С.М. Биленький

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ РАССЕЯНИЯ

Часть I

Издательство Московского Университета

1985

УДК 539.1.01

Биленъкий СМ. Введение в теорию рассеяния. Часть I: учебное пособие. -
М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. - 96с

Дано изложение нерелятивистской теории S - матрицы. Вначале S - матрица получена в виде ряда теории возмущений по потенциалу взаимодействия. Затем путем суммирования ряда получено уравнение Липпмана-Швингера. Получено также точное соотношение, связывающее амплитуду рассеяния и потенциал. Подробно рассмотрено рассеяние нерелятивистских частиц со спином. Изложен аппарат спиновой матрицы плотности. Подробно рассматриваются ограничения, которые накладывают на матрицу рассеяния принципы инвариантности относительно вращений, отражений и обращения времени. На основе принципов инвариантности получена и детально проанализирована важная теорема о равенстве поляризации и асимметрии.
Для студентов физического факультета МГУ, теоретиков и экспериментаторов.

Рецензенты:
академик Б.М.Понтекорво
канд.физ.-мат. наук С.П.Иванова

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ I. Введение

Эти лекции посвящены изложению основ нерелятивистской теории рассеяния. Теория рассеяния представляет собой теорию S – матрицы. Мы начнем с того, что введем эту фундаментальную величину. Для этого от обычного представления Шредингера мы перейдем к представлению Дирака (представлению взаимодействия). После этого будет получено выражение для S -матрицы в виде ряда теории возмущений по потенциалу. Затем будут получены уравнения Липпмана-Швингера (в различных формулировках) и основные соотношения так называемой формальной теории рассеяния. Далее мы введем диаграммы Фейнмана и подробно обсудим первое борновское приближение. Затем мы приступим к рассмотрению рассеяния частиц со спинами. Подробно будет рассмотрено рассеяние частиц со спинами I/2 и 0 и двух частиц со спинами I/2. Большое внимание мы уделим рассмотрению принципов инвариантности (относительно вращений, отражений и обращения времени) и ограничений, которые накладывают принципы инвариантности на потенциал взаимодействия и матрицу рассеяния. Далее будет весьма подробно рассмотрена спиновая матрица плотности. Наконец, на примере рассеяния частиц со спинами I/2 и 0, а также I/2 и I/2 мы рассмотрим различные поляризационные характеристики рассеяния. В частности будет доказана важная теорема о равенстве поляризации и асимметрии. Из этого перечисления видно, что круг вопросов, которые здесь рассмотрены, весьма ограничен. Однако каждый из вопросов рассмотрен настолько подробно, что изложенные методы могут быть применены для решения многих практических задач. Надеюсь также, что эти лекции помогут читателю перейти к изучению оригинальной литературы.

Я выражаю самую глубокую благодарность академику А.А. Логунову, по инициативе которого эти лекции в течение ряда лет читались в Филиале МГУ в Дубне.

§ 2. Представление взаимодействия. S -матрица

Вычисление матричных элементов S -матрицы является основной задачей теории рассеяния. В этом разделе мы определим S -матрицу и получим выражение для нее в виде ряда теории возмущений по потенциалу взаимодействий.

От стандартного представления Шредингера удобно перейти к представлению Дирака (представлению взаимодействия). В представлении Шредингера волновая функция $\Psi(t)$ является решением уравнения*

$$i\,\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = H\Psi(t)\quad, \tag{2.1}$$

где

$$H = H_0 + V \tag{2.2}$$

– полный гамильтониан. (H_0 – свободный гамильтониан, V – потенциал взаимодействия). Волновая функция $\Psi(t)$ зависит от координат времени и спиновых переменных.

Пусть Φ_ν являются собственными функциями операторов импульсов и проекций спинов на некоторые направления (совокупность импульсов и проекций спинов мы будем обозначать индексом ν). Функции Φ_ν являются собственными функциями свободного гамильтониана

$$H_0\Phi_\nu = E_\nu\Phi_\nu\quad. \tag{2.3}$$

Будем считать, что функции Φ_ν удовлетворяют условиям ортонормировки

$$(\Phi^+_{\nu'}\Phi_\nu) = \delta(\nu'-\nu) \tag{2.4}$$

(имеется в виду, что в правую часть (2.4) входят произведения δ-функций на δ-символы Кронекера; последние для переменных, принимающих дискретные значения). Очевидно, что функции

$$\Psi_\nu(t) = e^{-iE_\nu t}\,\Phi_\nu$$

удовлетворяют свободному уравнению Шредингера

$$i\,\frac{\partial\Psi_\nu(t)}{\partial t} = H_0\Psi_\nu(t)\quad. \tag{2.5}$$

Из (2.4) следует, что

$$(\Psi^+_{\nu'}\Psi_\nu) = \delta(\nu'-\nu)\,. \tag{2.6}$$

---

*Мы будем использовать систему единиц, в которой $\hbar = 1$. Эта система вводится следующим образом. Пусть A – некоторая физическая величина, имеющая в системе СГС размерность $[A] = M^a L^b T^c$. Определим $A' = A/\hbar^a$. Очевидно, что $(\hbar)' = \hbar/\hbar = 1$. Имеем $[A'] = L^{b-2a}\,T^{c+a}$. Пусть p , E , m и M – соответственно импульс, энергия, масса и момент количества движения в системе СГС. В системе $\hbar = 1$ имеем $p' = p/\hbar$, $E' = E/\hbar$, $m' = m/\hbar$, $M' = M/\hbar$. Очевидно, что импульс, энергия и масса в системе $\hbar = 1$ имеют соответственно размерности $[p'] = L^{-1}$, $[E'] = T^{-1}$, $[m'] = L^{-2}T$. Момент количества движения в этой системе безразмерен.

Волновая функция $\Psi(t)$ может быть разложена по полной системе функций Φ_ν. Имеем

$$\Psi(t) = \int a'_\nu(t)\Phi_\nu\, d\nu = \int a_\nu(t)\Psi_\nu(t)\, d\nu. \quad (2.7)$$

В (2.7) имеется в виду интегрирование по переменным, принимающим непрерывные значения и суммирование по переменным, принимающим дискретные значения. Из (2.7) следует, что $a_\nu(t)$ представляет собой амплитуду вероятности найти систему в момент времени t в состоянии $\Psi_\nu(t)$. Очевидно, что функция $a_\nu(t)$ полностью описывает состояние системы.

Получим уравнение для волновой функции $a_\nu(t)$. Подставляя (2.7) в (2.1), получаем

$$i\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = i\int\frac{\partial a_\nu(t)}{\partial t}\Psi_\nu(t)\,d\nu + i\int a_\nu(t)\frac{\partial\Psi_\nu(t)}{\partial t}\,d\nu = \int a_\nu(t)(H_0+V)\Psi_\nu\,d\nu. \quad (2.8)$$

Учитывая, что функция $\Psi_\nu(t)$ удовлетворяет уравнению (2.5) и умножая (2.8) слева на $\Psi^+_\nu(t)$, находим

$$i\frac{\partial a_{\nu'}}{\partial t} = \int V_{\nu'\nu}(t)\, a_\nu(t)\, d\nu \quad , \quad (2.9)$$

где

$$V_{\nu'\nu} = \left(\Psi^+_{\nu'}(t)\, V\, \Psi_\nu(t)\right). \quad (2.10)$$

В правую часть уравнения (2.9) для $a_\nu(t)$ входит только потенциал взаимодействия. Функция $a_\nu(t)$ является волновой функцией системы в представлении взаимодействия. Одновременно мы перешли также и к импульсному представлению. Получим теперь выражение для среднего значения операторов в представлении взаимодействия. В исходном представлении Шредингера имеем

$$\bar{F} = \left(\Psi^+(t)\, F\, \Psi(t)\right) \quad , \quad (2.11)$$

F - оператор, отвечающий некоторой физической величине. Подставляя (2.7) в (2.11), находим

$$\bar{F} = \int a^*_{\nu'}(t)\, F_{\nu'\nu}(t)\, a_\nu(t)\, d\nu' d\nu. \quad (2.12)$$

Здесь

$$F_{\nu'\nu}(t) = \left(\Psi^+_{\nu'}(t)\, F\, \Psi_\nu(t)\right). \quad (2.13)$$

В матричном виде

$$\bar{F} = \left(a^+(t)\, F(t)\, a(t)\right). \quad (2.14)$$

Таким образом, оператор $F(t)$ (оператор в представлении взаимодействия) задается матричными элементами $F_{\nu'\nu}(t)$. Среднее значение оператора $F(t)$ вычисляется по тому же правилу, что и среднее значение в представлении Шредингера. Операторы в представлении взаимодействия зависят в общем случае от времени. Получим уравнение, определяющую эту зависимость. Предположим, что оператор F в исходном представлении Шредингера от времени не зависит. Дифференцируя по времени $F_{\nu'\nu}(t)$, и учитывая, что

$$-i\frac{\partial \Psi^{+}_{\nu'}(t)}{\partial t} = \Psi^{+}_{\nu'}(t)H_0 \quad ,$$

получаем

$$i\frac{\partial F_{\nu'\nu}(t)}{\partial t} = (\Psi^{+}_{\nu'}(t)FH_0\Psi_{\nu}(t)) - (\Psi^{+}_{\nu'}(t)H_0F\Psi_{\nu}(t)) = \tag{2.15}$$
$$= \int (F_{\nu'\nu_1}(t)(H_0(t))_{\nu_1\nu} - (H_0(t))_{\nu'\nu_1}F_{\nu_1\nu}(t))\,d\nu_1 .$$

В матричном виде

$$i\frac{\partial F(t)}{\partial t} = [F(t), H_0(t)] \quad . \tag{2.16}$$

Теперь мы приступим к решению уравнения движения в представлении взаимодействия. Используя метод итераций, легко найти общее решение уравнения (2.9) в виде ряда по потенциалу взаимодействия. Действительно, запишем интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (2.9). Имеем (в матричном виде)

$$a(t) = a_0(t) + (-i)\int_{t_0}^{t} V(t_1)\,a(t_1)\,dt_1 \quad , \tag{2.17}$$

где $a(t_0)$ - волновая функция в начальный момент времени (заданная величина). Подставим в правую часть (2.17) под знак интеграла вместо $a(t_1)$ сумму $a(t_0) + (-i)\int_{t_0}^{t_1} V(t_2)\,a(t_2)\,dt_2$. Получаем

$$a(t) = a(t_0) + (-i)\int_{t_0}^{t} V(t_1)\,dt_1\,a(t_0) + (-i)^2\int_{t_0}^{t} V(t_1)\,dt_1\int_{t_0}^{t_1} V(t_2)\,a(t_2)\,dt_2 .$$

Неизвестная функция входит в это уравнение под знак двойного интеграла и умножается на квадрат потенциала. Продолжая эту процедуру, без труда находим

$$a(t) = U(t,t_0)\,a(t_0) , \tag{2.18}$$

где

$$U(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\int_{t_0}^{t} V(t_1)\,dt_1\int_{t_0}^{t_1} V(t_2)\,dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} V(t_n)\,dt_n . \tag{2.19}$$

Таким образом, для того, чтобы найти общее решение уравнения (2.19) нужно подействовать оператором $U(t,t_0)$ на начальную функцию $a(t_0)$. Оператор $U(t,t_0)$ определяется потенциалом в представлении взаимодействия. Мы получили выражение для этого оператора в виде ряда теории возмущений по потенциалу взаимодействия.

Определим теперь S -матрицу. В задачах рассеяния начальное состояние задается при $t_0 \to -\infty$ и нас интересует волновая функция при $t \to +\infty$. Из (2.18) следует, что

$$a(\infty) = S\, a(-\infty), \qquad (2.20)$$

где оператор

$$S = U(\infty, -\infty) \qquad (2.21)$$

носит название S -матрицы. Выясним физический смысл матричных элементов S -матрицы. Предположим, что

$$a_\nu(t) = \delta(\nu - \nu_0), \qquad (2.22)$$

где ν_0 - фиксированное значение переменной ν. Из выражения (2.7) получаем при этом

$$\psi(t) = \varphi_{\nu_0}(t).$$

Итак, если $a_\nu(t) = \delta(\nu-\nu_0)$, то рассматриваемая нами система находится в состоянии $\varphi_{\nu_0}(t)$. Из выражения (2.20) находим при этом

$$a_\nu(\infty) = S_{\nu\nu_0}.$$

Таким образом, матричный элемент $S_{\nu\nu_0}$ представляет собой амплитуду вероятности, найти систему при $t \to \infty$ в состоянии ψ_ν (состоянии с определенными импульсами и проекциями спинов) при условии, что в начальный момент времени ($t_0 \to -\infty$) система находилась в состоянии ψ_{ν_0} (состоянии с другими импульсами и проекциями спинов). Вычисление этой амплитуды является основной задачей теории рассеяния.

Из (2.19) и (2.21) имеем

$$S_{\nu'\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int d\nu_1 \ldots d\nu_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} V_{\nu'\nu_1}(t_1)\,dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} V_{\nu_{n-1}\nu}(t_n)\,dt_n \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}_{\nu';\nu}.$$

Рассмотрим теперь последовательно члены этого ряда. Из (2.19) следует, что

$$V_{\nu'\nu}(t) = e^{-i(E_\nu - E_{\nu'})t} V_{\nu'\nu} \quad , \tag{2.24}$$

где матричный элемент

$$V_{\nu'\nu} = (\phi^+_{\nu'} V \phi_\nu) \tag{2.25}$$

не зависит от времени. Учитывая (2.25), попытаемся в выражении (2.23) для S -матрицы выполнить интегрирование по времени. В члене первого порядка не возникает никаких трудностей. Имеем

$$S^{(1)}_{\nu'\nu} = -2\pi i \delta(E_{\nu'} - E_\nu) V_{\nu'\nu} \ . \tag{2.26}$$

Функция $\delta(E_{\nu'} - E_\nu)$ обеспечивает сохранение энергии. Рассмотрим член второго порядка

$$S^{(2)}_{\nu'\nu} = (-i)^2 \int d\nu_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(E_{\nu_1} - E_{\nu'})t_1} V_{\nu'\nu_1} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} e^{-i(E_\nu - E_{\nu_1})t_2} V_{\nu_1\nu} dt_2 .$$

Удобно вместо переменной t_2 ввести переменную $\tau = t_2 - t_1$. Это позволяет выполнить интегрирование по t_1.
Получаем

$$S^{(2)}_{\nu'\nu} = (-i)^2 2\pi \delta(E_{\nu'} - E_\nu) \int d\nu_1 V_{\nu'\nu_1} \int_{-\infty}^{0} V_{\nu_1\nu} e^{-i(E_\nu - E_{\nu_1})\tau} d\tau \ .$$

Как видно из этого выражения, интеграл по τ необходимо доопределить. Это доопределение делается с помощью процедуры адиабатического выключения взаимодействия на бесконечности. Мы предположим, что $|t| \to \infty$ потенциал исчезает как $\sim V e^{-\varepsilon|t|}$, где ε - положительная сколь угодно малая величина. После выполнения всех интегрирований ε полагается равным нулю. Это предположение отвечает физической постановке задачи - на бесконечности невзаимодействующие частицы с определенными импульсами. Имеем

$$S^{(2)}_{\nu'\nu} = -2\pi i \delta(E_{\nu'} - E_\nu) \lim_{\varepsilon \to 0} \int V_{\nu'\nu_1} \frac{1}{E_\nu - E_{\nu_1} + i\varepsilon} V_{\nu_1\nu} d\nu_1 . \tag{2.27}$$

Для члена третьего порядка получаем

$$S^{(3)}_{\nu'\nu} = (-i)^3 2\pi \delta(E_{\nu'} - E_\nu) \int d\nu_1 d\nu_2 V_{\nu'\nu_1} \int_{-\infty}^{0} e^{-i(E_\nu - E_{\nu_1})\tau'} V_{\nu_1\nu_2} d\tau' \int_{-\infty}^{0} e^{-i(E_\nu - E_{\nu_2})\tau} V_{\nu_2\nu} d\tau .$$

($\tau = t_3 - t_2$, $\tau' = t_2 - t_1$). Процедура адиабатического выключения взаимодействия дает

$$\mathcal{S}^{(3)}_{\nu'\nu} = -2\pi i\,\delta(E_{\nu'} - E_\nu) \lim_{\varepsilon \to 0} \int d\nu_1 d\nu_2 V_{\nu'\nu_1} \frac{1}{E_\nu - E_{\nu_1} + i\varepsilon} V_{\nu_1\nu_2} \frac{1}{E_\nu - E_{\nu_2} + i\varepsilon} V_{\nu_2\nu} . \quad (2.28)$$

Для члена n-го порядка теории возмущений имеем

$$\mathcal{S}^{(n)}_{\nu'\nu} = -2\pi i\,\delta(E_{\nu'} - E_\nu) \lim_{\varepsilon \to 0} \int d\nu_1 \ldots d\nu_{n-1} V_{\nu'\nu_1} \frac{1}{E_\nu - E_{\nu_1} + i\varepsilon} \cdots \frac{1}{E_\nu - E_{\nu_{n-1}} + i\varepsilon} V_{\nu_{n-1}\nu} . \quad (2.29)$$

Учитывая (2.26), (2.27)-(2.29), получаем следующее выражение для $\mathcal{S}$ -матрицы:

$$\mathcal{S}_{\nu'\nu} = \delta(\nu' - \nu) - 2\pi\delta(E_{\nu'} - E_\nu) T_{\nu'\nu} , \quad (2.30)$$

где

$$T_{\nu'\nu} = V_{\nu'\nu} + \int V_{\nu'\nu_1} \frac{1}{E_\nu - E_{\nu_1} + i\varepsilon} V_{\nu_1\nu} d\nu_1 + \ldots . \quad (2.31)$$

Запишем теперь ряд в правой части (2.31) в матричном виде. Для этого напомним определение функции от оператора. Если ϕ_ν - собственная функция оператора H_0 с собственным значением E_ν, то для оператора $f(H_0)$ (Функции от оператора H_0) имеем

$$f(H_0)\,\phi_\nu = f(E_\nu)\,\phi_\nu . \quad (2.32)$$

Оператор $f(H_0)$ определен, если определены значения функции $f(E_\nu)$ при всех значениях E_ν .
Учитывая (2.32), получаем

$$\left(\frac{1}{E_\nu - H_0 + i\varepsilon}\right)_{\nu_1'\nu_1} = \frac{\delta(\nu_1' - \nu_1)}{E_\nu - E_{\nu_1} + i\varepsilon} . \quad (2.33)$$

Рассмотрим второй член ряда (2.31). Имеем

$$\int V_{\nu'\nu_1'} \frac{\delta(\nu_1'-\nu_1)}{E-E_{\nu_1}+i\varepsilon} V_{\nu_1\nu} d\nu_1' d\nu_1 = \left(V \frac{1}{E_\nu - H_0 + i\varepsilon} V\right)_{\nu'\nu} . \quad (2.34)$$

Аналогичным образом может быть записан n-й член ряда. В результате находим

$$T_E = V + V \frac{1}{E-H_0+i\varepsilon} V + V \frac{1}{E-H_0+i\varepsilon} V \frac{1}{E-H_0+i\varepsilon} V + \ldots \quad (2.35)$$

С помощью выражения (2.35) нетрудно получить общее уравнение, которому удовлетворяет T -матрица. Действительно, имеем

$$T_E = V + V \frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}\left(V + V\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon} V + \ldots\right) . \quad (2.36)$$

Из (2.35) и (2.36) получаем

$$T_E = V + V \frac{1}{E-H_0+i\varepsilon} T_E . \quad (2.37)$$

Мы вернемся к этому уравнению в последующих лекциях.

Продолжим обсуждение S -матрицы. Задача рассеяния является задачей двух частиц. Нетрудно видеть, что как в случае бесспиновых частиц, так и в случае частиц со спинами потенциал взаимодействия двух частиц зависит только от относительного расстояния между ними. Действительно, для двух частиц уравнение Шредингера (I) имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi(\vec r_1, \vec r_2, t)}{\partial t} = \left(\frac{\vec p_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec p_2^{\,2}}{2m_2} + V(\vec r_1, \vec r_2)\right)\Psi(\vec r_1, \vec r_2, t) . \quad (2.38)$$

Здесь $\vec p_1 = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \vec r_1}$ и $\vec p_2 = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \vec r_2}$ – операторы импульса, m_1 и m_2 – массы частиц. Если частицы обладают спинами, то Ψ – столбец, а $V(\vec r_1, \vec r_2)$ – матрица. От координат частиц $\vec r_1$ и $\vec r_2$ удобно перейти к координате центра инерции

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \tag{2.39}$$

и относительной координате

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad . \tag{2.40}$$

Очевидно, что

$$\vec{p}_1 = \vec{p} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{P} \; , \; \vec{p}_2 = -\vec{p} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{P} \; , \tag{2.41}$$

где

$$\vec{P} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \vec{R}} \quad ,$$

$$\vec{p} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \quad . \tag{2.42}$$

Из (2.4I) следует, что

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

– оператор полного импульса. Для оператора относительного импульса $\vec{p}$ получаем

$$\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2} \quad . \tag{2.43}$$

Далее, переходя (с помощью (2.4I)) в уравнении Шредингера к переменным $\vec{R}$ и $\vec{r}$, получаем

$$i\frac{\partial \psi(\vec{r},\vec{R},t)}{\partial t} = \left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2\mu} + \frac{\vec{P}^{\,2}}{2M} + V(\vec{r},\vec{R})\right)\psi(\vec{r},\vec{R},t) , \tag{2.44}$$

где

$$M = m_1 + m_2 \quad , \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \tag{2.45}$$

соответственно полная и приведенная массы.

Потребуем теперь, чтобы полный импульс системы сохранялся, т.е. чтобы

$$[\vec{P}, H] = 0 . \qquad (2.46)$$

Из (2.44) и (2.46) находим, что

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{R}} = 0 . \qquad (2.47)$$

Итак, из закона сохранения полного импульса следует, что потенциал взаимодействия двух частиц зависит только от относительного расстояния между частицами $\vec{r}$.

Переменные $\vec{R}$ и $\vec{r}$ при этом разделяются , и решение уравнения Шредингера имеет вид

$$\Psi(\vec{r},\vec{R},t) = \psi(\vec{r},t)\,\phi(\vec{R},t) ,$$

где функция $\psi(\vec{r},t)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2\mu} + V(\vec{r})\right)\psi(\vec{r},t) = i\,\frac{\partial \psi(\vec{r},t)}{\partial t} , \qquad (2.48)$$

а функция $\phi(\vec{R},t)$ — уравнению

$$\frac{\vec{P}^{2}}{2M}\,\phi(\vec{R},t) = i\,\frac{\partial \phi(\vec{R},t)}{\partial t} . \qquad (2.49)$$

Функция $\psi(\vec{r},t)$ описывает относительное движение частиц и определяется потенциалом взаимодействия. Функция $\phi(\vec{R},t)$ описывает движение центра инерции. Эта функция (в силу закона сохранения полного импульса) удовлетворяет свободному уравнению.

Учтем теперь в общем выражении для S -матрицы закон сохранения импульса. Функции ϕ_ν (выбранный нами базис) являются собственными функциями операторов импульса и проекций спина. Для случая двух частиц имеем

$$\Psi_\nu(t) = \phi_\nu e^{-iE_\nu t} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}_1\vec{r}_1 - iE_{p_1}t} u_{\mu_1} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}_2\vec{r}_2 - iE_{p_2}t} =$$
$$= \phi_{\vec{p}_1\mu_1\vec{p}_2\mu_2} e^{-i(E_{p_1}+E_{p_2})t} , \qquad (2.50)$$

где $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ – импульсы частиц , $E_{p_1} = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1}$, $E_{p_2} = \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2}$,

u_{μ_1} и u_{μ_2} – спиновые функции (μ_1 и μ_2 – проекции спинов). Поскольку потенциал зависит только от $\vec{r}$, естественно перейти к переменным $\vec{r}$ и $\vec{R}$. Из (2.39) и (2.40) имеем

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}, \qquad (2.51)$$
$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}.$$

С помощью этих соотношений получаем

$$\varphi_{\vec{p}_1\mu_1\vec{p}_2\mu_2} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{P}\vec{R}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\vec{r}} u_{\mu_1} u_{\mu_2}, \qquad (2.52)$$

где

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad \vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2} \qquad (2.53)$$

– соответственно полный и относительный импульсы. Далее очевидно, что

$$E_{p_1} + E_{p_2} = E_p + E_P, \qquad (2.54)$$

где

$$E_p = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\mu}, \quad E_P = \frac{\vec{P}^{\,2}}{2M} \qquad (2.55)$$

– соответственно, энергия центра масс и энергия относительного движения.

Нас интересуют матричные элементы $S_{\nu'\nu} = S_{\vec{p}_1'\mu_1'\vec{p}_2'\mu_2';\,\vec{p}_1\mu_1\vec{p}_2\mu_2}$.
Для первого члена ряда (2.35) находим

$$V_{\vec{p}_1'\mu_1'\vec{p}_2'\mu_2';\vec{p}_1\mu_1\vec{p}_2\mu_2} = \delta(\vec{P}'-\vec{P})\frac{1}{(2\pi)^3} u^+_{\mu_1'} u^+_{\mu_2'} \int e^{-i\vec{p}'\vec{r}} V(\vec{r}) e^{-i\vec{p}\vec{r}} d\vec{r} \cdot u_{\mu_1} u_{\mu_2}. \qquad (2.56)$$

Рассмотрим второй член. Свободный гамильтониан H_0 запишем в виде

$$H_0 = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \mathcal{H}_0(\vec{r}) , \tag{2.57}$$

где
$$\mathcal{H}_0(\vec{r}) = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} . \tag{2.58}$$

Используя (2.32) и (2.54), получаем

$$V(\vec{r})\frac{1}{E_{p_1p_2}-H_0+i\varepsilon}V(\vec{r})e^{i\vec{P}\vec{R}}e^{i\vec{p}\vec{r}} = e^{i\vec{P}\vec{R}}V(\vec{r})\frac{1}{E_p-\mathcal{H}_0(\vec{r})+i\varepsilon}V(\vec{r})\cdot e^{i\vec{p}\vec{r}} . \tag{2.59}$$

Находим, что
$$\left(V\frac{1}{(E_{p_1p_2}-H_0+i\varepsilon)}V\right)_{\vec{p}_1'\mu_1'\vec{p}_2'\mu_2';\vec{p}_1\mu_1\vec{p}_2\mu_2} =$$

$$= \delta(\vec{P}-\vec{P}')\frac{1}{(2\pi)^3}u^+_{\mu_1'}u^+_{\mu_2'}\int e^{-i\vec{p}'\vec{r}}V(\vec{r})\frac{1}{E_p-\mathcal{H}_0(\vec{r})+i\varepsilon}V(\vec{r})e^{i\vec{p}\vec{r}}d\vec{r}\, u_{\mu_1}u_{\mu_2}$$

Действуя последовательно операторами $\frac{1}{E_{p_1p_2}-H_0+i\varepsilon}$ на функцию $e^{i\vec{P}\vec{R}}$ для третьего члена ряда (2.35) имеем

$$V(\vec{r})\frac{1}{E_{p_1p_2}-H_0+i\varepsilon}V(\vec{r})\frac{1}{E_{p_1p_2}-H_0+i\varepsilon}V(\vec{r})e^{i\vec{P}\vec{R}} =$$
$$= e^{i\vec{P}\vec{R}}\cdot V(\vec{r})\frac{1}{E_{p_1p_2}-\mathcal{H}_0(\vec{r})+i\varepsilon}V(\vec{r})\frac{1}{E_{p_1p_2}-\mathcal{H}_0(\vec{r})+i\varepsilon}V(\vec{r}).$$

Таким образом, при "протаскивании" функции $e^{i\vec{P}\vec{R}}$ через оператор $\frac{1}{E_{p_1p_2}-H_0+i\varepsilon}$ полная энергия заменяется на энергию относительного движения, а полный свободный гамильтониан на свободный гамильтониан относительного движения. В результате для матричного элемента S -матрицы получаем

$$S_{\vec{p}_1'\mu_1'\vec{p}_2'\mu_2';\vec{p}_1\mu_1\vec{p}_2\mu_2} = \delta(\vec{P}'-\vec{P})\,\delta(\vec{p}'-\vec{p})\,\delta_{\mu_1'\mu_1}\delta_{\mu_2'\mu_2} - \tag{2.60}$$
$$- 2\pi i\,\delta(\vec{P}'-\vec{P})\,\delta(E'-E)\,u^+_{\mu_1'}u^+_{\mu_2'}T(\vec{p}';\vec{p})\,u_{\mu_1}u_{\mu_2} .$$

где E и E' - начальная и конечная полные энергии,

$$T(\vec{p}';\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-i\vec{p}'\vec{r}}\,T(\vec{r})\,e^{i\vec{p}\vec{r}}\,d\vec{r}\ , \qquad (2.61)$$

матрица $T(\vec{r})$ дается рядом

$$T(\vec{r}) = V(\vec{r}) + V(\vec{r})\frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0(\vec{r}) + i\varepsilon}V(\vec{r}) + \ldots \qquad (2.62)$$

Подведем теперь итоги. В этом разделе от представления Шредингера мы перешли к представлению взаимодействия и ввели основной оператор теории рассеяния: S -матрицу (T -матрицу). Вычисление матричных элементов S -матрицы является главной задачей теории рассеяния. Было получено разложение T -матрицы в виде ряда теории возмущений по потенциалу. Члены ряда имеют весьма простую структуру. Глядя на этот ряд , мы смогли написать точное уравнение для T -матрицы. Наконец, мы перешли к координате центра инерции и относительной координате и показали, что в общем случае частиц со спином как потенциал, так и T -матрица зависят только от относительной координаты (это является следствием закона сохранения полного импульса).

§ 3. Сечение рассеяния

Теперь определим сечение рассеяния - величину непосредственно измеряемую на опыте. Вначале будет рассматриваться случай рассеяния бесспиновых частиц. В последующих лекциях мы подробно рассмотрим случай рассеяния частиц со спином.

Для матричного элемента S -матрицы имеем

$$S_{\vec{p}_1'\vec{p}_2'\vec{p}_1\vec{p}_2} = \delta(\vec{P}'-\vec{P})\,\delta(\vec{p}'-\vec{p}) - 2\pi i\,\delta(E'-E)\,\delta(\vec{P}'-\vec{P})\,T_{\vec{p}';\vec{p}}\,. \qquad (3.1)$$

Здесь $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ ($\vec{p}_1'$ и $\vec{p}_2'$)- импульсы начальных (конечных) частиц, $\vec{p}$ ($\vec{p}'$) - начальный (конечный) относительный импульс, $\vec{P}$ ($\vec{P}'$) - начальный (конечный) полный импульс, E (E') - начальная (конечная) полная энергия. Нас интересуют обусловленные взаимодействием переходы из начального состояния (две частицы с импульсами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$) в конечное (две частицы с импульсами $\vec{p}_1'$ и $\vec{p}_2'$). Амплитуда такого перехода дается вторым членом выражения (3.1) (из (2.62) ясно, что при $V \to 0$, $T_{\vec{p}'\vec{p}} \to 0$).

Для вероятности найти конечные частицы с импульсами в интервалах от $\vec{p}_1'$ до $\vec{p}_1'+d\vec{p}_1'$ и от $\vec{p}_2'$ до $\vec{p}_2'+d\vec{p}_2'$ получаем

$$dW_{fi} = (2\pi)^2 \left| T_{\vec{p}';\vec{p}} \right|^2 \delta(E_p' - E_p)\, \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \frac{1}{2\pi} \times \tag{3.2}$$
$$\times \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E'-E)t}\, dt \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{V\to\infty} \int_V e^{i(\vec{p}'-\vec{p})\vec{R}}\, d\vec{R}.$$

Матричные элементы S -матрицы описывают переходы из начального состояния в конечное за время от $-\infty$ до $+\infty$ и во всем пространстве (начальные и конечные частицы обладают определенными импульсами). Нас будут интересовать переходы за единицу времени и в единице объема. Для этой величины из (3.2) находим*

$$dw_{fi} = \lim_{\substack{T\to\infty\\ V\to\infty}} \frac{dW_{fi}}{T\cdot V} = \frac{1}{(2\pi)^2} \left| T_{\vec{p}';\vec{p}} \right|^2 \delta(E'-E)\, \delta(\vec{p}' - \vec{p}) \times$$
$$\times \lim_{\substack{T\to\infty\\ V\to\infty}} \frac{1}{TV} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_p'-E_p)t}\, dt \int_V e^{i(\vec{p}'-\vec{p})\vec{R}}\, d\vec{R}\, d\vec{p}_1'\, d\vec{p}_2' \tag{3.3}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \left| T_{\vec{p}';\vec{p}} \right|^2 \delta(E'-E)\, \delta(\vec{p}' - \vec{p})\, d\vec{p}_1'\, d\vec{p}_2'.$$

Рассмотрим рассеяние частиц в лабораторной системе (ЛС - система, в которой частицы мишени покоятся). Частицами мишени будем считать частицы 2.

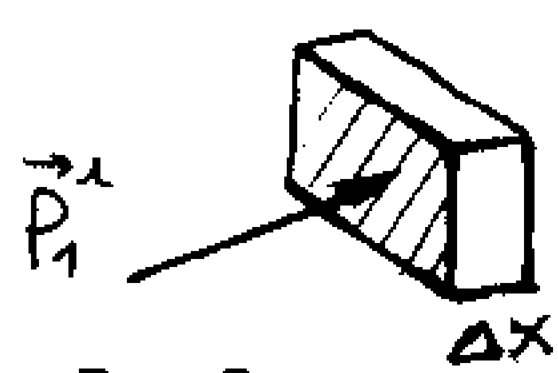

Рис.I.

Рассмотрим бесконечно малый объем мишени, изображенный на рис.I Заштрихованная единичная площадка перпендикулярна импульсу налетающих частиц $\vec{p}_1^{\,л}$. В рассматриваемом объеме находится

$$\rho_2(\Delta x \cdot 1)$$

частиц мишени (ρ_2 - плотность мишени). Пусть $d\sigma_{fi}$ - сечение (эффективный поперечник) одной частицы. Тогда суммарное сечение всех частиц, в объеме ($\Delta x \cdot 1$) равно $d\sigma_{fi}\, \rho_2 (\Delta x \cdot 1)$. Далее, за единицу времени через рассматриваемую единичную площадку

*Эту процедуру получения выражения для dw_{fi} можно строго обосновать, если вместо плоских волн использовать пакеты.

проходит $\rho_1 v_1^{\lambda}$ частиц I (ρ_1 - плотность потока падающих частиц, v_1^{λ} - скорость частиц I в ЛС). Таким образом, число частиц, рассеянных за единицу времени в объеме ($\Delta x \cdot 1$), равно $d\sigma_{fi}\rho_2\rho_1 v_1^{\lambda}(\Delta x \cdot 1)$. С другой стороны, это число равно $dw_{fi}(\Delta x \cdot 1)$.
Имеем

$$d\sigma_{fi}\rho_2\rho_1 v_1^{\lambda}(\Delta x \cdot 1) = dw_{fi}(\Delta x \cdot 1).$$

Отсюда для сечения получаем следующее выражение:

$$d\sigma_{fi} = \frac{1}{j} dw_{fi} \quad , \tag{3.4}$$

где

$$j = \rho_1\rho_2 v_1^{\lambda} \quad . \tag{3.5}$$

Величина j носит название потока.

В связи с выражением (3.4) мы сделаем два замечания.

I. Нетрудно видеть, что сечение $d\sigma_{fi}$ имеет размерность L^2. Действительно, $[dw_{fi}] = L^{-3}T^{-1}$, $[j] = L^{-6}LT^{-1}$. Таким образом,

$$[d\sigma_{fi}] = L^2.$$

2. Поток j может быть записан в инвариантном виде. Действительно,

$$v_1^{\lambda} = v^{\lambda};$$

где $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ - относительная скорость. Относительная скорость не меняется при преобразованиях Галилея ($\vec{v}_1 = \vec{v}' + \vec{V}$, $\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{V}$, отсюда $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1' - \vec{v}_2'$, $\vec{V}$ - скорость системы).
Таким образом,

$$j = \rho_1\rho_2 v. \tag{3.6}$$

Далее имеем

$$\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1 + m_2} = \mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \mu\vec{v};$$

где $\vec{p}$ - относительный импульс, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - приведенная масса.

Инвариантный поток может быть, следовательно, записан также в виде

$$j = \rho_1\rho_2 \frac{p}{\mu}. \qquad (3.7)$$

Начальные частицы описываются плоскими волнами

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}_1\vec{r}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}_2\vec{r}}.$$

Соответственно, имеем

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{(2\pi)^3}. \qquad (3.8)$$

С помощью (3.3), (3.4), (3.7) и (3.8) получаем следующее выражение для сечения рассеяния:

$$d\sigma_{fi} = (2\pi)^4 \frac{\mu}{p} |T_{\vec{p}';\vec{p}}|^2 \delta(E'-E)\,\delta(\vec{P}'-\vec{P})\, d\vec{p}_1' d\vec{p}_2'. \qquad (3.9)$$

Нетрудно видеть, что $d\sigma_{fi}$ является инвариантом. Выражение (3.9) позволяет вычислить дифференциальное сечение рассеяния в любой системе отсчета.

В заключение вычислим сечение рассеяния в системе центра инерции (СЦИ). В этой системе

$$\vec{P} = 0,$$

т.е. $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$. Относительный импульс в СЦИ совпадает с импульсом первой частицы:

$$\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2} = \vec{p}_1.$$

Выполним в (3.9) все возможные интегрирования. Учитывая закон сохранения импульса ($\delta(\vec{P}'-\vec{P})$) и интегрируя по $\vec{p}_2'$, получаем $\vec{p}_2' = -\vec{p}_1$. Для элемента объема в сферических координатах имеем

$$d\vec{p}_1' = p'^2 dp' d\Omega,$$

где $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ – элемент телесного угла, θ – угол между $\vec{p}$ и $\vec{p}'$. Далее, очевидно, что $\mu dE_{p'} = p'dp'$. Интегрируя по $dE_{p'}$, получаем для дифференциального сечения рассеяния в СЦИ следующее выражение:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^4 \mu^2 |T_{\vec{p}';\vec{p}}|^2 , \qquad (3.10)$$

где (в силу закона сохранения энергии) $p = p'$. Процесс рассеяния в СЦИ сводится к повороту относительного импульса. Ясно, что система центра инерции представляет собой наиболее удобную для рассмотрения процессов рассеяния систему.

§ 4. Рассеяние бесспиновых частиц. Связь амплитуды рассеяния с матричным элементом T -матрицы

Мы продолжим общее рассмотрение рассеяния бесспиновых частиц. Ответим вначале на вопрос о том, какие ограничения на потенциал взаимодействия накладывает закон сохранения момента. Имеем

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{p} .$$

Потребуем, чтобы

$$[\vec{M}, H] = 0, \qquad (4.1)$$

где

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + V(\vec{r}) \quad - \qquad (4.2)$$

полный гамильтониан. Из (4.1) и (4.2) получаем

$$[(\vec{r} \times \vec{p})_i , V(\vec{r})] = 0 .$$

Отсюда следует, что*

$$e_{ik\ell}\, r_k \frac{\partial V}{\partial r_\ell} = 0 \quad .$$

Для того, чтобы выполнялось это соотношение, необходимо, чтобы потенциал зависел только от модуля расстояния между частицами

$$V = V(r) . \qquad (4.3)$$

Посмотрим теперь какие ограничения на матричный элемент

$$T_{\vec{p}';\vec{p}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\vec{p}'\vec{r}}\, T(\vec{r})\, e^{i\vec{p}\vec{r}}\, d\vec{r} \qquad (4.4)$$

---

*Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

накладывает сохранение момента. Напомним, что

$$T(\vec{r}) = V(r) + V(r)\,\frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0(\vec{r}) + i\varepsilon}\,V(r) + \ldots \tag{4.5}$$

Совершим поворот системы отсчета. Координаты одной и той же точки в повернутой и исходной системах связаны преобразованием

$$r_i' = a_{ik} r_k \,. \tag{4.6}$$

При этом из условия $r_i'^2 = r_k^2$ (длина вектора при повороте не меняется) следует, что

$$a_{ik} a_{i\ell} = \delta_{k\ell} \,. \tag{4.7}$$

Из (4.6) и (4.7) получаем обратное к (4.6) преобразование

$$r_k = a_{ik} r_i' \,. \tag{4.8}$$

В силу сохранения момента

$$V(r) = V(r') \,. \tag{4.9}$$

Далее из (4.6) и (4.7) получаем

$$\mathcal{H}_0(\vec{r}) = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial r^2} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial r'^2} = \mathcal{H}_0(\vec{r}\,'). \tag{4.10}$$

Из (4.5), (4.10) и (4.9) очевидно, что

$$T(\vec{r}) = T(\vec{r}\,') \,. \tag{4.11}$$

Далее имеем

$$\vec{p}\,\vec{r} = \vec{p}_R \vec{r}\,' \,, \qquad \vec{p}\,'\vec{r} = \vec{p}\,'_R \vec{r}\,',$$

где

$$(\vec{p}_R)_i = a_{ik} p_k \,, \quad (\vec{p}\,'_R)_i = a_{ik} p_k' \,.$$

Используя (4.4) и (4.11), а также учитывая, что $d\vec{r} = d\vec{r}\,'$, окончательно получаем

$$T_{\vec{p}\,';\vec{p}} = T_{\vec{p}\,'_R;\vec{p}_R} \,. \tag{4.12}$$

Это соотношение означает, что матричный элемент $T_{\vec{p}';\vec{p}}$ зависит только от скаляров, которые могут быть построены из $\vec{p}$ и $\vec{p}'$. Очевидно, что из $\vec{p}$ и $\vec{p}'$ могут быть построены два скаляра: $\vec{p}^2 = \vec{p}'^2$ и $\vec{p}\vec{p}'$. Таким образом, из сохранения момента (инвариантности относительно вращений) следует, что

$$T_{\vec{p};\vec{p}'} = T(\vec{p}^2, \vec{p}\cdot\vec{p}') , \qquad (4.13)$$

т.е., что матричный элемент $T_{\vec{p};\vec{p}'}$ зависит от энергии и косинуса угла рассеяния θ (угла между $\vec{p}$ и $\vec{p}'$) в СЦИ.

Теперь мы получим выражение для волновой функции задачи рассеяния. Очевидно, что зависимость от координаты центра инерции $\vec{R}$ дается $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{P}\vec{R}}$. Нас будет интересовать функция $\psi(\vec{r})$, описывающая относительное движение частиц. При $t \to -\infty$ рассматриваемая нами система описывается плоской волной

$$\psi_{\vec{p}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\vec{r} - iE_p t} .$$

В произвольный момент времени t имеем (см.(2.7))

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{r},t) = \int a_{\vec{p}'}(t) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}'\vec{r} - iE_{p'}t} d\vec{p}' , \qquad (4.14)$$

где функция $a_{\vec{p}'}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial a_{\vec{p}'}(t)}{\partial t} = \int V_{\vec{p}';\vec{p}''}(t)\, a_{\vec{p}''}(t)\, d\vec{p}'' . \qquad (4.15)$$

Учитывая начальное условие $a_{\vec{p}'}(-\infty) = \delta(\vec{p}'-\vec{p})$, из (2.19) находим, что решение этого уравнения (в виде ряда теории возмущений по потенциалу) имеет вид

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}'}(t) = \delta(\vec{p}'-\vec{p}) + (-i)\int_{-\infty}^{t} e^{-i(E_p - E_{p'})t_1} V_{\vec{p}';\vec{p}}\, dt_1 + \\ + (-i)^2 \int d\vec{p}_1 \int_{-\infty}^{t} e^{-i(E_{p_1}-E_{p'})t_1} V_{\vec{p}';\vec{p}_1} \int_{-\infty}^{t_1} V_{\vec{p}_1;\vec{p}}\, e^{-i(E_p - E_{p_1})t_2} dt_2 + \ldots \end{aligned} \qquad (4.16)$$

Повторяя те же выкладки, что и во втором параграфе и используя процедуру адиабатического выключения взаимодействия на бесконечности, из (4.16) получаем

$$a_{\vec{p}'}(t) = \delta(\vec{p}'-\vec{p}) + \frac{e^{-i(E_p-E_{p'})t}}{E_p-E_{p'}+i\varepsilon}\left[V_{\vec{p}';\vec{p}} + \int V_{\vec{p}';\vec{p}_1}\frac{1}{E_p-E_{p_1}+i\varepsilon}V_{\vec{p}_1;\vec{p}}\,d\vec{p}_1 + \right.$$
$$\left. + \ldots\right].$$

Выражение в скобках представляет собой матричный элемент T -матрицы. Таким образом, имеем

$$a_{\vec{p}'}(t) = \delta(\vec{p}'-\vec{p}) + \frac{e^{-i(E_p-E_{p'})t}}{E_p-E_{p'}+i\varepsilon}\,T_{\vec{p}';\vec{p}}\,. \tag{4.17}$$

Для волновой функции $\psi_{\vec{p}}(\vec{r},t)$ получаем, следовательно, выражение

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-iE_pt}\left[e^{i\vec{p}\vec{r}} + \int\frac{T_{\vec{p}';\vec{p}}\,e^{i\vec{p}'\vec{r}}\,d\vec{p}'}{E_p-E_{p'}+i\varepsilon}\right]. \tag{4.18}$$

Итак, волновая функция задачи рассеяния определяется интегралом, в который входит матричный элемент $T_{\vec{p}';\vec{p}}$. Мы видели, что матричные элементы T -матрицы входят также в выражение для $S_{\bar{p}';\bar{p}}$ и в сечение рассеяния. Подчеркнем, что в сечение рассеяния входят величины $T_{\vec{p}';\vec{p}}$ при $|\vec{p}'|=|\vec{p}|$ (закон сохранения энергии). Интегрирование в (4.18) проводится при всех возможных $\bar{p}'$. Покажем теперь, что асимптотика функции $\psi(\bar{r},t)$ при $r\to\infty$ определяется $T_{\bar{p}';\bar{p}}$ при $|\bar{p}'|=|\bar{p}|$. Направим ось z по $\vec{r}$. Находим

$$\int\frac{e^{i\vec{p}'\vec{r}}\,T_{\bar{p}';\bar{p}}\,d\bar{p}'}{E_p-E_{p'}+i\varepsilon} = \int_{-1}^{1}dx\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}\frac{e^{ip'rx}\,T_{\vec{p}';\vec{p}}\,p'^2dp'}{E_p-E_{p'}+i\varepsilon}, \tag{4.19}$$

где $x=\cos\theta$. Интегрирование по x проведем по частям. Полагая при этом, что $dv = e^{ip'rx}dx$, а все остальные множители в (4.19) равны u, имеем

$$v = \frac{1}{ip'r}\,e^{ip'rx}.$$

Член (uv) содержит, следовательно, $\frac{1}{r}$. Второй член представляет собой интеграл вида

$$\int \frac{1}{ip'r} e^{ip'rx} \frac{du}{dx} dx \quad .$$

Этот интеграл опять будем вычислять по частям, полагая, что $dv = e^{ip'rx}dx$. При этом слагаемое (uv) содержит $\frac{1}{r^2}$. Продолжая эту процедуру, мы получим, таким образом, разложение исходного интеграла в ряд по $1/r$. Учитывая, что

$$\vec{p}' = p'\cos\theta\,\vec{r}_0 + p'\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + p'\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} \quad ,$$

($\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$) для интересующего нас первого члена разложения ($1/r$ - члена), получаем

$$\int \frac{e^{i\vec{p}'\vec{r}} T_{\vec{p}';\vec{p}}\, d\vec{p}'}{E_p - E_{p'} + i\varepsilon} = \frac{1}{ir}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{\left(e^{ip'r} T_{p'\vec{r}_0;\vec{p}} - e^{-ip'r} T_{-p'\vec{r}_0;\vec{p}}\right)}{E_p - E_{p'} + i\varepsilon} p' dp' \tag{4.20}$$

$$+ O(1/r^2) = \frac{2\pi}{ir}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip'r}\, T_{p'\vec{r}_0;\vec{p}}}{E_p - E_{p'} + i\varepsilon} p' dp' + O(1/r^2).$$

Теперь проинтегрируем по p'. Полюса знаменателя в интеграле (4.20) расположены в точках

$$p' = \pm (p^2 + 2\mu\varepsilon i)^{1/2} \simeq \pm p\left(1 + \frac{\mu\varepsilon}{p^2} i\right).$$

Далее нетрудно видеть, что интеграл по оси абсцисс от $-\infty$ до ∞ можно заменить интегралом по контуру в плоскости комплексной переменной p', изображенному на рис.2 при $R \to \infty$

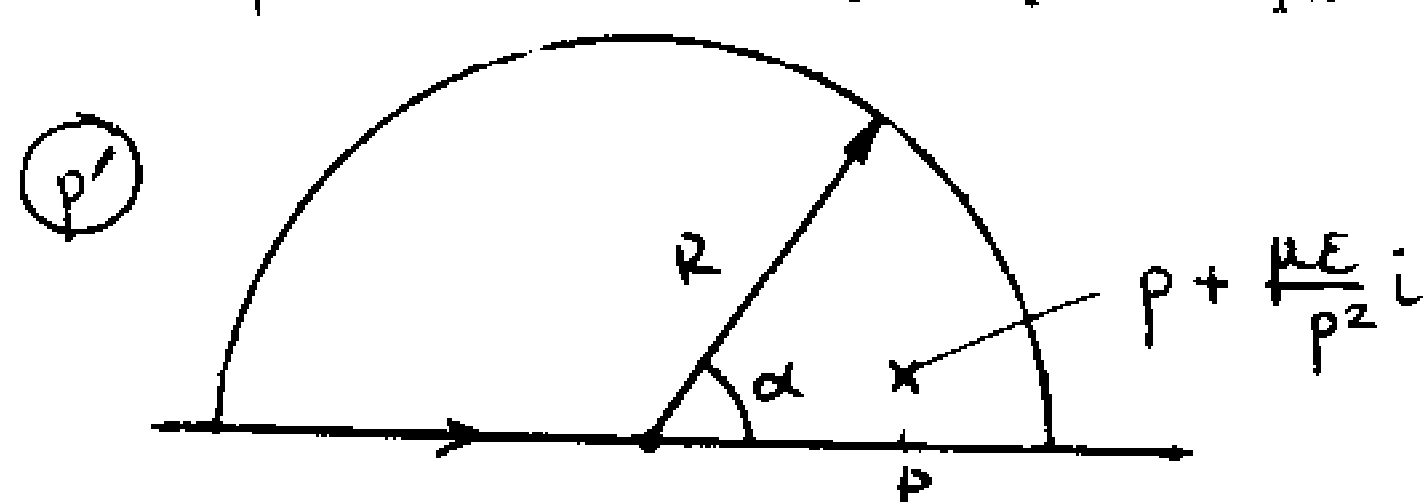

Рис.2. Контур интегрирования в плоскости комплексного p'

Действительно, на полуокружности $p' = R\cos\alpha + iR\sin\alpha$ ($0 < \alpha < \pi$) и так как $r > 0$, то $e^{ip'r} \to 0$ при $R \to \infty$. Вклад интеграла по полуокружности стремится, следовательно, к нулю. Вычисляя вычет в полюсе, для главного члена разложения по $1/r$ получаем следующее выражение:

$$\int \frac{e^{i\vec{p}'\vec{r}}\, T_{\vec{p}';\vec{p}}\, d\vec{p}'}{E_p - E_{p'} + i\varepsilon} = -(2\pi)^2 \mu\, T_{p\vec{k}_0;\vec{p}}\; e^{ipr}/r \,. \quad (4.21)$$

Окончательно из (4.18) и (4.21) получаем следующее выражение для асимптотики ($r\to\infty$) волновой функции рассматриваемой нами системы:

$$\Psi_{\vec{p}}(\vec{r},t)\underset{r\to\infty}{=} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iE_p t}\left[e^{i\vec{p}\vec{r}} + f(\theta)\, e^{ipr}/r\right], \quad (4.22)$$

где

$$f(\theta) = -(2\pi)^2 \mu\, T_{\vec{p}';\vec{p}} \,, \quad \vec{p}' = p\vec{r}_0. \quad (4.23)$$

Итак, мы показали, что волновая функция $\Psi_{\vec{p}}(\vec{r},t)$ представляет собой при $r\to\infty$ сумму описывающей начальные частицы плоской волны и расходящейся волны, описывающей рассеянные частицы.

Коэффициент при расходящейся волне определяется матричным элементом T -матрицы. Подчеркнем при этом, что $|\vec{p}'| = |\vec{p}|$. Таким образом, асимптотику волновой функции определяют только такие матричные элементы T -матрицы, которые отвечают закону сохранения энергии. Очевидно, что мы получили правильную асимптотику функции, рассматриваемой задачи рассеяния (рассеянные частицы при $r\to\infty$ должны описываться расходящейся волной). Из проделанного вывода ясно, что расходящаяся волна возникла из-за обхода полюса в интеграле (4.20) ($+i\varepsilon$ в знаменателе). Тем самым мы получим дополнительное обоснование правильности процедуры адиабатического выключения взаимодействия на бесконечности.

Обычно сечение в СЦИ определяют как отношение числа рассеянных частиц, проходящих за единицу времени через ортогональную $\vec{r}$ площадку dS ($r\to\infty$) к потоку падающих частиц. Имеем

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^3} v \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} dS \Big/ \frac{1}{(2\pi)^3} v = |f(\theta)|^2 d\Omega \,.$$

Таким образом,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2. \quad (4.24)$$

С помощью (4.23), нетрудно убедиться в том, что (4.24) совпадает с выражением (4.9), полученным нами из общего определения сечения.

Величина $f(\theta)$ носит название амплитуды рассеяния. Из закона сохранения момента следует, что амплитуда рассеяния зависит от энергии и косинуса угла рассеяния (угол между $\vec{p}$ и $\vec{p}\,'$) в СЦИ. Очевидно также, что амплитуда рассеяния имеет размерность L.

В этом параграфе мы ограничились рассмотрением рассеяния бесспиновых частиц. Основываясь на инвариантности относительно вращений (сохранении момента), мы показали, что матричные элементы $T_{\vec{p}\,';\vec{p}}$ зависят только от скалярных произведений $\vec{p}\,'^2=\vec{p}^{\,2}$ и $\vec{p}\,'\vec{p}$. Была получена асимптотика точной функции рассматриваемой нами задачи рассеяния при $r \to \infty$ и найдена связь амплитуды рассеяния с матричным элементом T -матрицы.

§ 5. Уравнение Липпмана-Швингера. Связь амплитуды рассеяния с потенциалом

В этом параграфе мы получим (в различных формулировках) интегральные уравнения, которым удовлетворяют функции, описывающие задачу рассеяния. Будут получены также соотношения между амплитудой рассеяния и потенциалом. Все полученные здесь уравнения и соотношения являются точными. Они позволяют наиболее адэкватным способом сформулировать задачу рассеяния и хорошо приспособлены для приближенного решения этой задачи.

Функция $\Psi_{\vec{p}}(\vec{r},t)$ при всех значениях $\vec{r}$ имеет вид (см. 4.18)

$$\Psi_{\vec{p}}(\vec{r},t) = e^{-iE_p t}\,\psi^{(+)}_{\vec{p}}(\vec{r}) \,, \tag{5.1}$$

где

$$\psi^{(+)}_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[e^{i\vec{p}\vec{r}} + \int \frac{e^{i\vec{p}\,'\vec{r}}\,T_{\vec{p}\,';\vec{p}}\,d\vec{p}\,'}{E_p - E_{p'} + i\varepsilon}\right]. \tag{5.2}$$

Далее, поскольку функция $\Psi_{\vec{p}}(\vec{r},t)$ является решением уравнения Шредингера, то

$$(\mathcal{H}_0 + V)\,\psi^{(+)}_{\vec{p}} = E_p\,\psi^{(+)}_{\vec{p}}\,. \tag{5.3}$$

Таким образом, E_p - собственное значение полного гамильтониана. С другой стороны, $E_p = \frac{p^2}{2\mu}$ является собственным значением свободного гамильтониана $\mathcal{H}_0$. Полный гамильтониан помимо положительных собственных значений может иметь и отрицательные (связанные состояния). Из (5.3) следует, что использованное нами адиабатическое приближение применимо в том случае, если непрерывная часть спектра полного гамильтониана совпадает со спектром свободного гамильтониана.

Функция $\psi^{(+)}_{\vec{p}}(\vec{r})$ удовлетворяет точному уравнению Шредингера (5.3) и, как мы видели в параграфе 4, имеет асимптотику (при $r \to \infty$) падающая плоская плюс расходящаяся рассеянная волна. Получим теперь для функции $\psi^{(+)}_{\vec{p}}(\vec{r})$ интегральное уравнение, включающее граничное условие при $r \to \infty$.

Напомним, что T -матрица дается рядом

$$T = V + V \frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0 + i\varepsilon}\left[V + V \frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0 + i\varepsilon} V + \ldots\right]$$

и удовлетворяет уравнению

$$T = V + V \frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0 + i\varepsilon} T \quad . \tag{5.4}$$

Для матричного элемента T -матрицы имеем

$$T_{\vec{p}';\vec{p}} = (\phi^+_{\vec{p}'} T \phi_{\vec{p}}) = \left(\phi^+_{\vec{p}'} V \left(1 + \frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0 + i\varepsilon} T\right) \phi_{\vec{p}}\right), \tag{5.5}$$

где

$$\phi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\vec{r}} \ .$$

Нетрудно видеть, что

$$\psi^{(+)}_{\vec{p}} = \left(1 + \frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0 + i\varepsilon} T\right) \phi_{\vec{p}} \quad . \tag{5.6}$$

Действительно, используя полноту функций $\phi_{\vec{p}}$ имеем

$$T \phi_{\vec{p}} = \int \phi_{\vec{p}'} \left(\phi^+_{\vec{p}'} T \phi_{\vec{p}}\right) d\vec{p}\,' \ .$$

Далее, учитывая (2.32) и (5.2), получаем

$$\left(1+\frac{1}{E_p-\mathcal{H}_0+i\varepsilon}T\right)\varphi_{\vec p}=\varphi_{\vec p}+\int\frac{\varphi_{\vec p'}T_{\vec p';\vec p}\,d\vec p'}{E_p-E_{p'}+i\varepsilon}=\Psi^{(+)}_{\vec p}\,.$$

Из (5.5) находим

$$T_{\vec p';\vec p}=\left(\varphi^{+}_{\vec p'}\,V\,\Psi^{(+)}_{\vec p}\right)\equiv\int\varphi^{+}_{\vec p'}(\vec r)\,V(\vec r)\,\Psi^{(+)}_{\vec p}(\vec r)\,d\vec r\,. \qquad (5.7)$$

Таким образом, матричный элемент T -матрицы дается матричным элементом потенциала взаимодействия (с $\varphi_{\vec p'}$ в качестве конечной функции и $\Psi^{(+)}_{\vec p}$ в качестве начальной функции).

Подставим теперь выражение (5.7) в (5.2). Получаем

$$\Psi^{(+)}_{\vec p}(\vec r)=\varphi_{\vec p}(\vec r)+\int G_+(\vec r-\vec r')\,V(\vec r')\,\Psi^{(+)}_{\vec p}(\vec r')\,d\vec r', \qquad (5.8)$$

где

$$G_+(\vec r-\vec r')=\int\frac{\varphi_{\vec p'}(\vec r)\,\varphi_{\vec p'}(\vec r')\,d\vec p'}{E_p-E_{p'}+i\varepsilon}\,. \qquad (5.9)$$

Нетрудно видеть, что*

$$(\mathcal{H}_0-E_p)\,G_+(\vec r-\vec r')=-\delta(\vec r-\vec r')\,. \qquad (5.10)$$

Функция $G_+(\vec r-\vec r')$ является, следовательно, функцией Грина.

Интеграл (5.9) нетрудно вычислить. Имеем

$$G_+(\vec r-\vec r')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\vec p'(\vec r-\vec r')}\,d\vec p'}{E_p-E_{p'}+i\varepsilon}.$$

Направим ось z по $\vec r-\vec r'$ и перейдем к сферическим переменным ($\vec p'(\vec r-\vec r')=p'|\vec r-\vec r'|\cos\theta,\ d\vec p'=p'^2dp'\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$). Интегрирование по θ и φ выполняется без труда. Получаем

---

* Чтобы в этом убедиться, нужно воспользоваться известным соотношением $\dfrac{1}{z-z'+i\varepsilon}=P\dfrac{1}{z-z'}-i\pi\delta(z-z')$.

$$G_+(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{-i}{(2\pi)^2}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ip'|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{E_p-E_{p'}+i\varepsilon}\,dp' .$$

Интегрирование по p' также легко выполнить. Очевидно, что интеграл по p' от $-\infty$ до $+\infty$ можно заменить интегралом по контуру, расположенному в верхней полуплоскости комплексной переменной p' при $R\to\infty$ (рис.2). Вычисляя вычет в полюсе $p'=p+i\frac{\mu\varepsilon}{p}$, (и полагая после интегрирования $\varepsilon = 0$) для функции Грина получаем

$$G_+(|\vec{r}-\vec{r}\,'|) = -\frac{\mu}{2\pi}\;\frac{e^{ip|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} . \tag{5.11}$$

Уравнение (5.8) представляет собой интегральное уравнение для функции $\psi^{(+)}_{\vec{p}}$. Это уравнение носит название уравнения Липпмана-Швингера. Преимущество уравнения Липпмана-Швингера перед дифференциальным уравнением (5.3) состоит в том, что оно включает граничные условия на бесконечности. Полезно привести также уравнение Липпмана-Швингера в операторном виде.

Имеем

$$\psi^{(+)}_{\vec{p}} = \left(1+\frac{1}{E_p-\mathcal{H}_0+i\varepsilon}T\right)\varphi_{\vec{p}} .$$ С другой стороны,

$T=V\left(1+\frac{1}{E_p-\mathcal{H}_0+i\varepsilon}T\right)$. Таким образом, $\psi^{(+)}_{\vec{p}}=\varphi_{\vec{p}}+\frac{1}{E_p-\mathcal{H}_0+i\varepsilon}V\psi^{(+)}_{\vec{p}}$.

Теперь мы приведем другую альтернативную формулировку задачи рассеяния.

Рассмотрим опять ряд, которым определяется T -матрица

$$T = V + V\frac{1}{E_{p'}-\mathcal{H}_0+i\varepsilon}V + \dots =$$

$$= V + \left(V + V\frac{1}{E_{p'}-\mathcal{H}_0+i\varepsilon}V+\dots\right)\frac{1}{E_{p'}-\mathcal{H}_0+i\varepsilon}V .$$

Из этого выражения очевидно, что T -матрица (наряду с (5.4) удовлетворяет также уравнению

$$T = V + T\frac{1}{E_{p'}-\mathcal{H}_0+i\varepsilon}V . \tag{5.12}$$

Получим выражение для матричного элемента $T_{\vec{p}\,';\vec{p}}$. Из (5.12) имеем

$$T_{\vec{p}\,';\vec{p}} = \left(\psi^{(-)+}_{\vec{p}\,'}V\varphi_{\vec{p}}\right), \tag{5.13}$$

где

$$\psi^{(-)+}_{\vec{p}'} = \phi^{+}_{\vec{p}'}\left(1 + T\frac{1}{E_{p'} - \mathcal{H}_0 + i\varepsilon}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\psi^{(-)}_{\vec{p}'} = \phi_{\vec{p}'} + \frac{1}{E_{p'} - \mathcal{H}_0 - i\varepsilon} T^{+} \phi_{\vec{p}'} . \qquad (5.14)$$

Учитывая, что

$$T^{+}\phi_{\vec{p}'} = \int \phi_{\vec{p}} \left(\phi^{+}_{\vec{p}} T^{+} \phi_{\vec{p}'}\right) d\vec{p} = \int \phi_{\vec{p}} T^{*}_{\vec{p}';\vec{p}} \, d\vec{p},$$

из (5.14) получаем следующее выражение для функции $\psi^{(-)}_{\vec{p}'}(\vec{r})$:

$$\psi^{(-)}_{\vec{p}'}(\vec{r}) = \phi_{\vec{p}'}(\vec{r}) + \int \frac{\phi_{\vec{p}}(\vec{r})\, T^{*}_{\vec{p}';\vec{p}} \, d\vec{p}}{E_{p'} - E_{p} - i\varepsilon} . \qquad (5.15)$$

Найдем асимптотику функции $\psi^{(-)}_{\vec{p}'}(\vec{r})$ при $r \to \infty$. Существенное отличие (5.15) от (5.2) состоит в том, что в этих выражениях знаки перед $i\varepsilon$ разные. В результате при вычислении интеграла (5.15) вычет необходимо вычислять в точке $p = -p' + \frac{\mu\varepsilon i}{p'}$. Для асимптотики функции $\psi^{(-)}_{\vec{p}'}(\vec{r})$ получаем

$$\psi^{(-)}_{\vec{p}'}(\vec{r}) \simeq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[e^{i\vec{p}'\vec{r}} - (2\pi)^2 \mu T_{\vec{p}';-p\vec{r}_0} \, e^{-ip'r}/r\right], \qquad (5.16)$$

$$r \to \infty, \quad \left(\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right).$$

Таким образом, функция $\psi^{(-)}_{\vec{p}'}(\vec{r})$ при $r \to \infty$ представляет собой сумму плоской и сходящейся волны.

Подставим теперь (5.13) в (5.15). Получаем интегральное уравнение Липпмана-Швингера для функции $\psi^{(-)}_{\vec{p}'}$:

$$\psi^{(-)}_{\vec{p}'}(\vec{r}) = \phi_{\vec{p}'}(\vec{r}) + \int G_{-}(\vec{r} - \vec{r}')V(\vec{r}')\psi^{(-)}_{\vec{p}'}(\vec{r}')d\vec{r}' . \qquad (5.17)$$

Здесь

$$G_{-}(\vec{r} - \vec{r}') = \int \frac{\phi_{\vec{p}}(\vec{r})\phi^{*}_{\vec{p}}(\vec{r}')\, d\vec{p}}{E_{p'} - E_{p} - i\varepsilon} \qquad (5.18)$$

— функция Грина. Интеграл (5.18) легко вычисляется. Получаем

$$G_-(|\vec r-\vec r'|) = -\frac{\mu}{2\pi}\,\frac{e^{-ip'|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|} \quad . \tag{5.19}$$

Далее нетрудно видеть, что функция $G_-(\vec r-\vec r')$ удовлетворяет уравнению

$$(\mathcal{H}_0 - E_{p'})\,G_-(\vec r-\vec r') = -\,\delta(\vec r-\vec r') \quad . \tag{5.20}$$

Из (5.17) и (5.20) следует, что функция $\psi^{(-)}_{\vec p}(\vec r)$ является решением точного уравнения Шредингера

$$(\mathcal{H}_0 + V)\,\psi^{(-)}_{\vec p'} = E_{\vec p'}\psi^{(-)}_{\vec p'} \quad . \tag{5.21}$$

Итак, мы показали, что волновая точная функция задачи рассеяния удовлетворяет интегральному уравнению Липпмана-Швингера. Если эта функция известна в области действия потенциала, то с помощью соотношения (5.7) можно вычислить матричный элемент T -матрицы и, следовательно, амплитуду рассеяния. Мы ввели также функцию $\psi^{(-)}_{\vec p'}(\vec r)$, имеющую асимптотику плоская плюс сходящаяся волна. Эта функция удовлетворяет интегральному уравнению (5.17). С помощью функции $\psi^{(-)}_{\vec p'}(\vec r)$ может быть также вычислен матричный элемент T -матрицы (соотношение (5.13).

§ 6. Унитарность S -матрицы. Оптическая теорема

Во втором параграфе мы показали, что в представлении взаимодействия волновая функция $a(t)$ удовлетворяет уравнению

$$i\,\frac{\partial a(t)}{\partial t} = V(t)\,a(t) \quad . \tag{6.1}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$a(t) = \mathcal{U}(t,t_0)\,a(t_0) \quad , \tag{6.2}$$

где $a(t_0)$ — заданная начальная функция, $\mathcal{U}(t,t_0)$ — оператор (мы получили выражение для этого оператора в виде ряда теории возмущений по потенциалу (см.(2.19)). Напомним, что S -матрица определяется следующим образом:

$$S = \mathcal{U}(\infty,-\infty) \quad . \tag{6.3}$$

Нетрудно видеть, что оператор $u(t,t_0)$ и, следовательно, S -матрица унитарны. Действительно, из (6.I) путем эрмитова сопряжения получаем

$$-i\frac{\partial a^+(t)}{\partial t} = a^+(t)V(t). \qquad (6.4)$$

($V(t)$ - эрмитов оператор). Умножая далее (6.I) слева на $a^+(t)$, а (6.4) справа на $a(t)$ и вычитая из первого полученного таким способом соотношения второе, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\, a^+(t)a(t) = 0\,. \qquad (6.5)$$

Соотношение (6.5) означает, что полная вероятность $a^+(t)a(t)$ не зависит от времени. Таким образом,

$$a^+(t)a(t) = a^+(t_0)a(t_0). \qquad (6.6)$$

Используя (6.2), получаем

$$a^+(t_0)\,u^+(t,t_0)\,u(t,t_0)\,a(t_0) = a^+(t_0)\,a(t_0). \qquad (6.7)$$

Поскольку $a(t_0)$ - произвольная заданная начальная функция, то отсюда находим, что

$$u^+(t,t_0)\,u(t,t_0) = 1 \qquad (6.8$$

и, следовательно, S -матрица унитарный оператор

$$S^+S = 1\,. \qquad (6.9)$$

Из унитарности S -матрицы следует важное соотношение, связывающее мнимую часть амплитуды рассеяния на нулевой угол, с полным сечением рассеяния - так называемая оптическая теорема. К получению оптической теоремы мы теперь и перейдем.
Из (6.8) находим

$$\int S^*_{\vec{p}'';\vec{p}'}\, S_{\vec{p}'';\vec{p}}\, d\vec{p}'' = \delta(\vec{p}'-\vec{p})\;, \qquad (6.10)$$

где $\vec{p}$, $\vec{p}'$ и $\vec{p}''$ - относительные импульсы. Вспомним теперь соотношение, связывающее матричный элемент S -матрицы с матричным элементом T -матрицы. Имеем (см.(3.I))

$$S_{\vec{p}'';\vec{p}} = \delta(\vec{p}''-\vec{p}) - 2\pi i\,\delta(E_{p''}-E_p)\,T_{\vec{p}'';\vec{p}}\,. \qquad (6.11)$$

Подставляя (6.II) в (6.IO), находим

$$-2\pi i\delta(E_{p'}-E_p)T_{\vec p';\vec p}+2\pi i\delta(E_p-E_{p'})T^*_{\vec p;\vec p'}=$$
$$=-(2\pi)^2\int T^*_{\vec p'';\vec p'}T_{\vec p'';\vec p}\,\delta(E_{p''}-E_{p'})\delta(E_{p''}-E_p)d\vec p''. \tag{6.12}$$

Очевидно, что $d\vec p''=\mu p''dE_{p''}d\Omega''$. Интегрируя по $E_{p''}$ и $E_{p'}$, из (6.12) получаем

$$i(-T^*_{\vec p;\vec p'}+T_{\vec p';\vec p})=+2\pi\mu p\int T^*_{\vec p'';\vec p'}T_{\vec p'';\vec p}\,d\Omega''. \tag{6.13}$$

Подчеркнем, что $|\vec p''|=|\vec p'|=|\vec p|$, т.е. в (6.13) входят матричные элементы T -матрицы, отвечающие закону сохранения энергии. Из инвариантности относительно вращений следует, что матричный элемент $T_{\vec p';\vec p}$ зависит от $\vec p\cdot\vec p'$ и $\vec p'^2=\vec p^2$ (см.§ 4). Таким образом,

$$T_{\vec p;\vec p'}=T_{\vec p';\vec p}. \tag{6.14}$$

Далее, как мы показали, амплитуда рассеяния связана с матричным элементом T -матрицы соотношением

$$f(\theta_{\vec p'';\vec p})=-(2\pi)^2\mu T_{\vec p'';\vec p}, \tag{6.15}$$

где $\theta_{\vec p'';\vec p}$ - угол между импульсами $\vec p''$ и $\vec p$. Из (6.13), (6.14) получаем следующее соотношение:

$$\operatorname{Im}f(\theta_{\vec p';\vec p})=\frac{p}{4\pi}\int f^*(\theta_{\vec p'';\vec p'})f(\theta_{\vec p'';\vec p})d\Omega''. \tag{6.16}$$

Векторы $\vec p$, $\vec p'$ и $\vec p''$ изображены на рис.3. В (6.16) по всем направлениям вектора $\vec p''$ проводится интегрирование. Векторы $\vec p$ и $\vec p'$ фиксированы.

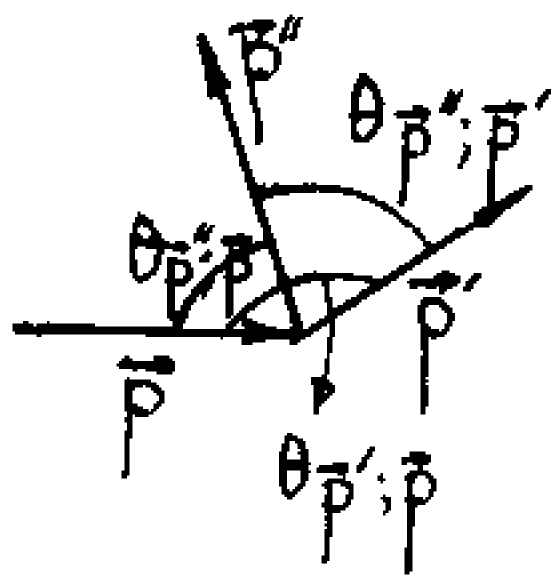

Рис. 3

Итак, унитарность S -матрицы приводит к интегральному соотношению (6.16) для амплитуды рассеяния. Это соотношение должно учитываться при анализе экспериментальных данных. Оптическая теорема является частным случаем (6.5). Положим $\vec p'=\vec p$. Из

(6.16) получаем

$$\operatorname{Im} f(0) = \frac{p}{4\pi}\sigma \;, \tag{6.17}$$

где $\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega$ - полное сечение рассеяния.

Оптическая теорема широко используется при анализе процессов рассеяния. Отметим очевидное применение соотношения (6.17). Сечение рассеяния под нулем получается путем экстраполяции значений сечения, измеренных в области малых углов. Оптическая теорема позволяет получить нижнюю границу сечения. Действительно, имеем

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\theta=0} = \left(\operatorname{Im} f(0)\right)^2 + \left(\operatorname{Re} f(0)\right)^2 \geqslant \left(\frac{p}{4\pi}\sigma\right)^2. \tag{6.18}$$

Очевидно, что информация, которую дает оптическая теорема весьма важна при проведении процедуры экстраполяции.

Итак, в этом параграфе мы, во-первых, показали, что S -матрица унитарна. И, во-вторых, получили вытекающее из унитарности S -матрицы соотношение для амплитуды рассеяния, частным случаем которого является оптическая теорема.

§ 7. Диаграммы Фейнмана. Борновское приближение

Основная задача теории рассеяния - вычисление амплитуды рассеяния $f(\theta)$. Амплитуда рассеяния связана с матричным элементом T -матрицы соотношением

$$f(\theta) = -(2\pi)^2 \mu\, T_{\vec p\,';\vec p} \;.$$

Для T -матрицы мы получили выражение в виде ряда теории возмущений

$$T = V + V\frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0 + i\varepsilon}V + V\frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0 + i\varepsilon}V\frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0 + i\varepsilon}V + \ldots \tag{7.1}$$

Для матричного элемента $T_{\vec p\,';\vec p}$ находим из (7.1)

$$T_{\vec p\,';\vec p} = V_{\vec p\,';\vec p} + \int V_{\vec p\,';\vec p_1}\frac{1}{E_p - E_{p_1} + i\varepsilon}V_{\vec p_1;\vec p}\, d\vec p_1 + \tag{7.2}$$

$$+ \int V_{\vec p\,';\vec p_1}\frac{1}{E_p - E_{p_1} + i\varepsilon}V_{\vec p_1;\vec p_2}\frac{1}{E_p - E_{p_2} + i\varepsilon}V_{\vec p_2;\vec p}\, d\vec p_1 d\vec p_2 + \ldots \;.$$

Члены ряда (7.2) имеют ясную структуру и строятся из одних и тех же элементов - матричных элементов потенциала и множителей $1/(E_p - E_{p_k} + i\varepsilon)$. Каждый последующий член ряда отличается от предыдущего добавлением такого множителя и матричного элемента потенциала, а также дополнительным интегрированием по "внутренней" переменной. Это наводит на мысль о том, что членам ряда (7.2) можно поставить в соответствие рисунки, которые строятся из малого числа основных элементов. Первому члену ряда (7.I) поставим в соответствие рис.4

Рис.4. Диаграмма Фейнмана. Первый порядок

Начальной и конечной частицам (очевидно, что рассеяние двух частиц сводится к рассеянию на внешнем поле (потенциале) одной частицы) отвечают входящая и выходящая линии, которым приписаны, соответственно, импульсы $\vec p$ и $\vec p\,'$. Матричному элементу потенциала отвечает крестик на рис.4. Второму члену ряда (7.I) поставим в соответствие рис.5.

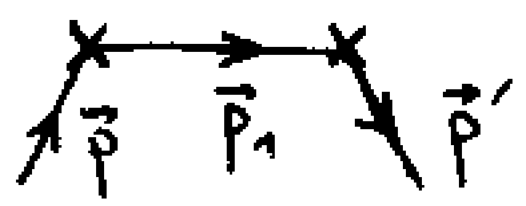

Рис.5. Диаграмма Фейнмана. Второй порядок

По сравнению с элементами, которые уже использовались на рис.4, здесь добавлена внутренняя линия, которой приписан импульс $\vec p_1$. Ей поставим в соответствие множитель $1/(E_p - E_{p_1} + i\varepsilon)$. Для того, чтобы получить второй член ряда (7.2) необходимо двигаться против стрелки на рис.5 и выписывать множители, отвечающие крестикам и внутренним линиям на рисунке: вначале пишем $V_{\vec p\,', \vec p_1}$ (первый крестик), затем $1/(E_p - E_{p_1} + i\varepsilon)$(внутренняя линия), затем $V_{\vec p_1, \vec p}$ (второй крестик). По импульсу, отвечающему внутренней линии, необходимо провести интегрирование.

Третьему члену ряда (7.2) ставится в соответствие рис.6. На этом рисунке новых элементов уже нет. По сравнению с рис.5 добавлена внутренняя линия и крестик. Правило получения третьего члена ряда (7.2) по рис.6 остается тем же: двигаемся против стрелки и выписываем члены, отвечающие крестикам и внутренним линиям. По импульсам, отвечающим внутренним линиям, проводится интегрирование.

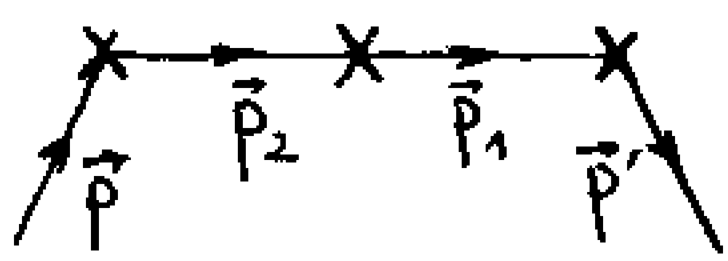

Рис.6. Диаграмма Фейнмана. Третий порядок

Рисунки 4-6 носят название диаграмм Фейнмана. Диаграммы Фейнмана позволяют наглядно представить члены ряда теории возмущений для T -матрицы (и, следовательно, процесс рассеяния). На рис.4 частица с импульсом $\vec{p}$ рассеялась на потенциале и перешла в конечное состояние с импульсом $\vec{p}'$ (первый порядок теории возмущений). На рис.5 частица вначале рассеялась на потенциале и перешла в состояние с импульсом $\vec{p}_1$. Импульс $\vec{p}_1$ является переменной интегрирования, $E_p \neq E_{p_1}$. Состояние с импульсом $\vec{p}_1$ называют виртуальным или промежуточным состоянием. Частица в виртуальном состоянии на рис.5 рассеялась на потенциале и перешла в конечное состояние с физическим импульсом $\vec{p}'$. Движению частицы в виртуальном состоянии отвечает функция распространения (пропагатор) $1/(E_p - E_{p_1} + i\varepsilon)$.

На рис.6 начальная частица рассеялась на потенциале и перешла в виртуальное состояние с импульсом $\vec{p}_1$. Затем двигалась в этом состоянии. Затем еще раз рассеялась на потенциале и перешла из виртуального состояния с импульсом $\vec{p}_1$ в виртуальное состояние с импульсом $\vec{p}_2$. Затем двигалась в виртуальном состоянии с импульсом $\vec{p}_2$. Наконец еще раз рассеялась на потенциале и перешла в конечное состояние с импульсом $\vec{p}'$.

Диаграммы Фейнмана позволяют легко учесть все возможности перехода частицы из начального состояния в конечное. За счет взаимодействия с потенциалом частица может перейти: 1) из начального состояния в конечное; 2) из начального состояния в виртуальное, промежуточное состояние; 3) из виртуального состояния в конечное состояние; 4) из виртуального состояния в другое виртуальное состояние. Первая возможность реализуется только на диаграмме рис.4. На диаграмме рис.5 реализуются возможности 2 и 3. На диаграмме рис.6 (и во всех последующих диаграммах, отвечающих следующим членам ряда теории возмущений) - возможности 2, 3 и 4.

Диаграммы Фейнмана играют огромную роль в квантовой теории поля, в которой в результате взаимодействия одна частица может превратиться в другую и при этом образуется третья частица. Возможностей перехода из начального состояния в конечное (которое чаще всего отличается от начального) в квантовой теории поля, как правило, много. Диаграммы Фейнмана позволяют легко и весьма наглядно учесть все разрешенные взаимодействием возможности перехода из начального состояния в конечное.

В рассматриваемом здесь случае рассеяния введение диаграмм Фейнмана не было, разумеется, обязательным. Однако принципы построения диаграмм в этом простейшем случае те же, что и в квантовой теории поля. Привыкать к диаграммам Фейнмана разумно уже в нерелятивистской теории рассеяния.

Ряд (7.2) носит название борновского ряда. Мы подробно рассмотрим теперь первый член ряда – первое борновское приближение. Для амплитуды рассеяния в первом борновском приближении из (7.2) получаем

$$f^{(1)}(\theta) = -(2\pi)^2 \mu \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\vec{q}\vec{r}} V(r) d\vec{r}\,, \qquad (7.3)$$

где $\vec{q} = \vec{p}\,' - \vec{p}$ – передача импульса.

Направим ось z по направлению вектора $\vec{q}$ и перейдем к сферическим координатам. Интегрирование по θ и ϕ выполняется без труда.

Получаем

$$f^{(1)}(\theta) = -2\mu \int_0^\infty \frac{\sin qr}{qr} V(r) r^2 dr. \qquad (7.4)$$

Очевидно, что

$$q = \sqrt{(\vec{p}\,' - \vec{p})^2} = 2p \sin \theta/2\,, \qquad (7.5)$$

где θ – угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{p}\,'$ (угол рассеяния).

Из (7.4) для дифференциального сечения рассеяния в СЦИ, получаем следующее выражение:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\mu^2 \left(\int_0^\infty \frac{\sin qr}{qr} V(r) r^2 dr \right)^2. \qquad (7.6)$$

Специфика первого борновского приближения определяется тем, что импульс, угол рассеяния и переменная r (расстояние между частицами) входят в интеграл (7.4) в комбинации $2p \sin\theta/2 \cdot r$.

Рассмотрим три случая рассеяния.

I. Рассеяние на нулевой угол. Положим в (7.4) $\theta = 0$. Получаем

$$f^{(1)}(0) = -2\mu \int_0^\infty V(r) r^2 dr. \qquad (7.7)$$

Очевидно, что амплитуда $f^{(1)}(0)$ конечна, если потенциал при $r \to \infty$ убывает быстрее, чем $1/r^3$.

Из (7.7) мы видим, что в первом борновском приближении амплитуда рассеяния под нулем не зависит от энергии. Это связано с тем, что при $\theta = 0$ передача импульса q также равна нулю (зависимость амплитуды $f^{(1)}$ от энергии входит через q). Теперь рассмотрим рассеяние на потенциале с конечным радиусом действия $\simeq a$.

2. Рассеяние при малых энергиях.

Предположим, что

$$pa \ll 1 \tag{7.8}$$

(длина волны $\lambda = \frac{1}{p}$ много больше размеров области, в которой потенциал отличен от нуля). В этом случае для дифференциального сечения рассеяния получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq 4\mu^2\left(\int_0^\infty V(r)r^2 dr\right)^2. \tag{7.9}$$

Итак, если выполняется условие (7.8), то в первом борновском приближении сечение рассеяния не зависит от энергии и угла. Мы покажем в дальнейшем, что это утверждение имеет место и при более общих условиях.

3. Рассеяние при высоких энергиях.

Предположим, что

$$pa \gg 1 \tag{7.10}$$

(длина волны много меньше размеров области, в которой потенциал отличен от нуля).

Если выполняется условие (7.10), то при достаточно большом угле рассеяния имеем также $qa \gg 1$. В этом случае $\sin qr$ много раз изменяет знак на расстоянии порядка a. Ясно, что амплитуда рассеяния при этом окажется близкой к нулю. Амплитуда рассеяния отлична от нуля, если

$$qa \lesssim 1 \quad . \tag{7.11}$$

Из (7.10) и (7.11) следует, что

$$\theta \lesssim \frac{1}{pa} \quad . \tag{7.12}$$

Для полного сечения рассеяния получаем в этом случае

$$\sigma \simeq 2\pi\int_0^{1/pa} \sigma(p\theta)\,\theta\, d\theta = \frac{2\pi}{p^2}\int_0^{1/a} \sigma(y)\,y\,dy = \frac{\ell}{E}$$

$(p\theta = y)$.

Таким образом, в первом борновском приближении полное сечение обратно пропорционально энергии.

Полезно вычислить амплитуду $f^{(1)}(\theta)$ в случае какого-либо конкретного потенциала. Рассмотрим юкавовский потенциал

$$V(r) = V_0 \frac{1}{r} e^{-r/a}, \tag{7.13}$$

где V_0 и a - параметры. Вычисление интеграла (7.4) не представляет труда. Находим

$$f^{(1)}(\theta) = -2\mu V_0 \frac{a^2}{1+(qa)^2}. \tag{7.14}$$

Отсюда для сечения рассеяния на юкавовском потенциале в первом борновском приближении получаем выражение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(4\mu^2 V_0^2 a^2\right) \frac{a^2}{\left(1+(qa)^2\right)^2}. \tag{7.15}$$

Вычислим полное сечение рассеяния

$$\sigma = \left(8\pi\mu^2 V_0^2 a^2\right) a^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\left(1+(qa)^2\right)^2}.$$

Удобно перейти к переменной $q^2 = 2p^2(1-\cos\theta)$. Имеем $dq^2 = 2p^2 \sin\theta\, d\theta$. Для полного сечения получаем следующее выражение:

$$\sigma = \left(8\mu^2 V_0^2 a^2\right) \pi a^2 \frac{1}{2p^2} \int_0^{4p^2} \frac{dq^2}{\left(1+(qa)^2\right)^2} = \tag{7.16}$$

$$= \left(16\mu^2 V_0^2 a^2\right) \frac{\pi a^2}{1+4p^2a^2}.$$

Радиус действия сил в случае потенциала Юкава $\sim a$. В области малых энергий ($pa \ll 1$) из (7.15) получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(4\mu^2 V_0^2 a^2\right) a^2. \tag{7.17}$$

Сечение рассеяния (как и утверждалось в п.2) при $pa \ll 1$ не зависит от энергии и угла рассеяния.

Рассмотрим теперь рассеяние при больших энергиях ($pa \gg 1$). Из (7.15) очевидно, что сечение рассеяния быстро падает с увеличением угла рассеяния (если обозначить $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{qa=0} = \sigma_0$, то $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{q=1} = \frac{1}{4}\sigma_0$, $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{q=2} = \frac{1}{25}\sigma_0, \dots$). Ясно, что $\theta \lesssim 1/pa$ (как и утверждалось в п.3 из общих качественных соображений).

Для полного сечения при $pa \gg 1$ из (7.16) получаем

$$\sigma \simeq \frac{b}{E}. \tag{7.18}$$

В заключение получим условия применимости первого борновского приближения. Рассмотрим уравнение (5.7) для функции $\psi^{(+)}_{\vec{p}}(\vec{r})$. Решение этого уравнения в виде ряда теории возмущений легко может быть получено методом итераций. Имеем

$$\psi^{(+)}_{\vec{p}}(\vec{r}) = \psi^{(0)}_{\vec{p}}(\vec{r}) + \psi^{(1)}_{\vec{p}}(\vec{r}) + \cdots, \tag{7.19}$$

где

$$\psi^{(0)}_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\vec{r}}, \quad \psi^{(1)}_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{-\mu}{(2\pi)^{5/2}} \int \frac{e^{ip|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(r') e^{i\vec{p}\vec{r}'} d\vec{r}', \tag{7.20}$$

Для того, чтобы было применено первое борновское приближение, необходимо чтобы второй член ряда (7.19) был мал по сравнению с первым членом

$$|\psi^{(1)}_{\vec{p}}(\vec{r})| \ll |\psi^{(0)}_{\vec{p}}(\vec{r})|. \tag{7.21}$$

Это условие означает, что потенциал слабо возмущает падающую плоскую волну. Можно показать, что $\psi^{(1)}_{\vec{p}}(\vec{r})$ уменьшается с ростом r. Таким образом (7.21) выполняется, если

$$|\psi^{(1)}_{\vec{p}}(0)| \ll \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}. \tag{7.22}$$

Из (7.20) получаем

$$\psi^{(1)}_{\vec{p}}(0) = \frac{-\mu}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ipr} V(r) e^{ipr\cos\theta} r \sin\theta d\theta dr = \frac{-\mu}{(2\pi)^{3/2} p i} \int_0^\infty V(r)(e^{2ipr} - 1) dr. \tag{7.23}$$

Рассмторим потенциал с радиусом действия $\simeq a$. Если длина волны частицы велика по сравнению с радиусом действия сил $(\lambda \gg a)$, то в этом случае из (7.23) получаем

$$\psi'(0) = -\frac{2\mu}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty V(r) r dr \simeq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \mu \bar{V} a^2 \tag{7.24}$$

($\bar{V}$ - среднее значение потенциала).

Борновское приближение применимо, если

$$\mu \bar{V} / a^2 \ll 1. \tag{7.25}$$

Перепишем это условие в виде

$$|\bar{V}| \ll \frac{1}{\mu a^2}.$$

В правой части этого неравенства – средняя кинетическая энергия, которой обладает частица, заключенная в области порядка $\sim a$ ($\bar{p} \sim \frac{1}{a}$, $\bar{T} \sim \frac{1}{\mu a^2}$). Таким образом, в области больших длин волн ($pa \ll 1$) борновское приближение применимо, если средняя потенциальная энергия много меньше средней кинетической энергии частицы, заключенной в области действия потенциала.

Если длина волны частицы мала по сравнению с радиусом действия сил

$$\lambda \ll a,$$

то в этом случае первый член в интеграле (7.23) можно опустить и для $\psi^{(1)}_{\vec{p}}(\vec{r})$ получаем

$$\psi^{(1)}_{p} \simeq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mu}{pi} \int_0^\infty V(r)\,dr \simeq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\mu}{pi} \bar{V} a . \qquad (7.26)$$

Итак, при $pa \gg 1$ борновское приближение применимо, если потенциал удовлетворяет условию

$$\frac{\mu}{p} |\bar{V}|\, a \ll 1 . \qquad (7.27)$$

Посмотрим теперь, какие условия на полное сечение рассеяния вытекают из (7.25) и (7.27). При $pa \ll 1$ из (7.4) для амплитуды рассеяния получаем

$$f^{(1)} \simeq -2\mu \int_0^\infty V(r)\, r^2 dr \simeq -\frac{2}{3} \mu \bar{V} a^3 .$$

Отсюда следует, что

$$\sigma = \frac{16}{9} \left(\mu \bar{V} a^2\right)^2 \pi a^2 .$$

Таким образом, при $pa \ll 1$ условие применимости борновского приближения может быть сформулировано в виде

$$\sigma \ll 2\pi a^2 . \qquad (7.28)$$

Рассмотрим теперь область высоких энергий ($pa \gg 1$). Мы показали, что при $pa \gg 1$ в борновском приближении $\theta \lesssim \frac{1}{pa} \ll 1$. Для полного сечения рассеяния имеем в этом случае

$$\sigma \simeq \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \pi \frac{1}{(pa)^2} . \qquad (7.29)$$

Из (7.6) для $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0$ получаем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = 4\mu^2\left(\int_0^\infty V(r)r^2dr\right)^2 \simeq \frac{4}{9}\mu^2\bar{V}^2a^6. \quad (7.30)$$

Далее из (7.29) и (7.30) находим, что

$$\sigma \simeq \frac{4}{9}\left(\frac{\mu\bar{V}a}{p}\right)^2\pi a^2.$$

Таким образом, при $pa \gg 1$ борновское приближение применимо, если

$$\sigma \ll \pi a^2. \quad (7.31)$$

Величина πa^2 характеризует размер области, в которой взаимодействие отлично от нуля, и является геометрическим сечением. Из (7.27) и (7.31) следует, что в обоих рассмотренных нами предельных случаях ($pa \gg 1$ и $pa \ll 1$) борновское приближение применимо, если сечение рассеяния много меньше геометрического сечения.

Итак, в этом параграфе мы ввели диаграммы Фейнмана и подробно рассмотрели вклад в амплитуду рассеяния диаграммы рис.4 (первое борновское приближение). В последних пяти параграфах рассматривалось рассеяние бесспиновых частиц. Теперь мы перейдем к подробному рассмотрению рассеяния частиц со спином.

§ 8. Рассеяние частиц со спинами 0 и 1/2

Начнем с простейшего случая рассеяния частиц со спинами 0 и 1/2 (например, пионов нуклонами, нуклонов ядрами со спином ноль). Задача рассеяния - задача двух частиц. Если одна из частиц имеет спин 1/2, то волновая функция зависит от спиновой переменной $\sigma\,(\sigma = \pm 1)$. Полная волновая функция системы имеет вид

$$\Psi_\sigma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \varphi(\vec{R}, t)\,\psi_\sigma(\vec{r}, t),$$

где функция $\varphi(\vec{R}, t)$ описывает движение центра инерции и удовлетворяет свободному уравнению, а функция $\psi_\sigma(\vec{r}, t)$ описывает относительное движение и удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\vec{p}^2}{2\mu}\delta_{\sigma\sigma'} + V_{\sigma\sigma'}(\vec{r})\right)\psi_{\sigma'}(\vec{r}, t) = i\,\frac{\partial\psi_\sigma(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (8.1)$$

В матричной форме это уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(\vec{r})\right)\psi(\vec{r}, t) = i\,\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (8.2)$$

В интересующей нас здесь задаче рассеяния для начальной волновой функции имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_\mu(\sigma) e^{i\vec{p}_1\vec{r}_1} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}_2\vec{r}_2} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{P}\vec{R}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_\mu(\sigma) e^{i\vec{p}\vec{r}},$$

где $u_\mu(\sigma)$ - спиновая функция, $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, $\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2}$ соответственно, полный и относительный импульсы. Функция u_μ описывает состояние с проекцией спина μ на заданное направление.

$$\vec{\sigma}\vec{n}\, u_\mu = \mu u_\mu \qquad (\mu = \pm 1), \tag{8.3}$$

где σ_k - матрицы Паули, $\vec{n}$ - единичный вектор.

Нас будет интересовать амплитуда вероятности обнаружения конечных частиц в состоянии

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_{\mu'}(\sigma') e^{i\vec{p}_1{}'\vec{r}_1} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}_2{}'\vec{r}_2} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{P}'\vec{R}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_{\mu'}(\sigma') e^{i\vec{p}'\vec{r}},$$

где $u_{\mu'}$ - собственная функция оператора проекции спина на некоторое направление (не обязательно совпадающее с $\vec{n}$).

В этом и во всех следующих параграфах мы будем много работать с матрицами Паули. Напомним основные соотношения, которым они удовлетворяют:

$$\begin{aligned} \sigma_i\sigma_k - \sigma_k\sigma_i &= 2e_{ikl}\sigma_l, \\ \sigma_i\sigma_k + \sigma_k\sigma_i &= 2\delta_{ik}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Первое соотношение является частным случаем общего коммутационного соотношения, которому удовлетворяет оператор любого момента (в нашем случае оператор момента равен $1/2\,\vec{\sigma}$). Второе соотношение справедливо только для операторов спина 1/2.

Из (8.4) получаем следующее полезное соотношение:

$$\sigma_i\sigma_k = \delta_{ik} + ie_{ikl}\sigma_l. \tag{8.5}$$

Умножая (8.5) на a_i и b_k и суммируя по i, k ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ - любые вектора), получаем также

$$(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{b}) + i(\vec{a}\times\vec{b})\vec{\sigma}. \tag{8.6}$$

Напомним также, что в стандартном представлении матрицы Паули имеют вид

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

В рассматриваемом нами случае рассеяния частиц со спинами 0 и 1/2 матричный элемент $\hat{S}$ -матрицы имеет вид (см.(2.60)

$$S_{\vec{p}_1'\mu'\vec{p}_2';\vec{p}_1\mu\vec{p}_2} = \delta(\vec{P}-\vec{P}')\, S_{\vec{p}'\mu';\vec{p}\mu}\,. \tag{8.8}$$

Здесь

$$S_{\vec{p}'\mu';\vec{p}\mu} = \delta(\vec{p}'-\vec{p})\,\delta_{\mu'\mu} - 2\pi i\,\delta(E_{p'}-E_p)\,(u_{\mu'}T(\vec{p}';\vec{p})\,u_\mu), \tag{8.9}$$

где

$$T(\vec{p}';\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-i\vec{p}'\vec{r}}\,T(\vec{r})\,e^{i\vec{p}\vec{r}}\,d\vec{r} \tag{8.10}$$

– матрица, действующая на спиновую переменную.

В этом параграфе мы получим общий вид матрицы $T(\vec{p}';\vec{p})$. При этом мы будем основываться только на инвариантности относительно вращений (сохранении момента).

Напомним, что

$$T(\vec{r}) = V(\vec{r}) + V(\vec{r})\,\frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0 + i\varepsilon}\,V(\vec{r}) + \dots \tag{8.11}$$

Потенциал $V(\vec{r})$ и, следовательно, оператор $T(\vec{r})$ – матрица, действующая на спиновую переменную. Ответим вначале на вопрос о том, какой общий вид имеет матрица $V(\vec{r})$.

Рассмотрим две системы отсчета – некоторую исходную систему и систему, повернутую относительно исходной на произвольные углы. (рис.7)

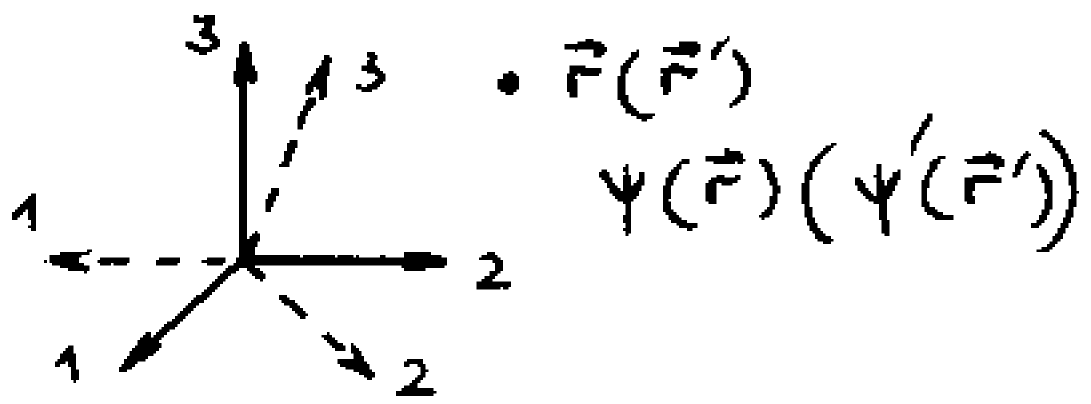

Рис.7. Поворот системы отсчета

Координаты одной и той же точки пространства в этих двух системах отсчета связаны соотношениями

$$r_i' = a_{ik}\, r_k\,, \tag{8.12}$$

где r_k – координаты точки в исходной системе,

r_i' – координаты точки в повернутой системе, а a_{ik} – косинус угла между направлением "новой" оси i и "старой" оси k.

Учитывая, что $\vec{r}'^2 = \vec{r}^2$, из (8.I2) имеем

$$a_{ik} a_{il} = \delta_{kl} .$$

Из (8.I2) получаем обратное преобразование

$$r_k = a_{ik} r_i' . \tag{8.I3}$$

Волновую функцию частицы в точке $\vec{r}'$ в повернутой системе отсчета обозначим $\psi'(\vec{r}')$ (волновую функцию в той же точке пространства в исходной системе мы обозначим $\psi(\vec{r})$. Функции $\psi'(\vec{r}')$ и $\psi(\vec{r})$ связаны линейным преобразованием

$$\psi_\sigma'(\vec{r}') = (\mathcal{U}_R)_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'}(\vec{r}) , \tag{8.I4}$$

где матрица $\mathcal{U}_R$ зависит от углов поворота одной системы относительно другой (коэффициентов a_{ik}). Вероятность обнаружения частицы в данной точке пространства не может зависеть от выбора системы отсчета. Таким образом,

$$\psi'^{+}(\vec{r}')\psi'(\vec{r}') = \psi^{+}(\vec{r})\,\mathcal{U}_R^{+}\mathcal{U}_R\psi(\vec{r}) = \psi^{+}(\vec{r})\psi(\vec{r}).$$

Отсюда следует, что $\mathcal{U}_R$ должна быть унитарной матрицей

$$\mathcal{U}_R^{+}\mathcal{U}_R = 1. \tag{8.I5}$$

Далее среднее значение оператора спина $\langle\sigma_i\rangle = \dfrac{\psi^{+}\sigma_i\psi}{\psi^{+}\psi}$ при вращениях должно преобразовываться как вектор

$$\langle\sigma_i\rangle' = a_{ik}\sigma_k ,$$

Подставляя в это соотношение (8.I4) и используя (8.I5), получаем

$$\mathcal{U}_R^{-1}\sigma_i\,\mathcal{U}_R = a_{ik}\sigma_k . \tag{8.I6}$$

Итак, матрица $\mathcal{U}_R$ обязана удовлетворять соотношениям (8.I5) и (8.I6). Эти соотношения позволяют определить вид матрицы $\mathcal{U}_R$. Нам, однако, вид матрицы $\mathcal{U}_R$ не потребуется. Мы будем непосредственно использовать (8.I5) и (8.I6)

Потребуем теперь, чтобы уравнение Шредингера (8.2) было инвариантно относительно вращений. Умножим (8.2) слева на $\mathcal{U}_R$. Учитывая, что

$$\frac{\partial^2}{\partial r_i^2} = a_{ki}\, a_{li} \frac{\partial}{\partial r_k'}\frac{\partial}{\partial r_l'} = \frac{\partial^2}{\partial r_k'^2} ,$$

получаем

$$\left(\frac{\vec{p}'^2}{2\mu} + \mathcal{U}_R V(r)\,\mathcal{U}_R^{-1}\right)\psi'(\vec{r}',t) = i\frac{\partial\psi'(\vec{r}',t)}{\partial t} \qquad \left(\vec{p}' = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\vec{r}'}\right) . \tag{8.I7}$$

Инвариантность относительно вращений означает, что уравнение Шредингера в исходной и повернутой системах отсчета имеет один и тот же вид. Сравнивая (8.2) и (8.17), мы приходим к заключению, что из инвариантности относительно вращения следует, что

$$\mathcal{U}_R V(\vec{r})\, \mathcal{U}_R^{-1} = V(\vec{r}\,') \tag{8.18}$$

(справа та же функция, что и слева, но в точке $\vec{r}\,'$).
Это условие может быть переписано следующим образом:

$$\mathcal{U}_R^{-1}\, V(\vec{r}\,')\, \mathcal{U}_R = V(\vec{r}\,) . \tag{8.19}$$

Получим теперь общий вид потенциала взаимодействия, удовлетворяющего (8.19). Хорошо известно, что три матрицы Паули σ_i и единичная 2x2 матрица образуют полную систему. Любую 2x2 матрицу можно, следовательно, разложить по этим четырем матрицам.
Для матрицы $V(\vec{r}\,)$ имеем разложение

$$V(\vec{r}\,) = V_0(\vec{r}\,) + \sum_i \mathcal{U}_i(\vec{r}\,)\sigma_i \ , \tag{8.20}$$

где $V_0(\vec{r}\,)$, $\mathcal{U}_i(\vec{r}\,)$ - функции $\vec{r}$ (и производных по $\vec{r}$).
Подставим теперь (8.20) в (8.19). Используя отношение (8.16), получаем

$$\begin{aligned} V_0(\vec{r}\,') &= V_0(\vec{r}\,) , \\ \mathcal{U}_i(\vec{r}\,')\, a_{ik}' &= \mathcal{U}_k(\vec{r}\,) . \end{aligned} \tag{8.21}$$

Эти соотношения означают, что $V_0(\vec{r}\,)$ является скаляром, а $\mathcal{U}_i(\vec{r}\,)$ - вектором.
С помощью $\vec{r}$ может быть построено три вектора

$$\vec{r}\,, \quad \vec{p} = -i\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\,, \quad \vec{r}\times\vec{p} \ .$$

Таким образом, $\mathcal{U}_i(\vec{r}\,)$ имеет следующий общий вид

$$\mathcal{U}_i(\vec{r}\,) = V' r_i + V'' p_i + V_1 (\vec{r}\times\vec{p})_i \ , \tag{8.22}$$

где V', V'', V_1 - функции скаляров r^2 и p^2. Из (8.21) следует также, что V_0 - функция скаляров r^2 и p^2.

Итак, из инвариантности относительно вращений следует, что потенциал взаимодействия частицы со спином 1/2 с бесспиновой частицей характеризуется четырьмя функциями скаляров r^2 и p^2 и имеет следующий общий вид:

$$V(\vec{r}\,) = V_0 + V'\vec{\sigma}\vec{r} + V''\vec{\sigma}\vec{p} + V_1(\vec{r}\times\vec{p})\vec{\sigma} \ . \tag{8.23}$$

Получим теперь общее выражение для матрицы $T(\vec{p}\,';\vec{p}\,)$. С помощью

(8.II) и (8.I9) имеем

$$T(\vec r) = \mathcal{U}_R^{-1}\left(V(\vec r') + V(\vec r')\,\frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0(\vec r') + i\varepsilon}\,V(\vec r') + \ldots\right)\mathcal{U}_R \,.$$

Таким образом, из инвариантности относительно вращений следует, что

$$T(\vec r) = \mathcal{U}_R^{-1}\, T(\vec r')\,\mathcal{U}_R \,. \qquad (8.24)$$

Подставим теперь (8.24) в (8.10). Переходя в интеграле (8.10) к переменной $\vec r'$ и учитывая, что

$$\vec p\,\vec r = \vec p_R\,\vec r' \;, \quad (\vec p_R)_i = a_{ik}(\vec p)_k$$

для матрицы $T(\vec p', \vec p)$ получаем

$$T(\vec p', \vec p) = \mathcal{U}_R^{-1}\, T(\vec p_R', \vec p_R)\,\mathcal{U}_R \,. \qquad (8.25)$$

Разложим 2x2 матрицу $T(\vec p', \vec p)$ по полной системе матриц $\mathbb{1}$ и σ_i. Имеем

$$T(\vec p', \vec p) = \alpha(\vec p', \vec p) + \sum_i T_i(\vec p', \vec p)\,\sigma_i \;, \qquad (8.26)$$

где α и T_i -функции $\vec p$ и $\vec p'$. Из (8.26) и (8.16) получаем

$$\alpha(\vec p', \vec p) = \alpha(\vec p_R', \vec p_R) \;, \qquad (8.27)$$

$$T_k(\vec p', \vec p) = a_{ik}\, T_i(\vec p_R', \vec p_R) \,. \qquad (8.28)$$

Таким образом, α - скаляр, а T_i - вектор.

Из векторов $\vec p$ и $\vec p'$ можно построить три ортонормированных вектора

$$\vec m = \frac{\vec p - \vec p'}{|\vec p - \vec p'|} \;, \quad \vec \ell = \frac{\vec p + \vec p'}{|\vec p + \vec p'|} \;, \quad \vec n = \vec m \times \vec \ell = \frac{\vec p \times \vec p'}{|\vec p \times \vec p'|} \qquad (8.29)$$

Таким образом, вектор $T_i(\vec p', \vec p)$ имеет следующий общий вид

$$T_i(\vec p', \vec p) = \beta_1 m_i + \beta_2 \ell_i + \beta n_i \,. \qquad (8.30)$$

Здесь β_1, β_2 и β - функции скаляров, которые могут быть построены из векторов $\vec p$ и $\vec p'$. Очевидно, что из $\vec p$ и $\vec p'$ может быть построено два скаляра:

$$\vec p^{\,2} = \vec p'^{\,2} \;, \quad \vec p\,\vec p' .$$

Таким образом, β_1, β_2 и β зависят от $\vec p^{\,2}$ и $\vec p\,\vec p'$. Из (8.28) мы заключаем, что α также зависит только от скаляров $\vec{p}^2$ и $\vec{p}\cdot\vec{p}'$. Итак, из инвариантности относительно вращений следует, что матрица рассеяния частицы со спином I/2 на частице со спином 0 характеризуется четырьмя функциями скалярных произведений $\vec{p}^2$ и $\vec{p}\cdot\vec{p}'$ и имеет следующий общий вид:

$$T(\vec{p}',\vec{p}) = \alpha + \beta_1\vec{\sigma}\vec{m} + \beta_2\vec{\sigma}\vec{\ell} + \beta\vec{\sigma}\vec{n}. \qquad (8.31)$$

Подведем итоги. В этом параграфе мы приступили к рассмотрению рассеяния частиц со спинами I/2 и 0. Было выяснено, прежде всего, какие условия накладывают на потенциал требования инвариантности относительно вращений (сохранение полного момента). Затем было получено общее выражение для потенциала взаимодействия. Далее мы получили условия, которые накладывают на матрицу $T(\vec{p}',\vec{p})$ требования инвариантности относительно вращений. Наконец было найдено общее выражение для матрицы $T(\vec{p}',\vec{p})$. Мы показали, что в выражение для $T(\vec{p}',\vec{p})$ входят четыре независимые функции скаляров $\vec{p}^2$ и $\vec{p}\cdot\vec{p}'$. Если потребовать, чтобы сохранялись как момент, так и четность, то, как будет показано в следующем параграфе, в общем выражении для матрицы $T(\vec{p}',\vec{p})$ остаются только две функции.

§ 9. Инвариантность относительно инверсии системы отсчета (сохранение четности)

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о том, какие условия на потенциал и матрицу $T(\vec{p}',\vec{p})$ накладывают требования инвариантности относительно инверсии системы отсчета. Начнем с бесспинового случая. Рассмотрим две системы отсчета - некоторую исходную систему и систему, все оси которой, направлены противоположно осям первоначальной системы (см.рис.8)

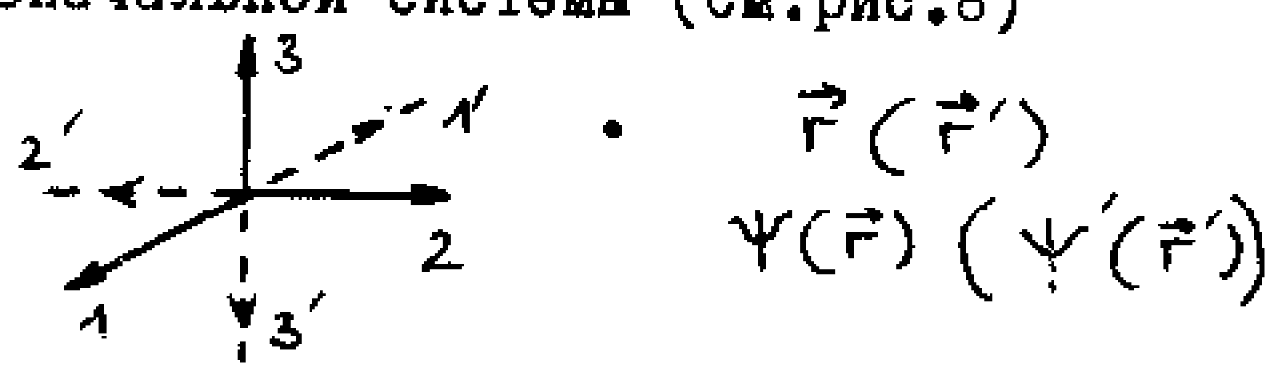

Рис.8. Инверсия системы отсчета

Координаты одной и той же точки пространства в обеих системах отсчета обозначим, соответственно, $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$. Имеем

$$\vec{r}\,' = -\vec{r} \qquad (9.1)$$

Волновые функции в точке $\vec{r}$ ($\vec{r}'$) в обеих системах отсчета обозначим, соответственно, ψ ($\vec{r}$) и $\psi'(\vec{r}')$. Очевидно, что вероятность обнаружения частицы в данной точке пространства не зависит от выбора системы отсчета

$$|\psi(\vec{r})|^2 = |\psi'(\vec{r}')|^2 .$$

Таким образом,

$$\psi'(\vec{r}') = \eta\,\psi(\vec{r}) , \tag{9.2}$$

где η - фазовый множитель.

Если дважды произвести инверсию системы отсчета, то мы возвращаемся при этом в исходную систему. В рассматриваемом случае бесспиновых частиц имеем

$$\psi(\vec{r}) = \eta\,\psi'(\vec{r}') = \eta^2\psi(\vec{r}) .$$

Отсюда следует, что

$$\eta^2 = 1 ,$$

т.е.

$$\eta = \pm 1 . \tag{9.3}$$

Множитель η носит название внутренней четности. Нетрудно видеть, что η не зависит от состояния, в котором находится система. Действительно, пусть

$$\psi(\vec{r}) = a\,\psi_1(\vec{r}) + b\,\psi_2(\vec{r}) ,$$

где a и b -амплитуды вероятности найти систему в состояниях ψ_1 и ψ_2.

Имеем

$$\psi'(\vec{r}') = \eta\,\psi(\vec{r}) = a\eta\,\psi_1(\vec{r}) + b\eta\,\psi_2(\vec{r}) . \tag{9.4}$$

С другой стороны, a и b не зависят от выбора системы отсчета:

$$\psi'(\vec{r}') = a\,\psi_1'(\vec{r}') + b\,\psi_2'(\vec{r}') . \tag{9.5}$$

Сравнивая (9.4) и (9.5), мы заключаем, что

$$\psi_1'(\vec{r}') = \eta\,\psi_1(\vec{r}) ,\quad \psi_2'(\vec{r}') = \eta\,\psi_2(\vec{r}) . \tag{9.6}$$

Потребуем теперь, чтобы уравнение Шредингера было инвариантно относительно инверсии. Умножая уравнение Шредингера на η и учитывая, что $\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r'^2}$, получаем

$$i\,\frac{\partial\psi'(\vec{r}',t)}{\partial t} = \left(\frac{\vec{p}'^2}{2\mu} + V(\vec{r})\right)\psi'(\vec{r}',t) .$$

Инвариантность относительно инверсии системы отсчета имеет место, если

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}\,'). \tag{9.7}$$

Из (9.I) и (9.7) получаем

$$V(\vec{r}) = V(-\vec{r}). \tag{9.8}$$

Мы видели, что вследствие сохранения момента потенциал взаимодействия бесспиновых частиц зависит от инварианта $r = \sqrt{\vec{r}^2}$. Таким образом, в случае бесспиновых частиц инвариантность относительно инверсии системы отсчета не накладывает дополнительных ограничений на потенциал и выполняется автоматически.

Покажем теперь, что в интересующем нас здесь случае частиц со спинами I/2 и 0 это не так. Прежде чем переходить к рассмотрению этого случая, отметим, что условие (9.8) может быть записано в другом виде. Введем следующим образом оператор четности:

$$P\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}). \tag{9.9}$$

Условие (9.8) может быть тогда записано в виде

$$PVP^{-1} = V. \tag{9.10}$$

Таким образом, инвариантность относительно инверсии системы отсчета означает, что потенциал коммутирует с оператором четности (четность сохраняется).

В связи с введением оператора четности сделаем следующие замечания.

I. Состояние с моментом ℓ и проекцией момента m является собственным состоянием оператора P с собственным значением $(-1)^\ell$. Действительно, такое состояние описывается функцией

$$\psi_{\ell m}(\vec{r}) = R(r)\, Y_{\ell m}(\theta,\phi),$$

где $Y_{\ell m}(\theta,\phi) = N_{\ell m} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi}$ – сферическая функция, $N_{\ell m}$ – нормировочный множитель, P_ℓ^m – присоединенный полином Лежандра. Очевидно, что сферические координаты вектора $-\vec{r}$ равны r, $\pi-\theta$, $\phi+\pi$. Имеем

$$P_\ell^m(\cos(\pi-\theta))\, e^{im(\phi+\pi)} = (-1)^{\ell-m} P_\ell^m(\cos\theta)(-1)^m e^{im\phi}.$$

Таким образом,

$$P\psi_{\ell m}(\vec{r}) = \psi_{\ell m}(-\vec{r}) = (-1)^\ell \psi_{\ell m}(\vec{r}). \tag{9.11}$$

2. Очевидно, что плоская волна не является собственным состоянием оператора P. Действительно,

$$P e^{i\vec{p}\vec{r}} = e^{-i\vec{p}\vec{r}} .$$

3. Любую волновую функцию можно представить в виде суммы собственных функций оператора P с собственными значениями +I и -I. Действительно, имеем

$$\psi(\vec{r}) = \psi_+(\vec{r}) + \psi_-(\vec{r}) ,$$

где

$$\psi_\pm(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(\psi(\vec{r}) \pm \psi(-\vec{r})\right).$$

Очевидно, что

$$P\psi_\pm(\vec{r}) = \pm\psi_\pm(\vec{r}).$$

Перейдем теперь к рассмотрению системы, состоящей из частицы со спином I/2 и частицей со спином 0. Волновая функция системы в штрихованной системе отсчета $\psi'(\vec{r}')$ связана с волновой функцией в исходной системе соотношением

$$\psi'(\vec{r}') = \eta\, U_P\, \psi(\vec{r}) . \tag{9.I2}$$

Здесь U_P – спиновая матрица, η – фазовый множитель (внутренняя четность). Вероятность обнаружения частицы в данной точке пространства не зависит от выбора системы отсчета. Имеем

$$\psi'^+(\vec{r}')\psi'(\vec{r}') = \psi^+(\vec{r})\psi(\vec{r}) . \tag{9.I3}$$

Из (9.I2) и (9.I3) следует, что U_P -унитарная матрица

$$U_P^+ U_P = 1 . \tag{9.I4}$$

Далее среднее значение спина преобразуется как момент, т.е. как псевдовектор*. Имеем

$$\frac{\psi'^+(\vec{r}')\,\sigma_i\,\psi'(\vec{r}')}{\psi'^+(\vec{r}')\psi'(\vec{r}')} = \frac{\psi^+(\vec{r})\,\sigma_i\,\psi(\vec{r})}{\psi^+(\vec{r})\psi(\vec{r})} \tag{9.I5}$$

*Напомним, в чем состоит отличие между вектором и псевдовектором. Преобразование вращения и (или) отражения имеет вид $r_i' = a_{ik} r_k$. В случае вращения $\det a = $ I. В случае инверсии $\det a = $ -I. При этом преобразовании вектор a преобразуется как координата: $a_i' = a_{ik} a_k$. Псевдовектор c преобразуется следующим образом: $c_i' = \det a\, a_{ik} c_k$. Типичный пример псевдовектора – векторное произведение. Действительно, если $c_i = e_{ikl} a_k b_l$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – векторы, то $c_i' = e_{ikl} a_k' b_l' = e_{ikl} a_{kk_1} a_{k_1} a_{ll_1} b_{l_1}$. Далее нетрудно видеть, что $e_{ikl} a_{ii_1} a_{kk_1} a_{ll_1} = \det a\, e_{i_1 k_1 l_1}$. Отсюда получаем $e_{ikl} a_{kk_1} a_{ll_1} = \det a\, a_{ii_1} e_{i_1 k_1 l_1}$. С помощью этого последнего соотношения находим

$$c_i' = \det a\, a_{ii_1} c_{i_1} .$$

Отсюда следует, что

$$U_P^{-1}\sigma_i U_P = \sigma_i \ , \qquad (9.16)$$

т.е., что матрица U_P коммутирует со всеми тремя матрицами Паули. Из (9.16) следует, что U_P – единичная матрица. Нас, однако, вид матрицы U_P интересовать не будет. Мы будем использовать лишь соотношения (9.14) и (9.16).

Потребуем теперь, чтобы уравнение Шредингера (8.2) было инвариантно относительно преобразования инверсии (9.1) и (9.12). Умножая (8.2) слева на U_P, очевидно имеем

$$i\frac{\partial\psi'(\vec r',t)}{\partial t} = \left(\frac{\vec p'^2}{2\mu} + U_P V(\vec r) U_P^{-1}\right)\psi'(\vec r',t). \qquad (9.17)$$

Отсюда следует, что уравнение Шредингера имеет в штрихованной системе тот же вид, что и в исходной системе, если

$$U_P V(\vec r) U_P^{-1} = V(\vec r'). \qquad (9.18)$$

Это соотношение может быть переписано следующим образом:

$$U_P^{-1} V(\vec r') U_P = V(\vec r). \qquad (9.19)$$

В предыдущем параграфе мы показали, что потенциал взаимодействия частиц со спинами 1/2 и 0, удовлетворяющий требованиям инвариантности относительно вращений, имеет следующий вид:

$$V(\vec r) = V_0 + V'\vec\sigma\cdot\vec r + V''\vec\sigma\vec p + V_1\vec\sigma\cdot(\vec r\times\vec p), \qquad (9.20)$$

где $\vec p = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\vec r}$, V_0, V', V'' и V_1 – функции скаляров $\vec r^2$ и $\vec p^2$. Подставляя (9.20) в (9.19), находим, что

$$V' = V'' = 0 .$$

(члены $\vec\sigma\vec r$ и $\vec\sigma\vec p$ при инверсии меняют знак и не могут входить в потенциал, удовлетворяющий (9.19)).

Итак, потенциал, удовлетворяющий требованиям инвариантности относительно вращений и отражений, имеет следующий общий вид:

$$V(\vec r) = V_0 + V_1\vec\sigma\cdot(\vec r\times\vec p) . \qquad (9.21)$$

Посмотрим теперь, какие ограничения на матрицу $T(\vec p', \vec p)$ накладывают требования инвариантности относительно инверсии. Используя (9.19) для T-матрицы без труда получаем

$$U_P^{-1} T(\vec r') U_P = T(\vec r). \qquad (9.22)$$

Далее имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-i\vec{p}'\vec{r}}T(\vec{r})e^{i\vec{p}\vec{r}}d\vec{r} = U_P^{-1}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-i(-\vec{p}')\vec{r}'}T(\vec{r}')e^{i(-\vec{p})\vec{r}'}d\vec{r}'U_P.$$

Таким образом, из инвариантности относительно инверсии системы отсчета следует, что

$$U_P^{-1}T(-\vec{p}',-\vec{p})U_P = T(\vec{p}',\vec{p}). \qquad (9.23)$$

Основываясь только на инвариантности относительно вращений в предыдущем параграфе мы показали, что матричный элемент $T(\vec{p}',\vec{p})$ имеет следующий общий вид:

$$T(\vec{p}',\vec{p}) = \alpha + \beta_1\vec{\sigma}\vec{m} + \beta_2\vec{\sigma}\vec{\ell} + \beta\vec{\sigma}\vec{n},$$

где α, β_1, β_2, β – функции скаляров $\vec{p}^2$ и $\vec{p}'\vec{p}$, $\vec{m}=\frac{\vec{p}-\vec{p}'}{|\vec{p}-\vec{p}'|}$, $\vec{\ell}=\frac{\vec{p}+\vec{p}'}{|\vec{p}+\vec{p}'|}$, $\vec{n}=\frac{\vec{p}\times\vec{p}'}{|\vec{p}\times\vec{p}'|}$. Подставим теперь это выражение в (9.23). Получаем

$$\beta_1 = \beta_2 = 0 \qquad (9.24)$$

(скаляры I и $\vec{\sigma}\vec{n}$ "выживают" при инверсии; псевдоскаляры $\vec{\sigma}\vec{m}$ и $\vec{\sigma}\vec{\ell}$ при инверсии меняют знак и не могут входить в $T(\vec{p}',\vec{p})$).

Итак из инвариантности относительно вращений и отражений следует, что матрица рассеяния частиц со спинами I/2 и 0 имеет следующий общий вид:

$$T(\vec{p}',\vec{p}) = \alpha + \beta\vec{\sigma}\cdot\vec{n}. \qquad (9.25)$$

Уже из этого общего выражения можно получить весьма интересные выводы. Действительно, пусть $\vec{n}_0$ – единичный вектор, ортогональный плоскости рассеяния (плоскостью рассеяния называют плоскость, образованную векторами $\vec{p}$ и $\vec{p}'$ (см.рис.9)). Рассмотрим в СЦИ рассеяние на угол θ налево ($\vec{n}=\vec{n}_0$) и направо ($\vec{n}=-\vec{n}_0$). Предположим, что начальная спиновая функция является собственной функцией оператора $\vec{\sigma}\vec{n}_0$:

$$\vec{\sigma}\vec{n}_0 u_\mu = \mu u_\mu. \qquad (9.26)$$

Вычислим амплитуду вероятности обнаружения системы в состоянии $u_{\mu'}$, являющимся также собственным состоянием $\vec{\sigma}\vec{n}_0$.
В случае рассеяния налево с помощью (9.25) и (9.26) получаем

$$T^L_{\vec{p}\mu';\vec{p}\mu} = u^+_{\mu'}(\alpha+\beta\vec{\sigma}\vec{n})u_\mu = \delta_{\mu'\mu}(\alpha+\beta\mu). \qquad (9.27)$$

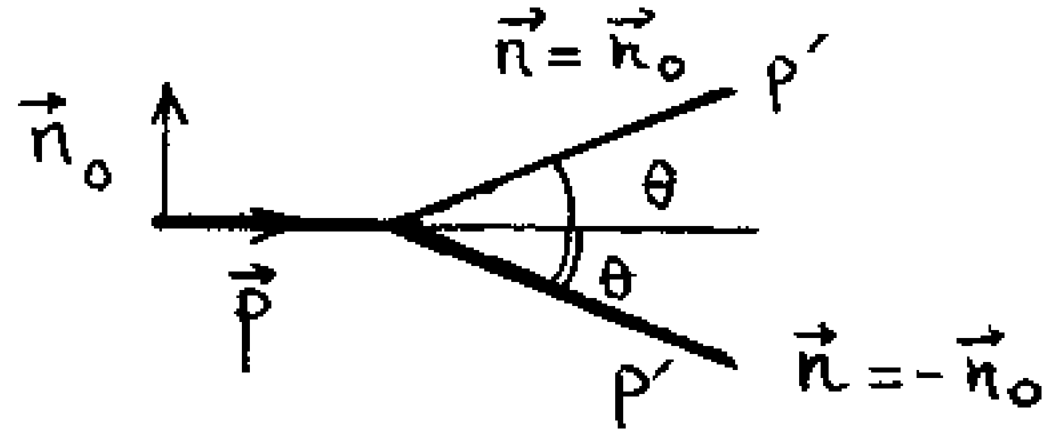

Рис.9. Рассеяние налево ($\vec{n}=\vec{n}_0$) и направо ($\vec{n}=-\vec{n}_0$)

В случае рассеяния направо имеем

$$T^{R}_{\vec{p}'\mu';\vec{p}\mu} = \left(u^{+}_{\mu'}(\alpha + \beta\vec{\sigma}\vec{n})u_{\mu}\right) = \delta_{\mu'\mu}(\alpha - \mu\beta). \qquad (9.28)$$

Из (9.27) и (9.28) можно сделать следующие заключения:

I. Проекция спина на направление, ортогональное плоскости рассеяния, при рассеянии не меняется (если спин направлен перпендикулярно плоскости рассеяния, то при рассеянии он не переворачивается).

2. Амплитуда рассеяния налево частиц с равной I(-I) проекцией спина на направление $\vec{n}_0$ равна амплитуде рассеяния на тот же угол θ направо частиц с проекцией спина -I(I) на направление $\vec{n}_0$.

В этом параграфе мы ввели внутреннюю четность частиц. Наряду со спином, изотопическим спином и др. внутренняя четность является одной из характеристик частицы. Внутренние четности определяются путем изучения неупругих процессов. Мы расскажем здесь о том, как была определена внутренняя четность пиона. Рассмотрим захват пиона из S -состояния дейтоном с образованием двух нейтронов

$$\pi^- + d \to n + n. \qquad (9.29)$$

Поскольку спин пиона равен нулю, а спин дейтона I, то полный момент начальной системы равен I. Предположим, что орбитальный момент двух нейтронов принимает одно из значений 0,2,4. Волновая функция двух нейтронов должна быть антисимметричной при перестановке пространственных и спиновых координат частиц. Очевидно, что при $\ell = 0,2\ \ldots$ пространственная функция симметрична. Следовательно, спиновая функция должна менять знак при перестановке спиновых координат нейтронов. Это означает, что полный спин системы двух нейтронов в этом случае равен нулю (синглет) и полный момент конечной системы может принимать значения 0,2 . . . Поскольку полный момент начальной системы равен I, то в силу сохранения полного момента два нейтрона не могут находиться в состоянии с четным значением орбитального момента.

Предположим, что орбитальный момент двух нейтронов принимает одно из значений I,3 . . . В этом случае в силу принципа Паули спиновая функция двух нейтронов должна быть симметричной при перестановке спиновых координат, т.е. полный спин двух нейтронов должен равняться I (триплет). Если $\ell = 1$, то при сложении орбитального момента и спина мы можем получить равный единице полный момент.

Потребуем теперь, чтобы четность сохранялась. Полная четность системы равна произведению внутренних четностей частиц на четность орбитального движения ($(-1)^{\ell}$). Для четности начального состояния получаем

$$\eta_\pi \eta_p \eta_n ,$$

где $\eta_\pi \eta_p \eta_n$ – внутренние четности пиона, нейтрона и протона (нейтрон и протон в дейтоне находятся в S и D состояниях). Четность конечной системы равна

$$\eta_n^2 (-1)^1 .$$

Сохранение четности означает, что

$$\eta_\pi \eta_p \eta_n = -\eta_n^2 .$$

Умножая это выражение на $\eta_n^* \eta_n^*$, окончательно получаем*

$$\eta_\pi \eta_p \eta_n^* = -1 . \tag{9.30}$$

Итак, мы приходим к выводу, что процесс захвата из S – состояния пиона дейтоном с образованием двух нейтронов в конечном состоянии возможен только в случае, если произведение внутренних четностей пиона, протона и нейтрона равно – I. Этот процесс был наблюден. Отсюда был сделан вывод, что внутренняя четность пиона равна –I (если $\eta_p = \eta_n$), т.е., что π -мезон псевдоскалярная частица.

Подведем итоги. В этом параграфе мы рассмотрели вопрос о том, какие условия на потенциал и матрицу $T(\vec{p}', \vec{p})$ накладывают требования инвариантности относительно инверсии системы отсчета.

---

*Внутренняя четность частицы со спином I/2 может принимать значения ± 1, $\pm i$. Это связано с тем, что двойную инверсию можно рассматривать и как тождественное преобразование и как поворот на 2π вокруг любой оси. Для частицы со спином I/2 при этом последнем преобразовании волновая функция умножается на – I.

Если потребовать, чтобы имела место инвариантность относительно инверсии, то, как мы показали, в матрице $T(\vec{p}', \vec{p})$ остаются только две независимые функции скалярных произведений $\vec{p}^2$ и $\vec{p}\cdot\vec{p}'$.

§ 10. Спиновая матрица плотности

Мы предполагали до сих пор, что спиновое состояние начальных частиц описывается функцией u_μ. Это, однако, не всегда так. В этом параграфе мы рассмотрели вопрос о том, каким образом спиновое состояние частиц в общем случае описывается.

Начнем с примера. Спиновая функция частицы со спином 1/2 имеет в общем случае вид

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} . \tag{10.1}$$

Если функция u нормирована, то

$$u^+ u = |a|^2 + |b|^2 = 1 . \tag{10.2}$$

Вычислим среднее значение спина в состоянии, описываемом функцией u. Имеем

$$\begin{aligned} u^+\sigma_1 u &= 2|a||b|\cos\alpha , \\ u^+\sigma_2 u &= 2|a||b|\sin\alpha , \\ u^+\sigma_3 u &= |a|^2 - |b|^2 , \end{aligned} \tag{10.3}$$

где α – разность фаз a и b. Можно ли выбором $|a|$, $|b|$ и α добиться того, чтобы все компоненты $u^+\sigma_i u$ равнялись нулю? Очевидно, что нельзя. Действительно, для того, чтобы $u^+\sigma_3 u = 0$ необходимо потребовать $|a|^2 = |b|^2$. Из условия нормировки при этом следует, что $|a|^2 = \frac{1}{2}$. В нашем распоряжении остается теперь только параметр α. Если $\alpha = 0$, то $u^+\sigma_2 u = 0$; если $\alpha = \pi/2$, то $u^+\sigma_1 u = 0$. Очевидно, что путем выбора α нельзя одновременно обратить в нуль $u^+\sigma_1 u$ и $u^+\sigma_2 u$.

Итак, никакая спиновая функция не может описать состояние, в котором все компоненты среднего значения спина равны нулю. Более того, для любой спиновой функции $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Существует такой единичный вектор $\vec{n}$, что

$$\vec{\sigma}\vec{n}\, u = u . \tag{10.4}$$

Действительно, предположим вначале, что такой вектор существует. Из (10.4) путем эрмитова сопряжения находим

$$u^+ \vec{\sigma}\vec{n} = u^+ . \tag{10.5}$$

Умножим (10.4) слева на $u^+\sigma_i$, а (10.5) справа на $\sigma_i u$.

Складывая полученные соотношения и учитывая, что

$$\sigma_i(\vec{\sigma}\vec{n}) + (\vec{\sigma}\vec{n})\sigma_i = 2n_i \quad ,$$

получаем

$$u^+\vec{\sigma}u = \vec{n} \,. \qquad \text{(I0.6)}$$

Можно показать также, что

$$(u^+\sigma_i u)\sigma_i u = u \,.$$

Действительно, имеем $u^+\sigma_i u(\sigma_i u)_\sigma = u^*_{\sigma''}(\sigma_i)_{\sigma''\sigma'''} u_{\sigma'''}(\sigma_i)_{\sigma\sigma'} u_{\sigma'}$.
Мы покажем в дальнейшем (см.§ I4), что $(\sigma_i)_{\sigma''\sigma'''}(\sigma_i)_{\sigma\sigma'} = 2\delta_{\sigma''\sigma'}\delta_{\sigma\sigma'''} - \delta_{\sigma''\sigma'''}\delta_{\sigma\sigma'} \Rightarrow u^+\sigma_i u(\sigma_i u)_\sigma = 2(u^+u)u_\sigma - (u^+u)u_\sigma = u_\sigma$.
Итак, любой спинор описывает состояние с равной единице проекцией спина на направление, которое дается выражением (I0.6).
Среднее значение оператора $\vec{\sigma} = 2\vec{S}$ ($\vec{S}$ -оператор спина) носит название вектора поляризации. Обозначим вектор поляризации $\vec{P}$. Пучок частиц с $P = 0$ называют неполяризованным пучком. Если $\vec{P}^2 = I$, то такой пучок называют полностью поляризованным. Мы видели, что волновыми функциями могут быть описаны только полностью поляризованные пучки.

Среднее значение спина в пучках частиц, получаемых от ускорителей, как правило, отлично от единицы. Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о том, как нужно описывать такие спиновые состояния.

Для того, чтобы объяснить квантовомеханическую суть проблемы, сделаем следующее вводное замечание. Рассмотрим две подсистемы. Гамильтониан первой обозначим H_1 , второй $- H_2$. Будем предполагать, что подсистемы когда-то взаимодействовали друг с другом, но начиная с некоторого момента времени взаимодействием между ними можно пренебречь. Будем рассматривать подсистемы в то время, когда они не взаимодействуют. Полный гамильтониан невзаимодействующих подсистем, очевидно, равен

$$H = H_1 + H_2 \,. \qquad \text{(I0.7)}$$

Пусть $\Psi^{(1)}_{n_1}$ ($\Psi^{(2)}_{n_2}$) - собственные функции полного набора операторов, относящихся к первой (второй) подсистеме. Предположим также, что

$$H_1\Psi^{(1)}_{n_1} = E_{n_1}\Psi^{(1)}_{n_1} \;,\quad H_2\Psi^{(2)}_{n_2} = E_{n_2}\Psi^{(2)}_{n_2} \,.$$

Очевидно, что функции

$$\psi^{(1)}_{n_1}(t) = e^{-iE_{n_1}t}\psi^{(1)}_{n_1}, \quad \psi^{(2)}_{n_2} = e^{-iE_{n_2}t}\psi^{(2)}_{n_2},$$

удовлетворяют уравнениям

$$i\frac{\partial\psi^{(1)}_{n_1}(t)}{\partial t} = H_1\psi^{(1)}_{n_1}(t), \quad i\frac{\partial\psi^{(2)}_{n_2}(t)}{\partial t} = H_2\psi^{(2)}_{n_2}(t). \qquad (10.8)$$

Волновую функцию всей системы $\psi(t)$ можно разложить по полной системе функций $\psi^{(1)}_{n_1}\psi^{(2)}_{n_2}$. Имеем

$$\psi(t) = \sum_{n_1, n_2} a_{n_1, n_2}(t)\psi^{(1)}_{n_1}(t)\psi^{(2)}_{n_2}(t). \qquad (10.9)$$

Подставляя это разложение в уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = (H_1 + H_2)\psi$$

и учитывая (10.8) получаем, что

$$\frac{\partial a_{n_1, n_2}(t)}{\partial t} = 0. \qquad (10.10)$$

Итак, вследствие того, что подсистемы не взаимодействуют, коэффициенты $a_{n_1 n_2}$ в разложении (10.9) не зависят от времени. Волновая функция системы представляет собой в общем случае, однако, сумму произведений волновых функций невзаимодействующих подсистем. Коэффициенты $a_{n_1 n_2}$ определяются волновой функцией системы в начальный момент времени (в тот момент времени, начиная с которого подсистемы можно считать невзаимодействующими),т.е. предысторией рассматриваемой нами системы.

Рассмотрим теперь пучок частиц с импульсом $\vec{p}$ и произвольным спином S. Он возник в результате взаимодействия с другой подсистемой (мишенью, ионным источником и т.д.). Волновая функция всей системы имеет, следовательно, вид

$$\psi_\sigma(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\vec{r} - iEt} \sum_{\mu, n} u_\mu(\sigma)\psi_n(\xi, t) a_{\mu n} \qquad (10.11)$$

где u_μ - собственные функции оператора проекции спина на некоторое направление $\psi_n(\xi, t)$ - функции, описывающие состояния, в которых может находиться вторая подсистема $a_{\mu n}$ - константы. Будем предполагать, что функции u_μ и ψ_n нормированы

$$(u^+_{\mu'} u_\mu) = \delta_{\mu'\mu}, \quad \int\psi^*_{n'}(\xi, t)\psi_n(\xi, t)\,d\xi = \delta_{n'n}. \qquad (10.12)$$

Обозначим

$$\Phi_\sigma(\xi_1 t) = \sum_{\mu n} u_\mu(\sigma)\Psi_n(\xi_1 t)\, a_{\mu n}. \qquad (10.13)$$

Если функция $\Phi(\xi_1 t)$ нормирована, то очевидно, что

$$\sum_{\mu,n} a^*_{\mu n} a_{\mu n} = 1 .$$

Вычислим теперь среднее значение любого спинового оператора O. Поскольку нас не интересует состояние второй подсистемы, то имеем

$$\langle O\rangle = \frac{\int \Phi^*_{\sigma'}(\xi_1 t)\, O_{\sigma'\sigma}\, \Phi_\sigma(\xi_1 t)\, d\xi}{\int \Phi^*_\sigma(\xi_1 t)\, \Phi_\sigma(\xi_1 t)\, d\xi} . \qquad (10.14)$$

Подставляя в это выражение (10.13) и учитывая (10.12), получаем

$$\langle O\rangle = \frac{\sum_{\mu\mu'\sigma\sigma'} O_{\sigma'\sigma}\, u_\mu(\sigma)\, u^*_{\mu'}(\sigma')\, \rho_{\mu\mu'}}{\sum_\mu \rho_{\mu\mu}} , \qquad (10.15)$$

где

$$\rho_{\mu\mu'} = \sum_n a_{\mu n} a^*_{\mu' n} . \qquad (10.16)$$

Определим матрицу

$$\rho_{\sigma\sigma'} = \sum_{\mu\mu'} u_\mu(\sigma)\, u^*_{\mu'}(\sigma')\, \rho_{\mu\mu'} . \qquad (10.17)$$

С помощью (10.15) и (10.17) получаем

$$\langle O\rangle = \frac{\sum_{\sigma\sigma'} O_{\sigma'\sigma}\, \rho_{\sigma\sigma'}}{\sum_\sigma \rho_{\sigma\sigma}} = \frac{Sp\, O\rho}{Sp\, \rho} . \qquad (10.18)$$

Матрица ρ носит название матрицы плотности. Если функция $\Phi(\xi,t)$ нормирована, то

$$Sp\,\rho = \sum_\mu \rho_{\mu\mu} = 1 . \qquad (10.19)$$

Для нормированной матрицы плотности

$$\langle O\rangle = Sp\, O\rho . \qquad (10.20)$$

Если матрица плотности известна, то с помощью (10.18) могут быть вычислены все возможные наблюдаемые. Таким образом, матрица плотности позволяет описать состояние системы.

В начале этого параграфа мы показали, что с помощью волновой функции не может быть описано состояние, в котором $\langle\vec{\sigma}\rangle = 0$. Очевидно, что такое состояние описывается матрицей плотности. Действительно, пусть $\rho = I/2$. Имеем

$$\langle\vec{\sigma}\rangle = Sp\,\tfrac{1}{2}\vec{\sigma} = 0.$$

Основываясь на определении матрицы плотности (I0.I6), (I0.I7), сформулируем теперь общие свойства матрицы ρ.

I. Матрица ρ – эрмитова матрица:

$$\rho^{+} = \rho. \qquad (I0.2I)$$

Действительно, имеем

$$\rho^{*}_{\sigma\sigma'} = \sum_{\mu\mu'} u_{\mu'}(\sigma')\,u^{*}_{\mu}(\sigma)\,\rho^{*}_{\mu\mu'} = \sum_{\mu\mu'} u_{\mu'}(\sigma')\,u^{*}_{\mu}(\sigma)\,\rho_{\mu'\mu} = \rho_{\sigma'\sigma}.$$

Нетрудно убедиться в том, что эрмитовость матрицы плотности обеспечивает вещественность средних значений эрмитовых операторов.

Действительно, пусть O – эрмитов оператор. Находим, что

$$\langle O\rangle^{*} = \sum_{\sigma,\sigma'} O^{*}_{\sigma\sigma'}\,\rho^{*}_{\sigma'\sigma} = \sum_{\sigma,\sigma'} O_{\sigma'\sigma}\,\rho_{\sigma\sigma'} = Sp\,O\rho = \langle O\rangle.$$

2. Если состояние описывается волновой функцией, то матрица плотности такого состояния удовлетворяет условию

$$Sp\,\rho^{2} = (Sp\,\rho)^{2}. \qquad (I0.22)$$

Действительно, пусть состояние описывается спиновой функцией u. Для среднего значения оператора O получаем

$$\langle O\rangle = \frac{u^{+}Ou}{u^{+}u} = \frac{\sum\limits_{\sigma\sigma'} O_{\sigma'\sigma}\,u_{\sigma}u^{*}_{\sigma'}}{\sum\limits_{\sigma} u_{\sigma}u^{*}_{\sigma}}. \qquad (I0.23)$$

Сравнивая (I0.23) и (I0.I8), мы заключаем: матрица плотности в данном случае равна

$$\rho_{\sigma\sigma'} = u_{\sigma}u^{*}_{\sigma'}. \qquad (I0.24)$$

Имеем

$$(\rho^{2})_{\sigma\sigma'} = \sum_{\sigma''} \rho_{\sigma\sigma''}\,\rho_{\sigma''\sigma'} = u_{\sigma}u^{*}_{\sigma'}\,Sp\,\rho,$$

т.е.

$$\rho^{2} = \rho\,Sp\,\rho.$$

Вычисляя шпур обеих частей этого равенства, получаем (I0.22). Ниже покажем, что (I0.22) является не только необходимым, но и достаточным условием того, что состояние описывается волновой функцией.

3. В общем случае матрица плотности удовлетворяет условию

$$\mathrm{Sp}\,\rho^2 \leq (\mathrm{Sp}\,\rho)^2. \tag{10.25}$$

Имеем

$$\mathrm{Sp}\,\rho^2 = \sum u_\mu(\sigma) u^*_{\mu'}(\sigma') \rho_{\mu\mu'} u_{\mu''}(\sigma') u^*_{\mu'''}(\sigma) \rho_{\mu''\mu'''} = \tag{10.26}$$
$$= \sum_{\mu\mu'} \rho_{\mu\mu'} \rho_{\mu'\mu} = \sum_{\mu\mu'} |\rho_{\mu\mu'}|^2.$$

Обратимся теперь к соотношению (10.16). Величина $\rho_{\mu\mu'}$ (при фиксированных μ и μ') может рассматриваться как скалярное произведение комплексных векторов a_μ (с компонентами $a_{\mu n}$) и $b_{\mu'}$ с компонентами $b_{\mu' n}$) В соответствии с неравенством Коши-Буняковского имеем

$$|(a_\mu b_{\mu'})|^2 \leq (a_\mu a^*_\mu)(b_{\mu'} b^*_{\mu'}).$$

Таким образом,

$$|\rho_{\mu\mu'}|^2 \leq \rho_{\mu\mu} \cdot \rho_{\mu'\mu'}. \tag{10.27}$$

Из (10.26) и (10.27) получаем неравенство (10.25).

Подсчитаем число вещественных параметров, которыми характеризуется матрица плотности. Для спина s матрица ρ – $(2s+1)\times(2s+1)$–матрица. Поскольку ρ – эрмитова матрица, $(2s+1)$ диагональных её элементов вещественны. $(2s+1)^2-(2s+1)$ недиагональных элементов матрицы плотности комплексны, но поскольку $\rho_{\sigma\sigma'} = \rho^*_{\sigma\sigma'}$, имеем всего вещественных параметров

$$2\,\frac{[(2s+1)^2-(2s+1)]}{2} + (2s+1) = (2s+1)^2. \tag{10.28}$$

Если матрица плотности нормирована, то она удовлетворяет дополнительному условию

$$\mathrm{Sp}\,\rho = 1.$$

В этом случае матрица плотности характеризуется

$$(2s+1)^2 - 1 \tag{10.29}$$

вещественных параметров.

Далее, из (10.14) и (10.18) очевидно, что

$$\rho_{\sigma\sigma'} = \int \phi^*_\sigma(\xi,t)\, \phi_{\sigma'}(\xi,t)\, d\xi.$$

Отсюда следует, что $\rho_{\sigma\sigma}$ представляет собой вероятность того, что проекция спина частиц на данное направление равна σ.

Приведем теперь матрицу плотности к диагональному виду. Имеем

$$\rho v_\nu = \rho_\nu v_\nu, \tag{10.30}$$

где индекс ν принимает $(2s+1)$ значений. Будем предполагать, что

$$(v_{\nu'}^{+} v_{\nu}) = \delta_{\nu'\nu} . \tag{I0.3I}$$

Далее функции v_ν удовлетворяют условию полноты

$$\sum_\nu v_\nu(\sigma) v_\nu^*(\sigma') = \delta_{\sigma\sigma'} . \tag{I0.32}$$

Запишем (I0.30) в виде

$$\sum_{\sigma''} \rho_{\sigma\sigma''} v_\nu(\sigma'') = \rho_\nu v_\nu(\sigma) .$$

Умножая это уравнение на $v_\nu^*(\sigma')$ и суммируя по ν, для матрицы плотности получаем следующее выражение:

$$\rho_{\sigma\sigma'} = \sum_\nu \rho_\nu v_\nu(\sigma) v_\nu^*(\sigma') . \tag{I0.33}$$

Собственные значения эрмитовой матрицы плотности ρ вещественны. Нетрудно видеть, что ρ_ν положительны. Действительно, умножим (I0.30) слева на v_ν^+. Получаем

$$\rho_\nu = (v_\nu^+ \rho_\nu v_\nu),$$

Подставляя в это выражение (I0.I6) и (I0.I7), имеем

$$\rho_\nu = \sum_n \Big(\sum_\mu (v_\nu^+ u_\mu) a_{\mu n}\Big)\Big(\sum_{\mu'} (v_\nu^+ u_{\mu'}) a_{\mu' n}\Big)^* \geqslant 0 . \tag{I0.34}$$

Если матрица плотности нормирована, то

$$Sp\,\rho = \sum_\nu \rho_\nu = 1 . \tag{I0.35}$$

Вычислим теперь с помощью (I0.33) среднее значение спинового оператора O. Предполагая, что матрица плотности нормирована, получаем

$$\langle O \rangle = Sp\,O\rho = \sum_\nu \rho_\nu (v_\nu^+ O v_\nu) = \sum_\nu \rho_\nu \langle O \rangle_\nu . \tag{I0.36}$$

Таким образом, для того, чтобы найти среднее значение любого спинового оператора необходимо вычислить среднее значение этого оператора в состоянии v_ν, умножить это среднее на вес ρ_ν и просуммировать по всем ν. Этот результат можно интерпретировать следующим образом: спиновое состояние всегда может быть описано "смесью" ($2s+1$) некогерентных функций v_ν, каждая из которых входит в "смесь" с вероятностью (с весом) ρ_ν.
В начале этого параграфа было показано, что не любое состояние может быть описано одной волновой функцией. Теперь мы видим, что любое спиновое состояние частиц со спином s можно описать

$(2s+1)$ некогерентными волновыми функциями, каждая из которых при вычислении средних берется со своим весом.
Такие состояния называют смешанными. Состояния, описываемые одной волновой функцией, называют чистыми.
Подчеркнем, что спиновое состояние частиц всегда описывается матрицей плотности. Выражение (10.33) является лишь представлением матрицы плотности. Такое представление не всегда однозначно. Так, состояние с равным нулю средним значением оператора спина описывается матрицей плотности

$$\rho_{\sigma\sigma'} = \frac{1}{2s+1} \sum_{\mu=-s}^{s} u_\mu(\sigma) u^*_\mu(\sigma'), \tag{10.37}$$

где u_μ – любая полная ортонормированная система функций.
Действительно, используя условие полноты функций u_μ, получаем

$$\langle \hat{s}_i \rangle = Sp\, \hat{s}_i \rho = \frac{1}{2s+1} \sum_{\sigma\sigma'} (\hat{s}_i)_{\sigma\sigma'} \sum_\mu u_\mu(\sigma) u^*_\mu(\sigma) = \frac{1}{2s+1} Sp\, \hat{s}_i.$$

Далее,

$$Sp\, \hat{s}_i = 0. \tag{10.38}$$

Для того, чтобы убедиться в справедливости этого последнего соотношения, используем соотношение

$$s_i s_k - s_k s_i = i e_{ikl} \hat{s}_l, \tag{10.39}$$

которому удовлетворяет оператор спина $\vec{s}$ (как и оператор любого момента). Вычислим шпур от обеих частей (10.39). Учитывая, что

$$Sp\, AB = \sum_{\sigma,\sigma'} A_{\sigma\sigma'} B_{\sigma'\sigma} \equiv \sum_{\sigma\sigma'} B_{\sigma'\sigma} A_{\sigma\sigma'} = Sp\, BA \tag{10.40}$$

(A и B – любые матрицы), получаем (10.38).
В п.2 было показано, что в случае, если спиновое состояние описывается волновой функцией, то

$$Sp\, \rho^2 = (Sp\, \rho)^2. \tag{10.41}$$

Покажем теперь, что (10.41) является достаточным условием того, что состояние описывается волновой функцией. Для этого подставим (10.33) в (10.41). Получаем

$$\sum_\nu \rho_\nu^2 = \left(\sum_\nu \rho_\nu\right)^2. \tag{10.42}$$

Напомним, что $\rho_\nu > 0$. Ясно, что при положительных ρ_ν соотношение (I0.42) может выполняться в случае, если только одно из ρ_ν отлично от нуля ($\rho_\nu = \delta_{\nu\nu_0}$). Матрица плотности имеет при этом вид

$$\rho_{\sigma\sigma'} = v_{\nu_0}(\sigma) v^*_{\nu_0}(\sigma').$$

Соответствующее состояние описывается, следовательно, волновой функцией.

В заключение подробно рассмотрим матрицу плотности для интересующего нас здесь случая частиц со спином I/2.
В этом и следующих параграфах нам придется вычислять шпуры от произведений матриц Паули. Изложим вначале основные правила вычисления таких шпуров.
Для вычисления шпура произведения любого числа матриц Паули следует использовать перестановочные соотношения

$$\sigma_i \sigma_k - \sigma_k \sigma_i = 2i e_{ikl} \sigma_l, \tag{I0.43}$$

$$\sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 2\delta_{ik}. \tag{I0.44}$$

Складывая эти соотношения, получаем

$$\sigma_i \sigma_k = \delta_{ik} + i e_{ikl} \sigma_l \tag{I0.45}$$

(последнее соотношение по существу представляет собой разложение матрицы $\sigma_i \sigma_k$ по полной системе 2x2 матриц, в которую входят I и σ_l).
Необходимо также учитывать, что под знаком шпура матрицы можно переставлять ($Sp\, AB = Sp\, BA$, см.(I0.40)).

С помощью (I0.40), (I0.43) и (I0.44) нетрудно показать, что

I. $$Sp\, \sigma_i = 0 . \tag{I0.46}$$

Действительно, вычисляя шпур от обеих частей (I0.43), получаем

$$e_{ikl}\, Sp\, \sigma_l = 0$$

(при произвольных i и k . Отсюда следует (I0.46).

2. $$Sp\, \sigma_i \sigma_k = 2\delta_{ik} . \tag{I0.47}$$

Действительно, имеем

$$Sp\, \sigma_i \sigma_k = Sp\,(2\delta_{ik} - \sigma_k \sigma_i) = 4\delta_{ik} - Sp\, \sigma_i \sigma_k .$$

Отсюда получаем (I0.47). Умножим (I0.47) на a_i и b_k ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ любые векторы) и просуммируем по i и k . Получаем

$$Sp(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = 2(\vec{a}\vec{b}) . \tag{I0.48}$$

3. $\quad Sp\,\sigma_i\sigma_k\sigma_l = 2ie_{ikl}\,.$ (I0.49)

Действительно, учитывая (I0.46) и (I0.47), имеем

$$Sp\,\sigma_i\sigma_k\sigma_l = Sp(\delta_{ik} + ie_{ikm}\sigma_m)\sigma_l = 2ie_{ikl}\,.$$

Из (I0.48) получаем, что

$$Sp(\vec\sigma\vec a)(\vec\sigma\vec b)(\vec\sigma\vec c) = 2i(\vec a\times\vec b)\vec c \qquad (I0.50)$$

($\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$ - произвольные векторы).

4. $\quad Sp\,\sigma_i\sigma_k\sigma_l\sigma_m = 2\delta_{ik}\delta_{lm} - 2\delta_{il}\delta_{km} + 2\delta_{im}\delta_{kl}\,.$ (I0.5I)

Действительно, имеем

$$Sp\,\sigma_i\sigma_k\sigma_l\sigma_m = Sp(2\delta_{ik} - \sigma_k\sigma_i)\sigma_l\sigma_m = 4\delta_{ik}\delta_{lm} - Sp\,\sigma_k(2\delta_{il} - \sigma_l\sigma_i)\sigma_m =$$

$$= 4\delta_{ik}\delta_{lm} - 4\delta_{il}\delta_{km} + Sp\,\sigma_k\sigma_l(2\delta_{im} - \sigma_m\sigma_i) =$$

$$= 4\delta_{ik}\delta_{lm} - 4\delta_{il}\delta_{km} + 4\delta_{im}\delta_{kl} - Sp\,\sigma_i\sigma_k\sigma_l\sigma_m$$

Отсюда получаем (I0.5I). Из (I0.5I) находим, что

$$Sp(\vec\sigma\vec a)(\vec\sigma\vec b)(\vec\sigma\vec c)(\vec\sigma\vec d) = 2(\vec a\vec b)(\vec c\vec d) - 2(\vec a\vec c)(\vec b\vec d) + 2(\vec a\vec d)(\vec b\vec c). \qquad (I0.52)$$

Отметим, что шпур произведения четырех матриц Паули можно было бы также вычислить, дважды воспользовавшись соотношением (I0.45). Это позволило бы свести вычисление шпура четырех матриц Паули к вычислению шпура двух матриц Паули. Шпур произведения пяти матриц Паули можно вычислить аналогично (воспользоваться (I0.45) и свести шпур пяти матриц к шпурам четырех и трех матриц и т.д.).

Перейдем теперь к рассмотрению матрицы плотности для частиц со спином I/2. Очевидно, что в этом случае ρ - 2x2 -матрица. Такую матрицу всегда можно разложить по полной системе, в которую входят I и три матрицы Паули. Имеем

$$\rho = a + \sum_k b_k\sigma_k\,. \qquad (I0.53)$$

Поскольку матрица плотности эрмитова, то очевидно, что

$$a = a^*, \qquad b = b^*.$$

Далее из условия нормировки находим, что

$$Sp\rho = 2a = 1 \ ; \quad a = \frac{1}{2} .$$

Матрица плотности частиц со спином I/2 характеризуется, следовательно тремя вещественными параметрами (в соответствии с (I0.29)). Вычислим поляризацию частиц, состояние которых описывается матрицей плотности (I0.53). Получаем

$$\langle \sigma_i \rangle = P_i = Sp\sigma_i\rho = 2b_i \ ; \quad b_i = \frac{1}{2} P_i .$$

Окончательно имеем

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}\vec{P}). \tag{I0.54}$$

Итак, спиновое состояние частиц со спином I/2 полностью характеризуется вектором поляризации $\vec{P}$.

Далее матрица плотности любого состояния удовлетворяет неравенству (I0.25).

Из (I0.25) и (I0.54) получаем

$$Sp\rho^2 = \frac{1}{4} Sp(1 + 2\vec{\sigma}\vec{P} + (\vec{\sigma}\vec{P})^2) = \frac{1}{2}(1 + P^2) \leq 1.$$

Отсюда следует, что

$$P^2 \leq 1 \tag{I0.55}$$

(в случае $Sp\rho^2 = 1, P^2 = 1$, и система описывается волновой функцией).

Найдем теперь собственные функции и собственные значения матрицы плотности (I0.54).

Запишем вектор поляризации в виде

$$\vec{P} = P\vec{n} , \tag{I0.56}$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор.

Мы будем предполагать, что $P \neq 0$. Имеем

$$\frac{1}{2}(1 + P\vec{\sigma}\vec{n})v_{\pm} = \rho_{\pm} v_{\pm} .$$

Перепишем следующим образом это уравнение:

$$\vec{\sigma}\vec{n} v_{\pm} = r_{\pm} v_{\pm} , \tag{I0.57}$$

где

$$r_{\pm} = \frac{2\rho_{\pm} - 1}{P} . \tag{I0.58}$$

Очевидно, что

$$r_{\pm} = \pm 1 . \tag{10.59}$$

Действительно, умножая (10.57) на $(\vec{\sigma}\vec{n})$ и учитывая, что $(\vec{\sigma}\vec{n})^2 = 1$, получаем $v_{\pm} = r_{\pm}(\vec{\sigma}\vec{n})v_{\pm} = r_{\pm}^2 v_{\pm}$. Отсюда получаем (10.59).
Далее из (10.58) и (10.59) следует, что

$$\rho_{\pm} = \frac{1 \pm P}{2} . \tag{10.60}$$

Окончательно имеем

$$\rho_{\sigma\sigma'} = \frac{1+P}{2} v_+(\sigma) v_+^*(\sigma') + \frac{1-P}{2} v_-(\sigma) v_-^*(\sigma') . \tag{10.61}$$

Итак, матрица плотности, описывающая состояние с поляризацией $\vec{P} = P\vec{n}$ может быть представлена в виде некогерентной смеси собственных функций оператора проекции спина на направление $\vec{n}$. При этом функция $v_+ (v_-)$, описывающая состояние с проекцией 1(– 1), входит в смесь с весом $\frac{1+P}{2}$, ($\frac{1-P}{2}$). Очевидно, что в случае $P = 1$, спиновое состояние описывается функцией v_+ , а в случае $P = -1$ – функцией v_- .

В заключение отметим, что выражение (10.61) можно записать в другом виде. Именно, из (10.57) очевидно, что оператор $\frac{1+\vec{\sigma}\vec{n}}{2}$ ($\frac{1-\vec{\sigma}\vec{n}}{2}$) при действии на v_+ (v_-) дает v_+ (v_-), а при действии на v_- (v_+) дает нуль ($\frac{1\pm\vec{\sigma}\vec{n}}{2}$ – проецирующие операторы). Имеем

$$\begin{aligned} v_+(\sigma) v_+^*(\sigma') &= \sum_{\sigma''} \left(\frac{1+\vec{\sigma}\vec{n}}{2}\right)_{\sigma\sigma''} v_+(\sigma'') v_+^*(\sigma') = \\ &= \sum_{\sigma''} \left(\frac{1+\vec{\sigma}\vec{n}}{2}\right)_{\sigma\sigma''} \sum_{r=\pm 1} v_r(\sigma'') v_r^*(\sigma') = \left(\frac{1+\vec{\sigma}\vec{n}}{2}\right)_{\sigma\sigma'} . \end{aligned} \tag{10.62}$$

Отметим, что при получении этого соотношения мы использовали условие полноты

$$\sum_r v_r(\sigma'') v_r^*(\sigma') = \delta_{\sigma''\sigma'} .$$

Аналогично находим

$$v_-(\sigma) v_-^*(\sigma') = \left(\frac{1-\vec{\sigma}\vec{n}}{2}\right)_{\sigma\sigma'} . \tag{10.63}$$

С помощью (10.62) и (10.63) для матрицы плотности получаем следующее выражение:

$$\rho = \frac{(1+P)}{2}\,\frac{1+\vec{\sigma}\vec{n}}{2} + \frac{(1-P)}{2}\,\frac{1-\vec{\sigma}\vec{n}}{2}\,. \tag{10.64}$$

На этом закончим рассмотрение спиновой матрицы плотности. Мы видели, что в общем случае спиновое состояние частиц описывается матрицей плотности, а не волновой функцией. Мы кратко обсудили здесь квантовомеханическую причину этого (состояние невзаимодействующих подсистем описывается в общем случае суммой произведений функций, относящихся к каждой из подсистем; это приводит к тому, что о второй подсистеме "забыть" нельзя). Основываясь на том, что волновая функция "большой" системы представляет собой сумму волновых функций подсистем (одной из которых является пучок частиц со спином), мы получили основные соотношения, которым обязана удовлетворять матрица плотности (в аксиоматическом подходе их нужно было бы постулировать). Наконец, была подробно рассмотрена матрица плотности для частиц со спином I/2.

§ II. Рассеяние частиц со спинами I/2 и 0. Матрица плотности рассеянных частиц

В этом параграфе будет подробно рассмотрено рассеяние частиц со спинами I/2 и 0. При этом мы учтем, что начальное спиновое состояние частиц описывается матрицей плотности. Получим вначале сечение рассеяния в СЦИ. Мы показали в предыдущем параграфе, что матрицу плотности всегда можно представить в виде некогерентной смеси волновых функций v_ν, входящих в смесь с весами ρ_ν. Величина

$$(u_\mu^+ T(\vec{p}', p)\, v_\nu)$$

представляет собой амплитуду вероятности обнаружения конечных частиц в спиновом состоянии u_μ, если начальные частицы находились в состоянии v_ν. Для того, чтобы получить дифференциальное сечение, величину $|u_\mu^+ T(\vec{p}', p)\, v_\nu|^2$ следует умножить на ρ_ν и просуммировать по μ и ν (регистрируются частицы во всех возможных спиновых состояниях). Полученное таким способом выражение следует умножить также на кинематический множитель $(2\pi)^4 \mu^2$, происходящий от интегрирования δ-функций (см.(3.9)). Имеем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^4 \mu^2 \sum_{\mu\nu} | u_\mu^+ T(\vec{p}', \vec{p}) v_\nu)|^2 \rho_\nu . \qquad \text{(II.I)}$$

Очевидно, что

$$(u_\mu^+ T(\vec{p}', \vec{p}) v_\nu)^* = (u^*_\mu(\sigma') T_{\sigma'\sigma}(\vec{p}', \vec{p}) v_\nu(\sigma))^* = (v_\nu^+ T^+(\vec{p}', \vec{p}) u_\mu).$$

Далее, используя условие полноты

$$\sum_\mu u_\mu(\sigma''') u^*_\mu(\sigma') = \delta_{\sigma'''\sigma'} , \qquad \text{(II.2)}$$

для сечения получаем следующее выражение:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^4 \mu^2 \sum u^*_\mu(\sigma') T_{\sigma'\sigma}(\vec{p}', \vec{p}) \Big(\sum_\nu v_\nu(\sigma) v^*_\nu(\sigma'') \rho_\nu\Big) T^+_{\sigma''\sigma'''}(\vec{p}' \vec{p}) \times$$
$$\times u_\mu(\sigma''') = (2\pi)^4 \mu^2 \operatorname{Sp} T(\vec{p}', \vec{p}) \rho_0 T^+(\vec{p}', \vec{p}) . \qquad \text{(II.3)}$$

где

$$(\rho_0)_{\sigma\sigma''} = \sum_\nu \rho_\nu v_\nu(\sigma) v^*_\nu(\sigma'')$$

– начальная матрица плотности.

Если спиновое состояние начальных частиц описывается матрицей плотности, то очевидно, что и спиновое состояние конечных частиц также должно описываться матрицей плотности. Конечная матрица плотности определяется начальной матрицей плотности и матрицей $T(\vec{p}', \vec{p})$, которая зависит от потенциала взаимодействия. Найдем эту связь. Повторяя выкладки, которые привели нас к выражению (4.I8), в рассматриваемом случае рассеяния частиц со спинами I/2 и 0 для точного решения уравнения Шредингера получаем (начальное состояние описывается функцией $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} v_\nu e^{i\vec{p}\vec{r}}$)

$$\psi_{\vec{p},\nu}(\vec{r},\sigma,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iE_p t} \Big(e^{i\vec{p}\vec{r}} v_\nu(\sigma) + \int \frac{e^{i\vec{p}''\vec{r}} \sum_\mu u_\mu(\sigma) (u_\mu^+ T(\vec{p}'', \vec{p}) v_\nu)\, d\vec{p}''}{E_p - E_{p''} + i\varepsilon} \qquad \text{(II.4)}$$

Очевидно, что (см.§ 4), при $r \to \infty$ эта функция имеет асимптотику

$$\psi_{\vec{p},\nu}(\vec{r},\sigma,t) \simeq e^{-iE_p t} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Big(e^{i\vec{p}\vec{r}} v_\nu(\sigma) + (-(2\pi)^2 \mu) \sum_\mu u_\mu(\sigma) (u_\mu T(\vec{p}', \vec{p}) v_\nu) \frac{e^{ipr}}{r} \Big) \qquad \text{(II.5)}$$

Рассмотрим коэффициент при расходящейся волне. Используя условие полноты (II.2), получаем

$$\sum_\mu u_\mu(\sigma)\left(u_\mu^+ T(\vec{p}\,',\vec{p})v_\nu\right) = \left(T(\vec{p}\,',\vec{p})v_\nu\right)_\sigma . \qquad (II.6)$$

Далее определим матрицу

$$M(\vec{p}\,',\vec{p}) = -(2\pi)^2\mu\, T(\vec{p}\,',\vec{p}) . \qquad (II.7)$$

Матрицу $M(\vec{p}\,',\vec{p})$ называют матрицей рассеяния. Из (II.6) и (II.7) для асимптотики функции $\psi_{\bar{p},\nu}(\bar{r},t)$ находим

$$\psi_{\bar{p},\nu}(\bar{r},t) \simeq e^{-iE_p t}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(e^{i\vec{p}\vec{r}}v_\nu(\sigma) + \left(M(\vec{p}\,',\vec{p})v_\nu\right)_\sigma \frac{e^{ipr}}{r}\right) . \qquad (II.8)$$

Функция

$$\chi_\nu(\sigma) = \left(M(\vec{p}\,',\vec{p})v_\nu\right)_\sigma \qquad (II.9)$$

описывает спиновое состояние рассеянных частиц в случае, когда спиновое состояние начальных частиц описывается функцией v_ν. Если функция v_ν входит в смесь с весом ρ_ν, то для поляризации конечных частиц получаем

$$\langle\sigma_i\rangle = \frac{\sum_\nu(\chi_\nu^+\,\sigma_i\,\chi_\nu)\rho_\nu}{\sum_\nu(\chi_\nu^+\chi_\nu)\rho_\nu} . \qquad (II.10)$$

Рассмотрим числитель этого выражения. Имеем

$$\sum(\chi_\nu^+\sigma_i\chi_\nu)\rho_\nu = \sum \chi_\nu^*(\sigma')(\sigma_i)_{\sigma'\sigma}\chi_\nu(\sigma)\rho_\nu =$$

$$= \sum(\sigma_i)_{\sigma'\sigma} M_{\sigma\sigma''}\Big(\sum_\nu v_\nu(\sigma'')v_\nu^*(\sigma''')\rho_\nu\Big)M^+_{\sigma'''\sigma'} = Sp\,\sigma_i M\rho_0 M^+, \qquad (II.11)$$

где

$$(\rho_0)_{\sigma''\sigma'''} = \sum_\nu \rho_\nu v_\nu(\sigma'')v_\nu^*(\sigma''') \qquad (II.12)$$

– матрица плотности начальных частиц.
Из (II.10) и (II.11) находим

$$\langle\sigma_i\rangle = \frac{Sp\,\sigma_i M\rho_0 M^+}{Sp\,M\rho_0 M^+} . \qquad (II.13)$$

Сравнивая теперь (II.13) с общим выражением (10.18), мы заключаем, что спиновая матрица плотности конечных (рассеянных) частиц равна

$$\rho = M\rho_0 M^+. \tag{II.14}$$

С помощью (II.7) и (II.14) получаем

$$Sp\,\rho = (2\pi)^4\mu^2\, Sp\,T\rho_0 T^+. \tag{II.15}$$

Сравним это выражение с (II.3). Мы приходим к выводу, что конечная матрица плотности нормирована следующим образом:

$$Sp\,\rho = \frac{d\sigma}{d\Omega}. \tag{II.16}$$

Из изложенного очевидно, что для любого спина S матрица плотности конечных частиц связана с матрицей плотности начальных частиц и матрицей рассеяния соотношением

$$\rho = M\rho_0 M^+ \tag{II.17}$$

(ρ , M и ρ_0 – ($2s+1$)$\times$($2s+1$) – матрицы). Среднее значение любого спинового оператора O в рассеянной волне равно

$$\langle O\rangle = \frac{Sp\,O\rho}{Sp\,\rho}. \tag{II.18}$$

Конечная матрица плотности нормирована на дифференциальное сечение

$$Sp\,\rho = \frac{d\sigma}{d\Omega}. \tag{II.19}$$

Для начальной матрицы плотности имеем $Sp\,\rho_0 = 1$.

Как было показано в § 9, из инвариантности относительно вращений и отражений следует, что в рассматриваемом случае рассеяния частиц со спинами 1/2 и 0, матрица $T(\vec{p}\,',\vec{p})$ имеет следующий общий вид:

$$T(\vec{p}\,',\vec{p}) = \alpha + \beta\vec{\sigma}\vec{n},$$

где α и β функции скалярных произведений $\vec{p}\vec{p}\,'$ и $\vec{p}^{\,2}=\vec{p}\,'^2$, а $\vec{n} = (\vec{p}\times\vec{p}\,')/|(\vec{p}\times\vec{p}\,')|$.

Для матрицы рассеяния $M(\vec{p}\,',\vec{p})$ получаем, таким образом,

$$M(\vec{p}\,',\vec{p}) = a + b\vec{\sigma}\vec{n} \tag{II.20}$$

($a = -(2\pi)^2\mu\alpha$, $b = -(2\pi)^2\mu\beta$). С помощью (II.15), (II.16) и

(II.20) нетрудно получить общие выражения для сечения и поляризации конечных частиц. Эти вычисления будут проделаны в конце параграфа. Мы начнем с вычисления сечения рассеяния в случае, когда поляризация начальных частиц ортогональна плоскости рассеяния (плоскости, образуемой векторами $\vec{p}$ и $\vec{p}\,'$). При этом вначале не будет использоваться развитая техника матрицы плотности (соотношения (II.17 - (II.19)).

Итак, пусть вектор поляризации начальных частиц равен

$$\vec{P}_0 = P_0 \vec{n}_0 ,$$

где вектор $\vec{n}_0$ ортогонален плоскости рассеяния. Спиновое состояние частиц с поляризацией $\vec{P}_0$ может быть описано некогерентной смесью собственных функций оператора $(\vec{\sigma}\vec{n}_0)$:

$$(\vec{\sigma}\vec{n}_0)\, v_+ = v_+ \ ; \ (\vec{\sigma}\vec{n}_0)\, v_- = - v_- ,$$

входящих в смесь с весами $\frac{1+P_0}{2}$ и $\frac{1-P_0}{2}$.

Рассмотрим в СЦИ рассеяние налево ($\vec{n} = \vec{n}_0$) на угол θ (см.рис.9). Амплитуды рассеяния налево частиц со спином вверх и со спином вниз соответственно равны

$$(v_\pm^+ (a + b\vec{\sigma}\vec{n}_0)\, v_\pm) = a \pm b. \tag{II.21}$$

Для сечения рассеяния получаем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_L = \frac{1}{2}(|a+b|^2 + |a-b|^2) + \frac{1}{2}P_0(|a+b|^2 - |a-b|^2) = \\ = (|a|^2 + |b|^2) + 2\,\mathrm{Re}\, ab^* P_0 . \tag{II.22}$$

Первый член этого выражения представляет собой сечение рассеяния в случае, когда начальные частицы неполяризованы. Второй член характеризует вклад в сечение поляризации начальных частиц. Этот последний член отличен от нуля, только в случае, если сечения рассеяния частиц со спином вверх и со спином вниз разные (как a так и b должны быть отличны от нуля; кроме того, разность фаз a и b не должна равняться $\pi/2$).

Рассмотрим теперь рассеяние направо ($\vec{n} = -\vec{n}_0$) на тот же угол θ. Амплитуды рассеяния направо частиц со спином вверх и со спином вниз соответственно равны

$$(v_\pm^+ (a - b\vec{\sigma}\vec{n}_0)\, v_\pm) = a \mp b. \tag{II.23}$$

Подчеркнем, что в (II.21) и (II.23) входят одни и те же a и b (a и b зависят от энергии и косинуса угла рассеяния).

Для дифференциального сечения рассеяния направо получаем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R = \frac{1}{2}\left[|a-b|^2+|a+b|^2\right]+\frac{1}{2}P_0\left[|a-b|^2-|a+b|^2\right] = \tag{II.24}$$
$$= \left(|a|^2+|b|^2\right) - 2\,\mathrm{Re}\,ab^* P_0 .$$

Как видно из (II.22) и (II.24) вклад поляризации начальных частиц в сечения рассеяния налево и направо равны по величине и отличаются знаками. Это связано с тем, что амплитуда рассеяния налево частиц со спином вверх (вниз) равна амплитуде рассеяния направо частиц со спином вниз (вверх).

Определим лево-правую асимметрию

$$A_{LR} = \left(\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_L - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R\right) \Big/ \left(\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_L + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R\right). \tag{II.25}$$

Из (II.23) и (II.24) получаем

$$A_{LR} = \frac{2\,\mathrm{Re}\,ab^*}{|a|^2+|b|^2} . \tag{II.26}$$

Вычислим теперь поляризацию конечных частиц, возникающую в случае, когда начальные частицы неполяризованы. Спиновое состояние начальных частиц может быть описано некогерентной смесью функций v_+ и v_-, входящих в смесь с одинаковыми весами 1/2. Рассмотрим рассеяние налево. Спиновое состояние конечных частиц описывается, очевидно, смесью функций ($a+b$) v_+ и $(a-b)v_-$, каждая из которых берется с весом 1/2. Учитывая, что

$$v_\pm^+ \vec{\sigma}\, v_\pm = \pm \vec{n}_0$$

для поляризации рассеянных частиц получаем следующее выражение:

$$\vec{P} = \frac{\frac{1}{2}|a+b|^2 - \frac{1}{2}|a-b|^2}{\frac{1}{2}|a+b|^2+\frac{1}{2}|a-b|^2}\vec{n} = \frac{2\,\mathrm{Re}\,ab^*}{|a|^2+|b|^2}\vec{n} . \tag{II.27}$$

Очевидно, что поляризация конечных частиц (в случае, если начальные частицы неполяризованы) возникает (как и лево-правая асимметрия) только в случае, если амплитуды рассеяния частиц со спином вверх и со спином вниз разные. Более того, сравнивая

(II.26) и (II.27), мы заключаем, что

$$A_{LR} = P \cdot P_0 , \qquad (\vec{P} = P\vec{n}).$$

Итак, лево-правая асимметрия равна произведению поляризации начальных частиц P_0 на поляризацию конечных частиц P, возникающую при рассеянии неполяризованных частиц. Это важное соотношение нашло самое широкое применение в поляризационных экспериментах. Мы не один раз будем возвращаться к его обсуждению.

Теперь вычислим сечение частиц со спином 0 на поляризованных частицах со спином I/2. При этом мы, естественно, будем использовать развитую общую технику матрицы плотности и матрицы рассения. Для дифференциального сечения в СЦИ имеем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\vec{P}_0} = Sp M \frac{1}{2}(1+\vec{\sigma}\vec{P}_0) M^+ = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 (1+\vec{P}_0\vec{A}). \qquad \text{(II.28)}$$

Здесь $\vec{P}_0$ - вектор поляризации начальных частиц,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = Sp M \frac{1}{2} M^+ - \qquad \text{(II.29)}$$

сечение рассеяния частиц со спином 0 на неполяризованных частица со спином I/2, а

$$\vec{A} = \frac{Sp M \frac{1}{2}\vec{\sigma} M^+}{Sp M \frac{1}{2} M^+} . \qquad \text{(II.30)}$$

Матрица M дается общим выражением (II.20).
Вычисление шпуров упрощается, если учесть, что

$$(\vec{\sigma}\vec{n})^2 = \vec{n}^2 = 1 .$$

Например, имеем

$$Sp(\vec{\sigma}\vec{n})\,\sigma_i(\vec{\sigma}\vec{n}) = Sp\,\sigma_i(\vec{\sigma}\vec{n})^2 = Sp\,\sigma_i = 0$$

и т.д. Получаем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = |a|^2 + |b|^2 , \qquad \text{(II.31)}$$

$$\vec{A} = \frac{2\,\mathrm{Re}\, a b^*}{|a|^2+|b|^2}\vec{n}. \qquad \text{(II.32)}$$

Вектор $\vec{A}$ называют вектором асимметрии. Мы показали, что вектор $\vec{A}$ направлен по $\vec{n}$:

$$\vec{A} = A\vec{n}, \tag{II.33}$$

где

$$A = \frac{2\,\mathrm{Re}\,ab^*}{|a|^2 + |b|^2}. \tag{II.34}$$

Из (II.28) и (II.33) очевидно, что для определения A из опыта необходимо направить поляризацию начальных частиц по (и против) направлению нормали к плоскости рассеяния и измерить асимметрию

$$\left[\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{P_0\vec{n}} - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{-P_0\vec{n}}\right] \Big/ \left[\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{P_0\vec{n}} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{-P_0\vec{n}}\right] = P_0 A. \tag{II.35}$$

Найдем теперь поляризацию рассеянных частиц в случае, когда начальные частицы неполяризованы. Имеем

$$\vec{P} = \langle\vec{\sigma}\rangle = \frac{Sp\,\vec{\sigma} M \frac{1}{2} M^+}{Sp\,M \frac{1}{2} M^+}. \tag{II.36}$$

Вычисляя шпуры, получаем

$$\vec{P} = P\vec{n}, \tag{II.37}$$

где

$$P = \frac{2\,\mathrm{Re}\,ab^*}{|a|^2 + |b|^2}. \tag{II.38}$$

Сравнивая (II.32) и (II.37), мы приходим к заключению, что вектор поляризации равен вектору асимметрии

$$\vec{P} = \vec{A}. \tag{II.39}$$

Имеем также

$$P = A. \tag{II.40}$$

Соотношение $\vec{P} = \vec{A}$ используется при измерении поляризации, возникающей при рассеянии неполяризованных частиц. Схема соответствующего эксперимента представлена на рис.10.

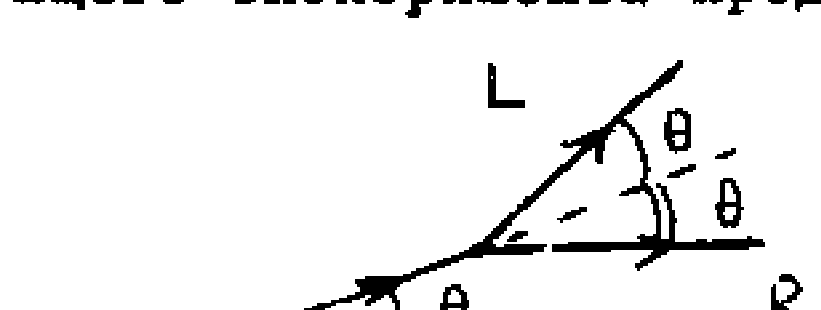

Рис.10. Схема двойного опыта

Рассмотрим двойное рассеяние в одной и той же плоскости частиц со спином I/2 на частицах со спином 0 (скажем, протонов на ^{12}C). Будем предполагать, что частицы, падающие на первую мишень, неполяризованы и что углы первого и второго рассеяний одинаковы. Поляризация частиц, возникающая при рассеянии на первой мишени, равна $\vec{P} = P\vec{n}$. Сечение рассеяния на второй мишени налево (в ту же сторону, что и в первом рассеянии; соответствующие векторы $\vec{n}$ в первом и втором рассеянии при этом будут одинаковы) в соответствии с (II.39) равно

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_L = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 (1 + P^2) . \qquad (II.41)$$

При рассеянии на тот же угол направо получаем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 (1 - P^2). \qquad (II.42)$$

Таким образом, лево-правая асимметрия во втором рассеянии равна

$$A_{LR} = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_L - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_L + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R} = P^2. \qquad (II.43)$$

Измерение A_{LR} позволяет, следовательно, определить P^2 (энергии частиц, падающих на первую и вторую мишени, разные; отметим, что в (II.43) этой разницей в энергиях мы пренебрегли).

Мы показали, что вектор поляризации (асимметрии) направлен по нормали к плоскости рассеяния $\vec{n}$. Этот результат является общим и основан только на принципах симметрии. Мы его получили, однако, путем вычислений шпуров. Полезно увидеть этот результат непосредственно из принципов симметрии.

Запишем

$$P_i(\vec{p}\,',\vec{p}) = \frac{Sp\,\sigma_i M(\vec{p}\,',\vec{p})\,M^+(\vec{p}\,',\vec{p})}{Sp\,M(\vec{p}\,',\vec{p})\,M^+(\vec{p}\,',\vec{p})} . \qquad (II.44)$$

Из инвариантности относительно вращений следует, что

$$M(\vec{p}\,',\vec{p}) = U_R^{-1} M(\vec{p}\,'_R,\vec{p}_R)\,U_R , \qquad (II.45)$$

где

$$U_R \sigma_i U_R^{-1} = a_{ki}\sigma_k, (\vec{P}_R)_i = a_{ik}P_k \quad (r_i = a_{ki} r_k'). \quad (II.46)$$

(см.§ 8). Подставляя (II.45) в (II.44) и, используя (II.46), получаем

$$P_i(\vec{p}', \vec{p}) = a_{ki} P_k(\vec{p}_R', \vec{p}_R). \quad (II.47)$$

Из этого соотношения следует, что поляризация P_i при вращениях преобразуется как вектор.

Далее из инвариантности относительно инверсии получаем

$$M(\vec{p}', \vec{p}) = U_P^{-1} M(-\vec{p}', -\vec{p}) U_P \quad , \quad (II.48)$$

где

$$U_P \sigma_i U_P^{-1} = \sigma_i \, . \quad (II.49)$$

Подставляя (II.48) в (II.44), находим

$$P_i(\vec{p}', \vec{p}) = P_i(-\vec{p}', -\vec{p}) \, . \quad (II.50)$$

Итак, поляризация P_i является псевдовектором. С другой стороны, поляризация может зависеть только от векторов $\vec{p}$ и $\vec{p}\,'$. Единственным псевдовектором, который может быть построен из $\vec{p}$ и $\vec{p}'$, является $(\vec{p} \times \vec{p}')$.

Таким образом, из инвариантности относительно вращений и отражений следует, что $\vec{P} = P\vec{n}$.

Разумеется этот результат можно было бы получить сразу, без каких бы то ни было выкладок. Мы проделали эти выкладки по двум причинам. Во-первых, развитый подход будет использоваться в других менее очевидных случаях. Во-вторых, мы хотели подчеркнуть, что поляризация конечных частиц является псевдовектором только в случае, если взаимодействие сохраняет четность (матрица рассеяния удовлетворяет (II.48)). Из изложенного ясно, что в случае, если четность не сохраняется, вектор поляризации конечных частиц будет обладать компонентами, лежащими в плоскости рассеяния.

Итак, в этом параграфе мы получили выражение для спиновой матрицы плотности рассеянных частиц. Было подробно рассмотрено рассеяние частиц со спинами I/2 и 0 и показано, что вектор асимметрии, характеризующий вклад начальной поляризации в сечение рассеяния, равен вектору конечной поляризации, возникшей в случае, если начальные частицы неполяризованы.

§ 12. Матрица рассеяния двух частиц со спином 1/2

Перейдем теперь к рассмотрению рассеяния частиц со спином 1/2 на частицах со спином 1/2 (типичный пример - рассеяние нуклонов на нуклонах). С технической точки зрения эта задача намного сложнее, чем рассмотренная выше задача рассеяния частиц со спинами 1/2 и 0. Многие полученные ранее соотношения окажутся, однако, справедливыми и в рассматриваемом здесь случае.

Как обычно, вначале предположим, что спиновое состояние начальных частиц (частиц с относительным импульсом $\vec{p}$) описывается спиновыми функциями. Пусть первая частица описывается функцией $u_{\mu_1}(\sigma_1)$, а вторая - функцией $u_{\mu_2}(\sigma_2)$ (μ_1 и μ_2 - проекции спинов первой и второй частиц). Нас будет интересовать амплитуда вероятности обнаружения конечных частиц (частиц с относительным импульсом $\vec{p}'$) в спиновом состоянии $u_{\mu_1'}(\sigma_1)u_{\mu_2'}(\sigma_2)$. Эта амплитуда пропорциональна матричному элементу

$$T_{\vec{p}'\mu_1'\mu_2';\vec{p}\mu_1\mu_2} = \tag{12.1}$$

$$= \sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_1'\sigma_2'} u^*_{\mu_1'}(\sigma_1')\, u^*_{\mu_2'}(\sigma_2')\, T_{\sigma_1'\sigma_2';\sigma_1\sigma_2}(\vec{p}',\vec{p})\, u_{\mu_1}(\sigma_1)\, u_{\mu_2}(\sigma_2) .$$

Здесь

$$T_{\sigma_1'\sigma_2';\sigma_1\sigma_2}(\vec{p}',\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-i\vec{p}'\vec{r}}\, T_{\sigma_1'\sigma_2'\,\sigma_1\sigma_2}(\vec{r})\, e^{i\vec{p}\vec{r}}\, d\vec{r}, \tag{12.2}$$

где

$$T(\vec{r}) = V(\vec{r}) + V(\vec{r})\,\frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0(\vec{r}) + i\varepsilon}\,V(\vec{r}) + \ldots .$$

Потенциал взаимодействия зависит от расстояния между частицами (сохранение полного импульса) и действует на спиновые переменные обеих частиц.

Ответим на вопрос о том, какой общий вид имеет матрица $T_{\sigma_1'\sigma_2'\sigma_1\sigma_2}$. При этом вначале будем основываться только на предположении об инвариантности взаимодействия относительно вращений и отражений.

Напомним, что I и три матрицы Паули σ_i образуют полную систему 2x2 матриц. Получаем

$$T_{\sigma_1'\sigma_2';\sigma_1\sigma_2} = A_{\sigma_2'\sigma_2}(I_1)_{\sigma_1'\sigma_1} + \sum_i B^i_{\sigma_2'\sigma_2}(\sigma_{1i})_{\sigma_1'\sigma_1} \qquad (12.3)$$

(индекс I означает, что соответствующие матрицы действуют на спиновые переменные первой частицы). Далее для 2x2 матриц A имеем B^i

$$A_{\sigma_2'\sigma_2} = a(I_2)_{\sigma_2'\sigma_2} + \sum_i a_i(\sigma_{2i})_{\sigma_2'\sigma_2},$$
$$B^i_{\sigma_2'\sigma_2} = b_i(I_2)_{\sigma_2'\sigma_2} + \sum_k b_{ik}(\sigma_{2k})_{\sigma_2'\sigma_2}. \qquad (12.4)$$

Подставляя (I2.4) в (I2.3), для T -матрицы находим

$$T_{\sigma_1'\sigma_2';\sigma_1\sigma_2} = a(I_1)_{\sigma_1'\sigma_1}(I_2)_{\sigma_2'\sigma_2} + \sum_i a_i(I_1)_{\sigma_1'\sigma_1}(\sigma_{2i})_{\sigma_2'\sigma_2} +$$
$$+ \sum_i b_i(\sigma_{1i})_{\sigma_1'\sigma_1}(I_2)_{\sigma_2'\sigma_2} + \sum_{ik} b_{ik}(\sigma_{1i})_{\sigma_1'\sigma_1}(\sigma_{2k})_{\sigma_2'\sigma_2}. \qquad (12.5)$$

Коэффициенты a, a_i, b_i и b_{ik} зависят от $\vec{p}$ и $\vec{p}\,'$. Вид этой зависимости определяется, как мы увидим, принципами инвариантности. Запишем вначале (I2.5) в матричном виде. Для этого введем прямое произведение матриц. Пусть A и B - соответственно $n\times n$ и $m \times m$ матрицы. Прямое произведение этих матриц $A\times B$ определяется следующим образом:

$$(A\times B)_{\alpha'\beta';\alpha\beta} = A_{\alpha\alpha'}B_{\beta'\beta} \qquad (12.6)$$

(строки и столбцы матрицы $A\times B$ нумеруются набором двух параметров; очевидно, что $A\times B - n{\cdot}m \times n{\cdot}m$ матрица). Основываясь на определении (I2.6), имеем

$$(I_1)_{\sigma_1'\sigma_1}(I_2)_{\sigma_2'\sigma_2} = (I_1\times I_2)_{\sigma_1'\sigma_2';\sigma_1\sigma_2};\ (I_1)_{\sigma_1'\sigma_1}(\sigma_{2i})_{\sigma_2'\sigma_2} = (I_1\times\sigma_{2i})_{\sigma_1'\sigma_2';\sigma_1\sigma_2}.$$
$$(\sigma_{1i})_{\sigma_1'\sigma_1}(I_2)_{\sigma_2'\sigma_2} = (\sigma_{1i}\times I_2)_{\sigma_1'\sigma_2';\sigma_1\sigma_2};\ (\sigma_{1i})_{\sigma_1'\sigma_1}(\sigma_{2k})_{\sigma_2'\sigma_2} = (\sigma_{1i}\times\sigma_{2k})_{\sigma_1'\sigma_2';\sigma_1\sigma_2}.$$

В результате получаем

$$T(\vec{p}\,',\vec{p}) = a\,I_1\times I_2 + \sum_i a_i I_1\times\sigma_{2i} + \sum_i b_i\,\sigma_{1i}\times I_2 + \sum_{ik} b_{ik}\,\sigma_{1i}\times\sigma_{2k}. \qquad (12.7)$$

Это выражение представляет собой разложение 4x4 матрицы $T(\vec{p}\,',\vec{p})$ по полной системе шестнадцати матриц $I_1\times I_2$, $I_1\times\sigma_{2i}$, $\sigma_{1i}\times I_2$ и $\sigma_{1i}\times\sigma_{2k}$. Нам придется в дальнейшем перемножать (в обычном смысле) матрицы, представляющие собой прямые произведения, вычислять шпуры от таких матриц и т.д. В связи с этим сформулируем (и докажем) основные правила обращения с прямыми произведениями матриц.

I. Чтобы умножить друг на друга матрицы, представляющие собой прямые произведения матриц, нужно перемножить (обычным образом) матрицы, стоящие на первом и втором местах по отдельности и взять прямое произведение полученных матриц. Действительно, имеем

$$[(A\times B)\cdot(A'\times B')]_{\alpha'\beta';\alpha\beta}=(A\times B)_{\alpha'\beta';\alpha''\beta''}(A'\times B')_{\alpha''\beta'';\alpha\beta}=$$

$$=A_{\alpha'\alpha''}B_{\beta'\beta''}A'_{\alpha''\alpha}B_{\beta''\beta}=(AA')_{\alpha'\alpha}(B\cdot B')_{\beta'\beta}=(A\cdot A'\times B\cdot B')_{\alpha'\beta';\alpha\beta}$$

Таким образом,

$$(A\times B)\cdot(A'\times B') = A\cdot A'\times B\cdot B'. \qquad (I2.8)$$

2. Шпур прямого произведения матриц равен произведению шпуров первой и второй матриц. Действительно,

$$Sp\, A\times B = (A\times B)_{\alpha\beta;\alpha\beta} = A_{\alpha\alpha}B_{\beta\beta} = Sp A\, Sp B. \quad (I2.9)$$

3.

$$(A\times B)^{+} = A^{+}\times B^{+}. \qquad (I2.I0)$$

Действительно,

$$(A\times B)^{+}_{\alpha'\beta';\alpha\beta} = (A\times B)^{*}_{\alpha\beta;\alpha'\beta'} = A^{*}_{\alpha\alpha'}B^{*}_{\beta\beta'} =$$

$$= A^{+}_{\alpha'\alpha}B^{+}_{\beta'\beta} = (A^{+}\times B^{+})_{\alpha'\beta';\alpha\beta}.$$

Итак, для того чтобы произвести обычную матричную операцию над прямым произведением матриц, нужно произвести соответствующую операцию над каждой из матриц, входящих в прямое произведение. Посмотрим теперь, какие ограничения на матрицу $T(\vec{p}',\vec{p})$ накладывают требования инвариантности относительно вращений.
Волновая функция двух частиц со спином I/2 в штрихованной системе $\psi'(\vec{r}')$ связана с волновой функцией в исходной системе $\psi(\vec{r})$ соотношением

$$\psi'(\vec{r}') = \mathcal{U}_R\,\psi(\vec{r}), \qquad (I2.II)$$

где
$$\begin{aligned} &\mathcal{U}_R = \mathcal{U}_{1R}\times \mathcal{U}_{2R}\ , \\ &\mathcal{U}_{1R}^{-1}\sigma_{1i}\mathcal{U}_{1R} = a_{ik}\sigma_{1k}, \\ &\mathcal{U}_{2R}^{-1}\sigma_{2i}\mathcal{U}_{1R} = a_{ik}\sigma_{2k}, \\ &\mathcal{U}_{1R}^{+}\mathcal{U}_{1R} = 1\ ,\ \mathcal{U}_{2R}^{+}\mathcal{U}_{2R} = 1\ . \end{aligned} \tag{I2.I2}$$

Из инвариантноoти относительно вращений следует, что

$$T(\vec{p}\,',\vec{p}) = \mathcal{U}_R^{-1}\,T(\vec{p}\,'_R,\vec{p}_R)\,\mathcal{U}_R\ , \tag{I2.I3}$$

(подробно см.§ 8), где $(\vec{p}_R)_i = a_{ik}(\vec{p})_k$

Из (I2.I2) и (I2.I3) мы заключаем, что a является скаляром, a_i и b_i преобразуются как векторы, а b_{ik} как тензор второго ранга.

Предположим теперь, что уравнение Шредингера инвариантно относительно инверсии системы отсчета (сохраняется четность).

Имеем

$$T(\vec{p}\,',\vec{p}) = \mathcal{U}_P^{-1}\,T(-\vec{p}\,',-\vec{p})\,\mathcal{U}_P\ , \tag{I2.I4}$$

где
$$\begin{aligned} &\mathcal{U}_P = \mathcal{U}_{1P}\times \mathcal{U}_{2P}, \\ &\mathcal{U}_{1P}^{-1}\sigma_{1i}\mathcal{U}_{1P} = \sigma_{1i}\ ,\ \mathcal{U}_{2P}^{-1}\sigma_{2i}\mathcal{U}_{2P} = \sigma_{2i}, \\ &\mathcal{U}_{1P}^{+}\mathcal{U}_{1P} = 1\ ,\ \mathcal{U}_{2P}^{+}\mathcal{U}_{2P} = 1. \end{aligned} \tag{I2.I5}$$

Отсюда получаем, что при инверсии a , a_i , b_i и b_{ik} не меняют знака. Итак, из инвариантности относительно вращений и отражений следует, что a -скаляр, a_i -псевдовектор, b_i -псевдовектор, b_{ik}- тензор второго ранга.

Из векторов $\vec{p}$ и $\vec{p}\,'$ построим следующие три ортонормированных вектора:

$$\vec{\ell} = \frac{\vec{p}+\vec{p}\,'}{|\vec{p}+\vec{p}\,'|}\ ,\ \vec{m} = \frac{\vec{p}-\vec{p}\,'}{|\vec{p}-\vec{p}\,'|}\ ,\ \vec{n} = \frac{\vec{p}\times\vec{p}\,'}{|\vec{p}\times\vec{p}\,'|} = \vec{m}\times\vec{\ell}\ . \tag{I2.I6}$$

($\vec{\ell}$ и $\vec{m}$ векторы, $\vec{n}$-псевдовектор).

Имеем
$$\begin{aligned} &b_i = \alpha_2 n_i\ , \\ &a_i = \alpha_3 n_i\ , \end{aligned} \tag{I2.I7}$$

где α_2 и α_3 - функции скаляров $\vec{p}\vec{p}'$ и $\vec{p}^2$. Тензор a_{ik} имеет следующий общий вид*:

$$a_{ik} = \alpha_4 n_i n_k + \alpha_5 \ell_i \ell_k + \alpha_6 m_i m_k + \alpha_7 \ell_i m_k + \alpha_8 m_i \ell_k. \quad (12.18)$$

($\alpha_4, \ldots \alpha_8$ - функции $\vec{p}\vec{p}'$ и $\vec{p}^2$)

Матрица рассеяния $M(\vec{p}',\vec{p})$ связана с матрицей $T(\vec{p}',\vec{p})$ соотношением

$$M(\vec{p}',\vec{p}) = -(2\pi)^2 \mu T(\vec{p}',\vec{p}) . \quad (12.19)$$

(см.§ II). Из (I2.7), (I2.I7), (I2.I8) и (I2.I9) получаем, что матрица рассеяния, имеет следующий общий вид:

$$M(\vec{p}',\vec{p}) = a_1 + a_2(\vec{\sigma}_1\vec{n}) + a_3(\vec{\sigma}_2\vec{n}) + a_4(\vec{\sigma}_1\vec{n})(\vec{\sigma}_2\vec{n}) + $$
$$+ a_5(\vec{\sigma}_1\vec{\ell})(\vec{\sigma}_2\vec{\ell}) + a_6(\vec{\sigma}_1\vec{m})(\vec{\sigma}_2\vec{m}) + a_7(\vec{\sigma}_1\vec{\ell})(\vec{\sigma}_2\vec{m}) \quad (12.20)$$

(подразумеваются прямые произведения матриц; обычно используется эта упрощенная запись).

Итак, из инвариантности относительно вращений и отражений следует, что матрица рассеяния частиц со спином I/2 на частицах со спином I/2 характеризуется восемью функциями скаляров $\vec{p}^2, \vec{p}'\vec{p}$ и имеет вид (I2.20).

Отметим, что обычно выражение (I2.20) получают иначе. Соотношения (I2.I3) и (I2.I4) означают, что при вращениях и отражениях $M(\vec{p}', \vec{p})$ - скаляр. Операторы спина σ_{1i} и σ_{2i} преобразуются как псевдовекторы. Единственными скалярами, которые можно построить с помощью векторов $\vec{\ell}$ и $\vec{m}$ и псевдовекторов $\vec{n}, \vec{\sigma}_1$ и $\vec{\sigma}_2$ являются

$$I; (\vec{\sigma}_1\vec{n}); (\vec{\sigma}_2\vec{n}); (\vec{\sigma}_1\vec{n})(\vec{\sigma}_2\vec{n}); (\vec{\sigma}_1\vec{\ell})(\vec{\sigma}_2\vec{\ell}); (\vec{\sigma}_1\vec{m})(\vec{\sigma}_2\vec{m}); (\vec{\sigma}_1\vec{\ell})(\vec{\sigma}_2\vec{m}); (\vec{\sigma}_1\vec{m})(\vec{\sigma}_2\vec{\ell}).$$

Умножая каждый из этих скаляров на соответствующую функцию скалярных произведений $\vec{p}\vec{p}'$ и $\vec{p}^2$, получаем (I2.20).

Получим теперь матрицу плотности конечного состояния. Поскольку спиновые состояния пучка и мишени "приготавливаются" независимо, то каждая из функций u_{μ_1} и u_{μ_2} в выражении (I2.I) входит в смесь со своим весом. В результате для начальной матрицы плотности имеем

---

*В силу условия полноты $\delta_{ik} = n_i n_k + \ell_i \ell_k + m_i m_k$.
Таким образом, возможный член $\alpha_9 \delta_{ik}$ в (I2.I8) уже учтен.

$$(\rho_0)_{\sigma_1'\sigma_2';\sigma_1\sigma_2} = \sum_{\mu_1} u_{\mu_1}(\sigma_1') u^*_{\mu_1}(\sigma_1)\rho_{\mu_1} \sum_{\mu_2} u_{\mu_2}(\sigma_2') u^*_{\mu_2}(\sigma_2)\rho_{\mu_2}.$$

Таким образом, матрица плотности начального состояния представляет собой прямое произведение матриц плотности пучка и мишени:

$$\rho_0 = \rho_{10} \times \rho_{20} . \qquad (12.21)$$

Конечная матрица плотности дается выражением (подробный вывод см. в § II)

$$\rho = M\rho_0 M^+. \qquad (12.22)$$

Матрица ρ нормирована таким образом, что

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Sp\rho. \qquad (12.23)$$

Наконец, среднее значение любого спинового оператора О, представляющего собой в данном случае прямое произведение матриц, действующих на спиновые переменные первой и второй частиц, дается выражением

$$\langle O \rangle = \frac{Sp\, O\rho}{Sp\rho} . \qquad (12.24)$$

С помощью (12.20), (12.22) и (12.23) легко вычислить поляризацию частицы I, например, возникающую при столкновении неполяризованных частиц, и асимметрию, возникшую при рассеянии поляризованных частиц I на неполяризованных частицах 2. В отличие от случая рассеяния частиц со спином I/2 на частицах со спином 0, мы не получили бы при этом равенства поляризации и асимметрии. В следующем параграфе мы покажем, что это равенство имеет место и в данном случае, если уравнение Шредингера инвариантно относительно обращения времени.

В этом параграфе мы начали рассмотрение рассеяния частиц со спином I/2 на частицах со спином I/2. Было получено общее выражение для матрицы рассеяния (удовлетворяющее требованиям инвариантности относительно вращений и отражений) и обобщен формализм матрицы плотности на случай рассеяния двух частиц со спином.

§ I3. Инвариантность относительно обращения времени. Равенство поляризации и асимметрии в общем случае

В этом параграфе мы обсудим вопрос о том, к каким ограничениям на матрицу рассеяния приводит инвариантность уравнения Шредингера относительно обращения времени. Начнем с бесспинового случая. Запишем уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}=(\mathcal{H}_0+V)\psi(t). \qquad (13.1)$$

Из эрмитовости гамильтониана (замкнутая система) следует, что

$$V^*=V. \qquad (13.2)$$

Вещественность потенциала означает, что каждому решению уравнения Шредингера $\psi(t)$ отвечает решение

$$\psi'(t)=\psi^*(-t), \qquad (13.3)$$

Действительно, из (13.1) путем комплексного сопряжения получаем

$$-i\frac{\partial\psi^*(t)}{\partial t}=(\mathcal{H}_0+V)\psi^*(t). \qquad (13.4)$$

Заменим в (13.4) $t\to -t$. Находим

$$i\frac{\partial\psi^*(-t)}{\partial t}=(\mathcal{H}_0+V)\psi^*(-t). \qquad (13.5)$$

Итак, если $\psi(t)$ – решение уравнения Шредингера, то $\psi^*(-t)$ также является решением уравнения Шредингера.

Выясним смысл этого второго решения. Рассмотрим движение системы за время от $-t_1$ (начальный момент времени) до t_1 (конечный момент времени). Если в начальный момент времени система находилась в состоянии $\psi(-t_1)$, то в конечный момент времени она будет находиться в состоянии $\psi(t_1)$ (первое решение). Второе решение соответствует тому, что та же система в конечный момент времени будет находиться в состоянии $\psi^*(-t_1)$, если в начальный момент времени она находилась в состоянии $\psi^*(t_1)$.

Для плотности вероятности и среднего импульса, отвечающих этим двум решениям, получаем соотношения

$$\rho'(t)=\psi'^*(t)\psi'(t)=\psi^*(-t)\psi(-t)=\rho(-t), \qquad (13.6)$$

$$\bar{p}_i'(t)=\int\psi'^*(t)p_i\psi'(t)d\vec{r}=\int\psi(-t)p_i\psi^*(-t)d\vec{r}=$$

$$=-\int\psi^*(-t)p_i\psi(-t)d\vec{r}=-\bar{p}_i(t). \qquad (13.7)$$

(при получении (I3.7) использовалось интегрирование по частям). Итак, в соответствии с первым решением, если начать с $\rho(-t_1)$ и $\bar{p}_i(-t_1)$, то мы придем в конечный момент времени к $\rho(+t_1)$ и $\bar{p}_i(+t_1)$. Второе решение означает, что в случае, если начать с $\rho(t_1)$ и $-\bar{p}_i(t_1)$, то в конечный момент времени мы придем к $\rho(-t_1)$ и $-\bar{p}_i(-t_1)$. При этом в соответствующие моменты времени система "проходит" через одни и те же распределения плотности вероятности и противоположные по знаку средние значения импульса (см. рис. II)

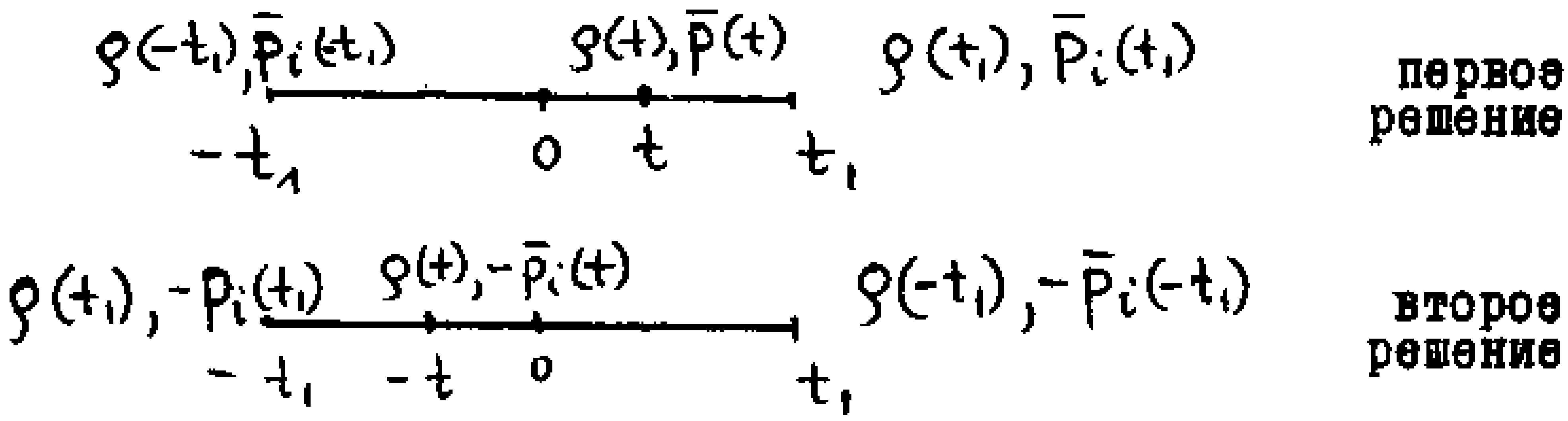

Рис. II

Из изложенного ясно, что второе решение описывает движение "в обратном направлении". Подчеркнем, что в рассмотренном бесспиновом случае любому решению всегда отвечает решение, описывающее движение системы в "обратном направлении". Инвариантность относительно обращения времени означает наличие этого второго решения.

Разумеееется, оба решения описывают развитие системы в будущее.

Теперь мы рассмотрим систему, состоящую из частицы со спином I/2 и частицы со спином 0. Уравнение Шредингера имеет вид

$$i\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = (\mathcal{H}_0 + V)\psi(t), \tag{I3.8}$$

где V – матрица, действующая на спиновую переменную. Из инвариантности относительно вращений и отражений следует, что потенциал V имеет следующий общий вид (см.§ 9):

$$V = V_0 + V_1\vec{\sigma}\vec{L}, \tag{I3.9}$$

где V_0 и V_1 – функции скаляров $\vec{r}^2$ и $\vec{p}^2$; $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$.

Из условия эрмитовости гамильтониана находим, что

$$V_0 = V_0^*, \quad V_1 = V_1^* \tag{I3.10}$$

Далее путем комплексного сопряжения (I3.8) и замены $t \to -t$

получаем

$$i\,\frac{\partial\psi^*(-t)}{\partial t} = \left(\mathcal{H}_0 + V^*\right)\psi^*(-t), \qquad (13.11)$$

В данном случае потенциал не вещественен. Это связано со вторым спин-орбитальным членом потенциала (13.9) (действительно, так как $\sigma_{1,3}^* = \sigma_{1,3}$, $\sigma_2^* = -\sigma_2$, $\vec{L}^* = -\vec{L}$, то, очевидно, что $(\vec{\sigma}\vec{L})^* \neq (\vec{\sigma}\vec{L})$). Таким образом, функция $\psi^*(-t)$ не является решением уравнения Шредингера. Можно, однако, найти такую унитарную спиновую матрицу U_T, что

$$U_T V U_T^{-1} = V. \qquad (13.12)$$

Если умножить (13.11) слева на U_T и воспользоваться (13.12), то нетрудно убедиться в том, что функция

$$\psi'(t) = U_T\psi^*(-t) \qquad (13.13)$$

является решением уравнения Шредингера.

Из (13.9) и (13.10) следует, что матрица U_T должна удовлетворять соотношению

$$U_T\sigma_i^* U_T^{-1} = -\sigma_i \qquad (13.14)$$

Очевидно, что такая матрица существует. Действительно, учитывая, что $\sigma_2^* = -\sigma_2$, $\sigma_{1,3}^* = \sigma_{1,3}$, перепишем следующим образом (13.14):

$$U_T\sigma_2 = \sigma_2 U_T, \quad U_T\sigma_1 = -\sigma_1 U_T, \quad U_T\sigma_3 = -\sigma_3 U_T.$$

Итак, матрица U_T коммутирует с σ_2 и антикоммутирует с σ_1 и σ_3. Ясно, что $U_T = \alpha\sigma_2$, где α – фазовый множитель. Отметим, что в дальнейшем явный вид матрицы U_T нам не потребуется. Мы будем использовать только (13.14). Это соотношение может быть переписано также следующим образом:

$$\left(U_T^{-1}\sigma_i U_T\right)^T = -\sigma_i. \qquad (13.15)$$

Итак, если уравнение Шредингера имеет решение $\psi(t)$, то должно быть также и решение $\psi'(t) = U_T\psi^*(-t)$. Сравним оба эти решения. Как и в бесспиновом случае, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \rho'(t) &= \rho(-t), \\ \bar{p}_i'(t) &= -\bar{p}_i(-t). \end{aligned} \qquad (13.16)$$

Вычислим среднее значение оператора спина (более точно удвоенного спина).

Используя (3.15), получаем*

$$\psi'^{+}(t)\sigma_i\psi'(t) = \psi^{T}(-t)\,U_T^{-1}\sigma_i U_T\psi^{*}(-t) =$$
$$= \psi^{+}(-t)(U_T^{-1}\sigma_i U_T)^{T}\psi(-t) = -\psi^{+}(-t)\sigma_i\psi(-t).$$

Таким образом,

$$\bar{\sigma}_i'(t) = -\bar{\sigma}_i(-t). \qquad (13.17)$$

Из (13.16) и (13.17) следует, что второе решение описывает движение системы в направлении "обратном" движению, которое описывает первое решение. Если у частиц имеется спин, то, как следует из (13.16) и (13.17), для того, чтобы получить движение в "обратном направлении", нужно не только изменить знак соответствующего среднего значения импульса, но также и знак среднего значения спина.(Из интуитивных соображений ясно, что при движении в "прямом" и "обратном" направлениях соответствующие скорости (импульсы) должны отличаться знаками. Спин ведет себя как момент. Поскольку в момент также входит импульс, то и знаки соответствующих средних значений спина в "прямом" и "обратном" движениях должны отличаться знаками).

Перейдем теперь от потенциала к T -матрице. Нам будет удобно рассматривать потенциал (и T -оператор) не только как матрицу, действующую на спиновую переменную, но и как матрицу, действующую на пространственную переменную. Из курса квантовой механики хорошо известно, что это всегда возможно.
Из эрмитовости потенциала следует, что

$$V^{*} = V^{T}. \qquad (13.18)$$

Соотношение (13.12) может быть переписано следующим образом:

$$U_T V^{T} U_T^{-1} = V. \qquad (13.19)$$

Далее имеем

$$T^{T} = V^{T} + V^{T}\frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0 + i\varepsilon}V^{T} + \ldots$$

---

*Мы использовали, что $(U_T\psi^{*})^{+} = (\psi^{*})^{+}U_T^{+} = \psi^{T}U_T^{-1}$,
$(\psi^{+}A\psi) = (\psi^{+}A\psi)^{T} = (\psi^{T}A^{T}\psi^{*})$.
(A – любая матрица; ψ^{T} – строка, ψ^{*} – столбец).

Используя (13.19), получаем

$$T^T = U_T^{-1}\left(V + V\frac{1}{E_p - \mathcal{H}_0 + i\varepsilon}V + \ldots\right)U_T .$$

Таким образом,

$$T^T = U_T^{-1}\, T\, U_T . \qquad (13.20)$$

Отсюда для матричных элементов получаем

$$T^T_{\sigma\vec r;\sigma'\vec r'} = T_{\sigma'\vec r';\sigma\vec r} = (U_T^{-1})_{\sigma\sigma''}\, T_{\sigma''\vec r;\sigma'''\vec r'}\, (U_T)_{\sigma'''\sigma'} . \qquad (13.21)$$

Матричный элемент $T_{\sigma'\sigma}(\vec p',\vec p)$ определяется следующим образом:

$$T_{\sigma'\sigma}(\vec p',\vec p) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-i\vec p'\vec r'}\, T_{\sigma'\vec r';\sigma\vec r}\, e^{i\vec p\vec r}\, d\vec r'\, d\vec r .$$

Умножим (13.21) на $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-i\vec p\vec r}\,\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\vec p'\vec r'}$ и проинтегрируем по $\vec r'$ и $\vec r$. Получаем

$$T_{\sigma'\sigma}(\vec p',\vec p) = \left(U_T^{-1}\, T(-\vec p,-\vec p')\, U_T\right)_{\sigma\sigma'} .$$

Отсюда окончательно имеем

$$T(\vec p',\vec p) = \left(U_T^{-1}\, T(-\vec p,-\vec p')\, U_T\right)^T . \qquad (13.22)$$

Очевидно, что для матрицы рассеяния $M(\vec p',\vec p)$ имеем также

$$M(\vec p',\vec p) = \left(U_T^{-1}\, M(-\vec p,-\vec p')\, U_T\right)^T . \qquad (13.23)$$

Выясним физический смысл этого соотношения. Для этого перепишем его в виде

$$M^T(\vec p',\vec p) = U_T^{-1}\, M(-\vec p,-\vec p')\, U_T \qquad (13.24)$$

и умножим слева на U_μ^T, а справа на $U_{\mu'}^*$, где U_μ и $U_{\mu'}$ – собственные функции оператора проекции спина на некоторое направление:

$$(\vec\sigma\vec n)U_\mu = \mu U_\mu ;\quad (\vec\sigma\vec n)U_{\mu'} = \mu' U_{\mu'} . \qquad (13.25)$$

Получаем

$$(u_\mu^T M^T(\vec{p}',\vec{p}) u_{\mu'}^*) = (u_{\mu'}^+ M(\vec{p}',\vec{p}) u_\mu) = (u_\mu^T U_T^{-1} M(-\vec{p};-\vec{p}') U_T u_{\mu'}^*) \; . \quad (13.26)$$

Нетрудно убедиться в том, что $U_T u_\mu^*$ является собственной функцией оператора $(\vec{\sigma}\vec{n})$ с собственным значением $-\mu$. Действительно, из (13.26) находим

$$(\vec{\sigma}^*\vec{n}) u_\mu^* = \mu u_\mu^* .$$

Умножая это соотношение слева на U_T и используя (13.14), получаем

$$(\vec{\sigma}\vec{n}) U_T u_\mu^* = -\mu U_T u_\mu^* .$$

Таким образом,

$$U_T u_\mu^* = \alpha_\mu U_{-\mu} , \qquad (13.27)$$

где $|\alpha_\mu|^2 = 1$. Из (13.27) путем эрмитова сопряжения находим

$$u_\mu^T U_T^{-1} = \alpha_\mu^* u_{-\mu}^+ . \qquad (13.28)$$

Используя эти последние соотношения, из (13.26) получаем

$$(u_{\mu'}^+ M(\vec{p}',\vec{p}) u_\mu) = \alpha_{\mu'} \alpha_\mu^* (u_{-\mu}^+ M(-\vec{p},-\vec{p}') U_{-\mu'}) . \qquad (13.29)$$

Итак, соотношение (13.24) означает, что амплитуда перехода из состояния с импульсом $\vec{p}$ и проекцией спина μ в состояние с импульсом $\vec{p}'$ и проекцией спина μ' (с точностью до несущественного здесь фазового множителя) равна амплитуде обратного перехода из состояния с импульсом $-\vec{p}'$ и проекцией спина $-\mu'$ в состояние с импульсом $-\vec{p}$ и проекцией спина $-\mu$. Равенство (13.29) иллюстрирует физический смысл второго обсуждавшегося выше решения уравнение Шредингера.

В § 9 мы показали, что из инвариантности относительно вращений и отражений следует, что матрица рассеяния частиц со спинами 1/2 на 0 имеет следующий общий вид:

$$M(\vec{p}',\vec{p}) = a + b\vec{\sigma}\vec{n} , \qquad (13.30)$$

где a и b – функции скаляров $\vec{p}\vec{p}'$ и $\vec{p}^2$. Потребуем теперь, чтобы матрица рассеяния удовлетворяла также вытекающему из инвариантности относительно обращения времени условию (13.26). Очевидно, что при замене $\vec{p} \to -\vec{p}'$ и $\vec{p}' \to -\vec{p}, \vec{n} \to -\vec{n}$.

Учитывая также, что $(U_T \vec{\sigma} U_T^{-1})$, а также, что при замене $\vec{p} \to -\vec{p}'$ и $\vec{p}' \to -\vec{p}$, $\vec{p}\vec{p}' \to \vec{p}\vec{p}'$ и $\vec{p}^2 \to \vec{p}'^2 = \vec{p}^2$, мы приходим к заключению, что матрица $(a + b\vec{\sigma}\vec{n})$ удовлетворяет (13.23).

Итак, в рассматриваемом случае рассеяния частиц со спином 1/2 на частицах со спином 0 матрица рассеяния, удовлетворяющая требованиям инвариантности относительно вращений и отражений, оказывается автоматически инвариантной относительно обращения времени.

Отметим, что это не так при несохранении четности. Действительно, в этом случае $M(\vec{p}',\vec{p}) = a + b_1\vec{\sigma}\vec{m} + b_2\vec{\sigma}\vec{l} + b\vec{\sigma}\vec{n}$. Если потребовать, чтобы имела место инвариантность относительно обращения времени (выполнялось соотношение (13.23)), то, как нетрудно показать, в этом случае $b_1 = 0$.

Перейдем теперь к рассмотрению рассеяния частиц со спином 1/2 на частицах со спином 1/2. В случае двух частиц со спином 1/2 уравнение Шредингера инвариантно относительно обращения времени, если потенциал взаимодействия удовлетворяет условию

$$U_T V^* U_T^{-1} = V, \tag{13.31}$$

аналогичному (13.12).

Здесь

$$U_T = U_{1T} \times U_{2T}, \tag{13.32}$$

где

$$(U_{1T}\sigma_{1i}U_{1T}^{-1})^T = -\sigma_{1i}, \quad (U_{2T}\sigma_{2i}U_{2T}^{-1})^T = -\sigma_{2i};$$
$$U_{1T}^+ U_{1T} = 1, \quad U_{2T}^+ U_{2T} = 1. \tag{13.33}$$

Для матрицы рассеяния из (13.31) получаем

$$M(\vec{p}',\vec{p}) = (U_T M(-\vec{p},-\vec{p}')U_T^{-1})^T. \tag{13.34}$$

Как было показано в § 12, из инвариантности относительно вращений и отражений следует, что матрица рассеяния частиц со спином 1/2 на частицах со спином 1/2 характеризуется восемью функциями скаляров $\vec{p}\vec{p}'$ и $\vec{p}^2$ и имеет вид (12.20). Потребуем теперь, чтобы имела место инвариантность относительно обращения времени (выполнялось соотношение (13.34). Подставим (12.20) в (13.34). Очевидно, что матрица $(U_T M(-\vec{p},-\vec{p}')U_T^{-1})^T$ может быть получена из исходной матрицы путем замены $\vec{l} \to -\vec{l}$,

$$\vec{m} \to \vec{m}, \quad \vec{n} \to -\vec{n}, \quad \vec{\sigma}_1 \to -\vec{\sigma}_1 \quad \text{и} \quad \vec{\sigma}_2 \to -\vec{\sigma}_2 .$$

Приравнивая левую и правую части соответствующего равенства, получаем

$$a_7 = a_8 = 0 . \tag{13.35}$$

Итак, в отличие от рассмотренного выше случая рассеяния частиц со спинами 1/2 и 0 требования инвариантности относительно обращения времени уменьшают число членов в матрице рассеяния частиц со спином 1/2 на частицах со спином 1/2. Удовлетворяющая требованиям инвариантности относительно вращений, отражений и обращения времени матрица рассеяния двух частиц со спином 1/2 имеет следующий общий вид:

$$M(\vec{p}',\vec{p}) = a_1 + a_2(\vec{\sigma}_1\vec{n}) + a_3(\vec{\sigma}_2\vec{n}) + a_4(\vec{\sigma}_1\vec{n})(\vec{\sigma}_2\vec{n}) + \tag{13.36}$$
$$+ a_5(\vec{\sigma}_1\vec{\ell})(\vec{\sigma}_2\vec{\ell}) + a_6(\vec{\sigma}_1\vec{m})(\vec{\sigma}_2\vec{m}) .$$

Если с помощью (13.36) вычислить поляризацию первой (второй) частицы, возникающую при столкновении неполяризованных частиц, то можно убедиться в том, что она совпадает с асимметрией в случае столкновения поляризованной первой (второй) частицы с неполяризованной второй (первой) частицей. Мы докажем равенство поляризации и асимметрии непосредственно с помощью соотношений, которым удовлетворяет матрица рассеяния в силу принципов инвариантности, не прибегая при этом к вычислению шпуров.

Рассмотрим рассеяние поляризованных частиц 1 на неполяризованных частицах 2. Для начальной матрицы плотности имеем

$$\rho^0 = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}_1\vec{P}_1^0)\frac{1}{2} , \tag{13.37}$$

где $\vec{P}_1^0$ – вектор поляризации частиц 1. Дифференциальное сечение в СЦИ равно

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\vec{P}_1^0} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 (1 + \vec{P}_1^0\vec{A}_1) . \tag{13.38}$$

Здесь

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = Sp\, M(\vec{p}',\vec{p})\frac{1}{4}M^+(\vec{p}',\vec{p}) - \tag{13.39}$$

дифференциальное сечение рассеяния неполяризованных частиц, а вектор асимметрии $\vec{A}_1$ дается выражением

$$\vec{A}_1(\vec{p}',\vec{p}) = \frac{Sp\, M(\vec{p}',\vec{p})\frac{1}{4}\vec{\sigma}_1 M^+(\vec{p}',\vec{p})}{Sp\, M(\vec{p}',\vec{p})\frac{1}{4}M^+(\vec{p}',\vec{p})} . \qquad (13.40)$$

Поляризация частиц I, возникающая при рассеянии неполяризованных частиц, равна

$$\vec{P}_1(\vec{p}',\vec{p}) = \frac{Sp\, \vec{\sigma}_1 M(\vec{p}',\vec{p})\frac{1}{4} M^+(\vec{p}',\vec{p})}{Sp\, M(\vec{p}',\vec{p})\frac{1}{4} M^+(\vec{p}',\vec{p})} \qquad (13.41)$$

Отметим, что выражения (13.40) и (13.41) отличаются положением матрицы $\vec{\sigma}_1$ под знаком шпура.

Предположим, что имеет место инвариантность относительно вращений, отражений и обращения времени. Используя (13.33) и (13.34) и учитывая, что для любой матрицы A

$$Sp\, A = \sum_6 A_{66} = \sum_6 A^T_{66} = Sp\, A^T,$$

получаем

$$Sp\, M(\vec{p}',\vec{p})\,\sigma_{1i}\, M^+(\vec{p}',\vec{p}) = Sp\,(M^T(\vec{p}',\vec{p}))^+\,\sigma^T_{1i}\, M^T(\vec{p}',\vec{p}) =$$
$$= Sp\,\sigma^T_{1i}\, U_T M(-\vec{p},-\vec{p}')\, M^+(-\vec{p},-\vec{p}')\, U_T^{-1} = \qquad (13.42)$$
$$= -Sp\,\sigma_{1i} M(-\vec{p},-\vec{p}')\, M^+(-\vec{p},-\vec{p}') .$$

Из (13.40), (13.41) и (13.42) следует, что

$$\vec{A}_1(\vec{p}',\vec{p}) = -\vec{P}_1(-\vec{p},-\vec{p}') . \qquad (13.43)$$

Далее из инвариантности относительно вращений и отражений следует, что вектор поляризации имеет вид

$$\vec{P}_1(\vec{p}',\vec{p}) = P_1\vec{n} , \qquad (13.44)$$

где P_1 – функция скаляров $\vec{p}\vec{p}'$ и $\vec{p}^{\,2}$. Отсюда получаем

$$\vec{P}_1(-\vec{p},-\vec{p}') = -\vec{P}_1(\vec{p}',\vec{p}) . \qquad (13.45)$$

Из (13.43) и (13.45) находим окончательно

$$\vec{A}_1(\vec{p}',\vec{p}) = \vec{P}_1(\vec{p},\vec{p}'). \tag{13.46}$$

Учитывая, что

$$\vec{A}_1(\vec{p}',\vec{p}) = A_1\vec{n},$$

имеем также

$$P_1 = A_1. \tag{13.47}$$

Для дифференциального сечения рассеяния поляризованных частиц I на неполяризованных частицах 2 получаем следующее выражение:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\vec{P}_1^0} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left(1 + \vec{P}_1^0\vec{P}_1\right). \tag{13.48}$$

Равенство поляризации и асимметрии широко используется в практике поляризационных измерений (например, для измерения поляризации в двойном опыте, см.§ II).

В связи с равенством поляризации и асимметрии сделаем следующие замечания.

I. Очевидно, что имеет место также равенство

$$A_2(\vec{p}',\vec{p}) = \vec{P}_2(\vec{p}',\vec{p}), \tag{13.49}$$

где

$$\vec{A}_2(\vec{p}',\vec{p}) = \frac{Sp\,M(\vec{p}',\vec{p})\vec{\sigma}_2 M^+(\vec{p}',\vec{p})}{Sp\,M(\vec{p}',\vec{p})\frac{1}{4}M^+(\vec{p}',\vec{p})},\quad P_2(\vec{p}',\vec{p}) = \frac{Sp\,\vec{\sigma}_2 M(\vec{p}',\vec{p})\frac{1}{4}M^+(\vec{p}',\vec{p})}{Sp\,M(\vec{p}',\vec{p})\frac{1}{4}M^+(\vec{p}',\vec{p})}.$$

2. Из того вывода, который мы проделали, ясно, что равенство поляризации и асимметрии имеет место при упругом рассеянии частиц со спином I/2 на частицах с произвольным спином.

3. Равенство поляризации и асимметрии при рассеянии частиц со спином I/2 на частицах со спином $S \geq 1/2$ имеет место только в случае, если взаимодействие инвариантно относительно вращений, отражений и обращения времени. Случай рассеяния частиц со спином I/2 и 0 в этом смысле особый. В этом случае при сохранении момента и четности равенство поляризации и асимметрии имеет место независимо от инвариантности относительно обращения времени. Эта исключительность случая рассеяния частиц со спином I/2 на частицах со спином 0 приводит к тому, что со-

отношение между поляризацией и асимметрией возникает в этом случае и для неупругих процессов, таких как

$$
\begin{aligned}
&\pi^- + p \to \Lambda + K^0, \\
&\pi^- + p \to \Sigma^- + K^+, \\
&K^- + p \to \Xi^- + K^+, \ldots
\end{aligned}
\tag{13.50}
$$

Дифференциальное сечение любого из этих процессов имеет вид

$$
\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\vec{P}_0} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left(1 + \eta \vec{P}_0 \vec{P}\right). \tag{13.51}
$$

Здесь $\vec{P}_0$ – поляризация начальных протонов, $\vec{P}$ – поляризация гиперонов в процессе с неполяризованными протонами, а η – произведение внутренних четностей участвующих в реакции частиц. Получим выражение (13.51). Процессы (13.50) являются процессами типа $0 + 1/2 \to 0 + 1/2$. Из инвариантности относительно вращений следует, что матрица такого типа процессов имеет следующий общий вид:

$$
M(\vec{p}', \vec{p}) = a + b_1(\vec{\sigma}\vec{m}) + b_2(\vec{\sigma}\vec{\ell}) + b(\vec{\sigma}\vec{n}). \tag{13.52}
$$

Здесь

$$
\vec{\ell} = \frac{\vec{p} + \vec{p}'}{|\vec{p} + \vec{p}'|}, \quad \vec{m} = \frac{\vec{p} - \vec{p}'}{|\vec{p} - \vec{p}'|}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{p} \times \vec{p}'}{|\vec{p} \times \vec{p}'|},
$$

a, b, b_1 и b_2 – функции скаляров $\vec{p}\vec{p}'$ и $\vec{p}^2$.

Из инвариантности относительно инверсии следует, что

$$
M(\vec{p}', \vec{p}) = \eta M(-\vec{p}', -\vec{p}). \tag{13.53}
$$

Здесь

$$
\eta = \eta_f^* \eta_i, \tag{13.54}
$$

где $\eta_i(\eta_f)$ – произведение внутренних четностей начальных (конечных) частиц (например, в случае первого из процессов (13.50) $\eta_i = \eta_\pi \eta_p$, $\eta_f = \eta_\Lambda \eta_K$ и т.д.). Для дальнейшего удобно сделать поворот вокруг нормали к плоскости рассеяния на угол π. При таком повороте $-\vec{p} \to \vec{p}$ и $-\vec{p}' \to \vec{p}'$, $U_R = e^{i\frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{n}\pi} = i(\vec{\sigma}\vec{n})$. Получаем (см.(8.25))

$$
M(-\vec{p}', -\vec{p}) = (\vec{\sigma}\vec{n})\, M(\vec{p}', \vec{p})(\vec{\sigma}\vec{n}). \tag{13.55}
$$

Таким образом, из инвариантности относительно операции, представляющей собой произведение инверсии на поворот вокруг нормали к плоскости рассеяния на угол π, получаем

$$M(\vec{p}\,',\vec{p}) = \eta(\vec{\sigma}\vec{n})\, M(\vec{p}\,',\vec{p})\,(\vec{\sigma}\vec{n}). \tag{13.56}$$

Очевидно, что

$$(\vec{\sigma}\vec{n})(\vec{\sigma}\vec{\ell})(\vec{\sigma}\vec{n}) = -(\vec{\sigma}\vec{\ell}),\ (\vec{\sigma}\vec{n})(\vec{\sigma}\vec{m})(\vec{\sigma}\vec{n}) = -(\vec{\sigma}\vec{m}),\ (\vec{\sigma}\vec{n})(\vec{\sigma}\vec{n})(\vec{\sigma}\vec{n}) = (\vec{\sigma}\vec{n}).$$

Таким образом, из (13.52) и (13.56) получаем

$$M(\vec{p}\,',\vec{p}) = a + b(\vec{\sigma}\vec{n}), \quad \eta = 1$$

и

$$M(\vec{p}\,',\vec{p}) = b_1(\vec{\sigma}\vec{m}) + b_2(\vec{\sigma}\vec{\ell}), \quad \eta = -1.$$

Этот же результат нетрудно получить с помощью (13.52) и (13.53).

Дифференциальное сечение процесса имеет вид (СЦИ)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\vec{P}_0} = Sp\, M\,\frac{1}{2}(1+\vec{\sigma}\vec{P}_0)M^+ = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 (1+\vec{P}\vec{A}), \tag{13.57}$$

где

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = Sp\, M\,\frac{1}{2}M^+$$

– сечение процесса в случае неполяризованной мишени, а

$$\vec{A} = \frac{Sp\, M\,\frac{1}{2}\vec{\sigma}\, M^+}{Sp\, M\,\frac{1}{2}M^+} - \tag{13.58}$$

асимметрия.

Поляризация гиперонов в реакции с неполяризованными протонами равна

$$\vec{P} = \frac{Sp\,\vec{\sigma}\, M\,\frac{1}{2}M^+}{Sp\, M\,\frac{1}{2}M^+}. \tag{13.59}$$

Из соображений инвариантности относительно вращений и отражений очевидно, что

$$\vec{A} = A\vec{n}, \quad \vec{P} = P\vec{n}. \tag{13.60}$$

Имеем

$$A = \frac{Sp\, M\,\frac{1}{2}(\vec{\sigma}\vec{n})M^+}{Sp\, M\,\frac{1}{2}M^+}, \quad P = \frac{Sp(\vec{\sigma}\vec{n})M\,\frac{1}{2}M^+}{Sp\, M\,\frac{1}{2}M^+}. \tag{13.61}$$

Используя (I3.56), получаем

$$Sp\, M(\vec{\sigma}\vec{n})M^{+} = \eta\, Sp(\vec{\sigma}\vec{n})\, MM^{+} .$$

Таким образом, поляризация и асимметрия в каждом из процессов (I3.50) связаны соотношением

$$A = \eta P \quad , \quad \vec{A} = \eta \vec{P} . \tag{I3.62}$$

Подставляя (I3.62) в (I3.57), для сечения получаем выражение (I3.5I).

Соотношение (I3.62) лежит в основе общего метода определения четностей странных частиц, предложенного в Дубне в конце пятидесятых годов.

Определим асимметрию процесса в случае поляризованной мишени

$$a = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{P_0\vec{n}} - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{-P_0\vec{n}}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{P_0\vec{n}} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{-P_0\vec{n}}} . \tag{I3.63}$$

Используя (I3.5I), для асимметрии получаем

$$a = \eta P_0 P . \tag{I3.64}$$

Поляризация P в процессе с неполяризованной мишенью может быть измерена в независимом эксперименте (путем измерения асимметрии распада гиперонов). Таким образом, измеряя асимметрию на поляризованной мишени и сравнивая ее с поляризацией, измеренной на опыте с неполяризованной мишенью, можно однозначно определить внутреннюю четность. Таким способом были определены четности Σ и Ξ гиперонов.

Итак, в этом параграфе была подробно обсуждена инвариантность относительно обращения времени. Мы получили условия, которым удовлетворяет матрица упругого рассеяния, в случае, если потенциал взаимодействия инвариантен относительно обращения времени. Мы получили здесь также равенство поляризации и асимметрии в общем случае упругого рассеяния частиц со спином I/2 на частицах с произвольным спином.