

Учебно-научный центр  
Объединенного института ядерных исследований

Р. В. Джолос

*Модели атомного ядра*

Учебно-методическое пособие

Дубна 2012

Р. В. Джолос

Модели атомного ядра

### Аннотация

Данный курс лекций является введением в теорию структуры ядра. В нем излагаются основные понятия и модели, знание которых необходимо для качественного понимания свойств основных и возбужденных состояний ядер и для проведения простейших расчетов характеристик ядра. Это учебно - методическое пособие предназначено для студентов старших курсов, изучающих ядерную физику.

R.V. Jolos

Models of Atomic Nucleus

### Abstract

This course of lectures is an introduction to the theory of nuclear structure. It presents the main concepts and models the knowledge of which is necessary for a qualitative understanding of the properties of the ground and the excited nuclear states and for carrying out the elementary calculations of the characteristics of atomic nuclei. This course of lectures is intended for students studying nuclear physics.

# 1. Введение

Для ядерной физики низких энергий характерна тесная связь эксперимента и теории. Появление новых возможностей для проведения экспериментальных исследований позволяло получать прежде не доступную информацию о свойствах атомных ядер. Это порождало интерес к теоретическому исследованию нового класса явлений и в конечном итоге приводило к разработке новых теоретических методов описания свойств атомных ядер. В свою очередь, прорыв в разработке теории ядра инициировал новые экспериментальные исследования. Так было при появлении теории парных корреляций нуклонов в атомных ядрах, так было и после предсказания существования супердеформированных состояний быстровращающихся ядер.

Другая особенность ядерной физики – тесная связь с такими физическими дисциплинами, как астрофизика и теория эволюции звезд, физика частиц, атомная физика и физика твердого тела. Эта связь ведет к появлению новых направлений исследований на стыках различных дисциплин, что оказывает обратное влияние на собственно ядерно-физические исследования.

Атомное ядро – многочастичная система. Поэтому в свойствах атомных ядер уже при небольших энергиях возбуждения наблюдаются коллективные явления, вызванные согласованным движением большого числа частиц. Например, колебательные и вращательные возбуждения ядер, деление ядер и т.д. В то же время число нуклонов в атомных ядрах не настолько велико, чтобы можно было ограничиться чисто статистическим рассмотрением. Наряду с коллективными эффектами в свойствах атомных ядер проявляются и чисто одночастичные эффекты, для описания которых необходимо рассматривать независимое движение отдельных нуклонов в потенциале ядра, описывающем усредненное воздействие нуклонов ядра на одну выделенную частицу. Так возникла концепция самосогласованного потенциала ядра, сыгравшая важную роль в развитии теоретической ядерной физики. А необходимость рас-

смаатривать как коллективные так и одночастичные свойства говорит о том, что флуктуации среднего поля должны быть учтены при разработке моделей ядра.

## 2. Основные характеристики ядер

Начнем рассмотрение с краткого описания глобальных свойств ядра, таких как его составные элементы, размеры, плотность, энергия связи, время жизни. Протоны и нейтроны, из которых состоит атомное ядро, связаны сильным взаимодействием, так что в результате образуется компактная система, радиус которой  $R_0$  равен  $R_0 = r_0 A^{1/3}$ , где  $r_0 \approx 1.2$  ферми (1 ферми =  $10^{-13}$  см), а  $A$  – суммарное число протонов и нейтронов в ядре. Величина  $A$  принимает значения от нескольких единиц (легкие ядра) до более чем 200 нуклонов. Плотность распределения нуклонов в ядре характеризуется приблизительно постоянным значением внутри ядра. Однако в поверхностной области плотность резко спадает до нуля, изменяясь от 0.9 до 0.1 ее величины в центре ядра на интервале порядка 2 ферми. Очень часто используется следующее выражение для плотности распределения нуклонов в ядре:

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}, \quad (1)$$

где  $\rho_0$  – плотность в центре ядра, равная  $\approx 0.17$  ферми $^{-3}$ , а величина  $a$  называется параметром диффузности и принимает значения в интервале 0.5-0.7 ферми. Таким образом, в среднем радиус ядра плавно растет с увеличением массового числа, пропорционально  $A^{1/3}$ . Однако измерения среднеквадратичных радиусов ядер, удаленных от линии стабильности, показали, что в ряде случаев эта тенденция нарушается, т.е. среднеквадратичный радиус может убывать с ростом числа нуклонов.

Обычный метод определения размеров и формы объекта – исследование рассеяния излучения, направленного на него. Чтобы увидеть детали объекта,

длина волны излучения должна быть меньше размеров объекта. Для ядер, чей диаметр порядка 10 ферми, требуется, чтобы длина волны излучения была меньше или порядка этой величины, что в случае электронов соответствует импульсу  $p \geq 100$  МэВ/с. Такие пучки электронов можно получать на существующих ускорителях. Необходимо отбирать только те события, которые отвечают упругому рассеянию.

При рассеянии электронов на легких ядрах первый диффракционный минимум появляется при  $\theta = 1/\sin(1.22\lambda/D)$ , где  $D$ —диаметр мишени. Результаты экспериментов дали для радиуса ядра  $^{16}\text{O}$  2.6 ферми, а для  $^{12}\text{C}$  — 2.3 ферми.

Проанализируем этот вопрос более детально. Падающая волна характеризуется следующей волновой функцией:  $e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$ , где начальный импульс  $p_i$  равен  $\hbar\vec{k}_i$ . Волновая функция рассеянной волны имеет вид  $e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{r}}$ . Взаимодействие  $V(r)$  трансформирует падающую волну в рассеянную. Вероятность такого процесса пропорциональна квадрату следующей величины:

$$F(\vec{k}_i, \vec{k}_f) = \int \psi_f^* V(r) \psi_i dv, \quad (2)$$

или

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} V(r) dv, \quad (3)$$

где  $\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$ . Взаимодействие электрона с ядром кулоновское. Поэтому

$$V(r) = -Ze^2 \int \frac{\rho_e(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4)$$

Здесь  $\rho_e$  — плотность распределения заряда по объему ядра. В результате мы получаем

$$F(\vec{q}) \sim \frac{4\pi}{q^2} \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'} \rho_e(\vec{r}') dv'. \quad (5)$$

Если  $\rho_e$  зависит только от  $\vec{r}'$  и не зависит от углов, то  $F(\vec{q})$  зависит только от  $q$ . Так как мы рассматриваем только упругое рассеяние,  $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| \equiv p$  и  $q$

определяется углом  $\alpha$  между  $\vec{p}_i$  и  $\vec{p}_f$ :

$$q = \frac{2p}{\hbar} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (6)$$

Измеряя вероятность рассеяния, можно найти  $F(q)$ , а фурье-преобразование  $F(q)$  даст  $\rho_e$ .

Зарядовая плотность ядра может быть также исследована при анализе переходов электронов в атомах. Поскольку ядро имеет конечные размеры, электрон находится часть времени внутри ядра, где он "чувствует" отличие кулоновского потенциала ядра от кулоновского потенциала точечного заряда. Для ядра радиуса  $R$  в предположении об однородном распределении заряда кулоновский потенциал равен

$$V'(r) = \frac{Ze^2}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right), \quad r \leq R. \quad (7)$$

Вне ядра  $V(r) = -Ze^2/r$ . Если мы предположим (в первом приближении), что волновая функция электрона остается неизменной при переходе от точечного потенциала к объемному, то энергия электрона, находящегося в кулоновском поле однородно заряженного ядра, дается выражением

$$\langle V' \rangle = \int_{r < R} \psi_n^* V' \psi_n dv + \int_{r > R} \psi_n^* V' \psi_n dv. \quad (8)$$

Так как волновая функция электрона, согласно нашему предположению, остается неизменной при переходе от точечного к объемному кулоновскому потенциалу, неизменной остается и кинетическая энергия электрона. Следовательно, полная энергия электрона изменится при таком переходе на следующую величину:

$$\Delta E = \langle V' \rangle - \langle V \rangle. \quad (9)$$

В случае электрона, находящегося в  $1s$ -состоянии,

$$\Delta E = \frac{2Z^4 e^2 R^2}{5a_0^3}, \quad (10)$$

где  $a_0$  – боровский радиус,  $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.5 \cdot 10^{-8}$  см,  $\Delta E$  – это разность энергий электрона, находящегося в  $1s$ -состоянии атома с точечным и объемным ядром. Так как точечного ядра не существует, удобнее сравнивать энергии переходов  $2p \rightarrow 1s$  в двух соседних изотопах с массовыми числами  $A$  и  $A'$ .

Пусть  $E_K(A)$  – наблюдаемая энергия перехода:

$$E_K(A) = E_{2p}(A) - E_{1s}(A), \quad (11)$$

$$E_K(A) - E_K(A') = E_{2p}(A) - E_{1s}(A) - E_{2p}(A') + E_{1s}(A'). \quad (12)$$

Так как волновая функция электрона в  $2p$ -состоянии обращается в нуль при  $r \rightarrow 0$ , различия радиусов изотопов с массовыми числами  $A$  и  $A'$  электроны, находящиеся в  $2p$ -состоянии, "чувствовать" не будут. Поэтому

$$\begin{aligned} E_K(A) - E_K(A') &= E_{1s}(A') - E_{1s}(A) = \Delta E(A') - \Delta E(A) = \\ &= -\frac{2Z^4 e^2 r_0^2}{5a_0^3} (A^{2/3} - A'^{2/3}). \end{aligned} \quad (13)$$

Выполнив измерения для изотопов с разными  $A$  и сравнив их с одним и тем же ядром  $A'$ , мы получим линейную зависимость от  $A^{2/3}$ . Наклон этой прямой позволяет определить  $R$ .

Точность определения радиуса в такой методике может быть значительно улучшена, если использовать мюонные атомы. Мюон по своим свойствам сходен с электроном, но его масса в 207 раз больше массы электрона. Поэтому радиус мюонной орбиты в атоме в 207 раз меньше радиуса электронной орбиты. В случае такого тяжелого ядра, как Pb, средний радиус мюонной  $1s$ -орбиты меньше радиуса ядра. Поэтому влияние объема ядра на энергию перехода с орбиты на орбиту многократно усиливается. Мюоны можно получать, используя интенсивные пучки пионов. Пионы распадаются в течение  $10^{-8}$  с с образованием мюонов. Полученный пучок мюонов фокусируется затем на выбранной мишени. Атомы мишени захватывают мюоны. Первоначально мюон находится на орбите с большим значением главного квантового числа. Постепенно он

опускается на нижайшую  $1s$ -орбиту, испуская каскад гамма-квантов. Энергии переходов в атоме пропорциональны массе. Поэтому в случае мюонного атома они значительно больше, чем в случае электронного атома. Соответственно, увеличивается и изотопический сдвиг, который в случае обычного атома составляет  $10^{-2}$  эВ на единицу изменения  $A$ .

Еще один способ определения радиуса ядра состоит в измерении разности кулоновских энергий зеркальных ядер, таких как  ${}^{13}_7\text{N}_6$  и  ${}^{13}_6\text{C}_7$  или  ${}^{39}_{20}\text{Ca}_{19}$  и  ${}^{39}_{19}\text{K}_{20}$ . В этом случае нечетный протон и нечетный нейтрон находятся в одном и том же состоянии. Кулоновская энергия однородно заряженной сферы равна

$$E_c = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}, \quad (14)$$

где  $Q$ —полный заряд сферы. Разность кулоновских энергий зеркальных ядер равна

$$\Delta E_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} (Z^2 - (Z - 1)^2) = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} (2Z - 1) = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} A^{2/3}, \quad (15)$$

так как  $A = 2Z - 1$ . Эта разность кулоновских энергий может быть измерена при бета-распаде, в котором протон превращается в нейтрон с испусканием позитрона. Максимальная энергия позитрона характеризует разность кулоновских энергий зеркальных ядер.

Что удерживает протоны и нейтроны в атомном ядре? Силы, действующие между нуклонами, можно считать с достаточно хорошей точностью двухчастичными. В основном это силы притяжения, которое и обеспечивает устойчивость ядер. Их радиальная зависимость сходна с радиальной зависимостью сил Ван дер Ваальса, действующих между атомами в молекулах. Это короткодействующие силы, быстро убывающие на больших расстояниях. На расстояниях от 0.5 ферми до 2 ферми это – силы притяжения. Притяжение максимально на расстоянии порядка 1 ферми. На расстояниях, меньших 0.5 ферми, потенциал взаимодействия резко возрастает и становится отталкивающим. Часть потенциала взаимодействия вблизи минимума можно охарактеризовать без-



размерной величиной

$$\Lambda = \frac{\hbar^2}{ma^2} \frac{1}{V_0}, \quad (16)$$

где  $a$  характеризует ширину, а  $V_0$  – глубину минимума. Характерные значения  $\Lambda$  для жидкостей 0.15 – 0.20, для твердых тел 0.01 – 0.10. Для атомных ядер  $\Lambda=0.4$ . С этой точки зрения ядро напоминает жидкость. В то же время, несмотря на сходство с жидкостями, связанное с короткодействующим характером ядерных сил, для нуклонов характерна большая длина свободного пробега в ядре. Среднее расстояние между нуклонами в ядре заметно больше расстояния, соответствующего положению минимума потенциала притяжения, тогда как в молекулах среднее расстояние между атомами совпадает с положением минимума.

Энергия связи ядер, т.е. разность между суммой масс нуклонов, составляющих ядро, и массой ядра определяется сильным взаимодействием, удерживающим нуклоны в ядре (это взаимодействие является зарядово-независимым), и кулоновским отталкиванием протонов. Усредненная зависимость энергии связи ядра  $BE$ , т.е. не учитывающая оболочечные эффекты, от массового числа  $A$  и заряда ядра  $Z$  дается формулой Бете–Вайцзеккера

$$BE = aA - bA^{2/3} - \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R_c} - \frac{1}{2} c \frac{(N - Z)^2}{A}, \quad (17)$$

где

$a \approx 16$  МэВ,  $b \approx 17$  МэВ,  $c \approx 50$  МэВ,  $R_c \approx 1.24 A^{1/3}$  ферми.

Первый член в этой формуле, называемый объемным, учитывает среднюю энергию связи, приходящуюся на один нуклон. Второе слагаемое, поверхностный член, учитывает тот факт, что нуклоны, находящиеся в поверхностном слое, имеют меньше связей с соседями и их вклад в полную энергию связи меньше, чем вклад нуклонов внутри ядра. Этот член растет пропорционально числу нуклонов в поверхностном слое ядра, т.е. пропорционально  $A^{2/3}$ . Третий член – это кулоновская энергия отталкивания протонов, равномерно распределенных по объему ядра. Четвертый член носит название энергии симметрии.

Он минимален, когда число протонов равно числу нейтронов в ядре. Его происхождение будет понятнее, когда мы начнем изучать одночастичную модель ядра. А сейчас ограничимся только следующим объяснением. Заполняя уровни одночастичного потенциала ядра, протоны и нейтроны могут находиться в одном и том же квантовом состоянии. Принцип запрета Паули этому не препятствует. Но два нейтрона или два протона в одном и том же квантовом состоянии находиться не могут, и один из нуклонов должен быть в состоянии с большей энергией. Поэтому если число нуклонов одного типа в ядре превышает число нуклонов другого типа, то энергия ядра будет выше, чем если бы числа нейтронов и протонов были бы одинаковыми. Конечно, в этом рассуждении мы не принимали во внимание кулоновские силы отталкивания, действующие между протонами.

Выражение (17) показывает, что энергия связи ядра растет приблизительно пропорционально числу нуклонов в нем. О чем это говорит? Если бы каждый нуклон ядра взаимодействовал с каждым нуклоном, то число связей равнялось бы  $\frac{1}{2}A(A-1)$  и, следовательно, энергия связи возрастала бы пропорционально  $A(A-1)$  в противоречии с экспериментальными данными. Соответственно, число связей каждого нуклона с другими нуклонами не растет пропорционально числу нуклонов в ядре, а ограничено числом ближайших соседей. Мы говорим в этом случае о насыщении ядерных сил.

Определим теперь, какое соотношение между числами протонов и нейтронов при фиксированном полном числе нуклонов ядра  $A$  обеспечивает максимальную энергию связи ядра, т.е. максимальную стабильность. Для этого в выражении для энергии связи (17) заменим  $N$  на  $(A-Z)$ , продифференцируем это выражение по  $Z$  и приравняем производную нулю. Мы получим

$$Z = \frac{A}{2} \frac{1}{1 + \frac{3Ae^2}{10cR_c}}. \quad (18)$$

Из этого выражения видно, что число протонов в наиболее стабильных при фиксированном  $A$  ядрах меньше половины полного числа нуклонов в тяжелых

ядрах. В легких ядрах, например, при  $A=20$   $Z \approx 9.5$ . Из (17) следует, что энергия связи, приходящаяся на один нуклон, дается выражением

$$\frac{BE}{A} = a - \frac{b}{A^{1/3}} - \frac{3Z^2e^2}{5AR_c} - \frac{1}{2}c \frac{(A-2Z)^2}{A^2} \quad (19)$$

Благодаря убыванию поверхностного члена с ростом  $A$  энергия связи, приходящаяся на один нуклон, увеличивается с ростом  $A$  в легких ядрах и достигает максимума при  $A \approx 60$ . При дальнейшем увеличении  $A$  она плавно убывает.

Выясним, опираясь на формулу Бете–Вайцеккера, может ли существовать атомное ядро, состоящее только из протонов. Полагая в (17)  $A = Z$ , получаем

$$\begin{aligned} BE &= aZ - bZ^{2/3} - \frac{3Z^{5/3}e^2}{5r_0} - \frac{1}{2}cZ = \\ &= (a - \frac{1}{2}c)Z - bZ^{2/3} - \frac{3Z^{5/3}e^2}{5r_0}. \end{aligned} \quad (20)$$

Так как  $(a - \frac{1}{2}c) = -9$  МэВ, то  $BE(A = Z) < 0$ , т.е. система, состоящая только из протонов, не является связанной. Конечно, формула (19) не предназначена для описания одного протона.

А теперь рассмотрим следующий вопрос: возможно ли образование связанной системы, состоящей только из нейтронов? Нейтрон не имеет электрического заряда. Поэтому в этом случае кулоновский член отсутствует в выражении для энергии связи. Но мы включим в это выражение энергию гравитационного притяжения, которое становится важным, когда число нейтронов очень большое. Итак, в рассматриваемом случае  $A = N$  и мы получаем из (19)

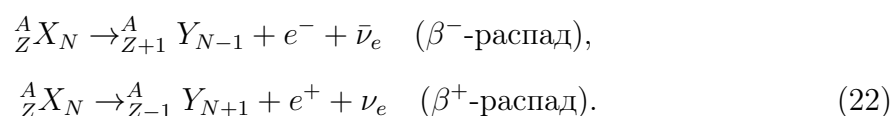
$$BE = (a - \frac{1}{2}c)N - bN^{2/3} + \frac{3GM^2}{5r_0}N^{5/3}. \quad (21)$$

В этом выражении только последний член, описывающий гравитационное притяжение, имеет положительный знак. Энергия связи становится положительной, т.е. система оказывается связанной при  $N \sim 10^{56}$ . Радиус образовавшегося объекта  $R=1.2 \cdot 10^{18.7}$  ферми  $\approx 1.2 \cdot 10^{0.7}$  км. Это как раз радиус нейтронной

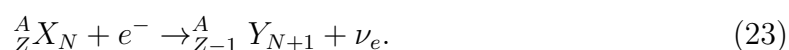
звезды. Отметим, однако, что нейтронные звезды состоят не только из нейтронов. Благодаря бета-распаду нейтронов, в них есть и протоны, и электроны.

### 3. Радиоактивный распад ядер

Рассмотрим теперь вопрос о стабильности ядер. Не все ядра стабильны. Часть ядер распадается с испусканием легкой частицы и образованием другого ядра. Возможность распада определяется соотношением между массами покоя начального ядра и конечной системы. Тяжелые ядра могут делиться на два приблизительно равные по массе ядра. Нестабильность ядер может быть связана с процессами  $\beta^-$ - и  $\beta^+$ -распадов, когда нейтрон или протон ядра испускает электрон или позитрон и нейтрино, превращаясь при этом в другую частицу:



Кроме того, возможен захват электрона с атомной орбиты протоном. Этот процесс носит название электронного захвата:



В перечисленных выше процессах полное число нуклонов (протонов и нейтронов) не изменяется.

Ряд ядер, в основном это тяжелые ядра, распадается с испусканием альфа-частицы (ядра  ${}^4\text{He}$ ) и с образованием ядра, у которого  $Z$  и  $N$  на две единицы меньше, чем у родительского ядра.

Закон распада был сформулирован Э.Резерфордом и Ф.Содди. Вероятность того, что ядро распадется в течение короткого интервала времени  $dt$  равна  $\lambda dt$ . Пусть в момент времени  $t=0$  было  $N_0$  ядер. Число ядер, распав-

шихся в интервале  $t, t + dt$ , равно

$$dN(t) = -\lambda N(t)dt, \quad (24)$$

откуда

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t). \quad (25)$$

Периодом полураспада  $T$  называется время, в течение которого число нестабильных ядер уменьшается вдвое:

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 \exp(-\lambda T), \quad (26)$$

т.е.  $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$ . Определим теперь среднее время жизни ядра  $\bar{t}$ . Число ядер, распавшихся в интервале времени  $t, t + dt$ , равно  $N(t)\lambda dt$ . Следовательно,

$$\bar{t} = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty tN(t)\lambda dt = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty tN_0 \exp(-\lambda t)\lambda dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (27)$$

Во многих случаях ядро может распадаться по нескольким каналам, характеризваемым разными значениями  $\lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots$ . В этом случае полная вероятность распада определяется величиной  $\lambda_T = \sum_i \lambda_i$ .

Рассмотрим более сложный процесс – рождение и распад радиоактивного ядра. Предположим, что стабильное ядро бомбардируется какой-то частицей. В результате образуется радиоактивное ядро. Предположим, что в секунду образуется  $Q$  таких ядер, которые распадаются с вероятностью  $\lambda$ . Тогда полное число радиоактивных ядер  $N(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dN(t)}{dt} = Q - \lambda N(t), \quad N(t=0) = 0. \quad (28)$$

Мы получаем

$$N(t) = \frac{Q}{\lambda} (1 - \exp(-\lambda t)), \quad (29)$$

т.е. количество радиоактивных ядер со временем увеличивается и достигает максимального значения  $Q/\lambda$ .

В общем случае реализуется цепочка радиоактивного распада  $N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_3 \rightarrow \dots$ . Количество ядер каждого типа  $N_i$  в момент времени  $t$  определяется решением системы уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= -\lambda_1 N_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2, \\ \frac{dN_3}{dt} &= \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \dots\end{aligned}\tag{30}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}N_1(t=0) &= N_0, \\ N_i(t=0) &= 0, \quad i = 2, 3, \dots\end{aligned}\tag{31}$$

В заключение этого раздела несколько слов о возбужденных состояниях ядер. Атомные ядра могут находиться как в основном, т.е. в нижайшем по энергии состоянии, так и в возбужденном состоянии. Энергия возбуждения первого возбужденного состояния принимает значения от нескольких кэВ до нескольких МэВ. Эти состояния не стабильны, и ядра, девозбуждаясь, переходят в нижайшее по энергии состояние, испуская гамма-кванты. В результате альфа- или бета-распада ядро может переходить в основное или возбужденное состояние соседнего ядра. В ряде случаев наблюдаются и долгоживущие, так называемые изомерные, состояния с большими временами жизни.

## 4. Магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты ядра

Симметрии ядра накладывают определенные ограничения на электромагнитные моменты ядра и напрямую связаны с четностью состояний ядра. Электромагнитные моменты ядра имеют определенную четность относительно пространственного отражения  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ . Четность электрических моментов

равна  $(-1)^L$ , где  $L$  – мультипольность. Четность магнитных моментов  $(-1)^{L+1}$ . Так как состояния ядра характеризуются определенным значением четности, все статические мультипольные моменты с отрицательной четностью равны нулю. Это электрические моменты с нечетным  $L$  и магнитные моменты с четным  $L$ .

Магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты ядра изучены наиболее хорошо.

Имеется обширная экспериментальная информация о ядрах, принадлежащих различным областям карты нуклидов.

Магнитный момент ядра связан как с орбитальным движением протонов, имеющих положительный электрический заряд, так и со спинами протонов и нейтронов. Магнитный момент измеряется в ядерных магнетонах  $\mu_N = \frac{e\hbar}{2mc}$ , где  $m$  – масса нуклона. Оператор магнитного дипольного момента имеет вид

$$\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{i=1}^A (g_l \vec{l}_i + g_s \vec{s}_i), \quad (32)$$

где  $g_l=1$  для протона и нулю для нейтрона;  $g_s=5.586$  для протона и  $-3.826$  для нейтрона. Для сравнения приведем значение  $g_s$  для точечной частицы – электрона, для которого  $g_s=-2$ , но в единицах боровского магнетона  $\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_e c}$ , где  $m_e$  – масса электрона.

Введем в рассмотрение квадрупольный момент ядра. Пусть  $\Phi(\vec{R})$  – потенциал, создаваемый зарядом ядра в точке  $\vec{R}$ , находящейся вне ядра. Начало координат поместим в центр масс ядра. Пусть функция  $\rho(\vec{r})$  описывает распределение электрического заряда по объему ядра. Тогда

$$\Phi(\vec{R}) = \int d^3r \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|}. \quad (33)$$

Для  $r < R$  мы можем воспользоваться разложением

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} = \frac{4\pi}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r}{R}\right)^l \sum_m Y_{lm}^*(\vec{R}) Y_{lm}(\vec{r}), \quad (34)$$

где  $Y_{lm}$  – сферическая функция. В сферических координатах

$$\begin{aligned}
Y_{00}(\vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\
Y_{1\pm 1}(\vec{r}) &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \exp(\pm i\varphi), \\
Y_{10}(\vec{r}) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\
Y_{2\pm 2}(\vec{r}) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta \exp(\pm 2i\varphi), \\
Y_{2\pm 1}(\vec{r}) &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta \exp(\pm i\varphi), \\
Y_{20}(\vec{r}) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1).
\end{aligned} \tag{35}$$

Условие нормировки

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{l_1 m_1} Y_{l_2 m_2}^* = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}. \tag{36}$$

Подставляя в (33) разложение (34) и направив ось  $z$  вдоль вектора  $\vec{R}$ , получаем

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{R}) &= \frac{q}{R} + \frac{1}{R^2} \int \rho(\vec{r}) r \cos \theta d^3 r + \\
&+ \frac{1}{2R^3} \int \rho(\vec{r}) r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) d^3 r + \dots
\end{aligned} \tag{37}$$

В последнем выражении  $q$  – полный заряд ядра. Ось  $z$  системы координат направлена вдоль вектора  $\vec{R}$ . Обозначим через  $r_i$  и  $R_i$  декартовы координаты векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{R}$ . Тогда, например,

$$r \cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{R} = \sum_{i=1}^3 \frac{r_i R_i}{R} \quad (i = x, y, z) \tag{38}$$

и выражение (37) запишется следующим образом:

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{q}{R} + \sum_{i=1}^3 \frac{p_i R_i}{R^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{Q_{ij} R_i R_j}{R^5} + \dots \tag{39}$$

где

$$p_i = \int \rho(\vec{r}) r_i d^3 r, \tag{40}$$



$$Q_{ij} = \int \rho(\vec{r})(3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}) d^3r, \quad (41)$$

где  $Q_{ij}$ –квадрупольный тензор. Соответствующим выбором системы координат его можно привести к диагональному виду. Величина

$$Q_{zz} = \int \rho(\vec{r})(3z^2 - r^2) d^3r \quad (42)$$

называется квадрупольным моментом зарядового распределения ядра.

Рассмотрим теперь сверхтонкое взаимодействие ядер с электромагнитным полем, создаваемым атомными и молекулярными электронами, окружающими ядро. Это взаимодействие позволяет определять экспериментально магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты ядра. Дело в том, что полный гамильтониан ядра является ротационным инвариантом. Поэтому энергетические уровни ядра, не взаимодействующего со своим окружением, вырождены. А именно, все состояния ядра, различающиеся только значениями проекции углового момента, но имеющие одинаковыми другие квантовые числа, характеризуются одной и той же энергией. Взаимодействие ядра с электромагнитным полем окружающих ядро электронов снимает это вырождение.

Для зеемановского расщепления сверхтонкое взаимодействие имеет вид

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad (43)$$

где  $\vec{B}$ – магнитная индукция поля, созданного электронами. Среднее значение этого взаимодействия равно

$$\langle H \rangle = -\mu_N g m B, \quad (44)$$

где  $g$  –  $g$ -фактор состояния ядра, а  $m$ – проекция углового момента ядра на направление магнитной индукции.

Рассмотрим теперь взаимодействие электрического момента ядра с электромагнитным полем, создаваемым электронами. Классическая энергия взаимодействия ядра с внешним электрическим потенциалом имеет вид

$$E_{\text{int}} = \int \rho_e(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) d^3r, \quad (45)$$

где  $\rho_e(\vec{r})$ – плотность распределения заряда в ядре, а  $\Phi(\vec{r})$ – потенциал электрического поля, создаваемого атомными и молекулярными электронами. Интегрирование в (45) берется по объему ядра. Так как размеры ядра малы по сравнению с радиусами электронных орбит, потенциал  $\Phi(\vec{r})$  мало изменяется внутри ядра, что позволяет воспользоваться разложением Тейлора

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0 + \sum_i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_0 x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 x_i x_j + \dots \quad (46)$$

где координаты  $x_i$  отсчитываются от центра ядра. Выражение для  $E_{\text{int}}$  принимает вид

$$E_{\text{int}} = \Phi_0 q + \sum_i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_0 p_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 Q'_{ij} + \dots \quad (47)$$

с

$$Q'_{ij} = \int \rho_e(\vec{r}) x_i x_j d^3 r. \quad (48)$$

Будем рассматривать в дальнейшем только квадрупольный член и выберем систему координат так, чтобы тензор  $Q'_{ij}$  был диагонален. Тогда

$$E_{\text{int}}^{(\text{quad})} = \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} \right)_0 \int \rho_e(\vec{r}) x_i^2 d^3 r. \quad (49)$$

Добавим и вычтем из выражения под интегралом в (49) монополюсный член:

$$\begin{aligned} E_{\text{int}}^{(\text{quad})} = \frac{1}{6} \sum_i \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} \right)_0 \int \rho_e(\vec{r}) (3x_i^2 - r^2) d^3 r + \\ + \frac{1}{6} \sum_i \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} \right)_0 \int \rho_e(\vec{r}) r^2 d^3 r. \end{aligned} \quad (50)$$

В первом слагаемом в этом выражении появился квадрупольный момент ядра, определенный нами ранее. Во втором слагаемом

$$\sum_i \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} \right)_0 = \Delta \Phi|_0. \quad (51)$$

В соответствии с уравнениями Максвелла  $\Delta \Phi|_0 = -\rho_e(0)$ , если электроны присутствуют с какой-то вероятностью в начале координат (здесь  $\rho_e(0)$ – плотность электронов в начале координат). Если электронов в начале координат

нет, то  $\rho_e(0) = 0$  и второе слагаемое отсутствует. В первом случае слагаемое

$$-\frac{1}{6}\rho_0(0) \int \rho(\vec{r})r^2 d^3r \quad (52)$$

представляет собой монополюнный сдвиг энергий всех уровней ядра, не зависящий от значений проекций углового момента. В случае, когда  $\rho_e(0) = 0$

$$\begin{aligned} E_{\text{int}}^{(\text{quad})} &= \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 \int \rho(\vec{r})(3x^2 - r^2) d^3r + \\ &+ \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_0 \int \rho(\vec{r})(3y^2 - r^2) d^3r + \\ &+ \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_0 \int \rho(\vec{r})(3z^2 - r^2) d^3r. \end{aligned} \quad (53)$$

В случае аксиальной симметрии

$$\int \rho(\vec{r})(3x^2 - r^2) d^3r = \int \rho(\vec{r})(3y^2 - r^2) d^3r. \quad (54)$$

Так как

$$\int \rho(\vec{r})(3x^2 - r^2) d^3r + \int \rho(\vec{r})(3y^2 - r^2) d^3r + \int \rho(\vec{r})(3z^2 - r^2) d^3r = 0, \quad (55)$$

в этом случае

$$\int \rho(\vec{r})(3x^2 - r^2) d^3r = \int \rho(\vec{r})(3y^2 - r^2) d^3r = -\frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})(3z^2 - r^2) d^3r. \quad (56)$$

Подставляя этот результат в выражение для  $E_{\text{int}}^{(\text{quad})}$ , получаем

$$E_{\text{int}}^{(\text{quad})} = \frac{1}{6} \left( \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_0 \right) \int \rho(\vec{r})(3z^2 - r^2) d^3r. \quad (57)$$

Среднее от этого выражения по состоянию ядра с угловым моментом  $J$  и его проекцией  $M$  пропорционально  $(3M^2 - J(J+1))$ , т.е.

$$\langle JM | E_{\text{int}}^{(\text{quad})} | JM \rangle \sim (3M^2 - J(J+1)). \quad (58)$$

Мы видим, что в случае квадрупольного взаимодействия с окружающим электромагнитным полем вырождение уровней ядра частично снимается, но энер-

гия по-прежнему не зависит от знака проекции углового момента.

## 5. Нуклон-нуклонное взаимодействие

Обычно предполагается, что важны только двухчастичные силы. Примером двухчастичной системы является дейтон, состоящий из протона и нейтрона. Однако дейтон имеет только одно связанное состояние, и получаемая информация о двухчастичных силах достаточно скудна. О взаимодействии двух нуклонов известно, что на малых расстояниях, порядка 0.5 ферми и меньше, оно характеризуется очень сильным отталкиванием. Это обстоятельство не позволяет применять стандартные методы теории систем многих частиц, каковой является атомное ядро. Но в ядрах нуклоны взаимодействуют друг с другом в окружении других нуклонов. Это делает необходимым введение в рассмотрение эффективных сил, что уже позволяет применять стандартную многочастичную технику. Сильное отталкивание нуклонов на малых расстояниях является основной причиной, по которой кварковая структура нуклонов оказывает незначительное влияние на структуру ядер.

Перейдем к более детальному рассмотрению нуклон–нуклонных сил. Их основные особенности следующие:

- сильное отталкивание на малых расстояниях, что удерживает их от чрезмерного сближения;
- на коротких расстояниях они заметно сильнее кулоновских сил и могут преодолевать кулоновское отталкивание протонов в ядре;
- на больших расстояниях, порядка атомных, нуклон–нуклонные силы пренебрежимо малы;
- эти силы зарядово–независимы, т.е. все взаимодействия  $nn$ ,  $pp$  и  $pn$  идентичны;
- они зависят от относительной ориентации спинов взаимодействующих нук-

лонов, т.е. от того, параллельны они или антипараллельны;

– эти силы имеют нецентральную компоненту, которая ответственна за сохранение орбитального момента, тогда как в случае центральных сил орбитальный момент является константой движения.

Чтобы получить какое-то представление о количественных характеристиках нуклон–нуклонных сил, рассмотрим дейтон. Для упрощения предположим, что нуклон–нуклонный потенциал имеет вид трехмерной прямоугольной ямы:

$$\begin{aligned} V(r) &= -V_0, & r \leq R_0, \\ V(r) &= 0, & r > R_0. \end{aligned} \quad (59)$$

Это, конечно, сверхупрощение, но оно достаточно для качественных выводов. Здесь  $r$ –расстояние между нуклонами, а  $R_0$ –радиус дейтона. Предположим также, что в основном состоянии орбитальный момент дейтона  $l=0$ . Представим волновую функцию дейтона  $\psi(r)$  как

$$\psi(r) = u(r)/r. \quad (60)$$

Тогда

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + V(r)u(r) = Eu(r). \quad (61)$$

При  $r \leq R_0$

$$u(r) = A \sin k_1 r + B \cos k_1 r \quad (62)$$

с  $k_1 = \sqrt{2m(E + V_0)/\hbar^2}$ . При  $r > R_0$

$$u(r) = C e^{-k_2 r} + D e^{k_2 r} \quad (63)$$

с  $k_2 = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$ .

Чтобы волновая функция была конечной при  $r \rightarrow \infty$ , полагаем  $D=0$ , и чтобы она была конечной при  $r \rightarrow 0$ , полагаем  $B=0$ . Из условия непрерывности волновой функции следует

$$k_1 \cot k_1 R_0 = -k_2. \quad (64)$$

Это трансцендентное уравнение является соотношением между  $V_0$  и  $R_0$ . Из данных по рассеянию электронов на дейтоне следует, что  $R_0 \approx 2.1$  фм. Тогда из (64) получаем, что  $V_0 \approx 35$  МэВ.

Важной характеристикой рассеяния нуклонов является фазовый сдвиг. Решение уравнения (61), отвечающее рассеянию ( $E > 0$ ), имеет следующий вид при  $r > R_0$ :

$$u(r) = C' \sin k_2 r + D' \cos k_2 r, \quad (65)$$

где  $k_2 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ . Удобно переписать это уравнение так:

$$u(r) = C \sin(k_2 r + \delta), \quad (66)$$

тогда  $C' = C \cos \delta$ , а  $D' = C \sin \delta$ . Граничные условия для  $u(r)$  и  $du(r)/dr$  при  $r = R_0$  ведут к соотношениям

$$C \sin(k_2 R_0 + \delta) = A \sin k_1 R_0, \quad (67)$$

$$C \cos(k_2 R_0 + \delta) = k_1 A \cos k_1 R_0. \quad (68)$$

Разделив левые и правые части этих уравнений друг на друга, получаем

$$k_2 \cot(k_2 R_0 + \delta) = k_1 \cot k_1 R_0. \quad (69)$$

В принципе из последнего уравнения можно получить  $\delta$  как функцию  $E$ . Посмотрим, какие значения принимает  $\delta$  в зависимости от характера взаимодействия. При  $V_0 \rightarrow 0$   $k_1 \rightarrow k_2$  и  $\delta \rightarrow 0$ . В случае притягивающего потенциала волновая функция "втягивается" в область притяжения. Нуль волновой функции

сдвигается ближе к центру. Это соответствует  $\delta > 0$ . В случае отталкивающего потенциала нуль волновой функции отодвигается от центра. Следовательно, в этом случае  $\delta < 0$ .

Мы знаем, что с увеличением числа нуклонов в ядре объем ядра увеличивается так, что плотность в центре ядра остается постоянной. Это означает, что силы, действующие между нуклонами, удерживают их от сильного сближения. Более детальная информация следует из рассмотрения нуклон–нуклонного рассеяния при энергиях до 500 МэВ. Приблизительно при 300 МэВ фазовый сдвиг  $s$ -волны становится отрицательным, что отвечает переходу от притяжения к отталкиванию во взаимодействии. Происходит это при  $r \approx 0.5$  фм.

Итак, в первом приближении нуклон–нуклонное взаимодействие является центральным, т.е. зависит только от  $r$ . Нуклон–нуклонное взаимодействие зависит от спина. Это следует из факта отсутствия у дейтона синглетного связанного состояния. Кроме того, сечения рассеяния нуклонов в синглетном и триплетном состояниях существенно различаются.

Какой вид должен иметь дополнительный член в нуклон–нуклонном потенциале, который учитывает этот эффект? Очевидно, что он должен зависеть от спинов нуклонов  $\vec{s}_1$  и  $\vec{s}_2$ . Но не все комбинации  $\vec{s}_1$  и  $\vec{s}_2$  допустимы. Нуклон–нуклонные взаимодействия должны удовлетворять некоторым требованиям симметрии. Примеры таких симметрий: инвариантность относительно преобразований  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ ,  $t \rightarrow -t$ . При отражении времени угловые моменты меняют знак. Поэтому присутствие в нуклон–нуклонном потенциале слагаемых, линейных по  $\vec{s}_1$  и  $\vec{s}_2$ , нарушило бы инвариантность относительно отражения времени. Но такие члены, как  $\vec{s}_1^2$ ,  $\vec{s}_2^2$  и  $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$ , инвариантны относительно отражения времени. Простейший член, содержащий оба спина:  $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$ . Так как

$$\begin{aligned} \vec{S}^2 &= (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) = \\ &= \vec{s}_1^2 + \vec{s}_2^2 + 2\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 3/4 + 3/4 + 2\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2, \end{aligned} \quad (70)$$

$\langle \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \rangle = 1/4$ , если  $S = 1$ , и  $\langle \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \rangle = -3/4$ , если  $S = 0$ . Следовательно, зависящий от спина потенциал имеет вид

$$V(r) = -(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 - 1/4)V_{\text{singlet}}(r) + (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + 3/4)V_{\text{triplet}}(r). \quad (71)$$

Нуклон–нуклонное взаимодействие включает нецентральный член. Это следует уже из того, что дейтрон в основном состоянии имеет отличный от нуля квадрупольный момент. Так как в состоянии с  $l=0$  квадрупольный момент равен нулю, нуклон–нуклонный потенциал должен смешивать состояния с разными  $l$ , т.е. быть нецентральным. Следовательно, он имеет форму  $V(\vec{r})$  вместо  $V(r)$ . Всем требованиям симметрии удовлетворяет потенциал

$$V_T(r)S_{12}, \quad (72)$$

где

$$S_{12} = 3(\vec{s}_1 \cdot \vec{r})(\vec{s}_2 \cdot \vec{r})/r^2 - \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2. \quad (73)$$

Усредняя это выражение по углам, мы получаем нуль.

Нуклон–нуклонное взаимодействие является зарядово–независимым, т.е. все взаимодействия  $nn$ ,  $pp$  и  $np$  идентичны. Это означает, что зависимость от изоспина может входить в выражение для нуклон–нуклонного потенциала только через инвариант  $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$ .

Нуклон–нуклонные силы могут зависеть от относительной скорости. Рассмотрим возможность введения сил, линейных по импульсу  $\vec{p}$ . При пространственном или временном отражении  $\vec{p}$  меняет знак. Такие комбинации, как  $\vec{r} \cdot \vec{p}$  или  $\vec{r} \times \vec{p}$ , инвариантны относительно пространственного отражения, но изменяют знак при временном отражении. Единственное выражение, линейное по  $\vec{p}$  и инвариантное относительно пространственного и временного отражений, это

$$V(r)(\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{S}, \quad (74)$$



где  $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$  – полный спин двух нуклонов. Относительный орбитальный момент двух нуклонов  $l = \vec{r} \times \vec{p}$ . Поэтому (74) можно назвать спин–орбитальным взаимодействием.

Экспериментальным подтверждением существования спин–орбитального взаимодействия является наблюдение поляризации спинов нуклонов при рассеянии. Поляризация спинов нуклонов в пучке или мишени определяется выражением

$$P = \frac{N(\uparrow) - N(\downarrow)}{N(\uparrow) + N(\downarrow)}, \quad (75)$$

где  $N(\uparrow)$  и  $N(\downarrow)$  – это числа нуклонов со спинами, направленными вверх или вниз. Значения  $P=+1$  или  $-1$  означают 100%-ю поляризацию. Рассмотрим рассеяние нуклонов на поляризованной мишени. Нуклоны, налетающие на ядро справа или слева от него, в плоскости реакции будут иметь противоположно направленные орбитальные моменты. Если их спины имеют одно и то же направление, то спин–орбитальный потенциал будет притягивающим, например, для нуклона, падающего на ядро слева, и отталкивающим для нуклона, падающего на ядро справа. Или наоборот. В результате оба нуклона будут отклоняться в одном и том же направлении. Нуклоны с противоположно направленным спином будут отклоняться в другую сторону. Таков механизм возникновения поляризации при рассеянии.

Итак, как уже отмечалось выше, взаимодействие нуклонов на расстояниях, больших 0.5 ферми, определяется обменом мезонами. На больших расстояниях сильное взаимодействие нуклонов определяется обменом пионами. Масса пиона 140 МэВ. Следовательно, характерное расстояние  $\hbar/mc \simeq 1.4$  ферми. На более коротких расстояниях идет обмен несколькими пионами или более тяжелыми мезонами. Сильное притяжение вблизи минимума радиального потенциала определяется скалярным обменом  $\sigma$ -мезонами. Источником отталкивания на меньших расстояниях является обмен  $\omega$ -мезонами.

При теоретическом построении феноменологического нуклон–нуклонного

взаимодействия важную роль играют симметрии, следующие из общих принципов. В общем случае взаимодействие двух нуклонов определяется их координатами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , импульсами  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ , спинами  $\vec{\sigma}_1$  и  $\vec{\sigma}_2$  и изospинами  $\vec{\tau}_1$  и  $\vec{\tau}_2$ .

Перечислим ограничения, налагаемые на вид потенциала взаимодействия требованиями симметрии.

1. Трансляционная инвариантность. Отсюда следует, что взаимодействие зависит только от разности  $\vec{r} \equiv (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ , но не от суммы  $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$ .

2. Галилеева инвариантность. Взаимодействие зависит только от разности  $\vec{p} \equiv (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$ .

Из этих двух принципов симметрии следует, что взаимодействие  $V$  зависит только от следующих переменных:

$$V(\vec{r}, \vec{p}, \vec{\sigma}_1, \vec{\tau}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\tau}_2). \quad (76)$$

3. Инвариантность относительно пространственного отражения. В отличие от слабого взаимодействия в сильном взаимодействии четность сохраняется. Из этого требования следует, что

$$V(\vec{r}, \vec{p}, \vec{\sigma}_1, \vec{\tau}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\tau}_2) = V(-\vec{r}, -\vec{p}, -\vec{\sigma}_1, \vec{\tau}_1, -\vec{\sigma}_2, \vec{\tau}_2). \quad (77)$$

4. Ротационная инвариантность в обычном трехмерном пространстве. Это означает, что взаимодействие  $V$  должно быть скалярной величиной. Из двух векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$  можно построить три скаляра:

$$(\vec{r})^2, (\vec{p})^2, (\vec{r}\vec{p} + \vec{p}\vec{r}). \quad (78)$$

Однако  $(\vec{r}\vec{p} + \vec{p}\vec{r})$  может появиться в выражении для  $V$  только в квадрате как следствие инвариантности относительно изменения знака времени. Но  $(\vec{r}\vec{p} + \vec{p}\vec{r})^2$  можно выразить через  $(\vec{r})^2$ ,  $(\vec{p})^2$  и  $\vec{L}^2 = (\vec{r} \times \vec{p})^2$ , где  $\vec{L}$ —орбитальный момент.

5. Перестановочная симметрия. Она означает, что  $V(1, 2) = V(2, 1)$ . Из этого требования следует, что линейный по операторам спинов  $\vec{\sigma}_i$  член взаимодействия может зависеть только от  $\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ , т.е. только от полного

спина двух нуклонов. С помощью оператора  $\vec{S}$  можно образовать только один скаляр, линейный по  $\vec{S}$ . Это  $\vec{L} \cdot \vec{S}$ . Можно построить следующие квадратичные по  $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$  инварианты, от которых может зависеть взаимодействие  $V$ , удовлетворяющее всем требованиям симметрии:

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2, (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}), (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p}) \quad (79)$$

и

$$(\vec{L} \cdot \vec{\sigma}_1)(\vec{L} \cdot \vec{\sigma}_2) + (\vec{L} \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{L} \cdot \vec{\sigma}_1). \quad (80)$$

Обычно используются следующие комбинации этих инвариантов:

$$\begin{aligned} & \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2, (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p}), \\ S_{12} = & \frac{3}{r^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2. \end{aligned} \quad (81)$$

Последний оператор входит в выражение для тензорных сил. А также

$$L_{12} = \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{L}^2 - \frac{1}{2} \left( (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{L})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{L}) + (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{L})(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{L}) \right), \quad (82)$$

где  $L_{12}$  – квадратичный спин–орбитальный оператор.

6. Вращательная инвариантность в изоспиновом пространстве. Это означает, что взаимодействие может зависеть только от скаляра  $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$ .

Каждый из перечисленных выше инвариантов может быть умножен на произвольную функцию от  $(\vec{r})^2, (\vec{p})^2$  и  $\vec{L}^2$ . Ниже мы приведем, однако, выражения для  $V$ , содержащие только произвольные функции от  $r = \sqrt{(\vec{r})^2}$ . Итак, мы приходим к следующему выражению для  $V$ :

$$\begin{aligned} V(\vec{r}, \vec{p}, \vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2) = & V(r) + V_\sigma(r) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_\tau(r) \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 + \\ & + V_{\sigma\tau}(r) (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + \\ & + V_{LS}(r) (\vec{L} \cdot \vec{S}) + V'_{LS}(r) (\vec{L} \cdot \vec{S}) (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + \\ & + V_T(r) S_{12} + V'_T(r) S_{12} (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + \\ & + V_Q(r) L_{12} + V'_Q(r) L_{12} (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + \\ & + V_{\sigma p}(r) (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p}) + V'_{\sigma p}(r) (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p}) \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2. \end{aligned} \quad (83)$$

Рассмотрим теперь вопрос об эффективном взаимодействии нуклонов в атомных ядрах. Радиус действия ядерных сил мал. Простейшее предположение – это предположение о нулевом радиусе взаимодействия. В этом случае радиальная зависимость взаимодействия описывается  $\delta$ -функцией. Более реалистичными являются силы конечного радиуса действия. Покажем, что конечный радиус взаимодействия можно имитировать, вводя зависимость взаимодействия от импульса. Для этого рассмотрим фурье-образ потенциала взаимодействия  $V(\vec{r})$ , где  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ :

$$\langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \exp(-\frac{i}{\hbar}(\vec{p} - \vec{p}')\vec{r}) V(\vec{r}) d^3r. \quad (84)$$

В случае  $\delta$ -сил  $\langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle$  является константой, а конечному радиусу взаимодействия отвечает появление у  $\langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle$  зависимости от импульса.

Если функция локализована в небольшой области пространства, то ее можно разложить в ряд, в котором первый член – это  $\delta$ -функция, а остальные члены ряда – производные от  $\delta$ -функции в возрастающем порядке. Например,

$$V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = V_0\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + V_1'\delta''(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \dots \quad (85)$$

Можно ввести в это разложение оператор импульса  $\vec{p} = \frac{\hbar}{2i}(\nabla_{r_1} - \nabla_{r_2})$ . Тогда разложение для  $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ , которое должно быть представлено эрмитовым оператором, будет иметь вид

$$V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = V_0\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + V_1(\vec{p})^2\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + V_1\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(\vec{p})^2 + \\ + V_2\vec{p}\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\vec{p} + \dots \quad (86)$$

Отсюда следует, что зависимость потенциала взаимодействия от импульса имитирует конечный радиус взаимодействия.

Взаимодействие нуклонов в ядерной среде отличается от взаимодействия свободных нуклонов. Предпринимаются попытки рассчитать такое взаимодействие, основываясь на взаимодействии свободных нуклонов. В то же время было предложено несколько вариантов феноменологических нуклон-нуклонных сил.

В 1956 г. Скимр предложил использовать в качестве эффективного взаимодействия нуклонов следующее выражение, содержащее трехчастичный член:

$$V = \sum_{i < j} V(i, j) + \sum_{i < j < k} V(i, j, k), \quad (87)$$

где

$$\begin{aligned} V(1, 2) = & t_0(1 + x_0 P^\sigma) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \\ & + \frac{1}{2} t_1 \left( \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{k}^2 + \vec{k}^2 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right) + t_2 \vec{k} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{k} + \\ & + i W_0 \left( (\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) \times \vec{k} \right) \cdot (\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{k}, \end{aligned} \quad (88)$$

где

$$\vec{k} = \frac{\hbar}{2i} (\nabla_{r_1} - \nabla_{r_2}), \quad (89)$$

$$P^\sigma = \frac{1}{2} (1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2), \quad (90)$$

$$V(1, 2, 3) = t_3 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_3). \quad (91)$$

Пять констант  $t_0, t_1, t_2, t_3, x_0$  подбирались так, чтобы описать экспериментальные данные по энергиям связи и радиусам ядер. Эти силы успешно использовались в расчетах, базирующихся на приближении среднего поля.

Несмотря на успехи, связанные с применением сил Скимра, было показано, что силы нулевого радиуса взаимодействия не могут имитировать дальнедействующую часть эффективных сил. Эти силы не описывают достаточно хорошо парные корреляции в ядрах. Чтобы учесть конечный радиус взаимодействия, Д.Гони (D.Gogny) предложил заменить слагаемые с константами  $t_0, t_1, t_2$  в силах Скимра суммой двух гауссианов со спин-изоспиновой зависимостью:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \exp(-(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 / \mu_i^2) (W_i + B_i P^\sigma - H_i P^\tau - M_i P^\sigma P^\tau) + \\ + i W_0 (\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) \vec{k} \times \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{k}. \end{aligned} \quad (92)$$

Трехчастичный член можно заменить эквивалентным ему взаимодействием, зависящим от плотности:

$$t_3(1 + P^\sigma)\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\rho^{1/3}\left(\frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)\right). \quad (93)$$

Параллельно с введением в рассмотрение сил, с помощью которых можно описывать глобальные свойства ядер, в расчетах использовались остаточные эффективные силы, действующие между нуклонами, находящимися в одночастичных состояниях, близких к поверхности Ферми. Основная физическая идея была следующей: нуклоны двигаются почти независимо внутри ядра. Большая часть столкновений имеет место в поверхностной области, где действие принципа Паули ослаблено. Поведение сил вне поверхности ядра также не очень существенно, так как в этой области волновые функции нуклонов убывают экспоненциально. Поэтому разумным приближением было бы ограничение взаимодействия поверхностной областью ядра. Так, были введены поверхностные  $\delta$ -силы:

$$V(1, 2) = -V_0\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\delta(|\vec{r}_1| - R_0). \quad (94)$$

Если воспользоваться разложением по мультиполям, то эти силы будут иметь очень простой факторизованный вид

$$V(1, 2) = -V_0 \sum_{l,m} \frac{\delta(r_1 - R_0)}{r_1} Y_{lm}^*(\theta_1, \varphi_1) \frac{\delta(r_2 - R_0)}{r_2} Y_{lm}(\theta_2, \varphi_2). \quad (95)$$

## 6. Длина свободного пробега нуклона в ядре

В предыдущем разделе мы закончили рассмотрение глобальных характеристик ядер и ввели основные понятия, которые нам понадобятся в дальнейшем. Теперь перейдем к рассмотрению моделей ядра. Знание длины свободного пробега нуклонов в ядре имеет очень большое значение при построении

модели ядра. Поэтому мы начнем изложение с рассмотрения этой характеристики.

Рассмотрим прохождение через ядро незаряженной частицы – нейтрона. Отсутствие кулоновского потенциала упрощает рассмотрение. Аппроксимируем ядро прямоугольным потенциалом, т.е. потенциалом, имеющим постоянную глубину  $V_0$  внутри ядра и равным нулю вне ядра. Так как падающий на ядро нейтрон взаимодействует с нуклонами ядра и может быть поглощен внутри ядра, мы будем предполагать ядерный потенциал комплексным, т.е.

$$V = V_0 + iW, \quad (96)$$

и будем считать мнимую часть потенциала  $W$  постоянной внутри ядра. Для упрощения рассмотрения ограничимся одномерной моделью. В этом случае уравнение Шредингера, описывающее прохождение нейтрона через потенциал, принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V_0 - iW_0)\psi = 0 \quad (97)$$

Во внутренней области ядра  $\psi(z) = \exp(iKz) = \exp(iK_R z - K_I z)$ , где  $K = K_R + iK_I = 1/\hbar\sqrt{2\mu(E - V_0 - iW_0)}$ . Если  $|W_0| \ll |E - V_0|$ , т.е. кинетическая энергия налетающего нейтрона намного больше мнимой части потенциала, то  $K_R \approx \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(E - V_0)} = \mu v_i/\hbar$ , где  $v_i$  – скорость нейтрона в ядерной среде, а

$$K_I \approx \frac{-W_0 K_R}{2(E - V_0)} = -\frac{W_0}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2(E - V_0)}} = -\frac{W_0}{\hbar v_i}. \quad (98)$$

Плотность вероятности найти падающий нейтрон внутри ядра на расстоянии  $z$  от поверхности равна

$$|\psi(z)|^2 = |\exp(iK_R z - K_I z)|^2 = \exp(-2K_I z). \quad (99)$$

Следовательно, длина свободного пробега

$$\Lambda = \frac{1}{2K_I} = \frac{\hbar v_i}{2W_0}. \quad (100)$$

Рассмотрим теперь взаимодействие падающего нейтрона с абсолютно черным ядром радиуса  $R$ , т.е. предположим, что нейтроны могут проникать вглубь ядра, но поток выходящих волн на поверхности ядра равен нулю. Сечение взаимодействия падающего нейтрона с ядром определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} d\sigma &= 2\pi b db, \\ \sigma &= \int_0^R 2\pi b db, \end{aligned} \quad (101)$$

где  $b$  – прицельный параметр, связанный с орбитальным моментом  $l$ :

$$bp = b\hbar k = \hbar l \rightarrow \hbar(l + \frac{1}{2}). \quad (102)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} b &= \frac{l + \frac{1}{2}}{k}, \\ db &\rightarrow \Delta b = \frac{\Delta l}{k} = \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (103)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{l=0}^{kR} \frac{\pi}{k^2} (2l + 1) = \frac{\pi}{k^2} (kR(kR + 1) + kR + 1) = \\ &= \frac{\pi}{k^2} (kR + 1)^2 = \pi(R + \lambda)^2, \end{aligned} \quad (104)$$

где  $k$  – волновой вектор падающего нейтрона, а  $\lambda$  – соответствующая ему длина волны. Мы видим, что эта величина монотонно убывает с ростом энергии налетающего нейтрона. Однако экспериментально наблюдаются осцилляции в зависимости сечения от энергии. Это указывает на то, что существует достаточно интенсивная прошедшая волна, которая интерферирует с падающей волной позади ядра. Следовательно, длина свободного пробега нейтрона в ядре не мала. Полное сечение  $\sigma_{\text{tot}}$  должно быть максимальным, когда прошедшая волна оказывается в фазе с падающей волной позади ядра, т.е.

$$(K_R - k)R = 2\pi n, \quad (105)$$



где  $n$  – целое число. Из разности фаз между двумя максимумами определяется величина  $K_R$ , а из амплитуды осцилляций –  $K_I$ . Экспериментальные данные указывают на то, что  $R/\Lambda \approx 1.6$ .

## 7. Модель ферми–газа

Сравнительно большая длина свободного пробега нуклонов в ядре свидетельствует о том, что взаимодействие между ними приводит в основном к появлению среднего потенциала ядра, движение нуклонов в котором можно считать независимым.

Рассмотрим движение нуклонов в тяжелом ядре и в первом приближении пренебрежем поверхностными эффектами. В результате мы получаем модель ферми–газа.

Пусть  $\Omega$  – объем области, в которой потенциал ядра постоянен. В этом случае одночастичные состояния нуклонов описываются плоскими волнами

$$\varphi_\nu = \Omega^{-1/2} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \chi_\sigma \xi_\tau, \quad \sigma = \pm 1/2, \quad \tau = \pm 1/2. \quad (106)$$

Здесь  $\chi_\sigma$  – спиновая часть волновой функции, а  $\xi_\tau$  – изоспиновая функция. Поскольку мы пренебрегли поверхностными эффектами, допустимые значения  $\vec{k}$  определяются периодическими граничными условиями

$$\varphi_\nu(x, y, z) = \varphi_\nu(x + L, y, z) = \varphi_\nu(x, y + L, z) = \varphi_\nu(x, y, z + L), \quad (107)$$

где  $L^3 = \Omega$ . Из этих граничных условий следуют возможные собственные значения компонент вектора  $\vec{k}$ :

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L} n_z, \quad (108)$$

где  $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . При расчете различных величин удобно использовать следующее правило перехода от суммирования по квантовым числам

$n_x, n_y, n_z$  к интегрированию:

$$\sum_{n_x, n_y, n_z} \leftrightarrow \Omega \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \dots = \Omega \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \dots \quad (109)$$

Волновая функция основного состояния ферми-газа является произведением волновых функций состояний с наимизшей энергией  $\varphi_\nu$ . Граница, разделяющая заполненные и незаполненные одночастичные состояния в основном состоянии ферми-газа, называется поверхностью Ферми. Соответствующие ей волновые числа обозначаются символами  $k_F^{(p)}$  и  $k_F^{(n)}$  для протонов и нейтронов. Эти величины находятся из условия равенства числа занятых состояний числам протонов  $Z$  и нейтронов  $N$  соответственно:

$$\begin{aligned} Z &= 2 \int_0^{k_F^{(p)}} \frac{\Omega d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{\Omega (k_F^{(p)})^3}{3\pi^2}, \\ N &= 2 \int_0^{k_F^{(n)}} \frac{\Omega d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{\Omega (k_F^{(n)})^3}{3\pi^2}. \end{aligned} \quad (110)$$

Множитель 2 перед интегралом учитывает то обстоятельство, что при каждом значении  $\vec{k}$  возможны два значения спина. Взяв экспериментальные значения плотностей частиц, можно получить среднее для протонов и нейтронов ( $Z = N = A/2$ ) значение  $k_F = 1.36$  ферми<sup>-1</sup>. Энергия Ферми определяется формулой

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \approx 37 \text{ МэВ}. \quad (111)$$

Это максимальная кинетическая энергия частиц ферми-газа. Полную кинетическую энергию ферми-газа получим суммированием по занятым состояниям:

$$\epsilon = 2 \int_0^{k_F^{(p)}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{\Omega d^3 k}{(2\pi)^3} + 2 \int_0^{k_F^{(n)}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{\Omega d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{3}{5} (Z \epsilon_F^{(p)} + N \epsilon_F^{(n)}). \quad (112)$$

Учтем теперь поверхностные эффекты. Будем предполагать, что потенциальная яма обладает сферической симметрией. В этом случае

$$\begin{aligned} \varphi_\nu &\equiv \varphi_{klm} \sim j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ j_l(kr) &\approx \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!}, \quad kr \ll \sqrt{2(2l+3)}, \\ j_l(kr) &\approx \frac{\sin(kr - l\frac{\pi}{2})}{kr}, \quad kr \gg l. \end{aligned} \quad (113)$$

Предположим, что стенки потенциальной ямы непроницаемы, т.е. волновые функции  $\varphi_{klm}$  обращаются в нуль на границе потенциальной ямы. Полагаем  $kR \gg l$ . Тогда

$$k_n R - l \frac{\pi}{2} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (114)$$

и

$$k_n = \frac{\pi}{R} \left( n + \frac{l}{2} \right) = \frac{\pi}{2R} (2n + l). \quad (115)$$

Энергии одночастичных уровней в потенциальной яме даются выражением

$$\varepsilon(k_n, l) = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}. \quad (116)$$

Мы видим, что спектр одночастичных состояний вырожден. Уровни, для которых величина  $(2n + l)$  принимает одно и то же значение, совпадают по энергии, хотя имеют разные значения орбитального момента  $l$ .

При рассмотрении каких вопросов модель ферми-газа может считаться хорошей основой? При небольших энергиях возбуждения главную роль играют коллективные степени свободы, описывающие когерентное движение большого числа нуклонов. Однако число коллективных мод мало по сравнению с полным числом степеней свободы ядра. Поэтому при больших энергиях возбуждения преобладают одночастичные степени свободы и модель ферми-газа может быть полезной как основа при рассмотрении усредненных характеристик спектра возбуждения при достаточно больших энергиях. В качестве примера рассмотрим такую характеристику, как плотность уровней ядра.

Прежде всего получим ряд общих соотношений. Пусть  $\Gamma(U)$ —число квантовых состояний с энергией, меньшей или равной  $U$ . Тогда число состояний в интервале  $U, U + dU$  равно

$$\frac{d\Gamma(U)}{dU} dU. \quad (117)$$

Пусть  $w(U)$ —функция распределения заданного макросостояния по энергии. Чтобы получить вероятность  $W(U)dU$  того, что подсистема имеет энергию в

интервале  $U, U+dU$ , нужно умножить распределение  $w(U)$  на число квантовых состояний с энергией, находящейся в этом интервале:

$$W(U) = \frac{d\Gamma(U)}{dU} w(U). \quad (118)$$

Условие нормировки имеет вид

$$\int W(U) dU = 1. \quad (119)$$

Из статистической физики известно, что функция  $W(U)$  имеет чрезвычайно резкий максимум при  $U = \bar{E}$ . И хотя число нуклонов в ядрах не столь велико, как в макроскопических объектах, мы используем это предположение для получения качественных оценок.

Введем в рассмотрение ширину этого максимума  $\Delta E$ . Тогда

$$W(\bar{E}) \Delta E = 1. \quad (120)$$

Число состояний системы в интервале энергий  $\Delta E$  равно

$$\Delta\Gamma = \frac{d\Gamma(U)}{dU} \Big|_{U=\bar{E}} \cdot \Delta E. \quad (121)$$

Величина  $\Delta\Gamma$  называется статистическим весом макроскопического состояния, а ее логарифм  $S = \ln \Delta\Gamma$  – энтропией. По самому своему определению  $\Delta\Gamma = \exp(S(U))$  есть число состояний системы, приходящихся на интервал  $\Delta E$ . Разделив  $\Delta E$  на  $\Delta\Gamma$ , мы получим среднее расстояние между соседними уровнями. А обратная величина является плотностью состояний

$$\rho(U) = \frac{\exp(S(U))}{\Delta E}. \quad (122)$$

Температура системы дается соотношением

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}. \quad (123)$$

Рассмотрим интеграл  $\int e^{S(E)-E/T} dE$ . Подынтегральное выражение имеет резкий максимум при значении  $E$ , соответствующем температуре  $T$ , с шириной  $\Delta E$ , введенной ранее. Обозначим это значение через  $U$ . Итак,

$$\int e^{S(E)-E/T} dE = e^{S(U)-U/T} \Delta E. \quad (124)$$

Тогда

$$\Delta E = \int e^{S(E)-S(U)-\frac{E-U}{T}} dE. \quad (125)$$

Так как подынтегральное выражение имеет резкий максимум при  $E = U$ , показатель экспоненты можно разлагать вблизи  $E = U$ :

$$S(E) = S(U) + \frac{dS(U)}{dU}(E-U) + \frac{1}{2} \frac{d^2S(U)}{dU^2}(E-U)^2. \quad (126)$$

Подставляя этот результат в выражение для  $\Delta E$  и используя (123), получаем

$$\Delta E = \int e^{\frac{1}{2} \frac{d^2S(U)}{dU^2}(E-U)^2} dE. \quad (127)$$

Далее из (123) следует

$$\frac{d^2S(U)}{dU^2} = \frac{d}{dU} \left( \frac{1}{T} \right) = -\frac{1}{T^2} \frac{1}{dU/dT}. \quad (128)$$

Используя это соотношение, находим

$$\Delta E = \sqrt{2\pi} T \sqrt{\frac{dU}{dT}}. \quad (129)$$

Этот результат, а также уравнения (122) и (123) позволяют найти выражение для  $\rho(U)$ , если известна зависимость  $U$  от  $T$ .

Найдем теперь связь энергии возбуждения  $U$  с температурой  $T$ , используя модель ферми-газа.

В модели ферми-газа энергия основного состояния ядра дается выражением

$$U_{gs} = \int_0^{k_F} \frac{\Omega d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (130)$$

Это выражение можно переписать так:

$$U_{gs} = \int_0^\infty \frac{\Omega d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} n_k(g_s), \quad (131)$$

где  $n_k(g_s)$ —число заполнения уровня с импульсом  $k$  в основном состоянии ядра.

Если ядро возбуждено, то его энергия равна  $(U_{gs} + U)$ , где  $U$ —энергия возбуждения, а числа заполнения определены выражением

$$n_k = \frac{1}{1 + e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{T}}}, \quad (132)$$

то

$$U_{gs} + U = \int_0^\infty \frac{\Omega d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{1}{1 + e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{T}}}. \quad (133)$$

В (132)  $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ , а  $T$ -температура, соответствующая энергии возбуждения  $U$ . При вычислении интеграла в (132) удобно воспользоваться аппроксимацией

$$\frac{1}{1 + e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{T}}} \rightarrow \Theta(\varepsilon_F - \varepsilon) - \frac{\pi^2}{6} T^2 \delta'(\varepsilon_F - \varepsilon). \quad (134)$$

Тогда мы получаем следующий результат:

$$U = \frac{\pi^2}{6} \left( \frac{r_0^3 k_F^3}{\pi} \frac{A}{\varepsilon_F} \right) T^2. \quad (135)$$

Введем обозначение

$$g_0 = \frac{r_0^3 k_F^3}{\pi} \frac{A}{\varepsilon_F} \approx 1.38 \frac{A}{\varepsilon_F}. \quad (136)$$

Тогда

$$T = \sqrt{\frac{U}{\frac{\pi^2}{6} g_0}}. \quad (137)$$

Используя (123), находим

$$S = \int \frac{d\Gamma}{T} \frac{\pi^2}{3} g_0 T = 2\sqrt{\frac{\pi^2}{6} g_0 U}. \quad (138)$$

Из (129) следует

$$\Delta E(U) = \sqrt{2\pi} T \sqrt{\frac{\pi^2}{3} g_0 T} = 2\sqrt{\pi} \frac{U^{3/4}}{\left(\frac{\pi^2}{6} g_0\right)^{1/4}}. \quad (139)$$

В результате мы получаем следующее выражение для плотности уровней:

$$\rho(U) = \frac{\left(\frac{\pi^2}{6} g_0\right)^{1/4}}{2\sqrt{\pi} U^{3/4}} e^{2\sqrt{\frac{\pi^2}{6} g_0 U}}. \quad (140)$$

Мы видим, что плотность уровней ядра резко возрастает с увеличением энергии возбуждения.

В заключение этого раздела получим выражение для среднего числа частиц и дырок  $\langle n \rangle$  в возбужденном состоянии ядра:

$$\langle n \rangle = \sum_{\nu < \nu_F} (1 - n(\nu)) + \sum_{\nu > \nu_F} n(\nu) = 2 \sum_{\nu < \nu_F} (1 - n(\nu)). \quad (141)$$

В системе фермионов с температурой  $T$

$$n_\nu = (1 + \exp((\varepsilon(\nu) - \varepsilon_F)/T))^{-1}. \quad (142)$$

Подставляя (142) в (141), получаем

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= 2 \sum_{\nu < \nu_F} \left( 1 - \frac{1}{1 + \exp((\varepsilon(\nu) - \varepsilon_F)/T)} \right) = \\ &= 2 \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \left( 1 - \frac{1}{1 + \exp((\varepsilon(\nu) - \varepsilon_F)/T)} \right) \sum_{\nu} \delta(\varepsilon - \varepsilon_\nu) = \\ &= 2 \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon g(\varepsilon) \left( 1 - \frac{1}{1 + \exp((\varepsilon(\nu) - \varepsilon_F)/T)} \right) = \\ &= 2T \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon g(\varepsilon) \frac{d}{d\varepsilon} \ln \left( 1 + \exp\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{T}\right) \right) \approx \\ &\approx 2g_0 T \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} \ln \left( 1 + \exp\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{T}\right) \right) = \\ &= 2g_0 T (\ln 2 - \exp(-\varepsilon_F/T)) \quad . \end{aligned} \quad (143)$$

При  $T \ll \varepsilon_F$  получаем

$$\langle n \rangle = 2 \ln 2 g_0 T \quad (144)$$

и

$$\frac{E}{\langle n \rangle} = \frac{\pi^2 g_0 T^2}{12 \ln 2 g_0 T} \approx 1.2T. \quad (145)$$

## 8. Модель жидкой капли. Обобщенная модель ядра

Такие свойства ядра, как насыщение ядерных сил, несжимаемость, хорошо выделенная поверхность, указывают на сходство атомного ядра с обычными жидкостями. В то же время имеются и существенные отличия. В обычных

жидкостях среднее расстояние между молекулами соответствует положению минимума потенциальной энергии взаимодействия двух частиц. Для ядра это означало бы, что среднее расстояние между нуклонами равно 1.0 ферми. В действительности это расстояние равно 2.4 ферми. Причиной столь существенного различия являются принцип Паули и принцип неопределенности. Полная энергия связи равна алгебраической сумме полной кинетической и полной потенциальной энергий. Вследствие принципа Паули, принципа неопределенности и существования отталкивательной сердцевины в двухчастичном нуклон-нуклонном потенциале кинетическая энергия резко возрастает с уменьшением расстояния между частицами. В результате у полной энергии возникает минимум при расстоянии между частицами  $d \approx 2.4$  ферми, глубина которого мала по сравнению с глубиной минимума у полной потенциальной энергии.

Итак, начнем строить модель, описывающую динамику поверхности ядра, поскольку объем ядра при малых энергиях возбуждения можно считать неизменным. Так как мы допускаем, что поверхность может принимать произвольную форму, расстояние от центра масс ядра до его поверхности  $R(\vartheta, \varphi)$  является произвольной функцией углов, характеризующих положение этой точки в сферических координатах. Будем пренебрегать отличием от нуля толщины диффузного слоя поверхности, т.е. считать, что поверхность ядра четко определена. Функция  $R(\vartheta, \varphi)$  может быть разложена в ряд по сферическим функциям  $Y_{\lambda,\mu}(\vartheta, \varphi)$ :

$$R(\vartheta, \varphi) = R_0 \left( 1 + \alpha_{00} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda,\mu}^* Y_{\lambda,\mu}(\vartheta, \varphi) \right). \quad (146)$$

В этом выражении  $R_0$ —радиус сферы, имеющей такой же объем  $V$ , что и ядро, ограниченное поверхностью  $R(\vartheta, \varphi)$ , т.е.  $V = \frac{4\pi}{3} R_0^3$ . Параметры  $\alpha_{\lambda,\mu}$  характеризуют форму поверхности ядра. Эти параметры, однако, не являются независимыми, а должны удовлетворять двум условиям. Первое условие состоит в том, что при любых изменениях формы поверхности ядра его объем должен оставаться неизменным и равным  $\frac{4\pi}{3} R_0^3$ . Второе условие состоит в том, что



при изменении формы поверхности ядра положение центра масс ядра должно оставаться неизменным. Первое условие запишется так:

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{3} R_0^3 &= \int_V d^3 r = \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(\vartheta, \varphi)} r^2 dr = \\
&= \frac{R_0^3}{3} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left( 1 + \alpha_{00} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda, \mu}^* Y_{\lambda, \mu}(\vartheta, \varphi) \right)^3 = \\
&= \frac{R_0^3}{3} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left( 1 + 3\alpha_{00} + 3 \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \alpha_{\lambda, \mu}^* Y_{\lambda, \mu}(\vartheta, \varphi) + \right. \\
&\quad \left. + 3 \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\lambda'} \sum_{\mu'} \alpha_{\lambda, \mu}^* \alpha_{\lambda', \mu'} Y_{\lambda, \mu}(\vartheta, \varphi) Y_{\lambda', \mu'}^*(\vartheta, \varphi) + \dots \right). \quad (147)
\end{aligned}$$

Предполагая отклонения формы ядра от сферической небольшими, т.е. считая  $\alpha_{\lambda\mu}$  малыми величинами, мы ограничимся в выражении под интегралом слагаемыми, содержащими  $\alpha_{\lambda\mu}$  ( $\lambda = 2, 3, \dots$ ) в степени не выше второй, а  $\alpha_{00}$  — в степени не выше первой. Как мы убедимся ниже,  $\alpha_{00}$  являются величинами второго порядка малости по сравнению с  $\alpha_{\lambda\mu}$  ( $\lambda = 2, 3, \dots$ ).

Воспользовавшись соотношением ортогональности для сферических функций

$$\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{\lambda, \mu}(\vartheta, \varphi) Y_{\lambda', \mu'}^*(\vartheta, \varphi) = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}, \quad (148)$$

получаем из условия сохранения объема ядра

$$\frac{4\pi}{3} R_0^3 = \frac{R_0^3}{3} \left( 4\pi(1 + 3\alpha_{00}) + 3 \sum_{\lambda} \sum_{\mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right), \quad (149)$$

откуда следует, что

$$\alpha_{00} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2. \quad (150)$$

Условие сохранения неизменным положения центра масс ядра записывается следующим образом:

$$\int \vec{r} d^3 r = 0 \quad (151)$$

или

$$\int r Y_{1\mu} d^3 r = 0 \quad (152)$$

при любом значении  $\mu$ . Действуя, как и в предыдущем случае, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{1\mu}(\vartheta, \varphi) \int_0^{R(\vartheta, \varphi)} r^3 dr = \\ &= \frac{R_0^4}{4} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{1\mu}(\vartheta, \varphi) \left( 1 + \alpha_{00} + \sum_\lambda \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi) \right)^4 = \\ &= \frac{R_0^4}{4} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{1\mu}(\vartheta, \varphi) \left( 1 + 4\alpha_{00} + 4 \sum_\lambda \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + 6 \sum_\lambda \sum_\mu \sum_{\lambda'} \sum_{\mu'} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi) \alpha_{\lambda'\mu'} Y_{\lambda'\mu'}^*(\vartheta, \varphi) + \dots \right). \quad (153) \end{aligned}$$

Чтобы вычислить интеграл по углам  $\vartheta$  и  $\varphi$ , нам, кроме соотношения ортогональности для сферических функций, понадобится еще и следующее соотношение:

$$Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi) Y_{\lambda'\mu'}(\vartheta, \varphi) = \sum_{LM} \sqrt{\frac{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)}{4\pi(2L+1)}} C_{\lambda 0 \lambda' 0}^{L 0} C_{\lambda\mu\lambda'\mu'}^{LM} Y_{LM}. \quad (154)$$

Воспользовавшись этим соотношением, мы получаем из (153)

$$\alpha_{1\mu} = \sum_\lambda (-1)^{\lambda+1} 3 \left( \frac{\lambda+1}{4\pi} \right)^{1/2} (\alpha_\lambda \alpha_{\lambda+1})_{1\mu}. \quad (155)$$

Итак, независимыми являются только параметры  $\alpha_{\lambda\mu}$  с  $\lambda \geq 2$ . Наибольший интерес представляют  $\alpha_{2\mu}$  и  $\alpha_{3\mu}$ , описывающие квадрупольные и октупольные колебания поверхности ядра.

Рассмотрим сначала квадрупольные колебания поверхности, описываемые с помощью  $\alpha_{2\mu}$ , где  $\mu$  принимает значения  $\mu = 0, \pm 1, \pm 2$ . Если равновесная форма ядра не обладает сферической симметрией, то удобно ввести вместо переменных  $\alpha_{2\mu}$  другие пять переменных: три угла Эйлера, характеризующие ориентацию деформированного ядра в лабораторной системе координат, и две внутренние переменные, описывающие форму ядра:

$$\alpha_{2\mu} = D_{\mu 0}^2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) a_{20} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( D_{\mu 2}^2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) + D_{\mu-2}^2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \right) a_{22}. \quad (156)$$

Вместо параметров  $a_{20}$  и  $a_{22}$  часто используют переменные  $\beta$  и  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} a_{20} &= \beta \cos \gamma, \\ a_{22} &= \beta \sin \gamma. \end{aligned} \quad (157)$$

Для того чтобы получить представление о геометрическом смысле переменных  $\beta$  и  $\gamma$ , подставим (156) и (157) в выражение для  $R(\vartheta, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} R(\vartheta, \varphi) - R_0 &= R_0 \sum_{\mu} \sum_K D_{\mu K}^2(\vec{\theta}) a_{2K} Y_{2\mu}(\vartheta, \varphi) = \\ &= R_0 \sum_{\mu, K} D_{\mu K}^2(\vec{\theta}) Y_{2\mu}(\vartheta, \varphi) a_{2K} = \\ &= R_0 \left( Y_{20} a_{20} + \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{22} + Y_{2-2}) a_{22} \right) = \\ &= R_0 \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left( \cos \gamma (3 \cos^2 \theta - 1) + \sqrt{3} \sin \gamma \sin^2 \theta \cos 2\phi \right). \end{aligned} \quad (158)$$

Отклонения значений радиусов вдоль координатных осей от величины  $R_0$  даются выражениями

$$\begin{aligned} \delta R_1 &\equiv R\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - R_0 = R_0 \beta \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right), \\ \delta R_2 &\equiv R\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - R_0 = R_0 \beta \cos\left(\gamma + \frac{2\pi}{3}\right), \\ \delta R_3 &\equiv R(0, 0) - R_0 = R_0 \beta \cos(\gamma). \end{aligned} \quad (159)$$

При  $\beta \neq 0$  и  $\gamma = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$  мы имеем вытянутый сфероид с осью симметрии соответственно 3, 1 или 2. При  $\gamma = 60^\circ, 180^\circ$  и  $300^\circ$  имеем сплюснутый сфероид с осью симметрии соответственно 2, 3 или 1. Благодаря наличию дискретных симметрий можно переименованием осей свести один случай к другому. Поэтому для описания всех форм, связанных с квадрупольной деформацией, достаточно рассматривать лишь интервал изменений  $\gamma$ :  $0^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$ .

Итак, мы видим, что в случае сферических ядер удобно использовать в качестве динамических переменных  $\alpha_{2\mu}$ . В случае же деформированных ядер естественно ввести в рассмотрение переменные  $\beta$ ,  $\gamma$  и углы Эйлера.

## 0 9. Поверхностные колебания относительно

### сферически-симметричной формы ядра

Начнем с классического рассмотрения, т.е. будем предполагать, что  $\alpha_{\lambda\mu}$  являются динамическими переменными (обобщенными координатами), зависящими от времени  $t$ . Тогда по аналогии с выражением для кинетической энергии точечной массы представим кинетическую энергию колебаний относительно сферически-симметричной равновесной формы  $T$  как

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu} B_{\lambda} |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2. \quad (160)$$

Импульс, соответствующий  $\alpha_{\lambda\mu}$ , имеет вид

$$\pi_{\lambda\mu} = B_{\lambda} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^*. \quad (161)$$

Потенциальная энергия  $V$  является функцией  $\alpha_{\lambda\mu}$ , инвариантной относительно вращения. Предполагая, что  $\alpha_{\lambda\mu}$ , т.е. отклонения от равновесной формы, малы, ограничимся в выражении для  $V$  только квадратичным членом:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu} C_{\lambda} |\alpha_{\lambda\mu}|^2. \quad (162)$$

В итоге полная энергия  $H = T + V$  равна

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu} B_{\lambda} |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu} C_{\lambda} |\alpha_{\lambda\mu}|^2. \quad (163)$$

Перейдем теперь к квантово-механическому рассмотрению, полагая, что

$$[\pi_{\lambda\mu}, \alpha_{\lambda'\mu'}] = -i\hbar \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}, \quad (164)$$

где  $\pi_{\lambda\mu}$ —импульс, а  $\alpha_{\lambda'\mu'}$ —координата. Кроме того,

$$[\alpha_{\lambda\mu}, \alpha_{\lambda'\mu'}] = [\pi_{\lambda\mu}, \pi_{\lambda'\mu'}] = 0. \quad (165)$$

Для полной энергии, т.е. гамильтониана  $H$ , получаем выражение

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu} \frac{1}{B_\lambda} \pi_{\lambda\mu}^+ \pi_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu} C_\lambda \alpha_{\lambda\mu}^+ \alpha_{\lambda\mu}. \quad (166)$$

Найдем собственные векторы этого гамильтониана. Пусть  $|0\rangle$  будет нижайшим по энергии собственным состоянием гамильтониана с энергией  $E_0$ :

$$H|0\rangle = E_0|0\rangle. \quad (167)$$

Предположим, что мы нашли оператор  $b_{\lambda\mu}^+$ , удовлетворяющий уравнению

$$[H, b_{\lambda\mu}^+] = \hbar\omega_\lambda b_{\lambda\mu}^+. \quad (168)$$

Тогда  $b_{\lambda\mu}^+|0\rangle$  также будет собственным вектором  $H$ . Действительно,

$$Hb_{\lambda\mu}^+|0\rangle = (Hb_{\lambda\mu}^+ - b_{\lambda\mu}^+H + b_{\lambda\mu}^+H)|0\rangle = ([H, b_{\lambda\mu}^+] + b_{\lambda\mu}^+H)|0\rangle. \quad (169)$$

Используя (167) и (168), получаем

$$Hb_{\lambda\mu}^+|0\rangle = (\hbar\omega_\lambda b_{\lambda\mu}^+ + b_{\lambda\mu}^+E_0)|0\rangle = (\hbar\omega_\lambda + E_0)b_{\lambda\mu}^+|0\rangle. \quad (170)$$

Таким образом,  $b_{\lambda\mu}^+|0\rangle$  является собственным вектором возбужденного состояния ядра с энергией возбуждения  $\hbar\omega_\lambda$ .

Найдем энергию возбуждения  $\hbar\omega_\lambda$  и выражение для оператора  $b_{\lambda\mu}^+$  в терминах операторов координаты и импульса. Для этого вычислим следующие коммутаторы:

$$[H, \alpha_{\lambda\mu}] = -\frac{i\hbar}{B_\lambda} \pi_{\lambda\mu}^+, \quad (171)$$

$$[H, \pi_{\lambda\mu}^+] = i\hbar C_\lambda \alpha_{\lambda\mu}. \quad (172)$$

Из последних двух соотношений видно, что оператор  $b_{\lambda\mu}^+$  является линейной комбинацией операторов  $\alpha_{\lambda\mu}$  и  $\pi_{\lambda\mu}^+$ . Будем искать  $b_{\lambda\mu}^+$  в виде

$$b_{\lambda\mu}^+ = \xi \alpha_{\lambda\mu} + \eta \pi_{\lambda\mu}^+, \quad (173)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  не известные пока коэффициенты. Подставив это выражение в уравнение (168), получаем

$$b_{\lambda\mu}^+ = \zeta \left( \sqrt{\frac{B_\lambda \omega_\lambda}{2\hbar}} \alpha_{\lambda\mu} - i \frac{1}{\sqrt{2\hbar B_\lambda \omega_\lambda}} \pi_{\lambda\mu}^+ \right), \quad (174)$$

где  $\omega_\lambda = \sqrt{\frac{C_\lambda}{B_\lambda}}$ , а  $\zeta$  – нормировочный множитель, который нельзя определить с помощью уравнения (168). Необходимо, чтобы оператор  $b_{\lambda\mu}^+$  и эрмитово сопряженный ему оператор  $b_{\lambda\mu}$  удовлетворяли бозонным коммутационным соотношениям, т.е.

$$[b_{\lambda\mu}, b_{\lambda'\mu'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}, \quad (175)$$

$$[b_{\lambda\mu}^+, b_{\lambda'\mu'}^+] = [b_{\lambda\mu}, b_{\lambda'\mu'}] = 0. \quad (176)$$

Соотношение (176) автоматически удовлетворяется подстановкой (174), а из (175) следует, что  $\zeta=1$ . Можно получить и обратные соотношения:

$$\alpha_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{\hbar}{2B_\lambda \omega_\lambda}} (b_{\lambda\mu}^+ + (-1)^\mu b_{\lambda-\mu}), \quad (177)$$

$$\pi_{\lambda\mu}^+ = i \sqrt{\frac{\hbar B_\lambda \omega_\lambda}{2}} ((-1)^\mu b_{\lambda-\mu}^+ - b_{\lambda\mu}). \quad (178)$$

Подставив (177), (178) в гамильтониан, получаем

$$H = \frac{5}{2} \sum_\lambda \hbar \omega_\lambda + \sum_{\lambda,\mu} \hbar \omega_\lambda b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda\mu}. \quad (179)$$

Состояние  $|0\rangle$  будет нижайшим по энергии собственным состоянием этого гамильтониана, если выполняется условие

$$b_{\lambda\mu}|0\rangle = 0. \quad (180)$$

Так как оператор  $b_{\lambda\mu}^+$  является оператором рождения бозона с угловым моментом  $\lambda$  и его проекцией на ось  $z$  лабораторной системы координат  $\mu$ , состояние  $|0\rangle$  в силу соотношения (180) является вакуумом бозонов.

Итак, нам известны нижайшее по энергии, т.е. основное состояние системы  $|0\rangle$ , и однобозонные (ниже будем называть их, как это принято в ядерной физике, однофононными) возбужденные состояния  $b_{\lambda\mu}^+|0\rangle$ .

Покажем, что двухфононные состояния  $b_{\lambda\mu}^+b_{\lambda'\mu'}^+|0\rangle$  также являются собственными состояниями гамильтониана  $H$ :

$$Hb_{\lambda\mu}^+b_{\lambda'\mu'}^+|0\rangle = \frac{5}{2} \sum_{\lambda_1} \hbar\omega_{\lambda_1} b_{\lambda\mu}^+b_{\lambda'\mu'}^+|0\rangle + \sum_{\lambda_1, \mu_1} \hbar\omega_{\lambda_1} b_{\lambda_1\mu_1}^+b_{\lambda_1\mu_1}^+b_{\lambda\mu}^+b_{\lambda'\mu'}^+|0\rangle. \quad (181)$$

Используя правила коммутации операторов  $b_{\lambda\mu}^+$ ,  $b_{\lambda\mu}$  и равенство  $b_{\lambda\mu}|0\rangle = 0$ , получаем

$$Hb_{\lambda\mu}^+b_{\lambda'\mu'}^+|0\rangle = \left(\frac{5}{2} \sum_{\lambda_1} \hbar\omega_{\lambda_1} + \hbar\omega_{\lambda} + \hbar\omega_{\lambda'}\right) b_{\lambda\mu}^+b_{\lambda'\mu'}^+|0\rangle. \quad (182)$$

При построении собственных векторов двухфононных состояний из двух фононов одной мультипольности нужно учитывать перестановочную симметрию бозонных операторов. Например, состояния  $b_{22}^+b_{20}^+|0\rangle$  и  $b_{20}^+b_{22}^+|0\rangle$  тождественны.

Рассмотрим все возможные состояния вида  $b_{2\mu}^+b_{2\mu'}^+|0\rangle$ . Проекции  $\mu$  и  $\mu'$  принимают значения  $0, \pm 1, \pm 2$ . Тогда проекция полного углового момента двухфононного состояния  $M$ , равная  $\mu + \mu'$ , может принимать следующие положительные значения: 4, 3, 2 (два состояния), 1 (два состояния), 0 (три состояния). Присутствие проекции  $M = 4$  означает, что среди возможных квадрупольных двухфононных состояний есть состояние с угловым моментом  $L = 4$ . Но такое состояние имеет проекции углового момента, равные  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ . Убрав их, мы остаемся со следующими возможными значениями  $M$ : 2, 1, 0, 0, -1, -2. Присутствие в этом наборе проекции  $M = 2$  означает, что среди оставшихся двухфононных квадрупольных состояний есть состояние с угловым моментом  $L = 2$ . Но такое состояние имеет проекции углового момента  $L$ , равные  $0, \pm 1, \pm 2$ . Убрав их, мы остаемся с одним значением  $M = 0$ . Оно принадлежит состоянию с угловым моментом  $L=0$ . Итак, состояние, образованное двумя квадрупольными фононами, может иметь угловые моменты, равные 0, 2, 4.

Вследствие перестановочной симметрии, угловой момент не может принимать значения 1 или 3.

Такой же результат получается автоматически, если при построении двухфононных состояний использовать коэффициенты Клебша–Гордона  $C_{lm'l'm'}^{LM}$ , которые обладают следующим свойством симметрии:

$$C_{lm'l'm'}^{LM} = (-1)^{L-l-l'} C_{l'm'l'm}^{LM}. \quad (183)$$

Двухфононное состояние строится так:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{mm'} C_{2m2m'}^{LM} b_{2m}^+ b_{2m'}^+ |0\rangle = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{mm'} (-1)^{L-2-2} C_{2m'2m}^{LM} b_{2m}^+ b_{2m'}^+ |0\rangle = \\ & = (-1)^L \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{mm'} C_{2m'2m}^{LM} b_{2m'}^+ b_{2m}^+ |0\rangle, \end{aligned} \quad (184)$$

где в последней строчке мы воспользовались тем, что бозонные операторы  $b_{2m}^+$  коммутируют друг с другом. Из этого равенства видно, что  $L$  может принимать только четные значения:  $L=0,2,4$ . Спектр трехфононных состояний, образованных квадрупольными фононами, включает состояния с  $L = 0, 2, 3, 4, 6$ . Спектр квадрупольных, октупольных и квадруполь–октупольных состояний включает и состояния отрицательной четности.

В гамильтониан (179) входят два параметра: массовый коэффициент  $B_\lambda$  и коэффициент жесткости  $C_\lambda$ . Они могут быть рассчитаны в рамках той или иной модели ядра. Ниже приведен расчет массового коэффициента  $B_\lambda$ , выполненный в рамках гидродинамической модели ядра. Чтобы найти  $B_\lambda$ , нужно рассчитать кинетическую энергию ядра. А для этого необходимо знать вектор скорости  $\vec{v}$  в каждой точке объема ядра. Сделаем это в предположении о безвихревом движении ядерной жидкости. В этом случае

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = 0, \quad (185)$$

т.е.

$$\vec{v} = -\nabla\Phi(\vec{r}), \quad (186)$$



где  $\Phi(\vec{r})$  – не известный пока потенциал поля скоростей, удовлетворяющий уравнению, которое следует из (186):

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = 0. \quad (187)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{\lambda,\mu} d_{\lambda,\mu}^* r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi), \quad (188)$$

где  $d_{\lambda,\mu}$  – произвольные пока коэффициенты. При малых деформациях на поверхности ядра, т.е. при  $r = R_0$ , радиальная скорость  $v_r$  равна

$$v_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=R_0} = \dot{R}(\theta, \varphi), \quad (189)$$

значит,

$$-\sum_{\lambda,\mu} d_{\lambda,\mu}^* \lambda R_0^{\lambda-1} Y_{\lambda\mu} = R_0 \sum_{\lambda,\mu} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda\mu}, \quad (190)$$

откуда следует, что

$$d_{\lambda,\mu} = -\frac{1}{\lambda} R_0^{2-\lambda} \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^*. \quad (191)$$

Кинетическая энергия  $T$  равна по определению

$$T = \frac{m}{2} \rho_0 \int (\vec{v}(\vec{r}))^2 d^3r = \frac{m}{2} \rho_0 \int |\nabla\Phi(\vec{r})|^2 d^3r, \quad (192)$$

где  $\rho_0$  – плотность нуклонов в ядре, а  $m$  – масса нуклона.

Поскольку  $\Delta\Phi(\vec{r}) = 0$ ,

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \rho_0 \int \nabla(\Phi^* \nabla\Phi) d^3r = \\ &= \frac{m}{2} \rho_0 \int_S \Phi^* \nabla\Phi d\vec{s} = \frac{m}{2} \rho_0 R_0^2 \int d\Omega (\Phi^* \frac{\partial\Phi}{\partial r})_{r=R_0} = \\ &= \frac{m}{2} \rho_0 R_0^2 \int d\Omega \sum_{\lambda,\mu} d_{\lambda\mu} R_0^\lambda Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \varphi) \cdot \sum_{\lambda',\mu'} d_{\lambda'\mu'}^* \lambda' R_0^{\lambda'-1} Y_{\lambda'\mu'} = \\ &= \frac{m}{2} \rho_0 \sum_{\lambda,\mu} R_0^{2\lambda+1} \lambda |d_{\lambda\mu}|^2 = \frac{m}{2} \rho_0 \sum_{\lambda,\mu} R_0^5 \frac{1}{\lambda} |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}^*|^2. \end{aligned} \quad (193)$$

Из этого следует, что

$$B_\lambda = \frac{m\rho_0 R_0^5}{\lambda} = \frac{3}{4\pi\lambda} AmR_0^2. \quad (194)$$

Аналогичным образом можно рассчитать и коэффициент жесткости  $C_\lambda$ . Вклад в этот коэффициент дают поверхностная и кулоновская энергии ядра:

$$C_\lambda = \frac{1}{4\pi}(\lambda-1)(\lambda+2)b - \frac{3(\lambda-1)e^2 Z^2}{2\pi(2\lambda+1)r_0 A^{1/3}}, \quad (195)$$

где  $b \approx 17$  МэВ.

Важной характеристикой коллективных квадрупольных возбуждений ядер являются квадрупольные моменты возбужденных состояний и вероятности электрических квадрупольных переходов (в публикациях на эту тему принято кратко писать: E2-переходов). Найдем выражение электрического оператора в терминах коллективных переменных  $\alpha_{2\mu}$ . По определению

$$\hat{Q}_{2\mu}^{(e)} = e \int_V \rho_p(\vec{r}) r^2 Y_{2\mu}(\theta, \varphi) d^3 r, \quad (196)$$

где  $\rho_p(\vec{r})$ — плотность распределения протонов в ядре. Предполагая, что  $\rho_p(\vec{r})$  постоянна внутри ядра, получаем

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{2\mu}^{(e)} &= e\rho_p \int d\Omega \int_0^{R(\theta, \varphi)} r^2 Y_{2\mu}(\theta, \varphi) r^2 dr = \\ &= e\rho_p \int d\Omega \frac{R(\theta, \varphi)^5}{5} Y_{2\mu}(\theta, \varphi) = \\ &= \frac{1}{5} e\rho_p R_0^5 \int d\Omega Y_{2\mu}(\theta, \varphi) (1 + \sum_\nu \alpha_{2\nu} Y_{2\nu}^*(\theta, \varphi))^5 = \\ &= e\rho_p R_0^5 \alpha_{2\mu} = e \frac{3}{4\pi} \left( \frac{4\pi}{3} \rho_p R_0^3 \right) R_0^2 \alpha_{2\mu} = \frac{3}{4\pi} eZ R_0^2 \alpha_{2\mu}. \end{aligned} \quad (197)$$

Вероятность радиационного распада какого-либо состояния ядра в секунду  $T(E2)$  связана с приведенной вероятностью перехода  $B(E2)$  соотношением

$$T(E2) = 1.22 \cdot 10^9 E^5 B(E2), \quad (198)$$

где энергия гамма-перехода  $E$  измеряется в МэВ, а приведенная вероятность  $B(E2)$ —в  $e^2 \cdot \text{ферми}^4$ .

Приведенная вероятность E2-перехода, например, из первого  $2^+$ -состояния в основное состояние определяется соотношением

$$B(E2; 0_1^+ \rightarrow 2_1^+) = \frac{1}{5} \sum_{\mu} | \langle 2_1^+ \mu | \hat{Q}_{2\mu} | 0_1^+ \rangle |^2. \quad (199)$$

В случае сферического ядра удобно выразить оператор квадрупольного момента через операторы фононов, воспользовавшись соотношением (177):

$$\hat{Q}_{2\mu} = \frac{3}{4\pi} eZR_0^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2B_2\omega_2}} (b_{2\mu}^+ + (-1)^\mu b_{2-\mu}). \quad (200)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle 2_1^+ \mu | \hat{Q}_{2\mu} | 0_1^+ \rangle &= \langle 0 | b_{2\mu} \frac{3}{4\pi} eZR_0^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2B_2\omega_2}} (b_{2\mu}^+ + (-1)^\mu b_{2-\mu}) | 0 \rangle = \\ &= \frac{3}{4\pi} eZR_0^2 \frac{1}{5} \sqrt{\frac{\hbar}{2B_2\omega_2}} \end{aligned} \quad (201)$$

и

$$B(E2; 0_1^+ \rightarrow 2_1^+) = \left( \frac{3}{4\pi} eZR_0^2 \right)^2 \frac{\hbar}{10B_2\omega_2}. \quad (202)$$

Энергии первых  $2^+$ -состояний четно-четных ядер  $E(2_1^+)$  и вероятности E2-переходов из первых  $2^+$ -состояний в основные состояния  $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$  дают очень важную информацию о структуре ядер. Если рассмотреть зависимости  $E(2_1^+)$  и  $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$  от массового  $A$  и зарядового  $Z$  чисел, то обнаружится, что вблизи так называемых магических чисел протонов и нейтронов, отвечающих наиболее стабильным ядрам с наибольшей энергией связи,  $E(2_1^+)$  принимает максимальное, а  $B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$  – минимальное значение по сравнению со значениями этих величин для соседних ядер. Это свойство используется при изучении ядер, удаленных от линии стабильности, которые ранее не были доступны для исследования. Оно служит указанием на то, какие числа протонов и нейтронов являются магическими, т.е. отвечают замкнутым оболочкам, в новых не исследованных ранее областях карты нуклидов. Дело в том, что в четно-четных ядрах первыми возбужденными состояниями являются, за редким исключением,  $2^+$ -состояния. Поэтому энергии возбуждения

первых  $2^+$ -состояний и их времена жизни, которые определяются вероятностями  $E2$ -переходов из этих состояний в основные состояния, являются характеристиками, экспериментальная информация о которых получается в первую очередь.

Подобно оператору квадрупольного момента можно рассчитать в рамках гидродинамической модели и оператор магнитного дипольного момента ядра

$$M_{1\mu} = \frac{Z}{A} \frac{e}{2mc} \int (\vec{r} \times m\vec{v}) d^3r = \frac{Z}{A} \frac{e}{2mc} \vec{I}, \quad (203)$$

где  $\vec{I}$  – оператор углового момента ядра. Итак,

$$M_{1\mu} = g_R \vec{I}, \quad (204)$$

где  $g_R = \frac{Z}{A}$  – гиромангнитное отношение (магнитный дипольный момент выражен в единицах ядерных магнетонов  $\frac{e}{2mc}$ ). Так как собственные состояния ядра являются одновременно и собственными состояниями оператора углового момента, мы видим, что в рамках гидродинамической модели отсутствуют магнитные дипольные ( $M1$ ) переходы между коллективными состояниями ядра. Это противоречит экспериментальным данным. Однако магнитные моменты отличны от нуля.

Важной характеристикой коллективных состояний являются энергетически взвешенные правила сумм, т.е. суммы произведений приведенных вероятностей переходов на энергии переходов из заданного состояния (как правило – из основного состояния) в состояние с угловым моментом, равным мультипольности перехода. Обратимся теперь к гамильтониану, описывающему гармонические квадрупольные колебания ядра:

$$H = \frac{1}{2B_2} \sum_{\mu} \pi_{2\mu}^+ \pi_{2\mu} + \frac{1}{2} C_2 \sum_{\mu} \alpha_{2\mu}^+ \alpha_{2\mu}, \quad (205)$$

и получим соотношение между энергиями и приведенными вероятностями перехода для электрических квадрупольных переходов. Нам понадобится для этих целей оператор  $E2$ -перехода

$$Q_{2\mu} = \frac{3}{4\pi} eZR_0^2 \alpha_{2\mu}. \quad (206)$$

Напомним, что

$$[\pi_{2\mu}, \alpha_{2\mu'}] = -i\hbar\delta_{\mu\mu'}. \quad (207)$$

Тогда

$$[H, Q_{2\mu}] = -\frac{3}{4\pi}eZR_0^2 \left( \frac{-i\hbar}{B_2} \right) \pi_{2\mu}^+ \quad (208)$$

и

$$[[H, Q_{2\mu}], Q_{2\mu}^+] = -\left( \frac{3}{4\pi}eZR_0^2 \right)^2 \left( \frac{\hbar^2}{B_2} \right). \quad (209)$$

Усредняя этот двойной коммутатор по основному состоянию гамильтониана  $|0\rangle$  и используя соотношение  $H|0\rangle = 0$  (т.е. принимая энергию основного состояния ядра равной нулю), получаем

$$\begin{aligned} \langle 0|[[H, Q_{2\mu}], Q_{2\mu}^+]|0\rangle &= \langle 0|HQ_{2\mu}Q_{2\mu}^+ - Q_{2\mu}HQ_{2\mu}^+ - Q_{2\mu}^+HQ_{2\mu} + \\ &+ Q_{2\mu}^+Q_{2\mu}H|0\rangle = -\langle 0|Q_{2\mu}HQ_{2\mu}^+ + Q_{2\mu}^+HQ_{2\mu}|0\rangle = \\ &= -2\sum_{i,j} \langle 0|Q_{2\mu}^+|2_i^+\mu\rangle \langle 2_i^+\mu|H|2_j^+\mu\rangle \langle 2_j^+\mu|Q_{2\mu}|0\rangle = \\ &= -2\sum_i E(2_i^+) |\langle 2_i^+\mu|Q_{2\mu}|0\rangle|^2 \approx -2E(2_1^+)B(E2; 0_1^+ \rightarrow 2_1^+), \end{aligned} \quad (210)$$

т.е.

$$E(2_1^+)B(E2; 0_1^+ \rightarrow 2_1^+) = \left( \frac{3}{4\pi}eZR_0^2 \right)^2 \left( \frac{\hbar^2}{2B_2} \right). \quad (211)$$

Из этого выражения видно, что величина произведения энергии возбуждения первого  $2^+$ -состояния на вероятность перехода из основного состояния в это состояние определяется только массовым коэффициентом, а само выражение может служить для экспериментального определения  $B_2$ . Подставляя в (211) выражение для  $B_2$ , полученное в рамках гидродинамической модели, получаем

$$E(2_1^+)B(E2; 0_1^+ \rightarrow 2_1^+) = \frac{3}{4\pi}e^2 \frac{\hbar^2 r_0^2}{m} Z^2 A^{-1/3}. \quad (212)$$

Экспериментальные данные указывают, однако, на иную зависимость этого произведения от массового числа  $A$ , а именно

$$E(2_1^+)B(E2; 0_1^+ \rightarrow 2_1^+) \sim Z^2 A^{-2/3}. \quad (213)$$

## 10. Обобщенная модель ядра. Вращательные и колебательные возбуждения деформированных ядер

В предыдущем параграфе мы использовали гамильтониан, потенциальная энергия деформации в котором описывалась квадратичной по  $\alpha_{2\mu}$  функцией

$$V = \frac{1}{2}C_2 \sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2 = \frac{1}{2}C_2\beta^2. \quad (214)$$

Однако возможна ситуация, когда потенциальная энергия деформации имеет минимум при  $\beta = \beta_0 \neq 0$ , амплитуда нулевых колебаний переменной  $\beta$  мала по сравнению с  $\beta_0$ . Это случай деформированных ядер, свойства которых существенно отличаются от свойств сферических ядер, которые мы анализировали ранее, взяв за основу гамильтониан (205).

При рассмотрении деформированных ядер удобнее анализировать гамильтониан, представленный в переменных  $\beta$  и  $\gamma$  и углах Эйлера. Этот гамильтониан имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B_2} \left( \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{I}_k^2}{4\beta^2 \sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} \right) + V(\beta, \gamma).$$

Потенциальная энергия  $V$  зависит только от двух ротационных инвариантов:  $\beta^2$  и  $\beta^3 \cos 3\gamma$ , а операторы  $\hat{I}_k$  удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{I}_1, \hat{I}_2] = -i\hat{I}_3, [\hat{I}_2, \hat{I}_3] = -i\hat{I}_1, [\hat{I}_3, \hat{I}_1] = -i\hat{I}_2. \quad (215)$$

Значения индекса  $k$  нумеруют оси системы координат, жестко связанной с ядром и называемой внутренней системой координат. Величины  $\mathfrak{S}_k \equiv 4B_2\beta^2 \sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)$  являются моментами инерции ядра. Мы знаем, что

значение  $\gamma=0$  отвечает аксиально-симметричной деформированной форме.

Именно такую форму имеет большинство изученных деформированных ядер, т.е. ядер, потенциальная энергия деформации которых имеет минимум при  $\beta = \beta_0$  и  $\gamma = 0$ . В этом случае  $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = 3B_2\beta_0^2 \equiv \mathfrak{S}$  и  $\mathfrak{S}_3 = 4B_2\beta_0^2\gamma^2$ . При  $\gamma \rightarrow 0$   $\mathfrak{S}_3 \rightarrow 0$ , что означает отсутствие коллективного вращения вокруг третьей оси. Ротационная часть гамильтониана принимает следующий вид:

$$H_{\text{rot}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\hbar^2 \hat{I}_k^2}{2\mathfrak{S}_k} = \frac{\hbar^2(\hat{I}_1^2 + \hat{I}_2^2)}{2\mathfrak{S}} = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{S}}(I(I+1) - \hat{I}_3^2). \quad (216)$$

Спектр возбужденных состояний принимает типично ротационный вид с характерными отношениями энергий возбуждения для состояний с разными значениями углового момента. Значения проекции углового момента на третью ось, которая в случае  $\gamma=0$  становится осью аксиальной симметрии, в ядерной физике принято обозначать символом  $K$ . Для основного состояния ядра  $K=0$  и энергии состояний ядра, принадлежащих ротационной полосе, образованной на основном состоянии, следующим образом зависят от углового момента  $I$ :

$$E^*(I) = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{S}}I(I+1). \quad (217)$$

Для ротационной полосы основного состояния  $I$  принимает значения  $I = 0, 2, 4, \dots$

Собственными функциями ротационного гамильтониана являются  $D$ -функции Вигнера  $D_{MK}^I(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ , где  $I$  обозначает угловой момент состояния,  $M$ -проекцию углового момента на ось  $z$  лабораторной системы координат, а  $K$ -проекцию углового момента на ось симметрии ядра.

Вибрационные возбуждения деформированного ядра, т.е. возбуждения, связанные с колебаниями формы ядра относительно равновесной формы, описываются динамическими переменными  $\beta - \beta_0$  и  $\gamma$ . Осцилляции  $\beta$  относительно равновесного значения  $\beta_0$  генерируют так называемые  $\beta$ -колебания ядра, а флуктуации  $\gamma$  -  $\gamma$ -колебания. Так как амплитуды таких колебаний малы, их можно рассматривать в гармоническом приближении.  $\beta$ -колебания связаны с возбуждением квантов колебаний - фононов, имеющих  $K=0$ . Фононы

$\gamma$ -колебаний характеризуются значением  $K=2$ . На каждом из вибрационных состояний базируется ротационная полоса. В итоге спектр возбужденных состояний деформированного аксиально-симметричного ядра описывается формулой

$$E^*(I, K, n_\beta, n_\gamma) = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{S}}(I(I+1) - K^2) + \hbar\omega_\beta n_\beta + \hbar\omega_\gamma n_\gamma. \quad (218)$$

Волновые функции собственных состояний деформированного аксиально-симметричного ядра имеют вид

$$\Psi_{IMK}(\beta, \gamma, \vec{\theta}) = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}} \left( D_{MK}^I(\vec{\theta}) + (-1)^I D_{M-K}^I(\vec{\theta}) \right) \varphi_{n_\beta, n_\gamma}(\beta, \gamma). \quad (219)$$

Приведем еще выражение для оператора электрического квадрупольного перехода  $Q_{2\mu}$ , которое в случае деформированного аксиально-симметричного ядра принимает вид

$$Q_{2\mu} = \frac{3}{4\pi} eZR_0^2 \left( D_{\mu 0}^2(\vec{\theta})\beta_0 + D_{\mu 0}^2(\vec{\theta})(\beta - \beta_0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(D_{\mu 0 2}^2(\vec{\theta}) + D_{\mu -2}^2(\vec{\theta}))\beta_0\gamma \right). \quad (220)$$

В этом выражении первое слагаемое ответственно за переходы внутри одной ротационной полосы. Второе слагаемое ответственно за переходы, связанные с изменением числа  $\beta$ -вибрационных фононов на единицу, а третье слагаемое генерирует переходы с изменением числа  $\gamma$ -вибрационных квантов на единицу.

Присутствие  $D$ -функции в выражении для волновой функции ядра позволяет получить ряд полезных соотношений для приведенных вероятностей  $E2$ -переходов. Покажем это на примере  $E2$ -перехода между состояниями ротационной полосы, базирующейся на основном состоянии ядра. Волновая функция состояния, принадлежащего основной ротационной полосе, имеет вид

$$\Psi_{IM}^{(gs)} = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} D_{M0}^I(\vec{\theta}) \varphi_{gs}(\beta, \gamma). \quad (221)$$



Тогда

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_{I'M'}^{(gs)} | Q_{2\mu} | \Psi_{IM}^{(gs)} \rangle = \\ & = \frac{\sqrt{(2I+1)(2I'+1)}}{8\pi^2} \int d\Omega (D_{M'0}^{I'}(\vec{\theta}))^* D_{\mu 0}^2(\vec{\theta}) D_{M0}^I(\vec{\theta}) \frac{3}{4\pi} eZR_0^2 \beta_0. \end{aligned} \quad (222)$$

Функции  $\varphi_{gs}(\beta, \gamma)$  нормированы на единицу. Для вычисления интегралов по углам Эйлера произведения  $D$ - функций полезны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} D_{M_1 K_1}^{I_1} D_{M_2 K_2}^{I_2} &= \sum_{IMK} C_{I_1 M_1 I_2 M_2}^{IM} C_{I_1 K_1 I_2 K_2}^{IK} D_{MK}^I, \\ \frac{2I+1}{8\pi^2} \int d\Omega (D_{MK}^I)^* D_{M'K'}^{I'} &= \delta_{II'} \delta_{MM'} \delta_{KK'}. \end{aligned} \quad (223)$$

Используя эти соотношения, получаем

$$\langle \Psi_{I'M'}^{(gs)} | Q_{2\mu} | \Psi_{IM}^{(gs)} \rangle = \frac{3}{4\pi} eZR_0^2 \beta_0 \sqrt{\frac{2I+1}{2I'+1}} C_{IM'2\mu}^{I'M'} C_{I020}^{I'0}. \quad (224)$$

Приведенная вероятность E2-перехода следующим образом выражается через матричный элемент  $\langle \Psi_{I'M'}^{(gs)} | Q_{2\mu} | \Psi_{IM}^{(gs)} \rangle$ :

$$\begin{aligned} B(E2; I'_{gs} \rightarrow I_{gs}) &= \sum_{M\mu} | \langle \Psi_{I'M'}^{(gs)} | Q_{2\mu} | \Psi_{IM}^{(gs)} \rangle |^2 = \\ &= \left( \frac{3}{4\pi} eZR_0^2 \beta_0 \right)^2 (C_{I'020}^{I'0})^2. \end{aligned} \quad (225)$$

Из этого выражения видно, что величина приведенной вероятности E2-перехода между состояниями основной ротационной полосы определяется значением  $\beta_0$ , а отношения этих вероятностей выражаются через коэффициенты Клебша–Гордона и не содержат параметров. Аналогичным образом можно получить выражения и для вероятностей переходов между состояниями, принадлежащими различным ротационным полосам. В этом случае, однако, вместо параметра  $\beta_0$  появятся другие величины. Полученные соотношения известны как правила Алага.

Мы имеем теперь возможность сравнить типичные спектры возбужденных состояний четно–четных сферических и деформированных ядер. Например,

если в сферическом пределе характерное значение отношения энергий возбуждения нижайших  $4_1^+$ - и  $2_1^+$ - состояний равно  $E(4_1^+)/E(2_1^+)=2$ , то в деформированном ядре это отношение равно 3.33. В то же время имеется достаточно большое число ядер, характеризующихся промежуточными значениями этого отношения:

$$2.0 \leq E(4_1^+)/E(2_1^+) \leq 3.33. \quad (226)$$

Эти ядра получили название переходных. Если сравнивать спектры низколежащих коллективных состояний четно-четных переходных ядер со спектрами возбуждения сферических и деформированных ядер, то во многих случаях они занимают промежуточное положение между первыми и вторыми.

## 11. Асимметричный ротатор

Рассмотрим теперь те изменения, которые произойдут в спектрах возбужденных состояний, если форма ядра перестает быть аксиально-симметричной. Вернемся к выражению для компонент тензора инерции:

$$\mathfrak{S}_k = 4B_2\beta_0^2 \sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right). \quad (227)$$

При  $\gamma=0$  ядро имеет вытянутую аксиально-симметричную форму и

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = 3B_2\beta_0^2, \quad \mathfrak{S}_3 = 0. \quad (228)$$

При  $\gamma = 60^\circ$  ядро имеет сплюснутую аксиально-симметричную форму и

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_3 = 3B_2\beta_0^2, \quad \mathfrak{S}_2 = 0. \quad (229)$$

При  $\gamma = 30^\circ$  форма ядра теряет аксиальную симметрию, все три компоненты тензора инерции отличны от нуля:

$$\mathfrak{S}_1 = 4B_2\beta_0^2, \quad \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_3 = B_2\beta_0^2, \quad (230)$$

но две меньшие по величине компоненты совпадают. Благодаря последнему обстоятельству, спектр собственных значений ротационного гамильтониана может быть найден аналитически:

$$\begin{aligned} H_{\text{rot}} &= \frac{\hbar^2}{2B_2\beta_0^2} \left( \frac{\hat{I}_1^2}{4} + \hat{I}_2^2 + \hat{I}_3^2 \right) = \frac{\hbar^2}{2B_2\beta_0^2} \left( \vec{I}^2 - \frac{3}{4}\hat{I}_1^2 \right) = \\ &= \frac{\hbar^2}{2B_2\beta_0^2} \left( I(I+1) - \frac{3}{4}\hat{I}_1^2 \right). \end{aligned} \quad (231)$$

В ротационной полосе основного состояния  $I_1 = I$  и

$$E_{gs}(I) = \frac{\hbar^2}{2B_2\beta_0^2} \left( \frac{1}{4}I^2 + I \right). \quad (232)$$

В следующей по энергии возбужденной ротационной полосе  $I_1 = I - 2$ :

$$E_1(I) = \frac{\hbar^2}{2B_2\beta_0^2} \left( \frac{1}{4}I^2 + 4I - 3 \right) \quad (233)$$

и т.д. В спектре собственных значений гамильтониана неаксиального ротатора при изменении  $\gamma$  от  $0^\circ$  до  $30^\circ$  резко убывает энергия второго возбужденного  $2^+$ -состояния. Низкие значения отношения  $E(2_2^+)/E(2_1^+)$  наблюдаются у ядер в области Pt и Os. Например, в  ${}_{76}^{192}\text{Os}_{116}$   $E(2_2^+)/E(2_1^+)=2.4$ .

В заключение этого раздела рассмотрим поведение асимметричного ротатора при больших значениях углового момента. Итак, будем рассматривать гамильтониан

$$H_{\text{rot}} = \frac{\hat{I}_1^2}{2\mathfrak{S}_1} + \frac{\hat{I}_2^2}{2\mathfrak{S}_2} + \frac{\hat{I}_3^2}{2\mathfrak{S}_3}, \quad (234)$$

предположив, что  $\mathfrak{S}_1 > \mathfrak{S}_2 > \mathfrak{S}_3$ . При больших значениях угловой момент  $I$  будет направлен вдоль оси с наибольшим моментом инерции, т.е. вдоль первой оси. В этом случае можно считать малыми флуктуации компоненты  $I_1$  относительно среднего значения  $I$  и полагать, что приближенно коммутатор  $[\hat{I}_2, \hat{I}_3]$  пропорционален константе:

$$[\hat{I}_2, \hat{I}_3] = -i\hat{I}_1 \approx -iI. \quad (235)$$

Удобно ввести операторы

$$I_{\pm} = I_2 \pm iI_3. \quad (236)$$

Тогда

$$[I_-, I_+] = 2i[I_2, I_3] = 2I. \quad (237)$$

Это типично бозонное коммутационное соотношение. Поэтому мы можем ввести операторы

$$c^+ = \frac{1}{\sqrt{2I}}I_+, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2I}}I_-, \quad [c, c^+] = 1. \quad (238)$$

Выраженный в терминах бозонных операторов гамильтониан  $H_{\text{rot}}$  имеет вид

$$\begin{aligned} H_{\text{rot}} = \frac{1}{2\mathfrak{I}_1}I^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\mathfrak{I}_2} + \frac{1}{2\mathfrak{I}_3} - \frac{1}{\mathfrak{I}_1}\right)I(c^+c + cc^+) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\mathfrak{I}_2} - \frac{1}{2\mathfrak{I}_3}\right)I(c^+c^+ + cc). \end{aligned} \quad (239)$$

Этот гамильтониан можно диагонализировать с помощью линейного преобразования бозонных операторов

$$\begin{aligned} c^+ &= xb^+ + yb, \\ c &= xb + yb^+, \end{aligned} \quad (240)$$

где  $x^2 - y^2 = 1$ , а  $[b, b^+] = 1$ . Мы получаем

$$\begin{aligned} H_{\text{rot}} &= \frac{I^2}{2\mathfrak{I}_1} + \hbar\omega \left(b^+b + \frac{1}{2}\right), \\ \hbar\omega &= 2I\sqrt{\left(\frac{1}{2\mathfrak{I}_2} - \frac{1}{2\mathfrak{I}_1}\right)\left(\frac{1}{2\mathfrak{I}_3} - \frac{1}{2\mathfrak{I}_1}\right)}, \\ x &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} + 1\right)}, \\ y &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} - 1\right)}, \end{aligned} \quad (241)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2\mathfrak{I}_2} + \frac{1}{2\mathfrak{I}_3} - \frac{1}{\mathfrak{I}_1}, \\ \beta &= \frac{1}{2\mathfrak{I}_2} - \frac{1}{2\mathfrak{I}_3}. \end{aligned} \quad (242)$$

Спектр собственных значений  $H_{\text{rot}}$  имеет вид

$$E(I, n) = \frac{1}{2\mathfrak{I}_1} I^2 + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (243)$$

Квантовое число  $n$  характеризует прецессию углового момента относительно первой оси. При малых амплитудах это – гармонические колебания.

## 12. Оболочечная модель ядра

Практически сразу после того как была сформулирована в 1932 г. протон–нейтронная модель ядра Дж.Х. Барлетт и в особенности В.М. Эльзассер предложили оболочечный подход к рассмотрению свойств ядер по аналогии с атомами. Было предположено, что поле, возникающее благодаря воздействию  $(A - 1)$  нуклонов на  $A$ -й нуклон, ведет к появлению оболочечной структуры в ядрах, подобно атомам. Так как в ядрах нет выделенного массивного центра, допускалось, что порядок одночастичных уровней в ядрах и атомах может быть различным. Эльзассер предположил также, что одночастичный потенциал постоянен внутри ядра. В то время считалось, что в ядрах, как и в атомах, реализуется  $LS$ -связь. Последнее утверждение оставалось неизменным до 1949 г.

В 1934 г., анализируя свойства тяжелых ядер, Эльзассер указал на существование замкнутых оболочек протонов и нейтронов при  $Z, N = 50$  и  $82$  в дополнение к замкнутым оболочкам при  $Z, N = 2, 8, 20$ . Предпринимались попытки предложить такой одночастичный потенциал, который бы воспроизводил эти магические числа. Но эти попытки не были успешными. Возникли проблемы при попытках воспроизвести магические числа при  $N = 126$  и  $N = Z = 20$ . Ситуация в ядерной физике в то время была представлена в известной статье Х.А. Бете и Р.Ф. Бахера, опубликованной в 1936 г., в которой говорилось о следующем.

- Существуют магические числа протонов и нейтронов в ядрах. Для объ-

яснения их появления нужно предположить, что существуют нуклонные оболочки.

- Пока не удастся найти такой одночастичный потенциал ядра, который воспроизводил бы эти магические числа.

- Не следует забывать об остаточном взаимодействии нуклонов в ядрах.

Однако дальнейшая разработка оболочечной модели ядра приостановилась, когда Н. Бор сформулировал в своем докладе на заседании Датской королевской академии наук основные положения модели составного ядра. Базируясь на экспериментальных данных, он показал, что при столкновении нейтрона с ядром энергия падающего нейтрона быстро распределяется между всеми нейтронами ядра, после чего ни один из нуклонов не имеет достаточно энергии, чтобы покинуть ядро. Состояние возбужденного ядра становится со временем все более и более сложным и затем достигается состояние статистического равновесия. Волновые функции становятся суперпозицией большого числа простых конфигураций. Н. Бор пришел к заключению, что такую систему уже нельзя рассматривать, базируясь на представлении о движении почти независимых нуклонов в среднем потенциале ядра.

Интерес к оболочечной модели ядра возродился после появления в 1948 г. статьи Марии Гешперт–Майер, в которой были приведены новые экспериментальные данные, указывающие на реальность магических чисел 20, 50, 82 и 126 для нейтронов.

Однако проблема построения такого потенциала среднего поля ядра, который воспроизводил бы эти магические числа, оставалась нерешенной. Наконец в 1949 г. М.Гешперт–Майер и независимо О.Хаксель, И.Йенсен и Х.Суэсс ввели в рассмотрение спин–орбитальное взаимодействие, что позволило объяснить значения экспериментально наблюдаемых магических чисел. Со времени появления этих статей оболочечная модель, развиваясь, оказала огромное влияние на все области ядерной физики. Концепция среднего поля, существую-

щего в ядрах, несмотря на сильное взаимодействие нуклонов, оказалась очень полезной и при рассмотрении других сложных систем с иными силами, действующими между составляющими их частицами. Проведенные в более позднее время экспериментальные исследования свойств ядер, удаленных от линии стабильности, показали, что при больших изменениях в соотношениях между числами протонов и нейтронов в сравнении с их соотношениями в стабильных ядрах магические числа могут изменяться.

Перейдем теперь к рассмотрению потенциала среднего поля ядра. Потенциал, который почти постоянен внутри ядра и экспоненциально спадает в поверхностной области, что соответствует той картине, которая следует из экспериментальных данных, – это потенциал Вудса–Саксона

$$V^{(WS)}(r) = -V_0 \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}, \quad (244)$$

где  $V_0 \approx 50$  МэВ,  $R_0 = r_0 A^{1/3}$ ,  $r_0 \approx 1.2$  ферми,  $a \approx 0.5\text{--}0.7$  ферми. Спин-орбитальный член в среднем потенциале ядра записывается так же, как и в атомной физике:

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{l} \cdot \vec{s}, \quad \lambda = -0.5 \text{ фм}^2. \quad (245)$$

Спин-орбитальная связь присутствует и при описании движения электронов в атоме. Его можно вывести, основываясь на уравнении Дирака для электронов. Если по аналогии с атомной физикой вывести спин-орбитальное взаимодействие для нуклонов в ядре, предполагая, что средний потенциал ядра содержит только скалярный член, то получившееся взаимодействие оказывается на порядок меньше, чем требуется для объяснения экспериментальных данных. Причина этого расхождения состоит в том, что среднее поле ядра имеет еще и векторную компоненту (векторный потенциал), обязанную своим появлением связи нуклонов с векторными мезонами. Этот потенциал достаточно большой по величине и является отталкивающим. Разность скалярного и векторного

потенциала, равная примерно 50 МэВ, характеризует связь нуклонов в ядре, а сумма определяет величину спин–орбитального взаимодействия.

Атомные ядра состоят из протонов и нейтронов. Благодаря кулоновскому отталкиванию, глубина потенциальной ямы для протонов несколько меньше, чем для нейтронов. Кулоновский потенциал внутри ядра обычно аппроксимируется следующим выражением:

$$V_c(r) = e^2 Z \frac{1}{2R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad r \leq R, \quad (246)$$

а вне ядра имеет вид

$$V_c(r) = \frac{Ze^2}{r}, \quad r > R, \quad (247)$$

где  $R$ – радиус ядра.

Средний потенциал ядра, имеющий форму потенциала Вудса–Саксона, часто заменяют более простым потенциалом гармонического осциллятора

$$V^{(ho)}(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2. \quad (248)$$

Однако чтобы скомпенсировать расхождение между потенциалами Вудса–Саксона и гармонического осциллятора, которые существенно ближе к поверхности ядра, где сконцентрированы волновые функции состояний нуклонов с большими значениями орбитального момента  $l$ , к потенциалу добавляют слагаемое, пропорциональное  $l^2$ , с отрицательным коэффициентом. Так как в случае потенциала гармонического осциллятора

$$\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = m \omega^2, \quad (249)$$

спин–орбитальный член имеет в этом случае постоянный коэффициент.

Итак, будем рассматривать следующий одночастичный гамильтониан ядра:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + C \vec{l} \cdot \vec{s} + D \vec{l}^2, \quad (250)$$

где  $C < 0$  и  $D < 0$ .



В сферических координатах этот гамильтониан имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{l}^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + C \vec{l} \cdot \vec{s} + D \vec{l}^2. \quad (251)$$

Собственные функции этого гамильтониана записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_{nlj} &= \frac{1}{r} R_{nlj}(r) \sum_{\mu, \sigma} C_{l\mu 1/2\sigma}^{jm} Y_{l\mu}(\theta, \varphi) \chi_{1/2\sigma}, \\ \vec{l}^2 Y_{l\mu} &= l(l+1) Y_{l\mu}, \\ \int_0^\infty R_{nlj}(r) R_{n'lj}(r) dr &= \delta_{nn'}, \end{aligned} \quad (252)$$

где спиноры  $\chi_{1/2, 1/2}$  и  $\chi_{1/2, -1/2}$  отвечают двум возможным значениям проекции спина нуклона;  $n$ —число узлов радиальной волновой функции плюс единица.

Операторы спина  $\vec{s}$  связаны с матрицами Паули  $\vec{\sigma}$ :

$$\vec{s} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}. \quad (253)$$

Собственные значения оператора  $\vec{l} \cdot \vec{s}$  определяются в этом базисе следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{l} \cdot \vec{s} &= \frac{1}{2} (j^2 - l^2 - s^2), \\ \langle j l | \vec{l} \cdot \vec{s} | j l \rangle &= \frac{1}{2} \left( j(j+1) - l(l+1) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right). \end{aligned} \quad (254)$$

Таким образом, спектр собственных значений гамильтониана дается выражением

$$E_{Nlj} = \hbar \omega \left( N + \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} C \left( j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) + D l(l+1). \quad (255)$$

Используя (255), мы можем построить схему одночастичных уровней ядра и получить магические числа.

### 13. Периодические орбиты

С проявлением оболочечной структуры тесно связано понятие о периодических орбитах. Хотелось бы понять: почему возникают оболочки? Ведь

оболочечная структура характерна не только для осцилляторного потенциала, но и для прямоугольной ямы и для потенциала Вудса–Саксона. Рассмотрим, например, сферическое ядро. Одночастичное движение в сферически-симметричном потенциале разделяется на радиальную и угловую компоненты. Соответственно одночастичные энергии зависят от двух квантовых чисел:  $n$ , равного числу узлов радиальной волновой функции плюс 1 ( $n=1,2,3,\dots$ ), и орбитального момента  $l$ . Оболочки появляются в том случае, когда одночастичные энергии  $\varepsilon(n, l)$  обладают свойством стационарности относительно вариации квантовых чисел:

$$\begin{aligned} \varepsilon(n, l) = & \varepsilon(n_0, l_0) + (n - n_0) \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right)_0 + (l - l_0) \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial l} \right)_0 + \\ & + \frac{1}{2} (n - n_0)^2 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n^2} \right)_0 + (n - n_0)(l - l_0) \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n \partial l} \right)_0 + \\ & + \frac{1}{2} (l - l_0)^2 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial l^2} \right)_0 + \dots \end{aligned} \quad (256)$$

Группа приближенно вырожденных уровней возникает, когда первые производные  $\varepsilon(n, l)$  по  $n$  и  $l$  находятся в отношении, равном отношению целых чисел, т.е.

$$b \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right)_0 = a \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial l} \right)_0, \quad (257)$$

где  $a$  и  $b$  – целые числа. В этом случае

$$\begin{aligned} (n - n_0) \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right)_0 + (l - l_0) \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial l} \right)_0 &= \left( (n - n_0) + \frac{b}{a} (l - l_0) \right) \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right)_0 = \\ &= (a(n - n_0) + b(l - l_0)) \frac{1}{a} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right)_0. \end{aligned} \quad (258)$$

Уровни, для которых

$$N \equiv a(n - n_0) + b(l - l_0), \quad (259)$$

имеют одно и то же значение, отличаются только членами, содержащими вторые и более высокие производные  $\varepsilon(n, l)$ .

Если  $a:b=2:1$  ( $n_0 = 1, l_0 = 0$ ), то мы имеем случай потенциала гармонического осциллятора с

$$\hbar\omega = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right)_0 = \frac{1}{b} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial l} \right)_0. \quad (260)$$

Оболочки с разными  $N$  разделены интервалом, кратным  $\hbar\omega$ .

Оболочечная структура тесно связана с классическими траекториями. Производные  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n}$  и  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial l}$  определяют радиальные и угловые частоты движения частицы в потенциале. Критерий стационарности соответствует тому, что классическая орбита замыкается после  $a$ -радиальных и  $b$ -угловых осцилляций.

## 14. Деформированные ядра. Анизотропный гармонический осциллятор. Схема Нильссона

Мы уже говорили в предыдущих разделах о том, что существуют деформированные ядра, характерная особенность которых – появление в спектрах возбужденных состояний ротационных полос с характерными соотношениями между энергиями уровней, принадлежащих одной ротационной полосе. При рассмотрении таких ядер естественно исходить из того, что среднее поле ядра деформировано. Мы будем описывать его с помощью потенциала анизотропного гармонического осциллятора

$$V = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (261)$$

где  $\omega_i = \omega_0 \frac{R_0}{a_i}$ ,  $a_i$  – длина  $i$ -й полуоси, а  $R_0$  – радиус ядра. Предполагая, как и при рассмотрении поверхностных колебаний ядра, что объем ядра остается неизменным при деформации, т.е.

$$\omega_x \omega_y \omega_z = \text{const} = \omega_0^3, \quad (262)$$

мы приходим к следующей параметризации частот осциллятора в случае аксиальной симметрии, которая, собственно, и реализуется в деформированных

ядрах:

$$\begin{aligned}\omega_x = \omega_y \equiv \omega_{\perp} &= \omega_0(\delta)\left(1 + \frac{1}{3}\delta\right), \\ \omega_z &= \omega_0(\delta)\left(1 - \frac{2}{3}\delta\right).\end{aligned}\quad (263)$$

Из этого следует, что

$$\omega_0(\delta) = \omega_{00}\left(1 + \frac{1}{9}\delta^2\right).\quad (264)$$

Параметры деформации  $\delta$  и  $\beta$  связаны соотношением

$$\beta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\delta.\quad (265)$$

Удобно перейти к безразмерным единицам, используя в качестве единицы длины

$$b(\delta) = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0(\delta)}}.\quad (266)$$

Тогда новой радиальной переменной будет

$$r' = \frac{r}{b(\delta)},\quad (267)$$

и вместо гамильтониана

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{m}{2}\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2) + \frac{m}{2}\omega_z^2z^2 + C\vec{l} \cdot \vec{s} + D\vec{l}^2\quad (268)$$

мы получаем гамильтониан, выраженный в терминах  $r'$ :

$$\begin{aligned}H = \hbar\omega_0(\delta) \left( -\frac{1}{2}\Delta' + \frac{1}{2}r'^2 - \beta r'^2 Y_{20}(\theta, \varphi) \right) - \\ - \kappa\hbar\omega_{00}(2\vec{l} \cdot \vec{s} + \mu\vec{l}^2),\end{aligned}\quad (269)$$

где параметры  $\kappa$  и  $\mu$  связаны с  $C$  и  $D$  соотношениями

$$C = -2\hbar\omega_{00}\kappa, \quad D = -\hbar\omega_{00}\kappa\mu.\quad (270)$$

При отличной от нуля деформации среднего ядерного потенциала характерное для одночастичных энергий вырождение по проекции углового момента

снимается. Одночастичное состояние, имевшее при отсутствии деформации угловой момент  $j$ , расщепляется на  $(j+1/2)$  уровней. Получившаяся в результате схема одночастичных уровней имеет следующие особенности:

- деформация сдвигает уровни с малыми значениями  $\Omega$  вниз, если  $\beta > 0$ , и вверх, если  $\beta < 0$ ;
- при больших деформациях уровни могут изменять знак наклона (отталкивание уровней);
- уровни с большими значениями углового момента  $j$  имеют лишь небольшие примеси компонент с другими  $j$  даже при больших значениях деформации  $\beta$ .

Эта схема одночастичных уровней деформированного ядра известна как схема Нильссона. Она играет важную роль при исследовании структуры деформированных ядер.

## 15. Асимптотические квантовые числа

Рассмотрим более детально вопрос об асимптотических квантовых числах. С этой целью перепишем одночастичный гамильтониан  $H$  в цилиндрических координатах:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{m}{2} (\omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2) - C\vec{l} \cdot \vec{s} - D\vec{l}^2. \quad (271)$$

Когда  $\delta$  велико, удобно разбить гамильтониан на два слагаемых:

$$H = H_{\text{osc}} + H', \quad (272)$$

$$H_{\text{osc}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{m}{2} (\omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2). \quad (273)$$

При больших значениях  $\delta$   $H'$  – малое возмущение.

Введем новые переменные

$$\xi = x \sqrt{\frac{m\omega_{\perp}}{\hbar}}, \quad (274)$$

$$\eta = y \sqrt{\frac{m\omega_{\perp}}{\hbar}}, \quad (275)$$

$$\zeta = z \sqrt{\frac{m\omega_z}{\hbar}}, \quad (276)$$

тогда

$$H_{\text{osc}} = \frac{1}{2} \hbar \omega_{\perp} \left( -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \xi^2 + \eta^2 \right) + \frac{1}{2} \hbar \omega_z \left( -\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta^2 \right). \quad (277)$$

Произведем замену переменных

$$\xi = \rho \cos \varphi, \quad (278)$$

$$\eta = \rho \sin \varphi. \quad (279)$$

В новых переменных

$$\left( \frac{1}{2} \hbar \omega_{\perp} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \rho^2 \right) + \frac{1}{2} \hbar \omega_z \left( -\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta^2 \right) - E \right) \Psi = 0, \quad (280)$$

$$\Psi = u(\rho)v(\zeta) \exp(i\Lambda\varphi). \quad (281)$$

Мы получаем

$$E = \left( n_z + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_z + (2n_{\rho} + |\Lambda| + 1) \hbar \omega_{\perp}, \quad (282)$$

или

$$E = \left( n_z + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_z + (n_{\perp} + 1) \hbar \omega_{\perp}. \quad (283)$$

Здесь

$$n_{\perp} = 2n_{\rho} + |\Lambda|, \quad (284)$$

$$|\Lambda| = n_{\perp}, n_{\perp} - 2, n_{\perp} - 4 \dots 0(1). \quad (285)$$

Введем в рассмотрение полное число осцилляторных квантов

$$N = n_{\perp} + n_z. \quad (286)$$

Вследствие деформации сферическая оболочка с главным квантовым числом  $N$  расщепляется. Однако при некоторых значениях  $\delta$  оболочки восстанавливаются. Например, при  $\delta=0.6$

$$\omega_{\perp} = 1.2\omega_0(\delta), \quad (287)$$

$$\omega_z = 0.6\omega_0(\delta) \quad (288)$$

и

$$E = \hbar\omega_z (n_z + 2n_{\perp} + 5/2). \quad (289)$$

Уровни с фиксированным значением  $(n_z + 2n_{\perp})$  имеют одну и ту же энергию.

Каждое одночастичное состояние в деформированном осцилляторном потенциале можно характеризовать с помощью квантовых чисел  $N, n_z$ . Тогда  $n_{\perp}$  определено и равно  $N - n_z$ . Но одно и то же значение  $n_{\perp}$  может быть реализовано при различных значениях  $\Lambda$ . Поэтому  $\Lambda$  является следующим независимым квантовым числом. Проекция полного углового момента  $\Omega$  при заданном  $\Lambda$  может принимать два значения:  $\Omega = \Lambda \pm 1/2$ . Итак, каждое одночастичное состояние в аксиально-симметричном деформированном потенциале характеризуется следующим набором квантовых чисел:

$$[N n_z \Lambda] \Omega^{\pi}. \quad (290)$$

В качестве примера рассмотрим оболочку с  $N=5$ . В этом случае  $n_z$  может принимать значения: 0,1,2,3,4,5. Нижайшим по энергии будет одночастичное состояние с  $n_z=5$ . Этим значениям  $n_z$  отвечают следующие значения  $n_{\perp}$ : 0,1,2,3,4,5 соответственно. При заданном  $n_{\perp}$   $\Lambda$  принимает такие значения:

$$\Lambda = n_{\perp}, n_{\perp} - 2 \dots \quad (291)$$

При заданном  $\Lambda$   $\Omega = \Lambda \pm 1/2$ .

Квантовые числа  $Nn_z\Lambda\Omega$  остаются хорошими квантовыми числами и при умеренных значениях деформации:  $\delta \approx 0.3$ . Эти квантовые числа очень полезны для классификации одночастичных состояний в ядерной спектроскопии.

## 16. Влияние колебаний поверхности на движение нуклонов

В предыдущем разделе мы увидели, как сильно изменяет характер движения нуклонов деформация поверхности ядра. Но между предельными случаями движения нуклонов в жестком сферически-симметричном потенциале и в жестком деформированном потенциале находится промежуточный случай, когда поверхность ядра совершает колебания относительно равновесной формы и нуклоны находятся в таком динамически изменяющемся потенциале.

Итак, мы предполагаем, что одночастичный гамильтониан, описывающий движение нуклонов в ядре, имеет следующий вид:

$$H_{sp} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V + V_{\vec{l},\vec{s}}, \quad (292)$$

но потенциал  $V$  изменяется динамически из-за колебаний поверхности. Учтем зависимость  $V$  от  $\alpha_{2\mu}$ :

$$V \rightarrow V \left( \frac{r}{1 + \sum_{\mu} \alpha_{2\mu}^* Y_{2\mu}(\theta, \varphi)} \right). \quad (293)$$

Считая амплитуды  $\alpha_{2\mu}$  малыми величинами, мы можем разложить потенциал  $V$  в ряд по степеням  $\alpha_{2\mu}$ , ограничившись только линейным по  $\alpha_{2\mu}$  членом. Тогда

$$V \left( \frac{r}{1 + \sum_{\mu} \alpha_{2\mu}^* Y_{2\mu}(\theta, \varphi)} \right) \approx V(r) - r \frac{dV}{dr} \sum_{\mu} \alpha_{2\mu}^* Y_{2\mu}. \quad (294)$$

Коллективные координаты  $\alpha_{2\mu}$  можно выразить через операторы квадруполь-



ных фононов:

$$\alpha_{2\mu} = \sqrt{\frac{\hbar}{2B_2\omega_2}}(b_{2\mu}^+ + (-1)^\mu b_{2-\mu}). \quad (295)$$

В случае потенциала гармонического осциллятора мы приходим к гамильтониану

$$\begin{aligned} H_{sp} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 - m\omega_0^2 \sum_{\mu} \alpha_{2\mu}^* (r^2 Y_{2\mu}) + V_{\vec{l}, \vec{s}} = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 - m\omega_0^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2B_2\omega_2}} \sum_{\mu} (-1)^\mu (b_{2-\mu}^+ + (-1)^\mu b_{2\mu}) (r^2 Y_{2\mu}) + \\ &\quad + V_{\vec{l}, \vec{s}}. \end{aligned} \quad (296)$$

Видно, что в гамильтониане появился член, описывающий связь нуклонов с квадрупольными фононами. Эта связь ведет к появлению нового типа состояний, еще не рассмотренных нами.

Проанализируем полученный выше гамильтониан в предельном случае, когда связь движения нуклонов с колебаниями поверхности очень сильная. В этом случае удобно перейти во внутреннюю систему координат:

$$\alpha_{2\mu} = D_{\mu 0}^2 \beta \cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{2}}(D_{\mu 2}^2 + D_{\mu -2}^2) \beta \sin \gamma. \quad (297)$$

Предположим, что ядро принимает аксиально-симметричную деформированную форму, т.е.  $\beta = \beta_0 \neq 0, \gamma = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} H_{sp} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 - m\omega_0^2 \beta_0 r^2 \left( \sum_{\mu} (D_{\mu 0}^2)^* Y_{2\mu} \right) + V_{\vec{l}, \vec{s}} = \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - m\omega_0^2 \beta r^2 Y_{20}(\theta_{\text{intr}}, \varphi_{\text{intr}}) + V_{\vec{l}, \vec{s}}, \end{aligned} \quad (298)$$

где углы  $\theta_{\text{intr}}, \varphi_{\text{intr}}$  отсчитываются относительно осей системы координат, жестко связанной с деформированным ядром. Мы получили гамильтониан Нильсона.

## 17. Формализм вторичного квантования

Начнем рассмотрение микроскопического подхода к описанию структу-

ры ядер. Операторы рождения и уничтожения нуклона в точках  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  удовлетворяют следующим антикоммутиационным соотношениям:

$$\{\psi(x), \psi^+(y)\} \equiv \psi(x)\psi^+(y) + \psi^+(y)\psi(x) = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (299)$$

Выраженный в терминах этих операторов одночастичный гамильтониан ядра имеет вид

$$H_{sp} = \int d^3r \psi^+(\vec{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) + \lambda \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{l} \cdot \vec{s} \right) \psi(\vec{r}). \quad (300)$$

Однако нам известны собственные функции оператора, находящегося в круглых скобках в (300), и соответствующие собственные значения:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) + \lambda \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{l} \cdot \vec{s} \right) \psi_{nljm}(\vec{r}) = E_{nljm} \psi_{nljm}(\vec{r}). \quad (301)$$

Поэтому удобно разложить оператор  $\psi(\vec{r})$  в ряд по базисным функциям  $\psi_{nljm}$ :

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{nljm} \psi_{nljm}(\vec{r}) a_{nljm}. \quad (302)$$

Однако в этом разложении коэффициенты  $a_{nljm}$  являются не  $c$ -числами, а операторами. Подставляя последнее выражение в антикоммутатор (299), получаем

$$\begin{aligned} \{\psi(\vec{r}), \psi^+(\vec{r}')\} &= \sum_{nljm} \sum_{n'l'j'm'} \psi_{nljm}(\vec{r}) \psi_{n'l'j'm'}^*(\vec{r}') \{a_{nljm}, a_{n'l'j'm'}^+\} = \\ &= \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \end{aligned} \quad (303)$$

Коммутационное соотношение будет удовлетворено, если

$$\{a_{nljm}, a_{n'l'j'm'}^+\} = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (304)$$

Подставляя разложение (302) в гамильтониан  $H_{sp}$  и используя условие нормировки функций  $\psi_{nljm}(\vec{r})$ , получаем

$$H_{sp} = \sum_{nljm} E_{nljm} a_{nljm}^+ a_{nljm}. \quad (305)$$

Собственными состояниями такого гамильтониана являются:

$$\begin{aligned}
& |0 \rangle, \\
& a_{nljm}^+ |0 \rangle, \\
& \sum_{m,m'} C_{jmj'm'}^{JM} a_{nljm}^+ a_{n'l'j'm'}^+ |0 \rangle \equiv (a_{nlj}^+ a_{n'l'j''}^+)_{JM} |0 \rangle \dots
\end{aligned} \tag{306}$$

В такой записи собственные состояния ядра с большими числами протонов и нейтронов будут представлены очень громоздкими выражениями, что очень неудобно. Чтобы работать с более компактными выражениями, введем понятия о частицах и дырках. Представим оператор рождения нуклона  $a_{nljm}^+$  в зависимости от того, рождает ли он частицу в состоянии с энергией выше или ниже поверхности Ферми:

$$\begin{aligned}
a_{nljm}^+ &= \alpha_{nljm}^+, & E_{nlj} > E_F &\equiv \lambda, \\
a_{nljm}^+ &= (-1)^{j-m} \alpha_{nlj-m}, & E_{nlj} < E_F &\equiv \lambda.
\end{aligned} \tag{307}$$

Таким образом, оператор  $\alpha_{nljm}^+$  рождает частицу, если  $E_{nlj} > E_F$ , и уничтожает частицу, т.е. рождает дырку, если  $E_{nlj} < E_F$ . В терминах операторов  $\alpha_{nljm}^+$ ,  $\alpha_{nljm}$  гамильтониан свободных частиц запишется так:

$$\begin{aligned}
H_{sp} &= \sum_{nljm > \lambda} (E_{nlj} - \lambda) \alpha_{nljm}^+ \alpha_{nljm} + \sum_{nljm < \lambda} (E_{nlj} - \lambda) \alpha_{nljm} \alpha_{nljm}^+ = \\
&= \sum_{nljm < \lambda} (\lambda - E_{nlj})(2j + 1) + \sum_{nljm > \lambda} (E_{nlj} - \lambda) \alpha_{nljm}^+ \alpha_{nljm} + \\
&\quad + \sum_{nljm < \lambda} (\lambda - E_{nlj}) \alpha_{nljm}^+ \alpha_{nljm} = \\
&= \sum_{nljm < \lambda} (\lambda - E_{nlj})(2j + 1) + \sum_{nljm > \lambda} |E_{nlj} - \lambda| \alpha_{nljm}^+ \alpha_{nljm}.
\end{aligned} \tag{308}$$

В дальнейшем мы опускаем константу. Теперь мы можем построить более компактные, чем выше, выражения для нижайших по энергии состояний ядра.

Основное состояние ядра в приближении независимых частиц, т.е. состояние, в котором все уровни ниже уровня Ферми заполнены, а все уровни выше уровня Ферми не заняты, является вакуумом квазичастиц:

$$\alpha_{nljm} |gs \rangle = 0. \tag{309}$$

При переходе нуклона из состояния с энергией ниже энергии Ферми в состояние с энергией выше энергии Ферми появляются частица и дырка. Собственный вектор такого состояния имеет вид

$$(\alpha_{nlj}^+ \alpha_{n'l'j'}^+)_{JM} |gs\rangle. \quad (310)$$

Так как всякий переход нуклона из занятого состояния в свободное порождает частицу и дырку одновременно, собственные состояния четно-четного ядра имеют четное число квазичастиц.

Нижайшие собственные состояния нечетного ядра характеризуются векторами

$$\alpha_{nljm}^+ |gs\rangle. \quad (311)$$

Рассмотрим теперь слагаемое в одночастичном гамильтониане, отражающее связь одночастичного движения нуклонов с поверхностными колебаниями ядра:

$$H_{\text{int}} = -m\omega_0^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2B_2\omega_2}} \sum_{\mu} (-1)^{\mu} (b_{2-\mu}^+ + (-1)^{\mu} b_{2\mu}) r^2 Y_{2\mu}. \quad (312)$$

Оператор  $r^2 Y_{2\mu}$  действует на волновые функции нуклонов. В представлении вторичного квантования он имеет вид

$$\begin{aligned} \int d^3r \hat{\psi}^+(r) r^2 Y_{2\mu} \hat{\psi}(r) &= \int d^3r \sum_{nljm} \sum_{n'l'j'm'} \psi_{nljm}^*(r) r^2 Y_{2\mu} \psi_{n'l'j'm'}(r) a_{nljm}^+ a_{n'l'j'm'} = \\ &= \sum_{nljm} \sum_{n'l'j'm'} \langle nljm | r^2 Y_{2\mu} | n'l'j'm' \rangle a_{nljm}^+ a_{n'l'j'm'} = \\ &= \sum_{nljm} \sum_{n'l'j'm'} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \langle nlj || r^2 Y_{2\mu} || n'l'j' \rangle C_{j'm'2\mu}^{jm} a_{nljm}^+ a_{n'l'j'm'}. \end{aligned} \quad (313)$$

Подставляя это выражение в  $H_{\text{int}}$ , получаем

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} &= -m\omega_0^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2B_2\omega_2}} \sum_{\mu} (-1)^{\mu} (b_{2-\mu}^+ + (-1)^{\mu} b_{2\mu}) \times \\ &\times \sum_{nljm} \sum_{n'l'j'm'} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \langle nlj || r^2 Y_{2\mu} || n'l'j' \rangle C_{j'm'2\mu}^{jm} a_{nljm}^+ a_{n'l'j'm'}. \end{aligned} \quad (314)$$

## 18. Парные корреляции сверхпроводящего типа. u–v преобразование Боголюбова

Введем сокращенное обозначение для квантовых одночастичных состояний  $s \equiv nljm$ . Это тем более удобно, что для характеристики одночастичных состояний в деформированном потенциале (например, в потенциале Нильссона) используются квантовые числа, отличные от набора  $nljm$ . Введем еще одно определение  $\bar{s} \equiv nlj - m$ . Выше в (307) использовался фазовый множитель  $(-1)^{j-m}$ , принимающий значения  $\pm 1$ . При этом  $(-1)^{j-m} = -(-1)^{j-(-m)}$ . В общем случае, включающем как сферические, так и деформированные одночастичные потенциалы, мы будем использовать фазовый множитель  $\sigma_s$ , равный  $\pm 1$  и такой, что  $\sigma_{\bar{s}} = -\sigma_s$ . Как и выше, введем в рассмотрение наряду с операторами рождения и уничтожения частиц  $a_s^+$ ,  $a_s$  операторы рождения и уничтожения квазичастиц  $\alpha_s^+$ ,  $\alpha_s$ , определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned}\alpha_s^+ &= a_s^+, & E_s > E_F \equiv \lambda, \\ \alpha_s^+ &= \sigma_s a_{\bar{s}}, & E_s < E_F \equiv \lambda.\end{aligned}\tag{315}$$

Этот результат может быть записан и так:

$$\alpha_s^+ = u_s a_s^+ + v_s \sigma_s a_{\bar{s}},\tag{316}$$

где  $u_s=1$ , а  $v_s = 0$ , если  $E_s > \lambda$ , и  $u_s=0$ , а  $v_s = 1$ , если  $E_s < \lambda$ . Таким образом, всегда  $u_s^2 + v_s^2 = 1$ .

Основное состояние ядра  $|gs\rangle$  в приближении независимых частиц определяется через

$$\alpha_s |gs\rangle = 0.\tag{317}$$

Это состояние, в котором все нижайшие одночастичные уровни заполнены нук-

лонами. Одночастичный гамильтониан ядра в том же приближении имеет вид

$$H_{sp} = \sum_s |E_s - \lambda| \alpha_s^+ \alpha_s. \quad (318)$$

В общем случае при рассмотрении многонуклонной системы необходимо учитывать и взаимодействие частиц. В этом случае гамильтониан ядра, выраженный через операторы рождения и уничтожения нуклонов, равен

$$H = \sum_s (E_s - \lambda) a_s^+ a_s + \sum_{s_1, s'_1, s_2, s'_2} v_{s_1 s_2; s'_1 s'_2}^{(res)} a_{s_1}^+ a_{s_2}^+ a_{s_2'} a_{s_1'}. \quad (319)$$

Второе слагаемое в этом выражении называют остаточным взаимодействием, имея в виду, что значительная часть нуклон–нуклонного взаимодействия уже учтена в результате введения в рассмотрение среднего потенциала ядра. Ниже мы рассмотрим эффект наиболее важных компонент остаточного взаимодействия. Но сначала обобщим определение квазичастиц, данное выражением (317), и посмотрим, к каким физическим следствиям это нас приведет.

Как можно было убедиться выше, при введении в рассмотрение концепции среднего поля ядра мы учли значительную часть взаимодействия, действующего между нуклонами, сохранив тем не менее концепцию независимых частиц. Давайте посмотрим, какую часть остаточного взаимодействия можно учесть, обобщив данное выше определение квазичастиц следующим образом: будем предполагать, что коэффициенты  $u_s$  и  $v_s$  могут принимать любые значения в интервале от нуля до единицы, но только такие, которые удовлетворяют условию

$$u_s^2 + v_s^2 = 1. \quad (320)$$

Что это означает физически? Величина  $v_s^2$  является вероятностью того, что одночастичный уровень  $s$  заполнен. Полное число частиц  $N$  равно

$$N = 2 \sum_{s>} v_s^2. \quad (321)$$

Символическое ограничение суммирования указанием  $s >$  означает, что если уровень  $s$  учтен, то уровень  $\bar{s}$  не принимается во внимание при суммировании. По этой причине перед знаком суммы появился фактор 2. Тот факт, что  $0 < v_s^2 < 1$  означает, что уровень  $s$  заполнен лишь с некоторой вероятностью, не обязательно равной единице.

Мы уже знаем, что в том случае, когда  $u_s^2$  и  $v_s^2$  могут принимать лишь два значения 0 или 1, в основном состоянии ядра нуклоны полностью занимают нижайшие уровни, оставляя незаполненными одночастичные уровни, находящиеся выше. Найдем теперь основное состояние ядра в более общем случае, когда  $v_s^2$  принимает любые значения между 0 и 1, т.е. получим выражение для вектора состояния, удовлетворяющего условию

$$\alpha_s |gs \rangle = 0. \quad (322)$$

Будем искать  $|gs \rangle$  в виде

$$|gs \rangle = \prod_{t>} (u_t - \sigma_t v_t a_t^+ a_t^+) |0 \rangle. \quad (323)$$

Используя выражение для оператора  $\alpha_s$  через операторы рождения и уничтожения нуклонов, получаем

$$\alpha_s |gs \rangle = (u_s a_s + \sigma_s v_s a_s^+) \prod_{t>} (u_t - \sigma_t v_t a_t^+ a_t^+) |0 \rangle. \quad (324)$$

Принимая во внимание антикоммутиационные соотношения

$$\begin{aligned} a_s a_{s'}^+ + a_{s'}^+ a_s &= \delta_{ss'}, \\ a_s a_{s'} + a_{s'} a_s &= 0, \end{aligned} \quad (325)$$

получаем из (324)

$$\begin{aligned} \alpha_s |gs \rangle &= \prod_{t>, t \neq s} (u_t - \sigma_t v_t a_t^+ a_t^+) (u_s a_s + \sigma_s v_s a_s^+) (u_s - \sigma_s v_s a_s^+ a_s^+) |0 \rangle = \\ &= \prod_{t>, t \neq s} (u_t - \sigma_t v_t a_t^+ a_t^+) (\sigma_s u_s v_s a_s^+ - \sigma_s u_s v_s a_s^+) |0 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (326)$$

Итак, мы построили вектор коррелированного основного состояния ядра. Коррелированного в том смысле, что числа заполнения одночастичных состояний принимают значения, промежуточные между 0 и 1. Так как любая волновая функция ядра в модели независимых частиц характеризуется вполне определенным распределением нуклонов между одночастичными уровнями, когда каждый одночастичный уровень либо заполнен, либо пуст, состояние с  $v_s^2 \neq 0, 1$  можно реализовать только с помощью многокомпонентной волновой функции, т.е. волновой функции, являющейся суперпозицией различных волновых функций модели независимых частиц. А такая волновая функция может быть получена, только если гамильтониан содержит взаимодействие. Перейдем к рассмотрению такого гамильтониана.

Будем рассматривать следующий гамильтониан:

$$\hat{H} = \sum_s (E_s - \lambda) a_s^+ a_s - G \sum_{s, s' >} a_s^+ a_{\bar{s}}^+ a_{\bar{s}'} a_{s'}. \quad (327)$$

Мы видим, что этот гамильтониан содержит такое взаимодействие двух частиц, которое включается только когда две частицы находятся в состояниях, переходящих одно в другое при изменении знака времени. Например, это могут быть состояния, отличающиеся друг от друга только знаком проекции углового момента. Волновые функции нуклонов, находящихся в таких состояниях, значительно перекрываются пространственно, что и обуславливает важность этого взаимодействия. Если среднее поле ядра обладает сферической симметрией, то  $s \equiv nljm$  и гамильтониан (327) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{nljm} (E_{nlj} - \lambda) a_{nljm}^+ a_{nljm} - \\ &- \frac{1}{4} G \sum_{nljm} (-1)^{j-m} a_{nljm}^+ a_{nlj-m}^+ \sum_{n'l'j'm'} (-1)^{j'-m'} a_{n'l'j'-m'} a_{n'l'j'm'} = \\ &= \sum_{nljm} (E_{nlj} - \lambda) a_{nljm}^+ a_{nljm} - \\ &- \frac{1}{4} G \sum_{nljm} \sum_{n'l'j'm'} \sqrt{(2j+1)(2j'+1)} (a_{nlj}^+ a_{nlj}^+)_{00} (a_{n'l'j'} a_{n'l'j'})_{00}. \end{aligned} \quad (328)$$



Мы видим, что взаимодействуют только нуклоны, образующие пары с угловым моментом, равным нулю. В результате нижайшим по энергии состоянием чётно–чётного ядра является состояние с полным угловым моментом, равным нулю.

Выразим операторы рождения и уничтожения частиц  $a_s^+$ ,  $a_s$  через операторы квазичастиц  $\alpha_s^+$ ,  $\alpha_s$ :

$$\begin{aligned} a_s^+ &= u_s \alpha_s^+ - \sigma_s v_s \alpha_{\bar{s}}, \\ a_s &= u_s \alpha_s - \sigma_s v_s \alpha_{\bar{s}}^+, \\ \sigma_s^2 &= 1, \quad \sigma_s \sigma_{\bar{s}} = -1, \\ v_s &= v_{\bar{s}}, \quad u_s = u_{\bar{s}}, \end{aligned} \tag{329}$$

и подставим эти выражения в гамильтониан (327):

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_s (E_s - \lambda) (u_s \alpha_s^+ - \sigma_s v_s \alpha_{\bar{s}}) (u_s \alpha_s - \sigma_s v_s \alpha_{\bar{s}}^+) - \\ &\quad - G \sum_{s>} (u_s \alpha_s^+ - \sigma_s v_s \alpha_{\bar{s}}) (u_s \alpha_{\bar{s}}^+ + \sigma_s v_s \alpha_s) \times \\ &\quad \times \sum_{s'>} (u_{s'} \alpha_{\bar{s}'}^+ + \sigma_{s'} v_{s'} \alpha_{s'}^+) (u_{s'} \alpha_{s'} - \sigma_{s'} v_{s'} \alpha_{\bar{s}'}^+) = \\ &= \sum_s (E_s - \lambda) \left( v_s^2 + u_s^2 \alpha_s^+ \alpha_s - v_s^2 \alpha_{\bar{s}}^+ \alpha_{\bar{s}} - \sigma_s u_s v_s \alpha_s^+ \alpha_{\bar{s}}^+ - \sigma_s u_s v_s \alpha_{\bar{s}} \alpha_s \right) - \\ &\quad - G \sum_{s>} \left( -u_s v_s + u_s v_s \alpha_s^+ \alpha_s + u_s v_s \alpha_{\bar{s}}^+ \alpha_{\bar{s}} + u_s^2 \alpha_s^+ \alpha_{\bar{s}}^+ - v_s^2 \alpha_{\bar{s}} \alpha_s \right) \times \\ &\quad \times \sum_{s'>} \left( -u_{s'} v_{s'} + u_{s'} v_{s'} \alpha_{s'}^+ \alpha_{s'} + u_{s'} v_{s'} \alpha_{\bar{s}'}^+ \alpha_{\bar{s}'} - v_{s'}^2 \alpha_{s'}^+ \alpha_{\bar{s}'}^+ + u_{s'}^2 \alpha_{\bar{s}'} \alpha_{s'} \right). \end{aligned} \tag{330}$$

Отбрасывая слагаемые, содержащие взаимодействие квазичастиц, т.е. содержащие четыре оператора рождения или уничтожения квазичастиц, получаем

$$\begin{aligned} H &\approx \sum_s (E_s - \lambda) v_s^2 - G \left( \sum_{s>} u_s v_s \right)^2 + \\ &+ \sum_{s>} (E_s - \lambda) (u_s^2 - v_s^2) (\alpha_s^+ \alpha_s + \alpha_{\bar{s}}^+ \alpha_{\bar{s}}) + \\ &+ 2G \sum_{s'>} u_{s'} v_{s'} \cdot \sum_{s>} u_s v_s (\alpha_s^+ \alpha_s + \alpha_{\bar{s}}^+ \alpha_{\bar{s}}) - \\ &\quad - 2 \sum_{s>} (E_s - \lambda) u_s v_s (\alpha_s^+ \alpha_{\bar{s}}^+ + \alpha_{\bar{s}} \alpha_s) + \\ &+ G \sum_{s'>} u_{s'} v_{s'} \sum_{s>} (u_s^2 - v_s^2) (\alpha_s^+ \alpha_{\bar{s}}^+ + \alpha_{\bar{s}} \alpha_s). \end{aligned} \tag{331}$$

Для наших целей необходимо, чтобы в этом гамильтониане отсутствовали слабые, описывающие рождение и уничтожение пар квазичастиц. Тогда

$$-2(E_s - \lambda)u_s v_s + (u_s^2 - v_s^2)G \sum_{s' >} u'_s v'_s = 0. \quad (332)$$

Это соотношение вместе с условием  $u_s^2 + v_s^2 = 1$  полностью определяет коэффициенты  $u_s$  и  $v_s$ . Обозначим

$$\Delta = G \sum_{s' >} u'_s v'_s. \quad (333)$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2u_s v_s &= \frac{\Delta}{\sqrt{(E_s - \lambda)^2 + \Delta^2}}, \\ (u_s^2 - v_s^2) &= \frac{(E_s - \lambda)}{\sqrt{(E_s - \lambda)^2 + \Delta^2}}, \\ u_s^2 &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{(E_s - \lambda)}{\sqrt{(E_s - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right), \\ v_s^2 &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(E_s - \lambda)}{\sqrt{(E_s - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right). \end{aligned} \quad (334)$$

А для определения  $\Delta$  получаем уравнение

$$\Delta = \frac{G}{2} \sum_{s >} \frac{\Delta}{\sqrt{(E_s - \lambda)^2 + \Delta^2}}. \quad (335)$$

Это уравнение имеет два решения:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \Delta = 0, \\ 2) \quad & 1 = \frac{G}{2} \sum_{s >} \frac{1}{\sqrt{(E_s - \lambda)^2 + \Delta^2}}. \end{aligned} \quad (336)$$

Если  $\Delta=0$ , то, как видно из (334),  $u_s^2$  и  $v_s^2$  могут принимать только значения 0 или 1. Но этот случай уже был рассмотрен нами выше. Для того чтобы выполнялось второе соотношение, т.е.  $\Delta \neq 0$ , необходимо, чтобы константа взаимодействия  $G$  удовлетворяла условию

$$\frac{G}{2} \sum_{s >} \frac{1}{|E_s - \lambda|} > 1. \quad (337)$$

Следовательно, константа  $G$  не может быть слишком маленькой. Если  $\Delta \neq 0$ , то мы получаем

$$H = 2 \sum_{s>} (E_s - \lambda) v_s^2 - \frac{\Delta^2}{G} + \sum_{s>} \sqrt{(E_s - \lambda)^2 + \Delta^2} (\alpha_s^+ \alpha_s + \alpha_{\bar{s}}^+ \alpha_{\bar{s}}). \quad (338)$$

Из этого выражения следует, что энергия основного состояния ядра уменьшается, т.е. энергия связи ядра увеличивается на  $\frac{\Delta^2}{G}$ . Возбужденные состояния чётно–чётного ядра являются двухквазичастичными. Энергия возбуждения таких состояний равна

$$\sqrt{(E_s - \lambda)^2 + \Delta^2} + \sqrt{(E'_s - \lambda)^2 + \Delta^2} \geq 2\Delta. \quad (339)$$

Таким образом,  $2\Delta$ – это минимальная энергия возбуждения чётно–чётного ядра в таком подходе. Она получила название энергетической щели по аналогии со сверхпроводниками.

Основное состояние нечётного ядра получается добавлением одного нуклона к основному состоянию чётно–чётного ядра:

$$a_s^+ |gs \rangle = (u_s \alpha_s^+ - \sigma_s v_s \alpha_{\bar{s}}) |gs \rangle = u_s \alpha_s^+ |gs \rangle. \quad (340)$$

Таким образом, основное состояние нечётного ядра является одноквазичастичным состоянием. Возбуждение нечётного ядра может происходить либо в результате перехода квазичастицы в состояние с большей энергией, либо в результате рождения двух новых квазичастиц. В первом случае энергия возбуждения нечётного ядра равна

$$\sqrt{(E'_s - \lambda)^2 + \Delta^2} - \sqrt{(E_s - \lambda)^2 + \Delta^2}. \quad (341)$$

Как видно из этого выражения, такие возбуждения не отделены от основного состояния энергетической щелью.

Константы парного взаимодействия для протонов  $G_p$  и нейтронов  $G_n$  определяются разностью масс соответствующих нечётных и соседних чётно–чётных

ядер. Например, для нейтронов константа  $G_n$  определяется разностью двух величин

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(Z, N) &= 2 \sum_{s>} (E_s - \lambda) v_s^2 - \frac{\Delta^2}{G}, \\ \varepsilon_0(Z, N + 1) &= 2 \sum_{s>, s \neq t} (E_s - \lambda) v_s^2 - \frac{\Delta_t^2}{G} + (E_t - \lambda),\end{aligned}\quad (342)$$

где  $t$ – нижайшее по энергии состояние нечетного ядра.

Учет парных корреляций нуклонов очень важен для правильного описания как структуры ядер, так и ядерных реакций. Например, в реакциях однонуклонных передач при добавлении нуклона к четно–четному ядру образуется следующее состояние:

$$a_s^+ |gs \rangle = (u_s \alpha_s^+ - \sigma_s v_s \alpha_{\bar{s}}) |gs \rangle = u_s \alpha_s^+ |gs \rangle. \quad (343)$$

Видно, что сечение реакции пропорционально  $u_s^2$ – вероятности того, что соответствующее одночастичное состояние не заполнено. При удалении нуклона из четно–четного ядра образуется состояние

$$a_s |gs \rangle = (u_s \alpha_s - \sigma_s v_s \alpha_{\bar{s}}^+) |gs \rangle = -\sigma_s v_s \alpha_{\bar{s}}^+ |gs \rangle. \quad (344)$$

Мы видим, что сечение этого процесса пропорционально  $v_s^2$ .

Проанализируем теперь влияние парных корреляций на вероятности электромагнитных переходов. Пусть  $\hat{Q}$ – оператор электромагнитного перехода. В координатном представлении это функция радиус–вектора  $\vec{r}$ :  $Q(\vec{r})$ . В представлении вторичного квантования

$$\hat{Q} = \sum_{s, s'} \int d^3 r \psi_s^*(\vec{r}) Q(\vec{r}) \psi_s'(\vec{r}) a_s^+ a_{s'} \equiv \sum_{s, s'} Q_{ss'} a_s^+ a_{s'}. \quad (345)$$

Базис  $|s \rangle$  может быть как сферическим, так и деформированным. Выразим оператор  $\hat{Q}$  в терминах операторов рождения и уничтожения квазичастиц:

$$\hat{Q} = \sum_{s, s'} Q_{ss'} (u_s \alpha_s^+ - \sigma_s v_s \alpha_{\bar{s}}) (u_{s'} \alpha_{s'} - \sigma_{s'} v_{s'} \alpha_{\bar{s}'}^+) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_s Q_{ss} v_s^2 - \\
&- \sum_{s,s'} (Q_{ss'} \sigma_{s'} u_s v_{s'} \alpha_s^+ \alpha_{s'}^+ + Q_{ss'} \sigma_s v_s u_{s'} \alpha_{\bar{s}} \alpha_{s'}) + \\
&+ \sum_{s,s'} (Q_{ss'} u_s u_{s'} - Q_{\bar{s}'\bar{s}} \sigma_s \sigma_{s'} v_s v_{s'}) \alpha_s^+ \alpha_{s'}. \tag{346}
\end{aligned}$$

В случае операторов электрического типа

$$Q_{\bar{s}'\bar{s}} \sigma_s \sigma_{s'} = Q_{ss'}. \tag{347}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\hat{Q} = \sum_s Q_{ss} v_s^2 - \frac{1}{2} \sum_{s,s'} Q_{ss'} (u_s v_{s'} + v_s u_{s'}) (\alpha_s^+ \sigma_{s'} \alpha_{\bar{s}'}^+ + \sigma_s \alpha_{\bar{s}} \alpha_{s'}) + \\
+ \sum_{s,s'} Q_{ss'} (u_s u_{s'} - v_s v_{s'}) \alpha_s^+ \alpha_{s'}. \tag{348}
\end{aligned}$$

В случае сферического базиса первый член отсутствует. В случае деформированного базиса первый член отвечает внутреннему квадрупольному моменту ядра. Второе слагаемое ответственно за переходы из основного состояния в возбужденные состояния в четно-четных ядрах. Третье слагаемое описывает, например, переходы между одноквазичастичными состояниями в нечетных ядрах. Так как в случае перехода между одноквазичастичными состояниями, близкими к поверхности Ферми, фактор  $(u_s u_{s'} - v_s v_{s'})$  очень мал, мы видим, что парные корреляции могут сильно уменьшать вероятность таких переходов.

Прежде чем завершить данный раздел о парных корреляциях нуклонов в ядрах, обратим внимание на то, что, как видно из выражения для  $|gs\rangle$ , этот вектор состояния содержит компоненты с разными числами нуклонов. Так как точная волновая функция должна содержать компоненты только с заданным числом нуклонов, оценим ошибки, которые возникают при использовании вектора  $|gs\rangle$ .

Оператор числа частиц, выраженный через квазичастичные операторы, имеет вид

$$\hat{N} = \sum_{s,\sigma} a_{s\sigma}^+ a_{s\sigma} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{s>} v_s^2 - \sum_s \sigma_s u_s v_s \alpha_s^+ \alpha_s^+ - \sum_s \sigma_s u_s v_s \alpha_s^- \alpha_s^- + \\
&\quad + \sum_s (u_s^2 - v_s^2) \alpha_s^+ \alpha_s^-. \tag{349}
\end{aligned}$$

Среднее число частиц равно

$$\langle gs | \hat{N} | gs \rangle = 2 \sum_{s>} v_s^2 = N, \tag{350}$$

где  $N$  – точное число нуклонов заданного типа в рассматриваемом ядре. Соотношение (350) служит для определения величины химического потенциала  $\lambda$ :

$$N = \sum_{s>} \left( 1 - \frac{(E_s - \lambda)}{\sqrt{(E_s - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right). \tag{351}$$

Определим теперь величину среднеквадратичной флуктуации числа частиц:

$$\begin{aligned}
\langle gs | (\hat{N} - N)^2 | gs \rangle &= \langle gs | \sum_s \sigma_s u_s v_s \alpha_s^- \alpha_s^- \sum_s \sigma_s u_s v_s \alpha_s^+ \alpha_s^+ | gs \rangle = \\
&= 2 \sum_{s>} u_s^2 v_s^2 = \frac{1}{2} \sum_{s>} \frac{\Delta^2}{(E_s - \lambda)^2 + \Delta^2}. \tag{352}
\end{aligned}$$

Чтобы оценить эту величину, перейдем от суммирования по одночастичному спектру к интегрированию:

$$\langle gs | (\hat{N} - N)^2 | gs \rangle = \frac{\Delta^2}{2 \langle \delta E \rangle} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(E_s - \lambda)}{(E_s - \lambda)^2 + \Delta^2} = \frac{\pi \Delta}{2 \langle \delta E \rangle}, \tag{353}$$

где  $\langle \delta E \rangle$  – среднее расстояние между одночастичными уровнями. Приняв для оценки  $\Delta \approx 750$  кэВ,  $\langle \delta E \rangle \approx 300$  кэВ, получаем

$$\sqrt{\langle gs | (\hat{N} - N)^2 | gs \rangle} \approx 2.$$

## 19. Микроскопическое описание вибрационных состояний ядер. Приближение Тамма–Данкова

Наш анализ парных корреляций в ядрах основывался на гамильтониане

$$H = \sum_s (E_s - \lambda) a_s^+ a_s - G \sum_{s>} a_s^+ a_s^+ \sum_{s'>} a_{s'}^- a_{s'}. \tag{354}$$

Применив  $u - v$  преобразование Боголюбова, мы получили гамильтониан независимых квазичастиц

$$H = \sum_s \varepsilon_s \alpha_s^+ \alpha_s, \quad (355)$$

где  $\varepsilon_s = \sqrt{(E_s - \lambda)^2 + \Delta^2}$ . Этот последний гамильтониан является приближением к исходному, который тем не менее учитывает основной эффект парных корреляций. Простейшими возбужденными состояниями такого гамильтониана в случае четно-четных ядер являются двухквазичастичные состояния

$$\alpha_s^+ \alpha_{s'}^+ |gs\rangle \quad (356)$$

с энергией возбуждения  $\varepsilon_s + \varepsilon_{s'} \geq 2\Delta$ . Матричные элементы возбуждения таких состояний в случае электрических переходов из основного состояния дается выражением

$$\langle gs | \sigma_{s'} \alpha_{s'}^+ \alpha_s \hat{Q} | gs \rangle = -\frac{1}{2} Q_{ss'} (u_s v_{s'} + v_s u_{s'}). \quad (357)$$

Множитель  $(u_s v_{s'} + v_s u_{s'})$  максимален, когда оба уровня  $s$  и  $s'$  близки к поверхности Ферми или когда, например, одночастичное состояние  $s'$  полностью заполнено, а состояние  $s$  не заполнено совсем (и наоборот).

Однако в действительности в ядрах при энергии возбуждения ниже  $2\Delta$  наблюдаются состояния, вероятности возбуждения которых соответствуют матричным элементам перехода заметно большим чем  $\frac{1}{2} Q_{ss'} (u_s v_{s'} + v_s u_{s'})$ . Их существование означает, что есть корреляции между различными двухквазичастичными состояниями. Источником таких корреляций может быть только остаточное взаимодействие, смешивающее различные двухквазичастичные конфигурации.

Введем в рассмотрение такое взаимодействие, выразив его в терминах квазичастичных операторов:

$$H = H_0 - \kappa FF,$$

$$\begin{aligned}
H_0 &= \sum_s \varepsilon_s \alpha_s^+ \alpha_s, \\
F &= \sum_{s,s'} f_{ss'} (u_s v_{s'} + v_s u_{s'}) (\alpha_s^+ \alpha_{s'}^+ + \alpha_{s'} \alpha_s) + \\
&\quad + \sum_{s,s'} f_{ss'} (u_s u_{s'} - v_s v_{s'}) \alpha_s^+ \alpha_{s'}, \\
&\quad f_{ss'} = -f_{s's}.
\end{aligned} \tag{358}$$

Наша цель – найти оператор  $B^+$ , удовлетворяющий уравнению

$$[H, B^+] = \omega B^+. \tag{359}$$

В этом случае состояние

$$B^+ |gs\rangle \tag{360}$$

будет собственным состоянием гамильтониана с энергией возбуждения  $\omega$ . Действительно, так как  $|gs\rangle$  является собственным состоянием гамильтониана, добавлением к гамильтониану константы можно добиться того, что

$$H |gs\rangle = 0. \tag{361}$$

Тогда

$$HB^+ |gs\rangle = (HB^+ - B^+H) |gs\rangle = [H, B^+] |gs\rangle = \omega B^+ |gs\rangle. \tag{362}$$

Какой должна быть квазичастичная структура оператора  $B^+$ ? Будем искать его в следующем виде:

$$B^+ = \sum_{s,t} \psi_{st} \alpha_s^+ \alpha_t^+. \tag{363}$$

Нам понадобятся коммутационные соотношения

$$[\alpha_i^+ \alpha_j, \alpha_s^+ \alpha_t^+] = \delta_{js} \alpha_i^+ \alpha_t^+ + \delta_{jt} \alpha_s^+ \alpha_i^+, \tag{364}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha_j \alpha_i, \alpha_s^+ \alpha_t^+] &= \delta_{is} \delta_{jt} - \delta_{it} \delta_{js} - \\
&- \delta_{is} \alpha_t^+ \alpha_j + \delta_{it} \alpha_s^+ \alpha_j + \delta_{js} \alpha_t^+ \alpha_i - \delta_{jt} \alpha_s^+ \alpha_i.
\end{aligned} \tag{365}$$



Если мы усредним последний коммутатор по состоянию  $|gs\rangle$ , то результат будет таким:

$$\langle gs | [\alpha_j \alpha_i, \alpha_s^+ \alpha_t^+] | gs \rangle = \delta_{is} \delta_{jt} - \delta_{it} \delta_{js}. \quad (366)$$

Мы будем использовать этот результат как приближенное выражение для коммутатора в (365), заменяя коммутатор его средним значением. Тогда

$$[H_0, \alpha_s^+ \alpha_t^+] = (\varepsilon_s + \varepsilon_t) \alpha_s^+ \alpha_t^+, \quad (367)$$

$$\begin{aligned} [F, \alpha_s^+ \alpha_t^+] &= \sum_{i,j} f_{ij} (u_i v_j + u_j v_i) [\alpha_j \alpha_i, \alpha_s^+ \alpha_t^+] + \\ &\quad + \sum_{i,j} f_{ij} (u_i u_j - v_j v_i) [\alpha_i^+ \alpha_j, \alpha_s^+ \alpha_t^+] \approx \\ &\approx \sum_{i,j} f_{ij} (u_i v_j + u_j v_i) \langle gs | [\alpha_j \alpha_i, \alpha_s^+ \alpha_t^+] | gs \rangle = \\ &= \sum_{i,j} f_{ij} (u_i v_j + u_j v_i) \delta_{is} (\delta_{jt} - \delta_{it} \delta_{js}) = \\ &= 2f_{st} (u_s v_t + u_t v_s). \end{aligned} \quad (368)$$

Используя этот результат, мы получаем

$$\begin{aligned} [H, B^+] &= [H_0, B^+] - \kappa F [F, B^+] - \kappa [F, B^+] F = \\ &= \sum_{s,t} \psi_{st} (\varepsilon_s + \varepsilon_t) \alpha_s^+ \alpha_t^+ - 4\kappa \sum_{s,t} \psi_{st} f_{st} (u_s v_t + u_t v_s) F. \end{aligned} \quad (369)$$

Подставляя этот результат в уравнение движения, имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{s,t} \psi_{st} (\varepsilon_s + \varepsilon_t) \alpha_s^+ \alpha_t^+ - 4\kappa \sum_{s',t'} f_{s't'} (u_{s'} v_{t'} + u_{t'} v_{s'}) \psi_{s't'} \times \\ &\times \sum_{s,t} f_{st} \left( (u_s v_t + u_t v_s) (\alpha_s^+ \alpha_t^+ + \alpha_t \alpha_s) + u_s u_t - v_s v_t \right) \alpha_s^+ \alpha_t = \\ &= \omega \sum_{s,t} \psi_{st} \alpha_s^+ \alpha_t^+. \end{aligned} \quad (370)$$

Отбросим в левой части (370) оператор  $\alpha_s^+ \alpha_t$ , учитывая тот факт, что в основном состоянии нет квазичастиц. Мы также не будем принимать во внимание

оператор  $\alpha_t \alpha_s$ , но вернемся к нему в следующем разделе. Тогда, приравнивая коэффициенты при операторе  $\alpha_s^+ \alpha_t^+$ , получаем

$$\psi_{st}(\varepsilon_s + \varepsilon_t) - f_{st}(u_s v_t + u_t v_s) 4\kappa \sum_{s',t'} f_{s't'}(u_{s'} v_{t'} + u_{t'} v_{s'}) \psi_{s't'} = \omega \psi_{st}. \quad (371)$$

Введем обозначение

$$S = 4\kappa \sum_{s,t} f_{st}(u_s v_t + u_t v_s) \psi_{st}. \quad (372)$$

Тогда

$$\psi_{st} = S \frac{f_{st}(u_s v_t + u_t v_s)}{(\varepsilon_s + \varepsilon_t - \omega)}. \quad (373)$$

Подставив это выражение в уравнение для  $S$ , находим

$$S = 4\kappa S \sum_{s,t} \frac{f_{st}^2(u_s v_t + u_t v_s)^2}{\varepsilon_s + \varepsilon_t - \omega}. \quad (374)$$

Так как  $S \neq 0$ , мы получаем уравнение для определения  $\omega$ :

$$\frac{1}{4\kappa} = \sum_{s,t} \frac{f_{st}^2(u_s v_t + u_t v_s)^2}{\varepsilon_s + \varepsilon_t - \omega}. \quad (375)$$

Один из корней этого уравнения имеет значение меньшее, чем минимальное значение  $\varepsilon_s + \varepsilon_t$ . Величина  $S$  определяется условием нормировки

$$1 = \langle gs | BB^+ | gs \rangle = \langle gs | [B, B^+] | gs \rangle = 2 \sum_{s,t} \psi_{st}^2, \quad (376)$$

или

$$1 = 2S^2 \sum_{s,t} \frac{f_{st}^2(u_s v_t + u_t v_s)^2}{(\varepsilon_s + \varepsilon_t - \omega)^2}. \quad (377)$$

Приближение, при котором мы ограничиваемся в выражении для оператора  $B^+$  только слагаемыми, пропорциональными операторам рождения пар квазичастиц, называется приближением Гамма–Данкова.

Рассмотрим теперь матричный элемент оператора электромагнитного перехода между основным состоянием ядра, которое в рассматриваемом приближении представлено вектором  $|gs\rangle$ , и возбужденным состоянием  $B^+|gs\rangle$ :

$$\begin{aligned}
& \langle gs|B\hat{Q}|gs\rangle = \\
& = \langle gs|\sum_{s,t}\psi_{st}\alpha_t\alpha_s\left(\sum_{i,j}q_{ij}(u_iv_j+u_jv_i)(\alpha_i^+\alpha_j^++\alpha_j\alpha_i)+\right. \\
& \quad \left.+\sum_{i,j}q_{ij}(u_iu_j-v_jv_i)\alpha_i^+\alpha_j\right)|gs\rangle = \\
& = 2\sum_{s,t}\psi_{st}q_{st}(u_s v_t+u_t v_s). \tag{378}
\end{aligned}$$

Оценим этот матричный элемент. Из условия нормировки мы имеем

$$2\sum_{s,t}\psi_{st}^2=1. \tag{379}$$

Если состояние  $B^+|gs\rangle$  коллективное, т.е. многие двухквазичастичные компоненты дают вклад в это состояние, то из условия нормировки получаем

$$2\bar{\psi}^2 n=1, \tag{380}$$

т.е.

$$\sqrt{\bar{\psi}^2}=\frac{1}{\sqrt{2n}}. \tag{381}$$

Здесь  $n$ —число двухквазичастичных компонент, дающих заметный вклад в состояние  $B^+|gs\rangle$ , а  $\bar{\psi}^2$ —среднее значение квадрата амплитуды  $\psi_{st}$ . Предполагая, что сумма в выражении для  $\langle gs|B\hat{Q}|gs\rangle$  когерентная, получаем

$$\langle gs|B\hat{Q}|gs\rangle\approx 2\sqrt{\bar{\psi}^2}\cdot\sqrt{\langle(q(uv+vu))^2\rangle}=\sqrt{\langle(q(uv+vu))^2\rangle}\sqrt{2n}. \tag{382}$$

Мы видим, что в выражении для матричного элемента электромагнитного перехода появился фактор коллективного усиления  $\sqrt{n}$ .

Из размерности операторов электрических переходов мультипольности  $\lambda$  следует, что, например, единицей измерения вероятности электрического квадрупольного перехода может служить величина  $e^2\cdot$  ферми<sup>4</sup>. Часто используется

другая единица измерения:  $e^2 \cdot \text{б}^2$ , где  $1 \text{ б} = 100 \text{ ферми}^2$ . Однако для оценки коллективности вероятности перехода удобнее использовать единицы Вайскопфа: W.u. Для E2-перехода  $B_{\text{W.u.}}(E2) = \frac{(1.2)^4}{4\pi} \left(\frac{3}{5}\right)^2 A^{4/3} e^2 \cdot \text{ферми}^4$ . Это усредненная величина вероятности одночастичного перехода, когда переход затрагивает только один нуклон. Коллективные переходы характеризуются величиной в 10 или более W.u.

## 20. Приближение хаотических фаз

В предыдущем разделе при выводе уравнения для амплитуды  $\psi_{st}$  мы пренебрегли в выражении для оператора  $F$  слагаемыми, пропорциональными операторам уничтожения пар квазичастиц  $\alpha_t \alpha_s$ . Рассмотрим опять гамильтониан

$$H = \sum_s \varepsilon_s \alpha_s^+ \alpha_s - \kappa F F,$$

$$F = \sum_{s,s'} f_{ss'} (u_s v_{s'} + v_s u_{s'}) (\alpha_s^+ \alpha_{s'}^+ + \alpha_{s'} \alpha_s), \quad (383)$$

где, как и выше, в выражении для  $F$  отброшено слагаемое, пропорциональное оператору  $\alpha_s^+ \alpha_t$ . В приближении Тамма–Данкова мы исходили из того, что оператор рождения фонона  $B^+$  имеет следующую структуру:

$$B^+ = \sum_{s,t} \psi_{st} \alpha_s^+ \alpha_t^+. \quad (384)$$

Включим теперь в выражение для оператора  $B^+$  слагаемое, пропорциональное  $\alpha_t \alpha_s$ :

$$B^+ = \sum_{s,t} (\psi_{st} \alpha_s^+ \alpha_t^+ - \varphi_{st} \alpha_t \alpha_s). \quad (385)$$

Что означает физически появление в последнем выражении второго слагаемого? Действуя на основное состояние ядра, оператор уничтожения фонона  $B$  должен давать нуль, поскольку в основном состоянии нет возбуждений. Но,

действуя на вакуум квазичастиц  $|gs\rangle$ , оператор (385) рождает суперпозицию двухквазичастичных состояний:

$$B|gs\rangle = -\sum_{s,t} \varphi_{st} \alpha_s^+ \alpha_t^+ |gs\rangle. \quad (386)$$

Таким образом, если оператор, генерирующий фонон, имеет вид (385), то основное состояние уже не может быть вакуумом квазичастиц. В нем присутствуют четырех-, восьмиквазичастичные компоненты и т.д. Обозначим это новое коррелированное основное состояние как  $|gs_{RPA}\rangle$  и с точностью до восьми-квазичастичных примесей возьмем его в виде

$$|gs_{RPA}\rangle = |gs\rangle + \sum \xi_{ijkl} \alpha_i^+ \alpha_j^+ \alpha_k^+ \alpha_l^+ |gs\rangle. \quad (387)$$

Значит,

$$\begin{aligned} |gs_{RPA}\rangle = & -\sum_{s,t} \varphi_{st} \alpha_s^+ \alpha_t^+ |gs\rangle + 12 \sum \psi_{st} \xi_{stkl} \alpha_k^+ \alpha_l^+ |gs\rangle - \\ & - \sum \varphi_{st} \xi_{ijkl} \alpha_s^+ \alpha_t^+ \alpha_i^+ \alpha_j^+ \alpha_k^+ \alpha_l^+ |gs\rangle. \end{aligned} \quad (388)$$

Определим коэффициенты  $\xi_{ijkl}$  с помощью уравнения

$$12 \sum_{ij} \psi_{ij} \xi_{ijst} = \varphi_{st}. \quad (389)$$

Тогда с точностью до вклада компонент с числом квазичастиц, большим четырех, (387) является вакуумом фононов RPA. Определим теперь с помощью уравнения движения

$$[H, B^+] = \omega B^+ \quad (390)$$

амплитуды  $\psi_{st}$  и  $\varphi_{st}$ . Из (390) следует

$$\begin{aligned} & \sum_{s,t} (E_s + E_t) \psi_{st} \alpha_s^+ \alpha_t^+ + \sum_{s,t} (E_s + E_t) \varphi_{st} \alpha_t \alpha_s - \\ & - 2\kappa \Gamma_{RPA} \sum_{s,t} f_{st} (u_s v_t + u_t v_s) (\alpha_s^+ \alpha_t^+ + \alpha_t \alpha_s) = \\ & = \omega \sum_{s,t} (\psi_{st} \alpha_s^+ \alpha_t^+ - \varphi_{st} \alpha_t \alpha_s), \end{aligned} \quad (391)$$

где

$$\Gamma_{RPA} = \langle gs|[F, B^+]|gs \rangle \quad (392)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых операторах в (391), получаем

$$\begin{aligned} (E_s + E_t)\psi_{st} - 2\Gamma_{RPA}f_{st}(u_s v_t + u_t v_s) &= \omega\psi_{st}, \\ (E_s + E_t)\varphi_{st} - 2\Gamma_{RPA}f_{st}(u_s v_t + u_t v_s) &= -\omega\varphi_{st}, \end{aligned} \quad (393)$$

откуда находим, что

$$\begin{aligned} \psi_{st} &= 2\kappa\Gamma_{RPA} \frac{f_{st}(u_s v_t + u_t v_s)}{E_s + E_t - \omega}, \\ \varphi_{st} &= 2\kappa\Gamma_{RPA} \frac{f_{st}(u_s v_t + u_t v_s)}{E_s + E_t + \omega}. \end{aligned} \quad (394)$$

Из (394) видно, что  $|\varphi_{st}| < |\psi_{st}|$ . Вычислим  $\Gamma_{RPA}$ :

$$\begin{aligned} [F, B^+] &= \left[ \sum_{ij} f_{ij}(u_i v_j + u_j v_i)(\alpha_i^+ \alpha_j^+ + \alpha_j \alpha_i), \sum_{s,t} (\psi_{st} \alpha_s^+ \alpha_t^+ - \varphi_{st} \alpha_t \alpha_s) \right] = \\ &= \left[ \sum_{ij} f_{ij}(u_i v_j + u_j v_i) \alpha_j \alpha_i, \sum_{s,t} (\psi_{st} \alpha_s^+ \alpha_t^+) - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \sum_{ij} f_{ij}(u_i v_j + u_j v_i) \alpha_i^+ \alpha_j^+, \sum_{s,t} \varphi_{st} \alpha_t \alpha_s \right] \right] = \\ &= 2 \sum_{s,t} f_{st}(u_s v_t + u_t v_s) (\psi_{st} + \varphi_{st}) = \Gamma_{RPA}. \end{aligned} \quad (395)$$

Подставив в (395) выражения для  $\psi_{st}$  и  $\varphi_{st}$ , мы получаем секулярное уравнение для определения  $\omega$ :

$$\Gamma_{RPA} = 4\kappa\Gamma_{RPA} \sum_{s,t} \frac{(E_s + E_t)f_{st}^2(u_s v_t + u_t v_s)^2}{(E_s + E_t)^2 - \omega^2}. \quad (396)$$

Так как  $\Gamma_{RPA} \neq 0$ ,

$$\frac{1}{4\kappa} = \sum_{s,t} \frac{(E_s + E_t)f_{st}^2(u_s v_t + u_t v_s)^2}{(E_s + E_t)^2 - \omega^2}. \quad (397)$$

Роль амплитуд  $\varphi_{st}$  возрастает с уменьшением  $\omega$ . При рассмотрении вибрационных возбуждений в сферических ядрах обращение  $\omega$  в нуль указывает на фазовый переход от сферической формы ядра к деформированной.

Величина  $\Gamma_{RPA}$  определяется из условия нормировки

$$1 = [B, B^+] = \left[ \sum_{s,t} (\psi_{st} \alpha_t \alpha_s - \varphi_{st} \alpha_s^+ \alpha_t^+), \sum_{s',t'} (\psi_{s't'} \alpha_{s'}^+ \alpha_{t'}^+ - \varphi_{s't'} \alpha_{t'} \alpha_{s'}) \right] =$$

$$= 2 \sum_{s,t} (\psi_{st}^2 - \varphi_{st}^2). \quad (398)$$

Подставляя в (398) выражения для амплитуд  $\psi_{st}$  и  $\varphi_{st}$ , получаем уравнение для определения  $\Gamma_{RPA}$ :

$$1 = 2(\kappa \Gamma_{RPA})^2 \sum_{s,t} \frac{4\omega(E_s + E_t) f_{st}^2 (u_s v_t + u_t v_s)^2}{((E_s + E_t)^2 - \omega^2)^2}. \quad (399)$$

## 21. Среднее поле ядра. Введение

В общем случае гамильтониан ядра можно представить следующим образом:

$$\hat{H} = T + V_{\text{int}},$$

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m} \int d^3r \psi^+(\vec{r}) \nabla^2 \psi(\vec{r}), \quad (400)$$

где для  $\psi^+(\vec{r})$  воспользуемся представлением

$$\psi^+(\vec{r}) = \sum_s \psi(\vec{r})_s a_s^+. \quad (401)$$

Если взаимодействие зависит только от координат нуклонов, то

$$V_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \rho(\vec{r}) V(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}'), \quad (402)$$

В терминах операторов  $a_s^+$  и  $a_s$

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{s,s'} a_s^+ \int d^3r \psi_s(\vec{r}) \nabla^2 \psi_{s'}^*(\vec{r}) a_{s'} \equiv \sum_{s,s'} t_{s,s'} a_s^+ a_{s'} \quad (403)$$

и

$$V_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{s,s',t,t'} a_s^+ a_{s'} \int d^3r d^3r' \psi_s(\vec{r}) \psi_{s'}^*(\vec{r}) V(\vec{r} - \vec{r}') \psi_t(\vec{r}') \psi_{t'}^*(\vec{r}') a_t^+ a_{t'} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2} \sum_{s,s',t,t'} V(s, s'|t, t') a_s^+ a_{s'} a_t^+ a_{t'}. \quad (404)$$

Таким образом,

$$\hat{H} = \sum_{s,s'} t_{s,s'} a_s^+ a'_s + \sum_{s,s',t,t'} V(s,s'|t,t') a_s^+ a_{s'} a_t^+ a_{t'}. \quad (405)$$

Введем сокращенные обозначения

$$ss' = \alpha, \quad a_s^+ a_{s'} = \hat{O}_\alpha. \quad (406)$$

В новых обозначениях

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} t_{\alpha} \hat{O}_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} V_{\alpha, \beta} \hat{O}_{\alpha} \hat{O}_{\beta}. \quad (407)$$

Рассмотрим случай одного  $\alpha$ . Тогда

$$\hat{H} = t\hat{O} + \frac{1}{2}V\hat{O}^2. \quad (408)$$

Перейдем к рассмотрению волновой функции основного состояния ядра. Пусть  $|\Psi\rangle$  – некоторое приближенное выражение для этой функции.  $|\Psi\rangle$  можно разложить по базису точных собственных функций гамильтониана  $\hat{H}$ :

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |\Phi_i\rangle. \quad (409)$$

Тогда

$$\exp(-\beta\hat{H})|\Psi\rangle = \sum_i \exp(-\beta E_i) c_i |\Phi_i\rangle. \quad (410)$$

При достаточно большом  $\beta$  главный вклад в разложение будет давать основное состояние. Поэтому вектор  $\exp(-\beta\hat{H})|\Psi\rangle$  можно считать приближенным выражением для основного состояния

$$|\Phi_{gs}\rangle \approx \exp(-\beta\hat{H})|\Psi\rangle, \quad (411)$$

где

$$\exp(-\beta\hat{H}) = \exp\left(-\beta t\hat{O} - \frac{1}{2}\beta V\hat{O}^2\right). \quad (412)$$



Из тождества Гаусса

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \exp(-a(\sigma - c)^2) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0, \quad (413)$$

следует преобразование Хаббарда–Стратановича

$$\exp(-ac^2) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \exp(-a\sigma^2 + 2ac\sigma). \quad (414)$$

Подставляя в (414)  $c = \hat{O}$ ,  $a = -\frac{1}{2}\beta V$ , получаем

$$\exp(-\hat{1}2\beta V \hat{O}^2) = \sqrt{-\frac{\beta V}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \exp\left(\frac{1}{2}\beta V \sigma^2 - \beta V \sigma \hat{O}\right), \quad V < 0. \quad (415)$$

Итак, для основного состояния ядра мы имеем

$$|\Phi_{gs}\rangle = \sqrt{\frac{\beta|V|}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \exp\left(-\frac{1}{2}\beta|V|\sigma^2\right) \exp\left(-\beta(t\hat{O} - |V|\sigma\hat{O})\right) |\Psi\rangle. \quad (416)$$

В этом выражении  $(t\hat{O} - |V|\sigma\hat{O})$  – одночастичный гамильтониан. Как вычислить интеграл? В экспоненте находится одночастичный гамильтониан, зависящий от  $\sigma$  как от параметра. Найдём собственные состояния одночастичного гамильтониана в экспоненте и разложим  $|\Psi\rangle$  по базису этих состояний. Тогда с достаточно хорошей точностью при больших  $\beta$

$$\begin{aligned} |\Phi_{gs}\rangle &= \sqrt{\frac{\beta|V|}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \exp\left(-\frac{1}{2}\beta|V|\sigma^2\right) \times \\ &\times \exp\left(-\beta(t\langle\hat{O}\rangle - |V|\sigma\langle\hat{O}\rangle)\right) |\Psi\rangle, \end{aligned} \quad (417)$$

где среднее берется по основному состоянию гамильтониана с заданным значением  $\sigma$ .

Какие значения  $\sigma$  дают основной вклад в гамильтониан? Так как  $\beta$  – большое число, для оценки интеграла воспользуемся методом перевала:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left( -\frac{1}{2}\beta|V|\sigma^2 - \beta t\langle\hat{O}\rangle + \beta|V|\sigma\langle\hat{O}\rangle \right) &= \\ &= -\beta|V|\sigma + \beta|V|\langle\hat{O}\rangle = 0, \end{aligned} \quad (418)$$

т.е.  $\sigma = \langle \hat{O} \rangle$ . Таким образом, основной вклад в интеграл даст то значение  $\sigma$ , при котором собственная функция нижайшего по энергии состояния  $|sc\rangle$  гамильтониана

$$t\hat{O} - |V|\sigma\hat{O} \quad (419)$$

будет удовлетворять условию

$$\sigma = \langle sc|\hat{O}|sc\rangle. \quad (420)$$

Однако (419) – это среднее поле, отвечающее гамильтониану

$$H = t\hat{O} - \frac{1}{2}|V|\hat{O}^2. \quad (421)$$

Отметим, что вклад в интеграл (417) даст и некоторая область вокруг точки перевала. Таким образом, вклад дают и флуктуации среднего поля.

В общем случае мы имеем много независимых и некоммутирующих операторов  $\hat{O}_\alpha$ . Следовательно, нельзя применять непосредственно преобразование Хаббарда–Стратановича, а следует разделить интервал  $\beta$  на  $N$  равных частей:

$$\exp(-\beta\hat{H}) [\exp(-\Delta\beta\hat{H})]^N. \quad (422)$$

Тогда преобразование Хаббарда–Стратановича можно применять на маленьком интервале  $\Delta\beta$ . В этом случае коммутатор  $[\hat{O}_\alpha, \hat{O}_\beta]$  имеет дополнительную малость. Окончательный результат получается в пределе  $N \rightarrow \infty$ .

## 22. Среднее поле ядра. Метод Хартри–Фока–Боголюбова

Ранее мы уже использовали концепцию среднего поля ядра, в котором, в первом приближении, нуклоны двигаются независимо. Эта концепция в первую очередь базируется на экспериментальных данных, которые привели

к созданию оболочечной модели ядра. В то же время весьма интересно исследовать возможность найти среднее поле ядра, основываясь на гамильтониане, представленном суммой кинетической энергии нуклонов и двухчастичного взаимодействия. Рассмотрению этого вопроса и посвящен настоящий раздел.

Мы начнем рассмотрение с гамильтониана

$$H = \hat{t} + \frac{1}{2} \hat{v} = \sum_{\alpha=1}^A \hat{t}(\vec{r}_{\alpha}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta=1}^A v(\vec{r}_{\alpha}, \vec{r}_{\beta}), \quad (423)$$

где первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию нуклонов, а второе – двухчастичное взаимодействие.

В представлении вторичного квантования, использующем пока произвольный одночастичный базис  $\varphi_k(\vec{r})$ , в котором  $\psi^+(\vec{r}) = \sum_k \varphi_k^*(\vec{r}) a_k^+$ , гамильтониан (423) имеет вид

$$H = \sum_{k,k'} t_{kk'} a_k^+ a_{k'} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} v_{ijkl} a_i^+ a_j^+ a_l a_k, \quad (424)$$

где

$$t_{kk'} = \int d^3 r \varphi_k^*(\vec{r}) \hat{t} \varphi_{k'}(\vec{r}),$$

$$v_{ijkl} = \int d^3 r \int d^3 r' \varphi_i^*(\vec{r}) \varphi_j^*(\vec{r}') v(\vec{r}, \vec{r}') \varphi_l(\vec{r}') \varphi_k(\vec{r}). \quad (425)$$

При вычислении последнего интеграла могут возникнуть проблемы, если взаимодействие  $v$  сингулярно. Однако в лекциях мы не будем затрагивать эти проблемы. Наша цель – найти такой одночастичный базис  $|\alpha\rangle$  и, следовательно, такую многочастичную функцию (в виде детерминанта Слэтера), которая минимизирует среднее значение гамильтониана. Обозначим такую многочастичную волновую функцию через  $|\Phi\rangle$ . Тогда

$$H = \sum_{k,k'} t_{kk'} \langle \Phi | a_k^+ a_{k'} | \Phi \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} v_{ijkl} \langle \Phi | a_i^+ a_j^+ a_l a_k | \Phi \rangle. \quad (426)$$

Необходимо вычислить матричные элементы  $\langle \Phi | a_k^+ a_{k'} | \Phi \rangle$  и  $\langle \Phi | a_i^+ a_j^+ a_l a_k | \Phi \rangle$ . Чтобы научиться рассчитывать такие матричные элементы, рассмотрим сначала систему из двух частиц. В этом случае  $|\Phi\rangle = c_1^+ c_2^+ |0\rangle$ .

$c_\alpha^+$  – это операторы рождения частиц, соответствующих новому одночастичному базису, являющемуся наилучшим одночастичным приближением. Операторы  $c_1^+$  и  $c_2^+$  рождают нуклоны в состояниях, характеризуемых наборами квантовых чисел 1 и 2. Однако пока связь этих состояний с базисом  $\varphi_k(\vec{r})$  не установлена. Но мы можем использовать тот факт, что операторы  $c_1^+$  и  $c_2^+$  линейно связаны с операторами  $a_k^+$ :

$$c_{1(2)}^+ = \sum_l D_{1(2)l} a_l^+, \quad (427)$$

где  $D_{1(2)l}$  – числовая матрица. Это соотношение легко получить следующим образом. Оператор рождения частицы в точке  $\vec{r}$   $\psi^+(\vec{r})$  может быть представлен в обоих базисах так:

$$\psi^+(\vec{r}) = \sum_k \varphi_k^*(\vec{r}) a_k^+ = \sum_\alpha \chi_\alpha^*(\vec{r}) c_\alpha^+, \quad (428)$$

где  $\chi_\alpha^*(\vec{r})$  – одночастичная волновая функция в базисе  $\alpha$ . Из (428) получаем

$$c_\alpha^+ = \sum_k \left( \int d^3r \chi_\alpha(\vec{r}) \varphi_k^*(\vec{r}) \right) a_k^+. \quad (429)$$

Таким образом,

$$D_{\alpha l} = \int d^3r \chi_\alpha(\vec{r}) \varphi_l^*(\vec{r}). \quad (430)$$

При вычислении матричных элементов будем использовать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a_{k'} c_1^+ &= (a_{k'} c_1^+ + c_1^+ a_{k'}) - c_1^+ a_{k'} = \{a_{k'}, c_1^+\}_+ - c_1^+ a_{k'}, \\ \{a_{k'}, c_1^+\}_+ &= \sum_l D_{1l} \{a_{k'}, a_l^+\}_+ = D_{1k'}. \end{aligned} \quad (431)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \Phi | a_k^+ a_{k'} | \Phi \rangle &= \langle 0 | c_2 c_1 a_k^+ a_{k'} c_1^+ c_2^+ | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | c_2 c_1 a_k^+ c_2^+ | 0 \rangle D_{1k'} - \langle 0 | c_2 c_1 a_k^+ c_1^+ a_{k'} c_2^+ | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (432)$$

Поскольку 1 и 2 – это по определению разные одночастичные состояния,

$$\begin{aligned}
\langle \Phi | a_k^+ a_{k'} | \Phi \rangle &= \langle 0 | c_2 \{c_1, a_k^+\}_+ c_2^+ | 0 \rangle D_{1k'} - \langle 0 | c_2 c_1 a_k^+ c_1^+ | 0 \rangle D_{2k'} = \\
&= D_{1k}^* D_{1k'} + \langle 0 | c_2 a_k^+ c_1 c_1^+ | 0 \rangle D_{2k'} = \\
&= D_{1k}^* D_{1k'} + \langle 0 | \{c_2, a_k^+\}_+ c_1 c_1^+ | 0 \rangle D_{2k'} = \\
&= D_{1k}^* D_{1k'} + D_{2k}^* D_{2k'} = \sum_{\alpha=1}^2 D_{\alpha k}^* D_{\alpha k'} \equiv \rho_{kk'}. \quad (433)
\end{aligned}$$

Матрица  $\rho_{kk'}$  получила название матрицы плотности. В случае системы, состоящей из произвольного числа частиц, мы по-прежнему можем использовать соотношения

$$a_{k'} c_{\alpha}^+ = \{a_{k'}, c_{\alpha}^+\}_+ - c_{\alpha}^+ a_{k'} \quad (434)$$

и

$$\{a_{k'}, c_{\alpha}^+\}_+ = D_{\alpha k'}. \quad (435)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\langle \Phi | a_k^+ a_{k'} | \Phi \rangle &= \langle 0 | c_A c_{A-1} \dots c_2 c_1 a_k^+ a_{k'} c_1^+ c_2^+ \dots c_{A-1}^+ c_A^+ | 0 \rangle = \\
&= \sum_{\alpha=1}^A \langle 0 | c_A c_{A-1} \dots c_2 c_1 a_k^+ \dots c_{\alpha-1}^+ c_{\alpha+1}^+ \dots | 0 \rangle D_{\alpha k'} (-1)^{\alpha} = \\
&= \sum_{\alpha=1}^A D_{\alpha k'} (-1)^{\alpha} \{c_{\alpha}, a_k^+\}_+ \langle 0 | \dots c_{\alpha+1} c_{\alpha-1} \dots c_{\alpha-1}^+ c_{\alpha+1}^+ \dots | 0 \rangle = \\
&= \sum_{\alpha=1}^A D_{\alpha k}^* D_{\alpha k'} \equiv \rho_{kk'}. \quad (436)
\end{aligned}$$

Перейдем теперь к расчету матричного элемента гамильтониана взаимодействия. Как и выше, начнем рассмотрение с двухчастичной системы:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi | a_i^+ a_j^+ a_l a_k | \Phi \rangle &= \langle 0 | c_2 c_1 a_i^+ a_j^+ a_l a_k c_1^+ c_2^+ | 0 \rangle = \\
&= \{a_k, c_1^+\}_+ \{a_l, c_2^+\}_+ \langle 0 | c_2 c_1 a_i^+ a_j^+ | 0 \rangle - \\
&\quad - \{a_k, c_2^+\}_+ \{a_l, c_1^+\}_+ \langle 0 | c_2 c_1 a_i^+ a_j^+ | 0 \rangle = \\
&= \{a_k, c_1^+\}_+ \{a_l, c_2^+\}_+ \left( \{c_1, a_i^+\}_+ \{c_2, a_j^+\}_+ - \{c_1, a_j^+\}_+ \{c_2, a_i^+\}_+ \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\{a_k, c_2^+\}_+ \{a_l, c_1^+\}_+ \left( \{c_1, a_i^+\}_+ \{c_2, a_j^+\}_+ - \{c_1, a_j^+\}_+ \{c_2, a_i^+\}_+ \right) = \\
& = D_{1k} D_{2l} (D_{1i}^* D_{2j}^* - D_{1j}^* D_{2i}^*) - D_{2k} D_{1l} (D_{1i}^* D_{2j}^* - D_{1j}^* D_{2i}^*) = \\
& = D_{1k} D_{1i}^* D_{2l} D_{2j}^* - D_{1k} D_{1j}^* D_{2l} D_{2i}^* + D_{2k} D_{2i}^* D_{1l} D_{1j}^* - D_{2k} D_{2j}^* D_{1l} D_{1i}^* = \\
& = (D_{1k} D_{1i}^* + D_{2k} D_{2i}^*) (D_{1l} D_{1j}^* + D_{2l} D_{2j}^*) - \\
& - (D_{1k} D_{1j}^* + D_{2k} D_{2i}^*) (D_{1l} D_{1i}^* + D_{2l} D_{2i}^*) = \\
& = \rho_{ik} \rho_{jl} - \rho_{il} \rho_{jk} = \langle \Phi | a_i^+ a_k | \Phi \rangle \langle \Phi | a_j^+ a_l | \Phi \rangle - \\
& - \langle \Phi | a_i^+ a_l | \Phi \rangle \langle \Phi | a_j^+ a_k | \Phi \rangle. \quad (437)
\end{aligned}$$

В случае системы, состоящей из произвольного числа частиц,

$$\begin{aligned}
& \langle \Phi | a_i^+ a_j^+ a_l a_k | \Phi \rangle = \langle 0 | c_A \dots c_2 c_1 a_i^+ a_j^+ a_l a_k c_1^+ c_2^+ \dots c_A^+ | 0 \rangle = \\
& = \sum_{\alpha=1}^A (-1)^\alpha \{a_k, c_\alpha^+\}_+ \langle 0 | c_A \dots c_2 c_1 a_i^+ a_j^+ a_l \dots c_{\alpha-1}^+ c_{\alpha+1}^+ \dots | 0 \rangle = \\
& = \sum_{\alpha=1}^A \sum_{\beta=1}^A (-1)^\alpha \{a_k, c_\alpha^+\}_+ \sigma_\beta \{a_l, c_\beta^+\}_+ \times \\
& \times \langle 0 | c_A \dots c_2 c_1 a_i^+ a_j^+ \dots c_{\beta-1}^+ c_{\beta+1}^+ \dots c_{\alpha-1}^+ c_{\alpha+1}^+ \dots | 0 \rangle, \quad (438)
\end{aligned}$$

где  $\sigma_\beta = \pm 1$ . В последнем выражении операторы  $a_i^+$ ,  $a_j^+$  при перемещении влево должны сократиться с операторами  $c_\alpha, c_\beta$ . В противном случае среднее значение от произведения операторов, усредняемых по состоянию  $|0\rangle$ , будет равно нулю. Но имеется две возможности:

- оператор  $a_i^+$  сокращается с оператором  $c_\alpha$ , а оператор  $a_j^+$  – с оператором  $c_\beta$ ;
- оператор  $a_i^+$  сокращается с оператором  $c_\beta$ , а оператор  $a_j^+$  – с оператором  $c_\alpha$ .

В результате мы получаем

$$\begin{aligned}
& \langle \Phi | a_i^+ a_j^+ a_l a_k | \Phi \rangle = \\
& = \sum_{\alpha \neq \beta=1}^A \{a_k, c_\alpha^+\}_+ \{a_l, c_\beta^+\}_+ \left( \{c_\alpha, a_i^+\}_+ \{c_\beta, a_j^+\}_+ - \{c_\beta, a_i^+\}_+ \{c_\alpha, a_j^+\}_+ \right) = \\
& = \sum_{\alpha \neq \beta=1}^A (D_{\alpha i}^* D_{\alpha k} D_{\beta j}^* D_{\beta l} - D_{\beta i}^* D_{\beta l} D_{\alpha j}^* D_{\alpha k}) \quad (439)
\end{aligned}$$

но при  $\alpha = \beta$  сумма равна нулю. Поэтому

$$\begin{aligned}
\langle \Phi | a_i^+ a_j^+ a_l a_k | \Phi \rangle &= \sum_{\alpha=1}^A D_{\alpha i}^* D_{\alpha k} \sum_{\beta=1}^A D_{\beta j}^* D_{\beta l} - \\
&\quad - \sum_{\alpha=1}^A D_{\alpha j}^* D_{\alpha k} \sum_{\beta=1}^A D_{\beta i}^* D_{\beta l} = \\
&\quad = \rho_{ik} \rho_{jl} - \rho_{il} \rho_{jk} = \\
&\quad \langle \Phi | a_i^+ a_k | \Phi \rangle \langle \Phi | a_j^+ a_l | \Phi \rangle - \\
&\quad - \langle \Phi | a_i^+ a_l | \Phi \rangle \langle \Phi | a_j^+ a_k | \Phi \rangle. \tag{440}
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
\langle \Phi | H | \Phi \rangle &= \sum_{k,k'} t_{kk'} \rho_{kk'} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} v_{ijkl} (\rho_{ik} \rho_{jl} - \rho_{jk} \rho_{il}) = \\
&= \sum_{k,k'} \left( t_{kk'} + \frac{1}{2} \sum_{j,l} (v_{kjk'l} - v_{jkk'l}) \rho_{jl} \right) \rho_{kk'}. \tag{441}
\end{aligned}$$

Обозначим

$$U_{kk'} = \frac{1}{2} \sum_{j,l} (v_{kjk'l} - v_{jkk'l}) \rho_{jl}. \tag{442}$$

Тогда

$$\langle \Phi | H | \Phi \rangle = \sum_{k,k'} (t_{kk'} + U_{kk'}) \rho_{kk'}. \tag{443}$$

Но такой же результат мы получим, если наше рассмотрение будет основано на одночастичном гамильтониане

$$H_{sp} = \sum_{k,k'} (t_{kk'} + U_{kk'}) a_k^+ a_{k'}, \tag{444}$$

но с той оговоркой, что потенциал  $U$  должен быть определен самосогласованным образом, т.е. с помощью соотношения

$$U_{kk'} = \frac{1}{2} \sum_{j,l} (v_{kjk'l} - v_{jkk'l}) \langle \Phi | a_j^+ a_l | \Phi \rangle, \tag{445}$$

где матрица плотности  $\langle \Phi | a_j^+ a_l | \Phi \rangle$  находится в результате решения уравнения Шредингера с гамильтонианом (444).

Вернемся к рассмотрению среднего от гамильтониана по состоянию  $|\Phi\rangle$ , т.е. к  $\langle \Phi|H|\Phi\rangle$ :

$$\langle \Phi|H|\Phi\rangle = \sum_{k,k'} t_{kk'} \langle \Phi|a_k^+ a_{k'}|\Phi\rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} v_{ijkl} \langle \Phi|a_i^+ a_j^+ a_l a_k|\Phi\rangle. \quad (446)$$

В нашем приближении для  $|\Phi\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \Phi|a_i^+ a_j^+ a_l a_k|\Phi\rangle &= \langle \Phi|a_i^+ a_k|\Phi\rangle \langle \Phi|a_j^+ a_l|\Phi\rangle - \\ &- \langle \Phi|a_i^+ a_l|\Phi\rangle \langle \Phi|a_j^+ a_k|\Phi\rangle. \end{aligned} \quad (447)$$

Этот результат можно обобщить следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \Phi|a_i^+ a_j^+ a_l a_k|\Phi\rangle &= \langle \Phi|a_i^+ a_k|\Phi\rangle \langle \Phi|a_j^+ a_l|\Phi\rangle - \\ &- \langle \Phi|a_i^+ a_l|\Phi\rangle \langle \Phi|a_j^+ a_k|\Phi\rangle + \\ &+ \langle \Phi|a_i^+ a_j^+|\Phi\rangle \langle \Phi|a_l a_k|\Phi\rangle. \end{aligned} \quad (448)$$

Ясно, что последнее равенство подразумевает более общий вид вектора состояния  $|\Phi\rangle$ , чем предполагалось выше. Можно показать, что соотношение (448) основано на предположении, что  $|\Phi\rangle$  является волновым вектором Бардина–Купера–Шиффера.

К соотношению (448) можно прийти, взяв за основу следующее выражение для одночастичного гамильтониана:

$$\begin{aligned} H_{sqp} &= \sum_{k,k'} (t_{kk'} + U_{kk'}) a_k^+ a_{k'} + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} v_{ijkl} (\langle \Phi|a_l a_k|\Phi\rangle a_i^+ a_j^+ + \langle \Phi|a_i^+ a_j^+|\Phi\rangle a_l a_k), \end{aligned} \quad (449)$$

где самосогласованный потенциал  $U$  определен выше в (445).

## 23. Метод Струтинского

Мы уже рассматривали формулу Бете–Вайцзеккера для энергии связи ядер. В ней выражение для энергии связи является плавной функцией от  $Z$



и  $A$ . Однако существенный вклад в энергию связи ядер вносит и оболочечная структура. Неоднородности в спектре одночастичных энергий, связанные с оболочечной структурой, означают, что энергия ядра не должна изменяться плавно с изменением массового числа  $A$  и зарядового числа  $Z$ . Итак, представим энергию ядра как сумму плавной функции от  $Z$  и  $A$ , в качестве которой можно взять выражение для энергии ядра, полученное в жидкокапельной модели, и осциллирующей функции, учитывающей неоднородности в схеме одночастичных уровней:

$$E = E_{LDM} + E_{osc}. \quad (450)$$

Если рассчитывать энергию ядра, основываясь на одночастичной модели ядра, то

$$E_{\text{shell model}} = \sum_{i=1}^A E_i = \tilde{E} + E_{osc}, \quad (451)$$

где  $E_i$  – энергии одночастичных уровней. В последнем выражении мы выделили «сглаженную» часть, которая получается в предположении об однородном распределении одночастичных уровней.

Основная идея метода Струтинского состоит в том, что «сглаженную» часть энергии, рассчитанную в оболочечной модели, можно аппроксимировать выражением, полученным в рамках какой-нибудь феноменологической модели, например жидкокапельной модели ядра. А на основе микроскопической модели, каковой является модель оболочек, рассчитывается только осциллирующая часть полной энергии, т.е.

$$E_{osc} = E_{\text{shell model}} - \tilde{E}_{\text{shell model}}. \quad (452)$$

Ниже излагается метод расчета  $E$ , предложенный Струтинским.

Определим плотность одночастичных уровней  $g(\varepsilon)$  следующим образом:

$$g(\varepsilon) = \sum_i \delta(\varepsilon - \varepsilon_i). \quad (453)$$

С помощью  $g(\varepsilon)$  можно выразить полную энергию и массовое число ядра:

$$\begin{aligned} E_{\text{shell model}} &= \int_{-\infty}^{\lambda} \varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon, \\ A &= \int_{-\infty}^{\lambda} g(\varepsilon) d\varepsilon. \end{aligned} \quad (454)$$

В этих выражениях  $\lambda$ – энергия последнего заполненного одночастичного уровня. Наша задача состоит в том, чтобы найти выражение для "сглаженной" плотности одночастичных уровней  $\tilde{g}(\varepsilon)$ , с помощью которой можно представить

$$\tilde{E}_{\text{shell model}} = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \varepsilon \tilde{g}(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (455)$$

где  $\tilde{\lambda}$  удовлетворяет соотношению

$$A = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \tilde{g}(\varepsilon) d\varepsilon \quad (456)$$

Чтобы найти  $\tilde{g}$ , усредним  $g(\varepsilon)$  с помощью процедуры свертки:

$$\tilde{g} = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\varepsilon') f\left(\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\gamma}\right) d\varepsilon'. \quad (457)$$

В качестве  $f(x)$  можно взять гауссову функцию, а  $\gamma$  принять равной расстоянию между оболочками.

Как определить  $\gamma$ ? Так как мы хотим усреднить в  $g(\varepsilon)$  осцилляции, имеющие частоту  $\hbar\omega_0$ , метод можно считать практически применимым, если найдется такой интервал значений  $\gamma \approx (1.0 - 1.5)\hbar\omega_0$ , при котором внутри него можно будет пренебречь зависимостью результатов от  $\gamma$ . Если это так, то мы можем сказать, что наши результаты не зависят от процедуры усреднения и усредненная энергия  $\tilde{E}_{sh}$  как функция  $\gamma$  имеет плато.

По определению

$$\tilde{g}(\varepsilon) = \sum_i \frac{1}{\gamma} f\left(\frac{\varepsilon_i - \varepsilon}{\gamma}\right). \quad (458)$$

$\tilde{\lambda}$  определяется условием

$$A = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \tilde{g}(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_i \int_{-\infty}^{t_i} f(x) dx \equiv \sum_i \tilde{n}_i, \quad (459)$$

а  $t_i = \frac{\tilde{\lambda} - \varepsilon_i}{\gamma}$ . Здесь мы использовали то обстоятельство, что  $f(x)$  – четная функция  $x$ . Для  $\tilde{E}_{\text{shell model}} \equiv \tilde{E}_{sh}$  находим

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{sh} &= \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \varepsilon \tilde{g}(\varepsilon) d\varepsilon = \\
&= \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \varepsilon \frac{1}{\gamma} \sum_i f\left(\frac{\varepsilon_i - \varepsilon}{\gamma}\right) d\varepsilon = \\
&= \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} (\varepsilon - \varepsilon_i + \varepsilon_i) \frac{1}{\gamma} \sum_i f\left(\frac{\varepsilon_i - \varepsilon}{\gamma}\right) d\varepsilon = \\
&= \sum_i \int_{\infty}^{-t_i} (\varepsilon_i - \gamma x) \frac{1}{\gamma} f(x) (-\gamma dx) = \\
&= -\sum_i \varepsilon_i \int_{\infty}^{-t_i} f(x) dx + \gamma \sum_i \int_{\infty}^{-t_i} x f(x) dx = \\
&= \sum_i \varepsilon_i \int_{-\infty}^{t_i} f(x) dx + \gamma \sum_i \int_{-\infty}^{t_i} x f(x) dx.
\end{aligned} \tag{460}$$

Подставляя в (460) выражение для  $\tilde{n}_i$ , получаем

$$\tilde{E}_{sh} = \sum_i \varepsilon_i \tilde{n}_i + F, \tag{461}$$

где

$$F = \gamma \sum_i \int_{-\infty}^{t_i} x f(x) dx. \tag{462}$$

Выведем условие на существование плато. Вычислим производную от  $\tilde{E}_{sh}$  по  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{E}_{sh}}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} (\sum_i \varepsilon_i \tilde{n}_i + F) = \\
&= \frac{\partial}{\partial \gamma} (\sum_i \varepsilon_i \tilde{n}_i) + \frac{1}{\gamma} F + \gamma \sum_i \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} t_i f(t_i),
\end{aligned} \tag{463}$$

где

$$\frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial \gamma} = \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} f(t_i). \tag{464}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{E}_{sh}}{\partial \gamma} &= \sum_i \varepsilon_i \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} f(t_i) + \frac{1}{\gamma} F + \gamma \sum_i \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} t_i f(t_i) = \\
&= \sum_i (\varepsilon_i + \gamma t_i) \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} f(t_i) + \frac{1}{\gamma} F = \\
&= \tilde{\lambda} \sum_i \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} f(t_i) + \frac{1}{\gamma} F.
\end{aligned} \tag{465}$$

Если учесть тот факт, что  $A = \sum_i \tilde{n}_i$  и, следовательно,

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma} = \sum_i \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial \gamma} = \sum_i \frac{\partial t_i}{\partial \gamma} f(t_i), \tag{466}$$

то

$$\frac{\partial \tilde{E}_{sh}}{\partial \gamma} = \tilde{\lambda} \frac{\partial A}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma} F = \frac{1}{\gamma} F. \tag{467}$$

Таким образом, при  $\frac{\partial \tilde{E}_{sh}}{\partial \gamma} = 0$   $F=0$ .

Итак, условием возникновения плато является равенство нулю  $F$ . Для осциллирующей части полной энергии мы получаем следующий результат:

$$E = E_{sh} - \tilde{E}_{sh} = \sum_i \varepsilon_i (n_i - \tilde{n}_i) = \sum_i \varepsilon_i \delta n_i. \tag{468}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бор О., Моттelson Б.*, Структура атомного ядра. т. 1, М.: Мир, 1971.  
"Мир Москва, 1971 г.
2. *Бор О., Моттelson Б.*, Структура атомного ядра. т. 2, М.: Мир, 1977.
3. *Соловьев*, Структура сложных ядер, М. Наука, 1971.
4. *Ring P. Schuck P.* The Nuclear Many Body Problem. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000.
5. *Casten R.F.* Nuclear Sructure from a Simple Perspective. New York: Oxford University Press, 1990.