

Г. Т' Хоофт

# ВВЕДЕНИЕ В ОБЩУЮ ТЕОРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ



**R&C**  
*Dynamics*

Г. т' Хоофт

# ВВЕДЕНИЕ В ОБЩУЮ ТЕОРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Перевод с английского Э. Л. Пончак

**R&C**  
*Dynamics*

*РХД*

Москва • Ижевск

2002

УДК 539.1

---

Интернет-магазин

**MATHESIS**

<http://shop.rcd.ru>

- физика
  - математика
  - биология
  - техника
- 

**Г' Хоофт Г.**

Введение в общую теорию относительности. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002, 96 стр.

Данная книга представляет собой цикл лекций по теории относительности, которая традиционно применяется в таких областях, как шварцшильдовская метрика, смещение перигелия и отклонение света. Большое внимание уделено той области, которая может стать весьма актуальной в ближайшем будущем — гравитационному излучению.

Книга предназначена для студентов физических специальностей ВУЗов.

**ISBN 5-93972-114-1**

© Перевод на русский язык,

НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002

<http://rcd.ru>

## Оглавление

Пролог . . . . .	4
Литература . . . . .	6
1. Краткое изложение специальной теории относительности. Система обозначений . . . . .	7
2. Эксперименты Этвеша и принцип эквивалентности	12
3. Равноускоренно движущийся лифт. Пространство Риндлера . . . . .	15
4. Криволинейные системы координат . . . . .	21
5. Аффинная связность. Кривизна Римана . . . . .	28
6. Метрический тензор . . . . .	37
7. Теория возмущений и закон тяготения Эйнштейна	44
8. Принцип наименьшего действия . . . . .	51
9. Специальные координаты . . . . .	57
10. Электромагнетизм . . . . .	61
11. Решение Шварцшильда . . . . .	64
12. Меркурий и поведение световых лучей в рамках шварцшильдовской метрики . . . . .	71
13. Обобщение шварцшильдова решения . . . . .	78
14. Метрика Робертсона – Уолкера . . . . .	81
15. Гравитационное излучение . . . . .	86

## Пролог

Общая теория относительности представляет собой красивейшую систему описания гравитационного поля и уравнений, которым оно подчиняется. В настоящее время эту теорию часто используют в качестве прототипа для других, более сложных построений, с целью описания сил взаимодействия между элементарными частицами или явлений из других областей фундаментальной физики. Вот почему во введении в общую теорию относительности важно как можно четче разделить многочисленные составляющие, которые, взятые вместе, образуют парадигму вышеназванной теории. После разъяснения физического значения теории относительности мы последовательно вводим понятие криволинейных координат, затем — понятие поля аффинной связности, и лишь на последнем этапе добавляем поле инерции. При таком раскладе ясно видно, как пространство и время приобретают все более четкую структуру — нам остается лишь вывести эйнштейновы уравнения поля.

Данные идеи обрели материальное оформление, когда меня попросили прочитать цикл лекций по общей теории относительности. С годами в них были внесены незначительные изменения. Я решил предоставить свободный доступ к этим лекциям через мою личную страницу в Интернете. К неудовольствию ряда читателей, после 12 страниц текста я меняю условные обозначения:  $i$  во временных компонентах векторов обращается в нуль, а метрика приобретает форму  $-+++$ . Для чего, спрашивается, нужна такая «непоследовательность» в условных обозначениях?

На это есть две причины. Мы меняем символику при переходе от *специальной* теории относительности к *общей*. В специальной теории относительности использование  $i$  имеет существенное практическое значение: преобразования Лоренца ор-

тогональны, и все скалярные произведения идут исключительно со знаком  $+$ . Путаницы со знаками не происходит. Использование метрики  $-+++$  или, что еще хуже,  $----$  неизбежно приводит к ошибке в знаках. В общей теории относительности, однако, символ  $i$  лишний. Здесь вообще приходится работать с величиной  $g_{00}$ . Если ее выбрать отрицательной, ошибки или другие проблемы возникают редко.

Существует, однако, еще один момент — педагогический. Я не вижу оснований оберегать студентов от смены условных обозначений как явления. При переходе из одной области исследования в другую необходимость в этом возникает постоянно. При нашем подходе им проще к этому привыкнуть.

Стало уже традицией применять данную теорию для объяснения таких явлений как гравитационное красное смещение, шварцшильдовская метрика, смещение перигелия и отклонение света. Более подробная информация об этом имеется в цитируемых источниках. В новой версии моих лекционных записей пересмотру подверглась в основном 14-я глава, частично под влиянием недавно высказанных утверждений об обнаружении эффектов ненулевой космологической константы, но также и потому, что я счел возможной переработку этой главы с учетом большей адаптации к стандартной литературе по космологии при одновременном улучшении качества подачи материала. Наконец, огромное внимание я уделяю области применения, которая может стать весьма актуальной в ближайшем будущем, — гравитационному излучению. Приведенный здесь способ получения производных зачастую утомителен. Эти же производные можно вполне элегантно вывести из теории поля с помощью стандартных методов Лагранжа, что и будет продемонстрировано. В процессе чтения этих лекций я пришел к выводу, что последняя глава все-таки слишком специфична для элементарного курса, тем не менее, я не стал ее исключать, хотя бы потому, что ее слишком часто исключают из учебников, излагающих вводный курс.

Выражаю благодарность г-ну А. Ван дер Вену за тщательное редактирование рукописи.

## Литература

- [1] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Comp., San Francisco, 1973.
- [2] R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, McGraw-Hill, 1965.
- [3] R. M. Wald, *General Relativity*, Univ. of Chicago Press, 1984.
- [4] P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity*, Wiley Interscience, 1975.
- [5] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Application of the General Theory of Relativity*, J. Wiley & Sons, 1972.
- [6] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge Univ. Press, 1973.
- [7] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 1983.
- [8] Dr. A. D. Fokker, *Relativiteitstheorie*, P. Noordhoff, Groningen, 1929.
- [9] J. A. Wheeler, *A Journey into Gravity and Space-time*, Scientific American Library, New York, 1990, distr. by W. H. Freeman & Co, New York.
- [10] H. Stephani, *General Relativity: An introduction to the theory of the gravitational field*, Cambridge University Press, 1990.

## 1. Краткое изложение специальной теории относительности. Система обозначений

В соответствии со специальной теорией относительности пространство и время рассматриваются как частная модель симметрии. Такая формулировка представлена двумя положениями:

(i) Есть закон преобразований. Эти преобразования образуют группу.

(ii) Рассмотрим систему, в которой совокупность физических переменных описывается в виде решения, корректного с точки зрения законов физики. Тогда, если все эти физические переменные подвергнуть преобразованиям в надлежащем соответствии с определенным законом преобразований, то вновь полученное решение будет подтверждать те же самые законы физики.

«Точечное событие» — это точка в пространстве, заданная тремя координатами  $\vec{x} = (x, y, z)$  в данный момент времени  $t$ . Для краткости назовем ее «точкой» в пространстве–времени, представленной четырехкомпонентным вектором:

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Здесь  $c$  — скорость света. Пространство–время явно четырехмерно. Часто эти векторы записывают как  $x^\mu$ , где  $\mu$  — индекс с диапазоном значений от 0 до 3. Будет, однако, удобнее использовать несколько измененное обозначение:  $x^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, 4$ , где  $x^4 = ict$ , а  $i = \sqrt{-1}$ . Специально отметим, что подобное изменение производится *только* в разделах 1 и 3, где обсуждается специальная теория относительности для плоского пространства–времени (см. пролог). Несистематическое использование



верхних ( $\{ \}^\mu$ ) и нижних ( $\{ \}_\mu$ ) индексов в этих разделах несущественно, однако впоследствии будет играть важную роль.

В специальной теории относительности под группой преобразований подразумевают «преобразования скоростей» или *преобразования Лоренца*. Это совокупность линейных преобразований:

$$(x^\mu)' = \sum_{\nu=1}^4 L^\mu{}_\nu x^\nu \quad (1.2)$$

с дополнительно наложенным условием, в соответствии с которым величина  $\sigma$ , определяемая как

$$\sigma^2 = \sum_{\mu=1}^4 (x^\mu)^2 = |\vec{x}|^2 - c^2 t^2 \quad (\sigma \geq 0) \quad (1.3)$$

остается инвариантной. Из данного условия следует, что коэффициенты  $L^\mu{}_\nu$  образуют ортогональную матрицу:

$$\sum_{\nu=1}^4 L^\mu{}_\nu L^\alpha{}_\nu = \delta^{\mu\alpha}; \quad \sum_{\alpha=1}^4 L^\alpha{}_\mu L^\alpha{}_\nu = \delta_{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

Из-за наличия  $i$  в определении  $x^4$ , коэффициенты  $L^i{}_4$  и  $L^4{}_i$  должны быть чисто мнимыми. Величины  $\delta^{\mu\alpha}$  и  $\delta_{\mu\nu}$  — дельта-символы Кронекера:

$$\delta^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = 1 \quad \text{если } \mu = \nu \quad \text{и} \quad 0 \quad \text{в противном случае.} \quad (1.5)$$

Можно расширить группу инвариантности, добавляя в нее *трансляции*:

$$(x^\mu)' = \sum_{\nu=1}^4 L^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1.6)$$

после чего она будет называться *группой Пуанкаре*.

Познакомимся с *правилом суммирования*:

Если индекс при умножении встречается всего 2 раза (по одну сторону от знака '='), то суммирование будет автоматически производиться по значениям от 1 до 4, даже если мы

не указываем явно символа суммирования  $\sum$ . Таким образом, уравнения (1.2)–(1.4) можно записать как:

$$\begin{aligned} (x^m)' &= L^\mu{}_\nu x^\nu, & \sigma^2 &= x^\mu x^\mu = (x^\mu)^2, \\ L^\mu{}_\nu L^\alpha{}_\nu &= \delta^{\mu\alpha}, & L^\alpha{}_\mu L^\alpha{}_\nu &= \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Если ситуация требует суммирования *не* по двум, а по трем индексам, мы помещаем один из индексов внутрь скобок — теперь на него правило суммирования не распространяется. Греческим индексам  $\mu, \nu, \dots$  соответствует диапазон значений от 1 до 4; латинскими индексами  $i, j, \dots$  обозначаются только пространственноподобные компоненты, а поэтому диапазон их значений — от 1 до 3.

Специальным элементом группы Лоренца является:

$$L^\mu{}_\nu = \begin{matrix} & & & \rightarrow \nu \\ \downarrow \mu & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch } \chi & i \text{ sh } \chi \\ 0 & 0 & -i \text{ sh } \chi & \text{ch } \chi \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (1.8)$$

где  $\chi$  — параметр. Или

$$\begin{aligned} x' &= x; & y' &= y; & z' &= z \text{ ch } \chi - ct \text{ sh } \chi; \\ t' &= -\frac{z}{c} \text{ sh } \chi + t \text{ ch } \chi. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Это преобразование из одной системы координат в другую при скорости их движения относительно друг друга:

$$v/c = \text{th } \chi. \quad (1.10)$$

В дальнейшем единицы длины и времени будут подбираться так, чтобы

$$c = 1. \quad (1.11)$$

Следует отметить, что скорость  $v$  в (1.10) будет всегда меньше скорости света. Сама по себе скорость света лоренц-инвариантна. Это и было, фактически, тем необходимым условием, на основании которого было введено понятие группы Лоренца.

Многие физические величины при преобразованиях Лоренца не *инвариантны*, а *ковариантны*. Например, энергия  $E$  и импульс  $p$  преобразуются как четырехмерный вектор:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ iE \end{pmatrix}; \quad (p^\mu)' = L^\mu{}_\nu p^\nu. \quad (1.12)$$

Электромагнитные поля преобразуются как тензор:

$$F^{\mu\nu} = \begin{matrix} & & & \rightarrow \nu \\ & \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix} & & \\ \downarrow \mu & & & \end{matrix}; \quad (1.13)$$

$$(F^{\mu\nu})' = L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}.$$

Важно понять, что из этого следует. Хотя нам хорошо известен постулат о том, что экспериментатор на движущейся платформе при проведении эксперимента получит те же результаты, что и его коллега, находящийся в покое, перед сравнением результатов мы должны *подвергнуть их преобразованию* с учетом различных систем отсчета. То, что могло выглядеть как электрическое поле для одного наблюдателя, другому могло показаться наложением электрического и магнитного полей. И так далее. Вот что мы подразумеваем под *ковариантностью* в противовес *инвариантности*. Если бы нам удалось найти универсальный способ преобразования явлений, мы бы открыли гораздо больше групп симметрии в природе, чем сейчас известно. Правда, *правило преобразований* могло бы оказаться весьма запутанным.

Мы сформулировали специальную теорию относительности таким образом, что теперь можно легко проверить, подчиняется ли в действительности какой-либо предполагаемый закон природы лоренц-инвариантности или нет. Левая и правая части уравнения должны преобразовываться одинаково; так и

будет, если они записаны в виде векторов или тензоров с индексами Лоренца, всегда преобразующихся в соответствии с

$$(X^{\mu\nu} \dots_{\alpha\beta} \dots)' = L^\mu_\kappa L^\nu_\lambda \dots L^\alpha_\gamma L^\beta_\delta \dots X^{\kappa\lambda} \dots_{\gamma\delta} \dots, \quad (1.14)$$

Отметим, что данное правило преобразований соответствует тому, как если бы мы имели дело с произведением векторов  $X^\mu Y^\nu$  и т. д. Величины, преобразующиеся, как показано в (1.14), называются *тензорами*. Вследствие ортогональности (1.4)  $L^\mu_\nu$  можно перемножать и свертывать тензоры ковариантно. Например,

$$X^\mu = Y_{\mu\alpha} Z^{\alpha\beta\beta} \quad (1.15)$$

является тензором (тензор, имеющий только один индекс, называется «вектором»), если  $Y$  и  $Z$  — тензоры.

Уравнения Максвелла в релятивистски-ковариантной форме имеют вид

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -J_\nu; \quad (1.16)$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0; \quad (1.17)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.18)$$

$$\partial_\mu J_\mu = 0. \quad (1.19)$$

Здесь  $\delta_\mu$  означает  $\partial/\partial x^\mu$ , а четырехмерный вектор тока  $J_\mu$  определяется как  $J_\mu(x) = (\vec{j}(x), ic\rho(x))$ , и выражается в единицах, соответствующих условию, когда  $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$  приведены к 1. Особый тензор  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  определяется как

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1234} &= 1; \\ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} &= \varepsilon_{\mu\alpha\beta\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta}; \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = 0, \quad \text{если любые два из его индексов одинаковы.}$$

Этот тензор является инвариантным для совокупности *однородных* преобразований Лоренца, фактически, для всех преобразований Лоренца  $L^\mu_\nu$  с детерминантом  $\det(L) = 1$ . Теперь (1.17) можно переписать в виде

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.21)$$

Частица с массой  $m$  и электрическим зарядом  $q$  движется вдоль кривой  $x^\mu(s)$ , где  $s$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$  при

$$(\partial_s x^\mu)^2 = -1; \quad (1.22)$$

$$m\partial_s^2 x^\mu = qF_{\mu\nu}\partial_s x^\nu. \quad (1.23)$$

Тензор  $T_{\mu\nu}^{\text{em}}$ , определяемый уравнением<sup>1</sup>

$$T_{\mu\nu}^{\text{em}} = T_{\nu\mu}^{\text{em}} = F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}, \quad (1.24)$$

описывает плотность энергии, плотность импульса и механическое напряжение полей  $F_{\alpha\beta}$ . В частности, плотность энергии описывается уравнением

$$T_{44}^{\text{em}} = -\frac{1}{2}F_{4i}^2 + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2), \quad (1.25)$$

где, напомним читателю, латинские коэффициенты  $i, j, \dots$  принимают значения лишь 1, 2 и 3. Из закона сохранения энергии и импульса следует, что если в любой данной точке пространства–времени  $x$  мы суммируем вклады *всех* полей и частиц к  $T_{\mu\nu}(x)$ , то для этого полного тензора энергии–импульса

$$\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (1.26)$$

## 2. Эксперименты Этвеша и принцип эквивалентности

Допустим, что объекты из различных материалов реагировали бы не совсем одинаково на присутствие гравитационного поля  $\vec{g}$ ; например, различались бы их константы пропорциональности между гравитационной массой и инертной массой:

$$\begin{aligned} \vec{F}^{(1)} &= M_{\text{инерт}}^{(1)} \vec{a}^{(1)} = M_{\text{грав}}^{(1)} \vec{g}, \\ \vec{F}^{(2)} &= M_{\text{инерт}}^{(2)} \vec{a}^{(2)} = M_{\text{грав}}^{(2)} \vec{g}, \\ \vec{a}^{(2)} &= \frac{M_{\text{грав}}^{(2)}}{M_{\text{инерт}}^{(2)}} \vec{g} \neq \frac{M_{\text{грав}}^{(1)}}{M_{\text{инерт}}^{(1)}} \vec{g} = \vec{a}^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

<sup>1</sup>Иногда  $T_{\mu\nu}$  может быть выражен в других единицах так, что в знаменателе появляются дополнительные коэффициенты  $4\pi$ .

Такие объекты обладали бы разными ускорениями  $\vec{a}$ , при этом можно было бы очень точно предсказать некоторые явления, возникающие в результате. В случае с космическим кораблем по типу материала, из которого изготовлен корабль, можно было бы определить ускорение — при использовании другого материала ускорение было бы иным, а относительное ускорение воспринималось бы как слабая остаточная гравитация. Можно провести такие же эксперименты и на Земле. Рассмотрим, например, вращающуюся платформу с параболической поверхностью. Под действием земной гравитации сферический объект притягивался бы к центру, однако, под действием центробежных сил противодействия при круговом движении он смещался бы к периферии. Если эти две силы уравновешены, объект может найти устойчивое положение в любой части поверхности, однако, объект из другого материала может испытывать еще и воздействие остаточной силы тяготения.

По существу, Земля сама по себе является такой вращающейся платформой. Это и позволило венгерскому барону Роланду фон Этвешу с предельной точностью показать эквивалентность между инертной и гравитационной массой («принцип эквивалентности»). Сила тяготения, действующая на объект, находящийся на поверхности Земли, равна

$$\vec{F}_g = -G_N M_{\oplus} M_{\text{грав}} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (2.2)$$

где  $G_N$  — ньютоновская постоянная силы тяготения, а  $M_{\oplus}$  — масса Земли. Центробежная сила равна

$$\vec{F}_{\omega} = M_{\text{инерт}} \omega^2 \omega^2 \vec{r}_{\text{ось}}, \quad (2.3)$$

где  $\omega$  — угловая скорость Земли, а

$$\vec{r}_{\text{ось}} = \vec{r} - \frac{(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{\omega}}{\omega^2} \quad (2.4)$$

— расстояние от земной оси вращения. Комбинированная сила, действующая на объект ( $i$ ) на поверхности, равняется  $\vec{F}^{(1)} = \vec{F}_g^{(i)} + \vec{F}_{\omega}^{(i)}$ . Если для двух объектов (1) и (2) эти силы  $\vec{F}^{(1)}$

и  $\vec{F}^{(2)}$  не абсолютно параллельны, можно определить

$$\alpha = \frac{\vec{F}^{(1)} \wedge \vec{F}^{(2)}}{|\vec{F}^{(1)}| |\vec{F}^{(2)}|} \approx \left( \frac{M_{\text{инерт}}^{(1)}}{M_{\text{грав}}^{(1)}} - \frac{M_{\text{инерт}}^{(2)}}{M_{\text{грав}}^{(2)}} \right) \frac{(\vec{r} \wedge \vec{\omega})(\vec{\omega} \cdot \vec{r})r}{G_n M_{\oplus}}, \quad (2.5)$$

где по условию сила тяжести намного превышает центробежную силу. В реальности для Земли мы имеем:

$$\frac{G_n M_{\oplus}}{\omega^2 r_{\oplus}^3} \approx 300. \quad (2.6)$$

Из (2.5) мы видим, что отклонение  $\alpha$  определяется как

$$\alpha \approx (1/300) \cos \theta \sin \theta \left( \frac{M_{\text{инерт}}^{(1)}}{M_{\text{грав}}^{(1)}} - \frac{M_{\text{инерт}}^{(2)}}{M_{\text{грав}}^{(2)}} \right), \quad (2.7)$$

где  $\theta$  — широта, на которой находится лаборатория в Венгрии, к счастью, достаточно далеко как от Северного полюса, так и от экватора.

Этвеш с точностью примерно  $10^{-9}$  не обнаружил отклонений от принципа эквивалентности. Наблюдая за Землей, которая движется еще и вокруг Солнца, можно повторить эксперимент, используя гравитационное поле Солнца. Преимущество в данном случае заключается в том, что искомый эффект ежедневно меняется. Таков был эксперимент Р. Х. Дикке, выполненный с погрешностью  $10^{-11}$ . В перспективе предполагается запустить специализированный спутник под названием STEP (Satellite Test of the Equivalence Principle)<sup>2</sup>, с целью проверки принципа эквивалентности с погрешностью  $10^{-17}$ . Предполагается, что существенного отклонения от принципа эквивалентности не будет. Тем не менее, важно сформулировать теорию гравитационных сил так, чтобы принцип эквивалентности постулировался в ней как точное соотношение. Поскольку специальная теория относительности, помимо прочих достоинств, имеет репутацию теории, в которой никогда не наблюдалось

<sup>2</sup>Проверка принципа эквивалентности со спутника. — *Прим. перев.*

никаких отклонений, возникает естественное желание подчинить нашу теорию гравитационных сил постулатам специальной теории относительности. Теория, получаемая в результате комбинации требований этих двух теорий, является темой наших лекций.

### **3. Равноускоренно движущийся лифт. Пространство Риндлера**

Принцип эквивалентности требует новой симметрии и сопряженной с ней инвариантности. Реализация такой симметрии и ее последующее использование позволят нам дать однозначную формулировку нашей гравитационной теории. Решение подобной задачи было впервые получено Эйнштейном в 1915 г. Ниже мы опишем современные способы ее построения.

Рассмотрим идеализированный «лифт», способный совершать любые виды вертикальных перемещений, включая свободное падение. В соответствии с принципом эквивалентности при свободном падении такого лифта все объекты, находящиеся внутри, будут испытывать одинаковое ускорение. Это значит, что во время свободного падения лифта его «пассажиры» не будут испытывать вообще никакого воздействия гравитационного поля — они будут находиться в состоянии невесомости.

Для сравнения рассмотрим подобный лифт в космическом пространстве, вдали от какой-либо звезды или планеты. Придадим ему постоянное ускорение, направленное вверх. Все пассажиры ощутят давление со стороны пола, как если бы они жили в гравитационном поле Земли или любой другой планеты. Вот так мы можем создать «искусственное» гравитационное поле. Рассмотрим такое искусственное гравитационное поле подробнее. Предположим, искусственное гравитационное поле постоянно во времени и пространстве<sup>3</sup>. Пассажир будет ощущать постоянное ускорение.

---

<sup>3</sup>Вскоре мы обнаружим, однако, что поле, в котором мы находимся, постоянно в направлении  $x$ ,  $y$  и  $t$ , но непостоянно в направлении самого поля — направлении  $z$ .



Весьма важной составляющей теории относительности является понятие о координатной сетке. Введем координатную сетку  $\xi^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, 4$ , для внутреннего пространства лифта, так чтобы точки на его стенах задавались константой  $\xi^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Наблюдатель из космоса при этом использует декартову сетку (инерционную систему)  $x^\mu$ . Движение лифта описывается функциями  $x^\mu(\xi)$ . Пусть начало координат  $\xi$  будет точкой посередине пола лифта, и пусть она совпадет с началом координат  $x$ . Теперь рассмотрим линию  $\xi^\mu = (0, 0, 0, i\tau)$ . Какой будет соответствующая кривая  $x^\mu(\vec{0}, \tau)$ ? Если ускорение действует в направлении  $z$ , то

$$x^\mu(\tau) = (0, 0, z(\tau), it(\tau)). \quad (3.1)$$

Время для наблюдателя внутри лифта течет равномерно. Отсюда

$$\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\right)^2 = (\partial_\tau z)^2 - (\partial_\tau t)^2 = -1. \quad (3.2)$$

Ускорение обозначается символом  $\vec{g}$  и равно

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} = g^\mu. \quad (3.3)$$

При  $\tau = 0$  мы можем принять скорость лифта также равной нулю, отсюда

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = (\vec{0}, i), \quad (\text{при } \tau = 0). \quad (3.4)$$

В этот момент  $t$  и  $\tau$  совпадают, и если мы хотим, чтобы ускорение  $\vec{g}$  было постоянным, нам необходимо, чтобы при  $\tau = 0$   $\partial_\tau \vec{g}$  также равнялось нулю, отсюда

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g^\mu = (\vec{0}, iF) = F \frac{\partial}{\partial \tau} x^\mu \quad \text{при } \tau = 0, \quad (3.5)$$

где  $F$  является пока неизвестной константой.

Заметим, что это уравнение лоренц-ковариантно. Поэтому, не только при  $\tau = 0$ , но и при любых значениях времени мы должны иметь:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g^\mu = F \frac{\partial}{\partial \tau} x^\mu. \quad (3.6)$$

Уравнения (3.3) и (3.6) дают:

$$g^\mu = F(x^\mu + A^\mu), \quad (3.7)$$

$$x^\mu(\tau) = B^\mu \operatorname{ch}(g\tau) + C^\mu \operatorname{sh}(g\tau) - A^\mu, \quad (3.8)$$

где  $F$ ,  $A^\mu$ ,  $B^\mu$  и  $C^\mu$  — константы. Определим  $F = g^2$ . Тогда по (3.1), (3.2) и с учетом граничных условий:

$$(g^\mu) = F = g^2, \quad B^\mu = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C^\mu = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad A^\mu = B^\mu, \quad (3.9)$$

а поскольку при  $\tau = 0$  ускорение является чисто пространственноподобной величиной, мы выводим, что параметр  $g$  является абсолютным значением ускорения.

Отметим, что положение пола лифта в системе отсчета времени пассажира в момент  $\tau$  определяется по его положению при  $\tau = 0$  с помощью лоренцева буста вблизи точки  $\xi^\mu = -A^\mu$ . Из этого должно следовать, что весь лифт описывается одним бустом Лоренца. В силу (1.8) буст описывается при  $\chi = g\tau$ . Такое наблюдение позволяет нам быстро узнать непосредственные координаты всех остальных точек лифта. Предположим, что при  $\tau = 0$

$$x^\mu(\vec{\xi}, 0) = (\vec{\xi}, 0). \quad (3.10)$$

Тогда при других значениях  $\tau$ :

$$x^\mu(\vec{\xi}, i\tau) = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \operatorname{ch}(g\tau)\left(\xi^3 + \frac{1}{g}\right) - \frac{1}{g} \\ i \operatorname{sh}(g\tau)\left(\xi^3 + \frac{1}{g}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Компоненты 3, 4 системы координат  $\xi$ , вложенной в систему координат  $x$ , показаны на рис. 1. Описание квадранта пространства–времени в виде системы координат  $\xi$  называется «риндлеровым пространством». Из (3.11) должно следовать, что

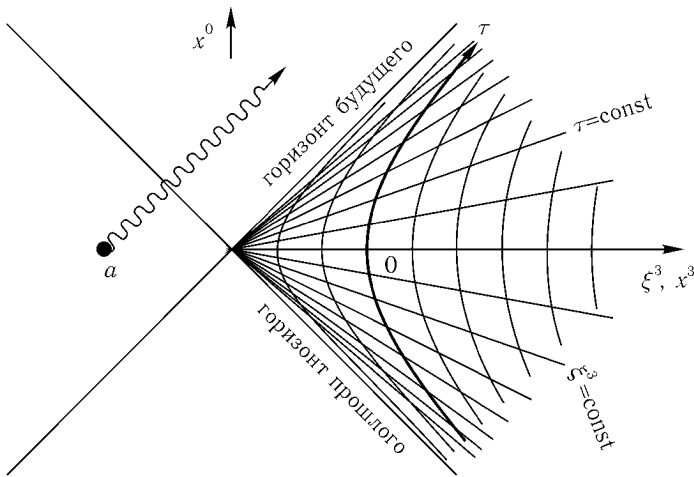


Рис. 1. Риндлерово пространство. Изогнутая сплошная линия характеризует пол лифта,  $\xi^3 = 0$ . Сигнал, испущенный из точки  $a$ , никогда не будет получен обитателем риндлерова пространства, пребывающим в правом квадранте.

наблюдатель внутри лифта не воспринимает событий, которые явно зависят от его временной координаты  $\tau$ , поскольку переход от  $\tau$  к  $\tau'$  — это не что иное, как преобразование Лоренца. Отметим еще ряд важных эффектов:

(i) Линии, вдоль которых  $\tau$  постоянно, сходятся слева. Отсюда следует, что скорость местных часов, описываемая как  $\rho = \sqrt{-(\partial x^\mu / \partial \tau)^2}$ , изменяется с увеличением высоты как  $\xi^3$ :

$$\rho = 1 + g\xi^3. \quad (3.12)$$

(ii) Напряженность гравитационного поля, ощущаемая локально, равна  $\rho^{-2}\vec{g}(\xi)$ , что обратно пропорционально расстоянию до точки  $x^\mu = -A^\mu$ . Поэтому, даже если поле постоянно в поперечном направлении и остается постоянным с увеличением времени, оно уменьшается с ростом высоты.

(iii) Область пространства–времени, описываемая наблюдателем в лифте, это всего лишь часть общего простран-

ства–времени (квадрант справа на рис. 1, где  $x^3 + 1/g > |x^0|$ ). Граничные линии называются *горизонтами событий* (отграничивающими прошлое и будущее).

Все это типично *релятивистские* эффекты. В нерелятивистском пределе ( $g \rightarrow 0$ ) (3.11) упрощается до

$$x^3 = \xi^3 + \frac{1}{2}g\tau^2; \quad x^4 = i\tau = \xi^4. \quad (3.13)$$

В соответствии с принципом эквивалентности обнаруженные нами здесь релятивистские эффекты должны также быть присущи гравитационным полям, создаваемым материей. Рассмотрим их по порядку.

Наблюдение (i) позволяет предположить, что часы будут отставать, если они находятся вблизи гравитационного поля. Действительно, можно полагать, что (3.12) примет общий вид:

$$\rho = 1 + V(x), \quad (3.14)$$

где  $V(x)$  — гравитационный потенциал. Так оно и будет при условии стационарности гравитационного поля. Этот эффект называется гравитационным красным смещением.

(ii) также является релятивистским эффектом. Это можно предсказать, используя такой довод. *Плотность энергии* гравитационного поля отрицательна. Поскольку энергия двух масс  $M_1$  и  $M_2$ , разделенных расстоянием  $r$ , выражается через  $E = -G_N M_1 M_2 / r$ , мы можем рассчитать плотность энергии поля  $\vec{g}$ :  $T_{44} = -(1/8\pi G_N)\vec{g}^2$ . Так как мы привели  $c$  к единице ( $c = 1$ ), то это также и плотность его массы. Однако плотность этой массы в свою очередь также должна породить гравитационное поле! Из этого вытекает, что<sup>4</sup>

$$\vec{\partial} \cdot \vec{g} \stackrel{?}{=} 4\pi G_N T_{44} = -\frac{1}{2}\vec{g}^2, \quad (3.15)$$

Таким образом, действительно, напряженность поля тяготения должна уменьшаться с ростом высоты. Такое обоснование, однако, является явно упрощенным, поскольку наше поле хотя

<sup>4</sup>Временно мы опускаем привычный здесь знак минус, чтобы показать, что поле направлено вниз.

и подчиняется дифференциальному уравнению (3.15), но без коэффициента  $\frac{1}{2}$ .

Возможное возникновение *горизонтов событий* — наблюдение (iii) — может оказаться очень важной новой характеристикой гравитационных полей. При обычных условиях, конечно, поля настолько слабы, что никаких горизонтов событий видно не будет, однако они могут появиться в случае *гравитационного коллапса*. Если это произойдет, то в пространстве–времени появятся такие области, ни один сигнал из которых нельзя будет зафиксировать. На рис. 1 мы видим, что радиосигналы, испущенные из точки  $a$ , никогда не достигнут наблюдателя, находящегося в риндлеровом пространстве.

Самым важным в этой главе является вывод о том, что для описания гравитационного поля можно выполнить преобразование от координат  $\xi^\mu$ , описывающих пространство внутри лифта, где объект ощущает воздействие гравитационного поля, в координаты  $x^\mu$ , описывающие пустое пространство–время, где свободно падающие предметы движутся по прямым линиям. Мы знаем, что в пустом пространстве, не имеющем гравитационного поля, скорости часов и длины линеек описываются через метрическую функцию  $\sigma$ , выраженную формулой (1.3). Можно переписать ее в виде

$$d\sigma^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1). \quad (3.16)$$

Мы написали здесь  $d\sigma$  и  $dx^\mu$ , чтобы показать, что рассматривается бесконечно малое расстояние между двумя точками, расположенными рядом в пространстве–времени. Для координат  $\xi^\mu$ , соответствующих лифту, при условии бесконечно малых перемещений  $d\xi^\mu$  мы имеем:

$$\begin{aligned} dx^3 &= \text{ch}(g\tau) d\xi^3 + (1 + g\xi^3) \text{sh}(g\tau) d\tau, \\ dx^4 &= i \text{sh}(g\tau) d\xi^3 + i(1 + g\xi^3) \text{ch}(g\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.17)$$

откуда вытекает:

$$d\sigma^2 = -(1 + g\xi^3)^2 d\tau^2 + (d\vec{\xi})^2. \quad (3.18)$$

Если записать это в виде:

$$d\sigma^2 = g_{\mu\nu}(\xi) d\xi^\mu d\xi^\nu = (d\vec{\xi})^2 + (1 + g\xi^3)^2 (d\xi^4)^2, \quad (3.19)$$

то можно увидеть, что все воздействия гравитационного поля на линейки и часы можно выразить через поле  $g_{\mu\nu}(\xi)$ , зависящее от пространства (и времени). *Лишь в гравитационном поле риндлерова пространства* можно найти такие координаты  $x^\mu$ , чтобы с учетом этих координат функция  $g^{\mu\nu}$  обрела простую форму (3.16). Мы увидим, что функции  $g_{\mu\nu}(\xi)$  вполне достаточно для полного описания гравитационного поля.

Пространства, в которых бесконечно малое расстояние  $d\sigma$  описывается функцией  $g_{\mu\nu}(\xi)$ , зависящей от пространственных (временных) координат называются *искривленными* или *римановыми пространствами*. К риманову пространству относится и система пространство–время. Рассмотрим такие пространства по порядку.

#### 4. Криволинейные системы координат

Уравнение (3.11) представляет частный случай преобразования координат, удобный для проверки принципа эквивалентности в отношении гравитационных полей. Оно не является преобразованием Лоренца, поскольку оно нелинейно по  $\tau$ . На рис. 1 мы видим, что координаты  $\xi^\mu$  искривлены. Координаты пустого пространства можно назвать «прямыми», поскольку с их позиции все частицы движутся по прямым линиям. Однако подобная прямая система координат будет существовать лишь при условии одинаковой, риндлеровской, формы гравитационного поля в любой ее точке. Вблизи звезд и планет она примет гораздо более сложные очертания.

Но и в этом случае мы также можем использовать принцип эквивалентности: законы гравитации нужно сформулировать таким образом, чтобы можно было использовать в принципе *любую* систему координат, однозначно описывающую точки в нашем четырехмерном пространстве–времени. Ни одна из этих систем не окажется предпочтительней другой, поскольку

в каждой из этих систем можно ощутить то или иное воздействие гравитационного поля<sup>5</sup>. Начнем с любой произвольно выбранной системы координат:  $x^\mu = (t, x, y, z)$ . Начиная с этой главы, сохранение множителя  $i$  во временных составляющих станет нецелесообразным, поскольку лишь запутывает ситуацию. Стало уже правилом брать  $x^0 = t$  и опускать  $x^4$ , равное  $it$ . Теперь  $\mu$  имеет диапазон значений от 0 до 3. Также приобретает значение *верхнее* положение координатных индексов  $^\mu, ^\nu$ .

Пусть имеется взаимно однозначное соответствие нашей системы координат другой —  $u^\mu$ :

$$u^\mu \iff x^\mu; \quad x = x(u). \quad (4.1)$$

Величины, зависящие от этих координат, будут называться просто «полями». *Скалярное поле*  $\phi$  — это величина, которая зависит от  $x$ , но не подвергается дальнейшим преобразованиям, поэтому в новой системе координат (для различения функций новых координат  $u$  и функций  $x$  мы используем тильду  $\tilde{\phantom{x}}$ )

$$\phi = \tilde{\phi}(u) = \phi(x(u)). \quad (4.2)$$

Теперь определим градиент (обратите внимание, что мы используем *нижний* индекс):

$$\phi_\mu(x) = \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) \right|_{x^\nu = \text{const для } \nu \neq \mu}. \quad (4.3)$$

Следует помнить, что частная производная определяется с привлечением бесконечно малого перемещения  $dx^\mu$ ,

$$\phi(x + dx) = \phi(x) + \phi_\mu dx^\mu + O(dx^2). \quad (4.4)$$

Мы выводим:

$$\tilde{\phi}(u + du) = \tilde{\phi}(u) + \frac{\partial x^\mu}{\partial u^\nu} \phi_\mu du^\nu + O(du^2) = \tilde{\phi}(u) + \tilde{\phi}_\nu(u) du^\nu. \quad (4.5)$$

Следовательно, в новой системе координат градиент имеет вид:

$$\tilde{\phi}_\nu(u) = x^\mu{}_{,\nu} \phi_\mu(x(u)), \quad (4.6)$$

---

<sup>5</sup>Как мы увидим далее, в отношении непрерывности и дифференцируемости будет действовать ряд ограничений.

где используется условное обозначение:

$$x^{\mu}{}_{,\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial u^{\nu}} x^{\mu}(u) \Big|_{u^{\alpha \neq \nu} = \text{const}}, \quad (4.7)$$

в котором запятая указывает на частное дифференцирование.

Обратите внимание, что во всех этих уравнениях верхние и нижние индексы всегда сохраняют свое положение, и используются они таким образом, что в правиле суммирования встречается один нижний и один верхний индекс:

$$\sum_{\mu} (\dots)_{\mu} (\dots)^{\mu}.$$

Можно, конечно, произвести обратное преобразование из координат  $x$  в координаты  $u$ :

$$\phi_{\mu}(x) = u^{\nu}{}_{,\mu} \tilde{\phi}_{\nu}(u(x)). \quad (4.8)$$

Действительно,

$$u^{\nu}{}_{,\mu} x^{\mu}{}_{,\alpha} = \delta^{\nu}_{\alpha} \quad (4.9)$$

(матрица  $u^{\nu}{}_{,\mu}$  является величиной, обратной  $x^{\mu}{}_{,\alpha}$ ). В частном случае  $x^{\mu}{}_{,\alpha}$  может быть элементом группы Лоренца. Группа Лоренца — это всего лишь подгруппа в числе гораздо более обширного множества рассматриваемых здесь преобразований координат. Мы видим, что  $\phi_{\mu}(x)$  преобразуется как *вектор*. Все поля  $A_{\mu}(x)$ , преобразующиеся в точности как градиенты  $\phi_{\mu}(x)$ , т. е.

$$\tilde{A}_{\nu}(u) = x^{\mu}{}_{,\nu} A_{\mu}(x(u)), \quad (4.10)$$

будут называться ковариантными векторными полями, сокращенно — ковекторами, даже если их нельзя записать в виде градиента скалярного поля.

Обратите внимание, что произведение скалярного поля  $\phi$  и ковектора  $A_{\mu}$  снова преобразуется как ковектор:

$$\begin{aligned} B_{\mu} &= \phi A_{\mu}; \\ \tilde{B}_{\nu}(u) &= \tilde{\phi}(u) \tilde{A}_{\nu}(u) = \phi(x(u)) x^{\mu}{}_{,\nu} A_{\mu}(x(u)) = \\ &= x^{\mu}{}_{,\nu} B_{\mu}(x(u)). \end{aligned} \quad (4.11)$$



Рассмотрим теперь прямое произведение  $B_{\mu\nu} = A_{\mu}^{(1)} A_{\nu}^{(2)}$ . Оно преобразуется следующим образом:

$$\tilde{B}_{\mu\nu}(u) = x^{\alpha}{}_{,\mu} x^{\beta}{}_{,\nu} B_{\alpha\beta}(x(u)). \quad (4.12)$$

Совокупность компонент поля, которые можно охарактеризовать с помощью определенного количества индексов  $\mu, \nu, \dots$  и которые преобразуются в соответствии с (4.12), называется *ковариантным тензором*.

Предостережение: в тензоре типа  $B_{\mu\nu}$  для получения скалярного поля можно не производить суммирования по повторным индексам, поскольку матрицы  $x^{\alpha}{}_{,\mu}$  вообще не подчиняются условиям ортогональности (1.4), обязательным для преобразований Лоренца  $L_{\mu}^{\alpha}$ . Нежелательно суммировать по двум повторным нижним индексам. Тем не менее, нам бы хотелось рассмотреть такие случаи как уравнения Максвелла в свете общей теории относительности, где, естественно, встречаются внутренние произведения векторов. Для того, чтобы нам суметь осуществить задуманное, мы вводим другой тип векторов: так называемые *контравариантные* векторы и тензоры. Поскольку контравариантный вектор преобразуется не так как ковариантный, мы должны это каким-то образом отобразить. Для этого мы ставим его индексы в верхнее положение:  $F^{\mu}(x)$ . Правило преобразований с учетом верхнего положения индекса теперь отличается от правил (4.10), (4.12) для нижних индексов и постулируется следующим образом:

$$\tilde{F}^{\mu}(u) = u^{\mu}{}_{,\alpha} F^{\alpha}(x(u)), \quad (4.13)$$

а контравариантные тензоры  $F^{\mu\nu\alpha} \dots$  преобразуются в виде произведений:

$$F^{(1)\mu} F^{(2)\nu} F^{(3)\alpha} \dots \quad (4.14)$$

Нам встретятся также *смешанные* тензоры — с верхними (надстрочными) и нижними (подстрочными) индексами. Они преобразуются в виде соответствующих произведений.

**Упражнение.** Проверьте, что правила преобразований (4.10) и (4.13) образуют группы, т. е. преобразование  $x \rightarrow u$  дает такой же тензор, что и ряд  $x \rightarrow v \rightarrow u$ . Примите к сведению,

что частичное дифференцирование подчиняется уравнению:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial u^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial v^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\nu}. \quad (4.15)$$

Суммирование по повторным индексам допускается, если один из индексов верхний, а другой — нижний:

$$\tilde{F}^\mu(u) \tilde{A}_\mu(u) = u^\mu{}_{,\alpha} F^\alpha(x(u)) x^{\beta}{}_{,\mu} A_\beta(x(u)), \quad (4.16)$$

а поскольку матрица  $u^\nu{}_{,\alpha}$  является обратной величиной  $x^{\beta}{}_{,\mu}$  (в соответствии с 4.9), мы имеем:

$$u^\mu{}_{,\alpha} x^{\beta}{}_{,\mu} = \delta_\alpha^\beta, \quad (4.17)$$

Таким образом, произведение  $F^\mu A_\mu$  действительно преобразуется в виде скалярной величины:

$$\tilde{F}^\mu(u) \tilde{A}_\mu(u) = F^\alpha(x(u)) A_\alpha(x(u)). \quad (4.18)$$

Заметим, что поскольку в соответствии с правилом суммирования сложение производится по повторным индексам с одинаковым наименованием, в формулах типа (4.16) мы должны предусмотреть, чтобы все *не* суммируемые индексы имели *разные* наименования.

Мы замечаем, что в (4.4) и (4.5) бесконечно малое перемещение координаты,  $dx^\mu$ , преобразуется в виде контравариантного вектора. Именно поэтому координатам присваиваются верхние индексы. Уравнение (4.17) свидетельствует также, что дельта-символ Кронекера (при условии наличия у него одного нижнего и одного верхнего индекса) является *инвариантным* тензором: во всех координатных *сетках* он имеет одинаковый вид.

## Градиенты тензоров

Градиент скалярного поля  $\phi$  преобразуется в виде ковариантного вектора. Будут ли градиенты ковариантных векторов и

тензоров в этом случае ковариантными тензорами? К сожалению, нет. Пусть, начиная с этого момента, частное дифференцирование  $\partial/\partial x^\mu$  для простоты обозначается  $\partial_\mu$ . Иногда запись будет еще короче:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi = \partial_\mu \phi = \phi_{,\mu}. \quad (4.19)$$

По (4.10) находим:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \tilde{A}_\nu(u) &= \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tilde{A}_\nu(u) = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial u^\nu} A_\mu(x(u)) \right) = \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial u^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} A_\mu(x(u)) + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial u^\alpha \partial u^\nu} A_\mu(x(u)) = \\ &= x^{\mu, \nu} x^{\beta, \alpha} \partial_\beta A_\mu(x(u)) + x^{\mu, \alpha, \nu} A_\mu(x(u)). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Последнее слагаемое в этом уравнении отклоняется от постулированного правила преобразования тензоров (4.12).

Заметим теперь, что для обычного частного дифференцирования всегда справедливо

$$x^{\mu, \alpha, \nu} = x^{\mu, \nu, \alpha}. \quad (4.21)$$

Отсюда следует, что *антисимметричная часть*  $\partial_\alpha A_\mu$  является ковариантным тензором:

$$F_{\alpha\mu} = \partial_\alpha A_\mu - \partial_\mu A_\alpha; \quad \tilde{F}_{\alpha\mu}(u) = x^{\beta, \alpha} x^{\nu, \mu} F_{\beta\nu}(x(u)). \quad (4.22)$$

Это уравнение является важной составляющей математической теории дифференциальных форм. Можно продолжить следующим образом: если  $A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$ , то

$$F_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha A_{\beta\gamma} + \partial_\beta A_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma A_{\alpha\beta} \quad (4.23)$$

является полностью антисимметричным ковариантным тензором.

Далее рассмотрим полностью антисимметричный тензор  $g_{\mu\nu\alpha\beta}$  с количеством индексов, соответствующих размерности пространства-времени (сохраним пространство-время четырехмерным). Тогда можно записать:

$$g_{\mu\nu\alpha\beta} = \omega \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (4.24)$$

(см. определение  $\varepsilon$  в (1.20)), поскольку условие антисимметрии задает значения всех коэффициентов  $g_{\mu\nu\alpha\beta}$ , не считая общего множителя  $\omega$ . Хотя  $\omega$  не имеет индексов, он, как мы увидим далее, не будет преобразовываться по типу скалярного поля. Вместо него мы находим:

$$\tilde{\omega}(u) = \det(x_{,\nu}^{\mu})\omega(x(u)). \quad (4.25)$$

Назовем величину, которая преобразуется подобным образом, *плотностью*.

Детерминант в (4.25) может действовать как якобиан преобразования в интеграле. Если  $\phi(x)$  представляет собой некое скалярное поле (или внутреннее произведение тензоров с совпадающими верхними и нижними индексами), то интеграл

$$\int \omega(x)\phi(x) d^4x \quad (4.26)$$

не зависит от выбора координат, поскольку

$$\int d^4x \dots = \int d^4u \cdot \det(\partial x^{\mu} / \partial u^{\nu}) \dots \quad (4.27)$$

Это также подтверждается (4.24):

$$\begin{aligned} \int \tilde{g}_{\mu\nu\alpha\beta} du^{\mu} \wedge du^{\nu} \wedge du^{\alpha} \wedge du^{\beta} = \\ = \int g_{\kappa\lambda\gamma\delta} dx^{\kappa} \wedge dx^{\lambda} \wedge dx^{\gamma} \wedge dx^{\delta}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Укажем на два важных свойства тензоров:

1) Теорема о разложении.

Каждый тензор  $X_{\kappa\lambda\sigma\tau \dots}^{\mu\nu\alpha\beta \dots}$  можно записать как конечную сумму произведений ковариантных и контравариантных векторов:

$$X_{\kappa\lambda \dots}^{\mu\nu \dots} = \sum_{t=1}^N A_{(t)}^{\mu} B_{(t)}^{\nu} \dots P_{\kappa}^{(t)} Q_{\lambda}^{(t)} \dots \quad (4.29)$$

Число членов,  $N$ , не должно превышать числа составляющих тензора<sup>6</sup>. Если выбрать в одной системе координат векторы  $A$ ,  $B$ , ... таким образом, чтобы они, взятые по отдельности, не

<sup>6</sup>Если  $n$  — размерность пространства-времени, а  $r$  — количество индексов (ранг тензора), то необходимо не более  $N \leq n^{r-1}$  членов.

обращались в нуль только по одному значению индекса, то доказательство теоремы не составит труда.

2) Теорема частного.

Пусть дана произвольная совокупность компонент  $X_{\kappa\lambda\dots\sigma\tau\dots}^{\mu\nu\dots\alpha\beta\dots}$ . Пусть известно, что для *всех* тензоров  $A_{\alpha\beta\dots}^{\sigma\tau\dots}$  (с заданным, фиксированным числом верхних и/или нижних индексов) величина

$$B_{\kappa\lambda\dots}^{\mu\nu\dots} = X_{\kappa\lambda\dots\sigma\tau\dots}^{\mu\nu\dots\alpha\beta\dots} A_{\alpha\beta\dots}^{\sigma\tau\dots}$$

преобразуется как тензор. Тогда сам  $X$  также преобразуется как тензор.

Для доказательства можно привлечь индуктивный метод. Сперва выбирается  $A$  всего с одним индексом. Затем в одной системе координат мы задаем ему всего одну ненулевую компоненту. Затем можно воспользоваться (4.9) или (4.17). Если у  $A$  окажется несколько индексов, можно разложить его с помощью теоремы о разложении.

Достижением этой главы можно считать то, что мы научились работать с тензорами в искривленной системе координат. Их можно дифференцировать и интегрировать. Однако прежде, чем мы сможем построить интересные с точки зрения физики теории в отношении искривленных пространств, придется преодолеть еще два препятствия:

(i) До сих пор нам удавалось производить дифференцирование лишь *антисимметричным* способом, в противном случае результирующие градиенты не удалось бы преобразовывать как тензоры.

(ii) По-прежнему остается два типа индексов. Суммирование возможно, лишь если один индекс — верхний, а другой — нижний. Это огромное препятствие для построения ковариантных формулировок существующих законов природы, например, законов Максвелла. Попробуем обойти эти препятствия одно за другим.

## 5. Аффинная связность. Кривизна Римана

Описанное в предыдущей главе пространство, однако, не достаточно структурировано, чтобы в его рамках можно было

сформулировать все известные физические законы. Для хорошего понимания той структуры пространства, которую предстоит ввести на данном этапе, мы должны сначала дать определение понятию «аффинная связность». Лишь в следующей главе мы дадим определение расстоянию во времени и пространстве.

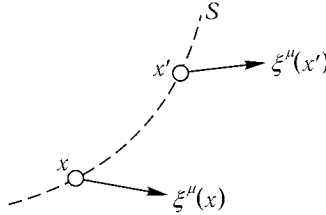


Рис. 2. Два контравариантных близко расположенных вектора на кривой  $S$ .

Пусть  $\xi^\mu(x)$  является контравариантным векторным полем, а  $x^\mu(\tau)$  — пространственно-временной траекторией  $S$  наблюдателя. Допустим теперь, что наблюдатель знает, как определить, постоянна ли величина  $\xi^\mu(x)$  или она изменяется с изменением собственного времени  $\tau$ . Давайте укажем наблюдаемую временную производную точкой:

$$\dot{\xi}^\mu = \frac{d}{d\tau} \xi^\mu(x(\tau)). \quad (5.1)$$

Наблюдатель использует систему координат  $x$ , где он находится в начале координат  $O$  трехмерного пространства. Каким же будет (5.1) в другой системе координат, например,  $u$ ?

$$\begin{aligned} \xi^\mu(x) &= x^\mu{}_{,\nu} \tilde{\xi}^\nu(u(x)); \\ x^\mu{}_{,\nu} \tilde{\xi}^\nu &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{d\tau} \xi^\mu(x(\tau)) = \\ &= x^\mu{}_{,\nu} \frac{d}{d\tau} \tilde{\xi}^\nu(u(x(\tau))) + x^\mu{}_{,\nu,\lambda} \frac{du^\lambda}{d\tau} \cdot \tilde{\xi}^\nu(u). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Таким образом, если мы хотим определить величину  $\dot{\xi}^\nu$ , ко-

торая преобразуется как контравектор, то, для общей системы координат это должно быть записано как:

$$\dot{\xi}^\nu(u(\tau)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{d\tau} \xi^\nu(u(\tau)) + \Gamma^\nu_{\kappa\lambda} \frac{du^\lambda}{d\tau} \xi^\kappa(u(\tau)). \quad (5.3)$$

Здесь  $\Gamma^\nu_{\lambda\kappa}$  — это новое поле, и вблизи точки  $u$  местный наблюдатель может использовать более «предпочтительную» систему координат  $x$ , в которой

$$u^\nu_{,\mu} x^\mu_{,\kappa,\lambda} = \Gamma^\nu_{\kappa\lambda}. \quad (5.4)$$

В этой избранной наблюдателем системе координат  $\Gamma$  исчезнет, но *только на его кривой S!* Вообще говоря, невозможно найти такую систему координат, в которой бы  $\Gamma$  исчезло всюду. Формула (5.3) определяет *параллельное перемещение контравариантного вектора* вдоль кривой  $S$ . Для этого Леви – Чивита ввел новое поле  $\Gamma^\mu_{\lambda\kappa}(u)$ , названное им «полем аффинной связности». Хотя это и поле, но *не* тензорное, поскольку оно преобразуется в виде:

$$\tilde{\Gamma}^\nu_{\kappa\lambda}(u(x)) = u^\nu_{,\mu} [x^\alpha_{,\kappa} x^\beta_{,\lambda} \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) + x^\mu_{,\kappa,\lambda}]. \quad (5.5)$$

**Упражнение.** Докажите (5.5) и покажите, что два последовательных преобразования такого типа снова приводят к преобразованию вида (5.5).

Теперь мы видим, что (5.4) приводит к равенству

$$\Gamma^\nu_{\lambda\kappa} = \Gamma^\nu_{\kappa\lambda}, \quad (5.6)$$

а поскольку

$$x^\mu_{,\kappa,\lambda} = x^\mu_{,\lambda\kappa}, \quad (5.7)$$

такая симметрия также сохранится в любой другой системе координат. В принципе, применяя (5.3), уже можно рассматривать пространства с параллельными смещениями, где  $\Gamma$  не подчиняется (5.6). При этом не существует таких локальных

инерциальных систем координат, где в какой-либо заданной точке  $x$  можно было бы наблюдать  $\Gamma^\mu_{\lambda\kappa} = 0$ . Это называется *кручением*. Мы не будем останавливаться на этом подробно. Отметим лишь, что антисимметричная часть  $\Gamma^\mu_{\kappa\lambda}$  является обычным тензорным полем, и ее можно ввести в наши модели позднее. На данный момент мы ограничимся случаем, когда уравнение (5.6) всегда справедливо.

*Геодезическая* — это кривая  $x^\mu(\sigma)$ , которая подчиняется уравнению

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}x^\mu(\sigma) + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} \frac{dx^\kappa}{d\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} = 0. \quad (5.8)$$

Поскольку  $dx^\mu/d\sigma$  представляет собой контравариантный вектор, то это уравнение является частным случаем (5.3), и уравнение для данной кривой будет иметь одинаковый вид во всех системах координат.

Н.В. Если выбрать произвольную, отличающуюся от описанной, параметризацию кривой (5.8), то используя параметр  $\tilde{\sigma}$ , который является произвольной дифференцируемой функцией  $\sigma$ , можно получить другое уравнение:

$$\frac{d^2}{d\tilde{\sigma}^2}x^\mu(\tilde{\sigma}) + \alpha(\tilde{\sigma}) \frac{d}{d\tilde{\sigma}}x^\mu(\tilde{\sigma}) + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} \frac{dx^\kappa}{d\tilde{\sigma}} \frac{dx^\lambda}{d\tilde{\sigma}} = 0. \quad (5.8)$$

где  $\alpha(\tilde{\sigma})$  может быть любой функцией  $\tilde{\sigma}$ . Форма кривой в координатном пространстве явно не зависит от функции  $\alpha(\tilde{\sigma})$ .

**Упражнение.** Проверьте (5.8a).

Кривые, описанные (5.8), можно охарактеризовать как пространственно-временные траектории частиц, движущихся в гравитационном поле. В самом деле, в каждой точке  $x$  имеется такая система координат, где  $\Gamma$  обращается в нуль, и траектория выпрямляется (система координат лифта, находящегося в свободном падении). В лифте, движущемся с ускорением, траектории выглядят искривленными, и наблюдатель внутри лифта может приписать эту кривизну действию гравитационного поля. Тем самым гравитационное поле отождествляется с полем аффинной связности.



Поскольку мы теперь имеем поле, которое преобразуется по (5.5), можно применить его для удаления нежелательного последнего члена (4.20). Определим *ковариантную производную* ковекторного поля:

$$D_\alpha A_\mu = \partial_\alpha A_\mu - \Gamma^\nu_{\alpha\mu} A_\nu. \quad (5.9)$$

Данная величина  $D_\alpha A_\mu$  хорошо преобразуется в виде тензора:

$$D_\alpha \tilde{A}_\nu(u) = x^\mu{}_{,\nu} x^\beta{}_{,\alpha} D_\beta A_\mu(x). \quad (5.10)$$

Обратите внимание, что с целью сохранения неизменности (4.22) должно выполняться условие

$$D_\alpha A_\mu - D_\mu A_\alpha = \partial_\alpha A_\mu - \partial_\mu A_\alpha, \quad (5.11)$$

Таким же образом можно определить ковариантную производную контравариантного вектора:

$$D_\alpha A^\mu = \partial_\alpha A^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta \quad (5.12)$$

(обратите внимание на отличие от (5.9)!). Теперь нетрудно определить ковариантные производные всех остальных тензоров:

$$\begin{aligned} D_\alpha X^{\mu\nu\dots}_{\kappa\lambda\dots} = & \partial_\alpha X^{\mu\nu\dots}_{\kappa\lambda\dots} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} X^{\beta\nu\dots}_{\kappa\lambda\dots} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} X^{\mu\beta\dots}_{\kappa\lambda\dots} + \dots - \\ & - \Gamma^\beta_{\kappa\alpha} X^{\mu\nu\dots}_{\beta\lambda\dots} - \Gamma^\beta_{\lambda\alpha} X^{\mu\nu\dots}_{\kappa\beta\dots} - \dots \end{aligned} \quad (5.13)$$

Выражения (5.12) и (5.13) также преобразуются в виде тензоров.

Легко также проверить и «правило умножения». Пусть тензор  $Z$  является произведением двух тензоров  $X$  и  $Y$ :

$$Z^{\kappa\lambda\dots}_{\mu\nu\dots}{}^{\pi\rho\dots}_{\alpha\beta\dots} = X^{\kappa\lambda\dots}_{\mu\nu\dots} Y^{\pi\rho\dots}_{\alpha\beta\dots}. \quad (5.14)$$

Тогда получаем (в системе обозначений, где мы временно опускаем индексы):

$$D_\alpha Z = (D_\alpha X)Y + X(D_\alpha Y). \quad (5.15)$$

Кроме того, если суммирование производится по повторным индексам (один нижний и один верхний — назовем это *свертыванием* индексов),

$$(D_\alpha X)_{\mu\beta\cdots}^{\mu\kappa\cdots} = D_\alpha(X_{\mu\beta\cdots}^{\mu\kappa\cdots}), \quad (5.16)$$

скобки в (5.16) необязательны. Можно легко доказать, что (5.15) и (5.16) справедливы в любой точке  $x$ , если выбрать такую систему отсчета, где  $\Gamma$  обращается в нуль в этой точке  $x$ .

Ковариантная производная скалярного поля  $\phi$  является обычной производной:

$$D_\alpha \phi = \partial_\alpha \phi, \quad (5.17)$$

но этому не удовлетворяет функция плотности (см. (4.24)):

$$D_\alpha \omega = \partial_\alpha \omega - \Gamma^\mu_{\mu\alpha} \omega. \quad (5.18)$$

$D_\alpha \omega$  является произведением плотности и ковектора. Это выводится из (4.24) и равенства

$$\varepsilon^{\alpha\mu\nu\lambda} \varepsilon_{\beta\mu\nu\lambda} = 6\delta^\alpha_\beta. \quad (5.19)$$

Таким образом, мы обнаружили, что если ввести в пространство или в пространство–время поле  $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ , которое преобразуется в соответствии с уравнением (5.5), называемым уравнением «аффинной связности», то можно найти: 1) геодезические кривые, — траектории частиц в свободном падении и 2) ковариантную производную любого векторного и тензорного поля. Однако до сих пор мы *не* имеем: i) точного определения *расстояния* между точками и ii) способа связи между ковекторами и *контравекторами*. Суммирование по повторным индексам имеет смысл лишь в том случае, если один из них — верхний, а другой — нижний.

## Кривизна

Вновь обратимся к кривой  $S$  на рис. 2, но замкнем ее (рис. 3). Возьмем контравекторное поле  $\xi^\mu(x)$  со свойством

$$\dot{\xi}^\nu(x(\tau)) = 0. \quad (5.20)$$

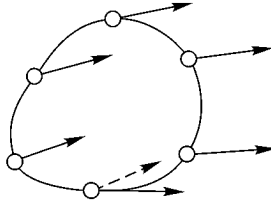


Рис. 3. Параллельное смещение вдоль замкнутой кривой в искривленном пространстве.

Пусть наша кривая очень мала<sup>7</sup>, настолько, что можно записать

$$\xi^\nu(x) = \xi^\nu + \xi_{,\mu}^\nu x^\mu + O(x^2). \quad (5.21)$$

Вернется ли этот контравектор к своему исходному значению, если проследить за ним, сделав полный оборот вдоль окружности кривой? Согласно (5.3), при условии исчезновения поля связности  $\Gamma = 0$ , ответ, безусловно, будет положительным. Однако в случае присутствия сильного гравитационного поля может возникнуть отклонение  $\delta\xi^\nu$ . Находим

$$\begin{aligned} \oint d\tau \dot{\xi} &= 0; \\ \delta\xi^\nu &= \oint d\tau \frac{d}{d\tau} \xi^\nu(x(\tau)) = - \oint \Gamma^\nu_{\kappa\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \xi^\kappa(x(\tau)) d\tau = \\ &= - \oint d\tau (\Gamma^\nu_{\kappa\lambda} + \Gamma^\nu_{\kappa\lambda, \alpha} x^\alpha) \frac{dx^\lambda}{d\tau} (\xi^\kappa + \xi_{,\mu}^\kappa x^\mu). \end{aligned} \quad (5.22)$$

где нами принято, что функция  $x(\tau)$  настолько мала, что слагаемыми порядка  $O(x^2)$  можно пренебречь. Поскольку мы имеем замкнутую кривую, то

$$\oint d\tau \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad \text{и} \quad D_\mu \xi^\kappa \approx 0 \longrightarrow \xi_{,\mu}^\kappa \approx -\Gamma^\kappa_{\mu\beta} \xi^\beta, \quad (5.23)$$

<sup>7</sup>В аффинном пространстве, не имеющем метрики, слова «малый» и «большой» не имеют смысла. Однако поскольку требуется дифференцируемость, то предел «малого размера» хорошо определен. Поэтому точнее будет сказать, что данная кривая *инфинитезимально* мала. (infinitesimal (англ.) — бесконечно малый. — Прим. перев.)

Отсюда (5.22) приобретает вид

$$\delta\xi^\nu = \frac{1}{2} \left( \oint x^\alpha \frac{dx^\lambda}{d\tau} d\tau \right) R^\nu{}_{\kappa\lambda\alpha} \xi^\kappa + \text{высшие порядки по } x. \quad (5.24)$$

Поскольку

$$\oint x^\alpha \frac{dx^\lambda}{d\tau} d\tau + \oint x^\lambda \frac{dx^\alpha}{d\tau} d\tau = 0, \quad (5.25)$$

то существенна лишь антисимметричная часть  $R$ . Примем

$$R^\nu{}_{\kappa\lambda\alpha} = -R^\nu{}_{\kappa\alpha\lambda} \quad (5.26)$$

(коэффициент  $\frac{1}{2}$  в (5.24) выбран для удобства). Отсюда мы находим

$$R^\nu{}_{\kappa\lambda\alpha} = \partial_\lambda \Gamma^\nu{}_{\kappa\alpha} + \Gamma^\nu{}_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\kappa\alpha} - \Gamma^\nu{}_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\kappa\lambda}. \quad (5.27)$$

Мы утверждаем, что эта величина должна преобразовываться как истинный тензор. Это может вызвать недоумение, поскольку сама по себе величина  $\Gamma$  не является тензором, а вместо ковариантных производных присутствуют лишь обычные производные  $\partial_\lambda$ . Приведем ход рассуждений. В (5.24) левая часть,  $\delta\xi^\nu$ , является истинным контравектором, кроме того, величина

$$S^{\alpha\lambda} = \oint x^\alpha \frac{dx^\lambda}{d\tau} d\tau \quad (5.28)$$

преобразуется как тензор. Теперь можно выбирать  $\xi^\kappa$  по нашему усмотрению, произвольными можно также брать элементы поверхности  $S^{\alpha\lambda}$ . Если при этом привлечь теорему частного (расширенную с учетом случая антисимметричных тензоров), можно сделать вывод, что в данном случае совокупность коэффициентов  $R^\nu{}_{\kappa\lambda\alpha}$  должна также преобразовываться как истинный тензор. Можно, конечно, удостовериться явно, используя (5.5), что комбинация (5.27) действительно преобразуется как тензор и что неоднородные члены взаимноисключаются.

Величина  $R^\nu{}_{\kappa\lambda\alpha}$  позволяет нам оценить степень искривленности данного пространства и называется *римановым тензором кривизны*. Из (5.27) выводим

$$R^\nu{}_{\kappa\lambda\alpha} + R^\nu{}_{\lambda\alpha\kappa} + R^\nu{}_{\alpha\kappa\lambda} = 0 \quad (5.29)$$

и

$$D_\alpha R^\nu_{\kappa\beta\gamma} + D_\beta R^\nu_{\kappa\gamma\alpha} + D_\gamma R^\nu_{\kappa\alpha\beta} = 0. \quad (5.30)$$

Последнее уравнение, называемое тождеством Бьянки, легче всего вывести, если учесть, что для каждой точки  $x$  существует система координат, где в этой точке  $x$  величина  $\Gamma^\nu_{\kappa\alpha} = 0$  (хотя ее производную  $\partial\Gamma$  невозможно обратить в нуль). Теперь остается только учесть те члены (5.30), которые линейны в  $\partial\Gamma$ .

В случае с частными производными  $\partial_\mu$  имеется возможность перестановки множителей:  $\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu$ . На ковариантные производные такая возможность не распространяется. Для любого ковекторного поля  $A_\mu(x)$  мы определяем:

$$D_\mu D_\nu A_\alpha - D_\nu D_\mu A_\alpha = -R^\lambda_{\alpha\mu\nu} A_\lambda, \quad (5.31)$$

а для любого контравекторного поля  $A^\alpha$

$$D_\mu D_\nu A^\alpha - D_\nu D_\mu A^\alpha = R^\alpha_{\lambda\mu\nu} A^\lambda, \quad (5.32)$$

в чем можно удостовериться, обратившись непосредственно к определению  $R^\lambda_{\alpha\mu\nu}$ . Эти уравнения также ясно показывают, почему риманова кривизна преобразуется как истинный тензор; (5.31) и (5.32) справедливы для всех  $A_\lambda$  и  $A^\lambda$ , а их левые части преобразуются как тензоры.

Очень важной является теорема, в соответствии с которой тензор Римана *полностью* задает степень кривизны пространства или пространства–времени, если это пространство–время односвязно. Чтобы доказать это, допустим, что  $R^\nu_{\kappa\lambda\alpha}$  везде равно нулю. Рассмотрим затем точку  $x$  и систему координат при условии равенства  $\Gamma^\nu_{\kappa\lambda}(x)$  нулю. Тогда, исходя из того факта, что (5.27) обращается в нуль, мы делаем вывод, что в окрестности этой точки можно определить величину  $X^\nu_\kappa$  по уравнению

$$\Gamma^\nu_{\kappa\alpha}(x') = \partial_\alpha X^\nu_\kappa(x') + O(x - x')^2. \quad (5.33)$$

Вследствие симметрии (5.6) мы имеем  $\partial_\alpha X^\nu_\kappa = \partial_\kappa X^\nu_\alpha$ , а это в свою очередь указывает на существование величины  $y^\nu$ , при

которой

$$\Gamma^\nu_{\kappa\alpha}(x') = -\partial_\kappa \partial_\alpha y^\nu + O(x - x')^2. \quad (5.34)$$

Если взять  $y^\nu$  в качестве новой системы координат около точки  $x$ , то в соответствии с (5.5) аффинная связность в окрестности этой точки обратится в нуль. При таком подходе можно сконструировать особую систему координат для полного пространства, такую, где связность во всем пространстве сводится к нулю (при условии его односвязности). Итак, мы видим, что если кривизна риманова пространства обращается в нуль, можно сконструировать такую систему координат, в которой все геодезические являются прямыми линиями, а все ковариантные производные — обычными производными. При этом получится плоское пространство.

Предупреждение: в литературе по данному вопросу нет полного согласия относительно знаков для  $d\sigma^2$ ,  $\Gamma^\nu_{\kappa\lambda}$ ,  $R^\nu_{\kappa\lambda\alpha}$ ,  $T_{\mu\nu}$  и поля  $g_{\mu\nu}$ , описанного в следующей главе. Не стоит по этой причине отказываться от изучения других источников. Только придется часто корректировать знаки и коэффициенты.

## 6. Метрический тензор

В пространстве с аффинной связностью имеются геодезические, но нет часов и линеек. Их-то мы и введем сейчас. В третьей главе мы видели, что в плоском пространстве имеется матрица

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

поэтому для лоренц-инвариантного расстояния  $\sigma$  можно записать:

$$\sigma^2 = -t^2 + \vec{x}^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (6.2)$$

(время будет нулевой координатой, что можно считать правилом, если все координаты выбраны с действительными числами). Для частицы, движущейся вдоль времениподобной кривой

$C = \{x(\sigma)\}$ , возрастание собственного времени  $T$  представлено в виде

$$T = \int_C dT \quad \text{при} \quad dT^2 = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \cdot d\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (6.3)$$

Данное выражение не зависит от выбора координат. Мы видим, что  $g_{\mu\nu}$  является ковариантным тензором с двумя нижними индексами, при перестановке которых он остается симметричным. Для криволинейных координат получаем

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}(x). \quad (6.4)$$

Полученная величина описывает поле метрического тензора. Лишь вдали от звезд и планет мы можем найти такие координаты, при которых это поле в каждой точке совпадет с (6.1). В реальности оно будет несколько отклоняться от этого уравнения, но, как правило, не слишком. В частности мы утверждаем, что при диагонализации будет всегда получаться три положительных и одно отрицательное собственное значение. Можно показать, что это свойство не изменяется при преобразовании координат. Величина, обратная  $g_{\mu\nu}$ , которую для простоты мы будем называть  $g^{\mu\nu}$ , однозначно определяется посредством следующего выражения:

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha. \quad (6.5)$$

Такая обратная величина также симметрична при перестановке индексов.

Получается, что введение такого двухиндексного котензорного поля придает пространству–времени *больше структуры*, чем трехиндексная аффинная связность из предыдущей главы. Прежде всего, тензор  $g_{\mu\nu}$  *предусматривает один частный вариант для поля аффинной связности*. Можно просто принять, что ковариантная производная  $g_{\mu\nu}$  обращается в нуль:

$$D_\alpha g_{\mu\nu} = 0. \quad (6.6)$$

Такой вариант действительно был бы естественным для риндлерова пространства, поскольку внутри лифта, находящегося в свободном падении, ощущается плоское пространство–время, т. е. и  $g_{\mu\nu}$  постоянно, и  $\Gamma = 0$ . Из (6.6) мы видим, что

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} g_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} g_{\mu\lambda}. \quad (6.7)$$

Запишем:

$$\Gamma_{\lambda\alpha\mu} = g_{\lambda\nu} \Gamma^\nu_{\alpha\mu}, \quad (6.8)$$

$$\Gamma_{\lambda\alpha\mu} = \Gamma_{\lambda\mu\alpha}. \quad (6.9)$$

Тогда по (6.7) находим:

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) = \Gamma_{\lambda\mu\nu}, \quad (6.10)$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = g^{\lambda\alpha} \Gamma_{\alpha\mu\nu}. \quad (6.11)$$

В таком виде эти уравнения выражают *определение* поля аффинной связности. Действительно, (6.6) вытекает из (6.10), (6.11). В литературе для обозначения  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  используется также термин «символ Кристоффеля»,  $\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \kappa\lambda \end{smallmatrix} \right\}$ . Мы применяем здесь правило Хокинга и Эллиса. Поскольку

$$D_\alpha \delta_\mu^\lambda = \partial_\alpha \delta_\mu^\lambda = 0, \quad (6.12)$$

то для величины, обратной  $g_{\mu\nu}$  мы также имеем

$$D_\alpha g^{\mu\nu} = 0, \quad (6.13)$$

что вытекает из (6.5) в комбинации с правилом умножения (5.15).

Однако метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  не только дает нам поле аффинной связности, но и позволяет нам заменять нижние индексы верхними и наоборот. Для каждого ковектора  $A_\mu(x)$  находим контравектор  $A^\nu(x)$ :

$$A_\mu(x) = g_{\mu\nu}(x) A^\nu(x); \quad A^\nu = g^{\nu\mu} A_\mu. \quad (6.14)$$



При совместном применении правила умножения (5.15) и уравнений (6.6) и (6.13) получаем важный результат:

$$D_\alpha A^\mu = g^{\mu\nu} D_\alpha A_\nu, \quad D_\alpha A_\mu = g_{\mu\nu} D_\alpha A^\nu. \quad (6.15)$$

Отсюда следует, что перемещение индексов в верхнюю или нижнюю позиции посредством умножения на  $g_{\mu\nu}$  или  $g^{\mu\nu}$  можно производить до или после ковариантного дифференцирования.

Метрический тензор также порождает функцию плотности  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}, \quad (6.16)$$

которая преобразуется в соответствии с (4.25). Это проще понять, если принять во внимание, что в системе координат в окрестности некой точки  $x$

$$g_{\mu\nu}(x) = \text{diag}(-a, b, c, d), \quad (6.17)$$

элементарный объем задается  $\sqrt{abcd}$ .

Пространство, описанное в предыдущей главе, называется «аффинным пространством». В этой главе мы имеем дело с подклассом аффинных пространств, называемым метрическим пространством или римановым пространством; можно также назвать его римановым пространством-временем. На присутствие временной координаты указывает одно отрицательное собственное значение  $g_{\mu\nu}$ .

## Геодезические

Рассмотрим две произвольные точки  $X$  и  $Y$  в нашем метрическом пространстве. Для каждой кривой  $C = \{x^\mu(\sigma)\}$ , имеющей  $X$  и  $Y$  в качестве конечных точек

$$x^\mu(0) = X^\mu; \quad x^\mu(1) = Y^\mu, \quad (6.18)$$

мы рассматриваем интеграл

$$\ell = \int_C^{\sigma=1} ds, \quad (6.19)$$

либо при

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (6.20)$$

если кривая пространственноподобна, либо

$$ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (6.21)$$

если кривая времениподобна. Для простоты пусть кривая будет пространственноподобной (6.20). Для времениподобной кривой процедура совершенно аналогична.

Рассмотрим теперь бесконечно малое *смещение* кривой, сохраняя, однако,  $X$  и  $Y$  на своих местах:

$$\begin{aligned} x'^\mu(\sigma) &= x^\mu(\sigma) + \eta^\mu(\sigma), \quad \eta - \text{бесконечно мало,} \\ \eta^\mu(0) &= \eta^\mu(1) = 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Каково же тогда бесконечно малое изменение  $\ell$ ?

$$\begin{aligned} \delta\ell &= \int \delta ds; \\ 2ds \delta ds &= (\delta g_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\nu} dx^\mu d\eta^\nu + O(d\eta^2) = \\ &= (\partial_\alpha g_{\mu\nu}) \eta^\alpha dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\nu} dx^\mu \frac{d\eta^\nu}{d\sigma} d\sigma. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Вводим ограничение для *исходной* кривой:

$$\frac{ds}{d\sigma} = 1, \quad (6.24)$$

что всегда можно реализовать, если выбрать соответствующую параметризацию кривой. (6.23) при этом приобретает вид:

$$\delta\ell = \int d\sigma \left( \frac{1}{2} \eta^\alpha g_{\mu\nu,\alpha} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} + g_{\mu\alpha} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{d\eta^\alpha}{d\sigma} \right). \quad (6.25)$$

Проинтегрируем второе слагаемое по частям. Используя

$$\frac{d}{d\sigma} g_{\mu\alpha} = g_{\mu\alpha,\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\sigma}, \quad (6.26)$$

получаем

$$\begin{aligned} \delta \ell = \int d\sigma \left( \eta^\alpha \left( \frac{1}{2} g_{\mu\nu, \alpha} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} - g_{\mu\alpha, \lambda} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\mu}{d\sigma} - g_{\mu\alpha} \frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{d}{d\sigma} \left( g_{\mu\alpha} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \eta^\alpha \right) \right) = - \int d\sigma \eta^\alpha(\sigma) g_{\mu\alpha} \left( \frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^\mu{}_{\kappa\lambda} \frac{dx^\kappa}{d\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \right). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Интеграл от полной производной обращается в нуль, поскольку нами задано условие, по которому  $\eta$  в конечных точках обращается в нуль, (6.22). При перестановке индексов  $\lambda$  и  $\mu$  в первой строке мы использовали симметрию, а для  $\Gamma$  — (6.10) и (6.11). Теперь, строго следуя стандартной процедуре математической физики, мы имеем все основания утверждать, что  $\delta \ell$  обращается в нуль при любом выборе бесконечно малой функции, подчиняющейся граничному условию. Мы в точности получили уравнение для геодезических, (5.8). Если бы мы не наложили ограничение (6.24), у нас бы получилось (5.8a).

Геодезические подразделяются на *пространственноподобные* (6.20) и *времениподобные* (6.21). Можно показать, что для времениподобных геодезических  $\ell$  является относительным *максимумом*. У пространственноподобных геодезических он находится на седловой точке. Лишь в пространствах с положительным определенным  $g_{\mu\nu}$  длина пути  $\ell$  в случае с геодезическими является минимумом.

## Кривизна

Вновь обратившись к римановому тензору кривизны, определение которого дано в предыдущей главе, мы можем теперь поднять и опустить все его индексы:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} R^\lambda{}_{\nu\alpha\beta}, \quad (6.28)$$

и проверить, существуют ли еще какие-либо симметрии, кроме описанных уравнениями (5.26), (5.29) и (5.30). Записав полные выражения для кривизны в терминах  $g_{\mu\nu}$ , находим:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (6.29)$$

Свертывая тензор по двум индексам, получаем *тензор Риччи*:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}. \quad (6.30)$$

Справедливо

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (6.31)$$

Можно продолжить свертку и получить *скаляр Риччи*:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\nu}{}^{\nu}{}_{\mu}. \quad (6.32)$$

Теперь, когда у нас имеется метрический тензор  $g_{\mu\nu}$ , мы можем ввести обобщенную версию правила суммирования: *Если в уравнении имеются повторные нижние индексы, то, применяя метрический тензор  $g^{\mu\nu}$ , один из них следует поднять на верхний уровень, после чего провести суммирование по значениям.* Таким же образом можно суммировать и по повторным верхним индексам:

$$A_{\mu}B_{\mu} \equiv A_{\mu}B^{\mu} \equiv A^{\mu}B_{\mu} \equiv A_{\mu}B_{\nu}g^{\mu\nu}. \quad (6.33)$$

Из тождества Бьянки (5.30) для тензора Риччи вытекает:

$$D_{\mu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}D_{\nu}R = 0. \quad (6.34)$$

Определим *тензор Эйнштейна*  $G_{\mu\nu}(x)$ :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad D_{\mu}G_{\mu\nu} = 0. \quad (6.35)$$

Формализм, развитый в этой главе, может быть применен для описания любого типа искривленного пространства или пространства–времени. Можно выбрать любую метрику  $g_{\mu\nu}$  (с учетом некоторых ограничений относительно ее собственных значений). Нами получены траектории — геодезические — частиц, движущихся в гравитационных полях. Однако пока что мы не обсуждали уравнений, определяющих конфигурации гравитационных полей при условии наличия данных о местоположении звезд и планет в пространстве и времени. Об этом речь пойдет в следующих главах.

## 7. Теория возмущений и закон тяготения Эйнштейна

Мы получим закон тяготения, если сформулируем способ вычисления тензора кривизны  $R^\mu_{\alpha\beta\gamma}$  для заданного распределения материи в пространстве–времени. Чтобы вывести такое правило, воспользуемся тем известным фактом, что в нерелятивистском приближении справедлив ньютоновский закон всемирного тяготения. Это будет справедливо в случае настолько малой области пространства–времени, что в ней можно определить систему координат, которую с достаточной точностью можно считать плоской. Гравитационные поля будут достаточно слабыми, и мы не только сможем с достаточной ясностью найти возможные способы описания законов поведения вещества на этом участке, но и узнаем, как эти *слабые* гравитационные поля зависят от распределения в них вещества. Можно записать для нашей малой области пространства–времени:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (7.1)$$

где

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

а  $h_{\mu\nu}$  — малое возмущение. Находим (см. 6.10)):

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}); \quad (7.3)$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^\mu_{\alpha} h^{\alpha\nu} - \dots \quad (7.4)$$

В последнем выражении индексы поднимались и опускались с помощью  $\eta^{\mu\nu}$  и  $\eta_{\mu\nu}$ . Такое правило суммирования применяется нами лишь для выражений, включающих  $h_{\mu\nu}$ . Специально обращаем внимание, что индексы в  $\eta_{\mu\nu}$  не требуют перевода в верхнее или нижнее положение.

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\lambda} \Gamma_{\lambda\mu\nu} + O(h^2). \quad (7.5)$$

Тензор кривизны будет иметь вид

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} + O(h^2), \quad (7.6)$$

а тензор Риччи:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\nu\alpha} + O(h^2) = \\ &= \frac{1}{2}(-\partial^2 h_{\mu\nu} + \partial_\alpha \partial_\mu h^\alpha{}_\nu + \partial_\alpha \partial_\nu h^\alpha{}_\mu - \partial_\mu \partial_\nu h^\alpha{}_\alpha) + O(h^2). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Скаляр Риччи имеет вид

$$R = -\partial^2 h_{\mu\mu} + \partial_\mu \partial_\nu h_{\mu\nu} + O(h^2). \quad (7.8)$$

Для медленно движущейся частицы

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \approx (1, 0, 0, 0). \quad (7.9)$$

Отсюда, уравнение для геодезических (5.8) приобретает вид

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x^i(\tau) = -\Gamma^i{}_{00}. \quad (7.10)$$

Очевидно,  $\Gamma^i = -\Gamma^i{}_{00}$  можно отождествить с гравитационным полем. В случае стационарной системы можно пренебречь производными по времени  $\partial_0$ . Следовательно, уравнение гравитационного поля (7.3) приводится к виду

$$\Gamma_i = -\Gamma_{i00} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00}, \quad (7.11)$$

и теперь можно считать  $-\frac{1}{2}h_{00}$  потенциалом гравитационного поля. Это подтверждает догадку, выраженную в главе 3, о том, что скорость местных часов, равную  $\rho = \sqrt{-g_{00}} \approx 1 - \frac{1}{2}h_{00}$ , можно отождествить с гравитационным потенциалом, (3.18) (естественно, без аддитивной постоянной).

Пусть теперь  $T_{\mu\nu}$  — тензор напряженности энергии–импульса;  $T_{44} = -T_{00}$  — плотность массы–энергии, а поскольку в нашей системе координат разницей между ковариантной производной и обычными производными можно пренебречь, то уравнение (1.26) для сохранения энергии–импульса принимает вид

$$D_{\mu}T_{\mu\nu} = 0. \quad (7.12)$$

В других системах координат это уравнение отличается от обычного закона сохранения энергии–импульса, поскольку гравитационные поля могут уносить энергию и импульс; величина  $T_{\mu\nu}$ , с которой мы имеем дело сейчас, будет означать всего лишь вклад звезд и планет, а не их гравитационные поля. Теперь из ньютоновых уравнений для медленно движущегося вещества следует:

$$\begin{aligned} \Gamma^i &= -\Gamma^i_{00} = -\partial_i V(x) = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}; \\ \partial_i \Gamma_i &= -4\pi G_N T_{44} = 4\pi G_N T_{00}; \\ \bar{\partial}^2 h_{00} &= 8\pi G_N T_{00}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Запишем эти уравнения в таком виде, чтобы они стали инвариантными при преобразовании координат общего вида. В теории относительности это очень важный момент. Вместо условия зависимости составляющих  $T_{\mu\nu}$  от определенных частных производных поля связности  $\Gamma$  требуется получить зависимость между ковариантными тензорами. Явным ковариантным тензором является плотность энергии–импульса вещества,  $T_{\mu\nu}$ , удовлетворяющая уравнению (7.12). Единственными ковариантными тензорами, которые можно получить из (7.13), являются тензор Риччи,  $R_{\mu\nu}$ , и скаляр  $R$ . Два независимых компонента, которые при пространственноподобном вращении являются скалярами, представлены формулами

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\bar{\partial}^2 h_{00}; \quad (7.14)$$

$$R = \partial_i \partial_j h_{ij} + \bar{\partial}^2 (h_{00} - h_{ii}). \quad (7.15)$$

В таком виде эти уравнения позволяют предположить с высокой степенью достоверности наличие зависимости между тензорами  $T_{\mu\nu}$  и  $R_{\mu\nu}$ , однако здесь следует проявить осторожность. Уравнение (7.15) использовать нельзя, поскольку априори неясно, можно ли пренебречь пространственноподобными компонентами  $h_{ij}$  (нельзя). Самым общим тензорным соотношением такого типа, которого можно ожидать, может быть

$$R_{\mu\nu} = AT_{\mu\nu} + Bg_{\mu\nu}T_{\alpha}^{\alpha}, \quad (7.16)$$

где  $A$  и  $B$  — константы, которые подлежат определению. При этом след тензора энергии-импульса в нерелятивистском приближении описывается как

$$T_{\alpha}^{\alpha} = -T_{00} + T_{ii}, \quad (7.17)$$

поэтому с целью сравнения с (7.13) компоненту 00 можно записать в виде

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\bar{\partial}^2 h_{00} = (A + B)T_{00} - BT_{ii}, \quad (7.18)$$

Важно учесть, что в ньютоновском пределе член  $T_{ii}$  (давление  $p$ ) обращается в нуль, и не только потому, что давление обычного (нерелятивистского) вещества очень мало, но также и потому, что он, являясь характеристикой источника, усредняется до нуля. Для стационарного случая мы имеем

$$0 = \partial_{\mu}T_{\mu i} = \partial_j T_{ji}, \quad (7.19)$$

$$\frac{d}{dx^1} \int T_{11} dx^2 dx^3 = - \int dx^2 dx^3 (\partial_2 T_{21} + \partial_3 T_{31}) = 0, \quad (7.20)$$

и, следовательно, если наш источник окружен вакуумом, мы должны иметь

$$\int T_{11} dx^2 dx^3 = 0 \longrightarrow \int d^3 \vec{x} T_{11} = 0, \quad (7.21)$$

и таким же образом  $\int d^3 \vec{x} T_{22} = \int d^3 \vec{x} T_{33} = 0$ .



Уравнения (7.18) и (7.13) дают нам неутешительно мало:

$$A + B = -4\pi G_N. \quad (7.22)$$

К счастью, это не вся информация, которой мы располагаем. След (7.16) равен  $R = (A + 4B)T_\alpha^\alpha$ . Величина  $G_{\mu\nu}$  в уравнении (6.35) с учетом этого будет иметь вид

$$G_{\mu\nu} = AT_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{2}A + B\right)T_\alpha^\alpha g_{\mu\nu}, \quad (7.23)$$

а поскольку в нашем распоряжении имеется и тождество Бьянки (6.35), и закон сохранения энергии (7.12), получаем (с помощью видоизмененного правила суммирования, (6.33))

$$D_\mu G_{\mu\nu} = 0; \quad D_\mu T_{\mu\nu} = 0; \quad \text{следовательно, } \left(\frac{1}{2}A + B\right)\partial_\nu(T_\alpha^\alpha) = 0. \quad (7.24)$$

Теперь в следе тензора энергии-импульса  $T_\alpha^\alpha$  доминирует  $-T_{00}$ . В общем и целом его нельзя считать не зависящим от пространства и времени. Поэтому наша теория была бы несостоятельной без учета (7.22):

$$B = -\frac{1}{2}A; \quad A = -8\pi G_N. \quad (7.25)$$

Мы пришли к выводу, что единственным тензорным уравнением, согласующимся с уравнением Ньютона для локально плоской системы координат, является уравнение

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (7.26)$$

где знак тензора энергии-импульса определяется уравнением

$$T_{44} = -T_{00} = T_0^0 = \rho \quad (7.27)$$

( $\rho$  — плотность энергии). Это и есть знаменитый закон тяготения Эйнштейна. Из принципа эквивалентности следует, что если этот закон справедлив в локально плоской системе координат, то он должен оставаться справедливым и в любой другой системе координат.

Поскольку и левая, и правая части (7.26) симметричны при перестановке индексов, то мы имеем 10 уравнений. Мы знаем, однако, что обе части подчиняются закону сохранения

$$D_\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (7.28)$$

Таким образом, 4 уравнения выполняются автоматически. Остается 6 нетривиальных уравнений. Они должны определять 10 компонент метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ , поэтому можно ожидать остаточной свободы 4 уравнений. Действительно, координатные преобразования пока не определены, а всего в наличии 4 координаты. При таком способе расчета степеней свободы возникает искушение признать, что в самом деле гравитационные уравнения Эйнштейна однозначно определяют метрику пространства–времени (за исключением координатных преобразований) и могут заменить закон всемирного тяготения Ньютона. Однако следует проявить чрезвычайную осторожность с аргументами такого рода. В следующей главе мы показываем связь этих уравнений с принципом наименьшего действия — так легче убедиться во внутренней непротиворечивости данных уравнений. Фундаментальные трудности пока еще полностью не разрешены, особенно относительно возможного появления сингулярностей в решениях.

Обратите внимание, что из (7.26) следует

$$8\pi G_N T_\mu^\mu = R; \quad R_{\mu\nu} = -8\pi G_N (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_\alpha^\alpha g_{\mu\nu}), \quad (7.29)$$

отсюда, в тех частях пространства–времени, где отсутствует вещество, мы имеем

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (7.30)$$

однако полный тензор Римана  $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$  не сведется к нулю.

*Тензор Вейля* определяют вычитанием определенной части из  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  таким образом, чтобы свертки по любой паре индексов давали нуль:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2}[g_{\alpha\delta}R_{\gamma\beta} + g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} + \frac{1}{3}Rg_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - (\gamma \iff \delta)]. \quad (7.31)$$

В этой конструкции  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  обладает такими же свойствами симметрии, что и (5.26), (5.29) и (6.29), а, кроме того,

$$C^{\mu}{}_{\beta\mu\gamma} = 0. \quad (7.32)$$

Если внимательно сосчитать число независимых компонент, то можно установить, что в заданной точке  $x$   $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  имеет 20 степеней свободы, а  $R_{\mu\nu}$  и  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  — каждый по 10.

### Космологическая постоянная

Мы убедились, что уравнение (7.26) можно вывести однозначно: если мы утверждаем, что справедливы и правило эквивалентности, и ньютонов предел, то в (7.26) нет места для поправочных членов. Однако, если позволить незначительное отклонение от закона Ньютона, то можно допустить введение еще одного члена. Помимо (7.28) мы также имеем

$$D_{\mu}g_{\mu\nu} = 0, \quad (7.33)$$

поэтому можно заменить (7.26) уравнением

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (7.34)$$

где  $\Lambda$  — постоянная вселенной с очень незначительным численным значением, называемая *космологической постоянной*. Этот дополнительный член можно считать «перенормировкой»:

$$\delta T_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}, \quad (7.35)$$

В нем учитывается часть остаточной энергии и давления в вакууме. Впервые Эйнштейн ввел этот член, рассчитывая на получение интересных решений, однако позднее он «сожалел о содеянном». Даже если и существует остаточное гравитационное поле, излучаемое вакуумом, оно должно быть чрезвычайно слабым. Длительное время считалось, что  $\Lambda = 0$ . Лишь недавно были представлены веские аргументы в пользу наличия очень небольшого положительного значения  $\Lambda$ . Если признать введение данного члена обоснованным, остается

загадкой, почему он должен быть близок к нулю. Из современных теорий поля трудно понять, почему в них плотность энергии-импульса в вакууме (который представляет собой состояние с наименьшим содержанием энергии) сводится к нулю. Поэтому, невзирая на сожаления Эйнштейна, мы не можем однозначно сказать, что  $\Lambda = 0$ .

## 8. Принцип наименьшего действия

Мы видели, что траектория частицы в пространстве-времени в присутствии гравитационного поля определяется уравнением для геодезических (5.8). Ее можно найти, постулировав условие, по которому величина

$$\ell = \int ds \quad \text{при} \quad (ds)^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (8.1)$$

при наличии бесконечно малых смещений  $x^\mu(\tau) \rightarrow x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$  стационарна:

$$\delta\ell = 0. \quad (8.2)$$

Это пример принципа наименьшего действия, где  $\ell$  — наименьшее действие, которое осуществляет частица при движении по своей орбите. Преимущество этого закона действия — в его простоте. К тому же, выражения для него имеют явно ковариантную форму, и мы сразу же видим, что их результаты будут одинаковыми для любой системы координат. Кроме того, при использовании этого принципа весьма вероятно *существование* решений (8.2), особенно ограниченных решений. Например, для большинства времениподобных кривых  $\ell$  является абсолютным максимумом.

Пусть

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \det(g_{\mu\nu}). \quad (8.3)$$

Рассмотрим в некотором объеме  $V$  четырехмерного пространства так называемое действие Эйнштейна – Гильберта:

$$I = \int_V \sqrt{-g} R d^4x, \quad (8.4)$$

где  $R$  — скаляр Риччи (6.32). В главах 4 и 6 мы видели, что в присутствии множителя  $\sqrt{-g}$  интеграл (8.4) при координатных преобразованиях инвариантен, однако, если мы сохраним  $V$  конечным, то, несомненно, граница должна остаться без изменений. Рассмотрим теперь бесконечно малое изменение метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ :

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (8.5)$$

так, чтобы  $\delta g_{\mu\nu}$  и ее первые производные на границе с  $V$  обратились в нуль. Изменение тензора Риччи  $R_{\mu\nu}$  до низшего порядка  $\delta g_{\mu\nu}$  задается уравнением

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(-D^2 \delta g_{\mu\nu} + D_\alpha D_\mu \delta g_\nu^\alpha + \\ + D_\alpha D_\nu \delta g_\mu^\alpha - D_\mu D_\nu \delta g_\alpha^\alpha), \end{aligned} \quad (8.6)$$

где нами принято, что и  $\delta g_{\mu\nu}$ , и  $R_{\mu\nu}$ , и  $\tilde{R}_{\mu\nu}$  изменяются как истинные тензоры, с тем, чтобы все те коэффициенты  $\Gamma$ , которые получаются в результате разложения  $R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$  (см. (5.27)) сочтались бы с производными  $\delta g_{\mu\nu}$  таким образом, чтобы образовать ковариантные производные, подобные  $D_\alpha D_\beta \delta g_{\mu\nu}$ . Если удастся это реализовать, то (8.6) легко вывести, выбрав систему координат, где в заданной точке  $x$  аффинная связность  $\Gamma$  обращается в нуль.

**Упражнение.** Выведите (8.6).

Кроме того, мы имеем

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \delta g^{\mu\nu}. \quad (8.7)$$

Отсюда, учитывая, что  $\tilde{R} = \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu}$ , получаем

$$\tilde{R} = R - R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + (D_\mu D_\nu \delta g^{\mu\nu} - D^2 \delta g_\alpha^\alpha). \quad (8.8)$$

Наконец

$$\tilde{g} = g(1 + \delta g_\mu^\mu); \quad (8.9)$$

$$\sqrt{-\tilde{g}} = \sqrt{-g}(1 + \frac{1}{2} \delta g_\alpha^\alpha). \quad (8.10)$$

Таким образом для изменения интеграла  $I$  вследствие изменения (8.5) находим

$$\begin{aligned} \tilde{I} = I + \int_V \sqrt{-g} (-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} + \\ + \int_V \sqrt{-g} (D_\mu D_\nu - g_{\mu\nu} D^2) \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Однако

$$\sqrt{-g} D_\mu X^\mu = \partial_\mu (\sqrt{-g} X^\mu), \quad (8.12)$$

а, следовательно, вторая половина в (8.11) является интегралом чистой производной, а поскольку мы считаем, что  $\delta g_{\mu\nu}$  (и ее производные) на границе обращается в нуль, то и вторая половина (8.11) обращается в нуль. Таким образом, находим

$$\delta I = - \int_V \sqrt{-g} G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (8.13)$$

где  $G_{\mu\nu}$  определена в (6.35). Обратите внимание, что в этих производных мы использовали как нижние, так и верхние индексы. Лишь в (8.12) имеет значение, что  $X^\mu$  является контравектором, поскольку в целях возможности проведения интегрирования по частям мы настаиваем на применении обычной, а не ковариантной производной. При этом интегрирование по частям с применением ковариантных производных удается хорошо, если множитель  $\sqrt{-g}$  находится внутри интеграла именно в том положении как показано.

В соответствии с (8.13) эйнштейновы уравнения для вакуума,  $G_{\mu\nu} = 0$ , эквивалентны требованию

$$\delta I = 0 \quad (8.14)$$

для всех плавных изменений  $\delta g_{\mu\nu}(x)$ . В предыдущей главе было высказано предположение о связи между свободой в выборе калибровки координат с одной стороны, и законом сохранения (тождество Бьянки) для  $G_{\mu\nu}$  — с другой. Остановимся на этом

подробнее. Для любой системы, даже если она не подчиняется эйнштейновым уравнениям,  $I$  при бесконечно малых координатных преобразованиях будет инвариантным:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^\mu &= x^\mu + u^\mu(x), \\ \tilde{g}_{\mu\nu}(x) &= \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(\tilde{x}); \\ g_{\alpha\beta}(\tilde{x}) &= g_{\alpha\beta}(x) + u^\lambda \partial_\lambda g_{\alpha\beta}(x) + O(u^2); \\ \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} &= \delta_\mu^\alpha + u^\alpha{}_{,\mu} + O(u^2),\end{aligned}\tag{8.15}$$

т. е.

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} + u^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} u^\alpha{}_{,\mu} + g_{\mu\alpha} u^\alpha{}_{,\nu} + O(u^2).\tag{8.16}$$

Такая комбинация дает только *ковариантные* производные  $u^\alpha$ . И в этом случае причина снова в том, что все остальные тензоры в этом уравнении являются истинными тензорами, и нековариантные производные запрещены. Отсюда находим, что изменение в  $g_{\mu\nu}$  имеет вид

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + D_\mu u_\nu + D_\nu u_\mu.\tag{8.17}$$

При этом  $I$  всегда остается инвариантным

$$\delta I = -2 \int \sqrt{-g} G^{\mu\nu} D_\mu u_\nu = 0\tag{8.18}$$

для любого значения  $u_\nu(x)$ . После интегрирования по частям становится ясно, что уравнение

$$\sqrt{-g} u_\nu D_\mu G^{\mu\nu} = 0\tag{8.19}$$

выполняется автоматически при всех значениях  $u_\nu(x)$ . Поэтому всегда автоматически выполняется и тождество Бьянки  $D_\mu G_{\mu\nu} = 0$ , (6.35).

Принцип действия можно распространить и на случай присутствия материи. Возьмем, например, скалярные поля  $\phi(x)$ .

В обычном плоском пространстве–времени они подчиняются уравнению Клейна–Гордона:

$$(\partial^2 - m^2)\phi = 0. \quad (8.20)$$

Для гравитационного поля их надлежит заменить ковариантным уравнением:

$$(D^2 - m^2)\phi = (g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - m^2)\phi = 0. \quad (8.21)$$

Нетрудно проверить, что это уравнение также получится и при условии

$$\begin{aligned} \delta J &= 0, \\ J &= \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} d^4x \phi (D^2 - m^2)\phi = \\ &= \int \sqrt{-g} d^4x \left( -\frac{1}{2} (D_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \end{aligned} \quad (8.22)$$

для всех бесконечно малых изменений  $\delta\phi$  в  $\phi$ . (Заметим, что (8.21) вытекает из (8.22) при интегрировании по частям, разрешенном для ковариантных производных в присутствии члена  $\sqrt{-g}$ .)

Теперь рассмотрим сумму

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} I + J = \int_V \sqrt{-g} d^4x \left( \frac{R}{16\pi G_N} - \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right), \quad (8.23)$$

и вспомним, что

$$(D_\mu \phi)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (8.24)$$

Тогда вариация  $\phi$  даст обычное уравнение Клейна–Гордона (8.21) для  $\phi$ . Изменение же в  $g_{\mu\nu}$  дает

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_V \sqrt{-g} d^4x \left( -\frac{G^{\mu\nu}}{16\pi G_N} + \frac{1}{2} D^\mu \phi D^\nu \phi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} ((D_\alpha \phi)^2 + m^2 \phi^2) g^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (8.25)$$



Таким образом, мы имеем

$$G^{\mu\nu} = -8\pi G_N T^{\mu\nu}, \quad (8.26)$$

если запишем

$$T_{\mu\nu} = -D_\mu\phi D_\nu\phi + \frac{1}{2}((D_\alpha\phi)^2 + m^2\phi^2)g_{\mu\nu}. \quad (8.27)$$

Теперь, поскольку величина  $J$  при координатных преобразованиях инвариантна, (8.15), она должна подчиняться уравнению непрерывности, также как (8.18), (8.19):

$$D_\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (8.28)$$

В то же время мы имеем уравнение

$$T_{44} = \frac{1}{2}(\vec{D}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}(D_0\phi)^2 = \mathcal{H}(x), \quad (8.29)$$

которое можно назвать уравнением плотности энергии для поля  $\phi$ . Так как компоненты  $\{i0\}$  из (8.28) должны представлять поток энергии, иначе говоря, — плотность импульса, а из этого следует, что данная величина  $T_{\mu\nu}$  должна в точности совпадать с обычной плотностью энергии–импульса для скалярного поля. В заключение скажем, что если выполняется, к тому же, условие обращения (8.25) в нуль при любых бесконечно малых изменениях в  $g_{\mu\nu}$ , то мы получим по-настоящему корректные уравнения Эйнштейна (8.26).

Наконец, в уравнении наименьшего действия найдется место и для космологического члена:

$$S = \int_V \sqrt{-g} \left( \frac{R - 2\Lambda}{16\pi G_N} - \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right). \quad (8.30)$$

Этот пример со скалярным полем  $\phi$  можно сразу же распространить и на другие виды материи, например, другие поля, поля с дополнительными членами, характеризующими взаимодействие (типа  $\lambda\phi^4$ ), электромагнетизм и даже жидкости и

свободные материальные точки. При этом все, что нам для этого потребуется, — это классическое действие  $S$ , которое нами переписано в ковариантной форме:  $S_m = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_m$ , и которое мы дополняем наименьшим действием Эйнштейна – Гильберта:

$$S = \int_V \sqrt{-g} \left( \frac{R - 2\Lambda}{16\pi G_N} + \mathcal{L}_m \right). \quad (8.31)$$

Часто слагаемое  $\Lambda$  будет опускаться. Кроме того, если не будет указано иначе, то для краткости член  $\int d^4x$  будет обозначаться символом интеграла.

## 9. Специальные координаты

Предыдущие главы никак не ограничивали выбор системы координат. Каждый выбор эквивалентен любому другому (при условии однозначного и дифференцируемого соответствия). Инвариантность полностью гарантировалась. Однако, в случае необходимости подробного расчета свойств какого-либо конкретного решения, например, пространства–времени, окружающего материальную точку, или истории вселенной, выбор неизбежен. Поскольку при выборе координат мы имеем четыре степени свободы, можно сформулировать 4 общих уравнения, а затем попытаться выбрать наши координаты таким образом, чтобы они подчинялись этим уравнениям. Такие уравнения называют «калибровочными условиями». Естественно, следует выбирать калибровочные условия такими, чтобы легко было найти способ подчинения им и показать, что координаты, подчиняющиеся этим уравнениям, существуют. Рассмотрим ряд примеров.

1). «Временная калибровка». Выберем

$$g_{00} = -1; \quad (9.1)$$

$$g_{0i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (9.2)$$

На первый взгляд кажется, что добиться подчинения этим уравнениям совсем несложно. Если в произвольной системе

координат уравнения (9.1) и (9.2) несправедливы, их нужно записать в виде:

$$\tilde{g}_{00} = g_{00} + 2D_0 u_0 = -1, \quad (9.3)$$

$$\tilde{g}_{0i} = g_{0i} + D_i u_0 + D_0 u_i = 0. \quad (9.4)$$

Функция  $u_0(\vec{x}, t)$  можно определить по (9.3) путем интегрирования (9.3) по времени, после чего, интегрируя (9.4) относительно времени, можно найти  $u_i$ . Затем, применив (8.17), мы увидим, что  $\tau g_{\mu\nu}(x - u)$  подчиняется уравнениям (9.1) и (9.2) с точностью до слагаемых порядка  $(u)^2$  (следует учесть, что (9.3) и (9.4) соответствуют координатным преобразованиям, лишь в том случае, если  $u$  — бесконечно малая величина). Путем итерации можно добиться получения большей точности подчинения уравнениям (9.1) и (9.2). А вот удастся ли достичь сходимости при итерации? В описываемых нами системах координат гравитационного поля нет (искривлено только пространство, но не пространство-время); таким образом, все линии вида  $\vec{x}(t) = \text{const}$ , фактически являются геодезическими, что легко проверить (в (5.8),  $\Gamma^i_{00} = 0$ ). Следовательно, данные системы координат являются координатами «свободного падения», однако свободно падающие объекты будут, естественно, иметь свои орбиты, а поэтому либо они будут отклоняться друг от друга, либо — сталкиваться. В такие моменты эти системы координат будут генерировать сингулярности.

2) Калибровка:

$$\partial_\mu g_{\mu\nu} = 0. \quad (9.5)$$

Преимущество этого калибровочного уравнения — его лоренц-инвариантность. Уравнения для бесконечно малого  $u_\mu$  приобретают вид

$$\partial_\mu \tilde{g}_{\mu\nu} = \partial_\mu g_{\mu\nu} + \partial_\mu D_\mu u_\nu + \partial_\mu D_\nu u_\mu = 0. \quad (9.6)$$

(Здесь особо тщательно следует разделять обычные и ковариантные производные!) При итерации сначала получим решение для  $\partial_\nu u_\nu$ . Пусть  $\partial_\nu$  действует на (9.6):

$$2\partial^2 \partial_\nu u_\nu + \partial_\nu \partial_\mu g_{\mu\nu} = \text{высшие порядки}, \quad (9.7)$$

после чего

$$\partial^2 u_\nu = -\partial_\mu g_{\mu\nu} - \partial_\nu (\partial_\mu u_\mu) + \text{высшие порядки}. \quad (9.8)$$

Это уравнения Д'Аламбера, решения которых менее сингулярны, чем (9.3) и (9.4).

3) Более изящный выбор — *гармоническая калибровка* или *калибровка де Донде*:

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (9.9)$$

Координаты, подчиняющиеся этому условию, называют гармоническими по следующим причинам. Рассмотрим *скалярное* поле  $V$ , подчиняющееся

$$D^2 V = 0 \quad \text{или} \quad (9.10)$$

$$g^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu V - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda V) = 0. \quad (9.11)$$

Теперь выберем четыре координаты  $x^{1, \dots, 4}$ , которые подчиняются этому уравнению. Заметим, что эти уравнения не являются ковариантными, поскольку индекс  $\alpha$  в  $x^\alpha$  здесь не участвует:

$$g_{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu x^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda x^\alpha) = 0. \quad (9.12)$$

Теперь, естественно, в калибровочном уравнении (9.9)

$$\partial_\mu \partial_\nu x^\alpha = 0; \quad \partial_\lambda x^\alpha = \delta_\lambda^\alpha. \quad (9.13)$$

Следовательно, в данных координатах из уравнений (9.12) будет вытекать (9.9). Уравнение (9.10) можно решить в общем виде (весьма удачно, что это уравнение линейно!). Для

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (9.14)$$

при бесконечно малом  $h_{\mu\nu}$  это калибровочное уравнение незначительно отличается от калибровочного уравнения #2:

$$f_\nu = \partial_\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h_{\mu\mu} = 0, \quad (9.15)$$

а при бесконечно малом  $u_\nu$  мы имеем

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= f_\nu + \partial^2 u_\nu + \partial_\mu \partial_\nu u_\mu - \partial_\nu \partial_\mu u_\mu = \\ &= f_\nu + \partial^2 u_\nu = 0 \text{ (с точностью до высших порядков),}\end{aligned}\quad (9.16)$$

Таким образом (естественно) мы непосредственно получаем уравнение Д'Аламбера для  $u_\nu$ . Заметим также, что (9.10) представляет собой уравнение Клейна – Гордона при нулевой массе, которое экстремизирует действие  $J$  из (8.22) при  $t = 0$ . В этом калибровочном уравнении инфинитезимальное выражение для  $R_{\mu\nu}$  будет иметь вид:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^2 h_{\mu\nu},\quad (9.17)$$

что упрощает практические расчеты.

Принцип наименьшего действия для уравнений Эйнштейна можно расширить. Например, добиться, чтобы калибровочное условие возникало также в результате вариации того же действия, что и то, которое генерирует уравнения поля. Для этого существует несколько способов. Предположим, что калибровочное условие выражается через

$$f_\mu(\{g_{\alpha\beta}\}, x) = 0\quad (9.18)$$

и что всегда возможен выбор координат, подчиняющийся (9.18). Тогда к инвариантному действию (8.23), которое мы назовем  $S_{\text{инв}}$ , можно прибавить

$$S_{\text{калибр}} = \int \sqrt{-g} \lambda^\mu(x) f_\mu(g, x) d^4x,\quad (9.19)$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{инв}} + S_{\text{калибр}},\quad (9.20)$$

где  $\lambda^\mu(x)$  — новая динамическая переменная, называемая *множителем Лагранжа*. Вариация  $\lambda \rightarrow \lambda + \delta\lambda$  сразу же дает (9.18) в виде уравнения Эйлера – Лагранжа. Однако можно рассмотреть как вариацию и калибровочное преобразование:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \tilde{x}^\alpha{}_{,\mu} \tilde{x}^\beta{}_{,\nu} g_{\alpha\beta}(\tilde{x}(x)).\quad (9.21)$$

Тогда

$$\delta S_{\text{инв}} = 0, \quad (9.22)$$

$$\delta S_{\text{калибр}} = \int \lambda^\mu \delta f_\mu \stackrel{?}{=} 0. \quad (9.23)$$

Допустим теперь, что существует калибровочное преобразование, дающее

$$\delta f_\mu(x) = \delta_\mu^\alpha \delta(x - x^{(1)}) \quad (9.24)$$

для любого выбора точки  $x^{(1)}$  и индекса  $\alpha$ . Это и будет допущением о том, что при любых обстоятельствах существует калибровочное преобразование, которое сводит  $f_\mu$  к нулю. В этом случае уравнение Эйлера – Лагранжа показывает, что

$$\delta S_{\text{калибр}} = \lambda^\alpha(x^{(1)}) \rightarrow \lambda^\alpha(x^{(1)}) = 0. \quad (9.25)$$

При этом все прочие вариации  $g_{\mu\nu}$ , которые не являются координатными преобразованиями, дают обычные уравнения, описанные в предыдущей главе.

Техническая деталь: часто (9.24) невозможно реализовать посредством калибровочных преобразований, которые на границе всюду обращаются в нуль. Из этого может следовать, что уравнения Эйлера – Лагранжа не смогут гарантировать решение для  $\lambda = 0$ . Скорее такое решение не будет противоречить этим уравнениям при условии, что  $\lambda = 0$  выбирается как граничное условие<sup>8</sup>. При этом уравнения, генерируемые действием (9.20), могут дать решения для  $\lambda \neq 0$ , которые следует отбросить.

## 10. Электромагнетизм

Запишем лагранжиан для уравнений Максвелла в виде<sup>9</sup>

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J_\mu A_\mu \quad (10.1)$$

<sup>8</sup>Если мы допустим, что (9.24) на границе несправедливо, то граничное условие  $\lambda = 0$  все равно приведет к достоверности (9.25).

<sup>9</sup>Обратите внимание, что используемые здесь условные обозначения отличаются от других, например, принятых в классической электродинамике Джек-

при

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (10.2)$$

Это означает, что при любом изменении

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu \quad (10.3)$$

действие

$$S = \int \mathcal{L} d^4x \quad (10.4)$$

в случае справедливости уравнений Максвелла должно быть стационарным. Действительно, интегрирование по частям позволяет убедиться, что если  $\delta A_\nu$  на границе обращается в нуль, то

$$\delta S = \int (-F_{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu + J_\mu \delta A_\mu) d^4x = \int d^4x \delta A_\nu (\partial_\mu F_{\mu\nu} + J_\nu). \quad (10.5)$$

Следовательно (в наших упрощенных единицах),

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -J_\nu. \quad (10.6)$$

Теперь легко описать взаимодействия поля Максвелла с гравитационным полем. Сначала мы должны сделать  $S$  ковариантным:

$$S_{\max} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + g^{\mu\nu} J_\mu A_\nu \right), \quad (10.7a)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{неизменное}) \quad (10.7b)$$

и

$$S = \int \sqrt{-g} \left( \frac{R - 2\Lambda}{16\pi G_N} \right) + S_{\max}. \quad (10.8)$$

Индексы можно поднимать или опускать в соответствии с обычными правилами. Тензор энергии-импульса можно вывести из (10.8) путем варьирования относительно  $g_{\mu\nu}$  (и умножения на 2):

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha + \left( \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - J^\alpha A_\alpha \right) g_{\mu\nu}. \quad (10.9)$$

---

сона, коэффициентами, например,  $4\pi$ . Читатель по желанию может адаптировать приведенные здесь выражения к удобным для него обозначениям. Снова потребуется видоизмененное правило суммирования (6.33).

Здесь  $J^\alpha$  (с верхним индексом) — фиксированный внешний источник. Плотность энергии для плоского пространства-времени описывается как обычно:

$$\rho = -T_{00} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) - J^\alpha A_\alpha. \quad (10.10)$$

Мы также видим, что

1) Взаимодействие поля Максвелла с гравитацией однозначно, нет ни одной степени свободы, чтобы добавить какие-либо неизвестные слагаемые.

2) Поле Максвелла, являясь источником гравитационных полей, связано с ними тензором энергии-импульса, как и предполагалось.

3) *Однородное* уравнение в законах Максвелла, которое следует из (10.7b),

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0, \quad (10.11)$$

остаётся неизменным.

4) Варьируя  $A_\mu$ , находим, что неоднородное уравнение принимает вид

$$D_\mu F_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} D_\alpha F_{\beta\nu} = -J_\nu, \quad (10.12)$$

а поэтому получает вклад от поля тяготения  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  и потенциала  $g^{\alpha\beta}$ .

**Упражнение.** Покажите — с помощью формальных аргументов и явно, — что (10.11) не изменится, если мы заменим его производные ковариантными производными.

**Упражнение.** Покажите, что (10.12) можно также записать в виде

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = -\sqrt{-g}J^\nu, \quad (10.13)$$

и что

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}J^\mu) = 0. \quad (10.14)$$

Таким образом,  $\sqrt{-g}J^\mu$  представляет реальный сохраняющийся ток, а из (10.13) вытекает, что  $\sqrt{-g}$  действует как диэлектрическая постоянная вакуума.



## 11. Решение Шварцшильда

Уравнение Эйнштейна (7.26) должно быть абсолютно достоверным. Поэтому большое значение приобретает поиск точных решений. Самым простым и наиболее значимым может быть решение для пустого пространства, окружающего звезду или планету. Там мы имеем

$$T_{\mu\nu} = 0. \quad (11.1)$$

Если планета вращается не очень быстро, то воздействием такого вращения (которое обязательно существует!) можно пренебречь. Кроме того, должна иметь место сферическая симметрия. Возьмем сферические координаты:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \varphi). \quad (11.2)$$

Из сферической симметрии следует:

$$g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0, \quad (11.3)$$

а также

$$g_{33} = \sin^2 \theta g_{22} \quad (11.4)$$

и симметрия обратимости во времени:

$$g_{01} = 0. \quad (11.5)$$

Метрический тензор при этом задается длиной  $ds$  бесконечно малого линейного элемента:

$$ds^2 = -A dt^2 + B dr^2 + Cr^2(d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (11.6)$$

где  $A, B, C$  являются положительными функциями, зависящими только от  $r$ . Предполагается, что при большом расстоянии от источника

$$r \rightarrow \infty; \quad A, B, C \rightarrow 1. \quad (11.7)$$

Поскольку мы свободны в выборе координат, выберем новую координату  $\tilde{r}$ :

$$\tilde{r} = \sqrt{C(r)}r, \quad \text{так что } Cr^2 = \tilde{r}^2. \quad (11.8)$$

Тогда будем иметь

$$B dr^2 = B \left( \sqrt{C} + \frac{r}{2\sqrt{C}} \frac{dC}{dr} \right)^{-2} d\tilde{r}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{B} d\tilde{r}^2. \quad (11.9)$$

В новой системе координат получаем (опуская с этих пор тильду  $\tilde{\phantom{x}}$ ):

$$ds^2 = -A dt^2 + B dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (11.10)$$

где  $A, B \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$ . Сигнатура такой метрики должна иметь вид  $(-, +, +, +)$ , так что

$$A > 0 \quad \text{и} \quad B > 0. \quad (11.11)$$

Теперь для общих  $A$  и  $B$  мы должны найти аффинную связность  $\Gamma$ , которую они порождают. Существует удобный с точки зрения экономии места способ записи (который не отменяет, однако, необходимости выполнения расчетов), поскольку многие коэффициенты в нем нулевые. Если мы знаем все геодезические

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} \dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda = 0, \quad (11.12)$$

то они позволят однозначно определить все коэффициенты  $\Gamma$ . Вариационный принцип для геодезической описывается как

$$0 = \delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} d\sigma, \quad (11.13)$$

где  $\sigma$  — произвольная параметризация кривой. В шестой главе мы видели, что исходная кривая выбрана с условием равенства

$$\sigma = s. \quad (11.14)$$

В этом случае квадратный корень будет равен единице, а (6.23) будет соответствовать виду

$$\frac{1}{2} \delta \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} ds = 0. \quad (11.15)$$

Запишем

$$-At^2 + Br^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \stackrel{\text{def}}{=} F(s); \quad \delta \int F ds = 0. \quad (11.16)$$

Точкой обозначается дифференцирование по  $s$ .

Выражение (11.16) дает уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial F}{\partial x^\mu}. \quad (11.17)$$

При  $\mu = 0$  оно примет вид

$$\frac{d}{ds}(-2At) = 0 \quad (11.18)$$

или

$$\ddot{t} + \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial r} \cdot \dot{r} \right) \dot{t} = 0. \quad (11.19)$$

При сравнении с (11.12) видно, что все  $\Gamma^0_{\mu\nu}$  обращаются в нуль за исключением

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = A'/2A. \quad (11.20)$$

(Штрихом обозначено дифференцирование по  $r$ , коэффициент 2 появился в результате симметризации нижних индексов 0 и 1.) Для  $\mu = 1$  (11.17) даст

$$\ddot{r} + \frac{B'}{2B} \dot{r}^2 + \frac{A'}{2B} \dot{t}^2 - \frac{r}{B} \dot{\theta}^2 - \frac{r}{B} \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (11.21)$$

при этом все  $\Gamma^1_{\mu\nu}$  нулевые, кроме

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{00} &= A'/2B; & \Gamma^1_{11} &= B'/2B; \\ \Gamma^1_{22} &= -r/B; & \Gamma^1_{33} &= -(r/B) \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Для  $\mu = 2$  и 3 аналогично находим

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{21} &= \Gamma^2_{12} = 1/r; & \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta; \\ \Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \text{ctg } \theta; & \Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = 1/r. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Кроме того, мы имеем

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta \sqrt{AB}, \quad (11.24)$$

и в соответствии с (5.18) получаем

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\beta} = (\partial_{\beta}\sqrt{-g})/\sqrt{-g} = \partial_{\beta} \log \sqrt{-g}. \quad (11.25)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}_{\mu 1} &= A'/2A + B'/2B + 2/r, \\ \Gamma^{\mu}_{\mu 2} &= \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Уравнение

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (11.27)$$

теперь приобретает вид (см. (5.27)):

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= -(\log \sqrt{-g})_{,\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \\ &\quad - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}(\log \sqrt{-g})_{,\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (11.28)$$

В явном виде уравнения будут записаны как

$$\begin{aligned} R_{00} &= \Gamma^1_{00,1} - 2\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{00}(\log \sqrt{-g})_{,1} = \\ &= (A'/2B)' - A'^2/2AB + (A'/2B)\left(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r}\right) = \\ &= \frac{1}{2B}\left(A'' - \frac{A'B'}{2B} - \frac{A'^2}{2A} + \frac{2A'}{r}\right) = 0 \end{aligned} \quad (11.29)$$

и

$$\begin{aligned} R_{11} &= -(\log \sqrt{-g})_{,1,1} + \Gamma^1_{11,1} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{10} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} - \\ &\quad - \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{21} - \Gamma^3_{31}\Gamma^3_{31} + \Gamma^1_{11}(\log \sqrt{-g})_{,1} = 0. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Это дает

$$\frac{1}{2A}\left(-A'' + \frac{A'B'}{2B} + \frac{A'^2}{2A} + \frac{2AB'}{rB}\right) = 0. \quad (11.31)$$

Объединяя (11.29) и (11.31), получаем

$$\frac{2}{rB}(AB)' = 0. \quad (11.32)$$

Следовательно,  $AB = \text{const}$ . Поскольку при  $r \rightarrow \infty$  мы имеем  $A$  и  $B \rightarrow 1$ , мы заключаем, что

$$B = 1/A. \quad (11.33)$$

В направлении  $\theta\theta$  мы имеем:

$$R_{22} = (-\log \sqrt{-g})_{,2,2} + \Gamma^1_{22,1} - 2\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{23} + \Gamma^1_{22}(\log \sqrt{-g})_{,1} = 0. \quad (11.34)$$

Запишем это выражение в виде:

$$R_{22} = -\frac{\partial}{\partial\theta} \text{ctg } \theta - \left(\frac{r}{B}\right)' + \frac{2}{B} - \text{ctg}^2 \theta - \frac{r}{B} \left(\frac{2}{r} + \frac{(AB)'}{2AB}\right) = 0. \quad (11.35)$$

С помощью (11.32) получаем

$$(r/B)' = 1. \quad (11.36)$$

При интегрировании получаем

$$r/B = r - 2M, \quad (11.37)$$

$$A = 1 - \frac{2M}{r}; \quad B = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (11.38)$$

Здесь  $2M$  — константа интегрирования. Мы нашли решение, хотя и не использовали всех имеющихся в нашем распоряжении уравнений  $R_{\mu\nu} = 0$  (была использована лишь линейная комбинация  $R_{00}$  и  $R_{11}$ ). Несложно найти доводы в пользу того, что на самом деле все уравнения  $R_{\mu\nu} = 0$  справедливы: можно подставить (11.38) в (11.29) или (11.31), а затем показать с помощью сферической симметрии и (11.35), что  $R_{33} = 0$ . Однако из-за подчинения тождеству Бьянки:

$$D_\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (11.39)$$

эти уравнения следует считать переопределенными. Тождество Бьянки выполняется автоматически, и из него следует, что

если большинство компонент  $G_{\mu\nu}$  заданы равными нулю, то остальные компоненты также будут равны нулю.

Найденное нами решение называется решением Шварцшильда (Шварцшильд, 1916):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (11.40)$$

В (11.37) мы вставили  $2M$  в качестве произвольной константы интегрирования. Мы видим, что вдали от начала координат

$$-g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} \rightarrow 1 + 2V(\vec{x}). \quad (11.41)$$

Таким образом, если

$$M = G_N m \quad (c = 1), \quad (11.42)$$

то гравитационный потенциал  $V(\vec{x})$  переходит в  $-M/r$ , как вблизи объекта с массой  $m$ . Часто единицы массы будут нормированы так, чтобы  $G_N = 1$ .

Решение Шварцшильда<sup>10</sup> при  $r = 2M$  сингулярно, однако это может быть артефактом выбора координат. Изучив геодезические в этой области, можно обнаружить другие системы координат, с точки зрения которых сингулярности наблюдаться не будет. Здесь мы приводим результат такой процедуры. Введем новые координаты («координаты Крускала»):

$$(t, r, \theta, \varphi) \rightarrow (x, y, \theta, \varphi), \quad (11.43)$$

---

<sup>10</sup>В своей работе Карл Шварцшильд заменил  $r - 2M$  новой координатой  $r$ , на уровне горизонта событий обращаясь в нуль, поскольку он утверждал, что то, что, по его мнению, было сингулярностью, должно находиться в начале координат. Лишь при таком условии, он считал, уравнение может стать «eindeutig» (однозначным), способным позволить рассчитать такие явления как движение перигелия (см. главу 12) однозначно. Не знал он ни того, что координаты можно выбирать свободно, ни того, что его «сингулярность» не является подлинной сингулярностью — был всего лишь 1916 год. А то, что он первым получил аналитическое выражение, запечатлено в названии — решение Шварцшильда.

определяемые уравнениями

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{r/2M} = xy, \quad (11.44a)$$

$$e^{t/2M} = x/y. \quad (11.44b)$$

В этом случае

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{dr}{2M(1 - 2M/r)}; \quad \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{dt}{2M}. \quad (11.45)$$

Линейный элемент Шварцшильда теперь задается уравнениями

$$\begin{aligned} ds^2 &= 16M^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dx dy}{xy} + r^2 d\Omega^2 = \\ &= \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dx dy + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (11.46)$$

при

$$d\Omega^2 \stackrel{\text{def}}{=} d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (11.47)$$

Сингулярность при  $r = 2M$  исчезла. Заметим, что (11.44) имеет *два* решения  $(x, y)$  для каждого  $r, t$ . Из этого следует, что максимально уточненное решение для вакуума (= решению, при котором материя, как источник гравитационных полей, отсутствует) заключается в наличии *двух* вселенных, связанных в центре. Можно заметить, что, за исключением факта поворота на  $45^\circ$ , зависимость между координатами Крускала  $x, y$  и шварцшильдовыми координатами  $r, t$  вблизи точки  $r = 2M$  имеет точно такой же вид, что и зависимость между плоскими пространственными координатами  $x^3, x^0$  и *риндлеровыми* координатами  $\xi^3, \tau$ , см. главу 3.

Однако в решении Шварцшильда точки  $r = 0$  по-прежнему соответствуют сингулярности. Границей регулярной области «вселенной» служит линия

$$xy = -1, \quad (11.48)$$

Область  $x > 0, y > 0$  будет отождествляться с «обычным миром», простирающимся на далекие от нашего источника расстояния. Вторая вселенная, область пространства–времени с  $x < 0, y < 0$ , имеет метрику, идентичную метрике первой вселенной. И связана она с первой своеобразной «червоточинной». Физическая значимость такой протяженной области весьма ограничена, поскольку

1) «Обычные» звезды и планеты содержат вещество ( $T_{\mu\nu} \neq 0$ ) в пределах некоего радиуса  $r > 2M$ , рамками которого для них и ограничивается достоверность решения Шварцшильда.

2) Даже если дальнейшее гравитационное сжатие и приведет к образованию «черной дыры», все равно останется коллапсирующее вещество, которое полностью отсечет вторую «вселенную» от первой.

3) Допустим коллапсирующего вещества нет. И в этом случае второй вселенной можно было бы достичь лишь при условии движения со скоростью, превышающей локальную скорость света.

**Упражнение.** Проверьте данные утверждения, построив диаграмму  $xu$  и указав местоположение двух вселенных и возможные траектории перемещения материи и космонавтов. Докажите, что между двумя вселенными обмен сигналами невозможен.

Если поместить в диаграмму  $x, u$  «коллапсирующую звезду», можно заметить, что горизонт событий, отграничивающий будущее, обретает физический смысл. Получаемое при этом решение называется решением для черных дыр.

## 12. Меркурий и поведение световых лучей в рамках шварцшильдовской метрики

Для проверки достоверности общей теории относительности принято использовать орбитальное движение Меркурия в



гравитационном поле Солнца (хотя Эйнштейн не отказался бы от своей теории и в случае невозможности такой проверки).

Для описания такого движения мы имеем вариационное уравнение (11.16) для функций  $t(\tau)$ ,  $r(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$ , где  $\tau$  параметризует траекторию пространства-времени. Записав  $\dot{r} = dr/d\tau$  и т. д., мы имеем уравнение

$$\delta \int \left\{ - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right\} d\tau = 0, \quad (12.1)$$

в которое мы подставляем  $ds^2/d\tau^2 = -1$ , поскольку траектория времениподобна. Уравнения движения будут иметь вид уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2; \quad (12.2)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0; \quad (12.3)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} \right] = 0. \quad (12.4)$$

Мы не выписываем уравнения для  $\dot{r}$  — удобнее разделить (11.40) на  $-ds^2$ :

$$1 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2). \quad (12.5)$$

Теперь, даже во вполне релятивистской метрике решения Шварцшильда все орбиты будут лежать в плоскостях, проходящих через начало координат, поскольку сферическая симметрия позволяет выбрать в качестве исходного условия, чтобы

$$\theta = \pi/2; \quad \dot{\theta} = 0, \quad (12.6)$$

и это останется абсолютно достоверным вследствие (12.2). Уравнения (12.3) и (12.4) показывают, что

$$r^2 \dot{\varphi} = J = \text{const} \quad (12.7)$$

и

$$\left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} = E = \text{const}. \quad (12.8)$$

Уравнение (12.5) при этом приобретает вид:

$$1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{r}^2 - J^2/r^2. \quad (12.9)$$

Также как и в задаче Кеплера, удобно рассматривать  $r$  как функцию  $\varphi$ . Время  $t$  уже исключено. Исключим также  $s$ . До конца этой главы будем обозначать дифференцирование по  $\varphi$  штрихом:

$$r' = \dot{r}/\dot{\varphi}. \quad (12.10)$$

С помощью (12.7) и (12.9) выводим

$$1 - 2m/r = E^2 - J^2 r'^2/r^4 - j^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)/r^2. \quad (12.11)$$

Можно интерпретировать  $E$  как энергию, а  $J$  как угловой момент. Запишем в точности как в задаче Кеплера:

$$r = 1/u, \quad r' = -u'/u^2; \quad (12.12)$$

$$1 - 2Mu = E^2 - J^2 u'^2 - J^2 u^2 (1 - 2Mu). \quad (12.13)$$

Отсюда находим

$$\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{(2Mu - 1) \left(u^2 + \frac{1}{J^2}\right) + E^2/J^2}. \quad (12.14)$$

Формальным решением будет

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{u_0}^u du \left( \frac{E^2 - 1}{J^2} + \frac{2Mu}{J^2} - u^2 + 2Mu^3 \right)^{-1/2}. \quad (12.15)$$

**Упражнение.** Покажите, что в ньютоновом пределе членом  $u^3$  можно пренебречь, а затем вычислите интеграл.

Релятивистским смещением перигелия будет величина, на которую полный интеграл от  $u_{\min}$  до  $u_{\max}$  (два корня полинома третьей степени), умноженный на два, отличается от  $2\pi$ .

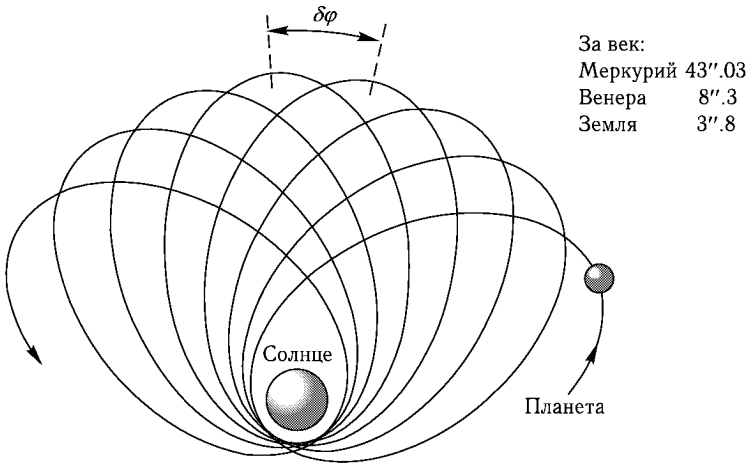


Рис. 4. Смещение перигелия орбиты планеты вокруг центральной звезды.

Максимально точно можно определить смещение перигелия повторным дифференцированием (12.13) по  $\varphi$ :

$$\frac{2M}{J^2}u' - 2u'u'' - 2uu' + 6Mu^2u' = 0. \quad (12.16)$$

Теперь, конечно,

$$u' = 0 \quad (12.17)$$

может являться решением (круговой орбиты). Если  $u' \neq 0$ , разделим на  $u'$ :

$$u'' + u = \frac{M}{J^2} + 3Mu^2. \quad (12.18)$$

Последний член является релятивистским поправочным членом. Допустим он невелик. Тогда мы получаем хорошо известную в математической физике задачу:

$$u'' + u = A + \varepsilon u^2. \quad (12.19)$$

С помощью возмущений можно разложить  $u$  в ряд по степеням  $\varepsilon$ , однако нам нужно разложение, сходящееся для всех

значений независимой переменной  $\varphi$ . Заметим, что для того, чтобы решение было периодическим по  $u$ , (12.13) допускает для каждого значения  $u$  лишь два возможных значения  $u'$ . Невозмущенный период составляет  $2\pi$ . Однако с учетом присутствия члена  $u^2$  в том виде, в каком он дается в уравнениях, мы не можем знать точного периода. Допустим, его можно записать в виде:

$$2\pi(1 + \alpha\varepsilon + O(\varepsilon^2)). \quad (12.20)$$

Запишем

$$u = A + B \cos[(1 - \alpha\varepsilon)\varphi] + \varepsilon u_1(\varphi) + O(\varepsilon^2), \quad (12.21)$$

$$u'' = -B(1 - 2\alpha\varepsilon) \cos[(1 - \alpha\varepsilon)\varphi] + \varepsilon u_1''(\varphi) + O(\varepsilon^2); \quad (12.22)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon u^2 = \varepsilon(A^2 + 2AB \cos[(1 - \alpha\varepsilon)\varphi] + \\ + B^2 \cos^2[(1 - \alpha\varepsilon)\varphi]) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (12.23)$$

Находим для  $u_1$

$$u_1'' + u_1 = (-2\alpha B + 2AB) \cos \varphi + B^2 \cos^2 \varphi + A^2, \quad (12.24)$$

где члены  $O(\varepsilon)$  опущены, поскольку больше не играют никакой роли. Получили в точности уравнение маятника в режиме вынужденных колебаний. Если нежелательно, чтобы маятник совершал колебания со все возрастающей амплитудой ( $u_1$  должно оставаться малым при всех значениях  $\varphi$ ), то внешняя сила не должна содержать составляющую Фурье с тем же периодом, что и сам маятник. Теперь в (12.24), если только мы не выберем  $\alpha = A$ , член, включающий  $\cos \varphi$ , соответствует полному резонансу<sup>11</sup>. Если  $\alpha = A$ , то уравнения

$$u_1'' + u_1 = \frac{1}{2}B^2(\cos 2\varphi + 1) + A^2, \quad (12.25)$$

$$u_1 = \frac{1}{2}B^2 \left(1 - \frac{1}{2^2 - 1} \cos 2\varphi\right) + A^2, \quad (12.26)$$

---

<sup>11</sup>Обратите внимание здесь и далее, что решением уравнения вида  $u'' + u = \sum_i A_i \cos \omega_i \varphi$  будет  $u = \sum_i A_i \cos \omega_i \varphi / (1 - \omega_i^2) + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi$ . При  $\omega \rightarrow 1$  оно будет единственным решением.

приводят к строгой периодичности. Если орбита должна быть периодична по  $\varphi$ , следует выбирать период равным  $2\pi(1 + A\varepsilon)$ . Мы обнаруживаем, что при каждом прохождении перигелия ее положение смещается на величину

$$\delta\varphi = 2\pi A\varepsilon = 2\pi \frac{3M^2}{J^2} \quad (12.27)$$

(плюс поправки с учетом высших порядков) в направлении самой планеты (рис. 4).

Теперь рассчитаем траекторию луча света. Она тоже будет геодезической. Однако теперь  $ds = 0$ . В этом пределе (12.1) – (12.4) все еще действуют, но теперь мы задаем

$$ds/d\tau = 0,$$

так что (12.5) приобретает вид:

$$0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2). \quad (12.28)$$

Поскольку теперь параметр  $\tau$  определен с точностью до произвольного постоянного множителя, релевантным будет лишь отношение  $J/E$ . Назовем его  $j$ . Тогда (12.15) приобретает вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{u_0}^u du (j^{-2} - u^2 + 2Mu^3)^{-1/2}. \quad (12.29)$$

Поскольку теперь левая часть (12.13) подлежит замещению нулем, то (12.18) принимает вид:

$$u'' + u = 3Mu^2. \quad (12.30)$$

Теперь допускается разложение в ряд по степеням  $M$  (поскольку угол  $\varphi$  находится в пределах интервала, незначительно превышающего  $\pi$ ):

$$u = A \cos \varphi + v, \quad (12.31)$$

$$v'' + v = 3MA^2 \cos^2 \varphi = \frac{3}{2}MA^2(1 + \cos 2\varphi), \quad (12.32)$$

$$v = \frac{3}{2}MA^2 \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\varphi\right) = MA^2(2 - \cos^2 \varphi). \quad (12.33)$$

Таким образом, для малого  $M$  мы имеем

$$\frac{1}{r} = u = A \cos \varphi + MA^2(2 - \cos^2 \varphi). \quad (12.34)$$

Углы  $\varphi$  — испускания и возвращения луча — определяются уравнением

$$1/r = 0, \quad \cos \varphi = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8M^2A^2}}{2MA}. \quad (12.35)$$

Поскольку параметр  $M$ , участвующий в разложении, незначителен, а  $|\cos \varphi| \leq 1$ , мы должны выбрать знак минус:

$$\cos \varphi \approx -2MA = -2M/r_0, \quad (12.36)$$

$$\varphi \approx \pm \left( \frac{\pi}{2} + 2M/r_0 \right), \quad (12.37)$$

где  $r_0$  — наименьшее расстояние, проходимое световым лучом до центрального источника. В итоге угол отклонения между испускаемым лучом и лучом, возвращающимся назад, в низшем порядке имеет вид

$$\Delta = 4M/r_0. \quad (12.38)$$

В обычных единицах это уравнение выглядит как

$$\Delta = \frac{4G_N m_\odot}{r_0 c^2}, \quad (12.39)$$

$m_\odot$  — масса центральной звезды.

**Упражнение.** Докажите, что эта величина в два раза больше, чем можно было бы ожидать, если считать луч света нерелятивистской частицей, движущейся по гиперболической орбите вокруг звезды.

**Упражнение.** Докажите, что выражение (12.27) в обычных единицах имеет вид

$$\delta\varphi = \frac{6\pi G_N m_\odot}{a(1 - \varepsilon^2)c^2}, \quad (12.40)$$

где  $a$  — главная ось орбиты,  $\varepsilon$  — ее эксцентриситет, а  $c$  — скорость света.

### 13. Обобщение шварцшильдова решения

#### а) Решение Райсснера – Нордстрёма

Сферическую симметрию можно оставить в качестве отправной точки для построения решения комбинированных уравнений Эйнштейна – Максвелла для полей, окружающих «планету» с электрическим зарядом  $Q$  и массой  $m$ . Как и в (11.10), мы выбираем

$$ds^2 = -A dt^2 + B dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (13.1)$$

но, кроме того, — статическое электрическое поле:

$$E_r = E(r); \quad E_\theta = E_\varphi = 0; \quad \vec{B} = 0. \quad (13.2)$$

Из этого следует, что  $F_{01} = -F_{10} = E(r)$ , а все компоненты  $F_{\mu\nu}$  равны нулю. Допустим, что источник  $J^\mu$  этого поля находится внутри планеты, а нас интересует лишь решение для внешнего пространства планеты. Для этого случая мы имеем

$$J^\mu = 0. \quad (13.3)$$

Если мы поднимем индексы вверх, то получим

$$F^{10} = E(r)/AB, \quad (13.4)$$

а с помощью

$$\sqrt{-g} = \sqrt{AB}r^2 \sin \theta \quad (13.5)$$

мы находим, что в соответствии с (10.13)

$$\partial_r \left( \frac{E(r)r^2}{\sqrt{AB}} \right) = 0. \quad (13.6)$$

Таким образом, неоднородный закон Максвелла свидетельствует, что

$$E(r) = \frac{Q\sqrt{AB}}{4\pi r^2}, \quad (13.7)$$

где  $Q$  — константа интегрирования, которую можно отождествить с электрическим зарядом, поскольку при  $r \rightarrow \infty$  и  $A$ , и  $B$  стремятся к 1.

Однородный закон Максвелла (10.11) выполняется автоматически, поскольку имеется поле  $A_0$  (векторный потенциал) для которого

$$E_r = -\partial_r A_0. \quad (13.8)$$

Поле (13.7) вносит вклад в  $T_{\mu\nu}$ :

$$T_{00} = -E^2/2B = -AQ^2/32\pi^2 r^4; \quad (13.9)$$

$$T_{11} = E^2/2A = BQ^2/32\pi^2 r^4; \quad (13.10)$$

$$T_{22} = -E^2 r^2/2AB = -Q^2/32\pi^2 r^2; \quad (13.11)$$

$$T_{33} = T_{22} \sin^2 \theta = -Q^2 \sin^2 \theta/32\pi^2 r^2. \quad (13.12)$$

Находим, что

$$T_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0; \quad R = 0 \quad (13.13)$$

— это общее свойство свободного поля Максвелла. При этом мы имеем ( $G_N = 1$ )

$$R_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}. \quad (13.14)$$

В этом случае (11.29)–(11.31) принимают вид

$$A'' - \frac{A'B'}{2B} - \frac{A'^2}{2A} + \frac{2A'}{r} = ABQ^2/2\pi r^4, \quad (13.15)$$

$$-A'' + \frac{A'B'}{2B} + \frac{A'^2}{2A} + \frac{2AB'}{rB} = -ABQ^2/2\pi r^4.$$

Мы считаем, что (11.32) все еще остается в силе, поэтому здесь также

$$B = 1/A. \quad (13.16)$$

Уравнение (11.36) теперь заменяется уравнением

$$(r/B)' - 1 = -Q^2/4\pi r^2. \quad (13.17)$$

При интегрировании оно дает

$$r/B = r - 2M + Q^2/4\pi r. \quad (13.18)$$



Теперь вместо (11.38) мы имеем

$$A = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{4\pi r^2}; \quad B = 1/A. \quad (13.19)$$

Это уравнение называют решением Райсснера–Нордстрёма (1916, 1918).

Если выбрать  $Q^2/4\pi < M^2$ , то будут наблюдаться два «горизонта событий» — корни уравнения  $A = 0$ :

$$r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2/4\pi}. \quad (13.20)$$

И в этом случае сингулярности являются артефактами нашего выбора координат и могут быть устранены путем обобщений координат Крускала. При этом обнаруживается, что если горизонты событий не были бы заблокированы коллапсирующим веществом, то с нашей вселенной было бы связано бесчисленное множество паразитных вселенных. Подробнее эта гипотеза описана Хокингом и Эллисом.

## б) Решение Керра

Гравитационное поле быстро вращающейся планеты уже не обладает сферической симметрией — сохраняется лишь цилиндрическая симметрия. Приводим только решение:

$$ds^2 = -dt^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{2Mr(dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left( d\theta^2 + \frac{dr^2}{r^2 - 2Mr + a^2} \right). \quad (13.21)$$

Это решение было найдено Керром в 1963 г. Доказать, что оно действительно является решением эйнштейновых уравнений, несложно, но для этого придется запастись терпением. Для получения решения с использованием более элементарных принципов требуются более мощные методы расчетов с применением вычислительной техники. Свободный параметр  $a$  в этом решении может быть отождествлен с угловым моментом.

**в) Решение Ньюмана**

Для полноты картины заметим также, что вращающиеся планеты могут также быть электрически заряженными. Решение для этого случая было найдено Ньюманом в 1965 г. Метрика, соответствующая этому решению, описывается уравнением

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{Y}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{Y}(a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)^2 + \frac{Y}{\Delta} dr^2 + Y d\theta^2, \quad (13.22)$$

где

$$Y = r^2 + a^2 \cos \theta, \quad (13.23)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2/4\pi + a^2. \quad (13.24)$$

Потенциал вектора представлен как

$$A_0 = -\frac{Qr}{4\pi Y}; \quad A_3 = \frac{Qra \sin^2 \theta}{4\pi Y}. \quad (13.25)$$

**Упражнение.** Докажите, что при  $Q = 0$  (13.21) и (13.22) совпадают.

**Упражнение.** Найдите решение для невращающегося магнитного монополя в условиях радиального магнитного поля.

**Упражнение для продвинутого студента.** Опишите геодезические для решения Керра.

**14. Метрика Робертсона – Уолкера**

Общая теория относительности играет важную роль в космологии. Самое распространенное предположение заключается в том, что в определенный момент « $t = 0$ » из сингулярности возникла вселенная и начала расширяться. Примем максимальную симметрию, взяв в качестве нашей метрики

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\omega^2. \quad (14.1)$$

Здесь  $d\omega^2$  является сокращенным обозначением некоего полностью изотропного трехмерного пространства, а  $a(t)$  описывает (увеличивающееся) расстояние между двумя соседними галактиками в пространстве. Хотя нами и учитывается принцип Коперника о равноправии всех точек в пространстве, идея об инвариантности в отношении временных трансляций и о лоренц-инвариантности в этой метрике нами не разделяется — каждая галактика имеет часы, установленные на нуль при  $t = 0$ , и каждая из них предусматривает собственную инерциальную систему координат.

Сначала рассмотрим трехмерное пространство, описываемое параметром  $d\omega^2$ . Примем полярные координаты  $\rho, \theta, \varphi$ :

$$d\omega^2 = B(\rho) d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (14.2)$$

тогда в этом трехмерном пространстве тензор Риччи будет описываться (с помощью методов, описанных в главе II) в виде

$$R_{11} = B'(\rho)/\rho B(\rho), \quad (14.3)$$

$$R_{22} = 1 - \frac{1}{B} + \frac{\rho B'}{2B^2}. \quad (14.4)$$

В изотропном (трехмерном) пространстве для некоей константы  $\lambda$  должно соблюдаться равенство

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}, \quad (14.5)$$

а, следовательно,

$$B'/B = \lambda B\rho, \quad (14.6)$$

$$1 - \frac{1}{B} + \frac{\rho B'}{2B^2} = \lambda\rho^2. \quad (14.7)$$

Вместе они дают уравнение:

$$1 - \frac{1}{B} = \frac{1}{2}\lambda\rho^2; \quad B = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\lambda\rho^2}, \quad (14.8)$$

которое подчиняется и (14.6), и (14.7).

**Упражнение.** Докажите, что с учетом трех угловых координат  $\psi, \theta, \varphi$  при  $\rho = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \sin \psi$  возникает метрика 3-мерной сферы.

Часто избирается новая координата  $u$ :

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{2k/\lambda}u}{1 + (k/4)u^2}. \quad (14.9)$$

Получаем

$$d\rho = \sqrt{\frac{2k}{\lambda}} \frac{1 - \frac{1}{4}ku^2}{\left(1 + \frac{1}{4}ku^2\right)} du \quad \text{и} \quad B = \left( \frac{1 + \frac{1}{4}ku^2}{1 - \frac{1}{4}ku^2} \right)^2, \quad (14.10)$$

так что

$$d\omega^2 = \frac{2k}{\lambda} \cdot \frac{du^2 + u^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{(1 + (k/4)u^2)^2}. \quad (14.11)$$

Параметр  $k$  — произвольный, за исключением знака, который должен соответствовать знаку  $\lambda$ . Коэффициент перед (14.11) может поглощаться  $a(t)$ . Отсюда записываем для (14.1)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \frac{d\vec{x}^2}{\left(1 + \frac{1}{4}k\vec{x}^2\right)^2}. \quad (14.12)$$

Если  $k = 1$ , то пространственноподобная часть соответствует сфере, если  $k = 0$ , то она плоская, а при  $k = -1$  — кривизна отрицательная, а пространство — неограниченное (несмотря на ограниченность  $|\vec{x}|$  при этом, что является артефактом нашего выбора координат).

После серии элементарных расчетов получаем:

$$R_0^0 = \frac{3\ddot{a}}{a}. \quad (14.13)$$

$$R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2}{a^2}(\dot{a}^2 + k), \quad (14.14)$$

$$R = R_\mu^\mu = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k). \quad (14.15)$$

Тензор  $G_{\mu\nu}$  принимает вид (для простоты  $\vec{x}$  берется равным 0):

$$G_{00} = \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) = 8\pi G_N \rho + \Lambda, \quad (14.16)$$

$$G_{11} = G_{22} = G_{33} = -2a\ddot{a} - \dot{a}^2 - k = a^2(8\pi G_N p - \Lambda). \quad (14.17)$$

Здесь  $\rho = T_{44} = T_{00}/g_{00}$  — плотность энергии, а  $p$  — давление:  $T_{ij} = -pg_{ij}$ .

Теперь нам остается сделать ряд допущений о материи во вселенной и о ее уравнениях состояния, представляющих собой зависимость между плотностью энергии  $\rho$  и давлением  $p$ . Самое простое — допустить, что давления нет вообще («вселенная, заполненная пылью»).

В этом случае плотность энергии  $\rho$  — это плотность материи, и она обратно пропорциональна объему:

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3} \quad (\text{дуст}). \quad (14.18)$$

Тогда уравнение (14.16), называемое также *уравнением Фрийдмана*, принимает вид

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_N \rho_0}{3 a^3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (14.19)$$

Мы видим, что по мере возрастания  $a$  сначала доминирует член, описывающий материю, затем — член, описывающий кривизну пространства (включающий  $k$ ), и, наконец, космологическая константа. Дифференцируя уравнение Фрийдмана, находим, что оно согласуется с (14.17).

С позиции математики уравнение Фрийдмана можно сравнить с уравнением для одномерной частицы (с нулевой полной энергией), движущейся в потенциале:

$$V(a) = -\frac{4\pi G_N \rho_0}{3} \frac{1}{a} + \frac{k}{2} - \frac{\Lambda}{6} a^2. \quad (14.20)$$

При небольшой величине  $a$  вначале, наблюдается быстрое расширение. Расширение продолжается до бесконечности, если

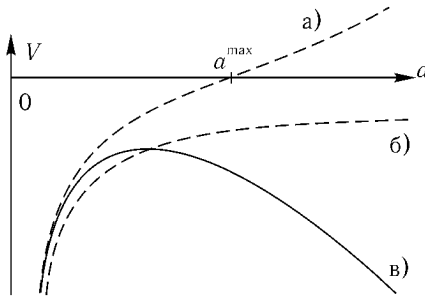


Рис. 5. Потенциал (14.20) для случаев а)  $k = 0, \Lambda < 0$ , б)  $k = -1, \Lambda = 0$ , в)  $k = 0, \Lambda > 0$ . В случае а) точкой поворота будет точка при  $a = a^{\max}$ .

$\Lambda > 0$ , а  $k = -1$ . Если  $\Lambda < 0$ , обязательно произойдет остановка расширения — в этой точке вселенная начинает сжиматься ( $a^{\max}$  на рис. 5).

Полезно рассмотреть решения уравнений (14.16) и (14.17) для случая, когда наблюдаются другие зависимости между давлением и плотностью. Например, во вселенной, заполненной излучением,  $p = \rho/3$ , а поскольку можно допустить, что излучение тепловое, а число фотонов сохраняется неизменным, можно заключить, что  $\rho = \rho_0/a^4$ , в отличие от уравнения (14.18). Действительно, это согласуется с (14.16) и (14.17).

В случае  $\Lambda = 0$  решения уравнения Фрийдмана (14.19) представляют собой хорошо известные математические кривые. Мы имеем

$$a\dot{a}^2 + ka = \frac{8\pi G_N \rho_0}{3} \equiv D, \quad (14.21)$$

$$\dot{a}^2 = D/a - k, \quad (14.22)$$

а по (14.17)

$$\ddot{a} = -D/2a^2. \quad (14.23)$$

Запишем (14.22) в виде

$$\frac{dt}{da} = \sqrt{\frac{a}{D - ka}}, \quad (14.24)$$

затем попытаемся вывести

$$a = \frac{D}{k} \sin^2 \varphi, \quad (14.25)$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{da}{d\varphi} \frac{dt}{da} = \frac{2D}{k\sqrt{k}} \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad (14.26)$$

$$t(\varphi) = \frac{D}{k\sqrt{k}} \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right), \quad (14.27)$$

$$a(\varphi) = \frac{D}{2k} (1 - \cos 2\varphi). \quad (14.28)$$

Получили уравнения для циклоиды. Поскольку  $D > 0$ ,  $t > 0$  и  $a > 0$ , запросим, чтобы

$$\begin{aligned} k > 0 &\rightarrow \varphi \text{ было реальным,} \\ k < 0 &\rightarrow \varphi \text{ — воображаемым,} \\ k = 0 &\rightarrow \varphi \text{ — бесконечно малым.} \end{aligned} \quad (14.29)$$

См. рис. 6.

Все решения отталкиваются от Большого взрыва при  $t = 0$ . Лишь в случае  $k = 1$  циклоида в конце демонстрирует также «большое сжатие». Если  $k \leq 0$ , то не только пространство, но и время будет неограниченным.

Хорошими примерами для тренировки будут случаи  $p = -\rho/3$  и  $p = -\rho$ .

## 15. Гравитационное излучение

Быстро движущиеся объекты представляют собой зависящий от времени источник гравитационного поля, поэтому аргументы причинности (информация в гравитационных полях не должна перемещаться быстрее света) позволяют предположить, что гравитационные эффекты в этом случае распространяются подобно волнам во всех направлениях от источника. Вдали от источника метрика  $g_{\mu\nu}$  будет оставаться близкой к метрике плоского пространства–времени. Для расчета этого

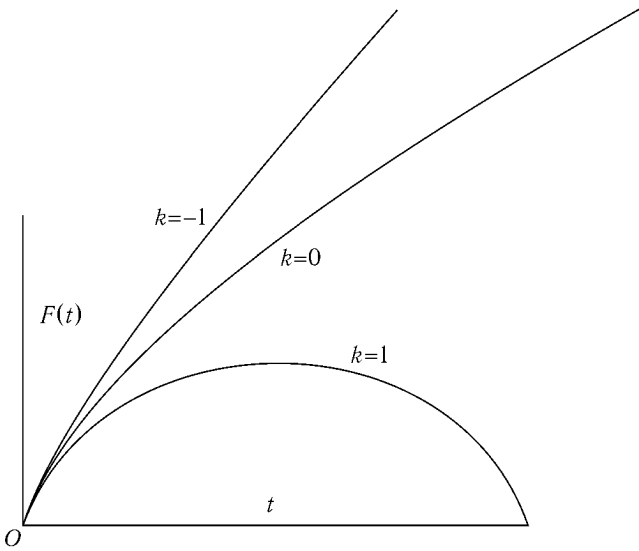


Рис. 6. Вселенная Робертсона–Уолкера при  $\Lambda = 0$ ,  $k = 1$ ,  $k = 0$  и  $k = -1$ .

эффекта можно принять линеаризованное приближение. В отличие от наших действий в предыдущих главах, сейчас удобнее выбрать единицы так, чтобы

$$16\pi G_N = 1. \quad (15.1)$$

Линеаризованные эйнштейновы уравнения уже обсуждались в главе 7, а из главы 9 стало понятно, каким образом, после выбора калибровки, можно вывести волновые уравнения (в отсутствие материи (9.17) можно задать равным нулю). Целесообразно перевести эти уравнения в форму уравнений Эйлера–Лагранжа. Лагранжиан для линейного уравнения, однако, квадратичен по полю. Поэтому нам придется разложить действие Эйнштейна–Гильберта до уравнений второго порядка по возмущениям  $h_{\mu\nu}$  в метрике:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (15.2)$$



и после небольших вычислений мы приходим к заключению, что члены, квадратичные относительно  $h_{\mu\nu}$ , можно записать в виде

$$\sqrt{-g}(R + \mathcal{L}^{\text{мат}}) = \frac{1}{8}(\partial_\sigma h_{\alpha\alpha})^2 - \frac{1}{4}(\partial_\sigma h_{\alpha\beta})^2 - \frac{1}{2}T_{\mu\nu}h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}A_\sigma^2 +$$

+ полная производная + высшие порядки по  $h$ , (15.3)

где

$$A_\sigma = \partial_\mu h_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}\partial_\sigma h_{\mu\mu}, \quad (15.4)$$

а  $T_{\mu\nu}$  представляет тензор энергии-импульса материи (в случае ее наличия). Индексы суммируются как в случае с плоской метрикой  $\eta_{\mu\nu}$ , (7.2).

Лагранжиан инвариантен при линейризованном калибровочном преобразовании (сравните с (8.16) и (8.17)):

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu u_\nu + \partial_\nu u_\mu. \quad (15.5)$$

которое преобразует величину  $A_\sigma$  в

$$A_\sigma \rightarrow A_\sigma + \partial^2 u_\sigma. \quad (15.6)$$

Одним из вариантов выбора калибровочного условия представляется выбор

$$A_\sigma = 0 \quad (15.7)$$

(линейризованная калибровка де Донде). Такая калибровка удобна для вычислений. Однако для лучшего понимания реальных степеней свободы в излучающем гравитационном поле стоит сначала рассмотреть «калибровку излучения» (которая аналогична калибровке для электромагнитного случая  $\partial_i A_i = 0$ ):

$$\partial_i h_{ij} = 0; \quad \partial_i h_{i4} = 0, \quad (15.8)$$

где мы придерживаемся принятого ранее условия относительно того, что индексы при суммировании, взятые из середины алфавита,  $i, j, \dots$ , соответствуют значениям от 1 до 3. Поэтому мы не налагаем условия (15.7).

Сначала рассмотрим «импульсное представление»:

$$h(\vec{x}, t) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3\vec{k} \widehat{h}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}; \quad (15.9)$$

$$\partial_i \rightarrow ik_i. \quad (15.10)$$

Уберем крышечку  $(\cdot)$ , поскольку вероятность возникновения путаницы невелика. Ценность импульсного представления в том, что различные значения  $\vec{k}$  будут независимы, при этом можно будет сосредоточиться лишь на одном векторе  $\vec{k}$  и выбрать координаты так, чтобы он лежал в направлении  $z$ :  $k_1 = k_2 = 0$ ,  $k_3 = k$ . Пусть теперь индексы, обозначения для которых взяты из начала алфавита, имеют значения от 1 до 2. В этом случае калибровка излучения будет иметь вид

$$h_{3a} = h_{33} = h_{30} = 0. \quad (15.11)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} A_a &= -\dot{h}_{0a}, \\ A_3 &= -\frac{1}{2}ik(h_{aa} - h_{00}), \\ A_0 &= \frac{1}{2}(-\dot{h}_{00} - \dot{h}_{aa}). \end{aligned} \quad (15.12)$$

Отделим след  $h_{ab}$ :

$$h_{ab} = \tilde{h}_{ab} + \frac{1}{2}\delta_{ab}h \quad (15.13)$$

при

$$h = h_{aa}; \quad \tilde{h}_{aa} = 0. \quad (15.14)$$

Находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3, \\ \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{4}(\dot{\tilde{h}}_{ab})^2 - \frac{1}{4}k^2\tilde{h}_{ab}^2 - \frac{1}{2}\tilde{T}_{ab}\tilde{h}_{ab}, \end{aligned} \quad (15.15)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}k^2h_{0a}^2 + h_{0a}T_{0a}, \quad (15.16)$$

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{8}\dot{h}^2 + \frac{1}{8}k^2h^2 - \frac{1}{2}k^2hh_{00} - \frac{1}{2}h_{00}T_{00} - \frac{1}{4}hT_{aa}. \quad (15.17)$$

Мы использовали здесь сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned} h^2 &= \int d^3\vec{k} h(\vec{k}, t) h(-\vec{k}, t), \\ k^2 h^2 &= \int d^3\vec{k} k^2 h(\vec{k}, t) h(-\vec{k}, t). \end{aligned} \quad (15.18)$$

Лагранжиан  $\mathcal{L}_1$  имеет обычную форму гармонического осциллятора. Поскольку  $\tilde{h}_{ab} = \tilde{h}_{ba}$ , а  $\tilde{h}_{aa} = 0$ , возможны лишь две степени свободы (составляющие представление группы вращений спина 2 вокруг оси  $\vec{k}$ : спин 2 приписывается гравитонам).  $\mathcal{L}_2$  не содержит кинетического члена и порождает следующее уравнение Эйлера – Лагранжа:

$$h_{0a} = -\frac{1}{k^2} T_{0a}. \quad (15.19)$$

Можно подставить это выражение в  $\mathcal{L}_2$ . Тогда

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2k^2} T_{0a}^2. \quad (15.20)$$

Поскольку кинетических членов больше не имеется, этот лагранжиан непосредственно дает следующий вклад в гамильтониан:

$$\begin{aligned} H_2 &= - \int \mathcal{L}_2 d^3\vec{k} = \int \frac{1}{2k^2} T_{0a}^2 d^3\vec{k} = \\ &= \int \left( \frac{\delta_{ij} - k_i k_j / k^2}{2k^2} \right) T_{0i}(\vec{k}) T_{0j}(-\vec{k}) d^3\vec{k} = \\ &= \frac{1}{2} \int T_{0i}(\vec{x}) [\Delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ij} - E_{ij}(\vec{x} - \vec{y})] T_{0j}(\vec{y}) d^3\vec{x} d^3\vec{y} \end{aligned} \quad (15.21a)$$

$$\text{с } \partial^2 \Delta(\vec{x} - \vec{y}) = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{и} \quad \Delta = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|},$$

$E_{ij}$  — это решения уравнений

$$\partial^2 E_{ij}(\vec{x} - \vec{y}) = \partial_i \partial_j \Delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{и} \quad (x_i - y_i) E_{ij}(\vec{x} - \vec{y}) = 0, \quad (15.21)$$

так что

$$E_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{8\pi|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{(\vec{x} - \vec{y})_i(\vec{x} - \vec{y})_j}{8\pi|\vec{x} - \vec{y}|^3}. \quad (15.21)$$

Таким образом, влияние  $\mathcal{L}_2$  выражается лишь в очень небольших релятивистских поправках к мгновенным взаимодействиям между компонентами Пойнтинга тензора напряжения–энергии–импульса.

В случае с  $\mathcal{L}_3$  мы обнаруживаем, что  $h_{00}$  выступает в качестве множителя Лагранжа. Отсюда порождаемое им уравнение Эйлера – Лагранжа имеет очень простой вид:

$$h = -\frac{1}{k^2}T_{00}, \quad (15.22)$$

а уравнение для  $\mathcal{L}_3$  будет иметь вид

$$\mathcal{L}_3 = -\dot{T}_{00}^2/8k^4 + T_{00}^2 + T_{00}T_{aa}/4k^2. \quad (15.23)$$

Теперь для нашего источника в достаточно хорошем приближении будет выполняться

$$\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (15.24)$$

так что

$$ikT_{3\nu} = \dot{T}_{0\nu} \quad \text{и} \quad ikT_{30} = \dot{T}_{00}, \quad (15.25)$$

и, следовательно, можно записать

$$\mathcal{L}_3 = -T_{30}^2/8k^2 + T_{00}^2/8k^2 + T_{00}T_{aa}/4k^2; \quad (15.26)$$

$$H_3 = -\int \mathcal{L}_3 d^3\vec{k}. \quad (15.27)$$

В этом выражении доминантным будет второй член:

$$\begin{aligned} -\int d^3\vec{k} T_{00}^2/8k^2 &= -\int \frac{T_{00}(\vec{x})T_{00}(\vec{y}) d^3\vec{x} d^3\vec{y}}{8 \cdot 4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} = \\ &= -\frac{G_N}{2} \int \frac{d^3\vec{x} d^3\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} T_{00}(\vec{x})T_{00}(\vec{y}), \end{aligned} \quad (15.28)$$

в который мы вновь ввели постоянную Ньютона. Получился линеаризованный гравитационный потенциал для стационарного распределения масс. Обработку остальных членов следует проводить так, как в (15.21).

Наглядно видно, что в калибровке излучения  $\mathcal{L}_2$  и  $\mathcal{L}_3$  порождают вклады в силы, действующие между источниками. Эти силы кажутся действующими мгновенно, без временной задержки, однако это артефакт, обусловленный выбором данной калибровки. Гравитационное излучение существует, но оно полностью описывается  $\mathcal{L}_1$ . Мы видим, что в качестве источника действует  $\tilde{T}_{ab}$  — пространственноподобная, поперечная часть тензора энергии–импульса, имеющая нулевой след. Рассмотрим теперь небольшой локализованный источник, но лишь для небольшой области  $V$  с размерами, намного меньшими  $1/k$ . Для этого случая можно записать

$$\begin{aligned} \int T^{ij} d^3\vec{x} &= \int T^{kj} (\partial_k x^i) d^3\vec{x} = - \int x^i \partial_k T^{kj} d^3\vec{x} = \\ &= \partial_0 \int x_i T^{0j} d^3\vec{x} = \partial_0 \int x^i (\partial_k x^j) T^{0k} d^3\vec{x} = \\ &= \frac{1}{2} \partial_0 \int \partial_k (x^i x^j) T^{0k} d^3\vec{x} = -\frac{1}{2} \int x^i x^j \partial_k T^{0k} d^3\vec{x} = \\ &= \frac{1}{2} \partial_0^2 \int x^i x^j T^{00} d^3\vec{x}. \end{aligned} \quad (15.29)$$

Это означает, что при интегрировании пространственно-пространственноподобные компоненты тензора энергии–импульса могут быть отождествлены со второй производной по времени *квадрупольного момента* распределения массы  $T_{00}$ .

Хотелось бы узнать, сколько энергии испускается при таком излучении. Для этого вернемся на мгновение к электродинамике, или, еще лучше, к теории скалярного поля. Возьмем лагранжиан вида

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} k^2 \phi^2 - \varphi J. \quad (15.30)$$

Пусть  $J$  будет периодичным по времени:

$$J(\vec{x}, t) = J(\vec{x}) e^{-i\omega t}. \quad (15.31)$$

Тогда решением уравнения поля (см. лекции по классической электродинамике) при больших  $r$  будет

$$\varphi(\vec{x}, t) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int J(x') d^3x'; \quad k = \omega, \quad (15.32)$$

где  $x'$  — запаздывающая позиция при измерении  $J$ . Поскольку носитель  $V$  нашего источника чрезвычайно мал по сравнению с  $1/k$ , то интеграл при этом будет простым пространственноподобным интегралом. Энергия  $P$ , излученная за единицу времени, представлена уравнением

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = P &= 4\pi r^2 \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{k^2}{2} \varphi^2 \right) = \\ &= \frac{k^2}{4\pi} \left| \int J(x') d^3x' \right|^2 = \frac{1}{4\pi} \left| \int \partial_0 J(\vec{x}) d^3x \right|^2. \end{aligned} \quad (15.33)$$

Поскольку в условиях было задано скалярное поле, вывод этого уравнения не представлял трудностей. А если рассмотреть более сложный лагранжиан  $\mathcal{L}_1$  уравнения (15.15)?

Тензор с нулевым следом

$$\widehat{T}_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk} \quad (15.34)$$

содержит 5 независимых компонент. Определим внутренние произведения этих 5 компонент по уравнению

$$\widehat{T}^{(1)} \cdot \widehat{T}^{(2)} = \frac{1}{2} \widehat{T}_{ij}^{(1)} \widehat{T}_{ij}^{(2)}, \quad (15.35)$$

тогда (15.15) будет иметь тот же вид, что и (15.30), если не считать, что в каждом направлении будут действовать лишь 2 из 5 компонент  $\widehat{T}_{ij}$ . Если произвести интегрирование по всем направлениям, окажется, что все компоненты  $\widehat{T}_{ij}$  вносят равные вклады (вследствие сферической инвариантности), однако полная интенсивность будет составлять всего 2/5 от величины, которая бы получилась, если бы вместо  $\widehat{T}_{ab}$  у нас имелся тен-

зор  $\widehat{T}$  из  $\mathcal{L}_1$ . Отсюда полная излучаемая энергия будет равна

$$P = \frac{2k^2}{5 \cdot 4\pi} \cdot \frac{1}{2} \left( \int \widehat{T}_{ij}(\vec{x}) d^3\vec{x} \right)^2 = \\ = \frac{2}{20\pi} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \partial_0^3 \widehat{t}_{ij} \right)^2 = \frac{G_N}{5} (\partial_0^3 \widehat{t}_{ij})^2 \quad (15.36)$$

при (согласно (15.29):

$$\widehat{t}_{ij} = \int \left( x^i x^j - \frac{1}{3} \vec{x}^2 \delta_{ij} \right) T_{00} d^3\vec{x} \quad (15.37)$$

Для стержня длиной  $L$  получаем

$$\widehat{t}_{11} = \frac{1}{18} ML^2, \\ \widehat{t}_{22} = \widehat{t}_{33} = -\frac{1}{36} ML^2. \quad (15.38)$$

Если он вращается с угловой скоростью  $\Omega$ , то каждый из  $\widehat{t}_{11}$ ,  $\widehat{t}_{12}$  и  $\widehat{t}_{22}$  вращается с угловой скоростью  $2\Omega$ :

$$\widehat{t}_{11} = ML^2 \left( \frac{1}{72} + \frac{1}{24} \cos 2\Omega t \right), \\ \widehat{t}_{22} = ML^2 \left( \frac{1}{72} - \frac{1}{24} \cos 2\Omega t \right), \\ \widehat{t}_{12} = ML^2 \left( \frac{1}{24} \sin 2\Omega t \right), \\ \widehat{t}_{33} = -\frac{1}{36} ML^2. \quad (15.39)$$

Уравнения (15.39) выводятся, исходя из предпосылки, что  $\widehat{t}_{ij}$  являются (5-мерным) представлением группы вращений. В энергию, излучаемую за единицу времени, вклад вносит лишь часть, соответствующая вращениям:

$$P = \frac{G_N}{5} (2\Omega)^6 \left( \frac{ML^2}{24} \right)^2 (2 \cos^2 2\Omega t + 2 \sin^2 2\Omega t) = \\ = \frac{2G_N}{45c^5} M^2 L^4 \Omega^6, \quad (15.40)$$

куда, для уравнивания размерности, нами вновь была введена скорость света  $c$ .

Уравнение (15.36) для энергии гравитационного излучения справедливо, если скорость перемещений намного меньше скорости света, а, кроме того, если справедливо линейное приближение. Оно справедливо также в случае, если движущиеся объекты перемещаются за счет расположения в области действия гравитационных полей друг друга (например, двойной пульсар). Однако поскольку при выведении этого уравнения нами принято, что  $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$ , то приведенные выше выводы без дальнейшего обсуждения нельзя считать достаточно обоснованными.



**Герардус т' Хоофт**

**ВВЕДЕНИЕ В ОБЩУЮ ТЕОРИЮ  
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

*Дизайнер М. В. Ботя  
Технический редактор А. В. Ширококов  
Компьютерный набор и верстка С. В. Высоцкий  
Корректор М. А. Ложкина*

---

Подписано в печать 21.02.02. Формат 84 × 108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,04. Уч. изд. л. 5,33.

Гарнитура Антиква. Бумага офсетная №1.

Тираж 1000 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»  
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.

<http://rcd.ru> E-mail: [borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в Ижевской республиканской типографии,  
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.

---