

Цена 1 р. 09 к.

ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ АТОМНЫХ ЯДЕР

539.14

Д-13



А.С. ДАВЫДОВ

ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ АТОМНЫХ ЯДЕР

АТОМИЗДАТ
1967

А. С. ДАВЫДОВ

ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ АТОМНЫХ ЯДЕР



АТОМИЗДАТ МОСКВА 1967

В монографии излагаются основы феноменологической теории возбужденных состояний атомных ядер. Показано, что энергии возбужденных состояний и вероятности электромагнитных переходов в четно-четных, нечетных и нечетно-нечетных ядрах выражаются через небольшое число параметров, характеризующих форму ядра в основном состоянии и ее деформируемость. Исследуются вопросы классификации возбужденных состояний малой энергии. Результаты вычислений представлены в виде таблиц и графиков, которые используются при сравнении теории с экспериментальными данными и могут быть широко применены для проведения дальнейших сравнений результатов теории с экспериментом.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области ядерной физики. Для чтения книги необходимы знания в объеме курсов, читаемых на физических факультетах университетов.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В монографии излагаются основы феноменологической теории возбужденных состояний атомных ядер. Исследуются возбужденные состояния четно-четных и нечетных атомных ядер и вероятности электромагнитных переходов между ними. Показано, что особенности возбужденных состояний существенно зависят от формы ядер в основном состоянии и от их деформируемости.

В феноменологической теории последовательность первых возбужденных состояний и вероятности электромагнитных переходов между ними выражаются через некоторое число (два, три...) феноменологических параметров, являющихся важными характеристиками атомных ядер. Их значения определяются из сравнения теории с результатами экспериментальных исследований. Знание таких параметров, в частности знание параметров поперечной и продольной деформируемости ядер, позволяет предсказать спины, величины энергий многих возбужденных состояний и вероятности переходов между ними. В некоторых случаях при исследовании отношений энергий возбужденных состояний и отношений вероятностей переходов между ними достаточно знания только одного или двух параметров.

Результаты вычислений представлены в виде многочисленных графиков и таблиц, которые могут быть широко использованы для сравнения теории с экспериментом. Проведенное в монографии сравнение теории с экспериментом носит в основном иллюстративный характер и не претендует на полноту.

Для ознакомления с монографией необходимы знания в объеме курсов, читаемых на физических факультетах университетов. Чтобы облегчить чтение, все вычисления проводятся

сравнительно подробно. Этой же цели служит небольшое математическое дополнение.

Автор выражает искреннюю благодарность своим бывшим аспирантам Г. Ф. Филиппову, А. А. Чабану, В. С. Ростовскому, Р. А. Сардаряну, В. В. Пашкевичу, В. И. Овчаренко и Н. С. Работнову, принимавшим участие в 1958—1965 гг. в теоретических исследованиях возбужденных состояний атомных ядер. Изложение результатов этих исследований составляет основную часть монографии. Пользуюсь случаем выразить также большую благодарность профессору Огге Бору, дискуссии с которым послужили стимулом к проведению этих исследований. Автор будет весьма благодарен читателям, которые сообщат ему о всех замеченных недостатках книги.

КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКИХ ЯДРАХ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая ядерная физика стремится создать теорию, объясняющую свойства атомных ядер на основе исследования системы взаимодействующих между собой частиц, входящих в состав ядра. После открытия нейтронов в 1932 г. было окончательно установлено, что все атомные ядра состоят из нейтронов и протонов, между которыми действуют ядерные силы, не зависящие от заряда частиц. По отношению к ядерным силам протоны и нейтроны эквивалентны, поэтому их часто называют общим именем — нуклонами. Хотя состав ядер хорошо известен, теоретическая ядерная физика еще очень далека от решения поставленной задачи. Это связано, с одной стороны, с тем, что пока не изучены достаточно полно силы, действующие между нуклонами, с другой стороны, математические трудности исследования систем, состоящих из десятков и сотен взаимодействующих нуклонов, столь велики, что нельзя надеяться на возможность теоретического расчета свойств отдельных ядер (за исключением самых простейших) без существенной модернизации методов вычислений.

В настоящее время теоретическое изучение свойств атомных ядер сводится в основном к математической интерпретации моделей, отражающих те или иные свойства реальных ядер. Главное требование, предъявляемое к используемой модели ядра, состоит в том, чтобы на ее основе объяснялось возможно большее число экспериментально наблюдающихся закономерностей. В ядерной физике для объяснения различных свойств ядер используется несколько моделей. Несмотря на кажущуюся противоречивость этих моделей, они в значительной степени дополняют друг друга.

Поскольку выбор модели ядра опирается на известные экспериментальные данные, то теория атомного ядра носит феноменологический характер. Несмотря на то что феноменологические теории существенно ограничены, они необходимы, так как помогают находить связь между различными свойствами атомных

ядер, дают их интерпретацию, иногда предсказывают новые закономерности, и, наконец, они необходимы для сознательной постановки новых экспериментальных исследований.

Как показывает опыт [1], плотность нуклонов внутри ядра ($r \leq 1,1 \text{ А}^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ см}$) почти постоянна и быстро, примерно на расстоянии $\sim 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, падает до нуля на границе ядра. Следовательно, с хорошим приближением можно говорить о поверхности и форме атомных ядер.

За последние 15 лет наши представления о форме атомных ядер претерпели значительные изменения. До 1950 г. считали, что все ядра имеют сферическую равновесную форму и что возбужденные состояния ядер сводятся к колебаниям поверхности ядра около равновесной сферической формы и к изменению состояний движения отдельных нуклонов в некотором самосогласованном поле, имеющем сферическую симметрию. Эти представления получили хорошее подтверждение в большом успехе оболочечной модели ядра, предложенной в 1949 г. Гепперт-Майер и Иенсенем [2, 3]. Оболочечная модель ядра дала качественное объяснение магических чисел, спинов и магнитных моментов многих ядер. В то же время было установлено, что наблюдаемые электрические квадрупольные моменты ядер элементов редких земель и многих других почти в 30 раз превышают значения, предсказываемые оболочечной моделью. Эти данные, несомненно, указывали на то, что форма атомных ядер может заметно отличаться от сферической.

Рейнвотер [4] первый дал качественное объяснение заметных нарушений сферической симметрии. Он показал, что форма ядра определяется конкуренцией между нуклонами, входящими в состав заполненных ядерных оболочек, которые стремятся придать ядру сферическую форму, и нуклонами, входящими в состав незаполненных оболочек, которые стремятся придать ему несферическую форму.

Представления о несферической симметрии атомных ядер были положены в основу квазимолекулярной, или обобщенной, модели атомных ядер, предложенной в 1952 г. О. Бором [5]. Эта модель открыла новый этап в теории атомного ядра и объяснила основные закономерности первых вращательных состояний несферических четно-четных ядер. В связи с работами Бора, а затем работами Бора и Моттельсона [6, 7] исследование равновесной формы атомных ядер стало одной из актуальных задач ядерной физики.

В настоящее время установлено, что для многих ядер возбужденные состояния можно приближенно разделить на однонуклонные возбуждения, соответствующие изменениям состояний движения отдельных нуклонов ядра, и коллективные возбуждения, соответствующие одновременному изменению состояний движения многих нуклонов. Вследствие малой сжимаемости ядерного вещества при возбуждениях с энергией, меньшей 10 Мэв, измене-

ние распределения нуклонов в ядре в основном сводится к деформации его формы при сохранении плотности. Поэтому коллективные возбуждения сферических ядер представляют собой колебания поверхности ядра относительно равновесной сферической формы. В несферических ядрах коллективные возбуждения малой энергии связаны с колебаниями поверхности ядра и с вращением ядра в пространстве.

В некотором смысле разделение движений в ядре на коллективные и однонуклонные движения напоминает разделение возбуждений в молекулах на электронные и ядерные движения. Это разделение основано на использовании адиабатического приближения, согласно которому скорости деформации формы ядра и, следовательно, самосогласованного потенциала, действующего на нуклоны, значительно меньше скоростей движения отдельных нуклонов. Поэтому нуклоны успевают «приспособить» свое движение к мгновенному фиксированному значению параметров, определяющих форму ядра. В связи с этим суммарная энергия нуклонов является функцией этих параметров, т. е. потенциальной энергией в уравнении, определяющем коллективные движения. Форма ядра в основном состоянии соответствует значениям параметров, при которых суммарная энергия всех нуклонов принимает наименьшее значение.

Форма ядра и, следовательно, симметрия самосогласованного поля, действующего на нуклоны в ядрах, имеет существенное значение для классификации однонуклонных и коллективных возбужденных состояний в ядрах. В случае сферической симметрии, которая наблюдается в дважды магических и близких к ним ядрах, однонуклонные состояния характеризуются энергией, четностью и квантовыми числами j и Ω , определяющими соответственно квадрат и проекцию углового момента на ось квантования, направление которой произвольно. В ядрах, имеющих аксиальную симметрию, кроме энергии и четности также сохраняется величина проекции Ω углового момента нуклона на аксиальную ось симметрии ядра. В неаксиальных ядрах ни j , ни Ω не являются интегралами движения.

В сферически симметричных ядрах вращательные возбужденные состояния не могут наблюдаться без одновременной деформации ядра. В несферических ядрах среди возбужденных состояний значительную роль играют и вращательные состояния. Таким образом, классификация возбужденных состояний ядер также существенно зависит от характера симметрии самосогласованного поля в ядре, которая определяется средним распределением нуклонов внутри ядра.

Строго говоря, коллективные и однонуклонные возбуждения ядер взаимно связаны, и их разделение сравнительно хорошо выполняется только в четно-четных ядрах, где минимальная энергия однонуклонных возбуждений, из-за эффекта спарива-

ния, равна 1,5—2 Мэв, а энергия коллективных возбуждений значительно меньше. В нечетных ядрах коллективные и одночастичные возбуждения иногда мало отличаются по энергии и адиабатические условия выполняются сравнительно плохо, поэтому при теоретических расчетах приходится рассматривать взаимодействие коллективных и одночастичных возбужденных состояний. Для нечетно-нечетных ядер адиабатические условия выполняются еще хуже. Поэтому теория возбужденных состояний нечетно-нечетных ядер еще слабо развита.

Кроме сравнительно малой энергии, коллективные возбуждения характеризуются большими вероятностями квадрупольных электрических переходов, проявляющимися при излучении γ -квантов, испускании конверсионных электронов и при кулоновском возбуждении атомных ядер. В большинстве случаев вероятности квадрупольных электрических переходов с коллективных возбужденных состояний в основное состояние в десятки и сотни раз превосходят соответствующие вероятности переходов с однонуклонных возбужденных состояний. Большие значения вероятностей являются убедительной характеристикой коллективного движения многих нуклонов в ядре.

В настоящее время все теории коллективных возбужденных состояний атомных ядер носят феноменологический характер и их можно разделить на два типа. В теориях первого типа, к которым относится и обобщенная модель, введенная в работах Бора и Моттельсона [5—7], каждое ядро характеризуется несколькими параметрами. Энергии возбужденных состояний, их мультипольные моменты и вероятности переходов в отдельном ядре выражаются через эти параметры. Таким образом, с одной стороны, удается связать результаты многих экспериментов, относящихся к одному ядру. С другой стороны, найденные значения параметров, определяющих форму и деформируемость ядер, представляют большой интерес для понимания структуры атомного ядра. Как уже указывалось выше, в настоящее время еще нет микроскопической теории ядра, позволяющей провести количественные расчеты формы атомного ядра, ее деформируемости, моментов инерции и других параметров, используемых в феноменологической теории. В связи с этим еще более возрастает роль феноменологической теории, которая позволяет определять эти величины из экспериментальных данных.

В феноменологических теориях второго типа используют экспериментальные параметры, характеризующие взаимодействие нуклонов в целой группе ядер (самосогласованный потенциал, константы спаривательного и квадрупольного взаимодействий), и параметры, характеризующие отдельные ядра (форма ядра). Такие теории позволяют в главных чертах объяснить, как изменяются свойства отдельных ядер (среди некоторой группы ядер) в зависимости от их состава. Оба типа теорий взаимно дополняют друг друга и составляют основу, на которой в даль-

нейшем может быть построена микроскопическая теория ядра.

В этой монографии рассмотрены только теории первого типа и результаты их сравнения с экспериментальными данными.

§ 2. ЭНЕРГИЯ И ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Для исследования колебаний поверхности ядра около равновесной сферической формы введем параметры, характеризующие отклонение формы ядра от сферической формы. Если обозначить через $R(\vartheta, \varphi)$ расстояние от центра ядра до его поверхности в направлении полярных углов ϑ, φ , отсчитываемых в лабораторной системе координат, то при малых отклонениях от сферы радиуса R_0 можно разложить $R(\vartheta, \varphi)$ по сферическим функциям

$$R(\vartheta, \varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^* \right). \quad (2.1)$$

Сферические функции удовлетворяют равенству

$$Y_{\lambda\mu}^* = (-1)^\mu Y_{\lambda, -\mu},$$

поэтому из условия вещественности (2.1) находим

$$\alpha_{\lambda\mu}^* = (-1)^\mu \alpha_{\lambda, -\mu}. \quad (2.2)$$

Малые комплексные величины

$$\alpha_{\lambda\mu} = \int R(\vartheta, \varphi) Y_{\lambda\mu} d\Omega \quad (2.3)$$

являются сферическими тензорными операторами ранга λ , их можно рассматривать как динамические переменные коллективных движений в ядре. Нас будут интересовать коллективные возбуждения малой энергии ($< 3-4$ Мэв), при которых из-за малой сжимаемости ядра его объем остается постоянным. Из условия постоянства объема следует, что в первом порядке по малым отклонениям величина $\alpha_{00} = 0$. Значения $\alpha_{00} \neq 0$ соответствуют радиальным деформациям ядра, приводящим к изменению объема (монопольные колебания). Далее легко видеть, что значение $\lambda = 1$ в сумме равенства (2.1) соответствует смещению ядра как целого. Поскольку нас интересуют только внутренние возбуждения ядра, то в сумме (2.1) следует учитывать только слагаемые с $\lambda \geq 2$. Эта сумма должна быть ограничена и сверху, так как для коллективных возбуждений необходимо, чтобы $\lambda < A^{1/2}$, где A — массовое число.

Деформации, соответствующие $\lambda = 2$, называются *квадрупольными*. Деформации при $\lambda = 3$ — *октупольными* и т.д. Энергия малых колебаний поверхности ядра относительно сфериче-

ской равновесной формы выражается через значения $\alpha_{\lambda\mu}$ и их временные производные с помощью формулы

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu} \left\{ B_{\lambda} \left| \frac{d\alpha_{\lambda\mu}}{dt} \right|^2 + C_{\lambda} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right\}, \quad \lambda \geq 2. \quad (2.4)$$

Колебания заданной мультипольности λ характеризуются двумя параметрами B_{λ} и C_{λ} , которые не зависят от магнитных квантовых чисел. Индекс μ в формуле (2.4) при фиксированном λ пробегает значения $\mu=0 \pm 1, \pm \dots, \pm \lambda$, следовательно, имеется $2\lambda+1$ колебаний типа λ .

В гидродинамической модели ядро рассматривается как несжимаемая жидкость с положительным электрическим зарядом, равномерно распределенным по объему. В этом случае [8]

$$C_{\lambda} = (\lambda - 1) \left\{ (\lambda + 2) R_0^2 \sigma - \frac{3e^2 Z^2}{2\pi R_0 (2\lambda + 1)} \right\},$$

$$B_{\lambda} = \rho R_0^5 \lambda^{-1},$$

где σ — поверхностное натяжение, ρ — плотность ядерного вещества. Как показывает опыт, гидродинамическая модель не отражает реальных свойств ядра. Поэтому приходится рассматривать величины B_{λ} и C_{λ} (или их комбинации) как феноменологические параметры теории, зависящие от детальной структуры ядра.

Переход от классической энергии к квантовому оператору Гамильтона осуществляется обычным путем. Рассматривая $\alpha_{\lambda\mu}$ как динамические переменные («координатное» представление) и вводя сопряженные с ними импульсы

$$\pi_{\lambda\mu} = B_{\lambda} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^*, \quad (2.5)$$

удовлетворяющие перестановочным соотношениям*

$$[\pi_{\lambda\mu}, \alpha_{\lambda'\mu'}] = -i\hbar \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}, \quad (2.6)$$

можно преобразовать классическую энергию к оператору Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu} \{ B_{\lambda}^{-1} |\pi_{\lambda\mu}|^2 + C_{\lambda} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \}. \quad (2.7)$$

Итак, согласно равенству (2.7), оператор Гамильтона колебаний поверхности сферического ядра соответствует системе несвязанных гармонических осцилляторов с частотами

$$\omega_{\lambda} = \sqrt{\frac{C_{\lambda}}{B_{\lambda}}}. \quad (2.8)$$

* Здесь и по всей книге $\hbar \approx 10^{-27}$ эрг·сек.

Энергия колебаний выражается формулой

$$E = \sum_{\lambda, \mu} \left(n_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{\lambda}, \quad (2.9)$$

где $n_{\lambda\mu} = 0, 1, \dots$ — квантовые числа, определяющие число возбужденных состояний типа $\lambda\mu$. Возбужденные состояния с фиксированным значением λ имеют $2\lambda + 1$ кратное вырождение.

Вместо координатного представления удобно использовать представление чисел заполнения. Для этого перейдем к новым операторам $b_{\lambda\mu}$ с помощью соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\lambda\mu} &= \left(\frac{\hbar}{2B_{\lambda} \omega_{\lambda}} \right)^{1/2} [b_{\lambda\mu} + (-1)^{\mu} b_{\lambda, -\mu}^{\dagger}], \\ \pi_{\lambda\mu} &= i \left(\frac{1}{2} \hbar B_{\lambda} \omega_{\lambda} \right)^{1/2} [b_{\lambda\mu}^{\dagger} - (-1)^{\mu} b_{\lambda, -\mu}]. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

С помощью соотношений (2.6) легко убедиться, что новые операторы $b_{\lambda\mu}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[b_{\lambda\mu}, b_{\lambda'\mu'}^{\dagger}] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}. \quad (2.11)$$

Подставляя выражения (2.10) в уравнение (2.7), преобразуем оператор Гамильтона к виду

$$H = \sum_{\lambda, \mu} \hbar \omega_{\lambda} \left(b_{\lambda\mu}^{\dagger} b_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.12)$$

Основное состояние (отсутствуют колебательные возбуждения) характеризуется волновой функцией

$$|0\rangle = 1. \quad (2.13)$$

Одноквантовое возбужденное колебательное состояние типа $\lambda\mu$ характеризуется волновой функцией

$$|1_{\lambda\mu}\rangle = b_{\lambda\mu}^{\dagger} |0\rangle.$$

$n_{\lambda\mu}$ - Квантовое возбужденное состояние характеризуется функцией

$$|n_{\lambda\mu}\rangle = (n_{\lambda\mu}!)^{-1/2} (b_{\lambda\mu}^{\dagger})^{n_{\lambda\mu}} |0\rangle. \quad (2.14)$$

Оператор $b_{\lambda\mu}^{\dagger}$ увеличивает на единицу число возбуждений типа $\lambda\mu$

$$b_{\lambda\mu}^{\dagger} |n_{\lambda\mu}\rangle = \sqrt{n_{\lambda\mu} + 1} |n_{\lambda\mu} + 1\rangle. \quad (2.15)$$

Оператор $b_{\lambda\mu}$ уменьшает на единицу число возбуждений типа $\lambda\mu$

$$b_{\lambda\mu} | n_{\lambda\mu} \rangle = \sqrt{n_{\lambda\mu}} | n_{\lambda\mu} - 1 \rangle. \quad (2.16)$$

Из уравнений (2.15) и (2.16) следует, что

$$b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda\mu} | n_{\lambda\mu} \rangle = n_{\lambda\mu} | n_{\lambda\mu} \rangle. \quad (2.17)$$

Поэтому оператор $b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda\mu}$ можно назвать оператором числа возбуждений или числа фононов типа $\lambda\mu$. Используя выражения (2.12) и (2.17), легко видеть, что в состоянии $| n_{\lambda\mu} \rangle$ энергия ядра равна

$$E_{n_{\lambda\mu}} = n_{\lambda\mu} \hbar\omega_{\lambda} + E_0, \quad (2.18)$$

где

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} (2\lambda + 1) \hbar\omega_{\lambda}$$

нулевая энергия. Из равенства (2.18) следует, что каждому возбуждению типа $\lambda\mu$ соответствует энергия $\hbar\omega_{\lambda}$. Поэтому (2.18) можно преобразовать к виду

$$E_{N_{\lambda}} = \hbar\omega_{\lambda} N_{\lambda} + E_0, \quad (2.18a)$$

где

$$N_{\lambda} = \sum_{\mu} n_{\lambda\mu} = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18b)$$

общее число фононов типа λ .

В связи с тем что $b_{\lambda\mu}$ — сферический тензорный оператор ранга λ (см. Приложение Е), каждое элементарное возбуждение $\lambda\mu$ имеет определенную четность $(-1)^{\lambda}$, определенный квадрат углового момента $L^2 = \hbar^2 \lambda(\lambda + 1)$ и определенную $\hbar\mu$ проекцию углового момента на ось квантования. Оператор проекции на ось квантования z полного углового момента фононов имеет вид

$$L_z = \hbar \sum_{\lambda, \mu} \mu b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda\mu}.$$

Его собственные значения в состояниях $| n_{\lambda\mu} \rangle$ равны

$$\langle n_{\lambda\mu} | L_z | n_{\lambda\mu} \rangle = \hbar \mu n_{\lambda\mu}.$$

Итак, элементарные коллективные возбуждения поверхности сферического ядра можно рассматривать как квазичастицы — *фононы* со спином λ (в единицах $\hbar$) и четностью $(-1)^{\lambda}$. По-

скольку в каждом состоянии $\lambda\mu$ может быть произвольное число фононов и волновые функции этих состояний симметричны относительно перестановки фононов одного типа, то эти квазичастицы удовлетворяют статистике Бозе, т. е. являются бозонами.

Вообще говоря, волновые функции двухфононных возбуждений $|b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda'\mu'}^+|0\rangle$ соответствуют состояниям, не обладающим определенным угловым моментом. Однако линейной комбинацией таких функций при фиксированных λ и λ' можно образовать функции, отвечающие состояниям с четностью $(-1)^{\lambda+\lambda'}$ и определенными угловыми моментами Λ (в единицах $\hbar$), которые удовлетворяют неравенству

$$|\lambda - \lambda'| \leq \Lambda \leq \lambda + \lambda'. \quad (2.19)$$

Такие функции имеют вид

$$\psi_{\Lambda M} = N \sum_{\mu} (\lambda\lambda', \mu, M - \mu | \Lambda M) b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda', M-\mu}^+ |0\rangle, \quad (2.20)$$

где N — множитель нормировки; $(\lambda\lambda', \mu, M - \mu | \Lambda M)$ — коэффициенты векторного сложения (см. Приложение В). Все эти функции, соответствующие разным значениям Λ , удовлетворяющим неравенству (2.19), относятся к состоянию с энергией возбуждения $\hbar(\omega_{\lambda} + \omega_{\lambda'})$.

В частном случае при $\lambda = \lambda'$ двухфононные возбуждения ($N = 2$) имеют энергию $2\hbar\omega_{\lambda}$ и волновые функции

$$\psi_{\Lambda\Lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mu} (\lambda\lambda, \mu, M - \mu | \Lambda M) |b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda\mu}^+|0\rangle. \quad (2.21)$$

Поскольку фононы являются бозонами, то эти функции должны быть симметричны относительно перестановки фононов. Учитывая свойства симметрии [см. Приложение В, равенство (В.6)] коэффициентов векторного сложения

$$(\lambda\lambda, \mu, M - \mu | \Lambda M) = (-1)^{2\lambda - \Lambda} (\lambda\lambda, M - \mu, \mu | \Lambda M),$$

убедимся, что условие перестановочной симметрии функций (2.21) удовлетворяется только для четных значений Λ . Таким образом, с учетом неравенства (2.19) получаем следующие возможные в состоянии N_{λ} значения:

$$\Lambda = 0, 2, 4, \dots, 2\lambda. \quad (2.22)$$

В случае квадрупольных возбуждений ($\lambda = 2$) двухфононные состояния ($N_2 = 2$) имеют энергию $E_2 = 2\hbar\omega_2$, положительную

четность и значения $\Lambda=0, 2, 4$. Двухфононные октупольные состояния ($N_3=2$) имеют энергию $E_2=2\hbar\omega_3$, положительную четность и $\Lambda=0, 2, 4, 6$. Трехфононные квадрупольные возбуждения ($N_2=3$) имеют энергию $3\hbar\omega_2$, положительную четность и пять значений полного углового момента. Квадрупольные возбуждения при $N_2=4,5$ уже не определяются однозначно энергией, угловым моментом и его проекцией на ось квантования. Необходимо введение дополнительного квантового числа (синьорити). При $N_2 \geq 6$ надо ввести два дополнительных квантовых числа.

Полученные выше выражения были связаны с допущением, что коллективные движения обусловлены изменением формы ядра без изменения его объема и не опирались на детальную картину движения ядерного вещества. Допустим теперь, что деформация формы поверхности ядра, определяемая выражением

$$R(\vartheta, \varphi) = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\vartheta, \varphi) \right], \quad (2.23)$$

обусловлена безвихревым перемещением ядерного вещества. Тогда поле скоростей ядерного вещества в точке r, ϑ, φ будет определяться векторами

$$\mathbf{V} = \text{grad } \chi(r, \vartheta, \varphi), \quad (2.24)$$

где потенциал скоростей χ удовлетворяет, согласно условию несжимаемости, уравнению Лапласа

$$\text{div } \mathbf{V} = \nabla^2 \chi = 0.$$

Конечные решения этого уравнения при $r=0$ можно представить в виде

$$\chi = \sum_{\lambda, \mu} \left(\frac{r}{R_0} \right)^\lambda A_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\vartheta, \varphi). \quad (2.25)$$

Коэффициенты $A_{\lambda, \mu}$ в равенстве (2.25) выражаются через коэффициенты деформации $\alpha_{\lambda\mu}$ поверхности ядра с помощью условия

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial r} \right)_{r=R(\vartheta, \varphi)} = \frac{\partial R(\vartheta, \varphi)}{\partial t}.$$

Подставляя в полученное равенство выражения (2.25) и (2.23), находим, удерживая члены первого порядка,

$$\lambda A_{\lambda\mu} = R_0^2 \dot{\alpha}_{\lambda\mu}.$$

Здесь и ниже точка над буквой указывает дифференцирование

по времени. Используя это значение в выражении (2.25), с помощью равенства (2.24) находим

$$\mathbf{v} = \sum_{\lambda, \mu} \frac{\dot{\alpha}_{\lambda\mu}^*}{\lambda R_0^{\lambda-2}} \text{grad}(r^\lambda Y_{\lambda\mu}^*) = \sum_{\lambda, \mu} \frac{\ddot{\alpha}_{\lambda\mu}^*}{\lambda R_0^{\lambda-2}} \text{grad}(r^\lambda Y_{\lambda\mu}).$$

В частности, при квадрупольных деформациях

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \ddot{\alpha}_{2\mu}^* \text{grad}(r^2 Y_{2\mu}). \quad (2.26)$$

Ядерное вещество частично обладает свойствами сверхтекучести, поэтому поле скоростей (2.26) определяет движение не всего ядерного вещества, а только его нормальной части. Предположим, что плотность нормальной части ядерного вещества постоянна, и обозначим ее $\rho_{\text{эфф}}$. Тогда кинетическая энергия коллективного движения в ядре будет определяться интегралом

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \rho_{\text{эфф}} \int |\mathbf{v}|^2 d\tau.$$

Подставляя в интеграл значение скорости (2.26), находим

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{4} R_0^5 \rho_{\text{эфф}} \sum_{\mu} |\dot{\alpha}_{2\mu}^*|^2.$$

Приравнявая это значение кинетической энергии коллективных квадрупольных движений

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} B \sum_{\mu} |\dot{\alpha}_{2\mu}^*|^2,$$

получим выражение плотности нормальной части ядерного вещества через массовый параметр B квадрупольного коллективного движения:

$$\rho_{\text{эфф}} = 2R_0^{-5} B. \quad (2.27)$$

Вычислим теперь классическое выражение для полного углового момента квадрупольных колебаний поверхности ядра. Согласно классической механике, его можно определить интегралом

$$L_{\text{класс}} = \rho_{\text{эфф}} \int [\mathbf{r} \mathbf{V}] d\tau.$$

Подставляя значения (2.26) и (2.27), находим

$$L_{\text{класс}} = B R_0^{-5} \int \sum_{\mu} \dot{\alpha}_{2\mu}^* [\mathbf{r} \text{grad}(r^2 Y_{2\mu})] d\tau. \quad (2.28)$$

Представим оператор grad в виде суммы двух слагаемых

$$\text{grad} = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mathbf{i}}{r^2} [\mathbf{r} \mathbf{l}],$$

где $\mathbf{l} \equiv -i[\mathbf{r} \nabla]$,

тогда

$$[\mathbf{r} \text{ grad} (r^2 Y_{2\mu})] = i r^2 \mathbf{l} Y_{2\mu}.$$

Подставляя это выражение в равенство (2.28), находим классическое выражение для полного углового момента квадрупольных колебаний

$$\mathbf{L}_{\text{класс}} = i B R_0^{-5} \sum_m \dot{\alpha}_{2m}^* \int r^2 \mathbf{l} Y_{2m} d\tau. \quad (2.29)$$

Из выражения (2.29) следует, что плотность углового момента квадрупольных колебаний можно записать в виде

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = i B R_0^{-5} r^2 \sum_m \dot{\alpha}_{2m}^* \mathbf{l} Y_{2m}. \quad (2.30)$$

Вычислим сферическую компоненту полного углового момента (2.29)

$$L_{\mu} = (\mathbf{e}_{\mu} \mathbf{L}_{\text{класс}}) = i B R_0^{-5} \sum_m \dot{\alpha}_{2m}^* \int d\Omega (\mathbf{e}_{\mu} \mathbf{l}) Y_{2m} \int_0^{R(\vartheta\varphi)} r^4 dr. \quad (2.31)$$

С помощью равенства (Б.12) Приложения Б можно преобразовать подынтегральное выражение

$$(\mathbf{e}_{\mu} \mathbf{l}) Y_{2m} = (-1)^{\mu} \sqrt{6} (21, m + \mu, -\mu | 2m) Y_{2, m+\mu}. \quad (2.32)$$

Учитывая в выражении (2.23) только квадрупольные смещения, можно написать

$$\int_0^{R(\vartheta\varphi)} r^4 dr = \frac{R_0^5}{5} \left[1 + \sum_m \alpha_{2m} Y_{2m}^* \right]^5 \approx \frac{R_0^5}{5} \left[1 + 5 \sum_m \alpha_{2m} Y_{2m}^* \right]. \quad (2.33)$$

После подстановки равенств (2.32) и (2.33) в выражение (2.31) и интегрирования по угловым переменным получаем

$$L_{\mu} = i \sqrt{6} (-1)^{\mu} B \sum_m (21, m + \mu, -\mu | 2m) \dot{\alpha}_{2m}^* \alpha_{2, m+\mu}. \quad (2.34)$$

Используя уравнение (2.5), можно выразить сферические проекции (в лабораторной системе координат) углового момен-

та (2.34) непосредственно через импульсы π_{2m} , сопряженные переменным α_{2m} :

$$L_{\mu} = i\sqrt{6}(-1)^{\mu} \sum_m (2I+1, -\mu | 2m) \pi_{2, m} \alpha_{2, m+\mu}. \quad (2.35)$$

Заменив в равенстве (2.35) α_{2m} и π_{2m} операторами, удовлетворяющими перестановочным соотношениям (2.6), получим сферические проекции L_{μ} (в лабораторной системе осей) квантового оператора полного углового момента. Эти операторы коммутируют с оператором Гамильтона для коллективных движений (2.7) и удовлетворяют общим перестановочным соотношениям между сферическими проекциями операторов угловых моментов квантовой механики, т. е.

$$L_{\mu} L_{\nu} - L_{\nu} L_{\mu} = \hbar \sqrt{2} (1\mu\nu | 1z) L_z, \quad (2.36)$$

$$L_{\mu} L^2 - L^2 L_{\mu} = 0,$$

где

$$L^2 = \sum_{\nu} L_{\nu}^* L_{\nu}, \quad \nu = 0, \pm 1.$$

Если ψ_{IM} — собственная функция оператора коллективных движений (2.7), соответствующая состоянию с полным угловым моментом I и проекцией M на ось z лабораторной системы координат, то

$$L_{\mu} \psi_{IM} = \hbar (-1)^{\mu} \sqrt{I(I+1)} (I, M+\mu, -\mu | IM) \psi_{I, M+\mu}. \quad (2.37)$$

Следует отметить, что если бы при вычислении равенства (2.33) были учтены члены более высокого порядка малости, то при переходе к квантовым операторам мы получили бы величины, не коммутирующие с оператором Гамильтона (2.7) и не удовлетворяющие нужным перестановочным соотношениям (2.36). Итак, выражение (2.31) приводит к квантовым операторам, имеющим смысл сферических проекций полного углового момента только в том случае, когда в равенстве (2.33) учитываются только линейные разложения по параметрам деформации $\alpha_{2\mu}$.

§ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Взаимодействие атомных ядер с электромагнитным полем характеризуется электрическими $\mathfrak{M}_m(EI)$ и магнитными $\mathfrak{M}_m(MI)$ мультипольными операторами. Эти операторы являются компонентами сферических тензоров l -го ранга. Электрический мультипольный оператор $\mathfrak{M}_m(EI)$ имеет четность $(-1)^l$,

а магнитный мультипольный оператор $\mathfrak{M}_m(MI)$ имеет четность $(-1)^{l+1}$.

Если длина волны электромагнитного излучения значительно превышает размеры ядер, то можно использовать длинноволновое приближение [8]. В этом случае электрический мультипольный оператор принимает вид

$$\mathfrak{M}_m(EI) = e \sum_{i=1}^Z r_i^l Y_{lm}(\vartheta_i, \varphi_i), \quad (3.1)$$

где e — электрический заряд протона; $r_i, \vartheta_i, \varphi_i$ — сферические координаты i -го протона относительно лабораторной системы координатных векторов, начало которых находится в центре инерции ядра. Суммирование производится по всем Z протонам ядра. Магнитный мультипольный оператор имеет вид

$$\mathfrak{M}_m(MI) = \mu_0 \sum_{i=1}^A \left(g_s(i) \hat{s}_i + \frac{2}{2I+1} g_l(i) \hat{l}_i \right) \nabla [r_i^l Y_{lm}(\vartheta_i, \varphi_i)], \quad (3.2)$$

где $\hat{s}_i$ и $\hat{l}_i$ — операторы спинного и орбитального угловых моментов (в единицах $\hbar$); $g_s(i)$ и $g_l(i)$ — соответствующие гироманнитные отношения. Для нейтрона $g_l=0$, $g_s=-3,83$; для протона $g_l=1$, $g_s=5,587$ в единицах ядерного магнетона $\mu_0 = \frac{eh}{2M_p c}$. Суммирование в уравнении (3.2) производится по всем нуклонам ядра.

Используя операторы (3.1) и (3.2), можно вычислить: а) статические электрические и магнитные моменты атомных ядер в любом стационарном состоянии, если известны волновые функции этих состояний $|i\rangle = |a_i I_i M_i\rangle$; б) вероятности переходов с испусканием или поглощением излучения соответствующей мультипольности между разными состояниями. Статические моменты в состоянии $|i\rangle$ определяются диагональными матричными элементами:

$$\langle i | \mathfrak{M}_m(\lambda I) | i \rangle = \langle a_i I_i M_i | \mathfrak{M}_m(\lambda I) | a_i I_i M_i \rangle, \quad (3.3)$$

где $\lambda=E$ для электрического мультиполя и $\lambda=M$ для магнитного мультиполя. В связи с тем что по отношению к электрическим и ядерным взаимодействиям четность сохраняется, из выражения (3.3) непосредственно следует, что средние значения статических электрических моментов для нечетных l и магнитных моментов для четных l всегда равны нулю. Этот вывод справедлив для любой модели ядра.

Вероятности переходов в единицу времени выражаются формулой (см. § 73 в книге [8])

$$T_{i \rightarrow f}(\lambda I) = \frac{8\pi (l+1)}{\hbar l [(2l+1)!!]^2} k^{2l+1} B_{i \rightarrow f}(\lambda, l), \quad (3.4)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$ — волновой вектор излучения; $(2l+1)!! \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l+1)$;

$$B_{i \rightarrow f}(\lambda, l) = \frac{1}{2I_i + 1} \sum_{mM_i M_f} |\langle f | \mathfrak{M}_m(\lambda, l) | i \rangle|^2, \lambda = E, M \quad (3.5)$$

— приведенная вероятность перехода между состояниями $|i\rangle$ и $|f\rangle$, зависящая от недиагональных матричных элементов операторов мультипольных моментов;

$$\langle f | \mathfrak{M}_m(\lambda, l) | i \rangle \equiv \langle \alpha_f I_f M_f | \mathfrak{M}_m(\lambda, l) | \alpha_i I_i M_i \rangle. \quad (3.6)$$

Поскольку величины $\mathfrak{M}_m(\lambda, l)$ являются тензорными операторами, то применяя теорему Вигнера — Экарта [см. Приложение Ж, равенство (Ж.2)], можно выделить явную зависимость матричных элементов (3.3) и (3.6) от магнитных квантовых чисел

$$\langle f | \mathfrak{M}_m(\lambda, l) | i \rangle = \frac{(I_i l M_i m | I_f M_f)}{\sqrt{2I_f + 1}} \langle \alpha_f I_f || \mathfrak{M}(\lambda l) || \alpha_i I_i \rangle. \quad (3.7)$$

Амплитудные матрицы

$$\langle \alpha_f I_f || \mathfrak{M}(\lambda l) || \alpha_i I_i \rangle \quad (3.8)$$

зависят от внутренних свойств атомных ядер. Подставляя значение (3.7) в равенство (3.5), получим [см. Приложение Ж, равенство (Ж.4)] выражение приведенных вероятностей переходов через значение амплитудных матриц тензорных мультипольных операторов:

$$B(\lambda; i \rightarrow f) = (2I_i + 1)^{-1} |\langle \alpha_f I_f || \mathfrak{M}(\lambda l) || \alpha_i I_i \rangle|^2. \quad (3.9)$$

Операторы $\mathfrak{M}_m(\lambda l)$ являются эрмитовыми тензорными операторами, поэтому амплитудные матрицы удовлетворяют равенству

$$\langle \alpha_f I_f || \mathfrak{M}(\lambda l) || \alpha_i I_i \rangle = (-1)^{I_i - I_f} \langle \alpha_i I_i || \mathfrak{M}(\lambda l) || \alpha_f I_f \rangle.$$

С помощью этого равенства и выражения (3.9) легко найти связь приведенных вероятностей прямого и обратного переходов

$$\frac{B(\lambda; i \rightarrow f)}{B(\lambda; f \rightarrow i)} = \frac{2I_f + 1}{2I_i + 1}. \quad (3.10)$$

Амплитудные матрицы (3.8) зависят от деталей структуры атомных ядер и являются очень важными характеристиками их

свойств. При феноменологическом описании атомных ядер приходится вводить значительные упрощения при вычислении амплитудных матриц. Например, оператор электрического мультипольного момента (3.1) в феноменологической теории заменяется оператором

$$\mathfrak{M}_m(EI) = \int r^I Y_{Im}(\vartheta\varphi) \rho(\mathbf{r}) d\tau, \quad (3.11)$$

где $\rho(\mathbf{r})$ — плотность электрического заряда в ядре.

Дальнейшее упрощение при вычислении оператора (3.11) сводится к предположению, что плотность электрического заряда внутри ядра, ограниченного поверхностью, определяемой выражением (2.1), постоянна

$$\rho = \frac{3eZ}{4\pi R_0^3}$$

и равна нулю вне поверхности ядра. В этом приближении

$$\mathfrak{M}_m(EI) = \frac{3eZ}{4\pi R_0^3} \int_0^{R(\vartheta\varphi)} r^{I+2} dr \int Y_{Im}(\vartheta\varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (3.12)$$

Радиальный интеграл в равенстве (3.12) можно разбить на две

части $\int_0^{R_0} \dots + \int_{R_0}^{R(\vartheta\varphi)} \dots$. Вклад в равенство (3.12) от первого интеграла

при $l \neq 0$ равен нулю; далее $\int_{R_0}^{R(\vartheta\varphi)} r^{I+2} dr = R_0^{I+3} \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^* + \dots$

Подставляя полученные значения в равенство (3.12), находим окончательное выражение с точностью до первого порядка коэффициентов $\alpha_{\lambda\mu}$:

$$\mathfrak{M}_m(EI) = \frac{3eZ}{4\pi} R_0^I \alpha_{Im}. \quad (3.13)$$

Иногда приходится учитывать и квадратичные члены. Тогда, например, при $l=2$

$$\mathfrak{M}_m(E2) = \frac{3eZ}{4\pi} R_0^2 \left\{ \alpha_{2m} - \sqrt{\frac{10}{7\pi}} \sum_{\mu\nu} (22\mu\nu/2m) \alpha_{2\mu} \alpha_{2\nu} \right\}. \quad (3.13a)$$

Используя равенство (2.10), находим оператор мультипольного момента коллективной модели в представлении операторов рождения и уничтожения фононов поверхностных колебаний

$$\mathfrak{M}_m(EI) = \frac{3eZ}{4\pi} \left(\frac{\hbar}{2B_\lambda \omega_\lambda} \right)^{I/2} R_0^I (b_{Im} + (-1)^m b_{I,-m}^+). \quad (3.14)$$

В приближении (3.14) оператор электрического мультипольного момента содержит только первые степени операторов b_{lm} и b_{lm}^+ , поэтому недиагональные матричные элементы этого оператора отличны от нуля только между состояниями вибрационного спектра, отличающимися на единицу по числу фононов, т.е. между состояниями $|n_{lm}\rangle$ и $|n_{lm}\pm 1\rangle$. Переходы между другими состояниями могут быть обусловлены членами разложения оператора (3.12) более высокого порядка малости по сравнению с оператором (3.13). Эти переходы будут маловероятны, и их обычно не учитывают.

Согласно выражению (3.9), приведенная вероятность перехода между основным (бесфононным состоянием $|0\rangle$ и однофононным состоянием $|l\rangle$ определяется равенством

$$B(El; 0 \rightarrow l) = |\langle l | \mathfrak{M}(El) | 0 \rangle|^2. \quad (3.15)$$

Для вычисления амплитудной матрицы рассмотрим равенство (3.7) для частного случая оператора $\mathfrak{M}_0(El)$ при значениях $M_i = M_f = 0$:

$$\langle 0 | \mathfrak{M}_0(El) | 00 \rangle = \frac{(0|00|l0)}{\sqrt{2l+1}} \langle l | \mathfrak{M}(El) | 0 \rangle. \quad (3.16)$$

Учитывая выражение (3.14), имеем

$$\langle 0 | \mathfrak{M}_0(El) | 00 \rangle \approx \frac{3ZeR_0^l}{4\pi} \left(\frac{\hbar}{2B_\lambda \omega_\lambda} \right)^{1/2}.$$

Далее $(0|00|l0) = 1$, поэтому из равенства (3.16) следует

$$\langle l | \mathfrak{M}(El) | 0 \rangle = \frac{3ZeR_0^l}{4\pi} \left(\frac{\hbar(2l+1)}{2B_\lambda \omega_\lambda} \right)^{1/2}.$$

Подставляя это значение в выражение (3.15), имеем

$$B(El; l \rightarrow 0) = \left(\frac{3ZeR_0^l}{4\pi} \right)^2 \frac{\hbar}{2B_\lambda \omega_\lambda}. \quad (3.17)$$

В частном случае приведенная вероятность электрического квадрупольного перехода с первого возбужденного уровня ($l=2$) в основное состояние равна

$$B(E2; 2 \rightarrow 0) = \left[\frac{3ZeR_0^2}{4\pi} \right]^2 \frac{\hbar}{2B_2 \omega_2}. \quad (3.17a)$$

С двухфононного возбужденного уровня спина 2 (который обозначим 2_2) на однофононное возбуждение (2_1) того же спина также возможны переходы типа $E2$. Учитывая вид оператора

ра (3.14) и то, что $b_{lm}|n_{lm}\rangle = \sqrt{n_{lm}}|n_{lm}-1\rangle$, легко найти простую связь между приведенными вероятностями $E2$ -переходов

$$B(E2; 2_2 \rightarrow 2_1) = 2B(E2; 2_1 \rightarrow 0). \quad (3.176)$$

Из вида оператора (3.14) также следует, что средние значения электрических моментов любой мультипольности в каждом стационарном состоянии сферического ядра равны нулю

$$\langle i | \mathfrak{M}_m(EI) | i \rangle = 0. \quad (3.18)$$

Вид операторов магнитных мультипольных моментов (3.2) в феноменологических теориях существенно зависит от состояния движения нуклонов. При исследовании коллективных возбуждений малой энергии приходится вводить разные операторы для четно-четных и нечетных ядер.

В четно-четных ядрах при малых энергиях возбуждения ($\sim$ до 2 Мэв) вследствие эффекта спаривания суммарные спин-моменты как протонов, так и нейтронов равны нулю. Поэтому для возбужденных состояний, в которых не нарушается эффект спаривания, оператор (3.2) можно записать в более простой форме

$$\mathfrak{M}_m(ML) = \frac{2\mu_0}{L+1} \sum_{i=1}^Z g_i(i) \hat{1}(i) \nabla [r_i^L \cdot Y_{Lm}(\varphi_i \Phi_i)], \quad (3.19)$$

где $\hat{1}$ — оператор орбитального углового момента в единицах $\hbar$. Дальнейшее существенное упрощение состоит в замене выражения (3.19) выражением

$$\mathfrak{M}_m(ML) = \frac{2\mu_0}{\hbar(L+1)} g_R \int R(r) \nabla [r^L Y_{Lm}(\theta \Phi)] d\tau, \quad (3.20)$$

где $R(r)$ — оператор плотности орбитального момента количества движения ядерного вещества (2.30): g_R — гидромагнитное отношение для коллективного движения.

Вероятность магнитных мультипольных переходов быстро убывает при возрастании L , поэтому обычно рассматривают только оператор магнитного дипольного момента ($L=1$). Учитывая [см. Приложение А, равенство (А. 11)], что

$$\nabla(rY_{1m}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \mathbf{e}_m, \quad (3.21)$$

можно преобразовать выражения (3.19) и (3.20) для $M1$ -операторов к виду

$$\mathfrak{M}_m(M1) = \mu_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{i=1}^Z g_i(i) \hat{l}_m(i), \quad (3.22)$$

где

$$\hat{l}_m = (\mathbf{e}_m \hat{\mathbf{l}});$$

$$\mathfrak{M}_m(M1) = \mu_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} g_R h^{-1} \int R_m(\mathbf{r}) d\tau, \quad (3.23)$$

где $R_m(\mathbf{r}) = [\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{R}(\mathbf{r})]$ — сферические проекции в лабораторной системе оператора плотности углового момента (2.30) ядерного вещества в точке $\mathbf{r}$. Интеграл в равенстве (3.23) определяет [в приближении (2.33)] сферические проекции $l_m = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{l}$ полного углового момента ядра в единицах $\hbar$. Следовательно,

$$\mathfrak{M}_m(M1) = \mu_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} g_R (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{l}). \quad (3.23a)$$

Недиагональные матричные элементы l_m -проекций полного углового момента равны нулю для всех состояний коллективного движения, отличающихся значениями угловых моментов или другими квантовыми числами. Поэтому в четно-четных ядрах в приближении, при котором справедливы соотношения (3.20) и (2.33), магнитные дипольные переходы между такими состояниями равны нулю.

В нечетных ядрах спины нуклонов не спарены и вклад в оператор магнитного мультипольного момента (3.2) будут давать спиновые и орбитальные моменты нуклонов. Перепишем оператор (3.2) для случая магнитного дипольного момента в виде

$$\mathfrak{M}_m(M1) = \sum_{i=1}^A \mu(i) \nabla(r_i Y_{1m}(\vartheta_i \Phi_i)), \quad (3.24)$$

где

$$\mu(i) = \mu_0 (g_s(i) \hat{s}_i + g_l(i) \hat{l}_i) \quad (3.25)$$

оператор магнитного момента i -го нуклона. В качестве модели нечетного ядра часто используют систему, состоящую из одного (внешнего) нуклона и четно-четного остова ядра. Выделяя в равенстве (3.24) слагаемые, относящиеся к внешнему нуклону, и заменяя оставшуюся часть, относящуюся к четно-четному остову, оператором (3.23a), получим

$$\mathfrak{M}_m(M1) = \mu_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} g_R I_m + \mu \nabla(r Y_{1m}(\vartheta \Phi)),$$

где I_m — сферические проекции оператора углового момента остова ядра. Подставляя оператор (3.25) в это выражение и учитывая равенство (3.21), можно написать

$$\mathfrak{M}_m(M1) = \mu_0 (g_s \hat{s}_m + g_l \hat{l}_m + g_R R_m) \sqrt{\frac{3}{4\pi}}. \quad (3.26)$$

Пусть $\mathbf{I}$ и $\mathbf{j}$ — операторы полных угловых моментов ядра и внешнего нуклона, тогда

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{j}, \quad \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{j} - \mathbf{s}.$$

В этом случае оператор (3.26) преобразуется к виду

$$\mathfrak{M}_m(M1) = \mu_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \{ (g_s - g_l) \hat{s}_m + (g_l - g_R) j_m + g_R I_m \}. \quad (3.27)$$

В некоторых случаях вместо равенства (3.25) можно использовать непосредственную связь оператора полного момента нуклона и оператора магнитного момента

$$\mu(i) = g_j(i)j,$$

где g_j — полное гиромагнитное отношение. При этом удобно вместо оператора (3.27) использовать выражение

$$\mathfrak{M}_m(M1) = \mu_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \{ (g_j - g_R) j_m + g_R I_m \}, \quad (3.28)$$

где j_m и I_m — соответственно сферические проекции (на оси лабораторной системы координат) операторов моментов нуклона и всего ядра.

§ 4. КВАДРУПОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО ЯДРА В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ВНУТРЕННИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Среди различных типов колебаний поверхности атомных ядер наибольшее значение имеют квадрупольные колебания, при которых форма ядра в лабораторной системе координат, согласно выражению (2.1), описывается в каждый момент времени пятью комплексными переменными $\alpha_{2\mu}$ с помощью выражения

$$R(\vartheta, \varphi) = R_0 \left[1 + \sum_{\mu=-2}^2 \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}^*(\vartheta, \varphi) \right]. \quad (4.1)$$

Энергия квадрупольных колебаний малой амплитуды определяется переменными $\alpha_{2\mu}$ и их производными по времени

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \{ B |\dot{\alpha}_{2\mu}|^2 + C |\alpha_{2\mu}|^2 \}. \quad (4.2)$$

Здесь и ниже точкой над буквой указана производная по времени.

Свяжем с ядром систему ортогональных координатных осей ξ, η, ζ , ориентация которой относительно лабораторной системы определяется тремя углами Эйлера $\theta \equiv \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$. В новой системе координат («собственная система» ядра) поверхность ядра характеризуется выражением

$$R(\vartheta', \varphi') = R_0 \left[1 + \sum_{\nu=-2}^2 a_{\nu} Y_{2\nu}^*(\vartheta', \varphi') \right], \quad (4.3)$$

где $a_{\nu} = (-1)^{\nu} a_{-\nu}^*$; ϑ' и φ' — полярные углы в новой системе координат.

Для нахождения связи между переменными a_{ν} и переменными $\alpha_{2\mu}$ преобразуем сферические функции $Y_{2\mu}(\vartheta\varphi)$ к новым осям. Пользуясь правилом (Г.8) Приложения Г, имеем

$$Y_{2\mu}^*(\vartheta, \varphi) = \sum_{\nu} \dot{D}_{\mu\nu}^2(\theta) Y_{2\nu}^*(\vartheta', \varphi'),$$

где $\dot{D}_{\mu\nu}^2$ — функция Вигнера, определенная в Приложении Г. Подставляя это соотношение в равенство (4.1) и сравнивая полученное выражение с выражением (4.3), находим

$$a_{\nu} = \sum_{\mu} \alpha_{2\mu} \dot{D}_{\mu\nu}^2(\theta) \quad (4.4)$$

или

$$\alpha_{2\mu} = \sum_{\nu} \dot{D}_{\mu\nu}^2(\theta) a_{\nu}. \quad (4.5)$$

Равенства (4.5) определяют канонические преобразования от переменных $\alpha_{2\mu}$ к новым переменным a_{ν} . Не нарушая общности, можно выбрать систему осей $\xi\eta\zeta$ такой, чтобы

$$a_1 = a_{-1} = 0, \quad a_2 = a_{-2}. \quad (4.6)$$

Тогда из пяти величин a_{ν} только две a_0 и a_2 будут независимыми. Их можно считать вещественными. Удобно вместо a_0 и a_2 взять другие две независимые вещественные переменные β и γ , определяемые равенствами

$$a_0 = \beta \cos \gamma, \quad a_2 = a_{-2} = \beta \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}}. \quad (4.7)$$

Подставляя значения (4.7) в равенство (4.5), получим общее каноническое преобразование к новым переменным

$$\alpha_{2\mu} = \beta \cos \gamma \cdot \dot{D}_{\mu 0}^2(\theta) + \beta \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}} [\dot{D}_{\mu 2}^2(\theta) + \dot{D}_{\mu, -2}^2(\theta)]. \quad (4.7a)$$

Итак, с помощью канонических преобразований (4.7а) можно осуществить переход от пяти комплексных переменных α_{2i} к пяти вещественным переменным $\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3$.

Переменные β и γ определяют форму ядра относительно системы координатных осей ξ, η, ζ , поэтому их можно назвать внутренними переменными. Три угла Эйлера θ_1, θ_2 и θ_3 характеризуют поворот координатных осей ξ, η, ζ , т. е. поворот ядра относительно лабораторной системы.

С помощью равенств (4.5) и (4.7) находим

$$\beta^2 = \sum_{\nu} a_{\nu}^2 = \sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2. \quad (4.8)$$

Следовательно, переменная β^2 характеризует суммарное квадратичное отклонение формы ядра от сферы. Переменную $\beta \geq 0$ будем называть *параметром деформации*.

Подставляя значения (4.7) в выражение (4.3), имеем

$$\frac{R(\vartheta', \varphi') - R_0}{R_0} = \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \{ (3 \cos^2 \vartheta' - 1) \cos \gamma + \\ + \sqrt{3} \sin^2 \vartheta' \cos 2\varphi' \cdot \sin \gamma \}. \quad (4.9)$$

Форма ядра, определяемая выражением (4.9), близка к эллипсоиду. Главные полуоси этого эллипсоида R_1, R_2, R_3 получаются из выражения (4.9), если положить последовательно ϑ', φ' равными $(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (0, 0)$. Введем величины

$$\xi_{\lambda} = \frac{R_{\lambda} - R_0}{\beta R_0 \sqrt{\frac{5}{4\pi}}}, \quad (4.10)$$

характеризующие относительное отклонение (в единицах $\beta R_0 \sqrt{\frac{5}{4\pi}}$) главных осей ядра от радиуса R_0 равновеликой сферы. Тогда из выражения (4.9) находим

$$\xi_{\lambda} = \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \lambda\right), \quad \sum_{\lambda} \xi_{\lambda} = 0, \quad \lambda = 1, 2, 3. \quad (4.11)$$

Переменная γ называется *параметром формы ядра*, или *параметром асимметрии*. Она характеризует отклонение формы ядра от симметрии вращения. Зависимость величин ξ_i от переменной γ изображена на рис. 1. Максимальная асимметрия наблюдается при $\gamma = \pi/6$. При изменении γ от нуля до $\pi/3$ форма ядра изменяется (при фиксированном β) от вытянутого до

сплюснутого эллипсоида вращения. Другие значения $\gamma \left(\frac{\pi}{3} \leq \gamma \leq 2\pi \right)$ приводят к таким же формам ядра (если учесть, что наименование осей произвольно). Поэтому за основной интервал изменения γ можно взять интервал

$$0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{3}. \quad (4.12)$$

Значение β всегда предполагается положительным

$$\beta > 0. \quad (4.13)$$

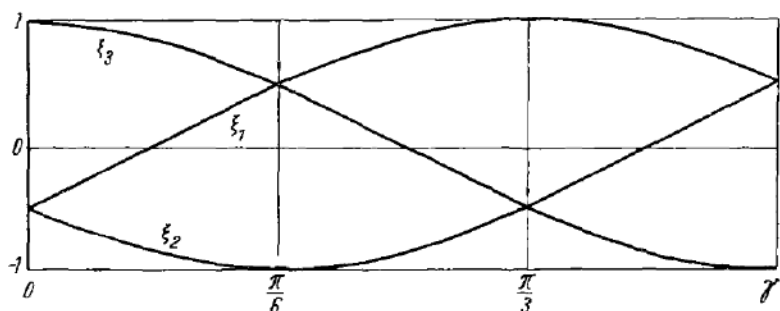


Рис. 1. Относительные отклонения ξ_i трех главных осей ядра от радиуса сферы того же объема в зависимости от параметра γ .

Преобразуем энергию (4.2) колебаний поверхности ядра к новым переменным $\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3$. Принимая во внимание уравнение (4.8), мы убедимся, что потенциальная энергия поверхностных колебаний сферического ядра выражается только через переменную деформации β и не зависит от γ

$$\frac{1}{2} C \sum_{\mu} |x_{2\mu}|^2 = \frac{1}{2} C \beta^2. \quad (4.14)$$

Для преобразования кинетической энергии

$$K = \frac{1}{2} B \sum_{\mu} |\dot{x}_{2\mu}|^2 \quad (4.15)$$

к новым переменным продифференцируем равенство (4.5) по времени

$$\dot{\alpha}_{2\mu} = \sum_{\nu} (\dot{\alpha}_{\nu} D_{\mu\nu}^2 + \alpha_{\nu} \dot{D}_{\mu\nu}^2).$$

Подставляя это выражение в уравнение (4.15) и учитывая равенство

$$\sum_{\mu, \nu, \nu'} \{ \dot{a}_{\nu} a_{\nu'} D_{\mu\nu}^2 \dot{D}_{\mu\nu'}^{2*} + a_{\nu} \dot{a}_{\nu'} \dot{D}_{\mu\nu}^2 \dot{D}_{\mu\nu'}^{2*} \} = 0,$$

преобразуем кинетическую энергию к сумме двух слагаемых [5]

$$K = K_v + K_r,$$

где

$$K_v = \frac{1}{2} B \sum_{\mu, \nu, \nu'} \dot{a}_{\nu} a_{\nu'} D_{\mu\nu}^2 \dot{D}_{\mu\nu'}^{2*} = \frac{1}{2} B (\dot{\beta}^2 + \beta^2 \dot{\gamma}^2) \quad (4.16)$$

— кинетическая энергия поверхностных колебаний в системе координат, связанной с ядром;

$$K_r = \frac{1}{2} B \sum_{\mu, \nu, \nu'} a_{\nu} a_{\nu'} \dot{D}_{\mu\nu}^2 \dot{D}_{\mu\nu'}^{2*} \quad (4.17)$$

— энергия вращения.

Используя выражения (Д.15) Приложения Д для производных функций $D_{\mu\nu}^2$ по времени, имеем

$$K_r = \frac{1}{2} B \sum_{\lambda, \nu, \nu', \lambda'} a_{\nu} a_{\nu'} \omega_{\lambda} \omega_{\lambda'} \langle 2\nu' | I_{\lambda} I_{\lambda'} | 2\nu \rangle,$$

где ω_{λ} и I_{λ} — проекции угловой скорости и углового момента (в единицах $\hbar$) на оси ξ, η, ζ . Учитывая далее, что, согласно значениям (4.6), суммирование в этом выражении происходит только по четным значениям ν и ν' , получим следующее выражение для энергии вращения:

$$K_r = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \omega_{\lambda}^2 J_{\lambda},$$

где

$$J_{\lambda} = B \sum_{\nu, \nu'} a_{\nu} a_{\nu'} \langle 2\nu' | I_{\lambda}^2 | 2\nu \rangle$$

— главные моменты инерции ядра. Используя также значения матричных элементов [см. равенство (Д.11) Приложения Д]:

$$\langle 2\nu' | I_{\zeta}^2 | 2\nu \rangle = \nu^2 \delta_{\nu\nu'};$$

$$\langle 2\nu' | I_{\xi}^2 | 2\nu \rangle = \langle 2\nu' | I_{\eta}^2 | 2\nu \rangle = \left[3 - \frac{1}{2} \nu^2 \right] \delta_{\nu\nu'};$$

$$\begin{aligned} \langle 2, \nu + 2 | I_{\xi}^2 | 2\nu \rangle &= - \langle 2, \nu + 2 | I_{\eta}^2 | 2\nu \rangle = \\ &= - \frac{1}{4} \sqrt{(2-\nu)(1-\nu)(3+\nu)(4+\nu)} \end{aligned}$$

и значения (4.7), получим окончательные выражения для главных моментов инерции относительно осей ξ, η, ζ

$$J_{\lambda} = 4B\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \lambda \frac{2\pi}{3} \right). \quad (4.18)$$

Таким образом, классическая энергия коллективных движений четно-четного ядра, имеющего равновесную сферическую форму, в новых переменных записывается в виде

$$E = \frac{1}{2} \left\{ C\dot{\beta}^2 + B(\dot{\beta}^2 + \beta^2 \dot{\gamma}^2) + \sum_{\lambda=1}^3 \omega_{\lambda}^2 J_{\lambda} \right\}. \quad (4.19)$$

Угловые скорости можно выразить через временные производные от трех углов Эйлера. Следовательно, выражение (4.19) содержит пять динамических переменных $\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3$.

Если ввести проекции углового момента на главные оси ядра, используя соотношения

$$L_{\lambda} = \omega_{\lambda} J_{\lambda},$$

то равенство (4.19) можно записать в виде

$$E = \frac{1}{2} \left\{ C\dot{\beta}^2 + B(\dot{\beta}^2 + \beta^2 \dot{\gamma}^2) + \sum_{\lambda=1}^3 \frac{L_{\lambda}^2}{J_{\lambda}} \right\}. \quad (4.19a)$$

Совершая переход от классического выражения (4.19) к оператору Гамильтона по общим правилам квантовой механики (см. Паули [9], Бор [5], Давыдов [10]) для случая криволинейных координат, получим квантовый оператор Гамильтона

$$H = \frac{\hbar^2}{2B} \left\{ T_{\beta} + \frac{1}{\beta^2} [T_{\gamma} + T_{\text{rot}}] \right\} + \frac{1}{2} C\dot{\beta}^2, \quad (4.20)$$

где

$$T_{\beta} = -\beta^{-4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right); \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{\beta^2} T_{\gamma} = -\frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] \quad (4.22)$$

операторы кинетической энергии (в единицах $\frac{\hbar^2}{2B}$) поверхностных колебаний в системе координатных осей, связанных с ядром;

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{4} \sum_{\lambda=1}^3 a_{\lambda}(\gamma) J_{\lambda}^2 \quad (4.23)$$

оператор энергии вращения (в единицах $\frac{\hbar^2}{2B\beta^2}$) ядра, главные моменты инерции которого определяются выражением (4.18). При этом

$$a_\lambda(\gamma) = \left[\sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\lambda\right) \right]^{-2}, \quad (4.24)$$

и I_λ — проекции (в единицах $\hbar$) на координатные оси ξ, η, ζ полного углового момента ядра, действующие на функции, зависящие от углов Эйлера. Эти проекции удовлетворяют перестановочным соотношениям $[I_1, I_2] = -iI_3 \dots$, которые отличаются знаком от перестановочных соотношений проекций углового момента на оси лабораторной системы.

Весьма существенно, что уравнение (4.20) получается каноническим преобразованием уравнения (4.2) к новым переменным $\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ без использования дополнительных приближений. Поэтому это уравнение точно соответствует уравнению (4.2).

Собственные функции оператора (4.20) являются функциями двух внутренних переменных β и γ и трех углов Эйлера. Они определяются в пространстве

$$0 \leq \beta < \infty, \quad 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$$

с элементом объема

$$d\tau = \beta^4 |\sin(3\gamma)| \sin \theta_2 d\beta d\gamma d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \quad (4.25)$$

Собственные функции оператора (4.20), соответствующие состояниям с определенным значением полного углового момента (квантовое число I), могут быть представлены в виде произведения двух функций

$$\Psi_I(\beta, \gamma, \theta) = f_I(\beta) \Phi_I(\gamma, \theta), \quad (4.26)$$

которые удовлетворяют двум уравнениям

$$\left\{ T_\gamma + \frac{1}{4} \sum_{\lambda} a_\lambda(\gamma) I_\lambda^2 - \Lambda \right\} \Phi_I(\gamma, \theta) = 0, \quad (4.27)$$

$$\left\{ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{\beta^2}{\beta_{00}^4} + \frac{\Lambda}{\beta^2} - \frac{2BE}{\hbar^2} \right\} f_I(\beta) = 0, \quad (4.28)$$

где

$$\beta_{00}^2 \equiv \hbar(BC)^{-1/2}. \quad (4.29)$$

Решение уравнения (4.28) для любого значения параметра разделения Λ может быть найдено в общем виде. Положим

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{B}}, \quad f_I(\beta) = \beta^{-2} \varphi_I(\beta) \quad (4.30)$$

и введем новую переменную

$$z = \left(\frac{\beta}{\beta_{00}} \right)^2, \quad (4.31)$$

тогда из уравнения (4.28) для функции $\varphi(z)$ следует уравнение

$$\left\{ z \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} - \frac{z}{4} + \frac{\Lambda + 2}{4z} + \frac{E}{2\hbar\omega} \right\} \varphi(z) = 0.$$

Полагая

$$E = 2\hbar\omega \left(n + s + \frac{1}{2} \right); \quad (4.32)$$

$$\Lambda + 2 = 4s \left(s - \frac{1}{2} \right), \quad s = \frac{1}{4} (1 + \sqrt{9 + 4\Lambda}); \quad (4.33)$$

$$\varphi(z) = z^s W(z) \exp\left(-\frac{z}{2}\right), \quad (4.34)$$

находим уравнение для функции $W(z)$

$$\left\{ z \frac{d^2}{dz^2} + \left(2s + \frac{1}{2} - z \right) \frac{d}{dz} + n \right\} W(z) = 0.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее необходимым граничным условиям, выражается при целых положительных значениях n через вырожденную гипергеометрическую функцию

$$W(z) = F\left(-n, 2s + \frac{1}{2}; z\right)$$

или через функцию Лагерра

$$L_n^c(z) \equiv \frac{1}{n!} e^z z^{-c} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^{n+c})$$

с помощью

$$W(z) = \frac{n! \Gamma\left(2s + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + 2s + \frac{1}{2}\right)} L_n^{2s-1/2}(z).$$

Учитывая выражения (4.34) и (4.30), получим окончательно

$$\varphi_{ns}(\beta) = \left\{ \frac{2\Gamma\left(n + 2s + \frac{1}{2}\right)}{\beta_{00} n! \Gamma^2\left(2s + \frac{1}{2}\right)} \right\}^{1/2} \left(\frac{\beta}{\beta_{00}} \right)^{2s} F\left(-n, 2s + \frac{1}{2}; \frac{\beta^2}{\beta_{00}^2}\right). \quad (4.35)$$

Функция (4.35) удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^\infty \varphi_{ns}^2(\beta) d\beta = 1.$$

Квантовое число s в функции (4.35) выражается с помощью равенств (4.33) через значение Λ , которое определяется уравнением (4.27). Величина Λ зависит от полного спина I возбужденного состояния ядра.

Прежде чем переходить к решению уравнения (4.27), рассмотрим условия симметрии, которым должны удовлетворять функции $\Phi(\gamma, \theta)$. При переходе от переменных $\alpha_{2\mu}$ к новым переменным $\beta, \gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ с помощью унитарных преобразований (4.5) и (4.7) только переменная $\beta \geq 0$ определяется однозначно, так как

$$\beta^2 = \sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2.$$

Значения остальных четырех переменных $\gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ зависят от выбора наименования осей ξ, η, ζ и от выбора направлений отсчета по каждой из них. Эта неоднозначность значений переменных $\gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ не должна сказываться на функциях $\Phi(\gamma, \theta)$. Другими словами, эти функции должны быть инвариантными относительно указанного выше преобразования координатных осей. Переход от одной праввинтовой системы координат ξ, η, ζ к другой, отличающейся наименованием осей и направлением отсчета, как показал О. Бор [5], может быть осуществлен при использовании операторов

$$R_{n_1 n_2 n_3} = R_1^{n_1} R_2^{n_2} R_3^{n_3},$$

где n_i — целые положительные числа; оператор R_1 изменяет направление отсчета по осям η и ζ ; R_2 поворачивает оси ξ и η вокруг оси ζ на 90° ; R_3 соответствует циклической перестановке этих осей.

Действие операторов R_1 и R_2 на переменные γ, θ определяется равенствами

$$R_1(\gamma, \theta) = (\gamma, \pi + \theta_1, \pi - \theta_2, -\theta_3), \quad R_1^2 = 1; \quad (4.36)$$

$$R_2(\gamma, \theta) = \left(-\gamma, \theta_1, \theta_2, \theta_3 + \frac{\pi}{2}\right), \quad R_2^4 = 1. \quad (4.37)$$

Учитывая свойства D -функций Вигнера (см. Приложение Г), убедимся, что действие этих операторов на D -функции характеризуется равенствами

$$\left. \begin{aligned} R_1 D'_{MK}(\theta) &= \exp \{i\pi(I+K)\} D'_{M,-K}(\theta), \\ R_2 D'_{MK}(\theta) &= \exp \left\{i \frac{\pi}{2} K\right\} D'_{M,K}(\theta). \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Действие оператора R_3 на переменную γ , согласно равенствам (4.11), сводится к преобразованию

$$R_3 \gamma = \gamma - \frac{2\pi}{3}. \quad (4.39a)$$

Циклическая перестановка осей ξ, η, ζ может быть осуществлена последовательным поворотом на углы Эйлера: $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$R_3 D'_{M,K}(\theta) = \sum_{K'} D'_{M,K'}(\theta') D'_{K',K} \left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad R_3^3 = 1. \quad (4.39b)$$

Будем искать решения уравнения (4.27), удовлетворяющие рассмотренным выше условиям симметрии, в виде

$$\Phi_I(\gamma, \theta) = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} \sum_K D'_{M,K}(\theta) A_{I,K}(\gamma), \quad (4.40)$$

где $D'_{M,K}(\theta)$ — функции Вигнера. Условие инвариантности функций (4.40) относительно неоднозначности выбора осей ξ, η, ζ сводится к требованию выполнения равенств

$$R_1^{n_1} R_2^{n_2} R_3^{n_3} \left\{ \sum_K D'_{M,K}(\theta) A_{I,K}(\gamma) \right\} = \sum_{\underline{K}} D'_{M,\underline{K}}(\theta) A_{I,\underline{K}}(\gamma),$$

где n_1, n_2, n_3 — целые положительные числа. Используя формулы (4.38), (4.39a) и (4.39b), убедимся, что эти равенства выполняются, если

$$A_{I,K}(\gamma) = \exp \{i\pi(I+K)\} A_{I,-K}(\gamma); \quad (4.41a)$$

$$A_{I,K}(\gamma) = \exp \left\{i\pi \frac{K}{2}\right\} A_{I,K}(-\gamma); \quad (4.41b)$$

$$A_{I,K}(\gamma) = \exp \{i\pi K\} A_{I,K}(\gamma); \quad (4.41b)$$

$$A_{I,K}(\gamma) = \sum_{K'} D'_{K,K'} \left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) A_{I,K'} \left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (4.41r)$$

Из равенства (4.41в) следует, что

$$A_{I,K}(\gamma) = 0, \text{ если } K \text{ — нечетное число.} \quad (4.42)$$

Далее, из условия (4.41а) находим

$$A_{I,K}(\gamma) = (-1)^I A_{I,-K}(\gamma). \quad (4.43)$$

Поэтому функцию (4.40) можно записать в виде

$$\Phi_{I,M}(\gamma, \theta) = \sum_{K \geq 0} |IMK\rangle A_{I,K}(\gamma), \quad (4.44)$$

где K принимают только четные значения и

$$|IMK\rangle = \left[\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\epsilon_{0K})} \right]^{1/2} \{D_{M,K}^I(\theta) + (-1)^I D_{M,-K}^I(\theta)\}. \quad (4.44a)$$

Рассмотрим решения уравнений (4.27), соответствующие состояниям с определенным спином.

Состояния нулевого спина ($I=0$)

В этих состояниях $I=M=K=0$ вращение ядра отсутствует. Функция (4.44) сводится к функции $A_0(\gamma)$, зависящей только от переменной γ и удовлетворяющей уравнению

$$[T_\gamma - \Lambda(0)] A_0(\gamma) = 0. \quad (4.45)$$

Согласно условию (4.41б) и (4.41г), функция $A_0(\gamma)$ должна быть четной функцией γ с периодом $\frac{2\pi}{3}$, т. е. $A_0(\gamma)$ может быть функцией от $\cos 3\gamma$. В интервале $0 \leq \gamma \leq \frac{2\pi}{3}$ функция A_0 однозначна. В этом интервале значений γ элемент объема $d\tau = |\sin 3\gamma| d\gamma$. Таким условиям симметрии и уравнению (4.45) удовлетворяют функции

$$A_{0\lambda}(\gamma) = \left[\frac{3}{2} (2\lambda + 1) \right]^{1/2} P_\lambda(\cos 3\gamma), \quad (4.46)$$

соответствующие собственным значениям

$$\Lambda(0) = 9\lambda(\lambda + 1); \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots \quad (4.47)$$

$P_\lambda(x)$ — полиномы Лежандра.

Подставляя значения (4.47) в уравнение (4.33), находим

$$s = 1 + \frac{3}{2}\lambda. \quad (4.48)$$

Следовательно, согласно равенствам (4.32) и (4.48), энергия возбужденных состояний нулевого спина равна

$$E_{n\lambda}(0) = \hbar\omega \left[2n + 3\lambda + \frac{5}{2} \right]. \quad (4.49)$$

Энергии возбуждений (4.49) зависят от двух квантовых чисел $n, \lambda=0,1 \dots$ и образуют систему эквидистантных уровней. Каждому значению энергии соответствует волновая функция

$$\Psi_{n\lambda}(\beta, \gamma) = \beta^{-2} \varphi_{n\lambda}(\beta) A_{0\lambda}(\gamma), \quad (4.50)$$

где

$$\varphi_{n\lambda}(\beta) = N_{n\lambda} \left(\frac{\beta}{\beta_{00}} \right)^{2+3\lambda} F \left(-n, 3\lambda + \frac{5}{2}; \frac{\beta^2}{\beta_{00}^2} \right) e^{-\frac{\beta^2}{2\beta_{00}^2}}; \quad (4.51)$$

$$N_{n\lambda} = \left[\frac{2\Gamma \left(n + 3\lambda + \frac{5}{2} \right)}{n! \beta_{00} \Gamma^2 \left(3\lambda + \frac{5}{2} \right)} \right]^{1/2}.$$

В основном состоянии ядра $n=\lambda=0$. Поэтому энергия основного состояния $E_{00}(0) = \frac{5}{2}\hbar\omega$.

Волновая функция основного состояния зависит только от переменной β и равна

$$\varphi_{00}(\beta) = \left[\frac{8}{3\beta_{00} \sqrt{\pi}} \right]^{1/2} z e^{-\frac{z}{2}}, \quad z \equiv \frac{\beta^2}{\beta_{00}^2}. \quad (4.52)$$

Среднее значение квадрата амплитуды нулевых β -колебаний в основном состоянии

$$\langle 00 | \beta^2 | 00 \rangle = \frac{5}{2} \beta_{00}^2. \quad (4.53)$$

Первое возбужденное состояние нулевого спина соответствует квантовым числам $n=1, \lambda=0$. Его энергия

$$E_{10}(0) = E_{00}(0) + 2\hbar\omega. \quad (4.54)$$

Волновая функция этого состояния также зависит только от переменной β

$$\varphi_{10}(\beta) = \left[\frac{20}{3\beta_{00} \sqrt{\pi}} \right]^{1/2} z \left(1 - \frac{2}{5} z \right) e^{-z/2}. \quad (4.55)$$

Второе возбужденное состояние нулевого спина соответствует квантовым числам $n=0$, $\lambda=1$. Энергия этого состояния

$$E_{01}(0) = E_{00}(0) + 3\hbar\omega$$

и волновая функция

$$\Psi_{001}(\beta, \gamma) = \beta^{-2} \Phi_{00}(\beta) \sqrt{\frac{9}{2}} \cos 3\gamma, \quad (4.56)$$

где функция $\Phi_{00}(\beta)$ определена уравнением (4.52). Аналогичным путем можно найти другие более высокие возбужденные состояния нулевого спина.

Возбужденные состояния с отличным от нуля спином будут определяться волновыми функциями, зависящими и от углов Эйлера. Весьма существенно, что эти функции нельзя представить в виде произведения функции, зависящей только от γ , и функции, зависящей от углов Эйлера. Другими словами, в состояниях с $I \neq 0$ вращательное движение неразрывно связано с γ -колебаниями поверхности ядра. Возбужденные состояния квадрупольного типа при $I=1$ невозможны, так как в этом случае единственное допустимое четное значение $K=0$ и согласно равенству (4.43)

$$A_{10}(\gamma) = -A_{10}(\gamma) = 0. \quad (4.57)$$

Для нахождения решений уравнения (4.27) при $I \geq 2$ надо подставить в это уравнение функции (4.44) при фиксированных значениях I и M . После умножения полученного уравнения на функции $|IMK\rangle$ и интегрирования по углам Эйлера находим при учете значений матричных элементов (Д.12) — (Д.14) Приложения Д систему дифференциальных уравнений, определяющих функции $A_{IK}(\lambda)$. Решения этих уравнений рассмотрены в работах [11—14]. Ниже приводятся значения энергий и волновых функций первых возбужденных состояний со спином $I \geq 2$.

Возбужденные состояния со спином 2

Такие возбужденные состояния характеризуются значениями $K=0, 2$. Состояния, описываемые волновыми функциями

$$\Phi_{2M}^{(1)}(\gamma, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |2M0\rangle \cos \gamma + |2M2\rangle \sin \gamma \}, \quad (4.58)$$

имеют [см. формулы (4.33), (4.32)]

$$\Lambda(2) = 4, \quad s = \frac{3}{2} \quad (4.59)$$

и энергию

$$E_{n,1}(2) = E_{00} + \hbar\omega(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.60)$$

Полная волновая функция определяется формулами (4.26), (4.31), (4.35), (4.44), (4.58) при $s=3/2$ и $n=0, 1, 2 \dots$. Второй тип возбужденных состояний спина 2 описывается волновыми функциями

$$\Phi_{2M}^{(2)}(\gamma, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |2M0\rangle \cos 2\gamma - |2M2\rangle \sin 2\gamma \} \quad (4.61)$$

при $\Lambda=10, s=2$. Энергии возбужденных состояний этого типа выражаются формулой

$$E_{n, 2}(2) = E_{00}(0) + \hbar\omega(2n + 2). \quad (4.62)$$

Значениям $\Lambda=28, s=3$ и энергиям

$$E_{n, 3}(2) = E_{00}(0) + \hbar\omega(2n + 4)$$

соответствует функция

$$\Phi_{2M}^{(3)}(\gamma, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ 3 \cos \gamma \cdot \Phi_{2M}^{(1)}(\gamma, \theta) - \Phi_{2M}^{(2)}(\gamma, \theta) \},$$

где $\Phi_{2M}^{(1)}$ и $\Phi_{2M}^{(2)}$ определены формулами (4.58) и (4.61). Используя выражения (4.58) и (4.61), можно определить и другие типы состояний, обладающих спином 2.

Возбужденные состояния со спином 3

Возможны четные значения $K=0, 2$. Как видно из уравнения (4.43),

$$A_{30}(\gamma) = -A_{30}(\gamma) = 0,$$

поэтому функция (4.44) содержит только одно слагаемое

$$\Phi_{3M}^{(\lambda)}(\gamma, 0) = |3M2\rangle A_{3,2}^{(\lambda)}(\gamma). \quad (4.63)$$

Состояниям, описываемым функциями (4.63), соответствует энергия

$$E_{n, 3}(3) = E_{00}(0) + \hbar\omega(2n + 3\lambda + 3)$$

и

$$s = 1 + \frac{3}{2}\lambda, \quad \lambda = 0, 1, 2 \dots$$

При

$$\lambda = 0, A_{3,2}^{(0)}(\gamma) = N \sin 3\gamma.$$

В общем случае

$$A_{3,2}^{(1)} = N_{\lambda} P_{\lambda}^1 (\cos 3\gamma),$$

где P_{λ}^1 — присоединенный полином Лежандра.

Итак, наиболее характерная особенность энергетического спектра коллективных возбужденных состояний сферических ядер состоит в их эквидистантности и большой кратности вырождения. В табл. 1 указаны энергии и спины первых возбужденных состояний сферических ядер.

Таблица 1

Энергии и спины первых возбужденных состояний сферических ядер

$E(I) - E(0)$	Полный спин I	$E(I) - E(0)$	Полный спин I
0	0	$2\hbar\omega$	0; 2; 4
$\hbar\omega$	2	$3\hbar\omega$	0; 2; 3; 4; 6
			

Несомненно, что сферическую форму в основном состоянии имеют дважды магические и близкие к ним ядра. Однако ни одно из таких ядер, как показывает опыт, не имеет такой простой картины энергетического спектра, которая предсказывается теорией квадрупольных колебаний сферической поверхности ядра. У некоторых ядер с магическим числом нейтронов и протонов (0^{16} , Ge^{72} , Zr^{90}), равновесная форма основного состояния которых близка к сферической, первое возбужденное состояние имеет спин, равный 0, а не 2 (см. табл. 1). У ядер Ca^{42} , Ge^{70} , Ce^{140} энергия уровня со спином 0 мало отличается от энергии первого возбужденного уровня со спином 2, что также противоречит табл. 1. У некоторых четно-четных ядер (Cd^{114} , Pd^{110} и пр.) первое возбужденное состояние имеет спин, равный 2, следующие возбужденные состояния со спинами 2; 4 и 0 располагаются группой. Делались попытки отождествления этих уровней с ожидаемым согласно вибрационной теории триплетом уровней энергии $2\hbar\omega$. Для объяснения экспериментальных данных теория усложнялась путем введения кубических членов в разложении потенциальной энергии по степеням отклонений от сферической симметрии или путем введения взаимодействия колебаний поверхности ядра с одионуклонными состояниями. Так, Шарф-Гольдгабер и Венисер [15] рассмотрели слабое взаимодействие четырех $f_{7/2}$ -нуклонов с колебаниями сферической поверхности. Рац [16] и Макдональд [17] исследовали влияние связи двух $f_{7/2}$ -нуклонов, взаимодействующих между собой и с колебаниями поверхности ядра. Вилетс и Жан [11] ввели потенциальную энергию поверхностных колебаний с положением равновесия, не

совпадающим со значением $\beta_0=0$ и не зависящим полностью от γ (« γ -нестабильный» потенциал). Керман и Шакин [18] добавили к потенциальной энергии поверхностных колебаний кубические члены, Тамура и Комаи [19] ввели дополнительную потенциальную энергию вида $\sum_n k_n (\beta - \beta_0)^n \cos^n 3\gamma$, Овчаренко [20] исследо-

вал влияние малых продольных и поперечных отклонений поверхности ядра от сферической формы. Все эти попытки, так же как и попытки развить так называемую микроскопическую теорию [21—23], не привели к удовлетворительным количественным результатам. Причина этого, по-видимому, заключается в том, что в упомянутых выше работах обычно исследовалось влияние одного из факторов: взаимодействие с внешними нуклонами, ангармоничность колебаний поверхности, малая несферичность и т. д. В действительности же все эти влияния в почти сферических ядрах, по-видимому, одинаково существенны, и их следует рассматривать одновременно, что приводит к большим математическим трудностям.

КОЛЛЕКТИВНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДЕР

§ 5. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ЯДРА КАК ФУНКЦИЯ ПАРАМЕТРОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ЕГО ФОРМУ

Энергетический спектр одночастичных возбужденных состояний в четно-четных ядрах начинается с энергии 1,5—2,5 Мэв. Возбуждения меньших энергий носят коллективный характер. В частности, первое возбужденное состояние, имеющее спин 2, как правило, относится к коллективным возбуждениям. Зависимость энергии первого возбужденного состояния ряда четно-четных ядер от числа нейтронов изображена на рис. 2. Из рисунка видно, что по мере приближения числа нейтронов и числа протонов к магическим числам энергия первого возбужденного уровня возрастает. Если исключить ядра, непосредственно примыкающие к дважды магическим ядрам, то энергия первого возбужденного уровня спина 2 будет меньше энергии однонуклонных возбуждений. Для этих ядер сравнительно хорошо выполняется адиабатическое приближение, т. е. суммарная энергия всех нуклонов в ядре зависит от формы ядра как от параметра. В первом приближении можно рассматривать только квадрупольные отклонения формы ядра от сферы. В этом случае в качестве параметров, определяющих форму ядра, можно использовать переменные β и γ , введенные в § 3. При изменении β и γ адиабатически изменяется суммарная энергия всех нуклонов ядра, следовательно, энергия $E_i = V_i(\beta, \gamma)$ является потенциальной энергией поверхностных колебаний ядра, нуклоны которого находятся в состоянии $|i\rangle$.

Значения β_0^i и γ_0^i , соответствующие минимуму $V_i(\beta, \gamma)$, характеризуют равновесную форму ядра в данном состоянии $|i\rangle$ однонуклонных движений. Последние сами зависят от формы ядра (т. е. от значений β_0^i и γ_0^i), так как форма ядра, в свою очередь, определяет симметрию самосогласованного поля, действующего на нуклоны, и, следовательно, определяет энергию однонуклонных состояний. В частности, вычисление $V(\beta, \gamma)$ в основном состоянии ядра, когда однонуклонные движения соответствуют минимальной (при фиксированных β и γ) энергии, сводится к решению самосогласованной задачи.

Вычисление равновесной формы ядра впервые было проведено О. Бором [5] для простейшей модели ядра, представляющей собой сферически симметричный остов и один внешний нуклон. Потенциальная энергия изменения формы остова определялась функцией

$$V(\beta) = \frac{1}{2} C \beta^2. \quad (5.1)$$

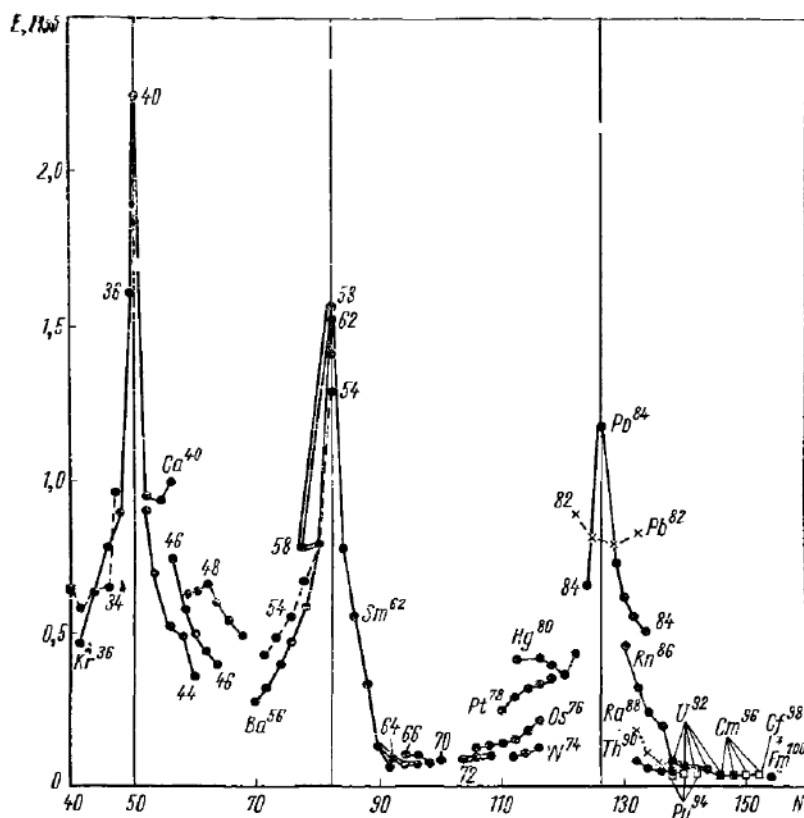


Рис. 2. Зависимость энергии первого возбужденного состояния четно-четных атомных ядер от числа нейтронов.

Оператор энергии взаимодействия внешнего нуклона с остовом выбирался в виде

$$H_{int} = a\beta \{ (3\hat{j}_3^2 - \hat{j}^2) \cos \gamma + \sqrt{3} (\hat{j}_1^2 - \hat{j}_2^2) \sin \gamma \}, \quad (5.2)$$

где

$$a = \frac{k}{j(j+1)},$$

k — некоторая постоянная, равная по порядку величины кинетической энергии внешнего нуклона; $\hat{j}$ — оператор полного углового момента внешнего нуклона; $\hat{j}_1, \hat{j}_2, \hat{j}_3$ — его проекции на оси, связанные с остовом. Выражение (5.2) справедливо для случая, когда спин-орбитальное взаимодействие внешнего нуклона велико по сравнению с H_{int} и, следовательно, угловой момент $\hat{j}$ внешнего нуклона является хорошим интегралом движения.

Усреднив оператор (5.2) по состоянию движения $|j\Omega\rangle$ внешнего нуклона, получим энергию $\epsilon_{j\Omega}(\beta, \gamma)$ как функцию координат остова β и γ . Значения β_0 и γ_0 , соответствующие минимуму функции $\epsilon_{j\Omega}(\beta, \gamma) + \frac{1}{2}C\beta^2$, определяют равновесную форму ядра.

Полная энергия внешнего нуклона равна сумме

$$E = E_0 + \epsilon_{j\Omega}(\beta, \gamma),$$

где E_0 — энергия нуклона в сферически симметричном поле остова. Состояние движения внешнего нуклона можно представить в виде суперпозиции состояний $|j\Omega\rangle$, где j и Ω — соответственно квантовые числа полного углового момента и его проекции на ось Z . Тогда энергия $\epsilon_j(\beta, \gamma)$ будет определяться уравнением

$$\text{Det} \{ \epsilon_j(\beta, \gamma) \delta_{\Omega\Omega'} - \langle j\Omega | H_{int} | j\Omega' \rangle \} = 0. \quad (5.3)$$

Отличные от нуля матричные элементы оператора (5.2) равны

$$\left. \begin{aligned} \langle j\Omega | H_{int} | j\Omega \rangle &= a\beta [3\Omega^2 - j(j+1)] \cos \gamma, \\ \langle j, \Omega + 2 | H_{int} | j\Omega \rangle &= \langle j\Omega | H_{int} | j, \Omega + 2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} a\beta [3(j-\Omega)(j-\Omega-1)(j+\Omega+1)(j+\Omega+2)]^{1/2} \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

О. Бор [5] исходил из предположения, что равновесная форма ядра имеет аксиальную симметрию. Если ось Z совпадает с аксиальной осью симметрии, то Ω в первом приближении является хорошим квантовым числом и в уравнении (5.3) можно учесть только диагональные матричные элементы.

Тогда

$$\epsilon_{j\Omega}(\beta, \gamma) = a\beta [3\Omega^2 - j(j+1)] \cos \gamma.$$

В этом случае

$$\min \left\{ \epsilon_{j\Omega}(\beta, \gamma) + \frac{1}{2} C\beta^2 \right\}$$

соответствует $\gamma_0=0$ (вытянутый эллипсоид вращения), если $3\Omega^2 - j(j+1) < 0$, и $\gamma_0=\pi$ (сплюснутый эллипсоид вращения) при $3\Omega^2 - j(j+1) > 0$.

Если отказаться от предположения о наличии аксиальной оси симметрии, то необходимо в уравнении (5.3) учесть и недиагональные матричные элементы. Такие расчеты были проделаны Филипповым [24]. Используя выражения (5.4) из уравнения

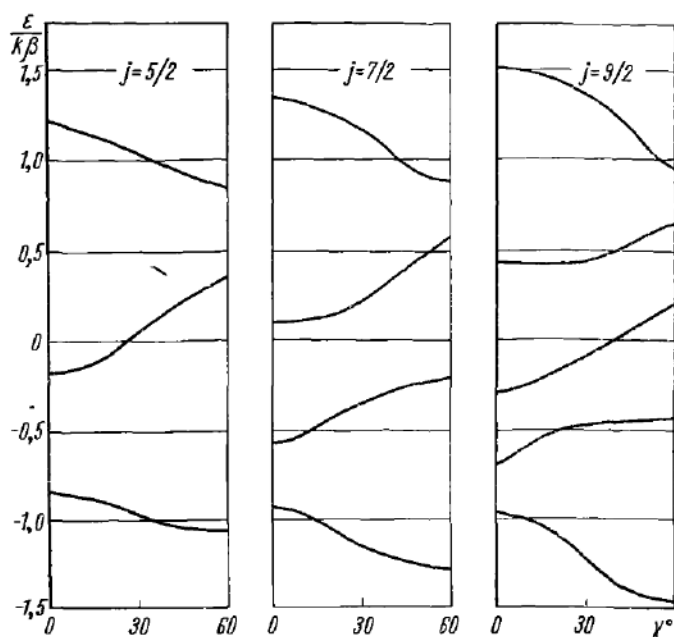


Рис. 3. Энергия однонуклонных состояний в ядрах в зависимости от параметра γ .

(5.3), для каждого значения j , можно получить уравнения, определяющие одночастичные энергии $\epsilon_j(\beta, \gamma)$, например:

$$\left. \begin{aligned} x &= 0, \text{ если } j = \frac{1}{2}; \quad x^2 = 9, \text{ если } j = \frac{3}{2}; \\ x^3 - 84x - 150 \cos 3\gamma &= 0, \text{ если } j = \frac{5}{2}; \\ x^4 - 378x^2 - 1728x \cos 3\gamma + 8505 &= 0, \text{ если } j = \frac{7}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

где

$$x \equiv \frac{j(j+1)}{\kappa\beta} \epsilon_j(\beta, \gamma).$$

На рис. 3 приведены полученные Филипповым [24] зависимости $\epsilon_j(\beta, \gamma)$ от γ при $j=5/2$, $j=7/2$ и $j=9/2$. Из рисунка следует,

что один внешний нуклон в указанных состояниях создает аксиально симметричную деформацию остова ядра, соответствующую сплюснутому эллипсоиду вращения.

Полученные результаты были использованы Филипповым для качественного исследования формы атомных ядер, имеющих несколько внешних нуклонов вне дважды магического остова. Если пренебречь взаимодействием между внешними нуклонами, то $\epsilon(\beta, \gamma)$ равно сумме одночастичных энергий. При этом если нуклоны заполняют одну оболочку менее чем на половину, то энергия $\epsilon(\beta, \gamma)$ имеет минимум при $\gamma=60^\circ$ и максимум при $\gamma=0^\circ$. Исключение составляет лишь конфигурация с тремя нуклонами в оболочке 5, 2, минимум энергии которой лежит при $\gamma=30^\circ$. Если нуклоны заполняют более чем половину состояний одной оболочки, то минимум энергии $\epsilon(\beta, \gamma)$ соответствует значению $\gamma=0^\circ$, а максимум — значению $\gamma=60^\circ$. Филиппов также показал, что при одновременном заполнении нейтронами и протонами нескольких оболочек равновесная форма ядра может не иметь аксиальной симметрии. Такие случаи соответствуют, например, конфигурациям:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^1\left(\frac{7}{2}\right)^{-1}; \left(\frac{5}{2}\right)^1\left(\frac{7}{2}\right)^{-3}; \left(\frac{5}{2}\right)^2\left(\frac{7}{2}\right)^{-1}; \\ \left(\frac{5}{2}\right)^2\left(\frac{7}{2}\right)^{-3}; \left(\frac{5}{2}\right)^1\left(\frac{9}{2}\right)^{-1} \text{ и пр.}$$

Возможность неаксиальной формы ядра была отмечена и в вычислениях Гейликмана [25] и Заикина [26], рассмотревших равновесную форму ядра для конкретных видов одночастичного потенциала без учета спин-орбитального взаимодействия и остаточного взаимодействия между нуклонами.

Согласно уравнениям (5.5), для ядер, в которых внешние нуклоны частично заполняют состояния с $j \geq 5, 2$, их суммарная одночастичная энергия зависит не только от параметра β , как в случае сферических ядер (§ 3), но и от $\cos 3\gamma$, т. е.

$$\epsilon(\beta, \gamma) = \beta F(\cos 3\gamma).$$

Поэтому в этих ядрах в адиабатическом приближении потенциальная энергия квадрупольных поверхностных колебаний (в основном состоянии по однонуклонным движениям) может быть записана в виде

$$V(\beta, \gamma) = \frac{1}{2} C \beta^2 + \beta F(\cos 3\gamma). \quad (5.6)$$

Явный вид функции $F(\cos 3\gamma)$ определяется внутренней структурой ядра. В общем случае при малых отклонениях от равновесных положений можно написать

$$V(\beta, \gamma) = \frac{1}{2} C (\beta - \beta_0)^2 + \frac{1}{2} \beta \beta_0 C_\gamma (\gamma - \gamma_0)^2, \quad (5.7)$$

где параметры C, C_γ, β_0 и γ_0 должны определяться микротеорией ядра или рассматриваться как феноменологические величины, характеризующие каждое ядро. Потенциальная энергия (5.7) записана в таком виде, что для ядер со сферической равновесной формой ($\beta_0=0$) функция $V(\beta, \gamma) = 1/2 C \beta^2$.

Интересные расчеты потенциальной энергии $V(\beta, \gamma)$ для ядер среднего и большого массового числа проведены в работах Престона и сотр. [27, 28] на основе расчета однонуклонных состояний с учетом эффектов спаривательного взаимодействия между нуклонами. В этих работах однонуклонные состояния вычислялись в два этапа. Вначале находились энергетические уровни анизотропного гармонического осциллятора, видоизмененного учетом спин-орбитального взаимодействия $C(\hat{1}\hat{s})$ и поправочного члена $D\hat{1}^2$, введенного Нильссоном [29], т. е. исследовались решения уравнения

$$\left\{ -\frac{\hbar}{2M} \nabla^2 + \frac{M}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \omega_\lambda^2 x_\lambda^2 + C(\hat{1}\hat{s}) + D\hat{1}^2 - \epsilon_v \right\} \psi_v = 0, \quad (5.8)$$

где значения частот ω_λ зависят от параметров деформации β и γ с помощью соотношений

$$\omega_\lambda = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \sqrt{\frac{5}{4\pi} \beta \cos\left(\gamma + \frac{\pi\lambda}{3}\right)}}}, \quad \omega_1 \omega_2 \omega_3 = \omega_0^3. \quad (5.9)$$

Решения уравнения (5.8) находили при фиксированных значениях параметров C, D, ω_0 для каждой пары значений β и γ . Каждому энергетическому уровню ϵ_v соответствуют два состояния ψ_v и ψ_{-v} , где ψ_{-v} — состояние, обращенное по времени к состоянию ψ_v . Если бы не было остаточного взаимодействия между нуклонами, то, заполняя уровни ϵ_v протонами и нейтронами в соответствии с принципом Паули, можно было бы определить $V(\beta, \gamma) = \sum_v \epsilon_v$. В работах [27, 28] учитывались изменения, обусловленные спаривательным взаимодействием между нуклонами. Учет спаривательного взаимодействия сводился к диагонализации оператора Гамильтона

$$H = \sum_v \epsilon_v (a_v^\dagger a_v + a_{-v}^\dagger a_{-v}) - G \sum_{v, v'} a_v^\dagger a_{-v}^\dagger a_{-v'} a_{v'}, \quad (5.10)$$

где $a_v^\dagger, a_v$ — операторы рождения и уничтожения однонуклонных состояний с энергией ϵ_v , рассчитанных при решении уравнения (5.8); G — константа спаривательного взаимодействия.

Если рассматривать ядра, у которых нейтроны и протоны занимают различные состояния, то между ними можно не учитывать спаривательного взаимодействия. Тогда выражение (5.10)

распадается на два независимых гамильтониана: один для нейтронов, другой для протонов. Константы спаривательного взаимодействия принимались разными для протонов и нейтронов. Для нейтронов $G_N = 0,14$ Мэв; для протонов $G_p = 0,171$ Мэв. Такой выбор G частично учитывал кулоновское взаимодействие между протонами.

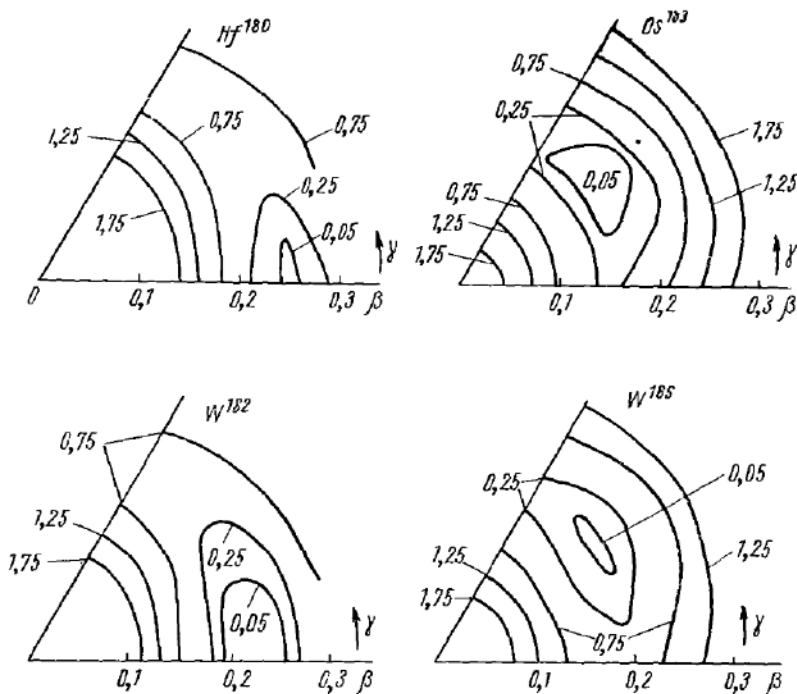


Рис. 4. Зависимость потенциальной энергии V от параметров β и γ . Экипотенциальные значения энергии в мегаэлектронвольтах указаны числами у кривых.

На рис. 4 приведены результаты расчетов потенциальной энергии $V(\beta, \gamma)$ для ядер Hf^{180} , W^{182} , W^{186} и Os^{188} , выполненных Гани, Дас Гупта и Престоном [28]. Значения β отложены вдоль радиусов, значения γ определяются углом поворота радиуса от направления горизонтальной оси. Кривые соответствуют расчетам, при которых параметры самосогласованного потенциала выбирались такими же, как и в работе Моттельсона и Нильсона [30]. Энергии отсчитываются от минимального значения, соответствующего $\gamma = \gamma_0$ и $\beta = \beta_0$.

Значения $V(\beta, \gamma)$ зависят от выбора параметров C , D , ω_0 и G , однако, как отмечают авторы работы [28], при одной и той же совокупности параметров ядра с массовыми числами, лежа-

щими в интервале $154 \leq A \leq 182$, имеют значения $\beta > 0,2$ и $\gamma_0 = 0$. Ядра с массовыми числами, лежащими в интервале $184 \leq A \leq 192$, имеют значения $\beta_0 \leq 0,2$ и $\gamma_0 \neq 0$. Потенциальная энергия $V(\beta, \gamma)$ ядер последнего типа имеет сравнительно слабую зависимость от γ , что указывает на возможность нулевых γ -колебаний с большой амплитудой. При $\beta_0 = 0$ потенциальная энергия совершенно не зависит от γ . Указанным на рис. 4 ядрам соответствуют следующие значения β_0 и γ_0 : $\beta_0 = 0,25$, $\gamma_0 = 0$ для Hf^{180} ; $\beta_0 = 0,23$, $\gamma_0 = 0$ для W^{182} ; $\beta_0 = 0,2$, $\gamma_0 = 35^\circ$ для W^{186} и $\beta_0 = 0,16$, $\gamma_0 = 38^\circ$ для Os^{188} .

В работе Бар-Тава и Келсона [31] исследовалась возможность неаксиальной симметрии более легких ядер, у которых внешние нейтроны и протоны в равном числе заполняют некоторые состояния $s-d$ оболочек. На основании проведенных расчетов авторы приходят к заключению о возможности неаксиальной формы в ядрах, близких к ядрам Mg^{24} и S^{32} . Аналогичные результаты получил Такеда (Япония). Он показал, что ядра Ne^{25} и Ne^{22} имеют аксиально симметричную форму с значениями $\beta_0 = 0,46$. Ядро же Mg^{24} должно иметь неаксиальную форму с параметрами $\beta_0 \approx 0,47$ и $\gamma_0 \approx 30^\circ$. При этом глубина ямы по отношению к изменению параметра γ сравнительно невелика — около 6 Мэв.

Как уже указывалось выше, численные расчеты $V(\beta, \gamma)$ на основе «микроскопических» теорий требуют феноменологического введения формы самосогласованного потенциала (в случае потенциала трехмерного гармонического осциллятора надо знать значения ω_0 , C и D) и остаточного взаимодействия между нуклонами. В частности, если учитывают только спаривательное остаточное взаимодействие, то приходится постулировать вид оператора (5.10) и феноменологически подбирать значения констант G_n и G_p . В связи с этим любая такая теория практически сводится к феноменологической теории. При развитии теории коллективных движений в атомных ядрах удобно непосредственно опираться на представление потенциальной энергии $V(\beta, \gamma)$ в виде выражения (5.7), в котором величины β_0 , γ_0 , C и C_γ или некоторые их комбинации рассматриваются как феноменологические параметры. Эти параметры должны быть определены из экспериментальных данных для каждого ядра.

§ 6. ОПЕРАТОРЫ ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ КОЛЛЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ В НЕСФЕРИЧЕСКИХ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДРАХ

Оператор Гамильтона квадрупольных колебаний поверхности сферических ядер был определен выражением (4.20). Заменяя в выражении (4.20) потенциальную энергию $1/2 C\beta^2$ на $V(\beta, \gamma)$, получим простейшее обобщение (4.20) на случай несферических

ядер. Строго говоря, преобразование $1/2 C\beta^2 \rightarrow V(\beta, \gamma)$ должно сопровождаться и преобразованием операторов главных моментов инерции ядра

$$J_\lambda = 4B\beta^2 \sin^2 \gamma_\lambda, \quad \gamma_\lambda \equiv \gamma - \frac{2\pi}{3} \lambda \quad (6.1)$$

к новому виду. Как показал Беляев [32], исходя из микроскопической теории операторы моментов инерции на главные оси ядра могут быть представлены в виде

$$J_\lambda = 4\beta^2 (B - B_1 \cos \gamma_\lambda - B_2 \cos 2\gamma_\lambda) \sin^2 \gamma_\lambda, \quad (6.2)$$

где B , B_1 и B_2 — скалярные функции, зависящие от внутренней структуры ядра. К сожалению, прямое количественное вычисление значений B , B_1 и B_2 пока еще невозможно в рамках микроскопической теории. Поэтому приходится рассматривать эти величины как феноменологические параметры. С целью сократить число независимых параметров будем полагать далее $B_1 = B_2 = 0$, т. е. вместо выражения (6.2) будем пользоваться выражениями (6.1). Более общий случай будет рассмотрен в § 11.

Итак, в качестве оператора Гамильтона квадрупольных колебаний поверхности несферических четно-четных ядер мы будем постулировать выражение

$$H = \frac{\hbar^2}{2B} \left\{ T_\beta + \frac{1}{\beta^2} [T_\gamma + T_{\text{rot}}] \right\} + V(\beta, \gamma), \quad (6.3)$$

где операторы T_β , T_γ , T_{rot} определены соответственно формулами (4.21) — (4.24).

Оператор (6.3) определен в пространстве с пятью динамическими переменными: внутренними переменные β и γ и три угла Эйлера: $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$. Собственные функции оператора (6.3) рассматриваются в пространстве с элементом объема

$$d\tau = \beta^4 |\sin 3\gamma| d\beta d\gamma \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3.$$

Оператор (6.3) коммутирует с операторами квадрата полного углового момента ядра, с его проекцией на любое направление оси z в лабораторной системе и с оператором инверсии. Поэтому полный момент, определяемый квантовым числом I , его проекция на ось z (квантовое число M) и четность состояния являются интегралами движения и могут быть использованы для характеристики стационарных состояний ядра. Помимо этих величин в ядрах, имеющих аксиальную симметрию, приближенным интегралом будет проекция (квантовое число K) полного момента на ось симметрии.

Исследование коллективных возбуждений, соответствующих оператору (6.3), обычно проводится путем введения ряда упрощающих предположений. Ниже будут рассмотрены некоторые из таких упрощений.

А. Приближенное разделение переменных для аксиально симметричных ядер

Предположив, что $\gamma_0 = 0$, введем упрощения:

$$\left. \begin{aligned} \beta^{-2} a_\lambda(\gamma) &\rightarrow \frac{4}{3\beta_0^2}, \text{ если } \lambda = 1, 2; \\ &\frac{1}{\beta_0^2 \gamma^2}, \text{ если } \lambda = 3; \\ \beta^{-2} T_\gamma &\rightarrow -\frac{1}{\beta_0^2 \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right); \quad V(\beta, \gamma) \rightarrow V(\beta) + \frac{1}{2} \beta_0^2 C_\gamma \gamma^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

где коэффициенты $a_\lambda(\gamma)$ определены выражениями (4.24); оператор T_γ — выражением (4.22), величина β_0 обычно находится из условия минимума потенциальной энергии $V(\beta, \gamma)$ по отношению к переменной β . Учитывая явный вид оператора (4.24), убедимся, что при упрощающих преобразованиях (6.4) его можно записать в виде суммы двух операторов

$$\frac{\hbar^2}{2B\beta^2} T_{\text{rot}} \rightarrow \frac{\hbar^2}{6B\beta_0^2} (I^2 - I_3^2) + \frac{\hbar^2}{8B\beta_0^2} \frac{I_3^2}{\gamma^2}, \quad (6.4a)$$

и оператор (6.3) записывается в виде суммы трех независимых операторов

$$H \rightarrow H_0 = H_{\text{rot}}^0 + H_\beta^0 + H_\gamma^0, \quad (6.5)$$

где

$$H_{\text{rot}}^0 = \frac{\hbar^2}{6B\beta_0^2} (I^2 - I_3^2) \quad (6.6)$$

часть оператора вращения;

$$H_\beta^0 = -\frac{i\hbar^2}{2B\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + V(\beta) \quad (6.7)$$

оператор продольных или β -колебаний;

$$H_\gamma^0 = -\frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2} \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) - \frac{I_3^2}{4\gamma^2} \right] + \frac{1}{2} \beta_0^2 C_\gamma \gamma^2 \quad (6.8)$$

оператор поперечных колебаний.

Упрощения (6.4) вводились в работах Бора и Моттельсона [5, 6], Бирбраира и др. [33]. Упрощенный гамильтониан (6.5) будет рассмотрен более подробно в § 8.

Упрощения оператора (6.4) довольно грубы. Чтобы учесть поправки к оператору (6.4 а) в первом порядке по отклонениям β и γ от β_0 и $\gamma_0=0$, преобразуем оператор (4.23) к виду

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{8} [a_1(\gamma) + a_2(\gamma)] (I^2 - I_3^2) + \frac{1}{8} [a_1(\gamma) - a_2(\gamma)] (I_1^2 - I_2^2) + \\ + \frac{1}{4} a_3(\gamma) I_3^2.$$

Пользуясь оператором (4.24), разложим $a_k(\gamma)$ с точностью до членов γ^2 . Тогда получим

$$\frac{1}{8} (a_1 + a_2) \approx \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{8} (a_1 - a_2) \approx -\frac{2\sqrt{3}}{9} \gamma; \quad a_3 \approx \frac{1}{\gamma^2}.$$

Полагая далее

$$\beta^{-2} \approx \beta_0^{-2} \left[1 - \frac{2(\beta - \beta_0)}{\beta_0} \right],$$

находим оператор кинетической энергии вращения

$$\frac{\hbar^2}{2B\beta^2} T_{\text{rot}} \approx \frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2} \left\{ \frac{(I^2 - I_3^2)}{3} + \frac{I_3^2}{4\gamma^2} \right\} + W_{r\beta} + W_{r\gamma} + W_{r\beta\gamma}, \quad (6.9)$$

где операторы

$$\left. \begin{aligned} W_{r\beta} &= -\frac{\hbar^2}{3B\beta_0^2} (I^2 - I_3^2) \frac{(\beta - \beta_0)}{\beta_0}; \\ W_{r\gamma} &= -\frac{\hbar^2 \sqrt{3}}{9B\beta_0^2} (I_1^2 - I_2^2) \gamma; \\ W_{r\beta\gamma} &= -\frac{\hbar^2 I_3 (\beta - \beta_0)}{4B\beta_0^2 \gamma^2 \beta_0} \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

содержат линейные члены относительно переменных γ и $\beta - \beta_0$ и учитывают соответственно связь вращения с β -колебаниями и γ -колебаниями.

Второе слагаемое в фигурных скобках уравнения (6.9) является оператором, определяющим связь γ -колебаний с вращением вокруг оси 3. В состояниях с отличным от нуля собственным значением оператора I_3 это слагаемое играет весьма существенную роль, поэтому его приходится вводить в оператор (6.8) нулевого приближения.

Б. Приближение жесткого неаксиального ротатора (адиабатическое приближение)

В работах Марти [34], Давыдова и Филиппова [35] и в некоторых последующих работах [36, 50] исследовались коллективные возбуждения в адиабатическом приближении относительно поверхностных колебаний β и γ . Это приближение состояло в том, что в операторе энергии (6.3) в слагаемом $\frac{\hbar^2}{2B\beta^2} T_{\text{rot}}$, зависящем от динамических переменных β и γ , последние заменялись фиксированными эффективными значениями $\beta_{\text{эфф}}$ и $\gamma_{\text{эфф}}$. В этом приближении оператор энергии (6.3) принимает вид

$$H = H(\beta, \gamma) + H_a(\theta),$$

где

$$H(\beta, \gamma) = \frac{\hbar^2}{2B} \left[T_\beta + \frac{1}{\beta^2} T_\gamma \right] + V(\beta, \gamma);$$
$$H_a(\theta) = \frac{\hbar^2}{8B\beta_{\text{эфф}}^2} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{I_\lambda^2}{\sin^2 \left(\gamma_{\text{эфф}} - \frac{2\pi}{3} \lambda \right)}. \quad (6.11)$$

Оператор (6.11) зависит от трех динамических переменных (углов Эйлера θ) и является оператором жесткого асимметричного ротатора.

В адиабатическом приближении волновая функция возбужденных состояний ядра записывается в виде произведения волновой функции вращения $\Phi_{IM}(\theta)$ с угловым моментом I и проекцией M на ось z лабораторной системы координатных осей и функции $\varphi(\beta, \gamma)$ внутренних состояний ядра. Каждому внутреннему состоянию ядра соответствует своя пара значений $\beta_{\text{эфф}}$ и $\gamma_{\text{эфф}}$. Исследование собственных значений и собственных функций оператора (6.11) при фиксированных значениях $\beta_{\text{эфф}}$ и $\gamma_{\text{эфф}}$ будет проведено в § 8. Будет показано, что энергетический спектр и собственные функции оператора (6.11) в грубом приближении описывают часть коллективных возбуждений многих ядер. Весьма существенно также то, что собственные значения и собственные функции оператора (6.11) необходимы при вычислениях в неадиабатическом приближении.

В. Приближение жесткого неаксиального ротатора с произвольными моментами инерции

В операторе (6.11) для уменьшения числа независимых параметров теории использовались значения главных моментов инерции в простейшей форме (6.1), справедливой только при

малых отклонениях форм ядра от сферической. В § 11 будет исследован оператор энергии жесткого асимметричного ротатора с тремя произвольными главными моментами инерции.

Г. Неадиабатическая теория вращательно-вибрационных возбуждений с четырьмя переменными

При вращении ядра оно испытывает растяжение, приводящее к изменению значения β_0 , характеризующего равновесную форму неподвижного ядра. Для учета этого эффекта Давыдов и Чабан [37] развили теорию, в которой только переменная γ заменялась постоянным значением $\gamma_{\text{эфф}}$, а переменная β оставалась свободной. В этом приближении классическая энергия коллективных квадрупольных колебаний поверхности несферического ядра может быть записана по аналогии с (4.19 а) в виде

$$E = \frac{1}{2} \left\{ B \dot{\beta}^2 + \sum_{\lambda=1}^3 \frac{L_{\lambda}^2}{4B\beta^2 \sin^2 \left(\gamma_{\text{эфф}} - \frac{2\pi}{3} \lambda \right)} \right\} + V(\beta).$$

Переходя от этого выражения к квантовому оператору Гамильтона, получим

$$H = \frac{\hbar^2}{2B} \left\{ -\frac{1}{\beta^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^3 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{4} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{I_{\lambda}^2}{\beta^2 \sin^2 \left(\gamma_{\text{эфф}} - \frac{2\pi}{3} \lambda \right)} \right\} + V(\beta), \quad (6.12)$$

где I_{λ} — проекции на собственные оси ядра оператора углового момента (в единицах $\hbar$).

Соответствующее уравнение Шредингера

$$(H - E) \Psi(\beta, \theta) = 0$$

определяет собственные значения и собственные функции оператора (6.12) в пространстве четырех переменных β , θ_1 , θ_2 , θ_3 с элементом объема

$$d\tau = \beta^3 d\beta d\theta_1 \sin \theta_2 d\theta_2 d\theta_3.$$

Это уравнение будет исследовано в § 12.

Д. Коллективные возбуждения четно-четных ядер с пятью динамическими переменными

Оператор Гамильтона (6.3) содержит пять динамических переменных. Как уже указывалось выше, наиболее общее выражение функции $V(\beta, \gamma)$ можно представить в виде

$$V(\beta, \gamma) \approx V(\beta) + \beta F(\cos 3\gamma) = V(\beta) + \beta \beta_0 V(\beta).$$

Удобно преобразовать это выражение к виду

$$V(\beta, \gamma) = V(\beta) + \frac{\beta_0^4 V(\gamma)}{\beta^2} + \left(\frac{\beta}{\beta_0} - \frac{\beta_0^2}{\beta^2} \right) \beta_0^2 V(\gamma). \quad (6.13)$$

Если в первом приближении пренебречь последним слагаемым в выражении (6.13), то оператору (6.3) будет соответствовать уравнение Шредингера

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2B} \left[T_\beta + \frac{1}{\beta^2} (T_\gamma + T_{\text{rot}}) \right] + \frac{\beta_0^4 V(\gamma)}{\beta^2} + V(\beta) - E \right\} \Psi = 0, \quad (6.14)$$

допускающее выделение переменной β . Действительно, полагая

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta) = \beta^{-2} \varphi(\beta) \Phi(\gamma, \theta), \quad (6.15)$$

можно преобразовать уравнение (6.14) к системе двух уравнений

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2B} [T_\gamma + T_{\text{rot}}] + \beta_0^4 V(\gamma) - \Lambda \right\} \Phi(\gamma, \theta) = 0, \quad (6.16)$$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2B} \frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{\Lambda + 2}{\beta^2} + V(\beta) - E \right\} \varphi(\beta) = 0. \quad (6.17)$$

Опущенное слагаемое в уравнении (6.13)

$$\left(\frac{\beta}{\beta_0} - \frac{\beta_0^2}{\beta^2} \right) \beta_0^2 V(\gamma) \quad (6.18)$$

выражает связь β - и γ -колебаний поверхности ядра. Обычно эта связь слабая и может быть учтена методами теории возмущений. Коллективные возбуждения атомных ядер, определяемые уравнениями (6.16) и (6.17), будут рассмотрены в § 12 и 14. Учет оператора (6.18) будет произведен в § 15.

§ 7. ОПЕРАТОРЫ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ДЛЯ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ЯДЕР

Электрические и магнитные мультипольные операторы атомных ядер рассматривались в § 3 в лабораторной системе координат. В случае несферических ядер внутреннее состояние удобно описывать в системе координат, связанной с ядром. Согласно выражению (3.13), в длинноволновом приближении оператор электрического момента мультипольности l для коллективных движений в лабораторной системе координат имеет вид

$$\mathfrak{M}_\mu^{\text{эф}}(El) = \frac{ZeZ}{4\pi} R_0^l \alpha_{l\mu}.$$

В дальнейшем будем интересоваться главным образом операторами электрического квадрупольного момента $l=2$. Используя преобразование (4.5), получим оператор электрического квадрупольного момента в системе координат, связанной с ядром,

$$\mathfrak{M}_\mu(E2) = \frac{3eZR_0^2}{4\pi} \sum_\nu D_{\mu\nu}^2 a_\nu.$$

Подставляя значения (4.6) и (4.7), находим окончательное выражение

$$\mathfrak{M}_\mu(E2) = \frac{3eZR_0^2\beta}{4\pi} \left\{ D_{\mu,0}^2 \cos \gamma + (D_{\mu,2}^2 + D_{\mu,-2}^2) \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Часто вместо этого оператора используют оператор

$$Q_{2\mu} = 4 \sqrt{\frac{\pi}{5}} \mathfrak{M}_\mu(E2).$$

В этом случае

$$Q_{2\mu} = Q_0 \frac{\beta}{\beta_0} \left\{ D_{\mu,0}^2 \cos \gamma + (D_{\mu,2}^2 + D_{\mu,-2}^2) \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}} \right\}, \quad (7.1)$$

где величину

$$Q_0 = \frac{3ZeR_0^2\beta_0}{\sqrt{5}\pi}$$

называют *внутренним квадрупольным моментом* ядра, имеющего постоянную деформацию β_0 .

Если в операторе $\mathfrak{M}_\mu(E2)$ учитывать и квадратичные по переменным $a_{2\mu}$ слагаемые [см. выражение (3.13a)], то

$$Q_{2\mu} = Q_0 \frac{\beta}{\beta_0} \left\{ D_{\mu,0}^2 \cos \gamma + (D_{\mu,2}^2 + D_{\mu,-2}^2) \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}} + \right. \\ \left. + \beta \frac{2}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left[D_{\mu,0}^2 \cos 2\gamma - (D_{\mu,2}^2 + D_{\mu,-2}^2) \frac{\sin 2\gamma}{\sqrt{2}} \right] \right\}. \quad (7.16)$$

Между ядерными состояниями одинакового спина и четности (в частности между состояниями 0^+) могут происходить *монопольные электрические* или *$E0$ -переходы*. При $E0$ -переходах в результате внутренней конверсии энергия перехода уносится электроном оболочки атома, или (при больших энергиях перехода) электронно-позитронной парой, рождаемой в поле ядра. Если $E0$ -переход происходит между состояниями $I \neq 0$, то обычно он сопровождается $E2$ -переходом. $E0$ -переходы вызываются кулоновским взаимодействием протонов ядра с электро-

нами оболочки атома (или электронно-позитронным вакуумом). Поэтому вероятность электрических монопольных переходов зависит от распределения протонов в ядре. Отсюда следует, что исследование $E0$ -переходов весьма полезно для выяснения структуры ядра и эффективности ядерных моделей для описания свойств ядер.

Вероятность $E0$ -перехода (с выбросом электрона конверсии) в единицу времени определяется известной формулой квантовой механики [10]

$$\omega = \frac{2\pi}{h} \sum_f |\langle f | H' | i \rangle|^2 \rho_f, \quad (7.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} |i\rangle &= \Psi_i(\beta, \gamma, \theta) \chi_i(\xi, \sigma), \\ |f\rangle &= \Psi_f(\beta, \gamma, \theta) \chi_f(\xi, \sigma) \end{aligned} \right\} \quad (7.2a)$$

волновые функции начального и конечного состояния ядра и электрона; ξ — радиус-вектор электрона; σ — спиновая переменная; ρ_f — плотность числа конечных состояний на единичный интервал энергии. Суммирование в равенстве (7.2) проводится по всем конечным состояниям, включая и углы вылета;

$$H'(\xi) = e^2 \int \frac{n(r) d^3r}{|\mathbf{r} - \xi|} \quad (7.3)$$

оператор кулоновского взаимодействия ядра с электроном, находящимся в точке ξ ; $n(r)$ — плотность протонов внутри ядра. Будем считать, что протоны распределены равномерно по объему ядра, т. е. положим

$$n(r) = \begin{cases} n_0 = \frac{3Z}{4\pi R_0^3}, & \text{если } |\mathbf{r}| < R(\theta, \phi); \\ 0, & \text{если } |\mathbf{r}| > R(\theta, \phi), \end{cases} \quad (7.3a)$$

где $R(\theta, \phi)$ — поверхность ядра.

Введем сферические координаты $\mathbf{r} = \{r, \theta, \phi\}$, $\xi = \{\xi, \vartheta, \varphi\}$. Разложим подынтегральное выражение (7.3) по сферическим функциям

$$(|\mathbf{r} - \xi|)^{-1} = \sum_{l, m} \frac{4\pi}{(2l+1)} \left(\frac{r}{\xi}\right)^l \frac{1}{(r, \xi)} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi), \quad (7.4)$$

где

$$(r, \xi) = \begin{cases} r, & \text{если } r > \xi; \\ \xi, & \text{если } r < \xi. \end{cases} \quad (7.5)$$

$E0$ -переходы вызываются только сферически симметричной частью (7.4), поэтому вместо оператора (7.3) в выражение (7.2) можно подставить оператор

$$H'_0(\xi) = e^2 n_0 \int_0^{R(\theta, \Phi)} \{r, \xi\}^{-1} d^3 r. \quad (7.6)$$

При $\xi > R(\theta, \Phi)$, согласно равенствам (7.5) и (7.3 а), этот оператор принимает вид

$$H'_0(\xi) = \frac{Ze^2}{\xi}, \quad (7.6a)$$

не зависящий от внутриядерных координат. В силу ортогональности начального и конечного состояний ядра оператор (7.6 а) не будет давать вклада в матричный элемент (7.2). Таким образом выражение (7.2) преобразуется к виду

$$w = \frac{2\pi}{h} \sum_f | \langle f | H'_0(\xi) | i \rangle |^2 \rho_f, \quad (7.7)$$

где

$$H''(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi > R(\theta, \Phi); \\ e^2 n_0 \int_0^{R(\theta, \Phi)} \{r, \xi\}^{-1} d^3 r, & \text{если } \xi \leq R(\theta, \Phi). \end{cases} \quad (7.8)$$

Следовательно, в вероятность (7.7) вносят вклад только электронные волновые функции внутренней области ядра. Учитывая явный вид оператора (7.8) и функций (7.2 а), имеем

$$\langle f | H'_0(\xi) | i \rangle = e^2 n_0 \langle \Psi_f | G | \Psi_i \rangle, \quad (7.9)$$

где

$$G \equiv \int d\Omega \int_0^{R(\theta, \Phi)} \langle x_f | \{r, \xi\}^{-1} | x_i \rangle r^2 dr.$$

Значения электронных волновых функций внутри ядра мало отличаются от их значений в центре ядра, поэтому, заменяя $x_f(\xi)$ и $x_i(\xi)$ значениями $x_f(0)$ и $x_i(0)$, находим

$$\begin{aligned} \langle x_f | \{r, \xi\}^{-1} | x_i \rangle &\approx x_f^*(0) x_i(0) \left[\frac{1}{r} \int_0^r \xi^2 d\xi + \int_r^{R_0} \xi d\xi \right] = \\ &= x_f^*(0) x_i(0) \left[A - \frac{r^2}{6} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя это значение в равенство (7.9) и учитывая, что

$$A \int d\Omega \int_0^{R(\theta, \Phi)} r^2 dr = \frac{4}{3} \pi A R_0^3,$$

получаем

$$G = -\frac{z_f^*(0) z_i(0)}{30} \int |R(\theta, \Phi)|^2 d\Omega + \text{const.} \quad (7.10)$$

В силу ортогональности волновых функций начального и конечного состояния ядра в выражении (7.10) можно опустить все постоянные слагаемые. В § 4 величина $R(\theta, \Phi)$ определялась выражением (4.3), которое учитывало сохранение объема ядра с точностью до линейных членов α_v . При исследовании $E0$ -переходов необходимо учитывать члены более высокого порядка малости. Поэтому положим

$$R(\theta, \Phi) = R_0 \left\{ 1 + \alpha_{00} + \sum_v \alpha_v Y_{2v}(\theta, \Phi) \right\}.$$

Тогда из условия постоянства объема ядра следует

$$\alpha_{00} = -\frac{1}{4\pi} \beta^2 - \frac{1}{42\pi} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta^3 \cos 3\gamma.$$

Подставляя эти значения в равенство (7.10) и опуская постоянные слагаемые, имеем

$$G = -\frac{z_f^*(0) z_i(0) R_0^5}{30} \left\{ 4\pi + 5\beta^2 + \frac{25\sqrt{5}}{21\sqrt{\pi}} \beta^3 \cos 3\gamma \right\}.$$

Учитывая значения n_0 и матричный элемент (7.9), имеем окончательно

$$\langle f | H_0''(\xi) | i \rangle = -\frac{e^2 R_0^2}{6} z_f^*(0) z_i(0) \langle \Psi_f | \mathfrak{M}(E_0) | \Psi_i \rangle, \quad (7.11)$$

где

$$\mathfrak{M}(E0) = \frac{3Z}{4\pi} \left(\beta^2 + \frac{5\sqrt{5}}{21\sqrt{\pi}} \beta^3 \cos 3\gamma \right) \quad (7.12)$$

оператор $E0$ -перехода;

$$\langle \Psi_f | \mathfrak{M}(E0) | \Psi_i \rangle \equiv p(i \rightarrow f) \quad (7.13)$$

ядерный матричный элемент $E0$ -перехода, зависящий от волновых функций начального и конечного состояний ядра и оператора (7.12). Из вида оператора (7.12) следует, что он не может вызвать переходов между возбужденными состояниями ядра, вычисленными в адиабатическом приближении, когда β и γ рассматриваются как постоянные величины. Таким образом, $E0$ -переходы в атомных ядрах являются некоторой мерой неадиабатических условий в атомных ядрах.

С помощью определения (7.13) и выражения (7.11) можно преобразовать формулу (7.2), определяющую вероятность $E0$ -переходов в одну секунду с испусканием одного электрона, к виду

$$\omega_{i \rightarrow f} = \Omega \rho^2(i \rightarrow f) e^2 R_0^4, \quad (7.14)$$

где

$$\Omega = \frac{\pi}{18h} \sum_f |\chi_f^*(0) \chi_i(0)|^2 \rho_f$$

множитель, зависящий от электронных состояний атома. Этот множитель в различных приближениях (точечное и конечное ядро, релятивистские волновые функции электрона, экранирование электронной оболочкой и т. д.) вычислялся в работах Черча и Уинсера [38], Райшера [39], Гречухина [40], Листенгартена и Банда [41] и др.

Перейдем теперь к рассмотрению оператора магнитного дипольного момента для коллективных движений в ядре. Согласно выражению (3.23),

$$\mathfrak{M}_\mu(M1) = \nu_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} g_R \int \frac{1}{h} R_\mu(r) d\tau, \quad (7.15)$$

где $R(r)$ — плотность классического углового момента квадрупольных колебаний, определяемая выражением (2.30). При учете равенства (2.32) выражение (7.15) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_\mu(M1) = & \frac{i(-1)^\mu 3B}{h \sqrt{2\pi}} \nu_0 g_R R_0^{-5} \sum_\lambda (2, 1\lambda + \mu, -\mu | 2\lambda) \hat{a}_{2\lambda}^* \times \\ & \times \int d\Omega Y_{2, \lambda+\mu}^{R(\nu, \varphi)} \int_0^R r^4 dr. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Если в приближении (2.33) вычислить радиальный интеграл в (7.16), то получим

$$\mathfrak{M}_\mu^0(M1) = \nu_0 g_R \sqrt{\frac{3}{4\pi}} I_\mu, \quad (7.17)$$

где, согласно выражениям (2.34) и (2.35), I_μ — сферические проекции полного углового момента квадрупольных колебаний (в единицах $\hbar$), т. е.

$$I_\mu = \frac{i \sqrt{6} (-1)^\mu}{h} \sum_m (21, m + \mu, -\mu | 2m) \hat{\pi}_{2m}^\wedge \hat{a}_{2, m+\mu}. \quad (7.18)$$

Недиagonальные матричные элементы оператора магнитного дипольного момента (7.17) равны нулю для всех состояний, различающихся значениями полного углового момента или дру-

гими квантовыми числами. Поэтому при вычислении радиально-го интеграла в операторе (7.16) (аналогично вычислению оператора $E0$ -переходов) приходится учитывать члены более высокого порядка малости. Вместо выражения (2.33) примем

$$\int_0^R r^4 dr = R_0^5 \left\{ \frac{1}{5} + \sum_m \alpha_{2m} Y_{2m}^* + \right. \\ \left. + 5 \sum_{m,\mu} \frac{(2200|10)}{\sqrt{\pi} (2l+1)} (22m\mu | 2, m+\mu) \alpha_{2m} \alpha_{2\mu} Y_{l, m+\mu}^* \right\}.$$

В этом приближении оператор (7.16) принимает вид

$$\mathfrak{M}_\mu(M1) = \mathfrak{M}_\mu^0(M1) + \mathfrak{M}_\mu^1(M1), \quad (7.19)$$

где $\mathfrak{M}_\mu^0(M1)$ определено выражением (7.17)

$$\mathfrak{M}_\mu^1(M1) = i(-1)^\mu B g_R \mu_0 \sqrt{\frac{45}{7\pi^2}} \sum_{\lambda, m} (21, \lambda + \mu, -\mu | 2\lambda) (22m, \lambda + \\ + \mu - m | 2, \lambda + \mu) \alpha_{2m} \alpha_{2, \lambda + \mu - m} \dot{\alpha}_{2\lambda}^*. \quad (7.20)$$

Переходя к операторам и выделяя перегруппировкой членов сферические проекции оператора углового момента (7.18), можно преобразовать оператор (7.20) к виду

$$\mathfrak{M}_\mu^1(M1) = \mu_0 g_R \frac{5\sqrt{6}}{7\pi} \sum_\nu (21, \mu - \nu, \nu | 1\mu) \alpha_{2, \mu - \nu} I_\nu. \quad (7.21)$$

При выводе оператора (7.21) в интеграле (7.15) было использовано выражение (2.30) для плотности классического углового момента. Это выражение было получено в § 2 только с учетом линейных членов относительно параметров деформации. Если вычислить скорость $\mathbf{V}$ в более высоком приближении [42], то оператор (7.20) надо умножить на 9/8. Выражая далее $\alpha_{\mu-\nu}$ через внутренние переменные, находим

$$\mathfrak{M}_\mu^1(M1) = \mu_0 g_R \frac{45\sqrt{6}}{56\pi} \sum_\nu (2, 1, \mu - \nu, \nu | 1\mu) \beta_0 I_\nu \frac{Q_{2, \mu - \nu}}{Q_0}. \quad (7.22)$$

Оператор магнитного дипольного момента в виде (7.19) впервые был получен в работе Давыдова и Филиппова [43], а затем и в работе Гречухина [44]. Вывод выражения (7.18) подвергся критике (см. Липас, Девидсон [45]). Основное возражение сводилось к тому, что при вычислении сферических проекций I_μ оператора углового момента следует пользоваться тем же приближением, что и при вычислении оператора (7.16). Тогда $\mathfrak{M}_\mu^1(M1)$ будет сводиться только к $\mathfrak{M}_\mu^0(M1)$. С таким возражением трудно согласиться (см. также [42]). Как уже указыва-

лось в § 2, необходимость удовлетворения перестановочным соотношениям для проекций полного углового момента заставляет вычисление I_{μ} выполнять только в приближении (2.33). Конечно, операторы $\mathfrak{M}_{\mu}^1(M1)$ и оператор (7.12) для $E0$ -переходов, содержащие кубические члены по переменной β , являются весьма приближенными. Поправки, вызываемые неоднородным распределением электрического заряда в ядре, неадиабатичностью по отношению к однонуклонным состояниям и т. п., могут оказаться весьма существенными. Однако учет этих поправок возможен только в рамках микроскопической теории ядра, учитывающей внутреннюю структуру ядра. Пока такой теории еще не создано, полезно использовать операторы (7.12) и (7.19), с тем чтобы из сравнения теоретических расчетов с экспериментальными данными установить феноменологически, для каких ядер такие поправки необходимы и какова их величина.

§ 8. ПРИБЛИЖЕННОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ ЯДЕР

В § 6 было показано, что путем введения упрощений (6.4) оператор Гамильтона коллективных возбуждений квадрупольного типа в четно-четных аксиально симметричных ядрах можно представить в виде суммы трех слагаемых

$$H^0 = H_{\text{rot}}^0 + H_{\beta}^0 + H_{\gamma}^0, \quad (8.1)$$

где

$$H_{\text{rot}}^0 = \frac{\hbar^2}{6B\beta_0^2} (I^2 - I_3^2); \quad (8.2)$$

$$H_{\beta}^0 = -\frac{\hbar^2}{2B\beta_0^4} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + V(\beta); \quad (8.3)$$

$$H_{\gamma}^0 = -\frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2} \left[\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\gamma \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \right) - \frac{I_3^2}{4\gamma^2} \right) + \frac{1}{2} \beta_0^2 C_1 \gamma^2 \right]. \quad (8.4)$$

Решение уравнения

$$(H^0 - E^0) \Psi = 0 \quad (8.5)$$

можно искать в виде произведения трех функций, зависящих соответственно от переменной β , переменной γ и трех углов Эйлера,

$$\Psi \equiv |IMKn_{\beta} n_{\gamma}\rangle = f_{n_{\beta}}(\beta) \chi_{n_{\gamma}}(\gamma) |IMK\rangle, \quad (8.6)$$

где

$$|IMK\rangle = \left[\frac{(2I+1)}{8\pi^2 (1+\delta_{0k})} \right]^{1/2} (D'_{MK} + (-1)^I D'_{M,-K}) \quad (8.7)$$

функция жесткого симметричного волчка, I, M, K — квантовые числа полного углового момента и его проекций на ось z лабораторной системы и ось ξ атомного ядра.

Подставив функцию (8.6) в уравнение (8.5), получим

$$E^0 = E_{\text{вр}}^0 + E_{\beta}^0 + E_{\gamma}^0, \quad (8.8)$$

где

$$E_{\text{вр}}^0 = \frac{\hbar^2}{6B\beta_0^2} [I(I+1) - K^2]. \quad (8.9)$$

Энергии E_{β}^0 , E_{γ}^0 и функции $f(\beta)$, $\chi(\gamma)$ определяются уравнениями

$$(H_{\beta}^0 - E_{\beta}^0) f(\beta) = 0, \quad (8.10)$$

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2} \left[-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) + \frac{K^2}{4\gamma^2} \right] + \frac{1}{2} \beta_0^2 C_{\gamma} \gamma^2 - E_{\gamma}^0 \right\} \chi(\gamma) = 0. \quad (8.11)$$

В состояниях с $K=0$, согласно выражению (8.7), квантовые числа I могут принимать только четные значения 0, 2, 4... Для этих состояний энергию вращения можно выразить простой формулой

$$E_{\text{вр}}^0(I) = \frac{\hbar^2 I(I+1)}{6B\beta_0^2}, \quad I = 0, 2, 4 \dots \quad (8.12)$$

Возбужденные состояния (8.12) образуют основную полосу вращательных состояний. В этих состояниях вращение происходит вокруг оси, перпендикулярной аксиальной оси симметрии ядра (ось ξ). Энергии возбуждения (8.12) удовлетворяют простому правилу интервалов

$$1 : 10/3 : 7 : 12 : 55/3 : 26 : 35 : 136/3 : \dots \quad (8.13)$$

Следовательно, если выражать энергии возбужденных состояний четно-четных ядер в единицах энергии первого возбужденного состояния (спин 2^+), то теория дает однозначное предсказание последовательности спинов возбужденных состояний и их энергии. В табл. 2 приведены найденные в эксперименте значе-

Вращательные возбуждения в четно-четных ядрах

Спин Ядро	2	4	6	8	10	12	14	16	Лите- рату- ра
Dy ¹⁶⁰	1	3,27	6,71	11,2	16,6	—	—	—	[46]
Dy ¹⁶²	1	3,30	6,81	12,3	—	—	—	—	[46]
Yb ¹⁶⁴	1	3,135	6,188	9,951	14,27	—	—	—	[47]
Er ¹⁶⁶	1	3,293	6,776	11,33	—	—	—	—	[46]
Yb ¹⁶⁶	1	3,239	6,553	10,78	15,76	21,34	—	—	[47]
Hf ¹⁶⁶	1	2,966	5,656	8,866	12,42	16,16	—	—	[47]
Hf ¹⁶⁸	1	3,107	6,102	9,782	14,00	18,60	—	—	[47]
Hf ¹⁷⁰	1	3,206	6,411	10,41	15,03	20,13	25,64	31,47	[47]
Hf ¹⁷²	1	3,258	6,635	10,96	16,07	21,83	28,05	—	[47]
W ¹⁷²	1	3,067	5,917	9,333	13,15	17,32	21,78	—	[47]
W ¹⁷⁴	1	3,172	6,293	10,16	14,611	19,54	—	—	[47]
W ¹⁷⁶	1	3,206	6,434	10,49	15,16	20,29	—	—	[47]
Hf ¹⁷⁸	1	3,291	6,785	11,37	—	—	—	—	[46]
Hf ¹⁸⁰	1	3,309	6,772	11,64	—	—	—	—	[46]
Os ¹⁸²	1	3,11	6,11	9,82	13,9	—	—	—	[46]
Os ¹⁸⁴	1	3,13	6,27	10,3	15,0	20,3	—	—	[46]
Os ¹⁸⁶	1	3,17	6,34	10,4	14,7	—	—	—	[46]
Os ¹⁸⁸	1	3,09	6,13	10,3	—	—	—	—	[46]
Os ¹⁹⁰	1	2,934	5,613	8,902	—	—	—	—	[46]
Th ²³²	1	3,27	6,63	11,0	16,1	—	—	—	[46]
U ²³⁴	1	3,29	6,81	11,5	—	—	—	—	[46]
U ²³⁸	1	3,31	6,93	11,6	17,7	24,6	—	—	[46]
Pu ²³⁸	1	3,30	6,87	11,6	—	—	—	—	[46]
Теоретиче- ские значе- ния	1	3,333	7	12	18,33	26	35	45,33	

ния отношений $E_{вр}(I)/E_{вр}(2)$ для четно-четных атомных ядер, у которых известны возбужденные состояния со спином $I \geq 8$.

Сравнивая экспериментальные отношения энергий с теоретическими (нижняя строчка табл. 2), видно, что лучшее согласие наблюдается у ядра U²³⁸. Во всех остальных ядрах экспериментальные отношения отличаются от теоретических и тем значительно, чем больше спин возбужденного состояния. Особенно велики отклонения экспериментальных отношений от теоретических у ядер Hf¹⁶⁶, W¹⁷². Решение уравнения (8.11), содержащего переменную γ , исследовалось в работе Бирбраира и др. [33]. Энергия коллективных движений этого типа определяется двумя квантовыми числами $n_\gamma = 0, 1, \dots$ и $K = 0, 2, 4, \dots$ с помощью формулы

$$E_\gamma = E_{K, n_\gamma} = \hbar \omega_\gamma \left(2n_\gamma + \frac{1}{2}K + 1 \right), \quad \omega_\gamma = \sqrt{\frac{C_\gamma}{B}}. \quad (8.14)$$

Волновые функции уравнения (8.11), определенные для значений $\gamma \geq 0$ с элементом объема $\gamma d\gamma$, имеют вид

$$\chi_{K, n_\gamma} = N \gamma^{\frac{1}{2} K} F\left(-n_\gamma, 1 + \frac{K}{2}; \frac{\gamma^2}{\gamma_{00}^2}\right), \quad (8.15)$$

где $F(-n, a; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция;

$$\gamma_{00}^2 \equiv \frac{h}{\beta_0^2 \sqrt{BC_\gamma}}; \quad (8.15a)$$

N — множитель нормировки, определяемый из условия $\int_0^\infty \chi^2 \gamma d\gamma = 1$.

В частности,

$$\left. \begin{aligned} \chi_{00} &= \sqrt{2} \gamma_{00}^{-1} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\gamma_{00}^2}\right), \\ \chi_{2,1} &= 2\gamma_{00}^{-1} \left[1 - \frac{\gamma^2}{2\gamma_{00}^2}\right] \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\gamma_{00}^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (8.15b)$$

Согласно равенству (8.14), энергия нулевых колебаний $E_0 = h\omega_\gamma$, поэтому энергия возбуждения

$$\Delta E_{K, n_\gamma} = h\omega_\gamma \left(2n_\gamma + \frac{1}{2} K\right). \quad (8.16)$$

В состояниях $K=0$ энергия возбужденных состояний (8.16) соответствует эквидистантному спектру. Эти возбужденные состояния можно назвать γ -колебаниями или поперечными колебаниями поверхности аксиально симметричного ядра.

В состояниях $K=2, 4, \dots$ энергии возбуждений (8.16) представляют сложную комбинацию вращательного (вокруг аксиальной оси ядра) и γ -колебательного движений. В этих состояниях роль оператора потенциальной энергии в уравнении (8.11) играет выражение

$$W(\gamma) = \frac{h^2 K^2}{8B\beta_0^2 \gamma^2} + \frac{1}{2} \beta_0^2 C_\gamma \gamma^2.$$

Эта энергия имеет минимальное значение при

$$\gamma = \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{hK}{2\sqrt{BC_\gamma}} \right]^{1/2},$$

в частности, при $K=2$ это значение $\gamma = \gamma_{00}$. В связи с этим возбужденные состояния (8.16) при $K \neq 0$ можно качественно ин-

терпретировать как деформацию ядра, с нарушением аксиальной симметрии ($\gamma_0=0 \rightarrow \gamma_0 \neq 0$) и вращением деформированного ядра вокруг оси ξ . С другой стороны, уравнение (8.11) можно рассматривать и как уравнение для двумерного осциллятора с двумя вырожденными поперечными колебаниями. Оба представления полностью эквивалентны. Аналогичную природу имеют в линейных трехатомных молекулах (рис. 5, б) возбужденные

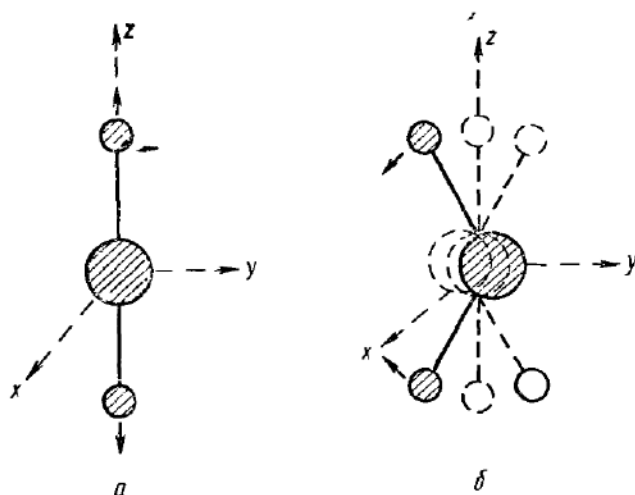


Рис. 5. Продольные (а) и поперечные (б) колебания трехатомной молекулы.

состояния, соответствующие двум вырожденным поперечным колебаниям. Два вырожденных поперечных колебания в таких молекулах эквивалентны изгибу молекулы и ее последующему вращению вокруг оси z .

Перейдем к рассмотрению β -колебательных возбуждений. Уравнение

$$(H_\beta^0 - E_\beta)f(\beta) = 0$$

с оператором (8.3) определяет энергию и волновые функции β -колебаний поверхности аксиально симметричного ядра. Эти колебания аналогичны продольным симметричным колебаниям атомов в линейной трехатомной молекуле (рис. 5, а). Учитывая явный вид оператора Гамильтона (8.3), имеем

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{4}{\beta} \frac{d}{d\beta} \right] + V(\beta) - E_\beta \right\} f(\beta) = 0, \quad (8.17)$$

где функция $f(\beta)$ определена в пространстве с элементом объема $d\tau = \beta^4 d\beta$.

С помощью подстановки

$$f(\beta) = \beta^{-2} \varphi(\beta)$$

находим уравнение для функции $\varphi(\beta)$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2B} \frac{d^2}{d\beta^2} + V(\beta) + \frac{\hbar^2}{B\beta^3} - E_\beta \right\} \varphi(\beta) = 0. \quad (8.18)$$

Функция $\varphi(\beta)$ определена в интервале от 0 до ∞ изменения переменной β . На границах этого интервала она должна удовлетворять условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \{\beta^{-2} \varphi(\beta)\} = 0. \quad (8.19)$$

Для упрощения уравнения (8.18) используем разложение

$$W(\beta) \equiv V(\beta) + \frac{\hbar^2}{B\beta^3} \approx W(\beta_0) + \frac{1}{2} C (\beta - \beta_0)^2, \quad (8.20)$$

где

$$W(\beta_0) = V(\beta_0) + \frac{\hbar^2}{B\beta_0^3}, \quad C = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} \right)_{\beta=\beta_0}.$$

Значение β_0 определяется из уравнения

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \beta} \right)_{\beta=\beta_0} = 0.$$

Подставляя выражение (8.20) в уравнение (8.18) и вводя частоту $\omega = \sqrt{C/B}$ и новую переменную

$$\xi = (\beta - \beta_0) \sqrt{\frac{B\omega}{\hbar}}, \quad (8.21)$$

находим уравнение для функции $\varphi(\xi)$

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + \frac{2E}{\hbar\omega} \right] \varphi(\xi) = 0. \quad (8.22)$$

Переменная ξ изменяется в пределах $-\beta_0 \sqrt{\frac{B\omega}{\hbar}} \leq \beta < \infty$, и функция $\varphi(\xi)$ должна равняться нулю на границах этого интервала. Если рассматривать только состояния (малая энергия колебаний), в которых

$$\langle \xi^2 \rangle \ll \beta_0 \sqrt{\frac{B\omega}{\hbar}}, \quad (8.23)$$

то можно считать, что в уравнении (8.22) переменная ξ изменяется в бесконечных пределах. Решения такого уравнения хо-

рошо изучены (см. § 33 в книге [10]). Они зависят от квантового числа $n_\beta = 0, 1, 2, \dots$. При этом

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right); \quad (8.24)$$

$$\varphi_n(\xi) = (\sqrt{\pi} n!)^{-1/2} H_n(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^2\right), \quad (8.25)$$

где $H_n(\xi)$ — полиномы Эрмита.

Итак, в приближении (6.4) коллективные возбужденные состояния четно-четных ядер характеризуются квантовыми числами I, K, n_β, n_γ с помощью выражения

$$\Delta E_{IKn_\beta n_\gamma} = A[I(I+1) - K^2] + \hbar\omega_{n_\beta} + \hbar\omega_\gamma \left(2n_\gamma + \frac{K}{2} \right), \quad (8.26)$$

где

$$A = \frac{\hbar^2}{6B\beta_0^2} = \frac{1}{6} E_{\text{вр}}^0(2). \quad (8.27)$$

Энергиям возбуждений (8.26) соответствуют волновые функции

$$\Psi_{IMKn_\beta n_\gamma} = |IMK\rangle \varphi_{n_\beta}(\xi) \chi_{Kn_\gamma}(\gamma), \quad (8.28)$$

где функции $|IMK\rangle$, $\chi_{Kn_\gamma}(\gamma)$ и $\varphi_{n_\beta}(\xi)$ определены соответственно (8.7), (8.15) и (8.25) в пространстве с элементом объема

$$d\tau = \gamma \sin \theta_2 d\xi d\gamma d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \quad (8.29)$$

Представление энергии возбуждений (8.26) в виде суммы энергии вращения и энергии поверхностных β - и γ -колебаний весьма грубое. Согласно табл. 2, даже в наиболее благоприятных случаях отклонение теоретических значений от экспериментальных велико, особенно при больших спинх. Делались неоднократные попытки улучшить согласие теории с экспериментом учетом, методом теории возмущений части операторов (6.10), характеризующих взаимную связь коллективных возбуждений разного рода.

Средние значения операторов (6.10) в состояниях, определяемых функциями (8.28), равны нулю, поэтому поправки к энергии надо вычислять во втором порядке теории возмущений (см. § 47 в книге [10]). Поправки к энергии (8.27) во втором порядке теории возмущений определяются выражением

$$\Delta E_{IKn_\beta n_\gamma}^{(2)} = \sum_{l, l', K', n'_\beta, n'_\gamma} \frac{| \langle l' K' n'_\beta n'_\gamma | W_{rl} | I K n_\beta n_\gamma \rangle |^2}{\Delta E_{IKn_\beta n_\gamma} - \Delta E_{l' K' n'_\beta n'_\gamma}}, \quad (8.30)$$

где операторы $W_n (l=\beta, \gamma, \beta\gamma)$ определены выражениями (6.10).

Вычислим поправку к энергиям возбуждения во вращательной полосе, характеризующейся функциями Ψ_{I000} . Будем учитывать в сумме (8.30) только первые возбужденные колебательные состояния, тогда

$$\Delta E_{I000}^{(2)} = - \sum_K \left\{ \frac{|\langle IK10 | W_{r\beta} | I000 \rangle|^2}{h\omega} + \frac{|\langle IK01 | W_{r\gamma} | I000 \rangle|^2}{h\omega_\gamma \left(2 + \frac{K}{2}\right)} - \frac{|\langle I011 | W_{r\beta\gamma} | I000 \rangle|^2}{h\omega_\gamma \left(2 + \frac{K}{2}\right)} \right\} \quad (8.31)$$

Используя явный вид операторов (6.10) и волновые функции (8.28), матричные элементы (Д.14) Приложения Д и $\langle \chi_{21} | \gamma | \chi_{00} \rangle = \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \gamma_{00}$, находим

$$\langle IK10 | M_{r\beta} | I000 \rangle = - \frac{A}{\beta_0} \sqrt{\frac{2h}{B\omega}} I(I+1) \delta_{K0},$$

$$\langle IK01 | W_{r\gamma} | I000 \rangle = - \frac{A}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \gamma_{00} \sqrt{I(I+1)[I(I+1)-2]} \delta_{K,2},$$

$$\langle I011 | W_{r\beta\gamma} | I00 \rangle = 0,$$

где A определено выражением (8.27).

Подставляя эти значения в равенство (8.31) и учитывая, что, согласно выражениям (8.14), (8.15а) и (8.27), $\gamma_{00}^2 = \frac{6A}{h\omega_\gamma}$, получаем поправку к энергетическим уровням основной вращательной полосы

$$\Delta E_{I000}^2 = -bl^2(I+1)^2 + cl(I+1),$$

где

$$\frac{b}{A} = \frac{12A^2}{h^2\omega^2} + \frac{\pi A^2}{48h^2\omega_\gamma^2}, \quad c = \frac{\pi A^3}{24h^2\omega_\gamma^2}. \quad (8.32)$$

Итак, с учетом значения (8.12) энергия основной вращательной полосы во втором порядке теории возмущений определяется формулой

$$E_{\text{вр}}(I) = A \left\{ \left(1 + \frac{c}{A}\right) I(I+1) - \frac{b}{A} I^2(I+1)^2 \right\}. \quad (8.33)$$

Выразим энергию вращательных состояний в единицах энергии первого возбужденного уровня. Тогда

$$R_{\text{вр}}(I) = \frac{E_{\text{вр}}(I)}{E_{\text{вр}}(2)} = \frac{I(I+1)[1 - \xi I(I+1)]}{6(1 - 6\xi)}, \quad (8.34)$$

при этом параметр

$$\xi = \frac{b}{A+c} \approx \frac{1}{3} \left(\frac{E_{\text{вр}}^0(2)}{\hbar\omega} \right)^2 + 1,87 \cdot 10^{-3} \left(\frac{E_{\text{вр}}^0(2)}{\hbar\omega_{\gamma}} \right)^2, \quad (8.35)$$

где

$$E_{\text{вр}}^0(2) = \frac{\hbar^2}{B_{\text{вр}}^2} = 6A.$$

Условие применимости теории возмущений сводится к выполнению неравенства

$$\xi I(I+1) \ll 1, \quad (8.36)$$

которое является также условием хорошего выделения вращательных состояний из сложного спектра коллективных возбуждений атомного ядра.

Обычно определяют параметр ξ непосредственно из экспериментальных данных, используя формулу (8.34). Так, зная экспериментальное значение $R_{\text{вр}}(4)$, можно определить ξ и затем по формуле (8.34) вычислить теоретические значения $R_{\text{вр}}(I)$ для уровней с $I \geq 6$. В табл. 3 указаны значения ξ и теоретические значения $R_{\text{вр}}(I)$ для некоторых ядер. Там же приведены экспериментальные значения $R_{\text{вр}}(I)$, $\hbar\omega = E_{\beta}(0)$, $\hbar\omega_{\gamma} = E_{22}$. Полученные из формулы (8.35) значения ξ для ядер U^{238} и Th^{232} приближенно совпадают с значениями, найденными из экспериментальных данных, и соответственно равны $\sim 7 \cdot 10^{-4}$ и $\sim 1,5 \cdot 10^{-3}$.

Из табл. 3 видно, что у ядер U^{238} , Th^{232} и Dy^{160} , где значения ξ соответственно равны $5 \cdot 10^{-4}$; $1,4 \cdot 10^{-3}$ и $1,4 \cdot 10^{-3}$, теория возмущений приводит к результатам, близким к экспериментальным для уровней спина $I \leq 12$ у ядра U^{238} и $I \leq 10$ в ядрах Th^{232} и Dy^{160} . Для других ядер, например Hf^{166} , W^{172} , значение $\xi \approx 10^{-2}$, и теория возмущений приводит к резкому расхождению с экспериментом, начиная с $I=8$. При $I=12$ для Hf^{166} и $I=14$ для W^{172} теоретические отношения становятся даже отрицательными, что указывает на полную неприменимость теории возмущений при исследовании энергетических состояний таких ядер.

Естественно, что в тех случаях (а это бывает часто), когда теория возмущений неприменима, нельзя исправить результат, учитывая следующие члены теории возмущений. Тем не менее в

Таблица 3

Поправки к вращательным уровням основной полосы на основе теории возмущений

Ядро	Данные	$R_{\text{вп}}^0$ (4)	$R_{\text{вп}}^1$ (6)	$R_{\text{вп}}^2$ (8)	$R_{\text{вп}}^3$ (10)	$R_{\text{вп}}^4$ (12)	$R_{\text{вп}}^5$ (14)	$R_{\text{вп}}^6$ (16)	ξ	$h\omega$, кэВ	$h\omega_1$, кэВ	$\frac{E_{\text{вп}}^0(2)}{h\omega}$	$\frac{E_{\text{вп}}^0(2)}{h\omega_1}$
Yb ¹⁸⁶	эксперимента	3,239	6,553	10,78	15,76	21,34	—	—	0,0020	—	—	—	—
	теории	—	6,490	10,40	14,47	18,10	—	—	—	—	—	—	—
Hf ¹⁶⁶	эксперимента	2,966	5,656	8,866	12,42	16,16	—	—	0,0075	—	—	—	—
	теории	—	5,014	5,768	3,321	—4,71	—	—	—	—	—	—	—
Hf ¹⁶⁸	эксперимента	3,107	6,102	9,782	14,00	18,60	—	—	0,0047	—	—	—	—
	теории	—	5,776	8,160	9,09	7,12	—	—	—	—	—	—	—
Hf ¹⁷⁰	эксперимента	3,206	6,411	10,41	15,03	20,13	25,64	31,47	0,0027	—	—	—	—
	теории	—	6,310	9,841	13,14	15,38	15,58	12,49	—	—	—	—	—
Hf ¹⁷²	эксперимента	3,258	6,635	10,96	16,07	21,83	28,05	—	0,0016	—	—	—	—
	теории	—	6,597	10,73	15,26	19,70	23,47	—	—	—	—	—	—
W ¹⁷²	эксперимента	3,067	5,917	9,333	13,15	17,32	21,78	—	0,0055	—	—	—	—
	теории	—	5,559	7,483	7,45	3,74	—5,75	—	—	—	—	—	—
W ¹⁷⁴	эксперимента	3,172	6,293	10,161	14,611	19,54	—	—	0,0034	—	—	—	—
	теории	—	6,121	9,245	11,71	12,47	—	—	—	—	—	—	—
W ¹⁷⁶	эксперимента	3,206	6,434	10,49	15,16	20,29	—	—	0,0027	—	—	—	—
	теории	—	6,310	9,829	13,10	15,30	—	—	—	—	—	—	—
Os ¹⁸⁴	эксперимента	3,13	6,27	10,3	15,0	20,3	—	—	0,0043	—	—	—	—
	теории	—	5,90	8,55	10,0	9,00	—	—	—	—	—	—	—
U ²³⁸	эксперимента	3,31	6,93	11,6	17,7	24,6	—	—	0,0005	994	1062	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$
	теории	—	6,87	11,6	17,4	24,0	—	—	—	—	—	—	—
Th ²³²	эксперимента	3,27	6,63	11,0	16,1	—	—	—	0,0014	725	788	$6,9 \cdot 10^{-2}$	$6,3 \cdot 10^{-2}$
	теории	—	6,65	10,9	15,8	—	—	—	—	—	—	—	—
Dy ¹⁶⁰	эксперимента	3,27	6,71	11,2	16,6	—	—	—	0,0014	—	966	—	$8,8 \cdot 10^{-2}$
	теории	—	6,65	10,9	15,8	—	—	—	—	—	—	—	—

некоторых работах энергия возбужденных вращательных состояний выражалась степенным рядом

$$E(I) = AI(I+1) + BI^2(I+1)^2 + CI^3(I+1)^3. \quad (8.37)$$

Путем введения дополнительного параметра C удается улучшить согласие теории с экспериментом для первых трех-четырех уровней. Однако это согласие является иллюзорным, так как ряд (8.37) быстро расходится при возрастании I . Применять же такое разложение к малому числу уровней нельзя, так как для определения трех параметров A, B, C необходимо знать энергию не менее трех членов вращательной полосы.

§ 9. АДИАБАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДЕР

В адиабатической теории коллективных возбужденных состояний атомных ядер вращательные и вибрационные возбуждения рассматриваются независимо. Оператор Гамильтона коллективных квадрупольных возбуждений (6.3) заменяется эффективным гамильтонианом, представляющим сумму оператора внутренних колебательных движений $H(\beta, \gamma)$ в системе координат, связанных с ядром, и оператора вращения $H_a(\theta)$ определенного выражением (6.11). Этот оператор зависит от трех углов Эйлера и является оператором жесткого асимметричного ротатора.

Коллективные возбужденные состояния четно-четных ядер на основе эффективного гамильтониана (6.11) исследовались в работе Марти [34] и более подробно в работе Давыдова и Филиппова [35]. Перейдем к рассмотрению результатов этих исследований. В этом параграфе все энергии будут выражаться в единицах

$$E_1 = h^2 [4B\beta_{\text{эфф}}^2]^{-1}, \quad (9.1)$$

поэтому оператор (6.11) будет иметь вид

$$H_a = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{I_{\lambda}^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\lambda\right)}, \quad (9.2)$$

где $\gamma = \gamma_{\text{эфф}}$ и I_{λ} — проекции оператора полного углового момента (в единицах $\hbar$) ядра на декартовы оси $\xi\eta\zeta$, совпадающие с главными направлениями моментов инерции ядра. Эти проекции удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[I_{\xi}, I_{\eta}] = -iI_{\zeta}, \dots, \quad (9.3)$$

отличающимися знаком от перестановочных соотношений для проекций на оси лабораторной системы координат.

Таблица 4

Характеры неприводимых представлений группы D_2

D_2	E	R_π^ξ	R_π^η	R_π^ζ	D_2	E	R_π^ξ	R_π^η	R_π^ζ
A	1	1	1	1	B_2	1	-1	1	-1
B_1	1	-1	-1	1	B_3	1	1	-1	-1

Оператор Гамильтона (9.2) и перестановочные соотношения (9.3) остаются инвариантными при преобразованиях группы симметрии D_2 , которая содержит (табл. 4), кроме тождественного элемента (E), три операции R_π^ξ , R_π^η , R_π^ζ поворотов на π вокруг декартовых координатных осей ξ , η , ζ . При каждом таком повороте меняют знак два из трех операторов I_ξ , I_η , I_ζ . В этом легко убедиться, если учесть, что операторы поворотов на π вокруг осей j ($j=\xi, \eta, \zeta$) выражаются (см. § 43 в книге [10]) через проекции углового момента $\mathbf{L}$ на оси поворота с помощью формулы

$$R_\pi^j = \exp(i\pi I_j),$$

где $I_j = \frac{1}{h} L_j$. Используя перестановочные соотношения (9.3), находим

$$R_\pi^j I_j R_\pi^{+j} = I_j; \quad R_\pi^j I_k R_\pi^{+j} = -I_k, \text{ если } k \neq j.$$

Из последних равенств следует инвариантность оператора энергии (9.2) и перестановочных соотношений (9.3) относительно вращений системы координат на π . Например,

$$R_\pi^j H_a R_\pi^{+j} = H_a, \quad j = \xi, \eta, \zeta.$$

Эта инвариантность не зависит от явного вида главных моментов инерции в операторе (9.2).

В четно-четных ядрах волновые функции коллективных движений зависят только от пространственных координат нуклонов. Если коллективные движения соответствуют однопартонным состояниям со спаренными спинами, то их координатные волновые функции должны относиться к полносимметричному представлению A группы D_2 , так как операциям R_π^j соответствуют

перестановки нуклонов. Следовательно, нас будут интересовать решения Φ уравнения Шредингера

$$(H_a - \epsilon_I) \Phi_I = 0, \quad (9.4)$$

относящиеся только к полносимметричному представлению группы D_2 . Если учесть, что операторы поворотов действуют на обобщенные сферические функции D_{MK}^I по следующим правилам:

$$R_z^\tau D_{MK}^I = (-1)^K D_{MK}^I,$$

$$R_z^\eta D_{MK}^I = (-1)^{I-K} D_{M, -K}^I,$$

$$R_z^{\dot{\tau}} D_{MK}^I = (-1)^I D_{M, -K}^I,$$

то легко убедиться, что функции, соответствующие состояниям с полным угловым моментом I (в единицах $\hbar$) и относящиеся к полносимметричному представлению A группы D_2 , можно записать в виде

$$\Phi_{IM\tau}(\theta) \equiv |IM\tau\rangle = \sum_{K=0} |IMK\rangle A_{IK}^{\dot{\tau}}, \quad (9.5)$$

где K пробегает $1/2(I+2)$ положительных четных значений; $0, 2, \dots, I$ в случае четных I и $1/2(I-1)$; положительных четных значений $2, 4, \dots, I-1$ в случае нечетных I ;

$$|IMK\rangle = \left[\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{0K})} \right]^{1/2} \{D_{MK}^I + (-1)^I D_{M, -K}^I\} \quad (9.6)$$

функции симметричного волчка, зависящие от трех углов Эйлера; индекс τ нумерует волновые функции, относящиеся к одинаковым IM .

Подставляя функции (9.5) в уравнение (9.4), получим систему однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{K' \neq 0} \{ \langle IMK | H_a | IMK' \rangle - \epsilon_I \delta_{KK'} \} A_{IK'}^{\dot{\tau}} = 0. \quad (9.7)$$

При фиксированном значении I число n_I возможных уравнений (9.7) равно числу возможных значений K , т. е.

$$n_I = \begin{cases} \frac{1}{2}(I+2), & \text{если } I \text{ четное;} \\ \frac{1}{2}(I-1), & \text{если } I \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (9.8)$$

Из условия нетривиальной разрешимости системы уравнений (9.7) получаем уравнение n_I степени относительно ϵ_I . Корни этого уравнения различают индексом τ , пробегающим в порядке возрастания энергии значения 1, 2, ..., n_I . Каждому значению $\epsilon_{I\tau}$ соответствует своя система вещественных коэффициентов A_{IK}^τ . Эти коэффициенты удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\sum_{K>0} A_{IK}^\tau A_{IK'}^\tau = \delta_{\tau\tau'}, \quad \sum_{\tau} A_{IK}^\tau A_{IK'}^\tau = \delta_{KK'}. \quad (9.9)$$

Матричные элементы оператора (9.2) связывают состояния, различающиеся значениями K на две единицы. Пользуясь формулами (Д.12)–(Д.14) приложения Д, можно написать

$$\left. \begin{aligned} \langle IMK | H_a | IMK \rangle &= \frac{1}{4} (a+b) [I(I+1) - K^2] + \frac{1}{2} c K^2, \\ \langle IM, K+2 | H_a | IMK \rangle &= \frac{(a-b) [1 + (-1)^I \delta_{0K}]}{8 \sqrt{1 + \delta_{0K}}} \times \\ &\times \sqrt{(I-K)(I-K-1)(I+K+1)(I+K+2)}, \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

где

$$a^{-1} = \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right), \quad b^{-1} = \sin^2 \left(\gamma + \frac{2\pi}{3} \right), \quad c^{-1} = \sin^2 \gamma; \quad (9.11)$$

$$H_a = \frac{1}{4} (a+b) [I^2 - I_3^2] + \frac{1}{2} c I_3^2 + \frac{1}{4} (a-b) (I_1^2 - I_2^2). \quad (9.11a)$$

Вычислим след матрицы, образованной матричными элементами (9.10). Для этого воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} \sum_{K>0}^I K^2 &= \frac{1}{6} I(I+1)(I+2), \text{ если } I \text{ четное,} \\ \sum_{K>0}^{I-1} K^2 &= \frac{1}{6} I(I-1)(I+1), \text{ если } I \text{ нечетное.} \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \text{Sp} \{ \langle IMK' | H_a | IMK \rangle \} &= \frac{1}{12} I(I+1)(I+2)(a+b+c), \\ \text{если } I \text{ четное,} \\ \text{Sp} \{ \langle IMK' | H_a | IMK \rangle \} &= \frac{1}{12} I(I-1)(I+1)(a+b+c), \\ \text{если } I \text{ нечетное.} \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

След матрицы, образованной коэффициентами системы линейных уравнений (9.7), равен сумме корней векового (характеристического) уравнения, поэтому из выражений (9.12) следует простое правило сумм

$$\frac{12}{I(I+1)} \sum_{i=1}^{n_I} \varepsilon_{I, \tau} = \begin{cases} (I+2)(a+b+c), & \text{если } I \text{ четное,} \\ (I-1)(a+b+c), & \text{если } I \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (9.13)$$

Из равенства (9.13) также можно получить другое важное правило сумм, позволяющее (см. работу [48]) связать сумму энергий уровней четного значения спина с суммой энергий уровней последующего нечетного спина:

$$\sum_{i=1}^{n_I} \varepsilon_{I, \tau} = \sum_{i=1}^{n_{I+1}} \varepsilon_{I+1, \tau} \quad (I \text{ четное}) \quad (9.14)$$

Существенно, что равенства (9.13) и (9.14) не зависят от конкретных значений a , b и c , т. е. от конкретных значений главных моментов инерции четно-четного ядра. В случае, когда значения a , b , c выражаются с помощью формул (9.11) через один параметр γ , имеют место соотношения

$$\frac{a+b+c}{9} = \frac{ab+bc+ca}{24} = \frac{abc}{16} = \sin^{-2}(3\gamma). \quad (9.15)$$

Перейдем теперь к исследованию энергетических состояний, соответствующих определенному значению спина I .

Состояния со спином $I=2$. При $I=2$ в сумму (9.5) входят только значения $K=0; 2$. Поэтому, согласно уравнению (9.7), имеем систему двух однородных уравнений относительно неизвестных A_{20} и A_{22} :

$$\left[\frac{3}{2}(a+b) - \varepsilon \right] A_{20} + \frac{\sqrt{3}}{2}(a-b) A_{22} = 0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b) A_{20} + \left[\frac{1}{2}(a+b+4c) - \varepsilon \right] A_{22} = 0.$$

Из условия нетривиальной разрешимости этой системы однородных уравнений находим два значения энергии

$$\varepsilon_{2, \tau} = (a+b+c) + (-1)^{\tau} \sqrt{(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ac)}, \quad (9.16)$$

где $\tau=1; 2$. В частном случае при значениях (9.11), учитывая (9.15), имеем

$$\varepsilon_{2, \tau} = \frac{3[3 + (-1)^{\tau} \sqrt{9 - 8 \sin^2(3\gamma)}]}{\sin^2(3\gamma)}, \quad \tau = 1; 2. \quad (9.17)$$

При $\tau=1$ волновая функция (9.5) определяется коэффициентами

$$A_{2,0}^{(1)} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sin \gamma \cdot \sin 3\gamma + 3 \cos \gamma \cdot \cos 3\gamma}{2 \sqrt{9 - 8 \sin^2(3\gamma)}} \right\}^{1/2}, \quad (9.18)$$

$$A_{2,2}^{(1)} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sin \gamma \cdot \sin 3\gamma + 3 \cos \gamma \cdot \cos 3\gamma}{2 \sqrt{9 - 8 \sin^2(3\gamma)}} \right\}^{1/2}.$$

При $\tau=2$ коэффициенты $A_{2,\kappa}^{(1)}$ волновой функции (9.5) выражаются через значения (9.18) с помощью равенств

$$A_{2,0}^{(2)} = -A_{2,2}^{(1)}, \quad A_{2,2}^{(2)} = A_{2,1}^{(1)}. \quad (9.19)$$

Состояния со спином $I=3$. При $I=3$ в сумму (9.5) входит только одно слагаемое $A_{32}=1$. Поэтому возбужденные состояния со спином 3 характеризуются функцией

$$\Phi_{3M1} = |3M2\rangle. \quad (9.20)$$

Их энергия

$$\epsilon_{3,1} = \langle 3M2 | H_a | 3M2 \rangle = 2(a + b + c). \quad (9.21)$$

Для частного случая значений (9.11) имеем

$$\epsilon_{3,1} = 18 \sin^2(3\gamma). \quad (9.22)$$

Из равенств (9.16) и (9.21) следует правило сумм

$$\epsilon_{2,1} + \epsilon_{2,2} = \epsilon_{3,1}, \quad (9.23)$$

которое является частным случаем правила сумм (9.14).

Состояния со спином $I=4$. При $I=4$ в сумму (9.5) входит три слагаемых с значениями $K=0; 2; 4$. В этом случае при значениях (9.11) три энергетических уровня ϵ_4, τ являются корнями уравнения третьей степени

$$\epsilon^3 - \frac{90\epsilon^2}{\sin^2(3\gamma)} + \frac{48}{\sin^4(3\gamma)} [27 + 26 \sin^2(3\gamma)] \epsilon - \frac{640}{\sin^4(3\gamma)} [27 + 7 \sin^2(3\gamma)] = 0.$$

Это уравнение удобно решать численным путем для каждого значения параметра γ .

Состояния со спином $I=5$. При $I=5$ в сумму (9.5) входят два слагаемых с значениями $K=2; 4$. Поэтому имеется два энергетических уровня со спином 5:

$$\epsilon_{5,\tau} = \frac{9[5 + (-1)^\tau \sqrt{9 - 8 \sin^2(3\gamma)}]}{\sin^2(3\gamma)}, \quad \tau = 1, 2. \quad (9.24)$$

Энергии уровней спинов 3; 4 и 5 удовлетворяют правилам сумм

$$\epsilon_{4,1} + \epsilon_{4,2} + \epsilon_{4,3} = \epsilon_{5,1} + \epsilon_{5,2} = 5\epsilon_{31}; \quad \epsilon_{5,1} = \epsilon_{2,2} + 4\epsilon_{2,1}, \quad (9.25)$$

$$\epsilon_{5,2} = \epsilon_{2,1} + 4\epsilon_{2,2}.$$

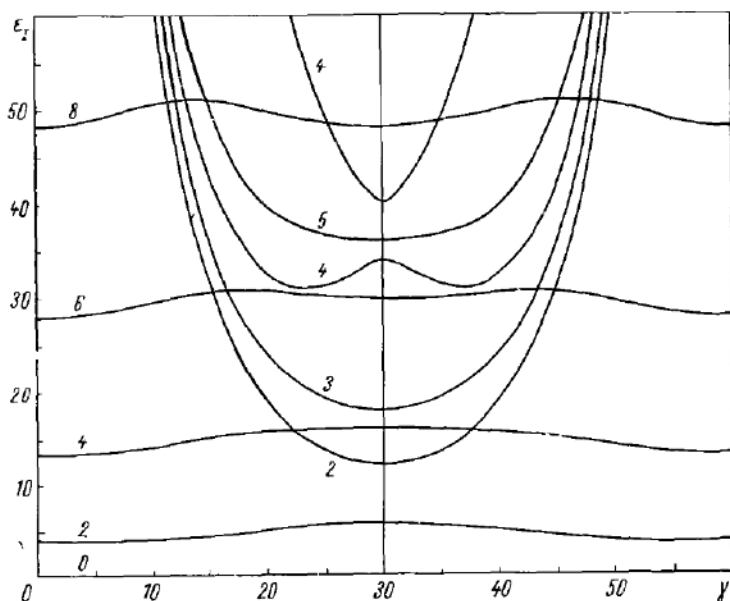


Рис. 6. Зависимость энергий вращательных состояний четно-четного ядра от параметра γ° . Расчеты по теории неаксиального ротатора ДФ.

Коэффициенты волновых функций (9.5) выражаются через коэффициенты (9.18)

$$A_{5,2}^{(1)} = A_{5,4}^{(2)} = A_{2,0}^{(1)}, \quad A_{5,4}^{(1)} = -A_{5,2}^{(2)} = A_{2,2}^{(1)}.$$

Таким же образом энергии состояний со спинами $I \geq 6$ можно выразить через один параметр теории — параметр асимметрии γ . Эти вычисления были проделаны Давыдовым и Ростовским [36], а также Муром, Уайтом и др. [49, 50]. Значения энергий первых уровней возбуждения указаны на рис. 6 в единицах $\frac{h^2}{4B\beta^2}$ в зависимости от γ в интервале $0-60^\circ$. Все

уровни положительной четности. Спины уровней (в единицах $\hbar$) указаны цифрами рядом с кривыми. Кривые рис. 6 симметричны относительно вертикальной линии, проходящей через значение $\gamma = 30^\circ$. Следовательно, изучая энергетические уровни,

нельзя отличить значения γ от 60° — γ . Симметрия кривых рис. 6 следует из значений (9.15), если учесть, что условие нетривиальной разрешимости системы уравнений (9.7) сводится к уравнению для определений энергий, которое содержит только комбинации коэффициентов

$$a + b + c, \quad ab + bc + ac, \quad abc.$$

При $\gamma \rightarrow 0$ или $\gamma \rightarrow 60^\circ$ энергии некоторых возбужденных состояний остаются конечными и в пределе переходят к энергии уровней (8.12) жесткого симметричного волчка. Последовательность уровней

$$\epsilon_{21}, \epsilon_{41}, \epsilon_{61} \dots$$

мы будем называть «основной вращательной полосой». Отношения энергий этих уровней к энергии первого возбужденного состояния

$$R_l = \epsilon_l / \epsilon_{21}, \quad l = 4, 6, 8 \dots$$

приведены по данным Мура, Уайта и др. [49, 50] в табл. 5 для некоторых значений γ . Энергии всех других возбужденных вращательных состояний стремятся к бесконечности при $\gamma \rightarrow 0$, или при $\gamma \rightarrow 60^\circ$. Эти возбужденные состояния образуют «аномальные вращательные полосы». Отношения энергий первых семи возбужденных состояний первой аномальной вращательной полосы к энергии первого возбужденного уровня ϵ_{21} основной вращательной полосы указаны по данным Мура и Уайта [49, 50] в табл. 6. В табл. 7 приведены отношения энергий четырех возбужденных уровней второй аномальной полосы к энергии ϵ_{21} первого возбужденного состояния основной вращательной полосы.

Энергия первого возбужденного уровня основной вращательной полосы при фиксированном значении β плавно изменяется при увеличении γ . В табл. 8 указаны (в единицах $\frac{\hbar^2}{4B\beta^2}$) энергии первого возбужденного уровня основной вращательной полосы для некоторых значений γ . Зависимость энергии вращения от γ можно качественно трактовать как уменьшение (при фиксированном β) эффективного момента инерции ядра при приближении значения γ к 30° .

Уже первые сравнения экспериментальных данных об энергиях и спинах коллективных возбужденных состояний с теорией Давыдова—Филиппова («теория неаксиальных ядер») показали, что модель жесткого неаксиального ротатора отражает основные закономерности спектров возбужденных состояний многих четно-четных ядер (см. [36, 51—54]).

Таблица 5

Отношение энергий $R_{J,1}$ возбужденных состояний основной вращательной полосы в зависимости от γ

γ , град	$R_{4,1}$	$R_{6,1}$	$R_{8,1}$	$R_{10,1}$	$R_{12,1}$	$R_{14,1}$	$R_{16,1}$	$R_{18,1}$	$R_{20,1}$	$R_{22,2}$	$R_{24,1}$
0	3,3333	7,0000	12,000	18,333	26,000	35,000	45,333	57,000	70,000	84,333	100,000
3	3,3333	7,0000	12,000	18,333	26,000	35,000	45,333	57,000	70,000	84,333	100,000
4	3,3331	6,9987	11,996	18,323	25,979	34,962	45,270	56,899	69,847	84,111	99,687
5	3,3327	6,9964	11,989	18,306	25,944	34,897	45,160	56,725	69,584	83,730	99,153
6	3,3320	6,9929	11,978	18,280	25,891	34,800	44,996	56,467	69,198	83,175	98,382
7	3,3309	6,9869	11,959	18,235	25,799	34,633	44,718	56,032	68,554	82,264	97,142
8	3,3291	6,9774	11,929	18,163	25,654	34,373	44,290	55,376	67,605	80,958	95,420
9	3,3265	6,9633	11,885	18,059	25,446	34,005	43,701	54,500	66,384	79,340	93,362
10	3,3227	6,9430	11,822	17,912	25,158	33,513	42,940	53,415	64,928	77,481	91,075
11	3,3175	6,9152	11,737	17,717	24,790	32,907	42,043	52,188	63,345	75,518	88,715
12	3,3104	6,8776	11,624	17,467	24,338	32,200	41,042	50,868	61,686	73,502	86,322
13	3,3010	6,8284	11,481	17,164	23,818	31,424	39,985	49,512	60,011	71,490	83,952
14	3,2887	6,7656	11,306	16,813	23,246	30,606	38,903	48,147	58,344	69,499	81,612
15	3,2729	6,6875	11,099	16,424	22,645	29,772	37,820	46,795	56,701	67,541	79,316
16	3,2529	6,5930	10,866	16,010	22,028	28,937	36,747	45,463	55,087	65,620	77,063
17	3,2280	6,4819	10,610	15,581	21,409	28,110	35,691	44,156	53,504	63,737	74,855
18	3,1975	6,3557	10,341	15,148	20,796	27,299	34,659	42,880	51,960	61,900	72,701
19	3,1608	6,2169	10,064	14,718	20,196	26,508	33,655	41,637	50,457	60,112	70,604
20	3,1177	6,0690	9,7869	14,296	19,613	25,740	32,681	40,434	49,000	58,380	68,572
21	3,0684	5,9164	9,5139	13,888	19,050	25,002	31,743	39,276	47,598	56,712	66,616
22	3,0137	5,7632	9,2499	13,498	18,513	24,296	30,849	38,170	46,260	55,119	64,747
23	2,9552	5,6138	8,9989	13,128	18,005	23,631	30,004	37,126	44,997	53,616	62,983
24	2,8950	5,4721	8,7650	12,785	17,535	23,013	29,221	36,158	43,824	52,220	61,344
25	2,8361	5,3420	8,5526	12,474	17,108	22,453	28,511	35,280	42,761	50,954	59,859
26	2,7814	5,2273	8,3666	12,202	16,735	21,964	27,890	34,512	41,831	49,847	58,560
27	2,7342	5,1320	8,2127	11,977	16,426	21,559	27,376	33,877	41,062	48,932	57,485
28	2,6977	5,0601	8,0968	11,808	16,194	21,254	26,990	33,399	40,484	48,243	56,676
29	2,6746	5,0153	8,0246	11,703	16,049	21,065	26,749	33,101	40,123	47,813	56,172
30	2,6667	5,0000	8,0000	11,667	16,000	21,000	26,667	33,000	40,000	47,667	56,000

Отношения энергий $R_{I,\gamma}$ первых семи возбужденных состояний первой аномальной вращательной полосы в зависимости от γ

γ , град	$R_{2,2}$	$R_{3,1}$	$R_{4,2}$	$R_{5,1}$	$R_{6,2}$	$R_{7,1}$	$R_{8,2}$
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	181,878	182,878	184,211	185,878	187,878	190,211	192,878
4	102,091	103,091	104,425	106,091	108,092	110,424	113,095
5	65,162	66,161	67,496	69,162	71,166	73,495	76,173
6	45,103	46,103	47,438	49,103	51,110	53,435	56,124
7	33,009	34,009	35,345	37,009	39,023	41,341	44,049
8	25,161	26,161	27,500	29,161	31,186	33,492	36,230
9	19,783	20,783	22,125	23,783	25,822	28,111	30,894
10	15,937	16,937	18,285	19,937	21,998	24,263	27,110
11	13,094	14,094	15,448	17,094	19,185	21,416	24,349
12	10,933	11,933	13,297	14,933	17,065	19,251	22,298
13	9,2543	10,2543	11,631	13,254	15,438	17,566	20,758
14	7,9244	8,9244	10,317	11,924	14,176	16,227	19,597
15	6,8541	7,8541	9,2683	10,854	13,190	15,146	18,724
16	5,9811	6,9811	8,4223	9,9811	12,420	14,259	18,073
17	5,2608	6,2608	7,7358	9,2608	11,820	13,521	17,593
18	4,6608	5,6608	7,1778	8,6608	11,359	12,898	17,240
19	4,1572	5,1572	6,7253	8,1572	11,010	12,367	16,980
20	3,7320	4,7320	6,3615	7,7320	10,751	11,908	16,784
21	3,3717	4,3717	6,0735	7,3717	10,565	11,507	16,623
22	3,0659	4,0659	5,8515	7,0659	10,437	11,152	16,469
23	2,8068	3,8068	5,6879	6,8068	10,353	10,836	16,295
24	2,5888	3,5888	5,5765	6,5888	10,298	10,555	16,084
25	2,4078	3,4078	5,5128	6,4078	10,257	10,306	15,838
26	2,2610	3,2610	5,4933	6,2610	10,212	10,090	15,582
27	2,1472	3,1472	5,5141	6,1472	10,151	9,9129	15,347
28	2,0656	3,0656	5,5677	6,0656	10,080	9,7790	15,160
29	2,0164	3,0164	5,6335	6,0164	10,022	9,6952	15,041
30	2,0000	3,0000	5,6667	6,0000	10,000	9,6667	15,000

Если энергии коллективных возбужденных состояний выражать через энергию первого возбужденного состояния спина 2, то теория Давыдова—Филиппова [35] содержит только один параметр γ , подлежащий определению из эксперимента. Сравнительно просто этот параметр вычисляется из экспериментального отношения энергий уровней спина 2 первой аномальной и основной вращательных полос. Согласно равенству (9.17), это отношение равно

$$R_{22} = \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} = \frac{3 + \sqrt{9 - 8 \sin^2(3\gamma)}}{3 - \sqrt{9 - 8 \sin^2(3\gamma)}}. \quad (9.26)$$

Таблица 7

Отношения энергий $R_{l,\tau}$ первых четырех возбужденных состояний второй аномальной вращательной полосы в зависимости от γ

γ , град	$R_{4,3}$	$R_{5,2}$	$R_{6,3}$	$R_{7,2}$
0	∞	∞	∞	∞
3	726,844	728,510	730,517	732,844
4	407,697	409,364	411,364	413,697
5	259,982	261,649	263,649	265,983
6	179,743	181,410	183,411	185,745
7	131,368	133,036	135,037	137,372
8	99,977	101,645	103,648	105,983
9	78,452	80,131	82,134	84,472
10	63,079	64,749	66,753	69,094
11	51,704	53,376	55,383	57,726
12	43,060	44,734	46,744	49,092
13	36,340	38,017	40,032	42,386
14	31,016	32,698	34,719	37,080
15	26,729	28,416	30,445	32,816
16	23,230	24,924	26,963	29,347
17	20,340	22,043	24,095	26,494
18	17,929	19,643	21,711	24,131
19	15,900	17,629	19,718	22,162
20	14,181	15,928	18,045	20,517
21	12,717	14,487	16,642	19,144
22	11,464	13,263	15,469	18,005
23	10,391	12,227	14,502	17,069
24	9,4725	11,355	13,729	16,313
25	8,6899	10,631	13,150	15,723
26	8,0305	10,044	12,771	15,281
27	7,4874	9,5886	12,605	14,976
28	7,0625	9,2623	12,642	14,788
29	6,7741	9,0657	12,837	14,694
30	6,6667	9,0000	13,000	14,667

Таблица 8

Энергии (в единицах $\hbar^2/(4B\beta^2)$) первого возбужденного состояния основной вращательной полосы в зависимости от γ

γ , град	ϵ_{21}	γ , град	ϵ_{21}	γ , град	ϵ_{21}
0	4,0000	11	4,3055	21	5,1864
3	4,0220	12	4,3658	22	5,3047
4	4,0392	13	4,4322	23	5,4251
5	4,0613	14	4,5048	24	5,5451
6	4,0887	15	4,5836	25	5,6613
7	4,1212	16	4,6688	26	5,7691
8	4,1590	17	4,7603	27	5,8629
9	4,2022	18	4,8582	28	5,9365
10	4,2510	19	4,9622	29	5,9837
		20	5,0718	30	6,0000

При изменении γ от 0 до 30° отношение (9.26) монотонно падает (см. табл. 6) от бесконечности до 2. Возможность использования выражения (9.26) для определения γ обусловлена, с одной стороны, большой чувствительностью отношения к изменению γ , с другой стороны, положение энергетических уровней ϵ_{21} и ϵ_{22} сравнительно хорошо известно для многих четно-четных ядер. Измеряя на опыте отношение энергий $\epsilon_{22}/\epsilon_{21}$, можно, используя равенство (9.26), вычислить значения γ , а затем с помощью равенств (9.22), (9.24) и табл. 5—7 предсказать спины и положение остальных уровней основной вращательной и аномальных полос. Другими словами, теория позволяет выразить отношения энергий R_{I-} всех коллективных возбуждений квадрупольного типа (положительной четности и $I \neq 0$) через одно экспериментальное отношение R_{22} .

Предсказываемый теорией спектр возбужденных состояний имеет свои особенности.

1. Эффективное (или истинное) отклонение формы ядра от эллипсоида вращения приводит к нарушению в основной вращательной полосе правила интервалов (8.13). Так, при $\gamma=30^\circ$ уровни основной вращательной полосы должны удовлетворять правилу интервалов

$$1 : 2,667 : 5 : 8 : 11,67 : 16 : 21 : \dots$$

До работ [35, 36] считалось, что все ядра обладают аксиальной симметрией и отклонение экспериментальных отношений энергий от правила интервалов (8.13) пытались объяснить нарушениями условий адиабатичности. Расчеты проводились на основе теории возмущений, при этом учитывались [55] только энергетические состояния первых двух или трех уровней (2^+ , 4^+ и 6^+), поэтому полученные выводы были малоубедительными, так как не было уверенности в хорошем выполнении условий применимости теории возмущений.

2. Кроме изменения правила интервалов для уровней основной вращательной полосы учет эффективной (или истинной) неаксиальности приводит к появлению новых «аномальных» полос, которые в теории неаксиальных ядер рассматриваются как вращательные, а в действительности являются сложными возбуждениями вращательно-гамма-вибрационного типа. Эти возбуждения группируются в несколько полос: первая аномальная полоса образуется уровнями со спинами 2, 3, 4, 5, 6...; вторая — уровнями со спинами 4, 5, 6, 7...; третья — уровнями со спинами 6, 7... и т. д. Начало первой аномальной полосы (спин 2) при $\gamma < 22^\circ$ лежит выше (а при $\gamma > 23^\circ$ ниже) состояния со спином 4 в основной вращательной полосе. Уровень со спином 3 лежит всегда выше уровня спина 4 в основной вращательной полосе.

Иллюстрацией сказанного могут служить рис. 7 и 8. На рис. 7 сплошными линиями изображены возбужденные состояния со спинами 2, 4, 6, 8, найденные в опытах Шарф-Гольдгабер и др. [56, 57] при исследовании каскадных γ -переходов при распаде 10-минутного изомера Os^{190} , имеющего спин 10-. Как

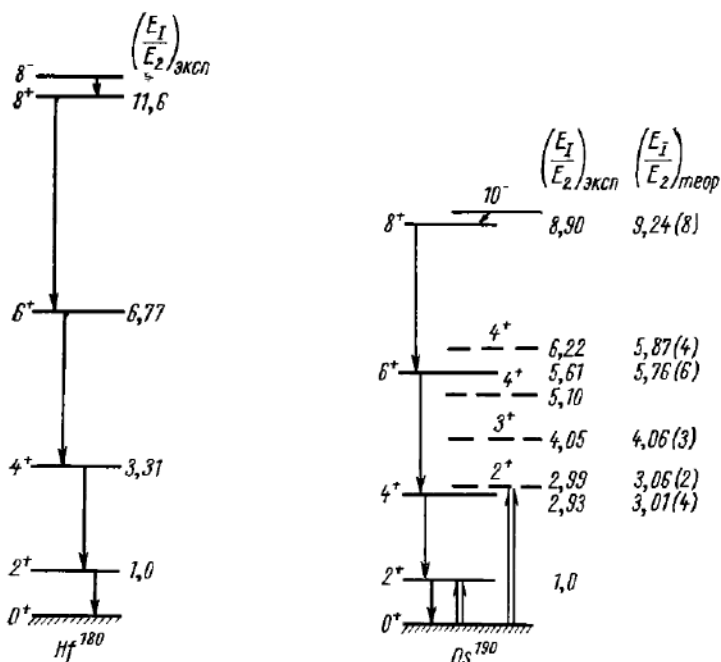


Рис. 7. Схема энергетических уровней ядер Hf^{180} и Os^{190} . Экспериментальные значения взяты из работ [46], [58]. Теоретические значения энергий и спины определяются табл. 5 и 6 при $\gamma = 22^\circ$.

отмечают авторы работы [56], наблюдаемая на опыте последовательность спинов хорошо соответствует последовательности спинов уровней ядра Hf^{180} (рис. 7), образующих ярко выраженный вращательный спектр с правилом интервалов, близким к теоретическому для аксиально симметричного ротатора. Однако наблюдаемые в Os^{190} отношения энергий оказались существенно отличающимися от отношений (8.13). Эти отношения нельзя получить выбором значений двух параметров в формуле

$$E(I) = AI(I+1) - BI^2(I+1)^2,$$

соответствующей формуле (8.33) теории возмущений для аксиально симметричного ядра. В то же время если допустить, что эффективное значение $\gamma = 22^\circ$, то найденные по табл. 5 отноше-

ния энергий 1:3,01:5,76:9,24 близки к экспериментально определенным отношениям 1:2,99:5,61:8,90 даже без введения неадиабатических поправок. Кроме того, значение $\gamma=22^\circ$ объяс-

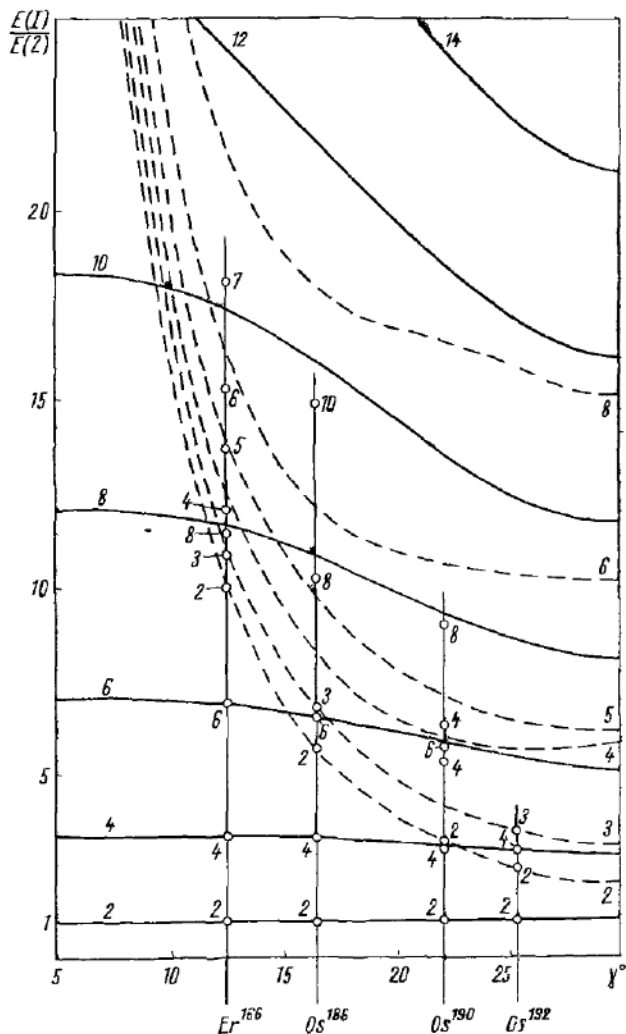


Рис. 8. Отношения энергий возбужденных состояний к энергии первого возбужденного состояния в модели неаксиального ротатора (ДФ). Кружками указаны экспериментальные [46] отношения энергий.

няет положение второго уровня спина 2 и уровня спина 3^+ (см. табл. 6), которые можно отнести к аномальной вращательной полосе. Эти уровни не проявляются при распаде 10-ми-

нутного изомера Os^{190} . Однако они проявляются при процессе K -захвата в ядре Ir^{190} . Второй возбужденный уровень со спином 2 проявляется также при кулоновском возбуждении и при β -распаде ядра Re^{190} .

На рис. 8 изображены отношения энергий $R_{I\pi}$ для основной (сплошные кривые) и первой аномальной (пунктирные кривые) полос в зависимости от параметра асимметрии γ . Для иллюстрации сравнения теории с экспериментом кружками отмечены экспериментальные отношения для ядер Eg^{166} , Os^{186} , Os^{190} и Os^{192} [46]. Около кружков указаны экспериментальные значения спинов.

Из рисунка видно, что теория качественно передает наблюдаемую последовательность уровней в этих ядрах. Однако экспериментальные отношения энергий для больших спинов обычно лежат ниже теоретических. Например, уровни со спинами 8 и 10 в ядре Os^{186} (см. § 11).

Наряду с энергиями возбужденных состояний теория определяет и волновые функции. В общем случае* волновые функции (9.5) возбужденных состояний четно-четных ядер изображаются линейными комбинациями функций (9.6), соответствующих состояниям с определенным значением K , т. е. с определенным значением проекции полного углового момента на ось ξ ядра. Значения коэффициентов $A_{IK}^{\pm}$, характеризующих вклад различных слагаемых в такой линейной комбинации, зависят от параметра γ . Эти коэффициенты определяются системами алгебраических уравнений (9.7) для каждого значения I . Значения некоторых коэффициентов $A_{IK}^{\pm}$ для разных γ вычислялись Давыдовым и Ростовским [36], Малманном и Деем [59]. В табл. 9 приведены значения $A_{IK}^{\pm}$ для основной вращательной полосы ($I=4, 6$) и для первой аномальной вращательной полосы ($I=4$). Коэффициенты $A_{2K}^{\pm}$ для состояний спина 2 можно вычислить из аналитических формул (9.18) и (9.19). Коэффициенты $A_{5K}^{(1)}$ для первой аномальной вращательной полосы выражаются через значения (9.18) с помощью равенств:

$$A_{50}^1 = 0; \quad A_{52}^1 = A_{20}^1; \quad A_{54}^1 = A_{22}^1. \quad (9.27)$$

Как видно из формул (9.18) и табл. 9, при $\gamma < 15^\circ$ волновые функции (9.5) вращательных состояний ядра можно приближенно заменить выражениями, содержащими только одно значение K . Например, волновые функции состояний, имеющих

* Только функция вращательного состояния, имеющего спин 3, соответствует значению $K=2$. В этом состоянии вращение происходит вокруг оси ξ ядра.

Коэффициенты A_{IK}^{τ} , определяющие волновые функции вращательных состояний неаксиального ротатора

A_{IK}^{τ}	5°	10°	15°	20°
Основная полоса A_{40}^1	1,000	0,9994	0,9933	0,9549
A_{42}^1	0,003	0,0302	0,1140	0,2961
A_{44}^1	$1 \cdot 10^{-6}$	0,0005	0,0013	0,0106
Первая аномальная по- лоса A_{40}^2	-0,003	-0,0302	-0,1140	-0,2962
A_{42}^2	1,00	0,9994	0,9933	0,9539
A_{44}^2	$5 \cdot 10^{-4}$	0,0016	0,0161	0,0444
Основная полоса A_{60}^1	1	0,9960	0,9723	0,8782
A_{62}^1	0,0075	0,0032	0,2304	0,4758
A_{64}^1	$1 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$	0,0455
A_{66}^1	$1 \cdot 10^{-7}$	$4,7 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	0,0010

Продолжение табл. 9

A_{IK}^{τ}	22,5°	25°	27,5°	30°
Основная полоса A_{40}^1	0,9116	0,8516	0,7925	0,7395
A_{42}^1	0,4145	0,5222	0,6050	0,6614
A_{44}^1	0,0219	0,0434	0,0759	0,1250
Первая аномальная по- лоса A_{40}^2	-0,4149	-0,5231	-0,6004	-0,5590
A_{42}^2	0,9067	0,8425	0,7541	0,5000
A_{44}^2	0,0738	0,1286	0,2602	0,6614
Основная полоса A_{60}^1	0,8174	0,7621	0,7142	0,6714
A_{62}^1	0,5681	0,6341	0,6738	0,6953
A_{64}^1	0,0818	0,1302	0,1898	0,2539
A_{66}^1	$2,84 \cdot 10^{-3}$	$7,02 \cdot 10^{-3}$	0,0155	0,0312

спин 2, при $\gamma < 15^\circ$ можно заменить приближенными функциями:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{21M} &\approx |2M0\rangle = \left(\frac{5}{8\pi^2}\right)^{1/2} D_{M0}^2, \\ \Phi_{22M} &\approx |2M2\rangle = \frac{\sqrt{5}}{4\pi} [D_{M2}^2 + D_{M,-2}^2]. \end{aligned} \right\} \quad (9.28)$$

При том же условии волновые функции состояний, обладающих спином 4, приближенно заменяются функциями:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{41M} &\approx |4M0\rangle = \left(\frac{9}{8\pi^2}\right)^{1/2} D_{M0}^4; \\ \Phi_{42M} &= |4M2\rangle = \frac{\sqrt{9}}{4\pi} [D_{M2}^4 + D_{M,-2}^4]; \\ \Phi_{43M} &\approx |4M4\rangle = \frac{\sqrt{9}}{4\pi} [D_{M4}^4 + D_{M,-4}^4] \end{aligned} \right\} \quad (9.29)$$

В тех случаях ($\gamma < 15^\circ$), когда вращательное движение ядра можно описать приближенными функциями типа (9.28) и (9.29), проекция углового момента на ось ξ (квантовое число K) является сравнительно хорошим интегралом движения. В этом приближении уровням основной вращательной полосы соответствуют значения $K=0$. Вращение происходит вокруг оси, перпендикулярной оси ξ ядра. В первой аномальной вращательной полосе при $\gamma < 15^\circ$ квантовое число $K=2$. Первый уровень этой полосы $I=2$ соответствует вращению ядра вокруг оси ξ . При значениях $I=4, 6$ на вращение ядра вокруг оси ξ накладывается вращение вокруг оси, перпендикулярной ξ . Во второй вращательной полосе при $\gamma < 15^\circ$ квантовое число $K=4$, в третьей 6 и т. д.

При $\gamma > 15^\circ$ квантовое число K не характеризует состояние вращения. Вращательное движение имеет сложный характер, и волновая функция представляет собой суперпозицию волновых функций с значениями $K=0, 2, 4 \dots$

При значениях $\gamma < 15^\circ$ (методом теории возмущений) можно получить приближенные аналитические выражения для энергетических уровней и волновых функций при всех значениях полного спина. Для этого представим оператор H_a [см. (9.11а)] уравнения (9.4) в виде суммы двух слагаемых

$$H_a = H_0 + H_1,$$

где

$$H_0 = \frac{1}{4} (a + b) (I^2 - I_3^2) + \frac{1}{2} c I_3^2, \quad (9.30)$$

$$H_1 = \frac{1}{4} (a-b) (I_1^2 - I_2^2). \quad (9.31)$$

При $\gamma < 15^\circ$, согласно формулам (9.11), имеем с точностью до γ^4 :

$$\left. \begin{aligned} (a+b) &= \frac{8}{3} \left(1 + \frac{2}{3} \gamma^2 - \frac{2}{9} \gamma^4 \right); \\ (a-b) &= \frac{16\gamma}{3\sqrt{3}} \left(1 + \frac{2}{3} \gamma^2 \right); \\ c &= \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{45} \gamma^2 + \frac{1}{135} \gamma^4. \end{aligned} \right\} \quad (9.32)$$

При малых значениях γ оператор H_1 можно рассматривать как оператор возмущения, так как он стремится к нулю при $\gamma \rightarrow 0$. В нулевом приближении $H_1 = 0$ и квантовое число K является интегралом движения. Поэтому удобно возбужденные состояния, соответствующие определенному значению I , различать не индексом τ , нумерующим состояния в порядке возрастания энергии, а непосредственно квантовым числом K .

В нулевом приближении, согласно оператору (9.30), в состоянии, которое определяется волновой функцией $|IMK\rangle$, совпадающей с выражением (9.6), энергия (в единицах $\hbar^2/4B\beta_0^2$) равна

$$\varepsilon_{IK}^0 = \frac{1}{4} (a+b) [I(I+1) - K^2] + \frac{1}{2} c K^2. \quad (9.33)$$

Уровни вращательной полосы соответствуют значениям $K=0$. Уровни первой аномальной полосы имеют значение $K=2$ и т. д.

Диагональные относительно состояний $|IMK\rangle$ матричные элементы оператора (9.31) равны нулю. Недиагональные матричные элементы оператора H_1 связывают состояния K и $K \pm 2$ и совпадают с матричными элементами (9.10). Поэтому энергия возбужденных состояний с точностью до второго приближения теории возмущений равна

$$\varepsilon_{IK} = \varepsilon_{IK}^0 + \sum_{K' \neq 0} \frac{|\langle IMK | H_1 | IMK' \rangle|^2}{\varepsilon_{IK}^0 - \varepsilon_{IK'}^0}. \quad (9.34)$$

В третьем порядке теории возмущений поправка к энергии равна нулю, а в четвертом порядке — пропорциональна γ^{10} .

Подставляя в сумму (9.34) недиагональные матричные элементы (9.10) и энергии нулевого приближения (9.33), а также

учитывая значения (9.32), получим с точностью до γ^4

$$\epsilon_{IK} = \frac{2}{3} \left[I(I+1) - \frac{3}{4} K^2 \right] + \frac{K^2}{2\gamma^2} + \left[\frac{4}{3} I(I+1) - \frac{13K^2}{19} \right] \gamma^2 + \frac{2}{27} \left\{ 26I(I+1) - \frac{363}{14} K^2 - \frac{\alpha_+^2(IK)}{K+1} \times \right. \\ \left. \times [1 + (-1)^I \delta_{K0}] + \frac{\alpha_-^2(IK)}{K-1} [1 + (-1)^I \delta_{K2}] \times \right. \\ \left. \times (1 - \delta_{K0}) \right\} \gamma^4, \quad (9.35)$$

где

$$\alpha_{\pm}(IK) = \sqrt{(I \mp K)(I \mp K - 1)(I \pm K + 1)(I \pm K + 2)}.$$

В частности, уровни энергии основной вращательной полосы ($K \approx 0$)

$$\epsilon_{I0} = \frac{2}{3} I(I+1)(1 + 2\gamma^2) + \frac{4}{27} I(I+1)[13 - (I-1) \times \\ \times (I+2)] \gamma^4. \quad (9.36)$$

Уровни энергии первой аномальной полосы ($K \approx 2$)

$$\epsilon_{I2} = \frac{2}{3} [I(I+1) - 3] + \frac{2}{\gamma^2} + \left[\frac{4}{3} I(I+1) - \frac{26}{5} \right] \gamma^2 + \\ + \frac{2}{27} \left\{ 26I(I+1) - \frac{726}{7} - \frac{1}{3} \alpha_+^2(I2) + [1 + (-1)^I] \times \right. \\ \left. \times \alpha_-^2(I2) \right\} \gamma^4. \quad (9.37)$$

Волновые функции (9.5) при малых значениях γ также удобно обозначать не индексом τ , а непосредственно квантовым числом K , характеризующим то значение K , которое входит в линейную комбинацию с наибольшим весом. Тогда

$$\Phi_{IMK} = \sum_{K', 0} |IMK'\rangle A_{IK'}^K. \quad (9.38)$$

Коэффициенты $A_{IK'}^K$ определяются в первом порядке теории возмущений формулами

$$A_{IK}^K = 1, \quad A_{IK'}^K = \frac{\langle IMK' | H_1 | IMK \rangle}{\epsilon_{IK}^0 - \epsilon_{IK'}^0}, \quad \text{если } K \neq K'. \quad (9.39)$$

Поскольку матричные элементы оператора H_1 связывают только состояния с K и $K' = K \pm 2$, то в первом порядке теории возмущений волновые функции (9.38) содержат:

а) только два слагаемых с коэффициентами

$$A_{I0}^0 = 1 \quad \text{и} \quad A_{I2}^0 = \frac{\sqrt{2(I-1)I(I+1)(I+2)}}{3\sqrt{3}} (1 + 3\gamma^2) \gamma^3 \quad (9.40)$$

в основной вращательной полосе ($K \approx 0$);

б) три слагаемых с коэффициентами

$$\begin{aligned} A_{I2}^2 = 1; \quad A_{I0}^2 &= -\frac{1}{2} [1 + (-1)^I] A_{I2}^0; \quad A_{I4}^2 = \\ &= \frac{\sqrt{(I-3)(I-2)(I+3)(I+4)}}{9\sqrt{3}} (1 + 3\gamma^2) \gamma^3 \end{aligned} \quad (9.41)$$

в первой аномальной вращательной полосе и т. д.

§ 10. ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ

В адиабатическом приближении полная волновая функция возбужденных коллективных состояний ядра изображается произведением

$$\varphi(\beta, \gamma') \Phi_{IM\pi}(\theta), \quad (10.1)$$

где $\varphi(\beta, \gamma')$ — собственная функция оператора $H(\beta, \gamma')$, определяющего внутреннее состояние ядра. При этом динамическая переменная обозначена γ' в отличие от параметра $\gamma = \gamma_{эфф}$, входящего в оператор $H_a(\theta)$. Функции $\Phi_{IM\pi}(\theta)$ характеризуют вращательные состояния ядра. Эти функции являются собственными функциями оператора (9.2). Их можно выразить через функции симметричного волчка (9.6) с помощью выражения (9.5).

Будем рассматривать коллективные возбуждения ядра, в которых внутреннее состояние ядра остается неизменным и описывается функцией основного состояния $\varphi_0(\beta, \gamma')$. В этом случае оператор электрического квадрупольного момента (7.1) можно заменить оператором

$$Q_{2\mu}^a = Q_0 \left\{ D_{\mu 0}^2 \cos \gamma + (D_{\mu 2}^2 + D_{\mu, -2}^2) \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}} \right\}, \quad (10.2)$$

где

$$\gamma = \gamma_{эфф}; \quad \varphi_0 = \langle \varphi_0 | \beta | \varphi_0 \rangle,$$

$$Q_0 = \frac{3ZeR_0^2\beta_0}{\sqrt{5\pi}}.$$

Средние значения квадрупольного момента (10.2) в возбужденных состояниях $\Phi_{IM\tau}$ определяются диагональными матричными элементами $\langle IM\tau | Q_{2\mu} | IM\tau \rangle$. Эти величины легко вычисляются с помощью теоремы Вигнера—Эккарта (см. Приложение Ж), если известно выражение $\langle I\tau | Q_{20} | I\tau \rangle$, которое обычно и принимается для характеристики квадрупольного электрического момента состояний со спином I . В основном состоянии всех четно-четных ядер ($I=0$) среднее значение электрического квадрупольного момента равно нулю. Используя явный вид функций (9.5), (9.18) для первого возбужденного состояния (спин равен 2), получим среднее значение квадрупольного момента

$$\langle Q \rangle_{21} \equiv \langle 221 | Q_{20} | 221 \rangle = -Q_0 \frac{6 \cos(3\gamma)}{7\sqrt{9-8\sin^2(3\gamma)}}. \quad (10.3)$$

При $\gamma=0$ (вытянутый эллипсоид вращения) имеем

$$\langle Q \rangle_{21} = -\frac{2}{7} Q_0.$$

При $\gamma=\pi/6$ среднее значение $\langle Q \rangle_{21} = \frac{2}{7} Q_0$. Этот результат легко понять, если вспомнить, что в первом возбужденном состоянии аксиально симметричное ядро вращается вокруг оси, перпендикулярной аксиальной оси.

Во втором возбужденном состоянии со спином 2 (первый член аномальной вращательной полосы) имеем

$$\langle Q \rangle_{22} \equiv \langle 222 | Q_{20} | 222 \rangle = -\langle Q_{21} \rangle. \quad (10.4)$$

Экспериментальное исследование средних значений электрических квадрупольных моментов (10.3) и (10.4) в двух состояниях возбуждения со спином 2 позволило бы определить эффективное значение γ и сделать выбор между значениями γ и 60° — γ , которые приводят к одинаковому спектру энергий возбуждения.

Приведенные вероятности электрических квадрупольных переходов (в одну секунду) между коллективными состояниями $I\tau$ и $I'\tau'$, относящимися к одинаковому состоянию внутреннего движения, усредненные по состоянию начальной поляризации ядра и просуммированные по конечным поляризациям ядра и γ -кванта, определяются выражением

$$B(E2; I\tau \rightarrow I'\tau') = \frac{5Q_0^2}{16\pi(2I+1)} \sum_{MM'\mu} |\langle I'M'\tau' | q_{2\mu} | IM\tau \rangle|^2, \quad (10.5)$$

где

$$Q_0 = \frac{3ZeR_0^2\beta_0}{\sqrt{5\pi}},$$

$$q_{2\mu} = D_{\mu,0}^2 \cos \gamma + (D_{\mu,2}^2 + D_{\mu,-2}^2) \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}}. \quad (10.5a)$$

Подставляя в уравнение (10.5) функции (9.5), получим

$$B(E2; I\tau \rightarrow I'\tau') = \frac{5Q_0^2}{16\pi(2I+1)} \sum_{MM',\mu} \left| \sum_{KK'} A_{I'K'}^{\tau'} A_{IK}^{\tau} \times \right. \\ \left. \times \langle I'M'K' | q_{2\mu} | IMK \rangle \right|^2. \quad (10.6)$$

Пользуясь теоремой Вигнера — Экарта [см. равенство (Ж2) Приложения Ж] преобразуем матричный элемент, входящий в вероятность (10.6), к виду

$$\langle I'M'K' | q_{2\mu} | IMK \rangle = \frac{(2I_{\mu}M | I'M')}{\sqrt{2I'+1}} \langle I'K' || q || IK \rangle, \quad (10.7)$$

где приведенный матричный элемент (матричный элемент амплитудной матрицы) определяется формулой

$$\langle I'K' || q || IK \rangle = \sqrt{2I'+1} \left\{ (I2K0 | I'K') \cos \gamma + \left[\sqrt{\frac{1+\delta_{K'0}}{1+\delta_{K'0}}} \times \right. \right. \\ \left. \times (I2K2 | I'K') + \sqrt{\frac{1+\delta_{K'0}}{1+\delta_{K'0}}} (I2K-2 | I'K') \right] \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}} \right\}. \quad (10.8)$$

Подставляя матричный элемент (10.7) в выражение (10.6) и учитывая равенство

$$\sum_{MM',\mu} (2I_{\mu}M | I'M')^2 = 2I' + 1,$$

получим окончательное выражение для приведенных вероятностей $E2$ -переходов

$$B(E2; I\tau \rightarrow I'\tau') = \frac{5Q_0^2}{16\pi(2I+1)} \left| \sum_{KK'} A_{I'K'}^{\tau'} A_{IK}^{\tau} \langle I'K' || q || IK \rangle \right|^2. \quad (10.9)$$

Через коэффициенты A_{IK}^{τ} и матричные элементы амплитудной матрицы определяется и среднее значение электрического квадрупольного момента в любом состоянии $I\tau$. Действительно, по определению среднего значения квадрупольного момента в состоянии $I\tau$ имеем

$$\langle Q \rangle_{I\tau} \equiv Q_0 \langle I\tau | q_{20} | I\tau \rangle = Q_0 \sum_{KK'} A_{IK}^{\tau} A_{IK}^{\tau} \langle IK' | q_{20} | IK \rangle.$$

Подставляя в это выражение значение (10.7) и учитывая, что

$$(2I0I | II) = \sqrt{\frac{I(2I-1)}{(I+1)(2I+3)}},$$

получим

$$\langle Q \rangle_{I\pi} = Q_0 \left[\frac{I(2I-1)}{(I+1)(2I+1)(2I+3)} \right]^{1/2} \sum_{KK'} A_{IK}^* A_{IK'} \times \\ \times \langle IK' \| q \| IK \rangle. \quad (10.10)$$

Приведенные вероятности переходов между коллективными возбуждениями, относящимися к одному внутреннему состоянию данного ядра, удобно выражать в единицах $\frac{Q_0^2}{16\pi}$. Эта единица соответствует приведенной вероятности электрического квадрупольного перехода из состояния спина 2 в основное состояние аксиально симметричного ядра, имеющего внутренний квадрупольный момент Q_0 . Итак, определим «относительные» приведенные вероятности электрических квадрупольных переходов выражениями

$$b(E2; I\pi \rightarrow I'\pi') = \left(\frac{16\pi}{Q_0^2} \right) B(E2; I\pi \rightarrow I'\pi'). \quad (10.11)$$

Проведя вычисления с помощью формул (10.10), (9.18) и (9.19), получаем:

$$\left. \begin{aligned} b(E2; 21 \rightarrow 01) &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{3 - 2 \sin^2(3\gamma)}{\sqrt{9 - 8 \sin^2(3\gamma)}} \right]; \\ b(E2; 22 \rightarrow 01) &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3 - 2 \sin^2(3\gamma)}{\sqrt{9 - 8 \sin^2(3\gamma)}} \right]; \\ b(E2; 22 \rightarrow 21) &= \frac{10 \sin^2(3\gamma)}{7[9 - 8 \sin^2(3\gamma)]}. \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

Из равенств (10.12) непосредственно следует простое правило сумм

$$b(E2; 21 \rightarrow 0) + b(E2; 22 \rightarrow 0) = 1. \quad (10.13)$$

Формулы (10.12) и (10.13) впервые были получены Давыдовым и Филипповым [35]. Они позволяют выразить приведенные вероятности переходов между состояниями 22, 21 и 0 непосредственно через экспериментально определяемое отношение энергий R_{22} , так как последнее с помощью равенства (9.26) определяет эффективное значение γ для данного ядра. В табл. 10 приведены значения γ , $R_{22} = \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{21}}$ и значения приведенных ве-

роятностей переходов (10.12). В работе Ван Паттера [60] проводилось сравнение теоретических значений (10.12) с экспериментальными значениями для многих четно-четных ядер. На

рис. 9—11 указаны результаты сравнения отношений приведенных вероятностей

$$\frac{b(E2; 22 \rightarrow 21)}{b(E2; 22 \rightarrow 0)}, \quad \frac{b(E2; 22 \rightarrow 0)}{b(E2; 21 \rightarrow 0)} \quad \text{и} \quad \frac{b(E2; 22 \rightarrow 21)}{b(E2; 21 \rightarrow 0)}$$

в зависимости от отношения энергии R_{22} . Из рис. 9—11 следует, что теория асимметричного ротатора, несомненно, отражает связь указанных выше отношений с отношениями энергий R_{22} .

Таблица 10

Приведенные вероятности переходов между основным состоянием и коллективными возбуждениями со спином $I=2$

γ , град	R_{22}	$b(E2; 21 \rightarrow 0)$	$b(E2; 22 \rightarrow 21)$	$\frac{b(E2; 22 \rightarrow 21)}{b(E2; 22 \rightarrow 0)}$
0	∞	1,000	0	1,43
5	64,2	0,993	0,011	1,49
10	15,9	0,972	0,051	1,70
15	6,85	0,947	0,143	2,70
20	3,73	0,933	0,357	5,35
22,5	2,93	0,937	0,563	19,02
24	2,59	0,948	0,782	15,1
25	2,41	0,955	0,865	20,6
26	2,26	0,968	1,01	31,2
28	2,07	0,990	1,28	126
29	2,01	0,996	1,41	363
30	2,00	1,000	1,43	∞

Используя явный вид волновых функций для состояния возбуждения $I=3$ и двух возбуждений спина 5, можно показать, что должны выполняться следующие простые соотношения между приведенными вероятностями переходов и правила сумм:

$$b(E2; 21 \rightarrow 0) = \frac{14}{25} b(E2; 31 \rightarrow 22) = \frac{22}{21} b(E2; 51 \rightarrow 31);$$

$$b(E2; 22 \rightarrow 0) = \frac{14}{25} b(E2; 31 \rightarrow 21) = \frac{22}{21} b(E2; 51 \rightarrow 31);$$

$$\left. \begin{aligned} b(E2; 31 \rightarrow 22) + b(E2; 31 \rightarrow 21) &= \frac{25}{14}; \\ b(E2; 51 \rightarrow 31) + b(E2; 52 \rightarrow 31) &= \frac{21}{22}. \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

В связи с тем, что коэффициенты A_{IK}^{τ} для $I=4, 6, 7, \dots$ не выражаются простыми аналитическими функциями γ , приходится приведенные вероятности переходов, относящихся к этим уровням, выражать непосредственно через коэффициенты A_{IK}^{τ}

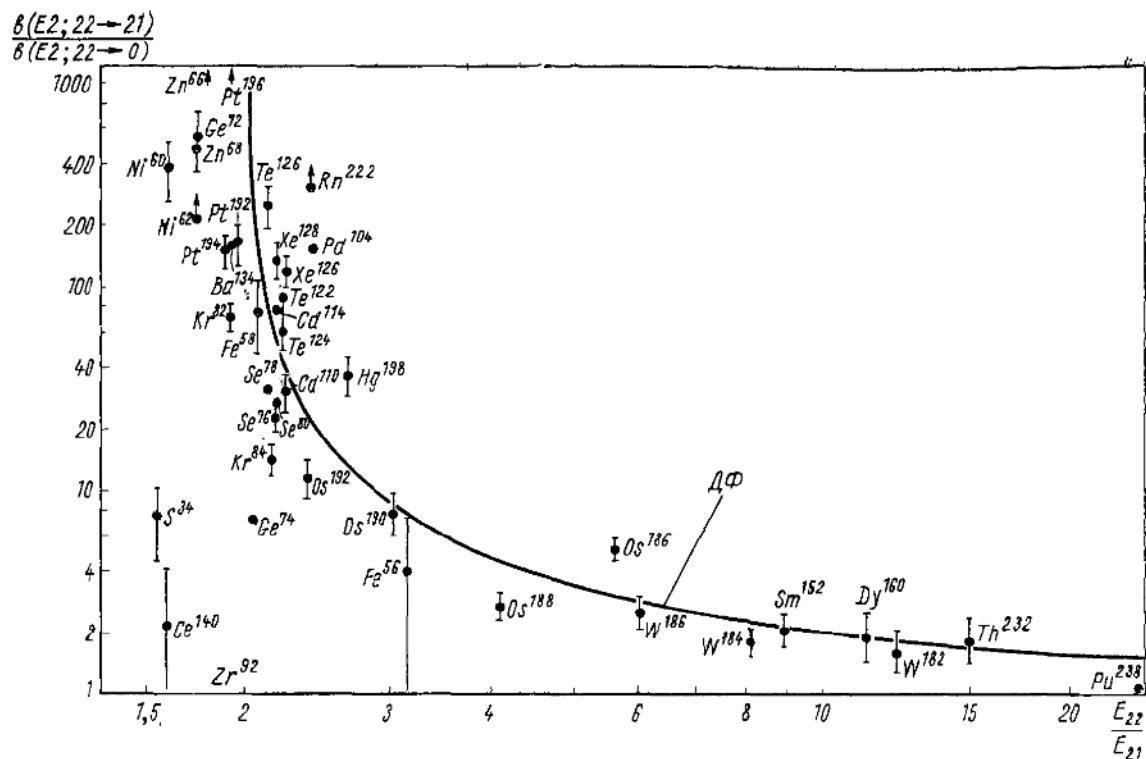


Рис. 9. Результаты сравнения (см. Ван Паттер [60]) экспериментальных и теоретических (кривая линия $\Delta\Phi$) отношений приведенных вероятностей $\frac{b(E2; 22 \rightarrow 21)}{b(E2; 22 \rightarrow 0)}$.

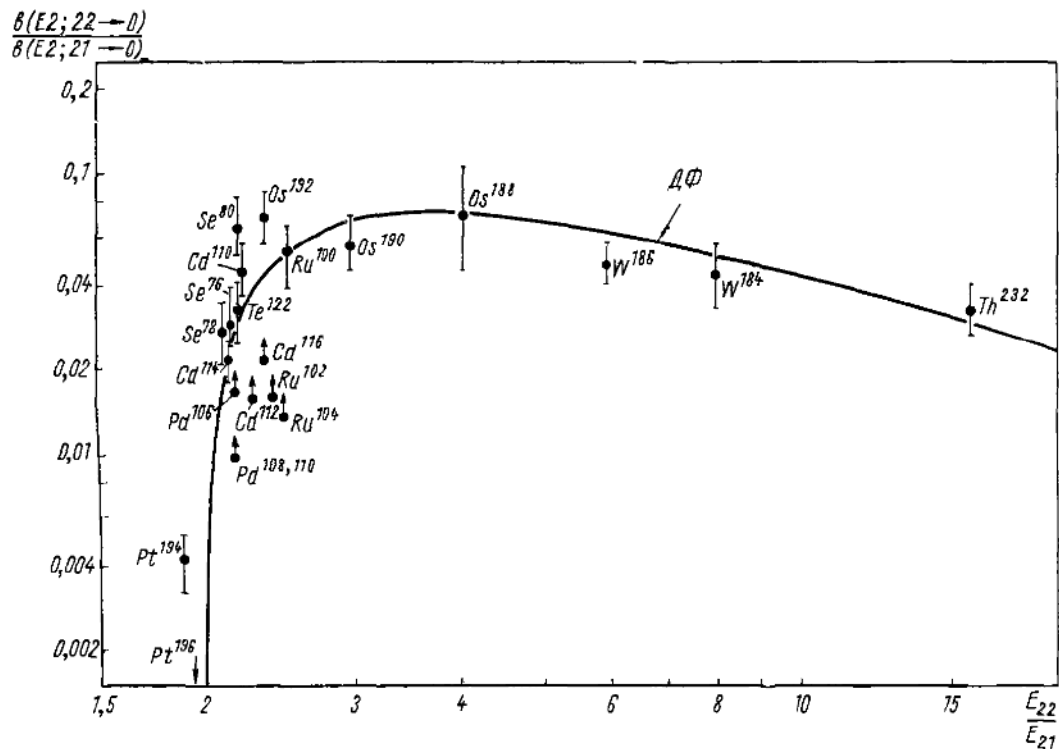


Рис. 10. Результаты сравнения (см. Ван Паттер [60]) экспериментальных и теоретических (кривая линия $ДФ$) отношений приведенных вероятностей $\frac{b(E2; 22 \rightarrow 0)}{b(E2; 21 \rightarrow 0)}$.

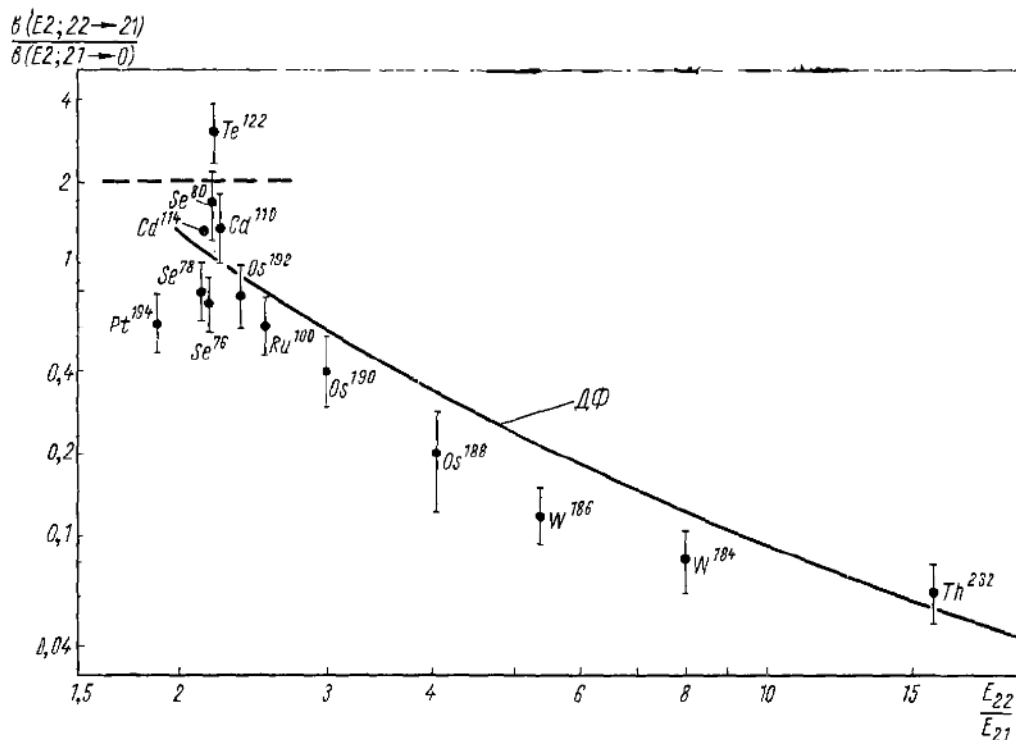


Рис. 11. Результаты сравнения (см. Ван Петтер[60]) экспериментальных и теоретических (кривая линия ДФ) отношений приведенных вероятностей $\frac{b(E2; 22 \rightarrow 21)}{b(E2; 21 \rightarrow 0)}$ в зависимости от отношений энергий E_{22}/E_{21} . Пунктирная линия соответствует теоретическому значению тех же отношений для колебаний квадрупольного типа в сферическом ядре.

и пользоваться далее таблицами типа табл. 9. Эти вероятности вычислялись в работе Давыдова и Ростовского [36]. Так, приведенные вероятности переходов (в единицах $\frac{Q_0^2}{16\pi}$) между состояниями со спинами $I=2$ и $I=4$ выражаются формулой

$$b(E2; 4\pi \rightarrow 2f) = \frac{5}{126} \{ [6A_{40}^i A_{20}^f + \sqrt{15} A_{42}^i A_{22}^f] \cos \gamma + \\ + [\sqrt{15} A_{42}^i A_{20}^f + A_{40}^i A_{22}^f + \sqrt{35} A_{44}^i A_{22}^f] \sin \gamma \}^2. \quad (10.15)$$

Приведенные вероятности $E2$ -переходов между состояниями, имеющими спин 4, определяются выражениями

$$b(E2; 4\pi \rightarrow 4f) = \frac{1}{77} \{ 2 [7A_{44}^i A_{44}^f - 5A_{40}^i A_{40}^f - 2A_{42}^i A_{42}^f] \cos \gamma + \\ + \sqrt{3} [3\sqrt{5} (A_{42}^i A_{40}^f + A_{40}^i A_{42}^f) + \sqrt{7} (A_{42}^i A_{44}^f + \\ + A_{44}^i A_{42}^f)] \sin \gamma \}^2. \quad (10.15a)$$

Приведенные вероятности $E2$ -переходов между состояниями, имеющими спины 4 и 3, 5 и 4, 5 и 6, равны соответственно:

$$b(E2; 4\pi \rightarrow 3f) = \frac{1}{9} \{ 2\sqrt{3} \cos \gamma A_{42}^i + [\sqrt{5} A_{40}^i - \\ - \sqrt{7} A_{44}^i] \sin \gamma \}^2; \quad (10.15b)$$

$$\left. \begin{aligned} b(E2; 5\pi \rightarrow 4f) &= \frac{1}{22} \{ [\sqrt{21} A_{52}^i A_{42}^f + 6A_{54}^i A_{44}^f] \cos \gamma - \\ &- [\sqrt{35} A_{52}^i A_{40}^f + \sqrt{21} A_{54}^i A_{42}^f - A_{52}^i A_{44}^f] \sin \gamma \}^2; \\ b(E2; 5\pi \rightarrow 6f) &= \frac{1}{154} \{ [\sqrt{2} A_{52}^i A_{62}^f + \sqrt{5} A_{54}^i A_{64}^f] 8 \cos \gamma + \\ &+ [2\sqrt{35} A_{52}^i A_{60}^f + 3\sqrt{2} A_{54}^i A_{62}^f - 6\sqrt{5} A_{52}^i A_{64}^f] \sin \gamma \}^2. \end{aligned} \right\} \quad (10.15b)$$

Наконец, запишем еще выражение, определяющее приведенные вероятности $E2$ -переходов типа $6\pi \rightarrow 4f$,

$$b(E2; 6\pi \rightarrow 4f) = \frac{5}{143} \{ [3\sqrt{5} A_{60}^i A_{40}^f + 4\sqrt{21} A_{62}^i A_{42}^f + \\ + 3A_{64}^i A_{44}^f] \cos \gamma + [\sqrt{3} A_{60}^i A_{42}^f + A_{62}^i A_{44}^f] \sqrt{0,1} + \sqrt{14} A_{62}^i A_{40}^f + \\ + \sqrt{21} A_{64}^i A_{42}^f + \sqrt{49,5} A_{60}^i A_{44}^f] \sin \gamma \}^2. \quad (10.15r)$$

Численные значения некоторых из указанных выше приведенных вероятностей указаны в табл. 11 для некоторых значений γ . Приведенные вероятности переходов между коллективными

возбужденными состояниями четно-четных ядер инвариантны относительно преобразования $\gamma \rightarrow 60^\circ - \gamma$ параметра асимметрии. Поэтому исследование вероятностей переходов не позволяет отличить «вытянутые» ядра ($0 \leq \gamma \leq 30^\circ$) от «сплюснутых» ядер ($30^\circ < \gamma \leq 60^\circ$). В связи с этим во всех таблицах для приведенных вероятностей указываются только значения γ в интервале $0-30^\circ$.

Таблица 11

Приведенные вероятности электрических квадрупольных переходов (в единицах $Q_0/16\pi$) между некоторыми вращательными состояниями четно-четного ядра.

$b(E2; i \rightarrow f)$	$\gamma^\circ=0$	$\gamma^\circ=5$	$\gamma^\circ=10$	$\gamma^\circ=15$	$\gamma^\circ=20$	$\gamma^\circ=22,5$	$\gamma^\circ=25$	$\gamma^\circ=27,5$	$\gamma^\circ=30$
$(E2; 31 \rightarrow 41) 0$	0,0060	0,034	0,130	0,406	0,619	0,821	0,955	1,00	
$(E2; 41 \rightarrow 21) 1,429$	1,418	1,395	1,377	1,371	1,366	1,365	1,378	1,389	
$(E2; 41 \rightarrow 22) 0$	$3,5 \cdot 10^{-4}$	0,0023	0,010	0,033	0,044	0,039	0,016	0	
$(E2; 42 \rightarrow 21) 0$	$4,1 \cdot 10^{-3}$	0,011	0,008	$4 \cdot 10^{-4}$	0,009	0,021	0,018	0	
$(E2; 42 \rightarrow 22) 0,595$	0,591	0,575	0,543	0,481	0,447	0,435	0,484	0,595	
$(E2; 42 \rightarrow 31) 1,333$	1,323	1,282	1,172	0,978	0,680	0,448	0,210	0	
$(E2; 42 \rightarrow 41) 0$	0,0138	0,0624	0,167	0,313	0,339	0,311	0,271	0,273	
$(E2; 61 \rightarrow 41) 1,575$	1,563	1,547	1,562	1,623	1,671	1,703	1,725	1,731	
$(E2; 61 \rightarrow 42) 0$	10^{-3}	$7,7 \cdot 10^{-3}$	0,035	0,052	0,033	0,011	0,0023	0	

Ввиду большой важности указанного свойства инвариантности приведенных вероятностей $E2$ -переходов между коллективными возбуждениями квадрупольного типа докажем это свойство в общем виде, т. е. докажем равенство

$$b(E2; i \rightarrow f)_\gamma = b(E2; i \rightarrow f)_{60^\circ - \gamma}. \quad (10.16)$$

Оператор коллективных движений (9.2) инвариантен относительно преобразования $\gamma \rightarrow \gamma \pm 180^\circ$, поэтому коэффициенты $A_{IK}^\dagger$ собственных функций этого оператора также инвариантны относительно этого преобразования, т. е.

$$A_{IK}^\dagger(\gamma) = A_{IK}^\dagger(\gamma \pm 180^\circ). \quad (10.17)$$

Рассмотрим теперь отдельное слагаемое, входящее в вероятность (10.9),

$$F_{KK'}(\gamma) \equiv A_{I'K'}^\dagger(\gamma) A_{IK}^\dagger(\gamma) \langle I'K' \| q(\gamma) \| IK \rangle. \quad (10.18)$$

Заменяя γ на $60^\circ - \gamma$, находим

$$F_{KK'}(60^\circ - \gamma) = A_{I'K'}^\dagger(60^\circ - \gamma) A_{IK}^\dagger(60^\circ - \gamma) \langle I'K' \| q(60^\circ - \gamma) \| IK \rangle. \quad (10.19)$$

Учитывая уравнения (10.17) и (4.41 б), имеем

$$A_{IK}^-(60^\circ - \gamma) = A_{IK}^-(\gamma - 120^\circ) = e^{\frac{i\pi K}{2}} A_{IK}^+(\gamma + 120^\circ).$$

Учитывая в выражении (10.19) полученное равенство, явный вид матричных элементов (10.8) и равенства

$$\sin(60^\circ - \gamma) = \sin(\gamma + 120^\circ), \quad \cos(60^\circ - \gamma) = -\cos(\gamma + 120^\circ),$$

получим

$$F_{KK'}(60^\circ - \gamma) = -F_{KK'}(\gamma + 120^\circ),$$

В § 4 было указано, что вследствие возможности переименования осей $\xi\eta\zeta$ значения γ и $\gamma + 120^\circ$ эквивалентны (см. рис. 1). Поэтому можно написать

$$F_{KK'}(60^\circ - \gamma) = -F_{KK'}(\gamma).$$

Вспоминая определение выражений (10.18) и (10.9), мы приходим к равенству (10.16).

Приведенные вероятности электрических квадрупольных переходов (в единицах $\frac{Q_0^2}{16\pi}$ для каждого ядра) можно грубо подразделить на три типа:

1. Переходы, относительные приведенные вероятности $b(E2; i \rightarrow f)$ которых имеют значение, равное единице по порядку величины. К этим переходам относятся каскадные переходы между уровнями основной вращательной полосы и каскадные переходы между уровнями в каждой аномальной полосе. Например, переходы $31 \rightarrow 22$; $42 \rightarrow 31$; $42 \rightarrow 22$ и т. д. Значения приведенных вероятностей каскадных $E2$ -переходов в основной вращательной полосе указаны в табл. 12.

Таблица 12

Приведенные вероятности $E2$ -переходов (в единицах $Q_0/16\pi$) между уровнями основной вращательной полосы (каскадные переходы) и переходов между уровнями спина 2 и уровнем спина 3

$b(E2; i \rightarrow f)$	$\gamma^\circ = 8$	$\gamma^\circ = 10$	$\gamma^\circ = 12$	$\gamma^\circ = 15$	$\gamma^\circ = 20$	$\gamma^\circ = 25$	$\gamma^\circ = 30$
$b(E2; 21 \rightarrow 0)$	0,9817	0,9725	0,9623	0,9472	0,9330	0,9575	1,0000
$b(E2; 41 \rightarrow 21)$	1,4047	1,3947	1,3857	1,3767	1,3717	1,3649	1,3889
$b(E2; 61 \rightarrow 41)$	1,5518	1,5470	1,5476	1,5619	1,6235	1,7051	1,7308
$b(E2; 81 \rightarrow 61)$	1,6313	1,6357	1,6515	1,6997	1,8177	1,8907	1,9118
$b(E2; 10, 1 \rightarrow 81)$	1,6848	1,7013	1,7354	1,8149	1,9396	2,0035	2,0238
$b(E2; 12, 1 \rightarrow 10, 1)$	1,7261	1,7567	1,8087	1,9039	2,0190	2,0800	2,0952
$b(E2; 31 \rightarrow 21)$	0,0327	0,0492	0,0673	0,09426	0,1196	0,0759	0
$b(E2; 31 \rightarrow 22)$	1,7530	1,7365	1,7184	1,6915	1,6661	1,7098	1,7857

2. Переходы между уровнями основной вращательной полосы и «аномальными» вращательными уровнями другого спина. Например, переходы $31 \rightarrow 21$; $41 \rightarrow 22$; $42 \rightarrow 21$; $61 \rightarrow 42$ и т. д. Относительные приведенные вероятности $b(E2; i \rightarrow f)$ таких переходов равны нулю при $\gamma = 0$ и 30° , при других значениях γ они отличны от нуля, хотя и остаются меньшими единицы (см. табл. 11 и 12).

3. Переходы между уровнями одинакового спина. Например, переходы $22 \rightarrow 21$; $42 \rightarrow 41$. Относительные приведенные вероятности $b(E2; i \rightarrow f)$ таких переходов равны нулю при $\gamma = 0$, а затем значительно возрастают при увеличении γ , достигая максимальных значений порядка единицы при $\gamma = 30^\circ$ (см. табл. 10 и 11). К этому же типу переходов относится и переход $31 \rightarrow 41$ (табл. 11).

Правила сумм (10.13) и (10.14) являются частными случаями более общих правил сумм, которые недавно получены Овчаренко [61]. Для вывода этих правил просуммируем вероятности (10.9) по всем возможным значениям τ и τ' при фиксированных I и I' . Тогда с помощью выражений (9.9) и (10.11) получим

$$\sum_{\tau, \tau'} b(E2; I\tau \rightarrow I'\tau') = \frac{5}{(2I+1)} \sum_{K, K'} |\langle I'K' \| q \| IK \rangle|^2.$$

Учитывая далее явный вид матричных элементов (10.8) амплитудной матрицы, получим следующие правила сумм.

1.) При I четном ($I' \neq I$)

$$\sum_{\tau, \tau'} b(E2; I\tau \rightarrow I'\tau') = \frac{(I+2)(8I^2 - 13I + 9)}{4(2I-1)(2I+1)}, \text{ если } I' = I-2. \quad (10.20)$$

Из этого правила сумм в частности при $I=2$ следует равенство (10.13).

При $I' = I-1$ получаем правило сумм

$$\sum_{\tau, \tau'} b(E2; I\tau \rightarrow I-1, \tau') = \frac{(I+2)(I-2)}{2I+1}. \quad (10.20a)$$

Далее при четном $I=I'$

$$\sum_{\tau, \tau'} b(E2; I\tau \rightarrow I\tau') = \frac{(I+2)(4I^2 + 13I - 12)}{2(2I-1)(2I+3)}. \quad (10.21)$$

В сумму (10.21) входит величина $b(E2; I\tau \rightarrow I\tau)$, которая не является относительной вероятностью квантового перехода, а связана с квадратом среднего значения квадрупольного электрического момента в состоянии $I\tau$. Действительно, возведя вы-

ражение (10.10) в квадрат и сравнив с вероятностью (10.9) при $I=I'$, $\tau=\tau'$, получим, учитывая определение (10.11),

$$b(E2; I\tau \rightarrow I\tau) = \frac{5(I+1)(2I+3)}{I(2I-1)} \frac{\langle Q^2 \rangle_{I\tau}}{Q_0^2}. \quad (10.22)$$

С помощью выражения (10.22) равенство (10.21) можно записать в более удобном виде

$$\begin{aligned} \sum_{\tau, \tau'} b(E2; I\tau \rightarrow I\tau') + \frac{5(I+1)(2I+3)}{I(2I-1)Q_0^2} \sum_{\tau} \langle Q \rangle_{I\tau}^2 = \\ = \frac{(I+2)(4I^2+13I-12)}{2(2I-1)(2I+3)}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

В частном случае, когда $I=2$, числа τ и τ' пробегают два значения 1 и 2. Учитывая равенства (10.4) и $b(E2; 22 \rightarrow 21) = b(E2; 21 \rightarrow 22)$, получим из равенства (10.23) соотношение

$$b(E2; 22 \rightarrow 21) + \frac{35}{2} \frac{\langle Q \rangle_{21}^2}{Q_0^2} = \frac{10}{7}, \quad (10.24)$$

которое связывает относительную приведенную вероятность $E2$ -перехода между состояниями 22 и 21 и квадратом среднего значения квадрупольного момента (в единицах Q_0) в первом возбужденном состоянии. Равенство (10.24) легко проверить, если использовать найденные выше значения (10.3) и (10.12).

2. При нечетном значении I правила сумм относительных приведенных вероятностей принимают вид

$$\sum_{\tau, \tau'} b(E2; I, \tau \rightarrow I-1, \tau') = \frac{2I^2+7}{2(2I+1)}, \quad (10.25)$$

$$\sum_{\tau, \tau'} b(E2; I, \tau \rightarrow I-2, \tau') = \frac{(I-3)(8I^2-3I+4)}{4(4I^2-1)}, \quad (10.26)$$

$$\sum_{\tau, \tau'} b(E2; I\tau \rightarrow I\tau') = \frac{(I-1)(I-3)(4I+7)}{2(2I-1)(2I+3)}. \quad (10.27)$$

В частности, при $I=3$ и $I=5$ из равенств (10.25) и (10.26) следуют равенства (10.14). Учитывая выражение (10.22), можно в равенстве (10.27) выделить средние значения квадратов квадрупольных моментов в состояниях с нечетным I .

Как уже указывалось выше, при $\gamma < 15^\circ$ (и $45^\circ < \gamma < 60^\circ$) квантовое число K приблизительно сохраняется. В этих случаях относительные приведенные вероятности наиболее существен-

ных электрических квадрупольных переходов выражаются приближенными формулами:

$$\left. \begin{aligned} b_0(E2; I, K \rightarrow I', K) &= 5(2I0K|I'K)^2 \cos^2 \gamma; \\ b_0(E2; I, K \rightarrow I', K+2) &= \frac{5}{2}(1+\delta_{0K})(2I2K|I', K+2) \sin^2 \gamma, \\ b_0(E2; I, K \rightarrow I', K-2) &= \frac{5}{2}(1+\delta_{0K})(2I, -2, K|I', K- \\ &\quad -2) \sin^2 \gamma. \end{aligned} \right\} (10.28)$$

При $\gamma \rightarrow 0$ осуществляются только переходы, удовлетворяющие правилу отбора

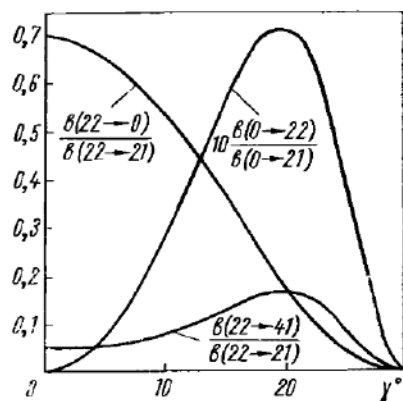
$$\Delta K = 0. \quad (10.29)$$

Переходы, происходящие при нарушении условия (10.29), часто называют *K-запрещенными переходами*. Их вероятность растет по мере увеличения γ . При $\gamma > 15^\circ$ волновые функции

возбужденных состояний изображаются линейными комбинациями функций с различными значениями K , поэтому надо вместо выражений (10.28) пользоваться выражениями (10.12) — (10.19).

Итак, развитая в работах [35, 36] теория возбужденных состояний на основе модели неаксиального жесткого ротатора позволяет выразить относительные приведенные вероятности электрических квадрупольных переходов через единственный феноменологический параметр $\gamma = \gamma_{\text{эфф}}$ или непосредственно через отношение энергии R_{22} двух первых уровней со спином 2.

Рис. 12. Зависимость трех отношений приведенных вероятностей $E2$ -переходов в модели неаксиального ротатора от параметра асимметрии γ .



При экспериментальном определении относительных вероятностей переходов обычно сравнивают переходы из одного начального состояния в различные конечные состояния. В этом случае устраняется неопределенность, обусловленная неодинаковой заселенностью возбужденных уровней ядра. Теоретические значения отношений вероятностей переходов из одного начального в разные конечные состояния указаны на рис. 12, 13, 14 в зависимости от параметра асимметрии γ .

В табл. 13 указаны экспериментальные (см. работы [63—74]) и теоретические отношения приведенных вероятностей каскадного и прямого переходов со второго уровня со спином 2 и отношение $\frac{b(E2; 22 \rightarrow 21)}{b(E2; 21 \rightarrow 0)}$ в зависимости от отношений энер-

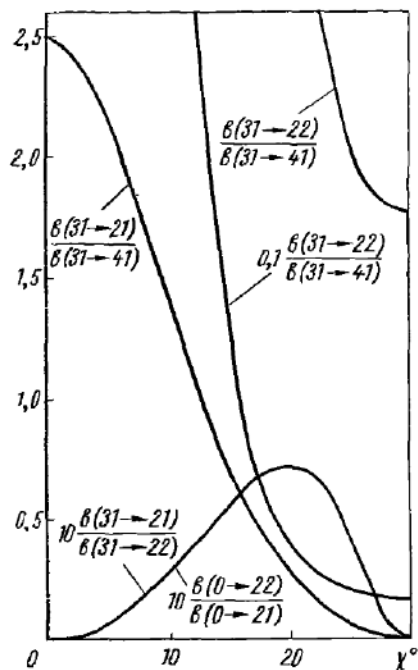


Рис. 13. Зависимость четырех отношений приведенных вероятностей $E2$ -переходов в модели неаксиального ротатора от параметра асимметрии γ .

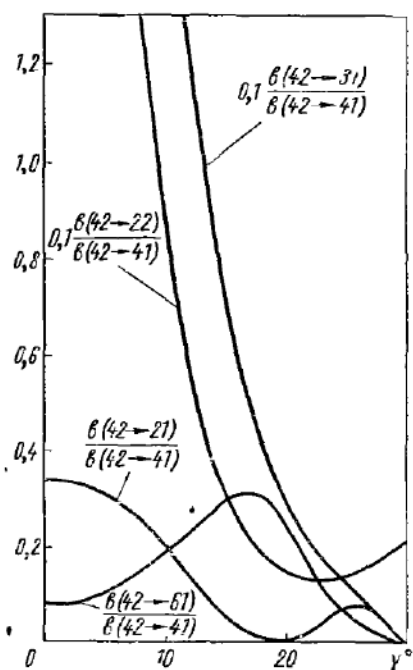


Рис. 14. Зависимость четырех отношений приведенных вероятностей $E2$ -переходов в модели неаксиального ротатора от параметра асимметрии γ .

гий R_{22} . Как видно из таблицы, теория отражает корреляцию между отношениями энергий R_{22} и отношениями приведенных вероятностей: при изменении R_{22} от 23 до 2 отношение приведенных вероятностей увеличивается примерно на два порядка.

В табл. 14 указаны теоретические

$$\frac{b(E2; 0 \rightarrow 22)}{b(E2; 0 \rightarrow 21)} = \frac{\sqrt{9 - 8 \sin^2(3\gamma)} - 3 + 2 \sin^2(3\gamma)}{\sqrt{9 - 8 \sin^2(3\gamma)} + 3 - 2 \sin^2(3\gamma)}$$

и экспериментальные [71] значения отношений приведенных вероятностей $E2$ -переходов с основного на возбужденные уровни спина 2. Эти отношения весьма важны для выяснения возможности возбуждения уровней 2,2 кулоновским полем быстрых частиц.

Экспериментальные [62—74] и теоретические отношения приведенных вероятностей квадрупольных переходов

Ядро	R_{21}	$\frac{b(E2; 22 \rightarrow 21)}{b(E2; 22 \rightarrow 0)}$		$\frac{b(E2; 22 \rightarrow 21)}{b(E2; 21 \rightarrow 0)}$	
		Теория	Эксперимент	Теория	Эксперимент
Pu ²³⁶	23,4	1,2	1,3—1,5	—	—
Th ²³²	15,4	1,7	1,8	0,052	0,014
U ¹⁸²	12,1	1,7	1,6	—	—
Dy ⁶⁰	11,0	1,9	2,4	—	—
Sm ¹⁵²	8,9	1,9	1,7	—	—
Gd ¹⁵⁴	8,1	2,6	1,94	—	—
W ¹⁸⁴	8,0	3,0	2,4	0,18	0,12
Os ¹⁸⁸	4,1	4,5	2,7	0,32	0,19
Os ¹⁹⁰	3,0	7,1	9,7	0,50	0,52
Hg ¹⁸⁸	2,7	13	25	—	—
Os ¹⁸²	2,4	21	9,1	0,90	0,68
Te ¹²²	2,2	40	30	1,29	2,8
Gd ¹¹⁴	2,17	78	77,9	—	—
Te ¹²⁶	2,14	104	200	—	—
Pt ¹⁹⁶	1,97	∞	>2500	—	—

Таблица 14

Экспериментальные [71] и теоретические отношения приведенных вероятностей с основного на возбужденные уровни со спином 2

Ядро	R_{22}	$\frac{b(E2; 0 \rightarrow 22)}{b(E2; 0 \rightarrow 21)}$		Ядро	R_{22}	$\frac{b(E2; 0 \rightarrow 22)}{b(E2; 0 \rightarrow 21)}$	
		Теория	Эксперимент			Теория	Эксперимент
Os ¹⁸⁰	2,9	0,072	0,04	Ru ¹⁰²	2,24	0,043	0,015
Ru ¹⁰⁰	2,55	0,057	0,024	Pd ¹⁰⁶	2,20	0,027	0,017
Ru ¹⁰⁴	2,56	0,055	0,013	Pd ¹⁰⁸	2,18	0,02	0,01
Cd ¹¹⁶	2,35	0,044	0,021	Cd ¹¹⁴	2,17	0,02	0,02

При малых значениях $\gamma (<15^\circ)$ приведенные вероятности $E2$ -переходов, так же как значения энергий возбужденных состояний, выражаются аналитическими функциями γ для всех типов переходов. Действительно, с помощью коэффициентов (9.39)—(9.41) и формул (10.15) после разложения $\cos \gamma$ и $\sin \gamma$ в ряды получаем:

1) для переходов между уровнями основной вращательной полосы ($K \approx 0$), а также между уровнями аномальных вращательных полос ($K \neq 0$)

$$b(E2; IK \rightarrow I'K) = 5(1 - \gamma^2)(2I0K|I'K)^2; \quad (10.30)$$

2) для переходов между уровнями первой аномальной и основной вращательных полос

$$b(E2; I2 \rightarrow I'0) = 5\gamma^2(2, I, -2, 2 | I'0)^2 \left\{ 1 + \frac{\gamma^2}{3} \times \right. \\ \times \left[-1 + \frac{2\sqrt{2}(2I02 | I'2)}{\sqrt{3}(2I, -2, 2 | I'0)} \frac{1}{(I'-1)I'(I'+1)(I'+2)} - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{2}(2I00 | I'0)}{\sqrt{3}(2I-2, 2 | I'0)} \frac{1}{(I-1)I(I+1)(I+2)} \right] \left. \right\}. \quad (10.31)$$

Из выражения (10.31) следует, что при малых γ приведенные вероятности переходов, происходящие с изменением K ($|\Delta K| = 2$), убывают как γ^2 .

Знания волновых функций возбужденных состояний ядра позволяют вычислить и другие характеристики ядер:

1) вероятности переходов различной мультипольности между возбужденными состояниями; 2) относительные вероятности α - и β -раскадов материнского ядра с возбуждением дочернего ядра на разные вращательные уровни; 3) вероятности возбуждений ядер кулоновским полем быстрых заряженных частиц и т. д. Рассмотрим вероятность магнитных дипольных ($M1$) переходов в четно-четных ядрах между коллективными состояниями одинаковой четности.

В четно-четных ядрах оператор магнитных дипольных ($M1$) переходов, согласно равенству (7.19), изображается суммой двух слагаемых

$$\mathfrak{M}_\mu(M1) = \mathfrak{M}_\mu^0(M1) + \mathfrak{M}_\mu^1(M1), \quad (10.30)$$

где главное слагаемое

$$\mathfrak{M}_\mu^0(M1) = \mu_0 g_R \sqrt{\frac{3}{4\pi}} I_\mu. \quad (10.31)$$

Оператор $\mathfrak{M}_\mu^1(M1)$ является поправкой следующего порядка малости, определяемой формулой (7.22).

С помощью формулы (Д. 6а) Приложения Д можно убедиться в том, что

$$I_\mu \Phi_{IM\tau} = (-1)^\mu \frac{1}{I(I+1)} (I1, M+\mu, -\mu | IM) \Phi_{I, M+\mu, \tau}.$$

Следовательно, $M1$ -переходы, обуславливаемые оператором $M1$ -перехода в нулевом приближении (10.32), запрещены между коллективными состояниями, отличающимися значениями I или τ . Например, запрещены в нулевом приближении $M1$ -

переходы между двумя возбужденными состояниями спина 2, хотя они допустимы по правилам отбора. Опыт, однако, показывает, что между этими состояниями, наряду с $E2$ -переходами, происходят с весьма малой вероятностью и $M1$ -переходы. Для оценки величины приведенных вероятностей этих переходов в рамках коллективной модели приходится учитывать поправочный член $\mathfrak{M}_\mu^1(M1)$ к оператору магнитного дипольного момента. Такие оценки делались в работе Филиппова и автора [43]. В этой работе было показано, что отношение приведенных вероятностей $M1$ - и $E2$ -переходов между коллективными состояниями, имеющими спин 2, определяется, с учетом поправочного множителя $9/8$ [см. формулу (7.22)], формулой

$$\frac{B(M1; 22 \rightarrow 21)}{B(E2; 22 \rightarrow 21)} \approx 14,4 \left(\frac{\mu_0 g_R}{ZeR_0^2} \right)^2. \quad (10.33)$$

Согласно собранным в работе Малмманна [75] экспериментальным данным, для большинства четно-четных ядер (кроме ядер Zr^{92} и Ce^{140}) отношения приведенных вероятностей $M1$ - и $E2$ -переходов между возбужденными состояниями 22 и 21 составляют 10^{-2} — 10^{-4} долю одночастичных оценок. Малость экспериментальных отношений (10.32) является еще одним указанием на коллективную природу соответствующих возбужденных состояний, так как при коллективных возбуждениях в первом порядке $M1$ -переходы запрещены.

Иногда вместо отношения (10.33) определяют отношение вероятностей испускания $M1$ - и $E2$ -квантов при переходе $22 \rightarrow 21$. Учитывая определение (3.4) и равенство (10.33), это отношение можно записать в виде

$$\frac{T(M1; 22 \rightarrow 21)}{T(E2; 22 \rightarrow 21)} \approx 480 \left(\frac{hc}{E_{22} - E_{21}} \right)^2 \left(\frac{M_0 g_R}{ZeR_0^2} \right)^2. \quad (10.33)$$

Для оценки значений (10.34) и (10.33) можно положить $g_R \approx 0,4$; $\mu_0 \approx 5,05 \cdot 10^{-24}$ эрг/гс; $R_0 = 1,2 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ см. Для ядер Sm^{152} , Dy^{160} , Os^{186} , Pt^{184} и пр. экспериментально наблюдаемые отношения (10.34) равны 10^{-2} . Теоретические оценки, согласно формуле (10.34), имеют тот же порядок.

Следует, конечно, иметь в виду, что формулы (10.34) и (10.33) можно использовать только для грубой оценки соответствующих отношений $M1$ -переходы в четно-четных ядрах могут быть в значительной степени обусловлены малыми примесями однонуклонных возбуждений в коллективных состояниях. Учет этих поправок требует развития микротeorии ядра и не может проводиться на основе феноменологической теории.

§ 11. ПРОСТЕЙШИЕ ОБОБЩЕНИЯ МОДЕЛИ ЖЕСТКОГО НЕАКСИАЛЬНОГО РОТАТОРА

В модели жесткого неаксиального ротатора, рассмотренной в § 9, отношения энергий возбужденных состояний и вероятностей электромагнитных переходов между ними выражаются в каждом четно-четном ядре через один феноменологический параметр — эффективное значение γ . Такая картина обуславливалась следующими упрощениями:

а) использовалось адиабатическое приближение, т. е. предполагалось, что внутренние состояния ядра не изменяются при вращении;

б) предполагалось, что главные моменты инерции выражаются через эффективные значения β_0 и γ с помощью формулы

$$J_\lambda = 4B\beta_0^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \lambda \right). \quad (11.1)$$

Деформация ядра при вращении в пределах применимости теории возмущений учитывалась в работе Малманна и Кермана [54], которые обобщили формулу (8.33) теории аксиальных ядер на случай неаксиальных (квазиадиабатическая теория асимметричного ротатора). Они предположили, что наблюдаемое значение энергий состояний I_τ (I — спин, τ — номер состояния данного спина) можно представить формулой

$$\epsilon_{I\tau} = \epsilon_{I\tau}^0 - b(\epsilon_{I\tau}^0)^2, \quad (11.2)$$

где $\epsilon_{I\tau}^0$ — энергия $\left(\text{в единицах } \frac{\hbar^2}{4B\beta_0^2} \right)$ адиабатической теории § 9; b — феноменологический параметр, определяемый степенью деформируемости атомного ядра. Если вместо значений энергии измерять их отношения к энергии первого возбужденного уровня, то с помощью равенства (11.2) находим

$$R_{I\tau} \equiv \frac{\epsilon_{I\tau}}{\epsilon_{21}} = \frac{R_{I\tau}^0 - b[R_{I\tau}^0]^2}{1 - b}, \quad (11.3)$$

где $R_{I\tau}^0 \equiv \frac{\epsilon_{I\tau}^0}{\epsilon_{21}^0}$ вычислялось в § 9; для теоретического вычисления отношений (11.3) надо знать экспериментальные значения энергий трех уровней. Например, энергий ϵ_{21} , ϵ_{22} и ϵ_{41} .

Формула (11.3) справедлива только при малых значениях b . Разлагая выражение (11.3) в ряд по степеням b и пренебрегая вторыми и высшими степенями, получаем приближенное равенство

$$R_{I\tau} = R_{I\tau}^0 + bR_{I\tau}^0 [1 - R_{I\tau}^0]. \quad (11.3a)$$

Введение дополнительного параметра b , как показали Малманн и Керман [54], улучшает согласие теории с экспериментом для уровней $I \leq 8$, в атомных ядрах с значениями $R_{22} \geq 5$, что соответствует $\gamma < 18^\circ$. На рис. 15 изображены, по данным

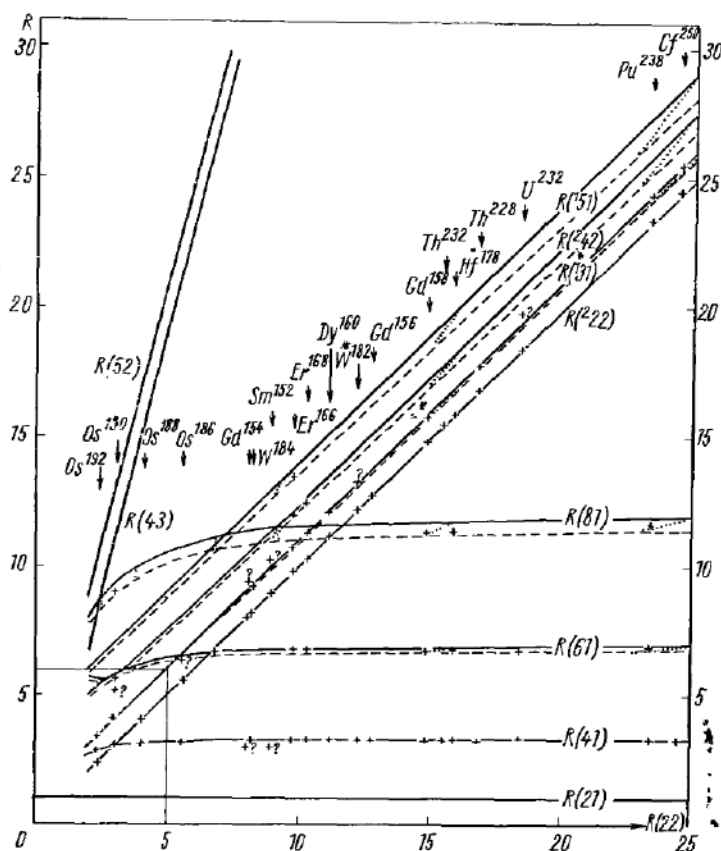


Рис. 15. Зависимость отношения энергий $R_{I\gamma} = \frac{E_{\gamma I}}{E_{21}}$ от $R_{22} = \frac{E_{22}}{E_{21}}$. Сплошные кривые для адиабатического приближения ($b=0$). Пунктирные кривые по данным работы [54] при $b = 10^{-3}$.

работы [54], отношения $R_{I\gamma}$, как функции R_{22} . Сплошные кривые для случая $b=0$, пунктирные кривые для случая $b=10^{-3}$. Крестики на рисунке указывают экспериментальные отношения.

Так же как в случае аксиальных ядер, полученные по теории возмущений формулы (11.2), учитывающие центробежные

поправки к энергиям возбуждения, неприменимы для «мягких» ядер и для возбужденных состояний с большими спинами. Более общие формулы будут рассмотрены в главе III.

Перейдем теперь к исследованию вопроса о том, в какой степени изменятся результаты теории, изложенной в § 9, если отказаться от предположения, что главные моменты инерции выражаются формулами (11.1), содержащими только два параметра $B\beta_0^2$ и γ . Зависимость моментов инерции типа (11.1) следует из теории малых квадрупольных колебаний сферических ядер (см. § 4) и из гидродинамической модели ядра. Будем условно называть приближение, определяющее главные моменты инерции (11.1), гидродинамическим.

В реальных ядрах три главных момента инерции, по-видимому, не сводятся к двум параметрам. Поэтому в целях общности необходимо исследовать вращательные состояния неаксиальных ядер с тремя произвольными главными моментами инерции. Чтобы не усложнять вычислений, не будем учитывать изменения внутреннего состояния ядра при вращении. В этом приближении оператор энергии имеет вид

$$H_a = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 a_{\lambda} I_{\lambda}^2, \quad (11.4)$$

где I_{λ} — проекции полного углового момента на главные координатные оси ядра; a_{λ} — три произвольных положительных числа, обратно пропорциональных главным моментам инерции ядра. В гидродинамическом приближении

$$a_{\lambda}^{-1} = \frac{4B\beta^2}{h^2} \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \lambda \right). \quad (11.5)$$

Теория вращательных состояний неаксиальных ядер с произвольными моментами инерции развивалась в работах автора и др. [76] и в работе Малманна [75].

Как было показано в § 9, вращательные состояния четного ядра в силу условий симметрии должны изображаться волновыми функциями, образующими базис для полносимметричного неприводимого представления группы D_2 . Только такие состояния будут здесь рассматриваться. Энергии вращательных состояний (требуемой симметрии) со спином 2 определяются уравнением

$$E^2 - 2E(a_1 + a_2 + a_3) + 3(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1) = 0.$$

Если обозначить корни этого уравнения E_{22} и E_{21} ($E_{22} > E_{21}$), то, вводя величину

$$\xi = \frac{E_{22}}{E_{21}} > 1 \quad (11.6)$$

и пользуясь свойствами коэффициентов квадратного уравнения, можно написать

$$\frac{2(a_1 + a_2 + a_3)}{E_{21}} = 1 + \xi, \quad \frac{3(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1)}{E_{21}^2} = \xi. \quad (11.7)$$

Энергии вращательных состояний удобно выражать в единицах энергии первого возбужденного состояния E_{21} . Введем отношения

$$R_{J\tau} = \frac{E_{J\tau}}{E_{21}}. \quad (11.8)$$

Безразмерные отношения $R_{J\tau}$ энергий вращательных состояний со спинами 3 и 5 с помощью формул

$$R_{31} = 1 + \xi; \quad R_{51} = 4 + \xi; \quad R_{52} = 1 + 4\xi \quad (11.9)$$

выражаются непосредственно через величину ξ , измеряемую на опыте. Однако безразмерные отношения $R_{J\tau}$ для спинов 4, 6, 7... зависят не только от параметра ξ , но и от параметра:

$$\eta = \frac{a_1 a_2 a_3}{E_{21}^3}. \quad (11.10)$$

Так, энергии уровней (в единицах E_{21}) со спином 4 определяются уравнением

$$R^3 - 5(1 + \xi)R^2 + 4\left[\xi^2 + \frac{19}{3}\xi + 1\right]R - 40\left[\frac{1}{3}\xi(1 + \xi) + 7\eta\right] = 0. \quad (11.11)$$

Безразмерные энергии уровней со спином 6 определяются уравнением

$$R^4 - 14(1 + \xi)R^3 + 49(1 + 4\xi + \xi^2)R^2 - [36(1 + \xi^3) + 578\xi(1 + \xi) + 3888\eta]R + [252\xi(1 + \xi^2) + 889\xi^2 + 13608(1 + \xi)\eta] = 0. \quad (11.12)$$

Если величины a_i , входящие в оператор энергии (11.4), определяются выражениями (11.5) («гидродинамическое приближение»), то параметр η , согласно формуле (11.10), равен

$$\eta = \eta_{\text{гидр}} = \frac{\xi^2}{18(1 + \xi)}. \quad (11.13)$$

Следовательно, в гидродинамическом приближении параметр η сводится к параметру ξ и все безразмерные энергии $R_{J\tau}$ выражаются только через один параметр ξ . В общем случае ве-

личина η не зависит от ξ и является вторым параметром теории. Правда, условия положительности коэффициентов a_k приводят к некоторому ограничению возможных значений η . Область изменения η зависит от величины ξ . Для определения области изменения η в зависимости от величины ξ учтем, что, согласно формулам (11.9) и (11.10), три величины $\frac{a_k}{E_{21}}$ являются корнями кубического уравнения

$$x^3 - \frac{1}{2}(1 + \xi)x^2 + \frac{1}{3}\xi x - \eta = 0.$$

Из условия вещественности и положительности корней этого уравнения следует, что величина η может изменяться в следующих пределах:

$$\left. \begin{aligned} \xi^2(3 - \xi) \leq 54\eta \leq 3\xi - 1, \text{ если } 1 < \xi \leq 3; \\ 0 \leq 54\eta \leq 3\xi - 1, \text{ если } \xi \geq 3. \end{aligned} \right\} \quad (11.14)$$

Значения η , удовлетворяющие неравенствам (11.14), соответствуют всем возможным соотношениям между главными моментами инерции, в частности, и таким, которые заведомо не реализуются в ядре. Например, случаи очень малых (или равных нулю) значений η соответствуют очень большим (бесконечным) значениям одного из главных моментов инерции.

Экспериментально наблюдаемые моменты инерции атомных ядер имеют промежуточные значения между моментами, определяемыми гидродинамической моделью и моделью твердого тела. Макдональд [77] предложил эмпирическую формулу, учитывающую отклонение экспериментально наблюдаемых значений моментов инерции от их гидродинамических значений

$$J_\lambda = J_\lambda^{\text{гид}} \left[\left(\frac{J_\lambda^{\text{гид}}}{J_\lambda^{\text{тв}}} \right)^2 + p \right]^{-2}, \quad \lambda = 1, 2, 3, \quad (11.15)$$

где

$$J_\lambda^{\text{гид}} = 4B\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \lambda \right); \quad J_\lambda^{\text{тв}} —$$

моменты инерции твердого тела, имеющего форму, определяемую коэффициентами β и γ . Моменты инерции (11.15) обладают тем свойством, что $J_\lambda = J_\lambda^{\text{тв}}$ при $p=0$. Экспериментально наблюдаемые моменты инерции соответствуют значениям параметра p , лежащим в интервале $0,1 \leq p \leq 0,2$. В работах Давыдова, Работнова и Чабана [76] и Маллманна [75] были рассчитаны энергии возбужденных состояний четно-четных ядер для трех произвольных значений J_λ . На рис. 16 изображены результаты вычислений согласно работе [76]. Отношения энергий

R_{31} , R_{51} , R_{52} однозначно выражаются через значения параметра ξ . Отношения энергий R_{41} , R_{42} , R_{61} и пр. при каждом фиксированном ξ заключены в некотором интервале значений, указанных на рис. 16 заштрихованными областями. Заштрихованные области на рис. 16 соответствуют всем возможным соотношениям между тремя моментами инерции, определяющими интервалы (11.14) изменения η . Как уже указывалось выше, не все

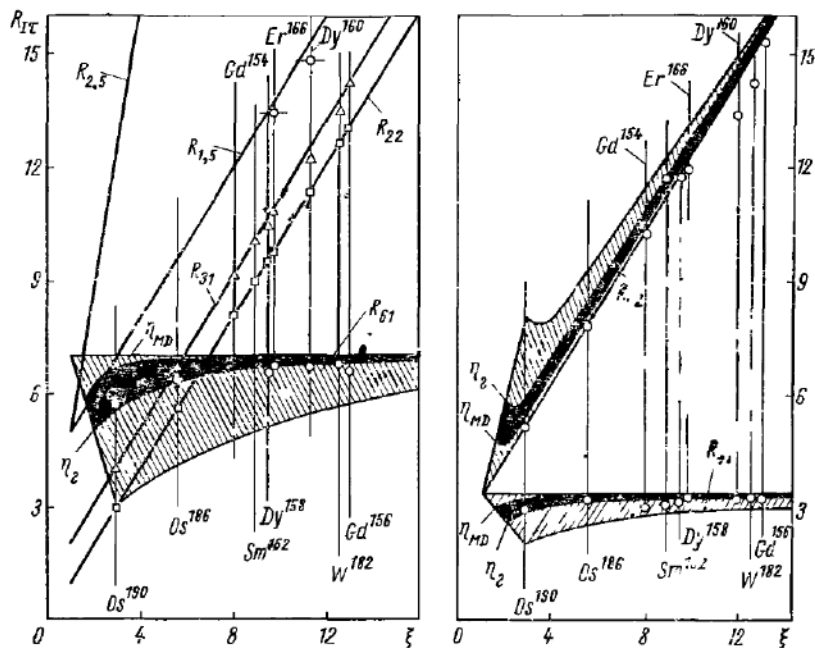


Рис. 16. Возможные значения теоретических отношений R_{31} , R_{41} , R_{42} , R_{51} , R_{61} и R_{52} в зависимости от параметров $\xi=R_{22}$ и η .

допустимые значения η реализуются в ядре. По-видимому, в ядре могут реализоваться только значения η , лежащие в области между кривыми η_r (для «гидродинамической модели») и η_{MD} для моментов инерции, определяемых феноменологической формулой (11.15) при $p=0,2$. Поэтому экспериментальные отношения энергий R_{41} , R_{42} , R_{61} должны лежать на рис. 16 внутри заштрихованной области. Легко объяснить, что в действительности ряд экспериментальных отношений меньше ожидаемых теоретических значений, если учесть деформацию ядра при его вращении. В частности, можно ввести поправки типа (11.3а) по теории возмущений. Такие поправки вводились Маллманом [75]. В этом случае теория содержит четыре феноменологических параметра (три момента инерции и параметр b), и для их определения надо знать энергии четырех уровней, из кото-

рых два должны относиться к аномальной полосе (кроме уровней спина 3 и 5, которые не зависят от η). Затруднения при сравнении теории с экспериментом обусловлены также тем, что введение поправок (11.3а) по теории возмущений допустимо только для энергетических состояний со спинами $I \leq 10$ у ядер с $R_{22} > 5$. В случае ядер с $R_{22} < 5$ применение теории возмущений вообще невозможно.

Необходимые условия выполняются сравнительно хорошо только у ядра Er^{166} , у которого изучены 10 возбужденных состояний со спином $I \leq 8$, относящихся к основной вращательной и первой аномальной полосам. В табл. 15 указаны результаты проведенного Клайном и Райхом [78] сравнения энергетических состояний ядра Er^{166} с теоретическими значениями энергий, полученных на основе расчетов Маллманна [75]. Как видно из табл. 15, теория с четырьмя параметрами хорошо объясняет последовательность спинов и значения энергий первых 10 возбужденных состояний в ядре Er^{166} , в котором аномальная полоса содержит шесть членов. К сожалению, в настоящее время нет данных об уровнях аномальной полосы со спинами 4, 6, 7 у других ядер. Поэтому использование четырехпараметрической теории затруднено. Для уменьшения числа параметров, подлежащих определению из опыта, приходится пользоваться для моментов инерции ядер выражениями (11.1). Поскольку отношения энергий R_L мало изменяются при допустимых для атомных ядер изменениях параметра η (затемненные области на рис. 13), то такое упрощение вполне допустимо.

Таблица 15

Сравнение [78] теоретических и экспериментальных значений энергий возбужденных состояний Er^{166}

Спин		Энергия, кэв			Спин		Энергия, кэв		
нормальная полоса	аномальная полоса	эксперимент	теория Маллманна [75]	теория [36] $\gamma = 12,7$ $\eta = 0,20$	нормальная полоса	аномальная полоса	эксперимент	теория Маллманна [75]	теория [36] $\gamma = 12,7$ $\eta = 0,20$
2	—	80,6	80,6	80,6	8	—	910	909,8	915
4	—	265,1	265,1	266	—	4	957,2	957,6	960
6	—	545,3	545,6	546	—	5	1074	1075,8	1080
—	2	781,1	786,8	789	—	6	1220	1219,3	1225
—	3	860,6	860,1	860	—	7	1374	1375,6	1384

Весьма важно, что некоторые соотношения теории жесткого неаксиального ротатора не зависят от конкретного значения главных моментов инерции атомных ядер. К этим соотношениям относятся уже рассмотренные нами в § 9 правила сумм для энергий возбужденных состояний, в частности равенства

(9.23) и (9.25), а также следующие соотношения, полученные Вильямсом [79]:

$$E_{5,1} = 4E_{2,1} + E_{2,2} = 3E_{2,1} + E_{3,1};$$

$$E_{5,2} = 4E_{2,2} + E_{2,1} = 3E_{2,2} + E_{3,1};$$

$$5E_{5,1}E_{5,1} = 4(E_{2,1}^2 + E_{2,2}^2) + 17E_{2,1}E_{2,2}.$$

Все эти соотношения справедливы только при условии применимости адиабатического приближения. Поэтому в реальных ядрах они выполняются только приближенно. Приближенное выполнение этих соотношений, с одной стороны, служит указанием о степени выполнения адиабатических условий, с другой стороны, они могут быть полезны при установлении спинов некоторых возбужденных состояний деформированных ядер.

НЕАДИАБАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВРАЩАТЕЛЬНО-ВИБРАЦИОННЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В АТОМНЫХ ЯДРАХ

§ 12. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВРАЩЕНИЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДЕР

Адиабатическая теория коллективных возбуждений, рассмотренная во второй главе, является сравнительно грубым приближением к действительности. Использование теории возмущений (см. § 8 и § 11) для учета связи вращения с колебаниями оправдывается также сравнительно редко. Поэтому приходится развивать теорию, не опирающуюся на адиабатическое приближение.

В этом параграфе излагается теория Чабана и автора [37], в которой вращательно-вибрационные возбуждения исследовались на основе оператора Гамильтона (6.12), содержащего четыре динамические переменные. Эта теория учитывает эффект растяжения ядра при вращении и позволяет связать свойства деформируемости ядер по отношению к продольным колебаниям с энергией бесспиновых β -колебательных возбуждений. Однако и в этой теории поперечные γ -колебания поверхности ядра учитываются только путем введения эффективного параметра $\gamma = \gamma_{\text{эфф}}$.

Итак, рассмотрим уравнение Шредингера

$$(H - E_I) \Psi_I(\beta, \theta) = 0, \quad \theta \equiv \{\theta_1 \theta_2 \theta_3\}, \quad (12.1)$$

в котором оператор H определен выражением (6.12) и собственные функции Ψ определены в четырехмерном пространстве с координатами $\beta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ и элементом объема

$$d\tau = \beta^3 d\beta d\theta_1 \sin \theta_2 d\theta_2 d\theta_3.$$

Полагая,

$$\Psi(\beta, \theta) = F(\beta) \Phi(\theta), \quad (12.2)$$

преобразуем уравнение (12.1) к системе двух уравнений

$$(H_a - \epsilon_{I\tau}) \Phi_{I\tau}(\theta) = 0, \quad (12.3)$$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2B\beta^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^3 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + V(\beta) + \frac{\hbar^2 \epsilon_{I\tau}}{4B\beta^2} - E_{I\tau} \right\} F_{I\tau}(\beta) = 0, \quad (12.4)$$

где H_a совпадает с оператором (9.2) жесткого неаксиального ротатора. Решения уравнения (12.3) исследовались в § 9. Безразмерные энергии $\epsilon_{I\tau}$ как функции параметра $\gamma = \gamma_{\text{эфф}}$ определены выражениями (9.17), (9.22), (9.24) и табл. 5—8 для спинов $I \geq 2$. Значение ϵ_{00} выбрано равным нулю.

Положим,

$$F_{I\tau}(\beta) = \beta^{-s/2} \varphi_{I\tau}(\beta). \quad (12.5)$$

Тогда уравнение (12.4) преобразуется к виду

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2B} \frac{d^2}{d\beta^2} + W_{I\tau}(\beta) - E_{I\tau} \right\} \varphi_{I\tau}(\beta) = 0, \quad (12.6)$$

где

$$0 \leq \beta < \infty; \quad \varphi_{I\tau}(0) = 0; \quad (12.6a)$$

$$W_{I\tau}(\beta) = V(\beta) + \frac{3\hbar^2}{8B\beta^2} + \frac{\hbar^2 \epsilon_{I\tau}}{4B\beta^2} \approx \frac{C}{2} (\beta - \beta_0)^2 + \frac{\hbar^2 \epsilon_{I\tau}}{4B\beta_0^2}. \quad (12.7)$$

В выражении (12.7) величины C и β_0 определяют постоянную упругости и параметр деформации ядра при $I=0$.

При $I \neq 0$ появляется второе слагаемое в эффективной потенциальной энергии (12.7), которое смещает положение равновесия и изменяет постоянную упругости. Разложив $W(\beta)$ в ряд по степеням β и ограничившись учетом линейных и квадратичных членов, можно написать

$$W_{I\tau}(\beta) = W_{I\tau}(\beta_{I\tau}) + \frac{1}{2} C_{I\tau} (\beta - \beta_{I\tau})^2, \quad (12.8)$$

где

$$\beta_{I\tau} = \beta_0 + \frac{\hbar^2 \epsilon_{I\tau}}{2BC\beta_0^3}, \quad (12.9)$$

уравнение, определяющее новое положение равновесия;

$$C_{I\tau} = C \left[1 + \frac{3\hbar^2 \epsilon_{I\tau}}{2BC\beta_0^4} \right] \quad (12.10)$$

новая упругая постоянная;

$$W_{I\tau}(\beta_{I\tau}) = \frac{1}{2} C (\beta_{I\tau} - \beta_0)^2 + \frac{\hbar^2 \epsilon_{I\tau}}{4B\beta_0^2}. \quad (12.11)$$

Пусть

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{B}}, \quad p_{I\tau} = \frac{\beta_{I\tau}}{\beta_0} \gg 1 \quad \text{и} \quad \mu = \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{\hbar^2}{BC} \right)^{1/4}. \quad (12.12)$$

Тогда равенство (12.9) — (12.11) преобразуются к виду

$$(p_{I\tau} - 1)p_{I\tau}^3 = \frac{1}{2} \mu^4 \epsilon_{I\tau}; \quad (12.13)$$

$$C_{I\tau} = C \left[1 + \frac{3\mu^4 \epsilon_{I\tau}}{2p_{I\tau}^4} \right]; \quad (12.14)$$

$$W_{I\tau}(\beta_{I\tau}) = \hbar \omega_0 \left[\frac{(p_{I\tau} - 1)^2}{2\mu^2} + \frac{\mu^2 \epsilon_{I\tau}}{4p_{I\tau}^2} \right]. \quad (12.15)$$

Подставляя выражение (12.8) в уравнение (12.6), находим уравнение

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2B} \frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{1}{2} C_{I\tau} (\beta - \beta_{I\tau})^2 - [E_{I\tau} - W_{I\tau}(\beta_{I\tau})] \right\} \Phi_{I\tau}(\beta) = 0. \quad (12.16)$$

Введем величину

$$\mu_{I\tau} = \mu \left[\frac{C}{C_{I\tau}} \right]^{1/4} = \mu \left[4 - \frac{3}{p_{I\tau}} \right]^{-1/4} \quad (12.17)$$

и новую переменную

$$\zeta = \frac{p_{I\tau}(\beta - \beta_{I\tau})}{\mu_{I\tau} \beta_{I\tau}}, \quad (12.18)$$

которая изменяется в интервале

$$-\frac{p_{I\tau}}{\mu_{I\tau}} \leq \zeta < \infty.$$

Переходя в уравнении (12.16) к переменной ζ и полагая,

$$\Phi_{I\tau}(\beta) = V(\zeta) \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta^2\right), \quad (12.19)$$

находим уравнение для функции $V(\zeta)$

$$\left\{ \frac{d^2}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{d}{d\zeta} + 2\nu \right\} V(\zeta) = 0, \quad (12.20)$$

где

$$\nu \equiv \frac{E_{I\tau} - W_{I\tau}(\beta_{I\tau})}{\hbar \omega_{I\tau}} - \frac{1}{2}, \quad \omega_{I\tau} = \sqrt{\frac{C_{I\tau}}{B}}. \quad (12.21)$$

Функция $V(\xi)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$V\left(-\frac{\rho_{I\tau}}{\mu_{I\tau}}\right) \rightarrow 0, \quad V(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \rightarrow 0, \text{ если } \xi \rightarrow \infty. \quad (12.22)$$

Решения уравнения (12.20) могут быть написаны в виде

$$V(\xi) = NH_v(\xi),$$

где N множитель нормировки, а

$$H_v(\xi) = [2\Gamma(-v)]^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (2\xi)^k \Gamma\left(\frac{k-v}{2}\right) \quad (12.23)$$

функция Эрмита первого рода [80]. Здесь $\Gamma(x)$ — γ -функция. Величина v в выражении (12.23) является корнем трансцендентного уравнения

$$H_v\left(-\frac{\rho_{I\tau}}{\mu_{I\tau}}\right) = 0, \quad (12.24)$$

вытекающего из граничного условия (12.22). Это уравнение имеет бесконечное множество корней v , которые обозначим в порядке возрастания их величины буквами $v_0, v_1, v_2, \dots$. Величины $\rho_{I\tau}$ и $\mu_{I\tau}$ определяются для каждого значения параметра μ уравнениями (12.13) и (12.17). В каждом состоянии $I\tau$ величины $\rho_{I\tau}$ и $\mu_{I\tau}$ зависят от параметра γ через энергию $\varepsilon_{I\tau}$ жесткого неаксиального ротатора, входящую в уравнение (12.13). Величина $\rho_{I\tau}(\mu, \gamma)$, согласно уравнению (12.12), определяет увеличение равновесной деформации β_0 основного состояния при переходе ядра в состояние $I\tau$, так что $\beta_{I\tau} = \rho_{I\tau}\beta_0$. В табл. 17—21 указаны (по расчетам Маллманна и др. [81]) значения $\rho_{I\tau}$ в разных состояниях $I\tau$ для разных значений параметров γ и μ . Мы видим, что при $\mu = 1$ и $\gamma = 8^\circ$ в состоянии 2,1 основной вращательной полосы $\beta_{2,1} \approx 1,6\beta_0$, а в состоянии 12,1 значение $\beta_{12,1} \approx 3\beta_0$ и т. д. Для каждого значения $\rho_{I\tau}/\mu_{I\tau}$ (некоторые из этих значений указаны в табл. 16—19) можно найти корни уравнения (12.24). Корни v_0, v_1, v_2 были определены численным методом Маллманном и др. [81]. Они указаны в табл. 16—21. Из этих таблиц следует, что при $\mu < 1/3$ корни v_n близки к целым числам $v_n \approx n = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае бесконечный ряд (12.23) сводится к полиномам Эрмита степени n , которые являются решениями уравнения Шредингера для одномерного гармонического осциллятора. В общем же случае v не является целым числом и функция (12.23) изображается бесконечным рядом.

Таблица 16

Зависимость величин ρ_0 , ρ_0/μ_0 и трех корней уравнения (12.24), определяющих функции основного состояния v_0 , функции нулевого спина первой v_1 и второй v_2 β -колебательных полос, от параметра μ

μ	ρ_0	ρ_0/μ_0	v_0	v_1	v_2
0,10	1,000	10,00	0,000	1,000	2,000
0,20	1,000	5,000	0,000	1,000	2,000
0,25	1,000	4,000	$-4,74 \cdot 10^{-5}$	1,000	2,000
0,30	1,000	3,333	$-1,15 \cdot 10^{-5}$	1,000	2,004
0,35	1,000	2,857	$3,85 \cdot 10^{-4}$	1,005	2,033
0,40	1,000	2,500	$2,39 \cdot 10^{-3}$	1,024	2,103
0,50	1,000	2,000	$1,788 \cdot 10^{-2}$	1,111	2,320
0,60	1,000	1,666	$5,042 \cdot 10^{-2}$	1,235	2,558
0,70	1,000	1,428	$9,396 \cdot 10^{-2}$	1,366	2,778
0,80	1,000	1,250	0,1414	1,488	2,970
0,90	1,000	1,111	0,1889	1,599	3,136
1,00	1,000	1,000	0,2342	1,697	3,280

Таблица 17

Зависимость величин ρ_{21} , ρ_{21}/μ_{21} и трех корней уравнения (12.24), определяющих волновые функции состояний спина 2 в основной вращательной полосе v_0 и первой v_1 и второй v_2 β -вибрационных полосах, от параметров μ и γ

μ	γ , град	ρ_{21}	ρ_{21}/μ_{21}	v_0	v_1	v_2
0,10	8	1,000	10,000	0,000	1,000	2,000
0,20	8	1,003	5,028	0,000	1,000	2,000
0,30	8	1,016	3,426	$-2,46 \cdot 10^{-5}$	1,000	2,000
0,35	8	1,028	2,998	$1,59 \cdot 10^{-4}$	1,002	2,020
0,40	8	1,046	2,699	$9,08 \cdot 10^{-4}$	1,011	2,057
0,50	8	1,098	2,330	$5,02 \cdot 10^{-3}$	1,043	2,159
0,60	8	1,168	2,131	$1,118 \cdot 10^{-2}$	1,078	2,247
0,80	8	1,347	1,944	$2,157 \cdot 10^{-2}$	1,127	2,354
1,00	8	1,554	1,863	$2,802 \cdot 10^{-2}$	1,154	2,408
0,10	12	1,000	10,000	0,000	1,000	2,000
0,20	12	1,003	5,030	0,000	1,000	2,000
0,25	12	1,008	4,057	0,000	1,000	2,000
0,30	12	1,016	3,430	$-2,51 \cdot 10^{-5}$	1,000	2,002
0,35	12	1,029	3,005	$1,53 \cdot 10^{-4}$	1,002	2,019
0,40	12	1,048	2,707	$8,69 \cdot 10^{-4}$	1,011	2,056
0,50	12	1,101	2,343	$4,76 \cdot 10^{-3}$	1,041	2,154
0,60	12	1,175	2,146	$1,056 \cdot 10^{-2}$	1,075	2,240
0,80	12	1,357	1,962	$2,030 \cdot 10^{-2}$	1,122	2,343
1,00	12	1,567	1,883	$2,634 \cdot 10^{-2}$	1,147	2,394

ν	γ , град	P_{21}	P_{21}/ν_{21}	ν_0	ν_1	ν_2
0,10	20	1,000	10,000	0,000	1,000	2,000
0,20	20	1,004	5,035	0,000	1,000	2,000
0,25	20	1,009	4,067	0,000	1,000	2,000
0,30	20	1,019	3,445	$-2,66 \cdot 10^{-5}$	1,000	2,002
0,35	20	1,034	3,026	$1,311 \cdot 10^{-4}$	1,002	2,017
0,40	20	1,055	2,736	$7,498 \cdot 10^{-4}$	1,009	2,051
0,50	20	1,114	2,383	$4,002 \cdot 10^{-3}$	1,036	2,140
0,60	20	1,119	2,196	$8,757 \cdot 10^{-3}$	1,065	2,216
0,80	20	1,388	2,020	$1,664 \cdot 10^{-2}$	1,105	2,308
1,00	20	1,608	1,944	$2,154 \cdot 10^{-2}$	1,127	2,354
0,10	25	1,000	10,000	0,000	1,000	2,000
0,20	25	1,004	5,039	0,000	1,000	2,000
0,25	25	1,010	4,074	0,000	1,000	2,000
0,30	25	1,021	3,457	$-2,77 \cdot 10^{-5}$	1,000	2,002
0,35	25	1,037	3,043	$1,154 \cdot 10^{-4}$	1,002	2,016
0,40	25	1,060	2,758	$6,642 \cdot 10^{-4}$	1,008	2,047
0,50	25	1,124	2,415	$3,480 \cdot 10^{-3}$	1,032	2,129
0,60	25	1,208	2,234	$7,542 \cdot 10^{-3}$	1,058	2,198
0,80	25	1,411	2,065	$1,422 \cdot 10^{-2}$	1,094	2,282
1,00	25	1,640	1,991	$1,839 \cdot 10^{-2}$	1,113	2,325
0,10	30	1,000	10,000	0,000	1,000	2,000
0,25	30	1,011	4,078	0,000	1,000	2,000
0,30	30	1,022	3,464	$-2,834 \cdot 10^{-5}$	1,000	2,002
0,35	30	1,040	3,053	$1,071 \cdot 10^{-4}$	1,002	2,016
0,40	30	1,063	2,771	$6,200 \cdot 10^{-4}$	1,008	2,045
0,50	30	1,129	2,433	$3,218 \cdot 10^{-3}$	1,030	2,123
0,60	30	1,216	2,255	$6,940 \cdot 10^{-3}$	1,054	2,189
0,80	30	1,424	2,089	$1,303 \cdot 10^{-2}$	1,088	2,269
1,00	30	1,658	2,017	$1,684 \cdot 10^{-2}$	1,106	2,310

Энергия коллективных возбужденных состояний с полным угловым моментом I и номером τ определяется, согласно формуле (12.21), выражением

$$E_{I\tau} = \hbar\omega_0 \left\{ \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\mu}{\rho_{I\tau}} \right)^2} \varepsilon_{I\tau} + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{\rho_{I\tau}} \right)^2 \varepsilon_{I\tau} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_{I\tau} - 1}{\mu} \right)^2 \right\}. \quad (12.25)$$

Здесь $\rho_{I\tau}$ — корень уравнения (12.13) и $\varepsilon_{I\tau}$ — безразмерные энергии состояний $I\tau$ вращения жесткого асимметричного ротора. $\varepsilon_{I\tau}$ зависит от γ , а $\rho_{I\tau}$ (μ , γ) — от γ и μ . Таким образом, энергии коллективных возбуждений в каждом четно-четном ядре выражаются только через три параметра: ω_0 , μ и γ .

Зависимость величин p_{41} , p_{41}/μ_{41} и двух корней уравнения (12.24), определяющих волновые функции состояний спина 4 в основной вращательной v_0 и первой v_1 β -вибрационной полосах, от параметров μ и γ

μ	γ , град	p_{41}	p_{41}/μ_{41}	v_0	v_1
0,10	8	1,000	10,01	0,000	1,000
0,20	8	1,010	5,093	0,000	1,000
0,25	8	1,025	4,173	0,000	1,000
0,30	8	1,048	3,611	$-3,76 \cdot 10^{-5}$	1,000
0,35	8	1,082	3,253	$6,442 \cdot 10^{-6}$	1,000
0,40	8	1,124	3,020	$1,367 \cdot 10^{-4}$	1,002
0,60	8	1,358	2,618	$1,360 \cdot 10^{-3}$	1,015
0,80	8	1,641	2,490	$2,491 \cdot 10^{-3}$	1,025
1,00	8	1,943	2,432	$3,231 \cdot 10^{-3}$	1,031
0,10	12	1,000	10,01	0,000	1,000
0,20	12	1,011	5,097	0,000	1,000
0,25	12	1,026	4,180	0,000	1,000
0,30	12	1,050	3,621	$-3,804 \cdot 10^{-5}$	0,9999
0,35	12	1,084	3,261	$2,761 \cdot 10^{-6}$	1,000
0,40	12	1,128	3,036	$1,215 \cdot 10^{-4}$	1,002
0,60	12	1,366	2,640	$1,222 \cdot 10^{-3}$	1,014
0,80	12	1,654	2,514	$2,237 \cdot 10^{-3}$	1,023
1,00	12	1,959	2,456	$2,903 \cdot 10^{-3}$	1,028
0,10	20	1,000	10,01	0,000	1,000
0,20	20	1,012	5,106	0,000	1,000
0,25	20	1,028	4,196	0,000	1,000
0,30	20	1,054	3,644	$-3,896 \cdot 10^{-5}$	0,9999
0,35	20	1,091	3,297	$-4,332 \cdot 10^{-6}$	1,000
0,40	20	1,137	3,072	$9,248 \cdot 10^{-5}$	1,002
0,60	20	1,385	2,687	$9,661 \cdot 10^{-4}$	1,012
0,80	20	1,681	2,564	$1,769 \cdot 10^{-3}$	1,019
1,00	20	1,995	2,508	$2,300 \cdot 10^{-3}$	1,023
0,10	25	1,000	10,01	0,000	1,000
0,20	25	1,012	5,107	0,000	1,000
0,25	25	1,028	4,198	0,000	1,000
0,30	25	1,055	3,648	$-3,912 \cdot 10^{-5}$	0,9999
0,35	25	1,092	3,302	$-5,465 \cdot 10^{-6}$	1,000
0,40	25	1,139	3,078	$8,794 \cdot 10^{-5}$	1,002
0,50	25	1,254	2,824	$4,629 \cdot 10^{-4}$	1,006
0,60	25	1,388	2,695	$9,269 \cdot 10^{-4}$	1,011
0,80	25	1,686	2,572	$1,698 \cdot 10^{-3}$	1,018
1,00	25	2,001	2,516	$2,208 \cdot 10^{-3}$	1,023
0,20	30	1,012	5,107	0,000	1,000
0,30	30	1,055	3,647	$-3,908 \cdot 10^{-5}$	0,9999
0,40	30	1,138	3,077	$8,897 \cdot 10^{-5}$	1,002
0,60	30	1,387	2,693	$9,358 \cdot 10^{-4}$	1,011
0,80	30	1,684	2,570	$1,714 \cdot 10^{-3}$	1,018
1,00	30	1,999	2,514	$2,229 \cdot 10^{-3}$	1,023

Зависимость величин ρ_{61} , ρ_{61}/μ_{61} и двух корней уравнения (12.24), определяющих волновые функции состояний спина 6 в основной вращательной ν_0 и первой ν_1 β -вибрационной полосах, от параметров μ и γ

μ	γ , град	ρ_{61}	ρ_{61}/μ_{61}	ν_0	ν_1
0,10	8	1,001	10,02	0,000	1,000
0,20	8	1,021	5,188	0,000	1,000
0,30	8	1,090	3,843	$-4,447 \cdot 10^{-5}$	1,000
0,40	8	1,209	3,358	$-1,566 \cdot 10^{-5}$	1,000
0,60	8	1,527	3,041	$1,177 \cdot 10^{-4}$	1,002
0,80	8	1,885	2,937	$2,385 \cdot 10^{-4}$	1,004
1,00	8	2,258	2,887	$3,218 \cdot 10^{-4}$	1,005
0,10	12	1,001	10,02	0,000	1,000
0,20	12	1,022	5,194	0,000	1,000
0,25	12	1,050	4,346	0,000	1,000
0,30	12	1,093	3,856	$-4,475 \cdot 10^{-5}$	1,000
0,40	12	1,214	3,376	$-1,844 \cdot 10^{-5}$	1,000
0,50	12	1,367	3,169	$3,620 \cdot 10^{-5}$	1,001
0,60	12	1,536	3,063	$9,961 \cdot 10^{-5}$	1,002
0,80	12	1,898	2,959	$2,062 \cdot 10^{-4}$	1,003
1,00	12	2,274	2,911	$2,799 \cdot 10^{-4}$	1,004
0,10	20	1,001	10,02	0,000	1,000
0,25	20	1,051	4,353	0,000	1,000
0,30	20	1,094	3,867	$-4,5 \cdot 10^{-5}$	1,000
0,40	20	1,218	3,390	$-2,032 \cdot 10^{-5}$	1,000
0,50	20	1,372	3,185	$2,972 \cdot 10^{-5}$	1,001
0,70	20	1,722	3,017	$1,403 \cdot 10^{-4}$	1,002
1,00	20	2,286	2,928	$2,521 \cdot 10^{-4}$	1,004
0,20	25	1,022	5,195	0,000	1,000
0,30	25	1,093	3,859	$-4,481 \cdot 10^{-5}$	1,000
0,40	25	1,215	3,380	$-1,899 \cdot 10^{-5}$	1,000
0,60	25	1,538	3,067	$9,602 \cdot 10^{-5}$	1,002
0,80	25	1,901	2,964	$1,998 \cdot 10^{-4}$	1,003
1,00	25	2,278	2,916	$2,715 \cdot 10^{-4}$	1,004
0,20	30	1,022	5,194	0,000	1,000
0,30	30	1,093	3,856	$-4,475 \cdot 10^{-5}$	1,000
0,40	30	1,214	3,376	$-1,837 \cdot 10^{-5}$	1,000
0,60	30	1,536	3,062	$1,000 \cdot 10^{-4}$	1,002
0,80	30	1,898	2,959	$2,070 \cdot 10^{-4}$	1,003
1,00	30	2,274	2,910	$2,808 \cdot 10^{-4}$	1,004

Зависимость величин $p_{I,1}$ и v_0 в состояниях со спинами 8, 10 и 12 основной вращательной полосы от параметров μ и γ

p	γ , град	I=8		I=10		I=12	
		$p_{8,1}$	v_0	$p_{10,1}$	v_0	$p_{12,1}$	v_0
0,10	8	1,002	0,000	1,003	0,000	1,005	0,000
0,20	8	1,035	0,000	1,051	0,000	1,069	0,000
0,30	8	1,136	0,000	1,185	0,000	1,231	0,000
0,40	8	1,293	$-4,03 \cdot 10^{-5}$	1,373	$-4,71 \cdot 10^{-5}$	1,448	0,000
0,60	8	1,679	$-2,31 \cdot 10^{-5}$	1,816	$-4,23 \cdot 10^{-5}$	1,942	0,000
0,80	8	2,098	$-9,39 \cdot 10^{-6}$	2,289	$-3,97 \cdot 10^{-5}$	2,462	$-4,70 \cdot 10^{-5}$
1,00	8	2,530	$2,03 \cdot 10^{-7}$	2,772	$-3,81 \cdot 10^{-5}$	2,991	$-4,63 \cdot 10^{-5}$
0,10	12	1,002	0,000	1,003	0,000	1,005	0,000
0,20	12	1,036	0,000	1,052	0,000	1,069	0,000
0,30	12	1,139	0,000	1,185	0,000	1,230	0,000
0,40	12	1,297	$-4,08 \cdot 10^{-5}$	1,375	$-4,72 \cdot 10^{-5}$	1,447	0,000
0,50	12	1,686	$-2,50 \cdot 10^{-5}$	1,819	$-4,24 \cdot 10^{-5}$	1,941	0,000
1,00	12	2,542	$-3,88 \cdot 10^{-6}$	2,778	$-3,85 \cdot 10^{-5}$	2,989	$-4,62 \cdot 10^{-5}$
0,20	20	1,035	0,000	1,050	0,000	1,065	0,000
0,30	20	1,136	0,000	1,179	0,000	1,221	0,000
0,40	20	1,293	$-4,03 \cdot 10^{-5}$	1,364	$-4,66 \cdot 10^{-5}$	1,432	0,000
0,60	20	1,679	$-2,32 \cdot 10^{-5}$	1,802	$-4,13 \cdot 10^{-5}$	1,916	$-4,72 \cdot 10^{-5}$
1,00	20	2,530	$1,09 \cdot 10^{-7}$	2,747	$-3,65 \cdot 10^{-5}$	2,945	$-4,50 \cdot 10^{-5}$
0,20	25	1,034	0,000	1,048	0,000	1,064	0,000
0,30	25	1,134	0,000	1,175	0,000	1,217	0,000
0,40	25	1,289	$-3,97 \cdot 10^{-5}$	1,359	$-4,62 \cdot 10^{-5}$	1,426	0,000
0,60	25	1,671	$-2,09 \cdot 10^{-5}$	1,793	$-4,06 \cdot 10^{-5}$	1,906	$-4,68 \cdot 10^{-5}$
1,00	25	2,517	$5,09 \cdot 10^{-6}$	2,731	$-3,54 \cdot 10^{-5}$	2,928	$-4,45 \cdot 10^{-5}$
0,20	30	1,034	0,000	1,048	0,000	1,063	0,000
0,30	30	1,133	0,000	1,174	0,000	1,216	0,000
0,40	30	1,287	$-3,95 \cdot 10^{-5}$	1,357	$-4,61 \cdot 10^{-5}$	1,424	$-5,02 \cdot 10^{-5}$
0,60	30	1,669	$-2,01 \cdot 10^{-5}$	1,790	$-4,04 \cdot 10^{-5}$	1,902	$-4,67 \cdot 10^{-5}$
1,00	30	2,512	$6,94 \cdot 10^{-6}$	2,726	$-3,50 \cdot 10^{-5}$	2,922	$-4,44 \cdot 10^{-5}$

Если же выражать энергии возбужденных состояний через энергию первого возбужденного уровня для данного ядра, то останется только два независимых параметра μ и γ .

Введем величину

$$\beta_{00}^2 = \frac{\hbar}{I'_{BC}}, \quad (12.26)$$

равную удвоенному значению среднего квадрата нулевых колебаний одномерного осциллятора с массовым параметром B и коэффициентом упругости C . Тогда, согласно уравнению (12.12), определение μ можно переписать в виде

$$\mu = \frac{\beta_{00}}{\beta_0}. \quad (12.27)$$

Зависимость величин $p_{I\tau}$ и v_0 в состояниях со спинами 2, 3, 4, 5, 6 первой аномальной полосы от параметров μ и γ

μ	γ , град	$I=2$		$I=3$		$I=4$		$I=5$		$I=6$	
		p_{22}	v_0	p_{31}	v_0	$p_{4,2}$	v_0	p_{51}	v_0	p_{62}	v_0
0,10	8	1,605	0,000	1,005	0,000	1,005	0,000	1,005	0,000	1,006	0,000
0,20	8	1,068	0,000	1,070	0,000	1,073	0,000	1,077	0,000	1,081	0,000
0,30	8	1,228	0,000	1,234	0,000	1,241	0,000	1,250	0,000	1,261	0,000
0,40	8	1,444	0,000	1,453	0,000	1,465	0,000	1,479	0,000	1,495	0,000
0,60	8	1,935	0,000	1,950	0,000	1,969	0,000	1,992	0,000	2,019	0,000
0,80	8	2,452	$-4,67 \cdot 10^{-5}$	2,473	$-4,73 \cdot 10^{-5}$	2,499	0,000	2,531	0,000	2,568	0,000
1,00	8	2,979	$-4,59 \cdot 10^{-5}$	3,004	$-4,66 \cdot 10^{-5}$	3,039	0,000	3,078	0,000	3,125	0,000
0,10	12	1,002	0,000	1,002	0,000	1,004	0,000	1,003	0,000	1,003	0,000
0,20	12	1,034	0,000	1,037	0,000	1,069	0,000	1,045	0,000	1,051	0,000
0,30	12	1,132	0,000	1,141	0,000	1,211	0,000	1,166	0,000	1,182	0,000
0,40	12	1,286	$-3,94 \cdot 10^{-5}$	1,302	$-4,13 \cdot 10^{-5}$	1,417	0,000	1,343	$-4,51 \cdot 10^{-5}$	1,370	$-4,69 \cdot 10^{-5}$
0,60	12	1,667	$-1,95 \cdot 10^{-5}$	1,694	$-2,70 \cdot 10^{-5}$	1,891	$-4,61 \cdot 10^{-5}$	1,766	$-3,82 \cdot 10^{-5}$	1,811	$-4,19 \cdot 10^{-5}$
1,00	12	2,509	$8,17 \cdot 10^{-6}$	2,557	$-8,20 \cdot 10^{-6}$	2,902	$-4,37 \cdot 10^{-5}$	2,684	$-3,11 \cdot 10^{-5}$	2,764	$-3,76 \cdot 10^{-5}$
0,20	20	1,014	0,000	1,018	0,000	1,024	0,000	1,028	0,000	1,038	0,000
0,30	20	1,063	$-4,07 \cdot 10^{-5}$	1,077	$-4,29 \cdot 10^{-5}$	1,098	$-4,53 \cdot 10^{-5}$	1,114	$-4,69 \cdot 10^{-5}$	1,146	0,000
0,40	20	1,156	$4,60 \cdot 10^{-5}$	1,184	$4,76 \cdot 10^{-5}$	1,224	$-2,35 \cdot 10^{-5}$	1,254	$-3,34 \cdot 10^{-5}$	1,310	$-4,22 \cdot 10^{-5}$
0,60	20	1,424	$5,77 \cdot 10^{-4}$	1,479	$2,60 \cdot 10^{-4}$	1,555	$6,72 \cdot 10^{-5}$	1,609	$9,59 \cdot 10^{-6}$	1,708	$-3,01 \cdot 10^{-5}$
1,00	20	2,068	$1,39 \cdot 10^{-3}$	2,171	$6,52 \cdot 10^{-4}$	2,309	$2,05 \cdot 10^{-4}$	2,406	$7,34 \cdot 10^{-5}$	2,582	$-1,47 \cdot 10^{-5}$
0,20	25	1,010	0,000	1,014	0,000	1,023	0,000	1,026	0,000	1,041	0,000
0,30	25	1,047	$-3,74 \cdot 10^{-5}$	1,064	$-4,09 \cdot 10^{-5}$	1,096	$-4,51 \cdot 10^{-5}$	1,108	$-4,63 \cdot 10^{-5}$	1,153	0,000
0,40	25	1,123	$1,42 \cdot 10^{-4}$	1,158	$4,19 \cdot 10^{-5}$	1,219	$-2,13 \cdot 10^{-5}$	1,242	$-3,01 \cdot 10^{-5}$	1,321	$-4,33 \cdot 10^{-5}$
0,60	25	1,355	$1,41 \cdot 10^{-3}$	1,428	$5,45 \cdot 10^{-4}$	1,546	$8,12 \cdot 10^{-5}$	1,587	$2,81 \cdot 10^{-5}$	1,728	$-3,36 \cdot 10^{-5}$
1,00	25	1,937	$3,36 \cdot 10^{-3}$	2,076	$1,31 \cdot 10^{-3}$	2,293	$2,37 \cdot 10^{-4}$	2,367	$1,16 \cdot 10^{-4}$	2,618	$-2,19 \cdot 10^{-5}$
0,20	30	1,009	0,000	1,013	0,000	1,025	0,000	1,026	0,000	1,042	0,000
0,30	30	1,042	$-3,61 \cdot 10^{-5}$	1,061	$-4,03 \cdot 10^{-5}$	1,102	$-4,58 \cdot 10^{-5}$	1,107	$-4,62 \cdot 10^{-5}$	1,156	0,000
0,40	30	1,111	$1,95 \cdot 10^{-4}$	1,151	$5,75 \cdot 10^{-5}$	1,232	$-2,67 \cdot 10^{-5}$	1,241	$-2,97 \cdot 10^{-5}$	1,327	$-4,38 \cdot 10^{-5}$
0,60	30	1,330	$1,91 \cdot 10^{-3}$	1,413	$6,71 \cdot 10^{-4}$	1,569	$4,78 \cdot 10^{-5}$	1,585	$3,02 \cdot 10^{-5}$	1,739	$-3,51 \cdot 10^{-5}$
1,00	30	1,889	$4,53 \cdot 10^{-3}$	2,047	$1,61 \cdot 10^{-3}$	2,335	$1,61 \cdot 10^{-4}$	2,363	$1,20 \cdot 10^{-4}$	2,636	$-2,49 \cdot 10^{-5}$

Следовательно, параметр μ определяется (с точностью до множителя $\sqrt{2}$) отношением амплитуды нулевых колебаний поверхности ядра в основном состоянии к величине равновесного отклонения β_0 формы ядра от сферы. Значение $\mu=0$ соответствует полному разделению возбуждения на вращения и колебания (адиабатическое приближение). Другими словами, при $\mu=0$ формула (12.25) должна переходить с точностью до энергии поверхностных β -колебаний и постоянного множителя, характеризующего единицы измерения энергии, в формулы адиабатической теории § 9. В связи с этим можно назвать параметр μ параметром неадиабатичности. Чем больше μ , тем больше поправки к адиабатическому приближению.

При $\mu < 1/3$ из уравнения (12.13) следует

$$p_{I\tau} = 1 + \frac{1}{2} \mu^4 \varepsilon_{I\tau} + \dots$$

Подставляя это значение в выражение (12.25) и разлагая полученное выражение по степеням малого параметра μ , находим (учитывая, что при малых μ корни $\nu=n$) приближенное выражение для энергии коллективных возбуждений четно-четного ядра

$$E_{I\tau n} = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 \varepsilon_{I\tau}}{4B\beta_0^2} \left[1 + 3\mu^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] - b \frac{\hbar^2 \varepsilon_{I\tau}^2}{4B\beta_0^2}, \quad (12.28)$$

где

$$b = \frac{1}{2} \mu^4 \left[1 + \frac{57}{4} \left(n + \frac{1}{2} \right) \mu^2 \right]$$

малая величина, учитывающая связь между вращением и продольными колебаниями поверхности несферического ядра. Первое слагаемое в формуле (12.28) определяет энергию поверхностных колебаний, второе слагаемое определяет при $\mu=0$ энергию вращения в адиабатическом приближении. Формула (12.28) приближенно совпадает с выражением (10.2), введенным Маллманом и Керманом [54] для учета поправок к адиабатическому приближению. Атомные ядра с значением $\mu > 1/3$ можно назвать «мягкими» ядрами. В мягких ядрах разделение коллективных возбужденных состояний на вращательные и вибрационные является очень условным. Формулой (12.28) пользоваться нельзя, и надо проводить вычисления с помощью выражения (12.25).

Вычисление энергий, определяемых формулой (12.25), для определенных значений I и τ проводится в следующем порядке: 1) используя формулы адиабатического приближения § 9 для значений $\varepsilon_{I\tau}$, вычисляют с помощью уравнения (12.13) значения $p_{I\tau}$ как функции μ и γ (см. табл. 16—21); 2) для

тех же значений μ и γ находят с помощью выражения (12.17) значения $p_{I\tau}/\mu_{I\tau}$; 3) с помощью найденных значений $p_{I\tau}/\mu_{I\tau}$, решая уравнение (12.24), определяют его корни $v_0, v_1, v_2 \dots$ (см. табл. 16—21); 4) подставляя полученные значения $v_n, p_{I\tau}, \varepsilon_{I\tau}$ в выражение (12.25), находят энергии в единицах $\hbar\omega_0$

$$\frac{E_{I\tau v_n}}{\hbar\omega_0} = f_{I\tau v_n}(\mu, \gamma). \quad (12.29)$$

Энергия основного состояния ядра (в единицах $\hbar\omega_0$) будет определяться квантовыми числами $(I, \tau, v_n) = (0, 1, v_0)$. Следовательно, энергия возбуждения ядра равна разности

$$\Delta\varepsilon_{I\tau v_n} = f_{I\tau v_n} - f_{01v_0}. \quad (12.30)$$

Удобно рассматривать не энергии возбуждения (12.30), а их отношения к энергии возбуждения первого уровня $(2, 1, v_0)$, которая равна

$$\Delta\varepsilon_{21v_0} = f_{21v_0} - f_{01v_0}.$$

Введем обозначения

$$R_{I\tau v_n}(I) \equiv \frac{\Delta\varepsilon_{I\tau v_n}}{\Delta\varepsilon_{21v_0}}. \quad (12.31)$$

Отношения энергий возбуждения (12.31) являются функциями двух параметров μ и γ . Они вычислялись в работе Чабана и автора [37], а также Маллманом и др. [81], составивших большие таблицы. В табл. 22 приведена зависимость отношений энергий возбуждений в основной вращательной полосе к энергии возбуждения первого уровня спина 2 от μ и γ . В табл. 23 указаны соответствующие зависимости для уровней возбуждения в первой аномальной полосе. В табл. 24 указаны соответствующие отношения для первой вращательно-вибрационной полосы ($v=v_1$).

Зная экспериментальные отношения энергий трех уровней в каком-либо четно-четном ядре, например уровней 21; 22; 01 или 21; 22; 61 (или каких-либо трех других), можно вычислить отношения $R_{2v_0}(2)$, $R_{1v_1}(0)$ или $R_{2v_0}(2)$, $R_{1v_0}(6)$. Затем с помощью табл. 22—24 найти соответствующие значения μ , γ , используя которые с помощью тех же таблиц найдем отношения $R_{I\tau v_n}$ для всех остальных коллективных возбужденных состояний квадрупольного типа и, следовательно, положительной четности. Такие сопоставления теории с экспериментальными данными удобно проводить графическим методом. Для иллюстрации этого на рис. 17—19 указаны соответствующие соотношения $R_{1v_0}(4)$, $R_{1v_0}(6)$ и $R_{1v_1}(0)$ как функции $R_{2v_0}(2)$.

Отношение энергий возбуждения в основной вращательной полосе
к энергии возбуждения первого уровня спина 2 в зависимости от μ и γ

μ	γ , град	$R_{1\nu_0}$ (4)	$R_{1\nu_0}$ (6)	$R_{1\nu_0}$ (8)	$R_{1\nu_0}$ (10)	$R_{1\nu_0}$ (12)
0,00	8	3,329	6,977	11,92	18,16	25,65
0,10	8	3,327	6,968	11,90	18,09	25,51
0,15	8	3,320	6,929	11,78	17,81	24,96
0,20	8	3,299	6,823	11,47	17,12	23,68
0,25	8	3,253	6,610	10,89	15,96	21,66
0,30	8	3,180	6,295	10,12	14,51	19,32
0,35	8	3,078	5,907	9,264	13,00	17,03
0,40	8	3,962	5,513	8,448	11,65	15,06
0,50	8	2,752	4,872	7,214	9,705	12,30
0,60	8	2,597	4,449	6,444	8,536	10,69
0,70	8	2,491	4,177	5,967	7,824	9,727
0,80	8	2,417	3,994	5,651	7,359	9,100
0,90	8	2,363	3,865	4,432	7,038	8,671
1,00	8	2,323	3,770	5,272	6,805	8,360
0,00	9	3,326	6,963	11,88	18,05	25,44
0,10	9	3,324	6,953	11,85	17,99	25,30
0,15	9	3,317	6,915	11,73	17,71	24,76
0,20	9	3,296	6,808	11,42	17,02	23,48
0,25	9	3,250	6,594	10,85	15,86	21,48
0,30	9	3,176	6,279	10,08	14,42	19,16
0,35	9	3,074	5,891	9,222	12,92	16,89
0,40	9	2,958	5,497	8,410	11,58	14,94
0,50	9	2,747	4,858	7,182	9,648	12,21
0,60	9	2,593	4,436	6,418	8,488	10,61
0,70	9	2,488	4,167	5,944	7,782	9,660
0,80	9	2,414	3,984	5,630	7,322	9,041
0,90	9	2,361	3,856	5,413	7,004	8,616
1,00	9	2,321	3,762	5,254	6,773	8,309
0,00	10	3,322	6,943	11,82	17,91	25,15
0,10	10	3,320	6,933	11,79	17,84	25,02
0,15	10	3,313	6,894	11,67	17,56	24,48
0,20	10	3,292	6,787	11,36	16,88	23,22
0,25	10	3,246	6,572	10,79	15,73	21,24
0,30	10	3,172	6,257	10,02	14,30	18,95
0,35	10	3,068	5,869	9,168	12,81	16,71
0,40	10	2,952	5,476	8,361	11,48	14,78
0,50	10	2,742	4,840	7,141	9,572	12,08
0,60	10	2,588	4,421	6,383	8,425	10,51
0,70	10	2,484	4,153	5,913	7,728	9,573
0,80	10	2,410	3,972	5,603	7,272	8,962
0,90	10	2,357	3,845	5,387	6,958	8,543
1,00	10	2,317	3,751	5,230	6,731	8,240
0,00	12	3,310	6,877	11,62	17,46	24,33
0,10	12	3,308	6,868	11,59	17,40	24,20
0,15	12	3,301	6,828	11,47	17,13	23,69
0,20	12	3,279	6,721	11,16	16,46	22,47
0,25	12	3,232	6,506	10,60	15,34	20,57
0,30	12	3,157	6,191	9,850	13,95	18,37
0,35	12	3,054	5,806	9,008	12,50	16,21
0,40	12	2,937	5,416	8,217	11,21	14,35

μ	γ , град	$R_{1\nu_0}$ (4)	$R_{1\nu_0}$ (6)	$R_{1\nu_0}$ (8)	$R_{1\nu_0}$ (10)	$R_{1\nu_0}$ (12)
0,50	12	2,728	4,788	7,024	9,359	11,75
0,60	12	2,575	4,376	6,284	8,248	10,24
0,70	12	2,472	4,113	5,826	7,573	9,334
0,80	12	2,400	3,936	5,524	7,132	8,747
0,90	12	2,348	3,811	5,314	6,828	8,343
1,00	12	2,309	3,720	5,161	6,608	8,052
0,00	15	3,272	6,687	11,09	16,42	22,64
0,10	15	3,271	6,678	11,07	16,36	22,52
0,15	15	3,263	6,639	10,95	16,11	22,05
0,20	15	3,241	6,533	10,66	15,49	20,95
0,25	15	3,191	6,322	10,13	14,45	19,20
0,30	15	3,118	6,014	9,413	13,15	17,18
0,35	15	3,014	5,640	8,615	11,81	15,19
0,40	15	2,898	5,263	7,867	10,61	13,48
0,50	15	2,692	4,658	6,741	8,887	11,08
0,60	15	2,543	4,264	6,045	7,851	9,688
0,70	15	2,443	4,013	5,615	7,226	8,850
0,80	15	2,373	3,844	5,331	6,817	8,308
0,90	15	2,323	3,726	5,134	6,535	7,936
1,00	15	2,285	3,639	4,990	6,331	7,667
0,00	20	3,117	6,069	9,786	14,29	19,61
0,10	20	3,115	6,060	9,764	14,24	19,51
0,15	20	3,108	6,025	9,668	14,03	19,12
0,20	20	3,086	5,931	9,418	13,52	18,20
0,25	20	3,041	5,743	8,962	12,64	16,74
0,30	20	2,968	5,470	8,348	11,55	15,03
0,35	20	2,869	5,138	7,665	10,41	13,34
0,40	20	2,760	4,807	7,025	9,394	11,89
0,50	20	2,568	4,277	6,062	7,924	9,856
0,60	20	2,432	3,933	5,468	7,047	8,668
0,70	20	2,342	3,716	5,102	6,514	7,957
0,80	20	2,279	3,570	4,860	6,167	7,496
0,90	20	2,234	3,467	4,692	5,928	7,180
1,00	20	2,201	3,392	4,570	5,755	6,951
0,00	25	2,836	5,342	8,552	12,47	17,10
0,10	25	2,834	5,335	8,533	12,43	17,02
0,15	25	2,827	5,305	8,453	12,25	16,69
0,20	25	2,809	5,226	8,243	11,82	15,91
0,25	25	2,768	5,068	7,859	11,08	14,67
0,30	25	2,705	4,837	7,340	10,15	13,21
0,35	25	2,619	4,559	6,764	9,184	11,77
0,40	25	2,526	4,281	6,225	8,319	10,53
0,50	25	2,363	3,837	5,413	7,072	8,797
0,60	25	2,248	3,550	4,914	6,329	7,786
0,70	25	2,172	3,369	4,606	5,878	7,180
0,80	25	2,120	3,248	4,403	5,584	6,788
0,90	25	2,083	3,163	4,263	5,382	6,519
1,00	25	2,055	3,100	4,160	5,235	6,324
0,00	30	2,666	5,000	8,000	11,66	16,00
0,10	30	2,665	4,993	7,982	11,62	15,92
0,15	30	2,659	4,966	7,908	11,46	15,62
0,20	30	2,642	4,893	7,715	11,06	14,90
0,25	30	2,606	4,750	7,362	10,38	13,75

μ	γ , град	$R_{1\nu_0}$ (4)	$R_{1\nu_0}$ (6)	$R_{1\nu_0}$ (8)	$R_{1\nu_0}$ (10)	$R_{1\nu_0}$ (12)
0,30	30	2,548	4,539	6,886	9,522	12,40
0,35	30	2,471	4,285	6,356	8,631	11,06
0,40	30	2,387	4,032	5,861	7,834	9,922
0,50	30	2,241	3,628	5,117	6,685	8,317
0,60	30	2,139	3,368	4,660	6,002	7,384
0,70	30	2,071	3,203	4,378	5,587	6,825
0,80	30	2,025	3,093	4,192	5,317	6,463
0,90	30	1,992	3,016	4,064	5,131	6,215
1,00	30	1,967	2,959	3,970	4,996	6,035

Сплошные линии на этих рисунках соединяют точки, относящиеся к одинаковым значениям параметра неадиабатичности μ , пунктирные линии относятся к значениям параметра неаксиальности γ . Каждый из этих графиков может быть использован для определения параметров μ и γ у каждого несферического четно-четного ядра, в котором известны соответствующие два отношения энергий. Точки с теми же значениями μ и γ на других графиках будут указывать теоретические значения отношений энергий других возбужденных состояний этого ядра. Конечно, лучше определить μ и γ методом наименьших квадратов с помощью нескольких графиков. На рис. 17—19 экспериментальные значения отношений энергий некоторых ядер указаны кружками, соответствующие теоретические значения отмечены крестиками. Мы видим, что на трех приведенных рисунках наблюдается сравнительно хорошее согласие теории с экспериментальными данными. Из рис. 17—19 можно заключить, что значения $\mu \geq 0,5$ имеются у ядер Fe^{56} , Ge^{72} , Pd^{108} , Ca^{114} и Hg^{198} . Эти ядра, следовательно, обладают большой деформируемостью по отношению к продольным растяжениям и сжатиям (мягкие ядра). В мягких ядрах возбужденные состояния имеют очень сложную природу, и их разделение на вращательные и вибрационные возбуждения весьма условны. Так, в ядрах с $\mu = 1$ вместо правила интервалов (см. § 8)

$$1 : \frac{10}{3} : 7 : 12 : \frac{55}{3} : 26 : 35 : \frac{136}{3} : \dots, \quad (12.32)$$

которое обычно принимается за определение вращательного спектра энергий возбуждения уровней с последовательностью спинов 2, 4, 6, 8, 10, 12 ..., должны выполняться правила интервалов

$$1 : 2,32 : 3,77 : 5,27 : 6,80 : 8,34, \text{ если } \gamma = 8^\circ;$$

$$1 : 2,05 : 3,10 : 4,16 : 5,24 : 6,32, \text{ если } \gamma = 25^\circ.$$

Зависимость отношений энергий возбуждения в первой аномальной полосе к энергии возбуждения первого уровня спина 2 от μ и γ

μ	γ , град	$R_{2\nu_0}$ (2)	$R_{1\nu_0}$ (3)	$R_{2\nu_0}$ (4)	$R_{1\nu_0}$ (5)	$R_{2\nu_0}$ (6)
0,00	8	25,16	26,16	27,50	29,16	31,18
0,10	8	25,02	26,01	27,34	28,98	30,98
0,15	8	24,50	25,44	26,71	28,28	30,18
0,20	8	23,25	24,11	25,26	26,66	28,37
0,25	8	21,29	22,03	23,01	24,21	25,66
0,30	8	19,02	19,64	20,45	21,45	22,64
0,35	8	16,78	17,29	17,97	18,79	19,78
0,40	8	14,85	15,28	15,85	16,54	17,36
0,50	8	12,14	12,47	12,89	13,42	14,04
0,60	8	10,56	10,83	11,18	11,61	12,12
0,70	8	9,610	9,847	10,15	10,53	10,98
0,80	8	8,993	9,210	9,494	9,838	10,24
0,90	8	8,570	8,773	9,039	9,361	9,742
1,00	8	8,265	8,457	8,710	9,016	9,379
0,00	9	19,78	20,78	22,12	23,78	25,82
0,10	9	19,70	20,69	22,02	23,66	25,68
0,15	9	19,36	20,32	21,60	23,18	25,12
0,20	9	18,55	19,43	20,61	22,05	23,80
0,25	9	17,20	17,97	19,00	20,24	21,76
0,30	9	15,56	16,22	17,08	18,13	19,40
0,35	9	13,88	14,43	15,16	16,03	17,09
0,40	9	12,40	12,86	13,48	14,22	15,10
0,50	9	10,27	10,63	11,10	11,66	12,33
0,60	9	9,012	9,308	9,696	10,16	10,71
0,70	9	8,246	8,507	8,849	9,260	9,749
0,80	9	7,747	7,986	8,299	8,675	9,122
0,90	9	7,403	7,627	7,921	8,273	8,692
1,00	9	7,154	7,368	7,647	7,983	8,381
0,00	10	15,93	16,93	18,28	19,93	21,99
0,10	10	15,88	16,87	18,21	19,85	21,89
0,15	10	15,66	16,63	17,92	19,51	21,48
0,20	10	15,11	16,01	17,21	18,68	20,48
0,25	10	14,16	14,96	16,02	17,30	18,88
0,30	10	12,95	13,64	14,55	15,64	16,97
0,35	10	11,67	12,25	13,02	13,94	15,06
0,40	10	10,51	11,01	11,66	12,44	13,39
0,50	10	8,823	9,206	9,710	10,30	11,03
0,60	10	7,798	8,119	8,540	9,039	9,639
0,70	10	7,172	7,457	7,830	8,271	8,800
0,80	10	6,762	7,024	7,366	7,770	8,255
0,90	10	6,479	6,725	7,046	7,426	7,881
1,00	10	6,273	6,508	6,814	7,177	7,610
0,00	12	10,93	11,93	13,29	14,93	17,06
0,10	12	10,90	11,90	13,25	14,88	17,00
0,15	12	10,80	11,77	13,10	14,68	16,74
0,20	12	10,53	11,45	12,70	14,19	16,10
0,25	12	10,02	10,86	11,99	13,32	15,02
0,30	12	9,339	10,07	11,06	12,21	13,67
0,35	12	8,566	9,204	10,05	11,03	12,27

μ	γ , град	$R_{2\nu_0}$ (2)	$R_{1\nu_0}$ (3)	$R_{2\nu_0}$ (4)	$R_{1\nu_0}$ (5)	$R_{2\nu_0}$ (6)
0,40	12	7,834	8,386	9,117	9,963	11,02
0,50	12	6,722	7,157	7,729	8,389	9,209
0,60	12	6,028	6,397	6,880	7,435	8,122
0,70	12	5,598	5,927	6,358	6,851	7,461
0,80	12	5,313	5,617	6,014	6,469	7,030
0,90	12	5,115	5,402	5,776	6,204	6,732
1,00	12	4,970	5,245	5,603	6,012	6,516
0,00	15	6,854	7,854	9,268	10,85	13,19
0,10	15	6,844	7,841	9,250	10,82	13,15
0,15	15	6,803	7,786	9,172	10,72	12,99
0,20	15	6,691	7,638	8,966	10,44	12,58
0,25	15	6,471	7,352	8,578	9,925	11,85
0,30	15	6,149	6,945	8,041	9,232	10,92
0,35	15	5,759	6,464	7,424	8,459	9,914
0,40	15	5,369	5,990	6,832	7,732	8,988
0,50	15	4,744	5,247	5,920	6,634	7,621
0,60	15	4,338	4,770	5,347	5,954	6,789
0,70	15	4,080	4,470	4,989	5,534	6,279
0,80	15	3,907	4,270	4,751	5,256	5,945
0,90	15	3,785	4,130	4,586	5,063	5,713
1,00	15	3,696	4,027	4,465	4,922	5,545
0,00	20	3,732	4,732	6,361	7,732	10,75
0,10	20	3,729	4,727	6,352	7,718	10,72
0,15	20	3,717	4,707	6,313	7,659	10,60
0,20	20	3,684	4,651	6,209	7,503	10,30
0,25	20	3,616	4,537	6,003	7,206	9,768
0,30	20	3,508	4,365	5,706	6,789	9,056
0,35	20	3,367	4,147	5,348	6,305	8,277
0,40	20	3,216	3,921	4,993	5,837	7,556
0,50	20	2,956	4,547	4,429	5,112	6,483
0,60	20	2,777	3,297	4,065	4,655	5,827
0,70	20	2,659	3,136	3,835	4,369	5,423
0,80	20	2,579	3,027	3,681	4,179	5,158
0,90	20	2,521	2,950	3,574	4,047	4,975
1,00	20	2,479	2,893	3,495	3,950	4,841
0,00	25	2,407	3,407	5,512	6,407	10,25
0,10	25	2,406	3,405	5,505	6,397	10,22
0,15	25	2,402	3,394	5,473	6,353	10,11
0,20	25	2,390	3,365	5,388	6,237	9,812
0,25	25	2,363	3,304	5,220	6,012	9,281
0,30	25	2,320	3,209	4,976	5,693	8,590
0,35	25	2,260	3,084	4,683	5,320	7,846
0,40	25	2,194	2,952	4,391	4,956	7,165
0,50	25	2,075	2,727	3,928	4,390	6,162
0,60	25	1,989	2,573	3,630	4,031	5,555
0,70	25	1,932	2,473	3,441	3,807	5,184
0,80	25	1,892	2,405	3,316	3,658	4,940
0,90	25	1,863	2,356	3,227	3,553	4,772
1,00	25	1,841	2,320	3,163	3,477	4,650
0,00	30	2,000	3,000	5,666	6,000	10,00
0,10	30	1,999	2,998	5,658	5,990	9,971
0,15	30	1,996	2,989	5,623	5,950	9,854

μ	γ , град	$R_{2\nu_0}$ (2)	$R_{1\nu_0}$ (3)	$R_{2\nu_0}$ (4)	$R_{1\nu_0}$ (5)	$R_{2\nu_0}$ (6)
0,20	30	1,988	2,967	5,527	5,843	9,555
0,25	30	1,971	2,919	5,343	5,637	9,030
0,30	30	1,944	2,844	5,078	5,344	8,350
0,35	30	1,905	2,745	4,766	5,002	7,625
0,40	30	1,861	2,629	4,460	4,669	6,965
0,50	30	1,782	2,458	3,981	4,152	5,999
0,60	30	1,723	2,333	3,676	3,825	5,416
0,70	30	1,683	2,252	3,484	3,620	5,061
0,80	30	1,656	2,196	3,357	3,484	4,828
0,90	30	1,636	2,156	3,268	3,390	4,667
1,00	30	1,620	2,126	3,203	3,320	4,551

Таблица 24

Зависимость отношений энергий возбуждения в первой вращательно-вибрационной полосе к энергии возбуждения первого уровня спина 2 от μ и γ

μ	γ , град	$R_{1\nu_1}$ (0)	$R_{1\nu_1}$ (2)	$R_{1\nu_1}$ (4)	$R_{1\nu_1}$ (6)
0,10	8	94,77	95,80	98,20	101,9
0,15	8	41,39	42,46	44,93	48,76
0,20	8	22,77	23,88	26,43	30,31
0,25	8	14,20	15,37	17,97	21,78
0,30	8	9,640	10,86	13,46	17,06
0,35	8	6,982	8,250	10,77	14,06
0,40	8	5,394	6,676	9,069	12,02
0,50	8	3,828	5,094	7,167	9,568
0,60	8	3,160	4,407	6,216	8,261
0,70	8	2,820	4,063	5,683	7,505
0,80	8	2,620	3,866	5,350	7,025
0,90	8	2,490	3,743	5,126	6,699
1,00	8	2,401	3,659	4,966	6,465
0,10	9	93,79	94,82	97,22	100,9
0,15	9	40,97	42,03	44,50	48,32
0,20	9	22,54	23,65	26,19	30,06
0,25	9	14,06	15,22	17,82	21,61
0,30	9	9,543	10,76	13,36	16,94
0,35	9	6,913	8,181	10,70	13,97
0,40	9	5,342	6,624	9,013	11,94
0,50	9	3,793	5,059	7,126	9,515
0,60	9	3,132	4,379	6,183	8,218
0,70	9	2,797	4,038	5,655	7,469
0,80	9	2,599	3,844	5,324	6,993
0,90	9	2,471	3,722	5,103	6,669
1,00	9	2,383	3,639	4,945	6,438
0,10	10	92,72	93,75	96,14	99,86
0,15	10	40,50	41,56	44,03	47,83
0,20	10	22,28	23,39	25,93	29,78

μ	γ , град	$R_{1\nu_1} (0)$	$R_{1\nu_1} (2)$	$R_{1\nu_1} (4)$	$R_{1\nu_1} (6)$
0,25	10	13,90	15,07	17,66	21,43
0,30	10	9,436	10,65	13,24	16,81
0,35	10	6,837	8,104	10,61	13,87
0,40	10	5,284	6,566	8,945	11,86
0,50	10	3,755	5,020	7,080	9,453
0,60	10	3,102	4,348	6,146	8,169
0,70	10	2,771	4,011	5,623	7,427
0,80	10	2,576	3,819	5,256	6,955
0,90	10	2,450	3,698	5,076	6,635
1,00	10	2,363	3,617	4,920	6,406
0,10	12	90,28	91,31	93,69	97,35
0,15	12	39,43	40,50	42,95	46,70
0,20	12	21,69	22,81	25,33	29,12
0,25	12	13,54	14,70	17,28	20,99
0,30	12	9,193	10,41	12,98	16,48
0,35	12	6,665	7,931	10,42	13,61
0,40	12	5,154	6,436	8,793	11,65
0,50	12	3,667	4,931	6,972	9,301
0,60	12	3,034	4,278	6,060	8,047
0,70	12	2,713	3,950	5,549	7,322
0,80	12	2,524	3,763	5,229	6,862
0,90	12	2,402	3,645	5,015	6,549
1,00	12	2,318	3,566	4,862	6,325
0,10	15	85,99	87,02	89,36	92,87
0,15	15	37,56	38,63	41,04	44,62
0,20	15	20,67	21,78	24,26	27,88
0,25	15	12,90	14,07	16,59	20,14
0,30	15	8,766	9,989	12,51	15,84
0,35	15	6,361	7,627	10,06	13,10
0,40	15	4,925	6,206	8,511	11,23
0,50	15	3,514	4,775	6,770	8,989
0,60	15	2,914	4,154	5,898	7,794
0,70	15	2,610	3,842	5,409	7,104
0,80	15	2,432	3,664	4,103	6,666
0,90	15	2,317	3,552	4,898	6,369

μ	γ , град	$R_{1\nu_1} (0)$	$R_{1\nu_1} (2)$	$R_{1\nu_1} (4)$	$R_{1\nu_1} (6)$
1,00	15	2,238	3,476	4,752	6,156
0,10	20	77,72	78,75	80,93	83,96
0,15	20	33,95	35,02	37,26	40,36
0,20	20	18,69	19,80	22,11	25,24
0,25	20	11,67	12,84	15,19	18,25
0,30	20	7,942	9,164	11,50	14,38
0,35	20	5,775	7,038	9,297	11,92
0,40	20	4,483	5,761	7,890	10,24
0,50	20	3,216	4,473	6,317	8,242
0,60	20	2,680	3,913	5,529	7,182
0,70	20	2,410	3,631	5,088	6,571
0,80	20	2,252	3,469	4,812	6,183
0,90	20	2,151	3,368	4,628	5,921
1,00	20	2,081	3,299	4,496	5,733
0,10	25	69,63	70,66	72,55	75,12
0,15	25	30,42	31,49	33,43	36,06
0,20	25	16,75	17,86	19,86	22,52
0,25	25	10,47	11,64	13,67	16,28
0,30	25	7,137	8,357	10,38	12,83
0,35	25	5,202	6,462	8,416	10,65
0,40	25	4,050	5,324	7,167	9,187
0,50	25	2,923	4,176	5,775	7,436
0,60	25	2,449	3,675	5,081	6,515
0,70	25	2,211	3,422	4,694	5,986
0,80	25	2,073	3,276	4,453	5,651
0,90	25	1,984	3,184	4,292	5,425
1,00	25	1,923	3,122	4,177	5,263
0,10	30	65,70	66,73	68,44	70,84
0,15	30	28,71	29,77	31,54	33,99
0,20	30	15,81	16,92	18,74	21,22
0,25	30	9,894	11,05	12,90	15,33
0,30	30	6,745	7,965	9,801	12,09
0,35	30	4,923	6,182	7,956	10,05
0,40	30	3,839	5,112	6,786	8,679
0,50	30	2,781	4,031	5,486	7,049
0,60	30	2,336	3,558	4,841	6,194
0,70	30	2,114	3,319	4,481	5,703
0,80	30	1,985	3,181	4,258	5,393
0,90	30	1,902	3,093	4,109	5,184
1,00	30	1,845	3,034	4,003	5,033

Таким образом, при $\mu=1$ и $\gamma=25^\circ$ энергетический спектр возбужденных состояний основной вращательной полосы становится почти эквидистантным. Обычно эквидистантный спектр возбужденных состояний ранее рассматривали как прямое указание на сферическую симметрию ядра, поскольку сферически симметричные ядра характеризуются эквидистантным спектром

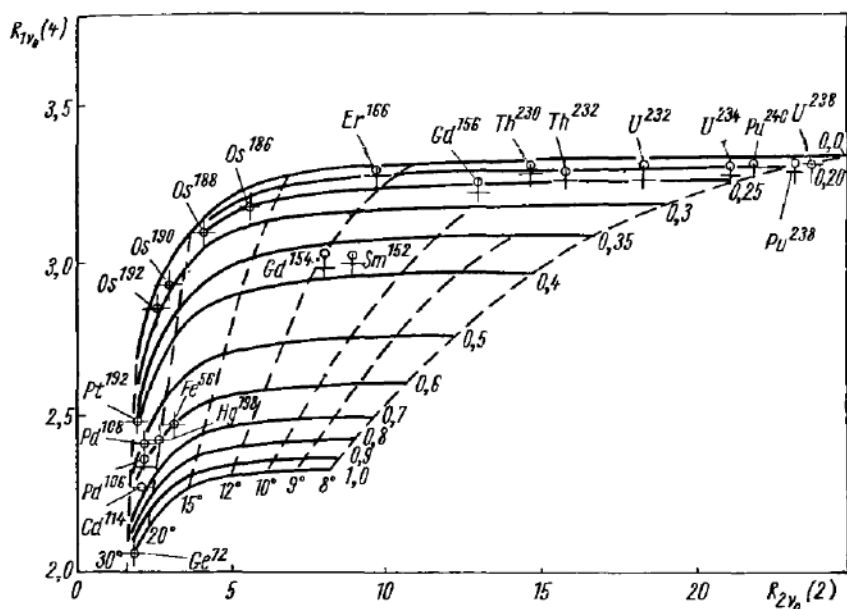


Рис. 17. Зависимость отношений $R_{1v_0}(4)$ и $R_{2v_0}(2)$ от значений параметров μ (сплошные кривые) и γ (пунктирные кривые). Экспериментальные и теоретические отношения отмечены соответственно кружками и крестиками.

коллективных возбужденных состояний (см. § 2). Теперь мы видим, что это заключение может быть ошибочным. Мягкие несферические ядра также могут иметь спектр коллективных возбуждений, близкий к эквидистантному.

Сравнительно жесткими ядрами, с значениями $\mu < 0.30$, являются ядра $Gd^{156}, Er^{166}, Os^{186}, Os^{188}, Os^{190}, Os^{192}, Th^{230}, Th^{232}, U^{232}, U^{234}, U^{238}, Pu^{238}, Pu^{240}$ и пр. Вращательные состояния в таких ядрах сравнительно хорошо выделены, хотя и для них наблюдаются значительные отклонения от правила интервалов (12.32), особенно для ядер с $\gamma > 20^\circ$ и $\mu > 0.2$.

Убедительное доказательство большой деформируемости даже таких ядер, которые при малых возбуждениях имеют хорошо выраженный вращательный спектр, было получено в работах Стивенса, Ларка и Даймонда [82, 83], выполненных в 1964 г. в Калифорнийском университете. В результате ядер-

бых реакций, вызываемых тяжелыми ионами B^{11} , N^{14} и F^{19} , было получено 9 ядер: Yb^{164} , Yb^{166} , Hf^{166} , Hf^{168} , Hf^{170} , Hf^{172} , W^{172} , W^{174} , W^{176} — в возбужденных состояниях с большими спинами. Исследуя электроны конверсии и γ -кванты, испускаемые этими ядрами при каскадных переходах в основное состояние, удалось

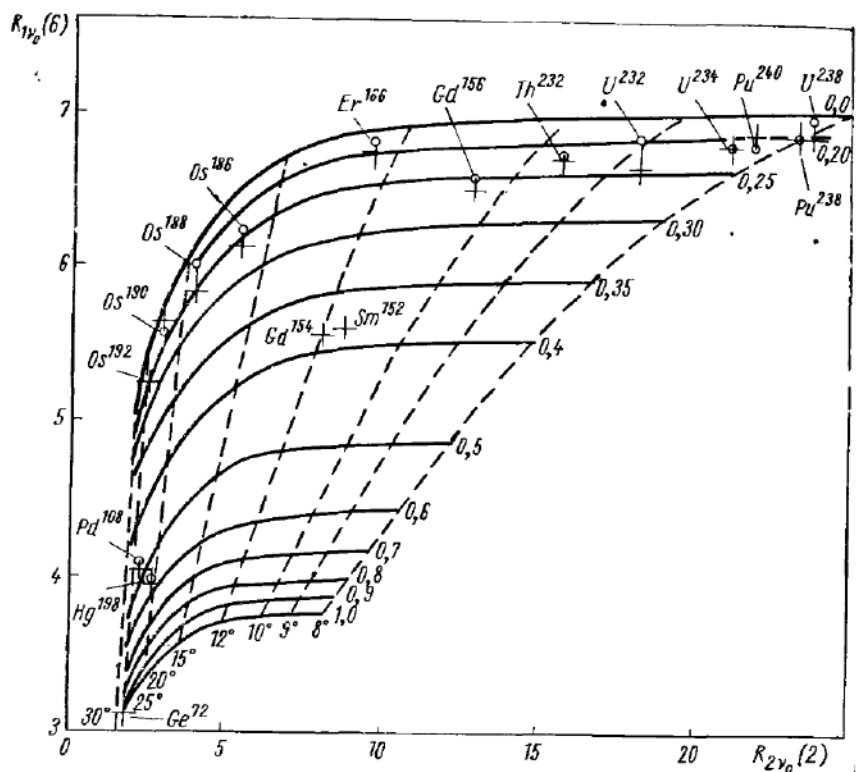


Рис. 18. Зависимость отношений $R_{1v_0}(6)$ и $R_{2v_0}(2)$ от значений параметров μ и γ .

измерить с большой точностью (до 0,3%) значения энергий возбужденных состояний, относящихся к основной вращательной полосе. В табл. 25 указаны экспериментальные значения энергий возбужденных состояний положительной четности и результаты сравнения, проведенного Стивенсом и др. [83], с теоретическими расчетами Чабана и автора [37]. В теории использовалось два феноменологических параметра $\hbar\omega_0$ и μ для каждого ядра. Параметр μ характеризует деформируемость ядра. Значение $\hbar\omega_0$ определяет шкалу энергий. Значение параметра неаксальности γ принималось равным нулю, так как, согласно табл. 22, изменение γ в пределах 0—15° мало сказывается на величине энергии возбуждения в основной вращательной полосе.

В последнем столбце табл. 25 указан в процентах корень из среднего квадрата отклонения теоретического значения от экспериментального значения энергии. Для пяти ядер эта величина имеет значение, меньшее 0,3%, и только у одного из девяти ядер (Hf^{166}) отклонение 1,45%.

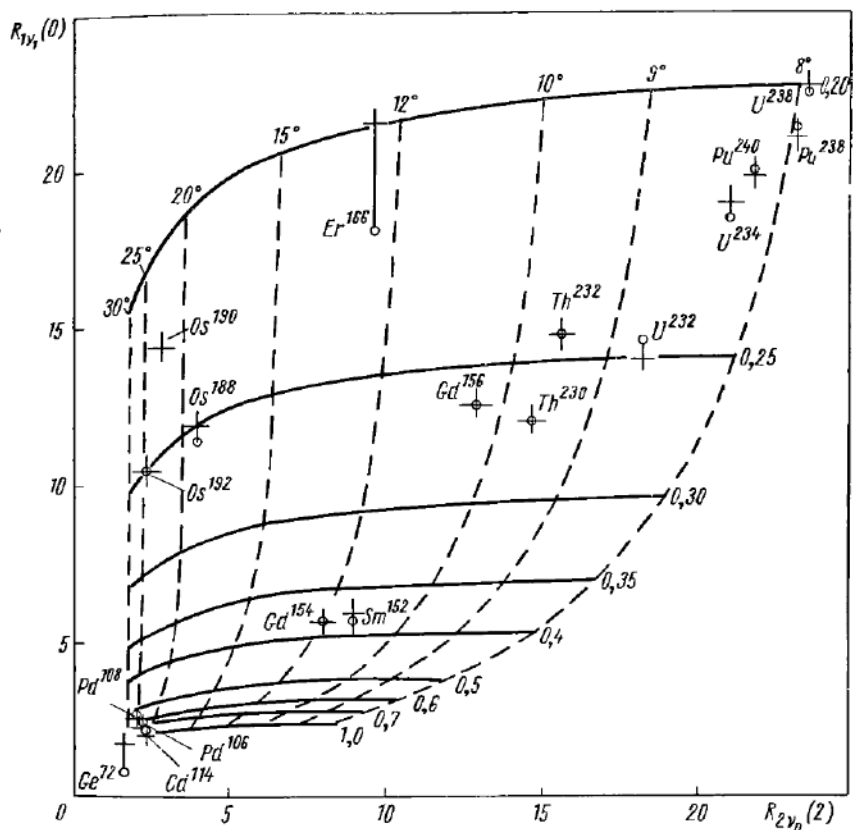


Рис. 19. Зависимость отношений $R_{1\gamma_1}(0)$ и $R_{2\gamma_0}(2)$ от значений параметров μ и γ .

На рис. 20 представлено проведенное Стивенсом и др. [82] сравнение наблюдаемых отношений вращательных энергий четно-четных ядер с теорией Давыдова—Чабана [37]. Пунктирные линии соответствуют вычисленным отношениям энергий состояний спина I в основной вращательной полосе к первому возбужденному состоянию для значений параметра неадиабатичности в интервале 0—0,40. Сплошные линии соединяют измеренные отношения энергий для каждого ядра. Эти отношения зависят только от одного параметра теории. Рис. 20

Сравнение экспериментальных значений энергии вращательных состояний четно-четных ядер с теорией Давыдова—Чабана по данным Стивенса и др. [83]

Ядро	2	4	6	8	10	12	14	16	$\sqrt{\Delta^2\%}$
W^{176} а б	108,7 108,7	348,5 349,1	699,4 698,8	1140 1137	1648 1646	2206 2213	— —	— —	0,20
W^{174} а б	111,9 111,8	355,0 355,8	704,2 705,3	1137 1137	1635 1633	2186 2181			0,16
W^{172} а б	122,9 122,6	376,9 378,7	727,2 729,3	1147 1147	1516 1617	2129 2126	2677 2668		0,27
Hf^{172} а б	94,5 94,4	307,9 307,5	627,0 625,5	1036 1033	1519 1517	2063 2065	2651 2669		0,31
Hf^{170} а б	100,0 100,0	320,6 320,5	641,1 639,8	1041 1038	1503 1500	2013 2012	2564 2568	3147 3160	0,22
Hf^{168} а б	123,9 121,7	385,0 384,9	756,1 758,6	1212 1216	1734 1740	2304 2315			0,79
Hf^{166} а б	158,7 153,7	470,7 471,3	897,6 902,2	1407 1413	1971 1983	2565 2600			1,45
Yb^{166} а б	101,8 101,9	329,7 330,2	667,1 667,7	1097 1097	1604 1601	2172 2169			0,12
Yb^{164} а б	122,5 121,2	384,0 384,7	758,0 760,3	1219 1222	1748 1752				0,52

Примечание. В первой строчке таблицы числа 2, 4, 6 . . . указывают спины возбужденных состояний. В строчках, отмеченных буквой а, указаны экспериментальные значения энергий (в кэв); в строчках, отмеченных буквой б, — теоретические значения.

позволяет определить средние значения μ для каждого из исследованных ядер. Мы видим, что из исследованных ядер наиболее жестким является ядро Hf^{172} ($\mu=0,255$), а наиболее мягким — ядро Hf^{166} ($\mu=0,39$). Значения параметра для остальных семи ядер: Yb^{166} , W^{176} , Hf^{170} , W^{174} , Yb^{164} , Hf^{168} , W^{172} — равны соответственно: 0,265; 0,285; 0,290; 0,305; 0,32; 0,33; 0,355. Наилучшее согласие однопараметрической теории с экспериментом наблюдается в случае ядер Hf^{172} , Yb^{166} , W^{174} , W^{172} , для которых экспериментальные отношения лежат на кривых, близких к вертикальным линиям, т. е. для них значение μ сохраняется приблизительно постоянным.

В § 8 (см. табл. 3) уже отмечалось, что при учете влияния деформации ядра на вращательные спектры методом теории возмущений наблюдается резкое расхождение теории с экспе-

риментом. В случае наиболее мягкого, из указанных в табл. 3, ядра Hf^{166} ($\mu=0,39$) ряд теории возмущений быстро расходится и приводит даже к отрицательным значениям вращательной энергии в состоянии со спином $I=12$. Для ядра W^{172} ($\mu=0,355$) аналогичное явление наблюдается в состоянии с $I=14$. Даже у сравнительно жесткого ядра Hf^{170} ($\mu=0,255$) теоретическое значение отношений энергии, полученное методом теории возмущений, в состоянии с $I=16$ почти в три раза меньше экспериментального отношения. В то же время учет влияния деформации ядра на энергетические уровни основной вращательной полосы методом, развитым в работе автора и Чабана [37], приводит, как показывает табл. 25, к хорошему согласию с экспериментом. Весьма существенно, что в обеих теориях отношения энергий выражаются только через один параметр. В теории Чабана и автора [37] таким параметром является параметр неадиабатичности μ , в теории возмущений — параметр ξ [см. формулу (8.34)].

Наглядной демонстрацией непригодности теории возмущений для описания вращательных состояний ядра может служить рис. 21, взятый нами из работы Стивенса и др. [82]. На рис. 21 изображена зависимость «последовательных вращательных констант» A_I от значений спинов возбужденных состояний. Последовательные вращательные константы состояний спина I определяются формулой

$$A_I = \frac{E(I) - E(I-2)}{4I-2}, \quad (12.33)$$

где $E(I)$ — экспериментальное значение энергии возбуждения состояния со спином I . На рис. 21 точками изображены экспе-

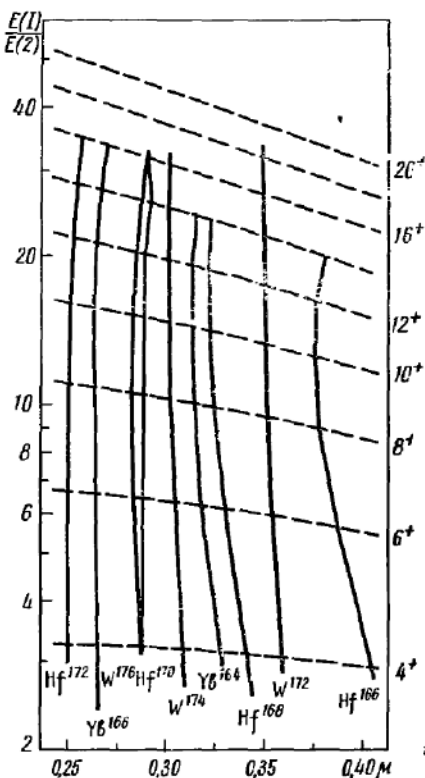


Рис. 20. Сравнение [83] наблюдаемых отношений вращательной энергии четно-четных ядер с вычислениями [37].

риментальные значения отношений $\frac{A_{I+2}}{A_I}$ для разных спинов I .

Сплошная кривая соответствует теоретическим отношениям, полученным с помощью формулы (12.33) для энергий, определенных по теории Давыдова — Чабана [37], при значении $\gamma=0$.

Пунктирные кривые 1 и 2 соответствуют отношениям (12.33), в которых энергии вычислялись соответственно по формулам теории возмущений

$$E(I) = AI(I+1) + BI^2(I+1)^2, \quad (12.34)$$

$$E(I) = AI(I+1) + BI^2(I+1)^2 + CI^3(I+1)^3. \quad (12.35)$$

В этих формулах параметры A , B и C определялись из экспериментальных значений энергий уровней 2^+ , 4^+ для случая (12.34) [при этом $B/A = -2,7 \cdot 10^{-3}$] и 2^+ , 4^+ и 6^+ для случая (12.35) [при этом $B/A = -3,1 \cdot 10^{-3}$, $C/A = 1,8 \cdot 10^{-5}$]. Как видно из рис. 21, даже в случае (12.35) при введении лишнего параметра, по сравнению с теорией [37], согласие результатов теории возмущений с экспериментом не улучшается, что свидетельствует о расхождении ряда теории возмущений.

Неадиабатическая теория вращательно - вибрационных

Рис. 21. Зависимость отношений последовательных вращательных констант $\frac{A_{I+2}}{A_I}$ от спина I . Кружки

указывают экспериментальные отношения [82]. Сплошная кривая соединяет теоретические точки, полученные на основе теории Давыдова — Чабана при $\gamma=0$ и $\mu=0,29$. Пунктирные кривые 1 и 2 рассчитаны по теории возмущений.

возбуждений в атомных четно-четных ядрах содержит дополнительный феноменологический параметр μ по сравнению с теорией жесткого ротатора. Этот параметр учитывает свойства деформируемости формы ядра по отношению к продольным колебаниям. Введение параметра μ позволяет не только объяснить отклонения от правил интервалов в расположении вращательных уровней, но и дает объяснение ряду возбужденных состояний положительной четности, относящихся к вибрационному и вращательно-вибрационному типу. К этим возбуждениям относятся состояния, соответствующие корням $\chi_1, \chi_2 \dots$ уравнения (12.24). В частности, к ним относятся уровни первой вращательно-вибрационной полосы, энергии которых как функции

параметров μ и γ указаны в табл. 24. Начинается эта полоса с уровня ($I=0$), который можно назвать однофононным возбуждением продольных колебаний поверхности несферического ядра. Энергия возбуждения этого состояния, в единицах энергии первого возбужденного уровня, однозначно определяется параметрами μ и γ , которые могут быть найдены из исследования положений других уровней. В табл. 26 сравниваются предсказываемые теорией отношения энергий $R_{1\gamma_1}(0)$ с экспериментальными отношениями. Согласие теории с экспериментом как для мягких (Co^{114}), так и для жестких (U^{238}) атомных ядер является весьма удовлетворительным. Оно показывает, что коллективные возбуждения положительной четности и малой энергии образуют в четно-четных атомных ядрах единую систему уровней.

Таблица 26

Сравнение теоретических и экспериментальных отношений $R_{1\gamma_1}(0)$

Ядро	μ	γ	$R_{1\gamma_1}(0)$	
			Теория	Эксперимент
Pu^{240}	0,22	8,0	19,3	20,01
Pu^{238}	0,21	7,8	21,1	21,38
U^{238}	0,20	8,0	22,8	22,2
U^{234}	0,23	8,2	19,0	18,66
U^{232}	0,25	8,8	14,1	14,6
Th^{232}	0,24	8,9	14,7	14,7
Th^{230}	0,27	9,6	12,0	11,9
Os^{188}	0,25	19,0	11,6	11,4
Er^{166}	0,20	12,7	21,5	18,12
Gd^{166}	0,27	10,5	13,8	12,4
Gd^{154}	0,37	12,0	5,2	5,53
Sm^{152}	0,37	11,5	6,1	5,62
Cd^{114}	0,70	22,5	2,1	2,03

В адиабатической теории, рассмотренной в § 9, энергии возбужденных состояний удовлетворяли некоторым правилам сумм (9.14), (9.23), (9.25). Согласно формуле (9.23), при $\mu=0$ должно выполняться равенство

$$R_{1\gamma_0}(3) - R_{2\gamma_0}(2) = 1. \quad (12.36)$$

При $\mu \neq 0$ это равенство, как и другие правила сумм § 9, уже не выполняется. В качестве иллюстрации нарушения правила сумм (12.36) в табл. 27 приведены значения разности $R_{1\gamma_0}(3) - R_{2\gamma_0}(2)$ в зависимости от параметра неадиабатичности μ для значений γ , равных 8; 15 и 25°. Из табл. 27 мы видим, что особенно велики нарушения правила сумм (12.36) в ядрах, близких

к аксиально симметричным. Это связано с тем, что в этих ядрах энергетические уровни $\varepsilon_{2,2}$ и $\varepsilon_{3,1}$ лежат сравнительно высоко.

Таблица 27

Нарушение правила сумм $R_{1\nu_0(3)} - R_{2\nu_0(2)}$ в деформируемых ядрах

μ	$R_{1\nu_0(3)} - R_{2\nu_0(2)}$			μ	$R_{1\nu_0(3)} - R_{2\nu_0(2)}$		
	$\gamma=8^\circ$	$\gamma=15^\circ$	$\gamma=25^\circ$		$\gamma=8^\circ$	$\gamma=15^\circ$	$\gamma=25^\circ$
0,1	1,00	1,00	1,00	0,5	0,33	0,50	0,55
0,2	0,86	0,95	0,97	0,7	0,24	0,39	0,54
0,3	0,62	0,80	0,89	1,0	0,19	0,33	0,48

Итак, в приближении, рассмотренном в этом параграфе, отношения энергий возбужденных состояний несферических четно-четных ядер к энергии первого возбужденного уровня выражаются только через два параметра μ и γ . На рис. 22 и 23

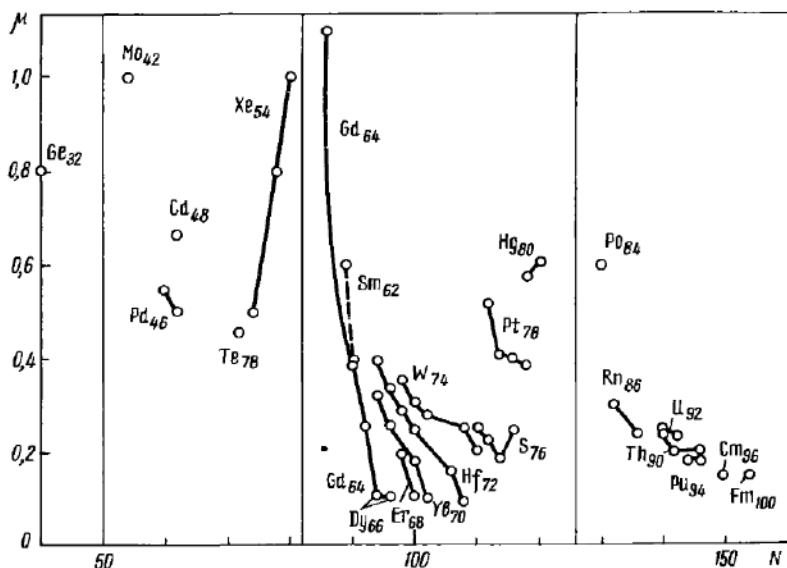


Рис. 22. Зависимость параметра неадиабатичности μ для четно-четных атомных ядер от числа нейтронов в ядре.

указаны полученные на основании сравнения теории с экспериментом значения обоих параметров для некоторых четно-четных ядер. По горизонтальной оси отложено число нейтронов в ядре. Индекс, стоящий у химического символа элемента, указывает число протонов.

Из рис. 22 следует, что наиболее жесткими по отношению к продольным колебаниям (малые μ) ядрами являются ядра с числами нейтронов и протонов, далекими от магических. По мере приближения чисел нейтронов и протонов к магическим числам деформируемость ядра по отношению к продольным

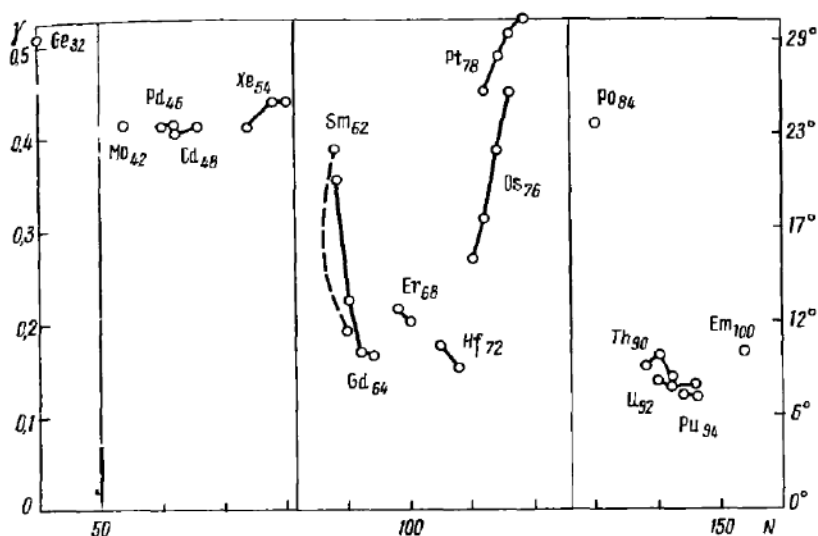


Рис. 23. Зависимость параметра асимметрии γ для четно-четных ядер от числа нейтронов в ядре. Левая шкала — значение γ в радианах; правая шкала — значение γ в градусах.

колебаниям значительно повышается*. Особенно ярко эта зависимость проявляется на примере изотопов Xe, Sm, Gd. В тяжелых ядрах с числом нейтронов, превышающим 82, такая же зависимость наблюдается по отношению к параметру γ . Для ядер же с числом нейтронов, удовлетворяющим неравенству $50 < N < 82$, значение γ близко к 0,4. В связи с этим в этой области ядер не наблюдаются ярко выраженные вращательные состояния. Возбуждения ядер, имеющих значения μ и γ , меньшие 0,2, характеризуются хорошо развитыми вращательными полосами. Именно эти ядра обычно относят к несферическим ядрам.

§ 13. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КВАДРУПОЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДРАХ

В § 10 были исследованы приведенные вероятности $E2$ -переходов между вращательными состояниями на основе адиабатического приближения, т. е. при предположении, что внутренние

* То же самое наблюдается и с атомами: наибольшей поляризуемостью обладают атомы щелочных металлов.

состояния ядра, в частности его форма, не изменяются при переходе во вращательные состояния. Как показано в неадиабатической теории (§ 12), такое упрощение является весьма грубым. Для некоторых ядер оно совсем непригодно, для других же оно выполняется очень приближенно. Под действием центробежных сил ядро «растягивается» при вращении. Это «растяжение» характеризуется величиной $\rho_{I\tau} = \beta_{I\tau}/\beta_0$, которая в ряде случаев в 1,5—3 раза отличается от единицы. В результате эффекта «растяжения» поверхностные колебания в возбужденных состояниях, различающихся квантовыми числами $I\tau$, происходят относительно разных равновесных значений $\beta_{I\tau}$. Эти эффекты могут существенно изменить приведенные вероятности переходов, рассчитанных в адиабатическом приближении. Ниже мы исследуем такие изменения.

Как показано в § 12, волновые функции возбужденных состояний с квантовыми числами $IM\tau\nu_n$ можно записать в виде двух функций

$$\Psi_{IM\tau\nu_n} = \Phi_{IM\tau}(\theta) \varphi_{I\tau\nu}(\beta). \quad (13.1)$$

Первая функция $\Phi_{IM\tau}$ определяет ориентацию жесткого асимметричного ротатора, рассмотренного в § 9; вторая — функция внутренней переменной β . Эта функция определяется равенством

$$\varphi_{I\tau\nu}(\beta) = \frac{N_\nu(I\tau)}{\sqrt{\beta_0}} e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} H_\nu(\zeta), \quad (13.2)$$

где переменная

$$\zeta = \zeta_{I\tau} = \frac{\beta - \rho_{I\tau}\beta_0}{\mu_{I\tau}\beta_0} \quad (13.3)$$

зависит от квантовых чисел $I\tau$ через значения $\rho_{I\tau}$, $\mu_{I\tau}$, которые вычисляются с помощью уравнений

$$(\rho_{I\tau} - 1)\rho_{I\tau}^3 = \frac{1}{2} \mu_{I\tau}^4 \epsilon_{I\tau}, \quad (13.4)$$

$$\mu_{I\tau} = \frac{\mu}{\left(4 - \frac{3}{\rho_{I\tau}}\right)^{1/2}}; \quad (13.5)$$

$\epsilon_{I\tau}$ — энергия (в единицах $\hbar^2(4B\beta_0^2)$) жесткого асимметричного волчка в состоянии $I\tau$; $H_\nu(\zeta)$ — функция Эрмита первого рода [80], которую можно представить бесконечным рядом (12.23). Она тоже может быть выражена через сумму двух вырожден-

ных гипергеометрических функций $F(\nu, a; x)$ с помощью равенства

$$H_\nu(\zeta) = 2^\nu \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \zeta^2\right) + \zeta \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} \times \right. \\ \left. \times F\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; \zeta^2\right) \right\} \quad (13.6)$$

или через функции параболического цилиндра $D_\nu(\zeta)$ [84, 85]

$$H_\nu(\zeta) \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^2\right) = 2^{\frac{\nu}{2}} D_\nu(\sqrt{2}\zeta). \quad (13.6a)$$

Множители нормировки $N_\nu(I\tau)$ функций (13.2) определяются условием

$$\int_0^\infty \varphi_{I\tau\nu}^2 d\beta = 1. \quad (13.7)$$

Поскольку переменная ζ функций (13.2) зависит от квантовых чисел I, τ , то эти функции, относящиеся к состояниям, которые различаются квантовыми числами ν , ортогональны между собой только в том случае, если они относятся к одинаковым значениям $I\tau$.

Приведенные вероятности $E2$ -переходов между состояниями $I'\tau'\nu'$ и $I\tau\nu$ определяются выражением

$$B(E2; I\tau\nu \rightarrow I'\tau'\nu') = \frac{5}{16\pi(2I+1)} \sum_{MM'\mu} |\langle I'\tau' M' \nu' | Q_{2\mu} | I\tau M \nu \rangle|^2, \quad (13.8)$$

где

$$Q_{2\mu} = Q_0 \frac{\beta}{\beta_0} \left\{ D_{\mu 0}^2 \cos \gamma + (D_{\mu 2}^2 + D_{\mu, -2}^2) \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}} \right\}, \quad (13.9)$$

$$Q_0 = \frac{3ZeR_0^2 \beta_0}{\sqrt{5}\pi}.$$

Подставляя функцию (13.1) в выражение (13.8), можно написать

$$B(E2; I\tau\nu \rightarrow I'\tau'\nu') = B_a(E2; I\tau \rightarrow I'\tau') S_{if}^2, \quad (13.10)$$

где первый множитель

$$B_a(E2; I\tau \rightarrow I'\tau') = \frac{5Q_0^2}{16\pi(2I+1)} \sum_{MM'\mu} |\langle I'\tau' M' | q_{2\mu} | I\tau M \rangle|^2$$

при

$$q_{2\mu} \equiv \left\{ D_{\mu 0}^2 \cos \gamma + (D_{\mu 2}^2 + D_{\mu -2}^2) \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}} \right\} \quad (13.11)$$

является приведенной вероятностью $E2$ -переходов, рассчитанной с помощью функций $\Phi_{IM\tau}(\theta)$ жесткого асимметричного ротатора. Приведенные вероятности для различных значений параметров μ и γ вычислялись в § 10. Второй множитель S_{if}^2 учитывает деформируемость ядра и изменение колебательного состояния при квантовом переходе $i = \{I\tau\} \rightarrow f = \{I'\tau'\}$. Этот множитель определяется квадратом матричного элемента

$$S_{if} \equiv \left\langle I'\tau'\nu' \left| \frac{\beta}{\beta_0} \right| I\tau\nu \right\rangle = \int_0^\infty \varphi_i(\beta) \frac{\beta}{\beta_0} \varphi_f(\beta) d\beta. \quad (13.12)$$

Диагональный матричный элемент (13.12) определяет поправку, возникающую при деформации ядра, к среднему значению электрического квадрупольного момента в состоянии $i = \{I, \tau, \nu\}$

$$\langle Q_2 \rangle_i = \langle Q \rangle_{I\tau}^a S_{ii}, \quad (13.13)$$

где $\langle Q \rangle_{I\tau}^a$ — среднее значение квадрупольного электрического момента ядра в состоянии $I\tau$, рассчитанное в адиабатическом приближении (10.10).

Общее выражение для матричных элементов (13.12) очень громоздко. Поэтому рассмотрим вначале частные случаи. Пусть состояния i и f относятся к коллективным возбуждениям основной и первой аномальной вращательных полос. Тогда в функции (13.2) следует взять $\nu = \nu_0$. Согласно табл. 16—21, при $\mu < 0,4$ значение ν_0 можно положить равным нулю, так как при $\mu = 0,4$ в самом неблагоприятном случае $\nu_0 = 0,002$. Итак, полагая $\nu_0 = 0$ в состояниях коллективного возбуждения, относящихся к основной и первой аномальной полосам возбужденных состояний, и учитывая, $H_0(\xi) = 1$, будем описывать эти состояния приближенными волновыми функциями

$$\varphi_{I\tau_0}(\beta) = \frac{N_0(I\tau)}{\sqrt{\beta_0}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \zeta_{I\tau}^2 \right\}, \quad (13.15)$$

где величина $\zeta_{I\tau}$ определена выражением (13.3)

$$N_0(I\tau) = \left\{ \mu_{I\tau} \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 + \Phi(\zeta_{I\tau})] \right\}^{-1/2}; \quad (13.16)$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$$

— интеграл вероятности, или функция Крампа [86];

$$z_{I\kappa} = p_{I\kappa} (\mu_{I\kappa})^{-1}. \quad (13.17)$$

Подставляя функции (13.15) в интеграл (13.12), находим *

* Вычисление матричного элемента (13.18) и нормировочного множителя (13.16) сводится к вычислению интеграла

$$I_n = \int_0^\infty \beta^n \exp \left\{ -\frac{1}{2} (A\beta - B)^2 - \frac{1}{2} (C\beta - D)^2 \right\} d\beta, \quad n = 0, 1, \dots \quad (a)$$

Вводя подстановку

$$t = \beta \sqrt{\frac{1}{2} (A^2 + B^2)}$$

и краткое обозначение

$$z \equiv \frac{AB + CD}{\sqrt{2} (A^2 + C^2)},$$

преобразуем интеграл I_n к виду

$$I_n = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} (B^2 + D^2) \right\}}{\left[\frac{1}{2} (A^2 + C^2) \right]^{\frac{1}{2} (n+1)}} \int_0^\infty t^n \exp \{-t^2 + 2tz\} dt. \quad (б)$$

Полученное выражение можно записать через функции Эрмита. Действительно, используя интегральное представление [80]

$$H_{-\nu}(-z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty t^{\nu-1} \exp(-t^2 + 2tz) dt, \quad \operatorname{Re} \nu > 0$$

и сравнивая с (б), находим

$$I_n = e^{-\frac{1}{2} (B^2 + D^2)} \left(\frac{2}{A^2 + B^2} \right)^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(n+1) H_{-n-1}(-z). \quad (в)$$

Функция Эрмита, входящая в выражение (в), может быть записана в виде

$$H_{-n-1}(-z) = \frac{\sqrt{\pi}}{n! 2^{n+1}} \frac{d^n}{dz^n} \{e^{z^2} [1 + \Phi(z)]\}.$$

Нас будут интересовать значения $n=0, 1$ и 2 . При этом

$$\left. \begin{aligned} H_{-1}(-z) &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} [1 + \Phi(z)] e^{z^2}; \\ H_{-2}(-z) &= \frac{1}{2} \{1 + 2\sqrt{\pi} [1 + \Phi(z)] e^{z^2}\}; \\ H_{-3}(-z) &= \frac{1}{4} \left\{ z + \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2} + z^2 \right) [1 + \Phi(z)] e^{z^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{\sqrt{\pi} b(if)}{\sqrt{2} c(if)} \left[1 + \Phi \left(\frac{b(if)}{\sqrt{2} c(if)} \right) \right] \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{b(if)}{c(if)} \right)^2 \right] \right\}, \quad (13.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a(if) &= z_{I\tau}^2 + z_{I'\tau'}^2; \\ b(if) &= \frac{z_{I\tau}}{\mu_{I\tau}} + \frac{z_{I'\tau'}}{\mu_{I'\tau'}}; \\ c(if) &= [\mu_{I\tau}^{-2} + \mu_{I'\tau'}^{-2}]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (13.19)$$

Подставляя значения (13.19) в равенство (13.18), можно получить простое аналитическое выражение для диагонального матричного элемента (13.18)

$$S_{ii} = \left\langle I\tau_0 \left| \frac{\beta}{\beta_0} \right| I\tau_0 \right\rangle = p_{I\tau} \left\{ 1 + \frac{\exp(-z_{I\tau}^2)}{z_{I\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi}} [1 + \Phi(z_{I\tau})]} \right\}, \quad (13.20)$$

где $z_{I\tau} = p_{I\tau}/\mu_{I\tau}$.

При $\mu < 0,3$, согласно табл. 16—21, значение $z_{I\tau} > 3$, поэтому $S_{ii} \approx p_{I\tau}$. В основном состоянии ядра I , $\tau = 0$; $p_0 = 1$; $\mu_0 = \mu$; $z_0 = \mu^{-1}$, поэтому

$$S_{00} = \left\langle 0 \left| \frac{\beta}{\beta_0} \right| 0 \right\rangle = 1 + \frac{\mu \exp(-\mu^{-2})}{\sqrt{\pi} [1 + \Phi(\mu^{-1})]}.$$

В адиабатическом приближении ($\mu \rightarrow 0$) выполняются следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} p_{I\tau} &= 1; \mu_{I\tau} = \mu; z_{I\tau} = \mu^{-1}; a(if) = b(if) = \frac{2}{\mu^2}; \\ c(if) &= \frac{\sqrt{2}}{\mu}; \Phi \left(\frac{b(if)}{\sqrt{2} c(if)} \right) = 1; N_0^2(I\tau) = \frac{1}{\mu \sqrt{\pi}}. \end{aligned} \right\} \quad (13.21)$$

Поэтому из формулы (13.18) следует

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} S_{I\tau 0; I'\tau' 0} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mu}{2\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{2\sqrt{\pi}}{\mu} e^{\frac{1}{\mu^2}} \right] e^{-\frac{1}{\mu^2}} \right\} = 1. \quad (13.22)$$

Для частного случая каскадных $E2$ -переходов $I+2 \rightarrow I$ в основной вращательной полосе квадрат поправочного множителя

$S_{I+2;I}$ вычислялся на основе приближенной формулы (13.18) в работе Овчаренко и автора [87]. Расчеты проводились для случая аксиально симметричных ядер $\gamma=0$. Результаты расчетов приведены в табл. 28 для разных значений μ . Из этой таблицы видно, что эффект деформируемости ядра весьма сильно сказывается на приведенных вероятностях каскадных $E2$ -переходов в основной вращательной полосе. Например, при $\mu=0,6$ приведенная вероятность $E2$ -перехода между состояниями $I=16$ и $I=14$ почти в пять раз превышает соответствующую приведенную вероятность, рассчитанную по адиабатической теории § 9.

Таблица 28

Поправочные множители для приведенных вероятностей $E2$ -переходов, учитывающие их отличие от значений адиабатической теории

$S_{I+2;I}^2$	$\mu=0,2$	$\mu=0,4$	$\mu=0,6$	$\mu=0,8$	$\mu=1,0$
$S_{4;2}^2$	1,053	1,298	1,78	2,48	3,37
$S_{6;4}^2$	1,070	1,454	2,21	3,28	4,63
$S_{8;6}^2$	1,093	1,640	2,67	4,11	5,91
$S_{10;8}^2$	1,121	1,839	3,14	4,93	7,18
$S_{12;10}^2$	1,155	2,044	3,61	5,75	8,44
$S_{14;12}^2$	1,192	2,252	4,07	6,56	9,69
$S_{16;14}^2$	1,233	2,462	4,54	7,37	10,90

Приведенная вероятность каскадных $E2$ -переходов в аксиально симметричном ядре выражается формулой

$$B(E2; I+2 \rightarrow I) = Q_0^2 \frac{15(I+1)(I+2)}{32\pi(2I+3)(2I+5)} S_{I+2;I}^2. \quad (13.23)$$

На рис. 24 изображена зависимость отношений приведенных вероятностей от спина I возбужденного состояния и параметра неадиабатичности μ

$$\Lambda(E2; I+2 \rightarrow I) = \frac{B(E2; I+2 \rightarrow I)}{B(E2; 2 \rightarrow 0)}. \quad (13.24)$$

В жестких ядрах ($\mu \approx 0$) отношение приведенных вероятностей (13.23) никогда не превышает 2. В мягких ядрах это отношение зависит от μ и спина I и обычно больше 2.

Приближенные волновые функции внутренних состояний ядра в первой вращательно-вибрационной полосе при $\mu < 0,4$ можно записать в виде

$$\lambda(E2; I \rightarrow I-1)$$

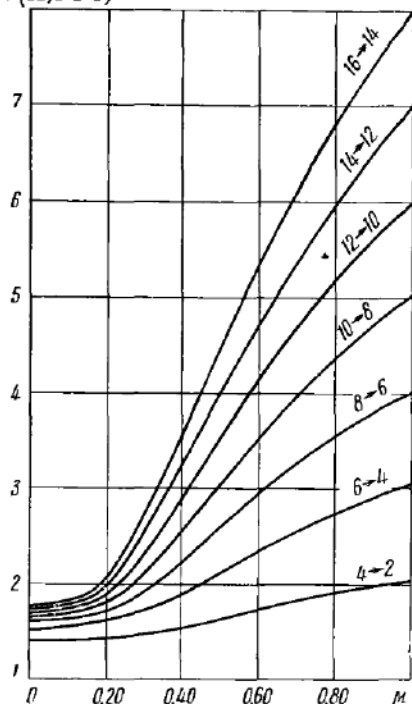


Рис. 24. Зависимость отношений приведенных вероятностей каскадных переходов $I+2 \rightarrow I$ в основной вращательной полосе четно-четных ядер от спина и параметра неадиабатичности μ .

свести вычисление матричного элемента (13.27) к вычислению интеграла I_n при $n=2$, рассмотренному в примечании на стр. 147. Таким образом, получаем

$$\varphi_{I\tau 1}(\beta) =$$

$$= \frac{2N_1(I\tau)}{\sqrt{\beta_0}} \zeta_{I\tau} \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta_{I\tau}^2\right), \quad (13.25)$$

где

$$\begin{aligned} [N_1(I\tau)]^{-2} = \\ = \sqrt{\pi} \mu_{I\tau} [1 + \Phi(x_{I\tau})] - \\ - 2p_{I\tau} \exp(-x_{I\tau}^2). \end{aligned} \quad (13.26)$$

Квадрат матричного элемента

$$S_{I\tau 1; I'\tau'0} = \left\langle I'\tau'0 \left| \frac{\beta}{\beta_0} \right| I\tau 1 \right\rangle, \quad (13.27)$$

рассчитанного на функциях (13.15) и (13.25), определяет поправочный множитель, учитывающий деформируемость ядра ($\mu < 0,4$) при квантовых $E2$ -переходах из состояний первой вращательной вибронной полосы ($I\tau 1$) в состояния основной и первой аномальной вращательных полос ($I'\tau'0$). Используя функции (13.15) и (13.25), можно

$$\begin{aligned} S_{I\tau 1; I'\tau'0} = \frac{N_0(I'\tau') N_1(I\tau)}{\mu_{I\tau} c^2(i\bar{f})} e^{-\frac{1}{2} a(i\bar{f})} \left\{ 2 \left[\frac{b(i\bar{f})}{c^2(i\bar{f})} - p_{I\tau} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2\pi}}{c(i\bar{f})} \left(\frac{b^2(i\bar{f})}{c^2(i\bar{f})} - b(i\bar{f}) p_{I\tau} + 1 \right) \left[1 + \Phi\left(\frac{b(i\bar{f})}{\sqrt{2} c(i\bar{f})} \right) \right] e^{\frac{b^2(i\bar{f})}{2c^2(i\bar{f})}} \right\}. \end{aligned} \quad (13.28)$$

Входящие в это выражение величины определены с помощью уравнений (13.4), (13.5), (13.16), (13.19) и (13.26). В адиабатическом приближении ($\mu \rightarrow 0$), согласно формуле (13.26), $N_1(I\tau) = (2\sqrt{\pi\mu})^{-1/2}$. Подставляя это значение и значения (13.21), находим

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} S_{I\tau 1; I'\tau'0} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu}{\sqrt{2}} = 0. \quad (13.29)$$

Следовательно, в жестких ядрах вероятность $E2$ -переходов $I\tau 1 \rightarrow I'\tau'0$ очень мала.

Аналитические формулы (13.18) и (13.28) для поправочных множителей, учитывающих деформируемость формы четно-четных ядер, были получены Овчаренко и автором [88]. Эти формулы позволяют с большой точностью проводить вычисления для ядер со значением $\mu < 0,4$. В случае мягких ядер, когда $\mu \geq 0,4$, квантовые числа ν_n уже не являются целыми и функции Эрмита $H_\nu(\xi)$ изображаются бесконечными рядами (12.23) или (13.6). Поэтому вычисления поправочных множителей (13.12) приходится проводить численным методом.

Подставляя функции (13.2) в интеграл (13.12), можно написать

$$S_{if} \equiv S_{I\tau\nu; I'\tau'\nu'} = A_{if} [I_{ii} I_{ff}]^{-1/2}, \quad (13.30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{if} &= \int_0^\infty \frac{\beta}{\beta_0} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \zeta_i^2 - \frac{1}{2} \zeta_f^2 \right\} H_{\nu_i}(\zeta_i) H_{\nu_f}(\zeta_f) d\beta; \\ I_{ii} &= \int_0^\infty \exp(-\zeta_i^2) H_{\nu_i}^2(\zeta_i) d\beta; \\ I_{ff} &= \int_0^\infty \exp(-\zeta_f^2) H_{\nu_f}^2(\zeta_f) d\beta; \\ \zeta_i &= \frac{\beta - p_{I\tau} \beta_0}{\nu_{I\tau} \beta_0}; \quad \zeta_f = \frac{\beta - p_{I'\tau'} \beta_0}{\nu_{I'\tau'} \beta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (13.31)$$

Поскольку при $|\zeta| > 1$ ряды (12.23) или (13.6) сходятся медленно, то при вычислении интегралов (13.31) при значениях $|\zeta| > 1$ следует использовать асимптотическое разложение функций Эрмита

$$H_\nu(\zeta) = (2\zeta)^\nu \left\{ 1 - \frac{\nu(\nu-1)}{4\zeta^2} + \frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{16\zeta^4} + \dots \right\}.$$

С помощью выражения (13.30) в работе Овчаренко и автора [88] были вычислены поправочные множители S_{if} . Используя результаты вычислений приведенных вероятностей $E2$ -пере-

ходов в теории жесткого ротатора (§ 10) и формулу (13.10), можно вычислить приведенные вероятности квадрупольных электрических переходов для деформируемых ядер. В табл. 29, 30 и 31 указаны численные значения (в единицах $Q_0^2/16\pi$) приведенных вероятностей $E2$ -переходов для некоторых значений μ и γ в случае каскадных переходов внутри основной вращательной полосы, $E2$ -переходов между уровнями первой аномальной полосы и переходов между уровнями первой аномальной и основной вращательных полос. Из этих таблиц следует, что при $\mu \leq 0,1$ (жесткие ядра) приведенные вероятности $E2$ -переходов мало отличаются от значений, даваемых адиабатической теорией. При $\mu > 0,2$ учет деформируемости ядер существенно сказывается на значениях приведенных вероятностей. Особенно велики поправки в состояниях с большими спинами в мягких ядрах, когда $\mu > 0,4$. Переходы в основной вращательной полосе сравнительно мало зависят от параметра неаксиальности γ . В табл. 32 указаны значения приведенных вероятностей $E2$ -переходов между состоянием первой вращательно-вибрационной полосы ($1\nu_1$) и основной вращательной полосы ($1\nu_0$). Эти вероятности резко возрастают при увеличении μ .

В качестве иллюстрации сравнения теоретических значений с экспериментальными в табл. 33 приводятся экспериментальные [89, 90] и теоретические значения отношений приведенных вероятностей $E2$ -переходов между некоторыми уровнями ядра Gd^{154} . Если брать отношения приведенных вероятностей, то значение Q_0 исключается и отношения зависят только от двух параметров μ и γ . При вычислении теоретических отношений в табл. 33 использованы значения $\gamma = 11,8^\circ$ и $\mu = 0,36$, которые получены в работе [37] при сравнении теоретического и экспериментального расположения энергетических уровней ядра Gd^{154} . Таким образом, фактически значения отношений приведенных вероятностей $E2$ -переходов в табл. 33 получены без использования параметров. Вопрос о влиянии деформируемости ядра на приведенные вероятности $E2$ -переходов в четно-четных ядрах обсуждался также в работе Девидсонов [91].

Диагональные матричные элементы (13.12), в формуле (13.13), определяют поправку к среднему значению электрического квадрупольного момента в возбужденном состоянии, рассчитанному согласно адиабатической теории (10.10). Для состояний, описываемых приближенными волновыми функциями (13.15), при $\mu < 0,4$ множитель S_{ii} совпадает с выражением (13.20). Для мягких ядер ($\mu > 0,4$) следует проводить численные вычисления по формуле (13.30). Такие вычисления для состояний первой возбужденной полосы были проделаны в работе [88]. В табл. 34 приведены результаты вычислений [на основе формулы (13.13) с учетом выражения (10.3) для $\langle Q_2 \rangle_{21}^a$] среднего значения (в единицах Q_0) электрических квадрупольных моментов вытянутых ядер ($0 \leq \gamma < 30^\circ$) в первом возбуж-

Таблица 29

Зависимость приведенных вероятностей $b(E\ 2; I+2; 1, \nu_0 \rightarrow I, 1, \nu_0)$ (в единицах $Q_0^2/16\pi$) каскадных переходов в основной вращательной полосе от μ и γ

μ, ν	$\gamma=10^\circ$						$\gamma=25^\circ$					
	21→01	41→21	61→41	81→61	10,1→8,1	12,1→10,1	21→01	41→21	61→41	8,1→61	10,1→81	12,1→10,1
0,10	0,972	1,40	1,55	1,65	1,72	1,77	0,956	1,37	1,70	1,91	2,02	2,10
0,20	0,972	1,41	1,59	1,73	1,85	1,97	0,965	1,40	1,76	1,99	2,16	2,31
0,30	0,982	1,48	1,75	2,01	2,26	2,53	0,975	1,46	1,94	2,33	2,65	2,93
0,40	1,02	1,62	2,06	2,50	2,96	3,41	1,01	1,62	2,32	2,91	3,45	3,95
0,60	1,23	2,18	3,08	4,04	5,02	6,01	1,23	2,22	3,51	4,71	5,83	6,93
0,80	1,65	3,03	4,55	6,15	7,86	9,58	1,65	3,14	5,23	7,22	9,14	10,98
1,00	2,22	4,12	6,42	8,90	11,45	14,05	2,23	4,31	7,40	10,38	13,3	16,10

Таблица 30

Зависимость приведенных вероятностей (в единицах $Q_0^2/16\pi$) E2-переходов между уровнями первой аномальной полосы от μ и γ

μ	$\gamma=10^\circ$			$\gamma=25^\circ$			$\gamma=30^\circ$		
	31→22	42→22	42→31	31→22	42→22	42→31	31→22	42→22	42→31
0,10	1,75	0,581	1,29	1,67	0,481	0,900	1,79	0,595	0
0,20	1,95	0,633	1,49	1,72	0,500	0,932	1,82	0,613	0
0,30	2,40	0,799	1,79	1,90	0,558	1,04	1,96	0,669	0
0,40	3,20	1,07	2,41	2,28	0,669	1,29	2,27	0,774	0
0,60	5,56	1,86	4,20	3,50	1,03	2,02	3,34	1,14	0
0,80	8,79	2,94	6,68	5,25	1,55	3,10	4,89	1,65	0
1,00	12,9	4,32	9,79	7,45	2,21	4,44	6,88	2,31	0

Таблица 31

Зависимость приведенных вероятностей (в единицах $Q_0^2/16\pi$) $E2$ -переходов
между уровнями первой аномальной и основной вращательных полос от μ и γ

μ	$\gamma=10^\circ$					$\gamma=20^\circ$				
	22→21	22→01	41→22	31→21	41→31	22→21	22→01	41→22	31→21	41→31
0,10	0,0515	0,0278	$2,35 \times 10^{-3}$	0,0497	0,0271	0,357	0,0670	0,0332	0,120	0,316
0,20	0,0523	0,0281	$2,42 \times 10^{-3}$	0,0504	0,0279	0,363	0,0677	0,0342	0,122	0,325
0,30	0,0530	0,0274	$2,63 \times 10^{-3}$	0,0507	0,0300	0,382	0,0697	0,0372	0,129	0,357
0,40	0,0536	0,0255	$2,96 \times 10^{-3}$	0,0507	0,0338	0,425	0,0730	0,0435	0,142	0,423
0,60	0,0602	0,0247	$4,15 \times 10^{-3}$	0,0561	0,0466	0,572	0,0871	0,0654	0,190	0,638
0,80	0,0750	0,0286	$5,89 \times 10^{-3}$	0,0694	0,0659	0,800	0,115	0,0973	0,264	0,950
1,00	0,0944	0,0352	$8,09 \times 10^{-3}$	0,0866	0,0903	1,09	0,152	0,138	0,359	1,34

μ	$\gamma=25^\circ$					$\gamma=30^\circ$				
	22→21	22→01	41→22	31→21	41→31	22→21	22→01	41→22	31→21	41→31
0,10	0,868	0,0425	0,0395	0,0759	0,638	1,43	0	0	0	0,778
0,20	0,877	0,0429	0,0402	0,0774	0,658	1,44	0	0	0	0,801
0,30	0,924	0,0442	0,0434	0,0816	0,715	1,51	0	0	0	0,871
0,40	1,02	0,0459	0,0505	0,0903	0,843	1,67	0	0	0	1,02
0,60	1,41	0,0561	0,0746	0,124	1,26	2,31	0	0	0	1,52
0,80	1,98	0,0748	0,109	0,175	1,88	3,27	0	0	0	2,26
1,00	2,73	0,0999	0,154	0,239	2,66	4,51	0	0	0	3,20

Зависимость приведенных вероятностей $E2$ -переходов (в единицах $Q_0^2/16\pi$)
с уровней первой вращательно-вибрационной полосы на уровни основной вращательной полосы от μ и γ

μ	$\gamma=10^\circ$				$\gamma=20^\circ$			
	$01\nu_1 \rightarrow 21\nu_0$	$21\nu_1 \rightarrow 01\nu_0$	$21\nu_1 \rightarrow 21\nu_0$	$21\nu_1 \rightarrow 41\nu_0$	$01\nu_1 \rightarrow 21\nu_0$	$21\nu_1 \rightarrow 01\nu_0$	$21\nu_1 \rightarrow 21\nu_0$	$21\nu_1 \rightarrow 41\nu_0$
0,10	0,0427	0,0085	0,0121	0,0220	0,041	0,00819	0,0094	0,0217
0,20	0,112	0,0166	0,0274	0,0686	0,112	0,0151	0,0213	0,0704
0,30	0,298	0,0295	0,0605	0,207	0,303	0,0249	0,0468	0,211
0,40	0,613	0,0378	0,102	0,442	0,634	0,0312	0,0789	0,449
0,60	1,40	0,0480	0,192	1,09	1,49	0,0355	0,148	1,10
0,80	2,24	0,0639	0,292	1,90	2,43	0,0442	0,228	1,93
1,00	3,17	0,0872	0,413	2,91	3,50	0,0582	0,325	2,96

μ	$\gamma=25^\circ$				$\gamma=30^\circ$			
	$01\nu_1 \rightarrow 21\nu_0$	$21\nu_1 \rightarrow 01\nu_0$	$21\nu_1 \rightarrow 21\nu_0$	$21\nu_1 \rightarrow 41\nu_0$	$01\nu_1 \rightarrow 21\nu_0$	$21\nu_1 \rightarrow 01\nu_0$	$21\nu_1 \rightarrow 21\nu_0$	$21\nu_1 \rightarrow 41\nu_0$
0,10	0,042	0,00839	0,00493	0,0216	0,0439	0,00878	0	0,022
0,20	0,115	0,0155	0,0112	0,070	0,121	0,0162	0	0,0713
0,30	0,321	0,0250	0,0246	0,206	0,342	0,0254	0	0,206
0,40	0,684	0,0288	0,0411	0,437	0,735	0,0282	0	0,428
0,60	1,64	0,0293	0,0774	1,05	1,77	0,0272	0	1,03
0,80	2,69	0,0352	0,119	1,85	2,94	0,0313	0	1,80
1,00	3,91	0,0445	0,171	2,80	4,31	0,0383	0	2,73

Теоретические и экспериментальные отношения приведенных вероятностей E2-переходов в ядре Gd¹⁵⁴

Отношение приведенных вероятностей	Теория	Эксперимент	Литература
$\frac{b(E2; 22\nu_0 \rightarrow 0\nu_0)}{b(E2; 22\nu_0 \rightarrow 21\nu_0)}$	0,446	0,44 0,53 ± 0,14	[89] [90]
$\frac{b(E2; 31\nu_0 \rightarrow 21\nu_0)}{b(E2; 31\nu_0 \rightarrow 41\nu_0)}$	0,992	0,80 ± 0,40	[90]
$\frac{b(E2; 42\nu_0 \rightarrow 21\nu_0)}{b(E2; 42\nu_0 \rightarrow 41\nu_0)}$	0,106	0,09	[89]
$\frac{b(E2; 22\nu_0 \rightarrow 41\nu_0)}{b(E2; 22\nu_0 \rightarrow 21\nu_0)}$	0,111	0,28 ± 0,19	[90]
$\frac{b(E2; 21\nu_1 \rightarrow 0\nu_0)}{b(E2; 21\nu_1 \rightarrow 21\nu_0)}$	0,429	0,26 ± 0,20	[90]
$\frac{b(E2; 21\nu_1 \rightarrow 41\nu_0)}{b(E2; 21\nu_1 \rightarrow 21\nu_0)}$	3,98	5,4 ± 2,3	[90]

Таблица 34

Средние значения (в единицах Q₀) электрического квадрупольного момента вытянутого ядра в первом возбужденном состоянии

$\gamma, \text{град}$ μ	8	10	15	20	25	30
0,10	-0,283	-0,281	-0,271	-0,247	-0,179	0
0,20	-0,283	-0,281	-0,271	-0,247	-0,179	0
0,30	-0,289	-0,287	-0,277	-0,252	-0,183	0
0,40	-0,297	-0,295	-0,284	-0,262	-0,190	0
0,50	-0,315	-0,312	-0,301	-0,277	-0,202	0
0,60	-0,337	-0,334	-0,325	-0,299	-0,218	0
0,80	-0,386	-0,383	-0,382	-0,363	-0,260	0
1,00	-0,462	-0,458	-0,447	-0,413	-0,302	0

денном состоянии $21\nu_0$. Средние значения квадрупольных моментов сплюснутых ядер $\langle Q_2 \rangle^{\text{сплюсн}}$ ($30 < \nu \leq 60^\circ$) получаются из табл. 34 изменением знака, так чтобы

$$\langle Q_2 \rangle_{\gamma}^{\text{сплюсн}} = - \langle Q_2 \rangle_{60-\gamma}^{\text{вытянут}}.$$

Поскольку средние значения квадрупольных электрических моментов вытянутых и сплюснутых ядер отличаются знаком, то их измерение, в отличие от измерения вероятностей переходов и энергетического спектра, позволяет определить значение γ в полном интервале $0-60^\circ$.

Таблица 35

Зависимость суммы относительных приведенных вероятностей $b(E_2; 21\nu_0 \rightarrow 01\nu_0) + b(E_2; 22\nu_0 \rightarrow \nu_0)$ от параметров μ и γ деформируемых ядер

$\gamma, \text{град}$ μ	10	15	20	25	30
0,10	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,20	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,40	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06
0,60	1,25	1,27	1,28	1,29	1,30
0,80	1,68	1,70	1,71	1,72	1,74
1,00	2,26	2,29	2,31	2,33	2,33

В теории жесткого неаксиального ротатора (§ 10) были получены правила сумм (10.13), (10.14), (10.20) — (10.24) для приведенных вероятностей E_2 -переходов. Учет деформируемости формы ядра приводит в случае мягких ядер ($\mu > 0,4$) к нарушению этих правил. В качестве примера в табл. 35 приведены для разных μ и γ значения суммы $b(E_2; 21\nu_0 \rightarrow 01\nu_0) + b(E_2; 22\nu_0 \rightarrow 21\nu_0)$, которая в адиабатической теории, согласно равенству (10.13), равна 1.

§ 14. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КВАДРУПОЛЬНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ НЕСФЕРИЧЕСКИХ, МАЛОДЕФОРМИРУЕМЫХ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДЕР

Как было показано в § 6, общая теория квадрупольных возбуждений несферических четно-четных ядер определяется оператором Гамильтона, содержащим пять динамических переменных β , γ , θ_1 , θ_2 , θ_3 . Этот оператор можно записать в виде

$$H = \frac{\hbar^2}{2B} \left\{ T_\beta + \frac{1}{\beta^2} [T_\gamma + T_{\text{rot}}] \right\} + V(\beta, \gamma), \quad (14.1)$$

где

$$V(\beta, \gamma) = V(\beta) + \frac{\beta_0^4}{\beta^2} V(\gamma) + \left(\frac{\beta}{\beta_0} - \frac{\beta_0^2}{\beta^2} \right) \beta_0^2 V(\gamma) \quad (14.2)$$

потенциальная энергия ядра как функция переменных β и γ , характеризующих отклонение поверхности ядра от сферы без изменения его объема, и параметра β_0 , который будет определен ниже;

$$\left. \begin{aligned} T_{\beta} &= -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right); \quad T_{\gamma} = -\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right); \\ T_{\text{rot}} &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda=1}^3 a_{\lambda}(\gamma) L_{\lambda}^2. \end{aligned} \right\} \quad (14.3)$$

Собственные функции Ψ оператора (14.1) определены в пространстве переменных $\beta \geq 0$, $0 \leq \gamma \leq \pi/3$, $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_2 \leq \pi$, $0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$ с элементом объема

$$d\tau = \beta^4 |\sin 3\gamma| d\beta d\gamma d\theta_1 \sin \theta_2 d\theta_2 d\theta_3.$$

Уравнение Шредингера с оператором Гамильтона (14.1) очень сложное. Его общее решение пока еще не найдено. К настоящему времени приближенно рассмотрены только некоторые частные случаи. Так, в работах [14, 92, 95] развивалась теория квадрупольных возбуждений сравнительно жестких аксиально симметричных ядер, в работе [14] рассмотрен также случай сравнительно жестких неаксиальных ядер.

При малых энергиях возбуждения собственные значения и собственные функции оператора (14.1) можно найти методом теории возмущений, рассматривая как возмущение третье слагаемое оператора потенциальной энергии (14.2), равное

$$H' = \left(\frac{\beta}{\beta_0} - \frac{\beta_0^2}{\beta^2} \right) \beta_0^2 V(\gamma). \quad (14.4)$$

Тогда собственные функции Ψ оператора нулевого приближения

$$H_0 = \frac{\hbar^2}{2B} \left\{ T_{\beta} + \frac{1}{\beta^2} [T_{\gamma} + T_{\text{rot}}] \right\} + V(\beta) + \frac{\beta_0^4 V(\gamma)}{\beta^2} \quad (14.5)$$

можно искать в виде произведения

$$\Psi = \beta^{-2} \varphi(\beta) X(\gamma, \theta), \quad \varphi(0) = 0, \quad \theta \equiv \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}. \quad (14.6)$$

Энергии возбужденных состояний удобно измерять в единицах $\frac{\hbar^2}{B_{\text{r}0}^2}$. Тогда уравнение нулевого приближения примет вид

$$(\hbar_0 - \varepsilon) \Psi = 0, \quad (14.7)$$

где

$$h_0 \equiv \frac{B_{p_0}^2}{h^2} H_0 = \frac{1}{2} \beta_0^2 \left\{ T_\beta + \frac{2BV(\beta)}{h^2} + \frac{1}{\beta^2} \times \right. \\ \left. \times \left[T_\gamma + T_{\text{rot}} + \frac{2B_{p_0}^4 V(\gamma)}{h^2} \right] \right\}. \quad (14.7a)$$

Подставляя в уравнение (14.7) функции (14.6) и вводя разложение

$$V(\beta) + \frac{h^2(2 + \Lambda_0)}{2B\beta^2} = \text{const} + \frac{1}{2} C_\beta (\beta - \beta_0)^2, \quad (14.8)$$

где Λ_0 — постоянная величина, значение которой будет определено ниже, получим систему двух связанных уравнений (с параметром разделения Λ)

$$\left[T_\gamma + T_{\text{rot}} + \frac{2B_{p_0}^4 V(\gamma)}{h^2} - \Lambda \right] X(\gamma, \theta) = 0, \quad (14.9)$$

$$\left\{ -\frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{(\beta - \beta_0)^2}{(\beta_0^2)^2} + \frac{\Lambda - \Lambda_0}{\beta^2} - \frac{2\epsilon_\Lambda}{\beta_0^2} \right\} \Phi_\Lambda(\beta) = 0. \quad (14.10)$$

При этом величина

$$\mu \equiv \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{h^2}{BC_\beta} \right]^{1/4} \quad (14.11)$$

совпадает с введенным ранее параметром неадиабатичности (12.12), характеризующим деформируемость ядра по отношению к продольным колебаниям; ϵ_Λ — энергия коллективных возбуждений (с точностью до постоянной). Постоянная Λ_0 выбирается так, чтобы она совпадала с наименьшим значением Λ , определяемым уравнением (14.9).

При $\Lambda = \Lambda_0$, согласно уравнению (14.10), продольные колебания (нулевые колебания) происходят около равновесного значения $\beta = \beta_0$, которое определяется равенством (14.8).

При фиксированном значении $\Lambda - \Lambda_0$ уравнение (14.10) решается методом, уже использованным при решении уравнения (12.6). Волновые функции уравнения (14.10) можно записать в виде

$$\Psi_{\gamma\lambda}(\beta) = N_{\gamma\lambda} \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta_\lambda^2\right) H_\lambda(\zeta_\lambda), \quad (14.12)$$

где

$$\zeta_\lambda = \frac{1}{\mu_\lambda} \left(\frac{\beta}{\beta_0} - \rho_\lambda \right); \quad (14.13)$$

$N_{\nu\lambda}$ — множитель нормировки, определяемый условием

$$\int_0^\infty \Phi_{\nu\lambda}(\beta) d\beta = 1. \quad (14.14)$$

Величины μ_λ и ρ_λ выражаются через значения $\Lambda - \Lambda_0$ и μ с помощью уравнений

$$\left. \begin{aligned} \rho_\lambda^3 (\rho_\lambda - 1) &= (\Lambda - \Lambda_0) \mu^4, \quad \rho_\lambda \geq 1; \\ \mu_\lambda &= \mu \left(4 - \frac{3}{\rho_\lambda} \right)^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned} \right\}. \quad (14.15)$$

Функции $H_\nu(\xi_\lambda)$ — функции Эрмита первого рода. Они определяются бесконечным рядом (12.23). Индекс ν является одним из корней трансцендентного уравнения

$$H_\nu \left(-\frac{\rho_\lambda}{\mu_\lambda} \right) = 0. \quad (14.16)$$

Состоянием, описываемым функциями (14.12), соответствует энергия

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu\lambda} &= \frac{1}{\mu^2} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \left[1 + 3(\Lambda - \Lambda_0) \left(\frac{\mu}{\rho_\lambda} \right)^4 \right]^{1/2} + \\ &+ \frac{\Lambda - \Lambda_0}{2\rho_\lambda^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_\lambda - 1}{\mu^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Выражения (14.12) и (14.17) справедливы и для значений $\mu \approx 1$. Для их вычисления надо знать корни ν уравнения (14.16). Для $\mu > 0,3$ корни (14.16) можно найти численным путем. В случае малых значений μ решения значительно упрощаются. Как мы уже отмечали в § 12, корни уравнения (14.16)

для значений $\frac{\rho_\lambda}{\mu_\lambda} \geq 4$ с точностью до 10^{-4} совпадают с целыми числами $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае бесконечный ряд (12.23) сводится к полиномам степени n и функция Эрмита $H_\nu(\xi)$ переходит в полином Эрмита $H_n(\xi)$.

Допустим далее, что выполняется неравенство

$$\mu^4 (\Lambda - \Lambda_0) < 1, \quad (14.18)$$

тогда уравнения (14.15) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho_\lambda &= 1 + \mu^4 (\Lambda - \Lambda_0) - 3\mu^8 (\Lambda - \Lambda_0)^2 + \dots \\ \mu_\lambda &= \mu \left[1 - \frac{3}{4} (\Lambda - \Lambda_0) \mu^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Подставляя значения $v=n_\beta$ и (14.19) в (14.17), получаем приближенное выражение для энергий возбужденных состояний

$$\epsilon_{n_\beta \lambda} = \frac{1}{\mu^2} \left(n_\beta + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} (\Lambda - \Lambda_0) \times \\ \times \left[1 + 3\mu^2 \left(n_\beta + \frac{1}{2} \right) - \mu^4 (\Lambda - \Lambda_0) + \dots \right], \quad (14.20)$$

которым соответствуют функции

$$\Phi_{n_\beta \lambda}(\zeta) = N_{n_\beta \lambda} H_{n_\beta}(\zeta_\lambda) \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta_\lambda^2\right), \quad (14.21)$$

где

$$\zeta_\lambda = \frac{1}{\mu_\lambda} \left(\frac{\beta}{\beta_0} - \rho_\lambda \right). \quad (14.22)$$

Ниже будут рассматриваться сравнительно жесткие ядра, для которых $\mu < 0,3$. Учитывая равенство (14.22), убедимся, что переменная ζ_λ функции (14.21) изменяется в пределах

$$-\frac{1}{\mu} \left[1 + \frac{1}{4} (\Lambda - \Lambda_0) \mu^4 \right] \leq \zeta_\lambda < \infty.$$

При условии (14.18) нижний предел этого неравенства не зависит от $(\Lambda - \Lambda_0)$, и его можно заменить $-\infty$. В этом случае функцию (14.21) можно заменить приближенной нормированной в интервале $-\infty, \infty$ функцией

$$\Phi_{n_\beta}(\zeta) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} H_n(\zeta) \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta^2\right). \quad (14.23)$$

Чтобы вычислить Λ и функции $\Phi_\lambda(\gamma, \theta)$, надо решить уравнение (14.9). Решение этого уравнения представляет наибольшие трудности. В случае ядер, обладающих аксиальной симметрией в основном состоянии, когда минимум потенциальной энергии соответствует значению $\gamma = \gamma_0 = 0$ так, что

$$V(\gamma) = \frac{1}{2} C_1 \gamma^2, \quad (14.24)$$

решение уравнения (14.9) было найдено в работах [14, 92—95] методом теории возмущений. Учитывая равенство (14.24), можно написать

$$\hbar^{-2} 2B\beta_0^4 V(\gamma) = \frac{\gamma^2}{4\Gamma^4}, \quad (14.25)$$

где

$$\Gamma \equiv \beta_0^{-1} \left(\frac{\hbar^2}{4BC_1} \right)^{1/4} \quad (14.26)$$

новый параметр, который, как мы увидим ниже, характеризует деформируемость ядра по отношению к поперечным колебаниям поверхности ядра. Параметр Γ определяется в радианах, иногда удобно выражать Γ и в градусах.

Если параметр $\Gamma < 0,3$, то атомное ядро является сравнительно жестким по отношению к поперечным γ -колебаниям. Амплитуда нулевых поперечных колебаний в этом случае мала. Поэтому при малых энергиях возбуждения эффективные значения $\gamma \ll 1$. Тогда в уравнении (14.9) можно разложить операторы T_{rot} и T_γ в ряд по степеням γ и заменить их приближенными выражениями

$$T_\gamma^0 = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right), \quad T_{\text{rot}} = T_{\text{rot}}^0 + T_{\text{rot}}^1 + \dots,$$

где

$$T_{\text{rot}}^0 = \frac{1}{3} I^2 + \left(\frac{1}{4\gamma^2} - \frac{1}{4} \right) I_3^2, \quad (14.27)$$

$$T_{\text{rot}}^1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \gamma (I_2^2 - I_1^2). \quad (14.28)$$

Сохраняя в нулевом приближении только операторы T_γ^0 и T_{rot}^0 , получим уравнение

$$\left[T_\gamma^0 + T_{\text{rot}}^0 + \frac{\gamma^2}{4\Gamma^4} - \Lambda \right] X_\lambda^0(\gamma, \theta) = 0. \quad (14.29)$$

В этом приближении проекция спина на аксиальную ось симметрии является интегралом движения, и уравнение (14.29) удовлетворяется функциями

$$X_{IKn_\gamma}^0(z, \theta) = \left[\frac{\left(n_\gamma + \frac{1}{2} K \right)!}{n_\gamma!} \right]^{1/2} \frac{z^{\frac{K}{4}}}{\left(\frac{1}{2} K \right)!} e^{-\frac{1}{2} z} \times \\ \times |IMK\rangle F\left(-n_\gamma, 1 + \frac{K}{2}; z\right), \quad (14.30)$$

где $z = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\Gamma} \right)^2$; $|IMK\rangle$ — функции (4.44а), зависящие от углов Эйлера, $F(-n, a; z)$ — гипергеометрическая функция; I — квантовое число полного спина возбужденного состояния; $K = 0, 2, 4, \dots$ — квантовое число проекций спина на аксиальную ось; $n_\gamma = 0, 1, \dots$ — квантовое число поперечных γ -колебаний.

Собственным функциям (14.30) соответствуют собственные значения

$$\Lambda = \left(2n_\gamma + \frac{1}{2} K + 1 \right) \Gamma^{-2} + \frac{1}{3} I(I+1) - \frac{K^2}{4} - 1.$$

Выберем значение постоянной Λ_0 , введенной в выражение (14.8), так, чтобы она равнялась значению Λ при $I=K=n_\gamma=0$. Тогда

$$\Lambda - \Lambda_0 = \frac{1}{3} I(I+1) + \frac{1}{\Gamma^2} \left(2n_\gamma + \frac{1}{2} K \right) - \frac{1}{4} K^2. \quad (14.31)$$

Подставив это значение в формулу (14.20), найдем в нулевом приближении энергию возбужденных состояний ядра, имеющего параметры $\gamma_0=0$, $\beta_0 \neq 0$; $\mu < 0,3$; $\Gamma < 0,3$ и находящегося в состоянии, характеризуемом квантовыми числами $IKn_\beta n_\gamma$.

Учет оператора (14.28), линейного по переменной γ , проводился в работах Ростовского, Чабана и автора [92] и в работе Беляка и Заикина [93]. Оператор (14.28), вообще говоря, смешивает состояния, относящиеся к разным значениям n_γ и K . При этом волновые функции уравнения (14.9) в первом приближении теории возмущений выражаются через функции (14.30) следующим образом:

а) волновые функции основного состояния и состояния с $I=3$ совпадают с функциями нулевого приближения, т. е.

$$X_{000}(z, \theta) = X_{000}^0(z, \theta); \quad X_{320}(z, \theta) = X_{320}^0(z, \theta); \quad (14.32)$$

б) когда $n_\gamma=K=0$, $I=0, 2, 4 \dots$ (основная вращательная полоса)

$$X_{I00}(z, \theta) = X_{I00}^0 + \frac{a(I)\Gamma^3}{1-\Gamma^2} X_{I20}^0; \quad (14.33)$$

в) когда $n_\gamma=0$; $K=2$; $I=2, 3, 4 \dots$ (аномальная вращательная полоса)

$$X_{I20}(z, \theta) = X_{I20}^0 - a(I) \left[\frac{\Gamma^3}{1-\Gamma^2} X_{I20}^0 + \frac{\Gamma^3}{1+\Gamma^2} X_{I01}^0 \right] + \frac{b(I)\Gamma^3}{1-3\Gamma^2} X_{I40}^0; \quad (14.34)$$

г) когда $n_\gamma=1$; $K=0$; $I=0, 2 \dots$ (первая вращательная полоса, содержащая одно поперечное колебание)

$$X_{I01}(z, \theta) = X_{I01}^0 + a(I) \left[\frac{\Gamma^3}{1+\Gamma^2} X_{I20}^0 + \frac{\sqrt{2}\Gamma^3}{1-\Gamma^2} X_{I21}^0 \right]. \quad (14.35)$$

При этом

$$a(I) \equiv \frac{1+(-1)^I}{3\sqrt{3}} [(I-1)I(I+1)(I+2)]^{1/2},$$

$$b(I) \equiv \frac{2}{3\sqrt{3}} [(I-3)(I-2)(I+3)(I+4)]^{1/2}.$$

Функции (14.29)—(14.32) охватывают наиболее интересные случаи коллективных возбужденных состояний ядра. Функции, соответствующие произвольным значениям n_γ и K , были найдены в работе Беляка и Заикина [93]. Полные функции возбужденных состояний, включающих и продольные колебания, можно получить умножением функций (14.32)—(14.35) на функции (14.23) продольных колебаний поверхности ядра.

Итак, при $\mu < 0,3$; $\Gamma < 0,3$ и выполнении неравенства (14.18), которое при учете равенства (14.31) имеет вид

$$\mu^4 \left\{ \frac{1}{3} I(I+1) + \frac{1}{\Gamma^2} \left(2n_\gamma + \frac{K}{2} \right) - \frac{K^2}{4} \right\} < 1,$$

волновые функции уравнения (14.9) в первом приближении теории возмущений изображаются произведением

$$\Psi_{IKn_\gamma n_\beta} = X_{IKn_\gamma}(z, \theta) \Phi_{n_\beta}(\zeta), \quad (14.36)$$

где квантовые числа n_γ и n_β пробегают значения 0, 1, 2... и характеризуют поперечные и продольные колебания поверхности ядра относительно равновесных значений $\gamma_0 = 0$ и β_0 ; $I = 0, 2, 3, \dots$ — полный спин возбужденного состояния. Величина K пробегает четные значения 0, 2... и является приближенным квантовым числом. Функция (14.36) с индексом K , согласно равенствам (14.33)—(14.35), содержит линейную комбинацию функций, соответствующих разным значениям $K' = 0, 2, 4, \dots$, среди которых значение K является главным, другие же значения K' входят в линейную комбинацию с сравнительно малым весом ($\sim \Gamma^3$) при $\Gamma < 0,3$.

Согласно выражениям (14.36), (14.23) и (14.30), волновая функция основного состояния ядра, описывающая нулевые продольные и поперечные колебания поверхности ядра в приближении ($\mu, \Gamma < 0,3$), имеет вид

$$\Psi_0 = N_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta - \beta_0}{\mu \beta_0} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma}{\Gamma} \right)^2 \right\}. \quad (14.37)$$

Из выражения (14.37) следует, что параметры $\mu \beta_0$ и Γ характеризуют соответственно амплитуду продольных и поперечных нулевых колебаний поверхности ядра.

Энергия возбужденных состояний с квантовыми числами $IKn_\gamma n_\beta$ в нулевом приближении, согласно выражениям (14.20) и (14.31), определяется параметрами μ и Γ с помощью равенства

$$\begin{aligned} E_{IKn_\beta n_\gamma} &= \varepsilon_{IKn_\beta n_\gamma} - \varepsilon_{0000} = \frac{1}{6} \left[I(I+1) - \frac{3}{4} K^2 \right] + \\ &+ \frac{n_\beta}{\mu^2} \left(1 + \frac{3}{2} \mu^4 \right) + \frac{1}{\Gamma^2} \left(n_\gamma + \frac{K}{4} \right) - \\ &- 2\mu^4 \left\{ \frac{1}{\Gamma^2} \left(n_\gamma + \frac{K}{4} \right) + \frac{1}{6} \left[I(I+1) - \frac{3}{4} K^2 \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (14.38)$$

Если пренебречь поправочными слагаемыми, содержащими μ^4 , то получим приближенное выражение для энергии возбужденных состояний четно-четного ядра

$$E_{IKn_\gamma n_\beta} = \frac{1}{6} \left[I(I+1) - \frac{3}{4} K^2 \right] + \frac{1}{\mu^2} n_\beta + \frac{1}{\Gamma^2} \left(n_\gamma + \frac{K}{4} \right). \quad (14.39)$$

Схема возбужденных состояний, соответствующая приближенному выражению (14.39), изображена на рис. 25. Эта схема позволяет провести классификацию возбужденных состояний квадрупольного типа в аксиально симметричных малодеформируемых четно-четных ядрах:

а) состояния с квантовыми числами

$$n_\beta = n_\gamma = 0,$$

$$K \approx 0 \text{ и } I = 2, 4, 6 \dots$$

будем называть основной вращательной полосой. Энергия первого возбужденного уровня этой полосы (в единицах $\frac{\hbar^2}{B\beta_0^2}$) выражается приближенным равенством

$$E(2000) \equiv E(20) \approx 1; \quad (14.40)$$

б) состояния с квантовыми числами

$$n_\beta = n_\gamma = 0;$$

$$K \approx 2 \text{ и } I = 2, 3, 4 \dots$$

образуют аномальную вращательную полосу. Эти состояния содержат как энергию вращения, так и энергию поперечных колебаний ядра. Часто называют эти возбужденные состояния γ -колебаниями. Такое название мало оправдано, так как в этих состояниях возбуждения квантовое число $n_\gamma=0$ так же, как и

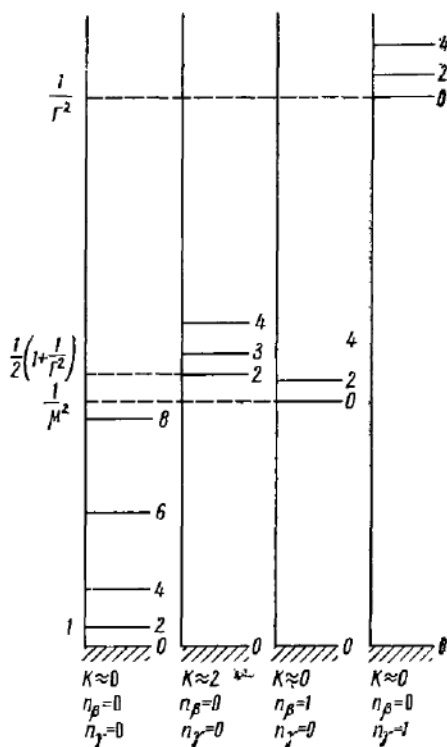


Рис. 25. Грубая схема возбужденных состояний квадрупольного типа в четно-четных ядрах, обладающих аксиальной симметрией в основном состоянии. Энергии указаны в единицах $\frac{\hbar^2}{B_F0^2}$. Значение спина указано справа от линий, изображающих положение уровней.

квантовое число $n_\beta = 0$. Начинается аномальная полоса уровнем с энергией (в единицах $\hbar^2/B\beta_0^2$).

$$E(2200) \equiv E(22) \approx \frac{1}{2}(1 + \Gamma^{-2}); \quad (14.41)$$

в) состояния с квантовыми числами

$$n_\beta = 1, \quad n_\gamma = 0, \quad K \approx 0, \quad I = 0, 2, 4 \dots$$

можно назвать первой вращательной полосой продольных колебаний. Первое возбужденное состояние в этой полосе ($I=0$) соответствует продольным или β -колебаниям поверхности ядра около равновесного значения β_0 . Энергия этого возбужденного состояния грубо выражается формулой

$$E(0001) \equiv E(0_\beta) \approx \mu^{-2}; \quad (14.42)$$

г) состояния с квантовыми числами

$$n_\beta = 0, \quad n_\gamma = 1, \quad K \approx 0, \quad I = 0, 2, 4 \dots$$

можно назвать первой вращательной полосой поперечных колебаний (или γ -колебаний) поверхности ядра около равновесного значения $\gamma_0 = 0$. Первое возбужденное состояние в этой полосе ($I=0$) соответствует «чистым» поперечным колебаниям. Его энергия грубо выражается формулой

$$E(0010) \equiv E(0_\gamma) \approx \Gamma^{-2}. \quad (14.43)$$

Следовательно, среди первых коллективных возбуждений имеется два типа состояний со спином 0, четыре типа состояний со спином 2 и т. д. Чтобы исключить величину $\frac{\hbar^2}{B\beta_0^2}$, в единицах которой измерялись энергии, надо рассматривать отношения энергий возбуждения к энергии первого возбужденного уровня. Таким образом,

$$q \equiv \frac{E(0_\beta)}{E(20)} \approx \mu^{-2}; \quad \frac{E(0_\gamma)}{E(20)} \approx \Gamma^{-2}. \quad (14.44)$$

Приближенные равенства (14.44) могут быть использованы для грубых оценок параметров μ и Γ . Равенства (14.44) тем точнее, чем больше величина отношений указанных энергий. Состояния 0_γ найдены пока только в нескольких ядрах, поэтому для грубого определения параметра Γ можно воспользоваться равенством, вытекающим из выражений (14.41) и (14.40):

$$\Gamma^{-2} = 2s - 1, \quad \text{где } s \equiv \frac{E(22)}{E(20)}. \quad (14.45)$$

С помощью формул (14.44) и (14.45) можно получить интересное равенство [92]

$$E(0_{\gamma}) = 2E(22) - E(20). \quad (14.46)$$

Путем сравнения двух последних столбцов в табл. 36 можно убедиться, что равенство (14.46) приближенно выполняется в ядрах Er^{166} и Os^{188} .

Т а б л и ц а 36

Экспериментальные значения энергий уровней спина 2 и γ -вибрационного уровня спина 0

Ядро	$E(20)$	$E(22)$	$2E(22) - E(20)$	$E(0)$	Литература
Er^{166}	80,7	788	1495,3	1462	[96]
Os^{188}	155	633	1111	1086	[97]

Из формулы (14.44) также следует весьма интересное отношение

$$\frac{E(0_{\gamma})}{E(0_{\beta})} \approx \left(\frac{\mu}{\Gamma} \right)^2. \quad (14.46a)$$

Это равенство приближенно выполняется для ядра Os^{188} . Согласно работе Кинга и Джонса [97], в ядре Os^{188} имеются два уровня спина 0 с энергиями 1086 кэв и 1765 кэв. В табл. 36 первый уровень относится к γ -колебаниям. Если второй уровень относится к β -колебаниям, то

$$\frac{E(0_{\gamma})}{E(0_{\beta})} = \frac{1086}{1765} \approx 0,61.$$

С другой стороны, согласно рис. 22 и 23, ядро Os^{188} характеризуется параметрами $\mu=0,25$, $\gamma=19^\circ$. Поэтому, полагая, $\gamma=\Gamma$, имеем

$$(\mu/\Gamma)^2 = 0,596,$$

что приближенно совпадает с указанным выше отношением энергий.

Интересно сравнить энергии возбуждений (14.39) при $n_{\beta}=n_{\gamma}=0$

$$E(IK) \equiv E(IK00) = \frac{1}{6} \left[I(I+1) - \frac{3}{4} K^2 \right] + \frac{K}{4\Gamma^2} \quad (14.47)$$

с энергиями вращения жесткого неаксиального ротатора, рассмотренного в § 9 при значениях $\gamma = \gamma_{\text{эфф}} < 18^\circ$. Для первых уровней из (14.47) следует:

$$\left. \begin{aligned} E(20) &= 1; \\ E(22) &= \frac{1}{2}(1 + \Gamma^{-2}); \\ E(32) &= \frac{1}{2}(3 + \Gamma^{-2}). \end{aligned} \right\} \quad (14.48)$$

С другой стороны, используя обозначения уровней и единицы измерения энергии $\frac{h^2}{B_{\text{p}0}^2}$, принятые в этом параграфе, находим, разлагая выражения (9.17) и (9.22) по степеням $\gamma = \gamma_{\text{эфф}}$,

$$\left. \begin{aligned} E^a(20) &= \frac{9 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{8}{9} \sin^2(3\gamma)} \right]}{4 \sin^2(3\gamma)} = 1 + \dots \\ E^a(22) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + 1 \right) + \dots \\ E^a(32) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + 3 \right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (14.49)$$

Сравнив формулы (14.48) и (14.49), убедимся, что они совпадают, если положить

$$\gamma = \Gamma. \quad (14.50)$$

Полученное равенство можно использовать для выяснения физического смысла введенного в § 9 фиксированного значения $\gamma = \gamma_{\text{эфф}}$. Согласно формулам (14.37) и (14.50), величина $\gamma_{\text{эфф}}$ характеризует амплитуду нулевых поперечных колебаний поверхности ядра. Следует, конечно, помнить, что равенство (14.50) получено только для значений $\Gamma < 0,3$ и при $\gamma_0 = 0$.

* Если $\gamma_0 \neq 0$, т. е. минимум $V(\gamma)$ не соответствует значению $\gamma = 0$, то решение уравнения (14.9) можно получить другим приближенным путем. Введем новую функцию $\kappa(\gamma, \theta)$ с помощью соотношения

$$X(\gamma, \theta) = \frac{\kappa(\gamma, \theta)}{\sqrt{|\sin 3\gamma|}}. \quad (14.51)$$

Подставив выражение (14.51) в уравнение (14.9), убедимся, что функция $\kappa(\gamma, \theta)$ должна удовлетворять уравнению

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + w(\gamma) + T_{\text{rot}}(\gamma) - \Lambda \right\} \kappa(\gamma, \theta) = 0, \quad (14.52)$$

где

$$\omega(\gamma) \equiv \frac{2B_0^4 V(\gamma)}{h^2} - \frac{9}{4} \left[1 + \frac{1}{\sin^2 3\gamma} \right].$$

Поскольку по условию $V(\gamma)$ имеет минимум при $\gamma \neq 0$, то функция $\omega(\gamma)$ будет также иметь минимум ω_0 при $\gamma_0 \neq 0$. Разложив эту функцию в ряд, получим

$$\omega(\gamma) = \omega_0 + h^{-2} B_0^4 C_\gamma (\gamma - \gamma_0)^2 = \omega_0 + \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{4\Gamma^2}, \quad (14.53)$$

где Γ — параметр, определяющий деформируемость ядра по отношению к поперечным колебаниям относительно значения $\gamma = \gamma_0 \neq 0$.

Разложим далее оператор $T_{\text{rot}}(\gamma)$ в ряд по степеням $(\gamma - \gamma_0)$

$$T_{\text{rot}}(\gamma) = T_{\text{rot}}(\gamma_0) + \left[\frac{\partial T_{\text{rot}}}{\partial \gamma} \right]_{\gamma=\gamma_0} (\gamma - \gamma_0) + \dots \quad (14.54)$$

При значениях $\Gamma < \gamma_0$ (жесткое ядро по отношению к поперечным колебаниям) в ряду (14.54) можно оставить только первое слагаемое, а остальные рассматривать как возмущение. В этом приближении при учете выражения (14.53) уравнение (14.52) преобразуется к виду

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{4\Gamma^4} + \frac{1}{4} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{I_\lambda^2}{\sin^2 \left(\gamma_0 - \frac{2\pi}{4} \lambda \right)} + \right. \\ \left. + \omega_0 - \Lambda \right\} \chi^0 = 0. \quad (14.55)$$

Полученное уравнение решается методом разделения переменных. Положим,

$$\chi_{I n_\gamma}^0(\gamma, \theta) = g_{n_\gamma}(\gamma - \gamma_0) \Phi_{I-}(\gamma_0, \theta). \quad (14.56)$$

Тогда функция $g(\gamma - \gamma_0)$ будет удовлетворять уравнению

$$\left\{ -\frac{d^2}{d\gamma^2} + \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{4\Gamma^4} - \frac{2n_\gamma + 1}{2\Gamma^2} \right\} g_{n_\gamma}(\gamma - \gamma_0) = 0, \quad (14.57)$$

где

$$n_\gamma = 0, 1, 2, \dots;$$

$$g_{n_\gamma}(\gamma - \gamma_0) = N_\gamma H_{n_\gamma} \left(\frac{\gamma - \gamma_0}{\sqrt{2}\Gamma} \right) \exp \left\{ -\left(\frac{\gamma - \gamma_0}{2\Gamma} \right)^2 \right\}. \quad (14.58)$$

В частности, функция нулевых поперечных колебаний $n_\gamma=0$, нормированная с помощью выражения $\int_{-\infty}^{\infty} g^2(\gamma-\gamma_0) d\gamma=1$ имеет вид

$$g_0(\gamma-\gamma_0) = (2\Gamma^2\pi)^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ -\left(\frac{\gamma-\gamma_0}{2\Gamma} \right)^2 \right\}. \quad (14.58a)$$

Следовательно, нулевые колебания происходят около равновесных значений $\gamma=\gamma_0$, при этом $\langle g_0 | (\gamma-\gamma_0)^2 | g_0 \rangle = \Gamma^2$. Это равенство определяет физический смысл введенного нами в выражении (14.53) параметра Γ . Функция $\Phi(\gamma_0, \theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{I_\lambda^2}{\sin^2 \left(\gamma_0 - \frac{2\pi}{3} \lambda \right)} - \epsilon_{I_\tau} \right\} \Phi_{I_\tau} = 0, \quad (14.59)$$

которое совпадает с уравнением (9.4) для жесткого ротатора, исследованным в адиабатической теории § 9.

Параметр Λ уравнения (14.55) выражается через энергию жесткого ротатора $\epsilon_{I_\tau}(\gamma_0)$ и энергию γ -колебаний

$$\Lambda = \frac{1}{2} \epsilon_{I_\tau}(\gamma_0) + \frac{1}{\Gamma^2} \left(n_\gamma + \frac{1}{2} \right) + \omega_0.$$

Множитель $1/2$ в первом слагаемом появился потому, что в § 9 энергии ротатора выражались в единицах $\frac{\hbar^2}{4B\beta_0^2}$, а в этом

параграфе используются в четыре раза более крупные единицы $\frac{\hbar^2}{B\beta_0^2}$. Выберем теперь постоянную Λ_0 , введенную равенством

(14.8) так, чтобы она равнялась значению Λ при $I=0$, $\tau=1$, $n_\gamma=0$. Тогда

$$\epsilon_{01} = 0 \text{ и } \Lambda - \Lambda_0 = \frac{1}{2} \epsilon_{I_\tau}(\gamma_0) + n_\gamma \Gamma^{-2}. \quad (14.60)$$

Подставив это значение в выражение (14.20), найдем энергию возбужденных состояний неаксиального ядра, имеющего параметры $\gamma_0 > 0,3$, $\beta_0 \neq 0$, $\mu < 0,3$ и $\Gamma < 0,3$. Возбужденные состояния характеризуются квантовыми числами: I — полный спин; τ — номер вращательного состояния данного спина I , n_γ — кван-

товое число γ -колебаний; n_β — квантовое число β -колебаний. Их энергия равна

$$E_{I\tau n_\gamma n_\beta} = \frac{(n_\beta + 1/2)}{\mu^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{I\tau} + \frac{n_\gamma}{\Gamma^2} \right] \left\{ 1 + 3\mu^2 \left(n_\beta + \frac{1}{2} \right) - \mu^4 \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{I\tau}(\gamma_0) + \frac{n_\gamma}{\Gamma^2} \right] \right\}. \quad (14.61)$$

Волновая функция этих возбужденных состояний согласно формулам (14.6), (14.51) и (14.56), равна

$$\Psi_{I\tau n_\gamma n_\beta} = \beta^{-2} (|\sin 3\gamma|)^{-\frac{1}{2}} \Phi_{I\tau}(\gamma_0, \theta) g_{n_\gamma}(\gamma - \gamma_0) \Phi_{n_\beta}(\zeta), \quad (14.62)$$

где функции $\Phi_{I\tau}(\gamma_0, \theta)$ определены в § 9; функция $\Phi(\zeta)$ определена формулой (4.23); функция $g_{n_\gamma}(\gamma - \gamma_0)$ определена выражением (14.58). При этом переменная

$$\zeta = \frac{1}{\mu_\lambda} \left(\frac{\beta}{\beta_0} - p_\lambda \right),$$

где

$$p_\lambda = 1 + \mu^4 \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{I\tau}(\gamma_0) + \frac{n_\gamma}{\Gamma^2} \right];$$

$$\mu_\lambda = \mu \left\{ 1 - \frac{3}{4} \mu^4 \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{I\tau}(\gamma_0) + \frac{n_\gamma}{\Gamma^2} \right] \right\}.$$

Если рассматриваются операторы, не содержащие производных по переменным β и γ , то вместо функций (14.62) удобно использовать функции

$$|I\tau n_\gamma n_\beta\rangle = \Phi_{I\tau}(\gamma_0, \theta) g_{n_\gamma}(\gamma - \gamma_0) \Phi_{n_\beta}(\beta - \beta_0), \quad (14.62a)$$

определенные в пространстве с элементом объема

$$d\tau = d\beta d\gamma \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3.$$

Формулы (14.61) и (14.62) справедливы только при значениях $\mu < 0,3$. Если $\mu > 0,3$, то энергия возбужденных состояний определяется выражением (14.17), в которое надо подставить значения (14.60). Таким образом, получим

$$E_{I\tau n_\gamma} = \frac{\nu + \frac{1}{2}}{\mu^2} \left\{ 1 + 3 \left(\frac{\mu}{p_\lambda} \right)^4 \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{I\tau}(\gamma_0) + \frac{n_\gamma}{\Gamma^2} \right] \right\}^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{p_\lambda - 1}{\mu^2} \right)^2 + \frac{1}{2p_\lambda^2} \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{I\tau}(\gamma_0) + \frac{n_\gamma}{\Gamma^2} \right], \quad (14.63)$$

квантовое число ν — корень трансцендентного уравнения (14.16); p_λ — решение уравнения

$$p_\lambda^3(p_\lambda - 1) = \mu^4 \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{I\tau}(\gamma_0) + \frac{n_\nu}{\Gamma^2} \right], \quad p_\lambda \geq 1 \quad (14.64)$$

для каждой совокупности значений квантовых чисел I, τ, n_ν . Значение μ_λ в уравнении (14.16) находится из уравнений (14.15) для каждого p_λ , полученного с помощью уравнения (14.64). При $\mu > 0,3$ волновые функции β -колебаний определяются функцией (14.12), в которой ξ_λ вычисляется из выражения (14.13) с помощью уравнения (14.64).

Итак, в случае достаточно жестких неаксиальных ядер $\gamma_0 > 0,3$, когда $\Gamma < 0,3$, возбужденные состояния, соответствующие $n_\nu = 0$, можно определить по формулам § 12, если отождествить эффективное значение γ с γ_0 . Формулы § 12 можно использовать и для аксиально симметричных ядер, если отождествить эффективное значение со значением Γ при $\Gamma < 0,3$. К сожалению, еще не удалось теоретически рассмотреть случай достаточно мягких по отношению к поперечным колебаниям (когда $\Gamma \approx 1$) аксиально симметричных и асимметричных ядер. Поэтому приходится использовать таблицы уровней § 12, в которых относительные энергии выражаются через два параметра μ и γ . Последний параметр γ в случае аксиальных ядер должен совпадать с параметром поперечной деформируемости Γ . В случае неаксиальных ядер параметр γ , использованный в § 12, является некоторой комбинацией параметров Γ и γ_0 .

Согласно формулам (14.39) и (14.61), в состояниях с нулевым числом фононов продольных ($n_\beta = 0$) и поперечных ($n_\nu = 0$) колебаний энергии (в единицах $\hbar^2/B\beta_0^2$) возбужденных состояний сравнительно жестких ($\mu < 0,3$ и $\Gamma < 0,3$) неаксиальных ядер с точностью до μ^2 выражаются равенством

$$E_{I\tau 00} = \frac{1}{4} \varepsilon_{I\tau}(\gamma_0), \quad \gamma_0 > 0,3, \quad \Gamma < 0,3. \quad (14.65)$$

Таким образом, в этом приближении энергии возбужденных состояний $|I\tau 00\rangle$ совпадают с энергиями вращения жесткого неаксиального ядра, рассмотренными в § 9. В общем же случае энергии возбужденных состояний зависят от трех параметров: γ_0, μ и Γ . В случае же аксиально симметричных ядер ($\gamma_0 = 0$) энергии возбуждения (в тех же единицах $\hbar^2/B\beta^2$) зависят только от двух параметров: μ и Γ . Следовательно, имеется принципиальная возможность выяснить, является ли ядро аксиально симметричным или нет, и определить значения трех параметров: γ_0, μ и Γ . Однако эту принципиальную возможность пока еще трудно реализовать. Приближенный характер теории и отсутствие экспериментальных данных о многих возбужденных состояниях не позволяют однозначно установить, имеет ли

ядро в основном состоянии аксиальную симметрию или нет. Большие значения γ у ядер (см. рис. 23) могут указывать как на неаксиальность ядра ($\gamma_0 \neq 0$), так и на его легкую деформируемость по отношению к поперечным колебаниям (большое Γ).

Довольно простым указанием на аксиальную симметрию ядра является выполнение равенств (14.46) и (14.46a). Как было указано выше, эти равенства приближенно выполняются для ядра Os^{188} . Учитывая данные об энергиях других возбужденных состояний, можно прийти к заключению, что это ядро характеризуется параметрами

$$\gamma_0 = 0, \quad \Gamma = 19^0 \text{ и } \mu = 0,25.$$

В случае неаксиальных ядер равенства (14.46) и (14.46a) выполняться не должны. Действительно, согласно выражениям (14.65) и (9.17), в адиабатическом приближении энергия первого возбужденного состояния неаксиального ядра

$$E_{21} \equiv E_{2100} = \frac{3[3 - \sqrt{9 - 8 \sin^2(3\gamma_0)}]}{4 \sin^2(3\gamma_0)}.$$

Согласно же формуле (14.61), энергия возбуждения первого уровня γ -колебаний со спином 0 приближенно равна*

$$E(0_\gamma) \equiv E_{0010} \approx \frac{1}{2\Gamma^2}. \quad (14.66)$$

Следовательно, в неаксиальных ядрах отношение (14.44) заменяется отношением

$$\frac{E(0_\gamma)}{E(21)} \approx \frac{2 \sin^2(3\gamma_0)}{3\Gamma^2 [3 - \sqrt{9 - 8 \sin^2(3\gamma_0)}]}.$$

Далее, в неаксиальном ядре правой части равенства (14.46) соответствует разность энергий $2E(22) - E(21)$, которая, согласно формуле (9.17), равна

$$\frac{9 + 27 \left[1 - \frac{8}{9} \sin^2(3\gamma_0) \right]^{1/2}}{4 \sin^2(3\gamma_0)}.$$

* Энергия, определяемая формулой (14.66), в два раза меньше энергии $E(0)$ аксиально симметричного ядра (14.43), если последнее имеет такое же значение Γ . Напомним также, что

$$E(0_\beta) \approx \begin{cases} 2h \sqrt{C/B} & \text{— сферическое ядро;} \\ h \sqrt{C/B} & \text{— несферическое ядро.} \end{cases}$$

Следовательно, в случае неаксиальных ядер равенство (14.46) не выполняется. Не выполняется и равенство (14.46а), так как, согласно выражению (14.61), энергия $E(0_\beta) \equiv E_{0001} \approx \mu^{-2}$. Следовательно, учитывая равенство (14.66), имеем

$$\frac{E(0_\gamma)}{E(0_\beta)} = \frac{\mu^2}{2\Gamma^2}, \text{ если } \gamma_0 \neq 0.$$

§ 15. ПРИВЕДЕННЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ В МАЛОДЕФОРМИРУЕМЫХ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДРАХ

В § 14 были найдены собственные функции (14.6), (14.23), (14.36) оператора нулевого приближения (14.5). В некоторых случаях, например при вычислении вероятностей $E0$ -переходов, приходится учитывать и опущенный оператор (14.4). В единицах $\frac{h^2}{B_{\gamma 0}^2}$ этот оператор при учете равенства (14.25) имеет вид

$$h^1 = \frac{\gamma^2}{8\Gamma^4} \left(\frac{\beta}{\beta_0} - \frac{\beta_0^2}{\beta^2} \right).$$

Собственные функции оператора $h_0 + h^1$ в первом порядке теории возмущений будут

$$|i\rangle = \psi_i + \sum_{l \neq i}' \frac{\langle \psi_l | h^1 | \psi_i \rangle}{\epsilon_i - \epsilon_l} \psi_l, \quad (15.1)$$

где

$$\epsilon_i = \frac{n_\beta}{\mu^2} + \frac{1}{\Gamma^2} \left(n_\gamma + \frac{K}{4} \right) + \frac{1}{6} \left\{ I(I+1) - \frac{3}{4} K^2 \right\} \quad (15.2)$$

собственные значения оператора h_0 (14.7а);

$$\psi_i \equiv \psi_{IKn_\gamma n_\beta} = X_{IKn_\gamma}(z, \theta) \varphi_{n_\beta}(\zeta) \quad (15.3)$$

собственные функции оператора h_0 . При этом функции X_{IKn_γ} определяются с помощью выражений (14.32)–(14.35) и (14.30); функции $\varphi_{n_\beta}(\zeta)$ определены выражением (14.23). Для сокращения записи использованы переменные

$$z = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\Gamma} \right)^2, \quad \zeta = \frac{\beta - \beta_0}{\mu \beta_0}. \quad (15.4)$$

В этих переменных оператор h^1 имеет вид

$$h^1 \approx \frac{3}{4} \mu z \zeta \Gamma^{-2}. \quad (15.5)$$

Приведенные вероятности $E2$ -переходов $\left(\text{в единицах } \frac{Q_0^2}{16\pi} \right)$ в четно-четных аксиально симметричных малодеформируемых ядрах между состояниями $|i\rangle \equiv |IK n_\gamma n_\beta\rangle$ и $|f\rangle \equiv |I'K' n'_\gamma n'_\beta\rangle$, усредненные по поляризациям начального состояния ядра и просуммированные по всем возможным поляризациям излучаемого γ -кванта и конечного состояния ядра, определяются выражениями

$$b(E2; i \rightarrow f) = \frac{5}{2I+1} \sum_{MM'm} |\langle f | t_{2m} | i \rangle|^2, \quad (15.6)$$

где для малых продольных и поперечных колебаний около равновесных значений $\beta \neq 0$ и $\gamma_0 = 0$ оператор t_{2m} в переменных (15.4) имеет вид

$$t_{2m} = (1 + \mu^2 \zeta^2) \left\{ (1 - \Gamma^2 \zeta^2) D_{m0}^2 + \Gamma V \sqrt{z} \left(1 - \frac{1}{3} z \Gamma^2 \right) \times \right. \\ \left. \times (D_{m2}^2 + D_{m, -2}^2) \right\}.$$

Равенство (15.6) получается из выражения (13.8) после разложения по степеням z и ζ .

Вычисление приведенных вероятностей $E2$ -переходов на основании формулы (15.6) для аксиально симметричных ядер при μ и $\Gamma < 0,3$ проводилось в работе Ростовского и автора [95].

Эти вероятности в единицах $\frac{Q_0^2}{16\pi}$ выражаются приближенно непосредственно через два отношения (14.44) и (14.45) энергий возбужденных состояний:

$$q \equiv \frac{E(0_\beta)}{E(2_0)} \approx \mu^{-2} \quad \text{и} \quad s \equiv \frac{E(2,2)}{E(2,0)} \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\Gamma^2} \right) \approx \frac{1}{2\Gamma^2}. \quad (15.7)$$

Теория развивается в приближении μ и $\Gamma < 0,3$, следовательно, полученные ниже результаты применимы для значений $q > 11$ и $s > 6$. Согласно работе [95], приведенные вероятности $E2$ -переходов внутри основной вращательной полосы ($n_\beta = n_\gamma = 0$, $K \approx 0$)

$$b(E2; I1 \rightarrow I'1) \equiv b(E2; 1000 \rightarrow I'000) = 5(2I00 | I'0)^2 \left(1 - \frac{1}{s} \right) \times \\ \times \left(1 - \frac{2}{3} \frac{s}{q^2} \right)^2, \quad (15.8)$$

где $(2ImM | I'M')$ — коэффициенты векторного сложения. В част-

ности, для переходов с первого возбужденного состояния в основное имеем

$$b(E2; 21 \rightarrow 01) = \left(1 - \frac{1}{s}\right) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{s}{q^2}\right). \quad (15.9)$$

Приведенные вероятности $E2$ -переходов внутри возбужденных состояний первой аномальной вращательной полосы ($n_\beta = n_\gamma = 0$, $K \approx 2$)

$$b(E2; I200 \rightarrow I'200) = 5 (2I02/I'2)^2 \left(1 - \frac{2}{s}\right) \left(1 - 3 \frac{s}{q^2}\right)^2. \quad (15.10)$$

Приведенные вероятности $E2$ -переходов из уровней аномальной на уровни основной вращательной полосы ($n_\beta = n_\gamma = 0$)

$$b(E2; I200 \rightarrow I'000) = 10 (2I - 2, 2 | I'0)^2 (2s^2 - 1)^{-1} \left(1 - \frac{9}{4} \frac{s}{q^2}\right)^2 \times \\ \times \left\{1 + \frac{2}{3(2I, -2, 2 | I'0)(2s-1)} \left[a(I') (2I02 | I'2) - 2(2I, -2, 2 | I'0) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} [1 + (-1)^I] (2I00 | I'0) a(I) \right] \right\}, \quad (15.11)$$

где

$$a(I) \equiv \sqrt{\frac{2}{3} (I-1) I (I+1) (I+2)}.$$

В частности,

$$b(E2; 22 \rightarrow 01) = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{3}{2s}\right) \left(1 - \frac{9}{4} \frac{s}{q^2}\right)^2, \quad (15.12)$$

$$b(E2; 22 \rightarrow 21) = \frac{10}{7s} \left(1 + \frac{5}{2s}\right) \left(1 - \frac{9}{4} \frac{s}{q^2}\right)^2. \quad (15.13)$$

Приведенные вероятности $E2$ -переходов с уровней первой вращательно-бета-вибрационной полосы ($I_\beta, K \approx 0, n_\beta = 1, n_\gamma = 0$) на уровни основной вращательной полосы ($I, K \approx 0, n_\beta = n_\gamma = 0$) вычисляются по формуле

$$b(E2; I_\beta \rightarrow I) \equiv b(E2; I_\beta 001 \rightarrow I000) = \frac{5}{2q} \times \\ \times (2I_\beta 00 | I0)^2 \left(1 - \frac{1}{s}\right). \quad (15.14)$$

В частности,

$$b(E2; 2_\beta \rightarrow 21) = 5b(E2; 2_\beta \rightarrow 01) = \frac{7}{2} b(E2; 2_\beta \rightarrow 21) = \\ = \frac{5}{2q} \left(1 - \frac{1}{s}\right). \quad (15.15)$$

Приведенные вероятности $E2$ -переходов с уровней первой вращательно-гамма-вибрационной полосы ($I_\gamma, K \approx 0, n_\gamma = 1, n = 0$) на уровни основной вращательной полосы выражаются формулой

$$b(E2; I_\gamma \rightarrow I_1) = \frac{5}{4s^2} (2I_\gamma 00 | I_0)^2 \left\{ \frac{q^2 - \left(s - \frac{1}{2}\right)^2}{q^2 - 4\left(s - \frac{1}{2}\right)^2} \right\}^2. \quad (15.16)$$

В частности,

$$\begin{aligned} b(E2; 0_\gamma \rightarrow 21) &= \frac{7}{2} b(E2; 2_\gamma \rightarrow 21) = \\ &= 5b(E2; 2_\gamma \rightarrow 0) = \frac{5}{4s^2} \left\{ \frac{q^2 - \left(s - \frac{1}{2}\right)^2}{q^2 - 4\left(s - \frac{1}{2}\right)^2} \right\}^2. \end{aligned} \quad (15.17)$$

В случае ядер, жестких по отношению к поперечным колебаниям (малые Γ) и мягких по отношению к продольным колебаниям ($\mu > 0,4$), приведенные вероятности $E2$ -переходов следует определять по формулам § 13. В другом предельном случае ($\mu \leq 0,1$, или $q > 100$) можно использовать адиабатическое приближение по отношению к продольным колебаниям.

В адиабатическом приближении относительно продольных колебаний ($q \rightarrow \infty$) при $s \approx \frac{1}{2\Gamma^2} > 6$ с точностью до Γ^2 из выражений (15.8) и (15.10) для $E2$ -переходов внутри однотипных полос следует

$$b^a(E2; I1 \rightarrow I'1) = 5(2I00 | I'0)^2 (1 - 2\Gamma^2),$$

В частности,

$$\begin{aligned} b^a(E2; 21 \rightarrow 01) &= (1 - 2\Gamma^2); \\ b^a(E2; I2 \rightarrow I'2) &= 5(2I02 | I'2)^2 (1 - 4\Gamma^2). \end{aligned} \quad (15.18)$$

Для $E2$ -переходов из уровней аномальной на уровни основной вращательной полосы находим в адиабатическом приближении из уравнения (15.12) и (15.13)

$$\left. \begin{aligned} b^a(E2; 22 \rightarrow 01) &\approx 2\Gamma^2, \\ b^a(E2; 22 \rightarrow 21) &\approx \frac{20}{7} \Gamma^2. \end{aligned} \right\} \quad (15.19)$$

С другой стороны, согласно адиабатической теории вращательных состояний жесткого неаксиального ротатора, при $\gamma_{\text{эфф}} \ll 1$, из формул (10.12) следует

$$\left. \begin{aligned} b_{\text{rot}}^a(E2; 21 \rightarrow 01) &= 1 - \gamma_{\text{эфф}}^2; \\ b_{\text{rot}}^a(E2; 22 \rightarrow 01) &= \gamma_{\text{эфф}}^2; \\ b_{\text{rot}}^a(E2; 22 \rightarrow 21) &= \frac{10}{7} \gamma_{\text{эфф}}^2. \end{aligned} \right\} \quad (15.20)$$

Сравнив выражения (15.18) и (15.19) с выражениями (15.20), мы убедимся, что они совпадут, если $\gamma_{\text{эфф}}^2 = 2\Gamma^2$. При сравнении энергетических уровней (§ 14) мы пришли к заключению, что согласие наблюдается при выполнении равенства (14.50), т. е. $\gamma_{\text{эфф}}^2 = \Gamma^2$. Если принять последнее равенство, то приведенные вероятности (15.19) будут в два раза больше вероятностей, определяемых двумя последними выражениями (15.20). На это обстоятельство впервые обратили внимание Беляк и Заикин [93].

Перейдем к исследованию монопольных электрических $E0$ -переходов в малодеформируемых аксиально симметричных четно-четных ядрах. Вероятности таких переходов (см. § 7) зависят от ядерного матричного элемента

$$\rho(i \rightarrow f) = \langle f | \mathfrak{M}(E0) | i \rangle,$$

где $|i\rangle$ и $|f\rangle$ — соответственно функции начального и конечного состояний ядра. В нашем случае они определяются выражением (15.1). Таким образом, ядерный матричный элемент можно записать в виде

$$\rho(i \rightarrow f) = \langle \psi_f | \mathfrak{M}(E0) | \psi_i \rangle + \sum_I \left\{ \frac{\langle \psi_f | h^1 | \psi_I \rangle \langle \psi_I | \mathfrak{M}(E0) | \psi_i \rangle}{\epsilon_f - \epsilon_I} + \frac{\langle \psi_f | \mathfrak{M}(E0) | \psi_I \rangle \langle \psi_I | h^1 | \psi_i \rangle}{\epsilon_i - \epsilon_I} \right\}, \quad (15.21)$$

где оператор электрического монопольного перехода, согласно выражению (7.12), имеет вид

$$\mathfrak{M}(E0) = A(\beta^2 + B\beta^3 \cos 3\gamma), \quad \text{где } A \equiv \frac{3Z}{4\pi}; \quad B = \frac{5\sqrt{5}}{21\sqrt{\pi}}. \quad (15.22)$$

Хара [98] показал, что этот оператор по своей структуре близок к оператору изменения поверхности ядра

$$S - S_0 = \frac{2S_0}{4\pi} \left(\beta^2 - \frac{1}{5} B\beta^3 \cos 3\gamma \right), \quad \text{где } S_0 = 4\pi R_0^2.$$

Следовательно, $E0$ -переходы отличны от нуля только в том случае, когда переход сопровождается изменением поверхности

ядра, т. е. при вычислении вероятности таких переходов нельзя пользоваться адиабатическим приближением. По этой же причине значение теоретической вероятности $E0$ -перехода существенно зависит от использованной в теории модели ядра.

$E0$ -переходы могут происходить между состояниями ядра, имеющими одинаковый спин I и четность. Если $I \neq 0$, то $E0$ -переход сопровождается обычно электрическим квадрупольным переходом. В этом случае вместо ядерного матричного элемента $\rho(i \rightarrow f)$ удобно использовать введенное Расмуссеном [99] и Райнером [100] безразмерное отношение

$$X \left(\frac{E0; i \rightarrow f}{E2; i \rightarrow f} \right) \equiv \frac{B(E0; i \rightarrow f)}{B(E2; i \rightarrow f)}, \quad (15.23)$$

где

$$B(E0; i \rightarrow f) \equiv e^2 R_0^4 \rho^2(i \rightarrow f) \quad (15.24)$$

«приведенная ядерная вероятность» $E0$ -перехода. Если $E0$ -переход происходит между состояниями нулевого спина, то квадрупольные электрические переходы между этими состояниями запрещены. В этом случае вместо отношения (15.23) рассматривают отношение приведенной вероятности $E0$ -перехода (15.24) к вероятности $E2$ -перехода с уровня спина $0'$ на ближайший к основному состоянию уровень спина 2

$$X \left(\frac{E0; 0' \rightarrow 0}{E2; 0' \rightarrow 2} \right) \equiv \frac{B(E0; 0' \rightarrow 0)}{B(E2; 0' \rightarrow 2)}. \quad (15.25)$$

Исследуем теперь $E0$ -переходы в аксиально симметричных малодеформируемых ядрах (μ и $\Gamma < 0,3$). Если переходы происходят с изменением квантовых чисел n_β или n_γ , то при вычислении ядерных матричных элементов $\rho(i \rightarrow f)$ достаточно использовать волновые функции ядерных состояний в нулевом приближении (14.23), (14.30), т. е. положим,

$$\begin{aligned} \psi_i = & \left\{ \frac{\left(n_\gamma + \frac{K}{2}\right)!}{n_\gamma! 2^{n_\gamma} n_\beta! \sqrt{\pi}} \right\}^{1/2} \frac{z^{\frac{K}{4}}}{\left(\frac{k}{2}\right)!} e^{-\frac{1}{2}(z+\bar{z})^2} |IMK\rangle H_{n_\beta}(\zeta) \times \\ & \times F\left(-n_\gamma, 1 + \frac{K}{2}; z\right). \end{aligned} \quad (15.26)$$

Эти функции определены в пространстве переменных $\zeta, z, \theta_1, \theta_2, \theta_3$, изменяющихся в пределах

$$0 \leq \zeta < \infty, \quad 0 \leq z < \infty, \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$$

с элементом объема $d\tau = d\zeta dz d\theta_1 \sin \theta_2 d\theta_2 d\theta_3$.

Оператор $E0$ -перехода (15.22) в переменных, определяемых выражениями (15.4), имеет вид

$$\mathfrak{M}(E0) = A\beta_0^2 \{ 2\mu\zeta - 9B\beta_0\Gamma^2 z + \mu\zeta^2 - 27B\beta_0\Gamma^2 \mu\zeta + \dots \}. \quad (15.27)$$

Используя функции (15.26) и выражение (15.27), находим для $E0$ -переходов между состояниями первой β -вибрационной полосы ($I001$) и основной вращательной полосы того же спина (энергия перехода $\sim \mu^{-2}$)

$$\rho(I, n_\beta = 1 \rightarrow I, n_\beta = 0) \approx \frac{3\sqrt{2}}{4\pi} Z\mu \beta_0^2. \quad (15.28)$$

Ядерный матричный элемент $E0$ -перехода с уровней вращательной полосы поперечных колебаний ($I010$) на уровни основной вращательной полосы того же спина

$$\rho(I, n_\gamma = 1 \rightarrow I, n_\gamma = 0) \approx \frac{45\sqrt{5}}{28\pi^{3/2}} Z\Gamma \beta_0^3. \quad (15.29)$$

Матричный элемент (15.29) значительно меньше матричного элемента (15.28).

Ядерные матричные элементы $E0$ -переходов с уровней вращательной полосы поперечных колебаний на уровни вращательной полосы продольных колебаний того же спина имеют вид

$$\begin{aligned} \rho(I, n_\gamma = 1, n_\beta = 0 \rightarrow I, n_\gamma = 0, n_\beta = 1) = \\ = \frac{135\sqrt{5}}{28\sqrt{2}\pi^{3/2}} Z\beta_0^3 \mu \Gamma^2. \end{aligned} \quad (15.30)$$

При исследовании $E0$ -переходов между уровнями аномальной вращательной полосы ($I, K \approx 2, 0, 0$) и уровнями основной вращательной полосы уже нельзя пользоваться функциями нулевого приближения (15.26). Необходимо более точно учесть связь вращения с поперечными колебаниями и влияние оператора (15.5), характеризующего связь между поперечными и продольными колебаниями поверхности ядра. Такие вычисления были проделаны в работе Ростовского и автора [95]. Ниже приведены результаты этих вычислений, выраженные непосредственно через величины q и s , характеризующие отношения энергий (15.7)

$$\rho(I200 \rightarrow I000) = - \frac{3Z\beta_0^2 \sqrt{(I-1)I(I+1)(I+2)}}{\sqrt{3} (2s-1) [q^2 - (s-1)^2]}.$$

В частности,

$$\rho(22 \rightarrow 20) = - \frac{3Z\beta_0^2}{\pi} \left(s - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} [q^2 - (s-1)^2]^{-1}.$$

Приведем также полученные в работе [95] более точные значения ядерных матричных элементов (15.29) и (15.30)

$$\rho(I, n_\gamma = 1 \rightarrow I, n_\gamma = 0) = \frac{9Z\beta_0^2 \left(s - \frac{1}{2}\right)}{4\pi[q^2 - (2s-1)^2]},$$

$$\rho(I, n_\gamma = 1, n_\beta = 0 \rightarrow I, n_\gamma = 0, n_\beta = 1) = \frac{135\sqrt{5} Z\beta_0^3 \left(q - s + \frac{1}{2}\right)}{\left(s - \frac{1}{2}\right) q^{3/2}}.$$

Используя полученные значения и соответствующие приведенные вероятности $E2$ -переходов, найденные в этом параграфе, можно получить значение безразмерных отношений (15.23) и (15.25). Для переходов между уровнями спина 0 имеем

$$X\left(\frac{E0; 0_\beta \rightarrow 0}{E2; 0_\beta \rightarrow 20}\right) = 4\beta_0^2 \left(1 + \frac{1}{s}\right),$$

$$X\left(\frac{E0; 0_\gamma \rightarrow 0}{E2; 0_\gamma \rightarrow 20}\right) = 36\beta_0^2 \left(1 - \frac{q^2}{s^2}\right)^{-2}.$$

Для переходов между уровнями спина 2 имеем

$$X\left(\frac{E0; 22 \rightarrow 20}{E2; 22 \rightarrow 20}\right) = 56\beta_0^2 [q^2 - (s-1)^2]^{-2} \left(1 - \frac{2}{s}\right) \left(1 + \frac{9s}{2q^2}\right);$$

$$\begin{aligned} X\left(\frac{E0; 2_\beta \rightarrow 20}{E2; 2_\beta \rightarrow 20}\right) &= \frac{7}{10} X\left(\frac{E0; 2_3 \rightarrow 20}{E2; 2_\beta \rightarrow 0}\right) = \\ &= \frac{7}{2} X\left(\frac{E0; 0_\beta \rightarrow 0}{E2; 0_\beta \rightarrow 20}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X\left(\frac{E0; 2_\gamma \rightarrow 20}{E2; 2_\gamma \rightarrow 20}\right) &= \frac{7}{10} X\left(\frac{E0; 2_\gamma \rightarrow 20}{E2; 2_\gamma \rightarrow 0}\right) = \\ &= \frac{7}{2} X\left(\frac{E0; 0_\gamma \rightarrow 0}{E2; 0_\gamma \rightarrow 20}\right). \end{aligned}$$

Следует, конечно, иметь в виду, что все приведенные выше выражения справедливы, только если $q > 11$ и $s > 6$.

Перейдем к исследованию $E0$ - и $E2$ -переходов в неаксиальных ядрах. В случае ядер, достаточно жестких по отношению к поперечным колебаниям, когда $\Gamma < 0,3$ (и $\Gamma < \gamma_0$), приведенные вероятности $E2$ -переходов можно вычислить по формулам § 13. Однако вероятности $E0$ -переходов в адиабатическом при-

ближении по отношению к поперечным колебаниям ($\Gamma \rightarrow 0$), равны нулю. Поэтому при вычислении $E0$ -переходов надо учесть взаимодействие вращения с поперечными колебаниями поверхности ядра. При $\Gamma < 0,3$ влияние поперечной деформируемости на $E0$ -переходы может быть учтено методом теории возмущений, если рассматривать второе слагаемое в равенстве (14.54) как оператор возмущения. Введем новую переменную

$$\xi = \frac{\gamma - \gamma_0}{\sqrt{2} \Gamma}, \quad (15.31)$$

тогда оператор возмущения

$$T'_{\text{rot}} \equiv (\gamma - \gamma_0) \left(\frac{\partial T_{\text{rot}}}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=\gamma_0} = \xi \Gamma \cdot F, \quad F \equiv \sqrt{2} \left(\frac{\partial T_{\text{rot}}}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=\gamma_0}. \quad (15.32)$$

В этом случае волновые функции нулевого приближения (14.56)

$$\chi_{I\pi\gamma}^0 = g_{n\gamma}(\xi) \Phi_{I\pi}(\gamma_0, \theta) \quad (15.33)$$

заменяются функциями

$$\chi_{I\pi\gamma} = \chi_{I\pi\gamma}^0 + \Gamma \sum_{\tau' n'_\gamma} \frac{\langle I\tau' n'_\gamma | \xi \cdot F | I\pi n_\gamma \rangle \chi_{I\tau'}^0}{\frac{1}{2} [\varepsilon_{I\tau}(\gamma_0) - \varepsilon_{I\tau'}(\gamma_0)] + \frac{1}{\Gamma^2} (n_\gamma - n'_\gamma)}. \quad (15.34)$$

В сумме (15.34) матричные элементы операторов ξF вычисляются с помощью функций (15.33) нулевого приближения. Следовательно,

$$\langle I\tau' n'_\gamma | \xi F | I\pi n_\gamma \rangle = \langle g_{n'_\gamma} | \xi | g_{n_\gamma} \rangle \langle \Phi_{I\tau'} | F | \Phi_{I\pi} \rangle. \quad (15.35)$$

Учитывая функции (14.58), имеем

$$\langle g_{n'_\gamma} | \xi | g_{n_\gamma} \rangle = \sqrt{\frac{n_\gamma}{2}} \delta_{n'_\gamma, n_\gamma-1} + \sqrt{\frac{n_\gamma+1}{2}} \delta_{n'_\gamma, n_\gamma+1}. \quad (15.36)$$

Второй матричный элемент в правой части равенства (15.35) можно вычислить методом, предложенным в работе Хара [98]. Функции $\Phi_{I\pi}$, согласно уравнению (14.59), удовлетворяют уравнению

$$T_{\text{rot}}(\gamma_0) \Phi_{I\pi} = 2\varepsilon_{I\pi} \Phi_{I\pi}.$$

Дифференцируя по γ_0 , находим

$$\frac{\partial T_{\text{rot}}}{\partial \gamma_0} \Phi_{I\pi} + T_{\text{rot}} \frac{\partial}{\partial \gamma_0} \Phi_{I\pi} = 2\varepsilon_{I\pi} \frac{\partial \Phi_{I\pi}}{\partial \gamma_0} + 2 \frac{\partial \varepsilon_{I\pi}}{\partial \gamma_0} \Phi_{I\pi}.$$

После умножения полученного равенства на $\Phi_{I\tau}^*$ и интегрирования по углам Эйлера получаем, учитывая определения (15.32),

$$\langle \Phi_{I\tau'} | F | \Phi_{I\tau} \rangle = 2 \sqrt{2} \left\{ [\epsilon_{I\tau} - \epsilon_{I\tau'}] \left\langle \Phi_{I\tau'} \left| \frac{\partial}{\partial \gamma_0} \right| \Phi_{I\tau} \right\rangle + \frac{\partial \epsilon_{I\tau}}{\partial \gamma_0} \delta_{\tau\tau'} \right\}. \quad (15.37)$$

Подставляя матричные элементы (15.36) и (15.37) в сумму (15.34), находим волновые функции в первом приближении для состояний $n_{\gamma} \approx 0$

$$\chi_{I\tau 0} = \chi_{I\tau 0}^0 - \frac{1}{2} \Gamma^3 \left\{ \frac{\partial \epsilon_{I\tau}}{\partial \gamma_0} \chi_{I\tau 1}^0 + \sum_{\tau'} (\epsilon_{I\tau} - \epsilon_{I\tau'}) \times \right. \\ \left. \times \left\langle \Phi_{I\tau'} \left| \frac{\partial}{\partial \gamma_0} \right| \Phi_{I\tau} \right\rangle \chi_{I\tau' 1}^0 \right\}. \quad (15.38)$$

Чтобы получить полную волновую функцию, надо умножить функцию (15.38) на функцию (14.23) продольных колебаний.

Вычислим ядерный матричный элемент E0-перехода между состояниями $|I\tau 0_{\gamma} 0_{\beta}\rangle = |1100\rangle$ основной и первой аномальной $|I200\rangle$ вращательных полос. Разлагая оператор E0 перехода (15.22) в ряд по степеням ξ и учитывая только линейные члены разложения, имеем

$$\mathfrak{M}(E0) = A \{ \beta^2 + B\beta^3 \cos 3\gamma_0 - 3B\beta^3 \Gamma \sin(3\gamma_0) \}. \quad (15.39)$$

Используя равенства (15.38), (14.23) и (15.39), находим окончательно

$$\rho(I200 \rightarrow I100) \approx \frac{15\sqrt{5}}{28\pi^{3/2}} (\epsilon_{I2} - \epsilon_{I1}) \left\langle \Phi_{I1} \left| \frac{\partial}{\partial \gamma_0} \right| \Phi_{I2} \right\rangle \times \\ \times Z\beta_0^3 \Gamma^4 \sin 3\gamma_0. \quad (15.40)$$

В частности, при $I=2$, используя результаты § 9, имеем

$$\epsilon_{22} - \epsilon_{21} = \frac{6\sqrt{9-8\sin^2(3\gamma_0)}}{\sin^2(3\gamma_0)}, \\ \left\langle \Phi_{21} \left| \frac{\partial}{\partial \gamma_0} \right| \Phi_{22} \right\rangle = -\frac{4\sin^2(3\gamma_0)}{9-8\sin^2(3\gamma_0)}.$$

Следовательно,

$$\rho(I2 \rightarrow I1) = -\frac{90\sqrt{5}}{7\pi^{3/2}} \frac{\sin(3\gamma_0)}{\sqrt{9-8\sin^2(3\gamma_0)}} Z\beta_0^3 \Gamma^4.$$

Ядерные матричные элементы (15.40) отличны от нуля, потому что функции (15.38) состояний, между которыми про-

исходит переход, содержат малые примеси (пропорциональные Γ^2) возбужденных состояний с квантовыми числами $n_\gamma = 1$.

Вычисление ядерных матричных элементов $E0$ -переходов, в которых либо n_γ , либо n_β меняется на единицу, можно производить с помощью функций (14.62) нулевого приближения. Такие вычисления производились в работе Ростовского, Чабана и автора [92].

Ядерные матричные элементы $E0$ -перехода с вращательных уровней первой β -вибрационной полосы на соответствующие уровни основной вращательной полосы равны

$$\rho(I 101 \rightarrow I 100) = -\frac{3\sqrt{2}}{4\pi} Z\beta_0^2 \mu.$$

Естественно, что этот матричный элемент совпадает в таком приближении с матричным элементом (15.28).

Ядерные матричные элементы $E0$ -переходов с вращательных уровней первой вращательной полосы поперечных колебаний на соответствующие уровни основной вращательной полосы определяются выражением

$$\rho(I 110 \rightarrow I 100) = -\frac{15\sqrt{5}}{28\pi^{3/2}} Z\beta_0^3 \Gamma \sin(3\gamma_0).$$

Наконец для матричного элемента $E0$ -переходов между вращательными уровнями полос поперечных и продольных колебаний находим

$$\rho(I 110 \rightarrow I 101) = -\frac{45\sqrt{10}}{56\pi^{3/2}} Z\beta_0^3 \mu \Gamma \sin(3\gamma_0).$$

В заключение этого параграфа приведем значения ядерных матричных элементов $E0$ -переходов, вычисленных [92] на основе модели сферического ядра, рассмотренной в § 4. В сферическом ядре единственным параметром теории является величина β_{00} , характеризующая, согласно (4.53), среднее значение квадрата амплитуды нулевых квадрупольных колебаний поверхности ядра в основном состоянии

$$\beta_{00}^2 = \frac{2}{5} (00|\beta^2|00).$$

В сферическом ядре состояния нулевого спина определяются функциями (4.50) с квантовыми числами $0n\lambda$. Обозначим ядерные матричные элементы $E0$ -переходов между такими состояниями

$$\rho_{\text{сфер}}(0, n, \lambda \rightarrow 0, n' \lambda') \equiv (\psi_{0n'\lambda'} | \mathfrak{M}(E0) | \psi_{0n\lambda}).$$

Используя оператор (15.22) и функции (4.50), находим

$$\rho(010 \rightarrow 000) = -\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{3Z\rho_{00}^2}{4\pi}$$

для перехода с энергией $2\hbar\omega$ с первого возбужденного состояния нулевого спина в основное состояние;

$$\rho(001 \rightarrow 000) = \frac{75Z}{7\sqrt{42\pi^3}} \rho_{00}^3$$

для перехода с энергией $3\hbar\omega$ со второго возбужденного состояния нулевого спина в основное состояние.

Ядерные матричные элементы $E0$ -перехода с энергией между двумя первыми состояниями спина 2, определяемыми функциями (4.57) и (4.61), равны

$$\rho_{\text{сфер}}(220 \rightarrow 210) = \frac{15\sqrt{5}}{8\sqrt{14\pi^3}} Z\rho_{00}^3.$$

§ 16. ОКТУПОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ АТОМНЫХ ЯДРАХ

В сферических четно-четных ядрах, кроме возбужденных уровней положительной четности, иногда наблюдаются при энергии ниже 2 Мэв уровни отрицательной четности: 1^- , 3^- , 5^- , ... Эти уровни обнаруживаются в основном в ядрах актинидов. Они образуют вращательную полосу с дополнительным квантовым числом $K \approx 0$. Начальный уровень такой полосы (1^-) впервые был обнаружен Азаро и др. [101] в 1958 г. в ядре Ra^{224} . Затем были обнаружены [102] уровни отрицательной четности и у других ядер. В области ядер элементов редких земель уровень 1^- имеет энергию $1 \sim 1,5 \text{ Мэв}$. У ядер актинидов этот уровень наблюдается значительно ниже $300 \div 1000 \text{ кэв}$. Наиболее полно уровни отрицательной четности представлены в ядре Th^{228} [102], где найдены две полосы уровней: уровни с $K \approx 0$ и спинами 1^- , 3^- , 5^- и уровни с $K \approx 2$ и спинами 2^- , 3^- , 4^- . Наблюдаются уровни 2^- и у некоторых других ядер. Положение уровней отрицательной четности в зависимости от числа нуклонов в ядре обсуждалось в обзорах Шелайна [103] и Девидсона [104]. На рис. 26, на основании данных книги [46], указано положение уровней 1^- в зависимости от числа нейтронов в ядре.

Теоретические исследования возбужденных состояний отрицательной четности в четно-четных ядрах на основе коллективной модели поверхностных колебаний ядер были впервые про-

ведены А. Бором с сотр. [105], а затем Липасом и Девидсоном [106], Девидсоном [107] и Лепером [108—110].

В сферических ядрах октупольными деформациями называются деформации ядра, которым соответствует форма ядра, описываемая в лабораторной системе координат функцией

$$R(\vartheta\varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{m=-3}^3 \alpha_{3m} Y_{3m}^*(\vartheta\varphi) \right). \quad (16.1)$$

Семь малых комплексных величин α_{3m} , удовлетворяющих соотношению

$$\alpha_{3m}^* = (-1)^m \alpha_{3, -m},$$

являются динамическими переменными октупольных колебаний. Классическая энергия малых октупольных колебаний выражается через эти переменные и их временные производные

$$E = \frac{1}{2} \sum_m \{ B_3 |\dot{\alpha}_{3m}|^2 + C_3 |\alpha_{3m}|^2 \}. \quad (16.2)$$

Переходя по правилам, рассмотренным в § 2 для колебаний произвольной мультипольности, к квантовому описанию и вводя

операторы рождения b_{3m}^+ и уничтожения b_{3m} октупольных возбуждений, можно получить оператор Гамильтона для октупольных поверхностных колебаний сферического ядра в виде

$$H = \sum_m \hbar \omega_3 \left(b_{3m}^+ b_{3m} + \frac{1}{2} \right), \quad (16.3)$$

где

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{C_3}{B_3}}.$$

Согласно равенству (16.3), однофононные октупольные возбуждения в сферическом ядре имеют энергию $\hbar \omega_3$. Энергетиче-

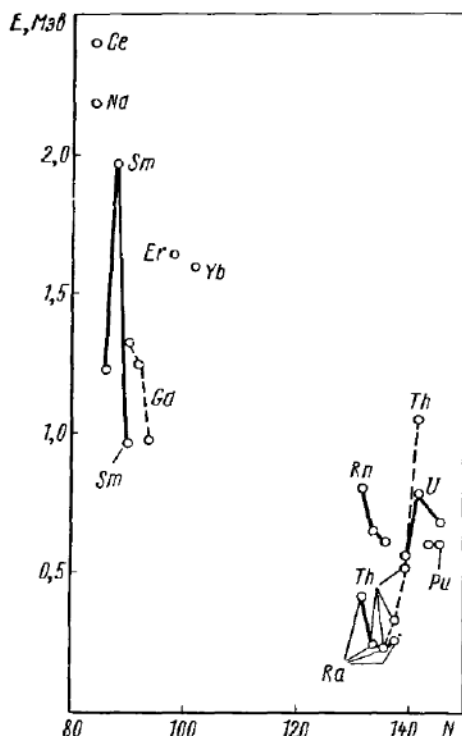


Рис. 26. Положение уровней отрицательной четности (I-) в зависимости от числа нейтронов в ядре.

ский уровень с энергией $h\omega_3$ семикратно вырожден. Семь состояний, описываемых волновыми функциями

$$\varphi_{3-, m} = b_{3m}^+ |0\rangle, \quad (16.4)$$

отличаются значениями $m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. В связи с тем что b_{3m} является тензорным оператором, возбужденные состояния (16.4) характеризуются спином 3 (в единицах $\hbar$), отрицательной четностью и проекцией спина m на ось квантования.

Состояния типа 1^- осуществляются в сферическом ядре путем линейной комбинации квадрупольных и октупольных возбуждений. Если $b_{2\mu}$ — оператор рождения квадрупольных возбуждений, то

$$\varphi_{1-, m} = \sum_{\mu} (2, 3, \mu, m - \mu | 1m) b_{2\mu}^+ b_{3, m-\mu}^+ |0\rangle. \quad (16.5)$$

В соответствии с формулой (16.5) наблюдаемые в четно-четных несферических ядрах возбужденные состояния отрицательной четности (1^-) можно рассматривать как октупольные колебания поверхности несферического ядра относительно равновесной формы, соответствующей квадрупольной деформации сферического ядра. Мгновенные значения формы ядра, соответствующей таким возбуждениям, можно записать в виде

$$R(\vartheta\varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{\mu=-2}^2 \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}^*(\vartheta\varphi) + \sum_{m=-3}^3 \alpha_{3m} Y_{3m}^*(\vartheta\varphi) \right). \quad (16.6)$$

Коэффициенты $\alpha_{2\mu}$ характеризуют в лабораторной системе осей статическую деформацию основного состояния ядра. Удобно поверхность ядра выражать в «собственной системе» координатных осей, связанных со статической деформацией квадрупольного типа. Это можно осуществить с помощью преобразования, аналогичного преобразованию (4.5),

$$\alpha_{2\mu} = \sum_{\gamma} D_{\mu\gamma}^2(\theta) a_{\gamma}, \quad (16.7)$$

где углы Эйлера $\theta \equiv \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ выбираются так, чтобы выполнялись соотношения

$$a_1 = a_{-1} = 0 \text{ и } a_2 = a_{-2}.$$

Вводя далее вещественные переменные β и γ равенствами

$$a_0 = \beta \cos \gamma, \quad a_2 = a_{-2} = \beta \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}},$$

можно преобразовать равенство (16.7) к виду

$$\alpha_{2\mu} = \beta \left\{ D_{\mu 0}^2(\theta) \cos \gamma + (D_{\mu 2}^2(\theta) + D_{\mu, -2}^2(\theta)) \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}} \right\}. \quad (16.7a)$$

При переходе от лабораторной системы координатных осей к «собственной системе» координатных осей одновременно с преобразованием переменных $a_{2\mu}$ [см. формулу (16.7)] изменяются и октупольные переменные

$$a_{3m} = \sum_{m'} D_{mm'}^3(0) a_{3m'}. \quad (16.8)$$

Углы Эйлера, входящие в равенство (16.8), те же, что и в равенстве (16.7).

Липас и Девидсон [106] рассмотрели только октупольные колебания в ядрах, имеющих аксиальную симметрию ($\gamma = \gamma_0 = 0$). Для упрощения вычислений предполагалось, что внутренние переменные a_{3m} октупольных колебаний удовлетворяют дополнительным условиям

$$a_{3,+1} = a_{3,+3} = 0, \quad a_{32} = a_{3,-2}. \quad (16.9)$$

По-видимому, эти дополнительные условия вполне допустимы при исследовании первых октупольных колебаний аксиально симметричных в основном состоянии ядер, когда квантовое число m проекции спина на аксиальную ось симметрии является сравнительно хорошим квантовым числом. Теория, свободная от дополнительных условий (16.9), была развита Лепером [108].

Ниже мы будем рассматривать только октупольные колебания, удовлетворяющие дополнительным условиям (16.9). В этом случае имеются только две внутренние динамические переменные a_{30} и $a_{32} = a_{3,-2}$, характеризующие октупольные колебания ядра, имеющего аксиальную симметрию в основном состоянии. Удобно ввести две другие переменные ξ и η с помощью соотношений

$$a_{30} = \xi \cos \eta, \quad a_{32} = a_{3,-2} = \xi \frac{\sin \eta}{\sqrt{2}}. \quad (16.10)$$

Переменная

$$\xi^2 = \sum_m |a_{3m}|^2 = \sum_m a_{3m}^2 \geq 0$$

характеризует общую октупольную деформацию. Угловая переменная η характеризует асимметрию октупольных колебаний, нарушающих аксиальную симметрию ядра, соответствующую значениям $\gamma = \eta = 0$. Изменение ξ при фиксированном значении $\eta = 0$ соответствует продольным октупольным колебаниям или « b »-колебаниям по терминологии, введенной Липасом и Девидсоном [106]. Изменение η (относительно $\eta = 0$) при фиксированном ξ соответствует поперечным октупольным колебаниям или « g »-колебаниям, согласно работе [106].

Потенциальная энергия квадрупольных и октупольных колебаний в собственной системе координатных осей неподвижного

ядра в приближении малых колебаний (с точностью до постоянного слагаемого) может быть записана в виде

$$V(\beta, \gamma, \zeta, \eta) = \frac{1}{2} \{ C_\beta (\beta - \beta_0)^2 + \beta_0^2 C_\gamma \gamma^2 + C_\zeta \zeta^2 + \zeta_0^2 C_\eta \eta^2 \}. \quad (16.11)$$

Кинетическая энергия малых квадрупольных и октупольных колебаний

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left\{ B \sum_{\mu} |\dot{\alpha}_{2\mu}|^2 + B_3 \sum_m |\dot{\alpha}_{3m}|^2 \right\}$$

при переходе с помощью унитарных преобразований (16.7) и (16.8) в собственную систему координат (см. § 4) при учете дополнительных условий (16.9) преобразуется к виду

$$\mathcal{H} = K_{\text{vib}} + K_{\text{rot}}, \quad (16.12)$$

где

$$K_{\text{vib}} = \frac{B}{2} (\dot{\beta}^2 + \beta^2 \dot{\gamma}^2) + \frac{B_3}{2} (\dot{\zeta}^2 + \zeta^2 \dot{\eta}^2); \quad (16.13)$$

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \omega_\lambda^2 J_\lambda^2; \quad (16.14)$$

$$J_\lambda = J_\lambda^{(2)} + J_\lambda^{(3)} \quad (16.15)$$

главные моменты инерции ядра;

$$J_\lambda^{(2)} = 4B\beta^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \lambda \right)$$

моменты инерции, обусловленные квадрупольной деформацией;

$$J_\lambda^{(3)} = B_3 \sum_{\nu\nu'} a_{3\nu} a_{3\nu'} \langle 3\nu' | I_\lambda^2 | 3\nu \rangle$$

моменты инерции, обусловленные октупольной деформацией. Учитывая (16.10) и значения отличных от нуля матричных элементов [см. равенство (Д.11) Приложения Д]

$$\begin{aligned} \langle 3\nu' | I_3^2 | 3\nu \rangle &= \nu^2 \delta_{\nu\nu'}, \quad \langle 3\nu' | I_1^2 | 3\nu \rangle = \\ &= \langle 3\nu' | I_2^2 | 3\nu \rangle = \frac{1}{2} (12 - \nu^2) \delta_{\nu\nu'}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 3, \nu + 2 | I_1^2 | 3\nu \rangle &= -\langle 3, \nu + 2 | I_2^2 | 3\nu \rangle = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(3 - \nu)(2 - \nu)(4 + \nu)(5 + \nu)}, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} J_1^{(3)} &= 4B_3\zeta^2 \left\{ \frac{3}{2} \cos 2\gamma + \sin^2 \gamma + \frac{1}{2} \sqrt{15} \sin \gamma \cos \gamma \right\}; \\ J_2^{(3)} &= 4B_3\zeta^2 \left\{ \frac{3}{2} \cos \gamma + \sin^2 \gamma - \frac{1}{2} \sqrt{15} \sin \gamma \cos \gamma \right\}; \\ J_3^{(3)} &= 4B_3\zeta^2 \sin^2 \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (16.16)$$

Если ввести проекции полного углового момента ядра на его главные оси с помощью соотношений

$$L_\lambda = \omega_\lambda J_\lambda,$$

то энергию квадрупольных и октупольных колебаний ядра можно записать в виде

$$E = \frac{B}{2} (\dot{\beta}^2 + \beta^2 \dot{\gamma}^2) + \frac{B_3}{2} (\dot{\zeta}^2 + \zeta^2 \dot{\gamma}^2) + V(\beta, \gamma, \zeta, \gamma) + \sum_{\lambda=1}^3 \frac{L_\lambda^2}{J_\lambda}. \quad (16.17)$$

Переходя от классического выражения (16.17) по общим правилам квантовой механики для случая криволинейных координат [9] к оператору Гамильтона, можно получить уравнение Шредингера, в котором волновые функции будут зависеть от семи динамических переменных: $\beta, \gamma, \zeta, \eta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$. В общем виде это уравнение еще не исследовалось.

В работе Вильямса и Девидсона [111] найдены собственные значения энергии жесткого ротатора, т. е. решения уравнения

$$\left\{ \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{I_\lambda^3}{J_\lambda^{(3)}} - \epsilon_{I\tau}^{(3)} \right\} \Phi_{I\tau} = 0, \quad (16.18)$$

где

$$j^{(3)} = \frac{4B_3\zeta^2}{\hbar^2} J_\lambda^{(3)}.$$

$J_\lambda^{(3)}$ — главные моменты инерции, определяемые только октупольными переменными ζ и γ по формулам (16.16); $\epsilon_{I\tau}^{(3)}$ — энергия вращения (в единицах $\frac{\hbar^2}{4B_3\zeta^2}$) жесткого «октупольно деформированного» ядра; I — полный спин; τ — номер уровня данного спина. Энергия $\epsilon_{I\tau}^{(3)}$ зависит только от параметра асимметрии η . В работе [111] найдены значения $\epsilon_{I\tau}^{(3)}$ как функции η ($0 \leq \eta \leq 90^\circ$) для

вращательных состояний с $I \leq 12$. К сожалению, найденные значения $\epsilon_{I\tau}^{(3)}$, как и проведенное в работе [111] (по аналогии с уравнением работы Чабана и автора [37]) исследование продольных октупольных колебаний на основе уравнения

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2B_3} \frac{1}{\zeta^3} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + \frac{\hbar^2 \epsilon_{I\tau}^{(3)}}{4B_3 \zeta^2} + V(\zeta) - E_{I\tau}^{(3)} \right\} \varphi_{I\tau}(\zeta) = 0,$$

могут представлять только методический интерес, так как моменты инерции несферических ядер в (16.18) должны включать не только малые слагаемые (16.16), обусловленные октупольными деформациями, но и моменты инерции $J_\lambda^{(2)}$, соответствующие квадрупольным деформациям, в частности, и равновесным деформациям в основном состоянии.

Более последовательно приближенное исследование октупольных колебаний было проведено в работах Липаса и Девидсона [106] и Лепера [108]. Ниже будут рассмотрены простейшие приближения в теории октупольных колебаний.

Случай фиксированных значений трех внутренних переменных: β , γ и η . Предположим, что ядро является достаточно жестким и первые его возбужденные состояния можно характеризовать некоторыми эффективными значениями: $\beta = \beta_0 \neq 0$, $\gamma = \gamma_0 < 15^\circ$ и $\eta = 0$. В этом приближении энергия (16.17) с точностью до постоянной может быть записана в виде

$$E = \frac{1}{2} B_3 \dot{\zeta}^2 + \sum_{\lambda=1}^3 \frac{L_\lambda^2}{J_\lambda^0} + V(\zeta), \quad (16.19)$$

где, согласно (16.15) и (16.16),

$$\left. \begin{aligned} J_1^0 &= 4B\beta_0^2 \sin^2(\gamma_0 - 120^\circ) + 6B_3 \zeta^2; \\ J_2^0 &= 4B\beta_0^2 \sin^2(\gamma_0 + 120^\circ) + 6B_3 \zeta^2; \\ J_3^0 &= 4B\beta_0^2 \sin^2 \gamma_0. \end{aligned} \right\} \quad (16.20)$$

Предположим далее, что выполняется адиабатическое приближение, т. е. $\langle \zeta^2 \rangle \ll \beta_0^2$. В этом случае можно пренебречь вкладом октупольных колебаний в главные моменты инерции ядра и считать вращение и продольные октупольные колебания независимыми. Полагая далее, $V(\zeta) = \frac{1}{2} C_\zeta \zeta^2$, и переходя от уравнения (16.19) к оператору Гамильтона, имеем

$$H = H_\zeta + H_{\text{rot}}^a, \quad (16.21)$$

где

$$H_{\zeta} = -\frac{\hbar^2}{2B_3} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} C_{\zeta} \zeta^2 \quad (16.22)$$

оператор Гамильтона гармонического осциллятора с частотой

$$\omega_{\zeta} = \sqrt{\frac{C_{\zeta}}{B_3}};$$

$$H_{\text{rot}}^a = \frac{\hbar^2}{8B_3 \rho_0^2} \sum_{\lambda} \frac{I_{\lambda}^2}{\sin^2 \left(\gamma_0 - \frac{2\pi}{2} \lambda \right)} \quad (16.23)$$

оператор энергии жесткого ротатора.

В этом приближении возбужденные состояния ядра можно рассматривать как совокупность внутренних возбуждений, определяемых оператором (16.22), и вращательных движений, определяемых оператором (16.23). В представлении чисел заполнения оператор внутреннего движения (16.22) можно записать в виде (постоянное слагаемое опущено)

$$H_{\zeta} = \hbar \omega_{\zeta} b_{30}^{\dagger} b_{30},$$

где $b_{30}^{\dagger}$ и b_{30} — соответственно операторы рождения и уничтожения октупольного возбуждения 3.0. Волновая функция n -квантового октупольного возбуждения может быть записана в виде

$$\varphi_n = (n!)^{-1/2} (b_{30}^{\dagger})^n |0\rangle. \quad (16.24)$$

Поскольку $b_{30}^{\dagger}$ является сферическим тензорным оператором третьего ранга, то функция (16.24) имеет четность $p = (-1)^n$.

Собственные функции оператора (16.21) должны удовлетворять рассмотренным в § 4 условиям инвариантности относительно неоднозначности выбора координатных осей собственной системы координат; они имеют четность, совпадающую с четностью внутренней функции, по отношению к оператору инверсии осей лабораторной системы координат. Этим условиям симметрии удовлетворяют функции

$$\psi_{IM\gamma np} = \varphi_n(\zeta) \sum_{K \geq 0} A_K(\gamma_0) |IMKp\rangle, \quad (16.25)$$

где $p = (-1)^n$, суммирование производится только по четным значениям K и

$$|IMKp\rangle = \left[\frac{(2I+1)}{16\pi^2(1+\delta_{0K})} \right]^{1/2} \{ D_{MK}^I(\theta) + (-1)^I p D_{M,-K}^I(\theta) \}. \quad (16.26)$$

При $p=1$ функции (16.26) совпадают с функциями (4.44а).
Функции

$$\sum_{K \geq 0} A_K(\gamma_0) |IMKp\rangle \quad (16.27)$$

являются собственными функциями оператора энергии (16.23) жесткого ротатора. Как показано в § 9, если $\gamma_0 < 0,3$, то в выражении (16.25) главную роль играет одно из слагаемых, соответствующее определенному значению K . Другими словами, при $\gamma_0 < 0,3$ волновое число K является сравнительно хорошим интегралом движения и функцию (16.25) можно заменить приближенной функцией

$$\psi_{IMKp} = \varphi_n(\xi) |IMKp\rangle.$$

Собственные значения оператора (16.23) при условии $\gamma_0 < 0,3$ выражаются формулой (9.35), которая с точностью до γ_0^2 может быть записана в виде

$$E_{IKp}^{\text{вращ}}(\gamma_0) = \frac{h}{4B\beta_0^2} \left\{ \frac{2}{3} \left[I(I+1) - \frac{3}{4} K^2 \right] + \frac{K^2}{4\gamma_0^2} + \left[\frac{4}{3} I(I+1) - \frac{13}{10} K^2 \right] \gamma_0^2 \right\}. \quad (16.28)$$

Полная энергия возбужденных состояний, соответствующая волновой функции (16.27), определяется равенством

$$E_{Kn}(I^p) = n\hbar\omega_\xi + E_{IKp}^{\text{вращ}}(\gamma_0). \quad (16.29)$$

Возбужденные состояния положительной четности при $n=0$ образуют системы вращательных полос с разными значениями K : 1) *основная вращательная полоса* ($K=0$) характеризуется, согласно равенству (16.28), энергиями

$$E_{00}(I^+) = \frac{h^2}{6B\beta_0^2} I(I+1) (1 + 2\gamma_0^2) \text{ при } I = 0^+, 2^+, 4^+ \dots \quad (16.30)$$

2) *первая аномальная вращательная полоса* ($K \approx 2$)

$$E_{20}(I^+) = \frac{h^2}{4B\beta_0^2} \left\{ \frac{2}{3} \left[I(I+1) - 3 \right] + \frac{1}{\gamma_0^2} + \left[\frac{4}{3} I(I+1) - \frac{26}{5} \right] \gamma_0^2 \right\} \quad (16.31)$$

при $I = 2^+, 3^+ \dots$

Возбужденные состояния отрицательной четности, соответствующие однофононным октупольным колебаниям ($n=1$), также образуют системы вращательных полос: 1. *Первая вра-*

щательная полоса октупольных колебаний ($K \approx 0$). Поскольку при $n=1$ значение $p=-1$, то из выражений (16.27) и (16.26) следует, что возможны только нечетные значения спина $I=1^-, 3^-, 5^- \dots$ Этим состояниям, согласно уравнениям (16.29) и (16.28), соответствуют энергии

$$E_{01}(I^-) = \hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 I(I+1)(1+2\gamma_0^2)}{6B\beta_0^2}, \quad I=1^-, 3^- \dots \quad (16.32)$$

2. Вторая вращательная полоса октупольных колебаний ($K \approx 2$). Возможные значения спинов $I=2^-, 3^- \dots$ Этим состояниям отрицательной четности соответствуют энергии

$$E_{2,1}(I^-) = \hbar\omega_c + \frac{\hbar^2}{4B\beta_0^2} \left\{ \frac{2}{3} [I(I+1) - 3] + \frac{1}{\gamma_0^2} + \left[\frac{4}{3} I(I+1) - \frac{26}{5} \right] \gamma_0^2 \right\}. \quad (16.33)$$

Из равенств (16.30) — (16.33) следует простое соотношение между уровнями квадрупольных и октупольных возбуждений (в адиабатическом приближении)

$$\frac{1}{3} E_{0,0}(2^+) + E_{2,1}(2^-) = E_{0,1}(1^-) + E_{2,0}(3^+). \quad (16.34)$$

Энергии уровней, входящих в равенство (16.34), известны у ядра Th^{228} . При этом $E_{00}(2^+) = 57,5$ кэв; $E_{2,1}(2^-) = 1123$ кэв; $E_{0,1}(1^-) = 3,27$ кэв и $E_{20}(2^+) = 969$ кэв. Следовательно, левая часть равенства (16.34) равна 1142 кэв, а правая часть — 1296 кэв.

Переходы с октупольных возбужденных состояний 1^- и 2^- в основное состояние 0^+ осуществляются при испускании электромагнитного излучения соответственно электрического дипольного ($E1$) и магнитного квадрупольного ($M2$). Для вычисления вероятностей таких переходов надо знать операторы $\mathfrak{M}_m(E1)$ и $\mathfrak{M}_m(M2)$ этих переходов. Оператор магнитного квадрупольного излучения может быть вычислен с помощью выражения (3.20)

$$\mathfrak{M}_m(M2) = \frac{2\mu_0 g_R}{3\hbar} \int \mathbf{R}(\mathbf{r}) \nabla [r^2 Y_{2m}(\vartheta, \varphi)] d\tau, \quad (16.35)$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ — оператор плотности орбитального момента, обусловленный квадрупольными и октупольными деформациями ядра. Поскольку компоненты (16.35) являются сферическими тензорными операторами второго ранга, то оператор (16.35) можно записать в виде

$$\mathfrak{M}_m(M2) = q \sum_{\mu} (23\mu, m - \mu | 2m) \alpha_{2\mu} \alpha_{3, m-\mu}, \quad (16.36)$$

где q — постоянная для данного ядра величина, зависящая от заряда ядра и радиуса R_0 равновеликой ядру сферы. Согласно вычислениям Лепера, $q = \frac{iZeR_0^3}{c(2\pi)^{3/2}}$, где Ze — электрический заряд ядра; c — скорость света. Используя равенства (16.7а) и (16.8), можно преобразовать (16.36) к внутренним динамическим переменным $a_{2\mu}$ и a_{3m} и углам Эйлера $\theta \equiv \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, определяющим поворот собственной системы координатных осей относительно лабораторной системы

$$\mathfrak{M}_m(M2) = q \sum_{\mu, \nu, l} (2, 3\mu, m - \mu | 2m) D_{\mu\nu}^{(2)}(\theta) D_{m-\mu}^{(3)}(\theta) a_{2\nu} a_{3l}.$$

В частном случае, когда $a_{20} = \beta$, $a_{2, \pm 1} = a_{2, \pm 2} = 0$, $a_{30} = \zeta$, $a_{3, \pm 1} = a_{3, \pm 2} = a_{3, \pm 3} = 0$, последнее выражение значительно упрощается

$$\mathfrak{M}_m(M2) = q\beta \sum_{\mu} (23\mu, m - \mu | 2m) D_{\mu 0}^2(\theta) D_{m-\mu, 0}^3(\theta).$$

Первые вычисления оператора $\mathfrak{M}(E1)$ электрического дипольного момента ядра было выполнено Мигдалом [112]. Затем оператор $E1$ -перехода вычислялся Струтинским [113], О. Бором и Моттельсоном [114, 115], Липасом [116] и Лепером [109].

В однороднозаряженном ядре дипольный момент равен нулю. Отличный от нуля дипольный момент возникает только за счет поляризуемости ядра, т. е. в результате смещения протонов относительно нейтронов. Это относительное смещение возможно при совместных квадрупольных и октупольных деформациях ядра. Оно обусловлено неодинаковым вкладом протонов и нейтронов в полную энергию ядра (эффект симметрии и кулоновское взаимодействие).

Компоненты оператора электрического момента могут определяться через квадрупольные $a_{2\mu}$ и октупольные a_{3m} деформации с помощью равенства

$$\mathfrak{M}_m(E1) = \rho \sum_{\mu} (23\mu, m - \mu | 1m) a_{2\mu} a_{3, m-\mu},$$

где ρ — постоянная для данного ядра величина, зависящая от параметра, определяющего вклад энергии симметрии в формулу Вайцзекера и другие характеристики ядра. Явное выражение ρ зависит от используемой модели.

ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ МАЛОЙ ЭНЕРГИИ В НЕЧЕТНЫХ АТОМНЫХ ЯДРАХ

§ 17. ОПЕРАТОР ЭНЕРГИИ МОДЕЛИ НЕЧЕТНОГО АТОМНОГО ЯДРА

Наличие «энергетической щели» в спектре однонуклонных состояний четно-четных ядер облегчает выделение коллективных возбуждений, соответствующих изменению формы поверхности и вращению несферических атомных ядер. В нечетных атомных ядрах энергия однонуклонных возбуждений обычно мало отличается от энергии коллективных возбуждений, поэтому их разделение возможно только в некоторых особых случаях. Взаимодействие между вращением ядра и движением внешнего нуклона, с одной стороны, изменяет структуру вращательного спектра, соответствующего адиабатическому приближению, с другой стороны, это взаимодействие изменяет спектр одночастичных возбуждений. Указанные выше обстоятельства затрудняют классификацию возбужденных состояний нечетных ядер по аналогии с классификацией возбужденных состояний четно-четных ядер.

Строгое вычисление энергетических состояний средних и тяжелых ядер на основе учета взаимодействия между всеми нуклонами ядра пока еще не возможно. Поэтому приходится пользоваться ядерными моделями. В случае нечетных несферических ядер наиболее простой моделью, отражающей многие свойства таких ядер, является система, состоящая из остова ядра, в состав которого входят все четно-четные нуклоны, и внешнего нуклона, движущегося в поле, создаваемом нуклонами остова. Предполагается, что в основном состоянии ядро и эквипотенциальные поверхности поля остова имеют форму, близкую к эллипсоидальной. В системе координат, связанной с главными моментами инерции ядра, эта форма определяется параметрами β и γ квадрупольной деформации сферического ядра.

Квантовый оператор энергии такой модели можно записать в виде

$$H = H_v(\beta, \gamma) + H_p + H_{\text{int}} + H_{\text{rot}}, \quad (17.1)$$

где

$$H_v(\beta, \gamma) = -\frac{\hbar^2}{2B} \left\{ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sin 3\gamma \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) \right\} + V(\beta, \gamma). \quad (17.2)$$

оператор поперечных и продольных колебаний поверхности ядра;

$$H_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{8B\beta^2} \sum_{\lambda} a_{\lambda}(\gamma) (I_{\lambda} - j_{\lambda})^2, \quad (17.3)$$

здесь I_{λ} и j_{λ} — соответственно проекции на главные оси ядра операторов полного спина ядра и углового момента внешнего нуклона;

$$a_{\lambda}^{-}(\gamma) = \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \lambda \right) \quad (17.4)$$

величины, обратно пропорциональные главным моментам инерции ядра;

$$H_p + H_{\text{int}}$$

оператор энергии внешнего нуклона в поле остова ядра; при этом оператор H_p учитывает сферически симметричную часть поля, а оператор

$$H_{\text{int}} = -\beta V(r) \left\{ Y_{20}(\vartheta\varphi) \cdot \cos \gamma + [Y_{22}(\vartheta\varphi) + Y_{2,-2}(\vartheta\varphi)] \frac{\sin \gamma}{V^2} \right\} \quad (17.5)$$

взаимодействие внешнего нуклона с несферической частью поля остова ядра (r, ϑ, φ — сферические координаты внешнего нуклона). В частном случае, когда взаимодействие внешнего нуклона с остовом определяется нильссоновским потенциалом, надо положить

$$\left. \begin{aligned} V(r) &= \hbar\omega_0 \rho^2; \quad \rho^2 = r^2 \frac{M\omega_0}{\hbar}; \\ H_p &= \frac{\hbar\omega_0}{2} \left\{ \rho^2 - \nabla^2 + C \hat{S} \hat{I} + D \hat{I}^2 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (17.6)$$

где M — масса нуклона; ω_0, C и D — параметры теории.

Энергетические состояния нечетного ядра соответствуют собственным значениям оператора энергии (17.1). Этот оператор очень сложен, и никому еще не удалось найти его точные собственные значения и собственные функции при произвольных значениях входящих в него параметров. При практических вычислениях приходится вводить много упрощений.

Часто используется адиабатическое приближение по отношению к β - и γ -колебаниям, т. е. предполагается, что в операторе (17.1) можно опустить оператор $H_v(\beta, \gamma)$ и заменить в оставшихся слагаемых значения β и γ некоторыми фиксированными значениями β_0 и γ_0 . Таким образом, получаем оператор энергии нечетного атомного ядра с фиксированной формой поверхности остова

$$H_a = H_p + \frac{\hbar^2}{8B\beta_0^2} \sum_{\lambda} a_{\lambda}(\gamma_0) [I_{\lambda} - j_{\lambda}]^2 - \beta_0 N(r) \times \\ \times \left\{ Y_{20} \cos \gamma_0 + [Y_{22} + Y_{2,-2}] \frac{\sin \gamma_0}{\sqrt{2}} \right\}. \quad (17.7)$$

Обычно исследовались системы, описываемые оператором (17.7) при $\gamma_0 = 0$, т. е. аксиально симметричные нечетные ядра. Энергетический спектр такой системы зависит от «схемы связи» спина внешнего нуклона и углового момента вращения

$$R = I - j.$$

Схема связи этих моментов определяется относительной ролью, которую играют взаимодействие нуклона с несферической частью поля остова ядра (условно иногда говорят о связи спина нуклона с аксиальной осью ядра), с одной стороны, и вращения ядра — с другой. Роль последнего определяется расстоянием между соседними вращательными уровнями. Если энергия первого взаимодействия велика по сравнению с разностью энергий вращательных уровней, то говорят о случае *сильной связи*. Если осуществляется обратное неравенство, то говорят о *слабой связи*. Разумеется, имеются и промежуточные соотношения. Следует также иметь в виду, что расстояния между соседними вращательными уровнями возрастают с увеличением момента вращения R , и при некоторых значениях R они могут превысить связи нуклона с несферической частью поля остова. Следовательно, в одном и том же ядре случай сильной связи может перейти в случай слабой связи.

В случае сильной связи в аксиально симметричном ядре интегралом движения является проекция Ω углового момента внешнего нуклона на аксиальную ось ядра. При этом полный угловой момент нуклона, вообще говоря, может не быть интегралом движения. В случае слабой связи проекция углового момента на ось ядра не имеет определенного значения. Поскольку вращение ядра может превратить сильную связь в слабую, то во вращающемся ядре проекция углового момента внешнего нуклона на аксиальную ось ядра уже не является интегралом движения. При учете эффективной неаксиальности эта проекция не будет хорошим интегралом движения и в покоем ядре.

Случай предельно сильной связи рассматривался в работах О. Бора и Моттельсона [5—6]. Исследование промежуточной связи в общем виде еще не проведено. Ниже (§ 19—21) будет рассмотрен этот случай при условии, когда можно считать, что угловой момент внешнего нуклона является сравнительно хорошим интегралом движения. Исследуем вначале, при каких условиях такое приближение оправдывается.

Предположим, что нам известны собственные функции χ_{Ω}^{μ} и собственные значения ϵ_{ji} оператора энергии H_p внешнего нуклона в центрально симметричном поле остова. При этом j — спин нуклона; Ω — проекция спина на ось квантования; i — остальные квантовые числа. Если взаимодействие внешнего нуклона с остовом ядра определяется нильссоновским потенциалом (17.6), то

$$\epsilon_{ji} = \hbar\omega_0 \left\{ \frac{3}{2} + N + \frac{1}{4} C \left[j(j+1) - \frac{3}{4} \right] + \frac{1}{2} \left[D - \frac{1}{2} C \right] l(l+1) \right\},$$

где $N=0, 1, 2, \dots$; l — орбитальное квантовое число нуклона, равное $j+1/2$ либо $j-1/2$ в зависимости от четности $(-1)^l$ однонуклонного движения. Следовательно, в этом случае квантовое число i характеризует значение N (номер оболочки) и четность однонуклонного состояния. Значения $\epsilon_{ji} = \epsilon_{jNi}$ в единицах $\hbar\omega_0$ можно взять из таблиц Нильссона [117] для случая $\delta=0$.

Запишем оператор (17.1) в представлении собственных функций χ_{Ω}^{μ} оператора H_p , т. е. найдем матричные элементы

$$\langle \chi_{\Omega}^{j' i'} | H | \chi_{\Omega}^{j i} \rangle = \langle i' j' \Omega' | H | i j \Omega \rangle. \quad (17.8)$$

Для их вычисления достаточно знать матричные элементы оператора $V(r) Y_{2\mu}$. Пользуясь теоремой Вигнера—Экарта [см. равенство (Ж.2) Приложения Ж] можно написать

$$\langle i' j' \Omega' | V(r) Y_{2\mu} | i j \Omega \rangle = \frac{(j 2 \Omega_{\mu} | j' \Omega')}{\sqrt{2j'+1}} \langle i' j' || V Y_2 || i j \rangle,$$

где $(j 2 \Omega_{\mu} | j' \Omega')$ — коэффициенты векторного сложения; $\langle i' j' || V Y_2 || i j \rangle$ — приведенные матричные элементы. Их значения зависят от типа связи орбитального и спинового моментов внешнего нуклона и вида функции $V(r)$. Операторы $V(r) Y_{2\mu}$ действуют на пространственные координаты нуклона, функции χ_{Ω}^{μ} содержат и спинные переменные нуклона. Используя равенство

$$\frac{\langle i' j' l' || V(r) Y_2 || i j l \rangle}{\sqrt{2j'+1}} = (-1)^{\frac{5}{2} - l - i'} \sqrt{2j+1} \times \\ \times W\left(l j l' j'; \frac{1}{2} 2\right) \langle i' l' || V(r) Y_2 || i l \rangle$$

и подставляя явный вид коэффициентов Рака и приведенных

матричных элементов функций $Y_{2\mu}$, находим

$$\frac{\langle i' j' l' \| V(r) Y_2 \| i j l \rangle}{\sqrt{2j'+1}} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(j' 2 \frac{1}{2} 0 | j \frac{1}{2} \right) \langle i' \| V(r) \| i l \rangle \delta_{ii'}, \quad (17.9)$$

если $l' = l$ либо $l' = l \pm 2$, во всех остальных случаях равенство (17.9) равно нулю. В случае потенциала (17.6) можно получить

$$\begin{aligned} \langle i' \| V(r) \| i l \rangle &= h\omega_0 \langle N l' \| \rho^2 \| N l \rangle = \\ &= h\omega_0 \cdot \begin{cases} N + \frac{3}{2}, & \text{если } l' = l; \\ \sqrt{(N-l)(N+l+3)}, & \text{если } l' = l+2; \\ \sqrt{(N-l+2)(N+l+1)}, & \text{если } l' = l-2. \end{cases} \end{aligned}$$

Из равенства (17.9) следует, что кроме диагональных матричных элементов не равны нулю матричные элементы (17.9) и (17.8), которые связывают состояния с квантовыми числами j и $j \pm 2$.

Предположим теперь, что выполняются неравенства

$$| \langle i, j \pm 2, \Omega' | H | i j \Omega \rangle | \ll | \epsilon_{j \pm 2, i} - \epsilon_{j, i} |,$$

тогда можно рассматривать только диагональные по квантовому числу j матричные элементы (17.8). Другими словами, будем предполагать, что полный угловой момент j внешнего нуклона является хорошим квантовым числом. В несферических ядрах такое допущение сравнительно грубо. Однако оно значительно упрощает расчеты и позволяет выяснить вопрос о роли связи вращательного движения и одночастичных возбуждений в нечетных ядрах. Конечно, для построения теории, дающей более точное количественное описание возбужденных состояний нечетных ядер, необходимо отказаться от такого упрощения. К сожалению, такое уточнение помимо значительного усложнения расчетов связано с введением в феноменологическую теорию дополнительных параметров, которые надо определять путем сравнения с экспериментальными данными.

Итак, будем предполагать, что возбужденные состояния нечетных ядер описываются операторами, заданными в виде матриц, с матричными элементами

$$\langle \chi_{\Omega}^{Nl} | H | \chi_{\Omega}^{Nl} \rangle \quad (17.10)$$

для каждого значения номера оболочки N четности $(-1)^l$ и спина j внешнего нуклона. В некоторых случаях вместо внешнего нуклона следует рассматривать состояние «дырки».

Вместо оператора энергии (17.10) можно использовать эквивалентный ему оператор, выраженный через операторы проек-

ций спина внешнего нуклона,

$$H = H_v(\beta, \gamma) + \epsilon_{jNl} + \frac{\hbar^2}{8B\beta^2} \sum_{\lambda} a_{\lambda}(\gamma) [I_{\lambda} - j_{\lambda}]^2 - \beta k [(3j_3^2 - j^2) \cos \gamma + \sqrt{3} (j_1^2 - j_2^2) \sin \gamma], \quad (17.11)$$

где ϵ_{jNl} — собственные значения оператора H_p ; оператор $H_v(\beta, \gamma)$ определен выражением (17.2);

$$\beta k \equiv \beta \langle \chi_{\Omega}^{jNl} | V(r) | \chi_{\Omega}^{jNl} \rangle$$

величина, характеризующая взаимодействие нуклона с несферической частью поля остова. Ниже будут рассмотрены приближенные методы вычисления собственных значений оператора (17.11).

§ 18. ПОЛНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ И ОДНОЧАСТИЧНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ. СХЕМА НИЛЬССОНА

В настоящее время при интерпретации спектров нечетных несферических ядер наиболее часто используется случай предельно сильной связи (см. § 17). При этом одночастичные движения внешнего нуклона рассматриваются независимо от коллективных (вращательных и вибрационных). Такое разделение возможно, если в операторе адиабатического приближения (17.7) пренебречь частью

$$- \frac{\hbar^2}{4B\beta_0^2} \sum_{\lambda=1}^2 a_{\lambda}(\gamma_0) \left[I_{\lambda} j_{\lambda} - \frac{1}{2} j_{\lambda}^2 \right], \quad (18.1)$$

которая ответственна за связь вращения с одночастичными возбуждениями.

Если ввести дополнительное предположение об аксиальности ядра ($\gamma_0 \approx 0$), то при отбрасывании выражения (18.1) оператор (17.7) принимает вид

$$H_a^0 = H_p - \beta_0 V(r) Y_{20} + \frac{\hbar^2 (I^2 - I_3^2)}{6B\beta_0^2} + \frac{\hbar^2 (I_3 - j_3)^2}{8B\beta_0^2 \sin^2 \gamma_0}. \quad (18.2)$$

Оператор (18.2) коммутирует с оператором проекции j_3 углового момента нуклона на аксиальную ось ядра, поэтому проекция $\hbar \Omega$ является интегралом движения. Собственные значения и собственные функции оператора $H_p - \beta_0 V(r) Y_{20}$ внешнего нуклона вычислялись Нильссоном [117] для случая (17.6). Волновые функции однонуклонных состояний $|N n_z \Lambda \Omega \pi\rangle$ в схеме Нильссона характеризуются квантовыми числами: N —

главное квантовое число, определяющее номер оболочки; n_z — квантовое число осциллятора вдоль аксиальной оси ядра; Λ и Ω — соответственно проекции орбитального и полного угловых моментов нуклона на ту же ось; π — четность состояния.

Если ψ_{IK} — волновые функции симметричного волчка, удовлетворяющие уравнению $(I^2 - I) \psi_{IK} = [I(I+1) - K^2] \psi_{IK}$, то собственные функции (18.2) можно записать в виде произведения

$$|IKi\rangle = |\Omega i\rangle \psi_{IK}; \quad i \equiv \{N n_z - \Lambda \pi\}. \quad (18.3)$$

Поскольку $\gamma_0 \approx 0$, то конечные собственные значения оператора (18.2) возможны только при условии $K = \Omega$. Последнее равенство указывает, что вращение ядра происходит только вокруг направления, перпендикулярного аксиальной оси ядра. Если $\epsilon_{\Omega i}$ — однонуклонные энергии, то состоянию (18.3) будет соответствовать энергия

$$E_{I\Omega i} = \epsilon_{\Omega i} + \frac{\hbar^2 [I(I+1) - \Omega^2]}{6B\beta_0^2}. \quad (18.4)$$

В соответствии с формулой (18.4) каждое однонуклонное состояние является началом ротационной полосы со значениями полного момента ядра

$$I = \Omega, \Omega + 1, \dots$$

Полное разделение вращательных и одночастичных возбуждений обусловлено пренебрежением оператором (18.1). Часть этого оператора

$$w = - \frac{\hbar^2}{8B\beta_0^2} [a_1(\gamma_0) I_1 j_1 + a_2(\gamma_0) I_2 j_2] \quad (18.5)$$

связывает состояния, отличающиеся значениями K и Ω на единицу. Если разложить волновые функции однонуклонных состояний по собственным функциям χ_{Ω}^i оператора H_p , т. е. $|\Omega i\rangle = \sum_j b_{j\Omega} \chi_{\Omega}^j$, и положить $a_1(\gamma_0) = a_2(\gamma_0)$, то не равные нулю матричные элементы оператора (18.5) имеют вид

$$M \equiv \langle I, \Omega + 1, i | w | I\Omega i \rangle = \frac{1}{2} a_1(\gamma) B_2 \sqrt{(I - \Omega)(I + \Omega + 1)},$$

где

$$B_2 = \sum_j b_{I, \Omega+1}^* b_{j\Omega} \sqrt{(j - \Omega)(j + \Omega + 1)}.$$

Разделение вращательных и однонуклонных возбуждений возможно только при условии

$$|M| \ll |E_{I, \Omega+1, i} - E_{I, \Omega, i}|. \quad (18.6)$$

Если без учета оператора ω система характеризуется двумя энергетическими состояниями: $E_{I,\Omega+1,i}$ и $E_{I,\Omega,i}$, то при учете оператора ω вместо этих энергий будут наблюдаться энергии

$$E_{II} = \frac{1}{2} \left\{ E_{I,\Omega+1,i} + E_{I,\Omega,i} + (-1)^i \Delta \sqrt{1 + \frac{|2M|^2}{\Delta^2}} \right\},$$

где

$$\Delta = |E_{I,\Omega+1,i} - E_{I,\Omega,i}|; \quad i = 1, 2.$$

В новых состояниях, если не выполняется неравенство (18.6), проекции полного углового момента ядра и внешнего нуклона уже не являются интегралами движения. Волновые функции таких состояний изображаются линейными комбинациями функций (18.3), относящихся к разным значениям Ω и, следовательно, к разным состояниям нуклона в неподвижном потенциале.

Учет двух одночастичных состояний во вращательном спектре нечетных ядер впервые был проведен Керманом [118] на примере ядра W^{183} . Используя пять параметров, Керман получил близкие к экспериментальным значения девяти уровней энергии.

В 1960 г. Ньютон [119] расширил схему Нильссона и на случай ядер, не имеющих аксиальной оси симметрии. Вычислялись собственные значения оператора

$$H = H_p - \beta_0 V(r) \left[Y_{20} \cos \gamma_0 + (Y_{22} + Y_{2,-2}) \frac{\sin \gamma_0}{\sqrt{2}} \right],$$

где H_p и $V(r)$ определены равенствами (17.6) как функции параметров β_0 и γ_0 .

§ 19. ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ НЕЧЕТНЫХ ЯДЕР С УЧЕТОМ ЭФФЕКТИВНОЙ НЕАКСИАЛЬНОСТИ

Рассмотрим собственные значения оператора (17.11). Используя явный вид оператора (17.2) и выражение

$$V(\beta, \gamma) = V(\beta) + \frac{\beta_0^4 V(\gamma)}{\beta^2},$$

следующее из уравнения (14.2) без учета равенства (14.4), образуем оператор

$$\mathcal{H} \equiv h^{-2} B \beta_0^2 (H - \epsilon_{iN}) = \frac{\beta_0}{2} \left\{ T_\beta + \frac{2B V(\beta)}{h^2} + \frac{\Lambda(\beta, \gamma)}{\beta^2} \right\}, \quad (19.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(\beta, \gamma) \equiv T_\gamma + T_{\text{rot}}(\gamma) + \frac{2B \beta_0^4 V(\gamma)}{h^2} - \frac{2Bk}{h^2} \beta^3 [(3j_3^2 - j^2) \cos \gamma + \\ + \sqrt{3} (j_1^2 - j_2^2) \sin \gamma]; \end{aligned} \quad (19.2)$$

$$T_{\beta} = -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \quad T_{\gamma} = -\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right); \quad (19.3)$$

$$T_{\text{rot}}(\gamma) = \frac{1}{4} \sum_{\lambda=1}^3 a_{\lambda}(\gamma) [I_{\lambda} - i_{\lambda}]^2.$$

Решив уравнение Шредингера

$$[\mathcal{H} - \mathcal{E}] \psi = 0, \quad (19.4)$$

мы найдем волновые функции ψ и энергии

$$E = \varepsilon_{jNl} + \frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2} \mathcal{E} \quad (19.5)$$

возбужденных состояний, соответствующих однонуклонным состояниям jNl оператора H_p .

Заменим в выражении (19.1) оператор $\Lambda(\beta, \gamma)$ оператором $\Lambda(\beta_0, \gamma)$, тогда, полагая

$$\psi = \beta^{-2} \varphi(\beta) X(y, \gamma, \theta)$$

и вводя разложение

$$V(\beta) + \frac{\hbar^2(2 + \Lambda_0)}{2B\beta^2} = \text{const} + \frac{1}{2} C_{\beta} (\beta - \beta_0)^2,$$

где Λ_0 — постоянная величина, значение которой будет определено ниже, вместо уравнения (19.4) получим систему двух связанных уравнений

$$\left\{ -\frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{(\beta - \beta_0)^2}{(\mu\beta_0)^4} + \frac{\Lambda - \Lambda_0}{\beta^2} - \frac{2\mathcal{E}}{\beta_0^2} \right\} \varphi(\beta) = 0, \quad (19.6)$$

$$\{\Lambda(\beta_0, \gamma) - \Lambda\} X(y, \gamma, \theta) = 0; \quad (19.7)$$

где

$$\mu = \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{\hbar^2}{BC_{\beta}} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (19.8)$$

параметр неадиабатичности, характеризующий деформируемость ядра по отношению продольным колебаниям поверхности ядра; y — совокупность спиновых и пространственных координат внешнего нуклона.

Уравнение (19.6) совпадает с уравнением (14.10), решение которого было исследовано в § 14. Рассмотрим теперь решение уравнения (19.7). Положим,

$$X(y, \gamma, \theta) = \frac{f(y, \gamma, \theta)}{\sqrt{|\sin 3\gamma|}}. \quad (19.9)$$

Подставляя это выражение в уравнение (19.7), учитывая операторы (19.2) и (19.3) и используя приближенное разложение

$$\frac{2B\beta_0^4 V(\gamma)}{h^2} + \frac{9}{4 \sin^2(3\gamma)} = C + \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{4\Gamma^4}, \quad (19.10)$$

получим уравнение

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \gamma^4} + \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{4\Gamma^4} + \hat{Z}(\xi, \gamma) - \Lambda + C \right\} f(\gamma, \gamma, \theta) = 0, \quad (19.11)$$

где оператор

$$\hat{Z}(\xi, \gamma) = T_{\text{rot}}(\gamma) + \frac{1}{3\xi} \left\{ (3j_1^2 - j_3^2) \cos \gamma + \sqrt{3}(j_1^2 - j_2^2) \sin \gamma \right\}, \quad (19.12)$$

$$\xi \equiv \frac{h^2}{6kB\beta_0^2}. \quad (19.13)$$

Полагая

$$\hat{Z}(\xi, \gamma) = \hat{Z}(\xi, \gamma_0) + \frac{\partial \hat{Z}}{\partial \gamma} (\gamma - \gamma_0) \approx \hat{Z}(\xi, \gamma_0)$$

и вводя

$$f(\gamma, \gamma, \theta) = g(\gamma - \gamma_0) U(\gamma, \gamma_0, \theta), \quad (19.14)$$

можно преобразовать уравнение (19.11) к системе двух уравнений

$$\left[\hat{Z}(\xi, \gamma_0) - \omega_{I\tau} \right] U_{IM\tau}(y, \theta) = 0, \quad (19.15)$$

$$\left[-\frac{d^2}{d\gamma^2} + \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{4\Gamma^4} + C + \omega_{I\tau} - \Lambda \right] g(\gamma - \gamma_0) = 0. \quad (19.16)$$

Уравнение (19.16) является уравнением одномерного гармонического осциллятора. Следовательно, функциям

$$g_{n\gamma}(\gamma - \gamma_0) = N \cdot H_{n\gamma} \left(\frac{\gamma - \gamma_0}{\sqrt{2}\Gamma} \right) \exp \left\{ - \left(\frac{\gamma - \gamma_0}{2\Gamma^2} \right)^2 \right\} \quad (19.17)$$

будут соответствовать

$$\Lambda = \omega_{I\tau} + \frac{n_\gamma}{\Gamma^2} + C + \frac{1}{2\Gamma^2}, \quad (19.18)$$

где $\omega_{I\tau}$ — собственные значения оператора $\hat{Z}(\xi, \gamma_0)$ уравнения (19.15). Чтобы решить уравнение (19.15), представим функцию $U(y, \theta)$ в виде разложения

$$U_{IM\tau} = \sum_{K,m} A_{K,m}^{I\tau}(\xi, \gamma_0) |IMjKm\rangle, \quad (19.19)$$

где

$$|IMjKm\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2}} \{D_{MK}^I(0) \chi_{K-2m}^I(y) + (-1)^{I-I} D_{M,-K}^I(0) \times \\ \times \chi_{2m-K}^I(y)\}. \quad (19.20)$$

Здесь и ниже сумма с двумя штрихами указывает, что суммирование производится по положительным значениям $K = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, I$ и по целочисленным значениям m , удовлетворяющим неравенству

$$\frac{1}{2} - j \leq 2m \leq I + j \text{ при } |K - 2m| \leq j,$$

или по соответствующим значениям $\Omega = K - 2m$; $\chi_{\Omega}^I(y)$ — собственные функции оператора H_p .

Коэффициенты $A_{Km}^{I\tau}$ в разложении (19.19) удовлетворяют соотношениям ортонормируемости

$$\sum_{K,m} A_{Km}^{I\tau} A_{Km}^{I'\tau'} = \delta_{II'} \delta_{\tau\tau'}. \quad (19.21)$$

Коэффициенты $A_{Km}^{I\tau}$ и энергии $\omega_{I\tau}$, являясь функциями параметров γ_0 и ξ , определяются как собственные векторы и собственные значения матрицы с матричными элементами

$$\langle IMjK'm' | \hat{Z}(\xi, \gamma_0) | IMjKm \rangle. \quad (19.22)$$

Чтобы вычислить матричные элементы (19.22), удобно преобразовать оператор $T_{\text{rot}}(\gamma_0)$ к виду

$$T_{\text{rot}}(\gamma_0) = \Gamma_1(\gamma_0) [I^2 + J^2 - I_3^2 - j_3^2] + \Gamma_2(\gamma_0) [I_1^2 + j_1^2 - I_2^2 - j_2^2] - 2\Gamma_1(\gamma_0) [I_1 j_1 + I_2 j_2] - 2\Gamma_2(\gamma_0) [I_1 j_1 - I_2 j_2] + \Gamma_3(\gamma_0) (I_3 - j_3)^2,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1(\gamma_0) &= \frac{a_1(\gamma_0) + a_2(\gamma_0)}{8} = \frac{[2 + \cos 2\gamma_0] \sin^2 \gamma_0}{\sin^2(3\gamma_0)}; \\ \Gamma_2(\gamma_0) &= \frac{a_1(\gamma_0) - a_2(\gamma_0)}{8} = \frac{\sqrt{3} \sin 2\gamma_0 \cdot \sin^2 \gamma_0}{\sin^2(3\gamma_0)}; \\ \Gamma_3(\gamma_0) &= a_3(\gamma_0) = \frac{1}{\sin^2 \gamma_0}. \end{aligned} \right\} \quad (19.23)$$

Отличные от нуля матричные элементы (19.23) имеют вид ($\Omega \equiv K - 2m$)

$$\langle IjKm | \hat{Z} | IjKm \rangle = \Gamma_1(\gamma_0) \{I(I+1) + j(j+1) - K^2 - \\ - \Omega^2 - (-1)^{I-I} \left(I + \frac{1}{2}\right) \left(j + \frac{1}{2}\right) \delta_{K-\frac{1}{2}} \delta_{m0}\} + \Gamma_3(\gamma_0) m^2 -$$

$$-\frac{\cos \gamma_0}{3\xi} [3\Omega^2 - j(j+1)], \quad (19.24)$$

$$\langle IjKm | \hat{Z} | Ij, K \pm 1, m \rangle = -\Gamma_1(\gamma_0) F(I, \pm K) F(j, \pm \Omega), \quad (19.24a)$$

где

$$F(I, K) \equiv \sqrt{(I-K)(I+K+1)}.$$

$$\left. \begin{aligned} \langle IjKm | \hat{Z} | IjK \pm 1, m \pm 1 \rangle &= -\Gamma_2(\gamma_0) \left\{ F(I, \pm K) F(j, \mp \right. \\ &\mp \Omega) - \frac{1}{2} (-1)^{I-j} \left(I + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\left(I + \frac{3}{2} \right) \left(I - \frac{1}{2} \right)} \times \\ &\times \delta_{K, 1 \mp \frac{1}{2}} \delta_{m, \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}} \Big\}; \\ \langle IjKm | \hat{Z} | IjK \mp 2, m \mp 1 \rangle &= \frac{1}{2} \Gamma_2(\gamma_0) F(I, -K) F(I, 1 - \\ &- K); \\ \langle IjKm | \hat{Z} | IjK, m \pm 1 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\Gamma_2(\gamma_0) - \frac{\sqrt{3}}{\xi} \sin \gamma_0 \right] F(j, - \\ &- \Omega) F(j, 1 - \Omega) - (-1)^{I-j} \Gamma_2(\gamma_0) \left(I + \frac{1}{2} \right) \times \\ &\times \sqrt{\left(j + \frac{3}{2} \right) \left(j - \frac{1}{2} \right)} \delta_{K, \frac{1}{2}} \delta_{m, \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}}; \\ \langle IjKm | \hat{Z} | IjK, -m \rangle &= -\Gamma_1(\gamma_0) (-1)^{I-j} \left(I + \frac{1}{2} \right) \times \\ &\times \sqrt{\left(j + \frac{1}{2} + 2m \right) \left(j + \frac{1}{2} - 2m \right)} (1 - \delta_{m0}) \delta_{K, \frac{1}{2}}; \\ \langle IjKm | \hat{Z} | IjK, 1 - m \rangle &= -(-1)^{I-j} \Gamma_2(\gamma_0) \left(I + \frac{1}{2} \right) \times \\ &\times \sqrt{\left(j - \frac{1}{2} + 2m \right) \left(j + \frac{3}{2} - 2m \right)} (1 - \delta_{m0} - \delta_{m1}) \delta_{K, \frac{1}{2}}; \\ \langle IjKm | \hat{Z} | Ij, K \pm 1, 1 - m \rangle &= \frac{1}{2} (-1)^{I-j} \Gamma_2(\gamma_0) \left(I + \frac{1}{2} \right) \times \\ &\times \sqrt{\left(I + \frac{3}{2} \right) \left(I - \frac{1}{2} \right)} (1 - \delta_{m, \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}}) \delta_{K, 1 \mp \frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (19.24b)$$

Из вида отличных от нуля матричных элементов оператора Z следует, что при $\gamma_0 \approx 0$ диагональные матричные элементы (19.24) (при $m=0$) имеют очень большие значения по сравнению со всеми недиагональными матричными элементами

(19.24б), связывающими состояния с разными m . Следовательно, при малых значениях γ_0 при исследовании состояний малого возбуждения можно сохранить только матричные элементы (19.24) и (19.24а) при $m=0$, диагональные по отношению к числу m . Однако и при малых, но не равных нулю γ_0 значениях $K=\Omega$ (при $m=0$) не будут интегралами движения в нечетных ядрах, так как матричные элементы (19.24а) связывают состояния K и $K\pm 1$. При малых γ_0 примесь состояний $K\pm 1$ к состоянию K по порядку величины равна γ_0 . В четно-четных ядрах примесь состояний $K\pm 2$ к состоянию K по порядку величины равна γ_0^3 .

Вычисление $A_{K\Omega}^{I\tau}$ и $\omega_{I\tau}$ было выполнено Пашкевичем и Сардаряном [120] с помощью электронно-счетных вычислительных машин в Вычислительных центрах МГУ и ОИЯИ. Порядок диагонализированных матриц соответствовал значению

$$\left(j + \frac{1}{2}\right)\left(I + \frac{1}{2}\right).$$

Предположим, что при заданных ξ , γ_0 значение $\omega_{I_0\gamma_0}$ является минимальным собственным значением оператора (19.23). Выберем значение Λ_0 , которое оставалось неопределенным в уравнении (19.6), равным значению (19.8) при n_γ и $\omega = \omega_{I_0\gamma_0}$, тогда

$$\Lambda - \Lambda_0 = \Delta\omega_{I\tau} + \frac{n_\gamma}{I^2}, \quad (19.25)$$

где

$$\Delta\omega_{I\tau} = \omega_{I\tau} - \omega_{I_0\gamma_0}.$$

Поскольку при фиксированном значении $\Lambda - \Lambda_0$ решение уравнения (19.6) в точности совпадает с решением уравнения (14.10), то, используя результаты § 14, можно записать энергию коллективных и одночастичных возбужденных состояний нечетного ядра в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = & \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\mu^2} \sqrt{1 + 3(\Lambda - \Lambda_0)\left(\frac{\mu}{p}\right)^4} + \\ & + \frac{\Lambda - \Lambda_0}{2p^2} + \frac{1}{2} \frac{(p-1)^2}{\mu^4}, \end{aligned} \quad (19.26)$$

где $\Lambda - \Lambda_0$ надо подставить из равенства (19.25), $p \geq 1$ — корень уравнения

$$p^3(p-1) = (\Lambda - \Lambda_0)\mu^4. \quad (19.27)$$

Числа ν , входящие в формулу (19.26), являются корнями трансцендентного уравнения

$$H_\nu \left(\frac{\beta - \rho \beta_0}{\mu_L \beta_0} \right) = 0, \quad (19.28)$$

где H_ν — функция Эрмита, определенная выражением (12.23), а μ_L определено равенством

$$\mu_L = \mu \left[1 + 3(\Lambda - \Lambda_0) \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^4 \right]^{-\frac{1}{4}}.$$

При $\mu < 0,3$ корни ν уравнения (19.28) мало отличаются от целых чисел $\nu = n_\beta = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае равенство (19.26) можно заменить приближенным выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{I; n_\beta, n_\gamma} = & \frac{n_\beta + \frac{1}{2}}{\mu^2} + \frac{1}{2} \left(\Delta \omega_{I\tau} + \frac{n_\gamma}{\Gamma^2} \right) \left[1 + 3\mu^2 \left(n_\beta + \frac{1}{2} \right) \right] - \\ & - \frac{\mu^4}{2} \left(\Delta \omega_{I\tau} + \frac{n_\gamma}{\Gamma^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (19.29)$$

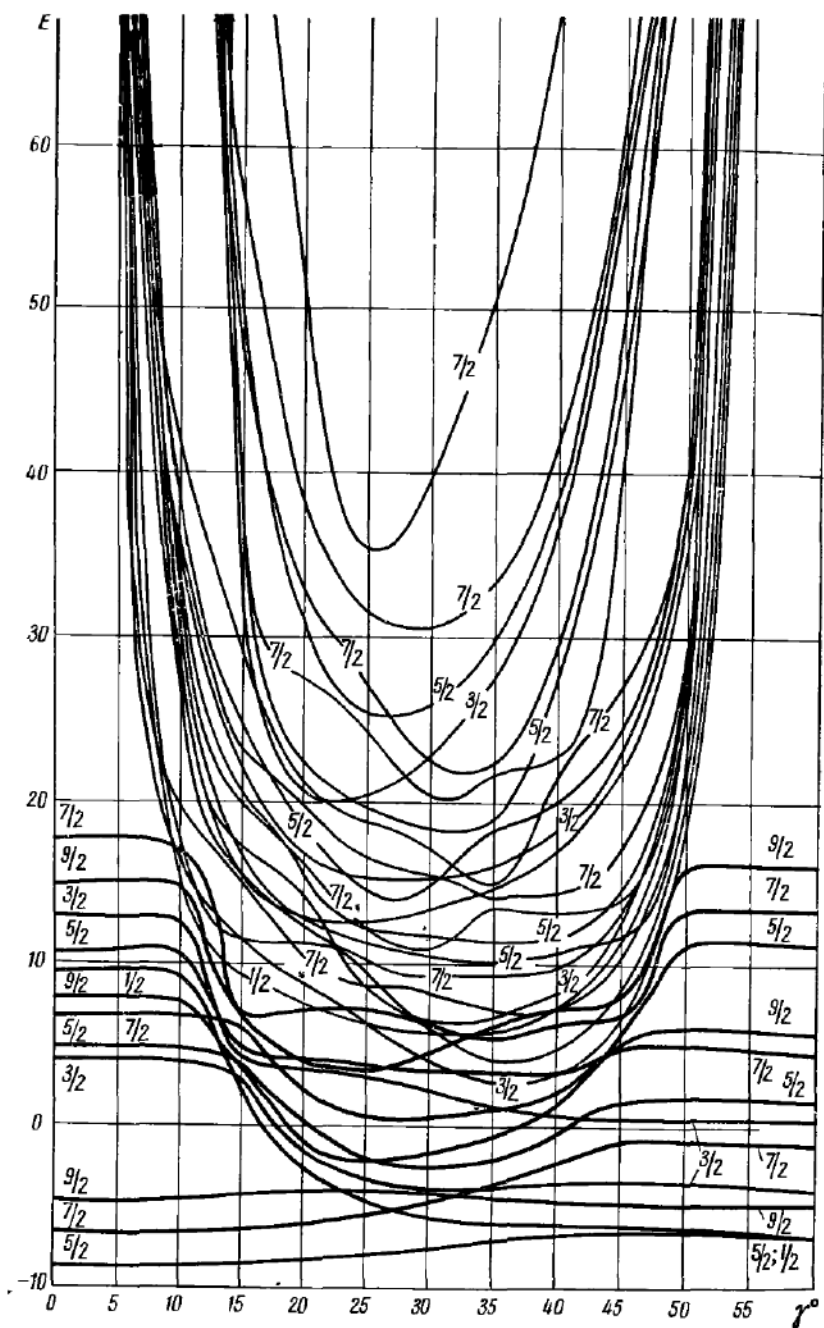
Энергии полной системы коллективных и одночастичных уровней (19.29) зависят от четырех параметров: μ , Γ , ξ и γ_0 — и квантовых чисел n_γ , n_β , I , τ . Подставляя значения (19.29) в (19.5) при $n_\beta = n_\gamma = 0$ и пренебрегая μ^2 и более высокими степенями μ , получим приближенное выражение

$$E_{I; \tau, 00} = \epsilon_{ji} + \frac{\hbar^2}{4B\beta_0^2} \Delta \omega_{I\tau}(\xi, \gamma_0) + E_0. \quad (19.30)$$

Выражение (19.30) определяет энергию вращательно-однуклонных возбуждений в нечетном ядре как функцию двух параметров: ξ и γ_0 . Система энергетических уровней (19.30) соответствует одному из состояний движения внешнего нуклона с квантовыми числами j и i (см. § 18) в оболочечной модели ядра. Другому значению j и четности нуклона (в оболочечной модели) будет соответствовать своя система уровней (19.29), которая, вообще говоря, может отличаться и значениями параметров ξ и γ_0 .

Результаты вычислений величин $\frac{1}{2}\omega_{I\tau}$, выполненных Пашкевичем и Сардаряном [120], т. е. энергий вращательно-однуклонных возбуждений в единицах $\frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2}$, для случая оболочечных

состояний внешнего нуклона с $j = 5/2$ при фиксированных значениях $\xi = 0,25$ и $\xi = 1$ и разных значениях γ_0 приведены соответственно на рис. 27 и 28. На рис. 29 на основе данных, изображенных на рис. 27, приведено значение энергий возбужденных



Фиг. 27. Последовательность спинов и зависимость энергий (в единицах $\hbar^2/2B_0^2$) вращательно-одночастичных состояний нечетных атомных ядер при $\xi=0,25$ и $j=5/2$ от γ .

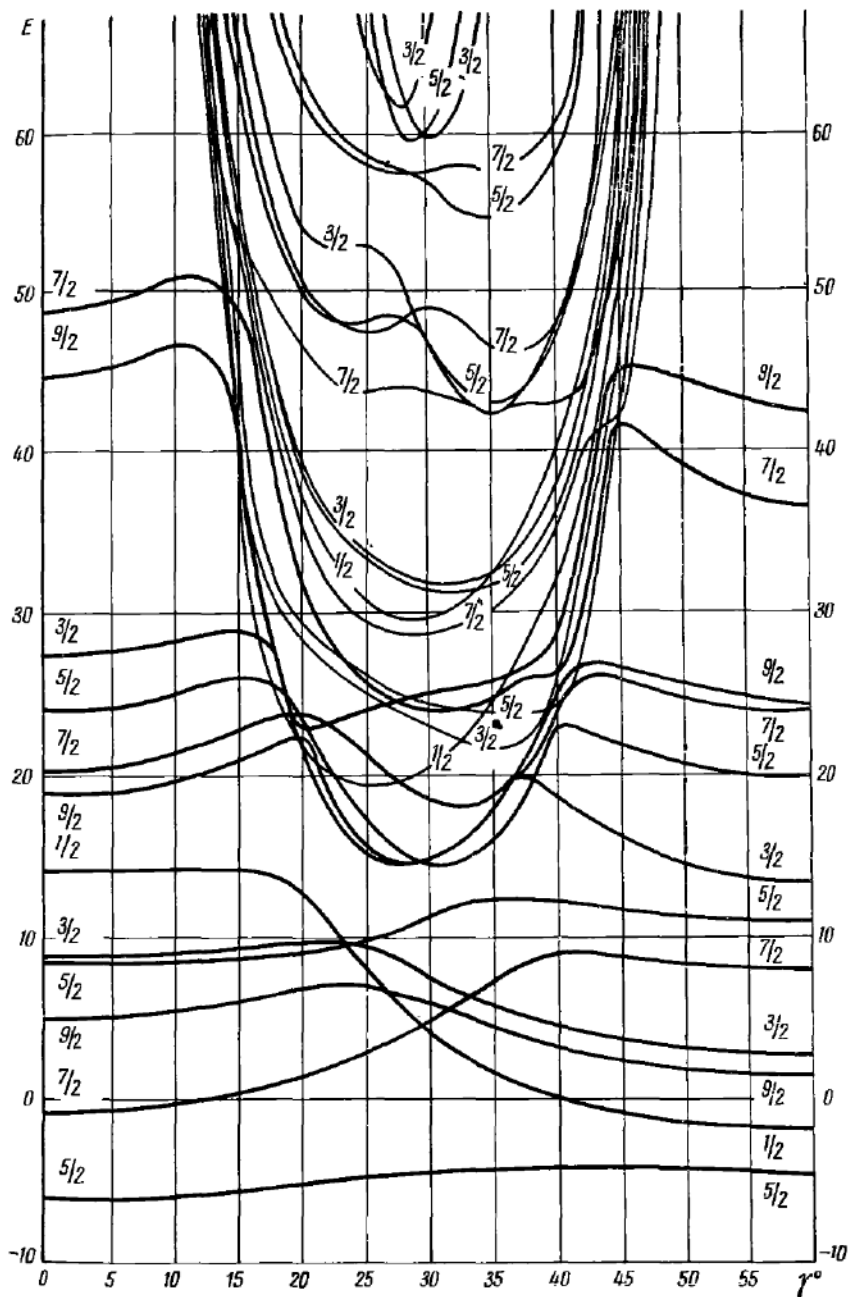


Рис. 28. То же, что и на рис. 27, для значений $\xi=1.0$, $j=5/2$.

вращательно-однонуклонных состояний в единицах энергии первого возбужденного состояния основной вращательной полосы. Крестиками нанесены значения отношения энергии второго возбужденного состояния спина 2 к энергии первого возбужденного состояния спина 2 в четно-четном аксиальном ядре на

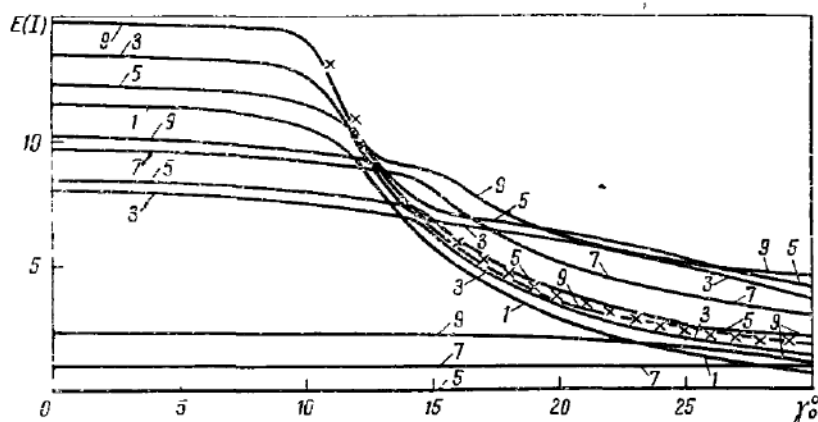


Рис. 29. Энергии некоторых возбужденных состояний нечетного ядра ($\xi = 0,25$, $j = 5/2$), отсчитываемые от энергии основного состояния ($I = 5/2$), в единицах энергии первого возбужденного уровня. Цифры у кривых обозначают удвоенный спин соответствующего уровня. Крестиками указано отношение энергий E_{22}/E_{21} в четно-четном ядре в модели неаксиального ротатора с тем же значением γ .

основе модели жесткого ротатора [35]. Цифры у кривых на рис. 29 обозначают удвоенный спин соответствующего уровня. На рис. 30 приведены те же значения, что и на рис. 29, только для случая $j = 7/2$.

Оператор (19.12) инвариантен относительно преобразования

$$\gamma, \xi \rightarrow \frac{\pi}{3} - \gamma, -\xi. \quad (19.31)$$

Действительно, при преобразовании $\gamma \rightarrow \frac{\pi}{3} - \gamma$ в операторе $T_{\text{rot}}(\gamma)$ [см. выражение (19.3)], согласно равенствам (17.4), произойдут преобразования

$$a_1(\gamma) \rightarrow a_1(\gamma); a_2(\gamma) \rightarrow a_3(\gamma) \text{ и } a_3(\gamma) \rightarrow a_2(\gamma).$$

Поэтому, если одновременно с преобразованием (19.24) произвести переименование осей 1, 2, 3 $\rightarrow$ 1, 3, 2, то мы убедимся, что $T_{\text{rot}}(\gamma) = T_{\text{rot}}\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right)$. Легко видеть, что при тех же преобразова-

ниях второе слагаемое в операторе (19.12) остается неизменным. Итак,

$$\hat{Z}(\xi, \gamma) = \hat{Z}\left(\frac{\pi}{3} - \gamma, -\xi\right).$$

Отрицательное ξ возможно, если внешний нуклон—дырка, а квадрупольный момент остова отрицательный или внешний

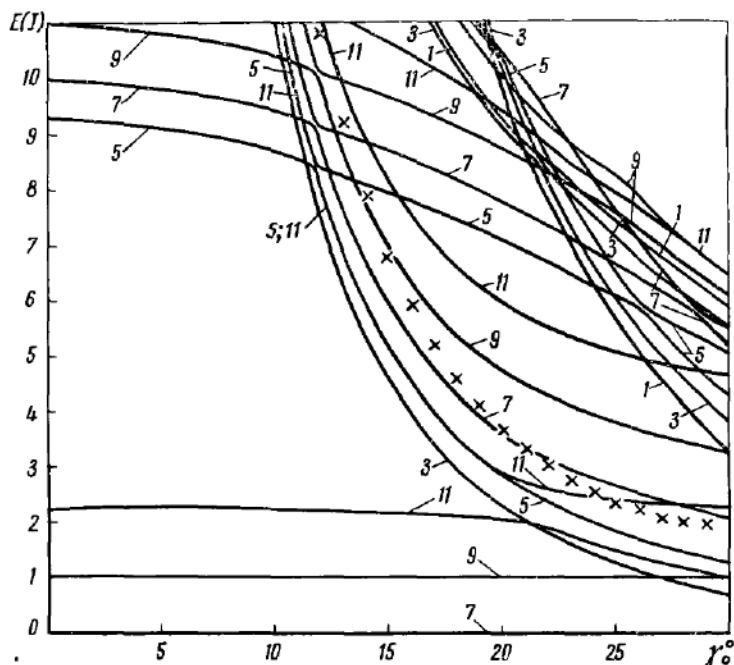


Рис. 30. То же, что и на рис. 29, для нечетных ядер с $\xi=0,25$, $j=7/2$.

нуклон—квазичастица, а квадрупольный момент остова положительный. Таким образом, переход через значение 30° на рис. 27 и 28 означает, что квазичастица становится дыркой или меняется знак квадрупольного момента остова.

При $\gamma_0 \rightarrow 0$, или 60° , часть энергетических уровней уходит в бесконечность. Общий характер спектра напоминает спектр четно-четных ядер. Однако у нечетных ядер основная полоса деформируется при изменении γ значительно сильнее, чем в случае четно-четных ядер. Весьма существенно, что спектр возбужденных состояний нечетных ядер не симметричен относительно 30° , т. е. спектр возбужденных состояний зависит от знака квадрупольного момента остова. Как видно из рис. 27, при $\gamma_0 < 20^\circ$ первые возбужденные состояния $7/2$ и $9/2$ соответствуют

вращательной полосе, образованной на основном состоянии со спином $5/2$. В области же $\gamma_0 > 40^\circ$ расположение первых возбужденных уровней мало напоминает вращательный спектр. Следовательно, можно ожидать, что для нечетных ядер, в которых возбужденные состояния соответствуют системе—квазичастица в поле остова с отрицательным квадрупольным моментом или дырка в поле остова с положительным квадрупольным моментом, — не будут наблюдаться простые вращательные последовательности уровней.

Собственные значения оператора (19.12) при $\gamma = \gamma_0$, или собственные значения матрицы с матричными элементами (19.22), определяют вращательно-однонуклонный спектр возбужденных состояний жесткого ядра в случае произвольной величины связи внешнего нуклона с остовом ядра (см. § 17). Оператор энергии связи внешнего нуклона с ядром, согласно уравнению (17.11), пропорционален $k\beta_0$. Энергия вращения ядра пропорциональна $\frac{k^2}{B\gamma_0^2}$. Следовательно, введенный нами параметр ξ с

помощью выражения (19.13) характеризует отношение энергии вращения к энергии связи внешнего нуклона с остовом ядра. Поэтому *случай сильной связи* соответствует малым значениям ξ . *Случай слабой связи* соответствует большим значениям ξ . В пределе достаточно больших ξ (предельно слабая связь) оператор взаимодействия H_{int} внешнего нуклона с остовом является малой величиной по сравнению с оператором $T_{\text{rot}}(\gamma_0)$. Учитывая H_{int} методом теории возмущений, убедимся в том, что спектр возбужденных состояний совпадает со спектром четно-четного остова ядра, на который накладывается слаборасщепленный мультиплет однонуклонных состояний, соответствующих определенному значению j . Порядок следования подуровней и величина расщепления мультиплета зависят от значений параметров ξ и γ_0 . Расщепление обусловлено квадрупольным взаимодействием (17.5) внешнего нуклона с остовом ядра.

Мультиплет одночастичных уровней, связанный с первым вращательным уровнем спина 2 четно-четного остова ядра, рассматривался в работах Браунштейна и де Шалита [121, 122]. В этих работах также принималось, что угловой момент внешнего нуклона является интегралом движения. Однако взаимодействие внешнего нуклона с остовом учитывалось в диполь-дипольном приближении. К сожалению, остается неясным, какова физическая природа такого взаимодействия.

Предельно сильная связь соответствует в операторе (19.12) малым значениям ξ . В этом случае оператор вращения $T_{\text{rot}}(\gamma_0)$ мал по сравнению с оператором взаимодействия внешнего нуклона с остовом ядра и его можно учесть методом теории возмущений. Поэтому спектр вращательно-однонуклонных возбуждений соответствует однонуклонному спектру, на который накла-

дается спектр вращательных возбуждений. Естественно, что в случае сильной связи наше предположение о сохранении углового момента j нуклона мало оправдано.

Итак, в предельных случаях сильной и слабой связи одночастичные и коллективные (вращательные) возбужденные состояния ядра разделяются. Однако, как уже отмечалось в § 17, в одном и том же ядре случай слабой связи может перейти в случай сильной связи и наоборот. Строго говоря, надо учитывать не величину параметра ξ в операторе (19.12), а относительное расстояние между энергиями коллективных и одночастичных возбуждений.

Подтверждение сказанному можно найти на рис. 29 ($\xi = 0,25$). Мы видим, что при $\gamma_0 < 13^\circ$ первое возбужденное состояние со спином $3/2$ имеет одночастичный характер, а при $\gamma_0 > 18^\circ$ — коллективный характер: «аномальное» вращение остова ядра. В области $14^\circ < \gamma_0 < 17^\circ$ происходит полное перепутывание этих состояний. В этой области волновые функции состояния спина $3/2$ имеют вращательно-одночастичный характер. Как мы увидим ниже, это обстоятельство проявляется в резком изменении вероятности $E2$ - и $M1$ -переходов в основное состояние ядра при изменении γ_0 в области 14° . Аналогичная картина наблюдается для уровней спина $1/2$, $5/2$ и пр. На рис. 30 соответствующие изменения происходят с первыми уровнями спинов $5/2$ и $7/2$ в области $\gamma_0 = 12-13^\circ$. При значении $\xi \geq 1$ (см. рис. 28) «перепутывание» одночастичных и коллективных возбужденных состояний происходит при больших энергиях возбуждения (второй возбужденный уровень спина $9/2$ и т. д.).

В табл. 37 приведены теоретические расчеты и экспериментальные значения спинов и энергий первых возбужденных состояний нечетных ядер. Экспериментальные данные взяты из работ, которые указаны в столбцах вместе с обозначением химического символа соответствующего ядра. Там же указаны значения параметров ξ и γ_0 , использованные для сравнения теоретических расчетов с экспериментом. Для ядер Al^{25} , Mg^{25} , Sb^{119} , Re^{185} , Re^{187} , Hf^{175} , U^{233} теоретические расчеты были сделаны Пашкевичем и Сардаряном [120]. Теоретические расчеты и сравнение с экспериментом для ядер Dy^{165} , Ho^{165} , Er^{167} , Lu^{177} , Ta^{181} , Sm^{245} , Bk^{249} выполнены Кашубой [143]. Следует отметить, что при сравнении теории с экспериментом использовано только три параметра: ξ , γ_0 и энергия первого возбужденного уровня. Выбранные значения γ_0 мало отличаются от соответствующих эффективных значений γ в соседних четно-четных ядрах (если учесть, что в четно-четных ядрах нельзя отличить γ от $60^\circ - \gamma$). Например, $\gamma_0 = 21,3^\circ$ для ядра Sb^{119} , соседнее ядро Cd^{116} имеет $\gamma_0 = 25^\circ$, $\gamma_0 = 15,6^\circ$ для ядра Re^{185} , соседнее ядро W^{184} имеет значение $\gamma_0 = 14,1^\circ$ и т. д.

Далее из табл. 37 следует, что в ядрах с малым значением ξ и $\gamma_0 < 25^\circ$ первые уровни возбужденных состояний образуют вра-

Теоретические и экспериментальные значения спинов и энергий нечетных ядер

Ядро	Теория		Эксперимент		Ядро	Теория		Эксперимент	
	спин	энергия, кэв	спин	энергия, кэв		спин	энергия, кэв	спин	энергия, кэв
Al ²⁵ при $\xi=1,0$ $\gamma_0=40^\circ$ [123]	5/2	0	5/2+	0	Mg ²⁵ при $\xi=1,0$ $\gamma_0=37,5^\circ$ [124]	5/2	0	5/2+	0
	1/2	455	1/2+	455		1/2	586	1/2+	586
	9/2	800	—	—		9/2	950	—	—
	3/2	942	3/2+	949		3/2	1110	3/2+	984
	7/2	1390	(7/2+)	1610		7/2	1500	7/2+	1608
	5/2	1780	5/2+	1810		5/2	1970	5/2+	1962
	3/2	2460	1/2+	2500		—	—	1/2+	2566
	—	—	—	2690		5/2	2760	(7/2+)	2740
	5/2	2920	3/2+	2740		3/2	2850	(3/2+)	2805
Sb ¹¹⁹ при $\xi=0,25$ $\gamma_0=21,3^\circ$ [125]	5/2	0	5/2+	0	Re ¹⁸⁵ при $\xi=0,25$ $\gamma_0=15,6^\circ$ [126] [127]	5/2	0	5/2+	0
	7/2	271	(7/2+)	271		7/2	122	7/2+	122
	9/2	530	—	—		9/2	277	9/2+	280
	1/2	630	(1/2+)	645		1/2	627	1/2+	643
	3/2	755	(3/2+)	702		3/2	720	3/2+	718
	9/2	825	—	—		9/2	740	—	—
	5/2	900	(5/2+)	1054		5/2	790	5/2+	870
	7/2	1230	(7/2+)	1221		3/2	810	3/2+	879
	—	—	(9/2+)	1374					
	3/2	1480	—	—					
Re ¹⁸⁷ при $\xi=0,25$ $\gamma_0=17,5^\circ$ [128]	5/2	0	5/2+	0	Hf ¹⁷⁵ при $\xi=0,25$ $\gamma_0=25^\circ$	5/2	0	5/2—	0
	7/2	134	7/2+	134,24		7/2	81,5	7/2—	81,5
	9/2	296	9/2+	300—320		1/2	122	1/2—	125,9
	1/2	522	1/2+	511,6		9/2	144	9/2—	185,8
	3/2	634	3/2+	618,2		3/2	167	3/2—	196,4
	—	—	1/2+	625,3		5/2	208	5/2—	213,4
	9/2	655	—	—		9/2	211	—	—
	5/2	740	—	—		—	—	11/2—	312,4
	—	—	3/2+	773		7/2	315	7/2—	348,4
	3/2	840	—	—		—	—	7/2—	375,4
	7/2	855	—	864,5		3/2	405	—	—
						9/2	415	9/2—	406,1
U ²³³ при $\xi=0,25$ $\gamma_0=11,25^\circ$ [130] [131] [132]	5/2	0	5/2+	0	Dy ¹⁶⁵ при $\xi=0,19$ $\gamma_0=12,8^\circ$ [134] [135]	7/2	0	7/2+	9
	7/2	40,35	7/2+	40,35		9/2	83,96	9/2+	83,397
	9/2	95	9/2+	92,0		11/2	184,3	11/2+	186,088
	3/2	295	3/2+	311,93		13/2	303,2	13/2+	303
	5/2	315	5/2+	340,52		3/2	536,9	3/2+	536,62
	7/2	365	—	—		11/2	579,7	—	—
	9/2	370	—	—		5/2	583,6	5/2+	583,99
	1/2	403	1/2+	398,55		7/2	648,8	7/2+	648
	—	—	3/2+	415,80		9/2	733,8	—	—
	5/2	432	—	—		11/2	836,1	—	—
	3/2	453	—	—		5/2	883,2	—	—
	—	—	5/2+	461,16					

Ядро	Теория		Эксперимент		Ядро	Теория		Эксперимент	
	спин	энергия, кэв	спин	энергия, кэв		спин	энергия, кэв	спин	энергия, кэв
Ho ¹⁶³ при $\xi=0,1867$ $\gamma_0=13,8^\circ$ [133]	7/2	0	7/2-	0	Lu ¹⁷⁷ при $\xi=0,1867$ $\gamma_0=12,8$ [141] [142]	7/2	0	7/2+	0
	9/2	94,98	9/2-	94,69		9/2	121,8	9/2+	121,7
	11/2	209,0	11/2-	209,9		11/2	268,9	11/2+	268,5
	13/2	341,1	13/2-	345		13/2	440,2	13/2+	440,4
	15/2	490,0	15/2-	499		15/2	634,5	15/2+	635,8
	3/2	512,8	3/2-	514,2		3/2	778,1	—	—
	11/2	561,7	—	—		11/2	840,2	—	—
	5/2	565,8	5/2-	566		5/2	845,9	—	—
	7/2	639,8	7/2-	638		17/2	898,3	17/2+	853
	13/2	703,8	17/2-	672					
Er ¹⁶⁷ при $\xi=0,25$ $\gamma_0=12,5$ [139] [140]	7/2	0	7/2+	0	Sm ²⁴⁵ при $\xi=0,55$ $\gamma_0=10^\circ$ [46]	7/2	0	7/2+	0
	9/2	78,6	9/2+	78,6		9/2	56,0	9/2+	56,0
	11/2	173	11/2+	179		11/2	123,98	11/2+	124
	13/2	284	13/2+	290		13/2	204,6	13/2+	207
	3/2	531	3/2+	532,2		5/2	257,1	5/2+	254
	11/2	585	—	—		7/2	292,4	7/2+	301
	5/2	587	—	—		9/2	350,1	9/2+	357
	7/2	639	—	—		11/2	389,3	11/2+	422
Ta ¹⁸¹ при $\xi=0,833$ $\gamma_0=6^\circ$ [46]	7/2	0	7/2+	0	Bk ²⁴⁹ при $\xi=0,2267$ $\gamma_0=8^\circ$ [46]	7/2	0	7/2+	0
	9/2	136,3	9/2+	136,25		9/2	41,7	9/2+	41,7
	11/2	300,8	11/2+	301		11/2	92,6	11/2+	93,4
	5/2	481,8	5/2+	482		13/2	152,6	13/2+	156
	13/2	500,8	13/8+	500		15/2	221,68	15/2+	230
	7/2	552,6	1/2+	615		17/2	280	—	253
						5/2	403,4	5/2+	393
						7/2	434,0	7/2+	433,5
						9/2	474,0	9/2+	485
						11/2	520,9	(11,2+)	547
						13/2	580,5	—	—
						3/2	657,3	—	—

щательные полосы (Re¹⁸⁵, Re¹⁸⁷, U²³³, Sm²⁴⁵, Bk²⁴⁹ и пр.). В ядрах с большими значениями ξ и $\gamma_0 > 30^\circ$ вращательные полосы выделить трудно.

В ряде работ было произведено вычисление энергетических состояний нечетных ядер на основе оператора (17.7) при использовании приближения сильной связи, т. е. предполагалось, что вращательные энергии малы по сравнению с одночастичными возбуждениями. Например, в работе Гехта и Сатчлера [144] на основе оператора (17.7) проводились численные вычисления возбужденных состояний ядер в области $A \sim 190$. Одночастичные состояния внешнего нуклона в неаксиальном поле остова описывались волновыми функциями, полученными

Ньютоном [119]. Учитывались только диагональные матричные элементы оператора (17.7) по однонуклонным состояниям. Авторы работы [144] утверждают, что при $\beta_0=0,2$ и $\gamma_0=13,5^\circ$ порядок вычисленных уровней для ядра Ir^{191} совпадает с экспериментально наблюдаемым порядком уровней. Введенное в работе [144] при вычислении собственных значений оператора (17.7) значительное упрощение задачи привело к тому, что при предельном переходе $\gamma_0 \rightarrow 0$ энергии всех уровней, включая и энергию основного состояния, ушли в бесконечность. В приближении сильной связи были проведены также расчеты энергетических состояний нечетных ядер в работе Персон и Расмуссена [145]. Используя расчеты энергетических состояний нуклонов в поле трехмерного осциллятора [119], Персон и Расмуссен исследовали вращательные состояния ядра при фиксированном состоянии внешнего нуклона. Вычисление энергии вращательных состояний сводилось к диагонализации матрицы порядка $(I+1/2)$ для каждого углового момента I . Такая диагонализация осуществлялась численным путем для ядра Ce^{131} при разных значениях параметров β_0 и γ_0 . Авторы отмечают, что лучшее согласие с экспериментом по положению уровней наблюдается при $\beta_0=0,28$ и $\gamma_0=38^\circ$. К сожалению, отсутствие достоверных экспериментальных данных о спинах возбужденных состояний затруднило полное сравнение теории с экспериментом.

Наиболее последовательно, без использования приближения сильной связи, но без учета β - и γ -колебаний поверхности остова, производились расчеты возбужденных состояний нечетных ядер в работах Чи и Дэвидсона [146, 147]. Вычисления проводились с учетом всех одночастичных состояний внешнего нуклона, относящихся к одному главному квантовому числу N . При таких вычислениях приходится диагонализировать матрицу порядка $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)(I+1/2)$ для уровней с угловым моментом I . Например, при $N=5$ и $I=9/2$ надо диагонализировать матрицу 105-го порядка. Поскольку с ростом квантового числа N расчеты значительно усложняются, то в работах [146, 147] пришлось ограничиться вычислениями возбужденных состояний ядер, внешний нуклон которых находится на оболочке $N=2$, т. е. ядер (O^{17} , F^{19} , . . . , Cl^{35} , K^{39}), имеющих от 9 до 19 нечетных нейтронов или протонов. Используя в теории четыре параметра, Чи и Дэвидсон получили сравнительно хорошее согласие теории с экспериментом для ядер P^{29} , S^{29} , P^{31} . Для других исследованных в этих работах ядер согласие с экспериментом хуже. По-видимому, это связано с тем, что для ядер с массовыми числами 17—39 используемая модель-остов и один внешний нуклон плохо применимы. Граница таких ядер четко не выделена, и различие в характере движения «последнего» нечетного нуклона и остальных нуклонов не очень существенно.

Итак, проведенные выше расчеты показывают, что при количественном теоретическом исследовании возбужденных состояний нечетных ядер нельзя применять приближение сильной связи. Необходимо учитывать сложное взаимодействие вращательного и одночастичных возбуждений одинаковой четности. При более точных вычислениях надо учитывать и деформируемость ядер. Как правило, вычисления возбужденных состояний таких ядер сводятся к численной диагонализации квадратной матрицы сравнительно высокого порядка. Поэтому при практических вычислениях вводились упрощения, либо предполагалось, что угловой момент внешнего нуклона сохраняется, либо рассматривались сравнительно легкие ядра. Таким образом, можно отметить, что теория возбужденных состояний нечетных ядер находится еще в начальной стадии развития. Даже простейшая модель нечетного ядра (остов и один внешний нуклон) не исследована всесторонне. Следует, конечно, иметь в виду, что такая модель имеет ограниченную область применимости. В частности, существенным недостатком использованной нами модели помимо предположения об определенном значении полного момента внешнего нуклона является то, что основное состояние ядра соответствует нижайшему состоянию внешнего нуклона в поле остова ядра. Вследствие принципа Паули при наличии нескольких нуклонов одинакового типа нижайшее состояние последнего нуклона должно соответствовать только первому свободному однонуклонному состоянию. Кроме того, взаимодействие последнего нуклона с другими нуклонами ядра целиком не сводится к взаимодействию нуклона с остовом, который описывается только коллективными переменными.

§ 20. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПЕРЕХОДЫ В НЕЧЕТНЫХ НЕАКСИАЛЬНЫХ ЯДРАХ

В предыдущем параграфе были вычислены энергии возбужденных состояний нечетного ядра на основе модели: остов + один внешний нуклон. В этой модели не используется предположение об адиабатичности коллективных движений относительно одночастичных, однако считается, что полный момент внешнего нуклона имеет определенное значение. Проведенные вычисления позволяют определить не только спины и значения энергий возбужденных состояний, но и найти их волновые функции. Следовательно, можно вычислить средние значения электромагнитных моментов в каждом из состояний и вероятности электромагнитных переходов между различными состояниями.

Вычислим вероятности электромагнитных переходов в модели нечетного ядра с одним внешним нуклоном, имеющим определенное значение углового момента j . Вероятности переходов более чувствительны к неучитываемым в модели нечетного

ядра примесям состояний с другими значениями j . Поэтому сравнение полученных результатов с экспериментом позволит уточнить границы применимости использованной модели.

Оператор магнитного дипольного момента в нашей модели рассматривался в работах [137, 138]. Согласно формуле (3.28), его можно записать в виде

$$\mathfrak{M}_\mu(M1) = \mu_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \{ (g_J - g_R) j_\mu + g_R I_\mu \}, \quad (20.1)$$

где μ_0 — ядерный магнетон; g_J и g_R — гиромангнитные отношения для нуклонного и коллективного движений; j_μ и I_μ — сферические проекции на лабораторную систему осей угловых моментов нуклона и ядра. Нас будут интересовать только состояния ядра, в которых $n_\beta = n_\gamma = 0$. В этом случае волновые функции основного и возбужденных состояний ядра выражаются линейными комбинациями (19.19), в которых однонуклонное движение определяется функциями $\chi_\Omega^j(y)$ в системе координат, связанной с ядром, а функции коллективного движения зависят от углов Эйлера, характеризующих ориентацию ядра в лабораторной системе координат. Поэтому, чтобы использовать функции (19.19), надо преобразовать первое слагаемое в операторе (20.1) к системе координат, связанной с ядром. Такое преобразование легко осуществить, если вспомнить, что операторы j_μ являются компонентами тензора первого ранга. При вращении системы координат они преобразуются, согласно формуле (Е.1) приложения Е, как сферические компоненты вектора

$$j_\mu = \sum_{\nu} D_{\mu\nu}^1(0) j'_\nu, \quad (20.2)$$

где j'_ν — сферические проекции оператора углового момента нуклона в координатной системе ядра. Следовательно, оператор $M1$ -перехода можно записать в виде

$$\mathfrak{M}_\mu(M1) = \mu_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \{ (g_J - g_R) \sum_{\nu} D_{\mu\nu}^1(0) j'_\nu + g_R I_\mu \}. \quad (20.3)$$

Приведенные вероятности $M1$ -переходов между состояниями нечетного ядра, изображаемыми функциями (19.19), усредненные по поляризациям исходного состояния и просуммированные по поляризациям конечного состояния и испускаемого γ -кванта, согласно равенству (3.9), имеют вид

$$B(M1; I\tau \rightarrow I'\tau') = \frac{1}{(2I+1)} \sum_{MM'} |\langle U_{I'M'\tau'} | \mathfrak{M}_\mu(M1) | U_{IM\tau} \rangle|^2. \quad (20.4)$$

Принимая во внимание, что, согласно формуле (Б.12) приложения Б и формуле (Д.6а) Приложения Д, действия опера-

торов j_μ' и I_μ на волновые функции χ_Ω^j внешнего нуклона и на функцию $D_{MK}'(\theta)$ определяются равенствами

$$j_\nu \chi_\Omega^j = (-1)^\nu \sqrt{j(j+1)} (j1, \Omega + \nu, -\nu | j\Omega) \chi_{\Omega+\nu}^j,$$

$$I_\mu D_{MK}'(\theta) = (-1)^\mu \sqrt{I(I+1)} (I1, M + \mu, -\mu | IM) D_{M+K, K}'^I,$$

и подставляя в равенство (20.4) оператор (20.3) и функции (19.19), находим (см. работу [136]) следующее общее выражение для приведенных вероятностей $M1$ -переходов между любыми парами энергетических состояний нечетного ядра, описываемыми функциями (19.19):

$$\begin{aligned} B(M1; I\tau \rightarrow I'\tau') &= \frac{3\mu_0^2}{4\pi} \left\{ (g_j - g_R) V \sqrt{j(j+1)} \left\{ \sum_{K, K'}'' R_{KK'}^{\tau\tau'}(1) \times \right. \right. \\ &\times (IK, K' - K | I'K') + S_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\tau\tau'}(1) \left(I1, -\frac{1}{2}, 1 | I\frac{1}{2} \right) \Big\} + \\ &\left. + g_R V \sqrt{j(j+1)} \delta_{II'} \sum_K'' \mathcal{P}_{KK}^{\tau\tau'} \right\}^2, \end{aligned} \quad (20.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R_{KK'}^{\tau\tau'}(1) &= \sum_{\Omega, \Omega'}'' A_{K'\Omega'}^{I'\tau'} A_{K\Omega}^{I\tau} (j1\Omega, K' - K | j\Omega'); \\ S_{KK'}^{\tau\tau'}(1) &= (-1)^{I-I'} \sum_{\Omega, \Omega'}'' A_{K'\Omega'}^{I'\tau'} A_{K\Omega}^{I\tau} (j1, -\Omega, K' + K | j\Omega'); \\ \mathcal{P}_{KK'}^{\tau\tau'} &= \begin{cases} 0, & \text{если } K - K' = 2p + 1; \\ \sum_{\Omega}'' A_{K\Omega}^{I\tau} A_{K'\Omega}^{I'\tau'}, & \text{если } K - K' = 2p, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (20.6)$$

где $p=0, \pm 1, \pm 2 \dots$. При $\tau=\tau'$ (индекс τ нумерует состояния с данным I) последнее слагаемое мало и его можно не учитывать. С помощью формулы (20.5) и найденных значений $A_{K\Omega}^{I\tau}$ Пашкевич вычислил [136] приведенные вероятности $M1$ -переходов для ядер с $j=5/2$, $\xi=0,25$ для разных значений параметра η_0 . Результаты этих вычислений изображены на рис. 31 в единицах $\mu_0(g_j - g_R)$. Кривые 1-6 изображают соответственно приведенные вероятности

$$\begin{aligned} &B\left(M1; \frac{3}{2} 1 \rightarrow \frac{5}{2} 1\right); \quad B\left(M1; \frac{5}{2} 2 \rightarrow \frac{5}{2} 1\right); \\ &B\left(M1; \frac{5}{2} 2 \rightarrow \frac{7}{2} 1\right); \quad B\left(M1; \frac{5}{2} 2 \rightarrow \frac{3}{2} 1\right); \\ &B\left(M1; \frac{1}{2} 1 \rightarrow \frac{3}{2} 1\right); \quad B\left(M1; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{5}{2} 1\right). \end{aligned}$$

Резкие уменьшения приведенных вероятностей $M1$ -переходов в области изменения γ_0 от 14 до 17° (см. рис. 31) указывают, что при этом существенно меняется природа соответствующих возбужденных состояний. Так, значительное уменьшение

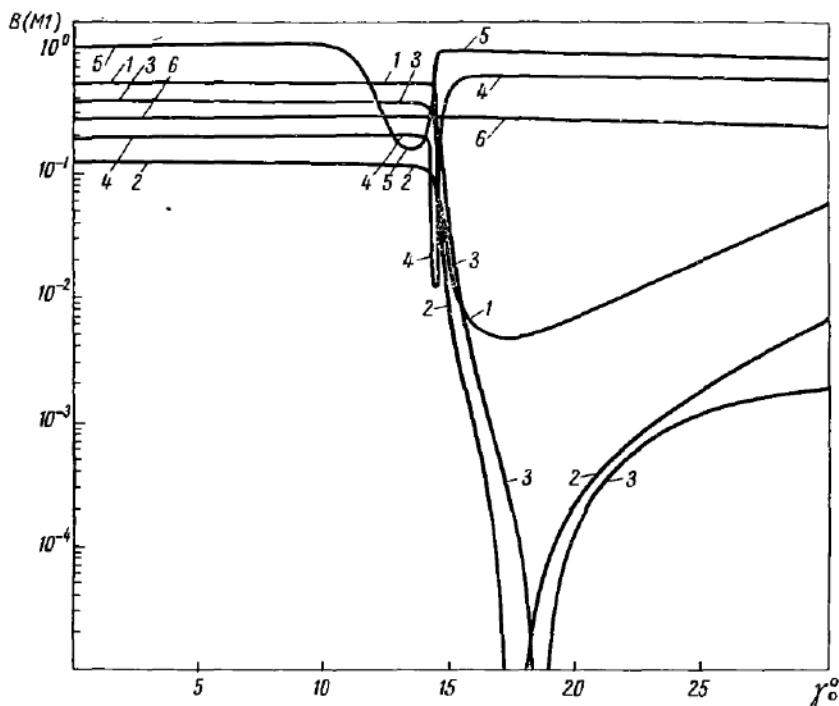


Рис. 31. Зависимость приведенных вероятностей [в единицах $\gamma_0^2 (g_I - g_R)^2$] $M1$ -переходов между возбужденными состояниями нечетных ядер $S_{\xi}^{\pi} = 0,25$ и $j=5/2$ от параметра γ_0 :

$$\begin{aligned} 1 - B\left(M1; \frac{3}{2} 1 \rightarrow \frac{5}{2} 1\right); & \quad 2 - B\left(M1; \frac{5}{2} 2 \rightarrow \frac{5}{2} 1\right); \\ 3 - B\left(M1; \frac{5}{2} 2 \rightarrow \frac{7}{2} 1\right); & \quad 4 - B\left(M1; \frac{5}{2} 2 \rightarrow \frac{3}{2} 1\right); \\ 5 - B\left(M1; \frac{1}{2} 1 \rightarrow \frac{3}{2} 1\right); & \quad 6 - B\left(M1; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{5}{2} 1\right). \end{aligned}$$

(более чем на два порядка) приведенных вероятностей $B\left(M1; \frac{3}{2} 1 \rightarrow \frac{5}{2} 1\right)$ и $B\left(M1; \frac{5}{2} 2 \rightarrow \frac{5}{2} 1\right)$ (см. кривые 1 и 2) указывает, что одночастичные состояния $\frac{3}{2} 1$, $\frac{5}{2} 1$ и $\frac{5}{2} 2$ в области значений γ_0 от 14 до 17° переходят в коллективные, а $M1$ -переходы между коллективными состояниями маловероятны.

Для вычисления приведенных вероятностей электрических квадрупольных переходов представим оператор $E2$ -переходов в нашей модели в виде суммы двух слагаемых

$$\mathfrak{M}_\mu(E2) = e_{\text{эфф}} r^2 Y_{2\mu}(\vartheta' \varphi') + \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{2\mu}(\beta, \gamma), \quad (20.7)$$

где первое слагаемое, согласно формуле (3.1), определяет оператор квадрупольного электрического момента внешнего нуклона в лабораторной системе координат; $e_{\text{эфф}}$ — эффективный заряд нуклона;

$$Q_{2\mu}(\beta, \gamma) = Q_0 \frac{\beta}{\beta_0} \left\{ D_{\mu 0}^2 \cos \gamma + [D_{\mu 2}^2 + D_{\mu, -2}^2] \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}} \right\} \quad (20.8)$$

оператор квадрупольного электрического момента остова

$$Q_0 \equiv \frac{3ZeR_0^2 \beta_0}{1 \frac{5}{5\pi}}.$$

Преобразуя в операторе (20.7) первое слагаемое в системе координат, связанной с ядром, и заменяя в равенстве (20.8) β и γ на β_0 и γ_0 , получим окончательный вид оператора $E2$ -перехода для нашей модели нечетного ядра (без учета β - и γ -колебаний)

$$\mathfrak{M}_\mu(E2) = e_{\text{эфф}} r^2 \sum_{\nu} D_{\mu\nu}^2 Y_{2\nu}(\vartheta \varphi) + \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{2\mu}(\beta_0, \gamma_0). \quad (20.9)$$

Подставляя оператор (20.9) и волновые функции (19.19) в выражение

$$B(E2; I\tau \rightarrow I'\tau') = \frac{1}{(2I+1)} \sum_{MM'\mu} |\langle U_{I'M'\tau'} | \mathfrak{M}_\mu(E2) | U_{IM\tau} \rangle|^2,$$

находим

$$\begin{aligned} B(E2; I\tau \rightarrow I'\tau') = & \left| \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_0 \sum_{KK'}'' \left\{ \mathcal{P}_{KK'}^{\tau\tau'} \left[(I2K0 | I'K') \times \right. \right. \right. \\ & \times \cos \gamma_0 + [(I2K2 | I'K') + (I2K, -2 | I'K')] \frac{\sin \gamma_0}{\sqrt{2}} \left. \right] + Q_{KK'}^{\tau\tau'} \times \\ & \times (I2, -K, 2 | I'K') \frac{\sin \gamma_0}{\sqrt{2}} \left. \right\} - Q_p \left[\frac{(2j-1)(2j+3)}{2j(2j+2)} \right]^{1/2} \times \\ & \times \sum_{KK'}'' [R_{KK'}^{\tau\tau'}(2) (I2K, K' - K | I'K') + \\ & + S_{KK'}^{\tau\tau'}(2) (I2, -K, K' + K | I'K')] \Big|^2, \quad (20.10) \end{aligned}$$

где $\mathcal{P}_{KK'}^{\tau\tau'}$, $R_{KK'}^{\tau\tau'}(2)$ и $S_{KK'}^{\tau\tau'}(2)$ определены выражениями (20.6);

$$Q_{KK'} = \begin{cases} \frac{\sum''}{\Omega} A_{K\Omega}^{l\tau} A_{K'}^{l'\tau'} - \Omega, & \text{если } K' - K = 2p + 1; \\ 0, & \text{если } K' - K = 2p, p = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \end{cases} \quad (20.11)$$

$$Q_p = c_{\text{эфф}} \frac{(j\tau \| r^2 \| j\tau)}{1, 2j+1}. \quad (20.12)$$

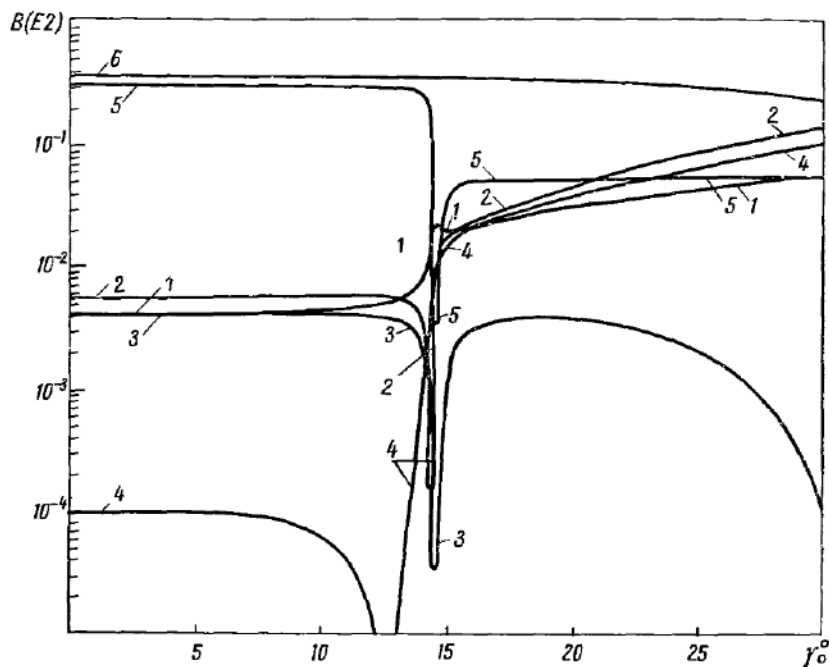


Рис. 32. Зависимость приведенных вероятностей $E2$ -переходов (в единицах $\frac{5Q_0^2}{16\pi}$) между возбужденными состояниями нечетных ядер с $\xi=0.25$ и

$j=5/2$ от параметра γ_0 :

$$\begin{aligned} 1-B\left(E2; \frac{3}{2} 1 \rightarrow \frac{5}{2} 1\right); & \quad 2-B\left(E2; \frac{3}{2} 1 \rightarrow \frac{7}{2} 1\right); \\ 3-B\left(E2; \frac{5}{2} 2 \rightarrow \frac{5}{2} 1\right); & \quad 4-B\left(E2; \frac{5}{2} 2 \rightarrow \frac{7}{2} 1\right); \\ 5-B\left(E2; \frac{5}{2} 1 \rightarrow \frac{3}{2} 1\right); & \quad 6-B\left(E2; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{5}{2} 1\right). \end{aligned}$$

Из равенства (20.10) следует, что приведенная вероятность $E2$ -перехода зависит от трех слагаемых: 1) коллективно пропорционального Q_0^2 , 2) одночастично пропорционального Q_p^2 и

3) корреляционного пропорционального $Q_0 Q_p$. Согласно определению (20.12), величина Q_p зависит от эффективного заряда внешнего нуклона и от приведенного матричного элемента $\langle j\tau \| r^2 \| j\tau \rangle$. Теоретические вычисления эффективного заряда очень приближенны. Поэтому приходится рассматривать $e_{\text{эфф}}$, а еще лучше всю величину Q_p , как эмпирическую постоянную.

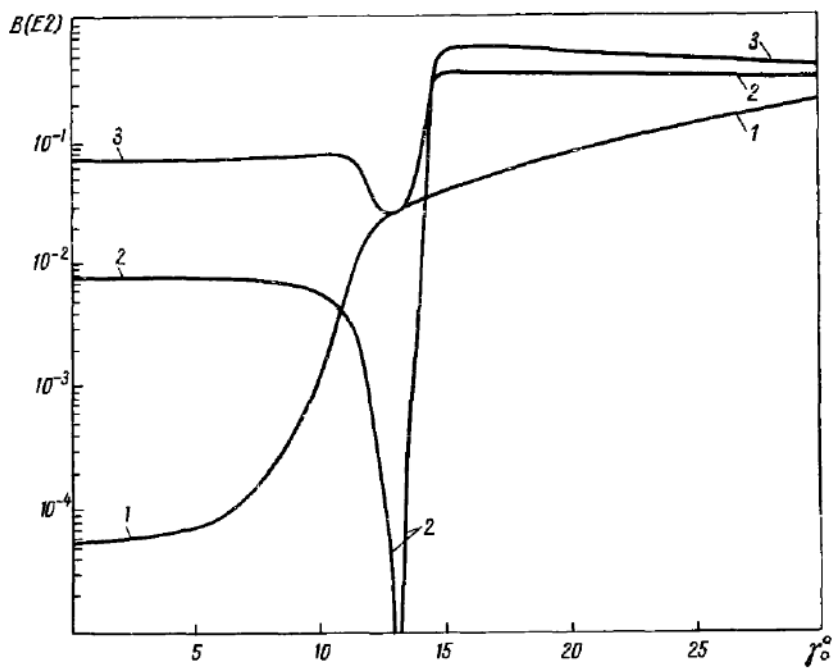


Рис. 33. То же, что и на рис. 32:

$$1 \text{ соответствует } B\left(E2; \frac{1}{2} 1 \rightarrow \frac{5}{2} 1\right);$$

$$2-B\left(E2; \frac{1}{2} 1 \rightarrow \frac{3}{2} 1\right); \quad 3-B\left(E2; \frac{1}{2} 1 \rightarrow \frac{5}{2} 2\right).$$

Это значительно снижает результативность вычислений вероятностей переходов между возбужденными состояниями нечетных ядер. Если внешним нуклоном является нейтрон, то его эффективный заряд составляет ($\sim A^{-2}$) часть единичного заряда. Поэтому в тяжелых ядрах, которым соответствует модель с одним внешним нуклоном, можно в равенстве (20.10) опустить член Q_p . Тогда вероятность перехода пропорциональна Q_0^2 . При этом относительные приведенные вероятности E2-переходов в таком ядре не зависят от Q_0^2 .

На рис. 32 и 33 изображены рассчитанные Пашкевичем [136] приведенные вероятности $E2$ -переходов в единицах $\frac{5}{16\pi} Q_0^2$ в зависимости от параметра γ_0 для модели нечетного ядра, представляющего неаксиальный остов с нечетным нейтроном, имеющим $j=5/2$, параметр $\xi=0,25$. Из рис. 32 и 33 видно, что приведенные вероятности $E2$ -переходов при некоторых значениях испытывают резкие изменения. Это указывает на изменение ха-

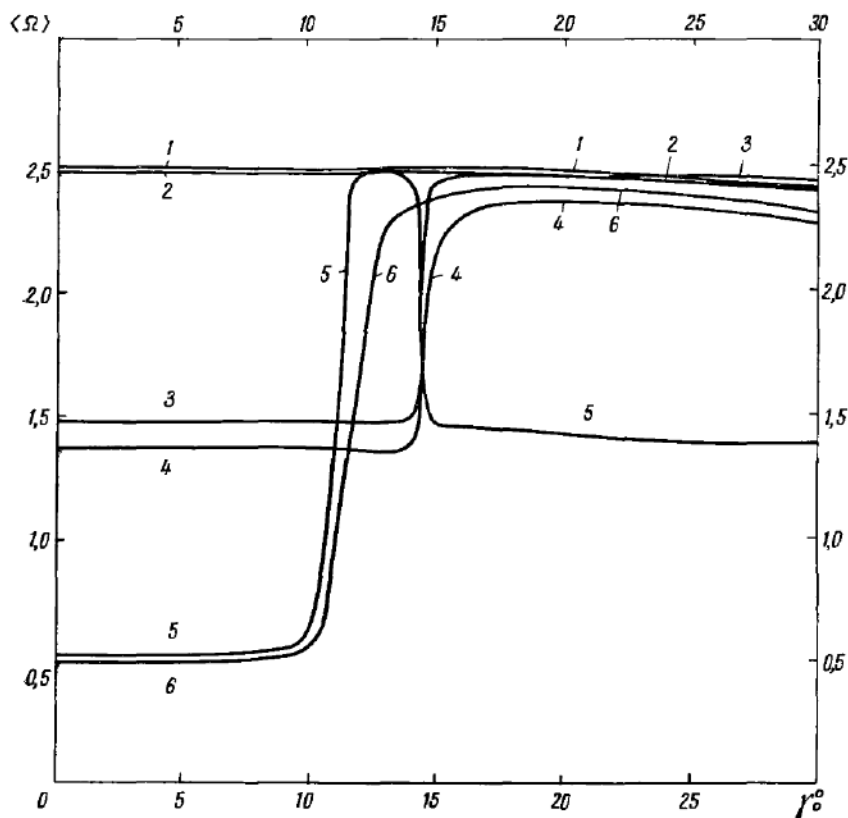


Рис. 34. Зависимость значений $\langle \Omega \rangle$ в возбужденных состояниях нечетных ядер с $j=5/2$ и $\xi=0,25$ от параметра γ_0 :

1—соответствует состоянию $5/2, 1$; 2—состоянию $7/2, 1$; 3—состоянию $3/2, 1$; 4—состоянию $5/2, 2$; 5—состоянию $3/2, 2$; 6—состоянию $1/2, 1$.

рактера соответствующих возбужденных состояний, между которыми происходит переход. Например, при увеличении γ_0 от 10 до 13° приведенная вероятность $B\left(E2; \frac{1}{2} 1 \rightarrow \frac{5}{2} 1\right)$ возрастает более чем на два порядка. Аналогичные изменения происходят с уровнями спина $3/2$ и $5/2$ в области $\gamma_0=14-17^\circ$.

Согласно равенству (19.19), возбужденные состояния нечетных ядер изображаются волновыми функциями, представляющими суперпозиции состояний с разными значениями K и $\Omega = K - 2m$. Для качественной характеристики структуры возбужденного состояния $I\pi$ можно ввести величины

$$\langle K \rangle = \sum_{K, \Omega} K |A_{K\Omega}^{I\pi}|^2, \quad \langle \Omega \rangle = \sum_{K, \Omega} \Omega |A_{K\Omega}^{I\pi}|^2.$$

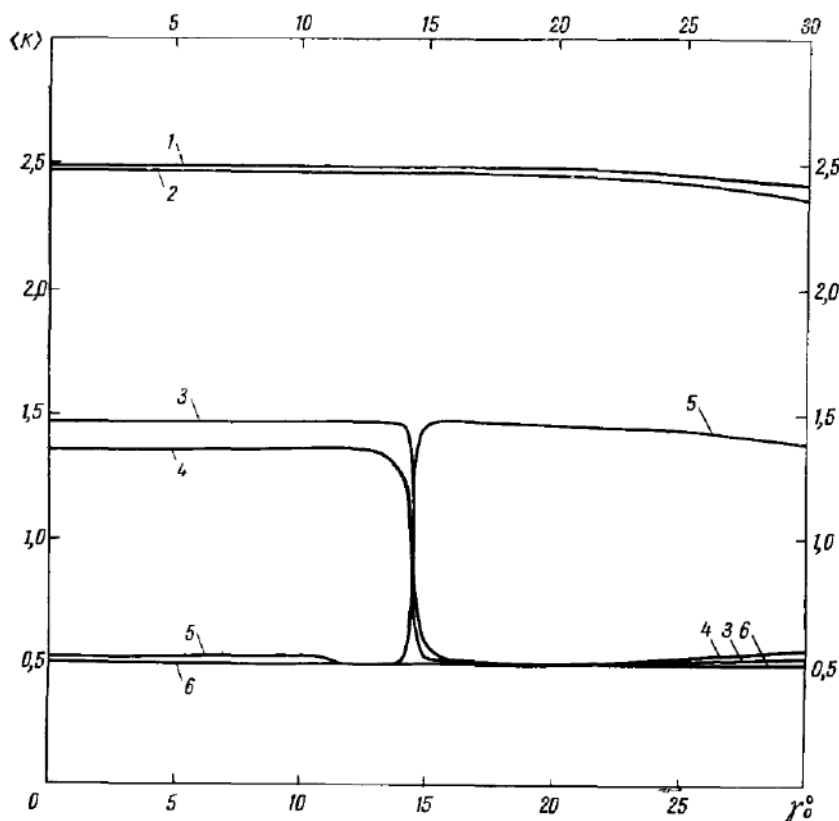


Рис. 35. Зависимость значений $\langle K \rangle$ в возбужденных состояниях нечетных ядер с $j=5/2$ и $\xi=0,25$ от параметра γ_0 :

1—соответствует состоянию $5/2, 1$; 2—состоянию $7/2, 1$; 3—состоянию $3/2, 1$; 4—состоянию $5/2, 2$; 5—состоянию $3/2, 2$; 6—состоянию $1/2, 1$.

Эти величины вычислялись Пашкевичем [136]. На рис. 34 и 35 приведены зависимости величин $\langle \Omega \rangle$ и $\langle K \rangle$, полученные в расчетах Пашкевича для возбужденных состояний нечетного ядра с $j=5/2$, $\xi=0,25$, от значения γ_0 . Из рис. 34 и 35 следует, что

Теоретические и экспериментальные значения приведенных вероятностей E 2-переходов в нечетных ядрах

Ядро	Отношение приведенных вероятностей	Теория	Эксперимент	Литература
Ho^{165} при $\xi = 0,187$ $\gamma = 14^\circ$	$\frac{B(E2; \frac{5}{2} 1 \rightarrow \frac{7}{2} 1)}{B(E2; \frac{5}{2} 1 \rightarrow \frac{9}{2} 1)}$	0,461	$0,73 \pm 0,16$	[133]
	$\frac{B(E2; \frac{7}{2} 2 \rightarrow \frac{7}{2} 1)}{B(E2; \frac{7}{2} 2 \rightarrow \frac{11}{2} 1)}$	0,098	$0,26 \pm 0,16$	
	$\frac{B(E2; \frac{7}{2} 2 \rightarrow \frac{9}{2} 1)}{B(E2; \frac{7}{2} 2 \rightarrow \frac{11}{2} 1)}$	0,706	$0,64 \pm 0,33$	
	$\frac{B(E2; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{5}{2} 1)}{B(E2; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{3}{2} 1)}$	0,485	$0,62 \pm 0,12$	
	$\frac{B(E2; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{7}{2} 2)}{B(E2; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{3}{2} 1)}$	0,112	$0,20 \pm 0,08$	
	$\frac{B(E2; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{9}{2} 1)}{B(E2; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{3}{2} 1; \frac{5}{2} 1; \frac{7}{2} 2)}$	15	50	
	$\frac{B(E2; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{11}{2} 1)}{B(E2; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{9}{2} 1)}$	0,283	0,24	

Ядро	Отношение приведенных вероятностей	Теория	Эксперимент	Литература
Er ⁶⁷ при $\xi = 0,25^\circ$ $\gamma = 12,5^\circ$	$B(E2; \frac{11}{2} 1 \rightarrow \frac{7}{2} 1)$	0,231	0,263	[139, 140]
	$B(E2; \frac{11}{2} 1 \rightarrow \frac{9}{2} 1)$			
	$B(E2; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{11}{2} 1)$	0,273	0,234	
	$B(E2; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{9}{2} 1)$			
	$B(E2; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{3}{2} 1)$	0,0321	0,0145	
	$B(E2; \frac{7}{2} 1 \rightarrow \frac{9}{2} 1)$			

в основном состоянии среднее значение $\langle K \rangle_{\text{осн}} = \langle \Omega \rangle_{\text{осн}}$. При изменении γ_0 эти величины изменяются в малых пределах от 2,4 до 2,5. В то же время среднее значение $\langle \Omega \rangle$ для уровня $1/2, 1$ при малых γ_0 равно $\approx 0,5$ и в области $\gamma \approx 10-13^\circ$ увеличивается до 2,2, т. е. достигает значений, близких к $\langle \Omega \rangle_{\text{осн}}$ в основном состоянии ядра.

Так же как в основном состоянии, в возбужденных состояниях $7/2, 1$; $9/2, 1$ соблюдаются равенства $\langle K \rangle = \langle \Omega \rangle \approx 2,4 \div 2,5$. Эти состояния относятся к основной вращательной полосе нечетного ядра ($\xi = 0,25$, $\gamma_0 \leq 30^\circ$). С другой стороны, состояния $3/2, 1$ и $5/2, 2$ при $\gamma_0 < 14^\circ$ являются в основном одночастичными. В этих состояниях при $\gamma_0 < 14^\circ$ средние значения $\langle K \rangle \approx \langle \Omega \rangle \approx 1,5$. При $\gamma_0 > 15^\circ$ состояния $3/2, 1$ и $5/2, 2$ переходят в коллективные и характеризуются значениями $\langle K \rangle \approx \langle \Omega \rangle_{\text{осн}} - 2$, $\langle \Omega \rangle = \langle \Omega \rangle_{\text{осн}}$. Следовательно, при $\gamma_0 > 15^\circ$ состояния $3/2, 1$ и $5/2, 2$ можно отнести к аномальным вращательным состояниям.

В табл. 38 приведены результаты сравнения (Пашкевич [136]) теоретических и экспериментальных значений отношений приведенных вероятностей $E2$ -переходов между различными возбужденными состояниями нечетных ядер. Мы видим, что теория сравнительно хорошо передает экспериментально наблюдаемые отношения приведенных вероятностей.

где

$$\alpha = \frac{|m|}{m};$$

$$\hat{L}_m = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) + \frac{\gamma^2}{4\Gamma^4} + \frac{m^2}{4} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3} \right). \quad (21.12)$$

Из выражения (21.12) следует, что оператор потенциальной энергии поперечных колебаний имеет форму

$$\omega_m(\gamma) = \frac{\gamma^2}{4\Gamma^4} + \frac{m^2}{4} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3} \right).$$

Следовательно, минимум потенциальной энергии в состояниях $m \neq 0$ равен $\gamma_0 = \Gamma \sqrt{|m|} \neq 0$.

Рассмотрим решение уравнения

$$\left\{ \hat{L}_m - \lambda_{|m|n_\gamma} \right\} g_{n_\gamma}^{l|m|}(\gamma) = 0.$$

Учитывая явный вид оператора (21.12), можно убедиться в том, что

$$g_{n_\gamma}^{l|m|}(\gamma) = \left(\frac{\gamma^2}{2\Gamma^2} \right)^{\frac{1}{2}|m|} F\left(-n_\gamma, |m| + 1; \frac{\gamma^2}{2\Gamma^2}\right) \exp\left(-\frac{\gamma^2}{4\Gamma^2}\right). \quad (21.13)$$

где $n_\gamma = 0, 1, \dots$. Собственные значения

$$\lambda_{|m|n_\gamma} = \Gamma^{-2} (2n_\gamma + |m| + 1) + \frac{m^2}{12}. \quad (21.14)$$

Будем искать решение системы уравнений (21.11) в виде произведения

$$\psi_{K|m|}^\alpha = A_{K|m|}^\alpha g_{n_\gamma}^{l|m|}(\gamma). \quad (21.15)$$

Подставив функции (21.15) в систему уравнений (21.11), получим алгебраические уравнения относительно коэффициентов $A_{K|m|}^\alpha$

$$(\lambda_{|m|n_\gamma} - \Lambda) A_{K'|m|}^{\alpha'} + \sum_{K, \alpha} \langle IjiK'\alpha' | \hat{\Omega} | IjiK\alpha \rangle A_{K|m|}^\alpha = 0. \quad (21.16)$$

Пусть $\varepsilon_l(Iji)$ есть l -й корень ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \dots$) уравнения

$$\text{Det} \{ \langle IjiK'\alpha' | \hat{\Omega} | IjiK\alpha \rangle - \varepsilon_{KK'} \delta_{\alpha\alpha'} \} = 0, \quad (21.17)$$

тогда из уравнения (21.16) можно получить, учитывая оператор (21.14),

$$\Lambda = \Gamma^{-2} (2n_\gamma + |m| + 1) + \frac{m^2}{12} + \varepsilon_l(Iji). \quad (21.18)$$

Напомним, что, согласно выражению (21.6), корни $\epsilon_l(Iji)$ уравнения (21.17) зависят от параметра ξ . Каждому корню $\epsilon_l(Iji)$ соответствует система коэффициентов $A_{K|m}^{al}$, являющихся решением (21.16) и удовлетворяющих условию ортогональности

$$\sum_{K, a} A_{K|m}^{al'} A_{K|m}^{al} = \delta_{ll'}.$$

С помощью равенства (21.15) функции (21.9), зависящие от переменных y, γ, θ и относящиеся к квантовым числам $Iji|m|n_\gamma l$, преобразуются к виду

$$X_{Iji|m|n_\gamma l}(y, \gamma, \theta) = \sum_{K, a} A_{K|m}^{al} g_{n_\gamma}^{[m]}(\gamma) |IMjiKm\rangle. \quad (21.19)$$

В предельном случае $\xi \rightarrow 0$ квантовое число l определяет состояния внешнего нуклона с определенными значениями j и i .

Пусть $\epsilon_1(I_0, j, i)$ соответствует наименьшему значению корня уравнения (21.17) при заданных j и i , тогда, выбирая Λ_0 в уравнении (21.7), равным наименьшему значению (21.18), имеем

$$\Lambda - \Lambda_0 = \Gamma^{-2} (2n_\gamma + |m|) + \frac{m^2}{12} + \Delta\epsilon_l(Iji), \quad (21.20)$$

где

$$\Delta\epsilon_l(Iji) = \epsilon_l(Iji) - \epsilon_1(I_0ji).$$

Следовательно, решая уравнение (21.7) и учитывая функции (21.8), получим энергию возбужденных состояний нечетного ядра

$$E = \epsilon_\mu + \frac{\hbar^2}{B\beta_0^2} \left\{ \frac{\nu + \frac{1}{2}}{\mu^2} \sqrt{1 + 3(\Lambda - \Lambda_0) \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^4} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\Lambda - \Lambda_0) \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho-1}{\mu}\right)^2 \right\}, \quad (21.21)$$

где ρ определяется из уравнения

$$\rho^3(\rho-1) = \mu^4 \left\{ \frac{2n_\gamma + |m|}{\Gamma^2} + \frac{m^2}{12} + \Delta\epsilon_l(Iji) \right\}.$$

При $\mu < 0,3$ $\nu = n_\beta = 0, 1, 2 \dots$ и

$$E = \epsilon_{\mu l} + \frac{\hbar^2}{B\beta_0^2} \left\{ \frac{n_\beta + 1}{\mu^2} + \frac{\Lambda - \Lambda_0}{2} \left[1 + 3\mu^2 \left(n_\beta + \frac{1}{2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \mu^4 (\Lambda - \Lambda_0)^2 \right] \right\}. \quad (21.22)$$

§ 21. ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ НЕЧЕТНЫХ ЯДЕР,
ХАРАКТЕРИЗУЕМЫХ МАЛЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ПАРАМЕТРА
ЭФФЕКТИВНОЙ НЕАКСИАЛЬНОСТИ

В сильно деформированных четно-четных ядрах, согласно § 5, минимум потенциальной энергии поперечных колебаний поверхности ядра соответствует значению $\gamma=0$, т. е.

$$2h^{-2} B \beta_0^4 V(\gamma) = C + \frac{\gamma^2}{4\Gamma^4}, \quad (21.1)$$

где Γ — параметр, характеризующий деформируемость ядра по отношению к поперечным колебаниям. Результаты § 19 и 20 могут быть использованы и для нечетных ядер, у которых зависимость потенциальной энергии поперечных колебаний поверхности остова ядра определяется выражением (21.1), если положить $\gamma_0 = \Gamma$. Однако в случае достаточно жестких ядер по отношению к поперечным колебаниям, когда $\Gamma < 0,3$, отыскание собственных значений оператора энергии (19.1) нечетных ядер можно значительно упростить, так как в этом случае вместо операторов (19.3) можно использовать их приближенные выражения

$$T_\gamma \approx -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right), \quad (21.2)$$

$$T_{\text{rot}}^0(\gamma) = \frac{1}{3} \left\{ I^2 + j^2 - I_3^2 - j_3^2 + 2(I_1 j_1 + I_2 j_2) + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3} \right) (I_3 - j_3)^2 \right\}. \quad (21.3)$$

Кроме того, входящий в равенство (19.2) оператор взаимодействия внешнего нуклона с остовом заменим приближенным значением

$$2h^{-2} B \beta_0^2 H_{\text{int}} \approx -k \beta_0^3 (3j_3^2 - j^2). \quad (21.4)$$

При использовании упрощений (21.2) — (21.4) возбужденные состояния нечетных ядер и вероятности переходов между ними исследовались в работах Сардаряна и автора [138, 148, 149]. При использовании приближений (21.2) — (21.4) уравнение (19.7) можно записать в виде

$$(\hat{L} + \hat{\Omega} - \Lambda) X(\gamma, \gamma, \theta) = 0, \quad (21.5)$$

где

$$\hat{L} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) + \frac{\gamma^2}{4\Gamma^4} + \frac{1}{4} \left(\gamma^{-2} + \frac{1}{3} \right) (I_3 - j_3)^2;$$

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{2\xi} [j(j+1) - 3j_3^2] + \frac{1}{3} \{I(I+1) + j(j+1) - I_3^2 - j_3^2 - 2(I_1j_1 + I_2j_2)\}, \quad (21.6)$$

при этом

$$\xi = h^2 [6B\beta_0^2 k]^{-1}.$$

Энергии и волновые функции продольных колебаний остова ядра определяются уравнением (19.6)

$$\left\{ -\frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{(\beta - \beta_0)^2}{\mu^4 \beta_0^4} + \frac{\Lambda - \Lambda_0}{\beta^2} - \frac{2\Theta}{\beta_0^2} \right\} \varphi(\beta) = 0, \quad (21.7)$$

где Λ определяется уравнением (21.5); а Λ_0 — постоянная, значение которой будет определено ниже. Полная волновая функция

$$\Psi = \varphi(\beta) X(y, \gamma, \theta) \quad (21.8)$$

зависит от пяти коллективных переменных $\beta, \gamma, \theta \equiv \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ и переменных y внешнего нуклона. Функциям Ψ соответствуют энергии возбужденных состояний ядра

$$E = \varepsilon_{ji} + \frac{h^2 \Theta}{B\beta_0^2}.$$

Чтобы найти решения уравнения (21.5), положим,

$$X(y, \gamma, \theta) = \sum_{K, m}'' \psi_{Km}(\gamma) |IMjiKm\rangle, \quad (21.9)$$

где

$$\begin{aligned} |IMjiKm\rangle = & \frac{\sqrt{2I+1}}{4\pi} \{D_{MK}^I(\theta) \chi_{K-2m}^j(y) + \\ & + (-1)^{I-I} D_{M, -K}^I(\theta) \chi_{2m-K}^j(y)\}. \end{aligned} \quad (21.10)$$

Суммирование в формуле (21.9) производится по тем же значениям K и m , как и в сумме (19.19).

Подставляя (21.9) в (21.5) и учитывая, что операторы $\hat{L}$ и $\hat{\Omega}$ не изменяют абсолютного значения квантового числа m , мы получим совокупность уравнений для каждого абсолютного значения m

$$[\hat{L}_m - \Lambda] \psi_{K', m}^{\alpha'} + \sum_{K, \alpha} \langle i|jK'\alpha'| \hat{\Omega} |i|jK\alpha\rangle \psi_{K, m}^{\alpha} = 0, \quad (21.11)$$

В это выражение следует подставить значение $\Lambda - \Lambda_0$ из равенства (21.20). Пренебрегая μ^2 и более высокими степенями μ , получим приближенное выражение

$$E = \varepsilon_{ji} + \frac{\hbar^2}{B\beta_0^2} \left\{ \frac{n_\beta}{\nu^2} + \frac{n_\gamma + \frac{|m|}{2}}{\Gamma^2} + \frac{m^2}{24} + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_l(Iji) \right\}. \quad (21.23)$$

Из выражения (21.23) следует, что энергии возбужденных состояний в единицах $\frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2}$ можно записать в виде

$$\Delta E = (E - \varepsilon_{ji} - E_0) \frac{2B\beta_0^2}{\hbar^2} = \frac{2n_\beta}{\mu^2} + \frac{2n_\gamma + |m|}{\Gamma^2} + \frac{m^2}{12} + \Delta \varepsilon_l(Iji). \quad (21.24)$$

Значения (21.24) зависят от трех параметров: μ , Γ , ξ и квантовых чисел $Iji n_\beta n_\gamma |m| L$. Значение параметра ξ может зависеть от состояния ji внешнего нуклона. В состояниях $n_\beta = n_\gamma = 0$ выражение (21.23) определяет энергию (в единицах $\frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2}$) вращательно-одночастичных возбуждений

$$\Delta E_{Iji | m | l} = \frac{|m|}{\Gamma^2} + \Delta \varepsilon_l(Iji), \quad (21.25)$$

зависящую от двух параметров: Γ и ξ . В состояниях $n_\beta = n_\gamma = m = 0$ энергия вращательно-одночастичных возбуждений зависит только от параметра ξ . Вращательно-одночастичные возбуждения, соответствующие разным значениям l при $l=1$, называют *основной вращательной полосой*. Правило интервалов в этой полосе, как было показано Сардаряном и автором [138], отличается от правила интервалов адиабатической теории вращательных состояний аксиально симметричных ядер. Вращательно-одночастичные состояния, соответствующие значениям $l > 1$, образуют дополнительные полосы возбужденных состояний. Положение этих полос (в приближении $\mu=0$) однозначно определяется значением ξ , выбранным для описания основной вращательной полосы.

В состояниях $n_\beta = n_\gamma = 0$, $|m| \neq 0$ равновесная форма ядра теряет аксиальную симметрию. Энергия этих состояний начинается членом $|m|\Gamma^{-2}$, который имеет обычно большее значение, чем энергия первых состояний с $m=0$. Чем меньше Γ , тем более жестким является ядро по отношению к поперечным колебаниям и тем большую энергию имеют состояния $|m| \neq 0$. Эти состояния можно назвать *аномальными вращательно-одночастич-*

ными состояниями. Когда n_x и n_y не равны нулю, то в возбужденных состояниях принимают участие продольные и поперечные колебания ядра. Такое простое разделение возбужденных нечетного аксиально симметричного в основном состоянии ядра на вращательно - одночастичные, продольные и поперечные колебания возможно только при малых значениях μ , когда можно пользоваться выражением (21.23). В более мягких ядрах необходимо использовать выражение (21.22) или выражение (21.21) при учете уравнения (21.20). Поскольку выражение (21.20) получено при предположении $\Gamma < 0,3$, то все формулы этого параграфа справедливы только для ядер, достаточно жестких по отношению к поперечным колебаниям.

Энергии $\Delta E_l(IjI)$ для состояний $j=5/2$ и $7/2$ вычислялись в работе Сардаряна и автора [148]. Там же проводилось и сравнение теории с экспериментом. Результаты вычислений $\Delta E_l(IjI)$ совпадают с результатами вычислений в § 19 вращательно - одночастичных состояний для значений $\gamma_0 < 15^\circ$. На рис. 36 приведена зависимость для вращательно-одночастичных состояний нечетного ядра с $j=7/2$ от значений параметра ξ . В табл. 39 приводятся результаты сравнения экспериментальных и теоретических значений энергий и спинов первых возбужденных состояний нечетных тяжелых ядер Sm^{245} и Vb^{249} . Для ядра Sm^{245} теоретические значения получены при использовании только двух параметров: $\xi=0,60$ и энергии первого возбужденного уровня 55 кэв. При сравнении в табл. 37 энергий возбужденных состояний Sm^{245} с теорией неаксиальных нечетных ядер использовалось три параметра: $\xi=0,55$, $\gamma_0=10^\circ$ и энергия первого возбужденного уровня 56 кэв.

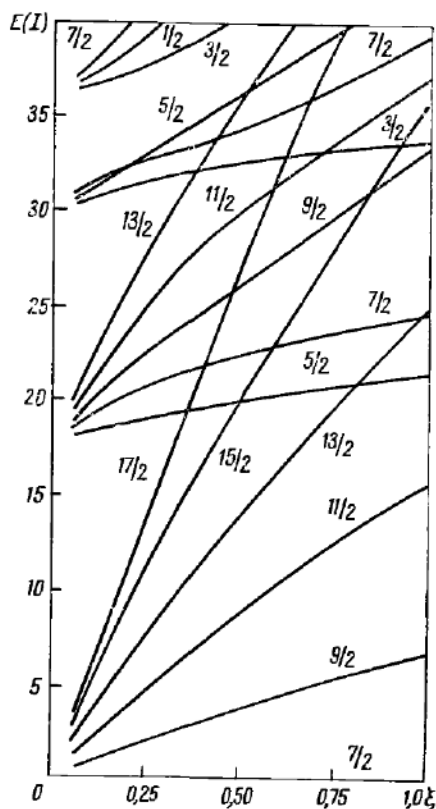


Рис. 36. Зависимость энергий возбужденных состояний нечетного атомного ядра, остов которого имеет в основном состоянии аксиальную симметрию от параметра ξ . Спин внешнего нуклона $j=7/2$.

Теоретические и экспериментальные значения энергий и спинов тяжелых нечетных ядер, форма которых в основном состоянии аксиально симметрична

Ядро	Теория		Эксперимент		Ядро	Теория		Эксперимент	
	спин	энергия, кэв	спин	энергия, кэв		спин	энергия, кэв	спин	энергия, кэв
Sm^{245} при $\xi = 0,6$	7/2	0	7/2+	0	Bk^{249} при $\xi = 0,24$	7/2	0	7/2+	0
	9/2	55	9/2+	56		9/2	41,7	9/2+	41,7
	11/2	130	11/2+	124		11/2	93,6	11/2+	93,4
	13/2	205	13/2+	207		13/2	152	(13/1+)	156
	5/2	252	5/2+	254		15/2	220	(15/2+)	230
	7/2	288	7/2+	301		17/2	281	—	—
	15/2	299	—	—		5/2	396	5/2+	393
	9/2	348	9/2	357		7/2	432	7/2+	433,5
[46]	11/2	397	11/2	422	[46]	9,2	471	9/2+	485
	17/2	405	—	—		11/2	520	(11/2+)	547
						13/2	578	—	—

Используя волновые функции (21.19), можно вычислить вероятности электромагнитных переходов между рассмотренными выше возбужденными состояниями нечетного ядра. Приведенные вероятности $E2$ - и $M1$ -переходов между разными состояниями основной вращательно-одночастичной полосы ($m=0$) рассчитывались в работе Сардаряна и автора [138]. Приведенные вероятности $E2$ - и $M1$ -переходов между состояниями первой аномальной полосы ($|m|=1$) и между состояниями первой аномальной и основной полос вычислялись в работе Сардаряна [149]. Приведенные вероятности совпадают со значениями, даваемыми выражениями (20.5) и (20.10) при $\gamma_0 < 15^\circ$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

А. ДЕКАРТОВЫ И СФЕРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРОВ

Любой вектор $\mathbf{A}$ трехмерного векторного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации трех декартовых базисных векторов: $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — удовлетворяющих ортонормированности:

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}; \quad i, j = x, y, z. \quad (\text{A.1})$$

При этом

$$\mathbf{A} = \sum_i \mathbf{e}_i A_i, \quad i = x, y, z. \quad (\text{A.2})$$

Три числа A_i в сумме (A.2) определяются равенствами

$$A_i = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{A.3})$$

и называются (декартовыми) проекциями вектора $\mathbf{A}$. Скалярное произведение вектора (A.2) и вектора $\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{e}_i B_i$ выражается через их проекции

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \sum_i A_i B_i. \quad (\text{A.4})$$

Вместо декартовых базисных векторов $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ можно использовать любые другие системы трех независимых базисных векторов. В теории ядра часто приходится рассматривать «сферическую систему» (комплексных) базисных векторов $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{-1}$, которые связаны с декартовыми базисными векторами соотношениями

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y); \quad \mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \quad (\text{A.5})$$

и удовлетворяют равенствам

$$\mathbf{e}_\mu^* = (-1)^\mu \mathbf{e}_{-\mu}, \quad (\mathbf{e}_\mu^* \cdot \mathbf{e}_{\mu'}) = \delta_{\mu\mu'}, \quad \mu = 0, \pm 1. \quad (\text{A.6})$$

С помощью равенств (А.5) сферические проекции любого вектора **A** определяются скалярными произведениями типа (А.3), т. е.

$$A_{\mu} = (\mathbf{e}_{\mu}, \mathbf{A}), \mu = 0, \pm 1. \quad (\text{А.7})$$

При этом

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu} \mathbf{e}_{\mu}^* A_{\mu} = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \mathbf{e}_{-\mu} A_{\mu}. \quad (\text{А.8})$$

С помощью формул (А.3), (А.5) и (А.7) находим связь декартовых и сферических проекций вектора

$$A_0 = A_z; A_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y); A_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y). \quad (\text{А.9})$$

Используя равенства (А.9) и явный вид сферических функций, можно показать, что сферические проекции радиуса вектора **r** определяются равенствами

$$r_{\mu} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_{1\mu}(\vartheta, \varphi),$$

или

$$r Y_{1\mu}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} r_{\mu} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (\mathbf{e}_{\mu}, \mathbf{r}). \quad (\text{А.10})$$

Используя равенство (А.10), легко убедиться в том, что

$$\nabla (r Y_{1\mu}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \mathbf{e}_{\mu}. \quad (\text{А.11})$$

Скалярное произведение двух любых векторов: **A** и **B** — можно выразить через значения их сферических проекций

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} A_{\mu} B_{-\mu} = \sum_{\mu} A_{\mu}^* B_{\mu}. \quad (\text{А.12})$$

Б. ОПЕРАТОРЫ «УГЛОВЫХ» МОМЕНТОВ

Декартовы проекции I_x, I_y, I_z операторов угловых моментов частицы определяются перестановочными соотношениями

$$[I_x, I_y] = i\hbar I_z \dots \quad (\text{Б.1})$$

Оператор квадрата углового момента равен сумме квадратов его проекций

$$I^2 = I_x^2 + I_y^2 + I_z^2.$$

Операторы I^2 и I_z имеют общие собственные функции $|jm\rangle = \Psi_{jm}$, удовлетворяющие уравнениям

$$[I^2 - \hbar^2 j(j+1)]|jm\rangle = 0,$$

$$[I_z - \hbar m]|jm\rangle = 0,$$

где квантовые числа j пробегают либо целые, либо полуцелые положительные значения; $m = \pm j, \pm(j-1), \pm \dots$. Рассмотрим частные случаи:

1. Операторы орбитального движения частицы. Декартовы проекции этих операторов являются проекциями оператора $L = -i\hbar[r \times \nabla]$. Например, $L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Квантовые числа j оператора орбитального движения принимают только целые значения 0, 1, 2, ... Они обозначаются обычно буквой l . Собственные функции операторов L^2 и L_z зависят от углов ϑ, φ , определяющих направление радиуса вектора r относительно лабораторной системы осей. Эти функции совпадают со сферическими функциями. Таким образом,

$$|lm\rangle = Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (Б.2)$$

Как и любые другие собственные функции квантовых операторов, функции Y_{lm} определены с точностью до произвольного фазового множителя. Часто используют выбор, предложенный Кондоном и Шортли [150], при котором функции для отрицательных значений m определяются соотношением

$$Y_{l, -m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi). \quad (Б.3)$$

Иногда удобно использовать другое определение, предложенное Биденхарном и Роузом [152]. Полагают, $|lm\rangle = \tilde{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi)$, где функции $\tilde{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi)$ связаны со сферическими функциями Y_{lm} , удовлетворяющими равенству (Б.3), с помощью равенства

$$\tilde{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi) = i^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (Б.4)$$

Функции $\tilde{Y}_{lm}$ удовлетворяют свойствам симметрии

$$\tilde{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{l+m} Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi). \quad (Б.5)$$

Сферические функции образуют полную ортонормированную систему функций

$$\int Y_{l'm'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

В связи с этим произведение любого числа сферических функций от одних и тех же углов можно выразить через линейную

комбинацию сферических функций тех же углов. В частности, для произведения двух сферических функций имеем

$$Y_{l_1 m_1}(\vartheta\varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta\varphi) = \sum_L \left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{(2L+1)} \right]^{\frac{1}{2}} (l_1 l_2 00 | L0) \times \\ \times (l_1 l_2 m_1 m_2 | LM) Y_{LM}(\vartheta\varphi),$$

где $(l_1 l_2 m_1 m_2 | LM)$ — коэффициенты векторного сложения (см. Приложение В).

2. Спиновые операторы. Декартовы проекции оператора спина нуклонов изображаются матрицами:

$$s_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad s_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad s_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оператор квадрата спина

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные спиновые функции операторов s^2 и s_z зависят от спиновых переменных, пробегаящих только два значения. Они соответствуют квантовым числам $j=s=1/2$ и $m=m_s=\pm 1/2$. Частоты спиновые функции $|1/2 m_s\rangle \equiv \chi_{\frac{1}{2} m_s}$ изображаются одно-

столбцовыми матрицами

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.6})$$

3. Оператор полного углового момента нуклонов. Декартовы проекции оператора полного углового момента нуклонов определяются соотношениями:

$$I_x = L_x + s_x; \quad I_y = L_y + s_y; \quad I_z = L_z + s_z, \quad (\text{Б.7})$$

где L_x — проекции оператора орбитального момента; s_x — проекции оператора спина. Собственные функции $|jm\rangle$ операторов I^2 и I_z выражаются через собственные функции (Б.2) и (Б.6) с помощью равенств

$$|jm\rangle = \sum_{m_s} \left(l \frac{1}{2} m_l m_s | jm \right) Y_{lm_l}(\vartheta\varphi) \chi_{\frac{1}{2} m_s}, \quad (\text{Б.8})$$

где $(l/2 m_l m_s | j m)$ — коэффициенты векторного сложения (см. Приложение В). При $l \neq 0$ квантовые числа j принимают два значения $j = |l \pm 1/2|$. В ряде случаев удобно ввести безразмерные операторы угловых моментов:

$$\hat{j} = \frac{1}{h} \mathbf{I}, \quad \hat{l} = \frac{1}{h} \mathbf{L}; \quad \sigma = \frac{2}{h} s. \quad (\text{Б.9})$$

Если образовать по правилу (А.9) сферические проекции угловых моментов:

$$\hat{j}_0 = \hat{j}_z; \quad \hat{j}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{j}_x + i \hat{j}_y); \quad \hat{j}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{j}_x - i \hat{j}_y), \quad (\text{Б.10})$$

то их действия на волновые функции $|j m\rangle$ определяются правилами:

$$\left. \begin{aligned} j_0 |j m\rangle &= m |j m\rangle; \\ j_1 |j m\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} V(j-m)(j+m+1) |j, m+1\rangle; \\ j_{-1} |j m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} V(j+m)(j-m+1) |j, m-1\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б.11})$$

Используя табл. 41 и соотношения симметрии (В.6), можно записать равенства (Б.11) в сокращенном виде

$$j_\mu |j m\rangle = (-1)^\mu V(j(j+1))(j_1, m+\mu, -\mu |j m) |j, m+\mu\rangle. \quad (\text{Б.12})$$

В. КОЭФФИЦИЕНТЫ ВЕКТОРНОГО СЛОЖЕНИЯ

Коэффициенты векторного сложения, или коэффициенты Клебша — Гордана,

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j m) \quad (\text{В.1})$$

осуществляют с помощью равенства

$$|j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | j m) |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \quad (\text{В.2})$$

переход от собственных функций $|j_1 m_1\rangle$ и $|j_2 m_2\rangle$ операторов $\mathbf{I}_1^2$, I_{1z} и $\mathbf{I}_2^2$, I_{2z} к собственным функциям $|j m\rangle$ операторов суммарного углового момента

$$\mathbf{I}^2 = I_x^2 + I_y^2 + I_z^2, \quad I_x = I_{1x} + I_{2x} \dots$$

Коэффициенты (B.1) осуществляют и обратное к (B.2) преобразование

$$|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = \sum_{jm} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) |jm\rangle. \quad (\text{B.3})$$

Коэффициенты векторного сложения (B.1) отличны от нуля только при условии выполнения соотношений

$$\left. \begin{aligned} m &= m_1 + m_2, \\ |j_1 - j_2| &\leq j \leq j_1 + j_2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.4})$$

Второе из соотношений (B.4) носит название *правила треугольника* и часто кратко изображается символом $\Delta(j_1 j_2 j_3)$.

Коэффициенты векторного сложения действительны. Они удовлетворяют следующим условиям ортогональности и нормировки:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m_1 m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) (j_1 j_2 m_1' m_2' | j' m') &= \delta_{jj'} \delta_{mm'}; \\ \sum_{j, m} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) (j_1 j_2 m_1' m_2' | jm) &= \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}; \\ \sum_{m_1 m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) (j_1 j_2' m_1' m_2' | jm) &= \frac{2j+1}{2j_2'+1} \delta_{j_1 j_2'} \delta_{m_2 m_2'}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.5})$$

В табл. 40 и 41 приведены значения коэффициентов векторного сложения для $j_2=1$ и $1/2$. Значения коэффициентов векторного сложения для $j_2=3/2$ и 2 можно найти в книге Кондона и Шортли [150].

Таблица 40

Коэффициенты векторного сложения
($j_1 m_1 m_2 j m$)

j	$m_2=1$	$m_2=0$	$m_2=-1$
j_1+1	$\left[\frac{(j_1+m)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)} \right]^{1/2}$	$\left[\frac{(j_1-m+1)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(j_1+1)} \right]^{1/2}$	$\left[\frac{(j_1-m)(j_1-m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)} \right]^{1/2}$
j_1	$-\left[\frac{(j_1+m)(j_1-m+1)}{2j_1(j_1+1)} \right]^{1/2}$	$\frac{m}{\sqrt{j_1(j_1+1)}}$	$\left[\frac{(j_1-m)(j_1+m+1)}{2j_1(j_1+1)} \right]^{1/2}$
j_1-1	$\left[\frac{(j_1-m)(j_1-m+1)}{2j_1(2j_1+1)} \right]^{1/2}$	$-\left[\frac{(j_1-m)(j_1+m)}{j_1(2j_1+1)} \right]^{1/2}$	$\left[\frac{(j_1+m+1)(j_1+m)}{2j_1(2j_1+1)} \right]^{1/2}$

Коэффициенты векторного сложения

$$(j_1 \frac{1}{2} m_1 m_2 | jm)$$

j	$m_1 = -1/2$	$m_2 = -1/2$
$j_1 + 1/2$	$\left(\frac{j_1 - m + 1/2}{2j_1 + 1} \right)^{1/2}$	$\left(\frac{j_1 - m + 1/2}{2j_1 + 1} \right)^{1/2}$
$j_1 - 1/2$	$-\left(\frac{j_1 - m + 1/2}{2j_1 + 1} \right)^{1/2}$	$\left(\frac{j_1 - m + 1/2}{2j_1 + 1} \right)^{1/2}$

При вычислениях с коэффициентами векторного сложения часто приходится использовать соотношения симметрии

$$\begin{aligned}
 (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) &= (-1)^{j_1 + j_2 - j} (j_1, j_2, -m_1, -m_2 | j, -m) = \\
 &= (-1)^{j_1 + j_2 - j} (j_2 j_1 m_2 m_1 | jm) = (-1)^{j_2 + m_2} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_1+1}} \times \\
 &\times (j, j_2, -m, m_2 | j_1, -m_1) = (-1)^{j_1 - m_1} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_2+1}} \times \\
 &\times (j_1 j, m_1, -m | j_2, -m_2).
 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Приведем также значения некоторых часто встречающихся коэффициентов векторного сложения

$$\left. \begin{aligned}
 (jjm, -m | 00) &= (-1)^{j-m} (2j+1)^{-1/2}; \\
 (j_1 j_1 m_1 m_1 | jm) &= 0, \text{ если } 2j_1 - j \text{ нечетное число}; \\
 (j_1 j_2 00 | j0) &= 0, \text{ если } j_1 + j_2 + j \text{ нечетное число}; \\
 (j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 + j_2, m) &= \\
 &= \left[\frac{(2j_1)! (2j_2)! (j+m)! (j-m)!}{(2j)! (j_1+m_1)! (j_1-m_1)! (j_2+m_2)! (j_2-m_2)!} \right]^{1/2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.7})$$

Сумма по магнитным квантовым числам произведений трех и большего числа коэффициентов векторного сложения может быть выражена через коэффициенты Рака $W(abcd; ef)$. В качестве определения коэффициентов Рака можно использовать равенство

$$\begin{aligned}
 \sum_{\beta} (ab\alpha\beta | e, \alpha + \beta) (ed, \alpha + \beta, \delta | c, \alpha + \beta + \delta) (bd\beta\delta | f, \beta + \delta) = \\
 = \sqrt{(2e+1)(2f+1)} (af\alpha, \beta + \delta | c, \alpha + \beta + \delta) W(abcd; ef), \quad (\text{B.8})
 \end{aligned}$$

или равенство

$$\begin{aligned} \sqrt{(2e+1)(2f+1)} W(abcd; ef) = \sum_{\alpha, \beta, \delta} (ab\alpha\beta | e, \alpha + \beta, \\ (ed, \alpha + \beta, \delta | c, \alpha + \beta + \gamma)(bd\beta\delta | f, \beta + \delta)(af\alpha, \beta + \delta | c, \alpha + \\ + \beta + \delta). \end{aligned} \quad (\text{B.8a})$$

Коэффициенты Рака действительны. Они определены для целых и полуцелых значений a, b, c, d, e, f и отличны от нуля, если выполняются соотношения треугольников

$$\Delta(abe), \Delta(cde), \Delta(acf), \Delta(bdf),$$

что непосредственно следует из их определения.

Коэффициенты Рака удовлетворяют следующим свойствам симметрии:

$$\begin{aligned} W(abcd; ef) = W(badc; ef) = W(cdab; ef) = W(acbd; fe) = \\ = (-1)^{e+f-a-d} W(efcd; ad) = (-1)^{e+f-b-c} W(aefd; bc) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

и правилам сумм

$$\left. \begin{aligned} \sum_e (2e+1)(2f+1) W(abcd; ef) W(abcd; eg) &= \delta_{fg}, \\ \sum_e (-1)^{a+b-c} (2e+1) W(abcd; ef) W(bacd; eg) &= W(agfb; cd). \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.10})$$

Значения некоторых коэффициентов Рака приведены в книгах [153—155]. Имеются также специально изданные таблицы коэффициентов Рака [156—157].

Если один из параметров коэффициентов Рака равен нулю, то с помощью условий симметрии (B.10) он всегда может быть сведен к коэффициенту

$$W(abcd; 0f) = (-1)^{b+c-f} \frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{\sqrt{(2b+1)(2c+1)}}. \quad (\text{B.11})$$

Если один из параметров равен сумме двух других, например

$$e = a + b, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} W(abcd; a+b, f) = \left\{ \frac{(2a)!(2b)!(a+b+c-d)!(a+b+c+d+1)!}{(2a+2b+1)!(a+c+f+1)!(c+d-a-b)!} \times \right. \\ \left. \times \frac{(a+b+d-c)!(c+f-a)!(d+f-b)!}{(b+f+d+1)!(a+c-f)!(a+f-c)!(b+d-f)!(b+f-d)!} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

В приложениях часто приходится пользоваться равенством

$$\begin{aligned} (ab\alpha\beta | e, \alpha + \beta)(ed, \alpha + \beta, \delta | c, \gamma) = \sum_f \sqrt{(2e+1)(2f+1)} \times \\ \times (bd\beta\delta | f, \beta + \delta)(af\alpha, \beta + \delta | c, \gamma) W(abcd; ef). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Г. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ КОНЕЧНЫХ ВРАЩЕНИЯХ СИСТЕМЫ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

При вращении системы координатных осей вокруг единичного вектора $\mathbf{n}$ на угол φ собственные функции операторов угловых моментов $|jm\rangle$ преобразуются по правилу

$$|jm\rangle' = R_{\mathbf{n}}^n |jm\rangle, \quad (\Gamma.1)$$

где

$$R_{\mathbf{n}}^n = \exp\{i\varphi \mathbf{n} \hat{j}\} \quad (\Gamma.2)$$

оператор конечного вращения; $\hat{j} = \hat{j}_x + \frac{1}{2}\sigma$ — оператор полного углового момента, измеряемый в единицах $\hbar$.

Общее вращение системы координатных осей xyz в новое положение $x'y'z'$ может быть осуществлено путем трех последовательных вращений на углы Эйлера $\theta_1\theta_2\theta_3$. Эти вращения осуществляются в следующем порядке:

- 1) вращение на угол θ_1 ($0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$) вокруг оси z ;
 - 2) вращение на угол θ_2 ($0 \leq \theta_2 \leq \pi$) вокруг нового положения оси y ;
 - 3) вращение на угол θ_3 вокруг последнего положения оси z .
- Таким образом, оператор конечных вращений на углы Эйлера $\theta_1\theta_2\theta_3$, согласно оператору ($\Gamma.2$), может быть записан в виде

$$R(\theta_1\theta_2\theta_3) = R_{\theta_3}^z R_{\theta_2}^y R_{\theta_1}^z = e^{i\theta_3 \hat{j}_z} e^{i\theta_2 \hat{j}_y} e^{i\theta_1 \hat{j}_z}. \quad (\Gamma.3)$$

Обратное преобразование осуществляется оператором

$$R^{-1}(\theta_1\theta_2\theta_3) = R_{-\theta_1}^z R_{-\theta_2}^y R_{-\theta_3}^z = R^+(\theta_1\theta_2\theta_3). \quad (\Gamma.4)$$

Пусть x и x' соответственно совокупности угловых и спинных переменных в системах координатных сетей xyz и $x'y'z'$, т. е.

$$|jm\rangle \equiv \psi_{jm}(x), \quad |jm\rangle' \equiv \psi_{jm}(x').$$

Тогда при вращении координатных осей должно выполняться равенство (см. в книге [10] § 43)

$$R(\theta_1\theta_2\theta_3) \psi_{jm}(x') = \psi_{jm}(x). \quad (\Gamma.5)$$

Оператор $R(\theta_1\theta_2\theta_3)$ коммутирует с $\hat{j}^2$, поэтому при действии этого оператора на функции $\Psi_{jm}(x')$ получаются линейные комбинации функций с тем же j , но разными m , т. е. можно написать

$$R(\theta_1\theta_2\theta_3) \psi_{jm}(x') = \sum_{m'} \psi_{jm'}(x') \langle jm' | R(\theta_1\theta_2\theta_3) | jm \rangle, \quad (\Gamma.6)$$

где

$$\langle jm' | R(\theta_1 \theta_2 \theta_3) | jm \rangle \equiv D_{mm'}^j(\theta_1 \theta_2 \theta_3) \quad (\Gamma.7)$$

элементы матрицы конечного вращения в j -представлении. Эти матричные элементы часто называют *обобщенными сферическими функциями j -порядка* или *D -функциями Вигнера*.

Учитывая равенства (Г.5), (Г.6) и (Г.7), можно написать

$$\psi_{jm}(x) = \sum_{m'} D_{mm'}^j(\theta_1 \theta_2 \theta_3) \psi_{jm'}(x'). \quad (\Gamma.8)$$

Матрица конечного вращения D^j унитарна, следовательно, ее матричные элементы удовлетворяют равенствам

$$\sum_m D_{mk}^{*j} D_{mk}^j = \sum_m D_{km}^{*j} D_{km}^j = \delta_{kk'}. \quad (\Gamma.9)$$

Пользуясь равенством (Г.9), можно написать обратное преобразование к равенству (Г.8) в виде

$$\psi_{jm'}(x') = \sum_m \psi_{jm}(x) D_{mm'}^{*j}. \quad (\Gamma.10)$$

Подставляя оператор (Г.3) в матричный элемент тождества (Г.7) и учитывая, что функции $|jm\rangle$ являются собственными функциями оператора $\hat{j}_z$, можно написать

$$\begin{aligned} D_{mk}^j(\theta_1 \theta_2 \theta_3) &\equiv \langle jk | e^{i\theta_3 \hat{j}_z} e^{i\theta_2 \hat{j}_y} e^{i\theta_1 \hat{j}_z} | jm \rangle = \\ &= e^{i\theta_3 k} d_{mk}^j(\theta_2) e^{i\theta_1 m}, \end{aligned} \quad (\Gamma.11)$$

где

$$d_{mk}^j(\theta_2) \equiv D_{mk}^j(0 \theta_2 0) \equiv \langle jk | e^{i\theta_2 \hat{j}_y} | jm \rangle$$

— действительные матричные элементы.

Если j равно целому числу, т. е. $j=l$ и m или k равны нулю, то функции Вигнера (Г.11) сводятся к сферическим функциям

$$\left. \begin{aligned} D_{m0}^l(\theta_1 \theta_2 \theta_3) &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta_2 \theta_1), \\ D_{0k}^l(\theta_1 \theta_2 \theta_3) &= (-1)^k \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lk}(\theta_2 \theta_3). \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma.12)$$

Если $m=k=0$, то получим полиномы Лежандра

$$D_{00}^l(\theta_1 \theta_2 \theta_3) = P_l(\cos \theta_2). \quad (\Gamma.12a)$$

Матричные элементы $d_{mk}^j(\vartheta_2)$ для полуцелых значений j двузначны, например,

$$d_{mk}^{\frac{1}{2}}(\vartheta) = \mp \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2}, & -\sin \frac{\vartheta}{2} \\ \sin \frac{\vartheta}{2}, & \cos \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}. \quad (\Gamma.13)$$

Матричные элементы d_{mk}^j для целых значений j однозначны, например,

$$d_{mk}^1(\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \vartheta), & -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{2}(1 - \cos \vartheta) \\ \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}}, & \cos \vartheta, & -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \vartheta), & \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{2}(1 + \cos \vartheta) \end{pmatrix}. \quad (\Gamma.14)$$

Матрица $(d_{mk}^j(\vartheta))$ действительна и унитарна. Ее матричные элементы удовлетворяют равенствам

$$d_{mk}^j(\vartheta) = (-1)^{k-m} d_{km}^j(\vartheta) = (-1)^{k-m} d_{mk}^j(-\vartheta) = (-1)^{k-m} d_{-m,-k}^j(\vartheta).$$

Из этих равенств и равенства (Г.11) следует важное свойство функций Вигнера

$$D_{mk}^j(\vartheta) = (-1)^{k-m} D_{-m,-k}^{*j}(\vartheta), \quad \vartheta \equiv \{\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3\}. \quad (\Gamma.15)$$

Отметим еще важные частные свойства матричных элементов $d_{mk}^l(\vartheta)$. При целых значениях $j=l$

$$\left. \begin{aligned} d_{mk}^l(\pi) &= (-1)^{l-k} \delta_{k,-m}, \\ d_{mk}^l(\pi - \vartheta) &= (-1)^{l+m} d_{m,-k}^l(\vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma.16)$$

Исследуем теперь свойства преобразований D^l -функций при операции инверсии координатных осей лабораторной системы. Операция инверсии R_1 изменяет направления отсчета по осям x, y, z , т. е. $R_1(xyz) = -x, -y, -z$.

При этом углы Эйлера преобразуются по закону

$$R_1(\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3) = \pi + \vartheta_1, \pi - \vartheta_2, \pi - \vartheta_3. \quad (\Gamma.17)$$

Пользуясь определением D -функций (Г.11) и (Г.16), находим

$$\begin{aligned} R_1 D_{m,k}^l(\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3) &= D_{m,k}^l(\pi + \vartheta_1, \pi - \vartheta_2, \pi - \vartheta_3) = \\ &= (-1)^{l+k} D_{m,-k}^l(\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3). \end{aligned} \quad (\Gamma.18)$$

Пусть оператор R_2 соответствует вращению координатных осей $\xi\eta\zeta$ вокруг оси ζ на угол $\pi/2$, тогда

$$R_2(\theta_1\theta_2\theta_3) = \theta_1, \theta_2, \theta_3 + \frac{\pi}{2} \quad (\Gamma.19)$$

Поэтому, согласно определению (Г.11),

$$R_2 D_{mk}^j(\theta_1\theta_2\theta_3) = e^{i\frac{\pi}{2}k} D_{mk}^j(\theta_1\theta_2\theta_3). \quad (\Gamma.20)$$

Для упрощения дальнейшей записи обозначим совокупность трех углов Эйлера одной буквой α . Пусть поворот $\alpha = \alpha_2\alpha_1$ является результатом двух последовательных поворотов вначале α_1 , а затем α_2 , тогда выполняется равенство

$$\sum_k D_{mk}^j(\alpha_2) D_{km'}^j(\alpha_1) = D_{mm'}^j(\alpha_2\alpha_1). \quad (\Gamma.21)$$

Равенство (Г.21) указывает, что функции Вигнера образуют неприводимые представления размерности $2j+1$ трехмерной группы вращений.

Произведение нескольких D -функций Вигнера, зависящих от одинаковых углов Эйлера, всегда можно выразить через линейную комбинацию D -функций Вигнера, если использовать равенство

$$D_{m_1 k_1}^{j_1}(\alpha) D_{m_2 k_2}^{j_2}(\alpha) = \sum_j (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) (j_1 j_2 k_1 k_2 | jk) D_{mk}^j(\alpha). \quad (\Gamma.22)$$

Используя свойство ортогональности коэффициентов векторного сложения (В.5), можно это равенство обратить в следующее:

$$D_{mk}^j(\alpha) = \sum_{m_1 k_1} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) (j_1 j_2 k_1 k_2 | jk) D_{m_1 k_1}^{j_1}(\alpha) D_{m_2 k_2}^{j_2}(\alpha). \quad (\Gamma.23)$$

Равенство (Г.23) позволяет получать функции Вигнера более высокого порядка из функций Вигнера более низкого порядка.

В физических приложениях часто приходится вычислять интегралы от произведений обобщенных сферических функций. Введем краткое обозначение

$$\int F(\alpha) d\alpha \equiv \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_3 F(\theta_1\theta_2\theta_3).$$

Тогда, используя равенство (Г.11), находим

$$\int D_{mk}^j(\alpha) d\alpha = 8\pi^2 \delta_{j0} \delta_{m0} \delta_{k0}. \quad (\Gamma.24)$$

С помощью этого равенства и выражений (Г.15) и (Г.22) легко получить

$$\int D_{mk}^{*I}(\alpha) D_{m'k'}^I(\alpha) d\alpha = \frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{kk'}, \quad (\text{Г.25})$$

$$\int D_{MK}^{*I}(\alpha) D_{m_1k_1}^I(\alpha) D_{m_2k_2}^I(\alpha) d\alpha = \frac{8\pi^2}{2J+1} (j_1 j_2 m_1 m_2 | JM) \times \\ \times (j_1 j_2 k_1 k_2 | JK). \quad (\text{Г.26})$$

Д. ОПЕРАТОР ПОЛНОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ (ТВЕРДОГО ТЕЛА)

Повороты твердого тела относительно неподвижной системы координатных осей $x y z$ (лабораторная система) можно характеризовать углами Эйлера $\theta_1 \theta_2 \theta_3$, определяющими ориентацию координатных осей ξ, η, ζ , жестко связанных с твердым телом.

Оператор момента количества движения твердого тела $\mathbf{L}$ определен на множестве функций, зависящих от углов Эйлера. Проекция этого оператора на координатные оси лабораторной системы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \dots \quad (\text{Д.1})$$

Проекция $\mathbf{L}$ на координатные оси, связанные с телом, удовлетворяют перестановочным соотношениям (см. в книге [10] § 44), отличающимся от перестановочных соотношений (Д.1) знаком

$$[L_\xi, L_\eta] = -i\hbar L_\zeta, \dots \quad (\text{Д.2})$$

Функции Вигнера $D_{MK}^I(\theta_1 \theta_2 \theta_3)$ с точностью до постоянного множителя являются собственными функциями операторов

$$\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L_\xi^2 + L_\eta^2 + L_\zeta^2, \quad L_z \text{ и } L_\zeta, \quad (\text{Д.3})$$

при этом

$$\left. \begin{aligned} \{L^2 - \hbar^2 I(I+1)\} D_{MK}^I &= 0, \\ \{L_z - \hbar M\} D_{MK}^I &= 0, \\ \{L_\zeta - \hbar K\} D_{MK}^I &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д.4})$$

где квантовое число I пробегает целые значения $0, 1, 2, \dots$, а квантовые числа $M, K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm I$.

Введем сферические проекции оператора $\mathbf{L}$ в лабораторной системе с помощью равенств

$$L_0 = L_z, \quad L_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(L_x + iL_y), \quad L_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_x - iL_y). \quad (\text{Д.5})$$

Их действие на функции Вигнера определяется равенствами

$$\left. \begin{aligned} L_0 D'_{MK} &= M \hbar D'_{MK}; \\ \sqrt{2} L_1 D'_{MK} &= -\hbar \sqrt{(I-M)(I+M+1)} D'_{M+1,K}; \\ \sqrt{2} L_{-1} D'_{MK} &= \hbar \sqrt{(I+M)(I-M+1)} D'_{M-1,K}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д.6})$$

Три равенства (Д.6) можно записать в сокращенном виде

$$L_\mu D'_{MK} = (-1)^\mu \sqrt{I(I+1)} (IM + \mu, -\mu | IM) D'_{M+\mu, K}, \quad (\text{Д.6a})$$

где

$$\mu = 0, 1, -1; \quad L_\mu \equiv \frac{1}{\hbar} L_\mu.$$

Сферические проекции оператора $\mathbf{L}$ на координатные оси, закрепленные с телом, определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= L_z; \quad \mathcal{L}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (L_x + iL_y); \quad \mathcal{L}_{-1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (L_x - iL_y). \end{aligned} \quad (\text{Д.7})$$

Эти операторы действуют на второй нижний индекс функции Вигнера по правилам:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_0 D'_{MK} &= \hbar K D'_{MK}; \\ \sqrt{2} \mathcal{L}_1 D'_{MK} &= -\hbar \sqrt{(I+K)(I-K+1)} D'_{M, K-1}; \\ \sqrt{2} \mathcal{L}_{-1} D'_{MK} &= \hbar \sqrt{(I-K)(I+K+1)} D'_{M, K+1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д.8})$$

Учитывая равенство (Г.20), можно доказать, что ортонормированными собственными функциями операторов (Д.3) будут функции

$$\psi_{IMK} \equiv \left(\frac{2I+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} D'_{MK}(\theta). \quad (\text{Д.9})$$

Учитывая (Д.8), легко можно найти матричные элементы операторов (Д.7) на функциях (Д.9)

$$\left. \begin{aligned} \langle \psi_{IMK} | \mathcal{L}_0 | \psi_{IMK} \rangle &= \hbar K, \\ \langle \psi_{IM, K+1} | \mathcal{L}_{-1} | \psi_{IMK} \rangle &= -\langle \psi_{IMK} | \mathcal{L}_1 | \psi_{IM, K+1} \rangle = \\ &= \hbar 2^{-\frac{1}{2}} \sqrt{(I-K)(I+K+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д.10})$$

Подставив в выражения (Д.10) значения операторов (Д.7), найдем матричные элементы

$$\langle \psi_{IMK+1} | L_x | \psi_{IMK} \rangle = \langle \psi_{IMK} | L_x | \psi_{IM, K+1} \rangle = \frac{\hbar}{2} \sqrt{(I-K)(I+K+1)},$$

$$\langle \psi_{IM, K+1} | L_y | \psi_{IMK} \rangle = - \langle \psi_{IMK} | L_y | \psi_{IM, K+1} \rangle = \frac{\hbar i}{2} \times \\ \times \sqrt{(I-K)(I+K+1)}.$$

Отличные от нуля матричные элементы квадратов проекции полного углового момента соответственно равны

$$\langle \psi_{IMK} | L_z^2 | \psi_{IMK} \rangle = \hbar^2 K^2; \quad (\text{Д.11})$$

$$\langle \psi_{IMK} | L_x^2 | \psi_{IMK} \rangle = \langle \psi_{IMK} | L_y^2 | \psi_{IMK} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [I(I+2) - K^2]; \quad (\text{Д.11a})$$

$$\langle \psi_{IM, K+2} | L_x^2 | \psi_{IMK} \rangle = - \langle \psi_{IM, K+2} | L_y^2 | \psi_{IMK} \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \times \\ \times \sqrt{(I-K)(I-K-1)(I+K+1)(I+K+2)}. \quad (\text{Д.11б})$$

Часто вместо функций Ψ_{IMK} приходится пользоваться функциями симметричного волчка

$$|IMK\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_{IMK} + (-1)^I \Psi_{I, M, -K}].$$

Учитывая равенства (Д.11) — (Д.11б), легко найти матричные элементы:

$$\langle IMK | L_z^2 | IMK \rangle = \hbar^2 K^2; \quad (\text{Д.12})$$

$$\langle IMK | L_x^2 | IMK \rangle = \langle IMK | L_y^2 | IMK \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [I(I+1) - K^2]; \quad (\text{Д.13})$$

$$\langle I, M, K+2 | L_x^2 | IMK \rangle = - \langle IM, K+2 | L_y^2 | IMK \rangle = \\ = \frac{\hbar^2 [I + (-1)^I \delta_{K0}]}{4 \sqrt{1 + \delta_{K0}}} \sqrt{(I-K)(I-K-1)(I+K+1)(I+K+2)} \quad (\text{Д.14})$$

Наконец, приведем выражение производной по времени от функции D_{MK}^I

$$\frac{\partial D_{MK}^I}{\partial t} = -i \sum_{\lambda, p} \omega_\lambda D_{Mp}^I \langle Ip | I_\lambda | IK \rangle, \quad (\text{Д.15})$$

где ω_λ — компоненты угловой скорости на координатные оси, закрепленные с телом; $I_\lambda = \frac{1}{\hbar} L_\lambda$ — проекции на те же оси оператора углового момента, измеряемые в единицах $\hbar$.

Е. НЕПРИВОДИМЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В квантовой механике любой физической величине сопоставляется оператор. Такой оператор является тензором, так как он характеризуется определенными свойствами при преобразованиях координат, образующих трехмерную группу вращения. Любой такой оператор можно представить в виде линейной комбинации неприводимых тензорных операторов.

Неприводимым (сферическим) тензорным оператором ранга l называется оператор, имеющий $2l+1$ компонент T_{lm} , которые при вращениях (определяемых углами Эйлера $\theta_1\theta_2\theta_3$) координатных осей преобразуются по закону

$$T_{lm} = \sum_K D_{mK}^l(\theta_1\theta_2\theta_3) T'_{lK}, \quad (\text{E.1})$$

аналогичному закону преобразований (Г.8) собственных функций оператора орбитального углового момента

$$\psi_{lm} = \sum_K D_{mK}^l(\theta_1\theta_2\theta_3) \psi'_{lK}.$$

Таким образом, неприводимый тензорный оператор ранга l преобразуется по представлению D^l трехмерной группы вращения. Можно показать, что если T_{lm} удовлетворяют равенствам (E.1), то они удовлетворяют и перестановочным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} [L_0, T_{lm}] &= \hbar m T_{lm}, \\ [L_{\pm 1}, T_{lm}] &= \mp \frac{\hbar}{\sqrt{2}} V(l \mp m)(l \pm m + 1) T_{l, m \pm 1}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.2})$$

где L_0, L_1, L_{-1} — сферические проекции оператора орбитального углового момента.

Наряду со свойствами преобразований по отношению к вращению системы координат неприводимые сферические тензорные операторы характеризуются определенной четностью относительно операции инверсии координат. Оператор инверсии коммутирует с оператором вращения, поэтому все компоненты каждого тензорного оператора имеют одинаковую четность.

Компоненты эрмитовых тензорных операторов удовлетворяют соотношению

$$T_{lm}^* = (-1)^m T_{l, -m}, \quad (\text{E.3})$$

аналогичному соотношению (Б.3), которому удовлетворяют сферические функции. Многим физическим величинам соответствуют тензорные операторы, которые могут быть представлены в виде произведения двух (или большего числа) неприводимых тензорных операторов. В общем случае тензорные операторы приводимы, т. е. они могут быть представлены линейной комби-

нацией неприводимых тензорных операторов. Например, если даны два неприводимых тензорных оператора ранга l_1 и l_2 с компонентами $T_{l_1 m_1}$ и $T_{l_2 m_2}$, то разложение их произведения по неприводимым сферическим тензорным операторам осуществляется с помощью равенства

$$T_{l_1 m_1} T_{l_2 m_2} = \sum_L (j_1 j_2 m_1 m_2 | LM) T_{LM}, \quad (\text{E.4})$$

где T_{LM} — компоненты неприводимого тензора ранга L , где $|l_1 - l_2| \leq L \leq l_1 + l_2$.

Обращая равенство (E.4), можно получить правило построения неприводимых тензорных операторов ранга L из произведений компонент тензоров T_{l_1} и T_{l_2}

$$T_{LM} = \sum_{m_1} (j_1 j_2 m_1 m_2 | LM) T_{l_1 m_1} T_{l_2 m_2}. \quad (\text{E.5})$$

С помощью равенства (E.5) можно, в частности, из двух тензоров одинакового ранга $T_l^{(1)}$ и $T_l^{(2)}$ образовать неприводимый тензор нулевого ранга

$$T_{00} = \sum_m (l l m, -m | 00) T_{lm}^{(1)} T_{l, -m}^{(2)}.$$

Подставляя значение коэффициентов векторного сложения (B.7), можно написать

$$T_{00} = \frac{(-1)^l}{\sqrt{2l+1}} \sum_m (-1)^m T_{lm}^{(1)} T_{l, -m}^{(2)}. \quad (\text{E.6})$$

Вспоминая определение скалярного произведения (A.12) и (E.3), имеем

$$(T_l^{(1)} T_l^{(2)}) \equiv \sum_m (-1)^m T_{lm}^{(1)} T_{l, -m}^{(2)} = \sum_m T_{lm}^{(1)} T_{lm}^{*(2)}.$$

Поэтому можно написать

$$T_{00} = \frac{(-1)^l}{\sqrt{2l+1}} (T_l^{(1)} T_l^{(2)}). \quad (\text{E.7})$$

Ж. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Состояние системы, находящейся в центрально симметричном поле, или не подверженной действию внешних сил, характеризуется волновыми функциями $|ajm\rangle$, где j и m — квантовые числа, определяющие соответственно значения квадрата углового момента и его проекцию на ось квантования, a — все остальные квантовые числа, характеризующие состояние.

Свойства таких систем определяются значениями матричных элементов для соответствующих тензорных операторов

$$\langle a' j' m' | T_{LM} | a j m \rangle. \quad (\text{Ж.1})$$

Поскольку ось квантования может быть выбрана произвольно, то зависимость матричных элементов (Ж.1) от квантовых чисел m' , M и m не определяет внутренние свойства системы, а характеризует ее отношения к оси квантования. Такие свойства системы принято называть кинематическими свойствами.

Кинематические свойства системы, т. е. зависимости матричных элементов (Ж.1) от магнитных квантовых чисел m' , M , m , могут быть выделены с помощью равенства

$$\langle a' j' m' | T_{LM} | a j m \rangle = \frac{(j L m M | j' m')}{j' 2j' + 1} \langle a' j' || T_L || a j \rangle, \quad (\text{Ж.2})$$

которое называют теоремой Вигнера—Эккарта [158—160]. Величина $\langle a' j' || T_L || a j \rangle$ не зависит от магнитных квантовых чисел и называется приведенным матричным элементом тензорного оператора*, или матричным элементом амплитудной матрицы. Амплитудные матрицы (приведенные матричные элементы) определяют внутренние свойства системы, общие для всех компонент данного тензорного оператора ранга L . Амплитудные матрицы эрмитовых тензорных операторов удовлетворяют простому равенству

$$\langle a' j' || T_L || a j \rangle = (-1)^{j-j'} \langle a j || T_L || a' j' \rangle^*. \quad (\text{Ж.3})$$

Теорема Вигнера—Эккарта (Ж.2) весьма упрощает вычисления, так как она устанавливает простую связь между матричными элементами различных компонент тензорного оператора данного ранга. Путем вычисления матричного элемента простейшей компоненты легко найти матричные элементы всех остальных компонент. Это обстоятельство часто используют для вычисления амплитудных матриц. Вычисляют левую часть равенства (Ж.2) для наиболее простого случая, например $m' = m = M = 0$ или $m' = m = \frac{1}{2}$, $M = 0$ и т. д., а затем подставляя в левую часть значение коэффициента векторного сложения, определяют амплитудную матрицу.

Часто приходится вычислять усредненную по начальным состояниям m сумму квадратов модулей матричных элементов (Ж.1) по M и по всем конечным состояниям, отличающимися только значениями m' , т. е.

$$\frac{1}{2j+1} \sum_{m M m'} |\langle a' j' m' | T_{LM} | a j m \rangle|^2.$$

* Здесь используется определение, данное Рака [159].

Подставляя в это выражение равенство (Ж.2) и учитывая равенство

$$\sum_{mMm'} (jLmM | j'm')^2 = 2j' + 1,$$

получим

$$\sum_{mMm'} |\langle a'j'm' | T_{LM} | ajn \rangle|^2 = |\langle a'j' || T_L || aj \rangle|^2. \quad (\text{Ж.4})$$

В качестве примера вычисления приведенного матричного элемента рассмотрим матричные элементы оператора орбитального момента L , т. е. тензорный оператор первого ранга

$$T_{1\mu} = L_{\mu}, \quad \mu = 0, \pm 1.$$

В этом случае равенство Вигнера-Экарта принимает вид

$$\langle a'j'm' | L_{\mu} | ajm \rangle = \frac{(j1m_{\mu} | j'm')}{\sqrt{2j'+1}} \langle a'j' || L || aj \rangle. \quad (\text{Ж.5})$$

Рассмотрим это равенство для значения $\mu=0$. Функции $|ajm\rangle$ являются собственными функциями L_0 , поэтому

$$\langle a'j'm' | L_0 | ajm \rangle = \hbar m \delta_{a'a} \delta_{j'j} \delta_{m'm}. \quad (\text{Ж.6})$$

Далее из табл. 40 (Приложение В) находим

$$(j1m0 | jm) = m [j(j+1)]^{-1/2}. \quad (\text{Ж.7})$$

Подставляя равенства (Ж.6) и (Ж.7) в равенство (Ж.5) при $\mu=0$, получаем явный вид приведенного матричного элемента орбитального момента

$$\langle a'j || L || aj \rangle = \hbar \sqrt{j(j+1)(2j+1)} \delta_{a'a} \delta_{j'j}. \quad (\text{Ж.8})$$

Используя это значение в равенстве (Ж.5) и табл. 40 (Приложение В) для коэффициентов векторного сложения, теперь легко определить матричные элементы компонент орбитального момента с индексами $\mu=\pm 1$

$$\langle a'j'm' | L_1 | ajn \rangle = -\hbar \delta_{a'a} \delta_{j'j} \delta_{m', m+1} \sqrt{\frac{(j-m)(j+m+1)}{2}},$$

$$\langle a'j'm' | L_{-1} | ajn \rangle = \hbar \delta_{a'a} \delta_{j'j} \delta_{m', m-1} \sqrt{\frac{(j+m)(j-m+1)}{2}}.$$

3. ПРИВЕДЕННЫЕ МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим два случая:

1. Пусть T_{LM} — тензорный оператор, действующий в пространстве функций $|lm\rangle$. Тогда, согласно теореме Вигнера-Эккарта (Ж.2), матричные элементы этого оператора выражаются через приведенный матричный элемент $\langle l' || T_L || l \rangle$ с помощью равенства

$$\langle l'm' | T_{LM} | lm \rangle = \frac{(l m M | l' m')}{\sqrt{2l'+1}} \langle l' || T_L || l \rangle. \quad (3.1)$$

Допустим теперь, что надо вычислить матричные элементы оператора T_{LM} на функциях

$$|j\Omega\rangle = \sum_{\mu} (l m_{\mu} | j\Omega) |lm\rangle | \lambda_{\mu} \rangle. \quad (3.2)$$

Тогда, согласно теореме Вигнера-Эккарта,

$$\langle j'\Omega' | T_{LM} | j\Omega \rangle = \frac{(j L M | j'\Omega')}{\sqrt{2j'+1}} \langle j' || T_L || j \rangle. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.2) в левую часть (3.3) и используя определение коэффициентов Рака W (см. Приложение В), можно выразить приведенные матричные элементы $\langle j' || T_L || j \rangle$ через приведенные матричные элементы $\langle l' || T_L || l \rangle$. Это соотношение (доказательство см. стр. 119 в работе [153]) имеет вид

$$\frac{\langle j' || T_L || j \rangle}{\sqrt{2j'+1}} = (-1)^{\lambda+L-l-j'} \sqrt{2j+1} \times \\ \times W(l j l' j'; \lambda L) \langle l' || T_L || l \rangle \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (3.4)$$

2. Пусть тензорный оператор T_{LM} (1) действует в пространстве функций $|l_1 m_1\rangle$, а тензорный оператор T_{LM} (2) действует в пространстве функций $|l_2 m_2\rangle$. Пусть далее

$$|jm\rangle = \sum_{m_2} (l_1 l_2 m_1 m_2 | jm) |l_1 m_1\rangle |l_2 m_2\rangle, \quad (3.5)$$

и требуется вычислить матричные элементы

$$\langle j'm' | (T_L(1) \cdot T_L(2)) | jm \rangle$$

от скалярного произведения

$$(T_L(1) \cdot T_L(2)) \equiv \sum_M T_{LM}(1) T_{LM}^*(2),$$

которое пропорционально тензору нулевого ранга [см. определение (Е.7) Приложения Е].

Согласно теореме Вигнера-Эккарта,

$$(j'm' | (T_L(1) \cdot T_L(2)) | jm) = \frac{(j0m0 | j'm')}{\sqrt{2j'+1}} \langle j' || (T_L(1) \times \\ \times T_L(2)) || j \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} (2j'+1)^{-1/2} \langle j' || (T_L(1) \cdot T_L(2)) || j \rangle. \quad (3.6)$$

Подставляя в левую часть (3.6) функции (3.5) и используя определение коэффициента Рака, можно получить равенство (доказательство см. стр. 117 в работе [153])

$$\frac{\langle j || (T_L(1) \cdot T_L(2)) || j \rangle}{\sqrt{2j'+1}} = (-1)^{l'_1 + l'_2 - j} W(l_1 l_2 l'_1 l'_2; jL) \times \\ \times \langle l'_1 || T_L(1) || l_1 \rangle \langle l'_2 || T_L(2) || l_2 \rangle. \quad (3.7)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Hahn B. et al. Phys. Rev., **101**, 1131 (1956).
2. Гепперт-Майер М. «Успехи физ. наук», **82**, 749 (1964); Phys. Rev., **78**, 16 (1950).
3. Mayer M. G., Jensen J. H. D. Elementary Theory of Nuclear Shell Structure, Wiley and Sons, New York (1955).
4. Rainwater J. Phys. Rev., **79**, 432 (1950).
5. Bohr A., Kgl. Dansk. Vid. Selsk. Mat-Fys. Medd., **26**, No. 14 (1952); «Проблемы современной физики», **9**, 9 (1954).
6. Bohr A., Mottelson B. Kgl. Dansk. Vid. Selsk. Mat-Fys. Medd., **27**, No. 16 (1953).
7. Бор О., Моттельсон Б. «Атомная энергия», **14**, 41 (1963).
8. Давыдов А. С. Теория атомного ядра, М., Физматгиз (1958).
9. Паули В. Общие принципы волновой механики. М., Гостехтеориздат (1947).
10. Давыдов А. С. Квантовая механика, М., Физматгиз (1963).
11. Wilets L., Jean M. Phys. Rev., **102**, 788 (1956).
12. Bes D. R. Nucl. Phys., **10**, 373 (1959).
13. Jancovic Z. Nuovo cimento, **14**, 1174 (1959).
14. Давыдов А. С. Nucl. Phys., **24**, 682 (1961).
15. Scharff-Goldhaber G., Weniger. Phys. Rev., **98**, 212 (1955).
16. Raz B. I. Phys. Rev., **114**, 1116 (1959); **129**, 2622 (1963).
17. Macdonald N., Nucl. Phys., **48**, 500 (1963).
18. Керман А. К., Шакин С. М. Phys. Lett., **7**, 151 (1962).
19. Тамура Т., Комаи Л. G. Phys. Rev. Lett., **3**, 344 (1959).
20. Овчаренко В. И. «Укр. физ. ж.», **10**, 486 (1965).
21. Беляев С. Т., Зелединский В. Г. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», **28**, 127 (1964); Nucl. Phys., **39**, 582 (1962).
22. Dang Giu Do, Klein A. Phys. Rev., **133**, B257 (1964).
23. Savoia M. et al. Nuovo cimento, **32**, 931 (1964).
24. Филиппов Г. Ф. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **38**, 1316 (1960).
25. Гейликман Б. Т. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **35**, 989 (1958).
26. Занкин Д. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **35**, 529 (1958).
27. Das Gupta S., Preston M. A. Nuc. Phys., **49**, 40, (1963).
28. Gupye M. R., Das Gupta S. and Preston M. A. Phys. Lett., **13**, 246 (1964).
29. Nilsson S. G., Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Mat-Fys. Medd., **29**, No. 16 (1956).
30. Mottelson B., Nilsson S. G., Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Mat-Fys. Medd., **1**, No. 8 (1959).
31. Bar-Touh J., Kelson I. Phys. Rev., **138**, B1005 (1965).
32. Беляев С. Т. Nucl. Phys., **64**, 17 (1965).
33. Бирбранд Б. Л. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **36**, 803 (1959).

34. Marty C. Nucl. Phys., 1, 85 (1956); 3, 193 (1957).
35. Давыдов А. С., Филиппов Г. Ф. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 35, 440 (1958); Nucl. Phys., 8, 237 (1958).
36. Давыдов А. С. и Ростовский В. С. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 36, 1788 (1959); Nucl. Phys., 12, 58 (1959).
37. Давыдов А. С., Чабан А. А. Nucl. Phys., 20, 499 (1960).
38. Charch E. L., Wenner J. Phys. Rev., 103, 1035 (1956).
39. Reiner A. S. Physica, 22, 843 (1956); 23, 338 (1957).
40. Гречухин Д. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 32, 1036 (1957).
41. Листенгартен М. А., Банд И. М. «Изв. АН СССР: Сер. физ.», 23, 235 (1959).
42. Гречухин Д. П. «Ядерная физика» 4, 6 (1966).
43. Давыдов А. С., Филиппов Г. Ф. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 35, 703 (1958).
44. Гречухин Д. П. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 40, 1732 (1961); Nucl. Phys., 40, 442 (1963).
45. Lipas P. O. Phys. Lett. 8, 279 (1964); Davidson J. P. Rev. Mod. Phys., 37, 105 (1965).
46. Джеленов Б. С., Пекер Л. К., Сергеев В. О. Схемы распада радиоактивных ядер. М., Изд-во АН СССР (1963).
47. Stephens F. S. et al. Nucl. Phys., 63, 82 (1965).
48. Williams S. A. Nucl. Phys., 63, 581 (1965).
49. De Mille G. et al. Can. J. Phys., 37, 1036 (1959).
50. Moore R. B., White W. Can. J. Phys., 38, 1149 (1960).
51. Давыдов А. С. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 23, 792 (1959).
52. Давыдов А. С. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 24, 820 (1960).
53. Григорьев Е. П., Авотинна М. П. Nucl. Phys., 19, 248 (1960).
54. Mallman C. A., Kerman A. K. Nucl. Phys., 16, 105 (1960).
55. Sheline R. K. Rev. Mod. Phys., 32, 1 (1960).
56. Scharf-Goldhaber G. et al. Bull. Amer. Phys. Soc., 2, 25 (1957); Phys. Rev., 111, 913 (1958).
57. Aten A. G. et al. Physika, 21, 740, 990 (1955).
58. Jamazaki T. Nucl. Phys., 44, 353 (1963).
59. Day P. P., Mallmann C. A. Table of Asymmetric Rotor E2 Transition Probabilities, ANL-6184 (1964).
60. Van Patter D. M. Nucl. Phys., 14, 42 (1959/1960).
61. Овчаренко В. И. «Ядерная физика». 4, 30 (1966).
62. Baggerly L. et al. Phys. Rev., 100, 1364 (1955).
63. Benzer N. et al. Phys. Rev., 101, 1027 (1955).
64. Motz H. Phys. Rev., 104, 1353 (1956).
65. Kurbatov J. et al. Phys. Rev., 98, 974 (1955).
66. Glaubman M. Phys. Rev., 98, 645 (1955).
67. Nathan O., Waggoner M. Nucl. Phys., 2, 548 (1956/57).
68. Boehm F. et al. Phys. Rev., 95, 864 (1954).
69. Waddelle R., Jensen E. Phys. Rev., 102, 816 (1956).
70. Bhattacharjee S. K. et al. Nuovo cimento, 7, 501 (1958).
71. Jean M., Touchard J. J. phys et radium, 19, 56 (1958).
72. Alburger D. E. Phys. Rev., 108, 812 (1957).
73. Lindqvist T., Marklund I. Nucl. Phys., 4, 189 (1957).
74. McGowan F., Stelson. Bull. Amer. Phys. Soc., 3, 228 (1958).
75. Mallmann C. A. Nucl. Phys., 24, 535 (1961).
76. Давыдов А. С. и др. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 38, 1311 (1960); Nucl. Phys., 17, 169 (1960).
77. Macdonald N. Nucl. Phys., 14, 70 (1959/60).
78. Cline J. E. and Reich C. W. Phys. Rev., 129, 2153 (1963).
79. Williams S. A. Nucl. Phys., 63, 581 (1965).
80. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., Физматгиз (1953).
81. Day P. et al. Nucl. Phys., 25, 266 (1961); Argonne Nat. Labor. Report, ANL-6220, Nov. 1960.

82. Stephens F. S. et al. Phys. Rev. Lett., 12, 225 (1964).
83. Stephens F. S. et al. Nucl. Phys., 63, 82 (1965).
84. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. И. Курс современного анализа. Ч. II. М., Физматгиз (1934).
85. Higher Transcendental Functions, v. II. McGraw-Hill Book Company (1953).
86. Шпильерейн Я. Н. Таблицы специальных функций. Ч. I. М., Физматгиз (1933).
87. Давыдов А. С., Овчаренко В. И. «Докл. АН СССР», 163, 329 (1965).
88. Давыдов А. С., Овчаренко В. И. «Ядерная физика», 3, 1011 (1966).
89. Harmatz B. et al. Phys. Rev., 123, 1758 (1961).
90. Hamilton J. H. et al. Phys. Lett., 13, 43 (1964).
91. Davidson J. P., Davidson M. G. Phys. Rev., 138, B316 (1965).
92. Давыдова А. С. и др. Nucl. Phys., 27, 134 (1961); «Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ.», 3, 66 (1961).
93. Беляк В. И., Заикин Д. А. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 25, 1663 (1961); Nucl. Phys., 30, 142 (1962).
94. Faessler A., Greiner W. Z. f. Phys., 168, 425 (1962); 170, 105 (1962).
95. Давыдов А. С., Ростовский В. С. Nucl. Phys., 60, 529 (1964).
96. Wilson R. G., Pool M. I. Phys. Rev., 119, 262 (1960).
97. King W. J., Johns M. W. Can. J. Phys., 37, 755 (1959).
98. Hara K. Nucl. Phys., 46, 385 (1963).
99. Rasmussen J. O. Nucl. Phys., 19, 85 (1960).
100. Reiner A. S. Nucl. Phys., 27, 115 (1961).
101. Asaro J. F. et al. Phys. Rev., 92, 1495 (1953).
102. Stephens F. S. et al. Phys. Rev., 96, 1568 (1954); 100, 1543 (1960).
103. Sheline R. K. Rev. Mod. Phys., 32, 1 (1960).
104. Davidson J. P. Rev. Mod. Phys., 37, 105 (1965).
105. Alder K. et al. Rev. Mod. Phys., 28, 432 (1956).
106. Lipas P. O., Davidson J. P. Nucl. Phys., 26, 80 (1961).
107. Davidson J. P. Nucl. Phys., 33, 664 (1962).
108. Лепер Д. П. Nucl. Phys., 50, 234 (1964).
109. Лепер Д. П. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 29, № 7 (1965).
110. Лепер Д. П. «Вестн. АН КазССР», 12, 69 (1965).
111. Williams S. A., Davidson J. P. Can. Jour. Phys., 40, 1423 (1962).
112. Мигдал А. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 15, 81 (1945).
113. Струтинский В. М. «Атомная энергия», 4, 151 (1956).
114. Bohr A., Mottelson B. Nucl. Phys., 4, 529 (1957).
115. Bohr A., Mottelson B. Nucl. Phys., 9, 687 (1959).
116. Lipas P. O. Nucl. Phys., 40, 629 (1963).
117. Нильссон С. Сб. «Деформация атомных ядер». М., Изд-во иностр. лит. (1958); Dan. Mat-Fys. Medd., 29, No. 16 (1955).
118. Kerman A. K. Dan. Mat-Fys. Medd., 30, No. 15 (1956).
119. Newton T. D. Canad. J. Phys., 38, 750 (1960).
120. Пашкевич В. В., Сардарян Р. А. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 28, 1188 (1964).
121. Braunstein A., de Shalit A. Phys. Lett., 1, 264 (1962).
122. de Shalit A. Phys. Rev., 122, 1530 (1960).
123. Endt P. H., Van der Leun. Nucl. Phys., 34, 68 (1962).
124. Sheline R. K., Havlan R. A. Nucl. Phys., 29, 177 (1962).
125. Kantele J. and Fink R. W. Nucl. Phys., 43, 187 (1963).
126. Malik S. S., Mukerji A. Phys. Rev., 111, 1291 (1958).
127. Дзелянов Б. С., Пекер Л. К. Препринт Р-288, ОИЯИ, Дубна (1959).
128. Harmatz B. et al. Phys. Rev., 128, 1186 (1962).
129. Marklund I., Linström B. Nucl. Phys., 40, 329 (1963).
130. Albridge R. G. et al. Nucl. Phys., 27, 529 (1961).
131. Schulze G. Ahf J. Nucl. Phys., 30, 163 (1962).
132. Bisgard K. M. et al. Nucl. Phys., 41, 21 (1963).

133. Diamond R. M. et al. Nucl. Phys., 43, 56 (1963).
134. Sheline B. K. et al. Phys., Rev., 136, 351 (1964).
135. Schultz O. W. et al. Z. f. Phys., 182, 171 (1964).
136. Пашкевич В. В. «Изв. АН СССР, Сер. физ.», 30, 257 (1966).
137. Давыдов А. С. «Укр. физ. ж.», 8, 717 (1963).
138. Давыдов А. С., Сардарян Р. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 40, 1429 (1961).
139. Гангровский Ю. П., Лемберг И. Х. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 26, 1027 (1962).
140. Громов К. Я. и др. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 26, 1019 (1962).
141. Lindskog J. et al. Arkiv fys., 23, 341 (1963).
142. Blok J., Shirley D. A. Phys. Lett., 13, 232 (1964).
143. Кашуба И. Е. «Укр. физ. ж.», 12 № 5 (1967).
144. Hecht K. T. Satchler G. R. Nucl. Phys., 32, 286 (1962).
145. Person L., Rasmussen J. O. Nucl. Phys., 36, 666 (1962).
146. Chi B. E. Preprint, Dep. of Phys. Rensselaer Polytechnic Institute, New York, 1962.
147. Chi B. E., Davidson J. P. Phys. Rev., 131, 366 (1963).
148. Давыдов А. С., Сардарян Р. А. Nucl. Phys., 37, 106 (1962), «Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ.», № 4, 72 (1962).
149. Сардарян Р. А. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ.», № 4, 18 (1963).
150. Кондон Е., Шортли Г. Теория атомных спектров. М., Изд-во иностр. лит. (1949).
151. Racah G. Phys. Rev., 62, 438 (1942); 63, 367 (1943).
152. Biedenharn L. C. et al. Rev. Mod. Phys., 24, 249 (1952).
153. Rose M. E. Elementary Theory of Angular Momentum, John Wiley and Sons, New York (1961).
154. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. М., Физматгиз (1958).
155. Бейман Б. Ф. Лекции по теории групп в ядерной спектроскопии. М., Физматгиз (1961).
156. Biedenharn L. C. Oak Ridge Natl. Lab. Rept., 1098.
157. Никифоров А. Ф. и др. Таблицы коэффициентов Рака, ВЦАН СССР. М., (1962).
158. Eckart C. Rev. Mod. Phys., 2, 305 (1930).
159. Racah G. Phys. Rev., 62, 438 (1942).
160. Edmonds A. R. Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton. (1957).

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Глава I. Коллективные возбуждения в сферических ядрах . . .	5
§ 1. Введение	5
§ 2. Энергия и волновые функции коллективных возбуждений . .	9
§ 3. Электрические и магнитные мультипольные операторы . .	17
§ 4. Квадрупольные колебания поверхности сферического ядра в представлении внутренних переменных	24
Глава II. Коллективные возбуждения несферических четно-четных ядер	40
§ 5. Потенциальная энергия ядра как функция параметров, определяющих его форму	40
§ 6. Оператор Гамильтона для коллективных движений в несферических четно-четных ядрах	47
§ 7. Операторы мультипольных моментов для несферических ядер . .	53
§ 8. Приближенное разделение переменных для аксиально симметричных ядер	60
§ 9. Адиабатическая теория вращательных состояний несферических четно-четных ядер	70
§ 10. Вероятности переходов между вращательными состояниями . .	89
§ 11. Простейшие обобщения модели жесткого неаксиального ротатора	107
Глава III. Неадиабатическая теория вращательно-вибрационных возбуждений в атомных ядрах	115
§ 12. Продольные колебания и вращение деформируемых четно-четных ядер	115
§ 13. Электрические квадрупольные переходы в деформируемых четно-четных ядрах	143
§ 14. Общая теория квадрупольных возбуждений несферических, малодеформируемых четно-четных ядер	157
§ 15. Приведенные вероятности электрических мультипольных переходов в малодеформируемых четно-четных ядрах	174
§ 16. Октупольные колебания в четно-четных атомных ядрах	185
Глава IV. Возбужденные состояния малой энергии в нечетных атомных ядрах	196
§ 17. Оператор энергии модели нечетного атомного ядра	196
§ 18. Полное разделение вращательных и одночастичных возбуждений. Схема Нильссона	201
§ 19. Возбужденные состояния нечетных ядер с учетом эффективной неаксиальности	203
§ 20. Электромагнитные переходы в нечетных неаксиальных ядрах .	219

§ 21. Возбужденные состояния нечетных ядер, характеризующихся малыми значениями параметра эффективной неаксиальности	230
--	-----

Математические приложения

А. Декартовы и сферические проекции векторов	237
Б. Операторы «угловых» моментов	238
В. Коэффициенты векторного сложения	241
Г. Преобразования волновых функций при конечных вращениях системы координатных осей	245
Д. Оператор полного углового момента системы частиц (твердого тела)	249
Е. Неприводимые тензорные операторы	252
Ж. Матричные элементы тензорных операторов	253
З. Приведенные матричные элементы тензорных операторов	256
Литература	258

Александр Сергеевич Давыдов

ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ АТОМНЫХ ЯДЕР

Редактор **В. Н. Безрукова**
Худож. редактор **А. С. Александров**
Технический редактор **Н. А. Власова**
Корректор **Н. А. Смирнова**

Сдано в набор 17.VIII. 1966 г. Подписано в печать 29.XII.1966 г. Бумага 60×90^{1/16}, типографская № 2. Усл. печ. л. 16,5. Уч.-изд. л. 15,69. Т-15950. Тираж 3000 экз. Заказ изд. 1617.

Атомиздат, Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7.
Зак. тип. 639.
Московская типография № 6
Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Ж-88, 1-й Южно-портовый пр., 17.
Цена 1 р. 09 к.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Во II кв. 1967 г. выходит из печати книга автора **НГУЕН ВАН ХЪЕУ. Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц.** Атомиздат, 20 п. л., 4000 экз., 1 р. 46 к., в переплете, II кв., индекс 2-3-7.

Книга представляет собой курс лекций, прочитанных автором в Объединенном институте ядерных исследований (г. Дубна). В ней приведено систематизированное изложение теории изотопической инвариантности унитарной симметрии и симметрии $SU(6)$ элементарных частиц и показано ее применение к изучению сильных и слабых электромагнитных взаимодействий. Дается также обзор составных моделей элементарных частиц, и предсказания теории сравниваются с опытом. Обсуждены возможности дальнейшей экспериментальной проверки следствий теории.

Книга рассчитана на физиков-экспериментаторов и теоретиков, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в теории элементарных частиц.

Заказы на книги направляйте в местные книжные магазины, распространяющие научно-техническую литературу. Книготорговые организации заказы направляют в Союзкнигу по адресу:

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
Отдел научно-технической литературы.

Атомиздат