)\exp\left(\frac{iI_H}{\hbar}\right); \qquad (127)$$

то же самое имеет место для матричных элементов других операторов. Однако *определение будет полным лишь в том случае, если топология истории определена*

в такой степени, что можно провести различие между случаями I и II на фиг. 18. В случае гармонического осциллятора два определения отличаются друг от друга на величину

$$\left(\frac{\hbar}{im\omega}\right)\sin\omega(t_b - t_a). \tag{128}$$

Это согласуется со значением коммутатора операторных величин $\mathbf{x}(t_b)$ и $\mathbf{x}(t_a)$ в обычной операторной формулировке квантовой механики.

11.20. Коммутаторы без коммутаторов; операторы без операторов. Аналогичным образом для электромагнитного поля можно вычислить два неэквивалентных значения матричного элемента произведения

$$A_\mu(x_a,\ t_a)A_\nu(x_b,\ t_b). \tag{129}$$

Разность между историями, имеющими различные топологии, согласуется с обычным значением коммутатора двух переменных электромагнитного поля. Таким образом, исходя из сумм по историям, в которых ни разу не появляются операторные величины, получаем эквивалент обычных перестановочных соотношений; короче говоря, находим *«коммутаторы без коммутаторов»*.

Конечно, коммутаторы играют известную роль в фейнмановской формулировке квантовой механики, но второстепенную, по сравнению с их ролью в операторной формулировке. В последней коммутаторы были необходимы для определения алгебры операторов, которая в свою очередь была необходима для получения соотношений между наблюдаемыми. Эти соотношения обычно приводят к дифференциальным уравнениям. В фейнмановской формулировке уделяется гораздо меньше внимания уравнениям, которые надо решать, а больше формальным (и часто очень полезным) выражениям для решений. Короче говоря, эта процедура обеспечивает получение *«операторов без операторов»*.

Таким образом квантовая механика естественным образом приводит к топологическим рассмотрениям. Какая же существует внутренняя связь, если вообще существует какая-либо связь, между подобной топологией и топологией геометродинамики? Этот вопрос остается еще не решенным.

Глава II

О ВОЗМОЖНОСТИ ЧИСТО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ НЕЙТРИННОГО ПОЛЯ

§ 1. Без нейтрино геометродинамика неполна

Многие элементарные частицы имеют полуцелый спин. Нельзя признать удовлетворительной ни одну из трактовок элементарных частиц, в которой нет места для частиц спина $^1/_2$. Что же в таком случае может дать какое-либо чисто геометрическое описание для объяснения спина $^1/_2$? Более конкретным и более важным является вопрос о том, какое место в квантовой геометродинамике может найти нейтрино — единственный объект полуцелого спина, — который является чисто полевым в том смысле, что он имеет нулевую массу покоя и движется со скоростью света? В настоящее время не существует сколько-нибудь ясного и хотя бы удовлетворительного ответа на этот вопрос. До тех пор пока такой ответ не будет найден, *чистая квантовая геометродинамика в качестве основы физики элементарных частиц должна считаться неполной.* Поэтому следует перечислить и рассмотреть некоторые попытки найти естественное место для нейтрино в квантовой геометродинамике.

§ 2. Принцип соответствия не применим к нейтринному полю; «неклассическая двузначность»

Невозможно найти какое-либо классическое описание нейтринного поля на основе принципа соответствия. В этом смысле данное, третье по счету, поле с нулевой массой покоя по своему характеру совершенно отличается от гравитации и электромагнетизма. Для последних возможен переход от квантовой теории к классическому пределу, допуская, например, что вибрационные квантовые числа или «числа заполнения»

различных колебательных состояний электромагнитного поля становятся очень большими. Но нейтрино подчиняется статистике Ферми и не может иметь числа заполнения больше единицы. Таким образом, отсутствует какой-либо очевидный классический отправной пункт для анализа этого поля. Представляется необходимым использовать более широкий круг идей. Мысль о получении понятия спина из одной лишь классической геометрии представляется столь же невозможной, как и потерявшая смысл надежда некоторых исследователей прежних лет вывести квантовую механику из теории относительности. Насколько мы можем судить, при трактовке проблемы как нейтрино, так и спина следует с самого начала принять квантовое рассмотрение этого вопроса. Никто не сознавал это лучше, чем Паули. Его необыкновенно наглядное выражение «неклассическая двузначность» предвосхитило термин «спин».

§ 3. Составление полей с более высоким спином из полей спина $^1/_2$ оказывается невозможным

Иногда выдвигаются предложения не стремиться получить спинорное поле из геометрии, а попытаться получить гравитационное и электромагнитное поля из спинорного поля. Вместо того чтобы идти по направлению

$$\text{Тензор} \rightarrow \text{Вектор} \rightarrow \text{Спинор},$$

одно время казалось более естественным идти по направлению

$$\text{Спинор} \rightarrow \text{Вектор} \rightarrow \text{Тензор}.$$

Однако наиболее исследованная попытка подобного типа (нейтринная теория света [93—96][1])) оставлена. Прайс [98][2]) установил, что эта теория в любой рассмотренной до сих пор форме не является релятивистски инвариантной. Теория предполагает, что между нейтрино существует физическое взаимодействие, явно ни-

[1]) См. также статьи де-Бройля, Гейзенберга и Кронига в сборнике [97].

[2]) Дополнительные замечания см. в работе автора [28], стр. 534, а также в публикациях А. А. Соколова и К. М. Кейза.

где не вводимое и не рассматриваемое, так что фотон описывается парой, состоящей из одного нейтрино и одного антинейтрино или, скорее, линейной суперпозицией большого числа таких пар.

С другой стороны, была сделана попытка объяснить гравитационные силы как обязанные обмену нейтрино, после того как выяснилось, что ядерные силы нельзя объяснить обменом пар легких частиц электронов и нейтрино между нуклонами на основе теории β-распада. Вскоре после установления нуклониой модели ядра Гейзенберг [99][1]), который считал, что нуклоны удерживаются обменными силами, поддержал предположение, что нейтрино вместе с электроном или позитроном может быть посредником в таком взаимодействии. Это взаимодействие отмечается в книге Бете и Бечера [100]; оказывается, что эффективное нуклон-нуклонное взаимодействие 1) расходится, 2) может быть сделано конечным только с помощью обрезания, 3) зависит от расстояния между нуклонами как r^{-5} и 4) при обрезании на расстояниях порядка $2 \cdot 10^{-12}$ является слишком слабым (в $\sim 10^{12}$ раз слабее, чем требуется для объяснения нуклон-нуклонной связи). Позже Гамов и Теллер [101—103] предположили, что обмен парой нейтрино связан скорее с гравитационными силами, чем с ядерными. Выдвигались некоторые искусственные гипотезы для устранения расходимости интегралов в выражении взаимодействия [104, 105, 106].

§ 4. Спинор как квадратный корень из вектора?

Если попытки перейти от спина $^1/_2$ к более высоким спинам — спину 1 для электромагнитного и спина 2 для гравитационного полей [107] — до сих пор оказались тщетными, то что же можно сказать о попытках пойти по иному пути? В исконно единой теории поля напряженность электромагнитного поля представляется как

[1]) См. также В. Гейзенберг, УФН, **16**, 1 (1936); в этой статье Гейзенберг развивает идеи И. Тамма и Д. Иваненко о ядерных силах как электроино-нейтринных. Обобщение в виде теории мезонов дал Юкава [Proc. Phys. Soc. Japan, **17**, 48 (1935)]. — *Прим. ред.*

«максвелловский квадратный корень» из тензора кривизны Риччи, т. е. величиной, однозначно определенной с точностью до угла «фазы» α:

$$f_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu} \cos\alpha + {*}\xi_{\mu\nu} \sin\alpha,$$

где

$$\xi_{\mu\alpha}\xi^{\chi\alpha} + {*}\xi_{\mu\alpha}{*}\xi^{\chi\alpha} = R_{\mu}^{\chi} = \left(\frac{8\pi G}{c^4}\right) \cdot \text{(Тензор энергии-импульса)}. \tag{130}$$

В этом смысле можно говорить, что поле спина 1 может быть выведено из поля спина 2. Можно ли далее «взять второй квадратный корень», чтобы вывести спинорное поле? Иными словами, можно ли описать все содержание теории нейтрино в формализме, использующем лишь векторы и тензоры, как это делается в исконно единой теории поля, где уравнения Максвелла полностью выражаются через метрический тензор и его производные?

§ 5. Несовместимость геометрии с фермиевским характером нейтринного поля

Из волновой функции ψ спинорного поля, каким и является нейтринное поле, и сопряженной волновой функции $\psi^{\dagger}$ просто и естественно можно образовать обычные билинейные комбинации, дающие скаляр, вектор, тензор, псевдовектор и псевдоскаляр. Более того, при условии, что эти комбинации удовлетворяют некоторым условиям совместности, можно перейти от них обратно к самим ψ-функциям [108, 112]. Однако на этом пути не удалось найти какой-либо полезной точки зрения, чтобы связать спинорные поля с геометрией пространства. Этот отрицательный результат можно было ожидать, исходя из того обстоятельства, что принцип соответствия применим к геометрии, но не к спинорному полю.

§ 6. Поворот дуальности для электромагнетизма и нейтрино

Было бы неправильным оставить «процесс извлечения корня», не отметив одной поразительной аналогии между нейтринным и электромагнитным полями. Если **е**

и $\mathbf{h}$ обозначают соответственно электрическую и магнитную части тензора поля $\mathbf{f}$ и если они удовлетворяют уравнениям Максвелла в пустом искривленном пространстве, то, как хорошо известно, тем же уравнениям удовлетворяют новые поля $\mathbf{e}'$ и $\mathbf{h}'$, определенные с помощью поворота дуальности:

$$\mathbf{e}' + i\mathbf{h}' = e^{*\alpha_0}(\mathbf{e} + i\mathbf{h}), \tag{131}$$

где α_0 — аддитивная константа «фазы». Точно так же, если ψ удовлетворяет волновому уравнению для нейтрино в искривленном пространстве времени, то этому же уравнению удовлетворяет *дуально повернутый спинор* [113—115, 5]

$$\psi' = e^{1/2\, i\beta_0\gamma_5}\psi. \tag{132}$$

Следовательно, естественно задать вопрос, на который пока что нет ответа: существует ли какая-либо глубокая связь между двумя видами поворота дуальности?

§ 7. Спиноры дают средство описывать локальные вращения

Другой важный вопрос заключается в следующем. Какую геометрическую функцию, выходящую за рамки преобразований с помощью координат, выполняют *спиноры? Они позволяют,* отвечает Марсель Рисс, *описывать то, что совершенно невозможно описать преобразованием координат с их свойствами непрерывности, а именно вращение (или преобразование Лоренца) в одной точке 4-пространства, которое никак не связано с каким-либо локальным вращением в любой другой точке пространства* [116][1]). Как же такой вид локализованного вращения может оказаться важным при переходе от классической геометродинамики к квантовой? Предполагается два возможных ответа.

[1]) См. также [117]. Д-р Р. Пенроуз любезно подчеркнул, что спиноры имеют значительно больше сходства с векторами, чем это подразумевается в интерпретации работы Рисса; реальное отличие состоит в неоднозначности в знаке ($\pm$) спиноров.

§ 8. Возможность спинорного представления группы преобразования координат не доказана

Возможность 1. «Спинорное поле для геометродинамики является тем же, чем спинор для вращающегося твердого тела»[1]). Волновые функции симметричного ротатора, например

$$\psi^{(J)}_{mK}(\varphi, \theta, \chi), \tag{133}$$

для заданных J и K преобразуются при вращении системы отсчета в новые функции, являющиеся линейными комбинациями исходных. Коэффициенты обозначаются двумя индексами m и m' и являются функциями параметров вращения. При рассмотрении вращений обычного твердого тела требуются однозначные волновые функции. Поэтому коэффициенты преобразования должны однозначно зависеть от выбора элемента R группы вращений

$$\mathscr{D}^{(J)}_{m,\,m'}(R). \tag{134}$$

Вследствие этого J должно быть целым числом. Это требование не выполняется в случае электронного спина. Как уже отмечалось, топология группы вращения такая же, как у 3-мерной сферы, вложенной в 4-мерное эвклидово пространство (x, y, z, w), причем противоположные точки отождествлены одна с другой. Если направляющие косинусы оси вращения обозначить через α, β, γ, а величину угла поворота — через θ, то в представлении вращения по Гамильтону — Кэйли — Клейну

$$\begin{aligned} x &= \sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\alpha, \\ y &= \sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\beta, \\ z &= \sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\gamma, \\ w &= \cos\tfrac{1}{2}\theta. \end{aligned} \tag{135}$$

[1]) Относительно использования параметров Кэйли — Клейна для описания ориентации твердого тела см., например, [118].

Увеличение θ на 2π дает то же вращение, но противоположную точку на сфере. Если теперь эти две противоположные точки не будут тождественными [119], то полученная группа будет «покрывающей группой», которая шире группы вращений. Для того чтобы потребовать однозначности коэффициентов преобразования как функций элемента из этой расширенной группы, надо допустить не только целые, но и полуцелые значения спина J. Тогда добавочные волновые функции и дадут «неклассическую двузначность» Паули.

Произведение двух волновых функций спина $^1/_2$ можно подобным же образом сопоставить с системой двух ротаторов и т. д. Таким образом, *бесконечную совокупность вращательных степеней свободы можно естественным образом рассматривать как источник спинорного поля.*

Простое ортогональное преобразование в одной точке сопоставляется с *одним* вращением. Но не приведет ли изменение криволинейной системы координат в общей теории относительности, с ее бесконечным множеством точек, к вращению локальной системы отсчета в *каждой* точке? Не следует ли вследствие этого рассматривать бесконечное множество вращательных степеней свободы? Другими словами, нельзя ли общий элемент T группы координатных преобразований выразить в каком-то смысле в виде прямого произведения бесконечного числа вращений, каждое из которых связано с отдельной точкой? Тогда, если окажется возможным сопоставить каждое элементарное вращение со спином $^1/_2$, не закончится ли все на спинорном поле и не удастся ли связать это спинорное поле каким-то разумным путем с группой общих координатных преобразований общей теории относительности? По-видимому, нет. Топология группы T отличается от топологии бесконечного произведения покрывающих групп, связанных с единичным вращением. Лоран не нашел представления группы координатных преобразований, которое обладало бы свойствами, присущими спинорному полю [1]).

[1]) Laurent B. E., частное сообщение; см. также [120].

§ 9. Связано ли спинорное поле с существованием «мелкозернистой» топологии?

Возможность 2. Существует другого рода двузначность, представляющая интерес в связи с природой спина. Рассмотрим одиночную топологическую ручку в пространстве. Другими словами, рассмотрим две полностью разделенные сферы в 3-мерном пространстве. «Вырежем пространство внутри этих сфер» и отождествим соответствующие точки на их поверхностях. В тот момент, когда мы начинаем постепенно «погружать палец» внутрь левой сферы, он начинает появляться (в рассматриваемом нединамическом и классическом мире) из правой сферы. Однако есть два неэквивалентных способа проведения отождествления в зависимости от того, происходит ли вращение поверхностей сфер одинаковым или противоположным образом. Правая перчатка, прошедшая через сферу, в одном случае остается правой, в другом же случае становится левой (меняется четность).

В первом примере пространство называется ориентируемым, а во втором — неориентируемым. Вполне возможно, что неориентируемые пространства, или «пространства, не сохраняющие четность», исключаются принципом, который кратко упоминался и который пока что окончательно не сформулирован; «пространство должно быть надлежащим образом замкнутым». Этот принцип отбора топологий, вероятно, имеет глубокую связь с принципом Маха. Если все же оба типа пространства допустимы, то пространство с одной ручкой имеет классическую двузначность, связанную с ними, и пространство с n такими ручками имеет n-кратную двузначность. Это дало бы 2^n неэквивалентных способов прийти к геометрии с n рукавами и позволило бы получить 2^n различных амплитуд вероятности для одного и того же макроскопического состояния поля. Тогда мы имели бы неклассическую двузначность с числом спиноподобных степеней свободы, равным числу рукавов. Таким образом, это направление исследований представляет значительный интерес.

Если перейти к виртуальному «пеноподобному» пространству квантовой геометродинамики, то число воз-

можностей имеет качественно тот же порядок, что и количество степеней свободы спинорного поля. Трудно сказать что-либо более определенное о разумности или неразумности такой мыслимой «корреляции спина с четностью» до тех пор, пока мы не узнаем больше о формализме квантовой геометродинамики. Весьма интересно обсуждение Финкельштейном и Мизнером [121] возможности получения волновой функции, которая имеет неклассическую двузначность в многосвязном пространстве. Это исследование привело их к предположению, что 3-мерное пространство, не обладающее кручением в топологическом смысле этого слова, не может привести к спину $^1/_2$.

§ 10. Отсутствие фундаментальной теории нейтрино

Итак, в настоящее время невозможно указать естественную и убедительную связь между спинорным полем и квантовой геометродинамикой искривленного пустого пространства.

§ 11. Предварительная трактовка нейтрино как постороннего поля в заданном пространственно-временно́м континууме

С другой стороны, электродинамика в схеме исконно единой теории поля самым непосредственным образом связана с геометрией. Тем не менее для многих целей проще не выражать величины электромагнитного поля непосредственно через метрические величины. Более удобно использовать знакомый и эквивалентный дуалистический язык «поля, погруженного в пространство». Точно так же имеет смысл говорить о нейтринном поле, рассматривая его динамическую эволюцию на фоне пространства. Во всяком случае, сейчас это единственный путь, на котором можно сформулировать теорию нейтрино достаточно полно, чтобы стало возможным вывести конкретные физические результаты.

§ 12. Релятивистское волновое уравнение для нейтрино

Волновое уравнение нейтрино в искривленном пространстве можно записать либо в дираковской четырехкомпонентной форме:

$$\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\psi = 0, \tag{136}$$

либо в двухкомпонентной форме Паули — Ли — Янга

$$S^{\alpha}\nabla_{\alpha}\psi = 0. \tag{137}$$

Здесь матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} &= 2g_{\mu\nu}, \\ \bar{S}_{\mu}S_{\nu} + S_{\nu}\bar{S}_{\mu} &= 2g_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{138}$$

Наряду с обычными символами Кристоффеля, образованными из производных метрического тензора:

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}\left(\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}\right), \tag{139}$$

необходимо определить матрицы, или коэффициенты Фока — Иваненко Γ_k, такие, что

$$\frac{\partial\gamma_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\gamma_{\mu} - \Gamma_{\beta}\gamma_{\alpha} + \gamma_{\alpha}\Gamma_{\beta} = 0; \tag{140}$$

тогда ковариантная производная ∇, действующая на спинор, даст

$$\nabla_{\alpha}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha}\psi. \tag{141}$$

Волновое уравнение[1]) (136) [или (137)] дает формализм, пригодный для рассмотрения многих черт взаимодействия гравитационного и нейтринного полей.

[1]) См. общий обзор литературы Баде и Джеле [122] по уравнению Дирака в искривленном пространстве, а также оригинальные работы В. А. Фока и Д. Иваненко [123], В. А. Фока [124], Бергмана [125], Флетчера [126] и Бриля и Уилера [5]. В связи с соотношением (8) последней работы автор выражает признательность Ф. Скарфу, указавшему, что в этом соотношении пропущен множитель $^1/_4$; исправленное соотношение (8) имеет вид:

$$\Gamma_k = \frac{g_{\mu\alpha}}{4}\left[\left(\frac{\partial b^{\beta}_{\nu}}{\partial x^{k}}\right)a^{\alpha}_{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma k}\right]s^{\mu\nu} + a_k I,$$

что согласуется с формулой (17) работы В. Бергмана [127]

Глава III

ПРОСТРАНСТВЕННО-ПОДОБНОЕ ОПИСАНИЕ НЕЙТРИННОГО ПОЛЯ

§ 1. Оценка возмущения нейтринного поля в вакуумном состоянии

Если нейтринное поле рассматривается как внешний объект в уже существующей пространственно-временно́й геометрии и если эта геометрия идеализированно считается почти плоской, то возбужденные состояния этого поля можно разложить по нормальным колебаниям обычным путем. Каждому колебанию приписывается число заполнения, которое может быть 0 или 1, но которое равно 0 для основного, или «вакуумного», состояния нейтринного поля. Нахождение в основном состоянии не означает, что нейтринное поле — так же как гармонический осциллятор или электромагнитное поле — находится в состоянии нулевого возбуждения. Можно ли при этих условиях выразить функционал состояния нейтринного поля в пространственно-подобном представлении [аналогично соотношению (12) для представления основного состояния электромагнитного поля], которое позволяет более непосредственно ввести в рассмотрение это состояние возбуждения? Как показал Клаудер [128], это возможно. Так же как функционал состояния $\Psi_{\text{вак.}}$ электромагнитного поля сопоставляет некоторое число любому выбору магнитного поля $\mathbf{H}(x)$, функционал состояния нейтринного поля сопоставляет число любому выбору «χ-поля». Здесь χ — двухкомпонентное поле, обе компоненты которого зависят от пространственных координат

$$\chi_1 = \chi_1(x), \qquad \chi_2 = \chi_2(x). \tag{142}$$

Для поля χ, которое регулярно в смысле, более точно определенном Клаудером, можно написать

$$|\Psi_{\text{вак.}}(\chi)|^2 = N \exp\left[-\frac{1}{4\pi^2}\int \frac{\chi^*(z)\{\sigma\cdot(-i)\overleftrightarrow{\nabla}\}\chi(y)}{(z-y)^2}\right] d^3z d^3y, \tag{143}$$

в полной аналогии с соответствующим выражением для функционала состояния электромагнитного поля. Здесь N — нормировочная константа; σ_x, σ_y и σ_z — спиновые матрицы Паули, а стрелка над символом оператора имеет следующий смысл:

$$A\left(\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x}\right)B \equiv A\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)B. \tag{144}$$

Для поля χ, которое зависит от пространственных координат нерегулярным образом, необходимо (как показал Клаудер) пользоваться более общей формулой, чем (143):

$$|\Psi^{(\chi)}_{\text{вак.}}|^2 = \exp[\operatorname{Tr}\ln(1-K)], \tag{145}$$

где Tr — обозначает след оператора, а K — оператор, зависящий от неквантованных полей χ и χ^*, который был определен Клаудером.

§ 2. Описание без антикоммутирующих неквантованных операторов

Описание спинорного поля по методу Клаудера имеет две совершенно новые и весьма интересные особенности: 1) χ-поле описывает сверхполную систему состояний и 2) именно на этом основании можно провести квантование фейнмановским методом сумм по историям без какого-либо обращения к так называемым антикоммутирующим операторам (c-числам), которые требовались для этого ранее и которые являются математически некорректными объектами [1]).

§ 3. Сумма по историям, выраженная с помощью сверхполной системы состояний

Обычно функция состояния, связанная с одной фермионной степенью свободы, выражается как два комплексных числа, причем одно дает амплитуду вероятности

[1]) К. Симанзик [129] пишет: «При трактовке фермионных полей вводятся спинорные функции, которые антикоммутируют сами с собой, с их сопряженными и другими спинорными функциями. В этой антикоммутации с комплексно-сопряженными функциями заключается трудность, поскольку отсюда вытекает тождественное обращение в нуль этих спинорных функций».

того, что это состояние свободно, а другое — что оно заполнено. Иными словами, два стостояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ образуют полный набор для описания всех возможных состояний для этой одной степени свободы. Функция распространения, которая описывает изменение во времени одного из этих двух состояний или вообще любого состояния, имеет вид

$$\langle b''t''|b't'\rangle \equiv \left\langle b'' \left| \frac{\exp[-i(t''-t')]H}{\hbar} \right| b' \right\rangle. \qquad (146)$$

Закон композиции функций распространения принимает вид

$$\langle b'''t'''|b't'\rangle = \sum_{b''=0}^{1} \langle b'''t'''|b''t''\rangle \langle b''t''|b't'\rangle. \qquad (147)$$

Этот закон композиции можно переписать в другой, указанной Клаудером, форме. Определим состояние

$$|b\rangle \equiv (1-|b|^2)^{1/2}|0\rangle + b|1\rangle. \qquad (148)$$

Тогда, поскольку b пробегает все комплексные числа $b_r + ib_i$ с абсолютной величиной, меньшей 1, вектор состояния $|b\rangle$ пробегает *сверхполную систему состояний*. Закон композиции может быть выражен с помощью интегрирования по этому набору в виде

$$\langle b'''t'''|b't'\rangle = \int_{|b|<1} \langle b'''t'''|bt''\rangle\, db\, \langle bt''|b't'\rangle, \qquad (149)$$

где через db обозначен элемент объема

$$db \equiv \frac{2}{\pi}\, db_r\, db_i. \qquad (150)$$

Эта точка зрения дает возможность определить обычным образом *сетку историй* фермионной степени свободы от начального момента t' до конечного момента t''. Значения комплексного числа b определены не только в моменты t' и t'', но также в возрастающей последовательности моментов времени в этом интервале:

$$b'',\ b_n,\ b_{n-1},\ \ldots,\ b_2,\ b_1,\ b'.$$

Процесс суммирования по историям выражается тогда в виде n-кратного интегрирования по элементам объема типа (150) и предельного перехода к бесконечно дробному разбиению времени. Обобщая эту процедуру с одной на бесконечное число степеней свободы Ферми — Дирака, Клаудер определяет понятие *суммы по историям для фермионного поля*. В этом анализе, однако, нигде не возникало необходимости введения операторов, или так называемых антикоммутирующих c-чисел.

Вследствие того, что фермионное поле имеет спинорный, а не скалярный характер, для описания сверхполной системы состояний, связанной с одной спинорной степенью свободы, в анализе Клаудера оказалось необходимым ввести *два* комплексных числа. Для определения двухкомпонентного поля $\chi(x)$ Клаудера в момент t' используется пара комплексных чисел b_1' и b_2' для каждой из бесконечного числа спиновых систем.

§ 4. Новая формулировка различия между статистиками Ферми — Дирака и Бозе — Эйнштейна по Клаудеру

В анализе Клаудера ничто не заставляет поле Ферми — Дирака иметь спинорный характер. Следовательно, не вносится ничего нового в понимание связи между спином и статистикой. Но зато достигнута новая формулировка различия между фермиевской и бозевской статистиками. Клаудер проиллюстрировал это на примере одиночного гармонического осциллятора, подчиняющегося классическому уравнению движения

$$\begin{aligned} i\dot{a}(t) &= a(t), \\ -i\dot{a}^*(t) &= a^*(t). \end{aligned} \tag{151}$$

Классическое действие имеет величину

$$I = \int \left[\frac{i}{2} \left(a^* \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} a \right) - a^* a \right] dt, \tag{152}$$

а квантовомеханический гамильтониан будет

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}^* \mathbf{a} = \mathbf{N}. \tag{153}$$

В случае поля Ферми — Дирака правильная функция распространения из состояния $|b'\rangle$ в состояние $|b''\rangle$ имеет вид

$$\langle b''t''|b't'\rangle = (1-|b''|^2)^{1/2}(1-|b'|^2)^{1/2} + \\ + b^{*''}\exp[-i(t''-t')]\,b', \quad (154)$$

где как $|b'\rangle$, так и $|b''\rangle$ принадлежат к сверхполному набору состояний и определены соотношением (148). Клаудер показал, что этот результат можно получить непосредственно из суммы по истории, если функцию распространения формально записать в виде

$$\langle b''t''|b't'\rangle = N\int \exp\left[i\int\left[\frac{i}{2}\left(b^*\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}b\right)-b^*b\right]\right]dtDb(t). \quad (155)$$

Это выражение следует понимать как предел соответствующей суммы по сеткам историй, когда разбиение времени становится бесконечно дробным

$$\frac{t''-t'}{n+1} = \Delta t = \varepsilon \to 0. \quad (156)$$

Элемент объема до перехода к пределу равен произведению выражений типа (151):

$$db_1\,db_2\,\ldots\,db_n. \quad (157)$$

Подынтегральное выражение имеет следующую простую форму в том случае, когда сетка историй превращается в непрерывную историю после перехода к пределу:

$$\exp i\sum\left[\frac{i}{2}b^*_{k+1}(b_{k+1}-b_k)-\frac{i}{2}(b^*_{k+1}-b^*_k)\,b_k-\varepsilon b^*_{k+1}b_k\right]. \quad (158)$$

Тем не менее очень важно то обстоятельство, что основной вклад в фейнмановскую сумму дают процессы, чья история *не* является непрерывной в этом смысле. Чтобы последовательно вычислить функции распространения для таких историй, Клаудер использует из операторной формулировки квантовой механики формулу

$$\langle b''t''|b't'\rangle = \langle b''|\exp[-i(t''-t')\mathbf{H}]|b'\rangle \quad (159)$$

и, следовательно, записывает подынтегральное выражение в (154) — до перехода к пределу — как произведение $(n+1)$ числовых, неоператорных сомножителей вида

$$\langle b_{k+1}|\exp[-i\varepsilon \mathbf{H}]|b_k\rangle \tag{160}$$

или

$$\{\langle b_{k+1}|b_k\rangle - i\varepsilon\langle b_{k+1}|\mathbf{H}|b_k\rangle\}. \tag{161}$$

В том специальном случае, когда $H = a^*a$, это выражение имеет значение

$$\{(1-|b_{k+1}|^2)^{1/2}(1-|b_k|^2)^{1/2} + b^*_{k+1}b_k - i\varepsilon b^*_{k+1}b_k\}. \tag{162}$$

Именно *эта формула в действительности определяет то, что подразумевается в подынтегральном выражении* в (155). Выражение (162) сводится, конечно, к (158) для сетки историй, которая в пределе переходит в *непрерывную* историю.

Такая же сумма по историям (155) *применима* и в случае *статистики Бозе!* Надо только вместо b подставить a в (156) и (158) и каждый элемент объема $db = (2/\pi)db_r db_i$ с $1 \geqslant |b| \geqslant 0$ заменить на $da = (1/\pi)da_r da_i$, где $\infty \geqslant |a| \geqslant 0$. Функция распространения $\langle a''t''|a't'\rangle$, получаемая в результате этого нового процесса интегрирования, связывает состояние $|a'\rangle$ с состоянием $|a''\rangle$, где состояние $|a''\rangle$ снова принадлежит к сверхполной системе состояний, но в этом случае состояний бозевской системы. Обычный полный набор ортогональных состояний, описывающий бозевскую систему, задается числом заполнения N:

$$|0\rangle,\ |1\rangle,\ \ldots,\ |N\rangle,\ \ldots.$$

С помощью этого базисного набора векторов состояний типичное состояние сверхполной системы будет

$$|a\rangle = \exp\left[-\tfrac{1}{2}|a|^2\right]\sum_{N=0}^{\infty}(N!)^{-1/2}a^N|N\rangle. \tag{163}$$

Функция распространения между состояниями такого рода определяется точно так же, как функция распространения между любыми другими видами состояний, и вполне достаточно для описания динамики системы.

§ 5. Выбор действия

В этом формализме квантование бозе-эйнштейновских систем математически выглядит аналогично квантованию ферми-дираковских систем. В чем же состоит различие? Важным моментом, как указал Клаудер, является не то обстоятельство, что комплексное число a в одном случае не ограничено, в то время как в другом случае комплексное число b лежит внутри единичной окружности. Напротив, основное различие заключается в том, *что* 1) *классическому интегралу действия в (155) или (158) следует придать смысл и в случае разрывной истории еще до вычисления суммы по историям и что* 2) *это распространение принципа наименьшего действия на «незаконные» истории делается различным образом для бозе-эйнштейновских и ферми-дираковских полей.* Характерно, что подынтегральное выражение фейнмановской суммы по историям (155) снова является произведением $(n+1)$ сомножителей, каждый из которых совершенно аналогичен (161):

$$\langle a_{k+1}|a_k\rangle - i\varepsilon\langle a_{k+1}|\mathrm{H}|a_k\rangle;$$

однако конкретное выражение этой величины [как следствие равенств (153) и (163)]

$$\exp\left[-\tfrac{1}{2}|a_{k+1}|^2+a^*_{k+1}a_k-\tfrac{1}{2}|a_k|^2-i\varepsilon a^*_{k+1}a_k\right] \quad (164)$$

будет совершенно отличным от значения (162), используемого в случае статистики Ферми — Дирака. Тем не менее для *непрерывной* истории элементарная функция распространения для обеих статистик полностью совпадает в пределе бесконечно мелкого разбиения времени $(\varepsilon \to 0)$.

Резюмируя, Клаудер пишет:

«Фейнмановский метод требует значения численного значения действия для историй, лежащих вне области, в которой вводится интеграл действия, т. е. для историй, которые разрывны во времени или в пространстве. Это можно представлять как «свободу выбора действия»; т. е. значение действия для таких «незаконных» историй можно определить различными способами. В зависимости от сделанного выбора получающаяся квантовая тео-

рия может подчиняться либо статистике Бозе, либо статистике Ферми. Эта неоднозначность присуща самому формализму, но надлежащий способ расширения классической информации можно получить, записывая сумму по историям в виде суммы произведений матричных элементов унитарных операторов, изменяющих состояние за бесконечно малый промежуток времени. Этот процесс суммирования можно не ограничивать обычными дискретными базисными векторами, но можно применять «обобщенное представление», которое включает для каждой фермионной степени свободы непрерывное множество векторов, не являющихся независимыми. Выбором надлежащей параметризации для этой «сверхполной системы состояний» можно получить необходимый функционал действия в экспоненте подынтегрального выражения, который и определяет *c*-числовую сумму по историям».

То, что классическая физика есть предельный случай квантовой физики, давно известно; однако новым является то, что здесь видна степень произвола, возникающая при обратном переходе (произвол в интерпретации интеграла действия настолько велик, что заключает в себе различие между противоположными видами статистики). Нет ничего удивительного в том, что это обстоятельство может оказаться ключом к более глубокому осмысливанию ферми-дираковских (и спинорных) полей. Совершенно независимо от этих принципиальных вопросов работа Клаудера, по-видимому, позволяет применить к фермионным полям эту технику квантования — суммирование по историям, свободное от любых ссылок на операторные величины, — которая, в частности, хорошо подходит для пространственно-подобного описания нейтринного поля особенно в искривленном пространстве. Тем не менее достаточно и более простых методов, которые вполне пригодны для анализа тех элементарных процессов, которые теперь должны быть рассмотрены.

§ 6. Геометродинамика не объясняет закон сохранения лептонов

В связи с пространственно-подобным описанием нейтринного поля возникает по аналогии с электромагнитным полем еще один вопрос. Содержит ли это спинорное

поле что-либо похожее на сохраняющийся поток через ручку в многосвязном пространстве, подобно заряду, определенному электрическим потоком? Если бы удалось определить некоторый спинорный поток и установить, что он сохраняется, то это обстоятельство могло бы иметь отношение к интерпретации лептонного заряда. Но этого нет. В исследованном случае [130] оказалось возможным точно решить уравнение спинорного поля с нулевой массой покоя в пространстве с многосвязной топологией. В этом примере было показано, что невозможно ковариантно определить какую-либо величину со свойствами, аналогичными свойствам полного потока. Следовательно, сейчас в рамках геометродинамики не видно пути к пониманию, почему нечто вроде лептонного числа могло бы сохраняться [1]).

[1]) В этой связи см. особенно [131].

Глава IV

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕЙТРИНО И ГРАВИТАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 1. Образование реальных и виртуальных пар из вакуума

Образование пар при столкновении двух фотонов [132]

$$\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 \to e^- + e^+ \tag{165}$$

и рассеяние света на свете [133]

$$\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 \to \hbar\omega_3 + \hbar\omega_4 \tag{166}$$

были двумя процессами, проанализированными на ранней стадии развития квантовой электродинамики. Толл [134] [1]) впервые установил, что сечение рассеяния вперед во втором процессе (более высокого порядка) может быть непосредственно получено из сечения более простого процесса (165) и что дисперсионное соотношение Крамерса — Кронига справедливо при *релятивистских* энергиях. Эти результаты ясно говорят о богатстве физики вакуума. Что можно сказать о нейтринных аналогах этих электромагнитных процессов?

Существование процесса

$$\nu + \tilde{\nu} \to \bar{\mu} + e^+ \tag{167}$$

непосредственно следует из спонтанного распада μ-мезона и принципа микроскопической обратимости. Значительно выше порога,

$$(\hbar\omega_1)\cdot(\hbar\omega_2) \geqslant \left(\frac{208mc^2}{2}\right)^2, \tag{168}$$

вычисленное сечение для этого процесса растет [5, 28] как

$$\sigma_{\text{погл.}} \sim \left(\frac{g^2}{\hbar^2c^4}\right)\omega_1\omega_2. \tag{169}$$

---

[1]) См. также более раннее сообщение [135].

В случае света сечение для образования пар сначала растет с энергией, но потом падает, так что дисперсионный интеграл сходится. Иначе обстоит дело здесь, когда использование буквально той же формулы для сечения рассеяния дает

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{вперед}} = \left| \frac{\omega_2^2}{2\pi^2 c} \int_0^\infty \frac{\sigma_{\text{погл.}}(\omega_1, \omega_2')\, d\omega_2'}{\omega_2'^2 - \omega_2^2} \right|^2 \sim$$

$$\sim \left(\frac{\omega_1 \omega_2^2 g^2}{\hbar^2 c^5}\right)^2 \ln^2 \frac{\hbar\omega_\infty}{100 mc^2}. \quad (170)$$

Эта расходимость говорит о том, что дисперсионное соотношение не следует применять для нейтрино так же, как для света, или что сечение для процесса образования пар (167) не может продолжать расти до бесконечности пропорционально инвариантному произведению $\omega_1\omega_2$, или что имеет место то и другое. В подобной ситуации, как, например, в упрощенной теории торможения в среде или в динамике плазмы, появляются логарифмические расходимости, которые при более тщательном анализе оказываются величинами порядка 10. Предположение, что и здесь логарифмы представляют собой величину такого же порядка, приводит, конечно, к сечению рассеяния вперед нейтрино на нейтрино фантастически малому, но все же существенному для теории геонов, образованных из нейтрино [5, 28].

§ 2. Формфактор. Прямое взаимодействие Ферми?

Существование конечного значения интеграла (170), вообще говоря, зависит от предположения, что некоторого рода формфактор осуществляет обрезание взаимодействия Ферми на высоких энергиях и малых расстояниях. Ли и Янг [136] обсудили возможности экспериментального следствия такого формфактора. Он гораздо более существенным образом, чем логарифм, входит в формулы для сечения других нейтринных процессов, некоторые из которых проанализировал Ювема [6]. Однако этот процесс рассеяния нейтрино на нейтрино уже сам по себе привлекает внимание к другой трудности в оценке

сечений некоторых элементарных процессов нейтринной физики. Вполне возможно, что рассеяние обусловлено *прямым* взаимодействием Ферми, которое основано на возможной тождественности констант связи процессов

$$\nu + \tilde{\nu} \to \nu' + \tilde{\nu}' \tag{171}$$

и

$$p + e^- \to n + \nu. \tag{172}$$

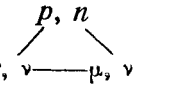
Тогда вклад процессов 2-го порядка через образование и аннигиляцию пар μ^-, e^+ был бы пренебрежимо мал.

§ 3. Упругое рассеяние нейтрино электронами и протонами

Аналогичный процесс прямого взаимодействия

$$\tilde{\nu} + e^- \to \tilde{\nu}' + e^{-\prime} \tag{173}$$

не представляет столь фантастических трудностей для экспериментального изучения. Это прямое взаимодействие фермиевского типа, если оно существует, будет превосходить любой процесс взаимодействия 2-го порядка, идущий через виртуальные промежуточные состояния $n + \tilde{n}$ и $p + \tilde{p}$. Прямое взаимодействие, если оно вообще имеет место, может, естественно, иметь ту же константу взаимодействия [1]) $g = 1{,}37 \cdot 10^{-49}$ *эрг* $\cdot$ *см*^{3}, которая характеризует процессы в «треугольной диаграмме» [139—143]



В этом случае сечение рассеяния будет порядка

$$\sigma \sim \left(\frac{g}{\hbar^2 c^2}\right)^2 (\hbar\omega) \cdot (mc^2) \tag{174}$$

для нейтрино с энергией $\hbar\omega$ порядка энергии покоя электрона и больше

$$\sigma \sim \left(\frac{g}{\hbar^2 c^2}\right)^2 (\hbar\omega)^2 \tag{175}$$

[1]) Относительно измерения этой константы см. [137, 138].

для меньших энергий, причем

$$\sigma \sim 10^{-44}\ см^2 \qquad (176)$$

при $\hbar\omega = mc^2 = 0{,}5$ *Мэв*.

Сечение, подобное (175), ожидается и для упругого рассеяния антинейтрино на протонах, если здесь также имеет место прямое взаимодействие Ферми. Воллан [144] исследовал этот процесс. Его экспериментальная установка состояла из двух одинаковых сосудов, причем один был наполнен CH_4 при давлении 11 *атм*, а другой — аргоном под таким давлением, чтобы получить одинаковый выход γ-лучей. Никакой заметной разницы в ионизационном токе, когда обе эти камеры были помещены снаружи защитного покрытия, реактора, создающего мощный поток антинейтрино, не было обнаружено. Из этого отрицательного результата следует, что сечение рассеяния антинейтрино на протонах меньше $2 \cdot 10^{-30}\ см^2$. Новые эксперименты по исследованию таких эффектов, согласно любезному частному сообщению Рейнса (см. также [145, 146]), станут возможными при достаточной чувствительности регистрирующей аппаратуры и достаточно большой мощности ядерного реактора, чтобы обнаружить сечения $\sim 10^{-44}\ см^2$.

§ 4. Формфактор; обнаружение антинейтрино

Нейтрино, испускаемые при β-распаде продуктов деления ядер, имеют слишком низкую энергию, чтобы с их помощью можно было обнаружить какую-либо энергетическую зависимость константы взаимодействия Ферми в этом эксперименте по рассеянию, или формфактор, рассмотренный Ли и Янгом [136]. Также не представляется возможным экспериментально исследовать важный вопрос о формфакторе в знаменитой реакции поглощения антинейтрино [147—149]:

$\tilde{\nu} + p \to e^+$ (аннигилирует с электроном, давая два фотона, с коротким, но характерным временем запаздывания) $+ n$ (захватывается в Cd, растворенном в воде, с испусканием нескольких γ-квантов через некоторое более продолжительное характерное время (177)

вследствие низкой скорости счета. Эта реакция, имеющая столь решающее значение в установлении реальности антинейтрино, может служить, однако, для измере-

ния потока антинейтрино в пространстве. Рейнс и Коуэн в измерениях на мощном реакторе Дюпона в Саванна-Ривер получили сечение

$$\sigma = (11 \pm 2{,}6) \cdot 10^{-44}\ см^2 \qquad (178)$$

для реакции протона с антинейтрино средней энергии, испускаемыми при распаде продуктов деления; если же учесть, что на один акт деления испускается 6,1 нейтрино, то эффективное сечение на протон будет равно

$$(6{,}7 \pm 1{,}5) \cdot 10^{-43}\ см^2/деление. \qquad (179)$$

Для вычисления ожидаемого в этом эксперименте значения требуется лишь: 1) знание числа независимых спиновых состояний, разрешенных для антинейтрино, 2) принцип микроскопической обратимости, 3) знание *относительной* энергетической зависимости сечения, 4) спектр нейтрино от продуктов деления, который можно получить из β-спектра. Картер, Рейнс, Вагнер, а также Вайман [150] измерили этот спектр [145, 146] и вычислили

$$(6{,}1 \pm 1) \cdot 10^{-43}\ см^2/деление \qquad (180)$$

для антинейтрино, описываемых двухкомпонентными волновыми функциями и имеющими лишь одно спиновое состояние [151], и

$$(3{,}05 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-43}\ см^2/деление \qquad (181)$$

для нейтрино, которое, подобно электрону, имеет два спиновых состояния и которое описывается четырехкомпонентными волновыми функциями, подчиняющимися уравнению Дирака. Для четырехкомпонентной теории Майорана предсказанная величина сечения [150] равна

$$14{,}4 \cdot 10^{-43}\ см^2/деление. \qquad (182)$$

Таким образом, наблюдения согласуются с принципом микроскопической обратимости и двухкомпонентной (одно спиновое состояние) теорией нейтрино.

§ 5. Нетождественность нейтрино и антинейтрино

Были предприняты попытки обнаружить поглощение нейтрино, участвующее в реакции

$$Cl^{37}(\nu, e^-)Ar^{37}\ (радиоактивный), \qquad (183)$$

Таблица 10

Сравнение потоков нейтрино в антинейтрино

Значение потока нейтрино от реактора в Саванна-Ривер взято по Рейнсу и Коуэну (см. [2, 3, 147, 148]). Значение потока от Солнца по Аллену [151], который также отметил, что нейтрино от реакции (p, p) имеют энергию ниже порога реакции на Cl^{37}, тогда как в углеродно-азотном цикле позитроны от распадов N^{13} и O^{15} связаны с максимальной энергией нейтрино 1,24 и 1,68 *Мэв*. Значения потока нейтрино, образованных космическими лучами, основаны на очень грубых оценках: 1 первичная частица (на 1 $см^2$ в 1 *мин*) и 10 нейтрино на одну первичную частицу (по 5 каждого сорта). Значения потока от удаленных звезд основаны на известной интенсивности света звезды и предположении, что приблизительно $^1/_{10}$ часть всей энергии переходит в нейтрино, как и в случае Солнца. Значение потока, возникающего за счет урка-процесса, основаны на предположении — только на предположении, — что за время свободного падения (4 *час*) в звезде часть массы, переходящая в энергию нейтрино и антинейтрино, равна 10^{-4} массы Солнца ($2 \cdot 10^{33}$ *г*); при этом R — расстояние до звезды в миллионах световых лет (~ 2 для ближайших галактик; $\sim 0{,}1$ или меньше в пределах Млечного пути). Поток от ускорителей так сильно зависит от экспериментальных условий, что он не приводится в данной таблице.

	Нейтрино		Антинейтрино	
	$\nu/см^2 \cdot сек$	$Мэв/см^2 \cdot сек$	$\bar{\nu}/см^2 \cdot сек$	$Мэв/см^2 \cdot сек$
Реактор в Саванна-Ривер (продукты деления) . . .	—	—	$1{,}3 \cdot 10^{13}$	$\sim 2 \cdot 10^{13}$
Солнце	$6 \cdot 10^{11}$	$\sim 6 \cdot 10^{11}$	—	—
Космические лучи	~ 10	$\sim 10^3$	~ 10	$\sim 10^3$
Звезды (кроме Солнца) . .	$\sim 10^3$	10^3	—	—
Урка-процесс	$\sim 10^2/R^2$	$10^3/R^2$	$\sim 10^2/R^2$	$4 \cdot 10^3/R^2$
Реакция обнаружения . . .	$Cl^{37}(\nu e^-)\,Ar^{37}$		$p(\bar{\nu}e^+)\,n$	
Ее порог	0,816 *Мэв*		1,8 *Мэв*	

в эксперименте, предложенном Понтекорво и рассмотренном затем Альварецем. Девис [150] нашел в подобном эксперименте с 1000 галлонами CCl_4 в Саванна-Ривер $\sigma = (0{,}3 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-45}$ $см^2$ и пришел к выводу, что

$$\sigma < 0{,}09 \cdot 10^{-44}\ см^2; \qquad (184)$$

Предсказания Ювемы (по необходимости весьма неопределенные) для некоторых нейтринных реакций, рассчитанные для области низких энергий в предположении обрезания на энергии 1 *Бэв*.

Результаты, отмеченные звездочкой, особенно чувствительны к точному значению энергии обрезания. Сечение дано в $см^2$, энергия (e_0 — начальная энергия, e — конечная энергия и т. д.) в *Мэв*.

Начальное состояние	Конечное состояние	σ, $см^2$
$\bar{\nu}$, p	n, e^+	$\approx 6{,}5 \cdot 10^{-44} e e_0$
ν, n	p, e	$\approx 6{,}5 \cdot 10^{-44} e e_0$
ν_1, μ	ν_2, e	$\sim 6{,}5 \cdot 10^{-44} \nu_{20}/e_0$
ν_1, e	ν_2, μ	$\sim 6{,}5 \cdot 10^{-44} \nu_2^2$
ν, $\bar{\nu}$	μ^-, e^+	$\sim 1{,}3 \cdot 10^{-44} e e_0$
ν, γ	ν, μ, e	$\sim 1{,}5 \cdot 10^{-47} \nu_2^2 e^3/\omega$
ν в поле Ze	ν, μ, e	$\sim 3 \cdot 10^{-49} Z^2 \nu_2^2 \mu^3 e^3/\omega^6$
ν, n	ν, n	$\sim 3 \cdot 10^{-57} \nu_2^2$ *
$\bar{\nu}$, p	$\bar{\nu}$, p	$\sim 3 \cdot 10^{-57} \nu_2^2$ *
ν, e	ν, e	$\sim 3 \cdot 10^{-57} \nu_2^2$ *
ν	ν, ν, $\bar{\nu}$	Бесконечное время жизни
ν, $\bar{\nu}$	ν, ν	$\sim 6 \cdot 10^{-57} \nu\nu$ *
ν, $\bar{\nu}$	e, $\bar{e}$	$\sim 1{,}4 \cdot 10^{-57} \nu\nu$ *
e, $\bar{e}$	ν, $\bar{\nu}$	$\sim 4 \cdot 10^{-58} \nu\nu$ *
ν, γ	ν, ν, $\bar{\nu}$	$\sim 2 \cdot 10^{-72} \nu_3 \nu_2 \omega \nu_4^3$ *
ν в поле Ze	ν в поле Ze	$\sim 5 \cdot 10^{-61} Z^2 \nu_1 \nu_2$ *
ν, γ	ν, γ	$\sim 5 \cdot 10^{-65} \nu^3/\omega$ *

это согласуется с реальным различием между нейтрино и антинейтрино (табл. 10).

Ювема [6] исследовал нейтринные процессы, перечисленные в табл. 11. Вычисленное сечение в большинстве случаев сильно зависит от предположения о формфакторе взаимодействия Ферми. Он предположил, что этот формфактор эквивалентен обрезанию энергий промежуточных состояний выше 1 *Бэв*.

§ 6. Образование пар гравитонами

Были изучены элементарные процессы, включающие взаимодействие гравитационного поля с элементарными частицами [152—156, 80, 85], в частности с нейтрино [5]. Сечение взаимодействия двух гравитонов с образованием пары нейтрино или электронов можно определить (табл. 12) методом, использованным Бором при рассмотрении образования электронной пары двумя γ-квантами. Оцененное таким образом сечение

$$\sigma \sim \left(\frac{GE}{c^4}\right)^2 \sim \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-33}\ см)^4}{\lambda^2} \qquad (185)$$

согласуется с вычислениями Иваненко и достигает величины, сравнимой с λ^2 лишь при длинах волн, сравнимых с масштабом флуктуаций гравитационного поля

$$L^* \sim 1{,}6 \cdot 10^{-33}\ см,$$

и при массе (энергии) порядка 10^{-5} *г* (10^{28} *эв*).

Вычисленное сечение обратной реакции следует той же формуле (185) и имеет ту же энергетическую зависимость, что и сечение образования μ^+ и e^-. Отношение этих двух сечений равно

$$\frac{\sigma(\nu + \bar{\nu} \to \mu^+ + e^-)}{\sigma(\nu + \bar{\nu} \to G + G)} \sim \frac{(g^2/\hbar^2 c^4)\,(E/\hbar)^2}{(GE/c^4)^2} \sim \left(\frac{gc^2}{G\hbar^2}\right)^2 \sim 10^{34} \qquad (186)$$

в согласии с известным огромным отношением константы β-связи к константе гравитационной связи.

Оценка порядка величины сечения образования пары при столкновении двух квантов с равными и противоположными импульсами (по Брилю и Уилеру [5])

Процесс	$\gamma+\gamma \to e^+ + e^-$	$G+G \to \nu+\bar{\nu}$ или $e+\bar{e}$
Энергия кванта	$E = \hbar c/\lambda$	$E = \hbar c/\lambda$
Объем локализации	$\sim \lambda^3$	$\sim \lambda^3$
Плотность энергии	$\sim \hbar c/\lambda^4$	$\sim \hbar c/\lambda^4$
Соответствующее поле	Электрическое	Гравитационное
Квадрат напряженности поля	$\sim (\hbar c)^{1/2}/\lambda^2$	$\sim (\hbar c G)^{1/2}/\lambda^2$
Потенциал в области концентрации энергии	$\delta A \sim (\hbar c)^{1/2}/\lambda$	$\delta g \sim (\hbar G/c^3)^{1/2}/\lambda$
Потенциал, необходимый для перехода из состояния $E_1 = -\hbar c/\lambda^2$ в состояние $E_2 = +\hbar c/\lambda^2$ с вероятностью, близкой к 100%	$\delta A \sim \hbar c/\lambda e$	$\delta g \sim 1$
Отношение имеющегося возмущения к необходимому возмущению	$\sim e/(\hbar c)^{1/2}$	$\sim (\hbar G/c^3)^{1/2}/\lambda$
Сколько раз этот множитель входит в матричный элемент	2	2

Продолжение табл. 12

Процесс	$\gamma+\gamma \to e^+ + e^-$	$G+G \to \nu+\bar{\nu}$ или $e+\bar{e}$
Сколько раз матричный элемент входит в вероятность перехода	2	2
Сечение образования пары при вероятности образования 100%	$\sim \lambda^2$	$\sim \lambda^2$
Получающаяся оценка сечения образования пары	$\sigma \sim (e^2/\hbar c)^2\lambda^2$ $\sim (e^2/mc^2)^2 (mc^2/E)^2$	$\sigma \sim (\hbar G/c^3)/\lambda^2$ $\sim (1{,}6 \cdot 10^{-33}\,см)^4/\lambda^2$ $\sim (GE/c^4)^2$
Асимптотическое поведение точной формулы для сечения (высокая энергия, неполяризованное излучение)	$\sigma \sim 2\pi(e^2/mc^2)^2 \times$ $\times (mc^2/E)^2 \times$ $\times \ln[2E/e^{1/2}mc^2]$	Еще не вычислено

§ 7. Поведение нейтрино в гравитационных полях большого масштаба

До сих пор мы рассматривали нейтрино лишь с точки зрения процессов испускания и поглощения, описываемых некоторым эффективным сечением [1]). Если бы наши знания об электроне были ограничены подобным же образом, то мы бы знали вероятность, с которой электроны испускаются и поглощаются при β-распаде и K-захвате, но ничего бы не знали о движении электрона в электрическом и магнитном полях, о связи электронов в атоме и очень мало знали бы о тензоре энергии-импульса электрона. Ко-

[1]) Имеются два хороших обзора: монография Дж. Аллена [151] и статья «Нейтрино», напнсанная Ву в сборнике, посвященном памяти В. Паули [157].

нечно, на нейтрино не действуют непосредственно электрическое и магнитное поля. Поэтому всякий анализ его движения в пространстве сводится к тому, как он реагирует на гравитационное поле. В последних исследованиях, предпринятых в этом направлении [5], рассматривались 1) движение, 2) энергетические уровни нейтрино в гравитационном поле и 3) свойства геонов, масса и энергия которых обязана нейтрино.

§ 8. Причина слабости гравитационного излучения

Возвращаясь от нейтрино и их взаимодействий с гравитационным полем к чисто гравитационному излучению, следует вспомнить аналогию с электромагнитным излучением (табл. 13) и причину малой вероятности излучения в одном случае по сравнению с другим. Для

Таблица 13

Поле ускоренных зарядов и ускоренных масс [1]) на расстояниях, малых по сравнению с ковременем ускорения $T = c\Delta t$, и 2) на расстояниях, бо́льших по сравнению с этим ковременем

В обоих случаях компонента ускорения, перпендикулярная направлению наблюдения, обозначена через a.

	Электромагнетизм	Гравитация
Близко Далеко	e/r^2 ea/c^2r	Gm/r^2 Gma/c^2r
Эффект от пары тел, вращающихся около центра тяжести	$(e_1a_1 + e_2a_2)/c^2r$	$G(m_1a_1 + m_2a_2)/c^2r$
Значение суммы при учете закона действия и противодействия	То же	0
Влияние разности времен прихода от двух центров	Не существенно	$\sim \sum_{k=1}^{2} (\omega r_k/c) \times \times (Gm_k r_k \omega^2/c^2 r)$

Продолжение табл. 13

	Электромагнетизм	Гравитация
Множитель, на который надо умножнть квадрат напряженности поля, чтобы получить поток энергии	$4\pi r^2/8\pi$	$\sim (c^2/G)\, r^2$
Результирующее значение — (dE/dt)	$\sim e^2a^2/c^3$ $\sim (\omega^2 p)^2\, c^3$	$\sim G\,(\omega^3 I)/c^5$
Момент, ответственный за излучение при периодическом движении	$p = e_1x_1 + e_2x_2$	$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2$

электрона, вращающегося вокруг ядра, излучаемое поле определяется в основном дипольным моментом системы. В случае же двух масс, вращающихся относительно друг друга, дипольный момент масс относительно центра тяжести должен быть равен нулю. При анализе излучения в этом случае необходимо вычислить следующее приближение и учесть запаздывание по ковремени возмущения от двух центров: r_1 и r_2. Вклады от излучаемых полей не будут теперь полностью компенсироваться вследствие учета разности фаз $\omega r_1/c$ и $\omega r_2/c$. Полученная оценка потери энергии системой согласуется с прежними расчетами Эйнштейна и пропорциональна квадрату квадрупольного момента масс и шестой степени частоты вращения.

§ 9. Импульсные источники гравитационного излучения

Предыдущие рассуждения относились к непрерывному излучению. Не меньший интерес представляет и другой крайний случай, когда источник испытывает внезапное возмущение, длящееся в течение времени Δt, и дает импульс излучения в течение ковремени порядка $\Delta T = c\Delta t$ (табл. 14). Анализ этой таблицы несколько

Таблица 14

Анализ импульсного излучения [1])

	Электромагнетизм	Гравитация
Основной момент, ответственный за излучение	$p_x(t)$	$I_{xx}(t)$
Его фурье-образ	$(2\pi)^{-1/2}\int p_x \exp\times$ $\times[i\omega t]\,dt$	$(2\pi)^{-1/2}\int I_{xx}\exp\times$ $\times[i\omega t]\,dt$
Обозначение этой величины	$p_x(\omega)$	$I_{xx}(\omega)$
Разложение полных потерь энергии на излучение ΔE	$c^{-3}\int \ddot{p}^2(t)\,dt$	$Gc^{-5}\int \dddot{I}^2(t)\,dt)$
Разложение ΔE по соответствующим угловым частотам	$c^{-3}\int \ddot{p}^2(\omega)\,d\omega$	$Gc^{-5}\int \dddot{I}^2(\omega)\,d\omega$
Подынтегральное выражение приблизительно постоянно относительночастоты, от $\omega=0$ до критического значения ω, за которым излучение очень быстро падает	$\omega_{\text{крит.}}\sim\dfrac{1}{\Delta t}$	$\omega_{\text{крит.}}\sim\dfrac{1}{\Delta t}$
$-d\Delta E/d\omega$ при $\omega<\omega_{\text{крит.}}$	$\sim c^{-3}\ddot{p}^2(0)$	$\sim Gc^{-5}\dddot{I}^2(0)$

Продолжение

	Электромагнетизм	Гравитация
Статический момент, входящий в эту формулу	$\sim (e_1 \Delta v_{x1} + e_2 \Delta v_{x2}$	Δ („Кинетическая энергия“)$_{xx}$
Другая запись $-(d\Delta E/d\omega)$	$\sim (e\Delta v)^2/c^3$	$\sim G\,[\Delta$ („Кинетическая энергия“)$_{xx}]^2/c^5$
Общая энергия в импульсе	$\left(\begin{matrix}\text{Предыдущее}\\ \text{выражение}\end{matrix}\right)/\Delta t$	$\left(\begin{matrix}\text{Предыдущее}\\ \text{выражение}\end{matrix}\right)/\Delta t$

[1]) Автор выражает признательность проф. В. Телегди за дискуссии, которые помогли составить настоящую таблицу.

упрощается ввиду того, что существенной величиной будет не вся кинетическая энергия, а только «нецентральная», или квадрупольная, часть кинетической энергии. Например, в случае звездных взрывов этой величиной будет не вся освобождающаяся энергия, а лишь произведение этой величины на эксцентриситет, возникший при расширении как вследствие вращения, так и других причин.

Грубая оценка энергетического выхода некоторых импульсных источников излучения дана в табл. 15. До сих пор обращалось мало внимания на открытие эффектов подобного рода путем наблюдения их влияния на геометрию системы пробных тел, первоначально расположенных по кругу, нормальному к направлению прихода излучения и внезапно вовлеченных приходящим импульсом в движение эллиптического характера. Однако исследование генерации и обнаружения *непрерывного* гравитационного излучения недавно было дано Вебером [158]. Какой бы приемник ни использовался для непрерывного или импульсного излучения, ясно, что следует надеяться прежде всего на счастливую случайность природы, которая может предоставить нам, так

Таблица 15

Энергия, переходящая в импульсное гравитационное излучение для четырех случаев

Составление этой таблицы было стимулировано интересным рассмотрением гравитационного излучения при делении ядер, сделанным проф. Шюкингом на Руайомонской конференции 1959 г.

Случай	Одно деление с энергией 180 *Мэв*	Ядерная бомба (на делении) 17 *килотонн* с эффективностью 10%	Метеорит, ударяющийся в землю со скоростью отрыва	Взрыв звезды, освобождающий 10^{-4} ее массы
Масса, *г*	$4 \cdot 10^{-22}$	10^{4}	10^{9}	$2 \cdot 10^{33}$
Скорость, *см/сек*	$1{,}2 \cdot 10^{9}$	$4 \cdot 10^{8}$	$11 \cdot 10^{5}$	$4 \cdot 10^{8}$
Энергия, *эрг*	$2{,}9 \cdot 10^{4}$	$7 \cdot 10^{20}$	$6 \cdot 10^{20}$	$1{,}8 \cdot 10^{50}$
Предполагаемая доля, относящаяся к излучающему моменту	1	0,1	1	0,1
Интеграл по времени от этого момента = («Кинетическая энергия»)$_{xx}$, *эрг*	$2{,}9 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{19}$	$6 \cdot 10^{20}$	$1{,}8 \cdot 10^{49}$
(«Кинетическая энергия»)$_{xx}/c^2$, *г*	$3{,}2 \cdot 10^{-25}$	0,08	0,67	$2 \cdot 10^{28}$
$dE/d\omega \sim \frac{G}{c}$ [(«Кинетическая энергия»)$_{xx}/c^2$]^2, *эрг · рад*$^{-1}$ *· сек*	$2{,}3 \cdot 10^{-67}$	$1{,}4 \cdot 10^{-20}$	$1{,}0 \cdot 10^{-18}$	$9 \cdot 10^{38}$
Δt, *сек*	10^{-21}	10^{-8}	10^{-3}	10^{4}
$\Delta\omega \sim 1/\Delta t$, *рад · сек*$^{-1}$ . . .	10^{21}	10^{8}	10^{3}	10^{-4}
$\Delta E_{\text{(излученное)}}$, *эрг*	10^{-46}	10^{-12}	10^{-15}	10^{35}
Предполагаемое расстояние до приемника, *см* . .	10^{3}	10^{3}	10^{9}	10^{23}
$\Delta E/4\pi r^2$, *эрг/см*^{2}	10^{-53}	10^{-19}	10^{-34}	10^{-12}

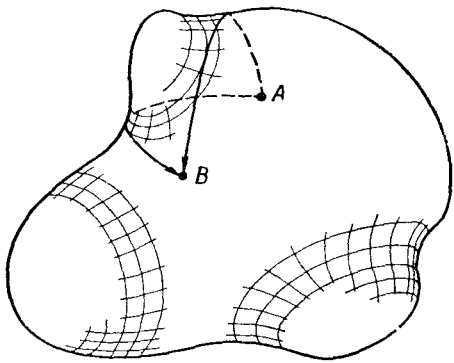
сказать, бесплатно, требуемый источник излучения, подобно тому же, как были открыты радиозвезды в качестве источников электромагнитного излучения. Если же эти надежды на обнаружение природных источников гравитационного излучения не осуществятся, то, согласно оценкам Вебера, все же возможно создать искусственные источники гравитационного излучения с интенсивностью, достаточной для ее обнаружения.

§ 10. Длинноволновое гравитационное излучение при достаточной интенсивности может привести к многократному изображению удаленных галактик

Нет никакой необходимости ограничивать наше рассмотрение гравитационным излучением, которое имеется в настоящее время. Огромные количества этого излучения должны возникать при сжатии и последующем взрыве Вселенной, если этот процесс происходит примерно аналогично тому, как у пузырьков в воде образуются выступы. Крупномасштабные возмущения метрики будут в таком случае распространяться в виде гравитационного излучения. Совершенно не очевидно, что это излучение будет ограничено количеством эффективной массы и энергии того же порядка, что и масса в форме «материальных частиц». Поэтому интересно узнать, какова эффективная величина энергии, переносимой этими возмущениями. Волны с длиной волны от сантиметров до километров можно изучать с помощью приемной аппаратуры, которая будет создана в ближайшее одно-два десятилетия. Однако вполне можно предположить, что гравитационное излучение (если его много) возникает в диапазоне длин волн, сравнимых с масштабами расстояний между большими скоплениями материи во Вселенной — галактиками. Расстояния между галактиками будут меняться со временем в процессе расширения Вселенной, и пропорционально им будут меняться и длины волн гравитационного излучения. В настоящее время эти расстояния составляют порядка $2 \cdot 10^6$ световых лет, и было бы интересно изучить гравитационное излучение и

возмущения в метрике, имеющие такой характеристический размер [1]).

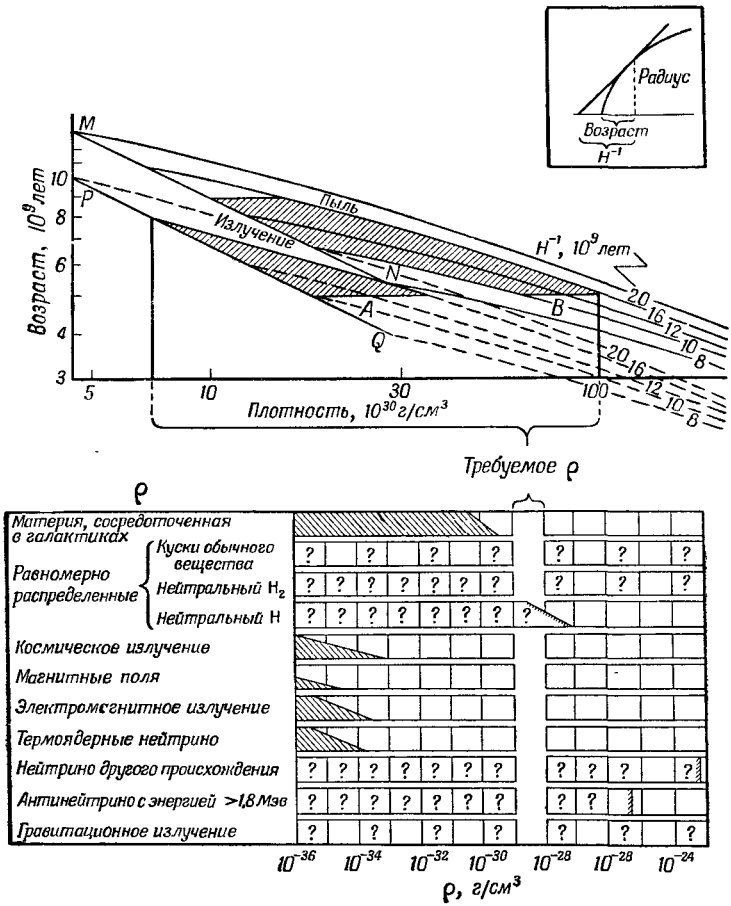
На фиг. 19 дано схематическое изображение замкнутого пространства с изменяющейся кривизной. Две близко расположенные точки можно связать только одной геодезической. Однако точки, расположенные на большем расстоянии, можно иногда связать двумя или



Фиг. 19. В нерегулярно искривленном пространстве имеется более одной геодезической со сравнимыми длинами, которые связывают достаточно удаленные точки A и B.

более геодезическими сравнимой длины. Аналогичная ситуация, возникающая в акустике, хорошо известна. Взрыв в одной точке может вызвать на некотором расстоянии три или пять «отзвуков»; число акустических изображений источника зависит от неоднородностей в показателе преломления атмосферы. Таким образом, в искривленном пространстве $g_{\mu\nu}$ играет в обобщенном

[1]) Автор выражает признательность проф. М. Шварцшильду за обсуждение астрофизических приложений гравитационного излучения, вопроса о наиболее существенных длинах волн и проблемы возможности использования каких-либо сведений о внутренней динамике галактик для проверки наличия гравитационного излучения. Признательность выражается также д-ру Б. Бертотти и д-ру Ф. Гроссу за обсуждение вопроса о многократных изображениях в пространстве с нерегулярной кривизной, проф. У. Ингарду и проф. Ч. Харрису за указание литературы по акустике и проф. С. Чандрасекару за обсуждение его работ по проблеме сцинтилляций.



Ф и г. 20. Плотность массы-энергии, необходимая для удержания Вселенной, согласно общей теории относительности Эйнштейна (вверху) и сравнение ее с плотностями конкретных источников массы-энергии (внизу); значения некоторых из них известны сравнительно хорошо, другие же практически неизвестны, что обозначено вопросительными знаками.

Кривые на верхней диаграмме показывают, какая плотность необходима, если задан какой-то возраст Вселенной в настоящее время и величина быстроты расширения H или времени, продолженного назад к моменту начала расширения („обратной постоянной Хаббла" H^{-1}). Если, например, для H^{-1} принять значение $12 \cdot 10^9$ лет, а возраст выбрать равным $5 \cdot 10^9$ лет, то получаются две линии, пересекающиеся в A. Таким образом определяется требуемая плотность. Величина вычисленной плотности заметно изменяется в зависимости от того, какой источник

смысле роль показателя преломления в акустике. Следовательно, *число оптических изображений удаленных звезд* (или звездных взрывов) *позволит измерить крупномасштабные флуктуации метрики или, если этого не будет обнаружено, даст верхний предел эффективной энергии, содержащейся в гравитационном излучении.*

Для иллюстрации можно заметить, что эффективный общий радиус кривизны пространства R, который может быть вызван «рябью» на метрике масштаба L и амплитуды δg, задается по порядку величины формулой

$$\frac{1}{R^2} \sim \frac{(\delta g)^2}{L^2}, \tag{187}$$

так что при $R \sim 10^{10}$ световых лет, $L \sim 10^6$ световых лет и при отсутствии *других* источников кривизны будем иметь $\delta g \sim 10^{-4}$. Сравнение с уравнениями поля Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{188}$$

показывает, что правую часть (187) грубо можно рассматривать как эквивалент некоторой эффективной плотности энергии, хотя, конечно, согласно основным принципам, в гравитационном поле, свободном от источников, плотность энергии в действительности равна нулю.

§ 11. Достаточно ли массы-энергии для превращения пространства в замкнутое

Гравитационное излучение, нейтрино, фотоны, «обычная материя» и другие источники массы-энергии сравни-

плотности является основным: инертная масса (пыль; сплошные кривые) или излучение (пунктирные линии).

Заштрихованные области получаются в предположении, что возраст Вселенной заключен в пределах от $5 \cdot 10^9$ до $9 \cdot 10^9$ лет, а обратная постоянная Хаббла — между $10 \cdot 10^9$ и $16 \cdot 10^9$ лет. Полученная при этом плотность лежит между $7 \cdot 10^{-30}$ и $100 \cdot 10^{-30}$ *г/см*^{3}, как показывает заштрихованная область на нижней диаграмме. Там же указаны известные источники массы-энергии и приблизительные границы неопределенности существующих значений. Среди возможных источников массы-энергии, для которых не существует никаких оценок, имеются два (нейтральный Н и антинейтрино), для которых можно указать примерный верхний предел. Так как в настоящее время приходится пренебрегать некоторыми возможными источниками массы-энергии, невозможно сказать, имеется ли какое-либо противоречие между фактами и предсказаниями общей теории относительности Эйнштейна.

Диаграмма представляет собой уточненную диаграмму из работы [159].

ваются единым образом (фиг. 20), если задается вопрос: является ли общая величина массы достаточной для искривления пространства до замкнутого? Имеющихся в нашем распоряжении наблюдательных данных [1]) недостаточно для того, чтобы сделать что-либо большее, чем попытку получить ответ на этот важный вопрос.

§ 12. Новое предсказание из теории Эйнштейна; минимум эффективного углового размера отдаленных галактик

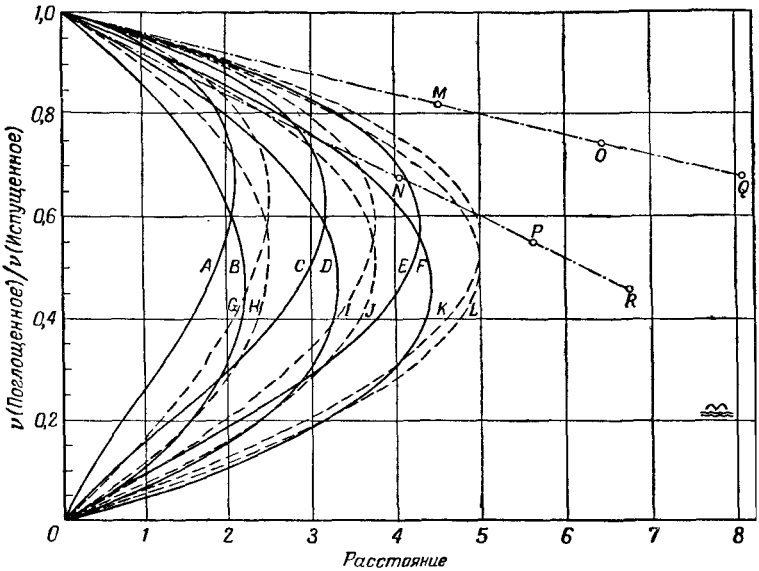
Конечно, всегда возникают вопросы о том, действительно ли известно, что Вселенная замкнута и расширяется с убывающей скоростью, как это следует из общей теорией относительности Эйнштейна в идеальном случае постоянной кривизны. В связи с этим интересно отметить, что из этой теории можно сделать поразительное предсказание (161), которое можно было бы проверить экспериментально.

Последовательность галактик с примерно одинаковыми физическими размерами, но все более и более удаленных от наблюдателя, не должна непрерывно уменьшаться в своих кажущихся размерах. Напротив, те галактики, которые удаляются со скоростью около $v/c = 0{,}5$, будут иметь минимальные угловые размеры, те же, которые расположены дальше или ближе, будут выглядеть больше (фиг. 21). Этот эффект проще всего представить себе, вообразив сферу из прозрачного стекла, в которую здесь и там включены монеты. В этой сфере высверлено углубление возле его северного полюса. Свет, прошедший через стекло в это углубление, наблюдается каким-либо методом. Тогда ближние монеты будут казаться бо́льшими, а монеты, находящиеся на экваторе, будут выглядеть меньшими. Те же, которые

---

[1]) Сводку результатов и первый вариант фиг. 20 см. в [159]; относительно исследований содержания водорода см. [160]; А. Саньяр и М. Гольдхабер в частном сообщении указали предельное значение нейтринного потока $\leqslant 2{,}5 \cdot 10^{20}$ на *см*^{2}/*сек* от реакции $Rb^{87} \rightarrow Sr^{87m}$.

расположены возле южного полюса, будут снова выглядеть бóльшими, если наблюдатель находится на северном полюсе. Оптические телескопы работают хорошо



Фиг. 21. Зависимость частоты линий в их спектре относительно стандартной частоты от кажущегося расстояния до удаленных галактик.

Кривые проведены для различных значений H^{-1} и возраста Вселенной в интересующей нас области фиг. 19. Сплошные линии относятся к случаю, когда источники массы-энергии создают пренебрежимо малое давление („пыль"); штриховые линии относятся к случаю, когда давление имеет максимально возможное значение — одну треть плотности энергии („излучение"). Штрихпунктирные линии относятся к теории Бонди, Голда и Хойля, отличной от теории Эйнштейна. Шкала частот дает наиболее однозначную физическую шкалу, отнесенную к истинному расстоянию. Угловое эффективное расстояние отождествляется с истинным диаметром галактики (в предположении, что он тот же, что и для типичных близких галактик), деленным на кажущийся угловой диаметр ближних галактик. Диаграмма взята из работ Вакано и Уилера [161].

только до расстояний, несколько меньших тех, у которых $v/c = 0{,}2$, так что, по-видимому, проверить это предсказание и продвинуть таким образом вперед проверку эйнштейновской теории можно лишь с помощью радиотелескопов.

§ 13. Изменяется ли масса частиц со временем? Или с кривизной пространства-времени? Или не меняется вовсе?

Элементарные частицы вносят свой вклад в плотность массы и энергии и влияют, таким образом, согласно общей теории относительности, на кривизну Вселенной. Оказывает ли кривизна Вселенной обратное воздействие на элементарную частицу? Если она меняется, то отражается ли это на характерных массах частиц или на других их свойствах? Не имея в виду подобные эффекты кривизны, из совсем других соображений, Дирак тем не менее сравнительно давно предположил, что безразмерные физические константы могут меняться со временем по мере расширения Вселенной [16][1]). Он отметил совпадение порядков величины трех очень больших чисел

$$N_1 \sim \frac{e^2}{Gm_e m_p} \sim 2 \cdot 10^{39},$$

$$N_2 \sim \frac{ct_{\text{Вселен.}}}{e^2/m_e c^2} \sim 4 \cdot 10^{40}, \qquad (189)$$

$$N_3 \sim \left(\frac{4\pi}{3} \frac{\rho R_{\text{Вселен.}}}{M_p}\right)^{1/2} \sim 2 \cdot 10^{39}$$

и заключил, что это совпадение нельзя рассматривать как случайное. Если эти три величины остаются постоянными в процессе расширения, то физические константы должны меняться. Если применима точка зрения геометродинамики, тогда набор единиц, давно введенный Планком, следует рассматривать как фундаментальные и постоянные величины:

$$L^* = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-33} \text{ см},$$

$$\text{Время} = \frac{L^*}{c}, \qquad (190)$$

$$m_1 = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} = 2{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ г}$$

[1]) Дальнейшее обсуждение этого предположения Дирака см. в работах [162, 163].

и другие физические константы следует рассматривать как изменяющиеся относительно этих стандартов. Дике проанализировал несколько возможностей проверки этого изменения со временем (см. [16, 162, 163][1])). Пока не очевидно, что этот эффект, если он и будет обнаружен, будет несовместим с общей теорией относительности. Конечно, если свойства частиц изменяются в процессе расширения Вселенной, то, по-видимому, это будет означать, что воздействие тензора кривизны на частицы явится наиболее естественной инвариантной и локальной величиной, которой можно описать этот эффект.

---

[1]) См. также новейшие работы: R. H. Dicke, Phys. Rev., **123**, (1961); L. Egyed, Zs. f. Geophys., **24**, 260 (1960), Ann. Univ. Budapest, **3**, 35 (1960); B. C. Heesen, Sci. Amer., **203**, 98 (1960); Д. Иваненко, М. Сагитов, Вестник МГУ, № 6 (1961) и книгу: P. Jordan, Schwerkraft und Weltall, 2 Auflag., Braunschweig, 1955. — *Прим. ред.*

Глава V

РАВНОВЕСИЕ НЕЙТРИНО И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ НУКЛОНОВ

§ 1. Отсутствие равновесия для сверхкритических масс

Крупномасштабная кривизна может оказывать или не оказывать заметного влияния на массы частиц; однако существует одно явление, при котором влияние метрики на стабильность элементарных частиц оказывается неизбежным. *Существует предел массы порядка 0,7 массы Солнца, выше которого не существует равновесной конфигурации для массы холодной материи, образующейся в конце термоядерной эволюции.* Давление в центре стремится к бесконечности по мере того, как масса приближается к этому пределу; разница между состояниями с положительной и отрицательной энергиями в центре стремится к нулю. Детали перехода зависят от принятого уравнения состояния, но сам эффект от него не зависит [1]).

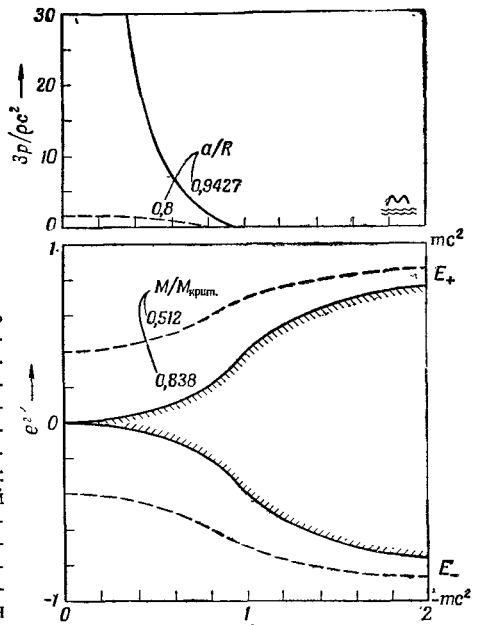
На фиг. 22 дана конфигурация в непосредственной близости от критической массы, а также сама критическая конфигурация для модели, в которой звездное вещество считается несжимаемой жидкостью. На фиг. 23 представлено более реалистическое уравнение состояния (Б. Гаррисон), использованное при повторном анализе проблемы.

§ 2. Уравнение состояния

Уравнение состояния Гаррисона допускает, что холодная материя идеальным образом катализирована до конца термоядерной эволюции. При обычном давлении это заканчивается на Fe^{56}. При более высоких дав-

---

[1]) Последующее изложение основано на статье Гаррисона, Вакано и автора [8], из которой взяты также фиг. 22—24. В статье учтен важный вклад Ландау, Оппенгеймера, Сербера, Волкова, Чандрасекара, Снайдера и др. в проблему критической массы.



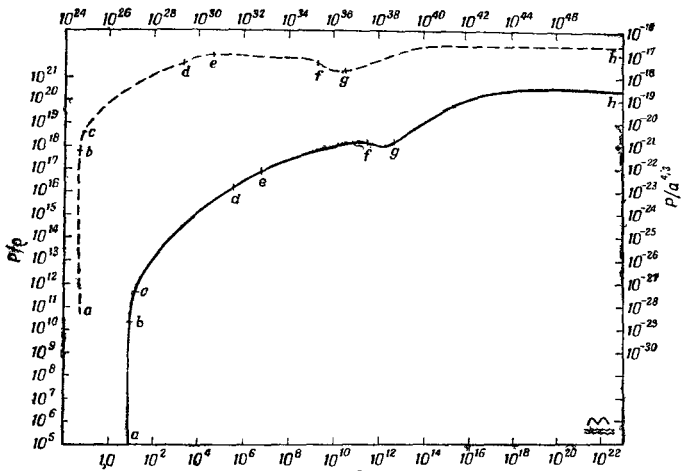
Ф и г. 22. Зависимость давления (вверху) и метрики, или эквивалентного гравитационного потенциала, (внизу) от расстояния для двух коифигураций идеальной несжимаемой жидкости: для массы, равной 0,512/0,838=0,611 от критической массы (пунктирная кривая) и непосредственно для критической массы (сплошная кривая).

В ньютоиовской теории гравитационный потенциал жидкой массы изменяется как $1/r$ вне тела и как потенциал гармонического осциллятора—внутри, которые гладко сшиваются на границе $r=a$. Соответствующая величина в общей теории относительности есть квадратный корень из временной компоненты метрического тензора

$$[-g_{TT}(r)]^{1/2} = (\text{Шварцшильдовская } \exp[\nu(r)])^{1/2}.$$

Эта величина, умноженная на массу покоя электрона, дает нижнюю границу „океана" имеющихся энергетических уровней.

Заштрихованная область показывает, таким образом, как расстояние между положительными и отрицательными энергетическими уровнями стремится к нулю при приближении к центру критической конфигурации. Давление в центре стремится к бесконечности (верхний график). Формальное, но сингулярное решение уравнений поля можно дать и для бо́льших масс; тогда точка, в которой метрика стремится к нулю и давление становится бесконечным, отодвигается вправо. Когда эта точка совпадает с радиусом самой жидкой массы (случай $a=R$, $M=M_{крит}$; на графике не показано), вся масса лежит внутри сферы так называемого шварцшильдовского радиуса. В связи с этим иногда поднимается вопрос, не отделяет ли масса сама себя от остальной Вселенной? Однако все решения физически неприемлемы с того момента, когда масса достигает $0{,}838M_{крит}$, определенной (не очень удачно) с помощью упомянутой выше конфигурации, или как только a достигает $0{,}9427R$. Проблема равновесия становится неразрешимой уже тогда, когда давление стремится к бесконечности в центре. Вопрос об „отделении", никогда не может возникнуть. Чтобы учесть сжимаемость жидкости, достаточно предположить, что плотность растет к центру; при этом гравитационное давление повышается и, следовательно, стремится к бесконечности в центре при *меньших* критических массах.



Фиг. 23. Уравнение состояния, согласно Гаррисону, для холодной материи (при абсолютном нуле), образовавшейся в конце термоядерной эволюции.

Сплошной кривой показана зависимость P/ρ (в $см^2/сек^2$) от плотности ρ (в $г/см^3$) Штриховой кривой изображена зависимость отношения $P/a^{4/3}$ ($г \cdot см^3/сек^2$) от числа нуклонов в 1 $см^3$ (a). Вплоть до плотностей порядка 10^6 $г/см^3$ давление не достаточно для того, чтобы „втиснуть" электроны в ядро или сдвинуть положение минимума кривой дефекта массы.

При этом вещество будет на 100% состоять из Fe^{56}. Более высокие давления меняют положение минимума кривой дефекта масс в сторону более тяжелых ядер с бо́льшим отношением нейтронов к протонам. В конце концов достигается точка f, когда ядра не могут содержать уже больше нейтронов.

Равновесный состав представляет собой смесь свободных нейтронов, вырожденных электронов с высокой энергией Ферми и некоторых ядерных образований, свойственных данному давлению. Равновесие было рассчитано с использованием обычной полуэмпирической формулы для масс ядер. При плотности порядка 10^{14} $г/см^3$ среда становится столь же плотной, как и ядерная материя. Дальнейший ход зависимости плотности от давления становится более неопределенным. Если начинает превалировать отталкивание твердых сердцевин, то может оказаться разумным использовать в качестве идеализированного представления уравнение состояния несжимаемой жидкости, как это предполагалось при построении фиг. 22. В настоящей кривой было предположено противоположное идеализированное предельное поведение идеального газа Ферми при высоких давлениях. В ультрарелятивистском пределе равновесное состояние асимптотически стремится к смеси нейтронов, протонов и электронов в отношении 8 : 1 : 1.

Участок (a—b) кривых соответствует экспериментально наблюдаемым результатам $\left(Fe^{56}_{26}\right)$; участок ($b$—$c$) получен путем электрополяции; (c—d)—вычислением в работе Фейнмана—Метрополиса—Теллера; (d—e)—вычислением Чандрасекара $\left(Fe^{56}_{26}\right)$; ($e$—$f$)—для ядер от Fe^{56}_{26} до Y^{122}_{39}, если электроны „втиснуты" в ядро (f—g)—для ядер от Y^{126}_{39} до Cd^{187}_{48}, если нейтроны вылетают из ядра; (g—h)—нейтроны; [в g—ядра, „растворенные" в нейтронах; в h—смесь из нейтронов ($^8/_9$) и H^1_1 ($^1/_9$)].

лениях состав ядер, соответствующий минимальной энергии, изменяется. Эта область исследовалась путем использования обычной полуэмпирической формулы для энергии связи ядер и обычных принципов статистического равновесия. При очень больших плотностях ядерные силы отбрасывались и все частицы рассматривались как идеальный ферми-газ. Допущение отталкивающей твердой сердцевины не может привести к стабильному состоянию со сколь угодно большой массой, так как критическое условие появляется уже в идеализированном случае несжимаемой жидкости.

§ 3. Релятивистское гидростатическое равновесие

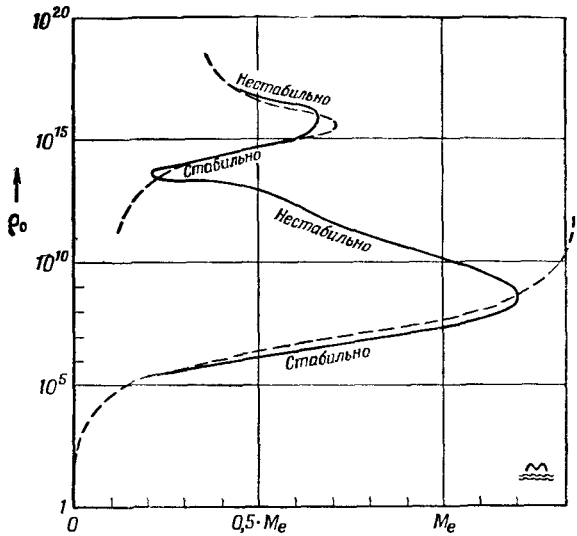
Уравнение Гаррисона было включено в то же общерелятивистское уравнение гидростатического равновесия, что и использованное ранее Оппенгеймером и Волковым [164][1]) для рассмотрения нейтронного газа

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho(p)r^2,$$

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{[\rho(p)+c^{-2}p]\,G\,[M(r)+4\pi c^{-2}p(r)r^3]}{r[r-2GM(r)/c^2]}. \quad (191)$$

Эти уравнения равновесия были численно проинтегрированы М. Вакано на вычислительной машине MANIAC в Институте высших знаний (Принстон) при поддержке и помощи д-ра Ганса Мейли и Барбары Вейман. Интегрирование проводилось таким образом, что значение плотности в центре ρ_0 выбиралось произвольно. Уравнение состояния дает тогда соответствующую величину давления в центре p_0. Значение функции, описывающей массу $M(r)$ в центре было, конечно, равно нулю. Тогда уравнения 1-го порядка однозначно определяют поведение функций $M(r)$, $\rho(r)$ и $p(r)$ при движении от центра к границе. Граница определена как точка, в которой давление обращается в нуль: $r = R$. Тогда масса $M = M(R)$ определена. Иными словами, сначала задача решалась, а потом уже определялось, какая же задача решена. Резуль-

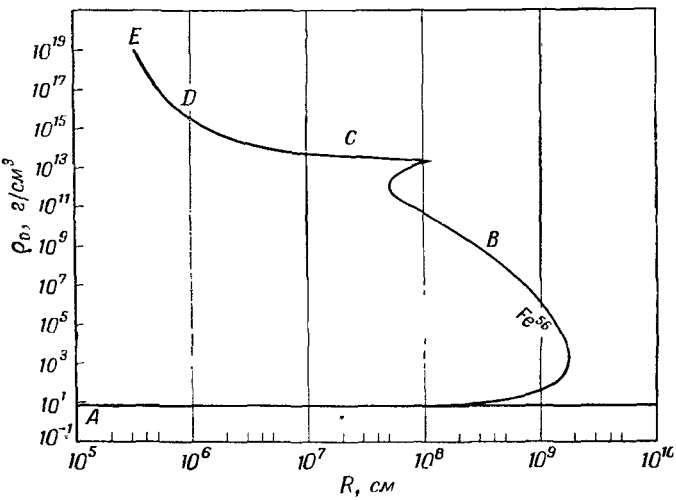
[1]) См. также В. Амбарцумян, Г. Саакян, Астрон. журн., **38**, 785 (1961); В. А. Скрипкин, ДАН СССР, **135**, № 5 (1960), **136**, № 4, **138**, № 1 (1961). — *Прим. ред.*



Фиг. 24. Масса звезды, состоящей из холодной материи, образовавшейся в конце термоядерной эволюции, в единицах массы Солнца ($M_\odot = 1{,}987 \cdot 10^{33}$ *г*), как функция плотности ρ_0 (в *г/см*^{3}) в центре звезды. [График построен по данным релятивистского гидростатического анализа Вакано (на вычислительной машине MANIAC в Институте высших знаний в сотрудничестве с Г. Мейли и Б. Вейман).]

Нижняя пунктирная кривая показывает связь между массой и плотностью в центре, полученную Чандрасекаром: 1) без введения поправок общей теории относительности, 2) без учета вступления электронов в соединения с протонами и образования нейтронов. Другими словами, Чандрасекар имел дело с эффективной массой на электрон и полагал эту величину постоянной на этом графике ($\mu = 56/27 = 2{,}07$; значение $56/26 = 2{,}15$, соответствующее Fe_{26}^{56}, было бы более разумным; это привело бы к небольшому изменению масштаба по оси M, пропорциональному μ^2, и по оси ρ, пропорциональному μ). Верхняя пунктирная кривая представляет результаты Оппенгеймера и Волкова, полученные при интегрировании общерелятивистского уравнения гидростатического равновесия для идеального релятивистского нейтронного газа Ферми. Насколько известно, кривая никогда до сих пор не объединяла разумным образом область, где давление имеет преимущественно атомное происхождение с областью, где давление имеет преимущественно ядерное происхождение. Две точки перехода на этой кривой от устойчивого равновесия к неустойчивому означают то, что можно назвать „катастрофическими точками" („crushing points"). Нижняя кривая, обозначенная словом „стабильно", там, где она лежит под верхней кривой, обозначенной словом „стабильно", в действительности соответствует метастабильной звезде по отношению к сжатию до больших плотностей. Тем не менее необходимо преодолеть потенциальный барьер, чтобы перейти от менее компактного условия равновесия к более компактному. Все это рассмотрение относится исключительно к холодным звездам. Горячие звезды обладают термическим давлением, помогающим им противостоять гравитационному притяжению, и могут иметь массу, гораздо бо́льшую, чем предел Ландау–Оппенгеймера–Волкова, равный $0{,}7 M_\odot$, без появления нестабильности. Но для холодных компактных звезд с массой, большей $\sim 0{,}7 M_\odot$, условий равновесия не существует.

таты гидродинамического анализа Вакано представлены на фиг. 24 (соотношение между общей массой и плотностью в центре) и фиг. 25 (соотношение между радиусом и плотностью в центре).



Фиг. 25. Зависимость радиуса от центральной плотности для холодной материи, образовавшейся в конце термоядерной эволюции, найденная из общерелятивистского гидростатического анализа Вакано, основанного на уравнении состояния Гаррисона.

Горизонтальная линия внизу диаграммы показывает, как вела бы себя кривая, если бы железо было несжимаемым. Отдельные участки кривой *BCD* сопоставляются с нестабильными конфигурациями (ср. фиг. 24).

Работы Гаррисона и Вакано, как и прежние работы Ландау [165] и Оппенгеймера и Волкова [164], подчеркивают, что судьба компактного образования холодной материи, получившегося в конце термоядерной эволюции, просто неизвестна, если масса этого образования превышает примерно 0,7 массы Солнца.

§ 4. Независимость от пути эволюции

Следует подчеркнуть, что обсуждаемые здесь вопросы рассматриваются в принципе и не имеют никакого непосредственного отношения к конкретному пути тер-

моядерной эволюции. Известно низшее энергетическое состояние системы из A нуклонов при $A = 20$ (Ne^{20}), при $A = 56$ (Fe^{56}), при $A = 112$ (два ядра Fe^{56}), при $A = 560$ (десять ядер F^{56}), при $A = 56 \cdot 2 \cdot 10^{54}$ (соответствует массе, немного меньшей 0,1 массы Солнца; равновесная конфигурация из $2 \cdot 10^{54}$ атомов Fe^{56}, показанная на фиг. 24 и 25), но есть все основания предполагать, что *не* существует никакого состояния с наинизшей энергией обычного характера для компактной системы с $A = 56 \cdot 2 \cdot 10^{55}$ нуклонов (масса этого образования составляет около 0,9 $M_\odot$). В данной связи совершенно несущественно, сколько времени займет достижение этого положения при нормальном пути «ядерного горения» или через сколько различных режимов горения пройдет звезда: протон-протонная реакция, углеродно-азотный цикл, α-частичные реакции и т. д. Возможно даже, что звезда каждый раз взрывается прежде, чем приблизиться к рассматриваемому состоянию. Пусть в этом случае выброшенное вещество возвращается обратно, а ее кинетическая энергия уносится так же, как и энергия обратного падения на звезду. Тогда в результате взрыва система оказывается в более низком энергетическом состоянии, чем прежде, но число нуклонов не меняется. Пусть эволюция продолжается до тех пор, пока возможны превращения при предположении как можно более эффективного удаления тепла. В конце концов звезда обязательно начнет «уставать». Она не может выбрасывать вещество, излучать фотоны и испускать нейтрино; она приходит к самому низшему состоянию, возможному для системы из A нуклонов под действием как ядерных, так и гравитационных сил. Однако сколь велико ни было бы время, необходимое для того, чтобы прийти к этому конечному состоянию, именно это состояние представляет интерес с принципиальной стороны.

До тех пор пока природа этого конечного состояния не установлена, полную теорию термоядерных реакций в звездах нельзя будет считать завершенной. Положение, создавшееся в ядерно-гравитационной физике, могло бы создаться в физической химии, если бы были известны некоторые детали механизма и скорость чрезвы-

чайно сложной реакции

$$2H_2 + O_2 \rightleftarrows 2H_2O,$$

но не была бы известна такая элементарная величина, как разность свободных энергий начального и конечного состояний реагентов! Поэтому снова приходится задать вопрос: *что такое конечное состояние равновесия системы из A нуклонов, взаимодействующих через гравитационное поле, когда A велико*? («Проблема больших значений A».)

Проблема больших значений A наиболее сложным образом включает и физику элементарных частиц, и гравитационную физику, так как 1) давление в центре растет к бесконечности и 2) расстояние между уровнями состояний с положительной и отрицательной энергиями стремится к нулю. Эти условия оказываются жесткими для центральных нуклонов, но не для остальной системы. Что случится, если добавить к системе извне один килограмм вещества сверх критической массы? Результирующая масса — после того, как система снова придет в равновесие — не должна превышать критической массы. Следовательно, добавленная масса должна быть излучена.

Если добавленная масса испускается в виде частиц, то их кинетическая энергия может быть отделена от нее, так же как и гравитационная энергия обратного падения на массивное тело. Возвращение этих частиц обратно в систему с необходимостью снова приведет к парадоксальной ситуации, из которой мы ищем выход.

После того как добавленная масса уже полностью испущена, число нуклонов 1) то же, что и до добавления этого 1 *кг*, или 2) увеличилось на число нуклонов, содержащихся в 1 *кг*, или 3) не определено. Если реализуется первый случай, то бесконечно большое количество нуклонов может содержаться в конечной области пространства и, конечно, в ограниченной области пространства около центра звезды, так как условия в остальной части системы неизменны. Допустить такую возможность — почти значит предположить, что нуклоны могут уничтожаться или что число нуклонов не имеет никакого смысла.

§ 5. Критическая масса как катализатор образования и аннигиляции нуклонов

Таким образом, представляется неизбежным считать систему с критической массой катализатором, который может притягивать нуклоны извне и превращать равное количество нуклонов в центре в излучение — электромагнитное, гравитационное или нейтринное — с такой быстротой или в таком количестве, чтобы помешать общему числу нуклонов системы превысить некоторое критическое число.

Процесс, который мы сейчас рассматриваем, является распадом нуклонов на нейтрино и другие излучения при большом давлении, и он полностью согласуется с законом сохранения энергии и импульса. Он нарушает закон сохранения числа нуклонов, но не противоречит большинству других законов сохранения. Он не противоречит эмпирическому факту [9], что нуклон имеет период спонтанного полураспада больше $4 \cdot 10^{23}$ лет, так как давление в центре критической массы, вероятно, более чем на порядок превышает давление в ядрах. Кинокартина развития большой массы нуклонов, распадающихся под влиянием высокого давления на свободные нейтрино, представляет странное зрелище, если смотреть ее в обратном порядке. Достаточно большое количество нейтрино с правильной спиральностью влетает одновременно со всех сторон в каталитическую область высокого давления и за короткое время преобразуется в ядерную материю. Другими словами, *нуклонное равновесие должно было бы регулироваться энергией Ферми μ_ν нейтринного поля.*

Если можно предположить, что число нуклонов во Вселенной не является вечно некоторым таинственным и необъяснимым числом, то представляется разумным рассматривать число нуклонов как динамическую переменную со своим собственным законом изменения. Если эта переменная вообще изменяется, то наиболее благоприятными условиями для изменения были бы высокое давление и малое расстояние между уровнями состояний с положительной и отрицательной энергиями, т. е. значительное уменьшение разности масс между нуклонами и нейтрино. Более того, не видно никакого объяснения

«парадокса больших A», которое не требовало бы для этого отказа от закона сохранения числа нуклонов.

§ 6. Непрозрачность по отношению к нейтрино

Нет необходимости обращаться к парадоксу сверхкритических масс и нет нужды анализировать любые процессы распада нуклонов на нейтрино, чтобы столкнуться с интересной астрофизической ситуацией, при которой может происходить массовое образование нейтрино. При определенных условиях урка-процесс Гамова и Шенберга [7] может преобладать над другими процессами освобождения энергии. Нейтрино, стремясь вырваться из горячих недр звезды, не встречают таких препятствий, какие имеют место для света. Однако какова же непрозрачность звезды для нейтрино? Этот вопрос анализировал Ювема [6]. Вычисленное значение средней длины свободного пробега нейтрино с энергией 1 *Мэв* в Солнце ($\rho \sim 1{,}4$ *г/см*^{3}) оказалось $\sim 10^{19}$ *см*; по сравнению с этой длиной радиусом Солнца ($7 \cdot 10^{10}$ *см*) вполне можно пренебречь. Однако наблюдаемая плотность белых карликов доходит до 10^8 *г/см*^{3} при соответствующем радиусе $\sim 10^8$ *см*; в сильно сжатых образованиях, проанализированных Оппенгеймером и Волковым, а также Гаррисоном и Вакано, плотность достигает 10^{14} *г/см*^{3}. Следовательно, интересно узнать, могут ли нейтрино свободно проникать даже сквозь такие звезды.

Ювема исследовал отдельно случай высокой и низкой плотностей. При высокой плотности $\sim 10^{15}$ *г/см*^{3} электроны фермиевского фона имеют высокую энергию; интересующая нас энергия нейтрино также высока, и основным процессом в рассмотрении Ювемы (табл. 16)

Таблица 16

Средняя длина свободного пробега λ при $\rho = 10^{15}$ *г/см*^{3} в предположении, что преобладающим является процесс $\nu + e \to \mu + \nu$ [6]

E_ν, *Мэв*	21,3	23,4	27,7	36,2	45	128
λ, *см*	∞	$7{,}3 \cdot 10^6$	$5{,}7 \cdot 10^5$	$1{,}55 \cdot 10^4$	$1{,}3 \cdot 10^2$	1,9

является процесс $\nu + e \to \mu + \nu$. Из данных Ювемы ($\lambda = \infty$ при энергии ниже 21 *Мэв*) следует, что нужно анализировать дальнейшие процессы, прежде чем получится достоверный предел для доли энергии, уносимой нейтрино из очень плотных звезд. Для звезд с меньшей плотностью основными процессами будут

$$\begin{aligned} &\nu + n \to p + e^-, \\ &\bar{\nu} + p + e^- \to n, \\ &\bar{\nu} + p \to n + e^+. \end{aligned} \tag{192}$$

Ювема дал таблицы и диаграммы, из которых можно вычислить прозрачность для белых карликов по отношению к нейтрино. Интересно было бы посмотреть, является ли эта прозрачность достаточно существенной для расчетов эволюции звезд, чтобы можно было проверить процесс поглощения нейтрино, независимо от экспериментов Рейнса — Коуэна.

Глава VI

СЛАБОСТЬ НЕЙТРИННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В настоящее время нет никакого объяснения тому, почему нейтринные взаимодействия так слабы по сравнению с электромагнитными взаимодействиями и почему они так сильны по сравнению с гравитационными.

Глава VII

ЦЕНТРАЛЬНАЯ РОЛЬ НЕЙТРИНО В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

В заключение можно сказать, что предвидения Римана, Клиффорда и Эйнштейна о чисто геометрической основе физики предстают теперь на более высоком этапе своего развития, указывают на более широкие перспективы и выдвигают более глубокие проблемы, чем когда-либо раньше. Квант действия придает геометродинамике новые характерные черты, наиболее важной из которых является существование флуктуаций типа ручек во всем пространстве. Если имеется вообще какое-либо соответствие между этой виртуальной пеноподобной структурой и физическим вакуумом, как это понимается в квантовой электродинамике, то, по-видимому, нет иного выхода, как сопоставить эти ручки с «голыми» электронами. Электроны и другие элементарные частицы физики, согласно всем имеющимся указаниям, совершенно отличны от этих «голых» электронов. Для реальных частиц геометродинамическая картина предполагает модель коллективных возбуждений в виртуальном пеноподобном вакууме, аналогично различным видам фононов или экситонов в твердом теле.

Огромная разница между ядерной плотностью $\sim 10^{14}$ *г/см*^{3} и флуктуационной плотностью энергии поля в вакууме $\sim 10^{94}$ *г/см*^{3} показывает, что присутствие элементарной частицы в процентном отношении вносит совершенно пренебрежимые изменения в бурные локальные условия, характеризующие вакуум. Другими словами, элементарные частицы не представляют действительно фундаментального отправного пункта для описания природы. Напротив, они представляют собой только поправку первого порядка к физике вакуума. В качестве первого шага надо надлежащим образом описать этот

вакуум с его колоссальной плотностью виртуальных фотонов, виртуальных положительно-отрицательных пар и виртуальных рукавов, прежде чем появится фундаментальный отправной пункт для теоретического анализа указанных поправок.

Эти заключения о плотности энергии в вакууме, о его сложном топологическом характере и о богатстве физических процессов, происходящих в вакууме, не противоречат явно тому, что известно о вакууме из квантовой электродинамики. Напротив, выводы о процессах на «малых расстояниях» ($\sim 10^{-33}$ *см*), даже при их предварительном характере, и о процессах на «больших расстояниях» (10^{-11} *см*), по-видимому, могут подкреплять друг друга естественным образом.

Нынешняя геометродинамика имеет следующий очевидный недостаток: 1) *Она не может включить естественным образом* частицы спина $^1/_2$ вообще и *нейтрино* в частности.

Не только эта проблема является важной. Она может иметь глубокую внутреннюю связь с другими четырьмя нерешенными проблемами: 2) Могут ли идеи римановой геометрии и геометродинамики быть переформулированы в таком виде, чтобы концепция относительной «фазы» двух удаленных точек приобрела простой смысл? 3) Почему элементарные частицы имеют единичный заряд? 4) Каков механизм, связывающий зарядовое сопряжение и пространственную инверсию? 5) Можно ли избежать нарушения закона сохранения нуклонов в центре звезды с критической массой?

Но из нейтринной теории и геометродинамики вытекают не только проблемы, но и предсказания, большинство из которых являются объектом экспериментальной проверки. Среди наиболее интересных предсказаний, которые до сих пор еще не проверены, оказываются: 1) минимальный видимый угловой диаметр типичных галактик на некотором удалении (более удаленные, так же как и более близкие галактики, будут, как это предсказывается, иметь больший угловой диаметр) и 2) многократность изображений, достаточно удаленных светящихся объектов; минимальное расстояние, необходимое

для наблюдения этих эффектов с большой вероятностью, связано с количеством энергии, переносимой длинноволновым гравитационным излучением.

О своих постоянных надеждах объяснить атомные явления на основе теории поля Эйнштейн [166] писал: «Все эти попытки основаны на убеждении, что реальность имеет полностью гармоническую структуру. Ныне мы имеем меньше, чем когда-либо раньше, оснований допустить увести себя прочь от этого замечательного убеждения».

Автор выражает признательность проф. Ж. Польвани, проф. Л. Радикати и участникам летней физической школы в Вилла Монастеро (Варенна) за стимулирующие беседы по вопросам слабых взаимодействий; д-ру С. Глэшоу, Т. Филипсу и Д. Шарпу за помощь в составлении конспекта лекций; многим сотрудникам и коллегам за дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reines F., Cowan C. L., Phys. Rev., **90**, 492 (1953).
2. Cowan C. L., Reines F., Harrison F. B., Kruse H. W., McGuire A. D., Science, **124**, 103 (1956). [См. перевод в сборнике «Проблемы современной физики», № 11 (1956).]
3. Reines F., Cowan C. L., Phys. Rev., **113**, 273 (1959).
4. Carter R. E., Reines F., Wagner J. J., Wyman M. E., Phys. Rev., **113**, 280 (1959).
5. Brill D. R., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **29**, 465 (1957). (См. перевод в сборнике «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, 1961.)
6. Euwema R. N., Neutrinos and their Interactions with Matter, Ph. D Thesis, Princeton, 1959.
7. Gamow G., Schoenberg M., Phys. Rev., **59**, 539 (1941).
8. Harrison B. K., Wakano M., Wheeler J. A., Onzième Conseil de Physique Solvay, La structure et l'evolution de l'univers, Bruxelles, 1958.
9. Reines F., Cowan C. L., Jr., Kruse H. W., Phys. Rev., **109**, 609 (1958).
10. Бродский А., Иваненко Д., Nucl. Phys., **13**, 447 (1959).
11. Feinberg G., Goldhaber M., Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), **45**, 1301 (1959).
12. Misner C. W., Rev. Mod. Phys., **29**, 497 (1957).

13. Misner C. W., Wheeler J. A., Ann. of Phys., **2**, 525 (1957). (Дополнение I к настоящей книге.)
14. Rainich G. Y., Proc. Nat. Acad. Sci., (USA) **10**, 124 (1924).
15. Rainich G. Y., Trans. Am. Math. Soc., **27**, 106 (1925).
16. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A165**, 199 (1938).
17. Dicke R. H., Science, **129**, 621 (1959).
18. Dicke R. H., Am. Journ. Phys., 60, № 4 (1960).
19. Marzke R. F. The Theory of Measurement in General Relativity, A. B. Senior Thesis, Princeton, 1959, неопубликовано.
20. Sharp D., Phys. Rev. Lett., **3**, 108 (1959).
21. Einstein A., Grommer J., Sitz. Ber. preuss. Akad. Wiss., 2, 235 (1927).
22. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B., Ann. Math., **39**, 65 (1938).
23. Infeld L., Schild A., Rev. Mod. Phys., **21**, 408 (1949)
24. Chase D. M., Phys. Rev., **95**, 243 (1954).
25. Infeld L., Acta Phys. Polon., **13**, 187 (1954).
26. Callaway J., Phys. Rev., **92**, 1567 (1953).
27. Infeld L., Plebanski J., Motion and Relativity, New-York — London — Paris — Warszawa, 1960. (См. перевод: Инфельд Л., Е. Плебанский, Движение и релятивизм, ИЛ, 1962.)
28. Wheeler J. A., Phys. Rev., **97**, 511 (1955).
29. Ernst F., Rev. Mod. Phys., **29**, 480 (1957).
30. Power E. A., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **29**, 480i(1957).
31. Lichnerowicz A., Problèmes globaux en méchanique relativiste, Paris, 1939.
32. Licherowicz A., Journ. Math. Pure Appl., 23, 37 (1944).
33. Lichnerowicz A., Helv. Phys. Acta., Suppl., **4**, 176 (1956).
34. Foures-Bruhat Y., Acta Math., **88**, 141 (1952).
35. Foures-Bruhat Y., Journ. Rat. Mech. Anal., **5**, 951 (1956).
36. Lichnerowicz A., Théories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme, Paris, 1955.
37. McVittie G. C., General Relativity and Cosmology, London, 1956, Ch. V. (См. перевод: Дж. Мак-Витти, Общая теория относительности и космология, ИЛ, 1962.)
38. Van Biesbroek G., Astron. Journ., **55**, 49 (1950); **58**, 87 (1953).
39. Adams, Month. Not. Roy. Astron. Soc., **118**, 106 (1958).
40. St. John C. E., Astrophys. Journ., **67**, 195 (1928).
41. Popper D. M., Astrophys. Journ., **120**, 316 (1954).
42. Moore J. H., Proc. Ast. Soc. Pas., **40**, 229 (1928).

43. Luyten W. J., White Dwarfs and Degenerate Stars in Vistas in Astronomy, London, 1957.
44. Pound R. V., Rebka G. A., Phys. Rev. Lett., **4**, 337 (1960). (См. перевод в сборнике «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, 1961.)
45. Clemence G. M., Rev. Mod. Phys., **19**, 361 (1947).
46. Clemence G. M., Proc. Am Phil. Soc., **93**, 532 (1949).
47. Kruskal M., Int. Conf. on Relativistic Theories of Gravitation, Royaumont, July 1959.
48. Fronsdal C., Phys. Rev. **116**, 778 (1959).
49. Einstein A., Rosen N., Phys. Rev., **48**, 73 (1935).
50. Misner C. W., Phys. Rev., в печати.
51. Lipman Bers L. F., Proc. Int. Congr. of Math., vol. **2**, Cambridge, 1952, p. 157.
52. Courant R., Ann. Math., 38, 679 (1937).
53. Raychaudhuri A., Phys. Rev., **98**, 1123 (1955); **106**, 172 (1957).
54. Komar A., Phys. Rev., **104**, 544 (1956).
55. Weber J., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **29**, 509 (1957). (См. перевод в сборнике «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, 1961.)
56. Brill D. Ann. of Phys. **7**, 466 (1959); Lectures on Relativity, Iowa, 1961.
57. Araki H., Ann. of Phys. **7**, 466 (1959).
58. Einstein A., The Meaning of Relativity, 3rd ed., Princeton, 1950, p. 107. (См. перевод: Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, 1955.)
59. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М.—Л., 1961.
60. Cole R. H., Underwater Ezplosions, Princeton, 1948. (См. перевод: Коул Р., Подводные взрывы, ИЛ, 1950.)
61. Adams J. B., Mjolsness R., Wheeler J. A., Onzième Conseil de Physique Solvay, La structure et l'évolution de l'univers, Brussels, 1958.
62. Lichnerowicz A., Théories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme, Paris, 1955.
63. Fourès-Bruhat Y., Journ. Rat. Mech. Anal., **4**, 951 (1956).
64. Bergmann P. G., Komar A., Rep. at the Royaumont Conference of 1959. (См. перевод в сборнике «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, 1961.)
65. Dyson F. J., Lecture Notes on Quantum Electrodynamics (photolithographed notes), Cornell University Ithaca, New York, 1954.

66. Welton T., Phys. Rev., **74**, 1157 (1948). (См. перевод в сборнике «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950.)
67. Kramers H. A., Non-relativistic quantum electrodynamics and correspondence principle, Solvay Congress, 1948 (Rapport et Discussions, Bruxelles, 1950).
68. Thirring W., Principles of Quantum Electrodynamics, New York, 1958.
69. Poincaré H., Rendiconti Palermo, **21** (1906). (См. перевод в сборнике «Принцип относительности», М.—Л., 1935.)
70. Lorentz H. A., Versl. Kon. Ac. Amsterdam, **26**, 981 (1917).
71. Pais A., Developments in the Theory of the Electron, Princeton, 1948.
72. Wheeler J. A., Ann. of Phys., **2**, 604 (1957). (См. Дополнение II к настоящей книге.)
73. Weyl H., Philosophy of Mathematics and Natural Science, Princeton, 1949, p. 91.
74. Everett III H., Rev. Mod. Phys., **29**, 454 (1957).
75. Wheeler J., Rev. Mod. Phys., **29**, 463 (1957).
76. Bohr N., Rosenfeld L., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-fys. Medd., **12**, № 8 (1933).
77. Källén G., Handbuch der Physik, Bd., **5**, pt. 1, Berlin, 1958.
78. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М., ДАН СССР, **95**, 497 (1954).
79. Иваненко Д., Nuovo Cimento, Suppl., **6**, 349 (1957).
80. Иваненко Д., в сборнике «Max Planck Festschrift», 1958, стр. 353.
81. Pauli W., Helv. Phys. Acta, Suppl., **4**, 267 (1956).
82. Deser S., Rev. Mod. Phys., **29**, 417 (1957).
83. Merrifield R. E., Journ. Chem. Phys., **31**, 522 (1959).
84. Иваненко Д., Phys. Zs. der Sowjetunion, **13**, 141 (1938).
85. Соколов А., Иваненко Д., Квантовая теория поля, ч. II, М.—Л., 1952, § 3.
86. Heisenberg W., Rev. Mod. Phys., **29**, 269 (1957). (См. перевод в сборнике «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, 1959.)
87. Heisenberg W., Padua — Venice Conference, Oct. 1957.
88. Heisenberg W., Leipziger Vortrag, April 1958.
89. Düerr H. P., Heisenberg W., Mitter H., Schlieder S., Yamazaki K. Zs. f. Naturforsch., **14a**, 441 (1959). (См. перевод в сборнике «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, 1959.)

90. Feynman R. P., Ph. D. Thesis, Princeton, 1942; Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948).
91. Polkinghorne J. C., Proc. Roy. Soc., **A230**, 272 (1955).
92. Choquard P., Helv. Phys. Acta, **28**, 89 (1955).
93. Jordan P., Ergeb. exakt. Naturwiss., **7**, 158 (1928).
94. Jordan P., Zs. f. Phys., **105**, 229 (1937).
95. Jordan P., Kronig R., Zs. f. Phys., **100**, 569 (1936).
96. Kronig R., Physica, **3**, 1120 (1936).
97. Сборник «L. de Broglie, Physicien et Penseur», Paris, 1953.
98. Pryce M. H. L., Proc. Roy. Soc., **165A**, 247 (1938).
99. Heisenberg W., Lectures at Cavendish Laboratory, Cambridge, 1934, неопубликовано.
100. Bethe H. A., Bacher R. F., Rev. Mod. Phys., **8**, 201 (1936). (См. перевод: Бете Г., Бечер Р., Физика ядра, Харьков, 1938.)
101. Gamow G., Teller E., Phys. Rev., **51**, 289 (1937); Gamow G., Phys. Rev., **71**, 550 (1947).
102. Corben H. C., Nuovo Cimento, **10**, 1485 (1953).
103. Bocchieri P., Gulmanelli P., Nuovo Cimento, **5**, 1016 (1957).
105. Gulmanelli P., Montaldi E., Nuovo Cimento, **5**, 1716 (1957).
106. Kawaguchi M., Nuovo Cimento, **8**, 506 (1958).
107. Fierz M., Pauli W., Helv. Phys. Acta, **12**, 297 (1939).
108. Takabayasi T., Proc. Theor. Phys., **8**, 143 (1952); **9**, 187 (1953).
109. Whittaker E., Proc. Roy. Soc., **A158**, 38 (1937).
110. Singe J. L., Proc. Edinb. Math. Soc., **11**, 39 (1958).
111. Bohm D., Schiller R., Tiomno J., Nuovo Cimento, Suppl., **1**, 48 (1955).
112. Imaeda K., Progr. Theor. Phys. Japan, **5**, 133 (1950).
113. Touschek B. F., Nuovo Cimento, **5**, 1281 (1957).
114. Salam A., Nuovo Cimento, **5**, 299 (1957). (См. перевод в сборнике «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957.)
115. Иваненко Д., Бродский А., ЖЭТФ, **33**, 910 (1957).
116. Riesz M., L'équiation de Dirac en relativisté générale, Lund. Univ. Math. Sem., **12** (1954).
117. Riesz M., Compt. Rend. du douzième congrès des mathématiciens Scandinaves tenu à Lund (10—15 Août 1953), 241 (1954).

118. Casimir H. B. G., Rotation of a Rigid Body in Quantum Mechanics, The Hague, 1931.
119. Wigner E. P., Group Theory and Its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, New York—London, 1959. (См. перевод: Вигнер Е., Теория групп, ИЛ, 1961.)
120. Laurent B. E., International Conference on Relativistic Theories of Gravitation, Royaumont, 28 June 1959.
121. Finkelstein D., Misner C. W., Ann. of Phys., **6**, 230 (1959); International Conference on Relativistic Theories of Gravitation, Royaumont, 30 June 1959.
122. Bade W. L., Jehle H., Rev. Mod. Phys., **25**, 714 (1953).
123. Фок В., Иваненко Д., Compt. Rend., **188**, 1470 (1929).
124. Фок В., Zs. f. Phys., **57**, 261 (1929).
125. Bergmann P. G., Phys. Rev., **107**, 624 (1957).
126. Fletcher J. G., Nuovo Cimento, **8**, 451 (1958).
127. Bargmann V., Sitz. Ber. preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Klasse, 346 (1932).
128. Klauder J. R., The Action Option and a Feynman Quantization of Spinor Fields in Terms of Ordinary *c*-Number, Ph. D. Thesis, Princeton, 1959.
129. Symanzik K., Zs. f. Naturforsch., **9a**, 809 (1954).
130. Klauder J. R., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **29**, 516 (1957).
131. Feynman R. P., Gell-Mann M., Phys. Rev., **109**, 193 (1958). (См. перевод в сборнике «Проблемы современной физики», № 4 (1958).)
132. Breit G., Wheeler J. A., Phys. Rev. **46**, 1087 (1934).
133. Ахиезер А. И., Phys. Zs. der Sowjetunion, **11**, 263 (1937).
134. Toll J. S., The Dispersion Relation for Light und Its Application to Problems Involving Electron Pairs, Ph. D. Thesis, Princeton, 1952.
135. Toll J. S., Wheeler J. A., Phys. Rev., **81**, 654 (1951).
136. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev. Lett., **4**, 307 (1960).
137. Kofoed-Hansen O., Gatto R., Rendiconti S. I. F., XI, 1960, 251.
138. Kofoed-Hansen O., Gatto R., Rendiconti S. I. F., 1960, p. 336.
139. Klein O., Nature, **161**, 897 (1948).
140. Puppi G., Nuovo Cimento, **8**, 587 (1948).
141. Tiomno J., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **21**, 144 (1949).

142. Lee T. D., Rosenbluth M. N., Yang C. N., Phys. Rev., **75**, 905 (1949).
143. Sudarshan E. C. G., Marshak R. E., Phys. Rev., **109**, 1860 (1958).
144. Wollan E. O., Phys. Rev., **72**, 445 (1947).
145. Ronzio A. R., Cowan C. L., Reines F., Rev. Sci. Instr., **29**, 146 (1958).
146. Methods of Experimental Physics, vol. 5, ed. by L. C. Yuan, C. S. Wu, New York, в печати.
147. Reines F., Cowan C. L., Phys. Rev., **92**, 830 (1953).
148. Reines F., Cowan C. L., Phys. Today, **10**, 12 (1957).
149. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **105**, 1671 (1957).
150. Davis R., Jr., Phys. Rev. **97**, 766 (1955); Bull. Am. Phys. Soc., № 4, UA5 (1956).
151. Allen J. A., The Neutrino, Princeton, 1958. (См. перевод: Аллен Дж., Нейтрино, ИЛ, 1960.)
152. Иваненко Д., Соколов А., Вестник Московского университета, № 8 (1947)
153. Соколов А. А., Вестник Московского университета, № 9 (1952).
154. Иваненко Д., Бродский А., ДАН СССР, **92**, 731 (1953).
155. Иваненко Д., Соколов А., Классическая теория поля, М., 1951, § 56.
156. Пнйр И., Теоретические работы институтa физики и астрономии Эстонской Академии наук, Тарту, 1957.
157. Wu C. S., в сборнике «Theoretical Physics of XX Century», New York — London.
158. Weber J., Phys. Rev., **117**, 306 (1960). (См. перевод в сборнике «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, 1961.)
159 Klauder L., Willey R., Wheeler J. A., в сборнике «La structure et l'evolution de l'univers», Bruxelles, 1958.
160. Field G. B., Astrophys. Journ., **129**, 536 (1959).
161 Wakano M., Wheeler J. A., в сборнике «La structure et l'evolution de l'univers», Bruxelles, 1958.
162. Teller E., Phys. Rev., **73**, 801 (1948).
163. Dicke R. H., Rev. Mod. Phys., **29**, 363 (1957).
164. Oppenheimer J. R., Volkoff G. M., Phys. Rev., **55**, 379 (1939).
165. Ландау Л. Д., Phys. Zs. der Sowjetunion, **1**, 285 (1932).
166. Einstein A., Essays in Science, New York, 1934.

ДОПОЛНЕНИЯ

I. КЛАССИЧЕСКАЯ ФИЗИКА КАК ГЕОМЕТРИЯ

ГРАВИТАЦИЯ, ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ, НЕКВАНТОВАННЫЕ ЗАРЯД И МАССА КАК СВОЙСТВА ИСКРИВЛЕННОГО ПУСТОГО ПРОСТРАНСТВА [1])

Ч. Мизнер и Дж. Уилер

C. Misner and J. Wheeler, Ann. of Phys., 2, No. 6, 525—603 (1957)

Если классическую физику рассматривать как совокупность теорий гравитации, свободного от источников электромагнитного поля, неквантованного заряда и неквантованной массы, связанной с концентрацией энергии электромагнитного поля (геонов), то классическая физика может быть описана с помощью искривленного пустого пространства и ничего больше. При этом существующая теория никак не меняется. Электромагнитное поле задается «максвелловским квадратным корнем» свернутого тензора кривизны Риччи и Эйнштейна. Как показал Райнич тридцать лет назад, уравнения Максвелла сводятся тогда к простому утверждению о связи кривизны Риччи со скоростью ее изменения. В противоположность другим единым теориям поля в этом случае обычные теории Максвелла и Эйнштейна приводят к «*исконно* единой теории поля». Детально рассматривается это чисто геометрическое описание электромагнетизма. Заряд получает естественную интерпретацию с помощью электромагнитных полей без источников, которые 1) всюду подчиняются уравнениям Максвелла для пустого пространства, но 2) загнаны в «ручки» пространства с многосвязной топологией. В таком пространстве электромагнетизм может быть подробно описан с помощью существующих и весьма полно разработанных разделов математики — топологии и теории гармонических векторных полей. Элементарные частицы и «реальные массы» полностью исключены из рассмотрения как относящиеся к области квантовой физики.

---

[1]) Настоящая работа представляет собой шестую часть исследования, посвященного критике классической теории поля. Пятая часть опубликована в журнале Physical Review [97, 51 (1956)].

«Я передаю, но не творю;
я искренне уважаю древность».

Конфуций

I. ВВЕДЕНИЕ

ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ КОНТИНУУМ ЛИШЬ АРЕНОЙ ДЛЯ ЯВЛЕНИЙ ИЛИ ИМ ИСЧЕРПЫВАЕТСЯ ВСЕ? КЛАССИЧЕСКАЯ ФИЗИКА КАК СОВОКУПНОСТЬ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ, ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА, НЕКВАНТОВАННЫХ ЗАРЯДА И МАССЫ. ВСЕ ЭТИ ЧЕТЫРЕ ПОНЯТИЯ ОПИСЫВАЮТСЯ С ПОМОЩЬЮ ПУСТОГО ИСКРИВЛЕННОГО ПРОСТРАНСТВА БЕЗ КАКИХ-ЛИБО ДОБАВЛЕНИЙ К ПРИНЯТОЙ ТЕОРИИ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ КАК «МАКСВЕЛЛОВСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ» ОТ СВЕРНУТОЙ КРИВИЗНЫ. НЕКВАНТОВАННЫЙ ЗАРЯД ОПИСАН С ПОМОЩЬЮ МАКСВЕЛЛОВСКОГО ПОЛЯ БЕЗ ИСТОЧНИКОВ В МНОГОСВЯЗНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. НЕКВАНТОВАННАЯ МАССА СОПОСТАВЛЯЕТСЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ, УДЕРЖИВАЕМОГО КАК ОДНО ЦЕЛОЕ ЕГО СОБСТВЕННЫМ ГРАВИТАЦИОННЫМ ПРИТЯЖЕНИЕМ. ИСТОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТРАКТОВКИ ФИЗИКИ. РЕЗЮМЕ СТАТЬИ.

Имеются две прямо противоположные точки зрения на сущность физики:

1) Пространственно-временной континуум служит лишь *ареной* проявления полей и частиц. Эти последние сущности чужды геометрии. Их следует добавить к геометрии для того, чтобы вообще можно было говорить о какой-либо физике.

2) В мире нет ничего, кроме пустого искривленного пространства. Материя, заряд, электромагнетизм и другие поля являются лишь проявлением искривления пространства. *Физика есть геометрия.*

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы понять, в какой степени классическую физику можно рассматривать как геометрию. Здесь не будет идти речь о замечательном результате [1]) квантования этой чисто классической «геометродинамики» (см. табл. 1).

Описывая классическую физику как геометрию (в смысле табл. 1), мы не изобретаем новых идей. Мы опираемся на электродинамику Максвелла 1864 г. для пустого пространства, на его формулировку тензора энергии — импульса — натяжений электромагнитного поля и

[1]) Частичное обсуждение некоторых аспектов этой проблемы см. в работах Мизнера [1] и Уилера [2].

Таблица 1

Различие между классической и квантовой физикой в свете настоящей работы [1])

Разделы классической физики в определении настоящей работы	Описание с точки зрения геометрии пустого искривленного пространства	Описание с точки зрения квантовой физики, не рассматриваемой в данной работе
Гравитация	Проявляется в искривлении геодезических линий в римановом пространстве	Гравитоны; фотоны; спин; нейтрино; *квантование* заряда; *квантование* массы; электроны, мезоны и другие частицы; характерные поля с ненулевой массой покоя, по-видимому связанные с некоторыми из этих частиц; процессы взаимопревращений частиц, а также все явления, при которых квантовые флуктуации метрики существеннее, чем любые статические гравитационные поля
Электромагнетизм	Определяется кривизной и быстротой ее изменения в том же самом римановом пространстве (см. фиг. 2)	
Неквантованный заряд	Проявление силовых линий, заключенных в „ручку", образованную многосвязной топологией (см. фиг. 3)	
Неквантованная масса	Геоны: метастабильное объединение энергии электромагнитных или гравитационных волн, сдерживаемое воедино своим собственным гравитационным притяжением	
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ *см*^{3}/*г* · *сек*^{2} и c не определяют никаких характерных длины, массы или времени. Напряженность электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ [в гауссах, электростатических вольтах на 1 *см* или (*г*/*см* · *сек*^{2})$^{1/2}$] преобразуется в чисто геометрические величины $f_{\mu\nu}$ (размерности *см*$^{-1}$) при умножении на $G^{1/2}/c^2 = 1/3{,}49 \cdot 10^{24}$ *гаусс* · *см*.		G, c и $\hbar$ определяют характерные единицы, введенные впервые Планком: $L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1{,}63 \cdot 10^{-33}$ *см*; $T^* = L^*/c$ и $M^* = (\hbar c/G)^{1/2} = 2{,}18 \cdot 10^{-5}$ *г*.

[1]) Неквантованные классические заряд и масса, упоминаемые в данной таблице, не имеют *непосредственного* отношения ни к каким элементарным массам и зарядам, известным из области квантовой физики.

на эйнштейновское описание гравитационного поля (1916 г.) с помощью искривленного пространства. Ограничиваясь классическими понятиями (табл. 1), мы берем в качестве источников метрического поля $g_{\mu\nu}$ *исключительно* электромагнитное поле $F_{\alpha\beta}=(c^2/G^{1/2})f_{\alpha\beta}$, и притом такое электромагнитное поле, которое само *не имеет никаких источников* [1]):

$$(3!)^{-1}[\alpha\beta\gamma\delta]\frac{\partial f_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}}=0 \text{ (одна группа уравнений Максвелла)}, \quad (1)$$

$$(-g)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(-g)^{1/2}f^{\alpha\beta}=0 \text{ (другая их группа)}, \quad (2)$$

$$\text{„}\Box g_{\alpha\beta}\text{“}\equiv R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=2f_{\alpha\delta}f^{\delta}_{\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(f_{\sigma\tau}f^{\sigma\tau}) \text{ (кривизна метрики при наличии максвелловской плотности энергии-импульса-натяжений).} \quad (3)$$

---

[1]) Мы используем следующие обычные обозначения: греческие индексы относятся к 4-мерному пространству; латинские индексы — к 3-мерному. Четвертая координата x^0 ($=T=ct=$«ковремя» в плоском пространстве) берется с индексом 0 для предотвращения недоразумений, так как в специальной теории относительности x^4 обозначает ict. Собственный интервал длины ds или собственный интервал ковремени $d\tau$ между двумя соседними событиями определяется как

$$(ds)^2=-(d\tau)^2=g_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta}.$$

В плоском пространстве и в декартовых координатах метрический тензор имеет диагональный вид, и его диагональные элементы равны соответственно -1, 1, 1, 1. В этой статье часто используются пространственно-подобные гиперповерхности, на которых удобнее вводить положительно определенную метрику, к чему и приводит настоящий ее выбор (см. также монографии Паули, Ландау и Лифшица, Яуха и Рорлиха). Детерминант $|g_{\alpha\beta}|$ метрики в 4-пространстве обозначается через g, а детерминант $|g_{ik}|$ метрики на пространственно-подобной гиперповерхности — через ${}^3g$. Среди других важных величин следует упомянуть коэффициенты связности

$$\Gamma_{\alpha\beta,\,\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right);$$

имеющий двадцать различных компонент тензор кривизны Римана $R_{\mu\nu\sigma\tau}$

$$R^{\mu}_{\nu\sigma\tau}=\frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}}{\partial x^{\tau}}+\Gamma_{\sigma\eta}{}^{\mu}\Gamma_{\nu\tau}{}^{\eta}-\Gamma_{\tau\eta}{}^{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\eta};$$

Эти уравнения описывают электромагнетизм и гравитацию как самосогласованную, но замкнутую динамическую систему.

Решим уравнения (3) для приведенного электромагнитного поля $f_{\sigma\tau}$, выразив его через свернутый тензор кривизны $R_{\alpha\beta}$. Подставим полученные выражения в уравнения Максвелла. Тогда содержание уравнений Максвелла — Эйнштейна выразится *чисто геометрически*. Эта программа была реализована Райничем в важной

симметричиый теизор Риччи или свернутый теизор Римаиа

$$R_{\mu\sigma} = R_{\mu\ \alpha\sigma}^{\ \alpha};$$

инвариант кривизны $R = R_\alpha^\alpha$ (скалярную кривизну); обобщение оператора Даламбера для гравитациониых потенциалов

$$\Box g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

и, наконец, электромагнитные потеициалы A_α, связаниые с тензором электромагнитиого поля соотиошеиием

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}.$$

Символ преобразования дуальности, который часто пишется в виде $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, ие является тензором и обозиачается здесь как $[\alpha\beta\gamma\delta]$. Он меняет знак при перестановке любых двух индексов, причем его компоиеита [0123] равна единице. Теизор $(*F)_{\mu\nu}$, дуальный антисимметричному теизору $F_{\alpha\beta}$, оиределеи соотношением

$$(*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (-g)^{1/2} [\mu\nu\sigma\tau]\, g^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta} F_{\alpha\beta}.$$

Геометризоваиным иапряженностям электромагнитного поля $f_{\alpha\beta} = (G^{1/2}/c^2) F_{\alpha\beta}$ сопоставляются геометризованные электромагнитные потенциалы $a_\alpha = (G^{1/2}/c^2) A_\alpha$, являющиеся безразмерными. В плоском пространстве и в декартовых координиатах:

$dx^1 = dx_1$ — сдвиг в направлении оси x,
$dx^0 = -dx_0$ — иитервал ковремеии,
$A^1 = A_1$ — x-компонента обычного векториого потенциала,
$A^0 = -A_0$ — обычный скалярный потенциал V (в едииицах CGSE),
$F_{23} = -F_{32}$ — x-компоиента магнитного поля,
$F_{10} = -F_{01}$ — x-компоиента электрического поля.

работе [3][1]), которая оставалась долгое время незамеченной. Результат этот прост.

1) Симметричный тензор Риччи $R_{\alpha\beta}$ может быть определен, согласно уравнению (3), как «максвелловский квадрат» антисимметричного тензора $f_{\sigma\tau}$ в том и только в том случае, если этот тензор (фиг. 1), во-первых, имеет след, равный нулю, и, во-вторых, квадрат его пропорционален единичной матрице

$$R \equiv R^{\alpha}_{\alpha} = 0, \tag{4}$$

$$R^{\beta}_{\alpha} R^{\gamma}_{\beta} = \delta^{\gamma}_{\alpha} \left(\frac{R_{\sigma\tau} R^{\sigma\tau}}{4} \right). \tag{5}$$

Поэтому мы требуем, чтобы тензор Риччи удовлетворял этим условиям.

2) В этом случае свернутый тензор кривизны однозначно с точностью до некоторого произвольного угла α определяет локальное значение приведенного электромагнитного тензора напряженности $f_{\sigma\tau}$. Символически эту связь можно выразить в форме [2])

$$f_{\sigma\tau} = (R_{\text{Максв. корень}})_{\sigma\tau} \cos\alpha + (* R_{\text{Максв. корень}})_{\sigma\tau} \sin\alpha. \tag{6}$$

3) В уравнения Максвелла подставляется выражение для напряженности электромагнитного поля через кривизну Риччи. Начиная с этого момента, законы электродинамики приобретают чисто геометрический характер.

---

[1]) Даже в более поздней книге Райнича [4] эта работа не учтена прежде всего ввиду его подхода к классической физике, отличного от исследуемого в настоящей статье. Мы занялись проблемой выражения уравнений (1) — (3) в рамках «исконно единой теории», и один из нас (Ч. Мизнер) независимо пришел к результатам Райнича, еще не зная о его ценном исследовании. Возможность построения такой «исконно единой теории» была нам впервые подсказана д-ром Х. Эвереттом.

[2]) Мы выражаем нашу признательность профессору В. Баргману, который два года назад обратил наше внимание на уравнения (5) и (6), заметив, что их содержание было независимо обнаружено различными исследователями, и выразил его сущность в изложенной выше исключительно простой форме. Первоначальное доказательство было дано самим Райничем [3]. Этот результат неявно фигурирует в теореме V в работе Синга [5] (см. также книгу Синга [6], статью Боннора [7] и диссертацию Л. Марио́ [8], за которую мы выражаем признательность Л. Марио́).

Фиг. 1. Упрощение рассмотрения тензора энергии-импульса-натяжений при переходе к локально лоренцовой системе отсчета, в которой вектора E и H параллельны (см. примечание 1 на стр. 52).

Слева — векторы напряженности электрического и магнитного полей в исходной системе отсчета. Читателю предлагается вычислить поток энергии $c\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]/4\pi$, плотность энергии $(E^2+H^2)/8\pi$ и их отношение — скорость v. *Справа* — конфигурация полей в системе координат, движущейся с этой скоростью. Поток энергии должен обращаться в нуль. Поэтому $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ будут параллельны. Назовем их общее направление осью x'. Вдоль этой оси существует максвелловское натяжение $(E'^2+H'^2)$, а вдоль двух перпендикулярных ей осей y' и z' — столь же сильное максвелловское давление. Поэтому тензор энергии-импульса-натяжений имеет вид

$$\frac{F'^2}{8\pi}\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix},$$

где F'^2 — сокращенная запись инварианта

$$F'^2=E'^2+H'^2=\left[(E'^2-H'^2)^2+4\,(\mathbf{E}'\cdot\mathbf{H}')^2\right]^{1/2}=$$
$$=\left[(E^2-H^2)^2+4\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2\right]^{1/2}=\left[(E^2+H^2)^2-4\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H})^2\right]^{1/2}.$$

Этот тензор обладает двумя важными свойствами: 1) его след равен нулю и 2) квадрат его пропорционален единичной матрице. Оба свойства не зависят от выбора координатной системы. Они выполняются независимо от того, является ли тензор Максвелла диагональным или нет.

Рассмотрим теперь, наоборот, вещественный симметричный тензор, обладающий свойствами (1) и (2). Можно найти координатную систему с выделенным направлением x', в которой этот тензор приводится к указанной выше диагональной форме. В частности, сразу же можно найти инвариантную величину напряженности поля

$$F'=\left[\frac{(8\pi\cdot\text{Тензор Максвелла})^2}{(\text{Единичная матрица})}\right]^{1/4}.$$

Затем следует выбрать произвольный угол α и *определить* векторы $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$, направленные вдоль выбранной оси x' и обладающие абсолютной величиной

$$E'=F'\sin\alpha,\quad H'=F'\cos\alpha.$$

Векторы $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ определены однозначно с точностью до единственного произвольного параметра α. Преобразуем определенное таким образом электромагнитное поле к исходной системе отсчета. Для этого поля максвелловский подход к тензору натяжений приводит к симметричному выражению, с которого мы начали это рассуждение.

Эти рассуждения теряют силу, когда электромагнитное поле является нулевым, когда вектор E перпендикулярен H и по абсолютной величине равен H; однако утверждение в тексте все же остается справедливым.

Во-первых, с помощью производной тензора Риччи мы строим вектор a_τ, *определяемый* соотношением

$$a_\tau = (-g)^{1/2}\,[\tau\lambda\mu\nu]\,R^{\lambda\beta;\,\mu}\,\frac{R^{\nu}_{\beta}}{R_{\gamma\delta}R^{\gamma\delta}}. \qquad (7)$$

(В случае нулевого поля, когда $R_{\gamma\delta}R^{\gamma\delta}$ обращается в нуль, необходим особый подход.) Во-вторых, мы требуем обращения в нуль ротора этого вектора:

$$a_{\tau;\,\eta} - a_{\eta;\,\tau} = a_{\tau,\,\eta} - a_{\eta,\,\tau} = 0. \qquad (8)$$

4) Дифференциальное уравнение (8) *в совокупности с алгебраическими уравнениями* (4) *и* (5) *содержит во вполне геометрической форме как всю электродинамику Максвелла в искривленном пространстве без источников, так и законы Эйнштейна искривления пространства этим полем.* Уравнения (4), (5) и (8) составляют то, что мы называем «*исконно* единой теорией». Электрическое и магнитное поля не являются стимулами для *изобретения* единой теории поля или введения того или иного нового типа геометрии. «*Исконно* единая теория поля» Максвелла, Эйнштейна и Райнича, изложенная в настоящей работе, описывает электрическое и магнитное поля через скорость изменения кривизны чисто римановой геометрии и ничего более.

Сущность этого объединения может быть следующим образом выражена математически: уравнения Максвелла, как и уравнения Эйнштейна, являются уравнениями 2-го порядка; две системы уравнений могут быть объединены в одну систему уравнений (8) 4-го порядка. Физически это означает, что электромагнитное поле оставляет *отпечаток* [1]) на метрике, и этот отпечаток настолько характерен (фиг. 2), что по нему можно прочесть все необходимые сведения об электромагнитном поле.

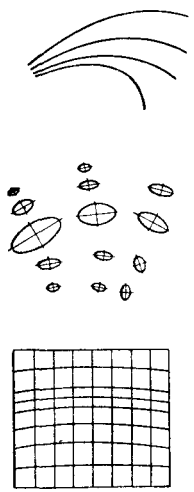
В случае если задано чисто метрическое поле, удовлетворяющее уравнениям (4), (5) и (8) исконно единой теории поля, электромагнитное поле можно найти следующим образом. Во-первых, вычислим всюду вектор электромагнитного поля a_μ, согласно (7).

[1]) Этим выражением мы обязаны профессору П. Бергману.

Во-вторых, вычислим, исходя из некоторой точки 0, интеграл

$$\alpha(x) = \int_0^x \alpha_\mu dx^\mu + \alpha_0. \tag{9}$$

Так как ротор α_μ равен нулю, интеграл не зависит от пути, поскольку различные пути могут быть переведены друг в друга непрерывным образом. (Для многосвязного пространства необходимо новое рассмотрение.) Поэтому мы имеем безразмерное число или угол α, определенный как функция точки с точностью до аддитивной *постоянной* α_0. Наконец, подставляем этот угол в соотношение (6) и находим электрическое и магнитное поле в любой точке пространства.



Фиг. 2. Схематическое представление связи между электромагнитным полем и геометрией.

Вверху изображены силовые линии. *Посередине* — тензор натяжений Максвелла, соответствующий этим силовым линиям. Этот тензор натяжений служит источником гравитационного поля и, согласно Эйнштейну, равен свернутому тензору кривизны пространственно-временно́го континуума с точностью до постоянного множителя. *Внизу* — влияние этой кривизны на метрику 4-пространства. Иначе говоря, электромагнитное поле накладывает свой отпечаток на пространство. Более того, этот отпечаток на метрике так своеобразен и характерен, что может служить для обратной операции восстановления всех необходимых сведений об электромагнитном поле. Отсюда следует чисто геометрическое описание электромагнетизма.

Мы видим, что давно уже сформулированная теория оказывается хорошо приспособленной для описания гравитации и электромагнетизма с помощью пустого искривленного пространства. Как же обстоит дело с зарядом?

Эйнштейн подчеркивал, что уравнения электромагнетизма и общей теории относительности имеют чисто локальный характер. Они связывают условия в одной точке с условиями в другой, бесконечно близкой к ней

точке. Они ничего не говорят о топологии пространства в целом. Эйнштейн [9] руководствовался принципом Маха при рассмотрении пространства, топологически не эквивалентного эвклидову, — сферического или почти сферического мира. Однако Эйнштейн чувствовал себя в долгу перед мыслителем, обладавшим еще более далеко идущими идеями. Риман [1]) в своей знаменитой вступительной лекции рассмотрел связь между физикой и кривизной пространства — связь, которая должна чувствоваться не только на очень больших расстояниях, но также и на очень малых расстояниях: «...мера кривизны может обладать тогда в каждой точке любым значением в трех направлениях при том лишь условии, чтобы полная кривизна любой измеримой части пространства не отличалась заметно от нуля;...». Умирая двадцатью годами позднее от туберкулеза и пытаясь дать единое объяснение гравитации и электромагнетизму, Риман сообщил Бетти свою систему рассмотрения топологии многосвязных пространств [2]). Каков же характер элек-

[1]) Во вводной части своей лекции [10] Риман заявил, что «те свойства, которые выделяют пространство из других мыслимых трехмерных величин, могут быть почерпнуты не иначе, как из опыта» (цитировано по статье Клиффорда в работе [11]).

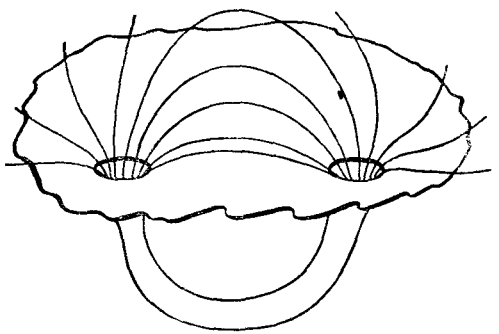
[2]) Вейль [12] подчеркивает, что уравнения поля никак не могут служить для исключения ни многосвязных, ни неориентируемых пространств, подобных бутылке Клейна. Он отмечает, «что более внимательное исследование поверхности, возможно, обнаружит у участка, рассматривавшегося ранее элементарным, наличие в действительности мельчайших выступающих из него «ручек», изменяющих характер связности этого участка, и что микроскоп с бо́льшим увеличением открыл бы и новые топологические усложнения этого типа, *ad infinitum*. Точка зрения Римана допускает также и для реального пространства существование топологических условий, полностью отличных от условий, реализуемых в эвклидовом пространстве. Я полагаю, что философски плодотворный подход к проблеме пространства может быть осуществлен лишь с позиций более свободных и общих геометрических представлений, возникших при развитии математики в течение последнего столетия, и без предвзятого мнения в отношении воображаемых возможностей, обнаруженных при этом развитии». Эйнштейн и Розен [13] предложили в 1935 г. рассматривать обычное пространство связанным со своим зеркальным двойником посредством коротких трубок. Такая топология значительно более специальна, чем рассмотренная здесь или в следующей статье [2]. Эйнштейн и Розен вопреки эксперименту приписали также электромагнитному полю *отрицательно-*

тродинамики при отсутствии зарядов в пространстве, обладающем такой многосвязной топологией?

Можно развить полную классификацию всюду регулярных начальных условий для уравнений Максвелла в замкнутом пространстве. Этот анализ *приводит* к необходимости рассмотреть также ситуации — подобные описанной одним из нас [14] (фиг. 3), — когда имеется суммарный поток силовых линий через ручку в многосвязном пространстве [этот термин употребляют топологи; для физиков в этом случае было бы нагляднее пользоваться более ярким термином — «кротовая нора» (wormhole)]. Поток силовых линий, исходящий из горловины небольшой ручки, покажется наблюдателю, располагающему малой разрешающей силой приборов, порожденным элементарным электрическим зарядом. Но здесь нет никакой точки, где можно было бы указать: «Вот здесь локализован некоторый заряд [1])». Силовые линии нигде не кончаются. Этот факт нулевой дивергенции ни в какой мере не препятствует изменениям напряженности поля. Силовые линии, не захваченные в ручки, могут непрерывно сжиматься и исчезнуть, как и в знакомых примерах в электродинамике. Однако заключенные в ручки силовые линии не могут уменьшаться в числе. Поток из горловины ручки не может измениться со временем, как бы сильны ни были возмущения электромагнитного поля, как бы резко ни менялась метрика и как бы стремительно ни удалялись или сближались соответствующие ручки, до тех пор пока они не сольются и не изменится топология. И уравнения Максвелла, и эквивалентная им физическая картина силовых линий Фарадея плюс представление о многосвязном пространстве приводят нас к заключению о неизменности потока через ручку. *Эта константа движения представляет заряд.*

определеиную плотность энергии. Мы узнали, что профессор Синдж также отметил иа одной из лекций в Дублине в 1947 г. возможность существования многосвязного пространства.

[1]) В 1895 г. известный физик Генри А. Роуланд сказал: «...более не существует электричества, так как слово «электричество», как оно использовалось до сего времени, означает, что подразумевается некоторая субстанция, а ведь нет ничего определеннее того факта, что электричество не есть субстанция». (Цитировано по Дарроу [15].) Его слова как раз кстати в нашем случае!



Фиг. 3. Символическое представление неквантованного заряда в классической теории.

Для наглядности вместо трех пространственных измерений даны два. Вместе с тем двумерное искривленное и многосвязное пространство изображено включенным в трехмерное эвклидово пространство. Выходящее за пределы поверхности третье измерение не имеет физического смысла. Конечно, топология и геометрия 2-пространства наилучшим образом формулируется замкнутым образом, без такого вложения этого многообразия в пространство более высокого числа измерений. Это 2-пространство многосвязно, но не обладает никакими особенностями. Воображаемый муравей, ползая по этой поверхности, проникает в туннель (или ручку) и обнаруживает там то же самое двумерное пространство, которое встречалось ему во всех других местах. Электрические силовые линии, сходящиеся у правого входа в туннель, продолжают удовлетворять в каждой точке уравнению Максвелла div $\mathbf{E}=0$. Поле нигде не имеет особенностей, а силовые линии неизбежно продолжают углубляться в туннель. Затем они выходят из левого его отверстия. Вне туннеля ход силовых линий воспроизводит картину поля, создаваемого равными друг другу положительным и отрицательным зарядами.

Наблюдатель, не вооруженный микроскопом с достаточным увеличением, считает очевидным существование двух точечных зарядов. Он может даже окружить правый заряд границей, определить поток поля через нее, неправомерно применить теорему Гаусса и „доказать", что в ограниченной таким образом области содержится заряд. Он не заметит, что неявно использовал неправильные предположения о топологии пространства. Он не узнает, что его „граница" не ограничивает какую-либо область внутри нее. Он будет считать, что либо уравнения Максвелла теряют смысл вблизи заряда, либо существует некоторое чудесное вещество, на котором заканчиваются силовые линии и которому он даст название „электричество". Но более внимательное рассмотрение обнаружит, что силовые линии не имеют конца и что уравнения Максвелла справедливы в свободном от зарядов пространстве. Нельзя указать места, где расположен заряд. Такова чисто топологическая модель неквантованного электрического заряда, принятая в настоящей работе. Этот классический заряд не имеет *прямого* отношения к квантованному электрическому заряду. На этом классическом уровне имеет место полная свобода выбора величины заряда и нет никакого стандарта, касающегося связи одного заряда с другим. Это положение должно быть полностью изменено в любой собственно *квантовой* теории электричества.

Расстояние вдоль ручки от одной ее горловины до другой вовсе не должно быть каким-либо образом связано с расстоянием в открытом пространстве между этими двумя горловинами. Это расстояние может оказаться таким же коротким, как радиус самой ручки, даже если горловины очень удалены друг от друга во внешнем пространстве, как можно видеть сгибая верхнее пространство вплоть до совпадения этих двух горловин. (Диаграмма взята из работы [14].)

Заряд, или поток через ручку, является не квантованным. Он в равной степени может иметь то или иное значение и непосредственно не может быть связан с квантованным зарядом, наблюдаемым в квантовой физике у элементарных частиц. Подобное обстоятельство не может служить возражением против понятия классического неквантованного заряда. Это есть предупреждение о совершенно ином содержании понятия квантованного заряда. Такое различие не будет неприемлемым в то время, когда будет понято, как велико различие между «голым» и «одетым» зарядом в квантовой электродинамике (см., например, [16]). Поэтому не представляется безосновательным ограничить рассмотрение чисто классическим неквантованным зарядом, тем более в статье, посвященной классической физике (см. табл. 1).

Вокруг горловины ручки сконцентрировано электромагнитное поле, придающее *массу* этой части пространства. Масса возникает даже в односвязном пространстве, где с полем Максвелла, не имеющим источников, не будет связан заряд. Уравнения Максвелла и Эйнштейна предсказывают возможность существования долгоживущих концентраций электромагнитной энергии, или «геонов», удерживаемых собственным притяжением. Как в многосвязном пространстве, так и в односвязном континууме масса, с которой мы имеем дело, является классической, нелокализованной и неквантованной. Она не имеет ничего общего с квантованной массой элементарных частиц.

Можно дать несколько парадоксальное резюме этих рассуждений. Настоящая хорошо установленная исконно единая классическая теория [уравнения (4), (5), (8)] позволяет описывать с помощью пустого искривленного пространства

1) гравитацию без гравитации,
2) электромагнетизм без электромагнетизма,
3) заряд без заряда,
4) массу без массы.

Она *ничего* непосредственно не дает нам для понимания

5) спина без спина,
6) элементарных частиц без элементарных частиц и каких-либо других явлений квантовой физики. Однако

мы едва ли взялись бы за исследование классической геометродинамики, если бы не надеялись в конечном счете выяснить, какое отношение имеет *квантовая* геометродинамика к физике элементарных частиц (если она вообще имеет к ней отношение). Нашей конечной целью является выяснение вопроса о том, может ли квантовая физика, подобно классической (табл. 1), быть описана с помощью геометрии.

В наши дни не принято придерживаться крайних точек зрения — взгляда на пространство-время только как на арену явлений и на пространство-время как на все содержание физики. Одни разлагают состояния частиц и полей по плоским волнам, движущимся как чуждые элементы в заранее определенном плоском пространстве. В то же время другие рассматривают кривизну пространства, хотя и не равную точно нулю, но весьма малую на расстояниях, незначительных по сравнению с протяженностью Вселенной. Эйнштейновское геометрическое описание гравитации принимается всерьез. Его попытки геометрического описания электромагнетизма — путем видоизменения римановой геометрии — были признаны несовместимыми [17, 18] с хорошо проверенным законом силы Лоренца и отвергнуты. Считается, что частицы и поля, отличные от гравитации, должны добавляться к геометрии, но не выводиться из геометрии. Можно сказать, что природа описывается в наши дни смешанным образом: частично с помощью чистой геометрии, частично с помощью чуждых геометрии сущностей.

Однако логическая крайность — мысль о чисто геометрическом описании природы — не была новой идеей даже до того времени, когда вообще могли различать квантовую и классическую физику. Известный математик Клиффорд представил 21 февраля 1870 г. Кембриджскому философскому обществу статью «О пространственной теории материи», в которой он высказал предположение о том, что «в физическом мире не происходит ничего, кроме этого изменения (кривизны пространства), подчиняющегося (возможно) закону непрырывности»; далее он говорил о соображениях, «которые

указывают на возможность выражения расстояния или количества через *расположение* в широком смысле топологии, и затем вновь о конечном объеме пространства постоянной кривизны, но с явным упоминанием того обстоятельства, что «сделанные здесь предположения о связности пространства (лишь) простейшие» [19]. Был ли когда-либо до Эйнштейна, Клиффорда и Римана — и римановой геометрии — взгляд на физику, хоть чем-нибудь подобный представлению о физике как о геометрии? Каковы были взгляды Ньютона на теорию поля и на мысль о том, что пустое пространство является универсальным строительным материалом? Давно известно его письмо к Бентли: «Мне кажется до такой степени абсурдным положение, при котором одно тело может действовать на другое на расстоянии через вакуум, без посредства чего-либо иного, что я не верю, чтобы кто-нибудь, в достаточной степени способный мыслить на философские темы, мог поверить в это» [1]). Максвелл говорил: «Из его «Вопросов оптики» и его писем Бойлю мы видим, что Ньютон давно сделал попытку объяснить гравитацию давлением среды и что причина того, что он не опубликовал этих исследований «состоит лишь в том, что он не смог на основании опыта и наблюдений дать удовлетворительное объяснение этой среде и ее поведению при проявлении основных явлений природы».

Новый взгляд на идеи Ньютона и их происхождение содержится в недавних исключительно интересных исследованиях Фирца [21]. Фирц особо цитирует Патрицци [22], который пишет о пространстве и веществе: «Итак, пространство есть то, что было прежде мира и будет после него, что стоит во главе мира, из него исходит и, наконец, обращается в нечто... Разве оно тогда не является субстанцией? Если субстанция есть то, что лежит в основе, то пространство и есть скорее всего сущность (мира)». Некоторые песни древнеиндийских Вед [23] также позволяют предположить, что эта идея — идея о том, что природа черпает всю свою струк-

[1]) Эта и следующая цитаты взяты из заметок Кэджори [20].

туру и поведение из свойств пространства [1]) — очень стара.

Может ли пространство рассматриваться как изумительное творение, заключающее в себе все свойства? Попытаемся проанализировать эту идею независимо от её истоков, как древних, так и современных.

---

[1]) Профессор Г. Л. Чандратрейя обратил наше внимание на индийские Веды в связи с первыми идеями, относящимися к «физике как геометрии». В этой связи нам хотелось бы поблагодарить Свами Никхилананда, разъяснившего нам соответствующие тексты: «Согласно Ведам, акаша (*akasa*), часто переводимая как «пространство» или «эфир», является первым простейшим элемеитом, из которого развиваются другие элементы, а именно воздух, огонь, вода и земля. Единственными материальными элементами, упоминаемыми в Ведах, являются эти пять элементов. Индийские философы признавали пять элементов ввиду того обстоятельства, что человек имеет пять путей общения с внешним миром: слух, осязание, зрение, вкус и обоняние... (в связи с этим он ссылается на Taittiriya Upanishad II, i. 3.)». Таким образом, мы находим акаша в качестве первичного элемента в этом первоначальном, относящемся ко времени примерно 700 лет до н. э., наброске физики. (Брахмаи хотя и предшествовал акаша, но представляет собою чистый дух вне рамок физики.) Мы можем сказать, что в этой физике пространство было первичным элементом, из которого должно было появиться все прочее, если, конечно, мы сможем убедить себя в том, что акаша означало нечто подобное мировому пространству в обычном понимании. В этой связи мы обращаемся к уже упомянутому [23] наиболее авторитетному древиему комментатору Упанишад. Шанкарачария (788—820 гг. н. э) пишет: «Акаша является такой вещью, которая обладает свойством звучания и которая придает пространство всем телесным сущностям». Саяна далее разъясняет: «...способность акаша создавать пространство всем (телесным) вещам, является ее собственным специфическим свойством... И звук является ее свойством. Эхо, слышимое в горных пещерах и в прочих местах, предполагается присущим акаша, и поэтому говорится, что это есть свойство акаша». Если не считать странной ссылки на звук, то кажется, что эти объяснения подтверждают попытку отождествления акаша с пространством: физик мог бы написать — «пространство дает место всем вещам» вместо слов переводчика «акаша придает пространство всем вещам». Ссылка на звук понятна, если вспомнить о выборе пяти элементов в соответствии с пятью органами чувств. Шанкарачария пишет: «Отсюда, т. е. из акаша, находит свое бытие Вайю, воздух, обладающий двумя свойствами — своим особым свойством осязаемости и свойством звучания, принадлежащим уже входящей в него акаша». Было бы, пожалуй, чрезмерным ожидать, чтобы в такой глубокой древности люди знали, что звук передается через воздух, но не через пустое пространство. [О единстве материи см. Платона («Тимей»). — *Прим. ред.*]

В разделе II мы восстанавливаем в современных обозначениях уравнения Райнича исконно единой теории поля. Исходная теория Эйнштейна и Максвелла рассматривает лишь локальные свойства объектов, и то же имеет место для окончательной системы уравнений Райнича.

Для того чтобы перейти от локальных свойств к глобальным или топологическим и вместе с тем сохранить простоту обсуждения, в разделе III мы вернемся к более привычному дуалистическому языку метрики плюс поля. Там мы изложим необходимые сведения из топологии и дадим необходимое обобщение теоремы Гаусса и теории гармонических векторных полей. Бóльшая часть необходимого математического аппарата уже имеет свое выражение в виде исчисления внешних дифференциальных форм Картана. Большинство результатов мы запишем как в этих обозначениях, так и в привычном тензорном виде. Лишь немногие выводы приобретают в тензорной записи такой сложный вид, что мы отказываемся от введения в них обычных обозначений. Мы докажем, что уравнения Максвелла требуют сохранения потока независимо через каждую ручку, что оправдывает отождествление этого потока с зарядом.

В разделе IV рассматриваются частные примеры многосвязной метрики, не обладающей особенностями, в которой появляются как заряд, так и масса. Прежде всего дается несингулярная запись метрики Шварцшильда, что доказывает существование частного случая пространства, не включающего ни заряда, ни массы (в обычном смысле этих слов), но тем не менее обладающего массой. Далее получена регулярная форма метрики Райснера — Нордстрема. Она описывает сферически симметричное пространство, не содержащее «реальных» зарядов и масс, но тем не менее обладающее обоими этими свойствами. Наконец, придана замкнутая математическая форма некоторому классу метрик, обладающих большим числом горловин ручек, причем каждый из них обладает своими собственными зарядом и массой. Если, таким образом, определить начальные условия, то будущее развитие пространства определится, конечно, уравнениями поля. Другими словами, к этому случаю при-

менимы доводы Эйнштейна, Инфельда и Гофмана. Предметом чистой геометродинамики является вся динамика системы зарядов и масс при отсутствии сингулярностей.

Раздел V посвящен изложению проблем, нуждающихся в дальнейшем исследовании для придания классической геометродинамике полноты и расширения области ее применимости.

II. ИСКОННО ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ РАЙНИЧА

Тензор Максвелла

Прежде всего напомним соотношение между напряженностью электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ и максвелловским тензором энергии-импульса-натяжений $T_{\mu\nu}$. Это соотношение имеет чисто алгебраический характер, ввиду чего можно ограничиться рассмотрением одной какой-либо точки пространства-времени и для удобства использовать координатные системы, в которых в данной точке компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ принимают значения, присущие метрике Минковского. Концентрируя внимание на геометрии, мы будем использовать вместо **F** «геометризованную», или «приведенную», напряженность поля $\mathbf{f} = (G^{1/2}/c^2)\mathbf{F}$, а вместо напряженностей электрического и магнитного полей **E** и **H** приведенные напряженности $\mathbf{e} = (G^{1/2}/c^2)$ и $\mathbf{h} = (G^{1/2}/c^2)\mathbf{H}$, имеющие размерности $см^{-1}$. При рассмотрении метрики Минковского приведенный тензор напряженности поля имеет форму

$$f_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -e_x & -e_y & -e_z \\ e_x & 0 & h_z & -h_y \\ e_y & -h_z & 0 & h_x \\ e_z & h_y & -h_x & 0 \end{bmatrix} (см^{-1}), \tag{10}$$

а дуальный ему тензор

$$*f_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-g)^{1/2}[\mu\nu\alpha\beta]f^{\alpha\beta} \tag{11}$$

отличается от **f** лишь заменой $\mathbf{e} \to \mathbf{h}$, $\mathbf{h} \to -\mathbf{e}$. Из тензора напряженности поля строятся два известных

инварианта:

$$\mathbf{f}^2 \equiv \frac{1}{2} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \ (=\mathbf{h}^2 - \mathbf{e}^2 \text{ в системе отсчета Минковского}),$$
$$\mathbf{f} \times \mathbf{f} \equiv \frac{1}{2} f_{\mu\nu} {}^*f^{\mu\nu} (=2\mathbf{e}\cdot\mathbf{h} \text{ в системе отсчета Минковского}). \tag{12}$$

Уравнения

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} =$$
$$= \frac{8\pi G}{c^4} \left[\frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \right] =$$
$$= 2 \left(f_{\mu\alpha} f_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \right) \equiv \mathfrak{T}(\mathfrak{f}), \tag{13}$$

связывающие свернутый тензор кривизны с тензором натяжений (и через него с полем), позволяют стоящую справа величину называть равным образом как «приведенным», или «геометризованным», тензором энергии-натяжений, так и свернутым тензором кривизны, поскольку речь идет о чистой геометродинамике. В системе отсчета Минковского типичные компоненты (13) равны

$$R_{00} = R^{00} = -R_0^0 = (\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2) = \frac{8\pi G}{c^4} \text{ (Плотность энергии)},$$

$$-R_{10} = R^{10} = R_1^0 = 2\mathbf{e} \times \mathbf{h} = \frac{8\pi G}{c^4} \text{ (Плотность умноженной на } c \text{ } x\text{-компоненты импульса)} = \frac{8\pi G}{c^4} \text{ (Поток электромагнитной энергии через 1 } см^2 \text{ поверхности, нормальной оси } x, \text{ в течение 1 } см \text{ прошедшего ковремени)};$$

$$R_{11} = R^{11} = R_1^1 = (-e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 - h_x^2 + h_y^2 + h_z^2) =$$
$$= \left(\frac{8\pi G}{c^4} \right) \text{ (Давление)} = \left(\frac{8\pi G}{c^4} \right) \text{ (Сила, приложенная в направлении оси } x \text{ к единичной площадке, нормальной этой оси } x, \text{ со стороны электромагнитного поля в области } x - \varepsilon \text{ и действующая на область } x + \varepsilon);$$

$$R_{12} = R^{12} = R_1^2 = -2e_x e_y - 2h_x h_y = \frac{8\pi G}{c^4} \text{ (Сдвиговое усилие)} = \frac{8\pi G}{c^4} \text{ (Сила, приложенная в направлении оси } x \text{ к единичной площадке, нормальной оси } y, \text{ со стороны электромагнитного поля в точке } y - \varepsilon \text{ и действующая на среду в точке } y + \varepsilon). \tag{14}$$

Из выражений (14) очевидна инвариантность тензора энергии-натяжений относительно замены $\mathbf{e} \to \mathbf{h}$, $\mathbf{h} \to -\mathbf{e}$; однако в уравнениях (13) это обстоятельство отчетливо не выражено. Поэтому желательно переписать приведенный тензор натяжений, или «максвелловский квадрат тензора $\mathbf{f}$», в левой части уравнений (13) в более симметричном виде

$$\mathfrak{T}(\mathbf{f}) = f_{\mu\alpha} f_{\nu}{}^{\alpha} + {}^{*}f_{\mu\alpha}\, {}^{*}f_{\nu}{}^{\alpha}, \tag{14a}$$

что можно сделать на основании тождества [1])

$$f_{\mu\alpha} f^{\nu\alpha} - {}^{*}f_{\mu\alpha}\, {}^{*}f^{\nu\alpha} = \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \equiv \delta^{\nu}_{\mu}\mathbf{f}^2. \tag{15}$$

Повороты дуальности [2])

Тензор натяжений, или максвелловский квадрат тензора $\mathbf{f}$, обладает следующими свойствами симметрии. Заметим, что дважды примененная к $\mathbf{f}$ операция взятия дуальной величины вновь приводит к $-\mathbf{f}$, так что квадрат операции $*$ равен тождественному преобразованию со знаком минус. Поэтому рассмотрим угол α и определим операцию $e^{*\alpha}$ с помощью соотношения

$$e^{*\alpha}\mathbf{f} = \mathbf{f}\cos\alpha + {}^{*}\mathbf{f}\sin\alpha. \tag{16}$$

В системе координат Минковского эта операция принимает вид

$$\left.\begin{aligned} h_{x\,\text{нов.}} &= h_x\cos\alpha + e_x\sin\alpha \\ e_{x\,\text{нов.}} &= -h_x\sin\alpha + e_x\cos\alpha \end{aligned}\right\} \text{(одинаково для } x, y, z). \tag{17}$$

Эта операция кажется на первый взгляд простым поворотом, так как будучи примененной к линейно поляризованной волне, для которой $|\mathbf{e}| = |\mathbf{h}|$ и $\mathbf{e} \perp \mathbf{h}$, она поворачивает направление поляризации на угол α вокруг направления распространения этой волны. Однако для более общего случая полей этот оператор не приводит к столь просто интерпретируемому результату. Более того, он равным образом затрагивает все три пространственные оси. Это не есть обычный поворот в 3-прост-

[1]) См. примечание на стр. 240.
[2]) См. примечание 2 на стр. 222

ранстве, ввиду чего мы будем называть его *поворотом дуальности*. Этот оператор обладает свойством аддитивности

$$e^{*\alpha}e^{*\beta} = e^{*\beta}e^{*\alpha} = e^{*(\alpha+\beta)} \tag{18}$$

и, в частности, имеет значение

$$e^{*(\pi/2)} = *. \tag{19}$$

Тензор, дуальный дуально повернутому, дает тензор напряженности

$$*(e^{*\alpha}\mathbf{f}) = -\mathbf{f}\sin\alpha + *\mathbf{f}\cos\alpha. \tag{20}$$

На основании соотношений (14), (16) и (20) заключаем о следующем важном свойстве поворота дуальности: *максвелловский квадрат дуально повернутого поля тождествен с максвелловским квадратом исходного поля*

$$\mathfrak{T}(e^{*\alpha}\mathbf{f}) = \mathfrak{T}(\mathbf{f}). \tag{21}$$

При этом порознь взятые электрическое и магнитное поля меняются, тогда как все компоненты тензора

Таблица 2

Различие между собственными преобразованиями Лоренца и поворотами дуальности

Величина	Общее собственное преобразование Лоренца	Поворот дуальности
Компоненты тензора Максвелла или максвелловский квадрат $\mathbf{f}$ . . .	Меняются	Неизменны
Инварианты $\mathbf{f}^2$ и $\mathbf{f}\times\mathbf{f}$	Неизменны	Меняются

энергии-натяжений остаются неизменными. Напротив, поворот дуальности изменяет инварианты полей (табл. 2). Определим

$$\boldsymbol{\xi} = e^{-*\alpha}\mathbf{f} \tag{22}$$

как напряженность поля, дуально повернутого на угол $-\alpha$. Тогда инварианты поля преобразуются, как при

повороте на угол -2α:

$$\xi^2 = (\mathbf{f}\cos\alpha - *\mathbf{f}\sin\alpha)^2 = \mathbf{f}^2\cos 2\alpha - \mathbf{f}\times\mathbf{f}\sin 2\alpha,$$
$$\xi\times\xi = \mathbf{f}^2\sin 2\alpha + \mathbf{f}\times\mathbf{f}\cos 2\alpha. \qquad (23)$$

Допустим, что оба инварианта ($\mathbf{f}^2$ и $\mathbf{f}\times\mathbf{f}$) одновременно не обращаются в нуль. Тогда мы выбираем угол α так, чтобы одна инвариантная величина $\xi\times\xi$ обращалась в нуль:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{\mathbf{f}\times\mathbf{f}}{\mathbf{f}^2}. \qquad (24)$$

Разрешая это уравнение относительно $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ с точностью до знака, вычисляем другой инвариант, находя

$$\xi^2 = \pm[(\mathbf{f}^2)^2 + (\mathbf{f}\times\mathbf{f})^2]^{1/2}. \qquad (25)$$

Пусть в правой части имеет место знак *минус*, так что угол 2α будет определен с точностью до положительного или отрицательного слагаемого, кратного 2π. Тогда тензор напряженности поля ξ определяет чисто *электрическое* поле, направленное по оси x, или полученное из него путем преобразования Лоренца (табл. 3). Назовем

Таблица 3

Преобразования общего (ненулевого) тензора напряженности электромагнитного поля $\mathbf{f} = (\mathbf{e}, \mathbf{h})$ в локальной системе отсчета Минковского

Напряженности поля	Исходные	После канонического поворота дуальности
Исходные	$\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$	$\mathbf{e}''$ и $\mathbf{h}''$ взаимно перпендикулярны, причем $\mathbf{e}''$ больше, чем $\mathbf{h}''$
После канонического преобразования Лоренца	$\mathbf{e}'$ и $\mathbf{h}'$ параллельны друг другу и оси x	$\mathbf{e}$ параллельно оси x; $\mathbf{h} = 0$

такое преобразование дуальным поворотом исходного поля до *экстремального* поля, или до существенно *электрического*. В избранной лоренцовой системе, в которой

это поле направлено вдоль оси x и не имеет отличной от нуля компоненты магнитного поля, напряженность его равна

$$e_x''' = [(\mathbf{h}^2 - \mathbf{e}^2)^2 + (2\mathbf{e}\cdot\mathbf{h})^2]^{1/4} = [(\mathbf{h}^2 + \mathbf{e}^2)^2 - 2(\mathbf{e}\times\mathbf{h})^2]^{1/4}. \quad (26)$$

«Фаза» поля

Исходя из экстремального или существенно электрического поля $\boldsymbol{\xi}$ как основного стандарта, мы получаем действительное поле $\mathbf{f}$, очевидно, с помощью поворота дуальности на угол α:

$$\mathbf{f} = e^{*\alpha}\boldsymbol{\xi}.$$

При преобразовании Лоренца компоненты трех тензоров $\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\xi}$ и $^*\boldsymbol{\xi}$ преобразуются одинаковым образом. По этой причине *угол* α не меняется. *Это представляет собой важное лоренц-инвариантное скалярное свойство напряженности поля* $\mathbf{f}$. Будем называть угол α «фазой» (complexion) электромагнитного поля.

В том случае, когда поле $\mathbf{f}$ является *нулевым*, т. е.

$$(\mathbf{e}\cdot\mathbf{h}) = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{h}^2 - \mathbf{e}^2 = 0$$

или

$$\mathbf{f}\times\mathbf{f} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{f}^2 = 0,$$

уравнения (24) для угла α становятся неразрешимыми. В этом случае «фаза» не может быть определена чисто локальным способом.

Квадрат тензора Максвелла и алгебраические соотношения для кривизны

Вернемся теперь к случаю, когда поле не является нулевым. Вычислим здесь максвелловский квадрат, или тензор энергии-натяжения исходного поля, используя равенство его максвелловскому квадрату экстремального поля [см. соотношение (21)] или максвелловскому квадрату поля, дуального по отношению к предельному:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^{\varkappa}_{\mu}(\mathbf{f}) &= \mathfrak{T}^{\varkappa}_{\mu}(\boldsymbol{\xi}) = 2\xi_{\mu\alpha}\xi^{\varkappa\alpha} - \delta^{\varkappa}_{\mu}\cdot(\boldsymbol{\xi}^2), \\ \mathfrak{T}^{\nu}_{\varkappa}(\mathbf{f}) &= \mathfrak{T}^{\nu}_{\varkappa}(*\boldsymbol{\xi}) = 2*\xi_{\varkappa\sigma}*\xi^{\nu\sigma} + \delta^{\nu}_{\varkappa}\cdot(\boldsymbol{\xi}^2), \end{aligned} \quad (27)$$

Возведем теперь в квадрат максвелловский квадрат $\mathbf{f}$ путем умножения первого тензора на второй. Смешанные по $\boldsymbol{\xi}$ и $*\boldsymbol{\xi}$ члены, возникающие при этом вычислении, обращаются в нуль ввиду тождества [1])

$$2\xi_{\mu\alpha} * \xi^{\nu\alpha} = \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}\xi_{\sigma\tau} * \xi^{\sigma\tau} = \delta^{\nu}_{\mu}(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\xi}) \tag{28}$$

и предельного свойства $\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\xi} = 0$. Здесь мы использовали также тождество (15). В результате для квадрата находим

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}^{\nu}_{\mu}\mathfrak{T}^{\nu}_{\nu} &= 2(\boldsymbol{\xi}^2)\left(\xi_{\mu\alpha}\xi^{\nu\alpha} - * \xi_{\mu\alpha} * \xi^{\nu\alpha}\right) - \delta^{\nu}_{\mu}(\boldsymbol{\xi}^2)^2 = \\ &= \delta^{\nu}_{\mu}(\boldsymbol{\xi}^2)^2 = \delta^{\nu}_{\mu}\left[(\mathbf{f}^2)^2 + (\mathbf{f} \times \mathbf{f})^2\right] = \\ &= \delta^{\nu}_{\mu}\left[(\mathbf{h}^2 - \mathbf{e}^2)^2 + (2\mathbf{e} \cdot \mathbf{h})^2\right] = \delta^{\nu}_{\mu}\left[(\mathbf{h}^2 + \mathbf{e}^2)^2 - (2\mathbf{e} \times \mathbf{h})^2\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Доказательство этого результата в случае нулевого поля даже еще проще, и ввиду равенств $\mathbf{f} \times \mathbf{f} = 0$, $\mathbf{f}^2 = 0$ правая часть равенства (29) обращается в нуль. Итак, *квадрат максвелловского тензора энергии-импульса-натяжений пропорционален единичной матрице.* Это изящное и интересное соотношение является центральным в исконно единой теории поля Райнича. Будучи записанным через компоненты кривизны, оно имеет вид

$$\mathfrak{T}^{\alpha}_{\mu}\mathfrak{T}^{\nu}_{\alpha} = R^{\alpha}_{\mu}R^{\nu}_{\alpha} = \delta^{\nu}_{\mu}\left(\frac{1}{4}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}\right). \tag{30}$$

Значение постоянного коэффициента определено здесь путем сравнения следов обеих частей уравнения. К этому соотношению добавляется равенство нулю следа приведенного тензора Максвелла

$$\mathfrak{T}^{\alpha}_{\alpha} = R^{\alpha}_{\alpha} \equiv R = 0 \tag{31}$$

[уравнение (4)], что следует непосредственно из определения (13) и утверждения [см. соотношение (14)] о по-

[1]) Это равенство является частным случаем соотношения

$$A_{\mu\alpha}B^{\nu\alpha} - * A_{\mu\alpha} * B^{\nu\alpha} = \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}A_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta},$$

справедливого для любых двух антисимметричных тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в 4-пространстве.

ложительной определенности плотности электромагнитной энергии

$$\mathfrak{T}_{00} = R_{00} \geqslant 0. \tag{32}$$

Другими словами, величина

$$v^{\alpha}\mathfrak{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{f})\,v^{\beta} \tag{33}$$

неотрицательна для любого временно-подобного вектора **v**. Соотношения (30)—(32) выражают алгебраические соотношения, которым подчиняется кривизна в исконно единой теории поля.

Необходимым условием возможности выражения свернутого тензора кривизны $R_{\mu\nu}$ в виде масквелловского квадрата некоторого антисимметричного тензора напряженности поля **f** является то, чтобы свернутый тензор кривизны удовлетворял соотношениям (30)—(32). На фиг. 1 эти же условия получены несколько иным путем.

Из фиг. 1 видно, что соответствующее преобразование Лоренца приводит тензор $R_{\mu\nu} = \mathfrak{T}_{\mu\nu}$ ненулевого поля **f** к диагональному виду

$$[(\mathbf{f}^2)^2 + (\mathbf{f} \times \mathbf{f})^2]^{1/2} \begin{Vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{Vmatrix}. \tag{34}$$

Этот диагональный вид тензора $\mathfrak{T}$ с необходимостью одинаков для любого симметричного тензора с нулевым следом, квадрат которого отличен от нуля и пропорционален единичной матрице. Тензор R^{λ}_{μ} в рассматриваемой точке определяет то, что на языке Скаутена [24] называется *двухлистной структурой* (см. также [4]) [1]). Преобразование поворота в плоскости *yz* вокруг оси *x* не изменяет тензора (34); напряженности электрического и магнитного полей остаются параллельными оси *x* (см. фиг. 1). Подобная картина параллельных векторов напряженности не изменится и при преобразовании Лоренца в плоскости *xT*. Плоскости *yz* и *xT* являются двумя *листками*, определяемыми тензором Максвелла $\mathfrak{T}^{\nu}_{\mu}(\mathbf{f})$

[1]) Мы выражаем признательность проф. Скаутену за ряд содержательных дискуссий.

и, следовательно, в свою очередь определяемыми самим f.

Будучи записанным в диагональной форме, тензор Максвелла характеризуется единственным параметром. К этому параметру следует добавить лишь четыре дополнительных параметра от общего 6-параметрического собственного преобразования Лоренца, поскольку повороты в плоскостях *yz* и *xT* не приводят к изменениям этого тензора. Таким образом, свернутый тензор кривизны $R_{\mu\nu}$ «электромагнитной римановой геометрии» или «геометродинамики» (табл. 4) характеризуется совокупностью пяти параметров, несмотря на наличие в общем случае у тензора $R_{\mu\nu}$ десяти различных компонент и несмотря также на тот факт, что, казалось бы, уравнения (29) и (31) накладывают на эти десять компонент десять условий. Очевидно, что эти нелинейные алгебраические уравнения не являются все независимыми.

То, что свернутый тензор кривизны $R_{\mu\nu}$ удовлетворяет условиям Райнича (30)—(32), не только *необходимо* (как было показано выше), но и *достаточно* для *возможности представления* $R_{\mu\nu}$ *в виде максвелловского квадрата, или тензора электромагнитного поля* $f_{\mu\nu}$. Более того, соответствующий тензор поля определяется отсюда *однозначно* с точностью до преобразования поворота дуальности. Такой тензор поля мы называем *максвелловским корнем* от тензора кривизны Риччи $R_{\mu\nu}$. Мы доказываем эти утверждения отдельно для случаев ненулевого *и* нулевого (когда $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 0$ и в $R_{\mu\nu}$ остается лишь три независимых параметра) тензора $R_{\mu\nu}$.

1) Построим «риччиеву часть» $E_{\tau\sigma}{}^{\mu\nu}$ тензора кривизны Римана

$$E_{\tau\sigma}{}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(-\delta^{\mu}_{\tau}R^{\nu}_{\sigma} + \delta^{\mu}_{\sigma}R^{\nu}_{\tau} - \delta^{\nu}_{\sigma}R^{\mu}_{\tau} + \delta^{\nu}_{\tau}R^{\mu}_{\sigma}\right). \qquad (35)$$

Она обладает теми же свойствами симметрии, что и тензор кривизны Римана, причем свертка дает тот же тензор кривизны Риччи

$$E_{\tau\alpha}{}^{\alpha\nu} = -\frac{1}{2}R^{\nu}_{\tau} + 2R^{\nu}_{\tau} - \frac{1}{2}R^{\nu}_{\tau} + 2R^{\alpha}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\tau} = R^{\nu}_{\tau} \equiv R_{\tau\alpha}{}^{\alpha\nu} \qquad (36)$$

благодаря условию $R^{\alpha}_{\alpha} = 0$ и приводит к необходимой при взятии максвелловского корня антисимметрии.

Частичная классификация римановой геометрии *Таблица 4*

Свойство	Наименование	Примечания
$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$	Неискривленное пространство	Все подобные пространства недавно классифицированы Маркусом [1])
$R_{\mu\nu} = 0$	Чистое гравитационное поле	Десять „локальных" компонент тензора $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ равны нулю, но другие десять „дальнодействующих" компонент определяются путем решения дифференциальных уравнений $R_{\mu\nu} = 0$ для метрики. Свободных компонент $R_{\mu\nu}$ нет
$R^{\mu}_{\mu} = 0; \quad R_{00} \geqslant 0;$ $R^{\alpha}_{\mu} R^{\nu}_{\alpha} = \delta^{\nu}_{\mu}\left(\frac{1}{4} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}\right) =$ $= (\mathbf{h}^2 - \mathbf{e}^2)^2 + (2\mathbf{e}\cdot\mathbf{h})^2$	„Электромагнитная риманова геометрия" или „геометродинамика"	Имеются пять свободных компонент у $R_{\mu\nu}$. Метрика находится путем решения уравнений исконно единой теории поля
$R^{\mu}_{\mu} = 0; \quad R_{00} \geqslant 0;$ $R^{\alpha}_{\mu} R^{\nu}_{\alpha} = 0$	Нулевое поле; $\mathbf{e}\cdot\mathbf{h} = 0$ и $\mathbf{h}^2 - \mathbf{e}^2 = 0$ — частный случай электромагнетизма	$R_{\mu\nu} = \mathfrak{T}_{\mu\nu}(\mathbf{f}) = k_{\mu} k_{\nu}$, где $\mathbf{k}$ — нулевой вектор; имеются лишь три свободных параметра у тензора $R_{\mu\nu}$
$R^{\mu}_{\mu} = 0; \quad R_{00} \geqslant 0;$ $R^{\alpha}_{\mu} R^{\nu}_{\alpha} \neq 0;$ α — константа во всем пространстве и времени	Статическое поле; путем замены наименований (поворота дуальности) приводится к условиям, когда присутствует лишь электрическое поле, но не магнитное; другой частный случай электромагнетизма	На тензор $R_{\mu\nu}$ накладываются добавочные нелокальные (дифференциальные) условия в добавок к обычным уравнениям поля исконно единой теории
Произвольный тензор $R_{\mu\nu}$	Общий случай геометрии Римана	Отсутствие физических законов

[1]) L. Markus, в печати.

2) Определим *экстремальный масквелловский корень* $\xi_{\mu\nu}$ тензора кривизны Риччи (случай чистого электрического поля) с точностью лишь до знака с помощью соотношения

$$\xi_{\mu\nu}\xi_{\sigma\tau} = -\frac{1}{2}E_{\mu\nu\sigma\tau} - \frac{1}{2}(R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta})^{-1/2}E_{\mu\nu\gamma\delta}E_{\sigma\tau}{}^{\gamma\delta}. \qquad (37)$$

Любая заданная компонента $\xi_{\mu\nu}$ находится с точностью до знака при подстановке $(\sigma, \tau) = (\mu, \nu)$ и извлечении корня в (37). Далее то же соотношение (37) используется для нахождения относительных знаков различных компонент, $\xi_{\mu\nu}$ и $\xi_{\sigma\tau}$. Совместность полученных выражений гарантируется условиями Райнича.

Только что изложенный рецепт отыскания максвелловского квадратного корня наиболее просто проверяется в системе отсчета Минковского, в которой тензор кривизны Риччи имеет диагональный вид

$$R^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} -(\xi_{01})^2 & & & \\ & -(\xi_{01})^2 & & \\ & & +(\xi_{01})^2 & \\ & & & +(\xi_{01})^2 \end{pmatrix}. \qquad (38)$$

Здесь ξ_{01} является положительным вещественным числом, определенным, если задан тензор R^{ν}_{μ}. Мы используем это число для *определения* антисимметричного экстремального тензора поля $\boldsymbol{\xi}$, все компоненты которого, за исключением ξ_{01} и $\xi_{10} = -\xi_{01}$, обращаются в рассматриваемой лоренцовой системе в нуль. Тогда дуальный тензор обладает единственными ненулевыми компонентами

$$(*\,\xi)_{23} = -(*\,\xi)_{32} = -\xi_{01}.$$

Таким образом, экстремальное поле обладает свойством

$$\xi^2 \equiv \frac{1}{2}\xi_{\alpha\beta}\xi^{\alpha\beta} = -(\xi_{01})^2 =$$

$$= (\text{Магнитная компонента приведенного экстремального поля})^2 -$$
$$-(\text{Электрическая компонента приведенного экстремального поля})^2 =$$
$$= -\frac{1}{2}(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})^{1/2};$$

$$\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\xi} = 0 = (\text{Магнитная компонента}) \times$$
$$\times (\text{Электрическая компонента});$$
$$(*\,\boldsymbol{\xi})^2 = +(\xi_{01})^2 = -\boldsymbol{\xi}^2, \quad *\,\boldsymbol{\xi} \times *\,\boldsymbol{\xi} = 0. \qquad (39)$$

В той же самой системе Минковского единственные отличные от нуля значения компонент тензора **E** (35) равны

$$E_{01}{}^{01} = -\frac{1}{2}(R_1^1 + R_0^0) = (\xi_{01})^2$$

и

$$E_{23}{}^{23} = -\frac{1}{2}(R_3^3 + R_2^2) = -(\xi_{01})^2 = -(*\,\xi_{23})^2. \tag{40}$$

Поэтому общая компонента тензора **E** может быть записана в ковариантной форме

$$E_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\xi_{\alpha\beta}\xi_{\gamma\delta} - *\,\xi_{\alpha\beta} *\, \xi_{\gamma\delta}. \tag{41}$$

Произведение этого тензора на самого себя равно

$$E_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}E_{\mu\nu}{}^{\gamma\delta} = 2(\xi_{01})^2(-\xi_{\alpha\beta}\xi_{\mu\nu} + *\,\xi_{\alpha\beta} *\, \xi_{\mu\nu}) =$$

$$= (R_{\sigma\tau}R^{\sigma\tau})^{1/2}(-\xi_{\alpha\beta}\xi_{\mu\nu} + *\,\xi_{\alpha\beta} *\, \xi_{\mu\nu}) \tag{42}$$

ввиду свойств (39) экстремального поля. Умножим (41) на $-1/2$ и прибавим к нему (42), умноженное на $-1/2(R^{\sigma\tau}R_{\sigma\tau})^{-1/2}$, для исключения членов, включающих дуальное поле. Мы получаем соотношение (37) для компонент приведенного предельного тензора электромагнитного поля. Тензорное уравнение справедливо во всех координатных системах, если оно выполняется в этой упрощающей расчет системе. Таков аппарат извлечения максвелловского квадратного корня из ненулевого тензора Риччи, т. е. из тензора, квадрат которого не равен нулю и пропорционален единичной матрице.

Рассмотрим теперь другой случай, когда свернутый тензор кривизны является нулевым тензором

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 0, \tag{43}$$

но сам тензор не равен нулю тождественно. Как и прежде, рассмотрим этот тензор в системе отсчета Минковского, где компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ имеют лоренцовы значения. Система координат определяется тогда произвольно с точностью до шести-параметрического преобразования Лоренца. Произведем такой поворот в трехмерном пространстве (затрагивая три параметра), который диагонализирует пространственную

часть $R_{\mu\nu}$; тогда $R_{12} = R_{23} = R_{31} = 0$. Обращение в нуль квадрата R^{ν}_{μ} (см. табл. 4)

$$(g^{\alpha\beta})_{\text{Лоренц.}} R_{\mu\alpha} R_{\beta\nu} = 0 \tag{44}$$

приводит к условиям вида

$$-R_{00}^2 + R_{10}^2 + R_{20}^2 + R_{30}^2 = 0 \quad \text{(временно-временное);} \tag{45}$$

$$-R_{00}R_{01} + R_{01}R_{11} + 0 + 0 = 0 \quad \text{(пространственно-временное);} \tag{46}$$

$$-R_{01}^2 + R_{11}^2 + 0 + 0 = 0 \quad \text{(пространственно}_1\text{-пространственное}_1\text{);} \tag{47}$$

$$-R_{10}R_{02} + 0 + 0 + 0 = 0 \quad \text{(пространственно}_1\text{-пространственное}_2\text{).} \tag{48}$$

Из соотношений типа (48) мы заключаем, что лишь одна из компонент R_{01}, R_{02}, R_{03} может отличаться от нуля. Пусть этой ненулевой компонентой будет R_{01} и пусть ось x выбрана так, что R_{01} является отрицательной величиной $(-2\varkappa^2)$. Тогда компонента R^{01} положительна и соответствует потоку вектора Пойнтинга в положительном направлении оси x. Тогда из соотношений (45)—(48) и требования $R_{00} \geqslant 0$ положительной определенности плотности энергии следует, что тензор кривизны Риччи имеет вид

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2\varkappa^2 & -2\varkappa^2 & 0 & 0 \\ -2\varkappa^2 & 2\varkappa^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Строка: } 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \tag{49}$$

Этот тензор может быть записан в виде

$$R_{\mu\nu} = 2k_\mu k_\nu, \tag{50}$$

где вектор $\mathbf{k}$ является нулевым:

$$\begin{aligned} k_\mu &= (-\varkappa, \varkappa, 0, 0), \\ \mathbf{k}^2 &= k_\alpha k^\alpha = 0. \end{aligned} \tag{51}$$

Будучи ковариантным и справедливым в одной из систем отсчета, представление (50) имеет силу в любой системе.

Преобразования Лоренца, способного диагонализировать нулевой тензор Риччи, не существует так же, как не существует преобразования Лоренца, делающего нулевой вектор временно-подобным или вектора напряженности поля **e** и **h**, удовлетворяющие нулевым условиям $(e \cdot h) = 0$, $h^2 - e^2 = 0$, параллельными. В случае индефинитной метрики теорема о возможности диагонализации произвольного симметричного тензора не имеет места; выяснением этого обстоятельства мы обязаны проф. В. Баргману. Эта особенность ни в коей мере не препятствует извлечению максвелловского корня из (49):

$$f_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\varkappa & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa & 0 \\ \varkappa & -\varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

или

$$\mathbf{e} = (0, \varkappa, 0); \quad \mathbf{h} = (0, 0, \varkappa), \tag{53}$$

что может быть проверено прямой подстановкой в формулы (13) или (14) для максвелловского квадрата. Тензор (49) описывает поток энергии в направлении оси x со скоростью света, а формулы (52) или (53) разлагают поток вектора Пойнтинга на множители **e** и **h**. Максвелловский квадратный корень оставляет неопределенным лишь направление поляризации. Применение операции поворота дуальности с параметром α к напряженности (52) поворачивает вектор поляризации на угол α вокруг направления распространения, не меняя ее максвелловского квадрата $R_{\mu\nu}$.

Правило извлечения максвелловского квадратного корня из нулевого тензора Риччи можно резюмировать ковариантным образом:

1. Извлекается «обычный» квадратный корень k_μ, согласно соотношению (50).

2. Берется 4-вектор **v**, который а) обладает модулем, равным единице:

$$\mathbf{v}^2 = v_\alpha v^\alpha = 1, \tag{54}$$

б) нормален вектору **k**

$$k_\alpha v^\alpha = 0 \tag{55}$$

и в) в специальной системе отсчета Минковского, где выполняются равенства (49) и (52), например, имеет компоненты:

$$\mathbf{v} = (0, 0, 1, 0). \tag{56}$$

3. Строится антисимметричное произведение

$$f_{\mu\nu} = k_\mu v_\nu - k_\nu v_\mu, \tag{57T}$$

или, в так называемых внутренних обозначениях,

$$\mathbf{f} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{v}. \tag{57B}$$

4. Тогда *приведенный тензор поля (57) представляет собой максвелловский квадратный корень от нулевого тензора $R_{\mu\nu}$ и является с точностью до поворота дуальности единственным максвелловским квадратным корнем из $R_{\mu\nu}$.*

Как легко видеть из (51), (54) и (55), приведенное поле **f** является нулевым в избранной нами системе отсчета Минковского. Поэтому оно остается нулевым полем в любой другой системе отсчета. То же самое имеет место и после применения операции поворота дуальности.

Влияние на **f** поворота дуальности может быть выражено через сомножители, входящие в **f**. Таким образом, **k** остается неизменным, а **v** поворачивается вокруг **k**. Однако **v** не определяется однозначно величиной **f**: новый вектор $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + (\text{const})\,\mathbf{k}$ приводит к тому же полю **f** и удовлетворяет условиям (54) и (55) в той же мере, как и **v**. Более того, нужно быть осторожным при использовании описательного понятия «поляризации», так как оно в нашем изложении обозначает лишь ориентацию пары взаимно перпендикулярных 3-векторов **e** и **h**. Речь не идет о поляризации монохроматической направленной волны, которая не может быть определена при отсутствии сведений о поле в соседних точках — даже если бы имелась возможность говорить о монохроматической направленной волне!

Двоякая связь поля и кривизны

Резюмируя, можно сказать, что любой приведенный тензор электромагнитного поля $f_{\mu\nu}$, будь он нулевым или

нет, вызывает появление кривизны Риччи, удовлетворяющей условиям Райнича. Обратно, любой тензор кривизны Риччи, будь он нулевым или нет, удовлетворяющий условиям Райнича, обладает максвелловским квадратным корнем f_{ik}, однозначно из него следующим с точностью до поворота дуальности. Кроме того, в ненулевом случае кривизна Риччи — или напряженность поля — определяет структуру, обладающую двумя листками A и B в любой точке пространства-времени.

Листки не смыкаются

Какова геометрическая структура пространства-времени в одной точке по сравнению со структурой в соседней? На этот вопрос должно ответить геометрическое описание электромагнитного поля. Поэтому нам представляется полезным поставить вопрос о том, что происходит, если двигаться в локальной двумерной поверхности или в касательной поверхности листка A к соседним точкам, в которых листок A обладает несколько отличными ориентациями. Придем ли мы таким образом к строго определенной двумерной поверхности

$$x^\mu = x^\mu_A(u, v) \tag{58}$$

или же совокупность листков образует структуры, подобные спиральным дислокациям в кристалле, так что можно из одной точки попасть в любую другую, двигаясь соответствующим образом по листку A? В этом случае не будет существовать поверхностей типа (58). Приводит ли *требование* образования листками поверхности (58) к уравнениям Максвелла? Этот вопрос был нами исследован, и мы нашли, что такое требование чрезмерно жестко и не может быть удовлетворено общим решением уравнений электродинамики. Поэтому мы предпочли исходить из свойств уравнений Максвелла. Напряженность электромагнитного поля была представлена как максвелловский корень тензора Риччи, причем

$$f_{\mu\nu} = e^{*\alpha}\xi_{\mu\nu} \quad \text{или} \quad \mathbf{f} = e^{*\alpha}\boldsymbol{\xi}, \tag{59}$$

$\boldsymbol{\xi}$ = (Экстремальный максвелловский корень из $R_{\mu\nu}$),

и подставлена в уравнения Максвелла

$$f^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0,$$
$$*f^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0. \tag{60}$$

Отсюда прежде всего следует, что Райнич еще до нас выяснил истинное геометрическое содержание электромагнетизма.

Четыре уравнения Максвелла как следствия тождеств, удовлетворяемых тензором кривизны или тензором энергии-натяжений

Восемь уравнений электродинамики (60) принимают вид

$$0=f^{\mu\nu}{}_{;\nu}=\left(\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}+*\xi^{\mu\nu}\frac{\partial\alpha}{\partial x^\nu}\right)\cos\alpha+\left(*\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}-\xi^{\mu\nu}\frac{\partial\alpha}{\partial x^\nu}\right)\sin\alpha,$$
$$0=*f^{\mu\nu}{}_{;\nu}=\left(-\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}-*\xi^{\mu\nu}\frac{\partial\alpha}{\partial x^\nu}\right)\sin\alpha+ \tag{61}$$
$$+\left(*\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}-\xi^{\mu\nu}\frac{\partial\alpha}{\partial x^\nu}\right)\cos\alpha,$$

или, в более простой форме,

$$\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}+*\xi^{\mu\nu}\frac{\partial\alpha}{\partial x^\nu}=0, \tag{62}$$

$$*\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}-\xi^{\mu\nu}\frac{\partial\alpha}{\partial x^\nu}=0. \tag{63}$$

Скомбинируем эти уравнения таким путем, чтобы представить раздельно информацию, даваемую этими уравнениями относительно ξ и α. Сначала умножим (62) на $\xi_{\alpha\mu}$ и просуммируем по μ. Используя свойства (39) величины ξ и тождество

$$\xi_{\alpha\mu}*\xi^{\mu\nu}=0, \tag{64}$$

которое, будучи справедливым в системе отсчета Минковского и в то же время ковариантным, выполняется во всех системах отсчета, получаем

$$\xi_{\alpha\mu}\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0. \tag{65а}$$

Исходя аналогичным образом из уравнения (63), находим

$$*\,\xi_{\alpha\mu} *\,\xi^{\mu\nu}{}_{;\,\nu} = 0. \tag{65б}$$

Из восьми уравнений (65а) и (65б) независимы лишь четыре, что видно при переходе к такой координатной системе, в которой ξ_{01} и $*\,\xi_{23} = -\xi_{01}$ являются единственными отличными от нуля компонентами ξ. В этой системе координат видно, что восемь уравнений (65а) и (65б) эквивалентны четырем независимым уравнениям

$$\xi_{\alpha\mu}\xi^{\mu\nu}{}_{;\,\nu} + *\,\xi_{\alpha\mu} *\,\xi^{\mu\nu}{}_{;\,\nu} = 0. \tag{66}$$

Тождество [1])

$$\xi_{\alpha\mu;\,\nu}\,\xi^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\xi_{\alpha\mu;\,\nu} + \xi_{\nu\alpha;\,\mu} + \xi_{\mu\nu;\,\alpha}\right)\xi^{\mu\nu} - \\ - \frac{1}{4}\left(\xi_{\mu\nu}\xi^{\mu\nu}\right)_{;\,\alpha} = *\,\xi_{\alpha\mu} *\,\xi^{\mu\nu}{}_{;\,\nu} - \frac{1}{2}\left(\xi^2\right)_{;\,\alpha}$$

и аналогичное соотношение, получающееся из него при замене ξ на $*\xi$, приводят уравнение (66) к виду

$$\frac{1}{2}\left(\xi_{\alpha\mu}\xi^{\mu\nu} + *\,\xi_{\alpha\mu} *\,\xi^{\mu\nu}\right)_{;\,\nu} = 0. \tag{67}$$

Выражение в скобках является тензором натяжений Максвелла. Оно может быть отождествлено с кривизной Риччи, след которой обращается в нуль, так что (67) можно переписать в виде

$$\left[R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\nu}_{\mu}R\right]_{;\,\nu} = 0. \tag{68}$$

Однако это условие вообще не является новым требованием. Бианки показал, что тензор Риччи, будучи построенным из *произвольного* метрического тензора, *тождественно* удовлетворяет уравнению (68). Давно известно, что половина уравнений Максвелла следует из этих

[1]) Вторая строка этого тождества является частным случаем тождества

$$\frac{1}{2}\,A^{\alpha\beta}\left(B_{\mu\alpha;\,\beta} + B_{\alpha\beta;\,\mu} + B_{\beta\mu;\,\alpha}\right) = *\,A_{\mu\alpha} *\,B^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta},$$

которое справедливо для любых двух антисимметричных тензоров в 4-пространстве.

тождеств Бианки. Какая же информация о кривизне пространства заложена тогда в других четырех уравнениях Максвелла?

Другие четыре уравнения Максвелла требуют, чтобы некоторый вектор, построенный из кривизны и ее первой производной, обладал нулевым ротором

Умножим уравнение (62) на $*\xi_{\beta\mu}$, а (63) — на $\xi_{\beta\mu}$, просуммируем по μ; тогда, используя соотношение (15),

$$*\xi_{\beta\mu}\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu} + \xi_{\beta\mu} * \xi^{\mu\nu}{}_{;\nu} + \delta^{\nu}_{\beta}\xi^2 \frac{d\alpha}{dx^{\nu}} = 0$$

или

$$\frac{d\alpha}{dx^{\beta}} = \alpha_{\beta}, \tag{69}$$

где введено *сокращение*

$$\alpha_{\beta} = -\frac{*\xi_{\beta\mu}\xi^{\mu\nu}{}_{;\nu} + \xi_{\beta\mu} * \xi^{\mu\nu}{}_{;\nu}}{\xi^2}. \tag{70}$$

Вектор α_{β} выражается через кривизну Риччи следующим образом:

$$\alpha_{\beta} = (-g)^{1/2}[\beta\lambda\mu\nu]\frac{R^{\lambda\gamma;\,\mu}R^{\nu}{}_{\gamma}}{R_{\sigma\tau}R^{\sigma\tau}}. \tag{71}$$

Чтобы получить (71), вспомним выражение (41) для риччиевой части (35) тензора кривизны Римана через экстремальное поле ξ и запишем свернутую первую ковариантную производную этого тензора:

$$\begin{aligned} E^{\gamma\delta\beta\tau}{}_{;\tau} &= -\xi^{\gamma\delta}\xi^{\beta\tau}{}_{;\tau} - *\xi^{\gamma\delta} * \xi^{\beta\tau}{}_{;\tau} - \xi^{\gamma\delta}{}_{;\tau}\xi^{\beta\tau} - *\xi^{\gamma\delta}{}_{;\tau} * \xi^{\beta\tau} + \\ &= \frac{1}{2}\left(-g^{\gamma\beta}R^{\delta\tau} + g^{\gamma\tau}R^{\delta\beta} - g^{\delta\tau}R^{\gamma\beta} + g^{\beta}R^{\gamma\tau}\right)_{;\tau} = \\ &= \frac{1}{2}\left(R^{\delta\beta;\,\gamma} - R^{\gamma\beta;\,\delta}\right). \end{aligned} \tag{72}$$

Здесь мы использовали свойство обращения в нуль всех компонент ковариантной производной от $g^{\gamma\beta}$ и учли тождества Бианки в виде $R^{\delta\tau}{}_{;\tau} = 0$, благодаря чему

из восьми получающихся при дифференцировании членов остается лишь два. Определим величину

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(-g)^{1/2}[\gamma\delta\mu\nu]E_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} =$$
$$= \frac{1}{2}(-g)^{1/2}[\gamma\delta\mu\nu](-\xi_{\alpha\beta}\xi^{\mu\nu} - *\xi_{\alpha\beta} * \xi^{\mu\nu}) =$$
$$= -\xi_{\alpha\beta} * \xi_{\gamma\delta} + * \xi_{\alpha\beta}\xi_{\gamma\delta} =$$
$$= \frac{1}{2}(-g)^{1/2}[\gamma\delta\mu\nu]\frac{1}{2}(-\delta^{\mu}_{\alpha}R^{\nu}_{\beta} + \delta^{\nu}_{\alpha}R^{\mu}_{\beta} - \delta^{\nu}_{\beta}R^{\mu}_{\alpha} + \delta^{\mu}_{\beta}R^{\nu}_{\alpha}) =$$
$$= \frac{1}{2}(-g)^{1/2}[\gamma\delta\mu\nu](\delta^{\nu}_{\alpha}R^{\mu}_{\beta} - \delta^{\nu}_{\beta}R^{\mu}_{\alpha}). \qquad (73)$$

Построим, наконец, произведение

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta}E^{\gamma\delta\beta\tau}{}_{;\tau} = -2\xi^2(*\xi_{\alpha\beta}\xi^{\beta\tau}{}_{;\tau} + \xi_{\alpha\beta} * \xi^{\beta\tau}{}_{;\tau}) =$$
$$= \frac{1}{2}(-g)^{1/2}[\gamma\delta\mu\nu](\delta^{\nu}_{\alpha}R^{\mu}_{\beta} - \delta^{\nu}_{\beta}R^{\mu}_{\alpha})R^{\delta\beta;\,\gamma} =$$
$$= \frac{1}{2}(-g)^{1/2}[\alpha\delta\gamma\mu]R^{\delta\beta;\,\gamma}R^{\mu}_{\beta}. \qquad (74)$$

Следующее из соотношения $\xi \times \xi = 0$ при его дифференцировании уравнение

$$\xi_{\gamma\delta} \times \xi^{\gamma\delta}_{;\tau} = \frac{1}{2}(\xi_{\gamma\delta} * \xi^{\gamma\delta})_{;\tau} = 0$$

было применено при вычислении (74) на основании (72) и (73) наряду с тождеством (64). Теперь выражение (71) получается путем деления (74) на $2(\xi^2)^2 = {}^1/_2\, R_{\sigma\tau}R^{\sigma\tau}$, что и требовалось доказать.

Вектор α_β, определенный равенством (71), существует во *всяком* римановом пространстве, в котором тензор кривизны Риччи является ненулевым и дифференцируемым. Геометрия теории Эйнштейна — Максвелла отличается от этих более общих римановых пространств тем обстоятельством, что *этот вектор* (как показал Райнич) не произволен, но *является градиентом «фазы» α электромагнитного поля.* Отсюда следует, что ротор α_β должен быть равен нулю:

$$\alpha_{\beta;\,\gamma} - \alpha_{\gamma;\,\beta} = \alpha_{\beta,\,\gamma} - \alpha_{\gamma,\,\beta} = 0. \qquad (75)$$

Обратно, если равен нулю ротор (75), то криволинейный интеграл от вектора α_β, задаваемого равенством (71), от избранной нами точки 0 до произвольной точки x^μ *дает* скалярную «фазу»

$$\alpha = \int_0^x \alpha_\beta \, dx^\beta + \alpha_0 \tag{76}$$

с точностью до аддитивной постоянной α_0, если, конечно, рассматриваемая область пространства является односвязной, а путь интегрирования не проходит через точки, где величина $R_{\sigma\tau}R^{\sigma\tau}$ обращается в нуль. Для многосвязных пространств соотношение (75) следует заменить требованием, чтобы интеграл от α_β по любому замкнутому пути был равен целому кратному 2π:

$$\oint \alpha_\beta \, dx^\beta = 2\pi n \tag{77}$$

при условии, что этот путь не проходит через какие-либо нулевые точки. Это условие в совокупности с требованием Райнича

$$R^\alpha_\alpha = 0, \quad R_{00} \geqslant 0,$$
$$R^\mu_\alpha R^\beta_\mu = \delta^\beta_\alpha \left(\frac{1}{4} R_{\sigma\tau} R^{\sigma\tau} \right) \tag{78}$$

составляет *необходимые и достаточные* условия описания физики Эйнштейна и Максвелла данной римановой геометрией в случае, если тензор кривизны $R_{\mu\nu}$ не является нулевым. Возможно, что случай нулевых полей также можно включить в рассмотрение, если внести какое-то простое изменение в формулировку теоремы; однако этот вопрос пока еще не исследован.

Почему именно геометрия Райнича — Римана?

Назовем геометрией Райнича — Римана геометрию любого 4-пространства, удовлетворяющего условиям (77) и (78) и обладающего сигнатурой $(- + + +)$. При этом встает вопрос об основаниях, на которых можно было бы считать геометрию Райнича — Римана особенно естественным и заслуживающим рассмотрения

типом геометрии. По-видимому, наиболее естественным отправным пунктом для обсуждения этого вопроса был бы вариационный принцип для соответствующей лагранжевой скалярной плотности. Каковы бы ни были более фундаментальные достоинства геометрии Райнича — Римана, исключительно привлекательно уже то обстоятельство, что она приводит в пустом искривленном пространстве ко всему стандартному механизму максвелловских натяжений, электромагнитных волн и порождения гравитационных сил под действием энергии поля.

III. ЗАРЯД КАК ПОТОК СИЛОВЫХ ЛИНИЙ В МНОГОСВЯЗНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

A. Электромагнетизм в рамках заданной метрики

Представляется, что «исконно единая теория поля», или геометродинамика, сводится исключительно к дифференциальным уравнениям и алгебраическим соотношениям для кривизны [соотношения (75) и (78)] (иначе говоря, кажется, что она имеет исключительно локальный характер), поскольку рассматривается одно связное пространство. Но как только допускается возможность существования двух или более топологически различных путей, связывающих какие-либо две точки (см. фиг. 3), появляется необходимость наложить *условие периодичности*

$$\oint_{C_i} \alpha_\beta \, dx^\beta = 2\pi n_i \tag{79}$$

на каждый топологический различный замкнутый контур C_i, не содержащий нулевые точки. Лишь при удовлетворении этого условия напряженность электромагнитного поля $\mathbf{f} = e^{*\alpha}\xi$ будет однозначной функцией координат. Условие (79) имеет нелокальный характер. Ввиду этого обстоятельства встает вопрос, какие *дополнительные* нелокальные черты приобретает физика Эйнштейна — Максвелла в многосвязном пространстве.

Для того чтобы *ввести в теорию заряд в качестве нелокального следствия электродинамики без источников*

в многосвязном пространстве, мы находим удобным вновь перейти от идей более привычной геометродинамики к языку теории Максвелла в заданном пространственно-временно́м континууме. Для сохранения наглядности терминологии мы не будем отрицать внутренней нелинейности электродинамики. Поле обладает плотностью энергии, искривляющей пространство. Эта кривизна влияет на распространение поля, и поэтому поле удвоенной напряженности распространяется иначе, чем исходное поле. В дальнейшем исследовании эта нелинейность будет скрываться за кулисами, и мы ограничим свое внимание уравнениями Максвелла и их следствиями. Однако эти следствия останутся справедливыми и в том случае, когда уравнения Максвелла для напряженности будут дополнены уравнениями Эйнштейна для метрики.

Понятие многосвязности имеет топологический характер и логически предшествует идее метрики. Поэтому в разделе Б мы резюмируем необходимые начальные топологические понятия, включая концепции непрерывности, многообразия, границы, гомологического класса, числа Бетти, дифференцируемого многообразия, координатного включения. Ни одно пространство, топологически не эквивалентное открытому подпространству эвклидова пространства, не может быть охвачено несингулярным образом несингулярной координатной системой. Это обстоятельство делает исследование тензоров, векторов и других величин с помощью компонент — в традиционном духе тензорного исчисления — менее действенным, чем *внутренний* тип исчисления, знакомый по векторному анализу в 3-пространстве.

В разделе В использованы внутренние обозначения Картана наряду с обычными обозначениями для определения необходимых понятий дифференциальной геометрии в пространстве, еще не связанном с какой-либо метрикой: векторов, антисимметричных тензоров, векторного произведения, ротора, не зависящей от метрики половины уравнений Максвелла, теоремы Стокса, сохранения потока, заряда, векторного потенциала, теоремы де-Рама и появления электрического и магнитного зарядов. Конец раздела В посвящен важнейшим дополни-

тельным следствиям, вытекающим из существования метрики: дуальности, расходимости, дифференциальным операторам, соотношениям и интегральным формулам, включающим эти операторы.

Раздел Г содержит исследование электрического и магнитного полей на одной или двух пространственноподобных гиперповерхностях как начальных условий уравнений Максвелла. Найдено новое свойство заряда, обязанное многосвязности, а сам заряд описан с помощью теории гармонических векторных полей.

Б. Топология

Топология и точечные множества

Топология [1]) изучает неколичественное понятие «близости». Это понятие само по себе не определено обычным образом; напротив, топология аксиоматически определяет, что следует понимать под окрестностью точки: открытое или замкнутое подпространство. Можно задать следующее соотношение этого понятия с «близостью»: 1) Окрестность точки есть подпространство, содержащее все точки, достаточно близкие к x. 2) Открытое подмножество является таким подмножеством, все точки которого достаточно близки любой из его точек. 3) Закрытое подпространство C является таким подмножеством, все точки которого сколь угодно близки к C.

Пусть два подпространства X_1 и X_2 будут эквивалентны друг другу как множества, так что они содержат также одинаковое число точек. Тогда они будут эквивалентны как топологические пространства, т. е. *гомеоморфны,* если имеется взаимно однозначное преобразование h множества X_1 в X_2, называемое *гомеоморфизмом,* при котором открытые подмножества X_1 находятся во взаимно однозначном соответствии с открытыми подмножествами X_2. Эти открытые подмножества определяют

[1]) Стандартным руководством по топологии точечных пространств является книга Келли [25]. Краткое изложение этой теории см. в монографии Л. С. Понтрягина [26]. Наиболее существенные при изучении многообразий определения и теоремы топологии точечных пространств можно найти в монографии П. С. Александрова [27].

понятие «близости». Поэтому мы можем сказать, что *гомеоморфизм h* является взаимно однозначным соответствием X_1 и X_2, всегда переводящим близкие точки одного пространства в близкие точки другого, т. е. обладает свойством непрерывности, как и обратное соответствие.

Мы нашли необходимым рассматривать пространства, топологически более общие по сравнению с пространствами, принятыми в физике. Тем не менее мы ограничимся использованием весьма специального класса пространств, именуемых многообразиями. Можно определить n-многообразие [28], представляющее собой *топологическое пространство, которое является* 1) *локально-эвклидовым пространством n измерений,* 2) *хаусдорфовым пространством* и 3) *обладающим счетным базисом.*

1) *Локально-эвклидовым пространством n* измерений называется пространство, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной n-мерному эвклидову пространству.

2) *Хаусдорфовым* называется пространство, каждые две различные точки которого обладают различными окрестностями. Можно сказать, что в пространстве Хаусдорфа никакие две различные точки не могут быть произвольно близки друг к другу; это интуитивное определение может быть выражено более точно иными способами.

3) Пространство обладает *счетным базисом,* если имеется счетное множество открытых пространств, каждое из которых является объединением открытых пространств этого множества. Это условие накладывается для того, чтобы многообразие не было чрезмерно большим.

Примеры многообразий

Простейшим примером многообразий являются эвклидовы пространства. Эвклидовым n-мерным пространством R^n называется пространство всех сочетаний n вещественных чисел $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ с обычно употребляемой топологией. Открытое подпространство пространства R^n, определяемое как

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum (x^i)^2 < 1, \tag{80}$$

называется n-мерным шаром (n-шаром). Это также есть n-многообразие, и оно фактически гомеоморфно связано с R^n преобразованием $x \to x\,(1 - x \cdot x)^{-1}$. Другим известным примером многообразия является n-фаза S^n, являющаяся подпространством R^{n+1} и состоящая из всех точек $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{x=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1. \tag{81}$$

Из S^n может быть получено проективное n-пространство P^n путем отождествления противоположных точек S^n, т. е. точка $\mathbf{x}$ в P^n соответствует неупорядоченной паре $(\mathbf{x}, -\mathbf{x})$ точек $\mathbf{x}$ в R^{n+1}, удовлетворяющих

а *б* *в*

Фиг. 4. Пронзённые сферы.

Удаляя полярные шапки сферы и отождествляя возникающие при этом границы как это отмечено соответствующими точками A и B (см. *а*), мы приходим к пространству, которое можно назвать пронзённой сферой W_1. Это совмещение может быть сделано наглядным при совмещении краев через центр сферы (см. *б*), так что полученное многообразие представляет собой шар с каналом, просверленным через его центр. Если в сфере просверлено k таких каналов, причем ни один из них не пересекается с другим, мы приходим к k-кратно пронзённой сфере W_k, и, в частности, к двукратно пронзённой сфере W_2 (см. *в*). Здесь изображены двумерные многообразия, в то время как в тексте W_k — трехмерные многообразия.

условию $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$. В общей теории относительности пространства S^3 и P^3 использовались в космологических моделях [29, 30]. Другое многообразие — 3-тор, T^3, — часто встречается в теоретической физике в тех случаях, когда накладываются периодические граничные условия. Далее, n-тор представляет собой пространство, точки которого суть семейства точек в R^n: $x = \{\mathbf{x} + 2\pi\mathbf{m}\}_{\mathbf{m}}$, где $\mathbf{m}$ пробегает все наборы n целых чисел $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$. В качестве последнего примера сконструируем пространство W_m, простым образом иллюстрирующее некоторые топологические возможности, интересные в исследованиях в связи с идеей заряда. Исходя из 3-сферы S^3 будем рассматривать лишь те точ-

ки $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, которые удовлетворяют как условию $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$, так и условию $|x^4| \leqslant (1 - \varepsilon)$. Далее отождествим каждую точку $(x^1, x^2, x^3, 1 - \varepsilon)$ с точкой $(x^1, x^2, x^3, -1 + \varepsilon)$. Это можно назвать «пронзённой» сферой W_1. Вырезая k пар противостоящих шаров, например, $x^4 > 1 - \varepsilon$ и $x^4 < 1 + \varepsilon$, упомянутых выше, вокруг k пар точек в S^3 [таких, что $\mathbf{x} = (0, 0, 0, \pm 1)$] и аналогичным образом отождествляя границы, можно сконструировать k раз «пронзённую» сферу W_k (фиг. 4).

Произведение многообразий

Если имеется p-многообразие $\mathfrak{M}^p$ и q-многообразие $\mathfrak{M}^q$, то мы можем построить $(p + q)$-многообразие $\mathfrak{M}^p \times \mathfrak{M}^q$, точки которого являются парами (x, y), где x есть какая-либо точка из $\mathfrak{M}^p$, а y — какая-либо точка из $\mathfrak{M}^q$. Эвклидово 2-пространство R^2 является, например, произведением $R^1 \times R^1$; аналогично, $R^n = R^1 \times R^1 \times \ldots \times R^1$ (n сомножителей). Заметим, что S^1 и T^1 гомеоморфны:

$$\{x + 2\pi n\}_n \to (x^1, x^2) \quad \text{при} \quad x^1 + ix^2 = e^{ix}. \tag{82}$$

[Мы пишем $T^1 = S^1$, так как обычно нет необходимости различать гомеоморфные многообразия, если только при их конструировании нет нужды именовать точки, т. е. $\{x + 2\pi n\}_n \in T^1$ и $(x^1, x^2) \in S^1$.] Тогда T^n является произведением n окружностей: $T^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$. Можно также видеть, что $W_1 = S^2 \times S^1$.

В изложенных примерах мы не определили топологию; иными словами, мы не сделали выбора открытых множеств, так как соответствующий выбор довольно очевиден.

Дифференцируемые многообразия

Для рассмотрения дифференциальной геометрии нам потребуется как понятие многообразия, так и понятия *дифференцируемой функции* на этом многообразии. Введем критерии диференцируемости функций, определенных на многообразии $\mathfrak{M}$. Такие функции называются *дифференцируемой структурой* на $\mathfrak{M}$, а само $\mathfrak{M}$ называется *дифференцируемым многообразием*. Для класса

дифференцируемых функций установлены некоторые аксиомы [28].

Для каждой точки x на $\mathfrak{M}$ существует открытая окрестность U точки x и n вещественных функций $x_1(x)$, $x_2(x)$, ..., $x_n(x)$, определенных на U и удовлетворяющих следующим условиям.

а) Преобразование $x \to (x_1(x), x_2(x), \ldots, x_n(x))$ окрестности U в R^n является гомеоморфным отображением U на открытое множество R^n, так что каждая функция f, определенная в U, может быть выражена через x_i:

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{83}$$

б) Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке, принадлежащей U, в том и только в том случае, если она определена в открытой окрестности W этой точки, причем W содержится в U, а $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обладает непрерывными производными всех порядков по x_i для значений x_i, соответствующих точкам, принадлежащим W.

Окрестность U с функциями x_i называется *координатным включением*, а набор функций $x_1(x)$, $x_2(x)$, ..., $x_n(x)$ системой *локальных координат* в U. Из этого определения следует, что координата $x_i(x)$ является дифференцируемой функцией.

Проиллюстрируем определение дифференцируемых функций на некоторых из упомянутых выше многообразий. На n-сфере мы можем определить $x_i(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, как дифференцируемую функцию точек x в S^n. Тогда некоторые n из этих $n+1$ функций будут служить координатами вокруг любой точки в части «а» изложенных аксиом, в то время как остальные дифференцируемые функции даются частью «б». В случае проективного n-пространства P^n, точки которого представляют собой пары точек $(\mathbf{x}, -\mathbf{x})$ в S^n, мы называем $f(x)$ дифференцируемой функцией на P^n, если $f((\mathbf{x}, -\mathbf{x}))$ является дифференцируемой функцией от $x \in S^n$. В случае пространства W_1, или «пронзённой» сферы, мы рассматриваем x_1, x_2 и x_3 как дифференцируемые функции, как если бы они были заданы на сфере. Величина x^4 является дифференцируемой лишь в области $|x^4| < 1 - \varepsilon$. Эта функция не определена на границах, отождествляемых друг с другом. Поэтому следует использовать другую функцию, которая определена и может называться дифференцируемой, вклю-

чая эту область отождествления. Для этой цели определим $f(x)$ равенствами

$$\begin{aligned} f(x) &= 1-\varepsilon-x^4(x) \quad \text{при} \quad 0 < x^4 \leqslant 1-\varepsilon, \\ f(x) &= -1+\varepsilon-x^4(x) \quad \text{при} \quad -1+\varepsilon \leqslant x^4 < 0 \end{aligned} \tag{84}$$

и потребуем дифференцируемости $f(x)$ при $x^4 \neq 0$. Локальные координаты вокруг любой точки можно выбрать из числа функций x_1, x_2, x_3, x_4 и f.

Несмотря на то обстоятельство, что каждому топологическому многообразию можно приписать более одной дифференцируемой структуры [31], будем в дальнейшем сокращенно называть дифференцируемые многообразия просто многообразиями, а в понятие топологии включать наряду с *топологией* дифференцируемую структуру.

В. Дифференциальная геометрия и формулировка уравнений Максвелла

Дифференцируемые функции и поля

Для установления количественной формы физических законов мы вынуждены использовать вектора и тензора в искривленном пространстве. В многосвязном пространстве знакомый язык тензорного анализа не представляется самым удобным для описания этих величин. Нужен новый, *внутренний,* метод описания.

Тензорный анализ уже не является наиболее пригодным. Он требует использования несингулярных координатных систем, в которых могут быть заданы компоненты векторов и тензоров. Однако, согласно определению дифференцируемого многообразия, одна несингулярная координатная система недостаточна для того, чтобы охватить многообразие, не эквивалентное топологически открытому множеству в эвклидовом пространстве. Для физических приложений существенно, чтобы можно было различать сингулярные и регулярные тензорные поля. Сингулярность поля приводит обычно к появлению в дифференциальных уравнениях *плотности локализованного источника.* Такой источник представляет собой негеометрические заряд или массу,

которые не были исключены из теории, но лишь идеализированно сведены к точечному заряду или к точечной массе. Поэтому мы *исключаем все сингулярности полей* для того, чтобы исследовать содержание чистой геометродинамики. Рассмотрим, например, двумерную поверхность единичной сферы. Полярные углы θ и φ, называемые обычно координатами, не покрывают, однако, этой поверхности несингулярным образом: 1) Метрика

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{85}$$

обладает компонентой $g^{\varphi\varphi} = \sin^{-2}\theta$, обращающейся в бесконечность в двух полюсах $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. 2) Векторное поле, явно не обладающее сингулярными компонентами ($v_\theta = 1$ и $v_\varphi = 0$), не является вполне определенным в смысле направления на каждом из полюсов. Эта сингулярность вектора $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\theta$ ставит под вопрос возможность называть θ координатой. 3) На меридиане Гринвича угол φ претерпевает скачок от 0 до 2π, что делает эту величину также непригодной в качестве координаты. 4) Полярные углы образуют корректно определенные «координатные включения» лишь в области $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$.

Необходимо иное «координатное включение». Установим на северном полюсе небольшой валик, на который нанесена краска, и начнем его двигать вниз по меридиану Гринвича к южному полюсу. Нас интересует новая координатная система, регулярная во всей закрашенной области. Конечно, новая координатная система может оказаться регулярной и в более широкой области. Рассмотрим, например, точку $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi/2$. Пусть это будет северный полюс новой системы полярных углов θ' и φ', в которых 1) координаты прежнего северного полюса суть $\theta' = \pi/2$, $\varphi' = \pi/2$, 2) границы прежнего меридиана Гринвича суть $\theta' = \pi/2$, $\varphi' = \pi/2$ и $\theta' = \pi/2$, $\varphi' = 3\pi/2$ и 3) прежний южный полюс имеет координаты $\theta' = \pi/2$ и $\varphi' = 3\pi/2$. Очевидно, существует обширная область, на которой перекрываются старое и новое координатные включения. Более того, в любой наперед заданной точке сферы хорошим поведением обладает по меньшей мере *одна* несингулярная пара

координат: θ, φ или θ', φ'. Если мы не знаем, что представляют собой несингулярные координаты, значит мы еще не определили дифференцируемой структуры многообразия. Однако, как только мы уточним понятия дифференцируемой функции, определится смысл *дифференцируемого тензорного поля:* тензор является дифференцируемым в точке x, если его компоненты по отношению к (несингулярной) координатной системе в окрестности x являются дифференцируемыми функциями в точке x.

Внутреннее представление тензоров

В произвольном дифференцируемом многообразии невозможно описать такое поле, как поле Максвелла, задав его компоненты $F_{\alpha\beta}$ в некоторой конкретной системе координат. Если же вообще использовать компоненты, то их следует задать по отношению к координатам нескольких различных координатных включений. В каждом включении существует значительная свобода выбора координатных систем. Поэтому компоненты напряженности поля Максвелла в различных координатных системах сами по себе не так существенны, как понятие, к которому можно прийти, абстрагируясь от них, — внутреннее значение **F** напряженности поля Максвелла. Этот метод абстрагирования известен из анализа декартовых векторов. Утверждение, что вектор скорости **v** известен, означает возможность задания в случае нужды компонент **v** в любой несингулярной системе координат. Мы предлагаем обобщить этот абстрактный формализм на случай искривленного пространства и тензоров выше 1-го ранга.

В векторном анализе удобно выражать связь между вектором **v** и его компонентами формулой

$$\mathbf{v} = v^m \mathbf{e}_m, \tag{86}$$

где компоненты v^m зависят от выбора базисных векторов $\mathbf{e}_m$. «Внутренняя дифференциальная геометрия» выражает соотношение того же типа более явно в виде

$$\mathbf{v} = v_\alpha \operatorname{grad} x^\alpha, \tag{87}$$

а в более кратких обозначениях — в виде

$$\mathbf{v} = v_\alpha \mathbf{d}x^\alpha, \tag{88}$$

где **d** означает градиент. В современных учебниках дифференциальной геометрии [32—36] даже заменяется **d** на d (как будем позже делать и мы); однако пока что мы сохраним жирный шрифт в обозначениях, чтобы подчеркнуть векторный характер операции градиента.

Будучи примененной к любой функции точки $f = f(P)$, операция градиента выражается во внутренних обозначениях привычным образом

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \operatorname{grad} x^\alpha$$

или

$$\mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \mathbf{d}x^\alpha. \tag{89}$$

Ковариантные векторы, например $\operatorname{grad} f$ или $\mathbf{d}f$, и $\mathbf{v}$ являются линейными комбинациями градиентов координат и называются дифференциальными формами 1-го ранга, или 1-формами.

Вместо того чтобы в качестве базисных векторов в некотором координатном включении использовать градиенты конкретного набора координат, можно также взять в качестве базисных векторов любой другой набор n линейно независимых векторов $\boldsymbol{\omega}^\alpha$. Здесь индекс α указывает номер вектора, а не его компоненты. Компоненты вектора $\mathbf{v}$ по отношению к этому набору базисных векторов можно вновь выразить в виде разложения

$$\mathbf{v} = v_\alpha \boldsymbol{\omega}^\alpha. \tag{90}$$

Компоненты $\operatorname{grad} f$ или $\mathbf{d}f$ в этой системе называются пфаффовыми производными от f (или $f_{,\alpha}$) по отношению к $\boldsymbol{\omega}^\alpha$:

$$\operatorname{grad} f = \mathbf{d}f = f_{,\alpha} \boldsymbol{\omega}^\alpha. \tag{91}$$

Внешние дифференциальные формы

Для описания максвелловского поля требуется обратиться к использованию тензора более высокого ранга, или 2-формы. Простейшая 2-форма α является

векторным произведением двух 1-форм (**u** и **v**), так что

$$\alpha = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$$

во внутренних обозначениях, или

$$\alpha_{\mu\nu} = u_\mu v_\nu - v_\mu u_\nu \tag{92}$$

на привычном языке тензорного анализа, или

$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha_{\mu\nu}\,\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu = \frac{1}{2}\alpha_{\mu\nu}(\operatorname{grad} x^\mu) \times (\operatorname{grad} x^\nu)$$

в форме, связывающей внутренние обозначения с представлением через компоненты.

Операция *внешнего произведения* $\wedge$ обобщает векторное произведение на случай умножения векторов и антисимметричных тензоров таким образом, что вновь получаются антисимметричные тензоры. Эта операция неприменима к симметричным тензорам. Внешнее произведение $\wedge$ определяется требованиями 1) ассоциативности, 2) дистрибутивности, а для произведения двух векторов также 3) антикоммутативности, т. е. для любых двух 1-форм или векторов **u** и **v** мы требуем

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}. \tag{93}$$

В частности, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = 0$.

Внешнее произведение p векторов, или линейная комбинация этих векторов, образует p-форму. Пусть каждый вектор выражен через базисные векторы ω^α. Произведение p векторов, или линейная комбинация таких произведений, может быть выражена как

$$\begin{aligned} a = \sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p} a_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p} \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \omega^{\alpha_p} = \\ = (p!)^{-1} a_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p} \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge \omega^{\alpha_p}. \end{aligned} \tag{94}$$

Здесь коэффициенты, или *тензорные компоненты*, уже определены в первой сумме. Появляющиеся во второй сумме компоненты *определяются* через них из требования, чтобы они были функциями, антисимметричными по своим индексам.

Внешнее произведение $\mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 = (\operatorname{grad} x^1) \times (\operatorname{grad} x^2)$ геометрически означает площадь, заключенную между базисными векторами, направленными

вдоль осей x^1 и x^2. Аналогично, произведение $\mathbf{d}x^1 \wedge dx^2 \wedge \mathbf{d}x^3$ представляет собой объем параллелепипеда, построенного на этих трех базисных векторах.

Правило коммутации p-формы $\mathbf{a}$ и q-формы $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (-1)^{pq}\, \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \tag{95}$$

может быть просто найдено. В эту схему внешних дифференциальных форм функции (инварианты. — *Ред.*) и векторы включаются соответственно как 0-формы и 1-формы.

Внешнее дифференцирование

Оператор $\mathbf{d}$, переводящий 0-форму f в 1-форму $\mathbf{d}f = \operatorname{grad} f$, может быть распространен на случай форм более высокого ранга:

$$\mathbf{a} = (p!)^{-1} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\, \mathbf{d}x^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{\alpha_p} \tag{96}$$

с помощью определения

$$\mathbf{da} = (p!)^{-1}\, \mathbf{d}a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \wedge \mathbf{d}x^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{\alpha_p}. \tag{97}$$

На языке тензорного анализа это соотношение принимает вид

$$(\mathbf{da})_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} = \sum (-1)^P \frac{\partial a_{\beta_2 \ldots \beta_{p+1}}}{\partial x^{\beta_1}}, \tag{98}$$

где $P = 0$ или $+1$ в зависимости от того, образуют ли индексы $\beta_1, \ldots, \beta_{p+1}$ соответственно четную или нечетную перестановку индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$. Операция $\mathbf{d}$, или *внешняя производная*, представляет собой антисимметричное дифференцирование, обобщающее обычные операции градиента и ротора. Она линейна:

$$\mathbf{d}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \mathbf{d}\mathbf{a}_1 + \mathbf{d}\mathbf{a}_2. \tag{99}$$

Будучи примененной к произведению, в котором первый сомножитель является p-формой, она дает

$$\mathbf{d}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{da}) \wedge \mathbf{b} + (-1)^p\, \mathbf{a} \wedge \mathbf{db}. \tag{100}$$

Повторное применение ее дает нуль:

$$\mathbf{d}(\mathbf{da}) = 0. \tag{101}$$

Это обстоятельство было использовано при переходе от выражения (96) для внешней дифференциальной формы **a** к выражению (97) для ее внешней производной **da**. Здесь базисные векторы $\mathbf{d}x^\alpha = \operatorname{grad} x^\alpha$ не дают вклада при применении к ним операции внешнего дифференцирования:

$$\mathbf{d}\,\mathbf{d}x^\alpha = \operatorname{rot}\operatorname{grad} x^\alpha = 0. \tag{102}$$

Такой простоты мы не получим при выражении той же внешней формы **a** через более общую систему базисных векторов ω^α; таким образом, $\mathbf{d}\omega^\alpha = \mathbf{rot}\,\omega^\alpha$ обычно не обращается в нуль.

В уравнениях Максвелла фигурируют два антисимметричных тензора, $f_{\alpha\beta}$ и $*f_{\alpha\beta}$, или — в инвариантной терминологии — две 2-формы:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} f_{\alpha\beta}\,\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta$$

и

$$*\mathbf{f} = \frac{1}{2} *f_{\alpha\beta}\,\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta. \tag{103}$$

Рассмотрим внешнюю производную от **f**, т. е. 3-форму

$$\mathbf{df} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)\mathbf{d}x^\gamma \wedge \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta. \tag{104}$$

Здесь коэффициент при типичной базисной 3-форме, такой, как $\mathbf{d}x^\lambda \wedge \mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu$ при $\lambda < \mu < \nu$, равен

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial f_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}, \tag{105}$$

или, в локальной системе Минковского,

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{h} && (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3), \\ &\operatorname{rot}\mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial T} && (\lambda = 0, \mu, \nu = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{106}$$

Согласно уравнениям Максвелла, эти выражения обращаются в нуль, так что половина этих уравнений принимает вид

$$\mathbf{df} = 0. \tag{107}$$

Аналогично, при отсутствии зарядов другая половина уравнений Максвелла принимает вид

$$\mathbf{d}*\mathbf{f}=0. \tag{108}$$

Для удовлетворения первой системы уравнений Максвелла достаточно представить напряженность поля $\mathbf{f}$ как ротор от 4-потенциала

$$\mathbf{f}=\mathbf{da},$$

или

$$\frac{1}{2}f_{\alpha\beta}\,\mathbf{d}x^{\alpha}\wedge\mathbf{d}x^{\beta}=\mathbf{d}\left(a_{\gamma}\,\mathbf{d}x^{\gamma}\right)=\mathbf{d}a_{\gamma}\wedge\mathbf{d}x^{\gamma}=$$
$$=\frac{\partial a_{\gamma}}{\partial x^{\delta}}\mathbf{d}x^{\delta}\wedge\mathbf{d}x^{\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial a_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)\mathbf{d}x^{\alpha}\wedge\mathbf{d}x^{\beta},$$

или

$$f_{\alpha\beta}=\frac{\partial a_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial a_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}. \tag{109}$$

Тогда внешняя производная от $\mathbf{f}$ автоматически обращается в нуль

$$\mathbf{df}=\mathbf{dda}\equiv 0. \tag{110}$$

Интегрирование. Мотивировка и метод

Какие интегральные свойства 2-формы $\mathbf{f}$ могут быть получены из ее дифференциальных свойств? В чем состоит различие в этих выводах, если 1) мы знаем лишь, что $\mathbf{df}=0$, и 2) нам известно, кроме того, что $\mathbf{f}=\mathbf{da}$? Как следует, выражаясь в более общей форме, определять интегралы от форм?

Интегрирование p-формы по p-мерному пространству может быть проведено так, что оно приведет к скалярной или не зависящей от системы координат величине. Комбинация локальной q-формы ($q\neq p$) и локального p-мерного элемента поверхности приводит к величине, обладающей локальной ориентацией; однако не существует инвариантного метода сложения векторов или других ориентированных величин в различных точках таким образом, чтобы он приводил к корректной сумме. Поэтому следует рассмотреть лишь интегралы от p-форм по p-мерным поверхностям.

Поверхности интегрирования требуют для своего описания построения одного или более p-мерных координатных включений. Разобьем поверхность на криволинейные p-мерные параллелепипеды в количестве, по меньшей мере равном числу необходимых координатных включений. Рассмотрим *стандартный единичный p-мерный* куб I^p с координатами λ^α

$$0 \leqslant \lambda^\alpha \leqslant 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p). \tag{111}$$

Нанесем точки I^p на $\mathfrak{M}$

$$C : I^p \to \mathfrak{M}. \tag{112}$$

Это отображение C может рассматриваться как криволинейный параллелепипед в $\mathfrak{M}$, но мы будем называть его *кубом в* $\mathfrak{M}$, так как у нас нет метрики для определения „искривленности" и „прямолинейности". Этот куб можно описать с помощью координат следующим образом:

$$x^\alpha = C^\alpha(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^p), \tag{113}$$

где C^α — дифференцируемые функции. Например,

$$x^\alpha = C^\alpha(1 - \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^p) \tag{114а}$$

и

$$x^\alpha = C^\alpha(\lambda^2, \lambda^1, \ldots, \lambda^p) \tag{114б}$$

суть кубы в $\mathfrak{M}$, отличные от C и обладающие противоположной ориентацией по сравнению с C, в то время как

$$x^\alpha = C^\alpha(1 - \lambda^1, 1 - \lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^p) \tag{115}$$

есть куб в $\mathfrak{M}$, отличный от C, но имеющий ту же ориентацию. Ориентация куба влияет на знак вычисляемого нами интеграла, но другие различия между кубами, включающими одни и те же точки в $\mathfrak{M}$, не влияют на значение этого интеграла. Если отображение $f : I^p \to I^p$ является гомеоморфизмом, т. е. обладает положительным якобианом, то мы не будем делать различий между кубами $x = C(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)$ и $x = C(f(\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n))$. Поэтому мы будем говорить об *«ориентированном кубе в* $\mathfrak{M}$ ». Подставим параметрическое уравнение нашей

поверхности (113) в выражение (96) для p-формы $\mathbf{a}$ и получим отображение

$$C : \mathbf{a} \to \mathbf{a}^C, \tag{116}$$

переводящее форму $\mathbf{a}$ на $\mathfrak{M}$ в форму $\mathbf{a}^C$ на I^p:

$$\mathbf{a}^C = (p!)^{-1} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \mathbf{d}x^{\alpha_1}(\lambda) \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{\alpha_p}(\lambda) =$$

$$= (p!)^{-1} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \left(\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \lambda^{\beta_1}}\right) \mathbf{d}\lambda^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge \left(\frac{\partial x^{\alpha_p}}{\partial \lambda^{\beta_p}}\right) \mathbf{d}\lambda^{\beta_p} =$$

$$= \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_p} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \frac{\partial (x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_p})}{\partial (\lambda^1, \ldots, \lambda^p)} \mathbf{d}\lambda^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}\lambda^p. \tag{117}$$

Заменим элемент объема $\mathbf{d}\lambda^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}\lambda^p$ на элемент объема стандартного единичного куба $\mathbf{d}\lambda^1 \mathbf{d}\lambda^2 \ldots \mathbf{d}\lambda^p$ и *определим* интеграл от $\mathbf{a}$ по ориентированному кубу C как величину

$$\int_C \mathbf{a} = \int_{I^p} \mathbf{a}^C = \int \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_p} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \frac{\partial (x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_p})}{(\lambda^1, \ldots, \lambda^p)} d\lambda^1 \ldots d\lambda^p. \tag{118}$$

Появление под знаком интеграла якобиана гарантирует независимость его значения а) от выбора координат x^α в $\mathfrak{M}$ и б) от выбора отображения $I^p \to \mathfrak{M}$, используемого для представления ориентированного куба в $\mathfrak{M}$.

Определив интеграл по одному ориентированному криволинейному p-кубу, мы представим теперь всю p-мерную поверхность в $\mathfrak{M}$ как сумму конечного числа таких ориентированных p-кубов:

$$c = C_1 + C_2 + \ldots + C_N. \tag{119}$$

Оказывается, однако, более удобным и важным выход за рамки рассмотрения этих поверхностей (см. ниже теорию гомологии) и включение несколько более общих объектов, а именно p-цепей c, являющихся просто формальными линейными комбинациями *конечного* числа ориентированных p-кубов:

$$C = \sum_{i=1}^{N} s^i C_i. \tag{120}$$

Может показаться, что единственными необходимыми алгебраическими величинами являются знаки «+» и «—», так что если через C обозначен ориентированный куб, определенный отображением (113), то $-C$ есть ориентированный куб, определенный (114). Однако может оказаться, что один и тот же куб C неоднократно встречается на краю поверхности; поэтому мы запишем nC, где n — положительное или отрицательное целое число или нуль. Если в соотношении (120) потребовать, чтобы все коэффициенты s^i были целыми числами, то мы будем называть c целой цепью. В связи с интегрированием представляется более целесообразным придавать коэффициентам s^i значения любых вещественных чисел, так что в соотношении (120) мы имеем дело с *вещественной p-цепью*. Интеграл от p-формы $\mathbf{a}$ по p-мерной поверхности, или p-цепь c, определится тогда как сумма элементарных вкладов вида (118):

$$\int_C \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N} s^i \int_{C_i} \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N} s^i \int_{I^p} \mathbf{a}^{C_i}. \tag{121}$$

Поверхности или p-цепи и их границы. Теория гомологии

Особенно интересна связь между p-цепью или поверхностью c и ее границей ∂c. Эта связь весьма проста в случае куба C.

Обозначим символом C^{j+} j-ю верхнюю грань куба C; тогда для $(p-1)$-мерного куба будем иметь

$$x^\alpha = C^\alpha(\lambda^1, \ldots, \lambda^{j-1}, 1, \lambda^{j+1}, \ldots, \lambda^p). \tag{122}$$

Пусть аналогичным образом C^{j-} обозначает нижнюю грань

$$x^\alpha = C^\alpha(\lambda^1, \ldots, \lambda^{j-1}, 0, \lambda^{j+1}, \ldots, \lambda^p). \tag{123}$$

Определим теперь границу ориентированного куба C как цепь

$$\partial C = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1}(C^{j+} - C^{j-}). \tag{124}$$

Очевидно, p-мерный куб обладает $(p-1)$-мерной границей. Можно представить в свою очередь существование $(p-2)$-мерной границы у этой $(p-1)$-мерной поверхности. Однако, будучи замкнутой, эта поверхность, очевидно, не имеет вообще никакой границы. К этому же выводу можно прийти, дважды используя уравнение (124). Полученный таким образом для кубов результат применим к объемам и поверхностям и вообще к любым p-цепям, построенным из кубов.

Таблица 5

Примеры p-цепей как замкнутых (циклов), так и открытых [1])

Размерность, p	Описание p-цепи, c	Является ли цепь замкнутой (циклом)?	Ее граница, dc
1	Открытая линия	Нет	Две конечные точки
1	Замкнутая линия в эвклидовом пространстве	Да	0
1	Замкнутая линия вокруг меньшего обхвата тора . . .	»	0
1	Замкнутая линия вокруг большего его обхвата	»	0
2	Верхняя сторона диска . .	Нет	Окружность
2	Поверхность сферы в плоском 3-пространстве	Да [2])	0
2	Поверхность сферы, вписанной в горловину ручки . . .	» [3])	0
2	Поверхность тора	»	0
3	Объем сферы в плоском 3-пространстве	Нет	Сфера
3	Трехмерное замкнутое пространство	Да	0

[1]) Нет необходимости включать в эту таблицу последний столбец с указанием на отсутствие всюду границы у $(p-1)$-мерной границы dc p-цикла c: $d(dc)=0$.

[2]) Да; к тому же она *ограничивает* некоторый объем, внутренний по отношению к сфере.

[3]) Да; однако не существует конечного объема, внутреннего по отношению к сфере, который она ограничивала бы.

Зададим p-цепь в виде

$$c = \sum_i s^i C_i. \tag{125}$$

Определим тогда границу p-цепи с помощью границ составляющих ее кубов C_i в $\mathfrak{M}$ уравнением

$$\partial c = \sum_i s^i \partial C_i. \tag{126}$$

При обращении в нуль границы p-цепи

$$\partial c = 0 \tag{127}$$

эта цепь c называется *циклом*, или *замкнутой p-цепью*. Например, замкнутая ориентируемая поверхность, разбитая на кубы и представленная с помощью цепи c, задается как замкнутая цепь. Как для замкнутой цепи, так и для незамкнутой цепи (как для равного нулю ∂c, так и не равного нулю) из формулы $\partial\partial C_i = 0$ и из определения (125) следует, что граница любой цепи является замкнутой цепью, т. е. *не имеет* границы:

$$\partial\,\partial c = 0. \tag{128}$$

Некоторые иллюстрации этого вывода приводятся в табл. 5.

Это определение понятия границы эквивалентно выводу общего вида теоремы Стокса, а следовательно, частного случая теоремы Гаусса с ее электромагнитными приложениями. Более детальный анализ границ и их взаимоотношений рассматривается в алгебраической топологии, известной как теория гомологии [1]). Некоторые идеи этой теории необходимы для исследования электродинамики без источников в многосвязном пространстве. В качестве примера рассмотрим сферу в 3-пространстве, проведенную вокруг одной из горловины ручки, а в примере с более низкой пространственной раз-

[1]) Основная теория in extenso приведена в I томе монографии Эйленберга и Стинрода [37]; II том содержит рассмотрение практических методов вычислений. Менее пространное изложение теории, включая приложения, выполнено Зейфертом и Трелфаллем [38]. Детали и дополнительные интуитивные замечания см. в монографиях Лефшеца [39] и Зейферта и Трелфалля [40]. Строгое рассмотрение *кубической* сингулярной теории гомологии дано Серре [41].

мерностью (см. фиг. 3) — окружность, описанную в рассмотренном 2-пространстве вокруг одной из горловин ручки. В силу существования ручки *не существует непротиворечиво определенного понятия внутренней стороны* сферы или окружности. Воображаемое существо, заключенное, скажем, на внутренней стороне сферы, может войти в ручку, свободно пройти через нее, выйти из другого входа, пройти по наружной стороне сферы и увидеть, что делается вне его «тюрьмы». Такая же топологическая информация может быть установлена в аналогичной форме при рассмотрении сферической границы как пузыря. Пусть этот пузырь будет сжимаем, но не может лопнуть. Он втягивается внутрь ручки, проталкивается сквозь туннель, выходит с другой его стороны и расширяется вокруг противоположной горловины ручки. Пусть положительная сторона исходной и новой сфер определена направлением какой-либо силовой линии, проходящей через туннель и пересекающей обе сферы. Определим две *ориентированные* поверхности, или 2-цепи c_1 и c_2, или более явно c_1^2 и c_2^2, для выражения размерности ($p = 2$) этих цепей. Тогда можно сказать, что c_1 и c_2 взаимно *гомологичны*. Когда в более общем случае две цепи c_1^p и c_2^p образуют границу конечной $(p+1)$-мерной цепи в смысле

$$\partial c_a^{p+1} = c_1^p - c_2^p, \tag{129}$$

мы говорим о *гомологичности этих двух p-цепей*. В примере, приведенном на фиг. 3, две 1-цепи, или окружности, вокруг двух горловин полностью охватывают в совокупности двумерную область туннеля, или 2-цепь c_a^2. В противоположность этому окружность c_g^1, описанная в 2-пространстве на фиг. 3 вокруг области, не включающей горловины ручки, сама по себе полностью *окружает* 2-пространственную область, или 2-цепь c_b^2, внутреннюю по отношению к ней:

$$\partial c_b^2 = c_g^1. \tag{130}$$

Если в этом случае замкнутая линия c_g^1 подвергается одностороннему давлению и соответствующей деформа-

ции, то через нее не пройдет рукав, а она сама не сможет вновь расшириться в окружность. Вместо этого она сожмется и исчезнет. Если в более общем случае p-цикл c^p сам по себе представляет границу

$$c^p = \partial c^{p+1}, \tag{131}$$

то можно сказать, что он *гомологичен нулю.*

Две взаимно гомологичные поверхности (или вообще цепи) принадлежат к одному и тому же классу гомологии. По определению, класс гомологии состоит из всех замкнутых p-цепей, или p-циклов, которые взаимно гомологичны. Класс гомологии, включающий p-цикл c_i^p, будем обозначать через $\{c_i^p\}$. В топологически эвклидовом пространстве все p-циклы могут быть сжаты до исчезновения их, и, таким образом, все они гомологичны нулю и потому принадлежат нулевому классу гомологии $\{c_0^p\} = \{0\}$. В многосвязном пространстве p-циклы, вообще говоря, не гомологичны друг другу. Число *линейно независимых* классов гомологии порядка p

$$\{c_1^p\},\ \{c_2^p\},\ \ldots,\ \{c_{R_p}^p\} \tag{132}$$

называется p-м *числом Бетти* R_p этого пространства (табл. 6), число же

$$\chi = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p R_p \tag{133}$$

называется эйлеровой характеристикой этого пространства.

Рассмотрим две поверхности, принадлежащие одному классу гомологии, тождественные между собой во всем, за исключением «бородавки», или пузырька, на одной из них. Вычтем эти поверхности друг из друга, и они уничтожатся, за исключением пузырька. Результирующая поверхность, подобная малой сфере, гомологична нулю. Это рассуждение без труда обобщается на случай p-циклов любого порядка. Поэтому при подсчете числа различных классов гомологий мы всегда отбрасываем гомологичный нулю класс циклов. Как правило, существует бесконечное множе-

Таблица 6

Классы гомологии $\{c_1^p\}$, $\{c_2^p\}$, ..., $\{c_{R_p}^p\}$ и числа Бетти для двух случаев пространств

p-цикл является *p*-мерной областью или *p*-цепью, для которой характерно отсутствие границы.

Пространство: Двумерная поверхность тора, погруженная в эвклидово 3-пространство, короче говоря, 2-тор T^2. Его числа Бетти равны $R_0 = 1$, $R_1 = 2$, $R_2 = 1$. Эйлерова характеристика $\chi = 0$.

Классы гомологии	Описание типичного *p*-цикла в этом классе гомологии
$\{c^0\}$	Точка; все точки гомологичны между собою
$\{c_1^1\}$	Замкнутая кривая, проходящая вокруг меньшего обхвата тора [1])
$\{c_2^1\}$	Замкнутая кривая вокуг большего обхвата [1])
$\{c^2\}$	Сам 2-тор

Пространство: Исходя из 3-мерного замкнутого пространства (наглядно говоря, 3-мерной сферы в эвклидовом 4-пространстве), топологически модифицируем его так, чтобы образовалась одна ручка с горловинами M_1 и M_2. Полученная таким образом пронзённая сфера $W_1 = S^2 \times S^1$ обладает числами Бетти $R_0 = 1$, $R_1 = 1$, $R_2 = 1$, $R_3 = 1$ и эйлеровой характеристикой $\chi = 0$.

Классы гомологии	Описание типичного *p*-цикла в этом классе гомологии
$\{c^0\}$	Точка; все точки гомологичны между собою
$\{c^1\}$	Замкнутая силовая линия, однократно проходящая сквозь ручку [2])
$\{c^2\}$	Замкнутая поверхность вокруг горловины ручки M_1 [3])
$\{c^3\}$	Само 3-пространство

[1]) Замкнутая кривая, которую можно стянуть к нулю, может быть построена с помощью двух таких линий, описанных во взаимно противоположных направлениях вокруг тора.

[2]) Замкнутая линия, которую можно стянуть к нулю, представляет собою линейную комбинацию с противоположными знаками (т. е. разность) двух таких линий. Замкнутая кривая, идущая вокруг горловины M_1 ручки, может быть удалена отсюда и стянута к нулю. Три измерения позволяют произвести такую операцию, которая невозможна в пространстве низшей размерности (см. фиг. 3).

[3]) Замкнутая поверхность, которая может быть стянута к нулю, является линейной комбинацией двух таких поверхностей с противоположными знаками.

ство классов гомологии и ни один из них не является более фундаментальным, чем остальные. Это положение напоминает смещения кристаллической решетки, например простой кубической решетки; эти смещения переводят решетку в состояния, эквивалентные исходному. Можно задать сдвиг a вдоль оси x, либо сдвиг в направлении оси y, либо ход конем — сдвиг на a в направлении оси x и одновременно на $2a$ в направлении оси y — и т. д. Общий случай допустимого движения может быть представлен в виде линейной комбинации трех основных или линейно независимых движений. Однако не существует однозначного выбора этих основных движений. Аналогично, под числом различных классов гомологии мы разумеем число линейно независимых классов гомологии в следующем смысле: Система классов гомологии $\{c_i^p\}$ называется *линейно независимой* в том и только в том случае, если соотношение

$$\sum_i s^i \{c_i^p\} = \left\{ \sum_i s^i c_i^p \right\} = \{0\},$$

где коэффициенты s^i — вещественные числа, имеет место лишь при условии равенства всех этих коэффициентов нулю, т. е. в том и только в том случае, когда никакая линейная комбинация циклов c_i^p не является границей. В случае линейной независимости классов гомологии $\{c_i^p\}$ мы будем говорить, что циклы, представляющие эти классы гомологии, являются *независимыми циклами* c_i^p.

Рассмотренные основные соотношения между цепями, циклами и границами можно кратко изложить в чисто алгебраической форме. Ввиду возможности сложения цепей их совокупность в многообразии $\mathfrak{M}$ образует группу. Мы можем также умножать p-цепь на вещественное число. Следовательно, p-цепи образуют бесконечномерное векторное пространство $C_p(\mathfrak{M}, R)$, называемое *группой вещественных p-цепей*. Цепи c^p, удовлетворяющие условию $dc^p = 0$, образуют подпространство $Z_p(\mathfrak{M}, R)$, называемое *группой p-циклов*. Каждая цепь c^p, представляющая собой границу ($c^p = dc^{p+1}$), является циклом. Следовательно, набор всех ограничи-

вающих p-циклов $B_p(\mathfrak{M}, R)$ является векторным пространством, представляющим собой подпространство пространства $Z_p(\mathfrak{M}, R)$. Пространство-частное

$$H_p(\mathfrak{M}, R) = \frac{Z_p(\mathfrak{M}, R)}{B_p(\mathfrak{M}, R)} \tag{134}$$

называется p-мерной *группой гомологии* многообразия $\mathfrak{M}$ с вещественными коэффициентами. Число Бетти R_p равно размерности векторного пространства

Фиг. 5. Проективная плоскость P^2 как пример неориентируемого многообразия.

Точки проективной плоскости суть пары противоположных точек на 2-сфере S^2. На схеме мы видим верхнюю полусферу c^2 сферы S^2 и ее экватор. Две точки экватора S^2, подобные обозначенным через c^0 на схеме, соответствуют в точности *одной* точке c^0 на P^2. Аналогичным образом одна линия c^1 на P^2 появляется дважды, как это видно на экваторе сферы S^2. Рассматривая c^0, c^1 и c как цепи, т. е. как объекты, разбитые на большое конечное число малых „кубов", мы видим, что $\partial c^2 = 2c^1$, если c^2 и c^1 ориентированы, как это указано стрелками на схеме. Так как c^2 обладает границей $2c^1$ в ∂-смысле границы, то число Бетти $R_2(P^2)$ равно нулю. Кривая c^1 не обладает границей: $\partial c^1 = c^0 - c^0 = 0$. Однако c^1 является границей 2-цепи $\frac{1}{2}c^2$, так что каждый 1-цикл является ограничивающим, и $R_1(P^2) = 0$. Точка c^0, конечно, не обладает границей, она сама не является границей ни для одной 1-цепи, так что имеется один класс 0-циклов $\{c^0\}$, отличный от нуля, и $R_0(P^2) = 1$.

$H_p(\mathfrak{M}, R)$ и является конечным для всех компактных многообразий.

Может оказаться, что в замкнутом (компактном) n-многообразии каждая n-цепь обладает границей, так что $R_n = 0$. Такое многообразие называется неориентируемым; в противном случае $R_n = 1$, и многообразие ориентируемо. Это обстоятельство поясняет различие между понятием границы, выраженным с помощью ∂, и понятием о границе как о совокупности точек на «краю» множества. В многообразии каждая точка обладает окрестностью, гомеоморфной эвклидову пространству, так что в нем никакая точка не может рассматриваться на «краю», или «границе», многообразия. Однако если мы разбиваем многообразие на кубы

$$\mathfrak{M} = c^n = \sum_{i=1}^{N} C_i^n, \tag{135}$$

то может оказаться невозможным выбрать такую ориентацию этих кубов, чтобы лицевые стороны всех их попарно уничтожились при вычислении ∂c. Таково положение, когда многообразие является неориентируемым. На фиг. 5 дан пример, в котором вычислены числа Бетти для проективной плоскости P^2.

Теорема Стокса

Теперь можно сформулировать теорему Стокса для интеграла от p-формы $\mathbf{a}$ по p-мерной границе ∂c^{p+1} $(p+1)$-цепи c^{p+1}:

$$\int_{c^{p+1}} \mathbf{da} = \int_{\partial c^{p+1}} \mathbf{a}. \tag{136}$$

Интеграл от некоторой формы по цепи определяется с помощью интеграла (118) по стандартному единичному кубу. Поэтому доказательство теоремы Стокса сводится к интегрированию по частям на этом кубе I^{p+1}. Простейший случай теоремы Стокса состоит в том, что берется 0-форма или функция f, градиент которой интегрируется по кривой c^1 с концами x_1 и x_0:

$$\int_{c^1} \mathbf{d}f = \int_{\partial c^1 = x_1 - x_0} f \equiv f(x_1) - f(x_0). \tag{137}$$

Мы приняли здесь, что интеграл от функции по 0-кубу (по точке) равен значению этой функции в этой точке. Для 1-формы, например для напряженности магнитного поля $\mathbf{h} = h_i \mathbf{d}x^i$ в 3-пространстве, теорема Стокса принимает вид

$$\int_{c^2} \mathbf{dh} \equiv \frac{1}{2} \int_{c^2} \left(\frac{\partial h_j}{\partial x^i} - \frac{\partial h_i}{\partial x^j} \right) \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j = \int_{\partial c^2} h_i \, \mathbf{d}x^i. \tag{138}$$

Эту формулу обычно называют теоремой Стокса. Формула (136) включает также теорему Гаусса, как можно видеть при рассмотрении 2-формы:

$$* \mathbf{e} = \frac{1}{2!} * e_{ij} \, \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j. \tag{139}$$

В этом случае для объема c^3 в 3-пространстве

$$\int_{c^3} \mathbf{d}*\mathbf{e} \equiv \frac{1}{3!}\int_{c^3}\left(\frac{\partial * e_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial * e_{ki}}{\partial x^j}+\frac{\partial * e_{ij}}{\partial x^k}\right)\mathbf{d}x^i\wedge\mathbf{d}x^j\wedge\mathbf{d}x^k =$$

$$= \int_{c^3}\left(\frac{\partial * e_{23}}{\partial x^1}+\frac{\partial * e_{31}}{\partial x^2}+\frac{\partial * e_{12}}{\partial x^3}\right)\mathbf{d}x^1\wedge\mathbf{d}x^2\wedge\mathbf{d}x^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\partial c^3} * e_{ij}\,\mathbf{d}x^i\wedge\mathbf{d}x^j \equiv \int_{\partial c} * \mathbf{e}. \qquad (140)$$

Это соотношение принимает обычный вид теоремы Гаусса в плоском пространстве, если заменить $*e_{23}$ на e_1 и т. д.

Приложения теоремы Стокса. Электрический заряд, магнитный заряд и векторный потенциал

Особый интерес представляют два частных случая теоремы Стокса:

1) Если c^{p+1} является *замкнутой цепью*, т. е. циклом, а $\mathbf{a}=\mathbf{a}^p$ — p-формой, то формула (136) имеет вид

$$\int_{c^{p+1}} \mathbf{d}\mathbf{a}^p = 0, \quad \text{если} \quad \partial c^{p+1} = 0. \qquad (141)$$

2) Называем $\mathbf{a}^p$ *замкнутой формой*, если $\mathbf{d}\mathbf{a}^p = 0$; для нее теорема Стокса дает

$$\int_{\partial c^{p+1}} \mathbf{a}^p = 0, \quad \text{если} \quad \mathbf{d}\mathbf{a}^p = 0. \qquad (142)$$

Этот второй случай можно выразить в виде *закона сохранения*. Пусть c_a и c_b — гомологичные p-циклы, так что $c_b - c_a = dc^{p+1}$. Тогда соотношение (142) принимает вид

$$\int_{\partial c^{p+1}} \mathbf{a}^p = \int_{c_b} \mathbf{a}^p - \int_{c_a} \mathbf{a}^p = 0. \qquad (143)$$

Иными словами, *интеграл от замкнутой формы по замкнутой поверхности зависит лишь от класса гомологии*

этой поверхности. Значение этого интеграла называется *периодом* $\mathbf{a}$ на $\{c_a\}$ при совпадении классов гомологии c_a и c_b. Согласно уравнениям Максвелла (104) и (108), как $\mathbf{f}$, так и $*\mathbf{f}$ представляют собой замкнутые формы. Назовем периоды этих тензоров следующим образом [1]):

$$\int_{c^2} \mathbf{f} = 4\pi p^* = 4\pi \text{ (магнитный заряд) } \{c^2\}), \tag{144а}$$

$$\int_{c^2} *\mathbf{f} = 4\pi q^* = 4\pi \text{ (электрический заряд } \{c^2\}); \tag{144б}$$

эти утверждения будут обоснованы в следующем параграфе.

Если напряженность электромагнитного поля получается из векторного потенциала $\mathbf{a} = a_\mu \mathbf{d}x^\mu$, то поток силовых линий сквозь всякую замкнутую ($\partial c^2 = 0$) поверхность c^2 равен нулю:

$$\int_{c^3} \mathbf{f} = \int_{c^2} \mathbf{da} = \int_{\partial c^2} \mathbf{a} = 0. \tag{145}$$

Иными словами, *факт существования векторного потенциала означает, что магнитный заряд не существует.*

В качестве разумных примеров класса гомологии поверхности c^2 можно привести а) представляющиеся сходными поверхности большего или меньшего размера, взятые одновременно, т. е. на общей пространственноподобной поверхности, и б) аналогичные предыдущим поверхности в более ранние или в более поздние моменты времени. Величины $\mathbf{f}$ и $*\mathbf{f}$ обе являются замкнутыми. Тогда из соотношения (143) следует, что через все эти

---

[1]) Звездочка справа вверху означает, что мы измеряем оба рода зарядов в чисто геометрических единицах длины. Так как переход от геометрических единиц напряженности поля $\mathbf{f}$ ($см^{-1}$) к общепринятым единицам напряженности поля $\mathbf{F}$ (*гаусс* или $г^{1/2}/см^{1/2} \cdot сек$) осуществляется путем умножения на величину $c^2/G^{1/2}(г^{1/2}см^{1/2} \cdot сек)$, то и переход от геометрических единиц заряда q^* ($см$) к обычным электростатическим единицам заряда ($г^{1/2} \cdot см^{3/2}/сек$) осуществляется путем умножения на ту же величину:

$$q\,(\text{CGSE}) = \frac{c^2}{G^{1/2}} q^* \ (см).$$

поверхности проходит один и тот же поток линий вне зависимости от размера поверхности (закон Гаусса) и независимо от момента времени (закон сохранения заряда). Поэтому определенный соотношениями (144) заряд обладает теми свойствами, которых мы обычно требуем. Четырехмерный характер рассмотрения позволил объединить в один закон два закона, обыкновенно рассматривавшихся порознь. Короче говоря, на основании уравнений Максвелла мы показали, что заряд (рассматриваемый как силовые линии, включенные в топологию) постоянен во времени вне зависимости от отдельных изменений электромагнитного поля и вне зависимости от изменений пространства. В доказательстве этого закона сохранения нет даже упоминания о метрике.

Для более детального обоснования отождествления (144) рассмотрим плоское пространство с обычными пространственными и временной координатами. Тогда формы $\mathbf{f}$ и $*\mathbf{f}$ описывают электрическое и магнитное поля следующим образом:

$$\mathbf{f} = -\mathbf{d}t \wedge (e_i\, \mathbf{d}x^i) + (*h)_{ij}\, \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j, \qquad (146а)$$

$$*\mathbf{f} = \mathbf{d}t \wedge (h_i\, \mathbf{d}x^i) + (*e)_{ij}\, \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j. \qquad (146б)$$

Здесь e_i и h_i — соответственно компоненты обычных электрической и магнитной напряженностей, а $(*h)_{xy} = h_z$, $(*e)_{yz} = e_x$ и т. д. В том случае, когда c^2 является замкнутой поверхностью, например сферой на гиперповерхности $T = \text{const}$, а $\mathbf{f}$ — напряженность электромагнитного поля, порожденного частицей, заключенной внутри этой сферы, то величины магнитного монополя p^* и электрического заряда q^* этой частицы могут быть найдены по формулам

$$4\pi p^* = \int_{c^2} (*\mathbf{h})_{ij}\, \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j = \int_{c^2} \mathbf{f}, \qquad (147а)$$

$$4\pi q^* = \int_{c^2} (*\mathbf{e})_{ij}\, \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j = \int_{c^2} *\mathbf{f}. \qquad (147б)$$

Первые равенства в этих соотношениях представляют собой знакомые нам выражения закона Гаусса в пло-

ском пространстве; вторые же равенства справедливы ввиду того обстоятельства, что члены, содержащие $\mathbf{d}T$ в соотношениях (146), не привносят никакого вклада в интеграл по поверхности, подобной c^2, на которой T постоянно. Иными словами, вектор $\mathbf{d}T = \operatorname{grad} T$ ортогонален любой поверхности, на которой T постоянно, и поэтому проекция $\mathbf{d}T$ на эту поверхность равна нулю. Таким образом, мы видим, что соотношения (144) являются непосредственным обобщением привычных уравнений на случай искривленного пространства-времени.

Примеры пространств, допускающих существование заряда

Чтобы установить некоторую связь между весьма общим языком законов сохранения в последнем разделе и простым интуитивным изображением заряда на фиг. 3 в виде силовых линий, «захваченных» в топологические ручки, целесообразно привести здесь два примера пространств, допускающих существование заряда, т. е. пространств, включающих один или более рукавов: $R_2 \geqslant 1$. Этими примерами являются многообразия $R \times W_k$ и $R \times T^3$, уже определенные в разделе Б (см. п. «Примеры многообразий». «Произведение многообразий», стр. 258—260). В целях определения дифференцируемой структуры W_k (см. п. «Дифференцируемые многообразия», стр. 260), мы ввели на W_1 функцию $f(x)$; на W_k используем k таких функций $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть $c_i^2(r)$ есть сфера в W_k определенная уравнением $f_i(x) = r$. В двумерном аналоге W_k, изображенном на фиг. 4, эта сфера является дважды пронзённой ($k = 2$). Типичной поверхностью $c_1(r)$ является окружность, окружающая выход одной из трубок, связывающей противоположные стороны сферы. Типичная поверхность $c_2(r)$ окружает вход в другую трубку. В многообразии $R \times W_k$, являющемся произведением действительной линии ($-\infty < T < \infty$) и W_k на каждой гиперповерхности $T = \text{const}$, имеется отображение $c_i^2(r)$, которое мы назовем $t_i^2(r, T)$. Кроме того, p-е число Бетти $R_p(R \times W_k)$ для произведения многообразий равно p-му числу Бетти $R_p(W_k)$, относящемуся к самому мно-

гообразию W_k. Теперь рассмотрим на $R \times W_k$ 2-форму $\mathbf{f}$ или $*\mathbf{f}$. Поток силовых линий

$$4\pi p_i^*(r, T) = \int_{c_i^2(r, T)} \mathbf{f} \qquad (148а)$$

или

$$4\pi q_i^*(r, T) = \int_{c_i^2(r, T)} *\mathbf{f}, \qquad (148б)$$

очевидно, зависит от r и T. Чтобы убедиться в том, что $p_i^*(r, T)$ или $q_i^*(r, T)$ в действительности зависят лишь от i, нам следует а) потребовать выполнения равенства $\mathbf{df} = 0$ или $\mathbf{d} * \mathbf{f} = 0$ и б) заметить, что все поверхности $c_i^2(r, T)$ принадлежат к одному и тому же классу гомологии. Поверхностью $c_i^2(0,0)$ является 2-сфера. При возрастании r эта сфера проходит 3-пространство $c_i^3(R)$ $0 \leqslant r \leqslant R$, которое топологически тождественно объему $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2$ эвклидова 3-пространства. Исходя из этого мысленного образа 3-пространства $c_i^3(R)$ в привычном эвклидовом 3-пространстве R^3, находим границу пространства $c_i^3(R)$:

$$\partial c_i^3(R) = c_i^2(R, 0) - c_i^2(0, 0). \qquad (149)$$

Мы заключаем, что $c_i^2(r, 0)$ гомологична $c_i^2(0, 0)$. До сих пор не было введено никакого метрического понятия, так что можно предоставить $c_i^2(0, T)$ «пронзить» 3-поверхность $c_i^3(T)$ так же, как это было ранее проделано для r; тогда найдем

$$\partial c_i^3(T) = c_i^2(0, T) - c_i^2(0, 0), \qquad (150)$$

так что $c_i^2(0, T)$ и $c_i^2(0,0)$ гомологичны. Подобный же подход показывает, что $c_i^2(r, T)$ гомологично $c_i^2(r, 0)$. Таким образом, приходим к выводу, что, вообще говоря, все поверхности $c_i^2(r, T)$ для каждого данного i гомологичны между собой. Более того, уравнения $\mathbf{df} = 0$ и $\mathbf{d} * \mathbf{f} = 0$ свидетельствуют о том, что между гомологичными поверхностями не существует потерь потока

линий. Поэтому заряды $p_i^*(r,T)$ и $q_i^*(r,T)$ не зависят от r и T.

Приведенное обсуждение не использовало вообще метрики на $R \times W_k$ и поэтому справедливо для любой метрики, которую мы захотим ввести. Например, при некотором одном значении T пространственно-подобная гиперповерхность $T = \text{const}$ может иметь вид дважды «пронзённой» сферы (см. фиг. 4, *в*). В более поздний момент T оба конца одной из ручек могут сдвинуться, приближая аннигиляцию, подобно тому как это изображено на фиг. 3. Но до тех пор, пока топология в действительности не изменится, силовые линии останутся заключенными в ручку, и поток $4\pi q_i^*$ через замкнутую поверхность $c_i^2(r,T)$ не будет нарушаться возмущениями метрики.

В этом исследовании пространства-времени с рукавами $R \times W_k$ мы *предположили* существование замкнутых форм $*\mathbf{f}$ или $\mathbf{f}$, для которых величины заряда и монополя, согласно соотношениям (148), не равны все нулю. В следующем пункте настоящего раздела, посвященном теории де-Рама, мы увидим, что существует много таких форм. Это можно показать явно на простейшем примере $R \times T^3$.

Функции x^i $(i = 1, 2, 3)$ не могут быть определены непрерывно на всем торе T^3: необходимо учесть возможность появления аддитивных слагаемых, кратных 2π. Однако *градиенты* $\mathbf{d}x^i$ представляют собой дифференцируемые векторные поля. В более простом случае 2-тора один из этих градиентов может быть полем единичных векторов (красных!), очерчивающих меньшие окружности тора. Другое поле единичных векторов (зеленых!) может быть расположено параллельно большей окружности. Аналогично, могут быть определены векторные поля и в пространстве $R \times T^3$. Из них можно построить форму

$$*\mathbf{f} = \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3,$$

которая, очевидно, будет закрытой $(\mathbf{d} * \mathbf{f} = 0)$. Она описывает однородное электрическое поле в направлении x^1 [см. соотношение (146б)]. Интегрируя эту 2-фор-

му по поверхности $c_1^2(x^1, T)$, определенной уравнениями $T = \text{const}$, $x^1 = \text{const}$, получаем значение

$$4\pi q_1^* = \int\limits_{c_1^2(x^1, T)} \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 = (2\pi)^2. \qquad (151)$$

Таким образом, мы непосредственно убедились в том, что в этом случае q_1^* не зависит от x^1 и T. Можно было бы считать разумным называть q_1^* зарядом, поскольку невозможно легко представить себе метрики, заставляющей все силовые линии исходить из *малой* области пространства. Однако q_1^* явно измеряет полный поток напряженности электрического поля вокруг 3-тора через замкнутую поверхность c_1^2. Аналогично, существует два других независимых направления на 3-торе, в каждом из которых потоку может быть придано любое желаемое значение. Тогда это пространство будет обладать тремя произвольными константами заряда.

Теорема де-Рама доказывает существование 2-форм, обладающих зарядом

Существование примера зарядоподобного решения еще не является доказательством того обстоятельства, что такие решения всегда возможны в 4-пространстве с ручками, т. е. в пространстве с числом Бетти, равным $R_2 \geqslant 1$. Существование таких решений устанавливается *первой теоремой де-Рама* (см. [42, 43]). Если c_i^p представляют собой R_p независимых p-циклов многообразия $\mathfrak{M}$, а Q_i представляют собой R_p некоторых вещественных чисел, то существует p-форма $\mathbf{a}^p$, обладающая свойствами замкнутости ($\mathbf{da}^p = 0$) и дифференцируемости на всем $\mathfrak{M}$ и удовлетворяющая условиям

$$\int\limits_{c_i^p} \mathbf{a}^p = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, R_p). \qquad (152)$$

Чтобы перевести это на язык физики, заметим, что при $\mathbf{a} = \mathbf{f}^2$ или $*\mathbf{f}^2$ наша форма представляет собой напря-

женность электромагнитного поля или дуальную величину последней. Число Бетти R_2 равно числу ручек, а $Q_i = 4\pi p_i^*$ или $4\ \pi q_i^*$ — магнитному или электрическому потоку через i-ю ручку. Точнее, Q_i является потоком через поверхность i-го независимого класса гомологии, или, на языке математики, через так называемый *период* на этом классе. Снова напомним произвольность выбора R_2 независимо от основных классов гомологии 2-го порядка, линейные комбинации которых дают все классы гомологии 2-го порядка. Имеются случаи, когда довольно ясно, что две ручки хорошо разделены друг от друга, так что целесообразно было бы назвать Q_1 потоком через одну ручку, а Q_2 — потоком через другую. Однако можно также привести примеры, когда одна ручка находится в другой, причем $Q_1' = Q_1 + Q_2$ и $Q_2' = Q_1 - Q_2$, а также примеры других комбинаций, не менее естественных, чем Q_1 и Q_2, являющиеся мерами заряда. Таким образом, теорема де-Рама утверждает, что существует решение $\mathbf{f}$ уравнений Максвелла $\mathbf{df} = 0$ *или* решение $*\mathbf{f}$ уравнений Максвелла $\mathbf{d} * \mathbf{f} = 0$, которым можно произвольно приписать магнитные или электрические заряды.

Потребуем теперь, чтобы магнитный заряд каждой ручки был равен нулю; иными словами, пусть период $\mathbf{f}$ на каждом классе гомологии $\{c^2\}$ будет равен нулю:

$$\int \mathbf{f} = 0 \quad \text{при всех} \quad c^2. \tag{153}$$

Тогда *вторая теорема де-Рама* гарантирует существование векторного потенциала $\mathbf{a}$.

Если $\mathbf{f}^p$ есть p-форма на $\mathfrak{M}$, являющаяся замкнутой ($\mathbf{df}^p = 0$) и обладающая лишь нулевыми периодами, то $\mathbf{f}^p$ следует из дифференцируемой $(p-1)$-формы

$$\mathbf{f}^p = \mathbf{da}^{p-1}. \tag{154}$$

В этом случае, подобном тому, когда существует потенциал, так что одна форма $\mathbf{f}$ может быть записана в виде ротора от другой формы $\mathbf{a}$, форма $\mathbf{f}$ называется *экзактной*. Экзактность является более сильным в отношении формы требованием, чем ее замкнутость (табл. 7).

Таблица 7

Аналогии между понятиями циклов или замкнутых цепей (наподобие замкнутых поверхностей) и замкнутых форм [1])

	Поверхности
c	Общий случай p-цепи; поверхность при $p=2$
$dc=0$	Это означает, что p-цепь является замкнутой, и тогда c называется p-циклом. В случае $p=2$ — это замкнутая поверхность
$c^p=dc^{p+1}$	Это означает, что c^p является границей c^{p+1}, откуда следует, что $dc^p=0$; иначе говоря, $d^2=0$. Однако из соотношения $dc^p=0$ не следует с необходимостью существования некоторого c^{p+1}, для которого c^p есть граница
Теорема Стокса	Пусть задана *одна* цепь c^p, являющаяся границей: $c^p=dc^{p+1}$ (причем $dc^p=0$ и c^p — цикл); тогда на этом цикле период $\int_{c^p}\mathbf{f}$ равен нулю для *каждой* p-формы $\mathbf{f}$, являющейся замкнутой ($\mathbf{df}=0$)
Теорема де-Рама	Пусть задана *одна* цепь c^p, являющаяся замкнутой (c^p — цикл; $dc^p=0$); и пусть период $\int_{c^p}\mathbf{f}$ равен нулю для *каждой* p-формы, являющейся замкнутой; тогда c^p сама есть граница: $c^p=dc^{p+1}$

Продолжение

	Формы
$\mathbf{f}$	Общий случай p-формы; при $p=1$ — вектор, при $p=2$ — антисимметричный тензор.
$\mathbf{df}=0$	Тогда $\mathbf{f}$ называется замкнутой формой. Максвелловский тензор напряженности поля описывается замкнутой формой
$\mathbf{f}=\mathbf{da}$	Тогда $\mathbf{f}$ называется *экзактной* формой, или, как говорят, $\mathbf{f}$ *связывает* $\mathbf{a}$ (например, 4-потенциал). Тогда из соотношения $\mathbf{d}^2=0$ следует, что $\mathbf{f}$ автоматически является замкнутой. Однако из замкнутости формы $\mathbf{f}$ не следует с необходимостью существования какой-либо $(p-1)$-формы $\mathbf{a}$, по отношению к которой $\mathbf{f}$ является ротором или границей
Теорема Стокса	Пусть задана *одна* p-форма $\mathbf{f}$, являющаяся экзактной: $\mathbf{f}=\mathbf{da}^{p-1}$ (так что $\mathbf{df}=0$); тогда период $\int\limits_{c^p}\mathbf{f}$ обращается в нуль на *каждом* p-цикле $(\partial c^p=0)$
Теорема де-Рама	Пусть будет задана *одна* p-форма $\mathbf{f}$, являющаяся замкнутой $(\mathbf{df}=0)$ и пусть период $\int\limits_{c^p}\mathbf{f}$ обращается в нуль на *каждом* p-цикле $(\partial c^p=0)$; тогда $\mathbf{f}$ является экзактной формой: $\mathbf{f}=\mathbf{da}^{p-1}$

[1]) Определенное ранее и используемое здесь понятие цепи обозначает линейную комбинацию конечного числа кубов (форма определения, важная в случае открытых или некомпактных многообразий).

Понятия, основанные на метрике. Дуальность и дивергенция. «Фаза» уравнений Максвелла

Мы уже вывели теорему Гаусса и закон сохранения заряда из восьми уравнений Максвелла $\mathbf{df} = 0$ и $\mathbf{d}{*}\mathbf{f} = 0$, не обращаясь в какой-либо мере к понятиям метрики или длины. Все бремя этого доказательства ложилось на топологию. Мы избегли каких-либо ссылок на риманову геометрию, рассматривая поле Максвелла

$$\mathbf{f} = \tfrac{1}{2} f_{\mu\nu}\, \mathbf{d}x^{\mu} \wedge \mathbf{d}x^{\nu} \tag{155a}$$

и дуальное ему поле

$$*\mathbf{f} = \tfrac{1}{2} *f_{\mu\nu}\, \mathbf{d}x^{\mu} \wedge \mathbf{d}x^{\nu} \tag{155б}$$

как два совершенно независимых объекта. Учитывая взаимно однозначное соответствие между этими двумя полями, устанавливаемое при помощи метрики, мы извлекаем новую информацию из уравнений Максвелла и налагаем дополнительные ограничения на поле $\mathbf{f}$. Поэтому мы определим теперь дуальность и дивергенцию и изложим остальную часть содержания уравнений Максвелла.

Связь (11) между тензором напряженности электромагнитного поля $\mathbf{f}$ и дуальным ему тензором $*\mathbf{f}$ можно обобщить на связь между любой p-формой.

$$\mathbf{a} = (p!)^{-1} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\, \mathbf{d}x^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{\alpha_p} \tag{156}$$

и дуальной ей $(n-p)$-формой

$$*\mathbf{a} = \sum_{\substack{\alpha_1 < \ldots < \alpha_p \\ \beta_1 < \ldots < \beta_{n-p}}} (|g|)^{1/2} a^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \times \times [\alpha_1 \ldots \alpha_p \beta_1 \ldots \beta_{n-p}]\, \mathbf{d}x^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{\beta_{n-p}}. \tag{157}$$

Здесь n — размерность многообразия, p и $(n-p)$ — ранги наших двух форм, g — детерминант метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, а величины с поднятыми индексами суть контравариантные компоненты исходного тензора:

$$a^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = g^{\alpha_1 \mu_1} \ldots g^{\alpha_p \mu_p} a_{\mu_1 \ldots \mu_p}. \tag{158}$$

Применяя операцию дуального сопряжения к частному виду 0-формы (к постоянному скаляру 1), получаем *элемент объема*

$$*1 = |g|^{1/2}\,\mathbf{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^n. \tag{159}$$

Следующие общие формулы легче всего проверить, находя дуальную величину в ортонормированной системе отсчета:

$$**\mathbf{a}^p = (-1)^{np+p+s}\,\mathbf{a}^p \quad \text{(дважды дуальная величина)}; \tag{160}$$

$$\mathbf{a}^p \wedge *\mathbf{b}^p = \mathbf{b} \wedge *\mathbf{a} = (p!)^{-1}\, a^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} b_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} * 1 \tag{161}$$

(связь между внешним и скалярным произведениями);

$$(*\mathbf{a}) \wedge *(*\mathbf{b}) = (-1)^s\, \mathbf{a} \wedge *\mathbf{b} \tag{162}$$

(скалярное произведение дуальных форм, выраженное через скалярное произведение самих форм).

В этих уравнениях s изображает сигнатуру метрики: $s = 0$ на пространственно-подобных гиперповерхностях, где метрика имеет вид $+ + +$; $s = 1$ на 4-поверхностях с метрикой $- + + +$; вообще говоря, s есть максимальное число ортогональных векторов с отрицательной нормой.

Отметим, что p-форма и дуальная ей форма различаются таким образом, что интеграл

$$\int_{c^p} \mathbf{a} \tag{163}$$

может быть назван интегралом от касательной компоненты $\mathbf{a}$ по поверхности или от p-цепи c^p, в то время как величина

$$\int_{c^{n-p}} *\mathbf{a} \tag{164}$$

представляет собой интеграл от нормальной компоненты $\mathbf{a}$ по $(n-p)$-цепи c^{n-p}.

Рассмотрим напряженность электрического поля $\mathbf{e}$, являющуюся 1-формой в 3-пространстве, и построим дуальную ей величину, или 2-форму. Возьмем ее внешнюю производную и получим 3-форму. Наконец, вновь

произведем дуальное сопряжение и получим 0-форму или скаляр. Этот скаляр представляет собой дивергенцию электрического поля, что можно проще всего увидеть, записав изложенную последовательность операций в плоском пространстве:

$$\mathbf{e} = e_k \mathbf{d}x^k,$$

$$*\mathbf{e} = e_1 \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 + \text{Два аналогичных члена},$$

$$\mathbf{d} * \mathbf{e} = \frac{\partial e_1}{\partial x^1} \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 + \text{Два аналогичных члена} = \quad (165)$$

$$= (\operatorname{div} \mathbf{e}) \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3,$$

$$*\mathbf{d} * \mathbf{e} = \operatorname{div} \mathbf{e}.$$

Обобщая эти действия на случай искривленного пространства и на p-формы произвольных рангов, вводим в теорию форм обобщенную *дивергенцию*, или *ко-дифференциальную* операцию $\boldsymbol{\delta}$, переводящую p-форму $\mathbf{a}$ в $(p-1)$-форму:

$$\mathbf{b}^{p-1} = \boldsymbol{\delta} \mathbf{a}^p \equiv (-1)^{np+n+s+1} * \mathbf{d} * \mathbf{a}^p, \quad (166)$$

где знак «$\pm$» введен для упрощения формулировки теоремы Грина. В случае $(p-1)$-формы $\mathbf{a}$ и p-формы $\mathbf{b}$ эта теорема связывает n-кратный интеграл двух скаляров по всему многообразию $\mathfrak{M}$ или по его части с $(n-1)$-кратным интегралом от нормального вектора $\mathbf{a} * \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \wedge * \mathbf{b}$ по границе этой области

$$\int\limits_{\partial \mathfrak{M}} \mathbf{a} * \mathbf{b} = \int\limits_{\mathfrak{M}} \mathbf{d}(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = \int\limits_{\mathfrak{M}} \mathbf{b} * \mathbf{d}\mathbf{a} - \int\limits_{\mathfrak{M}} \boldsymbol{\delta} \mathbf{b} * \mathbf{a}. \quad (167)$$

Отрицательный оператор Даламбера

$$\Delta = \boldsymbol{\delta}\mathbf{d} + \mathbf{d}\boldsymbol{\delta} (= -\,„\nabla^2“ \text{ или } -\,„\Box“ \text{ для скаляра}). \quad (168)$$

переводит p-форму в p-форму. В частности, он переводит скаляр φ в скаляр

$$\Delta\varphi = \boldsymbol{\delta}\,\mathbf{d}\varphi = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\varphi^{;k}{}_{;k}. \quad (169)$$

Свойства дифференциальных операторов $\mathbf{d}$, $\boldsymbol{\delta}$ и Δ резюмируются в табл. 8.

Таблица 8

Свойства операции дуального сопряжения $*$, внешней производной $\mathbf{d}$ и операции взятия дивергенции δ в пространстве-времени и на пространственно-подобной гиперповерхности.

Обозначение $\mathbf{u} * \mathbf{v}$ пишется вместо векторного произведения $\mathbf{u} \wedge * \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge * \mathbf{u}$.

Свойство	4-многообразие	3-многообразие
Сигнатура метрики	$-+++$	$+++$
Форма, дважды дуальная $*$-форме	$** = (-1)^{p+1}$	$** = 1$
Дивергенция p-формы	$\delta = * \mathbf{d} *$	$\delta = * \mathbf{d} * (-1)^p$
Дифференциальный оператор 2-го порядка	„$-\Box^{\alpha} = \Delta \equiv \delta\mathbf{d} + \mathbf{d}\delta$	„$-\nabla^{2\alpha} = \Delta \equiv \delta\mathbf{d} + \mathbf{d}\delta$

Общие формулы для n-многообразия $\mathfrak{M}^n$ и любой метрики

$$* \mathbf{d} = \delta * (-1)^{p+1}; \quad * \delta = \mathbf{d} * (-1)^p$$

$$* \Delta = \Delta *; \quad \mathbf{d}\Delta = \Delta\mathbf{d}; \quad \delta\Delta = \Delta\delta$$

Теорема Стокса: $\int\limits_{\partial c} \mathbf{a} = \int\limits_{c} \mathbf{d}\mathbf{a}$

Интегральные формулы для случая $d\mathfrak{M}^n = 0$

δ является сопряженным $\mathbf{d}$ . .	$\int\limits_{\mathfrak{M}} \mathbf{b} * \mathbf{d}\mathbf{a} = \int\limits_{\mathfrak{M}} \mathbf{b} * \mathbf{a}$	$(\mathbf{a} = \mathbf{a}^{p-1}; \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}^{p})$
Δ является самосопряженным	$\int\limits_{\mathfrak{M}} \mathbf{b} * \Delta\mathbf{a} = \int\limits_{\mathfrak{M}} \Delta\mathbf{b} * \mathbf{a}$	$(\mathbf{a} = \mathbf{a}^{p}; \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}^{p})$
При $n = 4m - 1$ оператор $* \mathbf{d}$ является самосопряженным на $(2m-1)$-формах	$\int\limits_{\mathfrak{M}^{4m-1}} \mathbf{b} * (* \mathbf{d}\mathbf{a}) = \int\limits_{\mathfrak{M}^{4m-1}} (* \mathbf{d}\mathbf{b}) * \mathbf{a}$	$(\mathbf{a} = \mathbf{a}^{2m-1}; \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}^{2m-1})$

С помощью операции дивергенции δ полное содержание уравнений Максвелла может быть теперь кратко записано в виде

$$\mathbf{df} = 0 = \delta \mathbf{f}. \tag{170}$$

Г. Выбор решений уравнений Максвелла с помощью начальных условий. Заряд и волновое число

Различные формулировки задачи начальных условий. Резюме исследования

Хорошо известно, что достаточно задать на пространственно-подобной поверхности, обладающей метрикой, те или иные значения напряженностей электрического и магнитного полей, удовлетворяющие уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$, чтобы можно было продолжить эти поля в будущее и прошлое с помощью уравнений Максвелла [1]). Этот тип задания начальных условий является естественным аналогом задания значений x и $\dot{x}$ или x и p в некоторый момент времени, необходимых для предсказания движения классической частицы. Иной выбор дополнительных значений делается в лагранжевой формулировке. В применении к частице в последнем случае требуется задание x в начальный и конечный моменты, причем не требуется никакой информации об $\dot{x}$ или p. В случае максвелловского поля лагранжева формулировка требует задания на двух пространственно-подобных гиперповерхностях $T = T_1$ и $T = T_2$ либо напряженности магнитного поля, либо напряженности электрического поля, но не той и другой сразу. Этот «двухповерхностный» тип граничных условий удобен при рассмотрении классического действия для поля при интегрировании по пространственно-временному промежутку между этими двумя поверхностями или же в том случае, когда требуется определить квантовый фейнмановский пропагатор — амплитуду вероятности перехода от конфигурации C_1 на σ_1 к конфигурации C_2 на σ_2. При конечном различии

[1]) Подобная задача представляет собой известное приложение стандартной теории Коши — Ковалевской (см. [44]).

между двумя ковременами известно, как исследовать классическую краевую задачу в плоском пространстве и в некоторых типах искривленных пространств (см. ниже), но не в общем случае искривленного пространства. Однако, когда рассматриваемые две поверхности так близки друг к другу, что граничные значения могут рассматриваться как задающие напряженность магнитного поля и ее первую производную по ковремени, задача двухповерхностного типа сводится к задаче с граничными значениями на одной поверхности. Таким образом, мы впредь будем ограничиваться рассмотрением либо случая А, либо случая Б:

А) На σ заданы $\mathbf{h}$ и $\partial\mathbf{h}/\partial T$, а также R_2 электрических зарядов или потоков через ручки q_i^* раз и навсегда. (171А)

Б) На σ заданы $\mathbf{h}$ и $\mathbf{e}$. (171Б)

Проанализируем сначала связь между некоторой формой в 4-пространстве и ее проекцией или следом на 3-пространство, затем связь между метрикой на гиперповерхности и метрикой в 4-пространстве и, наконец, выразим уравнения Максвелла через формы на гиперповерхности. Мы увидим, что подходы (171А) и (171Б) в равной мере пригодны для однозначного определения эволюции системы в будущем. Наконец, мы кратко затронем вопрос о конкретизации начальных данных, однако не непосредственно в пространственноподобном виде, как в случаях (171А) и (171Б), а путем естественного обобщения анализа Фурье на случай искривленного пространства.

Понятие проекции или следа

В многообразии $\mathfrak{M}$ можно определить гиперповерхность σ с помощью уравнения вида $\varphi(x) = 0$, где φ является функцией, удовлетворяющей условию $d\varphi \neq 0$ на σ. При желании можно выбрать в качестве φ одну из наших координат и назвать ее T или x^0. Рассмотрим теперь операцию, позволяющую получить из всякого ковариантного тензора на 4-многообразии $\mathfrak{M}$ соответ-

ствующий тензор на 3-поверхности σ. В частном случае, когда $\varphi(x)$ является некоторой скалярной функцией на $\mathfrak{M}$, ее *проекцией, или следом,* на σ является функция $\psi^\sigma(x)$, определенная для x на σ сотношением

$$\varphi^\sigma(x) = \varphi(x), \qquad x \text{ на } \sigma. \tag{172}$$

Выражая φ через координаты как $\varphi(T, x^1, x^2, x^3)$, где σ задается уравнением

$$x^0(x) = T(x) = T_0, \qquad x \text{ на } \sigma, \tag{173}$$

соотношение (172) можно переписать в особенно простом виде

$$\varphi^\sigma(x^1, x^2, x^3) = \varphi(T_0, x^1, x^2, x^3). \tag{174}$$

Аналогично, для p-формы

$$\mathbf{a} = (p!)^{-1} a_{\mu_1 \ldots \mu_p}(x^0, x^1, x^2, x^3)\, \mathbf{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}x^{\mu_p} \tag{175}$$

мы получим *след* $\mathbf{a}^\sigma$ вектора $\mathbf{a}$ на σ, подставляя в соотношение (175) значения $x^0 = T_0$, $\mathbf{d}x^0 = 0$. Подобным же образом квадратичная форма

$$\mathbf{ds}^2 = g_{\mu\nu}\, \mathbf{d}x^\mu\, \mathbf{d}x^\nu \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{176}$$

на σ сводится к виду

$$\mathbf{dl}^2 \equiv g_{ij}{}^\sigma\, \mathbf{d}x^i\, \mathbf{d}x^j = (\mathbf{ds})^2 = g_{ij}\, \mathbf{d}x^i\, \mathbf{d}x^j \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{177}$$

откуда следуют значения компонент метрического тензора $g_{ij}{}^\sigma$, используемого на 3-многообразии σ.

Внешняя производная $\mathbf{d}^\sigma$ на σ не включает дифференцирования по x^0, однако тождество

$$\mathbf{d}^\sigma a^\sigma = (\mathbf{da})^\sigma \tag{178}$$

гарантирует нам отсутствие недоразумений при написании $\mathbf{d}$ вместо $\mathbf{d}^\sigma$.

Теперь можно определить *отнесенные к пространственно-подобной гиперповерхности* σ дуальную *магнитную* напряженность $*\mathbf{h}$ и дуальную *электрическую* напряженность $*\mathbf{e}$ с помощью уравнений

$$*\mathbf{h} = \mathbf{f}^\sigma, \tag{179а}$$

$$*\mathbf{e} = (*\mathbf{f})^\sigma. \tag{179б}$$

Здесь мы написали $*\mathbf{h}$ и $*\mathbf{e}$, так что $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ будут векторами или 1-формами обычного рода на σ. Использованное здесь дуальное сопряжение основывается на метрике g^{σ}_{ij} на σ и может быть обозначено через $*_\sigma$; это позволяет нам определить

$$\mathbf{h} = *_\sigma \mathbf{f}^\sigma, \tag{180а}$$

$$\mathbf{e} = *_\sigma (*\mathbf{f})^\sigma. \tag{180б}$$

Эти соотношения совместны с соотношениями (179) благодаря тождеству $*_\sigma *_\sigma = 1$. Мы никогда не будем применять $*_\sigma$ к форме на $\mathfrak{M}$, так что, если мы отбросим индекс у $*_\sigma$, как это сделано в соотношениях (179), смысл будет ясен из контекста. Из уравнений Максвелла $\mathbf{df} = 0 = \mathbf{d}*\mathbf{f}$ на $\mathfrak{M}$ и из тождества (178) получаем след уравнений Максвелла на σ: $\mathbf{df}^\sigma = 0 = \mathbf{d}(*\mathbf{f})^\sigma$. С помощью определений (180) и обозначений табл. 8 *следу уравнений Максвелла на пространственно-подобной гиперповерхности* можно придать вид

$$\boldsymbol{\delta}_\sigma \mathbf{h} = 0 = \boldsymbol{\delta}_\sigma \mathbf{e}. \tag{181}$$

Обычно мы будем отбрасывать индекс σ у $\boldsymbol{\delta}$, так как из контекста будет ясно, что речь идет о пространственно-подобной гиперповерхности. Мы используем индексы у $\boldsymbol{\delta}_\sigma$ и $*_\sigma$, так как они не являются просто следами на σ соответствующих операций на $\mathfrak{M}$; иначе говоря, для $\boldsymbol{\delta}$ или $*$ не существует тождества типа (178); например, $*_\sigma \mathbf{f}^\sigma$ есть 1-форма, в то время как $(*\mathbf{f})^\sigma$ есть 2-форма.

Уравнения Максвелла в 3-мерной форме

Выразить напряженность электромагнитного поля $\mathbf{f}$ через 3-мерные напряженности поля $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ будет проще, если уточнить выбор координаты ковремени T по сравнению с выбором ее в предыдущем разделе. Пусть T будет ковременем, измеряемым вдоль геодезической, восстановленной нормально к пространственно-подобной гиперповерхности σ_0. Тогда σ_0 задается уравнением $T(x) = 0$ и также есть пространственно-подобная ги-

перповерхность. Квадратичная форма $\mathbf{ds}^2$ может быть записана в виде

$$\mathbf{ds}^2 = -(\mathbf{d}T)^2 + \mathbf{dl}^2, \tag{182}$$

где $\mathbf{dl}^2$ — положительно определенная квадратичная форма, заданная метрикой на σ_T. Наша система геодезически параллельных поверхностей σ_T может продвинуть нас в 4-пространстве лишь на незначительный интервал по T (см. [47, 48]), но в 3-пространствах σ_T мы тем не менее имеем вполне определенную общую топологию. Из определений $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ мы знаем, что $\mathbf{f}$ и $*\mathbf{f}$ на σ должны иметь вид

$$\mathbf{f} = *_\sigma \mathbf{h} - \mathbf{d}T \wedge \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{183а}$$

$$*\mathbf{f} = *_\sigma \mathbf{e} + \mathbf{d}T \wedge \boldsymbol{\varkappa}, \tag{183б}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$ суть 1-формы, нуждающиеся еще в определении. Когда мы используем T и любые координаты x^i ($i = 1, 2, 3$) на σ_0 в качестве координат x^μ в 4-пространстве ($\mu = 0, 1, 2, 3$), где $x^0 = T$, компоненты метрики оказываются равными: $g_{00} = -1$, $g_{0i} = 0$. Тогда из соотношений (157) и (183) вычислим $*\mathbf{f}$ и $*(*\mathbf{f}) = -\mathbf{f}$. Таким образом мы находим, что $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{h}$, так что

$$\mathbf{f} = *_\sigma \mathbf{h} - \mathbf{d}T \wedge \mathbf{e}, \tag{184а}$$

$$*\mathbf{f} = *_\sigma \mathbf{e} + \mathbf{d}T \wedge \mathbf{h}. \tag{184б}$$

Так как $\mathbf{d}$ и $\mathbf{d}^\sigma$ связаны между собой формулой

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^\sigma + \mathbf{d}T \wedge \frac{\partial}{\partial T}, \tag{185}$$

эти выражения можно подставить в уравнения Максвелла $\mathbf{df} = 0 = \mathbf{d} * \mathbf{f}$ наряду с соотношениями (184а), (184б) и (100); тогда найдем

$$\mathbf{d}^\sigma(*_\sigma \mathbf{h}) + \mathbf{d}T \wedge \left(\frac{\partial}{\partial T} *_\sigma \mathbf{h} + \mathbf{d}^\sigma \mathbf{e}\right) = 0, \tag{186а}$$

$$\mathbf{d}^\sigma(*_\sigma \mathbf{e}) + \mathbf{d}T \wedge \left(\frac{\partial}{\partial T} *_\sigma \mathbf{e} - \mathbf{d}^\sigma \mathbf{h}\right) = 0. \tag{186б}$$

Здесь $\partial/\partial T$ — производная вдоль геодезической линии, нормальной к σ. Содержащие $\mathbf{d}T$ в уравнениях (186)

Таблица 9

След уравнений Максвелла на пространственно-подобной поверхности

	„Электрические уравнения"		„Магнитные уравнения"	
	Внутренние обозначения	3-векторные обозначения в плоском пространстве	Внутренние обозначения	3-векторные обозначения в плоском пространстве
Уравнения в 4-пространстве	$\delta \mathbf{f} = 0$ или $\mathbf{d} * \mathbf{f} = 0$	$\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ и $\partial \mathbf{e}/\partial T = \operatorname{rot} \mathbf{h}$	$\mathbf{df} = 0$ (или $\delta * \mathbf{f} = 0$)	$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$ и $\partial \mathbf{h}/\partial T = -\operatorname{rot} \mathbf{e}$
След на σ	$\mathbf{d}(*\mathbf{f})^\sigma = 0$ Определим $\mathbf{e} = *_\sigma (*\mathbf{f})^\sigma$; тогда $\mathbf{d}(*_\sigma \mathbf{e}) = 0$, или $\delta_\sigma \mathbf{e} = 0$	$\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$	$\mathbf{d}(\mathbf{f}^\sigma) = 0$ Определим $\mathbf{h} = *_\sigma (\mathbf{f}^\sigma)$; тогда $\mathbf{d}(*_\sigma \mathbf{h}) = 0$, или $\delta_\sigma \mathbf{h} = 0$	$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$

члены должны обратиться в нуль независимо от других членов, так что мы можем переписать уравнения (186) в виде 3-мерных уравнений (табл. 9), рассматривая T в качестве параметра и отбрасывая σ:

$$\delta \mathbf{h} = 0, \qquad \frac{\partial (* \mathbf{h})}{\partial T} = -\mathbf{d}\mathbf{e}, \tag{187а}$$

$$\delta \mathbf{e} = 0, \qquad \frac{\partial (* \mathbf{e})}{\partial T} = -\mathbf{d}\mathbf{h}. \tag{187б}$$

Мы написали здесь $\delta \mathbf{h} = 0$ вместо $\mathbf{d} * \mathbf{h} = 0$ из уравнения (186а) ради сближения с привычным видом 3-мерных уравнений Максвелла.

Формулировка Б задачи с начальными условиями

Уравнения (187а) и (187б) приведены теперь к виду, удобному для применения теоремы Коши—Ковалевской. Точнее говоря, уравнения

$$\frac{\partial (* \mathbf{h})}{\partial T} = -\mathbf{d} * (* \mathbf{e}), \tag{188а}$$

$$\frac{\partial (* \mathbf{e})}{\partial T} = \mathbf{d} * (* \mathbf{h}) \tag{188б}$$

представляют собой шесть уравнений, разрешенных относительно производных по времени, для шести неизвестных функций — компонент $* \mathbf{e}$ и $* \mathbf{h}$. Они определяют $* \mathbf{e}$ и $* \mathbf{h}$ однозначно при задании начальных значений $* \mathbf{e}$ и $* \mathbf{h}$ на гиперповерхности σ_0. Если, кроме того, эти начальные значения удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{d} * \mathbf{h} = 0 = \mathbf{d} * \mathbf{e} \tag{189}$$

на σ_0, то эти же требования обращения в нуль дивергенций будут удовлетворяться и на σ_T вследствие уравнений (188а) и (188б):

$$\frac{\partial (\mathbf{d} * \mathbf{h})}{\partial T} = 0 = \frac{\partial (\mathbf{d} * \mathbf{e})}{\partial T}. \tag{190}$$

Доказательство этого обстоятельства связано с тем фактом, что $\mathbf{d} = \mathbf{d}^\sigma$ коммутирует с $\partial/\partial T$ и что $\mathbf{d}^2 = 0$.

Теорема де-Рама гарантирует нам возможность нахождения таких начальных значений $*\mathbf{h}$ и $*\mathbf{e}$ на σ_0, которые: 1) удовлетворяют дивергенциальным требованиям (189), 2) обладают любыми требуемыми значениями магнитного и электрического зарядов

$$4\pi p_i^* = \int_{c_i^2} *\,\mathbf{h} \tag{191а}$$

и

$$4\pi q_i^* = \int_{c_i^2} *\,\mathbf{e} \tag{191б}$$

на R_2 независимых ручках на σ_0. Принятием таких начальных данных гарантируется [1]) существование в течение некоторого конечного времени вслед за σ_0 однозначного решения уравнений Максвелла без источников, постоянно имитирующего наличие выбранных нами зарядов.

Формулировка А задачи с начальными условиями

До сих пор мы рассматривали случаи, когда $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ были заданы на σ; обратимся теперь к другому возможному случаю, когда: 1) нам раз и навсегда известен электрический заряд q_i^* и, кроме того, 2) мы знаем на σ значения величин $*\mathbf{h}$ и $\partial *\mathbf{h}/\partial T$ в качестве предельной информации о напряженности магнитного поля на двух бесконечно близких пространственно-подобных поверхностях — информации того же типа, что и используемая при лагранжевой формулировке квантовой механики.

Начальные данные должны удовлетворять дивергенциальным условиям

$$\mathbf{d} * \mathbf{h} = 0, \tag{192}$$

[1]) Теорема Коши — Ковалевской требует аналитичности, в то время как теорема де-Рама опирается лишь на дифференцируемость начальных значений $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$. Для исправления этого недостатка в доказательстве можно использовать теорему существования Фурес-Брюа [49] (см. также [46]).

и

$$\mathbf{d}\left(\frac{\partial * \mathbf{h}}{\partial T}\right) = 0, \tag{193}$$

а также требованию постоянства во времени магнитного потока, если он существует, через все ручки

$$\int_{c_i^2} \frac{\partial * \mathbf{h}}{\partial T} = 0. \tag{194}$$

В таком случае мы однозначно определим напряженность электрического поля **e** на пространственно-подобной поверхности на основании трех источников информации

$$\delta \mathbf{e} = 0, \tag{195}$$

$$\mathbf{de} = -\frac{\partial * \mathbf{h}}{\partial T}, \tag{196}$$

$$\int_{c_i^2} \mathbf{e} = 4\pi q_i^*, \tag{197}$$

например, с помощью разложения Фурье, описанного в следующем разделе (табл. 10). Зная как **e**, так и **h**, мы вновь приходим к задаче с начальными условиями, которая уже встречалась нам и которая обладает единственным решением для некоторого конечного времени, следующего за σ_0.

Обобщение анализа Фурье на искривленное пространство

При рассмотрении электродинамики в искривленном пространстве естественнее всего выбирать начальные данные в виде функций от *координат* на σ, как это сделано в (171А) и (171Б). Об обычном разложении Фурье здесь нет и речи. Однако анализ Фурье можно обобщить на искривленное и даже на многосвязное пространство, что полезно при рассмотрении частных случаев постоянной или почти постоянной по отношению к соответствующим образом выбранной координате ковремени T метрики. Этот подход позволяет выражать начальные данные через коэффициенты Фурье.

Таблица 1

Классификация вещественных несингулярных векторных полей в компактном 3-пространстве, обладающем положнтельно определенной метрикой

Поперечным волнам приписывается правая или левая поляризацня в зависимости от того, положительн или отрицательно скалярное волновое число k.

	Тип векторного поля		
	продольное	поперечное	кулоновское (гармоническое)
Символ	$\mathbf{L}$	$\mathbf{X}$	$\mathbf{C}$
Определение	$\Delta \mathbf{L} = \varkappa^2 \mathbf{L}$ $\mathbf{dL} = 0$	$* \mathbf{dX} = k\mathbf{X}$ $\delta \mathbf{X} = 0$ $\lvert k \rvert > 0$	$\mathbf{dC} = 0 = \delta \mathbf{C}$
Сопоставление с собственными значениями нли с поверхностями	$\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \ldots$ $\varkappa_1^2, \varkappa_2^2, \ldots$	$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ $k_1, k_2, \ldots$	$\mathbf{C}_a, \mathbf{C}_b, \ldots, \mathbf{C}_{R_2}$ $S_a, S_b, \ldots, S_{R_2}$
Результат	$\Delta(\delta \mathbf{L}) = \varkappa^2 (\delta \mathbf{L})$	$\Delta \mathbf{X} = k^2 \mathbf{X}$	$\Delta \mathbf{C} = 0$
Потенциал	Скаляр φ	2 — форма $\mathbf{Y}$	Нет
Связь потенциала с полем	$\varphi = \varkappa^{-1} \delta \mathbf{L}$	$\mathbf{Y} = * \mathbf{X} = k^{-1} \mathbf{dX}$	—
Связь поля с потенциалом	$\mathbf{L} = \varkappa^{-1} \mathbf{d}\varphi$	$\mathbf{X} = k^{-1} \delta \mathbf{Y} = * \mathbf{Y}$	
Уравнения для потенциала	$\Delta \varphi = \varkappa^2 \varphi$	$* \delta \mathbf{Y} = k\mathbf{Y}$ $\mathbf{dY} = 0$	—
Упрощает ли потенциал исследование?	Да	Нет	—
Нормировка	$\int \mathbf{L} * \mathbf{L} = 1$	$\int \mathbf{X} * \mathbf{X} = 1$	$\int\limits_{S_a} * \mathbf{C}_b = 4\pi \delta_{ab}$
Скалярное произведение с **L**	$\int \mathbf{L}_m * \mathbf{L}_n = \delta_{mn}$	$\int \mathbf{L}_m * \mathbf{X}_n = 0$	$\int \mathbf{L}_m * \mathbf{C}_b = 0$
Скалярное произведение с **X**	$\int \mathbf{X}_m * \mathbf{L}_n = 0$	$\int \mathbf{X}_m * \mathbf{X}_n = \delta_{mn}$	$\int \mathbf{X}_m * \mathbf{C}_b = 0$
Скалярное произведение с **C**	$\int \mathbf{C}_a * \mathbf{L}_n = 0$	$\int \mathbf{C}_a * \mathbf{X}_n = 0$	$\int \mathbf{C}_a * \mathbf{C}_a \approx 8\pi / R_{a\ \text{мин.}}$ $\int \mathbf{C}_a * \mathbf{C}_b \approx$ $\approx 4\pi \sum\limits_{\substack{(\pm) a \\ (\pm) b}} (\pm 1)_a (\pm 1)_b / r_{(a_\pm)(b_\pm)}$

Рассмотрим на пространственно-подобной поверхности σ начальные значения, например напряженности электрического поля $\mathbf{e}$ или магнитного поля $\mathbf{h}$, или вообще любого векторного поля или 1-формы $\mathbf{v}$. Согласно работе Ходжа [34], можно однозначно представить $\mathbf{v}$ как сумму трех составляющих, охарактеризованных в табл. 10 как *продольная, поперечная* и *гармоническая* или, как мы будем говорить иначе, *кулоновская*, составляющие. Ограничимся рассмотрением трехмерного случая. Тогда подобно тому, как это сделано в табл. 10, можно будет отбросить индексы σ, отражающие пространственно-подобный характер операций ротора $\mathbf{d}^\sigma$ и дивергенции $\boldsymbol{\delta}^\sigma$. Для простоты исследования будем считать пространство замкнутым.

Продольное поле имеет равный нулю ротор, но поток его не сохраняется, так как оно обладает отличной от нуля дивергенцией. Электрическое и магнитное поля этого типа соответствуют распределениям реальных зарядов и магнитных монополей. Поэтому в дальнейшем мы исключаем это поле из рассмотрения.

Поперечное поле обладает равными нулю дивергенцией и потоком через любую ручку, однако его ротор отличен от нуля. Это поле может быть разложено по *собственным состояниям* $\mathbf{X}_m$, каждое из которых обладает характеристическим *скалярным* волновым числом $k_m\ (\neq 0)$:

$$*\,\mathbf{dX}_m\,(=\mathrm{rot}\,\mathbf{X}_m) = k\mathbf{X}_m. \tag{198}$$

При положительном k мы говорим о состоянии с правой поляризацией, при отрицательном k — о состоянии с левой поляризацией.

Гармоническое, или кулоновское поле, обладает равными нулю дивергенцией и ротором; однако его поток хотя бы через одну ручку отличен от нуля. Такое векторное поле может быть единственным образом представлено в виде линейной комбинации *характеристических гармонических векторных полей* $\mathbf{C}_a (a = 1, 2, \ldots, R_2)$, причем $\mathbf{C}_a$ сообщает a-й ручке единичный заряд и не вносит никакого вклада в потоки через другие ручки, т. е. в отличные от R_2 основные линейно независимые классы гомологии.

В общем случае векторное поле в искривленном многосвязном 3-пространстве может быть представлено в виде разложения Фурье:

$$\mathbf{v} = \sum_m \lambda_m \mathbf{L}_m + \sum_m \xi_m \mathbf{X}_m + \sum_{a=1}^{P_2} Q_a \mathbf{C}_a. \tag{199}$$

Соотношения ортогональности и условия нормировки, которые приведены в табл. 10, позволяют определить все коэффициенты этого разложения с помощью соотношений следующего типа:

$$\xi_m = \int \mathbf{X}_m * \mathbf{v}. \tag{200}$$

Мы не ставим здесь перед собой задачу вывести общее разложение (199), но отметим некоторые соотношения. 1) Внутреннее произведение двух векторных полей

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_\sigma \mathbf{a} * \mathbf{b} \tag{201}$$

является положительно определенным, так что имеет место неравенство

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0, \tag{202}$$

если только вектор $\mathbf{a}$ отличен от нуля. 2) Следовательно, набор всех векторных полей или 1-форм, обладающих конечными нормами, образует гильбертово пространство. 3) Операторы Δ и $*\mathbf{d}$ являются самосопряженными при их действии на векторы в 3-пространстве (см. табл. 9) и, таким образом, обладают собственными значениями и полными системами собственных функций. 4) Из свойства

$$(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) = (\delta\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}) + (\mathbf{dv}, \mathbf{dv}) \geqslant 0 \tag{203}$$

следует, что собственные значения Δ суть неотрицательные числа k^2. 5) Если задано какое-либо нетривиальное решение уравнения

$$\Delta\mathbf{v} = k^2\mathbf{v} \tag{204}$$

при $k > 0$, то оно может быть разбито на две части

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{a} + \mathbf{b}, \\ \mathbf{a} &= k^{-2}\mathbf{d}\,\delta\mathbf{v}, \\ \mathbf{b} &= k^{-2}\delta\,\mathbf{d}\mathbf{v}, \end{aligned} \tag{205}$$

которые удовлетворяют одному и тому же пространственно-подобному варианту (204) волнового уравнения. Одна из этих частей продольная, другая же — поперечная:

$$\mathbf{d}\mathbf{a} = 0, \tag{206}$$

$$\delta\mathbf{b} = 0. \tag{207}$$

6) Для тех собственных значений Δ, которые соответствуют отличному от нуля поперечному полю $\mathbf{b}$, может быть построен ротор этого поля

$$\mathbf{c} = k^{-1} * \mathbf{d}\mathbf{b} \left(= k^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b}\right), \tag{208}$$

такой, что

$$k^{-1} * \mathbf{d}\mathbf{c} \left(= k^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{c}\right) = k^{-2}\,\Delta\mathbf{b} = \mathbf{b}. \tag{209}$$

Из $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ можно построить поля с правой и левой поляризациями:

$$\mathbf{X}_+ = \mathbf{b} + \mathbf{c},$$

$$k^{-1} * \mathbf{d}\mathbf{X}_+ \left(= k^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{X}_+\right) = \mathbf{X}_+ \tag{210}$$

и

$$\mathbf{X}_- = \mathbf{b} - \mathbf{c},$$

$$k^{-1} * \mathbf{d}\mathbf{X}_- \left(= -k^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{X}_-\right) = \mathbf{X}_-, \tag{211}$$

которые не могут быть оба равны нулю. Например, рассмотрим в плоском пространстве поперечное поле или 1-форму

$$\mathbf{b} = \mathbf{d}x^2 \sin kx^1,$$

$$\mathbf{c} = k^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b} = k^{-1} * \mathbf{d}\mathbf{b} = \mathbf{d}x^3 \cos kx^1,$$

из которой мы построим поля с круговой поляризацией

$$\mathbf{X}_\pm = \mathbf{d}x^2 \sin kx^1 \pm \mathbf{d}x^3 \cos kx^1. \tag{212}$$

Связь гармонического поля с обычной картиной электрических силовых линий

Гармонические, или кулоновские, поля свойственны лишь многосвязному пространству с числом Бетти $R_2 \geqslant 1$. Для этих полей характерна картина силовых линий, подобная изображенной на фиг. 3. Рассмотрим случай пространства с весьма большим радиусом кривизны, т. е. почти плоского всюду, за исключением непосредственных окрестностей (+)- и (—)-горловин типичных ручек a, b, ..., обладающих исключительно малыми радиусами R_a, R_b, ... Пусть протяженность связи через ручку между парными горловинами одной и той же ручки будет весьма мала — также порядка $R_a, R_b, \ldots$. Пусть потоки $4\pi q_a^*$, $4\pi q_b^*$, ... проходят через соответствующие ручки. В этой очень частной модели поле почти всюду выглядит так, как если бы оно было порождено R_2 парами равных и противоположных по знаку зарядов:

$$\mathbf{e} = q_a^* \mathbf{C}_a + q_b^* \mathbf{C}_b + \ldots \sim q_a^* \left(\frac{\mathbf{r}_{a+}}{r_{a+}^3} - \frac{\mathbf{r}_{a-}}{r_{a-}^3} \right) + q_b^* (\ldots) + \ldots . \tag{213}$$

Электростатическая энергия полей

$$\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{e} * \mathbf{e} \tag{214}$$

складывается 1) из собственно-энергетических членов порядка

$$\frac{q_a^{*2}}{R_a} + \frac{q_b^{*2}}{R_b} + \ldots \tag{215}$$

и 2) из членов взаимодействия вида

$$q_a^* Q_b^* \left(r_{a+b+}^{-1} - r_{a+b-}^{-1} - r_{a-b+}^{-1} + r_{a-b-}^{-1} \right) + \ldots . \tag{216}$$

На этом основании можно непосредственно получить интеграл от произведения отдельных гармонических форм

$$\int \mathbf{C}_a * \mathbf{C}_b, \tag{217}$$

как это показано в табл. 10. Можно видеть, что эти гармонические формы составляют весь механизм описания *классического* заряда вполне непротиворечивым и свободным от расходимостей образом.

Коэффициенты Фурье как начальные данные; динамические уравнения для их изменения

Мы заключаем, что для задания начальных значений $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ на пространственно-подобной поверхности σ достаточно знать коэффициенты Фурье следующих разложений:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \sum_m^{\infty} e_m \mathbf{X}_m + \sum_{a=1}^{R_2} q_a^* \mathbf{C}_a, \\ \mathbf{h} &= \sum_m^{\infty} h_m \mathbf{X}_m. \end{aligned} \tag{218}$$

Во втором выражении мы отбросили член с магнитным монополем как не представляющий интереса.

Изменение магнитного поля имеет самый простой характер, если метрика не изменяется при возрастании геодезически нормальной координаты ковремени T. Тогда динамические уравнения (188) принимают непосредственно интегрируемую форму:

$$\begin{aligned} \frac{dq_i^*}{dT} &= 0, \qquad q_i^* = \text{const}, \\ \frac{de_m}{dT} &= k_m h_m, \\ \frac{dh_m}{dT} &= -k_m e_m, \end{aligned} \tag{219}$$

$$\begin{aligned} e_m &= \tfrac{1}{2}(e_m + ih_m)_0 \exp(-ik_m T) + \text{Компл. сопр.}, \\ h_m &= \tfrac{1}{2}(e_m - ih_m)_0 \exp(-ik_m T) + \text{Компл. сопр.} \end{aligned} \tag{220}$$

Здесь обобщение привычного разложения поля на взаимно ортогональные состояния имеет простой и очевидный вид.

Такой простоты не будет, если метрика сложным образом изменяется во времени. Тогда меняются сами ортогональные состояния, и в результате динамические уравнения (219) приобретают новые члены:

$$\begin{aligned} \frac{de_m}{dT} &= k_m h_m + \sum K_{mn} e_n + \sum_a L_{ma} q_a^*, \\ \frac{dh_m}{dT} &= -k_m e_m + \sum K_{mn} h_n, \end{aligned} \tag{221}$$

которые могут быть без труда интерпретированы как 1) передача энергии поперечному полю или поглощение энергии из поперечного поля кулоновским полем вследствие перемещения зарядов или других изменений метрики и 2) как перекачка, или рассеяние, энергии от одного поперечного колебания или от самой метрики к другому состоянию поля вследствие изменений метрики. Действительно, локальная плотность энергии электромагнитного поля может быть определена однозначным образом. Однако этого нельзя сказать об интегральной полевой энергии (см. [30], стр. 380). Не существует обычного набора пространственных и временной координат, к которым можно было бы вообще надеяться отнести компоненты полного 4-вектора энергии-импульса. Более того, локальные законы сохранения при интегрировании по замкнутому пространству, подобному рассматриваемому здесь, не приводят ни к чему достойному внимания, кроме тривиального тождества $0 = 0$. Следовательно, необходимо проявлять осторожность при употреблении понятия перехода энергии от одного состояния к другому. Эта осторожность никоим образом не преуменьшает значения ни динамических уравнений (221), ни следствий из них, касающихся интереснейшей связи между состояниями поля и модификациями метрики.

IV. ЗАРЯД И МАССА КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Мы только что завершили рассмотрение вопроса о влиянии на электромагнитное поле кривизны и многосвязности метрики, не задаваясь вопросом о действии этого поля на метрику (или не имея нужды в та-

кой постановке вопроса). Однако реалистическое исследование классических заряда и массы (в смысле табл. 1) требует учета такого обоюдного взаимодействия. По этой причине 1) рассмотрим пространственно-подобную поверхность σ и постараемся узнать, какие начальные данные должны быть заданы на этой поверхности и каким условиям они должны удовлетворять для однозначного определения будущего изменения *как* электромагнитного поля, *так и* метрики; 2) исследуем свойства решений Шварцшильда и Райснера — Нордстрема как решений этих уравнений, дающих массы и массы вместе с зарядом; 3) укажем точное решение наложенных на начальные данные условий, обобщающее решение Райснера — Нордстрема на случай пространства, содержащего много зарядов и масс, которые покоятся в момент наблюдения, и 4) заметим, что такие решения в виде ручек наряду с геонами образуют два метода построения возмущений в пустом пространстве и могут образовать множество комбинаций.

Начальные данные и существование решений уравнений Максвелла — Эйнштейна

Рассмотрим пространственно-подобную поверхность σ. Пусть след метрического *тензора* $\mathbf{dl}^2$ примет на ней наперед заданные значения как функция точки

$$\mathbf{dl}^2 = g_{ik}^{\sigma}\, \mathbf{d}x^i\, \mathbf{d}x^k. \tag{222}$$

Пусть также $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ обладают наперед заданными значениями на σ. Тогда, вообще говоря, не существует приемлемого решения ни для уравнений Максвелла, ни для уравнений Эйнштейна. Уравнения Максвелла будут обладать корректными решениями в том и только том случае, если будут удовлетворены условия (189), налагаемые на начальные значения:

$$\delta_{\sigma}\mathbf{e} = 0 = \delta_{\sigma}\mathbf{h}. \tag{223}$$

Аналогично, уравнения поля Эйнштейна будут иметь корректные решения в том и только том случае, если

будут удовлетворены определенные требования относительно начальных условий [см. ниже соотношения (224) (225)]. *Допуская*, что эти условия, а равно и уравнения (223) удовлетворены, мы приходим к существованию в течение некоторого конечного времени решения объединенных уравнений Эйнштейна и Максвелла с заранее заданными начальными значениями.

Задача с начальными условиями в общей теории относительности подробно исследована Лишнеровицем [50, 51], а теорема существования, не требующая аналитичности, была дана Фурес-Брюа [52]. В общей теории относительности четыре уравнения Эйнштейна, содержащие $R_\mu^0 - {}^1/_2\delta_\mu^0 R$, *составляют требования, налагаемые на начальные значения, подобно соотношениям (223) в теории электромагнетизма*, — требования, связывающие скорость изменения во времени кривизны на σ с вектором Пойнтинга и максвелловской плотностью энергии:

$$(P_i^j - \delta_i^j P)_{;j} = -2(g^{(3)})^{1/2}\,[ijk]\,e^j h^k = -2\,|*(\mathbf{e}\wedge\mathbf{h})|_i, \tag{224}$$

$$P^2 - P^{ij}P_{ij} + R^{(3)} = 2\,(e_i e^i + h_i h^i) = \\ = 2*(\mathbf{e}*\mathbf{e} + \mathbf{h}*\mathbf{h}). \tag{225}$$

Мы придерживаемся здесь обозначений Фурес-Брюа [53], которая доказала существование решений уравнений (224) и (225) в отсутствие электромагнитного поля. Зададим поверхность σ как $x^0 = T = 0$ и запишем $g_{00} = -V^2$, $g_{0i} = V\eta_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Тогда $g_{ij} = g^{(3)}_{ij}$ дает метрику $\mathbf{dl}^2$ на σ, используемую для поднятия индексов и определения ковариантных производных в уравнениях (224) и (228). При $\eta^2 = \eta_i\eta^i$ определяем

$$h^i = \frac{1}{2}(g^{(3)})^{1/2}\,|ijk]\,f_{jk}, \tag{226а}$$

$$e_i = (1+\eta^2)^{-1/2}(V^{-1}f_{i0} - f_{ij}\eta^j), \tag{226б}$$

$$P_{ij} = \frac{1}{2}(1+\eta^2)^{-1/2}\left[V^{-1}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\eta_i\partial}{\partial x^j} + \frac{\eta_j\partial}{\partial x^i}\right)V - (\eta_{i;j} + \eta_{j;i})\right] \tag{227}$$

и

$$P = P_i^i. \tag{228}$$

Таким образом, P_{ij} является по существу производной от метрики по времени, в то время как $R^{(3)}$ является скалярной кривизной метрики $g_{ij}^{(3)}$ на σ. Формулы (226) переводят уравнения (180) в компоненты относительно выбранных здесь координат.

Решения Шварцшильда и Райснера — Нордстрема

Метрика Шварцшильда является самым привычным примером решения уравнений поля и, таким образом, удовлетворения требований (224) и (225), наложенных на начальные значения. В этом случае напряженности электрического и магнитного полей равны нулю:

$$\mathbf{e} = 0 = \mathbf{h}. \tag{229}$$

Метрика

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m^*}{r}\right) dT^2 + \left(1 - \frac{2m^*}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{230}$$

удовлетворяет уравнениям поля $R_{\mu\nu} = 0$. В противоположность этому тензор кривизны Риччи для метрики на пространственно-подобной поверхности $T = \text{const}$ не равен нулю:

$$R_l^{(3)\,k} = \begin{pmatrix} -\frac{2m^*}{r^3} & & \\ & \frac{m^*}{r^3} & \\ & & \frac{m^*}{r^3} \end{pmatrix}, \tag{231}$$

но все же обладает равным нулю следом:

$$R^{(3)} = 0. \tag{232}$$

В силу постоянства метрики обращаются в нуль также и величины P_{ik}. Таким образом, требования (224) и (225), налагаемые на начальные значения, полностью удовлетворяются решением Шварцшильда.

На первый взгляд может показаться, что метрика Шварцшильда обладает сингулярностью в точке $r = 2m^*$. Однако тензор кривизны Риччи (231) не имеет особенности в этой точке, как и полный тензор кривизны Римана в соответствующем смешанном ковариантно-контравариантном представлении. Для явного представления части этой регулярности произведем преобразование координат, уже предлагавшееся многими авторами (см. [30], стр. 344, а также [54—56]) [1]:

$$r = \left(1 + \frac{m^*}{2\rho}\right)^2 \rho. \tag{233}$$

Тогда метрика принимает вид

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - \frac{m^*}{2\rho}}{1 + \frac{m^*}{2\rho}}\right)^2 dT^2 + \left(1 + \frac{m^*}{2\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2). \tag{234}$$

Здесь

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{235}$$

представляет собою метрику единичной сферы. Этот вывод можно истолковать следующим образом. Производя

[1] Во всех этих случаях регуляризация устраняет сингулярность лишь в пространственной части метрики, но не во временной, а потому она не достигает цели во всех описанных в тексте случаях регуляризации. Эйнштейн и Розен, полагая, что нельзя устранить эту сингулярность в пространственной части метрики простым преобразованием координат, изменили также знак гравитационной постоянной. Это, конечно, приводит к отрицательному значению электромагнитного вклада в массу и к отрицательному значению энергии электромагнитного поля вообще, что противоречит опыту. Эйнштейн и Розен изобразили свое преобразование регуляризации с помощью пространства, почти плоского, за исключением окрестности частиц, и зеркального пространства, близкого и параллельного первому пространству и соединенного с ним мостиком через шварцшильдовскую особенность. Согласно этой модели заряд или заряды в первичном пространстве не обязаны давать в сумме нуль. Напротив, рассмотрение с помощью гармонических форм 1) не приписывает пространству такого свойства зеркальности; 2) касается всех точек пространства равным образом; 3) приводит к идее об истинной непрерывности электрических силовых линий на всем протяжении ручки и 4) естественно, касается замкнутого пространства; не содержащего лишних силовых линий, которые должны оканчиваться на бесконечности.

преобразование (233), мы переопределили дифференцируемую структуру рассматриваемого нами многообразия таким образом, что *дифференцируемой функцией следует теперь считать* ρ, *а не* r, так что метрика dl^2 на пространственно-подобной поверхности $T = 0$ не имеет теперь особенности на шварцшильдовском радиусе. *Пространственно-временна́я* метрика ds^2 остается, однако, сингулярной, так как g_{TT} на шварцшильдовском радиусе обращается в нуль, и $g^{TT} \to \infty$. Мы не знаем, как явным образом устранить эту сингулярность для всех времен, но, согласно теории начальных значений Лишнеровица и Фурес-Брюа, можно удалить ее на некоторый неопределенный, но не равный нулю интервал времени. Это можно заключить из того обстоятельства, что условия (224) и (225), налагаемые на начальные значения, оставляют величину $g_{TT} = -V^2$ совершенно неопределенной на исходной поверхности. Поэтому в качестве начальных условий выберем следующие:

$$ds^2 = -V^2 dT^2 + dl^2, \tag{236}$$

$$dl^2 = \left(1 + \frac{m^*}{2\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \tag{237}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial T} = 0. \tag{238}$$

Например, можно положить $V = 1$. Так как от V требуется лишь свойство дифференцируемости, а не аналитичности, можно также, как в (234), положить $V = V_{\text{шв.}}$ при значениях ρ, близких с внешней стороны к особой поверхности $\rho = m^*/2$ (на малом от нее расстоянии ε); однако V выбирается дифференцируемым и отличным от нуля при значениях ρ внутри этой области. Если g_{TT} задано на начальной поверхности $T = 0$ подобным образом, то получаемое при интегрировании уравнений Эйнштейна решение будет по меньшей мере асимптотически стабильным. Оно будет существовать и совпадать [57] с решением Шварцшильда для ковремени **T**, сколь угодно большого при $\rho \to \infty$. Более того, при любом фиксированном $\rho_0 > m^*/2$ может быть найдено такого типа решение, существующее при всех $\rho > \rho_0$, по крайней мере

в течение любого наперед заданного времени, скажем 10^{100} лет.

Эти же аргументы могут быть равным образом использованы и в том случае, когда центр притяжения обладает не только массой, но и зарядом. Будем исходить из решения этой задачи, данного Райснером и Нордстремом [58, 59]. Оно отличается от решения Шварцшильда (230) лишь заменой в нем множителя $(1-2m^*/r)$ на

$$1-\frac{2m^*}{r}+\frac{q^{*2}}{r^2}.$$

Напряженность дуального электрического поля в этом случае равна

$$*e=q^*\sin\theta\,d\theta\wedge d\varphi. \tag{239}$$

Запишем тогда

$$r=\rho\left[\left(1+\frac{m^*}{2\rho}\right)^2-\frac{q^{*2}}{4\rho^2}\right] \tag{240}$$

и получим для метрики

$$ds^2=-V_{RN}^2\,dT^2+dl^2, \tag{241}$$

где

$$V_{RN}^2=\left(1-\frac{m^{*2}-q^{*2}}{4\rho^2}\right)^2\Big/\left[\left(1+\frac{m^*}{2\rho}\right)^2-\left(\frac{q^*}{2\rho}\right)^2\right]^2 \tag{242}$$

и

$$dl^2=\left[\left(1+\frac{m^*}{2\rho}\right)^2-\left(\frac{q^*}{2\rho}\right)^2\right](d\rho^2+\rho^2\,d\Omega^2). \tag{243}$$

Сингулярность *пространственно-временной* метрики, обусловленную обращением в нуль V_{RN} при $2\rho=(m^{*2}-q^{*2})^{1/2}$, можно вновь устранить путем видоизменения $g_{TT}=-V^2$ на некоторой начальной поверхности, близкой к этому критическому значению ρ. Для выполнения этой регуляризации необходимо потребовать, чтобы масса превышала то минимальное значение, которое общая теория относительности связывает с рассматриваемым зарядом:

$$m^*(см)\geqslant q^*(см)$$

или

$$m(г)\geqslant G^{-1/2}q=(3{,}88\cdot 10^3\ г/\mathrm{CGSE})\,q\,(\mathrm{CGSE}). \tag{244}$$

Это условие совершенно несовместимо со свойствами «одетых» частиц, наблюдаемых на опыте. Это обстоятельство вновь подчеркивает тот факт, что мы имеем здесь дело исключительно с описанием *классических* заряда и массы, которые непосредственно не имеют ничего общего со свойствами элементарных частиц.

Пока что мы показали, каким образом может быть устранена сингулярная поверхность в метрике Шварцшильда, но, очевидно, в соотношениях (237) и (243) все же сохраняется особенность при $\rho \to 0$. Теперь мы увидим, что ее нельзя назвать сингулярностью, если мы при этом не склонны также назвать сингулярным поведение метрики при $\rho \to +\infty$. Преобразование

$$\frac{2\rho}{(m^{*2} - q^{*2})^{1/2}} \xrightarrow{J} \frac{(m^{*2} - q^{*2})^{1/2}}{2\rho} \tag{245}$$

переводит все многообразие $\rho > 0$ в целом в самое себя взаимно однозначным и *сохраняющим метрику* образом. Поэтому окрестность $\rho = 0$ во всех смыслах эквивалентна окрестности $\rho = \infty$. Начальная поверхность $T = 0$ является *полным* римановым многообразием, что означает возможность неограниченного продолжения каждой геодезической линии. Несмотря на это, можно было бы потребовать более сильного свойства для конкретизации всеобщего понятия «несингулярности». Можно было бы потребовать либо замкнутости многообразия, либо наличия лишь одной области ($\rho \to \infty$ *или* $\rho \to 0$), в которой пространство является асимптотически плоским. Такого рода пример можно построить, исходя из решения Шварцшильда (237) без заряда. Мы завершим определение отображения J, положив

$$T \xrightarrow{J} T, \tag{246}$$

$$\theta \xrightarrow{J} \pi - \theta, \tag{247}$$

$$\varphi \xrightarrow{J} \varphi + \pi. \tag{248}$$

Отображение J не содержит тогда фиксированных точек, и мы можем отождествить точку x с точкой Jx с тем, чтобы получить новое многообразие, обладающее лишь

одной асимптотически плоской областью $\rho \to +\infty$. Поверхность $T = 0$ этого многообразия топологически эквивалентна проективной 3-поверхности P^3 (см. раздел III, Б), из которой удалена одна точка — «точка ∞». Эту процедуру нельзя применить к решению Райснера — Нордстрема, так как, хотя метрика инвариантна относительно J, напряженность электромагнитного поля меняет знак, что противоречит такому отождествлению. Временна́я зависимость этой регулярной модификации решения Шварцшильда без заряда исследовалась Дабменом [60] с точностью до первого порядка по T^2. Он нашел, что область критической сферы начинает уменьшаться.

Случай многих зарядов и масс

Начальные условия Райснера — Нордстрема (239) и (241)—(243) можно обобщить на случай N горловин ручек, которым приписывают заряды и массы следующим образом. Полагая

$$ds^2 = -V^2\,dT^2 + (\chi^2 - \varphi^2)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{249}$$

$$*e = [ijk]\left(\varphi\frac{\partial\chi}{\partial x^i} - \chi\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)dx^j \wedge dx^k, \tag{250}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial T} = 0 \tag{251}$$

при $T = 0$, зададим V как любую несингулярную положительно определенную функцию; пусть при этом как χ, так и φ удовлетворяют уравнению Лапласа в плоском пространстве:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f = 0. \tag{252}$$

Эти начальные значения придадут начальной поверхности свойства полного риманова многообразия, если мы выберем

$$\chi = 1 + \sum_a \frac{\alpha_a}{r_a}, \quad \varphi = \sum_a \frac{\beta_a}{r_a}, \tag{253}$$

где $r_a = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|$ и $\alpha_a \geqslant |\beta_a|$, $a = 1, 2, \ldots, N$. Точки $\mathbf{r}_a = (x_a, y_a, z_a)$, конечно, исключаются из многообразия.

Ограничение $\alpha_a \geqslant |\beta_a|$ следует из того факта, что метрика была бы сингулярной при $(\chi^2 - \varphi^2) = 0$ в какой угодно точке. Требование полноты также *исключает отрицательные массы,* как и мультипольные члены в χ и φ. Величины α и β связаны соответственно с массой и с зарядом, но не дают непосредственно этих масс и зарядов [1]). В частном случае, когда заряды отсутствуют (т. е. $\varphi = 0$), мы приходим к классу задач, исследованных Лишнеровицем [62]. Поскольку требуются лишь мгновенно-статические решения условий, налагаемых на начальные значения, множитель, подобный $(\chi^2 - \varphi^2)^2$ можно использовать для представления $dx^2 + dy^2 + dz^2$ в формуле (249) в виде какой-либо трехмерной метрики. Тогда условия, налагаемые на начальные значения, сводятся к уравнению

$$\bar{\Delta}\chi + \frac{1}{8}\bar{R}\chi = 0 \tag{254}$$

плюс подобное же уравнение для φ вместо уравнения (252). Здесь $-\bar{\Delta}$ и $\bar{R}$ — соответственно лапласиан и скалярная кривизна, выраженные через первоначальную метрику.

Связь с геонами

Электромагнитные геоны [14] представляют собою объекты, состоящие из электромагнитного излучения, удерживаемого его собственным гравитационным притяжением. В области расположения геона метрика сильно изменена, но топология пространства все же изоморфна обычной топологии эвклидового пространства. Коротковолновое излучение, направленное непосредственно на геон, проходит сквозь него, испытав более или менее сильное отклонение при столкновении. В противоположность этому, коротковолновое излучение, направленное на одну горловину ручки, выйдет из ее другой горловины. Несмотря на это различие в свойствах,

---

[1]) О связи m_a^* и α_a, а также об исследованиях зависимости некоторых решений этого типа от времени см. статью Линдквиста и Уилера [61].

оба объекта в равной мере искривляют пространство и не различаются между собою как массы в смысле их гравитационного притяжения по закону $1/r^2$.

Эти два метода конструирования решений уравнений геометродинамики, отвечающих наличию массы, не должны использоваться порознь. Можно рассматривать объект, содержащий как циркулирующую радиацию, так и горловины ручек, связанные между собою и обращающиеся друг около друга благодаря взаимному гравитационному притяжению. Кроме того, движение достаточного числа горловин ручек, обладающих одинаковым зарядом, по почти совпадающим орбитам будет имитировать ток. Оно может породить магнитное поле, достаточно сильное для того, чтобы оказать существенное, а может быть, и преобладающее воздействие на структуру пространства. Таким образом, искривленное пустое пространство может послужить материалом для построения множества объектов, слишком обширного для исчерпывающего их исследования и даже для простого перечисления.

Уравнения движения

Массы и заряды в предлагаемой здесь теории суть объекты, не отличающиеся от полей; они не являются даже особыми точками этих полей. Поэтому представляется очевидным, что уравнения этих полей должны определять движение масс и зарядов. Однако нам следует потребовать, чтобы это движение соответствовало в должном пределе ньютоновскому закону сил тяготения и закону силы Лоренца, так как эти законы отражают самые основные и хорошо проверенные свойства идеализированных классических точечных частиц. В геометродинамике масса и заряд не представляются в идеализированной форме как свойства *точечных* частиц; их, скорее, можно назвать проявлениями геометрической структуры пространства. Для обсуждения уравнений движения следует рассматривать пространство-время при помощи прибора с меньшей разрешающей силой, чем прежде, и таким образом сводить всю структуру массы или заряда к точке, закон движения которой может

затем сравниваться с законами Ньютона и Лоренца. Например, вся область вокруг одной горловины ручки (подобно изображенной на фиг. 3) может быть *названа* одной точкой x_1, аналогичная же область вокруг другой горловины — точкой x_2. Соединяющую обе эти области трубку мы попросту игнорируем. Аналогично можно идеализировать геон, а также объект, построенный из радиации и ручек. Тогда многообразие на фиг. 3 будет *сингулярным* образом отображаться на топологически эвклидово пространство, и метрика в последнем будет содержать сингулярности x_1 и x_2. Подобным же образом рассматривается большее число масс и зарядов; при представлении каждого из них в виде точки мы опускаем все детали их внутренней структуры и переходим к пределу, в котором их движение становится сравнимым с движением точек под действием сил Ньютона и Лоренца. Определенная таким образом задача и есть та проблема, которую так подробно исследовали Эйнштейн, Инфельд и Гоффман. Вместе с другими исследователями они *выводят* уравнения механического движения сингулярностей [1]) из уравнений поля. Мы можем, следовательно, заключить, что рассмотренные здесь объекты — заряды и массы, построенные из одного только искривленного пустого пространства, — удовлетворяют в соответствующем пределе уравнениям Ньютона и Лоренца.

Отсутствие в чисто классической физике всех единиц, кроме единицы длины

Чисто геометрический характер классической физики проявляется в факте измерения кривизны пространства в $см^{-2}$, электромагнитных напряженностей в $см^{-1}$, зарядов в *см* и масс в *см*. Для каких-либо иных единиц, кроме единицы длины, не остается места. Мы позволим себе привести гротескный пример королевства, в кото-

[1]) Эйнштейн, Инфельд и Гоффман [64] рассматривали лишь сингулярности, связанные с незаряженными конечными массами при медленном движении; Инфельд и Шилд [65] рассмотрели сингулярности, связанные с бесконечно малыми незаряженными массами, движущимися с произвольными скоростями; Чейз [66] (см. также [67]) исследовал сингулярности, отвечающие заряженным малым массам при произвольных скоростях.

ром измеренные к северу расстояния были бы священны и выражались в милях, в то время как расстояния на восток и запад, а также вниз и вверх — в футах. Были бы необходимы специальные навыки для вычисления расстояний по диагонали, исходя из значений координат, пока не обнаружилось бы, что нужна лишь одна мировая постоянная для построения теории таких вычислений. После этого было бы уделено много внимания «объяснению» того обстоятельства, что в природе существует естественное «соотношение»: 5280 футов в одной миле. Эта притча, возможно, безобиднее подобных попыток «объяснения», почему скорость света равна $3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*. И, конечно, привычной является мысль о том, что постоянная Больцмана k является просто множителем перевода двух случайных единиц энергии друг в друга. Менее привычно думать, что граммы и сантиметры являются двумя эквивалентными единицами измерения длины и что шварцшильдовский радиус объекта

$$r_{\text{шв.}} = \frac{Gm}{c^2} \equiv m^* \ (см) \tag{255}$$

является чисто геометрическим способом описания меры его инерции. Мы видели также, что *классическая электродинамика* подобным же образом не нуждается в каких-либо единицах, кроме длины, в своем простейшем выражении. Напряженность поля является просто проявлением искривленного пустого пространства. Классическая физика (в смысле табл. 1) сводится к чистой геометрии.

V. ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ГЕОМЕТРОДИНАМИКИ

В логической структуре геометродинамики еще требуется устранить некоторые пробелы, и почти все, что остается сделать для использования богатства этой теории, является делом будущего.

Случай нулевых полей

Алгебраические соотношения (4) и (5) исконно единой теории поля были выведены самым общим образом, но дифференциальные уравнения (7) и (8) выведены в

предположении о неравенстве нулю тензора Риччи. Дело в том, что если нарушится это упрощающее предположение, т. е. тензор $R_{\mu\nu}$ (и $F_{\mu\nu}$) будет равен нулю, то с необходимостью одновременно обратятся в нуль оба инварианта электромагнитного поля:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{h} = 0, \quad \mathbf{h}^2 - \mathbf{e}^2 = 0. \tag{256}$$

В данный момент времени это условие будет просто выполняться лишь на некоторых изолированных линиях в пространстве. При возрастании времени эти линии будут описывать поверхности в пространстве-времени:

$$x^\beta = x^\beta(\xi, \eta). \tag{257}$$

На таких поверхностях уравнение (7) не дает определенного значения вектора α_β — градиента «фазы» электромагнитного поля. Является ли определенной сама «фаза» α? Могут ли уравнения исконно единой теории поля быть сформулированы так, чтобы сохранять силу на таких поверхностях? Накладывает ли существование этих поверхностей какие-либо дополнительные топологические условия или условия периодичности на тензор кривизны Риччи? Возникают ли какие-либо особые проблемы при обращении в нуль инвариантов (256) не только на поверхностях в пространстве-времени, но и в областях большей размерности? Все эти вопросы, очевидно, связаны между собой.

Почему существует лишь один вид заряда?

Вторая группа вопросов касается заряда. Интерпретация заряда с помощью силовых линий, «захваченных» топологией, позволяет всем зарядам быть в равной мере как чисто магнитными, так и чисто электрическими. Однако хорошо известно, что эти две возможности различаются лишь названиями. Преобразование дуальности

$$\mathbf{f}' = *\mathbf{f}, \quad *\mathbf{f}' = **\mathbf{f} = -\mathbf{f}$$

или

$$\mathbf{h}' = \mathbf{e}, \quad \mathbf{e}' = -\mathbf{h}, \tag{258}$$

переименовывает все магнитные заряды в электрические в соответствии с обычными правилами. Заряды, связан-

ные со всеми ручками, или классами гомологии размерности два, могут быть вновь переименованы в чисто электрические заряды, если в исходной системе отсчета каждый из них представляет собою *смесь* электрического заряда e_i и магнитного монополя p_i при условии, что их отношение одинаково для всех ручек

$$\frac{e_i}{p_i} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}. \tag{259}$$

Тогда поворот дуальности

$$\mathbf{f}' = e^{*\beta}\mathbf{f} \tag{260}$$

переводит нас к традиционным обозначениям. Однако это переименование всех зарядов в электрические возможно лишь при строго одинаковой величине *отношения* (259) этих двух родов зарядов для всех классов гомологии или ручек в исходной системе отсчета дуальности. Можно ли переформулировать это условие другим образом?

В случае малости областей, в которых пространство существенно искривлено, по сравнению с расстояниями между различными горловинами ручек имеет место приблизительная локализация типичного заряда. Рассмотрим его в локальной лоренцовой системе, в которой этот заряд в какой-то момент покоится. В этой системе поле в непосредственной близости к заряду практически является чисто электрическим. Следовательно, либо вокруг горловины ручек, либо глубоко в его трубке существует поверхность, на которой «фаза» α всюду равна нулю или числу, целому кратному 2π. Более того, мы ожидаем, что поверхность $\alpha = 2\pi n$ остается связанной с краем горловины ручек единым образом при возрастании времени. Дело обстоит подобным же образом и для любой другой ручки с номером i. Поскольку характерная «фаза» $\alpha_{\text{харак.}} = \alpha^{(i)}$ вполне определена в каждом случае, условие, при котором все заряды можно назвать электрическими, имеет вид

$$\alpha^{(i)} - \alpha^{(j)} = 2\pi \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{Положительное или отрицатель-} \\ \text{ное число или нуль} \end{array} \right\}. \tag{261}$$

Это условие напоминает одно из требований периодичности

$$\oint \alpha_\mu \, dx^\mu = 2\pi \cdot (\text{Целое число}) \tag{262}$$

[соотношение (77)], налагаемое исконно единой теорией поля на тензор кривизны Риччи. Несмотря на это обстоятельство, мы не видим способа, позволяющего вывести (261) из (252). Поэтому нам неясно, является ли требование, чтобы все заряды были электрическими, составной частью существующей уже теории или его необходимо добавить к этой теории.

Для равенства всех магнитных монополей нулю [1]) достаточно, согласно соотношению (145), чтобы напряженность поля следовала из векторного 4-потенциала

$$\mathbf{f} = \mathbf{da} \tag{263}$$

или

$$f_{\mu\nu} = \frac{da_\nu}{dx^\mu} - \frac{da_\mu}{dx^\nu}. \tag{264}$$

Это предположение выходит за рамки уравнений Максвелла, так как в разделе III, Г мы убедились в существовании решений уравнений Максвелла, описывающих одновременное присутствие электрического *и* магнитного заряда. Однако в этом случае электромагнетизм рассматривался в рамках заранее *заданной* метрики. Лишь эти идеи помогают понять, что исключение магнитных монополей — или существование 4-потенциала — является независимым или дополнительным требованием по отношению к самим уравнениям Максвелла.

Когда же мы обращаемся к полным объединенным уравнениям Эйнштейна — Максвелла и замечаем, что кривизна Риччи полностью определяется напряженностью поля, то становится неясным, почему условие равенства нулю магнитных монополей, или существование 4-потенциала, должно добавляться в качестве дополнительного условия. Более того, не известно такого примера решений системы уравнений Эйнштейна — Максвелла, в

[1]) Относительно убедительного экспериментального доказательства отсутствия в природе свободных магнитных монополей см. [68].

котором магнитные монополи не могли бы быть устранены путем поворота дуальности. Очевидно, важным и принципиальным вопросом является вопрос о необходимости действительного добавления утверждения о существовании 4-потенциала к уравнениям (4), (5), (7) и (8) исконно единой теории поля. Или же 4-потенциал может быть выведен из этих уравнений?

Возникает и другой вопрос. Могут ли уравнения геометродинамики (4), (5), (7) и (8) вместе или без вероятного дополнительного условия о 4-потенциале быть выведены из одного-единственного вариационного принципа? В связи с этим была проделана некоторая работа [69—71], однако сама постановка этого вопроса не была еще даже сформулирована в литературе.

Перейдем теперь от вопроса наилучшей формулировки уравнений поля к задаче наилучшего выбора требований, налагаемых на начальные значения. В случае чистого электромагнитного поля уже давно было обнаружено, что требование $\operatorname{div}\mathbf{h} = -\partial\mathbf{h} = 0$ на исходной гиперповерхности автоматически удовлетворяется при выборе в качестве начальных данных не самих $\mathbf{h}$, а 3-потенциала $\mathbf{a}$, обеспечивающего нужные свойства $\mathbf{h}$. В случае самосогласованных уравнений геометродинамики мы сталкиваемся с нелинейными требованиями (224) и (225), наложенными на начальные значения в отношении P_{ij}, производной от метрики по времени. Существует ли что-либо вроде произвольно определяемого суперпотенциала, подобного $\mathbf{a}$, который порождает тензор P_{ij}, в свою очередь автоматически удовлетворяющий требованиям (224) и (225)? Если это так, то свойства этого суперпотенциала прояснили бы в значительной мере вопрос об истинно независимых переменных в геометродинамике. Это прояснение существенно для понимания сущности исконно единой теории поля, для наиболее действенных ее приложений и для внесения ясности в само понятие ее квантования.

Возникает еще один принципиальный вопрос. В электродинамике мы можем брать линейную комбинацию двух решений в качестве нового решения. Геометродинамика же, конечно, нелинейна. Существует ли, несмотря на это обстоятельство, способ комбинирования двух

решений для получения третьего? Для поисков такого правила комбинирования представляется существенным исследовать непрерывное бесконечномерное пространство историй полей. После того как возникла эта проблема, проф. В. Баргман любезно указал нам, что методы Софуса Ли [73, 74] могут оказаться достаточными для получения исчерпывающего ответа на этот вопрос.

К указанным нами принципиальным проблемам о нулевых полях, о существовании 4-потенциала, о возможном существовании суперпотенциала и о свойствах комбинируемости в бесконечномерном пространстве историй полей следует добавить много вопросов о следствиях этой классической теории, которых мы здесь лишь слегка коснемся [1]).

1) Насколько обширно топологически мыслимое разнообразие ручек и многосвязности пространства?

2) Какие новые явления происходят в том случае, когда детерминированное изменение метрики во времени приводит в определенный момент к слиянию или соединению горловин ручек или к другим изменениям в топологии?

3) Каким образом можно строить замкнутые математические выражения для метрики пространств, содержащих возможно большее богатство геометродинамических объектов — гравитационных волн, ручек, ударных волн, «захваченной» в ручки радиации и комбинаций этих объектов?

Не ограничиваясь этими увлекательными проблемами, внимание исследователя неизбежно обратится к еще более глубоким вопросам о том, какова природа квантовой геометродинамики [2]) и какие идеи должны быть добавлены к квантовой геометродинамике для описания природы.

Мы хотим выразить нашу признательность В. Баргману, П. Бергману, Х. Эверетту и М. Фирцу за дискус-

---

[1]) См. статью Пауэра и Уилера [63], содержащую таблицу аналогий между геометродинамикой и гидродинамикой, а также проблем, подсказываемых этой аналогией.

[2]) В этой связи см. статьи Эверетта [75], Мизнера и Уилера [1, 2, 76].

сии физического характера, а также П. Коннору, Ж. Жеэньо, Дж. А. Скаутену, Д. Спенсеру, Г. Троттеру и многим другим коллегам за разъяснение математической стороны геометродинамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Misner C. W., Rev. Mod. Phys., **29**, 497 (1957).
2. Wheeler J. A., Ann. of Phys., **2**, 604 (1957). (Дополнение II к настоящей книге.)
3. Rainich G. Y., Trans. Am. Math. Soc., **27**, 106 (1925).
4. Rainich G. Y., The Mathematics of Relativity, New York, 1950.
5. Synge J. L., Principal Null-Directions Defined in Space Time by an Electromagnetic Field (No. 1 in the University of Toronto Studies, Applied Mathematics Series), Univ. of Toronto Press, Toronto, 1935.
6. Synge J. L., Relativity: The Special Theory, Amsterdam, 1956, p. 326.
7. Bonnor W. B., Proc. Phys. Soc., **A67**, 225 (1954).
8. Mariot L., thesis, «Le champ électromagnetique pur en relativité générale», Ch. IV, University of Paris, 1957.
9. Einstein A., The Meaning of Relativity, 3rd ed., Princeton, 1950, p. 107. (См. перевод: Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, 1955, стр. 89.)
10. Riemann B., Habilitationsvorlesung, June 10, 1854. «Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen», в Riemann B., Gesammelte Mathematische Werke, 2nd. ed., New York, 1953. (См. перевод: Риман Б., Сочинения, М.—Л., 1948, стр. 279, «О гипотезах, лежащих в основании геометрии».)
11. Clifford W., Nature, **8**, 14 (1873).
12. Weyl H., Raum-Zeit-Materie, 4. Aufl., Berlin, 1921, § 34; цитируется по книге Вейля: «Philisiphy of Mathematics and Natural Science», Princeton, 1949, p. 91
13. Einstein A., Rosen N., Phys. Rev., **48**, 73 (1935).
14. Wheeler J. A., Phys. Rev., **97**, 511 (1955).
15. Darrow K. K., Phys. Today, **9**, No. 8, 24 (1956).
16. Dyson F., Advanced Quantum Mechanics, Ithaca, 1954, pp. **120**, 167.
17. Infeld L., Acta Phys. Polon., **10**, 284 (1950).
18. Callaway J., Phys. Rev., **92**, 1567 (1953).

19. Clifford W. K., Mathematical Papers, London, 1882, p. 21; Lectures and Essays, Vol. 1, London, 1879, pp. 244, 322.
20. Cajory F. (пересмотренный английский перевод Мотта), Newton I., Mathematical Principles of Natural Philosophy, Berkeley, 1934.
21. Fierz M., Ueber der Ursprung und die Bedeutung der Lehre Isaac Newton's vom absoluten Raum, Gesnerus, **11**, 62 (1954).
22. Patrizzi F., Nova de Universis Philosophia, part IV, Pancosmia, книга 1, de Spacio Physico. Meiettus, Venice. 1593.
23. «The Taittirîya Upanishad with commentaries» pp. 293, 305—307, Mysore, 1903. (См также том III «The Upanishads», New York.)
24. Schouten J. A., Ricci-Calculus: An Introduction to Tensor Calculus and Its Geometrical Applications, 2nd ed., Berlin, 1954, p. 36, 46.
25. Kelley J. L., General Topology, New York, 1955.
26. Понтрягин Л. С., Топология, М., 1900.
27. Александров П. С., Комбинаторная топология, М., 1947, гл. 1.
28. de Rham G., Variétés Différentiables, 1955, p. 1.
29. Møller C., The Theory of Relativity. London—New York, 1952, p. 361.
30. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., 1960.
31. Milnor J., Ann. Math., **64**, 399 (1956).
32. Cartan E., Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Paris, 1946.
33. Chevalley C., Theory of Lie Groups 1, Princeton, 1946, Ch. 3. (См. перевод: Шевалле К., Теория групп Ли, М., 1948.)
34. Hodge W. V. D., The Theory and Application of Harmonic Integrals, London—New York, 1952.
35. Lichnerowisz A., Algèbre et analyse linéaires, 2nd ed., Paris, 1956, Ch. 1.
36. de Rham G., Variétés Différentiables, Paris, 1955.
37. Eilenberg S., Steenrod N., Foundations of Algebraic Topology, Vol. 1, Princeton, 1952.
38. Seifert H., Threlfall W., Variationsrechnung in Grossen, New York, 1951, pp. 16—21.
39. Lefschetz S., Introduction to Topology. Princeton, 1949.
40. Seifert H., Threlfall W., Lehrbuch der Topologie, New York, 1947. (См. перевод: Зейферт Г., Трелфалль В., Топология, М.—Л., 1900.)

41. Serre J. P., Ann. Math., **54**, 439 (1951).
42. Hodge W. V. D., The Theory and Applications of Harmonic Integrals, London—New York, 1952, pp. 88—100.
43. de Rham G., Variétés différentiables: formes, courants, formes harmoniques, Paris, 1955, Ch. 4.
44. Goursat E., Cours d'analyse mathematique 2nd ed., Vol. 2, pp. 632—637, Paris, 1911. (См. перевод: Гурса Э. Курс математического анализа, т. II, М.—Л., 1933.)
45. Riesz M., Acta Math., **81**, 1 (1949).
46. Duff G. F., Canad. Journ. Math., **5**, 57 (1953).
47. Raychaudhuri A., Phys. Rev., **104**, 455 (1956); **106**, 172 (1957).
48. Komar A., Phys. Rev., **104**, 544 (1956).
49. Foures-Bruhat Y., Acta Math., 88, 141 (1952).
50. Lichnerowicz A., Problèmes Globaux en Méchanique Relativiste, Paris, 1939; Journ. Math. Pure Appl., **23**, 37 (1944).
51. Lichnerowicz A., Helv. Phys. Acta, Suppl. IV, 176 (1956).
52. Foures-Bruhat Y., Acta Math., 88, 141 (1952).
53. Foures-Bruhat Y., Journ. Rat. Mech. Anal. **4**, 951 (1956)
54. Lemaitre G., Ann. soc. sci. Bruxelles, **53A**, 51 (1933).
55. Einstein A., Rosen N., Phys. Rev., **48**, 73 (1935).
56. Synge J. L., Proc. Roy. Irish Acad., **53A**, 83 (1950).
57. Stellmacher K., Math. Ann., **115**, 136, 740 (1938).
58. Reissner K., Ann. of Phys., **50**, 106 (1916).
59. Nordstrom L., Proc. Amsterdam Acad., **20**, 1238 (1918).
60. Dubman M. R., Диссертация, представленная Принстонскому университету, 1957, не опубликовано.
61. Lindquist R. W., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **29**, 432 (1957).
62. Lichnerowicz A., Journ. Math. Pure Appl., **23**, 37 (1944).
63. Power E., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **29**, 480 (1957).
64. Einstein A., Infeld L., Hoffman B., Ann. Math., **39**, 65 (1938).
65. Infeld L., Schild A., Rev. Mod. Phys., **21**, 408 (1949).
66. Chase D. M., Phys. Rev., **95**, 243 (1954).
67. Infeld L., Rev. Mod. Phys., **29**, 398 (1957).
68. Malkus W. V. R., Phys. Rev., **81**, 315 (1951).
69. Pauli W., Phys. Zs., **20**, 457 (1919).
70. Weyl H., Math.-Sitz., **2**, 384 (1918); Ann. of Phys., **59**, **101** (1919); Phys. Zs., **22**, 473 (1921).
71. Bach R., Math. Zs., **9**, 110 (1921).

72. Lanczos C., Phys. Rev., **39**, 716 (1932); **61**, 713 (1942); Ann. Math., **39**, 842 (1938); Rev. Mod. Phys., **21**, 497 (1949).
73. Lie S., Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, 3 Bde., Leipzig, 1888—1893.
74. Lie S., Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, Leipzig, 1893.
75. Everett H., Rev. Mod. Phys. **29**, 454 (1957).
76. Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys. **29**, 463 (1957).

II. О ПРИРОДЕ КВАНТОВОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКИ

Дж. Уилер

J. Wheeler, Ann. of Phys., 2, 604—614 (1957)

В предыдущей статье с помощью одного только искривленного пустого пространства были описаны классические гравитационное и электромагнитное поля, заряд и масса. Прежде чем перейти к квантованию подобной чистой геометродинамики Эйнштейна — Максвелла, здесь предпринимается попытка 1) выяснить некоторые важнейшие ожидаемые свойства квантованной геометродинамики и 2) оценить возможную роль этой теории в понимании проблемы элементарных частиц без привлечения каких бы то ни было дополнительных гипотез. Обнаружено, что флуктуации гравитационного поля приводят к качественно новым следствиям на расстояниях порядка $(\hbar G/c^3)^{1/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-33}$. Они приводят к возможности виртуальных порождения и уничтожения пар во всем пространстве, обладающих электрическими зарядами порядка $\sim(\hbar c)^{1/2}$ и энергиями порядка $(\hbar c^5/G)^{1/2} = (2{,}18 \cdot 10^{-5}\ г) \cdot c^2 = 2{,}4 \cdot 10^{22}\ mc^2$. Обсуждается вопрос о том, в какой мере можно отождествить эти заряды с неперенормированными, или «голыми», зарядами в теории электрона. Для выяснения будущей роли квантовой геометродинамики решающим является вопрос: появляется ли спин как неизбежный геометрический спутник квантования или он наряду с прочими свойствами должен быть добавлен к этому чисто геометрическому описанию природы?

Согласно предыдущей статье [1], классические гравитационное и электромагнитное поля, заряд и масса могут быть описаны исключительно с помощью варианта Райнича римановой геометрии искривленного пустого пространства. При таком описании мы ничего не добавляем к общепринятым уравнениям Максвелла и Эйнштейна. Напомним лишь, что указанные уравнения, как это впервые было показано Райничем, могут быть приведены к «исконно единой форме», где фигурируют лишь геометрические величины. Мы также отбрасываем молчаливо принимавшееся до сих пор предположение об односвязности пространства, для принятия которого уравнения Эйнштейна — Максвелла сами по себе не дают оснований. Тогда *классический* заряд проявляется в виде

«заключенного» в многосвязную метрику потока силовых линий. Таким образом, мы приходим к исключительно далеко идущему описанию классической физики, имеющему тем не менее чисто геометрический характер и основанному на наиболее строго установленных принципах электродинамики и общей теории относительности. Эти принципы принимаются нами без изменений, и к ним не добавляется никаких новых гипотез.

Появляющиеся при таком рассмотрении заряд и масса удовлетворяют неравенству

$$m \geqslant G^{-1/2} q = (3{,}9 \cdot 10^3 \text{ г/CGSE})\, q \qquad (1)$$

и являются неквантованными, так что не имеют непосредственного отношения к квантованным зарядам и массам элементарных частиц.

В каком же отношении друг к другу стоят тогда геометродинамика и мир элементарных частиц?

Для ответа на этот вопрос можно было бы дополнить чистую геометродинамику электронно-позитронным, мезонными, нейтринным и иного рода полями. Мы пришли бы тогда ко всем обычным затруднениям теории поля и были бы вынуждены ввести в физическую теорию константы связи и величины характерных масс в качестве простейших необъясненных составных частей. Таким образом, были бы потеряны черты, характеризующие геометродинамику как описание природы на *классическом* уровне, которые можно резюмировать следующим образом: 1) Пространство-время не есть *арена* для физики, это *вся классическая* физика. 2) Не существует нуждающихся в объяснении «мировых констант»: ни c, ни G. Скорость света — это всего лишь множитель перехода между двумя исторически сложившимися единицами длины, световой секундой и сантиметром, точно так же как число 5280 является множителем перехода от футов к милям. Аналогично, инертная масса выражается с помощью геометрической величины — шварцшильдовского радиуса, который можно измерять либо в сантиметрах, либо в старых единицах, которым, подобно милям, присвоено особое наименование — грамм. С точки зрения общей теории относительности отношение между этими двумя единицами длины $G/c^2 = 0{,}74 \cdot 10^{-28}$ *см/г*

является случайным и сложилось исторически так же, как и число 5280. В классической геометродинамике фигурирует лишь длина. 3) Не существует «констант связи», как нет и независимо существующих полей, взаимодействующих друг с другом. Электромагнитное поле не является особым объектом; оно может быть просто выражено через первые производные тензора кривизны Риччи.

Следует ли требовать отказа от этих отличительных особенностей геометродинамики? Знает ли кто-нибудь физику настолько, чтобы сказать, что закономерности, установленные Максвеллом и Эйнштейном, суть заблуждения в описании природы? Как можно требовать, чтобы добавлялись квантованные поля и константы связи, если никто еще не проанализировал следствий квантования исходной формулировки чистой геометродинамики Эйнштейна — Максвелла? Пусть эти вопросы послужат основанием для более конкретного рассмотрения квантовой геометродинамики!

Прямой путь перехода от классической теории к квантовой дает формулировка Фейнмана. Выражение

$$\langle C_2\sigma_2|C_1\sigma_1\rangle = \sum_H \exp\left(\frac{iI_H}{\hbar}\right) \tag{2}$$

представляет собой ключ, необходимый для оценки всех имеющих физический смысл величин: амплитуды вероятности перехода от некоторой конфигурации C_1 на пространственно-подобной гиперповерхности σ_1 к C_2 на σ_2. Здесь H символизирует любую историю изменения системы между σ_1 и σ_2, обладающую в качестве граничных значений конфигурациями C_1 и C_2. Величина I_H является классическим действием, связанным с этой историей. Символ $\sum_H$ обозначает суммирование с одинаковыми весами по всем историям, как допустимым, так и недопустимым с классической точки зрения, при такой нормировке, чтобы функция распространения (2) была унитарной.

Для практической реализации этой программы еще недостаточно предположить, что в принципе вся квантовая геометродинамика содержится в рецепте (2)! Мизнер

сделал первый решающий шаг [2][1]) на этом важном пути. Вплоть до завершения полного исследования можно оценить порядок величины, определенной по аналогии с обычной квантовой электродинамикой. Фазу экспоненты Фейнмана — Гюйгенса качественно можно записать в виде

$$\frac{I_H}{\hbar} \sim \int \left[\frac{c^3}{8\pi\hbar G} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{8\pi\hbar c} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right] (-g)^{1/2} d^4x. \qquad (3)$$

Рассмотрим изменение этого интеграла, вызываемое вариациями Δg типичной компоненты метрики $g_{\mu\nu}$ и вариациями ΔA типичной компоненты электромагнитного потенциала A_μ в области пространства-ковремени с размерами порядка $L \times L \times L \times L$:

$$\Delta(\text{фаза}) = \frac{\Delta I}{\hbar} \sim \left(\frac{c^3}{\hbar G} \right) L^2 (\Delta g)^2 + \left(\frac{1}{\hbar c} \right) L^2 (\Delta A)^2. \qquad (4)$$

Мы видим, что изменения поля в таких областях дают вклад в сумму по историям, не внося искажающей интерференции [Δ(фаза) $\sim$ 1 *рад*], если только они имеют порядок величины не более указанного в табл. 1. К той

Таблица 1

Порядок величины флуктуаций поля

Здесь для краткости через L^* обозначена величина $(\hbar G/c^3)^{1/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-33}$ *см*

	Электромагнитные величины	Гравитационные величины
Потенциал . . .	$\Delta A \sim (\hbar c)^{1/2}/L$	$\Delta g \sim L^*/L$
Напряженность . .	$\Delta F \sim (\hbar c)^{1/2}/L^2$	Δ (Ускорение) $\sim c^2 L^*/L^2$
Кривизна пространства	—	$\Delta R \sim L^*/L^3$

же самой оценке можно прийти, рассматривая квант энергии, заключенный в области с размерами поряд-

[1]) См. работу Эверетта [3] по поводу метода приложения квантового постулата к системе, аналогичной геометродинамике и являющейся замкнутой в себе и не подверженной внешнему наблюдению.

ка L. Эта энергия будет порядка $\hbar c/L$, плотность энергии — порядка $\hbar c/L^4$, так что напряженность по порядку величины равна $(\hbar c)^{1/2}/L^2$, где в случае необходимости следует учесть соответствующий множитель для перехода к общепринятым единицам.

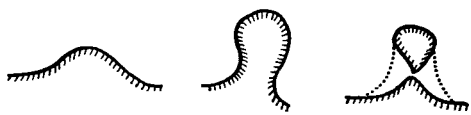
Как флуктуации метрики, так и статические вариации метрики фантастически малы в атомных масштабах и даже в областях порядка характерной комптоновской длины $L_m = \hbar/mc$ электрона:

$$\Delta g_{\text{стат.}} \sim \frac{2Gm}{c^2 L_m} \sim \left(\frac{L^*}{L_m}\right)^2 \sim 10^{-44},$$
$$\Delta g_{\text{флукт.}} \sim \frac{L^*}{L} \sim 10^{-22}. \tag{5}$$

Более того, это статическое поле не увеличивается по порядку величины при переходе к областям с меньшими по порядку величины размерами вследствие отсутствия локализуемости энергии и массы электрона. Напротив, вычисленные здесь флуктуации метрики не зависят от степени близости к частице и, подобно флуктуациям электромагнитного поля, связаны лишь с размерами области наблюдения. В атомных масштабах метрика представляется плоской, как океан летящему высоко над ним пилоту. Чем больше мы приближаемся к нему, тем больше степень нерегулярности. Наконец, на расстояниях порядка L^* флуктуации компонент метрики $g_{\mu\nu}$ достигают по порядку величины самих $g_{\mu\nu}$. Здесь характер пространства претерпевает существенное изменение, что схематически изображено на фиг. 1. Развивается многосвязность, как это имеет место на поверхности океана, где разбиваются волны. Конечно, нет необходимости предлагать метод наблюдения этих флуктуаций для того, чтобы заметить, насколько непосредственно и неизбежно они следуют из квантовой теории метрики. Здесь слово «наблюдение» вообще не должно использоваться. Можно просто сказать, что 1) функция распространения выражается как сумма по историям, 2) каждая история (траектория) представляет собою некоторую последовательность конфигураций и 3) символически изображенный на фиг. 1 тип конфигурации вносит существенный вклад в сумму по историям. Тогда

термин «флуктуация» служит лишь сокращением для обозначения конфигураций, вносящих наибольший вклад в сумму по историям.

Наряду с флуктуациями метрики происходят флуктуации электромагнитного поля. В результате этого типичное многосвязное пространство, подобное изображенному на фиг. 1, *в*, приобретает некоторый результирующий поток электрических силовых линий через «ручку». Эти линии сконцентрированы благодаря топологии пространства; все это выглядит так, как если бы на одном конце ручки существовал положительный заряд, а на другом — отрицательный.



Фиг. 1. Влияние локальной флуктуации метрики на появление многосвязности.

На схеме *в* верхняя часть пространства не оторвана от нижней, как могло бы показаться на основании рассмотрения одного сечения этого пространства; поэтому пунктирные линии символически изображают связь между двумя областями, как это обнаружилось бы при построении сечения в другом месте.

Для оценки типичного заряда, связанного с ручкой, обозначим масштаб размера ручки через L. Тогда область, через которую проходит поток, будет порядка L^2. Флуктуация напряженности поля по порядку величины равна $(\hbar c)^{1/2}/L^2$. Следовательно, полный поток и заряд будут порядка

$$q_{\text{флукт.}} \sim (\hbar c)^{1/2} \sim 12e \qquad (6)$$

независимо от размеров ручки.

Существование таких пар зарядов требуется самыми основными положениями квантовой теории и геометродинамикой Максвелла — Эйнштейна. Однако полученный заряд ни в какой мере не похож на заряд элементарной частицы.

1) Типичный заряд в данном случае на один порядок больше элементарного кванта заряда.

2) Этот заряд не является квантованным. Напротив, в сумме по историям следует учесть конфигурации со всеми значениями заряда. Однако вклады в эту сумму взаимно уничтожаются за счет деструктивной интерференции, когда заряд превышает по порядку величины $q_{\text{флукт.}}$ в соотношении (6).

3) Масса электромагнитного поля, связанного с одной такой ручкой типичных размеров $L \sim L^*$, имеет порядок

$$c^{-2}E \sim c^{-2}(\Delta F)^2 L^3 \sim \frac{\hbar}{cL} \sim \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} = 2{,}2 \cdot 10^{-5}\ г, \qquad (7)$$

совершенно несравнимый с массами элементарных частиц.

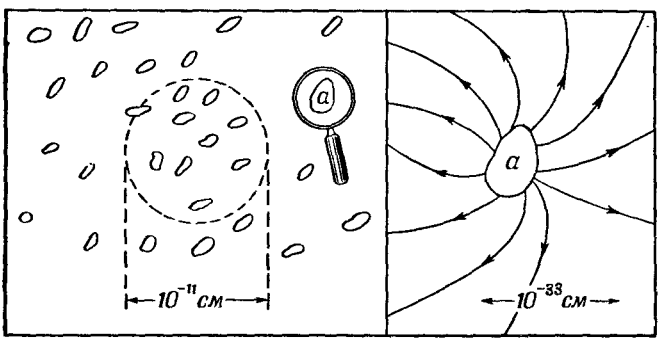
4) Наиболее важным является то обстоятельство, что эти флуктуационные заряды являются свойствами всего пространства, а не частиц [1]).

На фиг. 2 символически представлена типичная конфигурация, дающая основной вклад в сумму по историям. В этой конфигурации всюду возникают горловины ручек, разделенные типичными промежутками и обладающие типичными размерами порядка характерной длины L^*. Изображенная справа в увеличенном виде горловина ручки обнаруживает исходящие из нее же силовые линии, какие аналогичным образом выходят из любой другой горловины ручки или входят в нее. Вся эта картина может быть кратко описана следующим образом. 1) Квантование теории Максвелла и Эйнштейна приводит к пенообразной структуре пространства. Пространство обладает не только макрокривизной в масштабах Вселенной, но и микрокривизной масштаба L^*. 2) В вакууме постоянно образуются и аннигилируют виртуальные пары зарядов. 3) С этими парами ассоциируются заряды и особенно массы электромагнитной природы, много бо́льшие, чем известные нам из физики элементарных частиц.

---

[1]) Рассмотренная здесь и ранее [4] структура противоположна «структуре типа швейцарского сыра», описанной Белинфанте [5] и обязаниой лишь существующим в готовом виде «истинным массам», которые мы здесь не рассматриваем.

На первый взгляд может показаться, что плотность энергии вакуума, описанного выше, должна быть совершенно неразумно велика. Умножая величину массы-энергии $\hbar/cL^*$, приходящейся на типичную ручку, на



Фиг. 2. Разрез при постоянном времени через историю полей того типа, который дает большой вклад в сумму по историям в фейнмановском пропагаторе.

Мелкие кружки изображают горловины ручек, связанные с многосвязностью пространства. Типичная ручка связана с флуктуацией, подобной изображенной на фиг. 1, и обладает размерами порядка $(\hbar G/c^3)^{1/2} = 1{,}6 \cdot 10^{-33}$ *см*, много меньшими, чем все непосредственно относящиеся к проблеме элементарных частиц расстояния $(\hbar/mc = 3{,}9 \cdot 10^{-11}$ *см*). С типичной ручкой, такой, как *a*, связывается не только большая кривизна пространства, но и флуктуация электромагнитного поля, как это иллюстрируется силовыми линиями на увеличенном изображении *a* справа.

число виртуальных пар в единице объема порядка $1/L^{*3}$, можно получить такую огромную плотность массы

$$\rho \sim \frac{\hbar}{cL^{*4}} = \frac{c^5}{\hbar G^2} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-5}\ г}{(1{,}6 \cdot 10^{-33}\ см)^3} = 5 \cdot 10^{93}\ г/см^3, \qquad (8)$$

что даже одна кубическая комптонова длина волны содержит массу, бо́льшую массы всей известной Вселенной:

$$\rho L_m^3 = 5{,}0 \cdot 10^{93} \cdot (3{,}87 \cdot 10^{-11})^3 = 2{,}9 \cdot 10^{62}\ г,$$

$$M_{\text{Вселенн.}} \sim \frac{c^2 R_{\text{Вселенн.}}}{G} \sim (1{,}35 \cdot 10^{28}\ г/см) \times \qquad (9)$$

$$\times (0{,}94 \cdot 10^{18}\ см/лет) \cdot 5 \cdot 10^9\ лет \sim 6 \cdot 10^{55}\ г.$$

Эта трудность не нова. Она представляет собой проблему нулевой энергии электромагнитного поля. Просуммировав энергию типичного осциллятора поля $^1/_2\hbar\omega$ по всем частотам вплоть до длины волны $c/\omega \sim L^*$, на которой микрокривизна совершенно нарушает свойства осциллятора поля, придем к массе-энергии (8). Обычно пытаются не решать эту проблему, а обходить ее, вычитая нулевую энергию. В специальной теории относительности такая процедура законна; однако в общей теории относительности отсутствует произвол во введении аддитивной постоянной энергии, и эта процедура уже не может быть оправдана. Более того, вычитаемый член не является постоянным, но зависит от кривизны пространства.

До сих пор мы пренебрегали вкладом гравитации в плотность энергии и массы. Однако в типичной ручке флуктуации электромагнитных полей чрезвычайно велики, и их гравитационным взаимодействием нельзя пренебрегать. Характерная электромагнитная масса-энергия на одну ручку равна

$$m_1 \sim \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2}, \tag{10}$$

и среднее расстояние между двумя такими возмущениями поля имеет порядок $L^* \sim (\hbar G/c^3)^{1/2}$. Из этой оценки следует, что гравитационная энергия взаимодействия двух соседних ручек составляет по порядку величины

$$E_{\text{грав.}} \sim -\frac{Gm_1^2}{L^*}. \tag{11}$$

Результирующее уменьшение полной массы пары соседних ручек на величину

$$m_{\text{грав.}} = \frac{E_{\text{грав.}}}{c^2} \sim -\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} \tag{12}$$

имеет тот же самый порядок величины, что и положительная электромагнитная масса двух таких концентраций энергии. Иначе говоря, обстоятельства благоприятствуют локальной *компенсации* электромагнитной энергии гравитационной энергией. Более того, при такой локальной компенсации соседние ручки не оказывают гравитационного притяжения на отдаленные скопления

массы-энергии. Остается открытым вопрос о том, приведет ли это к возможности получения состояния вакуума с равной нулю результирующей плотностью энергии. Во всяком случае, мы приходим к заключению, что *допущение существования флуктуаций метрики и гравитационных взаимодействий является существенным в любом последовательном подходе к компенсационной проблеме* — проблеме компенсации «бесконечных» энергий, стоящей в центре внимания физики полей и элементарных частиц [1]).

Общая теория относительности утверждает, что невозможно приписать вполне определенного смысла *энергии электромагнитного поля в искривленном пространстве* [6]. В геометродинамике определенный смысл имеет только сумма энергии электромагнитного поля и гравитационной энергии, к тому же лишь в асимптотически плоском или, возможно, также в замкнутом пространстве [7]. Это обстоятельство подкрепляет заключение о незаконности пренебрежения гравитацией в каком бы то ни было удовлетворительном рассмотрении плотности нулевой энергии вакуума.

Мы не утверждаем, что нашли доказательство того, что квантовая геометродинамика в границах ее применимости решила проблему компенсации. Это может быть проверено только путем углубленного исследования, методы которого находятся пока что в стадии установления [2][2]).

Однако если будет установлена такая компенсация энергии, то мы будем иметь свободную от расходимостей квантовую теорию континуума, подобную которой мы еще никогда не имели.

Является ли такое представление, как континуум, совершенно несовместимым с миром физики элементарных частиц? Начнем с электронов. В теории электронов проводится различие между массой и зарядом «голого» электрона и массой и зарядом экспериментально наблюдаемого электрона. Множители перехода от одной

---

[1]) Это обстоятельство особенно подчеркивается Н. Бором в лекциях и дискуссиях.

[2]) См. примечание на стр. 336.

величины к другой являются расходящимися (но только логарифмически расходящимися). Ввиду этой расходимости иногда считается, что только перенормированная теория имеет физический смысл. Однако если представление о континууме имеет смысл, то разумно предполагать, что множители перехода не бесконечны, но лишь очень велики. Если аргументом логарифмической функции является отношение двух волновых чисел, то мы придем не к бесконечному верхнему пределу, а к L^{*-1}, ввиду того обстоятельства, что при таких волновых числах микромножественная связность пространства вносит существенные изменения в общепринятую теорию. Такой логарифм появляется в главном члене стандартного выражения для электромагнитной собственной энергии или собственной массы δm электрона [8]:

$$\frac{\delta m}{m} \sim \frac{3}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \ln\left(\frac{k_{\text{макс.}}}{k_m}\right). \tag{13}$$

Следует ожидать, что импульс $k_{\text{макс.}}$ должен быть равен величине порядка L^{*-1}; к тому же мы должны будем добавить к (13) выражение иной математической структуры для того, чтобы представить вклад в энергию, обязанный волновым числам от $k_{\text{макс.}}$ до ∞. Имея в виду порядки величины

$$\frac{k_{\text{макс.}}}{k_m} \sim \frac{10^{33}}{10^{11}} \sim e^{50}, \tag{14}$$

мы не можем утверждать, что соотношение (13) несовместимо со взглядом на электромагнитное происхождение всей энергии электрона, что долгое время отстаивал Лоренц.

Поэтому мы вынуждены рассматривать электрон не более и не менее как коллективное состояние возмущения пенообразной среды, символически изображенной на фиг. 2. Это коллективное возмущение представлено на фиг. 2 как некоторое уплотнение в распределении ручек внутри круга, проведенного штриховой линией. Дополнительное возрастание концентрации электромагнитных массы и энергии внутри электрона

$$\frac{m}{L_m^3} \sim \frac{c^3 m^4}{\hbar^3} = 1{,}57 \cdot 10^4 \ г/см^3 \tag{15}$$

ничтожно мало по сравнению с концентрацией электромагнитной энергии, уже имеющейся в вакууме: $5 \cdot 10^{93}$ *г/см*^{3} [см. соотношение (8)]. Иными словами, согласно настоящему новому толкованию взглядов Лоренца, электрон не является естественным исходным пунктом в описании природы. В самом деле он представляет собою поправку первого порядка к физике вакуума. Вакуум, представляющий собой первое приближение в трактовке задачи, с его огромными концентрациями электромагнитной энергии и многосвязной топологией следует рассмотреть до перехода к теории возмущений. С этой точки зрения удивительным достижением «вычитательной» физики является ее способность рассматривать такой широкий круг вопросов, какой она действительно рассматривает, не имея в своем распоряжении удовлетворительной теории заряда и массы электрона. Точность ее предсказаний, как и ее расходимости, связаны, с точки зрения настоящей работы, с малостью характерной длины $L \sim L^*$ физики вакуума по сравнению с длиной $L \sim L_m$ физики электрона.

Согласно квантовой теории электрона заряд экспериментально наблюдаемого электрона мал по сравнению с зарядом «голого» электрона. Несмотря на первое впечатление, этот результат не противоречит атомизму электрического заряда, даже если заряду «голого» электрона приписано единственное значение. Теория описывает экспериментальный заряд как нечто вроде среднего значения, которое не только не должно быть, но и действительно не является целым кратным «голого» заряда. Следовательно, нет очевидного противоречия между квантованным зарядом e квантованных коллективных возмущений и неквантованным зарядом порядка $q_{\text{флукт.}} \sim (\hbar c)^{1/2}$ для «голых» частиц.

В той интерпретации идеи Лоренца, плодотворность которого мы пытаемся показать, энергия и масса электрона рассматриваются как низшая характерная энергия устойчивого коллективного возмущения поля Эйнштейна — Максвелла. Почему эта масса-энергия должна быть мала по сравнению с единственной характерной массой-энергией, фигурирующей в квантовой геометродинамике: $m_1 = (\hbar c/G)^{1/2} = 2{,}18 \cdot 10^{-5}$ *г*? В табл. 2 мы

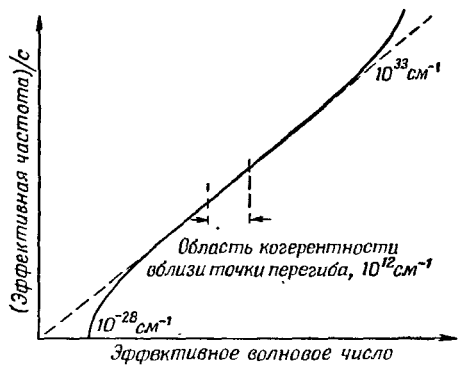
Таблица 2

Расхождения между наблюдаемыми величинами и элементарными оценками, полученными на основе наиболее естественных единиц длины и энергии 1) для физики электронов и 2) для сверхпроводимости

		Физика электронов	Сверхпроводимость
Расстояния	Наблюдаемые	10^{-11}—10^{-13} *см*	10^{-3} *см*
	Ожидаемые	10^{-33} *см*	10^{-8} *см*
Значения массы-энергии	Наблюдаемые	10^{-27} *г*	10^{-3}—10^{-4} *эв*
	Ожидаемые	10^{-5} *г*	10 *эв*

проводим сопоставление этой проблемы с другим загадочным явлением — сверхпроводимостью. Известно, что сверхпроводимость представляет собою коллективное явление, связанное со слабыми остаточными взаимодействиями [9]. Очевидно, нет оснований ожидать какой-либо непосредственной аналогии между полем Эйнштейна — Максвелла и полем, существующим в кристаллической решетке. Тем не менее следует настаивать на том, чтобы не осталось ни одной неисследованной возможности в поисках специальных явлений, связанных с прохождением энергии через пространство. Тогда придется рассмотреть соотношение между эффективной частотой и эффективным волновым числом (фиг. 3), которое должно быть линейным в плоском пространстве. Однако возмущения с весьма малой длиной волны, порядка 10^{-33} *см* будут чувствовать микрокривизну пространства и не смогут распространяться нормально. Это будет иметь место и в случае возмущений с весьма большой длиной волны, сравнимой с радиусом Вселенной. Следовательно, первоначально локализованные возмущения будут подвергаться дисперсии. Однако, если дисперсионная кривая имеет точку перегиба, как это

изображено на фиг. 3, то возмущения, содержащие близкие к точке перегиба длины волн, будут сохранять в линейном приближении свою компактность в течение долгого времени и даже могут рассматриваться как вполне стабильные при выходе за рамки элементарного приближения, допускающего суперпозицию. Легко записать математическое выражение дисперсионной кривой, точка перегиба которой расположена при волновых



Фиг. 3. Схематическое представление характера распространения возмущений в пространстве, обладающем как макрокривизной в масштабах Вселенной, так и микрокривизной порядка элементарной длины $(\hbar G/c^3)^{1/2}$, типичной для гравитационных флуктуаций.

числах порядка 10^{11}—10^{13} $см^{-1}$, характерных для физики электронов. В настоящее время еще отсутствует возможность проверки этих идей. Мы пытаемся здесь выяснить не соответствие чистой квантовой геометродинамики физике элементарных частиц, а возможность доказательства ее *несоответствия* этой физике.

Мы не видим никакого простого пути, свободного от детальных исследований, который опровергал бы возможность приведения в соответствие масс электрона и других элементарных частиц и характерных возбужденных состояний коллективных возмущений метрики, как это символически изображено на фиг. 2.

Что же касается ядерных сил, то возникает вопрос, будут ли два локализованных коллективных возмущения взаимодействовать между собою через чистые электромагнитное и гравитационное поля с силой, достаточной для объяснения связи двух нуклонов? В этой связи напомним то обстоятельство, что наблюдаемая сила этого взаимодействия лишь на один или два порядка больше обычных электростатических взаимодействий. Напомним также, что химическим силам между атомами долгое время приписывали природу, отличную от природы электрических сил, пока не была обнаружена связь между ними (в значительной мере благодаря Дж. Н. Льюису и П. Дебаю). Весьма трудной представляется опровержение возможности чисто геометродинамического объяснения ядерных сил.

Затронув вопросы о порядках величин масс частиц и о ядерных силах, мы приходим к последнему и решающему вопросу — проблеме спина. Каким образом классическая теория, рассматривающая поля с целыми значениями спина, способна после квантования привести к спину $^1/_2$, как это требуется для объяснения свойств нейтрино, электрона и других фермионов? С самого начала Паули говорил о спине как о «неклассической двузначности». Содержится ли что-нибудь в процессе фейнмановской формулировки сумм по историям или в двух выборах ориентации каждого элементарного пространственно-временного объема или в каких-либо других операциях чего-либо такого, что сделало бы необходимым введение неклассической двузначности такого рода? Если это не будет иметь места, то *чистая квантовая геометродинамика должна рассматриваться как схема, недостаточная для построения основы физики элементарных частиц.* Поэтому вопрос о происхождении спина является решающим при оценке возможностей квантовой геометродинамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Misner C. W., Wheeler J. A., Ann. of Phys., **2**, 525 (1957). (Дополнение I к настоящей книге.)
2. Misner C., Rev. Mod. Phys., **29**, 497 (1957).

3. Everett H., Rev. Mod. Phys., **29**, 454 (1957)
4. Wheeler J. A., Phys. Rev., **97**, 511 (1955).
5. Belinfante F. J., Phys. Rev., **98**, 793 (1955).
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., 1960, стр. 351.
7. Weber J., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **29**, 509 (1957).
8. Weisskopf V., Phys. Rev., **56**, 72 (1939); Rev. Mod. Phys., **21**, 309 (1949).
9. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R., Phys. Rev., **106**, 162 (1957). (См. перевод в сборнике «Теория сверхпроводимости», ИЛ, 1959.)

III. КОСМОЛОГИЯ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ АСТРОНОМИЧЕСКИХ ДАННЫХ [1])

Дж. Мак-Витти

§ 1. Введение

Данная работа посвящена трем проблемам космологии, а именно, применимости модели однородной Вселенной к наблюдаемой Вселенной, современному состоянию вопроса о расширении Вселенной и распределению в пространстве внегалактических радиоисточников класса II.

В целях сокращения изложения та часть математических выкладок, которую можно найти в учебниках, здесь не излагается, а соответствующие формулы приводятся в Приложении. Обсуждаемые вопросы по возможности объединены: общая теория относительности (А. А. Фридман и др.), теория стационарной Вселенной (Ф. Хойль) и теория кинематического релятивизма (Милн) обсуждаются одновременно. Действительно, формулы, с помощью которых проводится сравнение теории с наблюдениями, настолько близки, что все три теории могут рассматриваться вместе.

§ 2. Однородность

Необходимо различать между наблюдаемой Вселенной, населенной галактиками, и моделью Вселенной, заполненной идеальной жидкостью. Представление, что распределение галактик статистически однородно в наблюдаемой нами части Вселенной, основано на работе Хаббла (1930 г.) [1].

Подсчитывая число галактик до некоторых последовательных границ яркости или видимой величины, как говорят астрономы, Хаббл полагал, что он установил для

---

[1]) Доклад, подготовленный для конференции по гравитации в Руайомоне — Париже, 21—27 июня 1959 г.

числа галактик N, у которых граница этой яркости ниже некоторого значения m, довольно точное соотношение

$$\lg N = 0{,}6m + \text{const}. \quad (1)$$

Эту формулу следовало бы ожидать при условии, что все галактики обладают одинаковой собственной яркостью и распределены равномерно в покоящемся состоянии в эвклидовом пространстве. Это заключение было подвергнуто серьезной критике на том основании, что хаббловские пределы яркости весьма неопределенны. Было также показано, что распределение галактик на фотопластинке не носит случайный характер и что эти объекты имеют тенденцию образовывать скопления чаще, чем можно было бы ожидать, исходя из случайного распределения [2—4]. Один из астрофизиков зашел так далеко, что стал утверждать, будто бы заключения, основанные на предполагаемой справедливости соотношения (1), в наблюдаемой части Вселенной должны быть отвергнуты [5]. Хотя эта точка зрения и является крайней, необходимо признать, что однородность в распределении галактик в наблюдаемой части Вселенной имеет место лишь в том случае, если единица объема будет выбрана достаточно большой, например $3{,}5 \cdot 10^8$ *парсек* в диаметре [6]. Меньшие объемы будут иметь очень неравномерное распределение материи, в зависимости от того, будут или не будут они содержать скопления галактик. Еще меньшие объемы порядка размеров галактик могут вообще не содержать вещества. Короче говоря, следуя Оорту [6], «одним из наиболее удивительных свойств (наблюдаемой) Вселенной является ее неоднородность».

Напротив, в модели однородной Вселенной материя строго однородна в следующем смысле: в данный момент t плотность и давление материи одинаковы в *любом* объеме, как бы велик или мал он ни был. Таким образом, в настоящее время материя вряд ли может рассматриваться как жидкость, «частицами» которой являются галактики. В самом деле, такое представление противоречило бы гипотезе, на которой базируется теория красного смещения. Лишь некоторые частицы с особыми мировыми линиями считаются в такой модели ис-

точниками излучения, частицы же с мировыми линиями других типов рассматриваются как «невидимые». Но это было бы нелепо, если бы каждая «частица» материи в модели Вселенной рассматривалась как галактика. Следовательно, будем считать, что материю в модели однородной Вселенной следует представить как некоторый эффективный газ. Этот газ возник в результате некоторого воображаемого мгновенного распада содержимого всех галактик на соответствующие атомы, которые также мгновенно распространились равномерно в пространстве. В этом процессе распада потеряна важная физическая характеристика галактики — момент количества движения [1]).

С этой точки зрения плотность, входящая в уравнения (A.16) или (A.18), есть плотность эффективного газа, и давление, найденное с помощью (A.17) и (A.19), должно давать часть энергии наблюдаемой Вселенной, находящуюся в форме материи с равной нулю массой покоя. Эквивалент плотности p/c^2 этого давления даст меру внутренней энергии звезд и межзвездных газовых облаков, вращательную, кинетическую и потенциальную энергии галактик, и их содержимого, конечно, кроме кинетической энергии общего расширения, эквивалент плотности давления радиации и т. д. Вся эта энергия предполагается распределенной равномерно в каждый данный момент между всеми частицами эффективного газа. Этот газ находится в движении, каждая его часть движется относительно других частей, причем вид этого движения определяется специальной зависимостью масштабного фактора R от времени t. Однородность пространства для подобно движущихся систем может быть определена как постоянство всех свойств газа в каждый момент времени t в любом объеме пространства.

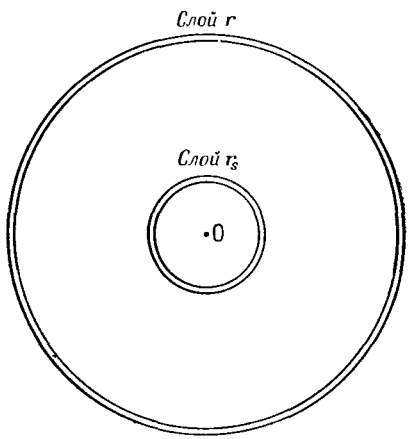
Ясно, что это справедливо для плотности и давления, если считать правильными уравнения (A.16) и (A.17) или (A.18) и (A.19). Но мы должны распространить это

[1]) В связи с этим встает вопрос: может ли абсолютное вращение в модели неоднородной Вселенной К. Геделя [7], А. Л. Зельманова [8], О. Хекмана и Э. Шюкинга [9] быть связано с подобным моментом количества движения.

определение также на свойства источников излучения, т. е. на их собственную светимость (абсолютные величины), на плотности потоков их радиоизлучения и на плотность числа источников. Это является обобщением понятий, введенных в теории стационарной Вселенной. В этой теории параметр α в (А.13)—(А.15) полагается пропорциональным R^3, чтобы плотность числа источников сделать постоянной. Но α не обязательно меняется подобным специальным образом, и, кроме того, мы не обязаны связывать ее изменение с каким-либо процессом порождения. Источники могут создаваться и исчезать просто в результате обычных физических процессов; например, в наблюдаемой Вселенной столкновения между галактиками могут приводить к образованию источников радиоизлучения, которые исчезают, когда столкновение оканчивается.

Если U есть одна из физических характеристик источников излучения, всеобщий постулат однородности предполагает, что U должно быть одной и той же функцией времени t для всех источников. Эта идея подсказывается формулами для плотности и давления эффективного газа, которые содержат одну лишь функцию $R(t)$. Физические характеристики, которые зависят только от времени и не меняются от объекта к объекту, обладают, как мы скажем, «U-свойством». Наблюдатель в точке O не может видеть всю Вселенную одновременно, он должен ждать, пока излучение дойдет до него, неся с собой информацию о положении вещей, там, где оно было испущено. На фиг. 1 показано сечение двух сферических слоев различных (постоянных) радиусов r_s и r. Моменты испускания излучения от источников в двух слоях обозначим через t_s и t соответственно; эти моменты времени должны быть различны, если излучение от этих слоев (и любых других) достигает точки O одновременно в момент времени t_0. Таким образом, свойство U принимает значения $U(t_s)$ и $U(t)$ для источников в двух слоях и в общем случае эти значения U не совпадают. Следовательно, наблюдатель регистрирует сложную и неоднородную картину положения вещей в указанной модели Вселенной, причем вклад каждой оболочки представляет, так сказать, экстракт того, что

происходило в некоторый момент времени в истории Вселенной. Важным следствием этих идей является то, что $U(t)$ можно рассматривать как $U(\delta)$, где δ — красное смещение, наблюдаемое в точке O от источников в слое r.



Фиг. 1.

Это следует из соотношения (А.5), которое устанавливает связь между временем испускания t и наблюдаемым красным смещением δ.

§ 3. Проблема расширения

Опишем сейчас кратко определение из наблюдательных данных параметра Хаббла и параметра ускорения: h_1 и h_2, определяемых равенствами (А.7). Внимание было сосредоточено на скоплениях галактик, и было фотографически измерено красное смещение для отдельных галактик в 18 скоплениях вплоть до $\delta = 0{,}2$ [10]. С много меньшей точностью были измерены видимые величины наиболее ярких галактик в скоплениях. Затем было предположено: а) что светимость наиболее ярких галактик в каждом скоплении одинакова и б) что спектрально-энергетические кривые этих галактик одинаковы. Уточнение теории допускает зависимость этих величин от времени и, таким образом, делает их «U-свойствами» в указанном выше смысле. Из уравнений (А.11) и (А.12) исключается фотометрическое расстояние D и устанавливается

соотношение между наблюдаемыми δ и m, справедливое до величины порядка δ^2. Анализ данных по способу наименьших квадратов показывает, что параметр h_2 отрицателен, хотя его точное значение неизвестно. Имеющиеся данные приводят к соотношению

$$h_2 = -q_0 h_1^2, \tag{2}$$

где q_0 — вероятно, больше 1,5 и может быть порядка 5 [10—12]. Отрицательный знак h_2 подтверждается фотоэлектрическими наблюдениями одного из скоплений галактик, для которого δ найдено равным 0,4 [13, 14]. По этому методу $q_0 = 1{,}0 \pm 0{,}5$, что приводит к тому, что соотношение между фотометрическим расстоянием D и скоростью $c\delta$ линейно с точностью до величин второго порядка по δ [см. соотношение (A.11)]; это является интересным подтверждением первоначальной гипотезы Хаббла. Отрицательный знак параметра ускорения означает, что расширение Вселенной в настоящую эпоху замедляется.

Численное значение самого параметра Хаббла h_1, который дал бы существующую в настоящее время скорость расширения, не может быть найдено только из соотношения между красным смещением и видимыми величинами. Необходимо применить некоторый процесс калибровки, с помощью которого можно независимо найти фотометрическое расстояние, соответствующее некоторому заданному значению красного смещения. Быстрое изменение мнений по данному вопросу произошло в последние семь лет. Принятое значение h_1 изменилось с $17{,}8 \cdot 10^{-18}$ *сек*$^{-1}$ (= 540 *км/сек · мегапарсек*) в 1952 г. на $2{,}43 \cdot 10^{-18}$ *сек*$^{-1}$ (= 75 *км/сек · мегапарсек*) в 1959 г. [15]. Изменение шкалы расстояний, связанное с подобной переоценкой, означает увеличение всех расстояний, соответственно уменьшению значений h_1.

Эти результаты, и в особенности отрицательное значение h_2, вызвали ряд возражений. Поскольку h_2 равно нулю в модели Милна и положительно в стационарной модели, заключения, сделанные из наблюдательных данных, несомненно неприятны сторонникам этих теорий. Справедливо замечают, что данные наблюдений неточны. Но ведь большинство астрономических данных

также неточны в большей или меньшей степени! Но пока критики не смогут предоставить более точные данные, я не вижу оснований к тому, чтобы отвергнуть заключения, сделанные на основании имеющихся наблюдений. Возражения основываются также на том, что h_2 перестанет быть отрицательной величиной, если предположить, что внутренняя светимость самых ярких членов в скоплении галактик систематически возрастает по мере того, как мы переходим ко все большим значениям красного смещения и, следовательно, отодвигается все далее и далее назад во времени. Это утверждение сводится к тому, что соответствующим образом выбранное отрицательное значение W_1 в (A.12) может сделать h_2 равным нулю или положительным, что вполне справедливо. Но опять-таки отсутствуют убедительные наблюдательные данные, которые оправдали бы подобный выбор. Остроумной альтернативой было бы предположение, что эффект является результатом отбора — слабые скопления с большим красным смещением выбираются при измерениях просто потому, что самые яркие члены в них обладают необычно большой светимостью [12, 16]. В этом случае опять-таки следовало бы подтвердить наблюдениями наличие подобного отбора.

Эйнштейновские уравнения поля (A.16) и (A.17) и предшествующие определения параметров h_2 и h_1 позволяют определить космологическую постоянную и кривизну пространства. Предположим, как это обычно делается, что p/c^2 в настоящее время пренебрежимо мало по сравнению с принимаемой в настоящее время плотностью ρ_0. Последнюю можно отождествить с принимаемой ныне средней плотностью материи в наблюдаемой Вселенной. При шкале расстояний, соответствующей $h_1 = 2{,}43 \cdot 10^{-18}$ *сек*$^{-1}$, последняя оценка плотности ρ_0, данная Оортом, есть $3{,}1 \cdot 10^{-31}$ *г/см*^{3} [6]. Таким образом, $4\pi G\rho_0 = 4{,}4 \cdot 10^{-2} h_1^2$ и, если R_0 есть принимаемое в настоящее время значение масштабного фактора, уравнения (A.16) и (A.17) дают

$$\Lambda = 3h_2 + 4\pi G\rho_0 = (-3q_0 + 4{,}4 \cdot 10^{-2})\, h_1^2, \qquad (3)$$

$$\frac{kc^2}{R_0^2} = h_2 - h_1^2 + 4\pi G\rho_0 = (-q_0 - 1 + 4{,}4 \cdot 10^{-2})\, h_1^2. \qquad (4)$$

Значение q_0 примерно равно 3 и, следовательно, космологическая постоянная и k будут отрицательными. Ясно также, что для того, чтобы сделать Λ равным нулю и иметь дело с пространством нулевой или положительной кривизны, современное значение плотности надо увеличить примерно в 200 или более раз. Оорт считает возможным, что его значение плотности может быть увеличено в «десять или более» раз. Однако это еще весьма далеко от множителя 200. Итак, мы заключаем, что пока не будут получены новые наблюдательные данные для пересмотра значения ρ_0, существующим данным лучше всего удовлетворяет отрицательная космологическая постоянная и открытое пространство гиперболического типа.

Отрицательное значение Λ означает, что во Вселенной существует универсальная сила (см. [22], § 6.5), которая препятствует галактикам разбегаться. Эта сила дополняет взаимное гравитационное притяжение галактик. Эти две силы между ними ответственны за замедление расширения. Но если устранить первую из этих сил (Λ-силу), приняв априори, что космологическая постоянная равна нулю, вся ответственность за замедление падает на гравитацию. Тогда, чтобы получить достаточно большое гравитационное притяжение, необходимо увеличить среднюю плотность материи в 200 раз, как было отмечено выше, и это действительно делается теми, кто считает, что космологическая постоянная Λ должна быть равной нулю [1]).

Несоответствие между наблюдаемым и вычисленным значениями ρ_0 в теории стационарной Вселенной неизбежно. При $k=0$ из (А.18) получаем $4\pi G\rho_0 = 1{,}5h_1^2$ вместо $4{,}4\cdot 10^{-2}h_1^2$. Этот разрыв может быть ликвидирован путем предположения, что наблюдаемое значение плотности надо умножить примерно на 30. Здесь мы имеем дополнительную трудность наряду с предсказанным этой теорией положительным значением параметра ускорения.

---

[1]) Так, Хойль и Сэндейдж [11], полагая $\Lambda = 0$, находят, что $4\pi G\rho_0 = 3q_0h_1^2$.

§ 4. Распределение источников радиоизлучения класса II

Следующая проблема, которую необходимо обсудить, заключается в распределении слабых источников радиоизлучения, названных в работах австралийских авторов [17] источниками класса II. Коротко говоря, наблюдались следующие результаты: на исследованной части неба обнаружено 1003 источника класса II, и из них лишь небольшая часть отождествлена оптически. Когда такие источники удается отождествить, они часто оказываются галактиками особого рода. Количество энергии, полученное от источника радиоизлучения в единицу времени через единицу площади в точке наблюдения и в единичном интервале частот, называется плотностью потока и выражается в ваттах на квадратный метр на герц. Общее число N источников класса II в некоторых последовательных пределах плотности потока S можно представить следующей таблицей:

S, 10^{-26} $вт \cdot м^{-2} \cdot гц^{-1}$.	7	10	20	40	80	160
N	982	754	218	63	19	4

Легко показать, что эмпирическое соотношение между N и S имеет вид

$$N = (\text{const}) S^{-\frac{3+\mu}{2}}, \tag{5}$$

где μ равно примерно 0,3[1]). При изучении источников, близких к классу II, было найдено, что излучение энергии на радиочастотах меняется как (Частота)^x в каждом интервале частот, где x — константа, называемая спектральным индексом; ее значение лежит между —0,6 и —1,2 [19].

При попытках интерпретации этих данных с помощью модели однородной Вселенной, как согласно общей теории относительности, так и в теории стационарной Вселенной, необходимо допустить, что источники класса II на самом деле являются галактиками и участвуют в

[1]) В работах Кэмбриджской группы предполагается, что μ может быть равным 1,4 или даже 2,4. (См. [18].)

общем расширении. Далее, надо иметь в виду, что каждый источник класса II имеет свою особую мировую линию. Отсутствие оптических отождествлений означает, что источники в большинстве настолько удалены, что делают невозможным подобное отождествление. Они, по-видимому, являются сильными источниками, возможно сравнимыми с парами сталкивающихся галактик, таких, как, например, NGC1275 или A в созвездии Лебедя. При этих предположениях мы произведем подсчет числа источников, обладающих выбранными мировыми линиями в модели Вселенной (A.1) и попытаемся связать это число с последовательностью значений плотностей потока с помощью формулы (A.15).

Параметр α для источников радиоизлучения класса II рассматривается обладающим U-свойством. Следовательно, он является функцией времени и, с точки зрения наблюдателя, также функцией красного смещения, соответствующего слою, в котором находится источник. Плотность числа источников, определяемая формулой (A.14), меняется не только при изменении масштабного фактора, или, что эквивалентно, при изменении красного смещения, по мере того как мы переходим от слоя к слою; плотность числа источников сама изменяется благодаря изменению α.

Источники в типичном слое r (см. фиг. 1) предполагаются одинаковыми и подчиняющимися закону испускания (Частота) ^{x}. Спектральный индекс также предполагается одинаковым для источников во всех слоях. Однако может случиться, что источники в слое r подвержены однородным вековым изменениям интенсивности излучения. Это может быть учтено, если предположить, что энергия излучения в слое r и в интервале частот от f_e до $f_e + df_e$ есть

$$c(t) f_e^x \, df_e = C(\delta) f_e^x \, df_e. \tag{6}$$

Здесь предполагается, что множитель C обладает U-свойством и может быть представлен в виде ряда по степеням δ. Это излучение достигнет наблюдателя, имея интервал частот от f до $f + af$, где $f_e = f(1 + \delta)$ и $df_e = (1 + \delta) df$; его интенсивность будет уменьшена в $1/D^2$

раз. Таким образом, наблюдатель зарегистрирует плотность потока, пропорциональную

$$C(\delta)\frac{(1+\delta)^{1+x}}{D^2}f^x\,df. \tag{7}$$

Но f и df фиксированы характером используемого определенного наблюдательного прибора, то же самое можно сказать относительно источников во всех слоях. Таким образом, коэффициенты пропорциональности могут быть исключены путем рассмотрения источников в соседнем слое r_s, как «стандартном» слое. Если теперь S, S_s — плотности потока источников в слоях радиусов r и r_s соответственно, то имеем [20][1]):

$$\frac{S}{S_s}=\frac{C(\delta)}{C(\delta_s)}\,\frac{(1+\delta)^{1+x}}{(1+\delta_s)^{1+x}}\,\frac{D_s^2}{D^2}. \tag{8}$$

Прежде чем переходить к получению формулы, связывающей N и S, путем комбинирования соотношений (A.15) и (8), полезно взглянуть на модель Вселенной, которую используют наблюдатели [17, 21]. Принимается, что все источники класса II обладают одинаковой мощностью ($вт \cdot м^{-2} \cdot гц^{-1}$), а сами источники рассматриваются как находящиеся в покое и беспорядочно распределенные с постоянной плотностью числа источников в эвклидовом пространстве классической механики. Если S и S_s — плотности потока, измеренные наблюдателем для источников на эвклидовом расстоянии l и l_s соответственно, то

$$S=\frac{P}{l^2},\quad S_s=\frac{P}{l_s^2}.$$

Если n_0 есть плотность числа источников, то число их внутри сферы радиуса l с центром в точке наблюдения равно

$$N=\frac{4\pi n_0}{3}l^3.$$

---

[1]) В этой работе предполагается, что соотношения (3.05) и (3.06) имеют место с постоянным $p(=-x-1)$.

Следовательно, соотношение между предельной плотностью потока S и числом N может быть выражено одной из двух формул:

$$N=\left(\frac{4\pi n_0}{3Q}P^{5/2}\right)S^{-3/2}=\left(\frac{4\pi n_0}{3Q}r_s^3\right)\left(\frac{S}{S_s}\right)^{-3/2}. \qquad (9)$$

Каждое из этих выражений можно потом сравнить с эмпирической формулой (5), а эффект ненулевого значения μ можно учесть соответствующим изменением, например, в множителе $^1/_3 n_0 p^{3/2}$.

Возражения против этой статической ньютоновой Вселенной заключаются в следующем. Распределение должно стремиться к нулю на конечном расстоянии от наблюдателя; в противном случае небо было бы равномерно освещено, что не имеет места в действительности. Более того, если каждый источник является галактикой, такая ограниченная система источников немедленно сжалась бы («коллапс») под действием взаимного гравитационного притяжения составляющих ее частей. Все спектральные линии были бы смещены к фиолетовому концу вместо красного. Другое важное возражение заключается в том, что эта теория отвлекает внимание на усложнение, а именно на отклонение от «закона —3/2», выраженного в ненулевом значении μ. Ведь именно факт существования соотношения между N и S, которое так близко апроксимирует «закон —3/2», является основной загадкой, которую следует объяснить в первую очередь.

Оставляя этот способ подхода, вернемся к модели однородной Вселенной, в которой источники класса II принимают участие в общем расширении. Плотность числа источников в слоях r и r_s будет соответственно n и n_s. Так как слой r_s находится близко к наблюдателю, то плотность числа источников во всех точках объема, ограниченного этим слоем, может считаться равной n_s. Таким образом, из (A.14) имеем

$$n=\frac{\alpha(\delta)(1+\delta)^3}{R_0^3}, \qquad (10.\text{а})$$

$$n_s=\frac{\alpha_0(1+\delta_s)^3}{R_0^3}. \qquad (10.\text{б})$$

где в качестве α_0 можно принять значение α, соответствующее нулевому красному смещению. Когда α является константой, изменение n с ростом δ происходит только благодаря расширению Вселенной и дается соотношением

$$\frac{n}{n_s}=\left(\frac{1+\delta}{1+\delta_s}\right)^3. \qquad (10.\text{в})$$

Чтобы воспроизвести эмпирический закон (5), допустим, что число источников, задаваемое формулой (А. 15), в объеме, внешней границей которого служит слой радиуса r, пропорционально отношению плотностей потока, определяемому соотношением (8). Запишем

$$N=\frac{4\pi n_s D_s^3}{(3+\mu)\,Q}\,A\left(\frac{S}{S_s}\right)^{-\frac{3+\mu}{2}}, \qquad (11)$$

где A — численная константа нормировки, которую нужно определить. Теперь продифференцируем (11) по r и используем соотношения (А. 15), (А. 10) и (8). Отсюда найдем

$$\frac{n}{n_s}=\frac{\alpha}{\alpha_0}\left(\frac{1+\delta}{1+\delta_s}\right)^3=$$

$$=\frac{F}{F_s}\left(\frac{1+\delta}{1+\delta_s}\right)^{\frac{9-3x+\mu(1-x)}{2}}\left(\frac{C(\delta_s)}{C(\delta)}\right)^{\frac{3+\mu}{2}}\left(\frac{r}{1+\frac{kr^2}{4}}\,\frac{1+k\frac{r_s^2}{4}}{r_s}\right)^{\mu}, \qquad (12)$$

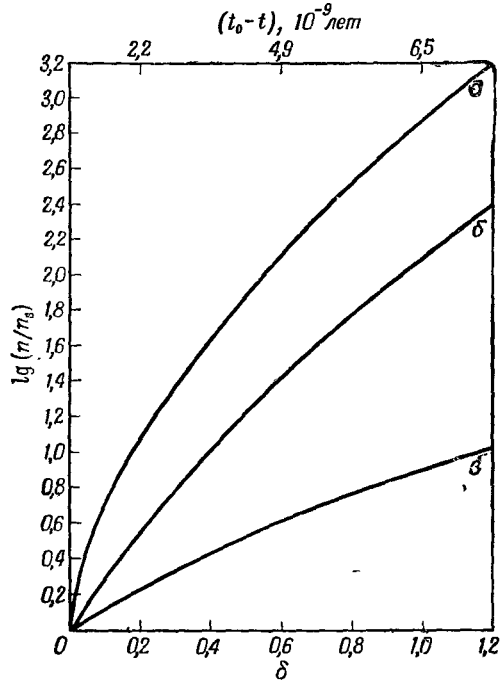
где

$$F_s=\left(\frac{1-x}{1+\delta}-\frac{1}{c}\frac{dc}{d\delta}\right)\frac{r}{2}\frac{d\delta}{dr}+\frac{1-\frac{kr^2}{4}}{1+\frac{kr^2}{4}}; \qquad (13)$$

здесь F_s есть значение F при $\delta=\delta_s$, а константа A подобрана так, чтобы получить $n=n_s$ при $\delta=\delta_s$. Формула (12) применима, конечно, только для $r\geqslant r_s$ или $\delta\geqslant\delta_s$. Это соотношение показывает, что n и α должны меняться вместе с δ, если нужно получить эмпирический закон (5). Если это — «закон —3/2», то в (12) $\mu=0$.

Чтобы показать, как n меняется с δ, необходимо использовать некоторую конкретную модель, которая бы

позволяла выполнить интегрирование в (А. 4). Простейшей моделью такого рода является модель Милна (А. 2), в которой, если и нет отрицательного параметра ускорения, то он по крайней мере равен нулю. Допустим



Фиг. 2.

для простоты, что коэффициент интенсивности излучения C есть константа. Тогда соотношение (12) принимает вид

$$\frac{n}{n_s}=\left(\frac{1+\delta}{1+\delta_s}\right)^{\frac{7-3x-\mu(1+x)}{2}}\left(\frac{2+\delta}{2+\delta_s}\right)^{\mu}\left(\frac{\delta}{\delta_s}\right)^{\mu}\times$$
$$\times\frac{1+x+(3-x)(1+\delta)^2}{1+x+(3-x)(1+\delta_s)^2}. \qquad (14)$$

В этой модели при $x=-1$ получается сравнительно простая формула, и это значение x принято на фиг. 2.

Кривая *а* показывает ход $\lg(n/n_s)$ в зависимости от δ для эмпирического закона (5) при $\mu = 0{,}3$, кривая *б* относится к «закону —3/2» при $\mu = 0$, а кривая *в* — к случаю (10 *в*), в котором n меняется только благодаря расширению. Во всех трех случаях $\delta_s = +0{,}004$. Сравнение кривых *б* и *в* показывает, что существование «закона —3/2» для распределения в пространстве источников радиоизлучения класса II предполагает, что они были существенно более многочисленны в прошлом, чем в настоящее время. Положительное значение μ просто делает это внутреннее возрастание более ярко выраженным.

Таким образом, пониженную плотность более сильных источников радиоизлучения по сравнению со статической в нашем ближайшем окружении [17] можно было бы предвидеть в каждом случае. Момент в прошлом, к которому относится какое-либо конкретное значение n, может быть вычислен из соответствующего δ и времени распространения $t_0 - t$ излучения от источника. Используя соотношения (A. 2), (A. 5) и (A. 7), получаем время, равное $\delta\{h_1(1+\delta)\}^{-1}$, для модели Милна. Некоторые из этих данных приведены на фиг. 2 для $h_1 = 2{,}43 \cdot 10^{-18}$ *сек*$^{-1}$. Таким образом, $2{,}2 \cdot 10^9$ *лет* тому назад ($\delta = 0{,}2$) плотности числа источников, предсказываемые кривыми *а*, *б* и *в*, должны были относиться друг к другу как 12 : 3,5 : 1,7.

Соотношение (12) показывает также, что плотность числа источников будет меняться в результате одного лишь расширения ($\alpha = \alpha_0$) при некоторых специальных условиях. Одни из подобных случаев можно охарактеризовать набором $x = +1$, $k = 0$, $\mu = 0$ и $C = \text{const}$. Хотя известно, что источники радиоизлучения класса II не имеют спектральных индексов, равных единице, этот результат тем не менее интересен, так как он показывает, как соответственно выбранный закон испускания для источников излучения мог бы воспроизвести «закон —3/2», даже если источники очень далеки от пребывания в состоянии покоя в статической ньютоновой Вселенной. Можно также доказать, что, когда x не равен единице, условие $\alpha = \alpha_0$ может быть обеспечено только предположением, что $R(t)$ зависит от x и C. Другими

словами, расширение Вселенной зависело бы от закона испускания радиоизлучения источниками класса II, что вряд ли допустимо.

Эффект переменной интенсивности излучения может быть проиллюстрирован следующим образом. Положим, что источники класса II расположены сравнительно близко от наблюдателя и что соотношение (12) ограничено только первой степенью δ. Если $\mu = 0$, $C = 1 + C_1\delta$ и $\delta_s \sim 0$, то

$$\begin{aligned} \frac{n}{n_s} &= 1 + (5 - 2x - 2C_1)\,\delta + \ldots, \\ \frac{a}{a_0} &= 1 + 2\,(1 - x - C_1)\,\delta + \ldots, \end{aligned} \tag{15}$$

какими бы ни были R и константа кривизны. Плотность числа источников будет меняться только вследствие расширения с точностью до данного приближения по δ, если [1])

$$C_1 = 1 - x.$$

Так как x отрицательно, C_1 является положительной величиной и фактор интенсивности растет с δ. Следовательно, все источники более интенсивно излучали в прошлом, чем теперь. Другая альтернатива заключается в предположении, что источники радиоизлучения класса II расположены так близко от наблюдателя, что их красное смещение практически равно нулю. Но тогда тот факт, что оптических отождествлений очень мало, становится совершенно непонятным.

Приближенные формулы (15) показывают также, почему Пристер [29] смог заключить, что если n меняется как $(1 + \delta)^6$ и C — константа, то «закон —3/2» воспроизводится почти точно. Положив $C_1 = 0$ и $x = -0{,}8$, имеем:

$$\frac{n}{n_s} \approx (1 + 6{,}6\delta) \approx (1 + \delta)^{6{,}6}. \tag{16}$$

Гипотеза Пристера заключается в том, что все источники радиоизлучения класса II представляют собой сталкивающиеся галактики. Однако эта интерпретация

[1]) Этот результат был найден другим способом автором в [20], где это соответствует случаю $p = \text{const}$, $b_1 = -1$.

становится тем менее правдоподобной, чем больше источников отождествляются с кратно-центрированными эллиптическими галактиками.

Отсюда следует вывод: если масштабный фактор и кривизна произвольны, а источники класса II являются галактиками, не находящимися в непосредственной близости к наблюдателю, то должна иметь место некоторая зависимость α от δ, если распределение источников в пространстве подчиняется «закону —3/2», причем это также справедливо, когда μ отлично от нуля. Таким образом, плотность числа источников в прошлом отличается от ее значения в настоящее время в окрестности наблюдателя; это различие не может быть учтено одним расширением Вселенной.

Основное допущение теории стационарной Вселенной заключается в том, что отношение плотностей числа источников n/n_s всегда равняется единице. Кроме того, никакие общие вековые эффекты не допускаются теорией, и, следовательно, коэффициент интенсивности излучения C должен быть константой. Но теперь отношение n/n_s может быть вычислено для стационарной модели (А. 3) из соотношений (12) и (13), причем в результате получим

$$\frac{n}{n_s} = \left(\frac{1+\delta}{1+\delta_s}\right)^{\frac{7-3x+\mu(1-x)}{2}} \left(\frac{\delta}{\delta_s}\right)^{\mu} \frac{2+(3-x)\delta}{2+(3-x)\delta_s}. \qquad (17)$$

Сравнение с (14) показывает, кстати сказать, как сильно изменение модели меняет формулу для плотности числа источников. Если бы правая часть равнялась единице, она определенно не должна была бы зависеть от δ. Но это не может быть достигнуто для произвольной комбинации величин μ и x. Таким образом, мы заключаем, что эмпирическое правило (5) не может быть воспроизведено теорией стационарной Вселенной.

§ 5. Выводы

Как обычно, когда теория сопоставляется с суровыми фактами эксперимента или наблюдения, наряду с ответами возникает столько же новых вопросов.

Если однородность в наблюдаемой Вселенной

представляется только крупномасштабным явлением, теоретикам следует теперь вернуться к построению модели Вселенной, которая является однородной в большом, но становится неоднородной, когда объем элемента пространства становится меньше, чем определенное минимальное значение. Но если тем не менее применять однородные модели, то следует сосредоточить внимание на тех из них, которые соответствуют гиперболическому пространству и отрицательной космологической константе. Релятивистские модели Вселенной подобного рода существуют, и часть из них удовлетворяет условию нулевого давления. Поскольку это условие может быть экстраполировано в отдаленное прошлое, а также продолжено в отдаленное будущее — две очень сомнительные экстраполяции — эти модели имеют масштабные факторы R, которые являются эллиптическими функциями t. Масштабный фактор R возрастает от нуля до максимального значения, а потом снова уменьшается до нуля. Таким образом, эти модели относятся к типу осциллирующих, или циклически повторяющихся.

Но я думаю, что было бы иллюзорным претендовать, как это делается в теории стационарной Вселенной и в теории кинематического релятивизма, что может быть выбрана одна единственная весьма специальная модель Вселенной для того, чтобы представить наблюдаемую Вселенную.

Наш обзор поднял также ряд физических проблем, например, проблему: может ли универсальная сила притяжения, представленная отрицательной космологической константой, быть интерпретирована другими способами? Можно ли представить себе физический процесс излучения радиоволн источниками класса II, который предсказывал бы их большее количество в прошлом, чем в настоящем? Вероятно, это усиление в прошлом связано с тем фактом, что галактики раньше были ближе друг к другу. В этом смысле можно сказать, что Пристер [29] ответил на наш вопрос, если его гипотеза, что большинство источников класса II являются сталкивающимися галактиками, может быть принята.

Сторонники теории стационарной Вселенной полагают, что необходимы новые виды наблюдений [30], для того чтобы «проверить» их теорию по сравнению с обеей теорией относительности. Астрономы-наблюдатели 1, 31] тоже, по-видимому, склоняются к мысли, что от вопрос все еще остается открытым. Действительно, 1956 г. было известно, что теория стационарной Всеенной предсказывает неправильный знак для параметра ускорения. Мы указали, что предсказываемая средая плотность материи оказывается слишком высокой.

Наконец, один из результатов настоящей работы заключался в указании на то, что теория стационарной селенной не может воспроизвести эмпирический закон аспределения источников радиоизлучения класса II. Ввиду этих соображений неясно, каким образом дальейшие «проверки» могли бы усилить позиции теории тационарной Вселенной. Соответствующая ей модель Вселенной просто не согласуется с наблюдениями, тогда ак некоторые модели Вселенной, вытекающие из общей еории относительности, наблюдениям удовлетворяют.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ФОРМУЛЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, СПРАВЕДЛИВЫЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНОЙ ВСЕЛЕННОЙ И ТЕОРИИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО РЕЛЯТИВИЗМА

Метрика в модели однородной Вселенной (см. [22] § 8.2; [23])

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{c^2}\,\frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2}{\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^2}. \qquad \text{(A. 1)}$$

Теория кинематического релятивизма (модель Милна) [24, 25]:

$$R = ct, \quad k = -1. \qquad \text{(A. 2)}$$

Модель стационарной Вселенной [26]:

$$R = R_0 e^{(t-T)/T}, \quad k = 0, \qquad \text{(A. 3)}$$

где R_0 и T постоянны.

Особая мировая линия: геодезическая линия, для которой (r, θ, φ) постоянны [10].

Источники излучения предполагаются имеющими особые мировые линии.

Наблюдатель в точке $r=0$ находится на особой мировой линии и производит все свои наблюдения в момент времени t_0.

Уравнение движения для излучения от источника, находящегося в точке (r, θ, φ) в типичном слое r (см. фиг. 1), есть ([18], стр. 145):

$$c\int_t^{t_0}\frac{dt}{R(t)}=-\int_r^0\frac{dr}{1+\frac{kr^2}{4}}. \qquad \text{(A. 4)}$$

Излучение испускается источником в момент времени t и достигает наблюдателя в момент t_0.

Красное смещение излучения от источника, измеренное наблюдателем ([22], стр. 146), есть

$$\delta=\frac{R(t_0)}{R(t)}-1=\frac{R_0}{R}-1, \qquad \text{(A. 5)}$$

если R — возрастающая функция времени t.

Параметр Хаббла (*«постоянная» Хаббла*) *и параметр ускорения*: если R представить в виде разложения в ряд по степеням времени распространения (t_0-t) излучения от источника, то (A. 5) принимает вид (см. [22], уравнение (9.201))

$$\delta=h_1(t_0-t)+\frac{2h_1^2-h_2}{2}(t_0-t)^2+\ldots, \qquad \text{(A. 6)}$$

где константа Хаббла и параметр ускорения соответственно равны

$$h_1=\frac{R_0'}{R_0} \qquad h_2=\frac{R_0''}{R_0}; \qquad \text{(A. 7)}$$

здесь штрих означает производную по времени t. Для модели Милна

$$h_1=\frac{1}{t_0}, \quad h_2=0, \qquad \text{(A. 8)}$$

а для модели стационарной Вселенной —

$$h_1 = \frac{1}{T}, \qquad h_2 = \frac{1}{T^2} = +h_1^2. \tag{A. 9}$$

Фотометрическое расстояние источника ([22], § 8.5, уравнение (9.210)). Операция, определяющая его измерение, состоит в измерении видимой величины. Интенсивность источника убывает как $1/D^2$, где

$$D = R_0(1+\delta)\frac{r}{1+kr^2/4}, \tag{A. 10}$$

или

$$D = \frac{c\delta}{h_1}\left(1 + \frac{h_1^2 + h_2}{2h_1^2}\delta + \ldots\right). \tag{A. 11}$$

Выражая D через наблюденную видимую величину m источника и ее теоретическую абсолютную величину M_0 ([22], § 8.6, стр. 164, [27]), имеем

$$\lg D = 0{,}2\,[m - K_1\delta - (M_0 + W_1\delta)] + 1, \tag{A. 12}$$

где $K_1\delta$ есть K-поправка и $W_1\delta$ есть поправка к M_0, если имеют место вековые изменения собственной светимости источника.

Число источников излучения в слое r (см. [22], § 8.7):

$$dN = \alpha\frac{r^2\,dr}{(1+kr^2/4)^3}. \tag{A. 13}$$

Плотность числа источников излучения (их число на единицу объема в слое r) равна

$$n = \frac{\alpha}{R^3} = \frac{(1+\delta)^3}{R_0^3}\alpha, \tag{A. 14}$$

где α — плотность числа источников в момент времени, когда $R = 1$. Если α изменяется со временем, то общее число источников внутри слоя радиуса r в долях телесного угла $4\pi/Q$ небесной сферы равно

$$N = \frac{4\pi}{Q}\int_0^r \frac{\alpha r^2\,dr}{(1+kr^2/4)^3}. \tag{A. 15}$$

II. ФОРМУЛЫ, КОТОРЫМИ ТЕОРИИ РАЗЛИЧАЮТСЯ

Эйнштейновские уравнения общей теории относительности (теория А. А. Фридмана) для плотности ρ и давления p эффективного газа ([22], § 8.2) имеют вид

$$8\pi G\rho = \frac{3(kc^2 + R'^2)}{R^2} - \Lambda, \qquad \text{(A. 16)}$$

$$8\pi G\left(\frac{p}{c^2}\right) = -\frac{2R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2} - \frac{kc^2}{R^2} + \Lambda, \qquad \text{(A. 17)}$$

где G — гравитационная и Λ — космологическая постоянные.

Для применения этих уравнений к модели Милна следует положить $8\pi G\rho$, $8\pi G(p/c^2)$ и Λ равными нулю. В теории стационарной Вселенной $8\pi G\rho$ и $8\pi G(p/c^2)$ равны нулю, но $\Lambda = 3/T^2 (> 0)$. Это соответствует Вселенной де-Ситтера.

Уравнения поля в теории стационарной Вселенной имеют вид [28]

$$8\pi G\rho = \frac{3(kc^2 + R'^2)}{R^2}, \qquad \text{(A. 18)}$$

$$8\pi G\left(\frac{p}{c^2}\right) = -\frac{2R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2} - \frac{kc^2}{R^2} + 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{R'}{R}\right), \qquad \text{(A. 19)}$$

где $3c/a$ — универсальная константа, внесенная временно-подобным вектором «рождения материи»: $3(c/a)(1, 0, 0, 0)$. Полученное решение (A. 3) этих уравнений делает плотность ρ постоянной и $p/c^2 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hubble E. P., Astrophys. Journ., **79**, 8 (1934).
2. Shane C. D., Wirtanen C. A., Astrophys. Journ., **59**, 285 (1954).
4. Neyman J., Scott E. L., Shane C. D., Astrophys. Journ., **117**, 92 (1953).
5. Zwicky F., Morphological Astronomy, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1957, § 20e.
6. Oort J. H., Distribution of Galaxies and the Density in the Universe (Solvay Congr., 1958), Stoops, Brussels, 1959.

7. Gödel K., Proc. Int. Congr. of Math., 1950, **7**, 175 (1952).
8. Зельманов А. Л., Trans. I. A. U. (Moscow, 1958), т. 10, Report of Commission 28.
9. Heckmann O., Trans I. A. U. (Moscow 1958), т. 10, Report of Commission 28.
10. Humason M. L., Mayall N U., Sandage A. R., Astron. Journ., **61**, 97 (1956).
11. Hoyle F., Sandage A. R., Publ. Astron. Soc. Pacific, **68**, 301 (1956).
12. McVittie G. C., Handb. d. Physik, **53**, 445 (1959); Science, **133**, 1231 (1961).
13. Baum W. A., Astron. Journ., **62**, 6 (1957).
14. Baum W. A., Trans. I. A. U. (Moscow 1958), т. 10, Report of Commission 28.
15. Sandage A. R., Astrophys. Journ., **127**, 513 (1958).
16. Scott E. L., Astron. Journ., **61**, 190 (1956).
17. Mills B. Y., Slee O. B., Hill E. R., Austr. Journ. Phys., **11**, 360 (1958).
18. Edge D. O., Scheuer P. A. G., Shakeshart J. R., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **118**, 183 (1958).
19. Whitfield G. R., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **117**, 680 (1957).
20. McVittie G. C., Austr. Journ. Phys., **10**, 331 (1957).
21. Ryle M., Proc. Roy. Soc. **A248**, 289 (1958).
22. McVittie G. C., General Relativity and Cosmology, London, 1956. (См. перевод Дж. Мак-Витти, Общая теория относительности и космология, ИЛ, 1961.
23. Robertson H. P., Helv. Phys. Acta, Suppl. IV, p. 128 (1956).
24. Kermark W. O., McCrea, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **93**, 519 (1933).
25. McVittie G. C., Astron. Journ., **60**, 105 (1955).
26 Bondi H., Gold T., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **108**, 252 (1948).
27. Davidson W., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **119, 54 (1959).**
28. Hoyle F., Mon Not. Roy. Astron. Soc., **108**, 372 (1948).
29. Priester W., Zs. f. Astrophysik, **46**, 179 (1958).
30. Hoyle F., Symp. on Radio Astronomy, Paris, 1958.
31. Pawsey J. L., Trans. **I. A. U. (Moscow 1958), т. 10, Report** of Commission, 40.

IV. ПРОВЕРКА КОСМОЛОГИИ НАБЛЮДЕНИЯМИ [1]

Ф. Хойль

F. Hoyle, Proc. Phys. Soc., 77, Pt. 1, 1—16 (1961)

Космологические теории резко разделяются на два класса. В теориях одного класса предсказывается, что Вселенная образовалась строго определенное конечное время тому назад; в теориях же другого класса этого не требуется. Существующие методы наблюдения позволяют произвести выбор между этими двумя типами теорий. В частности, такими методами являются:

1) *Геометрическая проверка.* Эти наблюдения позволяют исследовать предполагаемую разницу между существующим состоянием Вселенной (определяемым по локальным наблюдениям) и условиями во Вселенной в прошлом (определяемыми по наблюдениям весьма удаленных объектов).

2) *Проверка локальной эволюции.* Прошлое Вселенной должно быть таким, чтобы привести к ее современному состоянию. Применительно к образованию галактик, их возрасту, а также к происхождению космических лучей и космических радиоволн это простое условие имеет глубокий смысл. В связи с этим двумя проблемами будет рассмотрено современное состояние вопроса.

Как правило, в науке имеют дело с изолированными системами, которые рассматриваются заключенными внутри некоторого сосуда — возможно весьма большого. В космологии, однако, имеют дело со всей Вселенной, так что любая мысль о каких-то рамках, внутри которых заключена система, должна быть отброшена. Тогда наступают затруднения даже для простых привычных концепций. Предположим, что пространство бесконечно, как это принимается во многих космологических моделях. Как тогда следует формулировать сохранение энергии? Этот вопрос является частью двух более общих вопросов: Насколько далеко простирается универсальная пригодность законов физики, выведенных из локальных наблюдений? Насколько универсальны

[1] 44-я Гэтриевская лекция, прочитанная в Физическом обществе 21 марта 1960 г.

наши представления о распределении материи, основанные на локальных наблюдениях?

Современная физика уверенно дает утвердительный ответ на первый вопрос. Законы носят полевой характер, а это значит, что если полностью известна ситуация в «бесконечно малом» объеме пространства-времени, то известна и ситуация во всей Вселенной. Однако важно, чтобы ситуация в бесконечно малом объеме формулировалась со всей общностью. Слишком часто мы довольствуемся принятием формулировок на языке частных случаев, которые являются только привычными случаями. Примером этому служит формулировка закона сохранения энергии со ссылкой на изолированную систему. Общее же утверждение о сохранении энергии должно выводиться не из идеи об изолированной системе, а из нулевой дивергенции тензора энергии-импульса. Именно последняя формулировка обладает универсальной применимостью.

Что касается второго вопроса, то под локальным наблюдением подразумевается наблюдение не буквально бесконечно малого объема, как в случае формулировки физических законов, а диапазон, доступный нашим телескопам. Распределение галактик становится настолько близким к однородному на расстоянии всего лишь около 1/10 «радиуса действия» наиболее мощных телескопов, что последующее постулирование однородности в космологических моделях является естественным ответом на второй вопрос.

Разбиение пространства-времени на элементарные объемы можно производить так, что в любой момент времени галактики будут распределены в пространстве равномерно при условии, что тем самым подразумевается усреднение по пространственным объемам с протяженностями порядка 100 *мегапарсек,* т. е. примерно 1/10 «радиуса действия» наиболее мощных телескопов.

Иными словами, наблюдатель, который игнорирует детальные формы и распределение ближайших галактик, не сможет различать своего местоположения в пространстве. Наблюдатель не ограничен одним моментом времени. Ему дозволено сравнивать свои наблюдения в различные времена, и все же он не может отличить

свое собственное положение от положения любого другого наблюдателя, использующего те же самые пространственно-временные координаты. Таким образом, ответ и на второй вопрос опять является утвердительным.

Однородность не только подразумевает, что наблюдатель не может выделить свое положение, он неспособен также выделить и какое-либо преимущественное направление в пространстве: свойства объектов, которые он видит в любой данной части пространства, оказываются аналогичными тем свойствам, которые он находит в любой другой «части неба». Здесь опять-таки подразумевается, что он игнорирует ближайшие объекты вроде звезд в его собственной галактике.

Иногда спрашивают: откуда мы можем знать, что пространственно-временная система координат с этим свойством однородности имеет реальный смысл? Ведь возможно, что вне пределов достижимости наших наиболее сильных телескопов распределение галактик становится резко неоднородным. Возможно, что наблюдаемая однородность является более или менее случайной?

Имеется два ответа на это возражение. Один ответ неожиданно практический, а другой — принципиальный. Наука занимается не доказательством справедливости гипотез, а наоборот — доказательством их несостоятельности. Когда наблюдение противоречит теории, то по крайней мере одна из гипотез, на которых основана теория, должна быть отвергнута. Наука достигает прогресса через процесс отрицания, а не через процесс доказательства. В таком случае наша цель должна состоять в сравнении следствий из постулата однородности с наблюдениями. Если имеет место согласие с наблюдениями, то все остается на своих местах, ибо ни одна научная теория не может сделать большего, чем объяснить все факты! Но если имеется несогласие с наблюдениями, то мы должны узнать, какой из наших утвердительных ответов на поставленные вначале два вопроса был ложен. И, если исключить тот неприятный случай, что мы в корне ошибаемся в понимании природы физического знания, ошибка заключалась бы в постулате однородности. Тогда мы были бы вынуждены предполагать, что нет такой системы координат, в кото-

рой общее пространственное распределение галактик однородно. Это было бы заключением, имеющим весьма глубокое значение.

Отсюда вытекает, что наш постулат однородности нужно проанализировать, если это возможно, вплоть до той стадии, когда возможно непосредственное сравнение наблюдений с теорией. Настойчивый критик может возразить, что поскольку постулат однородности основан на наблюдении, то как же наблюдение может давать что-либо еще кроме подтверждения этого постулата? Не будет ли это тавтологией? Подобной критике можно подвергнуть любую отрасль науки. На это отвечают, подчеркивая, что теоретические гипотезы в действительности формулируются на основе опытных данных, которые являются более ограниченными, нежели те, которые используются для проверки следствий из теории. К постулату однородности пришли — это исторический факт, — подсчитывая число галактик по различным направлениям и на различных расстояниях. Были приняты во внимание лишь особенности наиболее крупного масштаба самих галактик, такие, как их общая структурная форма. Но, прийдя таким образом к постулату однородности, можно попытаться уточнить наблюдательные данные. Можно рассмотреть свойства, которые зависят от индивидуальных звезд, и, в частности, свойства, которые зависят от эволюции звезд. Как мы теперь покажем, это приводит к поразительному расширению наблюдательных данных.

Первоначальные наблюдения относились к расстояниям порядка 500—1000 *мегапарсек*. Эволюция звезд подразумевает рассмотрение физических процессов, действовавших на протяжении более чем 10^{10} *лет*, возможно даже $2 \cdot 10^{10}$ *лет*. Такие временные интервалы превращаются в расстояния путем умножения на скорость света — в этом случае мы сравниваем абсолютные расстояния в смысле теории относительности. В результате получаются величины порядка 5000 *мегапарсек*. Следовательно, вводя в рассмотрение астрофизику звездной эволюции, мы приходим к временно-подобным расстояниям, которые превышают первоначальные пространственно-временные расстояния в 10 раз. Ситуация

такова, что когда мы касаемся астрофизики звезд, даже близких к нам, то мы включаем в рассмотрение события, которые имели место в пространственно-временных точках, гораздо более удаленных от нас, нежели те события, которые мы наблюдаем в самых слабых галактиках, наблюдаемых в самые мощные телескопы!

В принципе эти обстоятельства объясняют, почему включение астрофизических наблюдений в космологию обеспечило полезное и далеко идущее расширение первоначальных данных. Кроме данных, ограниченных сравнительно малой частью светового конуса, мы обладаем информацией (правда, ни коим образом не полной) о событиях в более или менее цилиндрическом объеме пространства-времени, причем пространственный радиус цилиндра составляет примерно 1000 *мегапарсек*, а временно-подобная длина — около 5000 *мегапарсек*.

Постулат однородности приводит к далеко идущим выводам, в особенности при упрощении выкладок в космологии, на что впервые было указано Лемэтром, а затем, независимо — Робертсоном и Уокером. Главный результат постулата вполне может быть выражен следующими словами. В заданной пространственно-временной системе координат, для которой имеет место однородность, рассмотрим заданный момент времени. Возьмем множество галактик. Считая галактики точечными массами, получаем, что это множество задает решетку точек. Те же галактики также задают решетку в последующие значения времени. Все эти решетки одинаковы, если не считать масштабного фактора $R(t)$, зависящего от времени t. Решетка просто расширяется или сокращается в соответствии с тем, растет или уменьшается $R(t)$ со временем t. В этой связи будет считать t возрастающим в том смысле, что свет распространяется (от источника). (Мы выбираем знак t таким, что если световой сигнал покидает P_1 в момент t_1 и достигает P_2 в момент t_2, то $t_2 > t_1$. Вместе с тем мы должны представлять себе размеры ячеек современной решетки, составляющие примерно 100 *мегапарсек*, иначе идея однородности неприменима. Решетки со значительно меньшими ячейками могут эволюционировать во времени более общим образом.)

Центральной проблемой космологии является определение зависимости $R(t)$ от t. Уравнения общей теории относительности обеспечивают требуемые математические средства. Теория относительности дает уравнения, которые являются формальными в одном важном отношении. В уравнениях фигурирует тензор энергии-импульса. Этот тензор должен конструироваться из физических соображений, которые сами по себе лежат вне теории относительности. В этот тензор вносят свой вклад все физические поля: гравитационное, электромагнитное, ядерное...

Если брать ту форму тензора энергии-импульса, которую дает обычная физика сегодняшнего дня, то оказывается, что возможно некоторое статическое решение R, независимое от t. Такое решение было найдено Эйнштейном еще в период установления общей теории относительности. Сначала думали, что это решение описывает Вселенную. Но когда было открыто красное смещение в спектрах отдаленных галактик, то стало ясно, что это не так. Для получения красного смещения необходимо, чтобы R возрастало с t. Оказалось возможным найти решения, которые вели себя соответствующим образом. Все они обладали тем замечательным свойством, что R обращалось в нуль для конечного t. Иными словами, если мы проследим эволюцию назад по времени, то дойдем через конечный промежуток времени до $R = 0$; попросту говоря, точки нашей решетки сожмутся, а плотность материи устремится к бесконечности (теория А. А. Фридмана).

Решение уравнения для $R(t)$ получается с двумя постоянными интегрирования. В дополнение к ним имеется также возможность включения в уравнение Эйнштейна члена с космологической постоянной λ, так что в этом случае R зависит от λ. Поскольку R определяет красное смещение спектра отдаленных галактик, в принципе можно определить все эти постоянные из наблюдений, т. е. из сравнения наблюдений галактик на различных расстояниях с их красным смещением. К сожалению, трудности в отборе наблюдательного материала, которые мы обсудим ниже, пока что не дают возможности осуществить эту процедуру удовлетвори-

тельным образом. Тем не менее некоторый прогресс возможен.

Рассмотрим случай $\lambda = 0$. Пусть $t = 0$ при $R = 0$, т. е. примем за нуль время, соответствующее сингулярному состоянию, упомянутому выше. Чему равно тогда нынешнее значение t? В соответствии с лучшими данными, которыми мы располагаем, t не может существенно превышать 10^{10} *лет*. Мы уже видели, что заключение о времени такого порядка можно получить прямо из астрофизических соображений. Но имеется ли какое-либо указание на сингулярное состояние Вселенной? Ответ будет отрицательным. Наиболее старые звезды в нашей Галактике, по-видимому, обладают возрастом около $1{,}5 \cdot 10^{10}$ *лет*. Такой возраст простирается уже за сингулярное состояние, что сразу приводит к противоречию.

Противоречие устраняется, если $\lambda \neq 0$. Но в этом случае возникает возможность добавочной астрофизической проверки. Можно показать, что галактики сконденсировались из межгалактической газообразной среды лишь на определенной фазе расширения Вселенной. Эта фаза теперь пройдена. Следовательно, этот вариант космологии может быть опровергнут, если будет открыто образование новых галактик в нашу эпоху.

Данные здесь еще неопределенны. Некоторые астрономы полагают, что нашли несомненные признаки образования новых галактик; другие отрицают это. Эти доказательства мы обсудим ниже, в более подходящем месте.

Условие $R \to 0$ столь существенно, что естественно спросить, действительно ли существует уверенность в том, что Вселенная образовалась в столь сингулярном состоянии. Не может ли наш постулат однородности быть действительно ответственным за бесспорные заключения?

Хекман и Шюкинг недавно показали, что условия $R \to 0$ можно избежать ценою отказа от пространственной изотропии пространства, хотя и оставаясь в рамках однородности пространства. Иными словами, наш наблюдатель все еще не различает своего положе-

ния в пространстве, но может обнаружить в нем предпочтительные направления. Такое отступление от постулата однородности допускает, что Вселенная обладает абсолютным вращением. При этом в уравнения поля входят новые члены. Эти члены и препятствуют масштабному фактору R решетки строго стремиться к нулю.

Хекман и Шюкинг склоняются к модели Вселенной, в которой R периодически изменяется (осциллирует) между конечными значениями R_1 и R_2. (Другой возможностью является начало эволюции Вселенной, начиная с бесконечно диспергированного состояния. Сжатие происходило в течение бесконечно большого периода, пока R достигло минимального значения R_1. После этого R начало возрастать опять до бесконечности.) Позже мы обсудим возможности проверки теории Хекмана — Шюкинга.

ТЕОРИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ВСЕЛЕННОЙ

Если продолжать строго придерживаться постулата однородности и стараться предотвратить стремление R к нулю, то единственной возможностью является модификация тензора энергии-импульса. Сначала возникает вопрос: существуют ли поля, не известные современной физике? Никакого определенного ответа, разумеется, дать нельзя, но есть определенные указания в пользу существования таких полей. Физика постоянно пополняется новыми полями, и маловероятно, чтобы последняя их разновидность уже была открыта. Более неопределенен второй вопрос: возможно ли, чтобы новое поле вносило значительный вклад в тензор энергии-импульса? Возможности важных изменений в космологии зависят от утвердительного ответа на этот вопрос.

Следует заметить в этой связи, что хотя в принципе возможно открывать законы физики наблюдениями в пределах лишь весьма малого пространственно-временного объема, например в земной лаборатории, но это может оказаться весьма трудным делом. Если бы существование тяготения не привлекло нашего внимания своими проявлениями макроскопического и космиче-

ского масштаба вне лаборатории, то открытие гравитации было бы делом тонким и трудным. Хотя это и звучит несколько иронически, но гравитация вносит гораздо более важный вклад в космологию, чем поля, открытые с большей легкостью. Не может ли существовать еще какое-нибудь поле, которое еще труднее обнаружить в лаборатории и которое также имеет важное значение в космологии?

Первой работой по этому вопросу явилось наше исследование [1], где было показано, что можно постулировать поле, которое в значительной мере изменит структуру уравнений Эйнштейна, в результате чего будет устранено стремление R к нулю для любых конечных значений t. Новым решением является выражение $R = \exp(Ht)$, где H — постоянная, связанная с константой взаимодействия нового поля. Таким образом, $R \to 0$ только при $t \to -\infty$. Аналогичные результаты были получены позже Мак-Кри [2].

В период первых наших работ и работ Мак-Кри число возможностей для введения нового поля требуемого вида казалось крайне большим. Но несколько позже М. Прайс, формулируя задачу с помощью вариационного принципа, показал, что если речь идет о полях простого типа, то свобода выбора оказывается гораздо меньшей, чем предполагалось ранее. В самом деле, формулировка скалярной теории однозначна, за исключением значения константы взаимодействия. При одном только условии, что константа взаимодействия не равна нулю, уже получается замечательный результат, что $R = \exp(Ht)$. Вселенная должна обладать геометрией, открытой примерно сорок лет назад де-Ситтером.

Хотя R все еще следует рассматривать в качестве масштабного фактора решетки, необходима некоторая осторожность при интерпретации R для прошлых эпох. Мы считаем для наглядности галактики точечными массами в решетке. Однако галактики, принадлежащие к нынешней решетке, не обязательно существовали в прошлом, ибо по мере углубления в прошлое галактики одна за другой выпадают из решетки. Та-

ким образом, $R \to 0$ при $t \to -\infty$ не требует стремления плотности масс к бесконечности. Фактически уравнения требуют постоянства средней плотности масс во все времена; это происходит в силу того, что новое поле приводит к непрерывному порождению материи. Постоянство же плотности массы выводится из приравнивания нулю дивергенции тензора энергии-импульса (который теперь включает в себя новое поле) и является тем самым выражением закона сохранения энергии.

Уже существующие галактики разлетаются в соответствии с возрастанием масштаба: $R = \exp(Ht)$. Однако из вновь создаваемого материала могут конденсироваться новые галактики. Эти новые конденсации создают теденцию к росту пространственной плотности галактик, в то время как расширение создает компенсирующую тенденцию к уменьшению этой плотности. Положение вещей в любой данный момент времени представляет собой компромисс между конденсацией и разлетом, и если новые конденсации образуются равномерно, то противоположные эффекты будут сохранять стационарность. Идея о том, что во Вселенной сохраняется подобное условие стационарного состояния, является основным постулатом Бонди и Голда [3]. Их постулат является обобщением гипотезы однородности. Но вместо простого утверждения о невозможности для какого-либо наблюдателя определить свое положение в пространстве Бонди и Голд постулируют, что никакое множество наблюдений, относящихся только к осредненным по большим объемам величинам (характерный размер 100 *мегапарсек*) не может определить эпоху, т. е. не существует крупномасштабной эволюции Вселенной, которая могла бы послужить часами для наблюдателя. Связь этой точки зрения с теорией поля уже была отмечена выше.

Порождение материи следует представлять себе как происходящее простейшим образом: элементарные частицы создаются в пространстве. Не может быть речи относительно непосредственного порождения организованных структур наподобие галактик. Подобные сложные организованные структуры должны образовываться путем явных астрофизических процессов, и их непрерыв-

ное образование при помощи таких процессов должно быть решающим требованием, иначе увеличение характерного масштаба решетки до бесконечности уже к настоящему времени уменьшило бы их пространственную плотность до нуля. Отсюда в теории стационарного состояния все наблюдаемые объекты должны находиться в состоянии непрерывной регенерации. Это требование подвергает теорию суровой наблюдательной проверке. В этом смысле данная теория представляет собою благоприятный пример для возможности более явных и разнообразных опровержений, чем это имеет место для других космологических моделей.

НАБЛЮДЕНИЯ

Дав резюме различных космологических теорий, мы переходим теперь к главной теме данной лекции — проверке различных космологий наблюдениями.

Проблемы шкалы времени и возраста

Возраст наиболее старых звезд в нашей Галактике составляет, по-видимому, по крайней мере $1{,}5 \cdot 10^{10}$ *лет* или даже $2 \cdot 10^{10}$ *лет*. Если принять нынешнюю оценку расстояний между галактиками, то требование, чтобы наша Галактика являлась более молодой, чем вся Вселенная, делает невозможным обычные космологии с $\lambda = 0$. Исключается также модель осциллирующей Вселенной Хекмана и Шюкинга. В этом случае испытание выдерживают только космология Лемэтра с $\lambda \neq 0$ и теория стационарной Вселенной.

Однако есть подозрение, что нынешняя оценка шкалы расстояний во Вселенной является ошибочной. Эта шкала обычно выражается через быстроту роста скорости, определяемой по красному смещению, с расстоянием, т. е. через $-c\Delta\nu/\nu$, где c — скорость света, а $-\Delta\nu$ — измеряемое красное смещение частоты световых волн при первоначальной частоте ν. Современная оценка быстроты роста составляет

$$-\frac{c\,\Delta\nu}{\nu} = 75 - 100 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1} \text{ мегапарсек}^{-1}.$$

Для тех радиальных расстояний r, при которых еще не сказывается неэвклидовость, можно написать

$$-\frac{c\,\Delta\nu}{\nu} = Hr.$$

Если r выражать в мегапарсеках, а c в *км/сек*, то постоянная Хаббла H есть как раз только что упомянутая величина, т. е. 75—100 *км/сек · магапарсек*. Эта же величина фигурирует в теории стационарной Вселенной $R = \exp(Ht)$. Постоянная Хаббла имеет размерность, обратную времени, т. е. в единицах C. G. S.

$$H^{-1} = 3 \cdot 10^{17}\ сек \approx 10^{10}\ лет.$$

В обычных космологических теориях, где принимается $\lambda = 0$, H^{-1} представляет собой верхний предел возраста Вселенной; в осциллирующей космологической модели типа Хекмана и Шюкинга время, прошедшее после последнего минимума, будет меньше $2/3 \cdot H^{-1}$, т. е. менее $\approx 7 \cdot 10^9$ *лет*. Поскольку по соображениям, которые мы вскоре приведем, необходимо принять, чтобы возрасты галактик были меньше, чем указанное время, то в таком случае возникает расхождение примерно в 3 раза.

Для спасения этих космологических теорий необходимо удвоить или даже утроить значение H^{-1}. Поскольку $\Delta\nu/\nu$ есть точно измеряемая величина, то подобный пересмотр H^{-1} требует соответствующего увеличения оценки расстояний r. В последние годы оценки расстояний на самом деле значительно выросли, откуда можно предположить, что дальнейший рост в 3 раза ни коим образом не исключен. Имеется, однако, одно важное соображение, несколько дискредитирующее такую точку зрения. Видимый угловой размер θ галактики, наблюдаемой во фронт, связан с ее реальным физическим диаметром d и расстоянием r соотношением $\theta = d/r$ при условии, что r опять-таки не настолько велико, чтобы неэвклидовость играла роль. Поскольку θ можно измерить с хорошей точностью, оценка для r подразумевает оценку для d. Тогда, при нынешних оценках шкалы расстояний r диаметры d галактик, структура которых напоминает нашу, оказываются

подобными определенным независимо диаметрам нашей Галактики и близлежащих галактик типа M31 и M81. Но если бы значения r для удаленных галактик были бы систематически пересмотрены в сторону увеличения в 3 раза, то это удовлетворительное согласие было бы, очевидно, нарушено. Известные из независимых оценок размеры близлежащих галактик оказались бы аномально малыми.

Снова обращаясь к осциллирующей модели, заметим, что может возникнуть недоумение, почему все галактики должны конденсироваться в эпохи, более поздние, чем фаза последнего минимума. Это объясняется опять-таки астрофизическими соображениями. Водород превращается в гелий внутри звезд. Но тогда ясно, что Вселенная не могла бы испытать множество бесконечных пульсаций без того, чтобы сгорание водорода внутри звезд не сменялось некоторым обратным процессом преобразования гелия в водород. Такой обратный процесс требует состояния с высокой плотностью и высокой температурой, при котором вся материя Вселенной плотно сжата. Это означает невозможность существования отдельных галактик в фазе минимума. Все галактики, которые мы теперь наблюдаем, должны тем самым возникать как упорядоченные структуры в эпохи, более поздние, чем эпоха последнего минимума.

Стоит добавить, что даже допущение о состоянии материи Вселенной с высокой плотностью и высокой температурой с очевидностью не означает возможности действительного превращения гелия обратно в водород. Вполне возможно, что из соображений ядерной физики модель осциллирующей Вселенной будет отвергнута. Этот вопрос все еще остается открытым.

При современных данных лишь две космологические теории удовлетворяют критерию возраста: теория стационарного состояния и космология Лемэтра с $\lambda \neq 0$. Положение в этих двух случаях, однако, совершенно различное. В космологии Лемэтра все галактики сконденсировались в одну данную эпоху, в момент, когда скорость расширения R прошла через минимальное значение. Таким образом, все галактики обладают возрастом, сравнимым с возрастом нашей Галактики, ска-

жем, $1{,}5 \cdot 10^{10}$ *лет*. Совершенно иное положение имеет место в теории стационарной Вселенной.

Вспоминая, что R является масштабным фактором, легко видеть, что плотность в пространстве, скажем, Q уже существующих галактик уменьшается со временем с быстротой $3Q\dot{R}/R$. Для $R = \exp(Ht)$ это составляет как раз $3HQ$. Чтобы поддерживать ситуацию стационарного состояния, должны, очевидно, рождаться новые галактики с таким же темпом, т. е. $3HQ$, в единице объема за единицу времени. Далее, обозначая через $q(t)\,dt$ плотность галактик с возрастом от t до $t + dt$, получаем

$$Q = \int_0^\infty q(t)\,dt,$$

а также

$$q(t+dt) = q(t) - 3q(t)\frac{\dot{R}}{R}\,dt,$$

что дает

$$\dot{q} = -3q\frac{\dot{R}}{R} = -3Hq,$$

откуда легко видеть, что q убывает со временем t по закону $\exp(-3Ht)$. Подставляя это выражение в вышеупомянутый интеграл для Q, получаем

$$q = 3HQ\exp(-3Ht).$$

Отсюда можно ожидать существования галактик всех возрастов, начиная с галактик только что зародившихся, вплоть до галактик с возрастом $t \to \infty$. Однако, поскольку пространственная плотность уменьшается быстро, после того как возраст t превысит H^{-1}, мы не должны ожидать, что обнаружим более чем одну галактику с возрастом $t \gg H^{-1}$.

Средний возраст всех галактик составляет

$$Q^{-1}\int_0^\infty tq(t)\,dt.$$

Легко найти, что это составляет $(3H)^{-1}$. Таким образом, при современной оценке для H средний возраст составляет не более чем $4 \cdot 10^9$ *лет*. Отсюда в теории

стационарной Вселенной большинство галактик должно быть гораздо более молодым, чем наша Галактика.

Прежде чем рассмотреть выводы из этих простых заключений, следует заметить, что аналогичные аргументы пригодны по отношению к объектам любого типа, сохраняющим свою индивидуальность после возникновения. Плотность короткоживущих объектов — например, источников радиоизлучения — уменьшается быстрее, чем $3QR/R$. Таким образом, чтобы поддерживать стационарное состояние, такие объекты должны порождаться со скоростью, превосходящей $3HQ$. Когда же время жизни объектов во много раз ниже, чем $(3H)^{-1}$, то скорость порождения будет по существу контролироваться законом естественного распада самих объектов, а не расширением Вселенной.

Возвращаясь к галактикам, отметим, что можно без труда понять, что подразумевается под рождением галактик, *при условии, что речь идет о всех галактиках вместе взятых.* Новые галактики должны создаваться из газа, распределенного по межгалактическому пространству — газа, который постоянно воссоздается процессом порождения.

Однако проблема становится более сложной, если рассматривать лишь галактики данного структурного типа. Совершенно верно, что если считать каждый тип галактики чем-то вроде отдельного вида животных — который никогда не может превратиться в другой, — то должна быть выдвинута в точности такая же интерпретация относительно образования галактик каждого типа. Тогда каждый тип галактик должен образовываться в отдельности из межгалактической среды. Бааде [4], на наш взгляд без должного анализа сделанных им предположений, утверждал, что безуспешность его попыток наблюдать галактики типа Е, вновь конденсирующиеся из межгалактической среды, доказывает непригодность теории стационарной Вселенной. Эти аргументы Бааде недавно повторил Бок, не подвергавший критическому анализу всю проблему.

Если объект типа А изменяется в объект типа В через процесс астрофизической эволюции, то сама по себе

астрофизическая эволюция вызывает образование объектов типа B. Таким образом, если галактики подвержены эволюции в смысле

$$A \to B \to C \to D \to E,$$

то вовсе не требуется какой-либо непосредственной конденсации галактик типа E из межгалактической среды.

Природа стадий *A*, *B*, *C* и *D* нами выше намеренно не уточнялась, поскольку точное отождествление этих стадий несущественно для логики рассуждений. В работе Моргана [5] делается попытка провести следующее отождествление:

$$B = Sc, \quad C = Sb, \quad D = Sa.$$

Тогда стадия A представляет собой первоначально незначительную и простейшую галактическую конденсацию.

В этой картине астрофизической эволюции все еще справедливо утверждение, что средний возраст галактик типа E должен составлять $(3H)^{-1} = 4 \cdot 10^9$ *лет*. Однако это не есть возраст наиболее старых звезд, ибо наиболее старые звезды принадлежат к стадии A. Считая, что каждая стадия длится время $(3H)^{-1}$, и принимая упомянутое выше предварительное отождествление, приходим к ситуации, представленной в табл. 1.

Таблица 1

Тип галактики	Простейшие формы	Sc	Sb	Sa	E
Возраст наиболее старых звезд в средней галактике (в 10^9 *лет*)	4	8	12	16	20

В некоторых частных случаях возрасты наиболее старых звезд могут быть, конечно, выше значений, приведенных в табл. 1. Это, по-видимому, имеет место для нашей Галактики, хотя расхождение величин не слишком велико. Возрасты самых старых звезд в Галактике

вряд ли составляют более $15 \cdot 10^9$ *лет*. Тогда достаточно было бы всего лишь незначительное изменение величины H, чтобы эти значения пришли в соответствие. (Это не привело бы к упомянутой выше трудности, состоящей в аномальном уменьшении линейных размеров нашей и близлежащих галактик при значительном увеличении величины H^{-1}.)

Во избежание возможных недоразумений, упомянем, что рассмотренные здесь эллиптические галактики являются так называемыми гигантскими эллиптическими, а не малыми объектами, типа спутников туманности М31.

Аргументация Моргана в пользу эволюционной схемы упомянутого выше типа основана на интегральном спектре галактик. Аналогичные аргументы получаются также из усредненных характеристик цвета. Звезды ядер спиральных галактик типа Sb и Sa, по-видимому, аналогичны звездам галактик типа E; однако интегральные характеристики цвета становятся все более красными вдоль последовательности Sb, Sa, E. Согласно недавним теоретическим работам (Крэмпин и Хойль [6]), цвет группы звезд с возрастом действительно должен изменяться в сторону красного, так что на самом деле наблюдения находятся в качественном согласии с возрастной последовательностью, приведенной в нашей таблице. Более того, предварительные количественные оценки, произведенные на основе цветовой характеристики, очень хорошо согласуются с приведенными в табл. 1 значениями возрастов. Однако нельзя переоценивать эти предварительные результаты. На цвет ядер спиральных туманностей могло повлиять гало, состоящее из голубых звезд типа шаровых скоплений. До учета таких эффектов придавать слишком большое значение критерию цвета было бы преждевременным.

Самые убедительные доказательства существования сравнительно молодых галактик, вероятно, получили Бербиджи на основании исследования динамики скопления галактик, главным образом спирального типа в созвездии Геркулеса (Бербидж и Бербидж [7]). Это скопление обладает в целом формой буквы V, что не-

сомненно свидетельствует о молодости скопления. В самом деле, измерения скоростей движения отдельных галактик показывает, что это скопление находится в состоянии распада, если только исключить, что галактики обладают неправдоподобно большой массой каждая или в этом скоплении неправдоподобно много диффузного вещества; но если скопление действительно разлетается, то вся структура должна быть молодой.

Имеются и другие факторы, которые действуют в том же направлении. Гигантские эллиптические галактики оказываются систематически более массивными и более яркими, нежели спиральные, как будто бы существует процесс их роста вдоль нашей последовательности. Более того, общей особенностью всего поля галактик является то, что спиральные галактики обнаруживаются в малых группах, в которых кажется господствующей одна или, возможно, две гигантские эллиптические галактики. Это наводит на мысль, что спиральные галактики в таких группах сконденсировались из межгалактической среды через посредство господствующей эллиптической галактики. Бербидж и Хойль [8] рассмотрели возможный механизм подобного процесса.

В заключение данной дискуссии о формировании новых галактик поставим вопрос: имеются ли доказательства образования в больших количествах примитивных галактик, возможно галактик совсем малой массы? Недавно Б. А. Воронцовым-Вельяминовым (1958 г.) опубликован каталог странных объектов, отобранных из паломарских снимков. Удивительной особенностью этого каталога является неожиданно большая доля странных объектов: вплоть до объектов 15-й величины эта доля доходит до 3—4% общего числа более или менее нормальных галактик. Если считать, что время жизни этих странных объектов не превышает в большинстве случаев примерно 10^8 лет, то следует, что число странных объектов, которые возникали за интервал времени $4 \cdot 10^9$ *лет*, должно быть по крайней мере порядка всего числа галактик.

Пока ничего неизвестно относительно абсолютных величин и расстояний до этих объектов, но имеется вероятность, что эти объекты не являются гигантскими

системами. Вероятно, они являются довольно слабыми и сравнительно близкими. Если это так, то пространственная плотность странных объектов, возникавших за время $4 \cdot 10^9$ *лет*, должна быть действительно весьма высокой. Вполне может оказаться, что часть их является примитивными галактиками типа А, существование которых требуется теорией стационарной Вселенной.

Геометрическая проверка космологии

До сих пор мы ограничивались рассмотрением столь малых расстояний от наблюдателя, что пригодность эвклидовой геометрии не нарушалась. Однако неэвклидовость становится существенной при увеличении расстояний, причем соответствующие эффекты получаются различными в разных космологиях. Отсюда наблюдения, которые обнаруживают характер неэвклидовых эффектов, смогут служить доказательством той или иной космологии или некоторых ее особенностей.

К данному вопросу имеет отношение связь между расстоянием и красным смещением. Здесь неэвклидовость означает введение членов второго порядка малости. Вводя длины волн вместо частот, имеем

$$\frac{c\,\Delta\lambda}{\lambda} = Hr + Kr^2,$$

исключая случай теории стационарной Вселенной, где $K = 0$. Можно ли показать, что $K \neq 0$?

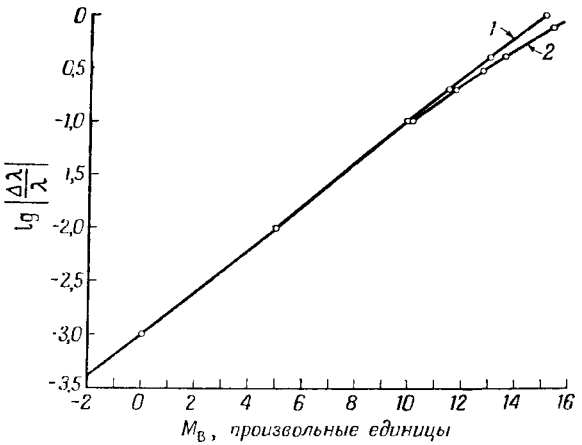
Фактически, конечно, астрономы не измеряют r. Они измеряют наблюдаемую величину M галактики, связанную с r соотношением

$$M = 2{,}5 \lg L - 2 \lg r - 2 \lg \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right) + \text{const.},$$

где L — испускательная способность галактики (измеряемая, например, в единицах светимости Солнца). Константа в этом соотношении задает просто начало отсчета времени.

Если мы имеем дело только с галактиками, обладающими одной и той же величиной L, то мы можем решить эти уравнения и выразить M через $\Delta\lambda/\lambda$. Полученная та-

ким образом связь приводится на фиг. 1 как для теории стационарной Вселенной, так и для известной космологической модели Эйнштейна — де-Ситтера (которая является особым примером среди многих других с нулевой космологической постоянной). Кривая, соответствующая космологии Лемэтра, проходит близко к случаю



Фиг. 1. Видимая величина как функция красного смещения для источника стандартной интенсивности, согласно теории Эйнштейна — де-Ситтера (кривая *1*) и теории стационарной Вселенной (кривая *2*).

стационарной Вселенной, так что настоящий критерий неудобен для отделения выводов двух последних упомянутых теорий.

Как M, так и $\Delta\lambda/\lambda$ — величины измеряемые. Следовательно, здесь мы имеем решающую проверку, которая послужит выбору между теорией Эйнштейна — де-Ситтера, теорией Лемэтра и теорией стационарной Вселенной, *если мы уверены в том, что* L *действительно одинаково для всех наблюдаемых галактик.* Но как раз здесь и возникает трудность. Галактики сильно отличаются по своим значениям L. Наблюдение сравнительно близких галактик говорит, впрочем, о том, что L стремится к верхнему значению, близкому 10^{44} *эрг/сек*. Если на самом деле имеется верхний предел и если мы всегда

имеем дело с галактиками, относящимися к верхнему пределу, то L будет действительно постоянной. Именно на этой гипотезе основывают свои работы Хаббл, а за ним и Сэндейдж.

Однако почти наверное верхний предел не является жестким. Более того, имеет место селективный эффект при росте $|\Delta\lambda/\lambda|$ благодаря отбору галактик со все большими значениями L. Чтобы измерять $\Delta\lambda/\lambda$, нужно получить спектр, для чего желательно пропускать через спектрограф возможно больше световых лучей. Естественно, что это склоняет наблюдателя в пользу отыскания наиболее ярких галактик, а поскольку число галактик с расстоянием быстро растет, то при росте отбираются скорее всего образцы с наибольшей яркостью и, следовательно, с большими величинами $|\Delta\lambda/\lambda|$.

Этот эффект отражается на кривой, представляющей наблюдательные данные. Однако важно знать, до какой степени? Если систематическая ошибка для $|\Delta\lambda/\lambda| = 0{,}4$ составляет величину, существенно меньшую одной «наблюдаемой величины», т. е. одной единицы для M, тогда полученные до настоящего времени результаты противоречили бы как теории стационарной Вселенной, так и теории Лемэтра. Они говорили бы тогда в пользу теории типа Эйнштейна — де-Ситтера (при нулевой космологической постоянной), но, поскольку мы не можем быть в этом уверены, положение так и остается на мертвой точке.

Для эффективного прогресса в данном направлении совершенно ясна необходимость отбора галактик при помощи критерия, свободного от упомянутой селективности. В этом направлении уже сделан ряд предложений. Методы, полностью основанные на оптической астрономии, вряд ли будут удовлетворительными. Однако гораздо большие надежды возлагаются на возможность использования данных радиоастрономии.

Наиболее мощный из известных источников радиоизлучения — это особый объект в созвездии Лебедя, являющийся, по мнению многих астрономов, парой сталкивающихся галактик. Этот объект содержит чрезвычайно горячий газ, излучающий интенсивные яркие спектральные линии, особенно линию 3727 дважды иони-

зованного кислорода (O_{II}). Аналогичный объект, расположенный на гораздо более далеком расстоянии, был бы обнаружен как источник радиоизлучения. У него также можно хорошо измерить $\Delta\lambda/\lambda$, ибо делать это легче в случае испускания яркой линии, чем для излучения нормальной галактики.

Такая программа была выполнена недавно Болтоном и Минковским. В качестве источника радиоизлучения выбран объект № 295 по Кэмбриджскому каталогу 3С. Измеренная длина волны одной зарегистрированной яркой линии дает $|\Delta\lambda/\lambda| = 0{,}4614$, если линия интерпретируется как линия 3727 для O_{II}.

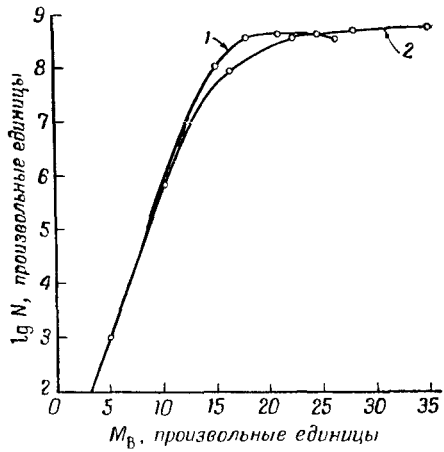
Вряд ли надежным является предположение, что столь необычные объекты обладают стандартными значениями L. Однако по счастливой случайности источник радиоизлучения 295 3С оказывается связанным со скоплением галактик, причем среднее значение L, скажем, для десяти самых ярких галактик из этого скопления, может приниматься равным среднему значению L для десяти самых ярких галактик в других скоплениях.

В данном случае мы намереваемся использовать источники радиоизлучения в качестве критерия отбора скоплений галактик, избегая тем самым трудностей оптического метода отбора. Источники радиоизлучения помогают также при измерении $\Delta\lambda/\lambda$, поскольку излучение концентрируется в одной или нескольких ярких линиях.

Недостаток указанного метода заключается в том, что трудно получить приемлемое число случаев. А это необходимо для устранения нормального статистического разброса, присущего значениям L для скоплений галактик. Если бы было найдено около десяти аналогичных случаев, то статистический разброс был бы в основном устранен и можно было бы провести проверку, показанную на фиг. 1. Для получения примерно десятка случаев было бы, вероятно, необходимо рассмотреть радиоисточники, значительно более слабые, нежели источник 295 3С. Но тогда стало бы весьма затруднительным точно измерять положение, а без этого необходимое для метода оптическое отождествление источников весьма трудно. Таким образом, представляется

весьма маловероятным, чтобы в ближайшем будущем были обнаружены многие аналогичные случаи. Получается, что трудность, связанная с селективностью, как бы заменяется трудностью статистики.

Если теперь обратиться к иному типу геометрической проверки космологических моделей, то наш постулат



Фиг. 2. Число объектов на единичный интервал видимой величины как функция видимой величины для теории Эйнштейна — де-Ситтера (кривая *1*) и теории стационарной Вселенной (кривая *2*).

однородности, совместно со знанием неэвклидовых характеристик модели, позволяет произвести подсчет чисел объектов как функции $\Delta\lambda/\lambda$ и как функции M. Результаты теории стационарной Вселенной и теории Эйнштейна — де-Ситтера представлены на фиг. 2 (число объектов в зависимости от M). Две теории совпадают до тех пор, пока расстояние не становится достаточным для проявления неэвклидовости.

Что касается теории стационарной Вселенной, то эти соображения могут однозначно применяться к любому типу объектов: галактикам или источникам радиоизлучения, при одном лишь условии, что объект достаточно часто встречается (т. е. что средняя пространственная плот-

ность не должна быть намного меньше, чем плотность, равная одному объекту в кубе со стороной 100 *мегапарсек*). Однако в случае теории Эйнштейна — де-Ситтера необходимо предположение, что отношение пространственной плотности объектов ко всей пространственной плотности масс остается неизменным для всех эпох. Однако это не имеет места для случая, когда число объектов изменяется как квадрат пространственной плотности массы — как это может оказаться в случае источников радиоизлучения, если источники радиоизлучения в самом деле возникают главным образом при столкновении между галактиками.

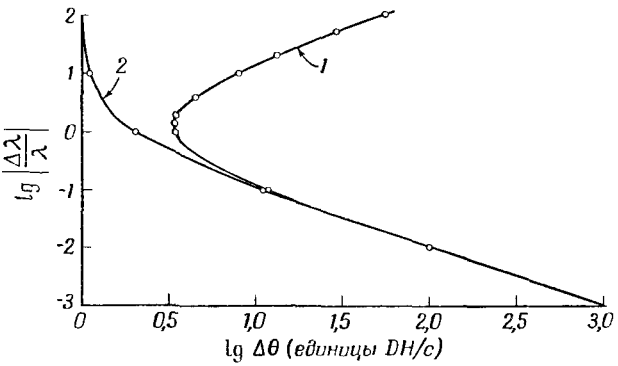
Классической попыткой подсчитать число галактик с целью проверки космологии являлась работа Хаббла. К сожалению, ее результаты были крайне неубедительными. С тех пор астрономы в общем не были склонны проделать столь большую работу по такой проверке, поскольку вполне вероятно, что любая новая программа также не увенчается успехом.

В случае источников радиоизлучения положение более благоприятно, поскольку число источников, подлежащих счету, гораздо меньше, чем галактик. Однако возникают усложнения в силу того факта, что радиоастрономы не могут оперировать с каждым источником в отдельности (источники радиоизлучения имеют тенденцию перекрываться в луче «радиозрения»). Это обстоятельство не допускает непосредственного применения диаграммы, представленной на фиг. 2 к наблюдениям радиоизлучения. Радиоастроному остается при помощи кривых на фиг. 2 решать, как подобное распределение числа объектов может повлиять на его конкретное оборудование. После этого он может сравнивать свои теоретические выводы, основанные на различных космологических теориях, с результатами наблюдений.

В этой области наиболее обширные наблюдения проведены Райлем и его сотрудниками. Новейшие результаты, которые сообщили Райль и Шоер [9], содержат подсчет примерно 2000 источников при длине волны 1,9 *м*. Эти результаты совместимы с эвклидовой геометрией. Среди самых ярких источников имеются довольно большие флуктуации числа объектов При этом не ясно, по-

лучается ли это вследствие комбинации статистических причин или инструментальных ошибок или здесь влияют свойства, физически присущие ближайшим источникам.

Отсюда можно сделать вывод, что наблюдения еще не проникли вплоть до достаточно больших расстояний, чтобы могли проявиться искомые эффекты. В настоящее



Фиг. 3. Зависимость видимого диаметра $\Delta\theta$ источника с абсолютным диаметром D от красного смещения в теории Эйнштейна — де-Ситтера (кривая *1*) и теории стационарной Вселенной (кривая *2*).

время в Кэмбридже проводится работа, которая, возможно, позволит обнаружить эти ускользающие неэвклидовы эффекты.

По-видимому, наиболее значительная геометрическая разница между теорией стационарной Вселенной и теорией Эйнштейна — де-Ситтера заключается в измерении видимых угловых диаметров, скажем, $\Delta\theta$ при различных $\Delta\lambda/\lambda$ для источников с фиксированными физическими размерами (например, для сфер диаметром D). Результаты сопоставления приведены на фиг. 3. Для случая теории Эйнштейна — де-Ситтера весьма примечателен минимум значений $\Delta\theta$. Этот минимум примерно в три раза выше предельного значения, вытекающего из теории стационарной Вселенной. Если окажется, что существуют радиоисточники фиксированного диаметра, то анализ этого свойства может указать путь для выбора между теориями, поскольку реальные численные значе-

ния $\Delta\theta$ лежат как раз в области, доступной измерениям. Для источников диаметром порядка источника в созвездии Лебедя минимальное значение $\Delta\theta$ по теории Эйнштейна — де-Ситтера составляет около 15″.

ДРУГИЕ АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОВЕРКИ

Данные о конденсации галактик под действием чисто гравитационных сил в разных космологических моделях сведены в табл. 2.

Таблица 2

Космология	Рост малых флуктуаций плотности под влиянием чисто гравитационных сил
Осциллятерные модели	Конденсации происходят постоянно
Теория Эйнштейна — де-Ситтера	Конденсации происходят постоянно
Другие космологии с нулевой космологической постоянной	Конденсация никогда не имеет места
Космология Лемэтра при ненулевой космологической постоянной	Конденсация в некоторую определенную эпоху (соответствует минимальной скорости расширения)
Теория стационарной Вселенной	Конденсация никогда не имеет места

Возникает представление, что следует ввести негравитационные силы, если теория стационарной Вселенной должна выдержать требование о наличии формирования галактик. Если бы межгалактический газ был горячим, то локальное охлаждение газового облака давало бы эффект конденсации вследствие давления, оказываемого более горячими окружающими областями. После сжатия, как только образуется повышенная плотность, гравитация, несомненно, может стать доминирующей силой.

Межгалактический газ может быть очень горячим в теории стационарного состояния, но не в других космологических моделях. В последнем случае Вселенная должна расширяться из фазы с высокой плотностью, при которой кинетическая температура $T_{кр.}$ и температура излучения $T_{изл.}$ должны полагаться одинаковыми, поскольку при высоких плотностях имеет место сильное взаимодействие между излучением и веществом. Далее, легко показать, что вследствие расширения Вселенной $T_{кр.}$ падает со скоростью, большей или равной скорости уменьшения $T_{изл.}$ (равенство имело бы место, если бы частицы двигались как ультрарелятивистские; в противном случае получаем неравенство).

Следовательно, мы ожидаем, что $T_{кр.} < T_{изл.}$, а поскольку $T_{изл.}$ не может превышать примерно 10° К, отсюда следует, что от первоначальной фазы высокой плотности Вселенной не могло сохраниться до настоящего времени какого-либо заметного значения $T_{кр.}$ (Правда, значение $T_{кр.}$ локально может повышаться за счет лучистого нагрева звездами, однако это может повысить значения $T_{кр.}$ лишь до нескольких тысяч градусов, что совершенно недостаточно для целей данной дискуссии. Нас могут интересовать лишь температуры, превышающие 10^6 ° К).

В случае теории стационарной Вселенной причиной нагрева может быть особая природа порождаемого вещества. Если при этом речь идет о нейтронах, то при их распаде выделяется примерно около $3 \cdot 10^{17}$ *эрг/г* тепла; это оказывается достаточным для повышения $T_{кр.}$ до значений, близких к 10^9 ° К.

Вся привлекательность рассуждений об охлаждении заключается в том, что естественный масштаб для размера конденсаций будет тогда фиксирован. Включая скорость звука $V_{зв.}$ в соотношение для красного смещения

$$V_{зв.} = Hr_c,$$

мы получим значение r_c, которое представляет собой естественный масштаб. Поскольку $V_{зв.} \sim T_{кр.}^{1/2}$, то $r_c \sim T_{кр.}^{1/2}$. При $T_{кр.} = 10^9$ ° К, $H^{-1} = 3 \cdot 10^{17}$ *сек*, $r_c = 30$ *мегапарсек*. Таким образом, теплота нейтронного распада должна

вносить в распределение вещества во Вселенной нерегулярности, причем максимальный масштаб этих нерегулярностей составляет примерно 30 *мегапарсек*.

Данное значение весьма удовлетворительно согласуется с наблюдениями. Как мы видели вначале, для получения однородности в среднем необходимо рассматривать распределение вещества в масштабе около 100 *мегапарсек*. Это согласуется с величиной 30 *мегапарсек* для максимального масштаба нерегулярностей.

В противоположность этому, неудовлетворительная особенность чисто гравитационного конденсационного процесса заключается в том, что он не дает какого-либо размера конденсации. Конденсации, возникающие по чисто гравитационным причинам, согласно другим космологическим моделям могут быть любой величины.

Все сказанное может быть связано с наблюдением. Если в пространстве имеется газ и если он обладает весьма высокой кинетической температурой, то должно существовать слабое испускание довольно жестких рентгеновских лучей. При $T_{кр.} = 10^9\,^\circ$К рентгеновские кванты обладают энергией $\sim$50 *кэв*, т. е. свободно проходят сквозь нашу Галактику. Следовательно, в небе должно наблюдаться слабое рентгеновское свечение. Теоретический подсчет дает для потока энергии оценку 10^{-7}—10^{-8} *эрг/см*$^2 \cdot$ *сек*, что не превышает предела чувствительности наших приборов.

Может оказаться, конечно, что $T_{кр.}$ имеет более низкое значение. Значение $10^7\,^\circ$К было бы достаточным, чтобы привести к конденсациям в масштабе индивидуальной галактики. Кванты в этом случае должны приходиться на диапазон 500 *эв*; подобное излучение поглощалось бы в межзвездном газе. Проблема их обнаружения тогда не была бы столь ясной.

Эти выводы непосредственно связаны с нашей общей точкой зрения. Если материя непрерывно создается, тогда она вполне может порождаться также в формах, которые приводят к квантам высокой энергии. Например, если создаются вместе вещество и антивещество, то следует ожидать появления γ-лучей, обязанных аннигиляции. Наблюдение подобных рентгеновских или γ-квантов высоких энергий явилось бы сильным подтвержде-

нием теории стационарной Вселенной, поскольку их присутствие было бы трудно объяснить на основании других космологических моделей. Наоборот, если не будет обнаружено никаких проявлений высокой энергии, связанных с процессом порождения вещества, тогда зародится сомнение в выводах теории стационарной Вселенной. В частности, тогда было бы трудно объяснить возникновение галактик.

В некоторой степени можно считать, что существование космических лучей и релятивистских электронов уже дает указание на наличие процессов высокой энергии. Вопрос состоит в том, происходят ли эти процессы вне галактик или внутри них? Здесь мы углубляемся в новый класс проблем: могут ли все космические лучи рождаться внутри галактик? Могут ли они удерживаться внутри галактик? Почему все источники радиоизлучения обладают примерно одинаковым частотным спектром? Рассмотрение этих вопросов увело бы нас слишком далеко от главной темы данной лекции. Достаточно сказать, что если эти проявления процессов высокой энергии окажутся скорее межгалактическими, чем межзвездными, то их значение для космологии будет фундаментальным и тогда космологические наблюдения обогатятся совершенно новыми наблюдательными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoyle F., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **108**, 372 (1948).
2. McCrea W. H., Proc. Roy. Soc., **A206**, 562 (1951).
3. Bondi H., Gold T., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., **108**, 252 (1948).
4. Baade W., 11th Solvay Conf., 1958, p. 303.
5. Morgan W. W., 11th Solvay Conf., 1958, p. 297.
6. Crampin I, Hoyle F., Mon. Not. Roy. Astr. Soc. (1961).
7. Burbidge E. M., Burbidge G. R., Astrophys. Journ., **130**, 629 (1959).
8. Burbidge G. R., Hoyle F., Astrophys. Journ. (1961).
9. Ryle M., Scheuer P. A. G., Session of the International Statistical Institute, Brussels (1960).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Вступительная статья 5
Введение. 31
Центральная роль нейтрино в физике элементарных частиц 31
Слабость нейтринных взаимодействий 33
Законы сохранения и равновесие в нейтринной физике 33
Элементарные слабые взаимодействия 37
Описание нейтринного поля в пространстве 39
Связь нейтринного поля с геометрией 40

Глава I. Геометродинамика. Чисто геометрическое описание гравитации, электромагнетизма, неквантованного заряда и долгоживущих чисто классических концентраций массы-энергии 42
§ 1. Измерительные стержни 42
§ 2. Ничего, кроме длин 47
§ 3. Нахождение электромагнитного поля на основании геометрических измерений 50
§ 4. Уравнения движения без уравнений движения . . . 62
§ 5. Геон: масса без массы 63
§ 6. Проблема начальных условий. Уравнения поля без уравнений поля 71
§ 7. Задание начальных условий по слоям и свобода выбора топологии 88
§ 8. Новая топология, обнаруженная в старом решении. Метрика Шварцшильда 91
§ 9. Заряд без заряда 98
§ 10. О возможности уравнений без разумных решений . . 100
§ 11. Геометродинамика и квант действия 121

Глава II. О возможности чисто геометрического описания нейтринного поля 152
§ 1. Без нейтрино геометродинамика не полна 152
§ 2. Принцип соответствия не применим к нейтринному полю; „неклассическая двузначность“ 152

§ 3. Составление полей с более высоким спином из полей спина $^1/_2$ оказывается невозможным 153
§ 4. Спинор как квадратный корень из вектора? 154
§ 5. Несовместимость геометрии с фермиевским характером нейтринного поля 155
§ 6. Поворот дуальности для электромагнетизма и нейтрино 155
§ 7. Спиноры дают средство описывать локальные вращения 156
§ 8. Возможность спинорного представления группы преобразования координат не доказана 157
§ 9. Связано ли спинорное поле с существованием „мелкозернистой" топологии? 159
§ 10. Отсутствие фундаментальной теории нейтрино . . . 160
§ 11. Предварительная трактовка нейтрино как постороннего поля в заданном пространственно-временно́м континууме 160
§ 12. Релятивистское волновое уравнение для нейтрино . . 161

Глава III. Пространственно-подобное описание нейтринного поля 162
§ 1. Оценка возмущения нейтринного поля в вакуумном состоянии 162
§ 2. Описание без антикоммутирующих неквантованных операторов 163
§ 3. Сумма по историям, выраженная с помощью сверхполной системы состояний 163
§ 4. Новая формулировка различия между статистиками Ферми — Дирака и Бозе — Эйнштейна по Клаудеру . 165
§ 5. Выбор действия 168
§ 6. Геометродинамика не объясняет закон сохранения лептонов 169

Глава IV. Элементарные взаимодействия нейтрино и гравитационного излучения 171
§ 1. Образование реальных и виртуальных пар из вакуума 171
§ 2. Формфактор. Прямое взаимодействие Ферми? . . . 172
§ 3. Упругое рассеяние нейтрино электронами и протонами 173
§ 4. Формфактор; обнаружение антинейтрино . . 174
§ 5. Нетождественность нейтрино и антинейтрино 175
§ 6. Образование пар гравитонами 178

§ 7. Поведение нейтрино в гравитационных полях большого масштаба 180
§ 8. Причина слабости гравитационного излучения . . . 181
§ 9. Импульсные источники гравитационного излучения . 182
§ 10. Длинноволновое гравитационное излучение при достаточной интенсивности может привести к многократному изображению удаленных галактик 186
§ 11. Достаточно ли массы-энергии для превращения пространства в замкнутое 189
§ 12. Новое предсказание из теории Эйнштейна; минимум эффективного углового размера отдаленных галактик 190
§ 13. Изменяется ли масса частиц со временем? Или с кривизной пространства-времени? Или не меняется вовсе? 192

Глава V. **Равновесие нейтрино и закон сохранения нуклонов** 194
§ 1. Отсутствие равновесия для сверхкритических масс . 194
§ 2. Уравнение состояния 194
§ 3. Релятивистское гидростатическое равновесие 197
§ 4. Независимость от пути эволюции 199
§ 5. Критическая масса как катализатор образования и аннигиляции нуклонов 202
§ 6. Непрозрачность по отношению к нейтрино 203

Глава VI. **Слабость нейтринных взаимодействий** 205

Глава VII. **Центральная роль нейтрино в физике элементарных частиц** 206
Литература 208

ДОПОЛНЕНИЯ

I. Ч. Мизнер и Дж. Уилер. **КЛАССИЧЕСКАЯ ФИЗИКА КАК ГЕОМЕТРИЯ. ГРАВИТАЦИЯ, ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ, НЕКВАНТОВАННЫЕ ЗАРЯД И МАССА КАК СВОЙСТВА ИСКРИВЛЕННОГО ПУСТОГО ПРОСТРАНСТВА** 217
Литература 329
II. Дж. Уилер. **О ПРИРОДЕ КВАНТОВОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКИ** 333
Литература 347
II. Дж. Мак-Витти. **КОСМОЛОГИЯ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ АСТРОНОМИЧЕСКИХ ДАННЫХ** 349
Литература 370
V. Ф. Хойль. **ПРОВЕРКА КОСМОЛОГИИ НАБЛЮДЕНИЯМИ** . . . 372
Литература 400

Дж. Уилер

Гравитация, нейтрино и Вселенная

Редактор С. И. ЛАРИН
Худ. редактор Е. С. Подмарькова
Технический редактор В. П. Рыбкина
Корректор И. П. Максимова

Сдано в производство 27/XI 1961 г.
Подписано к печати 24/IV 1962 г.
Бумага 84×108/32=6,3 бум. л.
20,7 печ. л.
Уч.-изд. л. 19,8. Изд. № 2/0443
Цена 1 р. 59 к. Зак. 3001

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, I-й Рижский пер., 2

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
12	17 сн.	$h^r(a)_{;s} \cdot h^s(a)_{;s}$	$h^r(a)_{;s} \cdot h^s(a)_{;r}$	Ред.
132	8 св.	Основное состояние волновой функции	Волновая функция основного состояния	»
161	1 сн.	В. Бергмана	В. Баргмана	»
168	8 »	значения	задания	»
172	7 »	возможности	возможные	»
173	3 »	больше	больше, и	»
196	5 »	электрополяции	интерполяции	»

Зак. 3001.