

Э. ФЕРМИ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ
ЧАСТИЦЫ

Э. ФЕРМИ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Перевод с английского
Б. М. БОЛОТОВСКОГО

И * Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, 1952

E. F E R M I

ELEMENTARY PARTICLES

London, 1951

ОТ РЕДАКЦИИ

Основой книги «Элементарные частицы» Э. Ферми, как и двух его предшествующих книг («Лекции по атомной физике» и «Ядерная физика»), вышедших недавно в русском переводе, послужили лекции, прочитанные автором для широкого круга физиков. Лекции, послужившие основой настоящей книги, были посвящены теории взаимодействия между элементарными частицами. Ферми очень мало пользуется математическим аппаратом квантовой теории поля, заменяя математические выкладки качественными оценками, причем физические предпосылки теории и физический смысл ее результатов проанализированы качественно необычайно ясно.

Существенным недостатком книги является полное замалчивание результатов теоретических и экспериментальных работ советских физиков, внесших, как известно, крупнейший вклад в развитие современной теории элементарных частиц. В редакционных примечаниях указаны новейшие работы советских физиков, в которых содержится важный материал по вопросам, затрагиваемым Ферми. Однако эти ссылки ни в какой мере не претендуют на полноту. Что же касается немногих упоминаемых автором работ, то они не имели полных библиографических ссылок и последние были частично восстановлены при переводе.

В целом книга представляет интерес для широкого круга физиков, интересующихся вопросами, связанными с движением элементарных частиц и их взаимодействием.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Основой этой книги являются лекции, прочитанные автором в Йэльском университете в апреле 1950 г. Было прочитано шесть лекций для широкой аудитории и шесть лекций для студентов-физиков. В этом издании излагается материал последних шести лекций, обработанный и дополненный.

Множество теоретических работ по элементарным частицам и взаимодействию между ними доступно только узкому кругу специалистов. Эта книга написана не для них. Целью книги является ознакомление большого числа студентов и, надеюсь, физиков-экспериментаторов с наиболее важными результатами полевых теорий элементарных частиц. Материал излагается полуквантитативно, без громоздкого математического аппарата. Читатель, прослушавший и усвоивший обычный университетский курс квантовой механики, не встретит затруднений на следующих страницах.

У меня не было возможности давать в тексте соответствующие ссылки на весьма многочисленную оригинальную литературу. Боюсь также, что в отдельных случаях я не отдал должной справедливости автору той или иной идеи. Приношу извинения за подобные упущения.

К счастью, недавно Тиммо и Уилером был составлен подробный указатель литературы по физике элементарных частиц (*American Scientist*, April and July, 1949), к которому читатель и отсылается за дальнейшими подробностями. Список книг и обзорных статей, в которых содержится обширный дополнительный материал, приведен в конце книги.

Чикаго, сентябрь 1950 г.

КВАНТЫ ПОЛЯ КАК ЧАСТИЦЫ

§ 1. Введение

Пожалуй, наиболее важной проблемой теоретической физики в течение последних двадцати лет было описание элементарных частиц и взаимодействия между ними. Теория излучения Дирака и последующее развитие квантовой электродинамики заложили основу современного понимания электромагнитного поля и связанных с ним частиц—фотонов. В частности, эта теория может объяснить процессы рождения фотонов при испускании света и процессы исчезновения фотонов при поглощении света. Полевые теории других элементарных частиц построены по образцу теории фотонов. В основу их положено предположение, что каждому сорту элементарных частиц соответствует поле, квантами которого эти частицы являются. Таким образом, кроме электромагнитного поля, вводятся еще электронно-позитронное поле, нуклеонное поле, несколько типов мезонных полей и т. д.

Уравнения Максвелла, описывающие макроскопическое поведение электромагнитного поля, хорошо и давно известны. Поэтому естественно думать, что именно эти уравнения нужно проквантовать, чтобы построить квантовую электродинамику. Это и было сделано с определенным успехом. За последние два или три года остающиеся трудности¹⁾, связанные с бесконечным значением электромагнитной массы и так называемой поляризацией вакуума, были в значительной мере преодолены в работах Бете, Швингера, Томонага, Фейнмана и др.²⁾ Эти работы смогли удовлетворительно объяснить лэмбовский сдвиг уровней в тонкой структуре атома водорода и аномальный магнитный момент электрона как результат взаимодействия с полем излучения.

После фотонов частицами, лучше всего известными из эксперимента и лучше других описываемыми теорией, являются электроны и позитроны. В полевой теории электронов и позитронов за уравнения электронно-позитронного поля берутся релятивистские уравнения Дирака. Метод квантования в этом случае должен быть таким, чтобы удовлетворялся принцип Паули для электронов

¹⁾ См. Марков М. А., УФН, 29, 269 (1946).—Прим. ред.

²⁾ См. сборник статей «Сдвиг уровней атомных электронов», М., 1951.—Прим. ред.

и позитронов¹⁾, в отличие от фотонного поля, где приложима статистика Бозе—Эйнштейна.

Менее убедительными являются попытки описания полей, о которых мы имеем гораздо более скудные экспериментальные данные.

Протоны и нейтроны, которые, подобно электронам, подчиняются принципу Паули и обладают спином $1/2$, обычно также описываются уравнением Дирака. Однако такая трактовка выходит за рамки наших теперешних экспериментальных данных, так как до сих пор не найдено отрицательных протонов (аналогов позитронам). Не найдено также и антинейтронов. Последняя предполагаемая частица является «двойником» нейтрона, подобно тому как позитрон является «двойником» электрона. Антинейтрон отличается от нейтрона тем, что его магнитный момент направлен параллельно спиновому (а не антипараллельно, как у обычного нейтрона). Затруднения теории связаны также с тем, что, согласно теории Дирака, магнитный момент протона следует предполагать равным одному ядерному магнетону, а магнитный момент нейтрона—равным нулю. Тот факт, что нейтрон в действительности имеет момент, равный $-1,9103$, а протон—момент, равный $+2,7896$ ядерного магнетона, объясняется действием мезонного поля, окружающего нуклоны. Если это объяснение справедливо, мы должны прийти к выводу, что протон и нейтрон—гораздо более сложны, чем это выглядит, когда их описывают уравнением Дирака.

До сих пор мы говорили о частицах, основные свойства которых мы знаем довольно обстоятельно. Но есть и другие частицы, существование которых известно или подразумевается. О свойствах таких частиц в некоторых случаях можно только высказывать предположения.

Предположение о существовании нейтрино было сделано Паули, чтобы избежать нарушения закона сохранения энергии при β -распаде. Это—нейтральная частица. Масса нейтрино или равна нулю, или крайне мала (в энергетических единицах меньше нескольких *кэв*). Спин нейтрино считается равным $1/2$; магнитный момент или равен нулю, или очень мал. В теории β -распада нейтрино обычно описывается уравнением Дирака, что дает два типа нейтрино (собственно нейтрино и антинейтрино), связанных друг с другом подобно электрону и позитрону. Однако это не есть единственный возможный способ описания нейтрино. Другой способ описания, в котором нет антинейтрино, был предложен Майорана²⁾. Показано³⁾, что в приложении к β -распаду теория Майорана дает обычно те же результаты, что и теория Дирака. Исключение составляет рассмотренный недавно весьма маловероятный случай

¹⁾ Jordan, Wigner, Zs. f. Phys., 47, 631 (1928).

²⁾ Majorana, Nuovo Cimento, 14, 171 (1937).

³⁾ Furry, Phys. Rev., 54, 56 (1938); 56, 1185 (1939).

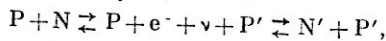
двойного β -распада¹). Теория β -распада, основанная на гипотезе о существовании нейтрино, достигла некоторых успехов в объяснении общих свойств явления. В частности, удалось объяснить распределение по энергиям электронов распада. Но, с другой стороны, до сих пор не найдено вполне удовлетворительной формы этой теории. Вместо одной удовлетворительной теории β -распада имеется несколько теорий, не вполне приемлемых.

Много было сделано в полевой теории мезонов, впервые выдвинутой Юкава, в попытке объяснить ядерные силы²). Мезон Юкава следует отождествить с π -мезоном. μ -Мезон является продуктом распада π -мезона, слабо связан с нуклеонами и поэтому не считается носителем ядерных сил. Теория Юкава оказалась очень ценным ориентиром в экспериментальных исследованиях и, вероятно, содержит немало верных путей к будущей теории. В частности, мезонной теории мы частично обязаны открытием рождения мезонов при столкновениях быстрых нуклеонов. С другой стороны, попытки математической формулировки мезонной теории имели весьма скромный успех. Часто бывает, что результаты, полученные в теории с помощью сложного математического аппарата, оказываются не лучше, чем прикидочная оценка порядка величины. Это неудовлетворительное положение будет, вероятно, исправлено только тогда, когда большее количество экспериментальных данных укажет нам путь к правильному пониманию.

Мы не пытаемся здесь обсуждать математический аппарат полевых теорий. Наша цель — проиллюстрировать на простых примерах полуквантитативные методы, которые могут оказаться полезными при интерпретации экспериментов. В некоторых случаях более строгое математическое рассмотрение не приводит к более точным результатам, ибо нет еще совершенной теории. В других случаях качественные соображения, приведенные в книге, могут служить введением к более полному изучению проблемы.

¹) F i g e s a n, Phys. Rev., 75, 323 (1949).

²) В 1934 г. И. Е. Таммом и Д. Д. Иваненко была выдвинута гипотеза, согласно которой силы, действующие между нуклеонами, объясняются тем, что нуклеоны взаимодействуют через электронно-нейтринное поле (см. § 14 настоящей книги). Взаимодействие, например, между протоном P и нейтроном N описывается по следующей схеме:



где e^{-} — электрон и ν — нейтрино. Эта теория дала короткодействующие силы между нуклеонами, но количественно привела к слишком малым значениям для ядерных сил.

Идеи, положенные в основу теории β -сил, определили дальнейшие пути развития теории ядерных сил. Работа Юкава, появившаяся в следующем году, есть развитие этих идей. [См. Тамм И. Е., Nature, 133, 981 (1934); Sow. Phys., 10, 567 (1936); Иваненко Д. Д., Nature, 133, 981 (1934); Гинзбург В. Л., Теория мезона и ядерные силы (статья в сборнике «Мезон», М., 1947); Иваненко Д. Д. и Соколов А. А., Классическая теория поля, М., 1951.] — Прим. ред.

§ 2. Электромагнитное поле

В качестве первого примера квантования будет рассмотрен пример электромагнитного поля. К сожалению, электромагнитное поле имеет довольно сложное строение, так как оно определяется в каждой точке векторами электрической и магнитной напряженностей. Но, с другой стороны, это—наиболее знакомое поле и его квантовые свойства хорошо изучены.

В квантовой механике измеряемые физические величины описываются операторами, удовлетворяющими некоммутативному закону умножения. В качестве примера укажем на координаты и компоненты импульса материальной точки. Сказанное относится и к другим величинам, например к любой из компонент электрического поля в заданной точке пространства. В квантовой электродинамике компоненты поля или потенциалы как функции положения в пространстве рассматриваются как операторы, вообще говоря, не коммутирующие друг с другом. Поле, однако, является системой с бесконечным числом степеней свободы, что ведет ко многим осложнениям.

Мы не собираемся здесь давать изложение принятых методов квантования; это сделано в более специальных работах. Мы коснемся лишь простейших идей квантовой теории излучения. Добавочные пояснения читатель найдет в приложении, раздел I.

Со времени ранних попыток установления статистики поля излучения принято говорить об осцилляторах поля излучения. Электромагнитное поле, заключенное в полость с полностью отражающими стенками, совершает колебания с различными собственными частотами. Каждое такое колебание может быть возбуждено независимо от остальных и имеет свойства, подобные свойствам осциллятора. В частности, энергия одного из таких собственных колебаний равна

$$\hbar\omega_s \left(n_s + \frac{1}{2} \right), \quad (1)$$

где ω_s —угловая частота и $n_s = 0, 1, 2, \dots$. Добавочным членом $\hbar\omega_s/2$, так называемой энергией нулевых колебаний, можно пренебречь как несущественной аддитивной постоянной¹⁾. После такой

¹⁾ В действительности эта постоянная бесконечно велика. Число осцилляторов между ω и $\omega+d\omega$ дается выражением (7). Следовательно, полная величина энергии нулевых колебаний равна

$$\int_0^{\infty} \frac{\hbar\omega}{2} \frac{\Omega\omega^2}{c^3\pi^2} d\Omega.$$

Этот интеграл, очевидно, расходится на верхнем пределе. Это—первый, но не самый плохой пример расходимостей, с которыми приходится иметь дело в полевых теориях.

[Утверждение Ферми, что энергия нулевых колебаний является несущественной добавкой к полной энергии поля, является неточным. Нулевые ко-

перенормировки полная энергия, содержащаяся в поле излучения, может быть записана в виде

$$W = \sum_s \hbar \omega_s n_s. \quad (2)$$

Каждый член представляет собой вклад соответствующего характеристического колебания в полную энергию поля излучения.

На языке фотонов равенство (2) указывает, что имеется n_s фотонов энергии $\hbar \omega_s$. Каждый фотон рассматривается как частица с импульсом p_s , который связан с длиной волны λ_s соотношением де Бройля

$$p_s = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_s} = \frac{\hbar}{\lambda_s} = \frac{\hbar \omega_s}{c}. \quad (3)$$

Представление электромагнитного поля как набора осцилляторов является неполным. Такое представление подходит для описания явлений излучения, но не описывает, например, электростатического поля. Можно, однако, показать, что явления излучения могут рассматриваться отдельно от явлений, связанных с электростатическим полем. Полное описание содержит, с одной стороны, рассмотрение поля излучения как суперпозиции поперечных волн всех частот и, с другой стороны, рассмотрение кулоновских сил между электрическими зарядами. В дальнейшем мы главным образом будем интересоваться поведением поля излучения, поэтому мы ограничимся поперечными волнами.

Пока ничто не возмущает электромагнитного поля, квантовые числа осцилляторов n_s будут постоянны и число фотонов не будет меняться. Возмущение вызовет переходы, при которых число n_s может или увеличиться (испускание, или рождение, квантов), или уменьшиться (поглощение, или исчезновение, квантов). Чтобы понять этот основной факт, рассмотрим сначала обычный линейный осциллятор. Он может быть возбужден до n -го квантового состояния. Энергия этого состояния равна $\hbar \omega n$ (если не учитывать нулевой энергии). Мы говорим, что это возбуждение эквивалентно n квантам энергии $\hbar \omega$ каждый. Число квантов n будет постоянным, пока осциллятор свободен. Возмущения могут увеличить или уменьшить квантовое число. В согласии с общими принципами квантовой механики, переходы из состояния с одним значением квантового числа n в состояние с другим его значением будут происходить, если матричный элемент возмущения, соответствующий начальному и конечному значениям квантового числа, отличен от нуля. Например, если возмущение пропорционально

лебания отражают важное свойство поля: поле существует и в отсутствие частиц. Поэтому строгое рассмотрение взаимодействия частицы с полем излучения должно включать учет нулевых колебаний поля (подробнее об этом см. Б л о х и н ц е в Д. И., УФН, 45, 195 (1951).—Прим. ред.]

абсциссе x осциллятора, возможные изменения квантового числа n будут такие, для которых матричный элемент оператора x не исчезает. Матричные элементы величины x для гармонического осциллятора вычисляются во всех элементарных курсах квантовой механики. Эти матричные элементы отличны от нуля только для переходов с изменением квантового числа от n к $n-1$ или к $n+1$. Для линейного осциллятора массы m и частоты ω единственные не исчезающие матричные элементы координаты x равны

$$\begin{aligned} x(n \rightarrow n-1) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{n}, \\ x(n \rightarrow n+1) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{n+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Процессы рождения и исчезновения фотонов в теории излучения тесно связаны с этим свойством осциллятора. В самом деле, поле излучения эквивалентно набору линейных осцилляторов. Переходы, в которых число n_s одного из этих осцилляторов увеличивается, суть процессы рождения фотонов (испускание излучения). Переходы, в которых n_s уменьшается, соответствуют исчезновению фотонов (поглощение излучения).

При построении количественной теории излучения оказывается проще описывать поле вектор-потенциалом \mathbf{A} , чем электрическим и магнитным векторами. Поскольку наше обсуждение ограничивается теорией излучения, скалярный потенциал можно считать равным нулю, так как электромагнитная волна может быть описана только векторным потенциалом. Вектор-потенциал в точке \mathbf{r} равен сумме $\sum \mathbf{A}_s(\mathbf{r})$ вектор-потенциалов $\mathbf{A}_s(\mathbf{r})$, соответствующих характеристическим частотам электромагнитного поля.

\mathbf{A}_s представляет поле s -го колебания. Величина \mathbf{A}_s пропорциональна координате осциллятора с номером s . Подобно оператору координаты, \mathbf{A}_s имеет матричные элементы, соответствующие переходам от n_s к $n_s \pm 1$. Вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в данной точке пространства \mathbf{r} есть сумма величин $\mathbf{A}_s(\mathbf{r})$. Поэтому $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ также является оператором, имеющим не исчезающие матричные элементы для переходов, в которых квантовое число n_s одного из осцилляторов переходит в $n_s \pm 1$ ¹⁾.

Заметим, что, в то время как $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ является оператором, вектор \mathbf{r} , определяющий точку в пространстве, в которой наблюдается вектор-потенциал, является обыкновенным классическим вектором.

Значения матричных элементов $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ можно получить (см. приложение, раздел I), если выразить \mathbf{A} через координаты осциллятора и затем использовать формулы (4). Для матричных элемен-

¹⁾ На языке фотонов переход от n_s к n_s+1 означает, что испущен фотон соответствующей частоты, а переход от n_s к n_s-1 означает поглощение фотона.

тов оператора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, соответствующих переходам, при которых один фотон $\hbar\omega_s$ рождается или исчезает, получаются следующие значения:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r})(n_s \rightarrow n_s + 1) &= \varepsilon_s \frac{\sqrt{2\pi} \hbar c}{\sqrt{\Omega \hbar \omega_s}} e^{-i(\mathbf{p}_s \mathbf{r})/\hbar} \sqrt{n_s + 1}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r})(n_s \rightarrow n_s - 1) &= \varepsilon_s \frac{\sqrt{2\pi} \hbar c}{\sqrt{\Omega \hbar \omega_s}} e^{i(\mathbf{p}_s \mathbf{r})/\hbar} \sqrt{n_s}, \end{aligned} \quad (5)$$

где \mathbf{p}_s —импульс фотона; величина этого импульса равна

$$|\mathbf{p}_s| = \frac{\hbar \omega_s}{c}; \quad (6)$$

ε_s —единичный вектор, перпендикулярный к \mathbf{p}_s и указывающий направление поляризации.

Приведем еще формулу числа состояний поля с частотой между ω и $\omega + d\omega$:

$$dN = \frac{\Omega}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega = 2\Omega \frac{4\pi p^2 dp}{8\pi^3 \hbar^3}. \quad (7)$$

В последнем выражении для dN множитель $\Omega \cdot 4\pi p^2 dp$ есть элемент объема в фазовом пространстве. Эта величина, деленная на куб постоянной Планка $h = 2\pi\hbar$ и умноженная на 2, дает число состояний. Множитель 2 появляется из-за двух возможных направлений поляризации.

Второе из двух выражений (5) содержит множитель

$$u_s = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i(\mathbf{p}_s \mathbf{r})/\hbar},$$

который можно рассматривать как собственную функцию фотона с импульсом \mathbf{p}_s (нормированная плоская волна). Здесь мы сталкиваемся с частным случаем общего правила: матричный элемент, описывающий исчезновение частицы, пропорционален собственной функции соответствующего состояния. Аналогичное правило гласит: матричный элемент рождения частицы пропорционален комплексно-сопряженной собственной функции соответствующего состояния.

Примером последнего правила может служить первое равенство (5), дающее матричный элемент рождения фотона, пропорциональный

$$u_s^* = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-i(\mathbf{p}_s \mathbf{r})/\hbar}.$$

§ 3. Поле скалярных частиц, обладающих массой покоя

Фотоны ведут себя как частицы с массой покоя, равной нулю, что видно из соотношения между энергией и импульсом фотона

$$\hbar\omega_s = cp_s. \quad (8)$$

Это соотношение является следствием уравнения Даламбера

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \quad (9)$$

из которого следует, что фотоны распространяются со скоростью света.

По этой причине уравнение электромагнитного поля (9) не может быть использовано для описания поля π -мезонов. π -Мезоны обладают массой покоя, отличной от нуля, и скорости их меньше скорости света. Предполагается, что, подобно фотонам, π -мезоны подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна, ибо по теории Юкава π -мезоны могут поглощаться и испускаться нуклеонами. В этом и следующих параграфах будет рассматриваться поле, кванты которого обладают отличной от нуля массой покоя. Такое поле можно принять для описания π -мезонов. В этом параграфе будет рассмотрен случай нейтральных π -мезонов, а в следующем параграфе—случай заряженных. В обоих случаях будет предполагаться, что спин π -мезонов равен нулю, так что их можно описывать скалярным полем.

Простейшим уравнением поля для скалярных π -мезонов является уравнение Клейна—Гордона

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - k^2 \varphi = 0, \quad (10)$$

которое отличается от уравнения Даламбера только последним членом. Амплитуда поля φ является скаляром¹⁾.

Уравнение (10) имеет решениями плоские волны вида

$$ae^{i[(x/\lambda) - \omega t]}.$$

Подставляя в (9), получаем

$$-\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0. \quad (11)$$

Как и в случае электромагнитного поля, колебания поля φ могут рассматриваться как суперпозиция собственных колебаний

¹⁾ Скалярные величины обычно разделяются на собственно скалярные и псевдоскалярные. При отражении пространственных координат относительно начала координат скаляры остаются неизменными, а псевдоскаляры меняют знак. В зависимости от предположений о свойствах поля можно построить скалярную или псевдоскалярную теорию π -мезонов. Эти две теории отличаются одна от другой только допустимыми формами взаимодействия π -мезонов с нуклеонами (см. § 8).

с различными собственными частотами ω_s . Каждое такое колебание ведет себя как линейный осциллятор с частотой ω_s . Уровни энергии этого осциллятора равны $n_s \hbar \omega_s$ (мы снова опускаем энергию нулевых колебаний). Как и в случае электромагнитного поля, целое число n_s интерпретируется как число квантов поля в состоянии s , обладающих энергией $\omega_s = \hbar \omega_s$. Импульс p_s каждого такого кванта дается соотношением де Бройля $p_s = \hbar / \lambda_s$. Используя это равенство, а также (11), получаем следующую связь между энергией и импульсом кванта:

$$\omega_s = \hbar \omega_s = \sqrt{c^2 p_s^2 + \hbar^2 c^2 k^2}. \quad (12)$$

Это эквивалентно релятивистскому соотношению между энергией и импульсом

$$\omega = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \quad (13)$$

для частицы с массой покоя

$$m = \frac{\hbar k}{c}. \quad (14)$$

Большинство рассуждений, приведенных в § 2 и в приложении, раздел I, можно повторить также в применении к скалярному полю φ . В частности, амплитуда поля φ в точке \mathbf{r} является оператором с матричными элементами, соответствующими рождению или исчезновению кванта. Матричные элементы оператора $\varphi(\mathbf{r})$ имеют вид

$$\varphi(\mathbf{r}) (n_s \rightarrow n_s - 1) = \frac{\hbar c}{\sqrt{2\Omega \omega_s}} e^{-i(\mathbf{p}_s \mathbf{r})/\hbar} \sqrt{n_s}, \quad (15)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) (n_s \rightarrow n_s + 1) = \frac{\hbar c}{\sqrt{2\Omega \omega_s}} e^{i(\mathbf{p}_s \mathbf{r})/\hbar} \sqrt{n_s + 1}. \quad (16)$$

Матричные элементы (15) и (16) вполне аналогичны матричным элементам (5). В выражениях матричных элементов для скалярных мезонов, конечно, не входит вектор поляризации \mathbf{e} , так как φ является скаляром, а не вектором. Различие на множитель $\sqrt{4\pi}$ вызвано тем, что в этом параграфе используются хевисайдовские единицы, а в § 2—гауссова система единиц. Если поле заключено в объеме Ω , допустимы только дискретные значения импульса. Число допустимых значений импульса между p и $p + dp$ дается следующей формулой:

$$dN = \frac{\Omega \cdot 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\Omega p^2 dp}{2\pi^2 \hbar^3}. \quad (17)$$

Эта формула, обычно используемая в статистике, очень сходна с (7) и отличается от последней только множителем 2, так как для фотона возможны два состояния поляризации.

§ 4. Поле заряженных скалярных частиц

Как правило, частицы, лишенные электрического заряда, являются квантами поля, которое обладает только действительными компонентами. Таковы, например, фотоны, являющиеся квантами электромагнитного поля. В противоположность этому, поле, кванты которого электрически заряжены, имеет комплексную амплитуду. То же относится к частицам, которые, хотя и нейтральны, имеют определенные электромагнитные свойства, например к нейтронам, обладающим магнитным моментом. Это—весьма общее свойство полей, связанное с требованием градиентной инвариантности¹⁾.

По этой причине поле φ , рассмотренное в предыдущем параграфе, описывает нейтральные частицы, и его кванты являются нейтральными π -мезонами. Было показано²⁾, что для описания поля, кванты которого электрически заряжены, может быть использована скалярная комплексная величина φ , удовлетворяющая уравнению Клейна—Гордона. Комплексное поле такого типа будет нами использовано для описания скалярных π -мезонов. Кванты этого комплексного поля могут иметь как положительный, так и отрицательный электрический заряд. В состоянии с допустимым импульсом p_s могут находиться n_s^+ положительных и n_s^- отрицательных частиц. Опуская снова энергию нулевых колебаний, запишем энергию комплексного скалярного поля:

$$W := \sum_s \omega_s (n_s^+ + n_s^-). \quad (18)$$

Для описания поля заряженных частиц важны как величина φ , так и комплексно-сопряженная ей величина φ^* . Величины $\varphi(\mathbf{r})$ и $\varphi^*(\mathbf{r})$ являются операторами, матричные элементы которых соответствуют переходам с изменением числа частиц на ± 1 . Именно, Паули и Вейскопф показали, что $\varphi(\mathbf{r})$ дает переходы, в которых n_s^+ уменьшается на единицу или n_s^- увеличивается на единицу. $\varphi^*(\mathbf{r})$ описывает противоположные процессы, т. е. $n_s^+ \rightarrow n_s^+ + 1$ или $n_s^- \rightarrow n_s^- - 1$. Другими словами, φ является оператором, который уменьшает полный заряд поля на единицу. При этом или исчезает положительная частица, или рождается отрицательная. Оператор φ^* производит противоположное действие.

Насколько нам известно, электрический заряд всегда сохраняется. Поэтому мы ожидаем, что ни φ , ни φ^* никогда не будут входить в гамильтониан поодиночке. Эти величины всегда будут связаны с другими величинами так, что заряд будет сохраняться.

¹⁾ См., например, Паули, Мезонная теория ядерных сил, М., 1947.

²⁾ Pauli, Weisskopf, Helv. Phys. Acta, 7, 709 (1934).

Например, φ и φ^* в отдельности недопустимы в гамильтониане. Но их произведение $\varphi(\mathbf{r})\varphi^*(\mathbf{r})$ является допустимым.

За исключением этих особенностей матричные элементы операторов φ и φ^* похожи на матричные элементы (15) и (16). Они выглядят так:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) (n_s^\pm \rightarrow n_s^\pm \mp 1) &= \frac{\hbar c}{\sqrt{2\Omega\omega_s}} e^{\pm i(\mathbf{p}_s\mathbf{r})/\hbar} \begin{cases} \sqrt{n_s^\mp} \\ \text{или} \\ \sqrt{n_s^\mp + 1} \end{cases} \\ \varphi^*(\mathbf{r}) (n_s^\pm \rightarrow n_s^\pm \pm 1) &= \frac{\hbar c}{\sqrt{2\Omega\omega_s}} e^{\mp i(\mathbf{p}_s\mathbf{r})/\hbar} \begin{cases} \sqrt{n_s^\pm + 1} \\ \text{или} \\ \sqrt{n_s^\pm} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Формула, дающая число возможных состояний с заданным импульсом, совпадает с (17).

§ 5. Частицы, подчиняющиеся принципу Паули

Кванты электромагнитного поля, а также кванты (нейтральные и заряженные) скалярного поля подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна, потому что в состоянии с заданным импульсом \mathbf{p}_s может находиться любое целое число этих частиц.

Для частиц, о которых известно или предполагается, что они удовлетворяют принципу Паули, требуется другая форма теории. Такими частицами являются электроны, позитроны, протоны, нейтроны, нейтрино и, вероятно, μ -мезоны. Частицы, подчиняющиеся запрету Паули, по которому число частиц в заданном квантовом состоянии может равняться только нулю или единице, также могут описываться полевой теорией с помощью так называемого метода вторичного квантования.

Пренебрежем сначала спином и релятивистскими поправками. В этом случае поле задается амплитудой вероятности ψ , удовлетворяющей уравнению Шредингера, которое в отсутствие внешних сил записывается в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2\psi. \quad (20)$$

В обычной теории Шредингера это уравнение описывает состояние одной частицы (электрона). Амплитуда вероятности нахождения электрона в точке \mathbf{r} равна в этом случае $\psi(\mathbf{r})$. В полевой теории электронов используется формально то же самое уравнение (20), но смысл этого уравнения коренным образом меняется. В случае уравнения Клейна—Гордона мы рассматривали поле φ как

оператор, матричные элементы (15) и (16) которого описывают переходы с изменением числа частиц на ± 1 . Подобным же образом величина ψ будет нами рассматриваться как оператор. Однако для электронов, подчиняющихся принципу Паули, число частиц с заданным импульсом \mathbf{p}_s может равняться или нулю или единице (постольку, поскольку мы пренебрегаем спином). Другими словами, числа заполнения n_s могут равняться только 0 или 1. Свойства оператора электронного поля должны быть такими, чтобы это требование выполнялось (см. приложение, раздел II). Как и в случае скалярного поля φ , $\psi(\mathbf{r})$ и $\psi^*(\mathbf{r})$ оказываются операторами, матричные элементы которых соответствуют переходам, при которых число заполнения n_s меняется на единицу, но в случае электронного поля n_s может изменяться только от 0 к 1 или от 1 к 0. Матричные элементы электронного поля равны (см. приложение, раздел II):

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r})(1 \rightarrow 0) &= \pm \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i(\mathbf{p}_s \mathbf{r})/\hbar}, \\ \psi^*(\mathbf{r})(0 \rightarrow 1) &= \pm \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-i(\mathbf{p}_s \mathbf{r})/\hbar}.\end{aligned}\quad (21)$$

Знак плюс или минус определяется с помощью правила¹⁾, которое нам нет нужды рассматривать, потому что в большинстве случаев нам понадобится квадрат модуля матричного элемента.

Отметим, что ψ^* действует как оператор рождения (переход $0 \rightarrow 1$), а ψ — как оператор исчезновения (переход $1 \rightarrow 0$).

Когда частицы не подвергаются действию сил, удобнее всего определять их состояние заданием импульса (плоская волна). При пренебрежении спином это ведет к матричным элементам (21). Если же на частицы действуют внешние силы, удобнее описывать частицы не плоскими волнами, а собственными функциями в поле заданных сил.

В этом случае мы будем характеризовать состояние электрона не числом n_s электронов с заданным импульсом \mathbf{p}_s , а числом m_i электронов, находящихся в квантовом состоянии (i) во внешнем поле. Принцип Паули и в этом случае позволяет числам заполнения m_i принимать значения только 0 и 1. Матричные элементы поля $\psi(\mathbf{r})$ и комплексно-сопряженной величины $\psi^*(\mathbf{r})$ будут связывать состояния, в которых m_i отличаются на ± 1 (см. приложение, раздел II):

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r})(1 \rightarrow 0) &= \pm u_i(\mathbf{r}), \\ \psi^*(\mathbf{r})(0 \rightarrow 1) &= \pm u_i^*(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (22)$$

¹⁾ Для этого следует перенумеровать состояния в некотором определенном порядке, например в порядке возрастания величины p_s . Тогда некоторые из состояний, предшествующих s -му, окажутся занятыми. Если число занятых состояний, предшествующих s -му, четно, в (21) выбирается знак плюс, в противном случае выбирается знак минус.

В этих формулах $u_i(\mathbf{r})$ —собственная функция i -го состояния электрона в заданном поле сил. Отметим, что матричные элементы (21) являются частным случаем (22), когда на электрон не действуют внешние силы, так как выражения в правых частях равенства (21) суть нормированные собственные функции свободного электрона.

В большинстве вычислений порядка величины того или иного эффекта используются формулы (21) или (22). Все же вкратце рассмотрим случай, когда необходимо релятивистское уравнение Дирака

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha \nabla \psi + i \frac{mc}{\hbar} \beta \psi, \quad (23)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ —хорошо известные матрицы Дирака. В этом случае поле ψ является уже не скаляром, а четырехкомпонентным спинором.

Для заданного импульса \mathbf{p}_s имеется четыре состояния, отличающихся друг от друга двумя ориентациями спина и положительным и отрицательным знаками энергии,

$$w_s = \pm \sqrt{c^2 p_s^2 + m^2 c^4}. \quad (24)$$

Четырехкомпонентная волновая функция каждого из таких состояний может быть записана в форме плоской волны, являющейся решением уравнения Дирака,

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} B_{\lambda}^{(\mu)} e^{i(\mathbf{p}_s \mathbf{r})/\hbar}.$$

Индексы μ и λ могут принимать четыре значения: μ указывает спин и знак энергии состояния, а λ обозначает четыре компоненты волновой функции. Величины B безразмерны и по порядку величины равны единице¹⁾.

В полевой теории электронов все четыре компоненты $\psi_{\lambda}(\mathbf{r})$ и сопряженные им компоненты $\psi_{\lambda}^*(\mathbf{r})$ являются операторами. Эти операторы вызывают переходы с изменением чисел заполнения от 1 к 0 и от 0 к 1. Приводим матричные элементы этих операторов:

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda}(\mathbf{r}) (1 \rightarrow 0) &= \pm \frac{1}{\sqrt{\Omega}} B_{(\lambda)}^{(\mu)} e^{i(\mathbf{p}_s \mathbf{r})/\hbar}, \\ \psi_{\lambda}^*(\mathbf{r}) (0 \rightarrow 1) &= \pm \frac{1}{\sqrt{\Omega}} B_{\lambda}^{*(\mu)} e^{-i(\mathbf{p}_s \mathbf{r})/\hbar}. \end{aligned} \quad (25)$$

¹⁾ Оказывается, что, когда электрон движется со скоростью, малой в сравнении со скоростью света c , две из четырех величин B равны по порядку величины 1, а две другие равны v/c . Для состояния с положительной энергией третья и четвертая компоненты велики, а первая и вторая—малы; для состояния с отрицательной энергией имеет место противоположный случай.

В большинстве приложений мы будем интересоваться только порядком величины, поэтому будем заменять V на единицу. При такой замене матричный элемент (25) становится одинаковым с (21).

В теории дырок Дирака все состояния с положительной энергией в вакууме свободны, а каждое состояние с отрицательной энергией занято одним электроном. Рождение позитрона соответствует исчезновению электрона в одном из этих заполненных состояний с отрицательной энергией. Следовательно, оператор ψ служит двоякой цели: исчезновению электрона или созданию позитрона. Оператор ψ^* оказывает противоположное действие.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОЛЕЙ

§ 6. Общие формы взаимодействия

Поля, рассмотренные в предыдущей главе, будут использованы для интерпретации ряда свойств следующих элементарных частиц.

Фотоны (обозначены символом γ); описываются полем излучения, рассмотренным в § 2, с амплитудой A (вектор-потенциал).

Заряженные и нейтральные π -мезоны (обозначены символами Π^+ , Π^- и Π^0); для простоты мы будем предполагать, что их спин равен нулю. Заряженные π -мезоны описываются комплексным скалярным полем, рассмотренным в § 4, а нейтральные—действительным скалярным полем, рассмотренным в § 3. Как правило, для обозначения частицы и для обозначения амплитуды¹⁾ соответствующего поля будет применяться одна и та же буква. Например, буква Π будет также обозначать амплитуду π -мезонного поля вместо буквы φ , использованной нами в § 3 и 4.

Электроны (символ e), протоны (символ P), нейтроны (символ N), нейтрино (символ ν), μ -мезоны (символ μ); предполагается, что все эти частицы описываются уравнением поля Дирака, рассмотренным в § 5. При оценке порядка величины того или иного эффекта мы не будем учитывать спирного характера амплитуды поля и для матричных элементов будем использовать упрощенные выражения (21). Для обозначения полей будут использоваться те же буквы, что и для соответствующих частиц.

Взаимодействие между частицами лежит в основе множества явлений. Укажем, например, на рассеяние двух сталкивающихся частиц или на более сложные события, в которых некоторые из взаимодействующих частиц исчезают, а некоторые рождаются. Две частицы могут взаимодействовать друг с другом только в тех случаях, когда они находятся в одной и той же точке пространства (контактное взаимодействие) или на конечном расстоянии одна от другой. Последний случай обычно интерпретируется не как

¹⁾ Ферми применяет термин «амплитуда» для обозначения волновой функции поля вместо обычного применения этого термина к составляющим разложения Фурье волновой функции. Однако поскольку в данной книге это не может вызвать недоразумения, при переводе была сохранена терминология автора.—Прим. ред.

действие на расстоянии одной частицы на другую, а как взаимодействие через поле. Поле является переносчиком взаимодействия между частицами. В квантовой трактовке это поле будет обладать определенным сорта квантами, и взаимодействие между двумя частицами будет представлено как процесс, в котором одна из частиц испускает квант данного поля, а другая этот квант поглощает. Этот процесс объясняет взаимную энергию двух частиц, которая является функцией расстояния между ними и дает потенциал взаимодействия.

Можно, наоборот, сводить все взаимодействия между частицами только к контактным взаимодействиям. Имеется тенденция рассматривать теорию, содержащую только контактные взаимодействия; ее легче привести к релятивистски инвариантному виду.

Почти во всех полевых теориях, рассматриваемых в настоящее время, энергия взаимодействия двух или более типов частиц представляется в виде интеграла по объему от плотности энергии взаимодействия. Плотность энергии взаимодействия обычно равна произведению амплитуд различных полей.

В случае взаимодействия электронов с полем излучения общая форма плотности энергии взаимодействия записывается по аналогии с выражением этой величины в классической электродинамике. Классическим выражением плотности энергии взаимодействия электрона с электромагнитным полем является скалярное произведение \mathbf{AJ} вектор-потенциала электромагнитного поля \mathbf{A} на плотность тока \mathbf{J} , создаваемого электронами. Так как скалярный потенциал поля излучения равен нулю, приведенное выражение дает полную энергию взаимодействия. Если скалярный потенциал отличен от нуля, необходимо включить в плотность энергии взаимодействия произведение плотности заряда на скалярный потенциал. Плотность тока \mathbf{J} можно выразить через амплитуду ψ электронного поля. Пренебрегая спином и релятивистскими эффектами, можно, как и в элементарной квантовой теории, найти выражение для \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \frac{e\hbar}{2imc} [\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi]. \quad (26)$$

Тогда энергия взаимодействия запишется в следующем виде:

$$\mathcal{H} = \frac{e\hbar}{2imc} \int [\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi] \mathbf{A} d\Omega. \quad (27)$$

Чтобы иметь возможность рассматривать переходы, вызванные взаимодействием (27) электронов с фотонами, нужно знать матричные элементы этого взаимодействия. Займемся их вычислением.

Рассмотрим сначала первый член правой части выражения (27). Этот член содержит оператор \mathbf{A} , который может в соответствии с (5) вызвать рождение или исчезновение фотона, и операторы ψ , ψ^* , которые по (21) дают соответственно исчезновение

и рождение электрона. Пусть \mathbf{p}_s —импульс испущенного (или поглощенного) фотона, \mathbf{p}_1 —импульс исчезающего электрона и \mathbf{p}_2 —импульс рожденного электрона. Исчезновение электрона с импульсом \mathbf{p}_1 и рождение электрона с импульсом \mathbf{p}_2 эквивалентно такому переходу, при котором импульс электрона меняется с \mathbf{p}_1 на \mathbf{p}_2 . Поэтому матричные элементы оператора (27) будут связывать начальное состояние с конечным, вообще говоря, отличающимся от начального, так как при переходе поглощен или испущен один фотон импульса \mathbf{p}_s и в то же время импульс электрона изменился с \mathbf{p}_1 на \mathbf{p}_2 . Для примера рассмотрим случай, когда в начальном состоянии нет фотонов с импульсом \mathbf{p}_s , другими словами, число заполнений n_s фотонного поля в начальном состоянии равно нулю. Если испускается фотон с импульсом \mathbf{p}_s , число заполнения конечного состояния будет $n_s = 1$. По первой из формул (5) соответствующий матричный элемент вектор-потенциала равен

$$\varepsilon_s \frac{\sqrt{2\pi \hbar c}}{\sqrt{\Omega \hbar \omega_s}} e^{-(i/\hbar)(\mathbf{p}_s \mathbf{r})}. \quad (28)$$

По (21) оператор ψ , вызывающий исчезновение электрона с импульсом \mathbf{p}_1 , вносит в матричный элемент множитель $\frac{\pm 1}{\sqrt{\Omega}} e^{i(\mathbf{p}_1 \mathbf{r})/\hbar}$. В соответствии с (27) мы должны вычислить градиент этого множителя. Это дает добавочный множитель $i\mathbf{p}_1/\hbar$. Наконец, оператор ψ^* , соответствующий рождению электрона с импульсом \mathbf{p}_2 , дает в (27) множитель $\frac{\pm 1}{\sqrt{\Omega}} e^{-i(\mathbf{p}_2 \mathbf{r})/\hbar}$.

Итак, первый член подинтегрального выражения в (27) равен ¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{eh}{2imc} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-(i/\hbar)(\mathbf{p}_2 \mathbf{r})} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{(i/\hbar)(\mathbf{p}_1 \mathbf{r})} \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_1 \varepsilon_s) \frac{\sqrt{2\pi \hbar c}}{\sqrt{\Omega \hbar \omega_s}} e^{-(i/\hbar)(\mathbf{p}_s \mathbf{r})} = \\ = \frac{e}{2m\Omega} \sqrt{\frac{2\pi \hbar}{\Omega \omega_s}} (\mathbf{p}_1 \varepsilon_s) e^{(i/\hbar)(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s) \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Это выражение нужно еще проинтегрировать по нормировочному объему Ω . Интегрирование легко произвести, так как единственным зависящим от координат множителем в предыдущем выражении является экспонента. Интеграл от нее по большому объему Ω будет отличен от нуля только при условии

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_s = 0, \quad (30)$$

в противном случае интеграл равен нулю, так как среднее значение подинтегральной функции в области интегрирования равно нулю.

¹⁾ Знак выражения (29) является правильным в том случае (практически важным), когда рассматривается только один электрон.

Условие (30) выражает закон сохранения импульса: матричный элемент исчезает, если начальный импульс электрона \mathbf{p}_1 не равен векторной сумме импульсов \mathbf{p}_s (фотона) и \mathbf{p}_2 (электрона) в конечном состоянии. Если импульс сохраняется, экспонента равна единице и интеграл от нее по объему равен Ω . Тогда полный вклад первого члена (27) в матричный элемент равен

$$\frac{e}{2m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\Omega\omega_s}} (\mathbf{p}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_s). \quad (31)$$

Второй член выражения (27) дает в матричный элемент вклад, отличающийся от (31) заменой \mathbf{p}_1 на \mathbf{p}_2 . Так как формула (27) является нерелятивистской, выражения \mathbf{p}_1/m и \mathbf{p}_2/m равны скоростям электрона \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 соответственно до и после перехода. Поэтому матричный элемент равен

$$\frac{e}{2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\Omega\omega_s}} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \boldsymbol{\varepsilon}_s. \quad (32)$$

Действуя подобным же образом, можно показать, что матричный элемент, соответствующий поглощению фотона, также имеет вид (32), если импульс начального состояния равен импульсу конечного. В противном случае матричный элемент равен нулю.

Два только что рассмотренных процесса суть процессы испускания и поглощения света с изменением импульса электрона в согласии с законом сохранения импульса. Однако из того, что матричные элементы таких переходов не равны нулю, вовсе не следует, что эти переходы действительно происходят. Хорошо известно, что свободный электрон не может излучать, так как в этом случае было бы невозможно одновременное выполнение законов сохранения энергии и импульса. Значение закона сохранения энергии, а также методы вычисления вероятностей переходов будут обсуждены в § 10 (см. также приложение, раздел IV).

Формула (32) дает верный порядок величины матричного элемента также и в релятивистском случае, когда для электронов справедливо уравнение Дирака. Для частиц, подчиняющихся уравнению Дирака, выражения для плотности тока и для энергии взаимодействия равны соответственно:

$$\mathbf{J} = -e\tilde{\psi}\boldsymbol{\alpha}\psi \quad (33)$$

и

$$\mathcal{H} = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} d\Omega = e \int \tilde{\psi}\boldsymbol{\alpha}\psi \cdot \mathbf{A} d\Omega, \quad (34)$$

где $\tilde{\psi}$ —транспонированная сопряженная функция по отношению к четырехкомпонентной функции ψ .

В релятивистском случае и матрицы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и величины B в формуле (25) равны по порядку величины единице. С помощью

(5) находим, что в этом случае матричный элемент рождения или исчезновения одного фотона равен по порядку величины

$$ec \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\Omega\omega_s}}. \quad (35)$$

Когда скорости электрона в начальном и конечном состояниях близки к c , это выражение отличается от (32) только множителем порядка 1.

Для частиц, подчиняющихся статистике Бозе—Эйнштейна, например для π -мезонов, выражение плотности тока, а следовательно, и вид электромагнитного взаимодействия несколько отличны от (27) или (34). Можно, однако, показать, что в простых случаях, которые нам предстоит рассмотреть, формула (32) дает верный порядок величины матричных элементов не только для электронов, но и для других частиц, обладающих электрическим зарядом.

§ 7. Сохранение импульса

Мы видели, что в случае электромагнитного взаимодействия выполнение закона сохранения импульса есть необходимое условие того, что матричный элемент не равен нулю. Это справедливо и для других типов взаимодействия, с которыми мы познакомимся. Мы увидим в дальнейшем, что все типы взаимодействия записываются в виде интегралов от выражений, содержащих произведения амплитуд различных полей (или иногда производные амплитуд). Из формул (5), (15), (19), (21), (25) видно, что для всех типов полей зависимость матричных элементов от координат содержится в экспоненциальном множителе вида $e^{\pm i\mathbf{r}\cdot\mathbf{h}}$, где \mathbf{p} —импульс рождаемой или исчезающей частицы. В матричных элементах исчезновения частицы всегда выбирается знак плюс в показателе экспоненты, а в матричных элементах рождения частицы всегда берется знак минус. Поэтому интеграл от плотности энергии взаимодействия всегда сводится к интегралу по объему Ω от произведения экспоненциальных множителей и, таким образом, имеет вид

$$\int e^{(i/\hbar)(\pm \mathbf{p}_1 \pm \mathbf{p}_2 \pm \dots \pm \mathbf{p}_n)\cdot\mathbf{r}} d\Omega. \quad (36)$$

Этот интеграл отличен от нуля только в том случае, если

$$\pm \mathbf{p}_1 \pm \mathbf{p}_2 \pm \dots \pm \mathbf{p}_n = 0, \quad (37)$$

ибо в противном случае среднее значение подинтегрального выражения равно нулю. Если условие (37) выполнено, подинтегральное выражение равно единице, а интеграл равен нормировочному объему Ω . Предыдущее равенство выражает закон сохранения импульса, так как импульсы всех исчезающих частиц

входят в это равенство со знаком плюс, а импульсы всех рождающихся частиц со знаком минус. При этом векторная сумма импульсов рождающихся частиц равна векторной сумме импульсов исчезающих частиц. Таким образом, мы получаем следующий закон:

Закон сохранения импульса. Два состояния, связанные неисчезающим матричным элементом энергии взаимодействия, обладают равными импульсами.

На основе сказанного можно также сформулировать следующее правило:

Правило для вычисления матричных элементов. При вычислении интеграла по объему от плотности энергии взаимодействия сохранение импульса является обязательным. Поэтому интеграл по объему от произведения всех экспоненциальных множителей равен объему интегрирования Ω .

Это правило намного упрощает вычисление матричных элементов.

Дальнейшее обсуждение законов сохранения в полевых теориях см. в приложении, раздел IV.

§ 8. Взаимодействие Юкава

В этом и в следующем параграфах будут рассмотрены основные типы взаимодействия между элементарными частицами. Сначала рассмотрим взаимодействие между π -мезонами и нуклонами.

Предполагается, что между элементарными частицами имеют место следующие реакции:

$$P \rightleftharpoons N + \Pi^+, \quad (38a) \quad N \rightleftharpoons P + \Pi^-, \quad (38б)$$

$$P \rightleftharpoons P + \Pi^0, \quad (38в) \quad N \rightleftharpoons N \pm \Pi^0. \quad (38г)$$

Вначале в теории Юкава рассматривались только реакции с участием заряженных мезонов. Недавние сообщения говорят о том, что с большой вероятностью существует и нейтральный π -мезон¹⁾; соответственно этому добавлены реакции (38в) и (38г). Если реакции (38) соответствуют действительности, можно ожидать, что π -мезоны подчиняются статистике Бозе и имеют целый спин. Если спин π -мезона равен нулю, разумно считать мезоны квантами скалярного поля, как это было сделано в § 3 и 4. Если бы спин π -мезона равнялся единице, нужно было бы применять векторное мезонное поле. В дальнейшем будет предполагаться, что спин π -мезона равен нулю. В силу последнего предположения амплитуда мезонного поля Π может быть как скаляром, так и псевдоскаляром. Принято предполагать последнее, так как это ведет к меньшему расхождению с экспериментом. Мы будем

¹⁾ В настоящее время существование нейтрального мезона следует считать экспериментально доказанным.—Прим. ред.

придерживаться общепринятой точки зрения, т. е. считать, что амплитуда мезонного поля является псевдоскаляром.

Для нейтральных мезонов Π есть действительная величина (типа, рассмотренного в § 3). Положительные и отрицательные π -мезоны представляются комплексным полем. Для нейтрального и заряженных мезонных полей следовало бы применять различные обозначения. Мы не будем этого делать во избежание усложнения формул. Всюду, где это необходимо, будут приведены соответствующие пояснения. Дальнейшее рассмотрение будет относиться к случаю заряженных π -мезонов, для которых Π есть комплексная величина.

Из (19) и (21) следует, что реакции (38а) и (38б) обусловлены энергией взаимодействия, которой в формуле соответствуют члены, содержащие множители Π^*N^*P и ΠP^*N . В дальнейших вычислениях порядка величины того или иного эффекта плотность энергии взаимодействия будет считаться пропорциональной этим множителям.

Однако в рассматриваемом частном случае полезно полнее познакомиться с возможными формами взаимодействия¹⁾. Так как величины Π и Π^* предполагаются псевдоскалярами, простейшие инвариантные комбинации получаются сочетанием амплитуд мезонного поля с псевдоскалярным выражением, образованным согласно формуле (226). Поэтому простейший возможный вид члена взаимодействия в плотности функции Лагранжа дается следующим эрмитовым оператором:

$$-e'_2 (\Pi \tilde{P} \beta_{\alpha_1} \alpha_2 \alpha_3 N + \Pi^* \tilde{N} \beta_{\alpha_1} \alpha_2 \alpha_3 P).$$

Здесь e'_2 —коэффициент, определяющий величину взаимодействия и имеющий размерность электрического заряда. Известно, что члены взаимодействия в лагранжиане и в гамильтониане отличаются только знаками. Поэтому мы можем записать и гамильтониан такого взаимодействия:

$$\mathcal{H}' = e'_2 \int (\Pi \tilde{P} \beta_{\alpha_1} \alpha_2 \alpha_3 N + \Pi^* \tilde{N} \beta_{\alpha_1} \alpha_2 \alpha_3 P) d\Omega. \quad (39)$$

Такая запись взаимодействия не является единственно возможной. Действительно, если Π —псевдоскаляр, то градиент этой величины есть псевдовектор. Поэтому можно составить инвариантное выражение в виде скалярного произведения градиента Π или Π^* на псевдовектор, образованный из P и N по формуле (228). Это дает такой член в гамильтониане взаимодействия:

$$\mathcal{H}'' = \frac{\hbar e''_2}{m_\pi c} \int \left(\nabla \Pi \tilde{P} \frac{[\alpha \times \alpha]}{i} N + \text{компл.-сопряж.} \right) d\Omega, \quad (40)$$

1) Читателю, интересующемуся этой частью обсуждения, следует сначала прочесть приложение, раздел IV.

где m_π —масса π -мезона. Выражение содержит множитель $\hbar/m_\pi c$, так что постоянная e_2'' снова будет иметь размерность электрического заряда.

При вычислениях порядка величины будут использоваться упрощенные выражения. Вместо того чтобы использовать выражения (39), (40) или их комбинацию, можно упростить вычисления, пренебрегая спиновыми свойствами нуклеонов, и записать член взаимодействия в виде

$$\mathcal{H} = e_2 \int (\Pi P^* N + P^* N^* P) d\Omega, \quad (41)$$

где P, P^*, N, N^* имеют матричные элементы, вычисленные по (21). Вычисления с использованием взаимодействия (41) ведут к неточностям. Прежде всего результаты, полученные с таким взаимодействием, релятивистски неинвариантны. Поэтому нельзя ожидать, что будет правильно представлено поведение частиц с энергией, намного превышающей их энергию покоя. Ошибки могут вкратце и при малых скоростях. Хотя матрицы Дирака и их произведения имеют элементы порядка 1, их среднее значение нередко оказывается пропорциональным v/c . Это же замечание относится и к величине $(\hbar/m_\pi c) \nabla$, которая входит в (40).

Основное, что теряется при использовании (41) вместо (39) и (40), это количественные данные о спиновой зависимости ядерных сил и о вкладе поля π -мезонов в магнитный момент нуклона. Понятно, что эти эффекты не могут быть получены из «бесспинового» выражения, подобного (41).

Эти недостатки частично возмещаются большой простотой вычислений с использованием взаимодействия (41). Кроме того, еще вообще не найдено удовлетворительной формы взаимодействия—с точки зрения согласия теории с опытом,—если не считать взаимодействия электронов с электромагнитным полем. Действительно, нет никаких экспериментальных доказательств того, что взаимодействия (39) или (40) являются правильными. Возможно, такое неудовлетворительное положение вызвано тем, что нет соответствующего математического аппарата, который давал бы возможность однозначного выбора взаимодействия. Чаще всего в современных вычислениях член взаимодействия рассматривается как возмущение и вероятности перехода вычисляются в низшем приближении, которое и дает искомый результат. Даже в этой упрощенной схеме вычисления часто встречаются расходящиеся выражения, которые приходится оценивать с помощью малообоснованных процедур обрезания.

При таком положении дел не ясно, стоит ли тратить время и силы на точное вычисление некоторых величин, отбрасывая одновременно другие, расходящиеся величины. Поскольку все же полевые теории часто дают результаты, находящиеся в согласии с

экспериментом, по крайней мере по порядку величины, кажется весьма вероятным, что будущая теория будет иметь некоторое сходство с современными попытками. Возможно, что введение конечного размера элементарных частиц или даже квантовая геометрия могут оказаться ключом к решению.

Эти несколько пренебрежительные замечания по поводу современных полевых теорий не относятся к квантовой электродинамике. Эта теория развита до такой степени, что дает нам возможность уяснения взаимодействия электрона с фотоном. За последние несколько лет квантовая электродинамика продвинулась далеко вперед. Однако мы не можем здесь уделить этой теории сколько-нибудь внимания и отсылаем читателя к имеющимся прекрасным монографиям по квантовой электродинамике.

Процессы, описываемые формулами (38), приводят к важным следствиям. Например, по реакции (38б) нейтрон может перейти в протон и отрицательный π -мезон. Из факта существования сильного взаимодействия между этими двумя возможными состояниями следует (как будет более подробно показано в § 11), что между такими двумя формами нуклона непрерывно происходят взаимопревращения. Нейтрон часть времени проводит как собственно нейтрон, а часть времени—как протон и отрицательный мезон. Подобно этому, протон часть времени является собственно протоном, а часть времени—нейтроном и отрицательным мезоном. Уже отмеченные аномальные магнитные моменты нуклонов объясняются наличием π -мезонов, которые часть времени находятся в окрестности нуклона. К сожалению, попытки количественного объяснения магнитных аномалий с помощью указанной модели пока потерпели неудачу; кроме согласия по порядку величины с экспериментальными значениями магнитных моментов нуклонов, ничего получить не удалось.

Формула (41) относится к случаю заряженных π -мезонов. Обычно считается, что взаимодействие нейтрального π -мезона с нуклоном имеет такой же вид. Однако в этом случае Π является действительной величиной и, следовательно, Π и Π^* совпадают. Современные эксперименты указывают на то, что константа связи e_2 имеет одинаковое значение для взаимодействия нейтральных и заряженных π -мезонов с нуклеонами. В этой книге постоянные взаимодействия для нейтральных и заряженных π -мезонов будут считаться равными.

В заключение настоящего параграфа мы вычислим матричные элементы взаимодействия (41). При этом мы воспользуемся правилом, сформулированным в конце § 7. Вычисленное значение матричного элемента понадобится нам в последующих приложениях.

Матричные элементы для всех процессов (38), в которых рождается или исчезает π -мезон, получаются из формулы (19) для

матричного элемента оператора Π и из формулы (21) для матричных элементов операторов P и N . Согласно § 7, интеграл от экспоненты заменен на Ω . В результате получаем

$$e_2 \frac{\hbar c}{\sqrt{2\Omega\omega_s}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \Omega = \frac{e_2 \hbar c}{\sqrt{2\Omega\omega_s}}, \quad (42)$$

где ω_s —полная энергия поглощенного или испущенного π -мезона. При вычислении этой формулы считалось, что число заполнения мезонного поля при переходах меняется или от 0 к 1, если мезон рождается, или от 1 к 0, если мезон поглощается. В других случаях следует учитывать имеющиеся в (19) множители $\sqrt{n_s + 1}$ или $\sqrt{n_s}$.

§ 9. Другие взаимодействия

Из эксперимента известно, что π -мезон является нестабильной частицей и спонтанно распадается, переходя в μ -мезон. Время жизни π -мезона по отношению к такому переходу приблизительно равно $2 \cdot 10^{-8}$ сек. Поуэлл, наблюдавший такой распад, нашел, что π -мезон, получающийся в результате распада покоящегося π -мезона, имеет постоянный пробег в фотоэмульсии, равный приблизительно 600 микронам. Принимая во внимание законы сохранения энергии и импульса, приходим к заключению, что при распаде π -мезона должна испускаться также и нейтральная частица, не оставляющая следа в фотопластинке. В соответствии со сравнительно широкими пределами ошибок можно считать, что масса этой нейтральной частицы равна нулю. Общепринято мнение—и мы будем его придерживаться,—что эта нейтральная частица есть нейтрино. Как уже отмечалось, нейтрино обычно описывается уравнением Дирака, что дает два типа нейтрино: собственно нейтрино и антинейтрино (обозначена символом $\bar{\nu}$). Поэтому постулируем следующие реакции:

$$\Pi^+ \rightleftharpoons \mu^+ + \bar{\nu}, \quad \Pi^- \rightleftharpoons \mu^- + \nu. \quad (43)$$

Член взаимодействия, дающий первый из этих переходов, должен включать в себя оператор Π , соответствующий по (19) исчезновению положительного π -мезона, а также операторы μ^* и $\bar{\nu}$, которые по (21) соответствуют рождению положительного μ -мезона и исчезновению нейтрино, т. е. рождению антинейтрино. Та же самая комбинация операторов будет описывать переход, обратный второму переходу (43), поскольку оператор Π соответствует также рождению отрицательного π -мезона, оператор μ^* —исчезновению отрицательного μ -мезона, а оператор ν —исчезновению нейтрино. Так как энергия взаимодействия является действительной величиной (эрмитовым оператором), необходимо добавить к рассмо-

тренному только что члену комплексно-сопряженную величину $\Pi^* \nu^* \mu$. Эта комплексно-сопряженная величина описывает вторую реакцию (43), а также реакцию, обратную первой. Поэтому простейший вид энергии взаимодействия, дающий прямые и обратные реакции (43), следующий:

$$e_3 \int (\Pi \mu^* \nu + \Pi^* \nu^* \mu) d\Omega, \quad (44)$$

где e_3 —соответствующая константа взаимодействия, имеющая размерность электрического заряда. Взаимодействие (44) не является релятивистски инвариантным, и его следовало бы заменить более строгими выражениями, составленными по образцу уже рассмотренных форм взаимодействия. Так как нашей целью является лишь вычисление порядка величины, мы опустим эти осложнения.

Матричные элементы взаимодействия (44) могут быть получены обычным путем с помощью матричных элементов Π , μ , ν , полученных соответственно из (19) и (21). С помощью правила, приведенного в § 7, находим, что матричные элементы для всех процессов (43) имеют равные¹⁾ значения

$$\frac{e_3 \hbar c}{\sqrt{2\Omega\omega_s}}, \quad (45)$$

где ω_s есть энергия π -мезона. Эта формула будет использована в § 13 при вычислении времени жизни π -мезона.

Постоянная взаимодействия электронов с полем излучения равна заряду электрона e . Константы взаимодействия e_2 в теории Юкава [формула (41)] и постоянная e_3 для процесса (43) также имеют размерность электрического заряда. Однако численные значения этих постоянных различны, как будет видно из дальнейшего.

Рассмотрим теперь три других элементарных процесса, константы взаимодействия для которых имеют размерность $\text{эрг} \cdot \text{см}^3$. Обозначим эти константы через g_1 , g_2 и g_3 .

Первое из этих взаимодействий ведет к испусканию β -частицы. Этот процесс издавна объясняется по такой схеме:

$$N \rightleftharpoons P + e + \bar{\nu}. \quad (46)$$

Если принять, что одновременно с испусканием электрона испускается не нейтрино, а антинейтрино, формулы теории становятся более симметричными. Этим объясняется вид записи реакции (46).

¹⁾ Как и при выводе формулы (42), считается, что числа заполнения поля π -мезонов при переходе меняются или от 0 к 1, или от 1 к 0. Во всех других случаях в (45) появляется множитель $\sqrt{n+1}$ или \sqrt{n} .

Переходам такого вида соответствует следующий упрощенный член взаимодействия в гамильтониане:

$$g_1 \int (P^* N e^* \nu + N^* P \nu^* e) d\Omega. \quad (47)$$

В этом случае все четыре частицы подчиняются принципу Паули и, следовательно, матричные элементы операторов P , N , e и ν имеют вид (21). С помощью правила, данного в § 7, непосредственно находим матричный элемент взаимодействия (47):

$$g_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \right)^4 \Omega = \frac{g_1}{\Omega}. \quad (48)$$

Эта формула относится к переходу, в котором все четыре частицы, участвующие в реакции (46), находятся в состояниях с определенными значениями импульса (плоские волны). Однако в приложениях часто используются формулы, относящиеся к случаям, когда состояния протона, нейтрона и электрона не могут быть представлены плоскими волнами. Такие формулы можно получить, если для матричных элементов компонент поля пользоваться выражениями (22), а не (21). Соответствующие формулы будут приведены в § 14. Там же будут обсуждены некоторые из многих попыток найти для β -взаимодействия более точное выражение, чем упрощенная запись (45).

Перейдем к рассмотрению второго из трех обсуждаемых элементарных взаимодействий, которое вызывает спонтанный распад μ -мезона. Этот мезон является нестабильной частицей и распадается с испусканием электрона. Среднее время жизни μ -мезона равно $2,15 \cdot 10^{-6}$ сек. Измерения указывают на то, что энергия испущенного электрона не всегда одна и та же. Было показано, что этот факт говорит о распаде μ -мезона на три частицы—на электрон и на две нейтральные частицы, которыми являются, как теперь принято думать, нейтрино. Согласно этому предположению, распад происходит так:

$$\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}. \quad (49)$$

Эта реакция записана для случая, когда одна из двух нейтральных частиц есть антинейтрино. Такое предположение практически ничего не меняет. За упрощенное взаимодействие, ведущее к (49), можно принять выражение

$$g_2 \int (\mu^* e \nu^* \nu + e^* \mu \nu^* \nu) d\Omega. \quad (50)$$

В этом случае все четыре частицы также подчиняются принципу Паули и для вычисления матричных элементов компонент поля можно использовать (21). Как и в случае β -взаимодействия,

находим, что матричный элемент перехода (49) равен

$$\frac{g_2}{\Omega}. \quad (51)$$

Спонтанный распад (49) не является единственным процессом, в результате которого исчезает μ -мезон. Имеются данные, что отрицательный μ -мезон вблизи ядра исчезает без испускания электрона. Этому процессу может соответствовать реакция



Если μ -мезон захватывается в область действия ядерных сил, он может вступить во взаимодействие с одним из протонов ядра, и эти две частицы могут превратиться в нейтрон и нейтрино. Из этой гипотезы, между прочим, следует, что ядро, в котором происходит такая реакция, может оказаться не сильно возбужденным, так как большая часть энергии покоя μ -мезона может перейти в энергию нейтрино. Этим можно объяснить, почему процесс, как правило, идет без образования звезд.

В упрощенной форме член взаимодействия, ведущий к (52), может быть записан так:

$$g_3 \int (N^* P \nu^* \mu^* + P^* N \mu \nu) d\Omega. \quad (53)$$

Матричный элемент этого взаимодействия сходен с матричным элементом двух предыдущих взаимодействий и дается выражением

$$\frac{g_3}{\Omega}. \quad (54)$$

Три постоянные g_1 , g_2 , g_3 из выражений (47), (50), (53) имеют одинаковую размерность $эрг \cdot см^3 \equiv L^5 M T^{-2}$. Замечательным является то обстоятельство, что численные значения этих постоянных, вероятно, имеют весьма близкие значения, приблизительно $10^{-49} эрг \cdot см^3$. Этот факт был отмечен независимо многими исследователями и, вероятно, не является простым совпадением, хотя значение его сейчас не вполне ясно. Возможно, факт равенства между собой констант g_1 , g_2 , g_3 может быть связан с аналогичным в некоторой степени фактом, что электрические заряды всех элементарных частиц равны между собой. Общая для всех частиц величина элементарного электрического заряда e играет роль постоянной взаимодействия различных типов элементарных частиц с электромагнитным полем.

Следует отметить далее, что некоторые из рассмотренных выше взаимодействий могут оказаться не первичными, а следствием других взаимодействий. Эта возможность, которая может быть проиллюстрирована на примере теории β -распада Юкава, рассмотрена в приложении, раздел V.

§ 10. Вычисление вероятностей переходов

В практических вычислениях взаимодействия между полями обычно рассматриваются как возмущения. Уже отмечалось, что такая процедура часто совершенно неудовлетворительна, ибо она ведет к расходящимся выражениям скорее как правило, а не как исключение. Сейчас неизвестно, по какому пути пойдет развитие теории—будет ли развит математический формализм, позволяющий должным образом рассматривать различные проблемы, или же современные теории подвергнутся существенным изменениям.

В настоящем элементарном рассмотрении мы обойдем трудности, указанные выше, тем, что будем обрывать процесс приближения по получении не исчезающего результата и в некоторых случаях произвольно пренебрегать вкладом состояний с очень большим импульсом, которые, вообще говоря, ведут к расходимостям.

Мы будем широко применять формулу¹⁾, дающую вероятность перехода из начального (нулевого) состояния в некоторое состояние n непрерывного спектра (фиг. 1),

$$R(0 \rightarrow n) = \frac{2\pi}{\hbar} \overline{|\mathcal{H}_{n0}|^2} \frac{dN}{dW}. \quad (55)$$

Величина $R(0 \rightarrow n)$ есть вероятность перехода в единицу времени (иногда эту величину несколько неточно называют просто вероятностью перехода); \mathcal{H}_{n0} —матричный элемент энергии возмущения, соответствующий переходу. Подразумевается, что возможно определить средний квадрат модуля $|\mathcal{H}_{n0}|^2$ для группы состояний n , энергия которых близка к энергии нулевого состояния. Выражение dN/dW представляет число конечных состояний на единичный интервал энергии при энергии, равной энергии нулевого состояния. Строго говоря, dN/dW есть бесконечная величина. Однако эта бесконечность компенсируется тем, что \mathcal{H}_{n0} —бесконечно малая величина.

¹⁾ См., например, Schiff, Quantum Mechanics, New York, 1949, p. 193 (см. также Б л о х и н ц е в Д. И., Квантовая механика, М., 1949.—Прим. ред.). Отметим неравноправное рассмотрение энергии и импульса, о чем уже говорилось в § 7. Переход, рассматриваемый нами, происходит между нулевым состоянием и состоянием n , имеющим приблизительно ту же самую энергию, что и энергия нулевого состояния. Здесь нет противоречия с законом сохранения энергии, который справедлив в квантовой механике так же, как и в классической. Действительно, уровни энергии на фиг. 1 относятся к невозмущенным состояниям и могут незначительно отличаться от истинного значения энергии, которое в точности сохраняется.



Фиг. 1. Переходы из нулевого состояния в непрерывные состояния.

Удобным способом избежания ошибок является квантование в конечном объеме Ω , причем после вычислений Ω стремят к бесконечности. Если вести вычисления в объеме конечной величины, число состояний системы можно выражать формулой, подобной формуле (17),

$$dN = \frac{\Omega p^2 dp}{2\pi^2 h^3}, \quad (56)$$

где p —импульс частицы, рожденной в реакции. Как в классической, так и в квантовой механике энергия и импульс частицы, имеющей скорость v , связаны соотношением

$$dW = v dp. \quad (57)$$

Отсюда для случая, когда рождается одна частица, получаем

$$\frac{dN}{dW} = \frac{\Omega p^2}{2\pi^2 h^3 v}. \quad (58)$$

Если в конечном состоянии находятся две частицы с равными и противоположными импульсами p и $-p$ и скоростями v_1 и v_2 , формула (56) остается справедливой, а равенство (57) принимает вид

$$dW = (v_1 + v_2) dp. \quad (59)$$

Для числа конечных состояний на единичный интервал энергии для случая двух частиц получаем

$$\frac{dN}{dW} = \frac{\Omega p^2}{2\pi^2 h^3 (v_1 + v_2)}. \quad (60)$$

В дальнейшем будет также обсужден случай, когда в конце реакции имеются три частицы.

Формула (55) для вероятности перехода получена в первом приближении теории возмущений квантовой механики. Согласно принципам квантовой механики, переходы имеют место лишь в том случае, если соответствующий матричный элемент отличен от нуля. Однако во многих важных случаях оказывается, что переход происходит даже тогда, когда матричный элемент энергии возмущения между начальным и конечным состояниями равен нулю. Тогда мы говорим, что этот процесс описывается высшим приближением теории возмущений. В этом случае переход происходит через последовательность промежуточных состояний, каждое из которых связано непечезающим матричным элементом как с нулевым состоянием, так и с состоянием n . Как правило, эти промежуточные состояния обладают энергией, намного отличающейся от энергии нулевого состояния, и поэтому действительных переходов из нулевого состояния в любое из промежуточных состояний не происходит.

В таких случаях применяются обычные правила теории возмущений¹⁾ (второе приближение). Переход из нулевого состояния в состояние n происходит так, как если бы эти два состояния были непосредственно связаны между собой «эффективным матричным элементом»:

$$\mathcal{H}'_{n0} = \sum_m \frac{\mathcal{H}_{nm} \mathcal{H}_{m0}}{W_0 - W_m}. \quad (61)$$

Суммирование производится по всем промежуточным состояниям m , связанным с нулевым состоянием и с состоянием n несчезающими матричными элементами. Такие суммы нередко расходятся. Когда это будет иметь место, мы будем применять грубые процедуры обрезания, чтобы получить так называемые «разумные» результаты.

§ 11. Параметры разложения

Хорошо известно, что постоянная тонкой структуры $e^2/\hbar c = 1/137$ играет роль параметра разложения в явлениях излучения. Это означает, что в разложении в ряд по степеням e , получаемом с помощью теории возмущений, последовательные члены ряда убывают как последовательные степени $\sqrt{e^2/\hbar c} = 0,085$. В действительности некоторые коэффициенты такого разложения оказываются бесконечными, отчего разложение теряет ценность. Так или иначе, малая величина параметра разложения может считаться указанием на состоятельность процедуры приближения.

Значение параметров разложения, соответствующих различным типам взаимодействия между полями, мы рассмотрим сначала на примере взаимодействия Юкава (41). Состояние (P), представляющее протон, находящийся в покое, связано несчезающим матричным элементом (42) с состоянием $(N + \Pi)_p$, представляющим положительный π -мезон и нейтрон с равными по величине и противоположно направленными импульсами p и $-p$. Из теории возмущений мы знаем, что состояние рассматриваемой системы будет линейной комбинацией невозмущенного состояния (P) и состояний $(N + \Pi)_p$:

$$(P) + \sum_p \frac{\mathcal{H}_{p0}}{\Delta W} (N + \Pi)_p, \quad (62)$$

где ΔW — разность энергий двух состояний. В этом приближении вероятность нахождения системы в состоянии $(N + \Pi)_p$ равна $|\mathcal{H}_{p0}|^2/\Delta W^2$, а вероятность нахождения системы в каком-нибудь из состояний $(N + \Pi)_p$ равна $\sum_p |\mathcal{H}_{p0}|^2/\Delta W^2$, где сумма берется

¹⁾ См., например, Б л о х и н ц е в Д. И., Квантовая механика, М., 1949. — *Прим. ред.*

по всем допустимым значениям p . Для вычисления этой суммы матричный элемент заменяется его значением (42) $e\hbar c/V\sqrt{2\Omega\omega}$, где $\omega = \sqrt{m_\pi^2 c^2 + c^2 p^2}$ — энергия π -мезона. Так как масса мезона мала по сравнению с массой нуклона, можно считать, что разность энергий начального состояния и состояния $(N \rightarrow \Pi)_p$ равна ω . Умножим суммируемое выражение на число состояний с импульсами от p до $p + dp$ [см. формулу (56)] и перейдем от суммирования к интегрированию. Вводя вместо p новую переменную $\eta = p/m_\pi c$, находим

$$\sum \frac{|\mathcal{E}_{p0}|^2}{\Delta W^2} = \frac{e_2^2}{4\pi\hbar c} \int_0^\infty \frac{\eta^2 d\eta}{\pi(1+\eta^2)^{3/2}}.$$

К сожалению, этот интеграл логарифмически расходится при $\eta = \infty$. Мы обойдем эту трудность с помощью одной из грубых процедур обрезания, о которых мы уже упоминали. Вместо интегрирования от нуля до бесконечности ограничим пределы интегрирования некоторым максимальным импульсом порядка $m_\pi c$, т. е. значением η порядка единицы. Оправданием для такого обрезания является предположение, что выражение (42) для матричного элемента не соответствует действительности при релятивистских скоростях π -мезона. В результате обрезания интеграл в предыдущей формуле становится по порядку величины равным единице, а само предыдущее выражение — равным по порядку величины

$$\frac{e_2^2}{4\pi\hbar c}. \quad (63)$$

Формула (63) есть обычное выражение, принятое для параметра разложения в теории Юкава. Параметр разложения, таким образом, дает порядок величины доли состояния $(N \rightarrow \Pi)$ относительно «смеси» этого состояния с состоянием (P) . Выражение (63) является аналогом постоянной тонкой структуры в теории излучения. Множитель 4π в знаменателе объясняется тем, что в теории Юкава используются хевисайдовские единицы. Параметр разложения (63) не есть малая величина. Трудно приписать этой величине точное численное значение, так как ни одна мезонная теория не описывает ядерных сил с достаточной для этого точностью. Однако считается, что выражение (63) по порядку величины может равняться $1/4$. Тогда величина e_2 оказывается примерно в 20 раз больше элементарного электрического заряда.

Такие большие значения величины e_2 и выражения (63) означают, без сомнения, что протон как физический объект относительно неполно представляется математически простым состоянием, обозначенным нами через (P) . В действительности протон — это смесь из состояний (P) , представляющего собственно протон, и состояний $(N \rightarrow \Pi)$, представляющих нейтрон с положительным

мезоном по соседству. Таким образом, реальный протон далеко не так элементарен. Протон время от времени испускает положительный мезон и превращается в нейтрон. Вскоре после этого он вновь поглощает π -мезон и опять становится протоном. Подобным же образом ведет себя и нейтрон. Вероятность нахождения протона в состоянии $(N + \Pi)$, отличном от состояния (P) , довольно велика и имеет порядок величины параметра разложения, т. е. равна примерно 25%. Когда два нуклона приближаются один к другому, окружающие их мезонные поля взаимодействуют таким образом, что появляются большие короткодействующие силы между нуклонами; это явление будет рассмотрено в § 17.

Параметры разложения для других типов взаимодействия получаются подобным же образом. Для взаимодействия (44) параметр разложения дается выражением вида (63):

$$\frac{e_3^2}{4\pi h c} \quad (64)$$

Так как e_3 —величина малая, этот параметр также весьма мал, так что можно считать применимой теорию возмущений. Сказанное относится также и к параметрам разложения (47), (50), (53). Эти параметры имеют вид

$$\frac{g^2 m^4 c^2}{h^6}, \quad (65)$$

где вместо g в трех различных случаях нужно подставить g_1 , g_2 или g_3 , а вместо m —массу электрона в случаях (47), (50) или массу ρ -мезона в случае (53). Во всех случаях параметр разложения весьма мал, изменяясь в пределах 10^{-22} — 10^{-12} . Поэтому теория возмущений в этих случаях применима, если только взаимодействие выбрано правильно.

КОНСТАНТЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

§ 12. Константы электромагнитного взаимодействия и взаимодействия Юкава

В предыдущей главе были рассмотрены шесть типов взаимодействия. Эти шесть типов не исчерпывают всех возможностей. Между элементарными частицами могут существовать и не рассмотренные нами взаимодействия. Кроме того, некоторые частицы, о которых известно, что они существуют, или существование которых подозревается, мы не рассматривали, так как о свойствах таких частиц нам известно слишком мало. Для каждого из шести процессов взаимодействия, рассмотренных в гл. II, была введена некоторая постоянная, которая определяла величину взаимодействия. Три из этих констант взаимодействия имеют размерность электрического заряда, а три другие — размерность произведения энергии на объем. Первыми тремя константами являются: e — элементарный электрический заряд, который определяет величину электромагнитного взаимодействия; e_2 — константа взаимодействия теории Юкава, определяющая величину взаимодействия между π -мезонами и нуклонами; e_3 — константа постулированного нами взаимодействия между π -мезонами, ρ -мезонами и нейтрино, могущего быть причиной спонтанного распада π -мезона. Тремя константами с размерностью произведения энергии на объем являются: g_1 — постоянная взаимодействия β -процессов; g_2 — постоянная взаимодействия между ρ -мезонами, электронами и нейтрино; такое взаимодействие может быть причиной спонтанного распада ρ -мезона; g_3 — постоянная взаимодействия гипотетического процесса, подобного β -взаимодействию и отличающегося от последнего тем, что электрон заменяется ρ -мезоном.

Вероятно, будущее развитие теории позволит нам уяснить причину существования и величину всех этих различных взаимодействий. Однако в настоящее время мы вынуждены применять эмпирический подход и определять величины различных констант по интенсивности явлений, вызываемых тем или иным взаимодействием. В приложении, раздел V, обсуждены некоторые из возможных соотношений между различными константами.

Постоянная электромагнитного взаимодействия известна, разумеется, очень хорошо. Ее величина равна

$$e = 4,8025 \cdot 10^{-10} \text{ см}^{3/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Замечательно, что значение элементарного электрического заряда является одним и тем же для всех заряженных частиц: электронов, протонов, π - и μ -мезонов. Это обстоятельство, вероятно, связано с законом сохранения электрического заряда и с тем обстоятельством, что частицы могут превращаться одна в другую. Например, β -процессы, в которых нейтрон превращается в протон с испусканием электрона и нейтрино, были бы несовместимы с законом сохранения электричества, если бы абсолютные значения зарядов протона и электрона были различны. Мы не будем здесь обсуждать электромагнитные процессы, за исключением тех немногих случаев, когда это необходимо для того, чтобы понять другие свойства элементарных частиц.

Взаимодействие Юкава ответственно за ядерные силы. Поэтому для константы этого взаимодействия e_2 нужно выбрать значение, которое согласовалось бы с экспериментальной величиной этих сил.

Очерк теории Юкава ядерных сил будет дан в § 17. Будет показано, что для получения согласия по порядку величины между наблюдаемой и вычисленной величиной ядерных сил постоянная e_2 должна быть примерно в 20 раз больше элементарного электрического заряда. В численных расчетах мы примем

$$e_2 = 10^{-8} \text{ см}^{3/2} \cdot e^{1/2} \cdot \text{сек}^{-1}. \quad (66)$$

Необходимо подчеркнуть, что это значение дает только порядок величины. Количественное согласие между теорией Юкава ядерных сил и экспериментом не является удовлетворительным, так что до сих пор не удалось найти точный вид энергии взаимодействия, а потому пока остается неопределенной также и константа взаимодействия. В частности, неизвестна величина спина π -мезона¹⁾. Спин π -мезона может равняться нулю, единице или, возможно, еще большей величине. В наших упрощенных рассуждениях спин всегда предполагается равным нулю.

§ 13. Распад π -мезона как прямой процесс²⁾

Спонтанный переход π -мезона в μ -мезон и нейтрино, уже рассмотренный в § 9, может быть прямым следствием взаимодействия, описываемого выражением (44). Предполагая такой механизм этого процесса, мы вычислим время жизни π -мезона по отношению к распаду на μ -мезон и нейтрино. Из сравнения результатов вычислений с экспериментальными данными мы найдем затем константу взаимодействия.

¹⁾ Спин π -мезона следует считать равным нулю.—Прим. ред.

²⁾ Подробнее о распаде π - и μ -мезонов см. в обзоре Wu, Rev. Mod. Phys., 22, 386 (1950).—Прим. ред.

Энергия покоя π -мезона равна $m_\pi c^2$. Эта энергия переходит в энергию нейтрино с импульсом p и в энергию μ -мезона с импульсом $-p$. Из закона сохранения энергии имеем¹⁾

$$cp + \sqrt{m_\mu^2 c^4 + c^2 p^2} = m_\pi c^2, \quad (67)$$

где m_π и m_μ — массы π - и μ -мезонов. Из этого уравнения определяют импульсы обеих частиц, рожденных в реакции. Пусть τ_π — время жизни π -мезона. Вероятность распада π -мезона по схеме $\Pi \rightarrow \mu + \nu$ равна $1/\tau_\pi$ и может быть вычислена по (55) и (56) с помощью матричного элемента (45). Так как π -мезон распадается, находясь в покое, его энергия w_π в формуле (45) равна $m_\pi c^2$. Таким образом, находим

$$\frac{1}{\tau_\pi} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e_3 \hbar c}{\sqrt{2\Omega m_\pi c^2}} \right)^2 \frac{\Omega p^2}{2\pi^2 \hbar^3 (v_1 + v_2)} = \frac{e_3^2 p^2}{2\pi \hbar^2 m_\pi (v_1 + v_2)}.$$

Здесь v_1 и v_2 — скорости нейтрино и μ -мезона. Поэтому $v_1 = c$. Спины всех частиц при вычислении не учитывались. Скорость v_2 μ -мезона и импульс p можно вычислить из закона сохранения энергии. Считая $m_\pi = 276m$ и $m_\mu = 210m$, где m — масса электрона, получаем по формуле (67) $p = 58,1mc$. Отсюда следует, что нейтрино уносит приблизительно 30 $Mэв$, в то время как кинетическая энергия μ -мезона составляет всего 4,1 $Mэв$. Скорость μ -мезона равна 0,27 c . С помощью этих численных значений получаем

$$\frac{1}{\tau_\pi} = 3,8 \cdot 10^{37} e_3^2. \quad (68)$$

20 -
в формуле
3,1 · 10³⁷

Экспериментальное значение τ_π равно $2 \cdot 10^{-8}$ сек. Отсюда получаем величину константы взаимодействия

$$e_3 = 1,1 \cdot 10^{-15} = 2,4 \cdot 10^{-6} e. \quad (69)$$

В приложении, раздел V, будет показано, что взаимодействие, характеризуемое величиной e_3 , может не быть первичным. Оно может быть следствием других постулированных взаимодействий²⁾.

§ 14. Бета-взаимодействие³⁾

Взаимодействие, вызывающее β -переходы, в грубой форме уже было дано в § 9. Если не считать теории излучения, то об этом процессе имеется наибольшее количество экспериментальных сведений. Однако, несмотря на такое благоприятное положение, попытки заменить формулу (47) более подробным выражением

¹⁾ Масса покоя нейтрино считается равной нулю. — Прим. ред.

²⁾ Например, постоянная взаимодействия между π - и μ -мезонами может быть определена по взаимодействию тех и других мезонов с нуклеонами. — Прим. ред.

³⁾ Обзор по β -распаду см. Поул С. Ф., Мезоны, УФН, 45, 15 (1951). — Прим. ред.

не привели к окончательному результату. Большинство попыток основывается на предположении, что член β -взаимодействия в лагранжиане записывается по аналогии с одним из выражений, приведенных в приложении, раздел IV. Так как член взаимодействия должен быть скаляром, можно, например, поступать следующим образом. Выражение $\tilde{P}\beta N$ является скаляром в соответствии с формулой (225). Выражение $\tilde{e}\beta v$ также является скаляром. Поэтому их произведение, умноженное на произвольную константу взаимодействия — g_β , будет инвариантом, который можно добавить к лагранжиану в качестве члена взаимодействия. При переходе от лагранжиана к гамильтониану член взаимодействия изменит свой знак; таким образом, один из возможных релятивистски-инвариантных членов взаимодействия имеет вид

$$g_\beta \int (\tilde{P}\beta N \tilde{e}\beta v + \tilde{N}\beta P \tilde{v}\beta e) d\Omega. \quad (70)$$

При написании этого выражения добавлена комплексно-сопряженная величина, так как гамильтониан должен быть эрмитовым. Взаимодействие, описываемое формулой (70), называется скалярным взаимодействием. Можно образовать еще четыре релятивистски-инвариантных члена взаимодействия, используя выражения (226)—(229) приложения, раздел IV. Эти взаимодействия называются соответственно псевдоскалярным, векторным, псевдовекторным и тензорным. Например, псевдовекторное взаимодействие привело бы к члену следующего вида:

$$g_{ps} \int d\Omega \left(\tilde{P} \frac{[\alpha \times \alpha]}{i} N \tilde{e} \frac{[\alpha \times \alpha]}{i} v - \tilde{P} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{i} N \tilde{e} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{i} v + \right. \\ \left. + \text{компл.-сопряж.} \right), \quad (71)$$

где g_{ps} — величина константы данного взаимодействия. Можно также использовать линейную комбинацию этих различных взаимодействий.

Были предприняты попытки сравнить следствия, вытекающие из различных форм взаимодействия с экспериментом, с целью решить, какое из них приводит (и приводит ли вообще какое-нибудь из них) к приемлемым результатам. К сожалению, оказывается, что для так называемых разрешенных¹⁾ переходов форма β -спектра одна и та же для всех типов взаимодействия. Такое хорошее согласие теоретической и экспериментальной форм разрешенных спектров не дает поэтому возможности отличить правильный вариант взаимодействия. С другой стороны, различные варианты взаимодействия дают различные правила отбора. Например, скалярное и векторное взаимодействия дают следующее правило отбора для разрешенных переходов:

¹⁾ См. Бете Г., Лекции по теории ядра, М., 1949, стр. 122.

Спин ядра не меняется, четность не меняется.

Для псевдоскалярного или для тензорного вариантов взаимодействия имеет место следующее правило отбора:

Изменение спина равно нулю или единице, четность не меняется. Переходы $0 \rightarrow 0$ запрещены.

Повидимому, экспериментальные данные указывают на второе правило отбора или, быть может, на совокупность обоих правил. Однако эти данные нельзя считать окончательными, так как спин и четность β -активных ядер известны недостаточно, и мы вынуждены определять эти величины на основе моделей ядра, не вполне обоснованных, хотя и общепринятых. Приняв второе правило отбора, мы тем самым приходим к использованию псевдовекторного взаимодействия [формула (71)] или тензорного варианта взаимодействия. В большинстве случаев эти два варианта взаимодействия дают одинаковые результаты.

Дополнительно была рассмотрена возможность линейной комбинации скалярного, псевдовекторного и псевдоскалярного взаимодействий. Такая линейная комбинация может быть записана в весьма симметричной форме. Согласно с экспериментом в этом случае оказывается не хуже, чем в других вариантах теории.

В итоге сравнения теории с экспериментом можно сказать, что формы разрешенных, а также некоторых запрещенных β -спектров с неожиданной точностью подтверждаются экспериментом. С другой стороны, попытки согласовать интенсивность β -переходов с величиной матричных элементов, вычисленных на основе различных моделей ядра, имели до сих пор мало успеха. Применяемые ядерные модели весьма грубы, и на основании таких расчетов нельзя сделать окончательных заключений.

Различные варианты взаимодействия ведут к различным предсказаниям относительно угловой корреляции между вылетающими электронами и нейтрино. Однако, поскольку определение отдачи при вылете нейтрино недостаточно точно, до настоящего времени не оказалось возможным прийти к каким-либо существенным заключениям в этом отношении.

В настоящем рассмотрении мы ограничимся использованием упрощенного взаимодействия типа (47) и выводом наиболее непосредственных следствий, вытекающих из принятия этого варианта.

При вычислении матричного элемента β -перехода нельзя применять без модификации правила, данные в § 7, так как нейтрон и протон сильно связаны в ядре и, следовательно, не могут быть представлены плоскими волнами. По этой же причине импульсы четырех частиц, волновые функции которых входят в соотношение (46), не сохраняются, так как остаточное ядро может принять на себя любую долю импульса.

Вычисление будет упрощено тем, что мы пренебрежем кулоновыми силами, действующими на электрон. Сделаем также, как

обычно, предположение, что длины волн электрона и нейтрино велики в сравнении с размерами ядра; это даст возможность пренебречь фазовыми множителями при вычислении по (21) вклада в матричный элемент операторов e, e^*, ν, ν^* . При сделанных предположениях каждое из этих выражений с точностью дознака (что несущественно) дает в матричный элемент множитель $1/\sqrt{\Omega}$. Первый член в формуле (47) дает β -переходы с испусканием отрицательного электрона, второй относится к обратному процессу, а также описывает β -процессы с испусканием позитрона.

Так как протон и нейтрон связаны в ядре, их вклад в матричный элемент (47) следует вычислять с помощью формул (22), а не (21). Обозначим через N волновую функцию нейтрона, находящегося в ядре до β -перехода, а через P — волновую функцию протона, в который превращается этот нейтрон. Запишем матричный элемент в виде

$$\mathcal{H}_{n0} = \frac{g_1}{\Omega} \int P^* N d\Omega = \frac{g_1}{\Omega} \mathfrak{M}. \quad (72)$$

Этот матричный элемент можно использовать для вычисления вероятности перехода из начального состояния в состояние, в котором имеется электрон с импульсом между p и $p + dp$ и нейтрино с импульсом q , уносящее из ядра определенную долю энергии. Если максимальный импульс, с которым может быть испущен электрон, равен p_0 , то энергия нейтрино cq равна разности энергий электронов с импульсами¹⁾ p_0 и p :

$$cq = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2} - \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}. \quad (73)$$

Вероятность перехода мы вычисляем по формуле (55). Величина dN/dW вычисляется по формуле (58), при этом вместо p подставляется импульс нейтрино q , а вместо v — скорость нейтрино c . Необходимо учесть также число состояний электрона с импульсом между p и $p + dp$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{h} \left| \frac{g_1 \mathfrak{M}}{\Omega} \right|^2 \frac{\Omega q^2}{2\pi^2 \hbar^3 c} \frac{\Omega p^2 dp}{2\pi^2 \hbar^3} = \frac{g_1^2 |\mathfrak{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c} q^2 p^2 dp = \\ & = \frac{g_1^2 |\mathfrak{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \left(\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2} - \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} \right)^2 p^2 dp. \end{aligned} \quad (74)$$

Эта формула дает форму β -спектра. Интегрируя выражение (74) по p от нуля до p_0 , можно найти полную вероятность перехода, при котором испускается электрон любой допустимой энергии.

¹⁾ Так как электрон и нейтрино — релятивистские частицы, следовало бы применять формулы (25), а не (21). Однако оказывается, что при том непоследовательном использовании релятивистских и нерелятивистских формул, какое проводится в тексте, вид β -спектра получается такой же, как и при точном рассмотрении.

Вводя для удобства новые переменные τ_1 и τ_{10} , представляющие собой импульсы в единицах mc , находим время жизни для β -перехода

$$\frac{1}{\tau} = \frac{g_1^2 |\mathfrak{M}|^2 m^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} F(\tau_{10}), \quad (75)$$

где

$$\begin{aligned} F(\tau_{10}) &= \int_0^{\tau_{10}} (\sqrt{1 + \tau_{10}^2} - \sqrt{1 + \tau_1^2})^2 \tau_1^2 d\tau_1 = \\ &= -\frac{\tau_{10}}{4} - \frac{\tau_{10}^3}{12} + \frac{\tau_{10}^5}{30} + \frac{1}{4} \sqrt{1 + \tau_{10}^2} \ln(\tau_{10} + \sqrt{1 + \tau_{10}^2}). \end{aligned} \quad (76)$$

Член $|\mathfrak{M}|^2$ в формуле (75) зависит от вида волновых функций частиц в ядре [см. формулу (72)]. Поэтому вычисление этого члена требует знания волновых функций начального и конечного состояний ядра. Эти волновые функции в большинстве случаев неизвестны, и лучшее, что можно сделать, это оценить порядок величины \mathfrak{M} . В некоторых благоприятных случаях есть основания полагать, что нейтрон и протон имеют приблизительно одинаковые волновые функции. Такие случаи нередко имеют место для легких элементов. Если P и N в формуле (72)—одинаковые функции, интеграл сводится к нормировочному интегралу и, следовательно, равен единице. Таким образом, в случае упрощенного рассмотрения имеем $\mathfrak{M} = 1$. Однако если использовать обсужденные выше более строгие варианты взаимодействия, можно ожидать более сложных результатов.

В частности, если пользоваться вторым правилом отбора (см. стр. 43), для \mathfrak{M} получается вместо формулы (72) следующее выражение:

$$\mathfrak{M} = \int P^* \sigma N d\Omega, \quad (77)$$

где σ — спиновый оператор Паули для нуклонов. Однако даже в виде (77) \mathfrak{M} в простейших случаях равно по порядку величины единице.

Форма β -спектра и вид функции $F(\tau_{10})$ требуют некоторых дополнительных уточнений. До сих пор пренебрегалось действие кулонова поля ядра на электрон. В действительности кулоново поле искажает волновую функцию электрона и меняет форму спектра, в особенности при малых энергиях электрона. По тем же причинам функция $F(\tau_{10})$ будет иметь более сложный вид. Читателя, интересующегося более подробным обсуждением теории β -распада и ее сравнением с экспериментами, отсылаем к специальным статьям.

Значение константы взаимодействия, при котором согласие с экспериментом является наилучшим для всех вариантов взаимодействия, равно по порядку величины 10^{-49} эрг·см³. Точное

значение зависит, конечно, от формы взаимодействия. Например, в случае псевдовекторного взаимодействия вида (71)

$$g_1 = 2 \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3. \quad (78)$$

Еще раз отмечаем, что g имеет размерность произведения энергии на объем. Чтобы получить представление о величине взаимодействия, разделим g_1 на классический объем электрона

$$\frac{4\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^3 = 9,4 \cdot 10^{-38} \text{ см}^3.$$

В результате получим $2,1 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$, или приблизительно $1,3 \text{ эв}$. Это может дать представление о том, насколько слабым является β -взаимодействие. Для сравнения укажем, что потенциал взаимодействия между нуклеонами, который часто представляют в виде потенциальной ямы с радиусом, также равным классическому радиусу электрона, имеет глубину в 20 Мэв , т. е. в десять миллионов раз большую, чем при β -взаимодействии.

§ 15. Спонтанный распад μ -мезона

В § 9 мы предположили, что спонтанный распад μ -мезона идет по схеме $\mu \rightarrow e + 2\nu$ и описывается взаимодействием (50) с матричным элементом g_2/Ω , даваемым формулой (51).

Вычисление времени жизни μ -мезона с помощью этого взаимодействия более сложно, чем вычисление времени жизни π -мезона, сделанное в § 13, ибо теперь в конечном состоянии оказываются не две, а три частицы. Отсюда также следует, что электрон, получающийся при распаде покоящегося μ -мезона, имеет непрерывный спектр энергии. Максимальную энергию электрон получает тогда, когда два нейтрино вылетают в одном направлении. Эта максимально достижимая энергия равна (если пренебречь массой покоя электрона) половине энергии покоя μ -мезона, т. е. приблизительно 53 Мэв . В последующих вычислениях мы будем пренебрегать массой покоя электрона.

Когда покоящийся μ -мезон распадается на электрон и два нейтрино, векторная сумма импульсов этих трех частиц должна равняться нулю.

Вероятность перехода, при котором испускается электрон с импульсом между p и $p + dp$, можно получить, умножив число конечных состояний электрона, которое выражается формулой (56), на вероятность перехода в одно из этих конечных состояний, вычисленное по формуле (55). Без учета спина частиц число конечных состояний электрона равно

$$\frac{\Omega p^2 dp}{2\pi^2 \hbar^3}.$$

Приняв для матричного элемента выражение g_2/Ω , для вероятности перехода получаем

$$\frac{2\pi}{h} \left(\frac{g_2}{\Omega} \right)^2 \frac{\Omega p^2 dp}{2\pi^2 h^3} \frac{dN}{dW}. \quad (79)$$

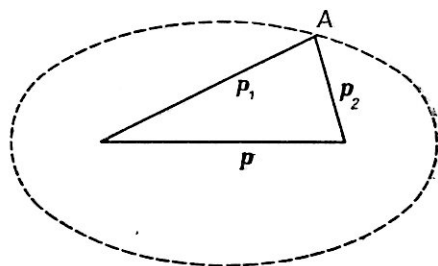
Остается вычислить число конечных состояний нейтрино на единичный интервал энергии. На фиг. 2 изображены импульсы электрона \mathbf{p} и импульсы нейтрино \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 . Так как сумма этих трех векторов равна нулю, они являются сторонами треугольника. Пренебрегая массой покоя электрона, энергию трех испущенных частиц можно записать в виде

$$W = c(|\mathbf{p}| + |\mathbf{p}_1| + |\mathbf{p}_2|). \quad (80)$$

Если импульс электрона \mathbf{p} и энергия W не меняются, сумма $|\mathbf{p}_1| + |\mathbf{p}_2|$ есть постоянная величина

$$|\mathbf{p}_1| + |\mathbf{p}_2| = \frac{W}{c} - |\mathbf{p}|.$$

Отсюда следует, что геометрическое место вершин A треугольника на фиг. 2 есть эллипсоид. Объем этого эллипсоида можно вычислить из простых геометрических соображений. Он равен



Фиг. 2. Импульсы электрона (\mathbf{p}) и двух нейтрино (\mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2).

$$\frac{\pi}{6} \left(\frac{W^3}{c^3} - 3 \frac{W^2}{c^2} p + 2 \frac{W}{c} p^2 \right).$$

Соответствующий объем в фазовом пространстве есть произведение этого выражения на пространственный объем Ω . Число N состояний нейтрино с энергией вплоть до W равно фазовому объему, деленному на $(2\pi\hbar)^3$. Дифференцируя это выражение по W , получаем величину dN/dW . В полученном таким путем выражении полагаем $W = m_\mu c^2$, где m_μ — масса μ -мезона. Окончательно получаем

$$\frac{dN}{dW} = \frac{\Omega c m_\mu^2}{48\pi^2 h^3} \left(3 - 6 \frac{p}{m_\mu c} + 2 \frac{p^2}{m_\mu^2 c^2} \right). \quad (81)$$

Подставляя это выражение в формулу (79), для вероятности перехода получаем

$$\frac{g_2^2 m_\mu^2 c}{48\pi^3 h^7} \left(3 - \frac{6p}{m_\mu c} + \frac{2p^2}{m_\mu^2 c^2} \right) p^2 dp. \quad (82)$$

Полная вероятность перехода, т. е. величина, обратная времени жизни μ -мезона, получается интегрированием выражения (82) по

всем значениям p от нуля до $m_\mu c/2$. Интегрирование дает

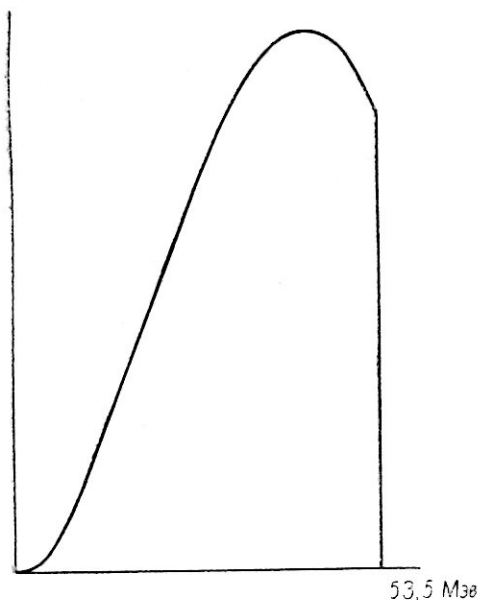
$$\frac{1}{\tau_\mu} = \frac{7}{7680\pi^3} \frac{g_2 m_\mu^2 c^4}{h^7}. \quad (83)$$

Из эксперимента известно, что $\tau_\mu = 2,15 \cdot 10^{-6}$ сек. Подставляя в формулу (83) это значение τ_μ и $m_\mu = 210 m$, находим величину константы связи

$$g_2 = 3,3 \cdot 10^{-49}. \quad (84)$$

Поразительным образом g_1 и g_2 имеют очень близкие значения.

Формула (82) дает спектральное распределение испущенных электронов. Это распределение изображено на фиг. 3. Из эксперимента форма такого распределения известна весьма грубо. Однако теоретический спектр не противоречит измерениям Штейнбергера и Андерсона. Следует напомнить, что точная форма взаимодействия (50) неизвестна. При рассмотрении распада μ -мезона, как и при рассмотрении β -взаимодействия, можно было бы использовать другие варианты взаимодействия. Влияние выбора варианта



Фиг. 3. Спектр энергии электронов, испущенных в результате спонтанного распада μ -мезонов.

варианта взаимодействия на форму спектра и на другие особенности распада μ -мезонов было подробно исследование Уилером.

§ 16. Вынужденный распад μ -мезона

Схема распада μ -мезона, рассмотренная в предыдущем параграфе, не является единственной. Здесь мы обсудим вынужденный распад μ -мезона. Такой распад происходит, когда μ -мезон захватывается в область действия ядерных сил. Экспериментально наблюдался распад только отрицательных μ -мезонов, вероятно, потому что только отрицательные μ -мезоны притягиваются в область ядра кулоновыми силами. В § 9 вынужденный распад описывался реакцией (52) с матричным элементом (54).

Чтобы оценить значение константы связи g_3 , мы предположим, что когда μ -мезон замедляется в веществе, он очень быстро захватывается одним из ядер вещества на орбиту, являющуюся аналогом первой боровской орбиты в атоме, с той разницей, что мезонная орбита гораздо меньше боровской. Величину радиуса этой квазиборовской орбиты можно получить, разделив величину боровского радиуса $a = 5,3 \cdot 10^{-9}$ см на число протонов в ядре Z и на отношение масс μ -мезона и электрона, равное 210. Радиус мезонной орбиты, таким образом, равен

$$a' = \frac{a}{210Z} = \frac{2,5}{Z} \cdot 10^{-11} \text{ см.} \quad (85)$$

Время захвата μ -мезона на эту орбиту оценивается по порядку величины в 10^{-13} сек., так что вероятность спонтанного распада мезона во время захвата пренебрежимо мала. После того как произошел захват μ -мезона на орбиту, μ -мезон может распасться либо спонтанно, по механизму, рассмотренному в предыдущем параграфе, либо вынужденно. Соотношение между вероятностями этих двух процессов зависит от ядра, захватывающего μ -мезон на квазиборовскую орбиту. Вероятность вынужденного распада быстро увеличивается с Z по двум причинам. Во-первых, для больших Z радиус a' имеет меньшие значения, т. е. μ -мезон, захваченный на квазиборовскую орбиту, находится в большей близости от ядра. Во-вторых, при больших Z ядро содержит большее число протонов, участвующих в реакции (52). Эксперименты подтверждают эти общие соображения и указывают на то, что процесс (52) пренебрежимо мал для очень легких ядер и является преобладающим для более тяжелых ядер. Измерения дают примерно равные значения вероятностей спонтанного и вынужденного распада μ -мезона при $Z = 11$ (натрий). Поскольку время жизни μ -мезона по отношению к спонтанному распаду равно $2,15 \cdot 10^{-6}$ сек., мы заключаем, что при $Z = 11$ вероятность вынужденного распада равна

$$\frac{1}{2,15 \cdot 10^{-6}} \text{ сек}^{-1}.$$

Вычислим вероятность перехода по реакции (52) для случая, когда в начальном состоянии имеются только μ -мезон и покоящийся протон, заключенные в объеме Ω . Матричный элемент соответствующего взаимодействия по (54) есть g_3/Ω . Вероятность перехода может быть вычислена с помощью формул (55) и (60):

$$\text{Вероятность перехода} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{g_3}{\Omega} \right)^2 \frac{\Omega p^2}{2\pi^2 \hbar^3 (c + v_N)} = \frac{g_3^2}{\pi \hbar^4} \frac{p^2}{c + v_N} \frac{1}{\Omega}. \quad (86)$$

Величина $c + v_N$, стоящая в знаменателе, есть сумма скоростей нейтрино c и нейтрона v_N , p — величина равных и противоположных

импульсов нейтрона и нейтрино. Величины p и v_N можно вычислить из закона сохранения энергии. При вычислении пренебрежем разностью масс протона и нейтрона. Энергия начального состояния равна энергии покоя μ -мезона, т. е. равна $210mc^2$. Эта энергия переходит в кинетическую энергию нейтрино и нейтрона, причем обе частицы получают одинаковый по величине импульс p .

Таким образом,

$$210mc^2 = cp + \frac{p^2}{2M}, \quad (87)$$

где M — масса нуклеона. Отсюда находим

$$p = 199mc.$$

Скорость нейтрона v_N есть отношение его импульса к массе, так что

$$v_N = 0,11c.$$

С учетом значений p и v_N перепишем (86) в виде

$$\text{Вероятность перехода} = 11\,400 \frac{g_3^2 m^2 c}{\hbar^4 \Omega}. \quad (88)$$

Вероятность перехода обратно пропорциональна объему Ω , так как мы предположили, что в этом объеме находится один протон, и, следовательно, концентрация протонов обратно пропорциональна величине Ω .

Для вычисления вероятности вынужденного распада μ -мезона, захваченного на квазиборовскую орбиту ядром с атомным номером Z , можно использовать формулу (88), внося в нее следующие изменения: а) умножить выражение (88) на Z , так как в ядре имеется Z протонов; б) подставить вместо объема Ω эффективный объем орбиты мезона $\pi(a')^3$; в) учесть, что процесс может быть запрещен принципом Паули. При вынужденном распаде μ -мезона образуется нейтрон сравнительно малой энергии, и поэтому реакция возможна лишь в том случае, когда уровень, на котором может появиться нейтрон в конечном состоянии перехода (52), не занят другим нейтроном ядра. Это обстоятельство уменьшает вероятность перехода. Поправочный множитель трудно вычислить точно, однако можно оценить тем, что уменьшение численного коэффициента в формуле (88) с 11 400 до 5 000 дало бы правильный порядок величины.

С учетом всех упомянутых факторов вероятность перехода при вынужденном распаде μ -мезона получаем в виде

$$\frac{1}{\tau_3} = \frac{5000(210)^3}{\pi} g_3^2 \frac{m^2 c Z^4}{\hbar^4 a^3}. \quad (89)$$

Отметим, что вероятность перехода пропорциональна Z^4 , что отражает большие различия в интенсивности этого процесса в случаях легких и тяжелых ядер.

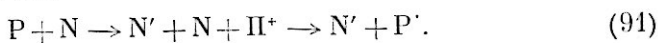
Из эксперимента известно, что при $Z = 11$ τ_3 приблизительно равно $2,15 \cdot 10^{-6}$ сек. Отсюда находим значение константы связи:

$$g_3 = 1,3 \cdot 10^{-49}. \quad (90)$$

Уже отмечалось, что три константы связи g_1 , g_2 и g_3 имеют близкие значения: $g_1 = 2 \cdot 10^{-49}$, $g_2 = 3,3 \cdot 10^{-49}$, $g_3 = 1,3 \cdot 10^{-49}$. Вероятно, этот факт не является простым совпадением и имеет глубокое значение, которое, однако, до сего времени не выяснено.

π -МЕЗОНЫ, НУКЛЕОНЫ И АНТИНУКЛЕОНЫ**§ 17. Теория Юкава ядерных сил**

Теория Юкава ядерных сил основана на предположении, что силы, действующие между двумя нуклеонами, переносятся полем π -мезонов, окружающим эти нуклоны. Явление обычно описывается с помощью представления, что когда два нуклеона приближаются друг к другу, один из них может испустить π -мезон, который затем поглощается другим нуклеоном. Пусть для примера двумя такими нуклеонами являются протон и нейтрон. Может случиться, что протон испустит положительный π -мезон; при этом образуется промежуточное состояние—два нейтрона и положительный мезон. Затем положительный π -мезон захватывается первоначальным нейтроном, превращающимся в протон. Всю реакцию можно записать так:



Общим результатом реакции (91) является рассеяние нуклеонов с взаимным обменом направлений их импульсов. Это рассеяние интерпретируется как следствие сил, действующих между двумя нуклеонами.

Формально рассеяние по формуле (91) есть процесс, соответствующий второму приближению теории возмущений. Взаимодействие Юкава (41) не имеет матричного элемента, соответствующего непосредственному переходу из начального состояния реакции (91) в конечное. Однако оба эти состояния связаны исчезающими матричными элементами с промежуточным состоянием $N' + N + \Pi^+$. Энергия промежуточного состояния больше энергии начального. В самом деле, если оба нуклеона медленные, то их кинетической энергией можно пренебречь, и разность энергий промежуточного и начального состояний равна энергии π -мезона

$$\omega = \sqrt{m_{\pi}^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (92)$$

Между начальным и конечным состояниями (91) будут наблюдаться переходы, описываемые вторым приближением теории возмущений. Такие переходы могут быть описаны феноменологически как следствие прямого взаимодействия между нейтроном и протоном. Чтобы вычислить это взаимодействие, мы используем два матричных элемента (42), соответствующие двум последовательным

переходам реакции (91). По формуле (61) матричный элемент перехода из начального в конечное состояние по реакции (91) есть произведение указанных двух матричных элементов, деленное на разность энергий ($-\omega$) между начальным и промежуточным состояниями. Полученную таким образом величину нужно еще умножить на два, потому что такой же вклад дает реакция с другим промежуточным состоянием $P \rightarrow P' \rightarrow \Pi$. По этой второй реакции нейтрон испускает положительный π -мезон, а протон его поглощает. Здесь мы не учитываем промежуточного состояния, в котором имеется нейтральный π -мезон. Итак, эффективный матричный элемент имеет следующий вид:

$$\mathcal{H}'_{no} = -\frac{2}{\omega} \left(\frac{e_2 \hbar c}{\sqrt{2\Omega\omega}} \right)^2 = -\frac{e_2^2 \hbar^2 c^2}{\Omega} \frac{1}{m_\pi^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (93)$$

Импульс π -мезона \mathbf{p} есть разность между импульсами протона в начальном состоянии и нейтрона в конечном состоянии, так как при первом переходе реакции (91) импульсы сохраняются; этот импульс \mathbf{p} также равен разности импульсов протона в конечном состоянии и нейтрона в начальном состоянии. Эти две разности, конечно, равны между собой, так как импульсы сохраняются для начального и конечного состояний реакции (91):

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_P - \mathbf{p}_{N'} = \mathbf{p}_{P'} - \mathbf{p}_N. \quad (94)$$

Феноменологически переход из начального в конечное состояние в реакции (91) можно было бы описать как следствие действия сил между протоном и нейтроном, без какого-либо явного упоминания о роли, которую играют при этом испускание и поглощение π -мезона. Однако эти силы, действующие между нуклонами, представляются не обычным, а так называемым обменным потенциалом. Простейшим образом это можно понять, если заметить, что при испускании положительного π -мезона протон превращается в нейтрон, а при последующем поглощении этого мезона первоначальный нейтрон превращается в протон, так что оба нуклона поменялись ролями.

Поэтому мы примем, что между нейтроном и протоном существует взаимная энергия, представляемая в виде

$$V = U(\mathbf{r}) P_{об}, \quad (95)$$

где $P_{об}$ — оператор обмена¹⁾. Попробуем определить $U(\mathbf{r})$ так, чтобы матричный элемент оператора (95) совпал с (93). Начальное

¹⁾ $P_{об}$ есть оператор, действующий на функции от координат нейтрона и протона. В результате действия этого оператора получается та же функция, но с переставленными координатами нейтрона и протона. По определению,

$$P_{об} \psi(x_P, x_N) = \psi(x_N, x_P).$$

и конечные состояния системы нейтрон—протон в реакции (91) описываются волновыми функциями

$$\begin{aligned}\psi_0(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_N) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{(i/\hbar)(\mathbf{p}_P \mathbf{r}_P)} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{(i/\hbar)(\mathbf{p}_N \mathbf{r}_N)}, \\ \psi_n(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_N) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{(i/\hbar)(\mathbf{p}_P \mathbf{r}_P)} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{(i/\hbar)(\mathbf{p}_N \mathbf{r}_N)}.\end{aligned}$$

Поэтому соответствующий такому переходу матричный элемент взаимодействия (95) есть

$$V_{n0} = \frac{1}{\Omega^2} \iint U(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_P) e^{(i/\hbar)[(\mathbf{p}_P - \mathbf{p}_N) \mathbf{r}_P + (\mathbf{p}_N - \mathbf{p}_P) \mathbf{r}_N]} d^3\mathbf{r}_P d^3\mathbf{r}_N.$$

Отметим, что подынтегральное выражение записано с учетом действия обменного оператора $P_{об}$.

Вводя вместо \mathbf{r}_N и \mathbf{r}_P новые переменные \mathbf{r} и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_N - \mathbf{r}_P$, перепишем предыдущую формулу в виде

$$\begin{aligned}V_{n0} &= \frac{1}{\Omega^2} \int U(\mathbf{r}) e^{-(i/\hbar)(\mathbf{p}_P - \mathbf{p}_N) \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \times \\ &\times \int e^{(i/\hbar)(\mathbf{p}_P - \mathbf{p}_N + \mathbf{p}_N - \mathbf{p}_P) \mathbf{r}_P} d^3\mathbf{r}_P.\end{aligned}\quad (96)$$

Последний интеграл отличен от нуля только при условии выполнения закона сохранения импульса, т. е. при

$$\mathbf{p}_P + \mathbf{p}_N = \mathbf{p}_P' + \mathbf{p}_N'.$$

В этом случае значение второго интеграла в (96) равно нормировочному объему Ω . С учетом (94) получаем

$$V_{n0} = \frac{1}{\Omega} \int U(\mathbf{r}) e^{-(i/\hbar)(\mathbf{p}\mathbf{r})} d^3\mathbf{r}.\quad (97)$$

Мы хотим определить $U(\mathbf{r})$ так, чтобы (97) совпало с (93), т. е. чтобы

$$\int U(\mathbf{r}) e^{-(i/\hbar)(\mathbf{p}\mathbf{r})} d^3\mathbf{r} = -\frac{e_2^2 \hbar^2 c^2}{m^2 c^4 + c^2 p^2}.\quad (98)$$

Это уравнение дает компоненту Фурье функции $U(\mathbf{r})$. Чтобы определить отсюда $U(\mathbf{r})$, достаточно произвести обратное преобразование Фурье. Тогда получим

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{e_2^2}{8\pi^2 \hbar} \int \frac{e^{(i/\hbar)(\mathbf{p}\mathbf{r})} d^3\mathbf{p}}{m^2 c^2 + p^2} = -\frac{e_2^2}{2\pi r} e^{-(uc/\hbar)r}.\quad (99)$$

Эта формула дает хорошо известное выражение потенциала Юкава с характеристическим радиусом действия, равным комптоновской длине волны π -мезона

$$\frac{\hbar}{m_{\pi}c} = 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Этот важный результат легко понять качественно с помощью соотношения неопределенности. Радиус действия сил между нуклонами определяется теми расстояниями, на которые могут отлететь от нуклона непрерывно испускаемые и поглощаемые мезоны. При испускании π -мезона система «занимает» энергию, по порядку величины равную $m_{\pi}c^2$. Согласно соотношению неопределенности энергия—время, «срок займа» не может быть длительней, чем $\hbar/m_{\pi}c^2$. За это время π -мезон, даже если он движется со скоростью света, не может отлететь от ядра дальше, чем на расстояние порядка $\hbar/m_{\pi}c$. Таким образом, это и есть порядок величины радиуса действия ядерных сил.

Данный здесь упрощенный очерк теории Юкава ядерных сил между двумя нуклонами является во многих отношениях неудовлетворительным. Принятое нами взаимодействие (41) между полями π -мезонов и нуклонов не только не удовлетворяет релятивистской инвариантности, но также не учитывает спиновых свойств нуклонов. Это взаимодействие следовало бы заменить другими формами взаимодействия, подобными, возможно, формам (39) или (40). Использование же взаимодействия (41) лишает нас возможности теоретически объяснить спиновую зависимость ядерных сил.

Теория Юкава ядерных сил допускает различные предположения о спиновых свойствах и четности π -мезона, а также о типе связи между мезонным и нуклеонным полями. Множество исследований было посвящено, в частности, псевдоскалярным π -мезонам и векторным π -мезонам, т. е. мезонам со спином единица. Качественно в обоих случаях получаются зависящие от спинов ядерные силы (нецентральные силы).

Принимался во внимание также вклад нейтральных π -мезонов в ядерные силы. Теория Юкава в случае взаимодействия через заряженные π -мезоны дает обменные силы. Нейтральные мезоны, напротив, приводят к обычным силам. Поэтому качественно теория Юкава в состоянии объяснить различные известные нам типы сил, действующих между нуклонами.

Однако до настоящего времени не удалось построить теорию, удовлетворительную в количественном отношении. Основная трудность заключается в том, что в потенциалах взаимодействия между нуклонами получаются члены, которые дают слишком сильное притяжение на малых расстояниях. Это притяжение слишком велико, так что теория не может объяснить устойчивых состояний между двумя нуклонами с конечной энергией связи. Обычно эта

трудность обходится с помощью произвольного обрезания потенциалов на некотором минимальном расстоянии. Такая процедура явно неудовлетворительна, в частности, потому, что радиус обрезания нередко оказывается по порядку величины равным радиусу действия ядерных сил.

Эти неудачи теории не удивительны. В § 11 уже отмечалось, что параметр разложения теории возмущений в применении к взаимодействию Юкава вовсе не является малым. Это означает, что нет основания полагать, будто вычисления в высших приближениях дадут разумный результат. Не ясно даже, возможно ли вообще математически непротиворечивое рассмотрение задачи Юкава. До сих пор такого рассмотрения не проводилось.

В заключение этого параграфа укажем на простейший способ получения общего выражения для потенциала Юкава. Этот способ будет продемонстрирован на примере взаимодействия двух нуклеонов через поле нейтральных π -мезонов. Мезонное поле будет рассматриваться как некантованное классическое поле, удовлетворяющее уравнению Клейна—Гордона (10). Предположим, что нуклеоны можно рассматривать как источники поля π -мезонов, точно так же как электрические заряды являются источниками электростатического поля. Силы, действующие между двумя нуклеонами, обусловлены действием поля, созданного одним нуклеоном, на другой нуклеон. Это вполне аналогично описанию электростатических сил между двумя зарядами, как действия на один заряд поля, созданного другим зарядом. Сферически симметричное решение уравнения Клейна—Гордона с точечным источником «заряда» e_2 есть

$$\varphi = \frac{e_2}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-kr}. \quad (100)$$

Мы рассматриваем φ как аналог потенциала, который действует на «заряд» второго нуклеона, обуславливая энергию взаимодействия

$$\frac{e_1^2}{4\pi r} e^{-kr}. \quad (101)$$

Эта взаимная энергия имеет форму потенциала Юкава, ибо k связано с массой π -мезона соотношением (14).

§ 18. Рождение π -мезонов при столкновениях нуклеонов¹⁾

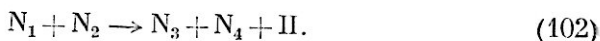
Качественное предсказание о возможности рождения мезонов при столкновении быстрых нуклеонов является одним из важнейших достижений мезонной теории. В самом деле, теория не только

¹⁾ См. также Мигдал А. Б. и Смородинский Я. А., УФН, 41, 133 (1950); Brückner K. A., Watson K. M., Phys. Rev., 83, 1 (1951); Паруницава Р., ЖЭТФ, 22, 123 (1952).—Прим. ред.

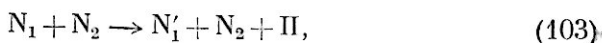
предсказала это явление, которое затем наблюдалось в космических лучах и на синхроциклотронах, но и дала правильный порядок величины сечения предполагаемого процесса.

При рассмотрении теории этого явления вначале не будет учитываться различие между протоном и нейтроном. Нуклеоны будут обозначаться буквой N . Не будет также учитываться различия между заряженными и нейтральными π -мезонами; для всех будет применяться общее обозначение Π .

Обсуждаемый нами процесс идет по следующей схеме:



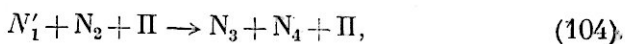
С точки зрения теории возмущений, это процесс третьего приближения, несмотря на то, что в действительности испускается только один π -мезон. В самом деле, первый этап реакции, в котором один из нуклеонов, например N_1 , испускает π -мезон по схеме



явно несовместим одновременно с законами сохранения энергии и импульса, так как в системе покоя нуклеона N_1 нет потребной для образования π -мезона энергии, а второй нуклеон никак не участвует в этом процессе. Поэтому переход (103) может быть лишь одним из нескольких последовательных переходов, дающих в результате реакцию (102). Остальные переходы учитывают взаимодействие между N'_1 и N_2 , например испускание еще одного π -мезона одним из двух нуклеонов и последующее поглощение его другим нуклеоном. Всего, следовательно, получается три этапа реакции.

Подробный анализ показывает, что реакция (102) может осуществляться через различные промежуточные этапы. Чтобы получить эффективный матричный элемент перехода, необходимо сложить вклады от всех этих вариантов. Однако, поскольку мы хотим вычислить только порядок величины вероятности образования π -мезона, достаточно рассчитать вклад только от перехода через какую-либо одну последовательность промежуточных состояний. В качестве такой последовательности мы выберем рассмотренную выше.

Можно еще упростить вычисления. В предыдущем параграфе было показано, что испускание π -мезона нуклеоном и последующее поглощение его другим нуклеоном эквивалентно по теории Юкавы некоторому потенциалу сил, действующих между двумя нуклеонами. Соответствующий матричный элемент дается формулой (93). Поэтому переход (102) можно считать идущим в два этапа: первый этап описывается формулой (103), а второй—по схеме



которая суммарно учитывает эффект поглощения и испускания виртуального π -мезона.

Матричный элемент, соответствующий переходу (103), дается формулой (42). Переход (104) соответствует матричному элементу (93). При вычислении порядка величины мы упростим (42) и (93), подставив $m_\pi c^2$ вместо ω . Эффективный матричный элемент рождения π -мезона при столкновениях нуклеонов равен произведению (42) и (93), деленному на разность энергии начального и промежуточного состояний. Эта разность имеет порядок величины $m_\pi c^2$.

Окончательно порядок величины эффективного матричного элемента для процесса (102) есть

$$\frac{f}{\Omega^{3/2}}, \quad \text{где} \quad f = \frac{c^{1/2} \hbar^3}{\sqrt{2} m_\pi^{7/2} c^4}. \quad (105)$$

Подставляя численные значения, находим $f \approx 10^{-61}$.

Вероятность перехода может быть вычислена по общим правилам § 10. Удобно проводить расчеты в системе центра инерции двух нуклеонов, сталкивающихся с относительной скоростью v . Определим сечение σ_{dp} рождения π -мезона с импульсом между p и $p + dp$.

Вероятность перехода $v\sigma_{dp}/\Omega$ можно вычислить по формуле (55). Так как в конечном состоянии имеется три частицы, dN/dW можно найти тем же путем, что и в § 15, с той, однако, разницей, что там все три частицы считались крайне релятивистскими. В данном случае, наоборот, предполагается, что π -мезон и два нуклеона N_3 и N_4 являются нерелятивистскими. Импульс p π -мезона и импульсы p_3 и p_4 нуклеонов связаны законом сохранения энергии

$$\frac{1}{2M} (p_3^2 + p_4^2) + \frac{1}{2m_\pi} p^2 = T, \quad (106)$$

где T есть избыток энергии в системе центра инерции над пороговой энергией рождения π -мезона. По закону сохранения импульса сумма $p + p_3 + p_4$ равна нулю, и эти три вектора образуют треугольник так же, как три вектора на фиг. 2. Однако поскольку в рассматриваемом случае справедливо равенство (106), а не (80), геометрическим местом вершин A треугольника является не эллипсоид, а сфера радиуса

$$\left\{ MT - \left(\frac{1}{4} + \frac{M}{2m_\pi} \right) p^2 \right\}^{1/2}.$$

Как и в § 15, dN/dW равно умноженной на $\Omega/(2\pi\hbar)^3$ производной по T от объема этой сферы, т. е.

$$\frac{dN}{dW} = \frac{\Omega M}{4\pi^2 \hbar^3} \left\{ MT - \left(\frac{1}{4} + \frac{M}{2m_\pi} \right) p^2 \right\}^{1/2}. \quad (107)$$

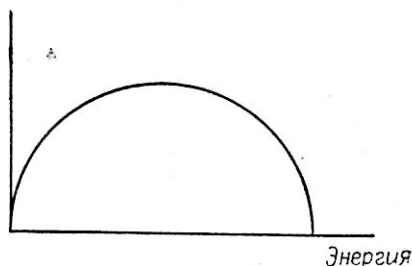
Теперь можно по формуле (55) вычислить вероятность перехода. При этом необходимо учесть, что число конечных состояний π -мезона равно $\Omega p^2 dp / 2\pi^2 \hbar^3$. С другой стороны, вероятность перехода можно представить в виде $v\sigma_{dp} / \Omega$. Это дает

$$\sigma_{dp} = \frac{f^2 M}{4\pi^2 \hbar^2} \frac{1}{v} \left\{ MT - \left(\frac{1}{4} + \frac{M}{2m_\pi} \right) p^2 \right\}^{1/2} p^2 dp. \quad (108)$$

Полное сечение рождения π -мезонов получается интегрированием выражения (108). В результате получаем

$$\sigma = \frac{f^2 M^3}{64\pi^2 \hbar^2} \frac{1}{v} \frac{T^2}{\left(\frac{1}{4} + \frac{M}{2m_\pi} \right)^{3/2}}. \quad (109)$$

При энергии налетающих нуклеонов 345 Мэв эта формула дает сечение порядка 10^{-28} см^2 , что находится в согласии с экспериментами на берклевском циклотроне. Формула (108) определяет также форму энергетического спектра π -мезонов; этот спектр изображен графически на фиг. 4. Спектр имеет форму окружности.



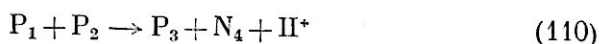
Фиг. 4. Спектр π -мезонов.

Однако при рождении π -мезонов в результате столкновений протонов наблюдается совсем другой спектр. Так происходит потому, что волновые функции двух нуклеонов в конечном состоянии искажаются благодаря действию ядерных сил. Результат этого усложнения будет нами обсужден в следующем параграфе.

§ 19. Влияние взаимодействия нуклеонов

При рассмотрении рождения π -мезонов в столкновении двух нуклеонов в предыдущем параграфе предполагалось, что π -мезон и нуклеоны в начальном и конечном состояниях могут быть представлены плоскими волнами. Это предположение справедливо в том случае, когда энергия частиц настолько велика, что искажением волновых функций ядерными силами можно пренебречь. В противном случае это допущение может повести к значительным ошибкам.

В частности, в случае рождения положительных π -мезонов при столкновении двух протонов по схеме



силы между протоном и нейтроном в конечном состоянии могут быть настолько существенны, что два нуклона могут образовать связанное состояние—дейтрон. Форма спектра π -мезонов в этом случае совершенно отлична от изображенного на фиг. 4. В экспериментах в Беркли энергия налетающих протонов равнялась $345 Mэв$. Энергия в системе центра инерции равна примерно половине этого значения (точнее, $165 Mэв$, с учетом релятивистских поправок). Поскольку относительная энергия двух протонов P_1 и P_2 велика, пренебрежение искажением их волновых функций не дает большой ошибки.

Однако в конечном состоянии, после того как рожден π -мезон с энергией покоя, равной $140 Mэв$, конечная энергия нуклона равна всего $25 Mэв$, причем часть этой величины идет на кинетическую энергию π -мезона. Поэтому относительная энергия двух нуклонов P_3 и N_4 мала, и искажение их волновых функций становится заметным. Этот эффект выражен наиболее ярко, когда π -мезон рождается с энергией, близкой к максимально допустимой, ибо в этом случае относительная скорость P_3 и N_4 очень мала.

Учтем это обстоятельство, для чего рассмотрим силы, действующие между P_3 и N_4 . Если бы оба нуклона P_3 и N_4 можно было представить плоскими волнами, как предполагалось в предыдущем параграфе, их волновая функция имела бы вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{(i/\hbar)(p_3 r_3)} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{(i/\hbar)(p_4 r_4)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{(i/\hbar)(p_3 + p_4) r_D} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{(i/\hbar) \frac{p_3 - p_4}{2} (r_3 - r_4)}, \quad (111) \end{aligned}$$

где $r_D = (r_3 + r_4)/2$ — радиус-вектор центра инерции двух нуклонов. Собственная функция (111) представлена в виде произведения волновой функции центра инерции двух нуклонов на волновую функцию их относительного движения. Учет сил притяжения между P_3 и N_4 приводит к изменению вида последнего множителя. Волновая функция относительного движения будет уже не плоской волной, а некоторой более сложной функцией $D(r_3 - r_4)$. Например, если P_3 и N_4 в конечном состоянии образуют дейтрон, функция D будет волновой функцией дейтрона. Если же P_3 и N_4 в конечном состоянии не связаны, следует использовать в качестве D волновую функцию диссоциированного состояния дейтрона.

Так как P_3 и N_4 в конечном состоянии находятся на малых расстояниях, матричный элемент перехода (110) будет пропорционален волновой функции D , взятой при $r_3 = r_4$, т. е. величине $D(0)$. Если бы силами связи можно было пренебречь, D свелось бы к последнему множителю в (111), и поэтому $D(0)$ равнялось бы $1/\sqrt{\Omega}$.

Следовательно, матричный элемент (105) нужно умножить на отношение

$$\frac{D(0)}{1/\sqrt{\Omega}} = \sqrt{\Omega} D(0), \quad (112)$$

и в результате получаем

$$\frac{fD(0)}{\Omega}. \quad (113)$$

Постоянная f выражается через e_2 по (105):

$$f = \frac{e_2^2 \hbar^3}{\sqrt{2} m_\pi^{7/2} c^4}. \quad (114)$$

Однако, поскольку эта формула была выведена с помощью очень грубых предположений, она дает в лучшем случае лишь порядок величины f . С другой стороны, поскольку π -мезон рождается с малой кинетической энергией, мы можем ожидать, что величина f приблизительно постоянна, и использовать выражение (113) для вычисления формы спектра π -мезонов и для определения вероятностей того, что протон и нейтрон в конечном состоянии свободны или связаны в дейтрон. Затем мы сравним значение f , найденное из эксперимента, с выражением (114), полученным с помощью теории возмущений в предыдущем параграфе.

Вычислим сначала сечение перехода (110), считая, что в конечном состоянии перехода P_3 и N_4 связаны в дейтрон. Тогда в конечном состоянии перехода (110) будут две частицы (π -мезон и дейтрон), обладающие равными и противоположно направленными импульсами. В матричном элементе (113) $D(0)$ есть значение волновой функции дейтрона при нулевом расстоянии. Численное значение этой величины может быть получено, если вычислить волновую функцию дейтрона в предположении, что притяжение между нейтроном и протоном вызвано потенциальной ямой радиуса $2,82 \cdot 10^{-13}$ см и глубиной 21 Мэв. При должной нормировке волновой функции ее значение в нуле равно $3,2 \cdot 10^{18}$ см $^{-3/2}$.

Вероятность перехода вычисляется по формулам (55) и (60), при этом в знаменателе появляется сумма скоростей π -мезона и дейтрона. Вероятность перехода можно также записать в виде $\sigma_D v_{12}/\Omega$, где σ_D есть сечение образования дейтрона, а v_{12} — относительная скорость двух сталкивающихся нуклеонов. Тогда находим

$$\sigma_D = \frac{f^2 D^2(0) p^2}{\pi \hbar^4 (|v_D| + |v_\pi|) v_{12}} = \frac{f^2 D^2(0) M_R p}{\pi \hbar^4 v_{12}}, \quad (115)$$

где M_R — приведенная масса дейтрона и π -мезона:

$$M_R = \frac{2Mm_\pi}{2M + m_\pi}.$$

Импульс p вычисляется из закона сохранения энергии

$$\frac{p^2}{2M_R} = T + B,$$

где T —кинетическая энергия P_3 , N_4 и Π в системе центра инерции, B —энергия связи дейтрона, равная $2,2 \text{ Мэв}$. Численные результаты будут обсуждаться в конце настоящего параграфа.

Формула (115) выведена для случая, когда P_3 и N_4 связаны в дейтрон. Та же формула может быть применена и к случаю, когда P_3 и N_4 не связаны и разлетаются с относительным импульсом q . Единственное различие заключается в том, что в этом случае функция D есть волновая функция дейтрона в диссоциированном состоянии. Эта величина может быть вычислена обычными методами в предположении, что взаимодействие протона с нейтроном задается потенциальной ямой радиуса r_0 и глубины U . Значение $D(0)$ отлично от нуля только для s -состояний. Величину $D^2(0)$, вычисленную для s -состояния, следует умножить на число s -состояний с относительным импульсом между q и $q + dq$.

Вычисления дают

$$D^2(0) = \frac{q^2 dq}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{q^2 + MU}{q^2 + MU \cos^2 \left(\sqrt{q^2 + MU} \frac{r_0}{\hbar} \right)}. \quad (116)$$

Подставляя эту величину в (115), получаем сечение σ_{dq} процесса, в котором P_3 и N_4 разлетаются с относительным импульсом между q и $q + dq$:

$$\sigma_{dq} = \frac{f^2 M_R p q^2 dq}{2\pi^3 \hbar^7 v_{12}} \frac{q^2 + MU}{q^2 + MU \cos^2 \left(\sqrt{q^2 + MU} \frac{r_0}{\hbar} \right)}. \quad (117)$$

Величины q и p связаны законом сохранения энергии

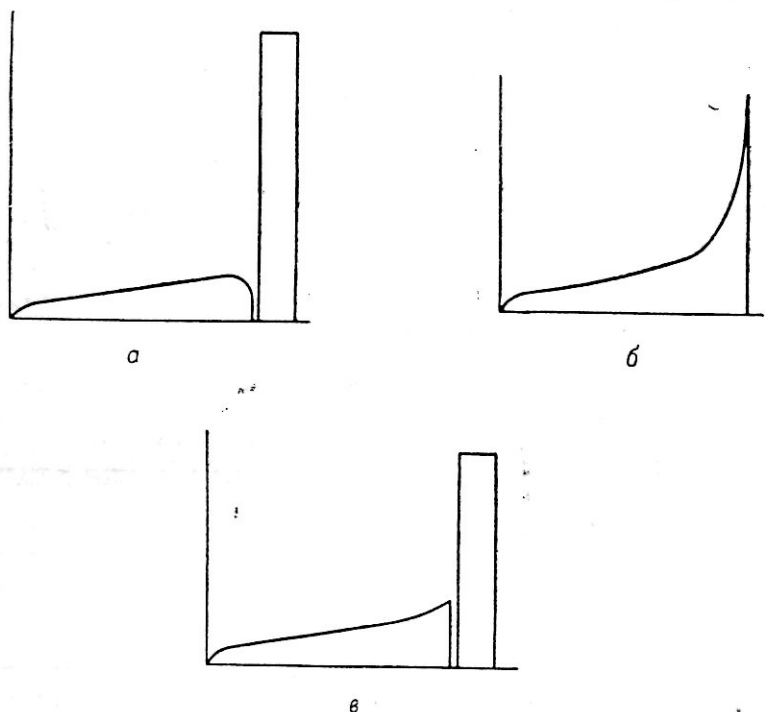
$$\frac{q^2}{M} + \frac{p^2}{2M_R} = T, \quad (118)$$

где T —кинетическая энергия продуктов реакции. С помощью этого равенства формулу (117) можно преобразовать к виду

$$\sigma_{dp} = \frac{f^2 M q p^2 dp}{4\pi^3 \hbar^7 v_{12}} \frac{q^2 + MU}{q^2 + MU \cos^2 \left(\sqrt{q^2 + MU} \frac{r_0}{\hbar} \right)}, \quad (119)$$

где σ_{dp} обозначает сечение рождения мезона с импульсом между p и $p + dp$ в системе центра инерции. Эта формула более удобна для определения спектра испущенных π -мезонов. При $U = 0$ формула (119) переходит в формулу (108).

До сих пор мы пренебрегали спиновыми свойствами нуклеонов в конечном состоянии. В действительности P_3 и N_4 могут иметь спины, одинаково или противоположно ориентированные. В первом случае P_3 и N_4 могут обладать как дискретным (дейтрон), так и непрерывным (диссоциированное состояние дейтрона) спектрами. Во втором случае связанного состояния не существует.



Фиг. 5. Формы спектров π -мезонов в системе центра инерции.

Таким образом, энергетический спектр испущенных π -мезонов будет наложением двух спектров, относящихся к этим двум случаям. Так как взаимодействие между нуклеонами, повидимому, зависит от спинов, мы не можем быть уверенными, что f имеет одинаковые значения при различных ориентациях спинов. Однако если мы сделаем такое предположение, результирующий спектр будет взвешенной суммой спектров, относящихся к параллельным и антипараллельным спинам нуклеонов в конечном состоянии, с весами соответственно 75 и 25%. На фиг. 5, а показан спектр для случая одинаково ориентированных спинов, на фиг. 5, б показан спектр для случая противоположно ориентированных спинов, на фиг. 5, в показан спектр смеси этих состояний в отношении

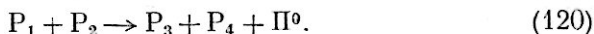
75% : 25%; во всех случаях энергия налетающих протонов равна 345 Мэв.

Экспериментальные данные не дают еще возможности установить, какой из трех спектров, изображенных на фиг. 5, имеет место в действительности. В частности, моноэнергетическая линия, имеющаяся на верхней границе спектра в случаях, изображенных на фиг. 5, а и 5, в, не может быть разрешена от непрерывного спектра. Во всяком случае, имеются явные указания на резкий максимум вблизи от верхней границы спектра. Такой максимум находится в согласии с любым из трех спектров, приведенных на фиг. 5. Предполагая, что имеет место спектр, изображенный на фиг. 5, в, можно из сравнения теории с экспериментом найти порядок величины f . Отсюда для величины f получается значение $f = 6,5 \cdot 10^{-62}$ эрг·см^{9/2}. Это значение можно сравнить с вычисленным по формуле (114) значением $f = 13 \cdot 10^{-62}$ эрг·см^{9/2}. Мы можем считать, что в данном случае имеется удовлетворительное согласие теории с экспериментом, потому что теория довольно груба и не может дать больше, чем порядок величины.

Силы, действующие между двумя нуклеонами в конечном состоянии, не только меняют форму спектра π -мезонов, которая теперь дается фиг. 5, а не фиг. 4, но и вызывают также изменение величины полного сечения процесса, увеличивая сечение приблизительно в 3,4 раза при энергии налетающих протонов 345 Мэв. Это ведет к следующим заключениям.

Когда при бомбардировке углеродной мишени протонами рождаются положительные мезоны, можно ожидать для сечения рождения мезонов, по меньшей мере, в 6 раз большие значения, чем при бомбардировке водорода протонами, поскольку ядро углерода содержит 6 протонов. Однако наблюдаемое значение сечения рождения мезонов протонами на углероде имеет заметно меньшую величину. Бомбардировка свободных протонов дает больший выход положительных π -мезонов, чем бомбардировка протонов, связанных в ядре углерода. Возможно, этот факт объясняется взаимодействием свободного нейтрона и протона при малых энергиях. Это взаимодействие уже не имеет места, когда нуклеоны не свободны.

При столкновении двух протонов высокой энергии могут рождаться не только положительные мезоны по реакции (109), но и нейтральные мезоны по реакции



Экспериментальные определения выхода этой реакции дали значения, меньшие 10 или 20% от выхода реакции (109). Причина этого не совсем ясна. Так как P_3 и P_4 —две тождественные частицы, они могут находиться только в синглетном состоянии, так что энергетический спектр рожденных нейтральных π -мезонов может оказаться подобным спектру, показанному на фиг. 5, б. Максимум

спектра может оказаться несколько менее ярко выражен из-за кулоновского отталкивания, но, повидимому, разница не очень велика.

Возможно, неудачные результаты наблюдения рождения нейтральных π -мезонов в этом случае объясняются тем, что постоянная f для рождения мезонов при синглетном конечном состоянии нуклеонов значительно меньше, чем при триплетном¹⁾.

§ 20. Рождение π -мезонов γ -квантами

Эксперименты, выполненные в Беркли с γ -излучением максимальной энергии 335 Мэв, полученным на синхротроне, показали, что как заряженные, так и нейтральные π -мезоны рождаются γ -квантами при их столкновениях с нуклеонами. Ниже кратко излагается соответствующая теория.

Рассмотрим в качестве примера рождение отрицательных π -мезонов γ -квантами при столкновении с нейтроном по реакции



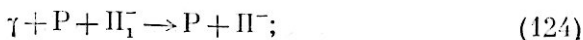
Эта реакция отвечает процессу второго приближения теории возмущений, поскольку по (121) рождается π -мезон и исчезает γ -квант. Например, мы можем себе представить эту реакцию идущей в следующие два этапа. Первый этап:



здесь нейтрон, превращаясь в протон, испускает отрицательный π -мезон в согласии с реакцией (385)—одной из основных реакций теории Юкава. В результате этого этапа, в котором фотон не поглощается, образуется промежуточное состояние с энергией, превышающей энергию начального состояния приблизительно на величину $m_{\pi}c^2$. Порядок величины соответствующего матричного элемента дается формулой (42), в которой вместо ω_s следует подставить $m_{\pi}c^2$. Матричный элемент перехода первого этапа, таким образом, есть

$$\frac{e_2 \hbar}{\sqrt{2\Omega m_{\pi}}}. \quad (123)$$

Второй этап:



он приводит к конечному состоянию реакции (121). Он обусловлен электромагнитным взаимодействием между γ -квантом и π -мезоном;

¹⁾ Недавние эксперименты в Беркли, повидимому, указывают на то, что угловое распределение π -мезонов, рожденных в реакции (109), не изотропно в системе центра инерции, но имеет зависимость от угла, близкую к $\cos^2 \theta$. Это говорит о сильном взаимодействии в p -состоянии, и в рассуждениях двух предыдущих параграфов необходимо внести соответствующие изменения.

γ -квант поглощается π -мезоном, при этом импульс π -мезона достигает конечного значения. Матричный элемент этого процесса по порядку величины равен величине (35), поскольку скорость π -мезона по порядку величины равна c . Таким образом, матричный элемент имеет вид

$$\frac{ec \sqrt{2\pi\hbar}}{\sqrt{\Omega\omega}}. \quad (125)$$

Матричный элемент результирующего перехода (121) получается по формуле (61) и равен произведению величины (123) на величину (125), деленному на разность энергий промежуточного и начального состояний, которая, как мы уже видели, имеет порядок величины $m_\pi c^2$. Мы снова предполагаем получить правильный порядок величины, рассматривая только одно из нескольких возможных промежуточных состояний. Таким образом, имеем

$$\mathcal{H}'_{n0} = \frac{\sqrt{\pi} ec_2 \hbar^{3/2}}{\Omega cm_\pi^{3/2} \omega^{1/2}}. \quad (126)$$

Вероятность перехода из начального в конечное состояние вычисляется, как обычно, по формуле (55). Поскольку скорость фотона равна c , вероятность перехода можно записать в виде ec/Ω , где σ —сечение реакции (121). Используя формулы (55) и (58), получаем

$$\frac{\sigma c}{\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{H}'_{n0}|^2 \frac{\Omega p^2}{2\pi^2 \hbar^3 v}, \quad (127)$$

где p —импульс π -мезона, v —относительная скорость π -мезона и протона. Пренебрегая малой скоростью протона, получаем из (127)

$$\sigma = \frac{e^2 e_2^2}{\hbar c^3 m_\pi^3} \frac{p^2}{\omega v} \approx \frac{\sqrt{2} e^2 e_2^2}{c^3 m_\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{\hbar\omega - m_\pi c^2}}{\hbar\omega}. \quad (128)$$

Подставляя в эту формулу численные значения, находим в случае γ -квантов энергии 335 Мэв сечение порядка $3 \cdot 10^{-28}$ см².

В предыдущем расчете не были учтены некоторые из возможных промежуточных состояний реакции (121). Например, мы предположили, что в первом этапе (122) протон рождается сразу в конечном состоянии, а π -мезон имеет импульс, отличный от его значения в конечном состоянии. Мы предположили, что во втором переходе π -мезон поглощает γ -квант, при этом импульс π -мезона принимает конечное значение. Поскольку, однако, γ -квант может взаимодействовать не только с π -мезоном, но и с протоном, возможно промежуточное состояние $\gamma + P_1 + \Pi^-$. В этом случае π -мезон испускается сразу в конечном состоянии,

а протон образуется в промежуточном состоянии P_1 и переходит в конечное состояние, поглощая фотон.

При вычислении эффективного матричного элемента следовало бы учесть и вклад второго промежуточного состояния. Отметим, между прочим, что не все равно, рождаются ли γ -квантами отрицательные π -мезоны на нейтронах или же положительные π -мезоны на протонах. Это различие исследовалось теоретически, причем оказалось возможным объяснить наблюдаемую разницу в величине сечений рождения положительных и отрицательных π -мезонов.

Последнее замечание относится к рождению нейтральных π -мезонов. Так как эти частицы, повидимому, слабо взаимодействуют с электромагнитным полем, нельзя использовать промежуточное состояние (122). По той же причине γ -квант может взаимодействовать только с нуклоном. Казалось бы, что это указывает на то, что сечение рождения нейтральных π -мезонов γ -квантами на водороде должно быть гораздо меньше сечения рождения заряженных мезонов. Это, однако, противоречит эксперименту. Оказывается, что сечения обоих процессов примерно одинаковы¹⁾.

§ 21. Захват отрицательных π -мезонов протонами²⁾

Были исследованы явления, возникающие при замедлении отрицательных π -мезонов в водороде. Оказалось, что при этом испускаются γ -лучи со спектральным распределением, состоящим из двух групп: одна группа имеет энергию приблизительно 60 или 70 *Мэв*, а другая — энергию около 120 *Мэв*. Было предложено следующее теоретическое объяснение этого факта. Отрицательный π -мезон, который из-за потерь на ионизацию замедляется в водороде, быстро захватывается в окрестность одного из протонов. При этом имеется значительная вероятность того, что мезон попадает на *K*-орбиту протона, не успев распасться на ρ -мезон и нейтрино по реакции, рассмотренной в § 13. Поскольку π -мезон находится на малых расстояниях от протона, становятся возможными различные процессы распада π -мезона, имеющие большую вероятность. Рассматриваются следующие три возможности.

¹⁾ Как показано А. Балдиным и В. Михайловым [УФН, 44, 200 (1951)], а также Т. Хазановичем [ЖЭТФ, 21, 581 (1951)], экспериментальные данные могут быть объяснены при учете аномального магнитного момента нуклона. — *Прим. ред.*

²⁾ См. также краткие обзоры экспериментальных и теоретических результатов по поглощению π -мезонов в водороде и дейтерии в журнале «Успехи физических наук» [42, 571, 574 (1950); 46, 109 (1952)] и статьи: Panofsky, Amoldt, Hadley, Phys. Rev., 81, 565 (1951); Marshak, Rev. Mod. Phys., 23, 137 (1951); Иоффе, Рудик, Шмушкевич, ДАН СССР, 77, 403 (1951); Берестецкий В. Б., Померанчук И. Я., ДАН СССР, 77, 803 (1951). — *Прим. ред.*

Преобразование протона и отрицательного π -мезона в нейтрон и γ -квант:



Если эта реакция имеет место, энергия покоя π -мезона, равная приблизительно $140 Mэв$, распределяется между γ -квантом и нейтроном, разлетающимися с равными и противоположными импульсами. Законы сохранения энергии и импульса дают для энергии γ -кванта значение, примерно равное $131 Mэв$, а для энергии нейтрона — значение около $9 Mэв$. Таким образом, этот процесс может объяснить высокоэнергетическую компоненту в наблюдаемом γ -спектре.

Наличие низкоэнергетической компоненты может быть объяснено тем, что на этот раз большая часть энергии покоя π -мезона передается не одному, а двум γ -квантам. Можно рассмотреть следующие два процесса. Первый из них



представляет собой непосредственное превращение π -мезона и протона в нейтрон и два γ -кванта. По второму процессу отрицательный π -мезон и протон превращаются сначала в нейтрон и нейтральный π -мезон. Вскоре после этого нейтральный мезон распадается на два γ -кванта по реакции, которая будет рассмотрена подробнее в § 24. Таким образом, вначале происходит переход

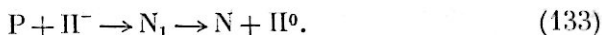


а вскоре после него — переход



Так как последний процесс происходит, по видимому, за время, меньшее 10^{-14} сек., то реакция (130) в основном определяется вероятностью перехода (131).

Рассмотрим сначала реакцию (131). Эта реакция энергетически возможна лишь в том случае, если энергия покоя нейтрона и нейтрального π -мезона меньше, чем энергия системы протон — отрицательный π -мезон. Предположим, что это имеет место. Обозначим разность этих энергий через ε . Тогда реакция (131) может идти через промежуточное состояние следующим образом:



Эти два этапа соответствуют элементарным процессам (38a) и (38г) взаимодействия Юкава. Порядок величины матричных элементов переходов, соответствующих этим этапам, определяется формулой (42), в которой w в знаменателе следует заменить на $m_\pi c^2$, потому что кинетические энергии как заряженного, так и нейтраль-

ного мезонов малы по сравнению с $m_\pi c^2$. Поэтому порядок величины каждого из матричных элементов есть

$$\frac{e_2 \hbar}{\sqrt{2\Omega m_\pi}}.$$

В промежуточном состоянии реакции (133) находится один покоящийся нуклеон. Таким образом, энергия промежуточного состояния меньше энергии начального приблизительно на $m_\pi c^2$. Зная матричные элементы каждого из переходов, можно вычислить эффективный матричный элемент, соответствующий переходу из начального в конечное состояние реакции (133). С помощью формулы (61) находим, что вклад реакции (133) в матричный элемент равен

$$\frac{1}{m_\pi c^2} \left(\frac{e_2 \hbar}{\sqrt{2\Omega m_\pi}} \right)^2 = \frac{e_2^2 \hbar^2}{2\Omega m_\pi^2 c^2}. \quad (134)$$

Промежуточное состояние N_1 в (133) не является единственным возможным. Другим возможным промежуточным состоянием может быть состояние $\Pi^- + P_1 + \Pi^0$. Другими словами, возможны не только переходы, при которых сначала поглощается отрицательный π -мезон, а затем испускается нейтральный. Возможны также переходы, идущие в обратном порядке.

Энергия одного из двух возможных промежуточных состояний, N_1 , меньше энергии начального состояния приблизительно на $m_\pi c^2$, а энергия другого промежуточного состояния больше энергии начального состояния на ту же величину. Если сложить по формуле (61) соответствующие матричные элементы, желая учесть оба возможных пути перехода, то они почти полностью взаимно сократились бы. Это означало бы, что вероятность перехода (131) очень мала.

Но поскольку в действительности это не так, необходимо предположить, что существенного сокращения не происходит. Это может, например, объясняться тем фактом, что константы связи нейтрального π -мезона с нейтроном и протоном равны по величине и противоположны по знаку. В этом случае вклады двух возможных промежуточных состояний будут складываться, а не вычитаться. Наши вычисления оценивают лишь порядок величины, так что мы учитываем вклад только одного промежуточного состояния, равный по порядку величины выражению (134).

Вероятность перехода для процесса (131) можно теперь вычислить обычным образом с помощью формул (55) и (60). Находим:

$$\begin{aligned} \text{Вероятность перехода} &= \frac{1}{\Omega} \frac{e_2^4 p^2}{4\pi m_\pi^4 c^4 (v_N + v_\Pi)} = \\ &= \frac{e_2^4 M^{3/2} \sqrt{z}}{2\sqrt{2} \pi c^4 m_\pi^{5/2} (M + m_\pi)^{3/2}} \frac{1}{\Omega}, \quad (135) \end{aligned}$$

где p —импульс нейтрального π -мезона, определяемый с помощью закона сохранения энергии

$$\left(\frac{1}{2M} + \frac{1}{2m_\pi}\right) p^2 = \varepsilon. \quad (136)$$

Объемный множитель Ω входит в формулу (135) потому, что вероятность реакции (131) прямо пропорциональна концентрации протонов, с которыми взаимодействует отрицательный π -мезон. Если в начальном состоянии отрицательный мезон находится на K -орбите протона, величину Ω следует заменить на эффективный объем этой орбиты (как было сделано, например, в § 16):

$$\Omega_K = \pi \left(\frac{a}{276}\right)^3, \quad (137)$$

где a —боровский радиус, а число 276 есть отношение масс π -мезона и электрона. Отсюда находим:

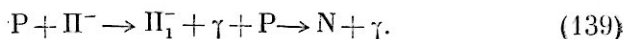
$$\begin{aligned} \text{Вероятность перехода} &= \frac{1}{2^{3/2}\pi^2} \left(\frac{276}{a}\right)^3 \frac{M^{3/2}e^4 \sqrt{\varepsilon}}{c^4 m_\pi^{5/2} (M + m_\pi)^{3/2}} = \\ &= 2 \cdot 10^{15} \sqrt{\varepsilon}; \quad (138) \end{aligned}$$

здесь ε выражено в $M\varepsilon$.

Вскоре после того, как испускается нейтральный мезон, он распадается на два γ -кванта. Если бы скорость нейтрального мезона при распаде равнялась нулю, испускалось бы монохроматическое γ -излучение с энергией, равной половине энергии покоя мезона. Если же кинетическая энергия нейтрального π -мезона при распаде не равна нулю, спектральное распределение уширяется из-за эффекта Доплера. Таким образом, ширина пика при 70 $M\varepsilon$ в энергетическом распределении γ -излучения дает весьма чувствительный метод сравнения масс нейтрального и заряженного π -мезонов. Экспериментальные данные говорят о том, что разность масс отрицательного и нейтрального π -мезонов равна приблизительно 5 $M\varepsilon$. Поэтому вероятность реакции (131) примерно равна $4 \cdot 10^{15}$ сек $^{-1}$.

Мы не будем подробно рассматривать процесс (130). Вероятность его значительно меньше, чем вероятность перехода (131). Кроме того, спектр γ -квантов, испущенных по (130), трудно было бы согласовать с резким пиком, наблюдаемым экспериментально около 70 $M\varepsilon$.

Вероятность перехода (129), который может объяснить наличие в спектре γ -квантов с энергией 130 $M\varepsilon$, также может быть вычислена во втором приближении теории возмущений по реакции



При переходе из начального состояния в промежуточное отрицательный π -мезон испускает γ -квант. Матричный элемент, соответствующий этому переходу, по порядку величины равен величине (35). Заменяя в выражении (35) ω на $m_\pi c^2$, получаем

$$\frac{\sqrt{2\pi} e \hbar}{\sqrt{2\Omega m_\pi}} \quad (140)$$

Второй переход в (139) есть реакция (386) взаимодействия Юкава, а соответствующий матричный элемент имеет порядок величины

$$\frac{e_2 \hbar}{\sqrt{2\Omega m_\pi}} \quad (141)$$

Энергия промежуточного состояния опять отличается от энергии начального состояния на величину порядка $m_\pi c^2$. Используя эти данные, можно с помощью обычных методов, изложенных в § 10, вычислить вероятность перехода в реакции (139).

Находим:

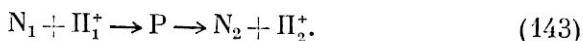
$$\text{Вероятность перехода} = \frac{1}{\Omega_K} \frac{e^2 e_2^2}{m_\pi^2 c^3} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{276}{a}\right)^3 \frac{e^2 e_2^2}{m_\pi^2 c^3} \approx 6 \cdot 10^{14} \text{ сек}^{-1}. \quad (142)$$

Отсюда следует, что вероятность перехода в реакции (139) сравнима с вероятностью перехода в реакции (131), но несколько меньше последней. Эксперименты, повидимому, указывают на то, что оба процесса имеют приблизительно одинаковую вероятность.

§ 22. Рассеяние π -мезонов на нуклеонах

По теории Юкава π -мезоны должны рассеиваться при столкновении с нуклеонами. Если π -мезон и нуклеон электрически заряжены, то на рассеяние, вызванное взаимодействием Юкава (ядерное рассеяние), будет накладываться кулоновское рассеяние. При больших энергиях ядерное рассеяние будет играть основную роль. В качестве примера рассмотрим ядерное рассеяние положительного π -мезона на нейтроне.

Этот процесс описывается вторым приближением теории возмущений, потому что π -мезон в состоянии с начальным импульсом при рассеянии исчезает и появляется рассеянный π -мезон с новым импульсом. Рассеяние может, например, происходить в следующие два этапа:



Оба перехода определяются взаимодействием Юкава (38a). В системе центра инерции импульс протона в промежуточном состоянии¹⁾ равен нулю.

Пренебрегая для простоты кинетической энергией нейтрона, находим, что энергия промежуточного состояния меньше энергии начального на величину полной энергии π -мезона ω . Матричный элемент каждого этапа в реакции (143) определяется формулой (42). Матричный элемент, соответствующий переходу из начального в конечное состояние реакции (143), по формуле (61) имеет вид

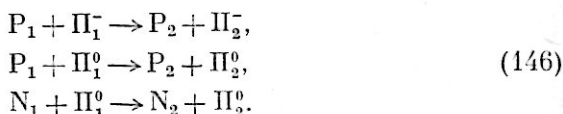
$$\mathcal{H}'_{21} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{e_2 \hbar c}{\sqrt{2\Omega\omega}} \right)^2 = \frac{e_2^2 \hbar^2 c^2}{2\Omega\omega^2}. \quad (144)$$

Зная этот матричный элемент, можно обычным образом, с помощью формул (55) и (56), вычислить сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{e_2^4 c^4 p^2}{4\pi\omega^4 v^2} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e_2^2}{\omega} \right)^2, \quad (145)$$

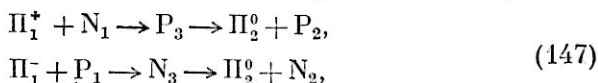
где p , v , ω —соответственно импульс, скорость и полная энергия π -мезона в системе центра инерции. При выводе последнего выражения было использовано равенство $c^2 p = v\omega$. Сечение (145) имеет максимальные значения при малых скоростях π -мезона и уменьшается с ростом полной энергии π -мезона. Принимая, как обычно, $e_2 = 10^{-8}$, находим, что сечение (145) при малых энергиях равно $1,6 \cdot 10^{-26}$ см². Зависимость величины сечения рассеяния от энергии π -мезона, данная формулой (145), не является справедливой, так как выражение (145) было выведено на основе упрощенного варианта взаимодействия Юкава (41). Другие варианты взаимодействия привели бы к совсем другой зависимости сечения рассеяния от энергии. Отметим также, что рассеяние π -мезона на нейтроне можно описывать с помощью потенциала сил, действующих между нейтроном и π -мезоном, имеющего матричный элемент (144). Об этом мы уже говорили при рассмотрении теории ядерных сил в § 17. В соответствии с этим два этапа в реакции (143) можно было бы интерпретировать как следствие некоторой силы, действующей между π -мезоном и нейтроном.

В соответствии с четырьмя элементарными реакциями (38) могут, кроме реакции (143), происходить также следующие процессы рассеяния:



¹⁾ Эта реакция могла бы идти также через промежуточное состояние $\bar{P}_3 + \Pi_2^+ + \Pi_1^+$, где \bar{P}_3 —антипротон. Однако для такой реакции знаменатель в формуле (61) имел бы очень большие значения. Таким образом, вклад этой реакции является малым.

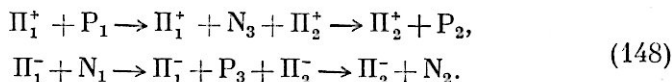
В последних двух случаях сечение рассеяния может оказаться малым вследствие возможной интерференции двух промежуточных состояний, таких, как P_3 и $P_3 + \Pi_1^0 + \Pi_2^0$. Возможны и другие реакции, идущие в соответствии с (38), сечение которых сравнимо с сечением реакции (145). Такими являются процессы



а также обратные им реакции. Например, первая из реакций (147) может быть объяснена последовательным применением взаимодействий (38a) и (38в). В этих случаях рассеяние сопровождается обменом заряда между π -мезоном и нуклеоном.

Вторая из реакций (147) имеет сходство с реакцией (131), рассмотренной в предыдущем параграфе. Масса нейтрального π -мезона, вероятно, несколько меньше, чем масса заряженного. Поэтому сумма кинетических энергий нейтрального π -мезона и нейтрона будет несколько больше суммы кинетических энергий протона и отрицательного π -мезона. Кроме того, как показано в предыдущем параграфе, реакция может иметь место, даже если отрицательный π -мезон захвачен на K -орбите протона.

Рассеяние положительного π -мезона на протоне или отрицательного π -мезона на нейтроне можно во втором приближении описать следующим образом:



В первой из этих реакций дважды происходит взаимодействие (38a), во второй — взаимодействие (38б).

§ 23. Антинуклеон. Аннигиляция¹⁾

Все современные теории электрически заряженных частиц обладают свойством симметрии, по которому наряду с частицей, имеющей электрический заряд одного знака, существует частица, заряженная противоположно, а во всех остальных отношениях подобная первой. Это имеет место, например, в теории Дирака, которая была создана еще до открытия позитрона. В большинстве теоретических работ, относящихся к нуклеонам, предполагается, что эти частицы описываются уравнением, подобным уравнению

¹⁾ Термин «аннигиляция», часто встречающийся в литературе, является весьма неудачным, так как в процессах, при описании которых он применяется, происходит не уничтожение частиц, а их превращение в другие частицы. Поскольку пока нет соответствующего другого общепринятого термина, при переводе было сочтено возможным его сохранить. — *Прим. ред.*

Дирака. Если это предположение справедливо, должны существовать отрицательные протоны, а также антинейтроны. Антипротон, который мы будем обозначать через \bar{P} , имеет массу, равную массе протона, отрицательный электрический заряд и магнитный момент, равный по величине магнитному моменту протона, но направленный противоположно. Антинейтрон (обозначаемый через \bar{N}) имеет массу нейтрона, магнитный момент, равный по величине магнитному моменту нейтрона, но противоположно направленный, и не имеет электрического заряда.

Поскольку до сих пор нет никаких экспериментальных данных, подтверждающих существование двух этих частиц, мы не можем быть уверены, что антинейтрон и антипротон действительно существуют. Тем не менее предварительные соображения о свойствах, которыми могли бы обладать такие частицы, представляют определенный интерес. В этих соображениях можно руководствоваться аналогичными до некоторой степени отношениями между электронами и позитронами.

Можно, в частности, предположить, что когда антинуклеон сближается с нуклеоном, эти две частицы могут аннигилировать. Аннигиляция может произойти посредством взаимодействия нуклеонов с электромагнитным полем, в результате чего испускаются два фотона с равными по величине, но противоположно направленными импульсами, как и в случае аннигиляции электрона и позитрона. Аннигиляция может быть также обусловлена взаимодействием нуклеонов с мезонным полем; при этом в результате реакции образуются два π -мезона с равными по величине, но противоположно направленными импульсами. Так как нуклеоны связаны с мезонным полем сильнее, чем с электромагнитным, последний процесс более вероятен. Однако мы рассмотрим сначала аннигиляцию с испусканием двух фотонов, ибо это понадобится нам для следующего параграфа.

Итак, займемся вычислением вероятности аннигиляции протона и антипротона с испусканием двух фотонов. Кинетическую энергию протона и антипротона будем считать малой величиной. В этом случае, по законам сохранения энергии и импульса, фотоны разлетаются в противоположных направлениях и уносят энергию $w = Mc^2$ каждый (Mc^2 —энергия покоя протона, а также антипротона). Так как при аннигиляции испускаются два фотона, проще всего вести расчет во втором приближении. Во втором приближении эта реакция идет через промежуточное состояние, в котором испускается один фотон:

$$P_1 + \bar{P}_1 \rightarrow P_2 + \bar{P}_1 + \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2. \quad (149)$$

В точных вычислениях следует принять во внимание все возможные промежуточные состояния. Например, при переходе в про-

межуточное состояние фотон может быть испущен не только протоном, но и антипротоном. Кроме того, следует учесть различные спиновые ориентации. Однако при вычислении порядка величины достаточно учесть только одно промежуточное состояние. Разность энергий промежуточного и начального состояний равна по порядку величины Mc^2 . Если фотон, имеющийся в промежуточном состоянии, испущен протоном, то протон, вначале покоившийся, получает вследствие отдачи импульс Mc и энергию $(\sqrt{2}-1)Mc^2$. К этой величине нужно еще прибавить энергию Mc^2 испущенного фотона. Таким образом, энергия промежуточного состояния больше энергии начального на величину $\sqrt{2}Mc^2$. Это рассуждение остается справедливым и в том случае, когда фотон испускается антипротоном, а не протоном.

Порядок величин матричных элементов, соответствующих двум этапам реакции (149), можно оценить с помощью формулы (35), так как скорость протона P_2 в промежуточном состоянии сравнима со скоростью света.

Так как $\omega_s = Mc^2/\hbar$, имеем

$$\frac{\sqrt{2\pi} e\hbar}{\sqrt{\Omega M}} \quad (150)$$

Эффективный матричный элемент \mathcal{H}'_{n0} , соответствующий реакции (149), вычисляется по формуле (61). Он равен произведению двух множителей вида (150), соответствующих двум этапам в реакции (149), деленному на $\sqrt{2}Mc^2$ (т. е. на разность энергий промежуточного и начального состояний):

$$\mathcal{H}'_{n0} = \frac{1}{\sqrt{2}Mc^2} \left(\frac{\sqrt{2\pi} e\hbar}{\sqrt{\Omega M}} \right)^2 = \frac{\sqrt{2}\pi e^2 \hbar^2}{\Omega M^2 c^2}. \quad (151)$$

Вероятность перехода вычисляется по обычным правилам. Плотность уровней dN/dW можно оценить с помощью формулы (60). В этой формуле v_1 и v_2 полагаем равными c , а $p = Mc$. Находим:

$$\text{Вероятность аннигиляции} = \frac{\pi e^4}{M^2 c^3} \frac{1}{\Omega}. \quad (152)$$

Произвольное вычеркивание численных множителей (которые здесь мы просто пренебрегли) сделало эту формулу одинаковой с полученной с помощью более строгой теории.

То, что нормировочный объем Ω входит в окончательное выражение, не является удивительным. Антипротон аннигилирует с протоном, находящимся в объеме Ω , так что плотность протонов, с которыми взаимодействует антипротон, равна $1/\Omega$. Вместо множителя $1/\Omega$ в формулу (152) мы можем подставить плотность протонов n . Таким путем мы получаем выражение для величины,

обратной времени жизни антипротона, окруженного протонами с плотностью n , по отношению к двухфотонной аннигиляции,

$$\frac{1}{\tau_{em}} = \frac{\pi e^4 n}{M^2 c^3}. \quad (153)$$

Процесс аннигиляции нуклеона и антинуклеона с испусканием двух π -мезонов можно рассмотреть точно таким же образом. Не вдаваясь в подробности, укажем, что в этом случае результат вычисления вероятности аннигиляции отличается от выражения (152) тем, что вместо электрического заряда e входит константа связи e_2 мезонной теории. Имеется также различие в численных множителях, частично объясняемое тем, что в теории Юкава используются единицы Хевисайда. Результат имеет вид

$$\frac{1}{\tau_y} = \frac{e_2^4 n}{16\pi M^2 c^3}. \quad (154)$$

Заметим, что электромагнитная аннигиляция имеет место только для протонов и антипротонов¹⁾, в то время как аннигиляция с испусканием π -мезонов возможна для любой пары нуклеон—антинуклеон. Например, возможна аннигиляция протона и антинейтрона с испусканием положительного и нейтрального π -мезонов.

Формула (154) дает гораздо большую вероятность перехода, чем формула (153), главным образом потому, что постоянная связи e_2 много больше постоянной электромагнитного взаимодействия e . Кроме того, вероятность аннигиляции с испусканием π -мезонов может иметь еще большие значения, чем это следует из формулы (154), так как энергия, освобождающаяся при аннигиляции, достаточна для рождения более чем двух π -мезонов. Таким образом, возможны другие процессы, ведущие к увеличению полной вероятности перехода.

Для численной оценки вероятностей перехода (153) и (154) плотность нуклеонов n примем равной плотности их в ядре, т. е. приблизительно $7 \cdot 10^{37}$. Тогда для вероятности электромагнитной аннигиляции получаем значение $1/\tau_{em} = 1,5 \cdot 10^{17}$. Мезонная аннигиляция примерно в 1000 раз более вероятна; из (154) получаем $1/\tau_y = 1,5 \cdot 10^{20}$. По причинам, о которых было уже упомянуто, эта величина, повидимому, несколько занижена.

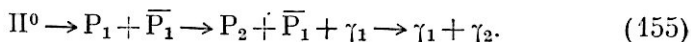
По такой оценке вероятности аннигиляции отрицательного протона, пересекающего ядро диаметром 10^{-12} см со скоростью, близкой к c , меньше 1%. Многократное рождение π -мезонов может во много раз увеличить вероятность мезонной аннигиляции.

¹⁾ Это утверждение неточно. У всех нуклеонов и антинуклеонов имеется магнитный момент, благодаря чему они все могут взаимодействовать с излучением. Поэтому, хотя нейтрон и антинейтрон электрически нейтральны, они могут аннигилировать с испусканием двух фотонов.—Прим. ред.

§ 24. Распад нейтрального π -мезона на два фотона

Нейтральный π -мезон является крайне неустойчивой частицей, спонтанно распадающейся на два фотона¹⁾. Из эксперимента известно, что время жизни нейтрального π -мезона меньше, чем 10^{-13} сек. В этом параграфе мы рассмотрим упрощенную теорию распада нейтрального π -мезона²⁾.

Мы предполагаем, что распад нейтрального π -мезона идет через два промежуточных состояния. При переходе в первое промежуточное состояние нейтральный π -мезон рождает виртуальную пару, состоящую из протона и антипротона. Возможность такого перехода, в сущности, содержится в реакции (38в); действительно, вместо протона, стоящего в правой части этого соотношения, мы можем написать антипротон в левой части. Виртуальная пара протон—антипротон, рожденная нейтральным π -мезоном, распадается затем на два фотона по электромагнитному механизму, исследованному в предыдущем параграфе. Мы видели, что для реальной пары протон—антипротон вероятность аннигиляции с испусканием двух π -мезонов больше, чем вероятность двухфотонной аннигиляции. Однако в рассматриваемом случае распад с испусканием двух π -мезонов произойти не может, ибо это противоречило бы закону сохранения энергии³⁾. Таким образом, возможен распад только из-за электромагнитного взаимодействия. Полный процесс распада π -мезона можно поэтому записать следующим образом:



Два последних перехода напоминают переходы реакции (149), однако в данном случае имеют место совсем другие энергетические условия. Испускаемые в реакции (155) фотоны имеют энергию $m_\pi c^2/2$, в то время как в (149) их энергия гораздо больше: она

¹⁾ Из факта распада нейтрального π -мезона на два фотона следует, что спин нейтрального π -мезона не может равняться половине или единице [см. Л а н д а у Л. Д., О моменте системы из двух фотонов, ДАН СССР, 60, 207 (1948)]. Отбрасывая возможность высших спинов, приходим к заключению, что спин нейтрального π -мезона равен нулю.—Прим. ред.

²⁾ Предположение о существовании нейтрального π -мезона было выдвинуто, чтобы объяснить ряд явлений, относящихся к мягкой компоненте космического излучения. Предположения о двухфотонном распаде нейтрального π -мезона были сделаны Оппенгеймером, Кристи, Финкельштейном и др. Первые определенные экспериментальные указания на существование нейтрального мезона были получены при наблюдении γ -излучения, испускаемого при столкновениях быстрых нуклеонов, полученных на ускорителях. Впоследствии γ -излучение той же природы наблюдалось при изучении звезд, вызванных космическими лучами. Затем в опытах с нейтральными π -мезонами, рожденными фотонами высокой энергии, было доказано, что при распаде нейтрального π -мезона испускаются два фотона.

³⁾ Кинетическая энергия нейтрального π -мезона считается малой.—Прим. ред.

равна Mc^2 . Реакция (155) есть процесс третьего приближения, в котором первый переход обусловлен взаимодействием Юкава, а два последних — электромагнитным взаимодействием. Эффективный матричный элемент для процесса такого типа может быть вычислен по формуле, полностью аналогичной (61), именно:

$$\mathcal{H}'_{n0} = \sum_{km} \frac{\mathcal{H}_{nh} \mathcal{H}_{km} \mathcal{H}_{m0}}{(W_0 - W_k)(W_0 - W_m)}, \quad (156)$$

где 0 и n — индексы начального и конечного состояний, m и k — индексы двух промежуточных состояний; суммирование распространяется на все возможные комбинации промежуточных состояний. Чтобы вычислить это выражение, мы должны знать матричные элементы переходов каждого из трех этапов реакции (155). Матричный элемент первого этапа определяется формулой (42), в которой следует заменить ω_s на $m_\pi c^2$. Остальные два матричных элемента записываются с помощью формулы (35). В рассматриваемом случае энергия ω испускаемого фотона равна $m_\pi c^2/2$. Оба сомножителя в знаменателе выражения (156) имеют порядок $2Mc^2$, соответствующий энергии рождения пары.

Таким образом, порядок величины общего члена суммы (156) равен

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{e_2 e^2 \hbar^3}{\Omega^{3/2} m_\pi^{3/2} M^2 c^4}. \quad (157)$$

Сумма (156) содержит бесконечное число членов; действительно, протон P_1 может иметь любой импульс; закон сохранения импульса требует только, чтобы P_1 и \bar{P}_1 имели равные, но противоположно направленные импульсы. Найдено, что сумма (156) расходится. Предлагалось много приемов, дающих возможность обойти эту трудность. Однако это не может быть сделано без некоторого произвола.

Мы предполагаем получить правильный порядок величины с помощью грубой процедуры обрезания, которая заключается в том, что в сумму (156) включаются только состояния с импульсами протона и антипротона, меньшими, чем Mc .

Тогда в пренебрежении спином для числа промежуточных состояний получаем выражение

$$\frac{\Omega}{8\pi^3 \hbar^3} \frac{4\pi}{3} (Mc)^3. \quad (158)$$

Эффективный матричный элемент по порядку величины равен произведению величины (157) на величину (158):

$$\mathcal{H}'_{n0} = \frac{e_2 e^2 M}{6 \sqrt{2} \pi m_\pi^{3/2} c \sqrt{\Omega}}. \quad (159)$$

Вычисление времени жизни нейтрального π -мезона по отношению к распаду на два фотона проводится обычным образом по формулам (55) и (60). Нужно только учесть, что в формуле (60) p есть импульс испущенного фотона, равный $m_{\pi}c/2$, а величины v_1 и v_2 обе равны c . В результате получаем

$$\frac{1}{\tau} = \frac{e^2 e^4 M^2}{576 \pi^3 \hbar^4 m_{\pi} c} \approx 10^{17} \text{ сек}^{-1}. \quad (160)$$

Таким образом, согласно рассмотренной теории, время жизни нейтрального мезона по отношению к двухфотонному распаду имеет порядок 10^{-17} сек., т. е. гораздо меньше, чем верхняя граница времени жизни, определяемая из эксперимента (10^{-13} сек.). Результат (160) может содержать в себе значительную неточность, вызванную главным образом произвольным обрезанием при вычислении суммы (156).

§ 25. Статистическая теория рождения мезонов¹⁾

В предыдущих параграфах неоднократно указывалось на недостаточность теории возмущений для рассмотрения мезонных процессов. Трудности частично возникают из-за большой величины параметра разложения. Это ведет к тому, что нередко высшие приближения теории возмущений дают больший результат, чем низшие. В этом параграфе мы обсудим другой подход к решению задач мезонной теории ядерных сил, учитывающий большие значения вероятности перехода между различными состояниями. Предлагаемый метод может оказаться полезным в особенности при рассмотрении случаев множественного рождения частиц. Примеры реакций, в которых рождается несколько π -мезонов, а, возможно, также и несколько антинуклеонов, наблюдаются при столкновениях с покоящимися нуклеонами нуклеонов очень высокой энергии, входящих в состав космического излучения.

Вкратце идея заключается в следующем. Когда сталкиваются два быстрых нуклона, их кинетическая энергия мгновенно передается мезонному полю, окружающему эти нуклоны. Как известно, размеры этого поля имеют порядок $\hbar/m_{\pi}c$, так что мы можем предполагать, что внутри объема, характеризуемого такими размерами, устанавливается высокая концентрация энергии. Конечно, такая концентрация в малом объеме сохраняется очень малое время: после образования π -мезоны и другие частицы быстро разлетаются со скоростью, близкой к скорости света. Однако за то малое время, в течение которого энергия сконцентрирована в малом

¹⁾ См. также Ферми Э., УФН, 46, 71 (1952); Померанчук И. Я., ДАН СССР, 78, 889 (1951); Фейнберг Е. Л., Чернавский Д. С., ДАН СССР, 81, 795 (1951).—Прим. ред.

объеме, может произойти множество реакций, включая образование и исчезновение π -мезонов и других частиц. Для рассмотрения этих явлений мы хотим использовать крайнее предположение, что при столкновении двух быстрых нуклеонов в малом объеме, их окружающем, устанавливается статистическое равновесие и что вероятность рождения при столкновении определенного числа частиц определяется статистическими законами. Это предположение было бы хорошим приближением, если бы процессы рождения и исчезновения происходили настолько быстро, что статистическое равновесие достигалось бы до начала уменьшения концентрации энергии. Если это не так, то все же можно ожидать, что статистическая теория дает верхнюю границу числа частиц, рожденных при столкновении. Кажется правдоподобным, что предлагаемое здесь приближение может дать сравнительно хорошее описание столкновений при очень больших энергиях, так как в этом случае каждое состояние может быть достигнуто по множеству путей, и поэтому равновесие устанавливается довольно быстро.

Чтобы более полно сформулировать наши предположения, введем сначала объем V , в котором, по нашим предположениям, устанавливается статистическое равновесие. Этот объем в предлагаемой теории играет роль некоторого подгоночного параметра. Линейные размеры объема имеют порядок величины $\hbar/m_{\pi}c$. Совпадение с пока еще ограниченными экспериментальными данными оказывается удовлетворительным, если предположить, что без учета лорентцовского сокращения V является сферой радиуса $R = \hbar/m_{\pi}c$. Пусть W есть энергия двух сталкивающихся нуклеонов в системе их центра инерции. Тогда множитель, дающий лорентцовское сокращение, равен $2Mc^2/W$. Поэтому мы принимаем

$$V = V_0 \frac{2Mc^2}{W} \quad (161)$$

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\hbar}{m_{\pi}c} \right)^3. \quad (162)$$

Выбор выражения (162), конечно, произволен. Большие значения объема V привели бы к большей вероятности множественного рождения. При столкновении двух нуклеонов может возникнуть множество состояний. Их число ограничивается законами сохранения. Так как мы ведем вычисления в системе центра инерции, полный импульс любого возможного конечного состояния должен равняться нулю. Кроме того, полная энергия конечного состояния должна равняться энергии начального состояния W . Должны также соблюдаться законы сохранения электрического заряда и момента количества движения.

Кроме рождения π -мезонов, будет рассмотрена возможность образования пар нуклеон — антинуклеон. При образовании пар разность между числами нуклеонов и антинуклеонов должна в

конце реакции иметь то же значение, что и в начале. При столкновении двух нуклеонов эта величина, очевидно, равна двум.

При статистическом равновесии вероятность того, что система находится в одном из возможных состояний, пропорциональна статистическому весу этого состояния. Статистический вес считается пропорциональным вероятности того, что все частицы системы одновременно находятся внутри объема V . Например, статистический вес $S(n)$ для n независимых беспиновок частиц с импульсами p_1, p_2, \dots, p_n можно найти следующим образом. Пусть $Q(W)$ — объем в импульсном пространстве $3n$ измерений, ограниченный поверхностью энергии W . В нормировочном объеме Ω число состояний рассматриваемой системы на единичный интервал энергии равно

$$\frac{dN}{dW} = \left(\frac{\Omega}{8\pi^3 h^3} \right)^n \frac{dQ(W)}{dW}. \quad (163)$$

Вероятность того, что одна из n частиц находится внутри объема V , равна V/Ω . Вероятность того, что n независимых частиц одновременно содержатся в объеме V , равна $(V/\Omega)^n$. Статистический вес равен произведению этого множителя на выражение (163):

$$S(n) = \left(\frac{V}{8\pi^3 h^3} \right)^n \frac{dQ(W)}{dW}. \quad (164)$$

Однако по закону сохранения импульса полный импульс в системе центра инерции должен равняться нулю. Поэтому размерность объема $Q(W)$ уменьшается с $3n$ до $3(n-1)$, и степень множителя $V/8\pi^3 h^3$ в формуле (164) следует также положить равной $n-1$. Например, в случае двух частиц можно использовать формулу (60), подставив туда V вместо Ω :

$$S(2) = \frac{V p^2}{2\pi^2 h^3 (v_1 + v_2)}. \quad (165)$$

Для трех статистически независимых нерелятивистских частиц с суммарным импульсом, равным нулю, имеем:

$$S(3) = \frac{V^2}{16\pi^3 h^6} \left(\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right)^{3/2} T^2, \quad (166)$$

где m_1, m_2, m_3 — массы частиц, а T — их суммарная кинетическая энергия.

Сечение реакции, в которой рождаются данные частицы, равно произведению полного сечения соударения на относительную вероятность рождения данных частиц. Полное сечение соударения при больших энергиях считаем равным сечению π -мезонного облака, которое принимается равным

$$\pi R^2 = \pi \left(\frac{\hbar}{m_\pi c} \right)^2 = 6 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2. \quad (167)$$

В качестве первого примера рассмотрим столкновение двух нуклеонов с энергией, немного превышающей энергетический порог рождения π -мезона. В этом случае статистическая конкуренция идет только между двумя типами состояний. Первый из них соответствует упругому рассеянию, при котором не образуется π -мезонов, а оба нуклеона разлетаются с той же энергией, какую они имели до соударения. Вторая возможность — рождение мезона при столкновении нуклеонов. При этом оба нуклеона и рожденный при столкновении π -мезон разлетаются с очень малой кинетической энергией. Для простоты рассуждений мы не учитываем спина и электрических зарядов обоих нуклеонов и π -мезона.

По формуле (166) статистический вес состояния с тремя частицами равен

$$S(3) = \frac{V^2}{16\pi^3 \hbar^6} \left(\frac{M^2 m_\pi}{2M + m_\pi} \right)^{3/2} T^2 \approx \frac{V^2 M^{3/2} m_\pi^{3/2} T^2}{32 \sqrt{2} \pi^3 \hbar^6}. \quad (168)$$

Величиной m_π в знаменателе мы пренебрегли по сравнению с $2M$. Чтобы получить соответствующее сечение, нужно еще вычислить вероятность конкурирующего процесса — упругого рассеяния. При вычислении этой величины мы сначала не будем учитывать закона сохранения момента количества движения. Тогда статистический вес определяется выражением (165). Поскольку оба нуклеона являются нерелятивистскими, находим:

$$S(2) = \frac{VM^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \sqrt{m_\pi c^2 + T}. \quad (169)$$

Здесь $m_\pi c^2 + T$ — кинетическая энергия двух нуклеонов в системе центра инерции, если при столкновении не образуется π -мезон.

Разобьем теперь полное сечение (167) на части, пропорциональные величинам (168) и (169). Тем самым мы найдем парциальные сечения упругого рассеяния и рождения мезонов. Вблизи порога рождения мезонов выражение (168) очень мало по сравнению с (169); поэтому мы можем считать, что относительная вероятность рождения π -мезона равна отношению выражения (168) к выражению (169). При этом выражение (169) можно упростить, положив в нем $T=0$. Поскольку оба сталкивающиеся нуклеона имеют нерелятивистские скорости, мы можем по формулам (161) и (162) во всех формулах подставить вместо V величину V_0 .

Таким путем находим полное сечение рождения π -мезонов:

$$\sigma_\pi = \pi \left(\frac{\hbar}{m_\pi c} \right)^2 \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(\frac{T}{m_\pi c} \right)^2. \quad (170)$$

При выводе этой формулы мы не принимали во внимание закон сохранения момента количества движения. Однако в рассматриваемом случае нетрудно учесть этот закон. После рождения π -ме-

зона три частицы — два нуклеона и мезон — разлетаются с моментом количества движения, равным нулю, потому что их кинетическая энергия T очень мала. В связи с этим конкуренция с процессом упругого рассеяния имеет место только для состояний с нулевым моментом количества движения. Поэтому статистический вес $S(2)$ имеет величину, меньшую, чем величина (169), ибо в выражении (169) учтены все состояния. Учет только s -состояний, вместо выражения (169), дает:

$$S(2) = \frac{R}{\pi \hbar v} = \frac{1}{\pi m_{\pi} c v} = \frac{1}{2\pi m_{\pi} c} \sqrt{\frac{T}{m_{\pi} c^2 + T}}, \quad (171)$$

где учтено, что для сталкивающихся нуклеонов $\lambda \ll \hbar/m_{\pi}c$.

С другой стороны, полное сечение также должно теперь состоять из вкладов состояний только с нулевым моментом количества движения, поэтому величина его меньше, чем величина (167). Из теории рассеяния известно, что максимально возможное значение сечения рассеяния s -волн равно

$$\pi \lambda^2 = \frac{\pi \hbar^2}{p^2} = \frac{\pi \hbar^2}{M(m_{\pi} c^2 + T)}. \quad (172)$$

Сечение рождения π -мезонов равно произведению выражения (172) на отношение величины (168) к величине (171). Пренебрегая опять величиной T в выражениях (171) и (172) и подставляя значение V из (162), находим:

$$\sigma_{\pi} = \pi \left(\frac{\hbar}{m_{\pi} c} \right)^2 \frac{1}{9\sqrt{2}} \left(\frac{T}{m_{\pi} c^2} \right)^2. \quad (173)$$

Это выражение отличается от выражения (170) только множителем $2/3$, появившимся в результате учета закона сохранения момента количества движения.

Формулу (173) следует сравнить с формулой (108), которая дает сечение того же процесса, вычисленное по теории возмущений. Последнюю формулу также можно упростить, пренебрегая величиной m_{π} в сравнении с M и подставив вместо v значение этой величины у порога рождения π -мезонов, т. е. $v = 2c \sqrt{m_{\pi}/M}$. Как видно, обе формулы дают одинаковую зависимость от энергии. Выражения (173) и (108) совпадают, если постоянная f имеет следующее значение:

$$f = \frac{4 \sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^{9/2}}{3 M m_{\pi}^{5/2} c^{5/2}} = 5,2 \cdot 10^{-62} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{9/2}. \quad (174)$$

Это значение очень близко к величине $f = 6,5 \cdot 10^{-62}$, найденной в § 19. Совпадение еще улучшается при учете заряда частиц. Такое согласие, хотя оно в некоторой степени случайно, все же указывает на то, что статистическое приближение дает возможность рассчитывать физические явления такого типа.

§ 26. Столкновение частиц очень большой энергии

Если два нуклеона сталкиваются с очень большой энергией, статистические методы расчета числа и типа частиц, испущенных при столкновении, можно упростить, заменяя подробное статистическое рассмотрение термодинамическим приближением. Введем температуру τ , до которой нагревается малый объем V при выделении энергии W двух сталкивающихся нуклеонов. При больших значениях τ π -мезоны в объеме V приходят в состояние термодинамического равновесия, аналогичное равновесию абсолютно черного тела с излучением. Если кроме π -мезонов в объеме V образуются нуклеоны и антинуклеоны, можно считать, что эти частицы также достигают состояния равновесия. Все другие процессы, например испускание фотонов, происходят слишком медленно, и их можно не учитывать.

Так как энергия и температура в рассматриваемом случае очень велики, мы можем предположить, что все частицы в системе центра инерции сталкивающихся нуклеонов являются крайне релятивистскими. Поэтому соотношение между энергией и импульсом для каждой частицы будет иметь тот же вид, что и для фотона: $w = cp$. Подобно фотонам, π -мезоны подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна. Поэтому плотность энергии газа π -мезонов, образовавшихся в объеме V , описывается формулой, почти совпадающей с формулой Стефана—Больцмана для излучения черного тела. Единственным отличием является статистический вес: для π -мезонов он равен трем в соответствии с тремя возможными значениями электрического заряда, в то время как для фотонов статистический вес равен двум (две возможные поляризации фотона). Поэтому мы получим плотность энергии π -мезонов, если умножим формулу плотности энергии закона Стефана—Больцмана на $3/2$. Эта плотность равна:

$$\frac{3 \cdot 6,494\tau^4}{2\pi^2\hbar^3c^3} \quad (175)$$

Множитель $6,494 = \pi^4/15$ есть сумма обратных величин четвертых степеней всех целых чисел, умноженная на шесть.

Нуклеоны и антинуклеоны также будут описываться формулами излучения абсолютно черного тела. Плотность энергии этого излучения в крайне релятивистском случае пропорциональна τ^4 . Различие снова будет выражаться в численных коэффициентах. Во-первых, статистический вес для нуклеонов следует взять равным восьми, поскольку каждый нуклеон имеет 2 возможных спиновых ориентации и имеется 4 сорта нуклеонов. Во-вторых, нуклеоны подчиняются принципу Паули, а не статистике Бозе—Эйнштейна. Принимая это во внимание, находим, что плотность энергии нуклеонов равна

$$\frac{4 \cdot 5,682\tau^4}{\pi^2\hbar^3c^3} \quad (176)$$

Здесь

$$5,682 = 6 \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1}/n^4.$$

Температуру τ находим, приравняв полную энергию W сумме выражений (175) и (176), умноженной на V ; используя формулу (161), получим

$$\tau^4 = 0,152 \frac{h^3 c^3 W^2}{M c^2 \Gamma_0}. \tag{177}$$

В крайне релятивистском случае плотности n_{π} и n_N π -мезонов и нуклеонов пропорциональны третьей степени температуры:

$$n_{\pi} = 0,367 \frac{\tau^3}{h^3 c^3}, \quad n_N = 0,855 \frac{\tau^3}{h^3 c^3}. \tag{178}$$

Умножив эти величины на объем V , найдем число π -мезонов и нуклеонов.

В предыдущих рассуждениях не учитывался закон сохранения момента количества движения. Поэтому в результаты необходимо внести соответствующую поправку. Сохранение момента количества движения изменяет статистические веса в сторону увеличения чисел заполнения тех состояний, у которых момент количества движения направлен так же, как у двух первоначально сталкивающихся нуклеонов. Это ведет к двум следствиям. Во-первых, в формулах для числа частиц появляется численный множитель, равный 0,51. Во-вторых, угловое распределение частиц в системе центра инерции становится неизотропным. Большинство частиц разлетается в направлениях, образующих малые углы с направлениями движения двух начальных нуклеонов. Численный учет этих поправок приводит к следующим формулам для числа π -мезонов и нуклеонов, рожденных в столкновении двух нуклеонов очень большой энергии:

$$\text{Число } \pi\text{-мезонов} = 0,091 \left(\frac{V_0 M W^2}{c h^3} \right)^{1/4} = 0,54 \sqrt{\frac{W}{M c^2}} = 0,64 \left(\frac{W'}{M c^2} \right)^{1/4}; \tag{179}$$

$$\text{Число нуклеонов} = 0,21 \left(\frac{V_0 M W^2}{c h^3} \right)^{1/4} = 1,3 \sqrt{\frac{W}{M c^2}} = 1,5 \left(\frac{W'}{M c^2} \right)^{1/4}, \tag{180}$$

где W' — энергия налетающего нуклеона в лабораторной системе.

В экспериментах с фотопластинками наблюдаются только заряженные частицы. Из предыдущего следует, что число заряженных частиц, рожденных при столкновении двух нуклеонов большой энергии, равно

$$1,2 \left(\frac{W'}{M c^2} \right)^{1/4}. \tag{181}$$

Согласно рассмотренной теории, можно ожидать, что при столкновениях нуклеонов большой энергии рождается значительное число антинуклеонов. Число антипротонов равно одной четвертой величины (180), т. е. равно

$$0,38 \left(\frac{W'}{Mc^2} \right)^{1/4}. \quad (182)$$

Однако это выражение справедливо лишь при энергиях налетающей частицы, значительно больших, чем 10^{13} эв. При более низких энергиях температура не настолько велика, чтобы обусловить большую вероятность образования пар нуклеон—антинуклеон. Если с помощью предложенного здесь статистического метода определить вероятность рождения антинуклеонов при меньших энергиях, то окажется, что при энергиях налетающей частицы порядка 10^3 Мэв число образовавшихся антинуклеонов составляет всего несколько тысячных от числа мезонов.

Таким образом, в области энергий между 10^{10} и 10^{12} эв можно не учитывать в первом приближении рождение пар и рассматривать только π -мезонное «черное излучение». Тогда для полного числа рожденных в столкновении π -мезонов получаем вместо выражения (179) следующую формулу:

$$\text{Число } \pi\text{-мезонов} = 1,34 \left(\frac{W}{Mc^2} - 2 \right)^{3/4} \left(\frac{W}{Mc^2} \right)^{-1/4}. \quad (183)$$

Нейтральные π -мезоны составляют треть этой величины.

Недавно были получены серьезные указания на возможное существование тяжелого мезона. Если тяжелые мезоны существуют и если взаимодействие их с нуклеонами сравнимо по величине с взаимодействием π -мезонов с нуклеонами, то тяжелые мезоны также будут рождаться в ядерных столкновениях высокой энергии и при статистическом рассмотрении необходимо будет учитывать и этот процесс как конкурирующий. Однако из-за большой массы тяжелых мезонов при малых энергиях эта конкуренция была бы ничтожна. При очень высоких энергиях значение этого конкурирующего процесса определялось бы спином тяжелых мезонов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

I. Квантование поля излучения

В этом разделе несколько более подробно рассмотрено квантование поля излучения. Мы не будем рассматривать электромагнитного поля вообще, а ограничимся рассмотрением только поля излучения. Под полем излучения понимается электромагнитное поле, которое можно представить в виде суперпозиции поперечных электромагнитных волн. Вообще говоря, электромагнитное поле может включать еще и продольные электромагнитные волны (например, кулоновский потенциал).

Поле излучения, заключенное в полость объема Ω , можно разложить по плоским волнам. Удобно сначала провести разложение по стоячим, а не по распространяющимся волнам. Отдельную стоячую волну будем характеризовать индексом s .

Электромагнитное поле может быть описано с помощью скалярного и векторного потенциалов. Однако в случае поля излучения всегда можно предположить, что только вектор-потенциал \mathbf{A} отличен от нуля. Тогда стоячая волна номера s может быть представлена своим вектор-потенциалом.

$$\mathbf{A}_s = \epsilon_s q_s \cos(\mathbf{f}_s \mathbf{r}). \quad (184)$$

Здесь \mathbf{f}_s — волновой вектор, умноженный на 2π , ϵ_s — единичный вектор, перпендикулярный к \mathbf{f}_s и направленный по поляризации, q_s — мгновенное значение амплитуды стоячей волны. Для упрощения обозначений фаза этой парциальной волны считается равной нулю. Таким образом, поле излучения полностью описывается набором величин q_s , которые могут рассматриваться как координаты физической системы — поля излучения. Амплитуды q_s , в свою очередь, являются функциями времени и для свободного поля излучения изменяются со временем синусоидально с частотой, соответствующей волновому числу f_s .

Электрическое \mathbf{E}_s и магнитное \mathbf{H}_s поля волны (184) вычисляются непосредственно с помощью соотношений

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}; \quad \mathbf{H} = [\nabla \times \mathbf{A}]. \quad (185)$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{E}_s = -\frac{\epsilon_s}{c} \dot{q}_s \cos(\mathbf{f}_s \mathbf{r}); \quad \mathbf{H}_s = [\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{f}_s] q_s \sin(\mathbf{f}_s \mathbf{r}). \quad (186)$$

Полная энергия волны (184) определяется равенством

$$\mathcal{H}_s = \frac{\Omega}{8\pi} \left(\overline{E_s^2} + \overline{H_s^2} \right) = \frac{\Omega}{16\pi c^2} \dot{q}_s^2 + \frac{\Omega f_s^2}{16\pi} q_s^2. \quad (187)$$

Воспользовавшись ортогональностью функций $\cos(\mathbf{f}_s \mathbf{r})$, можно легко показать, что полная энергия поля излучения равна $\sum_s \mathcal{H}_s$,

где суммирование распространено на все значения s . Другими словами, полная энергия поля излучения есть сумма независимых вкладов энергий гармоник.

Формулу (187) можно отождествлять с хорошо известным выражением для энергии осциллятора массы m и частоты ω_s

$$\frac{m}{2} \dot{q}_s^2 + \frac{m}{2} \omega_s^2 q_s^2. \quad (188)$$

Электромагнитная волна, следовательно, ведет себя подобно осциллятору, координата которого равна q_s , а масса и собственная частота равны соответственно

$$m = \frac{\Omega}{8\pi c^2}, \quad \omega_s = c |\mathbf{f}_s|. \quad (189)$$

Приведенного значения ω_s и следовало ожидать для волны с волновым вектором \mathbf{f}_s , распространяющейся со скоростью света. Может показаться странным, что m в формуле (189) не имеет размерности массы. Однако это вызвано тем, что величина q_s не имеет размерности длины.

Теперь мы можем проквантовать поле излучения как набор осцилляторов. Энергия поля излучения определяется формулой (2):

$$W = \sum_s \hbar \omega_s n_s. \quad (190)$$

При этом мы опустили постоянную величину, равную энергии нулевых колебаний. Как указано в тексте, числа n_s интерпретируются как числа фотонов, находящихся в каждом состоянии.

Переменная q_s есть оператор, матричные элементы которого связывают состояния, отличающиеся значениями n_s на ± 1 . Эти матричные элементы можно получить, если подставить в выражение (4) значение m по формуле (189). При этом получаем

$$\begin{aligned} q_s (n_s \rightarrow n_s - 1) &= \sqrt{\frac{4\pi\hbar c^2}{\Omega \omega_s}} \sqrt{n_s}, \\ q_s (n_s \rightarrow n_s + 1) &= \sqrt{\frac{4\pi\hbar c^2}{\Omega \omega_s}} \sqrt{n_s + 1}. \end{aligned} \quad (191)$$

Вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в точке \mathbf{r} есть сумма выражений типа (184), каждое из которых пропорционально q_s . В этой сумме опе-

раторами являются только величины q_s . Следовательно, вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ также является оператором. Заметим, что вектор \mathbf{r} , характеризующий положение в пространстве, не есть оператор. Каждой заданной точке пространства \mathbf{r} соответствует оператор, представляющий вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в этой точке. Матричные элементы оператора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ связывают те же состояния, что и матричные элементы операторов q_s . Поэтому $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ вызывает изменение чисел n_s фотонов на ± 1 . Матричные элементы оператора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ получаются умножением матричных элементов (191) на коэффициент при q_s в выражении для \mathbf{A} , т. е. на $\varepsilon_s \cos(\mathbf{f}_s \mathbf{r})$. В результате находим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r})(n_s \rightarrow n_s - 1) &= \varepsilon_s \cos(\mathbf{f}_s \mathbf{r}) \sqrt{\frac{4\pi\hbar c^2}{\Omega\omega_s}} \sqrt{n_s}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r})(n_s \rightarrow n_s + 1) &= \varepsilon_s \cos(\mathbf{f}_s \mathbf{r}) \sqrt{\frac{4\pi\hbar c^2}{\Omega\omega_s}} \sqrt{n_s + 1}. \end{aligned} \quad (192)$$

Формулы (192) похожи на формулы (5), однако не совпадают с последними. Разница в том, что мы здесь разлагали поле излучения по стоячим, а не по бегущим волнам. Стоячая волна может рассматриваться как наложение двух бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Следовательно, проведенное нами разложение не дает возможности отличить фотоны, движущиеся в направлении вектора \mathbf{f}_s , от фотонов, движущихся в противоположном направлении. Однако разложение по стоячим волнам более просто и имеет то преимущество, что позволяет избежать вычислений с неэрмитовыми операторами.

Рассмотрим теперь квантование поля с помощью разложения по бегущим волнам. В классической физике бегущая волна может быть представлена как наложение двух стоячих волн со сдвигом фаз в четверть волны. Это позволяет предположить, что и в квантовой теории излучения бегущая волна также может быть получена комбинированием в надлежащей форме двух стоячих волн со сдвигом фаз в четверть волны. Мы увидим, что фотоны соответствующие этим двум степеням свободы поля излучения, могут быть разделены на две группы, движущиеся в противоположных направлениях. Упростим обозначения, приписывая индекс 1 осциллятору вида (184), а индекс 2—осциллятору, который представляет стоячую волну, сдвинутую по фазе на четверть волны относительно первой. Вектор-потенциалы этих двух осцилляторов суть

$$\mathbf{A}_1 = \varepsilon q_1 \cos(\mathbf{f}\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}_2 = \varepsilon q_2 \sin(\mathbf{f}\mathbf{r}). \quad (193)$$

Векторы ε и \mathbf{f} не имеют индексов, ибо они одни и те же для обоих осцилляторов. Масса и частота обоих этих осцилляторов также одинаковы и даются формулой (189). Кроме координат q_1 и q_2 двух осцилляторов введем сопряженные импульсы $p_1 = m\dot{q}_1$

и $p_2 = mq_2$. Каждый осциллятор дает в полную энергию поля излучения вклад вида (188). Поэтому вклад двух осцилляторов (193) в полную энергию равен

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{m\omega^2}{2} (q_1^2 + q_2^2), \quad (194)$$

что соответствует уровням энергии

$$\mathcal{H} = \hbar\omega (n_1 + n_2). \quad (195)$$

В формуле (195) снова опущена энергия нулевых колебаний. Оператор q_1 вызывает изменения n на $n \pm 1$; такие же изменения вызываются и оператором p_1 . Матричные элементы q_1 и p_1 суть

$$q_1(n_1 \rightarrow n_1 \pm 1) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{cases} \sqrt{n_1 + 1} \\ \sqrt{n_1} \end{cases}, \quad (196)$$

$$p_1(n_1 \rightarrow n_1 \pm 1) = \pm i \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \begin{cases} \sqrt{n_1 + 1} \\ \sqrt{n_1} \end{cases}.$$

Удобно вместо q_1 и p_1 ввести их линейные комбинации a_1 и a_1^* по определению

$$a_1 = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q_1 + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} p_1, \quad (197)$$

$$a_1^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} q_1 - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} p_1.$$

Эти два оператора — неэрмитовы. Их матричные элементы являются линейной комбинацией матричных элементов (196). Прямое вычисление показывает, что матричные элементы оператора a_1 отличны от нуля только для переходов $n_1 \rightarrow n_1 - 1$, в то время как матричные элементы оператора a_1^* не равны нулю только для переходов $n_1 \rightarrow n_1 + 1$. Из формул (196) и (197) получаем

$$a_1(n_1 \rightarrow n_1 - 1) = \sqrt{n_1}, \quad (198)$$

$$a_1^*(n_1 \rightarrow n_1 + 1) = \sqrt{n_1 + 1}.$$

Операторы a и a^* называются операторами рождения и исчезновения, поскольку оператор a вызывает переходы с поглощением фотона, в то время как оператор a^* вызывает переходы с испусканием фотона. С помощью соотношений (198) легко вывести перестановочное соотношение для этих двух операторов:

$$a_1 a_1^* - a_1^* a_1 = 1, \quad (199)$$

которое эквивалентно перестановочному соотношению $pq - qp = \hbar/i$ для операторов p и q . Из соотношений (198) следует также, что

$$a_1^* a_1 = n_1. \quad (200)$$

Таким образом, оператор $a_1^* a_1$ имеет целые собственные значения, дающие число фотонов осциллятора 1. Формулы (197) можно обратить и выразить, например, q_1 через a_1 и a_1^* :

$$q_1 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_1 + a_1^*). \quad (201)$$

Подобным образом вводятся операторы рождения и исчезновения a_2, a_2^* и для осциллятора 2. Вектор-потенциал \mathbf{A} , учитывающий обе степени свободы, равен сумме \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 . С помощью формул (193) и (201) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 &= \varepsilon \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [(a_1 + a_1^*) \cos(\mathbf{fr}) + (a_2 + a_2^*) \sin(\mathbf{fr})] = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} [(a_+ + a_-) e^{i(\mathbf{fr})} + (a_+^* + a_-) e^{-i(\mathbf{fr})}], \end{aligned} \quad (202)$$

где

$$\begin{aligned} a_+ &= \frac{a_1 - ia_2}{\sqrt{2}}, & a_+^* &= \frac{a_1^* + ia_2^*}{\sqrt{2}}, \\ a_- &= \frac{a_1 + ia_2}{\sqrt{2}}, & a_-^* &= \frac{a_1^* - ia_2^*}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (203)$$

С помощью формулы (200) энергия (195) двух осцилляторов может быть выражена следующим образом:

$$\mathcal{H} = \hbar\omega (a_1^* a_1 + a_2^* a_2). \quad (204)$$

Выразив в этой формуле a_1 и a_2 через a_+ и a_- , получим

$$\mathcal{H} = \hbar\omega (a_+^* a_+ + a_-^* a_-) = \hbar\omega (n_+ + n_-), \quad (205)$$

где

$$n_+ = a_+^* a_+, \quad n_- = a_-^* a_-. \quad (206)$$

Формулы (205) можно прямо получить с помощью определения a_+ и a_- , принимая во внимание, что a_1 и a_1^* коммутируют с a_2 и a_2^* , так как являются функциями координат и импульсов двух различных осцилляторов. Пользуясь определением a_+ и a_- , можно убедиться в том, что эти операторы удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и a_1, a_2 ; например,

$$\begin{aligned} a_+ a_+^* - a_+^* a_+ &= 1, \\ a_+ a_- - a_- a_+ &= 0. \end{aligned} \quad (207)$$

Операторы a_1 и a_2 или любые их линейные комбинации, например a_+ и a_- , вызывают переходы, в которых полное число фотонов уменьшается на единицу. Подобно этому, операторы a_1^* и a_2^* или любые их линейные комбинации, например a_+^* или a_-^* , вызывают переходы, в которых полное число фотонов увеличивается на единицу. Комбинируя матричные элементы (188) и аналогичные выражения для матричных элементов операторов a_2 , a_2^* , находим, что операторы a_+ и a_+^* действуют на квантовые числа n_+ точно так же, как a_1 и a_1^* действуют на квантовые числа n_1 .

Числа n_+ и n_- можно рассматривать как числа фотонов, движущихся соответственно в положительном и отрицательном направлениях. Проще всего убедиться в этом, вычислив полный электромагнитный импульс поля излучения,

$$\mathfrak{M} = \int \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]}{4\pi c} d\Omega. \quad (208)$$

Используя формулы (185), находим в результате крайне простых вычислений:

$$\mathfrak{M} = \eta \frac{\hbar \omega}{c} (n_+ - n_-), \quad (209)$$

где η — единичный вектор в направлении распространения. Эта формула вместе с формулой (205) указывают на то что каждому фотону n_+ ставится в соответствие энергия $\hbar \omega$ и импульс $\hbar \omega / c$ в положительном направлении. Каждому фотону n_- ставится в соответствие та же энергия и противоположно направленный импульс.

Вектор-потенциал \mathbf{A} (202) имеет те же операторные свойства, что и операторы рождения и исчезновения, через которые он выражен. В частности, оператор $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ содержит матричные элементы рождения и исчезновения фотонов n_+ . Эти матричные элементы равны произведению матричных элементов a_+ и a_+^* на коэффициенты при операторе a_+ и a_+^* в выражении \mathbf{A} (202):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r})(n_+ \rightarrow n_+ - 1) &= \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} e^{i\mathbf{r}(\mathbf{r})} \sqrt{n_+}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r})(n_+ \rightarrow n_+ + 1) &= \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} e^{-i(\mathbf{r})} \sqrt{n_+ + 1}. \end{aligned} \quad (210)$$

Эти выражения идентичны формулам (5) и переходят в последние при подстановке в (210) значения m по формуле (189).

II. Вторичное квантование с учетом принципа Паули

В этом разделе будет обсуждена полевая теория электронов или любых других частиц, подчиняющихся запрету Паули. Для простоты мы не будем учитывать спин и ограничимся нереляти-

вистским рассмотрением. В этом случае поле ψ , квантами которого являются электроны, удовлетворяет уравнению Шредингера (20)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \psi. \quad (211)$$

Наряду с этим уравнением следует рассматривать также комплексно-сопряженное уравнение

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \psi^*. \quad (212)$$

Плотность энергии поля ψ должна обладать тем свойством, что интеграл от нее по объему Ω не зависит от времени. Это является следствием уравнений (211) и (212).

Оказывается, что подходящим выражением, обладающим этим свойством, является $(\hbar^2/2m) \nabla \psi^* \nabla \psi$. Следовательно, полная энергия поля определяется выражением

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla \psi^* \nabla \psi d\Omega = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^* \nabla^2 \psi d\Omega. \quad (213)$$

Заметим, что оба эти интегральных выражения могут преобразовываться одно в другое интегрированием по частям. При этом предполагается, что ψ и ψ^* на больших расстояниях ведут себя таким образом, что поверхностные интегралы, появляющиеся при интегрировании по частям, исчезают. Предположим, что $\psi(\mathbf{r})$ и $\psi^*(\mathbf{r})$, заданные в данной точке пространства \mathbf{r} , суть операторы. Тогда ψ и ψ^* , вообще говоря, подчиняются некоммутативному закону умножения.

Из общих принципов квантовой механики следует, что любая физическая величина A , представленная оператором, не зависящим явно от времени, меняется со временем, согласно дифференциальному уравнению

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar} (\mathcal{H}A - A\mathcal{H}), \quad (214)$$

где \mathcal{H} —оператор полной энергии системы. Этим свойством должны обладать и операторы $\psi(\mathbf{r})$ и $\psi^*(\mathbf{r})$, и это можно использовать для определения производных по времени от этих операторов. С другой стороны, эти производные можно найти из уравнений (211) и (212). Путем сравнения получаем

$$\nabla^2 \psi = \frac{2m}{\hbar^2} (\mathcal{H}\psi - \psi\mathcal{H}), \quad \nabla^2 \psi^* = -\frac{2m}{\hbar^2} (\mathcal{H}\psi^* - \psi^*\mathcal{H}). \quad (215)$$

Эти уравнения, в которые следует подставить для \mathcal{H} выражение (213), налагают ограничения на выбор перестановочных соотношений для ψ и ψ^* .

Можно легко убедиться в том, что существуют два простых, удовлетворяющих этому требованию вида перестановочных соотношений для величин поля, взятых в точках \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Один из них следующий:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}') + \psi(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}) &= 0, \\ \psi^*(\mathbf{r})\psi^*(\mathbf{r}') + \psi^*(\mathbf{r}')\psi^*(\mathbf{r}) &= 0, \\ \psi(\mathbf{r})\psi^*(\mathbf{r}') + \psi^*(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}) &= \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}).\end{aligned}\quad (216)$$

Другой отличается от (216) заменой знаков плюс на минус. Очевидно, вторая возможность повела бы к квантованию по Бозе—Эйнштейну, рассмотренному в приложении, раздел I; поэтому мы не будем здесь ее рассматривать. Соотношения (216), напротив, удовлетворяют принципу Паули.

Будем считать, что операторы ψ и ψ^* подчиняются правилам перестановок (216). Говорят, что операторы, подчиняющиеся перестановочным соотношениям (216), антикоммутируют, если взяты для двух различных точек пространства.

Чтобы избежать формальной трудности, связанной с тем, что имеется бесконечное множество операторов $\psi(\mathbf{r})$ и $\psi^*(\mathbf{r})$, соответствующих континууму точек пространства, разложим ψ и ψ^* по полной системе собственных функций $u_s(\mathbf{r})$. Ограничимся тем случаем, когда собственные функции u_s суть нормированные плоские волны.

$$u_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{(i/\hbar)(\mathbf{p}_s \mathbf{r})}. \quad (217)$$

В тех случаях, когда это не так, следует выбрать другую систему u_s . Например, если на электрон действуют независимые от времени внешние силы, в качестве u_s можно взять систему собственных функций задачи Шредингера в данном поле внешних сил.

Так или иначе, разложим $\psi(\mathbf{r})$ и $\psi^*(\mathbf{r})$ следующим образом:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_s a_s u_s(\mathbf{r}), \quad \psi^*(\mathbf{r}) = \sum_s a_s^* u_s^*(\mathbf{r}). \quad (218)$$

Отметим, что в этих формулах $u_s(\mathbf{r})$ есть обычное число (а не оператор). Коэффициенты a_s и a_s^* , напротив, суть не коммутирующие между собой операторы. Свойства этих операторов можно определить, подставив выражения (218) в соотношения (216) и воспользовавшись ортогональностью и полнотой системы функций u_s . Прделав все это, мы получаем

$$\begin{aligned}a_s a_k + a_k a_s &= 0, \\ a_s^* a_k^* + a_k^* a_s^* &= 0, \\ a_s a_k^* + a_k^* a_s &= \delta_{sk}.\end{aligned}\quad (219)$$

Эти перестановочные соотношения для операторов a и a^* эквивалентны соотношениям (216) для операторов ψ и ψ^* . Теперь задача состоит в том, чтобы найти явные выражения для a и a^* , удовлетворяющие соотношениям (219). Заметим прежде всего, что первое соотношение (219) при $k = s$ дает $a_s^2 = 0$; точно так же из второго соотношения получаем $a_s^{*2} = 0$. Однако отсюда не следует, что a_s и a_s^* равны нулю. Операторы a_s и a_s^* не являются эрмитовыми, поэтому обращение в нуль их квадратов не служит доказательством того, что сами эти операторы равны нулю. Величина $n_s = a_s^* a_s$, представляющая собой произведение двух эрмитово сопряженных операторов, действительна. Легко показать, что n_s может принимать значение только 0 и 1. Для этого напишем выражение для квадрата величины n_s и воспользуемся соотношениями (219). В результате получим

$$\begin{aligned} n_s^2 &= (a_s^* a_s)^2 = a_s^* a_s a_s^* a_s = a_s^* (1 - a_s^* a_s) a_s = \\ &= a_s^* a_s - a_s^{*2} a_s^2 = a_s^* a_s = n_s. \end{aligned}$$

Поскольку $n_s^2 = n_s$ и, кроме того, n_s , по определению, есть эрмитов оператор, единственно возможными значениями для n_s будут 0 и 1. Из соотношений (219) следует также, что n_s и n_k коммутируют между собой. Это позволяет нам определить все величины n_s как набор квантовых чисел (0 или 1). Оказывается, что n_s есть число электронов в квантовом состоянии, определяемом собственной функцией u_s . Величина n_s может принимать только значения 0 и 1, что является отражением принципа Паули. Можно следующим образом показать, что n_s действительно дает число электронов в состоянии s (т. е., что n_s есть число заполнения состояния s). Примем для собственных функций u_s частное выражение (217) и подставим разложение (218) в выражение для энергии (213). Учитывая ортогональность и нормировку функций u_s , а также соотношение $\nabla^2 u_s = -(p_s/\hbar)^2 u_s$, находим

$$\mathcal{H} = \sum_s \frac{p_s^2}{2m} a_s^* a_s = \sum_s \omega_s a_s^* a_s = \sum_s \omega_s n_s, \quad (220)$$

где величина

$$\omega_s = \frac{p_s^2}{2m} \quad (221)$$

есть кинетическая энергия электрона с импульсом p_s . Формула (220) есть выражение полной энергии электронного поля, когда в состоянии s с энергией ω_s находятся n_s электронов. Такой же результат мы получили бы и в случае, когда на электроны действуют внешние силы.

Теперь следует найти явный вид операторов a_s и a_s^* , чтобы представить состояния поля с помощью чисел заполнения. Рассмотрим

сначала одно какое-нибудь значение s . В этом случае имеются только два возможных состояния: $n_s = 0$ и $n_s = 1$. Таким образом, матрицы, представляющие операторы a_s и a_s^* , будут иметь две строки и два столбца.

Рассмотрим следующие три эрмитовых оператора:

$$\xi = a_s^* + a_s, \quad \eta = i(a_s - a_s^*), \quad \zeta = 2a_s^*a_s - 1.$$

Из перестановочных соотношений (219) следует, что эти три оператора имеют те же свойства, что и операторы спина Паули: $\xi^2 = \eta^2 = \zeta^2 = 1$ и, кроме того, любые два из операторов ξ , η , ζ антикоммутируют между собой. Поэтому эти три оператора можно представить с помощью известных матриц Паули:

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В этом представлении оператор ζ диагонален. Его собственные значения (± 1) соответствуют двум собственным значениям (1 и 0) оператора $n_s = a_s^*a_s = (\zeta + 1)/2$.

Из приведенного матричного представления для ξ и η находим матрицы a_s и a_s^* :

$$a_s = \frac{1}{2} (\xi - i\eta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_s^* = \frac{1}{2} (\xi + i\eta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим еще раз, что матрицы a_s и a_s^* — неэрмитовы. Только один элемент матрицы a_s отличен от нуля. Этот элемент соответствует переходу $n_s = 1 \rightarrow n_s = 0$ (переход с исчезновением электрона) и равен единице. Матрица a_s^* также содержит только один элемент, равный единице, все остальные элементы этой матрицы равны нулю. Неисчезающий элемент матрицы a_s^* соответствует переходу с рождением электрона ($n_s = 0 \rightarrow n_s = 1$).

К аналогичным результатам мы приходим и в том случае, когда s может принимать много значений. Можно показать, что матричные элементы оператора a_s отличны от нуля только для переходов, в которых n_s уменьшается от $n_s = 1$ до $n_s = 0$, а все остальные числа заполнения не меняются. Далее, найдено, что если этот матричный элемент не исчезает, то он равен $(-1)^l$, где l — число занятых состояний с номерами, меньшими s . Оператор a_s называется оператором исчезновения, поскольку он вызывает переходы, в которых электрон исчезает. Оператор a_s^* оказывает противоположное действие и называется оператором рождения. Единственный неисчезающий матричный элемент этого оператора связывает состояния, в которых все числа заполнения, кроме n_s , не меняются, а n_s увеличивается от нуля до единицы. Этот матричный элемент также равен $(-1)^l$. Прямым вычислением можно убедиться в том, что матрицы a_s и a_s^* , определенные таким образом, удовлетворяют перестановочным соотношениям (219).

В соответствии с разложением (218) ψ и ψ^* суть линейные комбинации операторов a_s и a_s^* , причем коэффициенты при a_s и a_s^* не являются операторами. С помощью формулы (218) можно сразу написать матричные элементы оператора $\psi(\mathbf{r})$. Эти матричные элементы связывают состояния, в которых только одно из чисел заполнения, например n_s , меняется с единицы на нуль, в то время как все остальные числа заполнения не меняются. Выражение для матричного элемента, соответствующего такому переходу, следует из предыдущего определения матричных элементов оператора a_s и имеет вид

$$(-1)^l u_s(\mathbf{r}). \quad (222)$$

Подобным же образом оператор $\psi^*(\mathbf{r})$ имеет матричные элементы, соответствующие переходам, в которых одно из чисел заполнения, например n_s , меняется с нуля на единицу, а все остальные числа заполнения остаются постоянными. Этот матричный элемент имеет вид

$$(-1)^l u_s^*(\mathbf{r}). \quad (223)$$

Формулы (222) и (223) соответствуют матричному элементу (22). С выбором для собственных функций выражения (217) это дает матричный элемент (21).

III Измеримость полей

В этом приложении мы кратко обсудим физический смысл компонент поля с точки зрения измерения в квантовой механике. Обычно предполагается, что если A и B —две действительные физические величины, представляемые эрмитовыми операторами, то их одновременное измерение возможно только в том случае, когда операторы A и B коммутируют между собой.

Например, в случае электромагнитного поля можно предполагать, что отдельно одна из компонент электрического поля в заданной точке пространства может быть измерена. Однако одновременное измерение всех компонент электрического и магнитного полей было бы невозможно, поскольку некоторые из этих компонент не коммутируют между собой. Трудности могут возникнуть даже при измерении одной компоненты электромагнитного поля в данной точке пространства, потому что среднее значение величины компоненты поля бесконечно велико вследствие энергии нулевых колебаний осцилляторов поля. Найдено, что энергия нулевых колебаний компонент поля высокой частоты дает бесконечную напряженность поля даже в отсутствие фотонов. Эту трудность можно частично обойти, если измерять компоненты поля

с помощью устройства, которое теряет чувствительность при очень больших частотах. Например, вместо измерения электрического поля в данной точке пространства можно измерять среднее значение этого поля в некотором конечном объеме, размеры которого малы по сравнению с интересующей нас длиной волны. Во многих случаях ограничениями, которые налагаются на измерения компонент поля соотношениями неопределенности для этих компонент, можно пренебречь. Это относится, например, к полю, излучаемому радиостанцией. В этом случае число фотонов настолько велико, что все числа заполнения n_s являются большими. Поэтому мы здесь близки к классическому пределу, где влияние соотношений неопределенности мало.

Скалярное поле φ , рассмотренное в § 3, имеет аналогичные свойства. Если не учитывать нулевых колебаний, которые можно рассматривать так же, как и в случае электромагнитного поля, следует предположить, что поле φ в заданной точке пространства измеримо. Однако одновременное измерение φ и $\dot{\varphi}$ в данной точке пространства невозможно, поскольку две эти величины не коммутируют между собой. Это ограничение становится несущественным, когда число частиц поля настолько велико, что приближается к классическому пределу.

Из операторного определения компонент поля, кванты которого подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, следует, что две любые компоненты поля в двух различных точках пространства \mathbf{r} и \mathbf{r}' представляются коммутирующими операторами. Поэтому не имеется добавочных трудностей при одновременном измерении компонент поля в двух различных точках.

Для полей, кванты которых подчиняются принципу Паули, имеет место другое положение. В этом случае, как было показано в приложении, раздел II, компоненты поля в двух различных точках пространства антикоммутируют, а не коммутируют. Поэтому измерение компоненты поля в одной какой-нибудь точке пространства несовместно с одновременным измерением той же или другой компоненты поля в иной точке пространства. Если бы амплитуды поля имели физический смысл, отмеченное обстоятельство противоречило бы теории относительности, так как это означало бы, что возмущение, вносимое при измерении в одной точке пространства, распространяется во все стороны с бесконечной скоростью.

Все это заставляет удивляться, что теория полей, удовлетворяющих принципу Паули, представляет нечто большее, чем математическую абстракцию. Дело спасает то обстоятельство, что во всех выражениях, имеющих физический смысл, например в выражениях плотностей энергии и заряда, амплитуды таких полей всегда входят в виде произведения четных чисел сомножителей. Можно

показать¹⁾, что такие произведения, взятые в различных точках пространства, всегда коммутируют между собой. Это является следствием антикоммутиационных соотношений для компонент поля. Таким образом, противоречие с теорией относительности устраняется.

IV. Релятивистская инвариантность

В этом приложении будут кратко рассмотрены некоторые соображения относительно релятивистской инвариантности полевых теорий. Прежде всего следует выяснить те стороны вопроса, которые могут повести к недоразумениям. В теории относительности энергия и импульс суть временная и пространственные компоненты 4-вектора. Поэтому можно было бы предполагать, что теореме сохранения импульса, рассмотренной в § 7, соответствует аналогичная теорема, относящаяся к энергии. Однако это не так. В квантовой механике нет ограничения, согласно которому неисчезающий матричный элемент может связывать только состояния с равной энергией. Это отсутствие симметрии между энергией и импульсом в матричном элементе энергии взаимодействия не есть противоречие с требованием релятивистской инвариантности. Все дело тут в том, что используется метод Гамильтона. Гамильтониан, при введении которого отправной точкой является энергия, и уравнение Шредингера, дающее возможность рассмотреть одновременные события в различных точках пространства, — эти понятия формально релятивистски инвариантны. Однако в такой схеме взаимодействия, имеющие физический смысл, таковы, что конечные результаты удовлетворяют требованиям релятивистской инвариантности.

Релятивистски инвариантное обобщение уравнения Шредингера было проведено Томонага. Использование этого уравнения дает явные преимущества при исследовании релятивистских

¹⁾ Пусть $\alpha(\mathbf{r})$, $\beta(\mathbf{r})$ — две компоненты поля, удовлетворяющие следующим антикоммутиационным соотношениям:

$$\alpha(\mathbf{r}_1)\alpha(\mathbf{r}_2) + \alpha(\mathbf{r}_2)\alpha(\mathbf{r}_1) = 0,$$

$$\beta(\mathbf{r}_1)\beta(\mathbf{r}_2) + \beta(\mathbf{r}_2)\beta(\mathbf{r}_1) = 0,$$

$$\alpha(\mathbf{r}_1)\beta(\mathbf{r}_2) + \beta(\mathbf{r}_2)\alpha(\mathbf{r}_1) = 0,$$

где \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 — две различные точки пространства. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{r}_1)\beta(\mathbf{r}_1)\alpha(\mathbf{r}_2)\beta(\mathbf{r}_2) &= -\alpha(\mathbf{r}_1)\alpha(\mathbf{r}_2)\beta(\mathbf{r}_1)\beta(\mathbf{r}_2) = \\ &= \alpha(\mathbf{r}_2)\alpha(\mathbf{r}_1)\beta(\mathbf{r}_1)\beta(\mathbf{r}_2) = -\alpha(\mathbf{r}_2)\alpha(\mathbf{r}_1)\beta(\mathbf{r}_2)\beta(\mathbf{r}_1) = \\ &= \alpha(\mathbf{r}_2)\beta(\mathbf{r}_2)\alpha(\mathbf{r}_1)\beta(\mathbf{r}_1), \end{aligned}$$

откуда следует, что $\alpha(\mathbf{r}_1)\beta(\mathbf{r}_1)$ коммутирует с $\alpha(\mathbf{r}_2)\beta(\mathbf{r}_2)$.

свойств полей и взаимодействий между полями. Однако не это было нашей главной задачей, поэтому мы пользовались более привычным уравнением Шредингера.

Иногда удобнее описывать свойства полей, исходя не из гамильтониана, а из лагранжиана. По общим правилам механики, можно затем перейти от лагранжиана к гамильтониану. Преимущество такого метода в том, что плотность лагранжиана L , представляющая из себя релятивистски-инвариантную комбинацию компонент различных полей, а также их пространственных или временных производных, автоматически дает релятивистски инвариантные уравнения поля. В этом случае уравнения поля получаются из вариационной задачи

$$\delta \int L d\Omega dt = 0. \quad (224)$$

Поскольку плотность лагранжиана L и элемент четырехмерного объема $d\Omega dt$ релятивистски инвариантны, соответствующие уравнения поля также будут релятивистски инвариантны.

При введении нового варианта взаимодействия, ведущего к той или иной реакции между элементарными частицами, к лагранжиану, как правило, добавляется новый член, содержащий произведения амплитуд полей и комплексно-сопряженных им величин. Произведения составлены так, чтобы получить данную комбинацию операторов рождения и исчезновения. Иногда вместо амплитуд поля берутся их производные. При этом требование релятивистской инвариантности ограничивает выбор лагранжиана взаимодействия.

Полезно напомнить, какие трансформационные свойства имеют выражения, составленные из четырехкомпонентных волновых функций Дирака. Обычно используются билинейные комбинации дираковских функций, преобразующиеся как скаляры, псевдоскаляры, векторы, псевдовекторы и антисимметрические тензоры. Ниже приводятся эти комбинации:

$$S = \tilde{\psi} \psi \Psi \quad (\text{скаляр}), \quad (225)$$

$$P_s = \tilde{\psi} \beta \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \Psi \quad (\text{псевдоскаляр}); \quad (226)$$

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \tilde{\psi} \alpha_1 \Psi, & V_2 &= \tilde{\psi} \alpha_2 \Psi, \\ V_3 &= \tilde{\psi} \alpha_3 \Psi, & V_0 &= \tilde{\psi} \Psi \end{aligned} \right\} (4\text{-вектор}); \quad (227)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{c_1} &= \tilde{\psi} \frac{\alpha_2 \alpha_3}{i} \Psi, & P_{c_2} &= \tilde{\psi} \frac{\alpha_3 \alpha_1}{i} \Psi, \\ P_{c_3} &= \tilde{\psi} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{i} \Psi, & P_{c_0} &= \tilde{\psi} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{i} \Psi \end{aligned} \right\} (\text{псевдо-4-вектор}); \quad (228)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{23} &= \tilde{\psi} \frac{\beta_{23}^{\alpha_2} \alpha_3}{i} \Psi, & T_{31} &= \tilde{\psi} \frac{\beta_{31}^{\alpha_3} \alpha_1}{i} \Psi, \\ T_{12} &= \tilde{\psi} \frac{\beta_{12}^{\alpha_1} \alpha_2}{i} \Psi, & T_{10} &= \tilde{\psi} \frac{\beta_{10}^{\alpha_1}}{i} \Psi, \\ T_{20} &= \tilde{\psi} \frac{\beta_{20}^{\alpha_2}}{i} \Psi, & T_{30} &= \tilde{\psi} \frac{\beta_{30}^{\alpha_3}}{i} \Psi \end{aligned} \right\} \text{(антисимметри-} \\ & & & \text{ческий тензор)}. \quad (229)$$

Следует отметить, что трансформационные свойства этих выражений не зависят от того, являются ли ψ и Ψ одинаковыми или же различными полями. Например, под ψ можно понимать нейтронное поле N , а под Ψ — протонное поле P .

V. Соотношения между константами взаимодействия

Шесть процессов взаимодействия с константами связи e , e_2 , e_3 , g_1 , g_2 , g_3 рассматривались в тексте как первичные и независимые взаимодействия. Однако некоторые из них могут являться следствием других.

Например, взаимодействие (52) может быть следствием взаимодействия Юкава (38) и взаимодействия (43). В самом деле, представим себе следующую реакцию:



Первый переход — превращение μ -мезона в π -мезон и антинейтрино — эквивалентен второй реакции (43), причем вместо нейтрино в правой части указанной реакции мы поставили антинейтрино в левой части. Матричный элемент первого перехода в реакции (230) можно получить из формулы (45), если вместо ω_s подставить ее порядок величины, т. е. $m_\pi c^2$. При этом получаем

$$\frac{e_3 \hbar}{\sqrt{2\Omega m_\pi}}. \quad (231)$$

Второй переход в реакции (230) есть процесс Юкава (38б). Порядок величины соответствующего этому переходу матричного элемента дается формулой (42), где вместо ω_s снова следует подставить $m_\pi c^2$. При этом получаем

$$\frac{e_2 \hbar}{\sqrt{2\Omega m_\pi}}. \quad (232)$$

Энергия промежуточного состояния реакции (230) превышает энергию начального состояния. По порядку величины разность энергий равна $(m_\pi - m_\mu)c^2$, т. е. разности энергий покоя π - и μ -мезонов. По формуле (61) эффективный матричный элемент, соответствующий переходу из начального в конечное состояние

реакции, по порядку величины равен

$$\frac{e_2 e_3 \hbar^2}{2\Omega m_\pi (m_\pi - m_\mu) c^2} \cdot \quad (233)$$

Реакция, по существу тождественна переходу (52) и отличается от последнего только тем, что в реакции (230) участвует нейтрино, а не антинейтрино. По (54) матричный элемент перехода (52) равен g_3/Ω . Сравнивая это выражение с (233), получаем

$$g_3 = \frac{e_2 e_3 \hbar^2}{2m_\pi (m_\pi - m_\mu) c^2} \cdot \quad (234)$$

Это соотношение дает возможную связь между e_2 , e_3 , g_3 . Приняв $e_2 = 10^{-8}$, $e_3 = 1,2 \cdot 10^{-15}$, находим из (234) $g_3 = 4,9 \cdot 10^{-49}$. Это значение g_3 не намного отличается от найденного в § 16 значения $1,3 \cdot 10^{-49}$.

Предыдущие рассуждения можно обратить. Можно предположить, что взаимодействие Юкава и взаимодействие (52) являются первичными, и затем вычислить величину взаимодействия, подобного (43), как следствие реакции



В этой реакции первый переход есть видоизмененный процесс (38б), где вместо протона в правой части равенства стоит антипротон в левой. Второй переход в (235) получается из (52), если там произвести такую же замену. Пользуясь (235), можно выразить постоянную взаимодействия e_3 через e_2 и g_3 . Для этого следует по (61) вычислить эффективный матричный элемент перехода (61). Так как сумма по промежуточным состояниям в данном случае расходится, она вычисляется с помощью процедуры обрезания, рассмотренной в § 24. Окончательно находим:

$$e_3 = \frac{e_2 g_3 M^2 c}{12\pi^2 \hbar^3} \cdot \quad (236)$$

При $e_2 = 10^{-8}$, $g_3 = 1,3 \cdot 10^{-49}$ эта формула дает $e_3 = 8 \cdot 10^{-16}$, т. е. примерно в полтора раза меньше, чем значение e_3 , найденное в § 13 [формула (69)].

Отметим следующую трудность. Если проведенное рассмотрение реакции (235) верно, то можно ожидать, что существует также процесс



Второй переход в (237) подобен переходу β -взаимодействия (4б), но с той разницей, что протон заменен антипротоном в противоположной части равенства. Реакция (237) вела бы к спонтанному распаду π -мезона на электрон и нейтрино; такой распад

конкурировал бы с распадом (235). Однако экспериментально распад π -мезона на электрон и нейтрино не наблюдается. Расчеты по развитому здесь методу приводят к заключению, что реакция (237) должна была бы идти с несколько большей вероятностью, чем реакция (235), в то время как на опыте вероятность этой реакции, по меньшей мере, в 10 раз меньше и, возможно, равна нулю. Возможно поэтому, что имеет место некое правило отбора, которое или исключает возможность реакции (237), или значительно уменьшает ее вероятность.

Вскоре после создания своей теории ядерных сил Юкава предложил теоретическое объяснение β -взаимодействия (46). По Юкава, β -взаимодействие является следствием процесса, который в наших обозначениях можно записать так:

$$N \rightarrow P + \pi^- \rightarrow P + e + \bar{\nu}. \quad (238)$$

При этом предполагается, что π -мезон может распадаться на электрон и антинейтрино:

$$\pi^- \rightarrow e + \bar{\nu}. \quad (239)$$

Таким образом, в реакции (238) второй переход есть распад по (239) виртуального π -мезона, который часть времени находится в окрестности нейтрона.

Если бы процесс (239) существовал в действительности, то расчет реакции (238) привел бы к соотношению между постоянной β -взаимодействия g_1 , постоянной Юкава e_2 и вероятностью реакции (239). Однако экспериментально известная верхняя граница вероятности (239) слишком мала, чтобы считать реакцию (239) удовлетворительным объяснением β -переходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бете Г., Лекции по теории ядра, М., 1949.
2. Вентцель Г., Введение в квантовую теорию волновых полей, М.—Л., 1947.
3. Гайтлер В., Квантовая теория излучения, М.—Л., 1940.
4. Паули В., Мезонная теория ядерных сил, М., 1947.
5. Паули В., Релятивистская теория элементарных частиц, М., 1947.
6. Fermi E., Quantum Theory of Radiation, Rev. Mod. Phys., 4, 87 (1932).
7. Konopinski E. J., Beta Decay, Rev. Mod. Phys., 15, 209 (1943).
8. Rosenfeld L., Nuclear Forces, N. Y., 1948.
9. Schwinger J., Quantum Electrodynamics, Phys. Rev., 74, 1439 (1948); 75, 651 (1949); 76, 790 (1949).
10. Tiomno J., Wheeler J. A., Spectrum of Electrons from Meson Decay, Rev. Mod. Phys., 21, 144 (1949).

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакции	3
Предисловие автора	5
Глава I. Кванты поля как частицы	7
1. Введение	7
2. Электромагнитное поле	10
3. Поле скалярных частиц, обладающих массой покоя	14
4. Поле заряженных скалярных частиц	16
5. Частицы, подчиняющиеся принципу Паули	17
Глава II. Взаимодействие полей	21
6. Общие формы взаимодействия	21
7. Сохранение импульса	25
8. Взаимодействие Юкава	26
9. Другие взаимодействия	30
10. Вычисление вероятностей переходов	34
11. Параметры разложения	36
Глава III. Константы взаимодействия	39
12. Константы электромагнитного взаимодействия и взаимодействия Юкава	39
13. Распад π -мезона как прямой процесс	40
14. Бета-взаимодействие	41
15. Спонтанный распад μ -мезона	46
16. Вынужденный распад μ -мезона	48
Глава IV. π-мезоны, нуклеоны и антинуклеоны	52
17. Теория Юкава ядерных сил	52
18. Рождение π -мезонов при столкновениях нуклеонов	56
19. Влияние взаимодействия нуклеонов	59
20. Рождение π -мезонов γ -квантами	65
21. Захват отрицательных π -мезонов протонами	67
22. Рассеяние π -мезонов на нуклонах	71
23. Антинуклеон. Аннигиляция	73
24. Распад нейтрального π -мезона на два фотона	77
25. Статистическая теория рождения мезонов	79
26. Столкновение частиц очень большой энергии	84
Приложение	87
I. Квантование поля излучения	87
II. Вторичное квантование с учетом принципа Паули	92
III. Измеримость полей	97
IV. Релятивистская инвариантность	99
V. Соотношения между константами взаимодействия	101
Литература	103

Редактор К. П. ГУРОВ
Технический редактор Б. М. Ильин

Сдано в производство 6/V 1952 г. Подписано к печати 16/VI 1952 г. А-04656.
Бумага 60×921/16=3,25 бум. л., 6,5 печ. л. Уч.-над. л. 6,6. Изд. № 2/1704.
Цена 6 р. 10 к. (по прейскуранту 1952 г.). Заказ 286.

16-я типография Главлитиздата при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный пер., 9.