

СЗУЧ.1
В-651



В. Г. ВОИНОВ
И Я. ЧАСНИКОВ

МНОГОКРАТНОЕ
РАССЕЯНИЕ
ЧАСТИЦ
В ЯДЕРНЫХ
ФОТОЭМУЛЬСИЯХ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ОТДЕЛ
PUBLISHING DEPARTMENT

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА
SCIENTIFIC LIBRARY



БЕСПЛАТНЫЙ ОБМЕН ПУБЛИКАЦИЯМИ
Free Exchange of Scientific Information

Публикации в порядке обмена не направлять
нам по адресу: Москва, Гланпоштамт, п/я 79,
НТБ. Репринты, пожалуйста, не присылать.

Please, send the publications on the exchange basis at
the address: Scientific Library, Joint Institute for
Nuclear Research, Head Post Office, P.O. Box 79,
Moscow, U.S.S.R. BUT do not send Reprints.

АКАДЕМИЯ НАУК КАЗАХСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

В. Г. ВОИНОВ, И. Я. ЧАСНИКОВ

СЗ44.1
В-651

МНОГОКРАТНОЕ
РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ
В ЯДЕРНЫХ ФОТОЭМУЛЬСИЯХ

-- 91873 --



Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Издательство "НАУКА" Казахской ССР

АЛМА-АТА-1969

В предлагаемой книге анализируются экспериментальные и теоретические данные по многократному кулоновскому рассеянию заряженных частиц в ядерных фотоэмульсиях. Сравниваются различные методы определения энергии частиц по измерениям этого рассеяния и оценивается их эффективность. Показана необходимость уточнения существующих теорий многократного кулоновского рассеяния.

Книга рассчитана на физиков-экспериментаторов, работающих в области физики частиц высоких энергий и космических лучей, аспирантов и студентов старших курсов.

Таблиц 9, рисунков 37, библиографических ссылок 148.

Ответственный редактор
Ю. Т. ЛУКИН

2-3-7
1-69м

ОТ АВТОРОВ

Энергия заряженных частиц в ядерных фотоэмульсиях обычно определяется с помощью измерения многократного кулоновского рассеяния. Этот метод широко используется в ядерной физике и физике космических лучей. Многократное кулоновское рассеяние изучалось многими исследователями, обсуждалось на различных совещаниях и международных конференциях по ядерной фотографии. Однако до сих пор нет единого подхода к проблеме исключения ложного рассеяния и других помех, мешающих определению энергии частиц.

Авторы книги стремились по возможности полно проанализировать свойства кулоновского рассеяния, ложного рассеяния, различных шумов и дисторсий. Для этой цели наряду с другими был применен метод корреляционного анализа. Некоторые приведенные данные могут быть использованы при определении энергии частиц в пузырьковых и других камерах.

Значительную часть книги составляют результаты работ, выполненных в Институте ядерной физики АН КазССР. Некоторые из них публикуются впервые.

Авторы глубоко признательны академику АН КазССР профессору Ж. С. Такибаеву, поставившему в свое время задачу об определении энергии ливневых частиц по измерению многократного рассеяния в ядерных фотоэмульсиях и постоянно интересовавшемуся ходом ее решения. Мы обязаны фотоэмульсионным

комитетам ОИЯИ и ЦЕРНа, предоставившим нам возможность работать с эмульсиями, облученными на ускорителях Дубны, Женевы и Серпухова. Выражаем свою благодарность К. С. Богомолу, Э. Г. Боосу, В. М. Иваненко и другим, сделавшим замечания при редактировании книги, К. Секееву, написавшему приложение, а также Л. И. Явтушенко и В. А. Мистюк за помощь в оформлении рукописи.

В. Г. Воинов, И. Я. Часников.

Глава I

МЕТОД ЯДЕРНЫХ ФОТОГРАФИЧЕСКИХ ЭМУЛЬСИЙ

Еще в 1910—1911 гг. было известно, что с помощью фотографических слоев можно обнаружить не только потоки частиц, вызывающих сплошное почернение эмульсии, но и следы отдельных сильно ионизирующих частиц. Заряженная частица, проходя через фотоэмульсию, активирует на своем пути кристаллы галоида серебра и делает их способными к проявлению. После специальной обработки эмульсионных слоев в них появляются следы частиц в виде цепочек проявленных зерен, хорошо видимых под микроскопом. В этом и заключается метод ядерных фотографических эмульсий. Этот метод регистрации ионизирующих частиц получил широкое распространение благодаря работам Л. В. Мысовского, А. П. Жданова и других, которые впервые изготовили толстослойные ядерные фотографические эмульсии [1, 2]. Позже были созданы специальные эмульсии, способные регистрировать частицы любых энергий. Наибольшее распространение получили эмульсии типа Илфорд G-5, созданные при активном участии английских физиков, и эмульсии НИКФИ-Р, созданные в лаборатории К. С. Богомолова. Существенный вклад в развитие специальных мелкозернистых эмульсий внесли Н. А. Перфилов, П. Демерс и др. Вопросы развития фотометода подробно изложены в работах [3, 4, 5].

В последние двадцать лет с помощью фотометода открыты Λ -мезоны, K -мезоны; обнаружены тяжелые ядра в первичном космическом излучении и т. д. По измерениям многократного кулоновского рассеяния

получены важные для теории энергетические характеристики частиц, образовавшихся в ядерных взаимодействиях.

В конце пятидесятых годов метод толстослойных ядерных фотоэмульсий стал одним из основных при регистрации заряженных частиц.

§ 1. Толстослойные ядерные фотографические эмульсии

Толстослойные ядерные фотографические эмульсии отличаются от эмульсий, используемых в обычной практической фотографии, толщиной эмульсионного слоя, концентрацией галоидного серебра и желатина. Слои ядерных эмульсий в 10—100 раз толще, а содержание галоидного серебра в них в 8 раз больше обычного. Галоидное серебро (в основном бромистое) находится в эмульсии в виде микрокристаллов, размеры которых колеблются от 0,03 до 0,6 мк. Так, средние размеры микрокристаллов в эмульсии Кодак NT-4 — 0,4 мк, НИКФИ-Р — 0,28 мк, Илфорд G-5 — 0,27 мк, Истмен-NTB — 0,25 мк, Демерс-II — 0,06 мк, Перфилов и др. — 0,03 мк и т. д. Основные характеристики наиболее распространенных ядерных фотоэмульсий даны в таблице 1 [4, 6, 7].

Таблица 1

Тип эмульсии	Содержание AgHal в 1 г эмульсии	Плотность эмульсии, г/см ³	Остаточная влажность, %
Илфорд G-5	0,8275 ± 0,0270	3,828 ± 0,018	2,50
НИКФИ-Р	0,8284 ± 0,0011	3,950 ± 0,021	2,21
НИКФИ-ВР	0,8252 ± 0,0037	3,945 ± 0,050	2,60

В состав ядерной эмульсии кроме галоидного серебра входят желатин, пластификатор и вода. Желатин и пластификатор содержат водород, углерод, кислород, азот и серу. Концентрация элементов в граммах на грамм эмульсии приведена в таблице 2.

Таблица 2

Элемент	Тип эмульсии		
	Илфорд G-5	НИКФИ-Р	НИКФИ-ВР
Ag	0,4747	0,4701	0,4742
Br	0,3495	0,3485	0,3500
I	0,0031	0,0013	0,0013
C	0,0724	0,0749	0,0716
H	0,0139	0,0134	0,0129
O	0,0650	0,0671	0,0665
N	0,0193	0,0240	0,0229
S	0,0018	0,0006	0,0006

Пластификатор (обычно глицерин) используется для уменьшения хрупкости эмульсии. Чтобы провести точные количественные измерения многократного рассеяния, углов разлета частиц, образовавшихся в результате взаимодействий в ядерных эмульсиях, и других физических величин, кроме характеристик, приведенных в таблицах 1 и 2, необходимо знать коэффициент усадки эмульсии, характеризующий изменение толщины слоя, а также различного рода деформации, возникающие в процессе обработки (ложное рассеяние, C- и S-образные дисторсии и т. п.).

Подробные сведения о характеристиках ядерных эмульсий, методах их обработки, хранения, о природе образования следов заряженных частиц, методах анализа и т. п. можно найти в работах [3—10] и в материалах международных конференций и совещаний по фотометоду.

§ 2. Преимущества и недостатки фотометода

Ядерные фотографические эмульсии используются для регистрации и анализа следов заряженных частиц любой энергии. По измерениям характеристик этих следов можно определить заряд частицы, массу и скорость. Время чувствительности ядерных эмульсий практически определяется временем их экспозиции, кото-

рое может быть порядка нескольких недель. В течение этого времени ядерная эмульсия регистрирует все заряженные частицы, проходящие через нее, в отличие от камер Вильсона и других приборов, время чувствительности которых — доли секунды. К преимуществам этого метода относятся также и небольшой вес, компактность, механическая прочность ядерных эмульсий и способность регистрировать частицы в широком диапазоне температур.

Благодаря высокому пространственному разрешению фотометод с успехом применяется при измерении углов разлета частиц, образовавшихся в результате ядерного взаимодействия, а также при анализе распада различных частиц и гиперядер. По точности измерения малых углов фотометод не имеет себе равных. С помощью фотометода можно изучать частицы с малым временем жизни (10^{-10} сек и меньше), когерентное рождение мезонов во взаимодействиях частиц с ядрами, определять магнитные моменты гиперонов, измерять сечение фрагментации и т. п. По измерениям многократного рассеяния и ионизации в ядерных фотоэмульсиях возможна непосредственная идентификация вторичных частиц из индивидуальных событий вплоть до импульсов порядка 20 Гэв/с . В пузырьковых жидководородных камерах, широко распространенных в экспериментах на ускорителях, непосредственная идентификация частиц по измерениям импульса и ионизации возможна до импульсов порядка 2 Гэв/с . Поэтому полную информацию об индивидуальных взаимодействиях частиц в пузырьковых, искровых и других камерах можно получить в том случае, если число зарегистрированных частиц невелико, а число нейтральных частиц не более одной (в пузырьковых камерах частицы одного знака заряда идентифицируются с помощью кинематики и законов сохранения). Трудности идентификации частиц в пузырьковых камерах, особенно при большой множественности, приводят к заметной дискриминации событий. С увеличением энергии первичной частицы множественность вторичных частиц растет и в соответствии с этим увеличивается дискриминация изучаемых событий.

При проведении экспериментов на ускорителях фотометод не требует большой затраты времени работы

ускорителя. Расходы на аппаратуру также относительно малы даже в случае, когда эмульсия облучается в сильном магнитном поле. Облучение эмульсии в присутствии магнитного поля расширяет возможности фотометода: частицы можно различать по знаку заряда, а точность в определении импульса частиц увеличивается. Фактически точность в определении импульса частиц в эмульсиях, облученных при наличии магнитного поля, определяется его напряженностью, искажениями эмульсии и многократным кулоновским рассеянием частиц*. Небольшие затраты на проведение фотоэмульсионных работ, простота транспортировки эмульсионных стопок — все это важно для исследовательских групп и небольших лабораторий, удаленных от мест облучения.

Однако фотометоду, как и любому другому методу, присущи и недостатки, наиболее серьезные из них перечислены ниже.

Сложность состава вещества фотоэмульсии не позволяет однозначно ответить на вопрос, с каким ядром произошло взаимодействие налетающей частицы. Правда, этот недостаток можно устранить, если ввести в эмульсию известные элементы в виде металлических проволочек [11, 12], крупинки [13] и т. п. Известно, что $\sim 40\%$ полного числа атомов в 1 см^3 эмульсии составляют атомы водорода, но отобрать случаи взаимодействия частиц на свободных протонах довольно трудно. Несмотря на то, что существуют различные критерии отбора взаимодействий частиц на свободных и квазисвободных протонах, неуверенность в чистоте мишени остается. В этом отношении жидководородные пузырьковые камеры имеют большие преимущества.

Если в ядерных эмульсиях ионизационные потери частиц можно практически измерять с точностью $1-2\%$, что существенно выше точности определения ионизационных потерь в пузырьковых камерах, то импульсы частиц измеряются менее точно. Фотометод также уступает методу пузырьковых камер в скорости обработки событий взаимодействия частиц.

* Многократное кулоновское рассеяние необходимо также учитывать и при определении импульса частиц в пузырьковых и других камерах, помещенных в магнитное поле.

§ 3. Приборы для измерения многократного рассеяния

Для поиска и обработки событий взаимодействия частиц в ядерной фотоэмульсии обычно применяются бинокулярные микроскопы [14]. В различных лабораториях мира широко используются отечественные микроскопы МБИ-8М, МБИ-9; микроскопы Лейтц (Ортолюкс), Користка-MS2, Користка-R4, KSM-1 фирмы «Карл Цейсс»; микроскопы фирмы «Кук, Троутон и Симмс» и др.

Так как процессы обработки нужных событий в ядерной фотоэмульсии чрезвычайно трудоемки и, следовательно, необходимая информация накапливается медленно, предприняты довольно успешные попытки автоматизации этих процессов. В автоматизации измерений возможны два пути — создание полностью автоматизированных микроскопов, осуществляющих слежение и фиксирование координат следа, или же полуавтоматических приборов, когда слежение осуществляется оператором. Результаты измерений, полученные на полуавтоматических и автоматических микроскопах, как правило, обрабатываются на электронных вычислительных машинах. В работах [15, 16] описывается действующий макет телевизионной установки, которая в сочетании с высококачественным микроскопом автоматически прослеживает и измеряет координаты следа в горизонтальной плоскости, т. е. в плоскости эмульсионного слоя. Авторы указывают, что их установка может быть использована и для слежения за треком по вертикали. В работах [17, 18] описано устройство для автоматического прослеживания треков в эмульсиях, измерения рассеяния, длин пробегов и т. п. Доступная для автоматического просмотра площадь — 20×20 см, скорость слежения — до 10 мм/мин. В Физическом институте АН СССР разработан прибор для автоматических измерений в ядерных фотоэмульсиях методом телевизионного растра [19—21]. Прибор позволяет автоматически следить за заданным следом по трем координатам и регулярно выдавать текущие значения координат, времени, затрачиваемого на продвижение до очередных координат, а также ионизационные характеристики следа; отыскивать следы заданного направления с авто-

матическим продвижением вдоль них; измерять многократное рассеяние избранного следа. Цифровые данные по рассеянию регистрируются на перфокартах, которые затем обрабатываются на электронной вычислительной машине. К сожалению, подобные автоматические установки существуют в единственных экземплярах и, как правило, очень дороги. Кроме того, они требуют высококвалифицированного обслуживания.

Ленинградское объединение оптико-механических предприятий при научном руководстве Ленинградского физико-технического института имени А. Ф. Иоффе разработало несколько микроскопов для работ с ядерными эмульсиями: МППЭ-1 — для поиска событий, МИГЭ-1 и МИГЭ-2 — для измерения геометрических характеристик следов, МИРЭ-1 и МИРЭ-2 — для измерений многократного рассеяния, МИЭ-1 — для измерения ионизации на следах однозарядных и многозарядных частиц и др. Наиболее удобный и надежный прибор для измерения многократного рассеяния МИРЭ-2 [22] (рис. 1) имеет оптическую систему с увеличением $273 \times$



Рис. 1. Полуавтоматический микроскоп МИРЭ-2.

± 2632 для визуального наблюдения следов в эмульсии. Препарат в горизонтальной плоскости автоматически перемещается на длину $t=1, 3, 10, 50, 100, 500$ и 1000 $\mu\text{к}$ (полная длина $L=6$ см). Скорость перемещения регулируется в пределах $22-350$ $\mu\text{к}/\text{сек}$. На предметном столике могут закрепляться пластинки размером 120×220 мм . Диапазон перемещения объектива по вертикали $\pm 0,5$ мм . Шум столика, имеющего фторопластовые направляющие, не превышает $0,03$ $\mu\text{к}$ на ячейке $t=500$ $\mu\text{к}$. Для измерения собственных шумов прибор снабжен многолучевым интерференционным устройством. Значения координат фиксируются позиционным преобразователем угла поворота в двоичный код; цена низшего разряда преобразователя $0,025$ $\mu\text{к}$. Координаты следа автоматически наносятся на стандартную телеграфную ленту с помощью перфоратора. Результаты измерений обрабатываются на электронных вычислительных машинах типа «Минск». Работа оператора на МИРЭ-2 сводится к отысканию необходимого следа, выставлению его приблизительно параллельно направлению перемещения столика, подведение биштриха окулярмикрометра к точкам следа и нажатие кнопки «запись». При этом автоматически фиксируются координаты на перфоленте, и столик микроскопа перемещается на ячейку t , затем вся процедура повторяется. Эксплуатация полуавтоматических микроскопов МИРЭ-2 в Ленинградском ФТИ АН СССР и в Институте ядерной физики АН КазССР показала, что производительность труда по сравнению с ручным способом повышается в среднем в 10 раз. В ИЯФ АН КазССР микроскопы МИРЭ-2 для удобства перемещения биштриха окулярмикрометра снабжены дополнительным электродвигателем. Это позволяет увеличить скорость обработки следов частиц, имеющих большой средний угол многократного рассеяния.

Несмотря на то, что в различных странах мира имеются разнообразные приборы для фотоэмульсионных работ, конструкции новых автоматических и полуавтоматических микроскопов постоянно разрабатываются.

Глава II

ТЕОРИЯ МНОГОКРАТНОГО КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ

§ 1. Сечение упругого кулоновского рассеяния

Упругим рассеянием называется такой процесс взаимодействия двух частиц, при котором суммарная энергия частиц сохраняется и только перераспределяется между ними, при этом частицы изменяют направление своего движения. Согласно Резерфорду, дифференциальное поперечное сечение упругого кулоновского рассеяния, рассчитанное на единицу длины, при условии, что масса рассеивающего центра много больше массы налетающей частицы,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N z_1^2 z_2^2 e^4}{4(p\beta c)^2} \operatorname{cosec}^4 \frac{\Theta}{2}, \quad (1.2)$$

где $z_1 e$, p и βc — соответственно заряд, импульс и скорость налетающей частицы; $z_2 e$ и N — соответственно заряд и число рассеивающих центров в 1 см^3 ; Θ — пространственный угол рассеяния; $d\Omega$ — элемент телесного угла.

Выражение (1.2) для поперечного сечения рассеяния получено в предположении, что электрическое поле атома совпадает с полем точечного заряда $z_2 e$. Конечные размеры ядра, а также экранирование его поля внешними электронами ограничивают справедливость этого выражения определенным интервалом углов Θ .

Рассмотрим влияние экранирования поля ядра атомными электронами. Сущность экранирования состоит в том, что электроны, окружающие атом, значи-

тельно уменьшают электрическое поле ядра на расстояниях порядка нескольких $a_0 = \frac{h^2}{m e^2}$. В результате этого сечение рассеяния частиц на малые углы оказывается меньше, чем это дает формула Резерфорда.

Используя различные модели распределения потенциала в атоме, можно количественно оценить влияние экранирования. Так, в первом борновском приближении поперечное сечение рассеяния для потенциала, задаваемого выражением $V(r)$, будет

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{NM_1^2}{h^4 k^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}} \left[\int_0^\infty V(r) \sin \left(2kr \sin \frac{\Theta}{2} \right) r dr \right]^2, \quad (2.2)$$

где M_1 — масса налетающей частицы, а $k = \frac{1}{\lambda} = \frac{p}{h}$. Если потенциальную энергию атома представить в виде

$$V(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r} - Z_1 e \int_0^\infty \frac{\rho(r') dr'}{|r-r'|}, \quad (3.2)$$

где $\rho(r')$ — плотность электрического заряда, создаваемого облаком электронов атома в точке r' , то дифференциальное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N z_1^2 e^4}{4 (p^2 c)^2} \cdot \frac{[z_2 - F_a(\Theta)]^2}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}, \quad (4.2)$$

здесь $F_a(\Theta) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin \left(2kr \sin \frac{\Theta}{2} \right)}{2kr \sin \frac{\Theta}{2}} \rho(r) r^2 dr$ — атомный

формфактор.

Гаудсмит и Сандерсон [23, 24], используя потенциал электрического поля атома в форме $V(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r} e^{-\frac{r}{r_a}}$, где r_a — радиус атома, получили следующее выражение для поперечного сечения рассеяния, справедливое и при малых значениях угла Θ :

* $h = 6,5817 \cdot 10^{-22}$ эв·сек.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4N z_1^2 z_2^2 e^4}{(p^2 c)^2} \cdot \frac{1}{(\Theta^2 + \Theta_{min}^2)^2}, \quad (5.2)$$

где $\Theta_{min} = \frac{\lambda}{r_a}$. Используя томас-фермиевское значение для радиуса атома, получим

$$\Theta_{min} = z_2^{1/3} \alpha^2 \frac{\lambda}{r_e}, \quad (6.2)$$

где $\alpha = \frac{e^2}{hc}$, а $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$. При $\Theta \gg \Theta_{min}$ выражение (5.2) совпадает с формулой Резерфорда (1.2) (при малых углах $\sin \frac{\Theta}{2} \approx \frac{\Theta}{2}$), но поперечное сечение рассеяния становится значительно меньше резерфордовского при $\Theta < \Theta_{min}$. Следовательно, со стороны малых углов область, в которой применимо выражение (1.2), приближенно ограничена углом $\Theta = \Theta_{min}$. В работе Мольер [25] использовано приближенное выражение для потенциала $V(r)$, описываемого функцией Томаса — Ферми [26]:

$$V(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r} \left(0,10 e^{-\frac{6r}{r_a}} + 0,55 e^{-\frac{1,2r}{r_a}} + 0,35 e^{-\frac{0,3r}{r_a}} \right). \quad (7.2)$$

При больших углах Θ поперечное сечение рассеяния, полученное Мольер, описывается законом Резерфорда, а при малых углах — эквивалентно сечению, полученному в первом борновском приближении для выбранной модели атома. В работе Мольер введен единственный угловой параметр Θ_a , приближенное выражение которого

$$\Theta_a = \frac{1,063 h}{r_a p^2} \sqrt{\beta^2 + \left(\frac{z_1 z_2}{75} \right)^2}, \quad (8.2)$$

где r_a — радиус атома в модели Томаса — Ферми ($r_a = 0,885 z_2^{-1/3} \frac{h^2}{m e^2}$).

Выражение для дифференциального поперечного сечения рассеяния, выведенное Мольер, совпадает с (5.2),

если вместо Θ_{min} подставить Θ_a . Мольеровский вывод формулы для $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ подробно обсужден в исчерпывающем обзоре Скотта [27]. Маевский и Титц [28], используя другую приближенную формулу томас-фермиевского распределения потенциала, получили сравнительно простое первое борновское приближение для поперечного сечения рассеяния частиц с зарядом $z_1=1$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = N g^2 \left[\frac{0,255}{0,0605+p^2} + \frac{0,581}{0,897+p^2} + \frac{0,164}{18,975+p^2} \right]^2, \quad (9.2)$$

здесь

$$g = \frac{3^{1/2} \hbar^2 z_2^{1/2}}{2^{-11/2} \pi^{1/2} l^2 m}, \quad p = \frac{3^{3/2} \hbar \beta c \sin \frac{\theta}{2}}{2^{1/2} \pi^{-3/2} l^2 z_2^{1/2}}.$$

Томас и Умеда [29], применяя более точную модель атома при z_2 от 25 до 80, численно рассчитали атомный формфактор $F_a(\Theta)$. Баркас [4] аппроксимировал эти расчеты выражением

$$F_a(\Theta) \simeq \frac{z_2}{1+3,3z_2^{1/10} x + 17,3z_2^{-1/10} x^2}, \quad (10.2)$$

где $x = 10^{-8} z_2^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2}$. Подставляя формфактор (10.2) в формулу (4.2), получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{N z_1^2 z_2^2 e^4}{4 (p\beta c)^2} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2} \left[1 - \frac{1}{1+3,3z_2^{1/10} x + 17,3z_2^{-1/10} x^2} \right]^2. \quad (11.2)$$

Выражения для дифференциального поперечного сечения рассеяния, приведенные в этом параграфе, получены в предположении, что плотность электронного облака непрерывна. Чтобы оценить влияние рассеяния на отдельных электронах на $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, Вильямс [30] предложил заменить z_2^2 на $z_2(z_2+1)$ в формулах для дифференциального поперечного сечения рассеяния.

Для построения теории многократного рассеяния обычно используется поперечное сечение рассеяния в зависимости от проекции угла Θ на плоскость. Для малых углов Θ справедливо соотношение $\Theta^2 = \theta^2 + \theta_z^2$, где θ и θ_z — проекции пространственного угла Θ на плоскости (x, y) и (x, z) соответственно. Полагая $\frac{d\sigma}{d\Omega} = f(\Theta)$, можно рассчитать

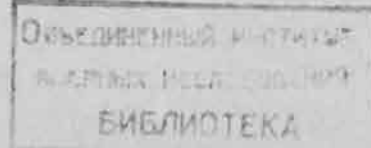
$$f(\theta) = \frac{d\sigma}{d\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} f[(\theta^2 + \theta_z^2)^{1/2}] d\theta_z. \quad (12.2)$$

Считая, что $f(\Theta)$ описывается выражением (5.2) с заменой Θ_{min} на Θ_a и что это выражение справедливо для всех, а не только для малых значений Θ , имеем

$$f(\theta) = 2\pi N \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{(p\beta c)^2} (\theta^2 + \Theta_a^2)^{-3/2}. \quad (13.2)$$

Чтобы учесть влияние конечных размеров ядра на $f(\theta)$, необходимо знать распределение электрического заряда в нем. Хофштадтер с сотрудниками [31] провел большую серию опытов по рассеянию быстрых электронов на ядрах в области углов, для которых существенно распределение зарядов в ядре. Он считает, что распределение зарядов в ядрах средних и тяжелых элементов лучше всего описывается функцией Ферми. Так как отличие этого распределения от сферически симметричного распределения, соответствующего представлению об ядре как о твердом шарике незначительно, то в качестве оценки величины радиуса ядра возьмем такое значение r_0 , при котором функция Ферми имеет половинное значение. Согласно опытам Хофштадтера, $r_0 \simeq (1 \div 1,2) A^{1/2} \cdot 10^{-13}$ см, где A — массовое число. Количественно влияние протяженности ядра на рассеяние оценивалось Олбертом [32, 33], Купером и Рейнвотером [34], а также Тер-Микаэляном [35], которые для $f(\theta)$ используют следующую формулу:

$$f(\theta) = 2\pi N \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{(p\beta c)^2} \cdot \frac{F_{Я}(\theta)}{(\theta^2 + \Theta_a^2)^{3/2}}, \quad (14.2)$$



где $F_{\text{я}}(\vartheta)$ — ядерный формфактор. Выражение для формфактора $F_{\text{я}}(\vartheta)$ Олберт аппроксимировал ступенчатой функцией

$$F_{\text{я}}(\vartheta) = \begin{cases} 1, & |\vartheta| \leq \Theta_{\text{max}}, \\ 0, & |\vartheta| > \Theta_{\text{max}}, \end{cases} \quad (15.2)$$

где $\Theta_{\text{max}} = \frac{\lambda}{r_0}$.

Купер и Рейнвотер [34], используя первое борновское приближение и данные Хофштадтера [31], численно рассчитали формфактор $F_{\text{я}}(\vartheta)$, который можно приближенно оценивать по формуле

$$F_{\text{я}}(\vartheta) \approx \begin{cases} 1, & \text{при малых } \vartheta, \\ z_2^{-1}, & \text{для больших } \vartheta. \end{cases} \quad (16.2)$$

Тер-Микаэлян [35] аппроксимировал $F_{\text{я}}(\vartheta)$ с помощью выражения

$$F_{\text{я}}(\Theta) = (1 + k^2 r_0^2 \Theta^2)^{-1/2}. \quad (17.2)$$

Здесь Θ — пространственный угол. Приведенные результаты показывают, что форма распределения заряда в ядре существенно не отражается на поперечном сечении рассеяния при $\vartheta \ll \frac{\lambda}{r_0}$, хотя $f(\vartheta)$ и стремится к нулю при $\vartheta > \frac{\lambda}{r_0}$. Если $r_0 = A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ см, то область, в которой справедливы приведенные выше выражения для $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, ограничена со стороны больших углов значением $\Theta_{\text{max}} = \lambda A^{-1/3} \cdot 10^{13}$. Это ограничение существенно, когда Θ_{max} мало по сравнению с единицей. Так как Θ_{max} становится больше единицы, когда импульс частицы мал, а, следовательно, λ велико, то конечные размеры ядра не играют значительной роли при рассеянии частиц с достаточно малыми импульсами. В этом случае выражения для поперечного сечения рассеяния, вычисленные в предположении точечного ядра, справедливы вплоть до углов $\Theta = \pi$.

§ 2. Многократное кулоновское рассеяние

Заряженная частица, проходя через слой вещества конечной толщины t , претерпевает большое число столкновений, причем чаще всего изменения в направлении движения частицы очень малы. Обозначим изменение в направлении движения частицы, прошедшей слой вещества толщиной t , через Θ . Важно знать зависимость закона распределения величин Θ и среднеквадратического значения $\sqrt{\overline{\Theta^2}}$ от t . Если частица испытывает большое число малых отклонений, то, согласно центральной предельной теореме, закон распределения Θ будет гауссовым. Определим дисперсию этого распределения, равную $\overline{\Theta^2}$. Очевидно, что $\overline{\Theta^2}(t + dt) = \overline{\Theta^2}(t) + d\overline{\Theta^2}$, где

$$d\overline{\Theta^2} = dt \int \Theta^2 f(\Theta) d\Omega = 2\pi dt \int \Theta^3 f(\Theta) d\Theta. \quad (18.2)$$

Уравнение (18.2) можно переписать так:

$$\frac{d\overline{\Theta^2}}{dt} = \Theta_s^2 = 2\pi \int \Theta^3 f(\Theta) d\Theta. \quad (19.2)$$

Если предположить что, $f(\Theta)$ дается формулой Резерфорда (1.2) для $\Theta_{\text{min}} < \Theta < \Theta_{\text{max}}$ и равно нулю вне этого интервала, то

$$\Theta_s^2 = 8\pi N \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{(p\beta c)^2} \ln \frac{\Theta_{\text{max}}}{\Theta_{\text{min}}}. \quad (20.2)$$

Пренебрегая потерями энергии в слое t и интегрируя уравнение (19.2), получим

$$\overline{\Theta^2} = \Theta_s^2 t. \quad (21.2)$$

Согласно (20.2) и (21.2),

$$\sqrt{\overline{\Theta^2}} = \delta (\ln M)^{1/2} \sqrt{\pi}, \quad (22.2)$$

где M , равное $\left(\frac{\Theta_{\text{max}}}{\Theta_{\text{min}}}\right)^2$, служит мерой среднего числа

столкновений, испытываемых частицей при прохождении слоя t , а величина δ , равная $\frac{2z_1 z_2 e^2 (Nt)^{1/2}}{p\beta c}$, есть угловая единица. Физический смысл ее в том, что полная вероятность рассеяния на угол, больший, чем $\delta' = \delta \sqrt{\pi}$, равна единице.

Формула (22.2), основная в теории многократного рассеяния, разработанной Вильямсом [30, 36], дает приближенную количественную оценку зависимости $\sqrt{\bar{\theta}^2}$ от $p\beta c$ и t . Чтобы точнее оценить величину $\sqrt{\bar{\theta}^2}$, необходимо использовать более корректную формулу для поперечного сечения рассеяния $f(\theta)$. Кроме того, вклад отдельных актов рассеяния на большие углы приводит к отклонению распределения величины θ от гауссового. Поэтому необходимо тщательно анализировать функцию распределения углов θ .

Пусть $P(t, y, \theta) dy d\theta$ — число частиц на глубине t (ось t совпадает с направлением движения падающих частиц), имеющих боковое смещение в интервале от y до $y+dy$ и движущихся под углом к оси t , значение которого заключено в пределах от θ до $\theta+d\theta$; а $f(\theta)d\theta$ — вероятность акта рассеяния на единицу толщины в интервале углов от θ до $\theta+d\theta$.

Очевидно, что $f(\theta) = f(-\theta)$, и поэтому

$$\bar{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta) d\theta = 0. \quad (23.2)$$

Используя (12.2), получаем

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_s^2 &= \int \theta^2 f(\theta) d\Omega = \iint (\theta^2 + \theta_z^2) f[(\theta^2 + \theta_z^2)^{1/2}] d\theta d\theta_z = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 f(\theta) d\theta = 2\bar{\theta}^2. \end{aligned} \quad (24.2)$$

Таким образом, из (24.2) находим связь между средним квадратом пространственного угла и средним квадратом его проекции на плоскость (x, y) :

$$\bar{\theta}^2 = \frac{1}{2} \bar{\theta}_s^2. \quad (25.2)$$

Вычисляя изменение, которое испытывает функция $P(t, y, \theta)$ в слое между t и $t+dt$, получаем [37]

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= -\theta \frac{\partial P}{\partial y} + \int_{-\infty}^{\infty} [P(t, y, \theta + \theta') - \\ &- P(t, y, \theta)] f(\theta') d\theta'. \end{aligned} \quad (26.2)$$

Предполагая, что $P(t, y, \theta + \theta')$ можно разложить в ряд по степеням θ' , и опуская члены выше второго порядка, с учетом (24.2) и (26.2), имеем

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\theta \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\theta_s^2}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}. \quad (27.2)$$

Решением этого уравнения будет [38]:

$$P(t, y, \theta) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi\theta_s^2 t^2} \exp\left[-\frac{4}{\theta_s^2} \left(\frac{\theta^2}{t} - \frac{3y\theta}{t^2} + \frac{3y^2}{t^3}\right)\right]. \quad (28.2)$$

Интегрируя соотношение (28.2) по y , получим функцию $Q(t, \theta)$, представляющую угловое распределение безотносительно к боковому смещению:

$$Q(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi t \theta_s^2}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\theta_s^2 t}\right). \quad (29.2)$$

Аналогично, интегрируя (28.2) по θ , получим функцию $S(t, y)$, представляющую распределение частиц в пространстве, независимо от распределения по углам:

$$S(t, y) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi t^3 \theta_s^2}} \exp\left(-\frac{3y^2}{\theta_s^2 t^3}\right). \quad (30.2)$$

Равенство (29.2) показывает, что если ограничиться такими малыми углами θ , при которых справедливо разложение $P(t, y, \theta + \theta')$ в ряд, то функция распределения по углам θ имеет гауссов вид, причем

$$\bar{\theta}^2 = \frac{1}{2} \bar{\theta}_s^2 t. \quad (31.2)$$

Так как функцию распределения нужно изучить не только для малых углов, то разлагать $P(t, y, \theta + \theta')$ в

ряд нельзя, необходимо точно решить уравнение (26.2). Нас интересует угловое распределение безотносительно к боковому смещению, поэтому, интегрируя (26.2) по y , получим следующее уравнение для $Q(t, \vartheta)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} [Q(t, \vartheta + \vartheta') - Q(t, \vartheta)] f(\vartheta') d\vartheta'. \quad (32.2)$$

Разнообразие теорий многократного рассеяния [34, 39—47] в основном объясняется различными методами решения уравнения (32.2) и использованием различных приближений для закона однократного рассеяния $f(\vartheta)$. Задачу определения функции распределения $Q(t, \vartheta)$ впервые достаточно полно рассмотрел Компанец [39], который решал уравнение, аналогичное (32.2), пользуясь выражением (2.2) для $f(\vartheta)$ в предположении о томас-фермиевском распределении потенциала $V(r)$. Функцию $Q(t, \vartheta)$ он находил в виде разложения по функциям Бесселя. Не останавливаясь на математической стороне вопроса, приведем окончательный результат [39]:

$$Q(t, \vartheta) = \int_0^k \left(\frac{1, 21\zeta}{2k} \right)^{\frac{\zeta^2}{16k^2}} I_0 \left(\zeta \frac{\vartheta}{2} \right) d\zeta, \quad (33.2)$$

где

$$\tau = \frac{8\pi N t z_1^2 z_2^2 e^4}{h^2 (\beta c)^2}, \quad k = \frac{p}{h}.$$

Величина Θ входит в (33.2) через аргумент функции Бесселя. Численное интегрирование показало, что $Q(t, \vartheta)$ можно заменить распределение Гаусса вплоть до углов, близких к полуширине распределения. Для квадрата полуширины Компанец получил выражение

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}^2 &= \frac{4\pi N t z_1^2 z_2^2 e^4}{(p\beta c)^2} \ln \left(2,03 N \frac{z_2^4 h^2 v^2}{(p\beta c)^2} \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 = \\ &= \pi \delta^2 \ln M' \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2, \end{aligned} \quad (34.2)$$

где $M' = 2,03 N \frac{z_2^4 h^2 v^2}{(p\beta c)^2}$ — мера среднего числа столкно-

вений в слое t . Величина α/α_0 изменяется от 0,84 при $M' = 16$ до 1,06 при $M' = 10^5$. В работе Мольер [40] функция распределения $Q(t, \vartheta)$ определена так: если $f_t(\vartheta) d\vartheta$ есть вероятность того, что частица, пройдя слой вещества толщиной t , испытала однократное рассеяние на угол ϑ , то

$$P(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, t) = e^{-\tau} f_t(\vartheta_1) f_t(\vartheta_2) \dots f_t(\vartheta_n) \quad (35.2)$$

— вероятность того, что частица испытала n однократных рассеяний на углы $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$. Здесь $\delta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vartheta) d\vartheta$. Поскольку мы интересуемся только конеч-

ным значением угла $\vartheta = \sum_{i=1}^n \vartheta_i$, то, интегрируя по всем промежуточным значениям углов, получим вероятность рассеяния на угол ϑ :

$$\begin{aligned} P^{(n)}(t, \vartheta) &= \frac{e^{-\tau}}{n!} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_t(\vartheta_1) f_t(\vartheta_2) \dots f_t(\vartheta - \vartheta_1 - \vartheta_2 - \\ &\quad - \dots - \vartheta_{n-1}) d\vartheta_1 d\vartheta_2 \dots d\vartheta_{n-1}. \end{aligned} \quad (36.2)$$

Воспользовавшись преобразованием Фурье для $f_t(\vartheta)$,

$$f_t(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi\vartheta} d\xi, \quad (37.2)$$

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(\vartheta) e^{-i\xi\vartheta} d\vartheta,$$

и подставляя (37.2) в (36.2), имеем

$$\begin{aligned} P_n(t, \vartheta) &= \frac{e^{-\tau}}{(2\pi)^n n!} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1) \dots g(\xi_n) e^{i\xi_1 \vartheta_1} \dots \\ &\quad \dots e^{i\xi_n (\vartheta - \vartheta_1 - \dots - \vartheta_{n-1})} d\xi_1 \dots d\xi_n d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{n-1}. \end{aligned} \quad (38.2)$$

Промежуточные интегралы в (38.2) берутся с помощью δ -функций, и тогда выражение (38.2) приводится к виду

$$P_n(t, \vartheta) = \frac{e^{-g}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[g(\xi)]^n}{n!} e^{i\xi\vartheta} d\xi. \quad (39.2)$$

Если число актов однократного рассеяния n не фиксировано, то вероятность отклонения на угол ϑ будет

$$Q(t, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\vartheta} e^{g(\xi) - g(0)} d\xi. \quad (40.2)$$

Множитель $e^{-g(0)} = e^{-\int_{-\infty}^{\infty} f_t(\vartheta) d\vartheta}$ нормирует функцию распределения $Q(t, \vartheta)$ к единице. Чтобы получить $Q(t, \vartheta)$ в окончательном виде, необходимо вычислить разность $g(\xi) - g(0)$, которая определяется обратным преобразованием Фурье (37.2):

$$g(\xi) - g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(\vartheta) (e^{-i\xi\vartheta} - 1) d\vartheta. \quad (41.2)$$

Подставляя в это выражение функцию распределения (13.2), имеем

$$g(\xi) - g(0) \approx 4\pi N t \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{(p^2 c)^2} \left[\frac{\xi^2}{4} \ln \left(\frac{\xi^2 \Theta_a^2}{4e'} \right) \right], \quad (42.2)$$

где $\ln \gamma$ — постоянная Эйлера (0,5772...), а $\ln e' = 1$. Введем обозначения:

$$\vartheta_c^2 = \pi \delta^2 = \frac{4\pi N t z_1^2 z_2^2 e^4}{(p^2 c)^2}; \quad (43.2)$$

$$\Omega = \frac{\vartheta_c^2}{\Theta_a^2} = \frac{1,47 \cdot 10^{-20} N t z_1^2 z_2^4}{\beta^2 + \left(\frac{z_1 z_2}{75} \right)^2}. \quad (44.2)$$

B связана с Ω соотношением

$$\ln \Omega = B - \ln B - \ln \frac{e'}{\gamma^2}. \quad (45.2)$$

$\Omega = \frac{\pi \delta^2}{\Theta_a^2}$, где δ — угловая единица (см. 22.2), — мера среднего числа столкновений, испытываемых частицей при прохождении слоя t .

Подставляя (42.2) в (40.2) и разлагая $Q(t, \vartheta)$ в ряд по степеням $\frac{1}{B}$, окончательно имеем

$$Q(t, \vartheta) = \frac{1}{\vartheta_c \sqrt{B}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{\beta^2}{\vartheta_c^2 B} \right) + \frac{1}{B} f^{(1)} \left(\frac{\beta}{\vartheta_c \sqrt{B}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{B^2} f^{(2)} \left(\frac{\beta}{\vartheta_c \sqrt{B}} \right) + \dots \right\}, \quad (46.2)$$

Таблицы функций $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ даны в работе Мольер [40]. Первый член в фигурных скобках описывает гауссову часть функции распределения $Q(t, \vartheta)$, а члены, содержащие степени $\frac{1}{B}$, — негауссову, обусловленную однократным и кратным рассеянием на большие углы.

В экспериментах по многократному рассеянию частиц для сравнения с теорией обычно используется выражение (46.2) или следствия из него. Олберт [33], Бете [46] и Солнцев [44] показали, что функцию распределения Мольер можно непосредственно получить из кинетического уравнения (32.2) с помощью преобразований Фурье или Фурье — Бесселя. Полученные там выражения для $Q(t, \vartheta)$ идентичны распределению (46.2). Нигам и другие [45] подвергли критике некоторые аспекты теории Мольер. В частности, они считали недостаточно строгим мольеровский метод ввода в теорию параметра экранирования Θ_a , а также полагали, что для изучения рассеяния на малые углы нельзя пользоваться потенциалом Томаса — Ферми. Мухерье [47] рассчитал функцию распределения $Q(t, \vartheta)$ и определил $f(\vartheta)$ с помощью приближенного решения уравнения Дирака. В его теории параметр Θ_a обоснован строго математически. Он показал, что нет никаких оснований отказываться от томас-фермиевского потенциала при изучении рассеяния на малые углы. Используя мольеровское приближение для $V(r)$ (7.2), Мухерье получил функцию распределения $Q(t, \vartheta)$, которая хорошо согласуется с экспериментальными данными Хансона и других [48].

Выражения для функции распределения, приведенные выше, получены в предположении точечного заряда ядра. При больших углах рассеяния, чтобы учесть конечные размеры ядра, нужно ввести ядерный формфактор в формулу для поперечного сечения однократного рассеяния. Олберт рассмотрел теорию многократного рассеяния Мольер, аппроксимируя выражение для ядерного формфактора ступенчатой функцией (15.2). Влияние протяженности ядра на функцию распределения $Q(t, \vartheta)$ более строго оценили Купер и Рейнвотер [34]. Они использовали формфактор, который можно приближенно описать выражением (16.2). Подставляя (16.2) в (41.2), имеем

$$g(\xi) - g(0) = \frac{\pi b^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{-i\xi\vartheta} - 1) F_{\pi}(\vartheta)}{(\vartheta^2 + \vartheta_a^2)^{3/2}} d\vartheta. \quad (47.2)$$

Вводя обозначения Олберта

$$Q = \pi b^2; \\ G = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\gamma^2 \vartheta_a^2}{e} \cdot \frac{1}{2GQ} \right); \quad (48.2) \\ \kappa = (2GQ)^{-1/2} \vartheta; \quad \eta = (2GQ)^{1/2} \xi,$$

где $G \approx 5,66 + 1,24 \lg \left[\frac{z_2^{1/2} A^{-1} t}{1,13 \beta^2 + 3,76 \left(\frac{z_1 z_2}{137} \right)^2} \right]$, получим

$$g(\xi) - g(0) \equiv S(\eta) = \frac{1}{2G} \int_0^{\infty} \frac{(\cos \eta x - 1) F_{\pi}(x)}{(x^2 + \kappa_a^2)^{3/2}} dx \quad (49.2)$$

и

$$Q(t, \kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\eta} e^{S(\eta)} d\eta. \quad (50.2)$$

Подставляя (49.2) в (50.2), Купер и Рейнвотер нашли следующее приближенное выражение для функции распределения:

$$Q(t, \kappa) = \frac{\exp(-\kappa^2)}{\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{q(L, \kappa)}{4G} \right] + \\ + \frac{1}{4G \sqrt{\pi}} \int_L^{\infty} \lambda^{-3} F_{\pi}(\lambda) T(\kappa, \lambda) d\lambda, \quad (51.2)$$

где

$$q(L, \kappa) = 2(2\kappa^2 - 1) \left[\ln \left(\frac{L}{1,26} \right) + \int_0^{2L\kappa} t^{-1} (\operatorname{ch} t - 1) dt \right] + \\ + 6\kappa^2 - \frac{1}{L^2} (\operatorname{ch} 2L\kappa - 1) - \frac{2\kappa}{L} \operatorname{sh} 2L\kappa, \\ T(\kappa, \lambda) = \exp[-(\kappa + \lambda)^2] + \exp[-(\kappa - \lambda)^2] - \\ - 2 \exp[-\kappa^2] \text{ и } L \cong \frac{1}{4}.$$

Таблицы для расчета $q(L, \kappa)$ и $T(\kappa, \lambda)$ приведены в работе [34].

Тер-Микаэля [35] получил функцию распределения $Q(t, \vartheta)$, решая уравнение (32.2) с учетом (13.2) и (17.2). Его решение можно представить в виде

$$Q(t, \vartheta) d\vartheta = \frac{2d\vartheta'}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \vartheta' y \exp \left\{ -\frac{\delta^2}{\varphi_{\pi}^2} \left[\frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{2} - 0,5772 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \ln \frac{y \vartheta_a}{2\varphi_{\pi}} \right) + 8(-0,5772 + \ln \frac{2}{y} - K_0(y)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{13}{3} (1 - yK_1(y)) - \frac{2}{3} y^2 K_0(y) - \frac{y^3}{24} K_1(y) \right] \right\} dy, \quad (52.2)$$

где $\varphi_{\pi} = \frac{1}{kr_0}$, $\vartheta' = \frac{\vartheta}{\varphi_{\pi}}$, а $K_n(y)$ — модифицированные функции Бесселя.

Сравнение следствий из рассмотренных выше теорий многократного кулоновского рассеяния с экспериментом проведено в работах [32—35, 48—64, 111, 112, 120, 121, 143, 144, 146], а также в пятой главе настоя-

шей книги. Так, экспериментальные данные по рассеянию малоэнергичных электронов в металлических фоль-

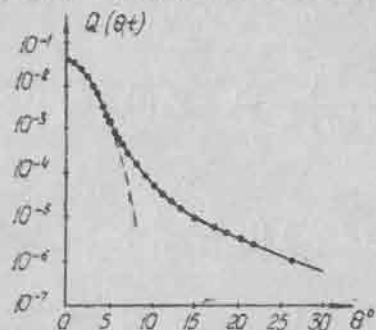


Рис. 2. Угловое распределение электронов: точки—эксперимент [48]; сплошная линия—распределение Мольера; штриховая линия—гауссова часть распределения Мольера.

гах толщиной $t=0,02$ и $1,8$ мм хорошо совпадают с распределением Мольера [48—50] (рис. 2). На рисунке 3 для

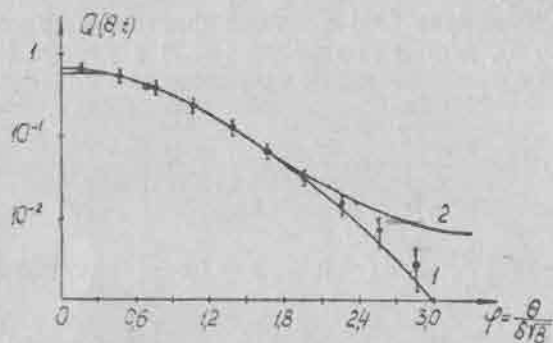


Рис. 3. Угловое распределение μ -мезонов: точки—эксперимент [55]; 1—распределение Тер-Микаэляна; 2—распределение Мольера.

сравнения изображены экспериментальные данные по рассеянию μ -мезонов с импульсом $100-180$ Мэв/с в свинцовых пластинах толщиной 7 мм и $Q(t, \theta)$, рассчитанные по формулам (46.2) и (52.2). Распределение Тер-Микаэляна, учитывающее конечные размеры ядер,

лучше согласуется с экспериментом, чем распределение Мольера [55].

Данные измерений многократного рассеяния частиц в ядерных фотозумльсиях при $t \lesssim 5$ мм, проведенных многими авторами [51—54, 56—60], удовлетворительно согласуются с классической теорией многократного кулоновского рассеяния Мольера, Вильямса, Снайдера и Скотта и др.

В области $t \gtrsim 5$ мм (рассеяние измерялось на следах частиц с энергией $t \gtrsim 1$ Гэв) экспериментальная функция распределения начинает отличаться от теоретической. На рисунке 4 изображены различные функции распре-

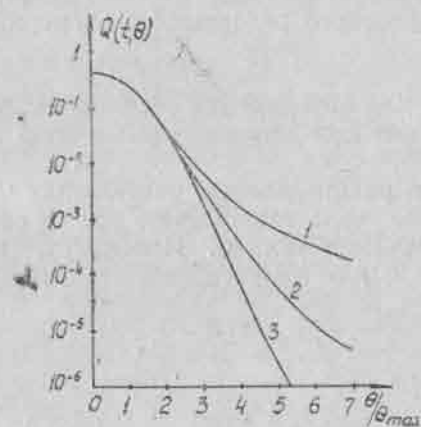


Рис. 4. Функции распределения $Q(t, \theta)$: 1—Мольера; 2—Купера и Рейнвотера; 3—Олберга.

деления $Q(t, \theta)$, рассчитанные для μ -мезонов с импульсом 1 Гэв/с, прошедших слой свинца толщиной 2 см [34]. Учет конечных размеров ядер приводит к некоторому уменьшению среднего угла многократного рассеяния. Однако даже в этом случае нельзя полностью объяснить расхождение данных эксперимента и существующих теорий многократного рассеяния. Возможные ошибки эксперимента также не объясняют этого различия [62, 64]. Поэтому авторы работ [58, 59, 63, 120]

предполагают несовершенство теории многократного кулоновского рассеяния.

Некоторые исследователи [65, 66] пытались построить квантово-механическую теорию многократного рассеяния и решили уравнение Шредингера для задачи упругого рассеяния частицы на системе многих рассеивателей в приближении мультипликативной зависимости волновой функции от координат атомов. Функция распределения частиц по углам и поперечному смещению, полученная ими, при малых углах в классическом пределе совпадает с функцией распределения (28.2), полученной Ферми. Имеются и некоторые различия, обусловленные чисто квантовыми эффектами. К сожалению, в литературе пока отсутствуют данные по сопоставлению квантово-механической теории многократного кулоновского рассеяния с экспериментом.

§ 3. Формула для определения энергии частиц по многократному кулоновскому рассеянию

Из функции распределения рассеянных частиц по углам можно получить зависимость $p\beta c$ от среднеквадратического значения угла θ . Используя, например, выражение (46.2) для чистого вещества, получим

$$\sqrt{\overline{\theta^2}} = \frac{z_1 K' t^{1/2}}{p\beta c}, \quad (53.2)$$

где

$$K' = (2\pi N B)^{1/2} z_2 e^2 \left(1 + \frac{0,982}{B} - \frac{0,117}{B^2} + \dots \right)^{1/2}.$$

Величина K' в основном зависит от числа рассеивающих центров N с зарядом $z_2 e$ в 1 см^3 вещества и B , слабо зависящего от толщины слоя и скорости частицы β (44.2, 45.2). Зная величину K' , из формулы (53.2) по измерению $\sqrt{\overline{\theta^2}}$ можно определить величину $p\beta c$ для моноэнергетического пучка частиц, прошедших слой вещества t . Найдя $p\beta c$, можно вычислить кинетическую энергию частиц E_k . Для нерелятивистских частиц ($\beta \ll 1$) $p\beta c \approx 2E_k$, а для релятивистских ($\beta \approx 1$) $p\beta c \approx E_k$. Экспериментаторов же обычно интересует определение

энергии отдельных частиц. Поэтому, чтобы воспользоваться формулой (53.2), найдем угол θ для n равных отрезков следа длиной t и вычислим $\sqrt{\overline{\theta^2}}$. Известно, что это среднеквадратическое значение равно среднеквадратическому значению угла, вычисленному для пучка одинаковых частиц, прошедших слой t . Угол $\sqrt{\overline{\theta^2}}$ для отдельного следа можно найти угловым (метод касательных) или координатным (метод хорд) методами.

Сущность первого метода состоит в том, что в двух крайних точках слоя t измеряются углы между касательными к следу и некоторой осевой линией. Проекция разности этих углов на плоскость характеризует изменение в направлении движения частицы в слое за счет многократного кулоновского рассеяния. Разность углов θ измеряется для n следующих друг за другом слоев t и вычисляется $\sqrt{\overline{\theta^2}}$.

Когда рассеяние частиц мало и углы между касательными измерять неудобно, тогда предпочтительнее координатный метод измерения, предложенный Фаулером [67]. Чтобы измерить рассеяние с помощью этого метода, след выставляется приблизительно параллельно оси, совпадающей с направлением движения столика микроскопа так, чтобы при перемещении он не выходил из поля зрения. Через равные участки длиной t , которые обычно называют ячейками, измеряется величина смещения следа по отношению к оси x . Обозначим ее как y_k . Затем вычисляются вторые разности координат:

$$D_k = (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k. \quad (54.2)$$

Тангенс угла между хордами, соединяющими крайние точки траектории частицы в ячейках t , равен (рис. 5)

$$\text{tg } \alpha = \beta_2 - \beta_1 = \frac{y_{k+2} - y_{k+1}}{t} - \frac{y_{k+1} - y_k}{t} = \frac{D_k}{t}. \quad (55.2)$$

Так как углы между хордами при многократном рассеянии малы, то $\text{tg } \alpha \approx \alpha$. Формула (55.2) показывает, что, вычисляя средний квадрат величины D_k , можно найти средний квадрат угла α между хордами. Что-

бы воспользоваться формулой (53.2), необходимо установить связь между D_k^2 (или $\bar{\alpha}^2$) и $\bar{\theta}^2$, которая подробно изучалась в работах [4, 40, 44, 68 — 72]. Наиболее простой, хотя и недостаточно строгий вывод соотношения между D_k^2 (или $\bar{\alpha}^2$) и $\bar{\theta}^2$ принадлежит Баркасу [4]. Суть его состоит в следующем. Пусть частица влетает в слой вещества толщиной t под углом θ_k и вылетает под углом θ_{k+1} . Пусть далее она испытала n_k однократных рассеяний на углы $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_k}$ в точках, разделенных расстоянием $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n_k}$ (рис. 6).

1 y

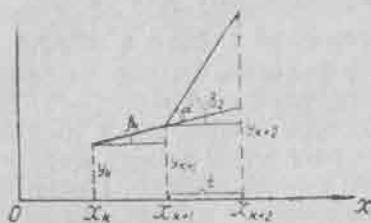


Рис. 5. К зависимости α от D_k .

θ_{k+1} . Пусть далее она испытала n_k однократных рассеяний на углы $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_k}$ в точках, разделенных расстоянием $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n_k}$ (рис. 6).

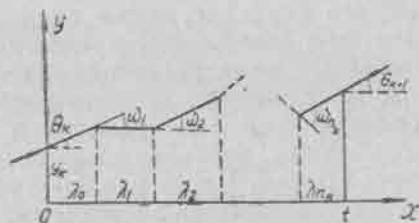


Рис. 6. К рассеянию частицы в слое вещества t .

Очевидно, что

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \sum_{i=1}^{n_k} \omega_i, \quad (56.2)$$

а

$$y_{k+1} = y_k + \theta_k \lambda_0 + (\theta_k + \omega_1) \lambda_1 + \dots + (\theta_k + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n_k}) \lambda_{n_k} = y_k + \theta_k \sum_{j=0}^{n_k} \lambda_j + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{\beta=1}^j \omega_{\beta} =$$

$$= y_k + \theta_k t = \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{\beta=1}^j \omega_{\beta}. \quad (57.2)$$

Вычислим вторые разности координат D_k :

$$\begin{aligned} D_k &= (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) = \\ &= (t\theta_{k+1} + \sum_{j=1}^{n_{k+1}} \lambda_j \sum_{\beta=1}^j \omega_{\beta}) - (t\theta_k + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{\beta=1}^j \omega_{\beta}) = \\ &= \sum_{l=0}^{n_k} \lambda_l \sum_{i=1}^{n_k} \omega_i + \sum_{j=1}^{n_{k+1}} \lambda_j \sum_{\beta=1}^j \omega_{\beta} - \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{\beta=1}^j \omega_{\beta} = \\ &= \sum_{j=1}^{n_{k+1}} \lambda_j \sum_{\beta=1}^j \omega_{\beta} + \sum_{l=1}^{n_k} \omega_l \sum_{\gamma=1}^l \lambda_{\gamma-1}. \end{aligned} \quad (58.2)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \sum_{\beta=1}^j \omega_{\beta}, \\ U_k &= \sum_{j=1}^{n_k} \omega_j \sum_{\beta=1}^j \lambda_{\beta-1} \end{aligned} \quad (59.2)$$

и введем новые переменные ψ_k и χ_k по формулам

$$S_k + U_k = 2\psi_k = t \sum_{i=1}^{n_k} \omega_i = t(\theta_{k+1} - \theta_k), \quad (60.2)$$

$$S_k - U_k = 2\chi_k.$$

Можно показать, что

$$\overline{S_k^2} = \overline{U_k^2}, \quad (61.2)$$

а, следовательно,

$$\overline{\psi_k \chi_k} = \frac{1}{4} (\overline{S_k^2} - \overline{U_k^2}) = 0. \quad (62.2)$$

Очевидно также, что

$$\overline{\psi_k \psi_l} = \overline{\psi_k \chi_l} = \overline{\chi_k \chi_l} = 0, \quad k \neq l. \quad (63.2)$$

Предполагая, что функция распределения величин

$$y = S_k = \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i \sum_{j=1}^i \omega_j \quad \text{и} \quad \vartheta = \sum_{i=1}^{n_k} \omega_i$$

описывается выражением (28.2), можно показать, что

$$\overline{\psi_k^2} = 3\overline{\chi_k^2} = \frac{n_k t^2 \overline{\omega^2}}{4}. \quad (64.2)$$

Таким образом, переменные ψ_k и χ_k статистически независимы. Выразим теперь вторые разности D_k через ψ_k и χ_k . С помощью (58.2), (59.2) и (60.2) вторые разности будут

$$D_k = S_{k+1} + U_k = \psi_{k+1} + \psi_k + \chi_{k+1} - \chi_k. \quad (65.2)$$

Тогда

$$\overline{D_k^2} = \frac{8}{3} \overline{\psi_k^2} = 8\overline{\chi_k^2} = \frac{2}{3} n_k t^2 \overline{\omega^2}. \quad (66.2)$$

Усредняя соотношение (66.2) по n_k , получим

$$\overline{D_k^2} = \frac{8}{3} \overline{\psi^2} = 8\overline{\chi^2} = \frac{2}{3} N t^2 \overline{\omega^2}, \quad (67.2)$$

где N — среднее число столкновений в ячейке t . Методом математической индукции доказывается, что разности координат порядка r равны

$$D_k^r = \sum_{\alpha=1}^r \frac{(-1)^{r-\alpha} (r-2)! (2\alpha-r-1)}{(r-\alpha)! (\alpha-1)!} \psi_{k+\alpha-1} + \sum_{\alpha=1}^r \frac{(-1)^{r-\alpha} (r-1)!}{(r-\alpha)! (\alpha-1)!} \chi_{k+\alpha-1}. \quad (68.2)$$

Вторые моменты разностей порядка r будут

$$\overline{D_k^r D_{k+j}^r} = \overline{D_k^2} \frac{(-1)^j [(r-2)!]^2}{8} \times \sum_{\alpha=1}^{r-j} \frac{(r-1)^2 + 3(2\alpha-r-1)(2\alpha+2j-r-1)}{(r-\alpha)! (\alpha-1)! (r-\alpha-j)! (\alpha+j-1)!}. \quad (69.2)$$

Из (69.2) вытекают важные соотношения, которыми часто пользуются:

$$\begin{aligned} \overline{D_k D_{k+1}} &= \frac{1}{4} \overline{D_k^2}; \\ \overline{D_k D_{k+j}} &= 0, \quad j > 2; \\ \overline{T_k^2} &= \frac{3}{2} \overline{D_k^2}; \\ \overline{F_k^2} &= 4\overline{D_k^2}. \end{aligned} \quad (70.2)$$

Здесь T_k и F_k — третьи и четвертые разности координат соответственно:

$$\begin{aligned} T_k &= D_{k+1} - D_k; \\ F_k &= T_{k+1} - T_k. \end{aligned} \quad (71.2)$$

Комбинируя (60.2) и (67.2), получим искомую связь между $\overline{D_k^2}$ и $\overline{\vartheta^2}$.

$$\overline{D_k^2} = \frac{2}{3} t^2 \overline{\vartheta^2}. \quad (72.2)$$

В то же время

$$\overline{\alpha^2} = \frac{2}{3} \overline{\vartheta^2}, \quad (73.2)$$

так как $\alpha = D_k/t$. Используя точное решение уравнения (26.2) [41]

$$P(t, y, \vartheta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dS \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i(\vartheta S + yx) - \frac{h(S+tx) - h(S)}{\lambda x} \right] dx,$$

где $h(S) = \int_0^S [1 - q(S)] dS$, $q(S) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta S} p(\theta) d\theta$,
 $p(\theta) = \frac{\theta \alpha^2 F_n(\theta)}{2(\theta^2 + \alpha^2)^{3/2}}$ и $\frac{t}{\lambda} = \frac{\pi \theta^2}{\theta \alpha^2} = \Omega$, можно показать, что,
 как и для гауссового решения (28.2),

$$\overline{y^2} = \frac{t^2}{3} \overline{\theta^2}, \quad (74.2)$$

а соотношение (73.2) справедливо при любом конкретном виде $F_n(\theta)$, если $\overline{y^2}$ и $\overline{\theta^2}$ конечны [72]. Используя соотношения (53.2) и (72.2), для однозарядных частиц находим

$$p\beta c = \frac{K_0' t^{1/2}}{573 \sqrt{D_k^2}}, \quad (75.2)$$

где $p\beta c$ выражено в миллионах электронвольт, а D_k и t — в микронах.

Величина $K_0' = \sqrt{\frac{2}{3}} K'$, которую принято называть постоянной рассеяния, как было сказано выше, в основном зависит от свойств вещества. Чтобы вычислить K_0' для ядерной фотоэмульсии, необходимо найти угловое распределение рассеянных частиц по углам, учитывая элементарный количественный состав эмульсии. Так как вывод такого соотношения затруднителен, можно оценить значение постоянной рассеяния, усредняя величину K_0' по всем элементам, входящим в состав ядерной фотоэмульсии.

Следует отметить, что формула (75.2), связывающая $p\beta c$ с $\overline{D_k^2}$ и t , справедлива при любом конкретном виде функции распределения $Q(t, \theta)$, которая сказывается только на величине постоянной рассеяния K_0' . Постоянная рассеяния теоретически рассчитана в работах [43, 51, 59 и др.]. При измерении многократного рассеяния чаще вместо $\overline{D_k^2}$ находят среднеарифметическое значение $D_k' = |\overline{D_k}|$. Это особенно удобно при ручном методе измерения D_k . Если бы закон распределения величин D_k был точно гауссовым, то

$$D_k' = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\overline{D_k^2}}. \quad (76.2)$$

Поскольку негауссов характер распределения вторых разностей D_k начинает сказываться при больших углах рассеяния θ (46.2), то отбрасывание больших значений D_k (например, таких, что $D_k > 4D_k'$) приводит к выполнению соотношения (76.2) с большой точностью. Джонстон [73] экспериментально нашел, что

$$r = \frac{D_k'}{\sqrt{\overline{D_k^2}}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0,993 \pm 0,003. \quad (77.2)$$

Соотношение r для вторых разностей, измеренных нами на первичных следах протонов с энергией 9 Гэв в эмульсии НИКФИ-Р на ячейках $t=1000, 2000$ и 4000 мк с отбрасыванием $D > 4D'$, оказалось равным

$$r = \begin{cases} 0,984 \pm 0,001, & t=1000 \text{ мк}; \\ 0,992 \pm 0,001, & t=2000 \text{ мк}; \\ 0,999 \pm 0,002, & t=4000 \text{ мк}. \end{cases} \quad (78.2)$$

Величина r при увеличении длины ячейки стремится к единице. По-видимому, это объясняется тем, что вклад многократного кулоновского рассеяния растет с ростом t и различные ошибки негауссового характера мало влияют на D . Заменяя $\sqrt{\overline{D_k^2}}$ в формуле (75.2) на D_k' , получим

$$p\beta c = \frac{K t^{1/2}}{573 D_k'} \quad (79.2)$$

где t и D_k' выражено в микронах, а $K = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_0' \frac{\text{град} \cdot \text{Мэв}}{(100 \text{ мк})^{1/2}}$. Это соотношение наиболее удобно для экспериментаторов. Значение K для разных частиц в большом интервале длин ячеек колеблется в пределах $20 \pm 32 \text{ град} \cdot \text{Мэв}/(100 \text{ мк})^{1/2}$. Так называемая постоянная рассеяния будет подробно обсуждена ниже.

Если импульс определяется по среднеарифметическому значению вторых разностей, то относительная статистическая ошибка

$$\frac{\delta p \beta c}{p \beta c} \approx \frac{0,81}{\sqrt{N}}, \quad (80.2)$$

где N — число измеренных вторых разностей [74, 75].

§ 4. Корреляционные свойства вторых разностей координат

Измерениям многократного кулоновского рассеяния сопутствуют различные ошибки, для исключения которых полезно знать их корреляционные свойства. Приведем основные положения корреляционного метода анализа случайных процессов [76]. Назовем случайной функцией $y(x)$ такую функцию своего аргумента, значение которой при любом x — случайная величина. В результате опыта случайная функция может принимать различные конкретные формы. Всякая функция, которой может оказаться равной случайная функция в результате опыта, называется ее реализацией. Аргумент случайной функции $y(x)$ будем считать величиной неслучайной. Этот аргумент может принимать как дискретные значения, так и меняться непрерывно в некоторой области значений x . Поскольку соотношения, справедливые для функций непрерывного аргумента, легко обобщаются на случай функций дискретного аргумента, ограничимся сводкой необходимых формул лишь для первого случая.

Средним значением или математическим ожиданием случайной функции $y(x)$ называется величина

$$\overline{y(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy, \quad (81.2)$$

где $f(y)$ — закон распределения ординаты случайной функции.

Дисперсия и корреляционная функция случайной функции $y(x)$ определяются соотношениями

$$D^2(y) = \overline{(y - \bar{y})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \bar{y})^2 f(y) dy; \quad (82.2)$$

$$K(x_1, x_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} (y_1 - \bar{y}_1) (y_2 - \bar{y}_2) f(y_1, y_2, x_1, x_2) dy_1 dy_2. \quad (83.2)$$

Здесь $f(y_1, y_2, x_1, x_2)$ — двумерный закон распределения $y(x)$.

Если среднее значение и дисперсия случайной функции не зависят от x , а корреляционная функция зависит только от разности координат $x_2 - x_1 = \tau$, т. е. если

$$\begin{aligned} \overline{y(x)} &= \text{const}, \\ D^2(y) &= \text{const} \text{ и} \\ K(x_1, x_2) &= K(\tau), \end{aligned} \quad (84.2)$$

то случайная функция называется стационарной.

Если корреляционная функция стационарной случайной функции $K(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, то такая случайная функция называется эргодической. Для эргодической стационарной случайной функции математическое ожидание, вычисленное усреднением по реализациям, равно среднему значению, полученному по одной реализации. Для корреляционной функции стационарного случайного процесса справедливы следующие формулы:

$$K(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (85.2)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (86.2)$$

Из (82.2), (83.2) и (85.2) следует, что дисперсия стационарной случайной функции

$$D^2(y) = K(0) = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (87.2)$$

Функция $S(\omega)$ называется спектральной плотностью, так как стационарная функция $y(x)$ может быть представлена в виде

$$y(x) = \overline{y(x)} + \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (88.2)$$

а $S(\omega)$ представляет собой дисперсию случайной величины $V(\omega)$, равную дисперсии гармоники $V(\omega) e^{i\omega x}$ в разложении случайной функции $y(x)$ на гармонические колебания (88.2). Иными словами, спектральная плотность стационарной случайной функции характеризует распределение средней интенсивности колебаний по спектру частот. Формулы (85.2) и (86.2) показывают, что задание спектральной плотности $S(\omega)$ эквивалентно заданию корреляционной функции $K(\tau)$, но использование $S(\omega)$ во многих случаях упрощает выкладки и делает все рассуждения более наглядными.

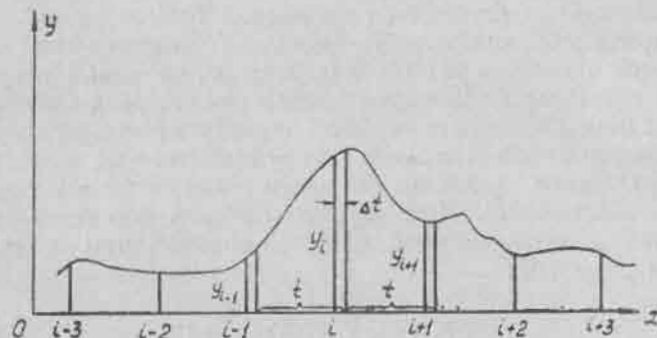


Рис. 7. К рассмотрению корреляции вторых разностей.

Проиллюстрируем приведенные соотношения на примерах. Пусть $y(x)$ — ордината следа частицы, испытавшей многократное кулоновское рассеяние (рис. 7). Разобьем измеряемый отрезок следа на ячейки длиной t и вычислим вторые разности $D_l = y_l - 2y_{l+1} + y_{l+2}$. Величины D_l образуют некоторую случайную последовательность.

Поскольку траектория частицы $y(x)$ в принципе непрерывна, то мы всегда можем разбить след на сколько угодно большое число сколько угодно малых отрезков Δt и вычислить вторые разности для всех троек точек,

отстоящих друг от друга на t . В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ вторые разности образуют случайную функцию непрерывного аргумента

$$D(x) = y(x) - 2y(x+t) + y(x+2t).$$

Можно показать [77], что $\overline{D(x)} = 0$, $\overline{D(x)^2} = \text{const}$, а

$$K(\tau) = \overline{D(x) D(x+\tau)} = \frac{1}{4} \overline{D(x)^2} \cdot g(\tau);$$

$$g(\tau) = \begin{cases} 4 - 6\left(\frac{\tau}{t}\right)^2 + 3\left(\frac{\tau}{t}\right)^3, & 0 \leq \tau \leq t; \\ \left(2 - \frac{\tau}{t}\right)^2, & t < \tau \leq 2t; \\ 0, & \tau > 2t. \end{cases} \quad (89.2)$$

Легко видеть, что $K(\tau) = 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, т. е. случайная функция $D(x)$ — стационарна и эргодична. Эргодичность многократного кулоновского рассеяния позволяет вычислить необходимые средние характеристики с помощью единственной реализации. Этот результат использован в § 3 этой главы при выводе формулы, связывающей многократное кулоновское рассеяние и p тс отдельной частицы.

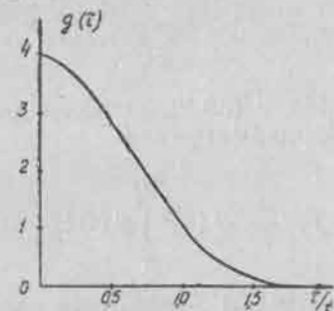


Рис. 8. Корреляционная функция $g(\tau)$ вторых разностей для многократного кулоновского рассеяния.

Из рисунка 8 видно, что

$$\begin{aligned} \overline{D(x) D(x+t)} &= \frac{1}{4} \overline{D(x)^2}; \\ \overline{D(x) D(x+jt)} &= 0, \quad j \geq 2. \end{aligned} \quad (90.2)$$

Эти соотношения говорят о том, что вторые разности, отстоящие друг от друга на расстояние, большее или равное двум ячейкам, — некоррелированы, а коэффициент корреляции $K(\tau)/K(0)$ вторых разностей, разделенных ячейкой t , равен $1/4$. Формулы (90.2) обобщают аналогичные результаты (70.2), полученные для функции дискретного аргумента.

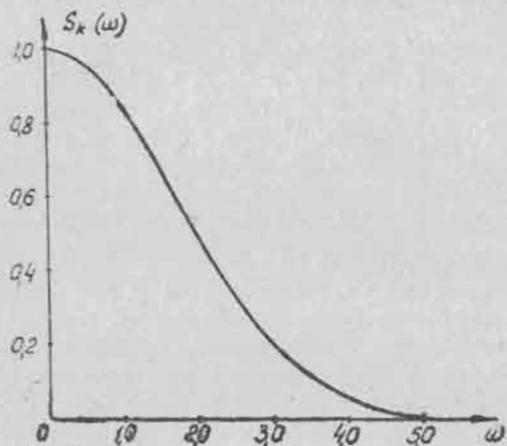


Рис. 9. Спектральная функция вторых разностей многократного кулоновского рассеяния.

Согласно (86.2) и (89.2), спектральная плотность случайной функции $D(x)$ равна

$$S(\omega) = \frac{1}{4\pi} \overline{D(x)^2} \int_0^{\infty} g(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (91.2)$$

Подставляя в (91.2) конкретное выражение для $g(\tau)$ (рис. 9), получим

$$S_k(\omega) = \frac{3\overline{D(x)^2}}{2\pi\omega^4} (3 - 4 \cos \omega + \cos 2\omega). \quad (92.2)$$

Рассмотрим корреляционные свойства вторых разностей многократного кулоновского рассеяния для перекрывающихся ячеек. Обозначим эти разности че-

рез ${}^n D_i$, где n — индекс, характеризующий степень перекрывания. При $n=4$, например,

$${}^4 D_i = y_i - 2y_{i+4} + y_{i+8} = D_i + 2D_{i+1} + 3D_{i+2} + 4D_{i+3} + 3D_{i+4} + 2D_{i+5} + D_{i+6}. \quad (93.2)$$

Ординаты, образующие ${}^4 D_i$ и ${}^4 D_{i+1}$, изображены на рисунке 10.

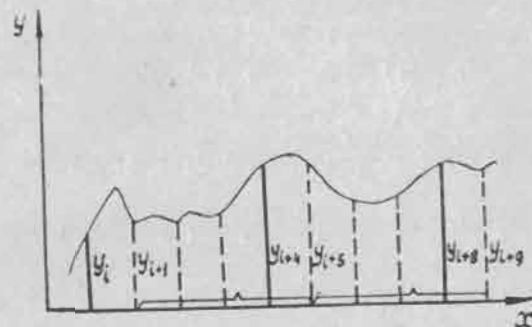


Рис. 10. К рассмотрению корреляции значений ${}^4 D_i$.

Чтобы рассчитать корреляционные моменты $\overline{{}^4 D_i {}^4 D_{i+j}}$, удобно перейти от D_i к новым статистически независимым переменным v_i по формуле

$$D_i = v_i + a v_{i+1}. \quad (94.2)$$

Так как $\overline{v_i v_{i+j}} = 0$ при $j \geq 1$, то очевидно, что

$$\begin{aligned} \overline{D_i^2} &= (1 + a^2) \overline{v_i^2}; \\ \overline{D_i D_{i+1}} &= a \overline{v_i^2}; \\ \overline{D_i D_{i+j}} &= 0, \quad j \geq 2. \end{aligned} \quad (95.2)$$

Сравнивая (95.2) с (70.2), найдем, что $a = 2 \pm \sqrt{3}$. Выберем из этих двух значений наименьшее: $a = 2 - \sqrt{3}$. Подставляя (94.2) в (93.2), получим

$${}^4 D_i = v_i + (a + 2) v_{i+1} + (2a + 3) v_{i+2} + (3a + 4) v_{i+3} +$$

$$+ (4a + 3)v_{i+4} + (3a + 2)v_{i+5} + (2a + 1)v_{i+6} + av_{i+7}, \quad (96.2)$$

откуда

$${}^4\overline{D_i^2} = (44a^2 + 80a + 44)\overline{v_i^2} = 64\overline{D_i^2}. \quad (97.2)$$

Это выражение соответствует известному соотношению, устанавливающему зависимость среднеквадратического значения второй разности координат от длины ячейки l для многократного кулоновского рассеяния. Вычисляя ${}^4\overline{D_i^4 D_{i+j}}$ при $j = 1, 2, 3, \dots$, последовательно получим

$$\begin{aligned} {}^4\overline{D_i^4 D_{i+1}} &= \frac{285}{4}\overline{D_i^2}; \quad {}^4\overline{D_i^4 D_{i+5}} = \frac{27}{4}\overline{D_i^2}; \\ {}^4\overline{D_i^4 D_{i+2}} &= 46\overline{D_i^2}; \quad {}^4\overline{D_i^4 D_{i+6}} = 2\overline{D_i^2}; \\ {}^4\overline{D_i^4 D_{i+3}} &= \frac{121}{4}\overline{D_i^2}; \quad {}^4\overline{D_i^4 D_{i+7}} = \frac{1}{4}\overline{D_i^2}; \\ {}^4\overline{D_i^4 D_{i+4}} &= 16\overline{D_i^2}; \quad {}^4\overline{D_i^4 D_{i+j}} = 0, \quad j \geq 8. \end{aligned} \quad (98.2)$$

Используя соотношения, аналогичные (96.2), и выражения (95.2), легко рассчитать корреляционные моменты вторых разностей, вычисленных для перекрывающихся ячеек при любой кратности n , причем

$${}^n\overline{D_i^n D_{i+j}} = \frac{1}{4} {}^n\overline{D_i^2} \cdot {}^n g(j);$$

$${}^n g(j) = \begin{cases} 4 - 6\left(\frac{j}{n}\right)^2 + 3\left(\frac{j}{n}\right)^3, & 0 \leq j \leq n; \\ \left(2 - \frac{j}{n}\right)^3, & n < j < 2n; \\ 0, & j > 2n. \end{cases} \quad (99.2)$$

Очевидно, что при $n \rightarrow \infty$ вторые разности ${}^n D_i$ образуют непрерывную случайную функцию $D(x)$, а ${}^n g(j)$ переходит в $g(\tau)$. Приведенный способ вычисления корреляционной функции с помощью перекрывающихся

ячеек позволяет в ряде случаев быстро рассчитать ее без привлечения функции распределения D_i , если известны только статистические свойства y_i .

Отметим, что корреляционные свойства вторых разностей целиком и полностью определяют свойства третьих разностей и разностей более высокого порядка. Например, параметр $\rho^2 = \frac{\overline{T_i^2}}{D_i^2}$ можно вычислить, используя ${}^n\overline{D_i^2}$ и ${}^n\overline{D_i^n D_{i+n}}$, следующим образом:

$$\rho^2 = \frac{({}^n\overline{D_{i+n} - {}^n D_i})^2}{{}^n\overline{D_i^2}} = 2 \left(1 - \frac{{}^n\overline{D_i^n D_{i+n}}}{{}^n\overline{D_i^2}} \right). \quad (100.2)$$

С помощью (99.2) для многократного кулоновского рассеяния находим, что $\rho^2 = \frac{3}{2}$ (см. также § 3 этой главы).

Рассмотрим связь между зависимостью $\overline{D_i^2}$ от l и видом корреляционной функции $\overline{D_i D_{i+j}}$. Для многократного кулоновского рассеяния мы получили $\overline{D_i^2} \sim l^3$ (75.2), используя (70.2). Очевидно, что зависимость $\overline{D_i^2}$ от l определяется корреляционной функцией $\overline{D_i D_{i+j}}$, так как вторые разности ${}^n D_i$ однозначно определяются через D_i . Возьмем для примера еще две корреляционные функции и вычислим для них зависимость $\overline{D_i^2}$ от l .

1. Пусть измеренные значения координат y_i статистически независимы, т. е. $y_i y_{i+j} = 0, j \geq 1$. Вычисляя ${}^n\overline{D_i^n D_{i+j}}$, получим [78] (см. рис. 11) ${}^n\overline{D_i^n D_{i+j}} = \overline{D_i^2} \cdot {}^n p(j)$, где

$${}^n p(j) = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & 1 < j < n, \\ -\frac{2}{3}, & j = n, \\ 0, & n < j < 2n, \\ \frac{1}{6}, & j = 2n, \\ 0, & j > 2n. \end{cases} \quad (101.2)$$

Таким образом, для корреляционной функции (101.2) $\overline{D_i^2} = \overline{D_i^2} = \text{const}$, т. е. средний квадрат вторых разностей для статистически независимых координат не зависит от длины ячейки t .

2. Пусть y_i представляет случайные поперечные смещения. Для этих смещений [77]

$$D_i = S_{i+1} - S_i,$$

где S_i — статистически независимые первые разности координат. Вычисляя $\overline{D_i^2 D_{i+j}^2}$, получим (рис. 12)

$$\overline{D_i^2 D_{i+j}^2} = \overline{D_i^2} \cdot {}^n q(j),$$

$${}^n q(j) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{j}{n} \right), & 0 \leq j \leq n; \\ -1 + \frac{1}{2} \left(\frac{j}{n} \right), & n \leq j \leq 2n; \\ 0, & j > 2n, \end{cases} \quad (102.2)$$

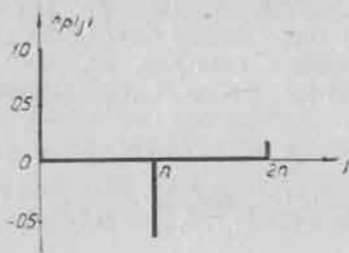


Рис. 11. Корреляционная функция вторых разностей для статистически независимых координат.

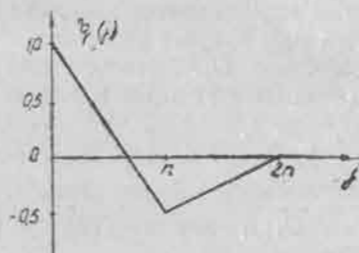


Рис. 12. Корреляционная функция вторых разностей для случайных поперечных смещений.

причем $\overline{D_i^2} = Bt$, где B — некоторая постоянная. Следовательно, средний квадрат вторых разностей для D_i , определяемых случайными смещениями, пропорционален длине ячейки. Аналогичные результаты, устанавливающие связь между видом корреляционной функции и зависимостью $\overline{D_i^2}$ от t , получены Кидали [79]. Значение параметра ρ для случаев $\overline{D_i^2} = \text{const}$

и $\overline{D_i^2} \sim t$ соответственно равны $\sqrt{\frac{10}{3}}$ и $\sqrt{3}$. Важным является то, что при $x = \text{const}$ в зависимости $\overline{D_i^2} \sim t^x$ параметр ρ также постоянен.

Корреляционные свойства вторых разностей, приведенные нами, очень важны при экспериментальном определении величины многократного кулоновского рассеяния и исключении ошибок, сопутствующих измерениям.

Глава III

ШУМЫ, ДИСТОРСИИ И ЛОЖНОЕ РАССЕЯНИЕ

Измерениям многократного кулоновского рассеяния в ядерных фотоэмульсиях всегда сопутствуют различного рода ошибки: дисторсии, ложное рассеяние, шум зерен, шум столика, перефокусировки, тепловой шум и шум отсчета.

§ 1. Шумы

Под шумами будем понимать статистическую сумму: 1) шума отсчета, 2) шума зерен, 3) шума перефокусировки, 4) шума столика микроскопа и 5) теплового шума:

$$\overline{D_{ин}^2} = \overline{D_{io}^2} + \overline{D_{ia}^2} + \overline{D_{in}^2} + \overline{D_{icr}^2} + \overline{D_{it}^2}. \quad (1.3)$$

Все компоненты $D_{ин}$ имеют различную природу, статистические свойства и величину. Поэтому, чтобы правильно учитывать влияние шума на результаты измерений, необходимо знать соотношение между всеми его составными частями.

Шум отсчета определяется в основном ошибками при установке нити или биштриха окулярмикрометра на отдельные зерна или группы зерен трека, а также ошибками отсчета делений на шкале барабана окулярмикрометра или ценой наименьшего деления датчика смещения биштриха в полуавтоматических микроскопах.

Очевидно, что отдельные значения координаты y_j обусловленные ошибками этого типа, статистически независимы, т. е.

$$\overline{y_i y_{i+j}} = 0, \quad j > 1, \quad (2.3)$$

откуда следует, что

$$\overline{D_{io}^2} = \overline{(y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2})^2} = 6\overline{y_i^2}. \quad (3.3)$$

С помощью этого соотношения можно экспериментально определить $\overline{D_{io}^2}$, повторно измеряя координаты y_i следа строго в одних и тех же точках. Так как координаты y_i и повторно измеренные y_i' статистически независимы, то

$$\overline{D_{io}^2} = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_i')^2. \quad (4.3)$$

На практике обычно вместо среднеквадратических значений $\sqrt{\overline{D_{io}^2}}$ и $\sqrt{\overline{y_i^2}}$ используются среднеарифметические $D'_{io} = \overline{|D_{io}|}$ и $\varepsilon = \overline{|y_i|}$, которые при гауссовом законе распределения в $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ -раз меньше первых.

В работах Висваса и др. [80] и Экспонга [81] для величины ε , измеренной на микроскопах Кук-М 4005, Користка и KSM-1, получено значение $\varepsilon \approx 0,02$ мк. В работе Скирды [82] значение ε для микроскопа МБИ-8М оценено как $0,016 \pm 0,001$ мк, причем указывается, что шум отсчета не зависит от способа фиксирования центров отдельных зерен или групп зерен следа и глубины залегания следа в эмульсии, но зависит от среднего числа зерен \bar{n} , по которым устанавливается нить окулярмикрометра.

Сначала, при небольших \bar{n} , $\overline{D_{io}^2}$ возрастает, а затем, по достижении некоторого критического значения \bar{n} , уменьшается.

Шум отсчета $\overline{D_{i_0}^2}$, согласно работам [80, 81 и др.], не зависит от длины ячейки t , на которой измерялись координаты y_i . Этот результат — следствие статистической независимости y_i . (§ 4, гл. II).

Шум зерен. Ошибка, обусловленная отклонением положения центров проявленных зерен от истинной траектории частицы, называется шумом зерен. Этот шум вызывается, во-первых, тем, что частица, проходя через эмульсионный слой, активирует не только те кристаллы $AgHal$, которые она пересекает по диаметру, но и почти все кристаллы, пересекаемые по хордам; и, во-вторых, тем, что на заключительной стадии проявления происходят микросмещения отдельных зерен серебра. Шум зерен, обусловленный первой причиной, может быть приближенно оценен как [82]

$$\sqrt{\overline{D_{i_3}^2}} \approx R, \text{ мк}, \quad (5.3)$$

где R — радиус непроявленных зерен галоида серебра. Для эмульсии НИКФИ-Р, например, $\sqrt{\overline{D_{i_3}^2}} \sim 0,14 \text{ мк}$.

Как и шум отсчета, шум зерен может быть определен экспериментально путем измерения координат y_i и y_i'' в точках, отстоящих на расстояние t порядка $10 \div 50 \text{ мк}$. Пренебрегая в силу малости t вкладом многократного кулоновского рассеяния, ложного рассеяния, дисторсии и исключая шум отсчета, получим

$$\overline{D_{i_3}^2} = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_i'')^2 - \overline{D_{i_0}^2}. \quad (6.3)$$

В работе [82] подробно изучены все свойства шума зерен на микроскопе типа МВИ-8М. Показано, что шум зерен практически не зависит от условий проявления, а определяется в основном процессом активирования микрокристаллов и физико-механическими свойствами эмульсии. Наиболее вероятный шум отдельных зерен и блобов в эмульсии НИКФИ-Р равен $\overline{D_{i_3}^2} = 0,162 \pm 0,003 \text{ мк}$. Показано, что распределение вторых разностей, обусловленных шумом зерен, мож-

но считать гауссовым (рис. 13) и, следовательно, для эмульсии НИКФИ-Р $\sqrt{\overline{D_{i_3}^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \overline{D_{i_3}^2} = 0,203 \pm \pm 0,004 \text{ мк}$.

Наиболее интересные для экспериментаторов результаты работы [82] касаются шума зерен и отсчета. Они дают зависимость этих шумов от среднего числа зерен n , по которым устанавливается нить окулярмикроскопа (рис. 14). Из рисунка видно, что величина ошибки, обусловленная разбросом центров тяжести зерен, может быть значительно уменьшена путем увеличения n .

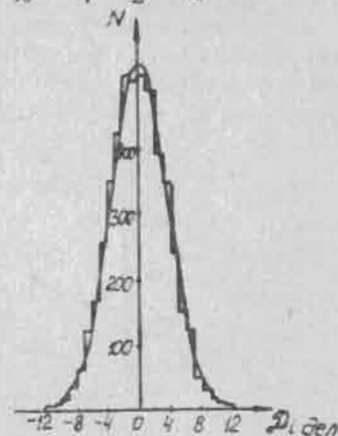


Рис. 13. Распределение вторых разностей, обусловленных шумом зерен [82] ($N=5000$). Кривая — распределение Гаусса.

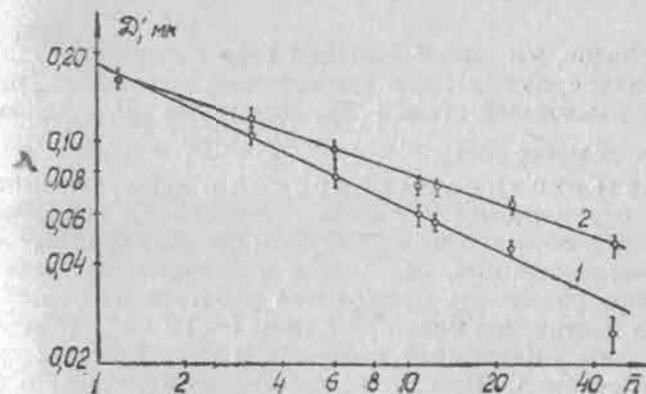


Рис. 14. Зависимость шума зерен и ошибок отсчета от \bar{n} [82]: 1 — шум зерен; 2 — суммарный шум зерен и отсчета. Кривые проведены по методу наименьших квадратов.

Что касается зависимости шума зерен от длины ячейки, то, как и для шума отсчета, он не зависит от t , т. е.

$${}^n \overline{D_{i_3}^2} = \overline{D_{i_3}^2} = \text{const}. \quad (7.3)$$

Шум перефокусировки. Ошибки, обусловленные непрямолинейностью перемещения объектива микроскопа при перефокусировке, называются шумом перефокусировки. Величина этой ошибки зависит от угла погружения следа частицы в эмульсии. При вертикальном перемещении объектива на $5 \div 20$ мк шум перефокусировки $D'_{in} \approx 0,02 \div 0,30$ мк [83, 84] (рис. 15).

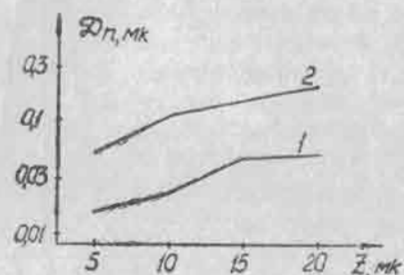


Рис. 15. Зависимость шума перефокусировки от величины перемещения объектива Z [84] для микроскопов: 1 — МБИ-2; 2 — МБИ-8.

Для следов, имеющих большой угол погружения, шум перефокусировки можно существенно уменьшить, применяя наклонный столик [85]. Для шума D'_{in} , очевидно, имеет место соотношение $D'_{in} = D'_{in} = \text{const}$.

Шум столика микроскопа. Непрямолинейность перемещения столика микроскопа вызывает ошибки, которые называют шумом столика. В современных исследованиях, связанных с измерением многократного рассеяния, приходится работать на отрезках следов достаточно большой длины (~ 10 см), поэтому необходим тщательный контроль и учет боковых смещений столика. Шум столиков обычно измеряют с помощью интерферометров [86, 87] (рис. 16). Из рисунка видно, что шум столиков микроскопов МИРЭ-2, Користка MS-2 и др., специально разработанных для измерения рассеяния, невелик и равен приблизительно $D'_{ст} \approx 0,01 \div 0,03$ мк на ячейке $t = 500$ мк. С длиной ячейки $D'_{ст}$ изменяется незначительно ($D'_{ст} \sim t^{0,2 \div 0,5}$).

Эта зависимость объясняется своеобразным видом корреляционной функции $D_{ст}$ (рис. 17). Поскольку вторые разности $D_{ст}$ коррелированы, шум столика обычно исключают одновременно с ложным рассеянием.

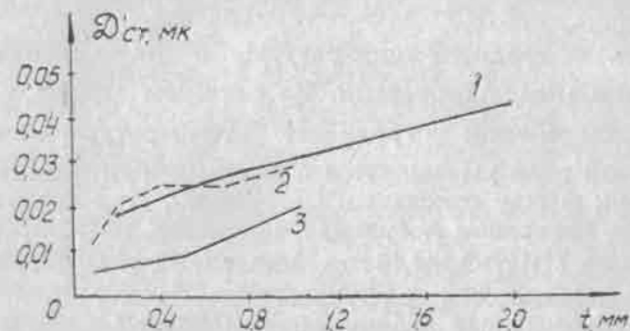


Рис. 16. Зависимость шума столика микроскопа от длины ячейки t : 1 — МИРЭ-2; 2 — Користка MS-2; 3 — МБИ-8М.

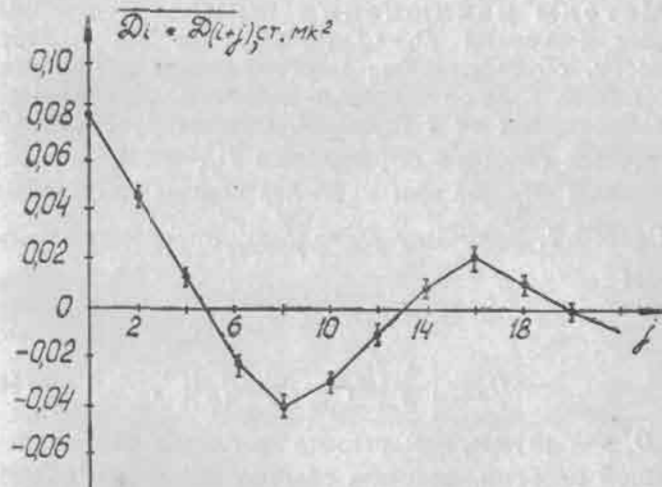


Рис. 17. Экспериментальная корреляционная функция вторых разностей для шума столика МИРЭ-2, измеренная на ячейке $t = 2000$ мк с восьмикратным перекрыванием.

Тепловой шум обусловлен различным влиянием температуры на отдельные части микроскопа. Вели-

чина D'_{ir} , например, для микроскопа типа Користка выражается соотношением [80]

$$D'_{ir} = 38 \frac{dT}{dt} \Delta t, \quad (8.3)$$

где $\frac{dT}{dt}$ — градиент температуры, а Δt — интервал времени между отсчетами. Из формулы видно, что при постоянном градиенте температуры $\frac{dT}{dt}$ тепловой шум уменьшается с уменьшением интервала времени между отдельными отсчетами. При автоматическом измерении координат, например, на микроскопах типа МИРЭ-2, Δt , а следовательно, и D'_{ir} , значительно меньше, чем при ручном измерении.

В современных микроскопах (МИРЭ-2, Користка MS-2 и др.) величина теплового шума пренебрежимо мала по сравнению с другими источниками шумов и ее при измерениях обычно не учитывают.

Методы исключения шумов. Пусть измеренные значения $D_i = D_{ik} + D_{iш}$, где D_{ik} — вторые разности, обусловленные многократным кулоновским рассеянием, а $D_{iш}$ — вторые разности, обусловленные не зависящими от t шумами. Существует множество различных способов определения $\overline{D_{ik}^2}$ по измеренным значениям D_i , из них наиболее важны следующие:

Способ 1. Величину $D_k = \sqrt{\overline{D_{ik}^2}}$ определяют по формулам

$$D_k = (\overline{D_i^2} - \overline{D_{iш}^2})^{1/2}, \quad (9.3)$$

$$D_k = \left[\frac{2}{3} \left(\overline{T_i^2} - \frac{10}{3} \overline{D_{iш}^2} \right) \right]^{1/2}, \quad (10.3)$$

где $\overline{D_{iш}^2}$ — шумы, измеренные на следах частиц очень большой энергии, которые обычно называют калибровочными. При определении $\overline{D_{iш}^2}$ необходимо следить, чтобы калибровочные следы имели ту же плотность зерен, что и измеряемые.

Относительная ошибка величины D_k вычисляется по формуле [9]

$$\frac{\delta D_k}{D_k} = \frac{C}{\sqrt{N}}, \quad (11.3)$$

где N — число вторых разностей;

$$C = (0.95 + 1.13\mu + 2.49\mu^2)^{1/2} \text{ для (9.3) и} \quad (12.3)$$

$$C = (1.53 + 6.45\mu + 10.33\mu^2)^{1/2} \text{ для (10.3).}$$

$$\text{Здесь } \mu = \frac{\overline{D_{iш}^2}}{\overline{D_{ik}^2}}.$$

Способ 2 основан на использовании кратных ячеек. Поскольку $\overline{T_{ik}^2}$ и $\overline{D_{ik}^2} \sim t^3$, $\overline{T_{iш}^2}$ и $\overline{D_{iш}^2} \sim t^0$, то D_k можно определить следующим образом:

$$D_k = \left(\frac{n \overline{D_{i^2}} - \overline{D_{i^2}}}{n^3 - 1} \right)^{1/2}; \quad (13.3)$$

$$D_k = \left(\frac{n \overline{T_{i^2}} - \overline{T_{i^2}}}{\frac{3}{2} (n^3 - 1)} \right)^{1/2}, \quad (14.3)$$

где n — показатель кратности ячейки. Относительная ошибка величины D_k в этом случае также вычисляется по формуле (11.3), причем [9]

$$C = (2.03 + 0.138\mu + 0.0402\mu^2)^{1/2} \text{ для (13.3)}$$

при $n = 2$

и

$$C = (3.6 + 0.096\mu + 0.003\mu^2)^{1/2} \text{ для (14.3)}$$

при $n = 4$.

Под N в этом случае подразумевается число основных ячеек длиной t , а не nt .

Способ 3 основан на корреляционных свойствах вторых разностей многократного кулоновского рассея-

ния и шумов. Суть его состоит в использовании таких комбинаций вторых моментов $\overline{D_i D_{i+j}}$, которые не подвержены шумам [4, 44, 77, 88]. Например, D_k можно найти следующим образом [4]:

$$D_k = \sqrt{\frac{8}{11}(\overline{D_i^2} + \frac{3}{2}\overline{D_i D_{i+1}})}^{1/2}. \quad (16.3)$$

причем

$$C = (1,047 + 0,155\mu + 0,090\mu^2)^{1/2}. \quad (17.3)$$

Способ 4 состоит в определении D_k по среднеквадратическому значению величин [89, 90]

$$D_i(m) = \frac{(y_i + y_{i+1} + \dots + y_{i+m-1})^2 - (y_{i+m} + y_{i+m+1} + \dots + y_{i+2m-1}) + (y_{i+2m} + \dots + y_{i+3m-1})}{m} = \frac{{}^m D_i + {}^m D_{i+1} + \dots + {}^m D_{i+m-1}}{m}. \quad (18.3)$$

Используя (99.2) и (101.2) при $m=5$, получим

$$\overline{D_i(5)^2} = 0,83008 \overline{D_{ik}^2} + \frac{1}{5} \overline{D_{iш}^2}. \quad (19.3)$$

В отличие от предыдущих этот способ не позволяет полностью избавиться от шумов, вклад которых, однако, уменьшается как m^{-1} .

Способ 5 основывается на корреляционных свойствах перекрывающихся ячеек [78]. В параграфе 4 (глава II) показано, что ${}^n D_i^n D_{i+1} = 0$ для статистически независимых координат y_i . Поэтому D_k можно определять по формуле (см. 99.2) [91]

$$D_k = 2 \left[\frac{{}^n D_i^n D_{i+1}}{{}^n g(1)} \right]^{1/2}. \quad (20.3)$$

Статистическая ошибка величины D_k в этом случае равна для $n=2, 3$ и 4 соответственно:

$$\frac{\delta D_k}{D_k} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} (0,779 + 0,141\mu + 0,094\mu^2)^{1/2}, \quad (21.3)$$

$$\frac{\delta D_k}{D_k} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} (0,630 + 0,147\mu + 0,218\mu^2)^{1/2}, \quad (22.3)$$

$$\frac{\delta D_k}{D_k} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} (0,589 + 0,132\mu + 0,144\mu^2)^{1/2},$$

где N — число измеренных вторых разностей на основной ячейке t .

Следует отметить, что с увеличением степени перекрывания n члены, содержащие μ , сначала возрастают, а при $n > 3$ уменьшаются приблизительно как $n^{-1/2}$. Это объясняется тем, что для шумов ${}^n D_i^n D_{i+1} = 0$, причем статистическая обеспеченность этого соотношения растет с ростом n . Сравнение формул (12.3), (15.3), (17.3) и (21.3—23.3) показывает, что наибольшую точность определения величины D_k дает последний способ, во-первых, потому, что с ростом n растет статистическая обеспеченность кулоновской части рассеяния и, во-вторых, потому, что для шумов, определенных с помощью перекрывающихся ячеек,

$$\frac{\delta D_{ш}}{D_{ш}} \approx \frac{1,1}{\sqrt{n(N-1)+1}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

§ 2. Дисторсии

После обработки ядерной фотоэмульсии следы частиц искривляются и могут принять характерную S -образную или еще более сложную форму. Такие макроскопические искажения обычно называются дисторсией. Основная причина дисторсии — разбухание и последующая усадка желатина в процессе проявления, фиксирования, промывки и сушки фотоэмульсии. После изготовления слоя в его желатиновой основе возникают различные внутренние напряжения, которые в значительной степени ослабляются при обработке, вызывая деформации. Видимо, искажения этого типа существенно зависят от показателя водородных ионов рН и температуры растворов, которыми обрабатывают эмульсию. Так, в работе [92] показано, что растворы с рН < 7,5 не влияют на дисторсию, в то время как при рН > 7,5 дисторсия резко возрастает. Показано также, что при температуре растворов, большей 15°C, дисторсия значительно увеличивается. В работе

[93] изучена зависимость дисторсии от условий хранения эмульсии до экспонирования. Показано, что если эмульсию хранить в условиях высокой относительной влажности и температуры, то внутренние напряжения существенно ослабевают и дисторсия обработанных слоев снижается.

Другой важный источник дисторсии — сушка обработанных и наклеенных на стекло слоев. Если пластинка сушится несколько наклонно или на ребре, то очевидно, что под действием силы тяжести одни части слоя сдвигаются по отношению к другим. Кроме того, в результате сушки возникают специфические искажения на краях эмульсии.

Значительная дисторсия появляется и при наклеивании эмульсии на стекло, если слой прикатывают или прижимают к поверхности каким-либо способом. Особым и сравнительно частым источником дисторсии являются наполненные жидкостью пузырьки, образующиеся между эмульсией и стеклом. Дисторсия может вызываться и макромасштабной неоднородностью плотности эмульсии. Коэффициент усадки зависит от плотности вещества эмульсии, а это и приводит к возникновению искажений. Существуют и другие причины, вызывающие искажения следов частиц в эмульсии.

Рассмотрим способы измерения и исключения дисторсии. Пусть в необработанном слое эмульсии толщиной $BC=T$ (рис. 18) имеется скрытое изображение прямого следа AB . Введем систему координат x_0, y_0, z_0 так, чтобы плоскость x_0, y_0 совпадала с поверхностью стекла, на которую наклеена эмульсия. После обработки и сушки след AB исказится и перейдет в AB' . При этом толщина эмульсии уменьшится до $B'C'=T_0$. Отношение $\frac{BC}{B'C'} = \frac{T}{T_0} = S_0$ называется коэффициентом усадки. Векторный элемент трека $d\vec{R}_0(dx_0, dy_0, dz_0)$ переходит в соответствующий векторный элемент $d\vec{R}(dx, dy, dz)$. Введем в рассмотрение непрерывную векторную функцию $\vec{D}(x_0, y_0, z_0)$, ставящую в соответствие каждой точке следа AB определенную точку следа AB' . Очевидно, что

$$d\vec{R} = d\vec{R}_0 + d\vec{D}. \quad (24.3)$$

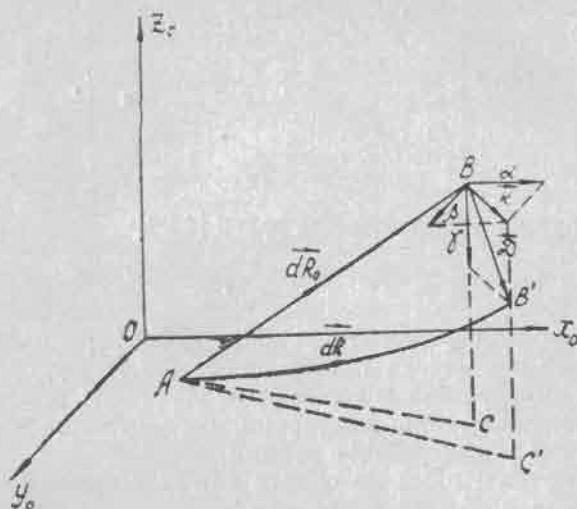


Рис. 18. Искажение следа частицы за счет дисторсии.

Обозначая проекции вектора \vec{D} на оси x_0, y_0 и z_0 через $\alpha(x_0, y_0, z_0)$, $\beta(x_0, y_0, z_0)$ и $\gamma(x_0, y_0, z_0)$ соответственно и проектируя (24.3) на эти оси координат, получим

$$\begin{cases} dx = \left(1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_0}\right) dx_0 + \frac{\partial \alpha}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial \alpha}{\partial z_0} dz_0, \\ dy = \frac{\partial \beta}{\partial x_0} dx_0 + \left(1 + \frac{\partial \beta}{\partial y_0}\right) dy_0 + \frac{\partial \beta}{\partial z_0} dz_0, \\ dz = \frac{\partial \gamma}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial y_0} dy_0 + \left(1 + \frac{\partial \gamma}{\partial z_0}\right) dz_0. \end{cases} \quad (25.3)$$

Таким образом, дифференциальный элемент следа частицы в необработанной эмульсии переводится в соответствующий дифференциальный элемент следа в обработанной эмульсии с помощью матрицы

$$M = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_0} & \frac{\partial \alpha}{\partial y_0} & \frac{\partial \alpha}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x_0} & 1 + \frac{\partial \beta}{\partial y_0} & \frac{\partial \beta}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x_0} & \frac{\partial \gamma}{\partial y_0} & 1 + \frac{\partial \gamma}{\partial z_0} \end{bmatrix}. \quad (26.3)$$

Определитель этой матрицы равен [4.94]

$$\det M = \frac{1}{S_0}, \quad (27.3)$$

где S_0 — коэффициент усадки. Дифференциальное уравнение в частных производных (27.3), удовлетворяющее определенным граничным условиям, описывает все возможные типы дисторсии, согласующиеся с постоянством коэффициента усадки.

Рассмотрим один из самых важных типов дисторсии, который обычно называют гравитационным. Эта дисторсия возникает вследствие сдвиговых напряжений, параллельных плоскости эмульсии. Предположим, что силовое поле и плотность эмульсии однородны. Тогда естественны следующие граничные условия:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \quad \text{при } z_0 = 0,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z_0} = \frac{\partial \beta}{\partial z_0} \quad \text{при } z_0 = T.$$

Кроме того, будем считать, что α , β и γ зависят только от z_0 , т. е.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_0} = \frac{\partial \beta}{\partial x_0} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_0} = \frac{\partial \alpha}{\partial y_0} = \frac{\partial \beta}{\partial y_0} = \frac{\partial \gamma}{\partial y_0} = 0.$$

В этих предположениях простейшим нетривиальным решением уравнения (27.3) будет

$$\begin{cases} \alpha = \frac{K}{T^2} (2z_0 T - z_0^2) \cos \vartheta, \\ \beta = \frac{K}{T^2} (2z_0 T - z_0^2) \sin \vartheta, \\ \gamma = z_0 \left(\frac{1}{S_0} + 1 \right). \end{cases} \quad (28.3)$$

Здесь ϑ — постоянная, определяемая направлением поля, а K — величина тангенциальной составляющей вектора дисторсии \vec{D} на поверхности эмульсия — воздух.

Обычно мерой дисторсии в ядерной фотоэмульсии называется величина

$$K_d = \frac{K}{T^2}. \quad (29.3)$$

Если K измерять в микронах, а толщину необработанной эмульсии в миллиметрах, то K_d будет выражена в ковансах. Таким образом, $1 \text{ ковс} = 1 \frac{\text{мк}}{\text{мм}^2}$. В стандартных эмульсиях K имеет величину порядка 10 мк. Тангенциальная составляющая вектора дисторсии (28.3) равна

$$\vec{K} = i\alpha + j\beta = \vec{K}_1 \left(\frac{z_0}{T} \right) + \vec{K}_2 \left(\frac{z_0}{T} \right)^2, \quad (30.3)$$

где

$$\vec{K}_1 = 2\vec{K} (i \cos \vartheta - j \sin \vartheta),$$

$$\vec{K}_2 = -K (i \cos \vartheta - j \sin \vartheta),$$

откуда

$$\vec{K}_1 = -2\vec{K}_2. \quad (31.3)$$

Соотношение (30.3) показывает, что рассмотренная нами дисторсия будет квадратичной. В общем случае дисторсия может быть и более высоких порядков, т. е.

$$\vec{K} = \vec{K}_1 \left(\frac{z_0}{T} \right) + \vec{K}_2 \left(\frac{z_0}{T} \right)^2 + \vec{K}_3 \left(\frac{z_0}{T} \right)^3 + \dots \quad (32.3)$$

Апостолакис и Мэджор [95] экспериментально изучили вектор \vec{K} . Для этого они наклеивали эмульсионные слои на обе стороны тонкой стеклянной пластинки. Зная точку входа и выхода следа из стекла, можно определить первоначальный угол погружения следа в необработанной эмульсии, а также найти вектор \vec{K} , если частицы обладают достаточно высокой энергией. По их данным, \vec{K} может быть представлено соотношением (30.3), причем $|\vec{K}_1| / |\vec{K}_2| = 2.03 \pm 0.03$, а $\vec{K}_1 \simeq -2\vec{K}_2$. Это говорит о том, что в ядерной фото-

эмульсии преобладают дисторсии линейная и квадратичная. Баркас, Смит и Бирнбаум [94] также считают, что для эмульсионных слоев, не испытывающих поверхностных напряжений, предположение о преимущественно квадратичном характере дисторсии вполне оправдывается. Предположим, что измерено N значений координаты y , подверженной дисторсии. Тогда каждое значение

$$y_i = y_{i0} + \beta_i, \quad (33.3)$$

где y_{i0} — истинная координата, а β_i — проекция вектора D на ось y .

Вычисляя вторые разности, имеем

$$D_i = D_{i0} + (\beta_i - 2\beta_{i+1} + \beta_{i+2}) = D_{i0} + d_i. \quad (34.3)$$

Когда имеются искажения только первого и второго порядков, то, согласно (28.3),

$$\beta_i = \frac{K}{T^2} (2z_i T - z_i^2) \sin \vartheta. \quad (35.3)$$

Если первоначальный угол погружения трека φ , то длина ячейки $t = \frac{L}{N-1} = \frac{T}{(N-1) \operatorname{tg} \varphi}$, где L — длина проекции следа на плоскость (x_0, y_0) , а $N-1$ — число ячеек. Очевидно также, что $z_i = it \operatorname{tg} \varphi$, а

$$\beta_i = \frac{K}{T^2} (2itT \operatorname{tg} \varphi - i^2 t^2 \operatorname{tg}^2 \varphi) \sin \vartheta. \quad (36.3)$$

Соответственно

$$D_i = D_{i0} - \frac{2K}{T^2} t^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin \vartheta \quad (37.3)$$

и

$$d' = \overline{d_i} = \frac{2K}{T^2} t^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin \vartheta. \quad (38.3)$$

Из этой формулы видно, что среднеарифметическое значение второй разности, обусловленной квадратичной дисторсией, пропорционально квадрату длины ячейки t и $\operatorname{tg}^2 \varphi$ (рис. 19) [96]. Экспериментально полученные зависимости d' от угла φ для различных длин ячеек в пределах ошибок согласуются с формулой (38.3). Соотношение (37.3) показывает, что если необходимо вы-

числить вторые разности D_{i0} , не подверженные дисторсии второго порядка, то нужно каждое значение D_i исправить на некоторую постоянную величину d' .

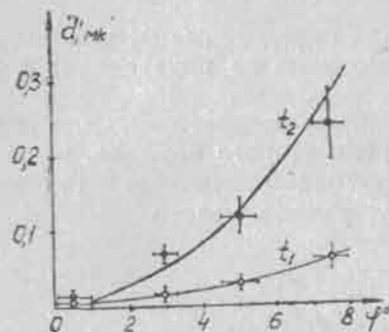


Рис. 19. Зависимость дисторсии от угла погружения следов для ячеек $t_1 = 250$ мк и $t_2 = 500$ мк в эмульсии Ильфорд G-5 [96]. Кривые — расчетная зависимость.

Измеренные координаты следа, подверженного произвольной дисторсии, можно представить следующим образом:

$$y_i = y_{i0} + a + bx_i + cx_i^2 + dx_i^3 + \dots \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (39.3)$$

Здесь y_{i0} — координаты, не содержащие искажений, а bx_i, cx_i^2, \dots — члены, описывающие дисторсию соответственно первого, второго, третьего и более высоких порядков. Если длина ячейки, на которой измерялись координаты, равна t , то $x_i = it$. Вычисляя первые S_i , вторые D_i и третьи T_i разности координат, имеем

$$\begin{aligned} S_i &= S_{i0} + bt + ct^2(2i+1) + dt^3(3i^2+3i+1) + \dots \\ D_i &= D_{i0} + 2ct^2 + 6dt^3(i+1) + \dots \\ T_i &= T_{i0} + 6dt^3 + \dots \end{aligned} \quad (40.3)$$

Из этих соотношений видно, что первые разности не содержат постоянной величины a , вторые — линей-

ной дисторсии bx_i , третьи — дисторсии второго порядка sx_i и т. д. Используя только выражения (40.3), можно получить три различных способа исключения дисторсий.

Способ 1. Для определения D_k используются третьи разности T_i , которые не подвержены дисторсии второго порядка.

Способ 2. Вторые разности D_i для следов, подверженных дисторсии второго порядка, равны сумме D_{i_0} и некоторой постоянной величины $2ct^2$. Поскольку среднее значение $\overline{D_{i_0}}$ равно нулю, то

$$2ct^2 = \overline{d}_i = \frac{\sum_{i=1}^{N-2} D_i}{N-2}, \quad (41.3)$$

а неискаженные значения вторых разностей равны

$$D_{i_0} = D_i - \overline{d}_i. \quad (42.3)$$

Сравнивая формулы (37.3) и (42.3), находим, что

$$\overline{d}_i = -\frac{2K}{T^2} t^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \sin \theta. \quad (43.3)$$

Таким образом, чтобы исключить дисторсию второго порядка, описываемую выражением (37.3), достаточно найти среднее алгебраическое значение D_i и вычесть его из каждого значения измеренных вторых разностей [67]. В некоторых случаях удобнее применять формулу [96]

$$D'_{i_0} = \overline{|D_{i_0}|} = \frac{2 \left(\sum_{i=1}^n D_i^x - n \overline{d}_i \right)}{N-2}, \quad (44.3)$$

где n — число $D_i^x > \overline{d}_i$ со своим знаком, а

$$\overline{d}_i = \frac{\sum_{i=1}^{N-2} D_i}{N-2} = \frac{S_N - S_1}{N-2}.$$

Способ 3 наиболее общий и может быть применен для исключения дисторсий любого порядка. Пусть a ,

b , c и d не равны нулю, а все остальные члены равны нулю. Так как третьи разности T_{i_0} не подвержены дисторсии, то $\overline{T_{i_0}} = 0$ и, согласно (40.3),

$$d = \frac{1}{6t^3} \overline{T}_i. \quad (45.3)$$

Подставляя это значение d в (40.3) и учитывая, что $\overline{D_{i_0}} = 0$, получим

$$\overline{D}_i = 2ct^2 + \frac{N+1}{2} \overline{T}_i,$$

откуда

$$2ct^2 = \overline{D}_i - \frac{N+1}{2} \overline{T}_i. \quad (46.3)$$

Здесь N — число измеренных координат y_i . Согласно (40.3), (45.3) и (46.3), вторые разности, исправленные на дисторсию второго и третьего порядков, равны

$$D_{i_0} = D_i - \overline{D}_i + \overline{T}_i \left[\frac{N+1}{2} - (i+1) \right]. \quad (47.3)$$

Судя по результатам проверки формулы (47.3) на первичных следах π -мезонов с импульсом 17 Гэв/с в эмульсии Ильфорд G-5 для следов частиц, имеющих даже малый угол погружения в эмульсию, при измерении рассеяния на больших ячейках необходимо учитывать дисторсию третьего порядка.

§ 3. Ложное рассеяние

Помимо шумов и дисторсий, мешающих измерению многократного кулоновского рассеяния, наблюдаются еще малые (локальные) искажения следов частиц в эмульсии. Влияние таких искажений проявляется в виде так называемого ложного рассеяния, которое наиболее трудно отличить от кулоновского. Впервые на существование ложного рассеяния указали Бисвас и др. [80]. Они, определяя ложное рассеяние с помощью измерения многократного рассеяния на следах высокоэнергичных частиц космического излучения, установили, что величина этого рассеяния увеличивается с

длиной ячейки примерно по такому же закону, как и кулоновское, и что надежное измерение истинного кулоновского рассеяния возможно для однозарядных частиц только с энергией ниже 600 Мэв и многозарядных — с энергией ниже 300 Мэв на нуклон. Несколько позже ложное рассеяние обнаружили практически во всех типах ядерных эмульсий. Было также выяснено, что величина этого рассеяния сильно колеблется от одной партии эмульсии к другой, от одного слоя к другому и изменяется даже в пределах одного эмульсионного слоя. Одно время существовало мнение о невозможности определения энергии частиц выше 1 Гэв путем измерения многократного рассеяния на отдельных следах. В то же время некоторые авторы считали, что можно определять энергию частиц в области даже нескольких десятков Гэв и выше [3, 97, 98].

Сразу же после открытия ложного рассеяния предпринимались попытки уменьшить его, улучшив физико-механические свойства ядерной эмульсии. Представляют интерес результаты работы [99], в которой указано, что при определенном режиме обработки ядерной эмульсии ложное рассеяние может быть сведено до минимума. Обработка ядерной эмульсии с помощью акустических колебаний приводит к уменьшению величины ложного рассеяния и дисторсии [100].

Измерение ложного рассеяния. Величина среднего квадрата второй разности ложного рассеяния $\overline{D_{i\lambda}^2}$ может быть определена из соотношения

$$\overline{D_{i\lambda}^2} = \overline{D_l^2} - \overline{D_{ik}^2} - \overline{D_{im}^2} - \overline{d^2}, \quad (48.3)$$

где D_l — измеренные вторые разности; D_{im} — вторые разности, включающие ошибки отсчета, шумы зерен, перефокусировки, столика и т. п.; d — вторые разности, обусловленные дисторсией; D_{ik} — вторые разности, обусловленные многократным кулоновским рассеянием. Среднеквадратическое значение этих разностей вычисляется по формуле (75.2)

$$\sqrt{\overline{D_{ik}^2}} = \frac{K'_0 t^{3/2}}{573 \rho^2 c},$$

где t — длина ячейки, мк; $\rho^2 c$ — произведение импульса частицы на ее скорость, Мэв; K'_0 — постоянная рассеяния, вычисленная по теории Вильямса — Мольера [51].

При значительной дисторсии второго порядка ложное рассеяние можно оценить с помощью третьих разностей

$$\overline{T_{i\lambda}^2} = \overline{T_l^2} - \overline{T_{ik}^2} - \overline{T_{im}^2}, \quad (49.3)$$

где T_l — измеренные третьи разности;

$$\overline{T_{ik}^2} = \frac{3}{2} \overline{D_{ik}^2}, \quad \overline{T_{im}^2} = \frac{10}{3} \overline{D_{im}^2}, \quad \overline{T_{i\lambda}^2} = \rho_{\lambda}^2 \overline{D_{i\lambda}^2}.$$

Чтобы оценить $\overline{D_{i\lambda}^2}$ по формуле (49.3), необходимо заранее знать величину ρ_{λ} или же при определении энергии частиц пользоваться только третьими разностями. Существуют и другие методы измерения $\overline{D_{i\lambda}^2}$, основанные уже на свойствах самого ложного рассеяния. Характер распределения вторых разностей ложного рассеяния пока неясен. Большинство экспериментальных данных указывает на то, что, по-видимому, это распределение незначительно отличается от нормального.

Зависимость ложного рассеяния от длины ячейки.

В многочисленных работах показано, что $D'_{\lambda} = |D_{i\lambda}| = at^2$. Сводка экспериментальных значений a и x дана в таблице 3.

По данным, приведенным в таблице 3, D'_{λ} в среднем увеличивается пропорционально длине ячейки. Заметное отличие показателя x от единицы, по-видимому, можно объяснить не только свойствами самой эмульсии, но и недостаточно корректным исключением различных шумов, дисторсий и т. п. В некоторых работах показано, что с увеличением длины ячейки показатель x уменьшается [57, 61, 104, 114]. Поведение ложного рассеяния в области очень больших длин ячеек ($t > 1$ см) еще до конца не выяснено. Исследование ложного рассеяния на таких ячейках путем изме-

Таблица 3

Автор	Интервал длины ячеек, ед. 100 мк	a , мк	x	Импульс частиц, Гэв.с
1	2	3	4	5
Бисвас и др. [80]	2,5—10	0,02—0,30	1,57—1,1	Косм. лучи
Фэй [101]	10—40	0,037—0,043	1	*
Лорман и Тейчер [102]	5—40	0,042	1	*
Брисбаут и др. [56]	5—20	0,02—0,04	1	*
Апостолакис и др. [103]	5—20	0,02—0,04	1	4,2
Бисвас и др. [57]	10—30 30—80	0,04—0,05 0,11—0,15	0,8 0,5	6,2 и 5,7
Фишер и Лорд [104]	5—20 >50	0,034 —0	1 ?	6,2
Часников и др. [105]	5—80	0,08	0,6	10
Самойлович и др. [106]	5—20	0,030	0,7	8,5
Акопова [107]	2,5—5	0,04—0,18	0,3—1	1,7
Жюдек [108]	5—40	0—0,014	0—1,2	6,2
Лавакаре и Сударшан [109]	5—40	0,016	1,26	6,2
Лагнаукс и Ренард [110]	10—40	0,041	1	14,5
Крекер [93]	5—40	0,017—0,033	0,67—1,11	10
Марзари—Чи- ега, Ватагин [111]*	20—400	0,02	1	17,2
Пал и Рэй [61]	20—80 2,5—80 5—40	0,060 0,017 0,028	0,90 0,91 0,97	24 24 7,5
Бозоки и др. [62]	50—300	0,0068	1,22	17,2
Рао и Камал [112]	10—100	0,098	1,26	17,2
Шарапов и др. [113]	5—80	0,04	0,8	19,8

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4	5
Даль-Йенсен [99]	20—40	—0	?	24
Адитья и др. [114]	40—120 120—200	0,033—0,011 —0	0,9—1,3 ?	27
Рао и Камал [115]	20—120	0,063—0,007	1—1,25	24 и 27
Настоящая работа	20—80	0,008	0,85	60

* При нахождении D'_L использовалось экспериментальное значение K , которое меньше соответствующего значения, рассчитанного по теории Вильямса [51].

рения рассеяния частиц с энергией 20—30 Гэв не дает надежных результатов, так как велик вклад кулоновского рассеяния. Замечено, что при $t > 1$ см измеренная координатным методом величина второй разности может быть меньше теоретического значения D_L , даже если не исключать D_L , D_{III} и d [58, 93, 104, 114]. Возможно поэтому наблюдается различие в величинах a и x при больших t .

Зависимость ложного рассеяния от угла погружения следов в эмульсии. Энергию неизвестных частиц, как правило, определяют на следах, имеющих различные углы погружения φ по отношению к плоскости эмульсионного слоя. Чтобы выяснить зависимость ложного рассеяния от угла наклона следов частиц, эмульсионные слои облучались специально под различными углами [93, 96, 116, 117]. В работе [116] эмульсия НИКФИ-Р толщиной 400 мк облучалась протонами с энергией 9 Гэв под углами 0,5; 1,2; 2,1; 2,9; 5,6; 10°. Для ложного рассеяния, измеренного с помощью третьих и четвертых разностей координат, зависимости D_L от углов не наблюдалось. Слабая зависимость ложного рассеяния от углов подтверждена также в работе [117]. В работе [93] показано, что ложное рассеяние не зависит от φ до углов порядка 2°, а затем оно увеличивается с ростом углов.

Вспоминая, что дисторсия сильно зависит от угла φ , можно предположить, что в работах, где наблюдается

зависимость ложного рассеяния от угла наклона следов частиц, авторы не совсем корректно или вовсе не исключали дисторсию.

Для практических целей важно знать пределы изменения угла φ и длин ячеек, при которых возможны надежные измерения $\rho_{\text{лс}}$. По-видимому, такие значения $\rho_{\text{лс}}$ можно найти из условия $D_{ih}^2 \geq D_{il}^2 + D_{im}^2 + d^2$ с учетом того, что D_{il}^2 не зависит от φ , а $d \sim \varphi^2$ (рис. 20).

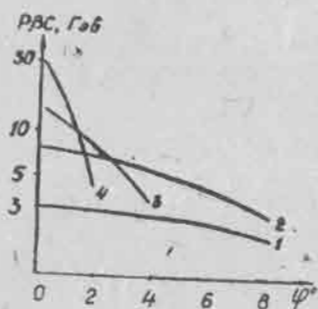


Рис. 20. Область надежно измеримых значений $\rho_{\text{лс}}$ в зависимости от угла φ для эмульсии Илфорд G-5 [96]: 1, 2, 3, 4 — ячейки 500, 1000, 2000 и 4000 мк соответственно.

Корреляционные свойства ложного рассеяния. Многократное рассеяние наиболее полно характеризуется корреляционной функцией вторых разностей координат $K_{\text{л}}(j) = \overline{D_{il} D_{(i+j)l}}$. Эта функция однозначно определяет свойства разностей координат более высокого порядка. Например, средний квадрат третьих разностей T_i^2 и средний квадрат четвертых разностей координат F_i^2 можно выразить в виде

$$\begin{aligned} T_i^2 &= 2K(0) - 2K(1), \\ F_i^2 &= 6K(0) - 8K(1) + 2K(2). \end{aligned} \quad (50.3)$$

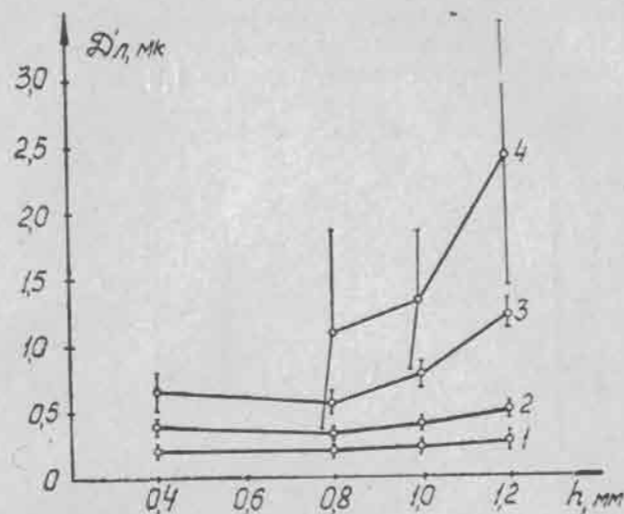


Рис. 21. Зависимость ложного рассеяния от толщины эмульсионного слоя h для различных длин ячеек: 1 — $t=500$ мк; 2 — $t=1000$ мк; 3 — $t=2000$ мк; 4 — $t=4000$ мк.

Параметры $\rho = \sqrt{\frac{T_i^2}{D_i^2}}$ и $q = \sqrt{\frac{F_i^2}{D_i^2}}$, используемые в

практических измерениях, могут служить простейшей мерой корреляции вторых разностей координат. Согласно (50.3),

$$\rho = \sqrt{2} \left(1 - \frac{K(1)}{K(0)} \right)^{1/2}, \quad q = \sqrt{2} \left(3 - \frac{4K(1)}{K(0)} + \frac{K(2)}{K(0)} \right)^{1/2}. \quad (51.3)$$

Зная природу того или иного типа рассеяния, а соответственно и его корреляционную функцию, можно легко определить ρ или q . Для многократного кулоновского рассеяния $\rho_k = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $q_k = 2$, а для шумов, не зависящих от длины ячейки, $\rho_{\text{ш}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $q_{\text{ш}} = \sqrt{\frac{35}{3}}$. Так как природа ложного рассеяния окончательно не выяснена, величины $\rho_{\text{л}}$, $q_{\text{л}}$ и $K_{\text{л}}(j)$ обычно находятся экспериментально. В работах [60, 61, 75, 120, 121] показано, что для измеренных вторых и третьих разностей величина ρ на ма-

рых ячейках, когда кулоновское рассеяние мало, порядка 1,8 ($\approx \rho_m$), а на больших ячейках, когда вклад кулоновского рассеяния велик, порядка 1,2 ($\approx \rho_k$) (рис. 22).

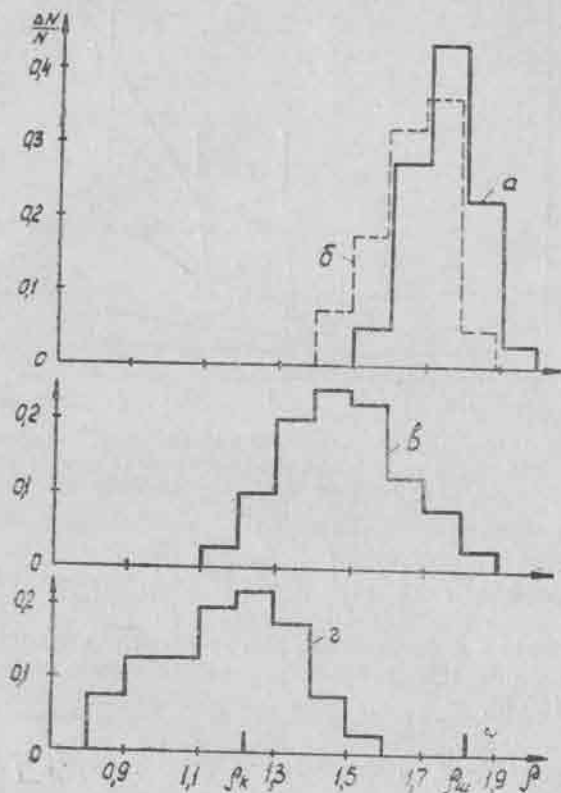


Рис. 22. Распределения ρ для протонов с энергией 9 Гэв, полученные на ячейках: а — $t=500$ мк; б — $t=1000$ мк; в — $t=2000$ мк; г — $t=4000$ мк [75].

В работе [75] на следах протонов с энергией 9 Гэв в эмульсии НИКФИ-Р оценено значение ρ_d , которое оказалось равным $1,75 \pm 0,02$ при $t=500$ мк, $1,76 \pm 0,05$ при $t=1000$ мк и $1,81 \pm 0,09$ при $t=2000$ мк. В работе [110] показано, что ρ_d , измеренное на следах π^- -мезонов с энергией 14,5 Гэв в эмульсии Ильфторд G-5, колеблется от $1,62 \pm 0,05$ до $1,75 \pm 0,09$ при $t=1000$ —

— 4000 мк. Значение ρ_d , определенное на следах частиц с энергией 8; 17 и 24 Гэв, такого же порядка [60, 61, 115] (рис. 23). Согласно приведенным данным, величина ρ_d практически не зависит от длины ячейки и энергии частиц, на следах которых она определяется.

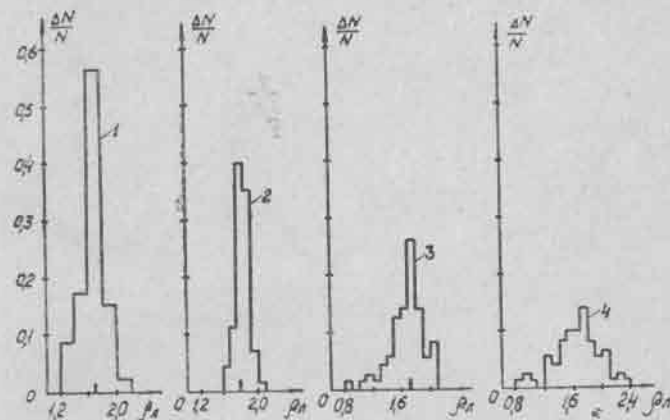


Рис. 23. Распределения ρ_d , найденные на следах протонов с энергией 24 Гэв на ячейке $t=200$ мк (1) [61] и на следах π^- -мезонов с энергией 17 Гэв на ячейках: $t=1000$ мк (2) $t=2000$ мк (3), $t=4000$ мк (4).

Отдельные значения корреляционной функции $K_d(j)$ можно найти с помощью перекрывающихся значений вторых разностей координат, измеренных на следах частиц с известной энергией, по формуле

$$K_d(j) = \overline{^n D_i \ ^n D_{i+j}} - [\overline{^n D_{i_h} \ ^n D_{(i+j)_h}} + \overline{^n D_{i_m} \ ^n D_{(i+j)_m}} + d^2]. \quad (52.3)$$

Усредненные по множеству следов корреляционные функции измеренных вторых разностей (без дисторсий) и вторых разностей ложного рассеяния рассчитаны по формуле (52.3) для следов протонов с энергией 10 Гэв в эмульсионных слоях НИКФИ-БР-1 (рис. 24). Измерения выполнены на полуавтоматическом микроскопе МИРЭ-2 на ячейке $t=100$ мк (с пересчетом на ячейки $t=400, 800, 1200$ и 1600 мк). На корреляционных функциях отчетливо видны выбросы при $j=0$ и $j=n$, вызван-

ные шумами; затухающая периодичность за счет ложного рассеяния и рост кулоновского рассеяния (на рисунке заштриховано).

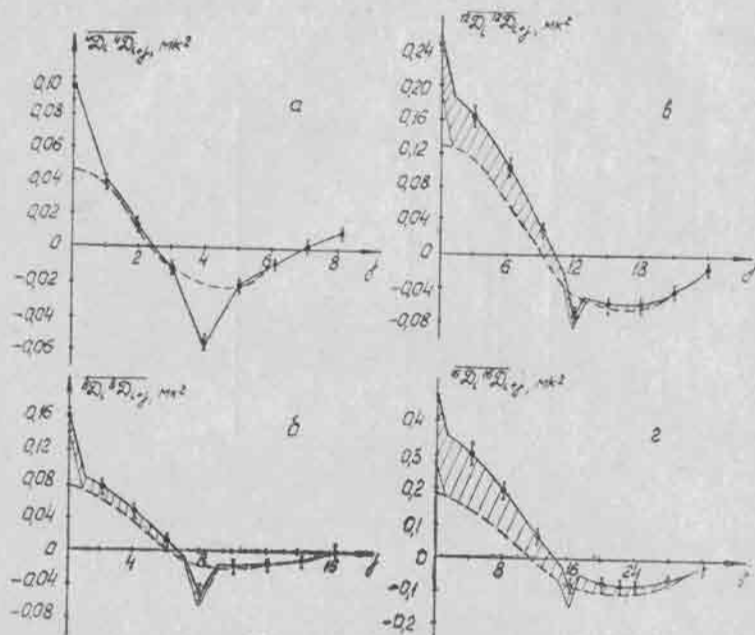


Рис. 24. Корреляционные функции измеренных вторых разностей (сплошная линия) и ложного рассеяния (штриховая): а — $t = 400$ мк; б — $t = 800$ мк; в — $t = 1200$ мк; г — $t = 1600$ мк.

Период корреляционной функции ложного рассеяния, определенный на одной и той же ячейке, как показано в работе [78], имеет довольно узкое распределение со стандартным отклонением $\sigma \approx 7\%$. Этот период слабо зависит от типа эмульсии.

Форма корреляционной функции ложного рассеяния также незначительно изменяется с длиной ячейки, что и приводит к независимости ρ_{λ} от t , отмеченной выше. В общем случае корреляционную функцию ложного рассеяния можно представить в виде

$$K_{\lambda}(j) = \overline{D_{i\lambda}^2} \exp(-\alpha j^{\gamma}) \cos \beta j, \quad (53.3)$$

где α , β и γ — постоянные величины. Анализ экспериментальных значений $K_{\lambda}(j)$ показал, что величина $\alpha \approx 0,16 \div 0,8$, $\beta \approx 1,2 \div 3,2$ и $\gamma \approx 2$.

Спектральная функция ложного рассеяния, согласно (86.2), будет

$$S_{\lambda}(\omega) = \frac{\overline{D_{i\lambda}^2}}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha j^{\gamma}) \cos \beta j \cos \omega j dj. \quad (54.3)$$

При $\gamma = 2$

$$S_{\lambda}(\omega) = \frac{\overline{D_{i\lambda}^2}}{4 \sqrt{\pi \alpha}} \left[\exp\left(-\frac{(\omega - \beta)^2}{4\alpha}\right) + \exp\left(-\frac{(\omega + \beta)^2}{4\alpha}\right) \right]. \quad (55.3)$$

В спектре частот наблюдается резонансный пик при $\omega = \beta$ (рис. 25), объясняющийся волнообразным характером следов, подверженных ложному рассеянию. Аналогичный результат отмечен в работах [112, 115].

О природе ложного рассеяния. Существует несколько гипотез, авторы которых пытались объяснить причины возникновения ложного рассеяния [77, 109, 114, 122]. Яноши предполагает [77, 123], что ложное рассеяние — искажения следов, возникшие после экспонирования эмульсии. Зависимость среднего квадрата второй разности $\overline{D_{i\lambda}^2}$ от длины ячейки t

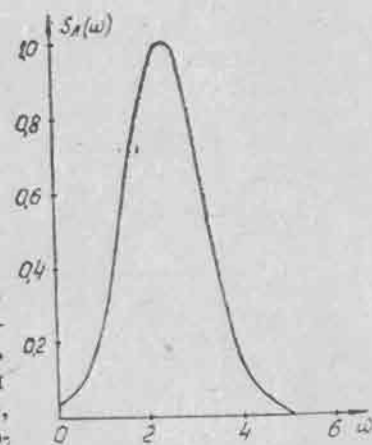


Рис. 25. Спектральная функция ложного рассеяния: $\alpha = 0,35$; $\beta = 2,4$; $\gamma = 2$.

Зависимость среднего квадрата второй разности $\overline{D_{i\lambda}^2}$ от длины ячейки t

$$\overline{D_{i\lambda}^2} \sim t^{\nu}, \quad (56.3)$$

где $1 < \nu < 3$, объясняется суммарным влиянием двух различных типов искажения следов:

1. Эмульсия может деформироваться так, что некоторые малые участки ее поворачиваются один относительно другого на некоторый случайный угол. Если эмульсия при этом не разрушается, то этот процесс дает такой же эффект, как и многократное кулоновское рассеяние, причем $(D_{ix}^2)_1 \sim t^3$.

2. В некоторых местах эмульсия разрывается и возникают сдвиги в произвольных направлениях. Такие искажения относятся к типу случайных смещений, причем $(D_{ix}^2)_2 \sim t$. Следует отметить, что корреляционная функция $K_n(j)$, рассчитанная согласно этой модели, существенно отличается от экспериментальной при $j > 1$ (рис. 26).

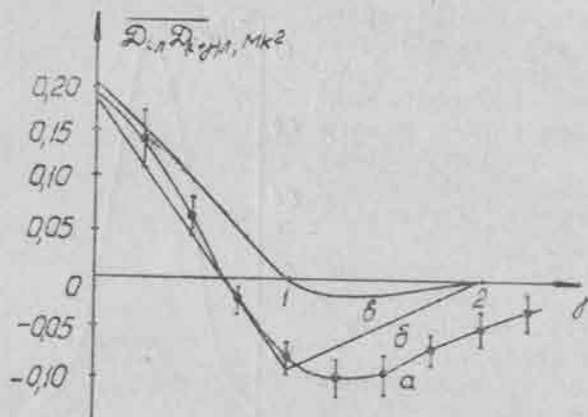


Рис. 26. Корреляционные функции ложного рассеяния: а — измеренная на следах протонов с энергией 10 Гэв в эмульсии НИКФИ-БР-1 ($t = 1600$ мк); б — рассчитанная в предположении $D_{ix}^2 \sim t$; в — $D_{ix}^2 = at + at^3$ [77] (a и v подбираются из условия наилучшего согласия с экспериментом).

В работе [114] установлена зависимость среднеарифметического значения второй разности $|D_{ix}|$, измеренной в вертикальной плоскости, от среднеарифметического значения $|D_{iy}|$, измеренного в плоскости эмульсионного слоя,

$$|D_{ix}| \approx 1 + 3,7 |D_{iy}|. \quad (57.3)$$

На основании этого высказывается предположение, что слои эмульсии при экспонировании некоторым образом искривлены (следы частиц не искажены), а при наклейке обработанных слоев на стекло они спрямляются, вызывая искажения следов частиц в вертикальной плоскости. Согласно (57.3), возникают искажения и в горизонтальной плоскости. Есть указания, что величина ложного рассеяния существенно зависит и от способа наклейки слоев на стекло [124, 125].

В работе [122] автор пытается объяснить природу ложного рассеяния квантовомеханическими эффектами, связанными с рассеянием частиц в неоднородной среде. Однако эта гипотеза не может объяснить некоторые экспериментальные факты, в частности увеличение искажений с течением времени, прошедшего после обработки слоев [99]. Ни одна из этих гипотез не в состоянии полностью описать все свойства ложного рассеяния, которые известны в настоящее время. Несмотря на то, что вопрос о происхождении ложного рассеяния открыт, экспериментаторы, используя установленные факты, успешно исключают влияние этих искажений на результаты измерений.

Глава IV

МЕТОДЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ ЛОЖНОГО И ОЦЕНКИ КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ

Методы оценки кулоновского рассеяния основаны на использовании свойств ложного рассеяния. Надежность этих методов определяется главным образом достоверностью и постоянством некоторых параметров, характеризующих ложное рассеяние. Так как ложное рассеяние не поддается строгому математическому описанию, развитие методов его исключения идет в большинстве случаев эмпирическим путем.

§ 1. Статистическое вычитание ложного рассеяния

Если шумы и дисторсии исключены из измеренных величин вторых разностей D_i , кулоновское рассеяние можно оценить по формуле

$$\overline{D_{ik}^2} = \overline{D_i^2} - \overline{D_{i\pi}^2}, \quad (1.4)$$

где $\overline{D_{i\pi}^2}$ — средний квадрат второй разности ложного рассеяния, измеренный на следах частиц с известной энергией. Предполагается, что это значение соответствует ложному рассеянию в той области эмульсионного слоя, где находится измеряемый след неизвестной частицы. Если среднеарифметическая величина второй разности $\overline{D_{ik}}$ находится по формуле (1.4), то необходимо, чтобы распределения D_{ik} и $D_{i\pi}$ были одинаковыми. Как показывает опыт, если $\overline{D_{ik}} \approx \overline{D_{i\pi}}$, формула (1.4)

дает неудовлетворительную точность в оценке D_k [120]. При измерении рассеяния на ячейках, когда $\overline{D_{ik}} \wedge > 2 \overline{D_{i\pi}}$, с помощью этого метода можно лишь грубо оценить истинное кулоновское рассеяние. При $\overline{D_{ik}} \wedge > 4 \overline{D_{i\pi}}$ ошибка в оценке импульса по D_k мала и практически определяется числом измеренных значений вторых разностей (80.2). Существенный недостаток метода — его низкая надежность из-за статистического разброса $\overline{D_i}$ и $\overline{D_{i\pi}}$. Этот метод наиболее прост и может быть использован, когда $\overline{D_{ik}} \gg \overline{D_{i\pi}}$.

§ 2. Метод кратных ячеек

В большинстве случаев среднеарифметическое значение вторых разностей ложного рассеяния зависит от длины ячейки как at^x , по крайней мере для $t < 1$ см. На основании этого средний квадрат измеренной второй разности можно записать как

$$\overline{D_i^2} = b^2 t^3 + a^2 t^{2x}, \quad (2.4)$$

где $b = \frac{K_0'}{573 p^{\text{н.с.}}}$. В уравнение (2.4) входят три неизвестные величины: a , b и x . Чтобы найти их, необходимо иметь систему из трех линейно независимых уравнений, соответствующих трем различным ячейкам. Для длин ячеек, относящихся как 1:2:3, величина D_k в явном виде не находится [126]. Если взять кратные ячейки, длины которых относятся как 1:2:4, то [98]

$$\begin{cases} \overline{D_i(t)^2} = b^2 t^3 + a^2 t^{2x}, \\ \overline{D_i(2t)^2} = 8b^2 t^3 + a^2 \cdot 2^{2x} \cdot t^{2x}, \\ \overline{D_i(4t)^2} = 64b^2 t^3 + a^2 \cdot 2^{4x} \cdot t^{2x}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Решив эти уравнения, получим

$$D_k = \left[\frac{\overline{D_i(t)^2} \cdot \overline{D_i(4t)^2} - \overline{D_i(2t)^2}^2}{64\overline{D_i(t)^2} + \overline{D_i(4t)^2} - 16\overline{D_i(2t)^2}} \right]^{1/4}, \quad (4.4)$$

где $D_i(t)$, $D_i(2t)$ и $D_i(4t)$ — исправленные на шум и дисторсии измеренные вторые разности на ячейках t , $2t$ и $4t$.

Формула (4.4) дает удовлетворительную точность при условии, когда на ячейке t величина $D_k < D_n$, и $2t - D_k \approx D_n$ и на $4t - D_k > D_n$. Такому условию практически удовлетворяет критерий

$$\frac{|D_i(2t)|}{|D_i(t)|} < \frac{|D_i(4t)|}{|D_i(2t)|} \text{ и } 2 < \frac{|D_i(4t)|}{|D_i(2t)|} < 2^{3/4}.$$

Ячейка t выбирается в зависимости от вклада шумов в измеренную величину D_i . Приемлемым может быть условие $|D_i(t)| > 2D_{ш}$. В работе [61] уравнение (2.4) записывается в виде

$$\overline{D_i^2} = b^2 t^3 + (at + c)^2, \quad (5.4)$$

т. е. предполагается, что ложное рассеяние изменяется с длиной ячейки по закону $\overline{D_{i,n}^2} \approx at + c$. Записав на основании (5.4) систему трех уравнений для кратных ячеек аналогично системе (3.4) и решив ее относительно D_k , можно получить

$$D_k = \left[\frac{D_i(4t)^2 - 6D_i(2t)^2 + 8D_i(t)^2 - 3c^2}{24} \right]. \quad (6.4)$$

Ячейки t , $2t$ и $4t$ выбираются такими, чтобы выполнялось условие

$$\overline{D_i(4t)^2} + 8\overline{D_i(t)^2} > 6\overline{D_i(2t)^2} + 3c^2.$$

При выводе формул (4.4) и (6.4) предполагалось, что постоянная рассеяния K не изменяется с длиной ячейки. Зависимость постоянной рассеяния K от t можно учесть, соответственно изменив численные коэффициенты в формулах (4.4) и (6.4). Формулы (4.4) и

(6.4) имеют то преимущество перед формулой (1.4), что с их помощью удается исключить ложное рассеяние индивидуально на каждом следе. Недостаток метода в том, что в зависимости $D_n = at^x$ или в частном случае в зависимости $D_n = at + c$ ($x=1$) величины a и x могут изменяться с длиной ячейки, поэтому метод кратных ячеек имеет ограниченное применение. Как и предыдущий, этот метод имеет низкую надежность.

§ 3. Оценка кулоновского рассеяния с помощью параметра ρ

Этот метод основан на предположении о постоянстве величины ρ_n [75, 121]. Для кулоновского рассеяния и шумов, как уже отмечалось, параметры ρ постоянны и равны соответственно $\rho_k = \sqrt{\frac{8}{3}}$, $\rho_{ш} = \sqrt{\frac{10}{3}}$. После исключения дисторсий и шумов для вторых разностей можно записать:

$$\overline{D_i^2} = \overline{D_{ik}^2} + \overline{D_{in}^2},$$

$$\overline{T_i^2} = \rho^2 \overline{D_i^2} = \rho_k^2 \overline{D_{ik}^2} + \rho_n^2 \overline{D_{in}^2},$$

откуда

$$D_k = \sqrt{\overline{D_i^2}} \left(\frac{\rho_n^2 - \rho^2}{\rho_n^2 - \rho_k^2} \right)^{1/2}. \quad (7.4)$$

Оценка D_k по формуле (7.4) отличается от оценки по формуле (1.4) тем, что в одном случае используется среднее значение $\overline{D_{i,n}^2}$, которое изменяется в широких пределах в зависимости от t , типа эмульсии и геометрического положения следов; в другом случае — значение ρ_n , которое, как показала экспериментальная проверка, имеет узкое распределение и почти не зависит от t . Ошибка в определении D_k по формуле (7.4) может быть найдена следующим образом [120]:

$$\frac{\delta D_k}{D_k} = \frac{C}{\sqrt{N}}, \quad C = C_1 \left[1 - 2r \left(\frac{C_2}{C_1} \right) \frac{\rho^2}{\rho_n^2 - \rho^2} \right] +$$

$$+ \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \frac{\rho^4}{(\rho^2 - \rho_1^2)^2} \Big]^{1/2}, \quad (8.4)$$

где N — число основных измерений на отдельном следе; $C_1 \approx 0,81$ и $C_2 \approx 0,50$ (определены экспериментально из распределений $|D_i|$ и ρ_i для отдельных следов); r — коэффициент корреляции между $|D_i|$ и ρ_i , равный.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} (\overline{D}_i - \overline{D})(\overline{\rho}_i - \overline{\rho})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu} (\overline{D}_i - \overline{D})^2 \cdot \sum_{i=1}^{\nu} (\overline{\rho}_i - \overline{\rho})^2}}. \quad (9.4)$$

Здесь ν — число следов; \overline{D}_i — среднеарифметическое значение второй разности на i -том следе; \overline{D} — среднеарифметическое значение, найденное по всем следам (аналогично для ρ_i и ρ). Численное значение коэффициента r колеблется примерно от $-0,4$ до $+0,2$ и определяется из эмпирического соотношения

$$r = 14,3 \rho^{0,1} - 15. \quad (10.4)$$

Если преобладает кулоновское рассеяние (ρ мало), коэффициент корреляции r имеет отрицательную величину, в случае преобладания ложного рассеяния (ρ велико) — положительную величину.

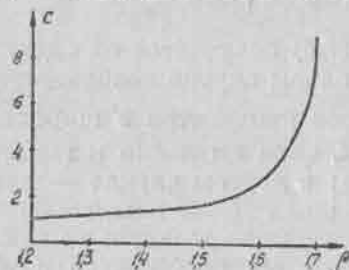


Рис. 27. Зависимость коэффициента C от ρ .

Зависимость величины C от ρ определена по экспериментальным значениям C_1 , C_2 и r , найденным по измерениям многократного рассеяния на следах протонов с энергией 9 Гэв в эмульсии НИКФИ-Р [120] (рис. 27). При значении $\rho > 1,5$ величина C и соответственно ошибка в оценке

D_k велики и существенно зависят от ρ . Поэтому на практике необходимо выбирать ячейку такой, чтобы вы-

полнялось соотношение $\rho < 1,5$, что соответствует $\overline{D}_{ik}^2 > \overline{D}_{i\pi}^2$.

В ряде работ [61, 110, 120, 124] экспериментально проверены различные методы исключения ложного рассеяния и оценена их эффективность с помощью измерения многократного рассеяния на следах частиц с известной энергией. Показано, например, что в случае большого вклада ложного рассеяния $D_{\pi} \approx D_k$ формула (7.4) дает лучший результат по сравнению с формулами (1.4), (4.4) и (6.4).

При использовании формулы (7.4) необходимо обращать особое внимание на исключение дисторсий, которые приводят к уменьшению ρ . Значение этой величины может быть близким к значению ρ_k , соответствующему кулоновскому рассеянию, хотя вклад последнего в измеренную вторую разность может быть незначителен.

В случае очень больших длин ячеек, когда наблюдается некоторое возрастание ρ_k [120], пользуясь формулой (7.4), можно получить неверный результат. Кроме того, на таких ячейках ложное рассеяние еще окончательно не изучено и неизвестно, чему равно ρ_{π} . Этот метод прост, достаточно надежен и распространен.

§ 4. Метод максимального правдоподобия

Чтобы определить D_k с помощью этого метода, необходимо знать элементы $M_{\nu\mu} = \overline{D}_{\nu} \cdot \overline{D}_{\mu}$, образующие матрицу

$$M = \alpha^{(1)} A^{(1)} + \alpha^{(2)} A^{(2)} + \alpha^{(3)} A^{(3)}, \quad (11.4)$$

где матрицы $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, описывающие многократное кулоновское рассеяние и шумы, имеют следующие элементы:

$$A_{\nu\mu}^{(1)} = \begin{cases} 4, & |\nu - \mu| = 0; \\ 1, & |\nu - \mu| = 1; \\ 0, & |\nu - \mu| > 1. \end{cases} \quad A_{\nu\mu}^{(2)} = \begin{cases} 6, & |\nu - \mu| = 0; \\ -4, & |\nu - \mu| = 1; \\ 1, & |\nu - \mu| = 2; \\ 0, & |\nu - \mu| > 2. \end{cases} \quad (12.4)$$

Согласно [77, 123, 127, 128], вторые разности ложного рассеяния обусловлены, во-первых, случайными смещениями отдельных частей эмульсии, для которых

$$A_{1\nu\mu}^{(3)} = A_{\nu\mu}^{(3)} = \begin{cases} 2, & |\nu - \mu| = 0, \\ -1, & |\nu - \mu| = 1; \\ 0, & |\nu - \mu| > 1, \end{cases} \quad (13.4)$$

и, во-вторых, поворотом отдельных частей эмульсии относительно друг друга на некоторый случайный угол. Для этой части ложного рассеяния матрица $A_2^{(3)}$ совпадает с $A^{(1)}$.

Таким образом, $\alpha^{(1)} = \alpha_k^{(1)} + \alpha_n^{(1)}$, где $\alpha_k^{(1)}$ характеризует истинное кулоновское рассеяние, а $\alpha_n^{(1)}$ — часть ложного рассеяния, не отличимую ни по каким признакам от истинного кулоновского рассеяния. Как уже отмечалось, корреляционная функция ложного рассеяния для этой модели несколько отличается от экспериментально полученной функции, поэтому метод оценки $\alpha^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, 2, 3$, разработанный Яноши и другими, в известной степени приближенный.

Под $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ и $\alpha^{(3)}$ подразумеваются величины

$$\begin{aligned} \alpha_h^{(1)} &= \frac{1}{4} \overline{D_{ih}^2}; \quad \alpha_n^{(1)} = \frac{1}{4} \overline{D_{i,nk}^2}; \quad \alpha^{(2)} = \frac{1}{6} \overline{D_{i,nh}^2}; \quad \alpha^{(3)} = \\ &= \frac{1}{2} \overline{D_{i,n}^2}, \end{aligned} \quad (14.4)$$

где $D_{i,nh}$ — кулоновская часть ложного рассеяния; $D_{i,n}$ — истинно ложное рассеяние. Величину $\alpha_n^{(1)}$ можно оценить только с помощью следов частиц с известной энергией. Полагая, что это всегда можно сделать, найдем наилучшие оценки $\alpha^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, 2, 3$.

Совместную функцию распределения вторых разностей можно представить в виде [129]

$$f(D') = (2\pi)^{-N/2} (\det M)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} D' M^{-1} D\right), \quad (15.4)$$

где D — одностолбцовая матрица $\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_N \end{pmatrix}$, а D' — матрица (D_1, D_2, \dots, D_N) .

Согласно принципу максимального правдоподобия [77, 130], наилучшими оценками $\alpha^{(\sigma)}$ будут величины $\bar{\alpha}^{(\sigma)}$, полученные в результате решения следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \ln f(D')}{\partial \alpha^{(\sigma)}} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{\alpha}^{(\sigma)} = \alpha^{(\sigma)}, \quad \sigma = 1, 2, 3. \quad (16.4)$$

Элементы матрицы ошибок величин $\bar{\alpha}^{(\sigma)}$ обозначим как

$$Q_{\sigma\tau} = \overline{\delta \bar{\alpha}^{(\sigma)} \delta \bar{\alpha}^{(\tau)}}, \quad (17.4)$$

причем обратная ей матрица $Q^{-1} = [Q_{\sigma\tau}^*]$, где

$$Q_{\sigma\tau}^* = - \left(\frac{\partial^2 \ln f(D')}{\partial \alpha^{(\sigma)} \partial \alpha^{(\tau)}} \right). \quad (18.4)$$

Можно показать [77, 123, 131], что

$$Q_{\sigma\tau}^* = \frac{1}{2} \text{Tr} (M^{-1} A^{(\sigma)} M^{-1} A^{(\tau)}), \quad (19.4)$$

а

$$\begin{aligned} \alpha^{(\sigma)} &= \frac{1}{2} D' \left(\sum_{\lambda=1}^3 Q_{\sigma\lambda} M^{-1} A^{(\lambda)} M^{-1} \right) D, \quad \alpha^{(\sigma)} = \bar{\alpha}^{(\sigma)}, \\ \sigma &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (20.4)$$

Символ Tr обозначает след матрицы, или сумму элементов, расположенных на ее главной диагонали. Формулы (19.4) и (20.4) слишком сложны для практического определения $\bar{\alpha}^{(\sigma)}$ и $Q_{\sigma\tau}$, особенно при большом числе измеренных вторых разностей D_i . Однако оценки ошибок, получаемые с помощью формулы (19.4), могут служить критерием точности того или иного приближенного метода, так как в большинстве случаев метод максимального правдоподобия дает наименьшие ошибки

ки. Поэтому имеет смысл получить асимптотические (справедливые при большом N) выражения для $Q_{\sigma\tau}$. Вводя новые переменные

$$x = \frac{a^{(2)}}{a^{(1)}}, y = \frac{a^{(3)}}{a^{(1)}} \quad (21.4)$$

и функции

$$q_{\sigma\tau}^*(x, y) = \frac{2a^{(1)2}}{N} Q_{\sigma\tau}^*$$

вместо (11.4) получим

$$P = \frac{1}{a^{(1)}} M = A^{(1)} + xA^{(2)} + yA^{(3)} \quad (22.4)$$

и вместо (19.4)

$$q_{\sigma\tau}^*(x, y) = \frac{1}{N} \text{Tr}(P^{-1} A^{(\sigma)} P^{-1} A^{(\tau)}), \quad \sigma, \tau = 1, 2, 3. \quad (23.4)$$

Матрицы $A^{(\sigma)}$ можно выразить через вспомогательные простейшие матрицы H и E с элементами

$$H_{\nu\mu} = \delta_{1, |\nu-\mu|}, \quad E_{\nu\mu} = \delta_{\mu\nu}, \quad \nu, \mu = 1, 2, 3, \dots, N \quad (24.4)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= H + 4E; \\ A^{(2)} &= H^2 - 4H + 4E + H_0; \\ A^{(3)} &= -H + 2E. \end{aligned} \quad (25.4)$$

Здесь H_0 — матрица, имеющая, как легко проверить, только два не равных нулю элемента в левом верхнем и правом нижнем углах. Пренебрегая H_0 , получим

$$P = xH^2 + (1 - 4x - y)H + (4 + 4x + 2y)E. \quad (26.4)$$

Очевидно, что

$$P^{-1} A^{(\sigma)} P^{-1} A^{(\tau)} = f_{\sigma\tau}(H) \quad (27.4)$$

— рациональная функция матрицы H .

Известно, что собственные значения и след такой функции $f_{\sigma\tau}(H)$ равны $f(\eta_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$ и $\sum_{k=1}^N f(\eta_k)$ соответственно, где η_k — собственные значения матрицы H .

Очевидно, что

$$\eta_k = 2 \cos \frac{k\pi}{N+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (28.4)$$

Используя (23.4), (27.4) и (28.4), получим

$$q_{\sigma\tau}^*(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_{\sigma\tau} \left(2 \cos \frac{k\pi}{N+1} \right). \quad (29.4)$$

При большом N суммирование в (29.4) можно заменить интегрированием и тогда

$$q_{\sigma\tau}^*(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_{\sigma\tau}(2 \cos z) dz. \quad (30.4)$$

При $\sigma = \tau = 1$

$$q_{11}^*(x, y) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{2 + \cos z}{2 + 2x + y + (1 - 4x - y) \cos z + 2x \cos^2 z} \right]^2 dz. \quad (31.4)$$

Вычисляя интегралы (30.4) и элементы матрицы $[q_{\sigma\tau}] = [q_{\sigma\tau}^*]^{-1}$, получим

$$Q_{\sigma\tau} = \frac{2a^{(1)2}}{N} q_{\sigma\tau}(x, y), \quad \sigma, \tau = 1, 2, 3. \quad (32.4)$$

Формула для функции $q_{11}(x, y)$, характеризующей ошибку в определении величины $\alpha^{(1)}$, будет

$$q_{11}(x, y) = 1 + \frac{2}{3} \sqrt{6(y + 2 + \sqrt{24x + 6y + 3})}. \quad (33.4)$$

В силу громоздкости формулы (20.4) для величин $\bar{\alpha}^{(\sigma)}$ предложена следующая квадратичная оценка [123]:

$$\bar{\alpha}^{(\sigma)} = \mathbf{D}' \mathbf{V}^{(\sigma)} \mathbf{D}, \quad \sigma = 1, 2, 3. \quad (34.4)$$

Эта оценка даст правильное значение для $\bar{\alpha}^{(\sigma)}$ при условии

$$\text{Tr}(\mathbf{V}^{(\sigma)} \mathbf{A}^{(\tau)}) = \delta_{\sigma\tau}, \quad \sigma, \tau = 1, 2, 3. \quad (35.4)$$

Если выразить неопределенную пока матрицу $\mathbf{V}^{(\sigma)}$ через $l+1$ соответствующим образом выбранных линейно независимых матриц $\mathbf{G}^{(\lambda)}$ по формуле

$$\mathbf{V}^{(\sigma)} = \sum_{\lambda=0}^l b_{\lambda\sigma} \mathbf{G}^{(\lambda)}, \quad (36.4)$$

а затем найти $b_{\lambda\sigma}$, так, чтобы выполнялось условие (35.4) и чтобы $Q_{\sigma\tau}$ было минимальным, то

$$\mathbf{B} = [b_{\lambda\sigma}] = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T} (\mathbf{T}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T})^{-1}; \quad (37.4)$$

$$\mathbf{Q} = [Q_{\sigma\tau}] = 2\alpha^{(1)2} (\mathbf{T}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T})^{-1}, \quad (38.4)$$

где элементы матриц \mathbf{T} и \mathbf{S} равны

$$T_{\lambda\tau} = \text{Tr}(\mathbf{G}^{(\lambda)} \mathbf{A}^{(\tau)}), \quad \lambda = 0, 1, \dots, l; \quad \tau = 1, 2, 3 \quad (39.4)$$

$$S_{\lambda\mu} = \text{Tr}(\mathbf{G}^{(\lambda)} \mathbf{P} \mathbf{G}^{(\mu)} \mathbf{P}), \quad \lambda, \mu = 0, 1, \dots, l. \quad (40.4)$$

В работе [123] матрицы $\mathbf{G}^{(\lambda)}$ выбраны так, чтобы можно было использовать суммы квадратов вторых разностей $D_i^{(\lambda)}$ для перекрывающихся ячеек

$$D_i^{(\lambda)} = y_{i+2^\lambda} - 2y_i + y_{i-2^\lambda}, \quad i = 2^\lambda, 2^\lambda + 1, \dots, N - 2^\lambda + 1. \quad (41.4)$$

Очевидно, что степень перекрывания n (§ 4, гл. II) равна 2^λ . Если вектор $\bar{D}^{(\lambda)}$, имеющий $N + 2 - 2^{\lambda+1}$ компонент, выразить через вектор $\bar{D}^{(0)}$, имеющий N компонент, с помощью матрицы $\mathbf{K}^{(\lambda)}$, которая имеет $N + 2 - 2^{\lambda+1}$ строк, N столбцов и элементы

$$K_{\nu\mu}^{(\lambda)} = \begin{cases} 2^\lambda - |\nu - \mu| & \text{при } 2^\lambda \geq |\nu - \mu| \\ 0 & \text{при } 2^\lambda < |\nu - \mu| \end{cases}$$

$$\nu = 2^\lambda, 2^\lambda + 1, \dots, N - 2^\lambda + 1, \quad \mu = 1, 2, \dots, N,$$

то

$$\mathbf{G}^{(\lambda)} = \mathbf{K}^{(\lambda)} \mathbf{K}^{(\lambda)}.$$

Если $N \gg 2^\lambda$, то

$$\mathbf{G}^{(0)} = \mathbf{E},$$

$$\mathbf{G}^{(1)} = (\mathbf{H} + 2\mathbf{E})^2,$$

$$\mathbf{G}^{(2)} = (\mathbf{H}^3 + 2\mathbf{H}^2)^2, \quad (42.4)$$

$$\mathbf{G}^{(3)} = (\mathbf{H}^7 + 2\mathbf{H}^6 - 4\mathbf{H}^5 - 8\mathbf{H}^4 + 4\mathbf{H}^3 + 8\mathbf{H}^2)^2.$$

Используя (25.4), (26.4), (39.4), (40.4), можно без труда определить \mathbf{T} и \mathbf{S} . После этого $\bar{\alpha}^{(\sigma)}$ вычисляется по формуле (34.4) и ошибка в величине $\bar{\alpha}^{(\sigma)}$ — по формуле (38.4). В случае, если используются только три матрицы $\mathbf{G}^{(\lambda)}$,

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}'^{-1} \quad (43.4)$$

и

$$\mathbf{Q} = 2\alpha^{(1)2} (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{T}'^{-1}). \quad (44.4)$$

Приведем окончательные выражения для $\bar{\alpha}^{(\sigma)}$ и $Q_{\sigma\tau}$, выбирая следующие комбинации матриц $\mathbf{G}^{(\lambda)}$:

$$1) (012) = (\mathbf{G}^{(0)}, \mathbf{G}^{(1)}, \mathbf{G}^{(2)}),$$

$$2) (013) = (\mathbf{G}^{(0)}, \mathbf{G}^{(1)}, \mathbf{G}^{(3)}),$$

$$3) (023) = (\mathbf{G}^{(0)}, \mathbf{G}^{(2)}, \mathbf{G}^{(3)}).$$

Обозначая

$$\tilde{D}^{(\lambda)} = \frac{1}{N + 2 - 2^{\lambda+1}} \sum_{i=2^\lambda}^{N-2^\lambda+1} (D_i^{(\lambda)})^2 = \bar{n} \bar{D}_i^2, \quad (n = 2^\lambda), \quad (45.4)$$

имеем

(012):

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^{(1)} = \frac{1}{168} (2\tilde{D}^{(0)} - 3\tilde{D}^{(1)} + \tilde{D}^{(2)}), \\ \bar{\alpha}^{(2)} = \frac{1}{42} (16\tilde{D}^{(0)} - 10\tilde{D}^{(1)} + \tilde{D}^{(2)}), \\ \bar{\alpha}^{(3)} = \frac{1}{12} (-8\tilde{D}^{(0)} + 9\tilde{D}^{(1)} - \tilde{D}^{(2)}); \end{cases} \quad (46.4)$$

(013):

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^{(1)} = \frac{1}{1848} (6\tilde{D}^{(0)} - 7\tilde{D}^{(1)} + \tilde{D}^{(3)}), \\ \bar{\alpha}^{(2)} = \frac{1}{462} (160\tilde{D}^{(0)} - 84\tilde{D}^{(1)} + \tilde{D}^{(3)}), \\ \bar{\alpha}^{(3)} = \frac{1}{132} (-72\tilde{D}^{(0)} + 73\tilde{D}^{(1)} - \tilde{D}^{(3)}); \end{cases} \quad (47.4)$$

(023):

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^{(1)} = \frac{1}{4368} (4\tilde{D}^{(0)} - 7\tilde{D}^{(2)} + 3\tilde{D}^{(3)}), \\ \bar{\alpha}^{(2)} = \frac{1}{546} (128\tilde{D}^{(0)} - 42\tilde{D}^{(2)} + 5\tilde{D}^{(3)}), \\ \bar{\alpha}^{(3)} = \frac{1}{312} (-64\tilde{D}^{(0)} + 73\tilde{D}^{(2)} - 9\tilde{D}^{(3)}). \end{cases} \quad (48.4)$$

Относительную ошибку в определении D_k можно вычислить по формуле

$$\frac{\delta D_k}{D_k} = \frac{1}{\sqrt{2N}} [q_{\sigma\tau}^{(i,jk)}(x, y)]^{1/2}, \quad (49.4)$$

где $x = \frac{\bar{\alpha}^{(2)}}{\bar{\alpha}^{(1)}}$ и $y = \frac{\bar{\alpha}^{(3)}}{\bar{\alpha}^{(1)}}$.

Если рассмотреть графики функций $q_{11}^{(i,jk)}(x, y)$ при $y=0$, график функции $q_{11}^{(0123)}(x, y)$, характеризующий ошибку $\delta D_k/D_k$ при использовании всех четырех матриц $G^{(i)}$, и график функции $q_{11}(x, y)$, характеризующий ошибку $\delta D_k/D_k$ при вычислении по формуле (20.4)

(рис. 28), то видно, что наименьшую ошибку дает метод максимального правдоподобия (20.4), а квадратичные оценки (34.4) при различном наборе матриц $G^{(i)}$ в определенном интервале значений x имеют ошибки, не намного превышающие оптимальные.

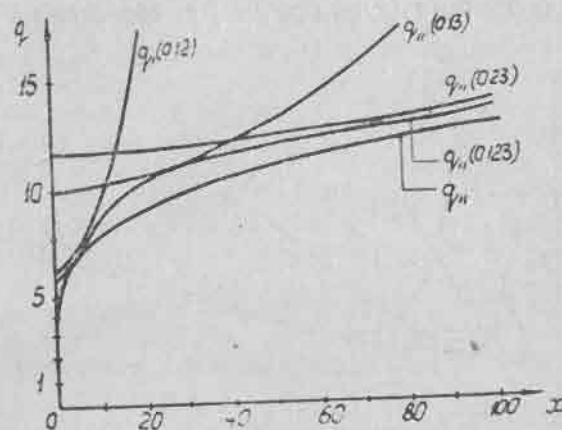


Рис. 28. Зависимость q от x (пояснения к кривым в тексте).

В работе [127] предложена простая оценка истинной величины многократного кулоновского рассеяния с помощью следа частицы с известной энергией, который расположен в том же слое фотоэмульсии, что и измеряемые следы. В предположении, что шум и ложное рассеяние для этих следов равны, получим

$$\bar{\sigma}_{k2}^{(1)} = \bar{\sigma}_{k1}^{(1)} + \frac{1}{4 \cdot 2^{3\lambda}} (\tilde{D}_2^{(1)} - \tilde{D}_1^{(2)}), \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots \quad (50.4)$$

Индекс 2 в этой формуле приписывается следу частицы с неизвестной энергией, а индекс 1 — следу частицы с известной энергией.

Используя квадратичные оценки (34.4) и (50.4), авторы работы [127] создали своеобразный способ нахождения оптимальной длины ячейки, на которой достигается минимальная ошибка определения D_k . Сущность этого метода состоит в следующем [128].

Минимальная ошибка оценки (50.4) равна

$$\frac{\overline{\delta\alpha_{k2}^{(1)}}}{\overline{\alpha_{k2}^{(1)}}} = \sqrt{\frac{2}{N}} [r_1(x_2, y_2)]^{1/2}. \quad (51.4)$$

График функции $r_1(x, y)$ при $y=0$ изображен на рисунке 29.

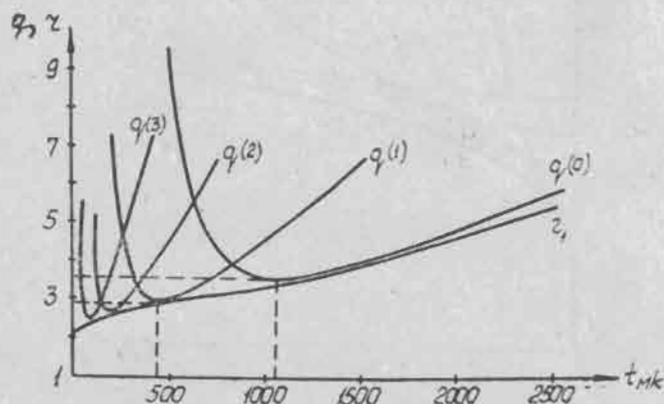


Рис. 29. Зависимость q и r от t (пояснения к кривым в тексте).

Если пренебречь вкладом $\overline{D}_1^{(x)}$ в ошибку величины $\overline{\alpha_{k2}^{(1)}}$, то

$$\frac{\overline{\delta\alpha_{k2}^{(1)}}}{\overline{\alpha_{k2}^{(1)}}} = \sqrt{\frac{2}{N}} [q^{(x)}(x_2, y_2)]^{1/2}, \quad (52.4)$$

где

$$q^{(0)}(x, y) \approx \frac{1}{8} [35x^2 + (20y + 16)x + 3y^2 + 6y + 9],$$

$$q^{(1)}(x, y) \approx \frac{1}{8 \cdot 2^6} [35x^2 + (40y + 128)x + 14y^2 + 140y + 1106],$$

(53.4)

$$q^{(2)}(x, y) \approx \frac{1}{8 \cdot 2^{12}} [35x^2 + (80y + 1024)x + 92y^2 + 4184y + 141380],$$

$$q^{(3)}(x, y) \approx \frac{1}{8 \cdot 2^{18}} [35x^2 + (160y + 8192)x + 696y^2 + 131760y + 18095496].$$

Так как $x \sim t^{-3}$, $y \sim t^{-2}$ и $N \sim t^{-1}$, то для каждого λ из (52.4) и (53.4) можно найти оптимальную ячейку t_0 , предварительно оценив x_2 и y_2 с помощью формул (46.4). Минимальная ошибка для этого значения t_0 будет лишь на несколько процентов больше минимально возможной ошибки. На практике неудобно дважды измерять ординаты следа: сначала на произвольной ячейке t , а после определения t_0 — на оптимальной ячейке. Поэтому можно измерения выполнить один раз, а отыскивать не t_0 , а λ_0 .

На рисунке 29 для конкретного примера, описанного в работе [127] (π^- -мезоны 3,5 Гэв, эмульсия НИКФИ-Р, длина обработанных следов — 72,3 см), построены зависимости $q^{(0)}$, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$ и r_1 от длины ячейки t . Видно, что в данном случае при измерении ординат следа на основной ячейке $t \approx 1000$ мкс минимальная ошибка достигается при $\lambda = 0$, на $t \approx 500$ мкс — $\lambda = 1$ и т. д.

По точности оценки D_k и по надежности метод максимального правдоподобия, по-видимому, не лучше более простого метода ρ (рис. 30).

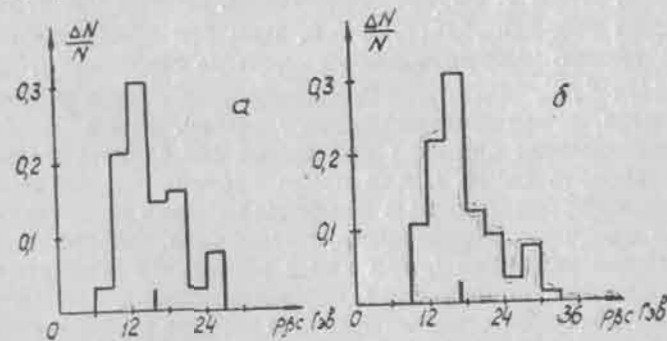


Рис. 30. Распределения значений $\rho_{вс}$, найденных на первичных следах π^- -мезонов с энергией 17 Гэв методами: а — (012) на ячейках $t=500, 1000$ и 2000 мкс; б — ρ на ячейке $t=2000$ мкс.

§ 5. Метод корреляционных моментов

Этот метод основан на том, что корреляционная функция ложного рассеяния может быть аппроксимирована выражением

$$\overline{D_{i\alpha} D_{(i+j)\alpha}} = \overline{D_{i\alpha}^2} \exp[-\alpha(a_j)] \cos(\beta a_j), \quad (54.4)$$

где α , β , γ — некоторые параметры. Используя (99.2), (101.2) и (54.4), составим систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases} \overline{D_{i\alpha} D_{(i+\alpha)\alpha}} = \frac{235}{256} \overline{D_{i\alpha}^2} + \overline{D_{i\alpha}^2} \exp(-\alpha) \cos \beta, \\ \overline{D_{i\alpha} D_{(i+2\alpha)\alpha}} = \frac{184}{256} \overline{D_{i\alpha}^2} + \overline{D_{i\alpha}^2} \exp(-\alpha \cdot 2) \cos 2\beta, \\ \overline{D_{i\alpha} D_{(i+3\alpha)\alpha}} = \frac{121}{256} \overline{D_{i\alpha}^2} + \overline{D_{i\alpha}^2} \exp(-\alpha \cdot 3) \cos 3\beta, \\ \overline{D_{i\alpha} D_{(i+5\alpha)\alpha}} = \frac{27}{256} \overline{D_{i\alpha}^2} + \overline{D_{i\alpha}^2} \exp(-\alpha \cdot 5) \cos 5\beta, \end{cases} \quad (55.4)$$

где $\overline{D_{i\alpha}}$ — измеренные вторые разности координат, а $a = \frac{n}{4}$.

В этой системе уравнений значения j выбраны равными 1, 2, 3 и 5. Опущены значения, равные 0 и 4, так как для них $\overline{D_{i\alpha} D_{(i+j)\alpha}} \neq 0$. При большом n в принципе можно выбирать любые четыре значения j , для которых $\overline{D_{i\alpha} D_{(i+j)\alpha}} = 0$, однако существует ряд аргументов, ограничивающих этот выбор. Из-за слабой определенности системы уравнений (55.4) желательно использовать такие j , для последовательных значений которых корреляционные моменты заметно различаются по величине. Необходимо, кроме того, выбирать наименьшие значения j , так как с ростом их статистическая ошибка определения корреляционных моментов растет. Имеются ограничения и в выборе степени перекрывания n . С одной стороны, чем больше n , тем с большей точностью исключаются шумы [91], но, с другой стороны, при этом существенно увеличивается объем измерений. Наиболее удобны, по-видимому, значе-

ния $n=4, 8, 12$ и 16 . Все эти аргументы и привели в конечном счете к тем значениям j , которые используются в системе уравнений (55.4). Система уравнений (55.4) не может быть разрешена в явном виде, однако некоторые упрощения позволяют без труда реализовать ее решение на электронных цифровых вычислительных машинах.

Анализ экспериментальных корреляционных функций ложного рассеяния показал, что величина α в (54.4) мала и поэтому можно приближенно положить $\exp[-\alpha(a_j)] \approx 1 - \alpha(a_j)$. Тогда система уравнений (55.4) сводится к одному уравнению

$$\frac{a_{31} \cos 2\beta - a_{21} \cos 3\beta - a_{13} \cos \beta}{2^7 a_{31} \cos 2\beta - 3^7 a_{21} \cos 3\beta - a_{13} \cos \beta} - \frac{a_{51} \cos 2\beta - a_{21} \cos 5\beta - a_{25} \cos \beta}{2^7 a_{51} \cos 2\beta - 5^7 a_{21} \cos 5\beta - a_{25} \cos \beta} = 0, \quad (56.4)$$

где

$$a_{21} = \overline{D_{i\alpha} D_{(i+2\alpha)\alpha}} - \frac{184}{235} \overline{D_{i\alpha} D_{(i+\alpha)\alpha}},$$

$$a_{31} = \overline{D_{i\alpha} D_{(i+3\alpha)\alpha}} - \frac{121}{235} \overline{D_{i\alpha} D_{(i+\alpha)\alpha}},$$

$$a_{51} = \overline{D_{i\alpha} D_{(i+5\alpha)\alpha}} - \frac{27}{235} \overline{D_{i\alpha} D_{(i+\alpha)\alpha}},$$

$$a_{23} = \frac{184}{235} a_{31} - \frac{121}{235} a_{21},$$

$$a_{25} = \frac{184}{235} a_{51} - \frac{27}{235} a_{21}.$$

Определив β , являющееся корнем уравнения (56.4), получим

$$\overline{D_{i\alpha}^2} = \frac{a_{21}}{(1-\alpha \cdot 2^7) \cos 2\beta - \frac{184}{235} (1-\alpha) \cos \beta}, \quad (57.4)$$

где

$$\alpha = \frac{a_{31} \cos 2\beta - a_{21} \cos 3\beta - a_{13} \cos \beta}{2^7 a_{31} \cos 2\beta - 3^7 a_{21} \cos 3\beta - a_{13} \cos \beta}.$$

Зная α , β и $\overline{D_{i\alpha}^2}$, из первого уравнения системы (55.4)

найдем средний квадрат второй разности многократного кулоновского рассеяния:

$$\overline{{}^n D_{ik}^2} = \frac{256}{235} [\overline{{}^n D_{in} \cdot {}^n D_{(i+a)n}} - (1-\alpha) \cos \beta \cdot \overline{{}^n D_{in}^2}]. \quad (58.4)$$

Искомый импульс будет:

$$p\beta c = \frac{Kt^{3/2}}{573 \sqrt{\frac{2}{\pi} \sqrt{{}^n D_{ik}^2}}}. \quad (59.4)$$

Полная статистическая ошибка при определении $p\beta c$ методом корреляционных моментов (МКМ) вычисляется по формуле

$$\frac{\delta p\beta c}{p\beta c} \approx \frac{1}{\sqrt{N}} (a + b\mu^2 + c\nu^2 + d\mu + e\nu + f\mu\nu)^{1/2}, \quad (60.4)$$

где $\mu = \frac{\overline{{}^n D_{im}^2}}{\overline{{}^n D_{ik}^2}}$; $\nu = \frac{\overline{{}^n D_{in}^2}}{\overline{{}^n D_{ik}^2}}$; N — число вторых разностей, рассчитанных на ячейке t без перекрытия, а коэффициенты a, b, c, d, e и f зависят от степени перекрытия n (табл. 4).

Таблица 4

n	a	b	c	d	e	f
4	1,05	0,35	0,24	0,11	0,46	0,42
8	1,05	0,18	0,21	0,05	0,46	0,23
12	1,04	0,12	0,18	0,02	0,45	0,12
16	1,04	0,09	0,15	0,01	0,44	0,06

Формула (60.4) получена в предположении, что при $n=1$ $\alpha=0,32$, $\beta=2,4$ и $\gamma=2$.

Описанный метод определения импульсов проверялся на первичных следах протонов с энергией 10 Гэв в эмульсионных слоях НИКФИ-БР-1 толщиной 600 мк, π^- -мезонов с энергией 17 Гэв и протонов с энергией 19,8 Гэв в слоях Илфорд G-5 той же толщины. Многократное рассеяние протонов с энергией 10 Гэв и π^- -ме-

зонов с энергией 17 Гэв измерено на полуавтоматическом микроскопе МИРЭ-2 на ячейках: $t_{min}=100$ мк для эмульсии НИКФИ-БР-1 (с пересчетом на ячейки 400, 800, 1200 и 1600 мк) и $t_{min}=250$ мк для эмульсии Илфорд G-5 (с пересчетом на ячейки $t=1000$ и 2000 мк).

Ячейки t_{min} выбирались таким образом, чтобы $\overline{{}^n D_{in}^2} > \overline{{}^n D_{in}^2} + \overline{{}^n D_{im}^2} + d^2$. Для протонов с энергией 19,8 Гэв использованы результаты измерений, полученные ранее [113]. Расчет корреляционных моментов измеренных вторых разностей и импульсов проводился на электронной вычислительной машине. Дисторсии исключались по методу Фаулера.

Импульсы рассчитаны по формулам (56.4—59.4) и для сравнения по наиболее простому и достаточно надежному методу ρ . Особенность программы определения импульсов (см. приложение) — нахождение корней уравнения (56.4). Для экспериментальных значений корреляционных моментов из-за статистических ошибок может не быть таких β , которые удовлетворяли бы этому уравнению. Поэтому выбирается значение β , дающее минимум левой части уравнения (56.4). Это значение отыскивается в области $\beta^* \leq \beta \leq \frac{\pi}{4}$, а β^* определяется на основе предварительного изучения корреляционной функции ложного рассеяния (обычно $\beta^* \approx \frac{\pi}{12}$).

Результаты расчетов приведены в таблицах 5, 6 и 7. Надежность средних значений импульсов определялась по формуле

$$q = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} \cdot \frac{\min(\overline{p\beta c}, p\beta c_{ист})}{\max(\overline{p\beta c}, p\beta c_{ист})}, \quad (61.4)$$

где ν_0 — полное число обработанных следов; ν — число следов, для которых $p\beta c$ — либо мнимое, либо выходящее за пределы трех стандартных отклонений относительно среднего значения $\overline{p\beta c}$; $p\beta c_{ист}$ — истинное значение импульса.

Таблица 5

Протоны с энергией 10 Гэв

t, мкс	800		1200		1600	
	ρ	КМ	ρ	КМ	ρ	КМ
$\bar{p}\beta c, \Gamma\text{эв}$	$9,5 \pm 0,9$	$8,1 \pm 0,5$	$9,9 \pm 0,8$	$10,5 \pm 0,5$	$11,1 \pm 0,6$	$10,3 \pm 0,6$
q, %	53	57	70	95	79	94,5
$\overline{{}^n D_{i\lambda}^2} / \overline{{}^n D_{ik}^2}$	4		2		1	

Таблица 6

π-мезоны с энергией 17 Гэв (рис. 31)

t, мкс	1000		2000	
	ρ	КМ	ρ	КМ
$\bar{p}\beta c, \Gamma\text{эв}$	$13,6 \pm 0,9$	$10,8 \pm 0,5$	$17,7 \pm 0,7$	$16,5 \pm 0,5$
q, %	67,5	59	82	94,5
$\overline{{}^n D_{i\lambda}^2} / \overline{{}^n D_{ik}^2}$	4,2		2,5	

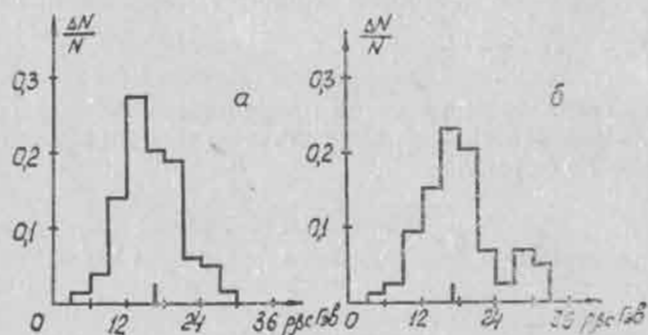


Рис. 31. Распределения значений $\bar{p}\beta c$, найденных на первичных следах π-мезонов с энергией 17 Гэв на ячейке $t=2000$ мкс: а — метод корреляционных моментов; б—ρ.

Таблица 7

Протоны с энергией 19,8 Гэв

t, мкс	2000	
	ρ	КМ
$\bar{p}\beta c, \Gamma\text{эв}$	$21,4 \pm 0,8$	$19,9 \pm 0,8$
q, %	61	99,5
$\overline{{}^n D_{i\lambda}^2} / \overline{{}^n D_{ik}^2}$	~2	

Как видим, почти во всех рассмотренных случаях метод корреляционных моментов имеет существенное преимущество перед методом ρ в смысле надежности определения импульсов. Вспоминая, что МКМ сводится к аппроксимации корреляционной функции измеренных вторых разностей координат функцией, имеющей

четыре параметра: $\overline{{}^n D_{ik}^2}$, $\overline{{}^n D_{i\lambda}^2}$, α , β ($\gamma = \text{const}$), а метод ρ фактически аппроксимирует измеренную кривую только двумя параметрами: $\overline{{}^n D_{ik}^2}$ и $\overline{{}^n D_{i\lambda}^2}$ ($\rho_\lambda = \text{const}$), нетрудно видеть, что большая точность достигается в первом случае. Естественно, что при этом возрастает надежность. Незначительное же уменьшение ошибки в определении импульса по МКМ объясняется тем, что основной вклад в эту ошибку дает ограниченность объема измерений, которая не зависит от применяемой методики.

Согласно данным таблиц 5, 6 и 7, оптимальную ячейку для определения импульсов по МКМ следует определять из условия

$$\overline{{}^n D_{i\lambda}^2} < 2 \overline{{}^n D_{ik}^2}. \quad (62.4)$$

Заметим, что в методе ρ t_{opt} находят из условия $\overline{{}^n D_{i\lambda}^2} < \overline{{}^n D_{ik}^2}$. Хорошим критерием выполнения соотношения (62.4) может служить величина

$$S = \frac{\overline{{}^n D_{i\lambda}^2} \overline{{}^n D_{(i+3a)\lambda}^2}}{\overline{{}^n D_{i\lambda}^2} \overline{{}^n D_{(i+a)\lambda}^2}}. \quad (63.4)$$

С учетом (99.2) и (54.4) для выполнения условия (62.4) необходимо потребовать

$$S \geq S_0 = \frac{121 + 512 \exp(-\alpha \cdot 3^3) \cos 3\beta}{235 + 512 \exp(-\alpha) \cos \beta}. \quad (64.4)$$

Таким образом, чтобы отыскать оптимальную ячейку, необходимо знать параметры α , β и γ , которые легко определяются на следах частиц с известной энергией.

Чтобы точнее определить импульсы вторичных частиц, приходится сшивать отрезки следов в нескольких слоях эмульсии. В методе корреляционных моментов этой процедуре соответствует усреднение корреляционных моментов по отрезкам. Так как многократное кулоновское рассеяние, ложное рассеяние и шумы эргодичны, усреднение по отрезкам эквивалентно усреднению по следу с длиной, равной сумме длин отрезков.

Как показано выше, МКМ надежнее и точнее других методов. Основной недостаток его — громоздкость расчетов, необходимость применения специальных полуавтоматических микроскопов и электронных вычислительных машин.

§ 6. Метод относительного рассеяния

Многократное относительное рассеяние можно измерить, когда следы частиц расположены друг от друга на расстоянии не более 50 мк в плоскости эмульсии и 20 мк по глубине. Как показали измерения, на таких расстояниях следы частиц испытывают практически одинаковые искажения как за счет дисторсии, так и за счет ложного рассеяния [57].

Относительная вторая разность координат D_{12i} , измеренная для двух близлежащих следов частиц, складывается из кулоновского рассеяния частиц D_{1ki} , D_{2ki} и ошибок отсчета, шумов перефокусировки и зерен D_{1mi} и D_{2mi} . Поэтому

$$\overline{D_{12i}^2} = \overline{D_{1ki}^2} + \overline{D_{2ki}^2} + \overline{D_{12mi}^2}, \quad (65.4)$$

где $\overline{D_{12mi}^2} = \overline{D_{1mi}^2} + \overline{D_{2mi}^2}$. Величины $\overline{D_{1mi}^2}$ и $\overline{D_{2mi}^2}$ не за-

висят от длины ячейки и для релятивистских частиц практически одинаковы, поэтому величину $\overline{D_{12mi}^2}$ можно выразить как $\overline{D_{12mi}^2} = 2\overline{D_{1mi}^2} = 2\overline{D_{2mi}^2} = 2\overline{D_{im}^2}$. Величину $\overline{D_{im}^2}$ можно исключить одним из способов, описанных в § 1 (гл. III). Наиболее точную и надежную оценку ${}^n\overline{D_{12hi}^2}$ можно получить по формуле

$${}^n\overline{D_{12hi}^2} = {}^n\overline{D_{1hi}^2} + {}^n\overline{D_{2hi}^2} = \frac{4}{g(1)} {}^n\overline{D_{12i}^2} {}^n\overline{D_{12(i+1)}^2}, \quad (66.4)$$

где ${}^n\overline{D_{12i}^2} = {}^n\overline{D_{1i}^2} - {}^n\overline{D_{2i}^2}$, а ${}^ng(1)$ — коэффициент, определяемый соотношением (99.2). Относительная ошибка оценки (66.4) равна

$$\frac{\delta D_{12h}}{D_{12h}} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \left[a + b \frac{3+2\nu+3\nu^2}{3(1+\nu)^2} + c\mu_1 + d\mu_1^2 \right]^{1/2}, \quad (67.4)$$

где $\mu_1 = \frac{\overline{D_{1mi}^2} + \overline{D_{2mi}^2}}{\overline{D_{1ki}^2} + \overline{D_{2ki}^2}}$; $\nu = \frac{\overline{D_{1hi}^2}}{\overline{D_{2hi}^2}}$; N — число вторых разностей D_{12i} на ячейке t без перекрытия. Значения a , b , c и d в зависимости от степени перекрытия n даны в таблице 8. Относительная ошибка величины D_{12h} зависит от соотношения $\overline{D_{1ki}^2}/\overline{D_{2ki}^2}$ и будет минимальной при $\overline{D_{1ki}^2} = \overline{D_{2ki}^2}$.

Таблица 8

n	a	b	c	d
2	0,420	0,359	0,141	0,094
3	0,388	0,242	0,147	0,218
4	0,405	0,184	0,132	0,144

Если $\overline{D_{1ki}^2}$ или $\overline{D_{2ki}^2}$ равно нулю, то формулы (67.4) совпадают с формулами (21.3—23.3) с той лишь разницей, что $\mu_1 = 2\mu$. Это обусловлено тем, что при измерении относительного рассеяния $\overline{D_{12mi}^2} = \overline{D_{1mi}^2} + \overline{D_{2mi}^2} = 2\overline{D_{im}^2}$.

Поскольку относительная ошибка оценки D_{12k} по формуле (66.4) существенно зависит от μ_1 , а коэффициенты c и d монотонно убывают с ростом n при $n > 3$, то ясно, что при достаточно большой степени перекрывания n ошибка определяется только числом измерений N на заданной ячейке t . Практически уже при $n > 8$ влияние случайных ошибок измерения незначительно.

Формула (67.4) получена в предположении равенства $\overline{D_{1li}^2} = \overline{D_{2li}^2}$, что справедливо только при малых расстояниях между измеряемыми следами. С помощью измерения относительного рассеяния оценивается энергия той частицы, у которой кулоновское рассеяние много больше другой или же оценивается их средняя энергия. Энергию каждой частицы с помощью формулы (66.4) определить нельзя. Этот недостаток можно устранить, если измерить относительное рассеяние для следов трех близлежащих частиц: измеряются относительные значения вторых разностей D_{12ki} , D_{13ki} и D_{23ki} , соответствующие парам всех трех следов [3, 121]. Комбинируя уравнения (66.4), получим

$$\begin{cases} D_{1k} = \sqrt{2}(D_{12k}^2 + D_{13k}^2 - D_{23k}^2)^{1/2}, \\ D_{2k} = \sqrt{2}(D_{12k}^2 + D_{23k}^2 - D_{13k}^2)^{1/2}, \\ D_{3k} = \sqrt{2}(D_{23k}^2 + D_{13k}^2 - D_{12k}^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (68.4)$$

Величины D_{12k} , D_{13k} и D_{23k} можно найти косвенным путем: многократное рассеяние измеряется на каждом следе строго в одних и тех же точках оси x . По измеренным координатам в этих точках и находятся относительные вторые разности. Такой способ определения относительного рассеяния уменьшает шум перефокусировки микроскопа и исключает ошибку, обусловленную перемещением шкалы окуляр-микрометра с одного следа на другой. В некоторых работах с помощью относительного рассеяния оценена энергия частиц в несколько десятков и даже сотен Гэв [3, 97, 121, 132]. К сожалению, этот метод имеет ограниченное применение на практике, так как очень небольшое число сле-

дов частиц удовлетворяет требованиям, предъявляемым к методу измерения относительного рассеяния.

С помощью описанного метода можно определить не только кулоновское рассеяние, но и ложное, и использовать его величину при определении энергии других частиц, расположенных в той же области эмульсии, где измерялось относительное рассеяние. Измерения рассеяния для этого проводят отдельно на каждом из двух близлежащих следов строго в одних и тех же точках оси x . В i -той точке для каждого следа можно записать [95]:

$$\begin{cases} D_{1i} = \Delta_{1i} + D_{li}, \\ D_{2i} = \Delta_{2i} + D_{li} \end{cases}, \quad (69.4)$$

где D_{li} — вторые разности ложного рассеяния (предполагается, что $D_{1li} = D_{2li}$ в той области эмульсии, где находятся оба следа); Δ_{1i} и Δ_{2i} — случайные отклонения, обусловленные кулоновским рассеянием и шумами. Из (69.4) получим

$$\sqrt{\overline{D_{li}^2}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(D_{1i} + D_{2i})^2 - (D_{1i} - D_{2i})^2] \right\}^{1/2}. \quad (70.4)$$

Наряду с методами, описанными в §§ 1—6 этой главы, существуют и другие способы исключения ложного рассеяния [89, 133—136 и др.]. В большинстве случаев они являются модификацией описанных выше методов.

Глава V

ПОСТОЯННАЯ МНОГОКРАТНОГО КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ

§ 1. Расчет

В работах [43, 51, 59] рассчитана постоянная многократного кулоновского рассеяния для функций распределения $Q(t, \Theta)$, полученных разными способами. Наиболее просто постоянную рассеяния можно оценить, используя теорию Мольер. В § 3 главы II получено выражение для $\sqrt{\Theta^2}$, рассчитанного по формуле (46.2):

$$\sqrt{\Theta^2} = z_1 z_2 e^2 (2\pi N B)^{1/2} \left(1 + \frac{0,982}{B} - \frac{0,117}{B^2} + \dots \right)^{1/2} \cdot \frac{t^{1/2}}{p\beta c}. \quad (1.5)$$

Согласно (76.2) и 1.5),

$$\vartheta' = |\bar{\vartheta}| = \delta \left(B + 0,982 - \frac{0,117}{B} + \dots \right)^{1/2}, \quad (2.5)$$

где

$$\delta = \frac{2z_1 z_2 e^2 (Nt)^{1/2}}{p\beta c}. \quad (3.5)$$

Вспомогая (72.2) и (79.2), получим, что для чистого вещества

$$K \cong \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{p\beta c}{t^{1/2}} \vartheta' = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{p\beta c}{t^{1/2}} \delta \times \left(B + 0,982 - \frac{0,117}{B} \right)^{1/2}. \quad (4.5)$$

Для усреднения по элементам ядерной фотоэмульсии заменим Nz_2^2 в формулах (44.2) и (3.5) на $\sum_i N_i z_{2i}^2$

и подставим вместо z_2 $\frac{1}{N} \sum_i N_i z_{2i}$. Это дает [43, 51]:

$$\delta = 1,006 \frac{t^{1/2}}{p\beta c}, \quad (5.5)$$

$$B \cong 1,153 + 2,583 \ln \Omega, \quad \text{или } \ln B = \ln R - 0,154$$

$$\Omega = 6,31t (0,23 + 0,77 \beta^2)^{-1},$$

где t выражено в микронах, $p\beta c$ — в миллионах электронвольт, а δ — в градусах. Подставляя (5.5) в (4.5), имеем

$$K = 10,06 \sqrt{\frac{2}{3}} \left(B + 0,982 - \frac{0,117}{B} \right)^{1/2} \frac{\text{град} \cdot \text{Мэв}}{(100 \text{ мк})^{1/2}}. \quad (6.5)$$

В литературе часто используется постоянная рассеяния, рассчитанная Воиндик и Пикап [51] по теории Вильямса [30, 36] с учетом экранирующего параметра Θ_s , предложенного Мольер. Согласно Вильямсу,

$$\vartheta' = \delta [1,45 + 0,80 (\ln M)^{1/2}]. \quad (7.5)$$

Величина $M = \left(\frac{\Theta_{\max}}{\Theta_{\min}} \right)^2$ так же, как и Ω в теории Мольер, — мера среднего числа столкновений, испытываемых частицей в слое t . Для M Вильямс получил

$$M = 0,64\pi N t z_1^{1/2} z_2^{1/2} \beta^{-2} \left(\frac{h}{m c} \right)^2, \quad \text{если } \gamma \ll 1; \quad (8.5)$$

$$M = 0,20\pi N t z_2^{-1/2} \left(\frac{h^2}{m e^2} \right)^2, \quad \text{если } \gamma \gg 1, \quad (9.5)$$

где

$$\gamma = \frac{z_1 z_2}{137\beta}.$$

Воиводик и Пикап, используя формулу (8.2) для Θ_a , получили, что среднее число столкновений в слое равно

$$M_1 = M \left(1 + \frac{\gamma^2}{0,31} \right)^{-1}. \quad (10.5)$$

Теория Вильямса справедлива при $M_1 \gg 1$. Для ядерной фотоэмульсии M_1 обычно больше 100, поэтому его теорию вполне можно применить для расчета K . В дальнейшем используется параметр M , определяемый формулой (8.5), так как в случае рассеяния релятивистских частиц в ядерной эмульсии $\gamma \ll 1$. Согласно (8.5) и (10.5), для чистого вещества ($z_1 = 1$)

$$\begin{aligned} \ln M_1 = & \ln(0,64\pi N t z_2^2 h^2 m^{-2} c^{-2}) - \\ & - \ln \beta^2 - \ln \left(1 + \frac{\gamma^2}{0,31} \right) z_2^2. \end{aligned} \quad (11.5)$$

По аналогии с методом Мольер осреднения для смеси

$$\begin{aligned} \ln M_1 = & \ln(\text{const} \cdot t \sum_i N_i z_{2i}^2) - \ln \beta^2 - \\ & - \frac{\sum_i N_i z_{2i}^2 \ln z_{2i}^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{0,31} \right)}{\sum_i N_i z_{2i}^2}. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Подставляя численные значения всех величин, получим [51]

$$\ln M_1 \approx \ln \frac{0,94t}{0,30 + \beta^2}. \quad (13.5)$$

Используя (5.5), (7.5) и (13.5), найдем

$$K = 11,9 \left[1 + 0,837 \left(\ln \frac{0,94t}{0,30 + \beta^2} \right)^{1/2} \right] \frac{\text{град} \cdot \text{Мэв}}{(100 \text{ мк})^{1/2}}. \quad (14.5)$$

Формулы (6.5) и (14.5) получены без учета рассеяния на атомных электронах. Как показано в § 1 (гл. II), влияние рассеяния на электронах можно учесть, заменяя z_2^2 на $z_2(z_2 + 1)$. Значение постоянной рассея-

ния при этом увеличивается приблизительно на 2% [4,51]. Формула (14.5) для величины K получена в предположении, что ядра рассеивателя точечные.

Знание постоянной рассеяния K позволяет найти $\rho\beta c$ по измерениям D_i . При обработке экспериментальных данных отдельные (возможно, единичные) большие значения D_i приведут к неправильной оценке $\rho\beta c$. Чтобы уменьшить флуктуации измеренных значений D_i за счет упругого и неупругого рассеяния на большие углы, приводящего к большим величинам D_i , экспериментаторы предпочитают исключать это рассеяние тем или иным способом. Наиболее распространено отбрасывание $D_i > 4D'$, или, что то же самое, $\theta > 4\theta'$. Эту процедуру часто называют обрезанием. Очевидно, что среднеарифметическое значение угла θ , вычисленное с обрезанием, равно

$$\theta'_{\text{co}} = \frac{\int_0^{4\theta'_{\text{co}}} \theta Q(\theta, t) d\theta}{\int_0^{4\theta'_{\text{co}}} Q(\theta, t) d\theta}. \quad (15.5)$$

Подставляя в (15.5) конкретное выражение для функции распределения $Q(\theta, t)$, получим связь между θ'_{co} и θ' . Так, для теории многократного рассеяния Вильямса

$$\theta'_{\text{co}} = \frac{\theta' - \frac{\pi}{4\theta'}}{1 - \frac{\pi}{32\theta'^2}}. \quad (16.5)$$

При определении $\rho\beta c$ по θ'_{co} постоянная рассеяния находится по формулам (14.5) и (16.5). Часто значения $\theta > 4\theta'$ не отбрасывают, а заменяют на $4\theta'$. Среднеарифметическое значение угла θ , найденного с замещением, равно [27]:

$$\vartheta_a' = \int_0^{4\vartheta_a'} \vartheta Q(t, \vartheta) d\vartheta + 4\vartheta_a' \int_{4\vartheta_a'}^{\infty} Q(t, \vartheta) d\vartheta. \quad (17.5)$$

Как указал Баркас [4], метод замещения недостаточно эффективен, так как отдельные отклонения на большие углы частично сохраняют свое влияние на D_k . Значение постоянной рассеяния для этого случая меньше K и больше K_{co} , рассчитанной с обрезанием.

Существует и еще один способ уменьшения влияния однократного рассеяния, суть которого состоит в вычислении вместо среднеарифметического значения угла ϑ среднего значения $\cos \eta \vartheta$ [137, 138]. Параметр η выбирается так, чтобы $\delta D_k / D_k$ было минимальным. В работе [139] показано, что теория Мольер позволяет без труда оценить ошибку $\delta D_k / D_k$, найти η и значение постоянной рассеяния K_η .

Таким образом, выбор конкретной величины K зависит от способа обрезания. Влияние конечных размеров ядер сказывается в том, что при $\vartheta' \gg \frac{\lambda}{r_0}$ величина M не зависит от длины ячейки t , а среднеарифметическое значение угла ϑ равно [51]

$$\vartheta' = \delta (19,5 - 3,11 g z_2)^{1/2}.$$

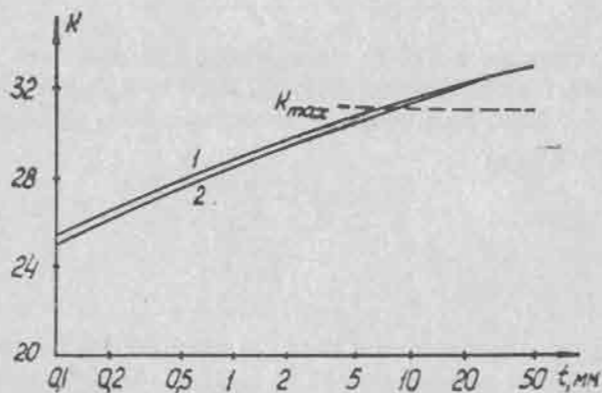


Рис. 32. Зависимость K от t по данным 1 — [51]; 2 — [40].

Величина K при этом достигает своего максимального значения ($K_{max} = 31,2$) и далее не изменяется с изменением t . На рисунке 32 изображена зависимость от длины ячейки постоянной K , рассчитанной по формуле (14.5) при $\beta = 1$. Здесь же нанесена кривая, соответствующая постоянной K , определенной по формуле (6.5). Из рисунка видно, что постоянная K , рассчитанная по теории Вильямса с учетом Θ_o , практически совпадает с K , вычисленной по теории Мольер. Постоянную рассеяния можно рассчитать, используя и другие теории [59].

§ 2. Экспериментальные значения

Величина постоянной рассеяния, рассчитанной по теории Вильямса—Мольер, в основном согласуется с экспериментальными данными, полученными при измерении рассеяния на следах протонов и электронов с энергиями в несколько десятков и сотен $Mэв$ на малых длинах ячеек [51—53, 140—142]. Готштейн и др. [53] при измерении рассеяния на следах протонов с энергией 336 $Mэв$ на ячейке $t = 0,6$ мм нашли, что $K_{co} = 29,2 \pm 1,0$, а $K = 30,7 \pm 1,0$. Теоретическое значение $K_{co} = 27,2$, а $K = 28,8$. Бергер [52] определил значение K_{co} и K при измерении рассеяния на следах протонов с энергией 218 и 337 $Mэв$ на ячейках 0,25; 0,50; 0,75 и 1 мм. Его экспериментальные значения постоянной рассеяния систематически меньше теоретических на 5—8%.

Лукин и др. [54] для протонов с энергией 660 $Mэв$ получили $K_{co} = 27,4 \pm 1,5$ ($t = 0,4$ мм).

Для быстрых частиц ($\beta \approx 1$) значения постоянной рассеяния в зависимости от t приведены на рисунке 33. K_{co} получены при измерении рассеяния координатным методом на индивидуальных следах. В интервале длин ячеек 4—40 мм зависимость K_{co} от t практически отсутствует. Среднее экспериментальное значение $K_{co} = 27$. В области $t > 10$ мм наблюдается различие порядка 15—20% между расчетной и экспериментальной величинами постоянной рассеяния.

Впервые такое различие обнаружено в работах Хосэйна и др. [58]. Постоянная рассеяния определялась на следах π -мезонов с энергией 16,2 Гэв и μ -мезонов — 8,2 Гэв на ячейках $t=2$ и 3 см. Несмотря на то, что значения $D_1 > 4D'$ не отбрасывались, ложное рассеяние не исключалось, экспериментальное значение

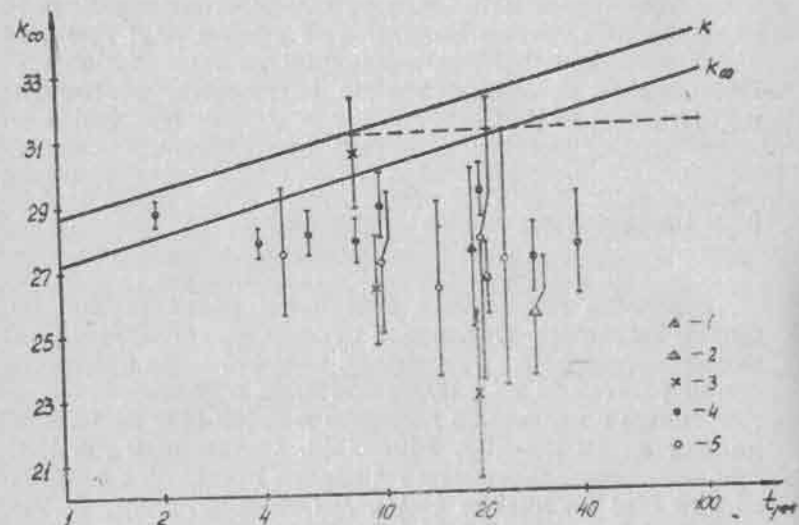


Рис. 33. Экспериментальные значения K : 1, 2—[58]; 3—[61]; 4—[60]; 5—[62].

постоянной рассеяния все же оказалось ниже расчетного примерно на 15%. В работах [111, 120] обнаружено несоответствие между измеренной величиной многократного рассеяния и его теоретическим значением и для частиц с $\beta < 1$. Так, для частиц с отрицательным зарядом (40% π^- -мезонов и 60% μ^- -мезонов) со средним значением импульса порядка 715 Мэв/с экспериментальное значение второй разности, измеренное на ячейках $t=10 \div 16$ мм, оказалось ниже теоретического на 20—40% [111]. Для протонов с кинетической энергией 660 Мэв величина второй разности, измеренной на ячейке $t=4$ мм, оказалась значительно ниже расчетной; для протонов с энергией порядка 2 Гэв это различие составляет $\sim 25\%$ на ячейке $t=10$ мм

[120]. Приближенный учет размеров ядер, сделанный Воиводик и Пикап [51], дает величину K (пунктирная линия на рис. 33), большую экспериментальных значений. Поскольку это различие наблюдается и при измерении рассеяния на следах μ -мезонов (неядерно-активных частиц), можно предположить, что имеющиеся различия между теорией и экспериментом, по-видимому, нельзя объяснить влиянием рассеяния, обусловленного ядерным взаимодействием частиц, т. е. рассеянием некулоновского характера. Учет протяженности ядра, сделанный в работах [32—34, 143], также не объясняет этого различия.

Следует отметить еще один факт, подтверждающий несоответствие теории многократного рассеяния и эксперимента. В области больших длин ячеек, когда $D_k \gg D_n$, величина ρ_k начинает увеличиваться, хотя его теоретическое значение должно быть постоянным и равным $\sqrt{\frac{3}{2}}$ [120] (рис. 34).

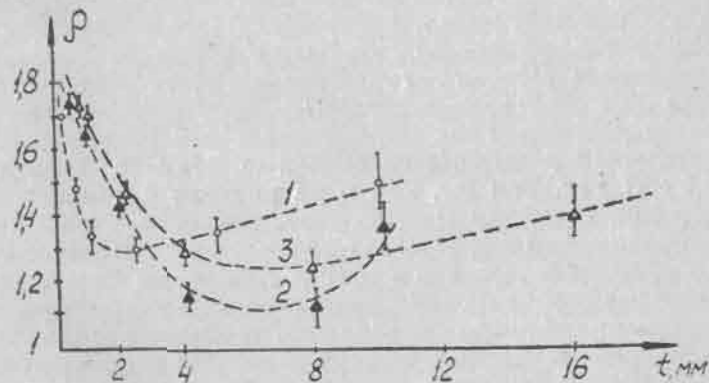


Рис. 34. Зависимость ρ от длины ячейки и $\rho\beta$: 1—2,6 Гэв; 2—10 Гэв; 3—17 Гэв.

Бозоки и др. [62] предположили, что постоянная рассеяния зависит от метода, с помощью которого измеряется многократное рассеяние. Действительно, значение K_{∞} , найденное с помощью измерения относительного рассеяния на ячейках $t < 1$ см, примерно на 10% выше значения K_{∞} , найденного при измерении рассеяния на

отдельных следах (см. рис. 33 и 35). На рисунке 35 приведены значения K_{co} , найденные при измерении отно-

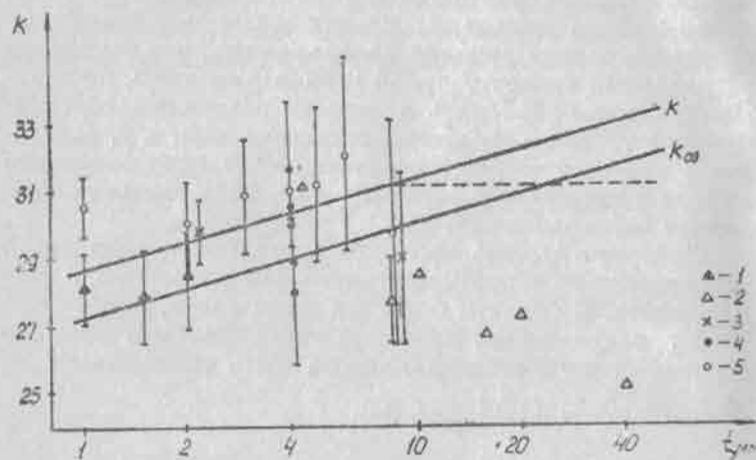


Рис. 35. Экспериментальные значения K , найденные методом относительного рассеяния. 1—[56]; 2—[59]; 3—[58]; 4—[60]; 5—[57].

сительного рассеяния на следах частиц с энергией $4,5 \div 27$ Гэв. Так же, как и на рисунке 33, значение K_{co} при $t > 10$ мм меньше теоретического. Завышение значения K_{co} (рис. 33) при $t < 10$ мм, по-видимому, можно объяснить тем, что в методе измерения относительного рассеяния недостаточно строго выдерживаются требования, которые необходимо к нему предъявить. Например, в работе Брисбаут и др. [56] относительное рассеяние измерялось на следах частиц, расположенных друг от друга в плоскости эмульсии на 50 мк и по глубине на 20 мк, в то время как в работе Бисвас и др. [57] — на расстоянии 200 и 50 мк соответственно.

Возможно поэтому в работе Бисвас и др. [57] величина постоянной рассеяния оказалась примерно на 8% больше соответствующей величины, найденной в работе [56]. Неполное исключение ложного рассеяния, шумов и дисторсии приведет в этом случае к завышению постоянной рассеяния.

Интересно определение постоянной рассеяния с помощью других методов, например, с помощью метода углового рассеяния пучка частиц, суть которого заключается в следующем: частицы высокой энергии после прохождения эмульсионного слоя толщиной t_1 и $t_2 = t_1 + t$ образуют со средним направлением пучка средние арифметические углы θ_1' и θ_2' . Квадрат среднеарифметического кулоновского угла $\theta_k'^2$ после прохождения слоя толщиной t будет $\theta_k'^2 = \theta_2'^2 - \theta_1'^2$. При нахождении $\theta_k'^2$ значения отдельных углов, больших $4\theta_1'$ или $4\theta_2'$, отбрасываются по аналогии с координатным методом, где исключаются значения $D_i > 4D'$. Значение постоянной рассеяния определялось угловым методом в работе [145] на следах л-мезонов с энергией 0,3 Гэв при $t=40$ мм и следах протонов с энергией 6,2 Гэв при $t=60$ мм. Получены значения $K_{co} = 30,3 \pm 0,7$ и $30,4 \pm 0,9$ соответственно для л-мезонов и протонов. Минимальное расчетное значение постоянной рассеяния на таких ячейках составляет 31,2.

В работе [144] на следах протонов с энергией 9 Гэв при $t=72$ мм найдено значение $K_{co} = 34,3 \pm 1,6$. Затем в работе [62] более корректно учтено дифракционное рассеяние, и это значение уменьшилось до $K_{co} = 29,4 \pm 2$. Там же определено значение $K_{co} = 30,2 \pm 2,5$ на следах л-мезонов с энергией 17 Гэв при $10 \text{ мм} \leq t \leq 30 \text{ мм}$.

Экспериментальные значения K_{co} в пределах ошибок согласуются со значением $K_{co} = 31,2$, хотя они систематически меньше этой расчетной величины. В то же время они значительно больше величин K_{co} , определенных координатным методом (см. рис. 33). Возможно, это различие обусловлено тем, что предположения, заложенные в основу углового метода определения постоянной рассеяния, недостаточно обоснованы. Например, предполагается, что шумы и ложное рассеяние одинаковым образом входят в угловое распределение в точках t_1 и t_2 и поэтому при вычитании $\theta_2'^2 - \theta_1'^2$ исключаются [144]. Неясно, как учитываются искажения следов частиц за счет дисторсий. Трудно предположить, чтобы дисторсии и ложное рассеяние были одинаковы в двух областях эмульсионного слоя, расположенных на расстоянии больше 1 см.

В связи с этим интересно привести значения посто-

янной, полученной с помощью измерения рассеяния координатным методом на индивидуальных следах без исключения ложного рассеяния и дисторсии. Так, в работе [62] получено значение $K_{co} = 30,2 \pm 0,6$ (интервал длин ячеек $5 \text{ мм} \leq t \leq 30 \text{ мм}$, π -мезоны, $17,2 \text{ Гэв}$), а в работе [146] — $K_{co} = 34$ ($4 \text{ мм} \leq t \leq 40 \text{ мм}$, π -мезоны, $17,2 \text{ Гэв}$). Эти значения K_{co} не приведены на рисунке 33, так как совершенно ясно, что они завышены, а исправленные значения (с учетом ложного рассеяния) приведены (точки 5).

В угловом методе определения постоянной рассеяния важно также правильно учесть поправки, обусловленные некулоновским взаимодействием частиц.

В работах [146—148] на следах моноэнергичных частиц в точках t_1 и t_2 вместо углов измерялись смещения следов в горизонтальной плоскости эмульсии относительно их первоначального направления. Этот метод называют методом прямого измерения y -ординат. По измеренным среднеквадратичным смещениям $\sqrt{y_i^2}$ на ячейках длиной t постоянная рассеяния находилась из соотношения

$$K = \frac{2 \cdot 573 \sqrt{y_i^2 \cdot p^2 c}}{\sqrt{\pi \cdot t^{1/2}}}$$

Найденная таким способом величина постоянной рассеяния на следах протонов с энергией 27 Гэв на ячейках $t \geq 3 \text{ см}$ оказалась равной $27,4 \pm 1,6$ и $27,8 \pm 2,5$ (при максимальных длинах следов $4,5$ и 10 см соответственно) [147]. В работе [148] этот метод применен для следов μ -мезонов с энергией 8 Гэв . Показано, что постоянная рассеяния зависит от максимально измеряемой величины горизонтального смещения. Так, с увеличением смещения от 10 до 150 мк на ячейке $t = 50 \text{ мм}$ постоянная рассеяния увеличивается с $24,0 \pm 1,8$ до $30,2 \pm 2,2$.

В работе Суд и Чохан [146] на следах π -мезонов с энергией $17,2 \text{ Гэв}$ получено значение постоянной $32,3 \pm 3,3$ для $40 \text{ мм} \leq t \leq 80 \text{ мм}$. Авторы не учитывали в измерениях ложное рассеяние и дисторсии. Кроме того, они не принимали во внимание вклад, обусловленный некулоновским рассеянием (неупругое рассеяние на большие углы, дифракционное рассеяние и т. п.).

В более поздней работе [59], соавтором которой является также Суд, показано, что экспериментальное значение постоянной рассеяния, измеренной координатным методом Фаулера (D_k оценивалось с помощью относительного рассеяния) на следах π -мезонов с энергией 17 Гэв , и значение постоянной, найденной методом измерения ординат $|y_i|$ (относительное рассеяние) на ячейках длиной $40, 60, 80 \text{ мм}$, хорошо согласуются друг с другом, но систематически меньше расчетных на $15-20\%$.

В работе [63] измерена постоянная K_{co} методом относительного рассеяния для следов протонов и пионов с импульсами $5, 8, 12$ и 24 Гэв/с в одних и тех же слоях эмульсии, а также для мюонов с импульсом 5 Гэв/с . Выводы авторов этой работы идентичны выводам авторов работы [59].

Нами измерено относительное рассеяние на следах π -мезонов с энергией 60 Гэв в эмульсии НИИХИМФОТО-БР-2 толщиной 600 мк , облученной на ускорителе в г. Серпухове. Выбирались пары следов частиц длиной $4-6 \text{ см}$, расходящиеся в плоскости эмульсии не более чем на 20 мк и по глубине не более чем на 10 мк . Среднеквадратическая величина второй разности многократного кулоновского рассеяния определялась по формуле (66.4), а значение K — по формуле (59.4). Найденные таким образом K оказались значительно меньше теоретических значений (рис. 36) и несколько меньше, чем K , определенные на следах частиц с энергией до 27 Гэв . Столь малые значения K , по-видимому, не могут быть объяснены условиями выбора пар, так как $\sqrt{D_i^2}$, непосредственно измеренные на отдельных следах и включающие в себя кроме кулоновского рассеяния ложное рассеяние, шумы и дисторсии, на больших ячейках одного порядка с кулоновским рассеянием, измеренным на парах, и также значительно меньше теоретического значения кулоновского рассеяния (рис. 37). Измеренные среднеквадратические значения вторых разностей многократного кулоновского рассеяния изменяются с длиной ячейки как $t^{1,85 \pm 0,04}$, в то время как теория дает зависимость $t^{1,5}$.

Таким образом, значение постоянной многократно-

го кулоновского рассеяния, определенной различными способами для частиц с различной природой и энергией, оказывается значительно меньше расчетного, особенно в области больших длин ячеек.

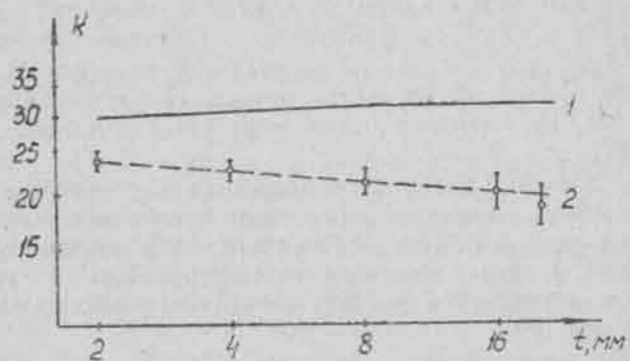


Рис. 36. Зависимость K от длины ячейки: 1 — теория; 2 — эксперимент (относительное рассеяние).

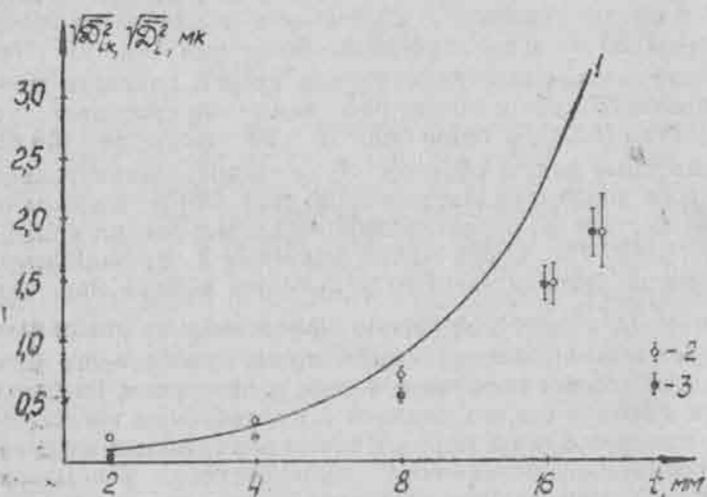


Рис. 37. Зависимость $\sqrt{D_{ik}^2}$ и $\sqrt{D_i^2}$ от длины ячейки t : 1 — теория; 2 и 3 — эксперимент, индивидуальное и относительное рассеяния соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнение экспериментальных данных с выводами различных вариантов теорий многократного кулоновского рассеяния заряженных частиц, сделанное во второй и пятой главах, показало, что при малых ячейках данные теории и эксперимента удовлетворительно согласуются, в области же больших длин ячеек наблюдается заметное расхождение. Возможными причинами такого расхождения могут быть незнание точного распределения заряда в ядре, приближенный учет экранирования поля ядра атомными электронами, несправедливость кинетического уравнения при описании многократного рассеяния, приближенный расчет постоянной рассеяния для сложного состава вещества, квантовомеханические эффекты и т. д. Чтобы более точно указать причины такого разногласия, необходимо детально исследовать зависимость этого эффекта от энергии частиц и свойств рассеивателя. Согласно имеющимся в настоящее время экспериментальным данным (§ 2, гл. V), учет протяженности размеров ядер, по-видимому, не может полностью объяснить наблюдаемое различие теоретического и экспериментального значений постоянной рассеяния, так как он уменьшает величину K при больших t не более чем на 5%.

С увеличением энергии частицы и длины ячейки расхождение теории с экспериментом увеличивается. Чтобы понять это явление, необходимы экспериментальные данные о зависимости величин D_k и ρ от длины ячейки t и энергии частиц. Так как данные теории и эксперимента не совпадают, то при определении энер-

гии быстрых частиц по их многократному кулоновскому рассеянию нужно пользоваться значением постоянной рассеяния, полученной из калибровочных измерений на следах частиц с известной энергией.

Измерениям истинного кулоновского рассеяния, как правило, сопутствуют различного рода ошибки, связанные с дисторсией, шумами и ложным рассеянием. На практике обычно преобладают дисторсии второго порядка, которые легко устраняются из измеренных значений вторых разностей любым из описанных способов (§ 2, гл. III). Ложное рассеяние и шумы наиболее надежно исключаются с помощью метода, использующего их корреляционные свойства (§ 4, гл. II; § 1, 2, гл. III; § 5, гл. IV). Этим методом рекомендуется пользоваться при измерении рассеяния на микроскопах с автоматической записью информации и последующей обработкой ее на электронных вычислительных машинах. При измерении рассеяния и обработке данных вручную предпочтительнее пользоваться более простым, но достаточно надежным методом ρ (§ 3, гл. IV).

Корреляционный метод исключения помех, аналогичных ложному рассеянию и шумам, в принципе может применяться при измерении любых физических величин с известными корреляционными свойствами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Программа вычисления импульсов заряженных частиц методом корреляционных моментов на электронной вычислительной машине БЭСМ-3М.

Исходные данные для определения $\rho\beta c$ — корреляционные моменты ${}^n D_{1n} {}^n D_{(1+j)n} = a_j$. Числовой материал располагается в ячейках с 305 ÷ 1537: в ячейках 305 ÷ 327 — необходимые для вычислений константы; в ячейках 330 ÷ 1416 — вторые моменты a_j и в ячейках 1417 ÷ 1537 — номера групп a_j . Расчет проводится по формулам (56.4)–(59.4) и по формуле (7.4).

№ ячейки				A ₁	A ₂	A ₃	Примечание
	1	2	3				
0020			56	0	0022	0	КА
1			00	0022	0	0	
2			50	0010	0001	7767	
3			70	7500	0022	0	
4			16	0025	7501	7610	
5			52	0305	0042	1537	
6			52	0	0	0	
7			16	0030	7501	7610	
0030	5		72	1417	0027	1417	Вызов ИС-2 Перегод число- вых данных 10= =>2 Печать NNN
1			05	0331	0305	2001	
2			02	0332	2001	2005	
3			05	0331	0306	2001	
4			02	0333	2001	2006	
5			05	0331	0307	2001	
6			02	0335	2001	2007	
7			05	0306	2005	2001	
0040			05	0305	2006	2002	a ₂₁ a ₃₁ a ₅₁ a ₂₃ a ₂₅ β ₀ => p. я.
1			02	2002	2001	2010	
2			05	0307	2005	2001	
3			05	0305	2007	2002	
4			02	2002	2001	2011	
5	4		52	0	0	0302	
6			00	0314	0	2222	
7	4		52	0	0	0055	
0050	2		05	2222	7761	2001	cos iβ, i=1,2,3
1			02	7756	2001	2001	
2			16	0053	7501	7610	
3	1		75	2001	0005	2012	
4	1		12	0002	0050	0001	
5			00	0	0	0	
6			05	2222	0311	2001	
7			02	7756	2001	2001	
0060			16	0061	7501	7610	cos 5β
1			75	2001	0005	2015	
2			05	2012	2010	2001	
3			05	2014	2005	2002	
4			05	2002	0312	2002	
5			01	2002	2001	2001	
6			05	2013	2006	2002	
7			05	2002	0310	2002	
0070			02	2002	2001	2001	
1			05	2012	2010	2002	
2			05	2014	2005	2003	
3			01	2003	2002	2002	

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8
4		05	2013	2006	2003		
5		02	2003	2002	2002		
6		04	2002	2001	2001		
7		05	2012	2011	2002		
0100		05	2015	2005	2003		
1		05	2003	0313	2003		
2		01	2003	2002	2002		
3		05	2013	2007	2003		
4		05	2003	0310	2003		
5		02	2003	2002	2002		
6		05	2012	2011	2003		
7		05	2015	2005	2004		
0110		01	2004	2003	2003		
1		05	2013	2007	2004		
2		02	2004	2003	2003		
3		04	2003	2002	2002		
4	1	02	2001	2002	3000		f(β _i) см (56.4)
5		02	2222	0315	2222		(β ₀ -Δβ) => β ₀
6	1	12	0202	0047	0001		
7		52	0	0	0		
0120		00	0	0	2001		В счетчик => 0
1	6	03	3000	5001	0		
2		36	0	0125	0		
3		01	7761	2001	2001		
4	1	12	0202	0121	0001		
5		05	2001	0315	2001		β _{min}
6		02	0314	2001	2016		
7		16	0130	7501	7610		
0130		72	2016	0027	2016		Печать β _{min}
1	4	52	0	0	0137		
2	2	05	2016	7761	2001		
3		02	7756	2001	2001		
4		16	0135	7501	7610		
5	1	75	2001	0005	2012		cos iβ, i=1,2,3
6	1	12	0002	0132	0001		
7		00	0	0	0		
0140		05	2012	2010	2001		
1		05	2014	2005	2002		
2		05	2002	0312	2002		
3		01	2002	2001	2001		
4		05	2013	2006	2002		
5		05	2002	0310	2002		
6		02	2002	2001	2001		
7		05	2012	2010	2002		
0150		05	2014	2005	2003		

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8
1		01	2003	2002	2002		
2		05	2013	2006	2003		
3		02	2003	2002	2002		
4		04	2002	2001	2017		
5		16	0156	7501	7610		α_{min}
6		72	2017	0027	2017		
7		02	7761	2017	2001		Печать α_{min}
0160		05	2001	2012	2001		
1		05	2001	0305	2001		
2		05	0310	2017	2002		
3		02	7761	2002	2002		
4		05	2002	2013	2002		
5		02	2002	2001	2001		
6		04	2005	2001	2020		$\overline{D_{1n}^2}$
7		01	2002	0	0		
0170		36	0	0205	0		
1		02	7761	2017	2001		
2		05	2001	2012	2001		
3		05	2001	2020	2001		
4		02	0331	2001	2001		
5		04	2001	0326	2021		$\overline{D_{1k}^2}$
6		01	2021	0	0		
7		36	0	0205	0		
0200		44	2021	0	2021		
1		04	0327	2021	2022		$p\beta c, MKM$
2		16	0203	7501	7610		
3		72	2022	0027	2022		Печать $p\beta c, MKM$
4		16	0	0207	0		
5		16	0206	7501	7610		Печать «0»
6		72	0	0027	0		
7		05	7765	0333	2001		
0210		05	7765	0336	2002		
1		02	2002	2001	2001		
2		02	0335	2001	2023		
3		02	0334	2023	2001		
4		03	2001	0	2001		
5		05	2001	0316	2001		
6		02	0330	2001	2024		
7		05	2024	0321	2001		
0220		01	2001	2023	2001		
1		05	0332	0320	2002		
2		02	2002	2001	2025		
3		05	2024	2024	2001		
4		05	2001	0323	2001		

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8
5		05	0332	0332	2002		
6		05	2002	0322	2002		
7		02	2001	2002	2001		
0230		05	2023	2024	2002		
1		01	2002	2001	2026		
2		05	0310	2026	2001		
3		05	2001	0317	2001		
4		05	2025	2025	2002		
5		02	2002	2001	2001		
6		01	2001	0	0		
7		36	0	0254	0		
0240		44	2001	0	2001		
1		02	0	2025	2002		
2		02	2002	2001	2001		
3		05	7762	0317	2002		
4		04	2001	2002	2001		
5		01	2001	0	0		
6		36	0	0254	0		
7		44	2001	0	2001		
0250		04	0327	2001	2001		
1		16	0252	7501	7610		
2		72	2001	0027	2001		
3		16	0	0256	0		
4		16	0255	7501	7610		
5		72	0	0027	0		
6		04	0334	0330	2001		
7		02	7761	2001	2001		
0260		05	2001	7762	2001		
1		02	0324	2001	2001		
2		04	2001	0325	2001		
3		01	2001	0	0		
4		36	0	0274	0		
5		44	2001	0	2001		
6		44	0330	0	0330		
7		05	2001	0330	2001		
0270		04	0327	2001	2001		
1		16	0272	7501	7610		$p\beta c, \overline{\rho}$
2		72	2001	0027	2001		Печать $p\beta c, \overline{\rho}$
3		16	0	0276	0		
4		16	0275	7501	7610		Печать «0»
5		72	0	0027	0		
6		52	0	0	0		
7	5	00	0337	0	0330		
0300	1	12	0006	0277	0001		$a_1' \Rightarrow a_1$
1		13	0277	1541	0277		
2		00	0	0	0		

Окончание таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	12	0120	0027	0001		
4		16	0	1540	0		
5					+	+	00 78298
6					+	+	00 51490
7					+	+	00 11489
0310					+	+	01 4
1					+	+	01 5
2					+	+	01 9
3					+	+	02 25
4					+	+	00 7854231 $\frac{\pi}{4}$
5					+	-	02 3 Δ_5
6					+	+	01 15
7					+	+	00 16341
0320					+	+	01 226155
1					+	+	01 17023
2					+	+	01 157325
3					+	+	00 72615
4					+	+	01 289
5					+	+	01 139
6					+	+	00 91797
7					+	+	K
0330							a ₀
1							a ₁
2							a ₂
3							a ₃
4							a ₄
5							a ₅
6							a ₆
7							a ₁ '
0340							a ₂ '
.							.
.							.
1540		17	0	0	0		
1		00	0007	0	0		

ЛИТЕРАТУРА

1. Мысовский Л. В., Чижов П. И. — «Z. Phys.», 1927, 44, 408.
2. Жданов А. П. — «J. Phys. et Radium.», 1935, 6, 233.
3. Пауэлл С., Фаулер П., Перкинс Д. Исследование элементарных частиц фотографическим методом. М., ИЛ, 1964.
4. Barkas W. H. — «Nuclear Research Emulsions», 1963, vol. I, N. Y.
5. Картужанский А. Л. — «Ж. научн. и прикл. фотогр. и кинематогр.», 1968, 13, 57.
6. Богомолов К. С., Вахтанова Л. П. — «Ж. научн. и прикл. фотогр. и кинематогр.», 1967, 12, 349.
7. Родичева М. Ф. Ядерная фотография. М., Изд-во АН СССР, 1962, 218.
8. Физика космических лучей (под редакцией Дж. Вильсона), т. 2. М., ИЛ, 1956.
9. Бонетти А., Дилвора С., Пелк С. Р., Скарси Л. Ядерные эмульсии. М., Физматгиз, 1961.
10. Успехи научной фотографии, т. 12. М., «Наука», 1966.
11. Dalysz M., Yekutiely G. — «Phil. Mag.», 1951, 42, 1185.
12. Такибаев Ж. С. — ЖЭТФ, 1953, 24, 233.
13. Жданов А. П., Ермакова С. — ДАН СССР, 1950, 70, 211.
14. Жданов А. П. — «J. Phys. et Radium.», 1935, 6, 233.
15. Bernheim A., Doriot G., Fayolle I. C., Vedel I. P., Mo rand M. — «Nucl. Instr. and Methods», 1965, 34, 345.
16. Barbier I. P., Bernheim A., Fayolle I. C., Mo rand M. — «Nucl. Instr. and Methods», 1967, 49, 38.
17. Duff M. Vth Int. Conf. on Nucl. Phot. Geneva, CERN, 1964.
18. Cox I., Duff M., Townsend L. — «Nucl. Instr. and Methods», 1966, 41, 195.
19. Воронков А. Е., Мурин И. Д., Сухов Л. В., Штрангх И. В. Ядерная фотография. М., Изд-во АН СССР, 1962, 309.

20. Belovitsky G. E., Voronkov A. E., Zdanov G. B., Kolesnikova L. N., Marenkov V. S., Sukhov L. V., Solovjeva M. F., Tretjakova M. I., Chernjavsky M. M. Vth. Int. Conf. on Nucl. Phot. Geneva, CERN, 1964.
21. Воронков А. Е., Жданов Г. В., Сухов Л. В., Соловьева М. Ф., Третьякова М. И., Чернявский М. М. — «Успехи науч. фотогр.», 1966, 12, 137.
22. Долинский И. М., Рагузин Р. М., Шарыгин Н. В., Федорова Н. Н. — ПТЭ, 1966, 4, 51.
23. Goudsmit S. A., Saunderson J. L. — «Phys. Rev.», 1940, 57, 24.
24. Goudsmit S. A., Saunderson J. L. — «Phys. Rev.», 1940, 58, 36.
25. Molière G. — «Z. Naturforsch.», 1947, 2a, 133.
26. Fermi E. — «Z. Physik», 1928, 48, 73.
27. Scott W. T. — «Rev. Mod. Phys.», 1963, 35, 231.
28. Majewski M., Tietz T. — «Phys. Rev.», 1957, 108, 193.
29. Thomas L. H., Umeda K. — «J. Chem. Phys.», 1957, 26, 293.
30. Williams E. J. — «Phys. Rev.», 1940, 58, 292.
31. Hofstadter R. — «Rev. Mod. Phys.», 1956, 28, 214.
32. Olbert S. — «Phys. Rev.», 1952, 87, 319.
33. Annis M., Bridge H. S., Olbert S. — «Phys. Rev.», 1953, 89, 1216.
34. Cooper L. N., Rainwater J. — «Phys. Rev.», 1955, 97, 492.
35. Тер-Микаэлян М. Л. — ЖЭТФ, 1959, 36, 253.
36. Williams E. J. — «Proc. Roy. Soc.», 1939, A169, 531.
37. Росси В. Частицы больших энергий. М., Гостехиздат, 1955.
38. Rossi B., Greisen K. — «Rev. Mod. Phys.», 1941, 13, 240.
39. Компанец А. С. — ЖЭТФ, 1945, 15, 235.
40. Molière G. — «Z. Naturforsch.», 1948, 3a, 78.
41. Snyder H. S., Scott W. T. — «Phys. Rev.», 1949, 76, 220.
42. Lewis H. W. — «Phys. Rev.», 1950, 78, 526.
43. Scott W. T. — «Phys. Rev.», 1952, 85, 245.
44. Solntseff N. — «Nucl. Phys.», 1957, 4, 337.
45. Nigam B. P., Sundaresau M. K., Wu T. Y. — «Phys. Rev.», 1959, 115, 491.
46. Bethe H. A. — «Phys. Rev.», 1953, 89, 1256.
47. Mukherjee S. — «Phys. Rev.», 1967, 162, 254.
48. Hanson A. O., Lanzl L. H., Lyman E. M., Scott H. B. — «Phys. Rev.», 1951, 84, 634.
49. Андреевский А. И., Кульчицкий А. А., Латышев Г. Д. — ЖЭТФ, 1942, 12, 16.
50. Андреевский А. И., Кульчицкий А. А., Латышев Г. Д. — ЖЭТФ, 1943, 6, 279.
51. Voynodic L., Pickup E. — «Phys. Rev.», 1952, 85, 91.
52. Berger M. J. — «Phys. Rev.», 1952, 88, 59.

53. Gottstein K., Menon M. G. K., Mulvey J. H., O'Seallaigh C., Rochat O. — «Phil. Mag.», 1951, 42, 708.
54. Лукин Ю. Т., Такибаев Ж. С., Часников И. Я. — ПТЭ, 1957, 4, 27.
55. Алиханян А. И., Арутюнов Ф. Р. — ЖЭТФ, 1959, 36, 32.
56. Brisbout F. A., Dahanayake C., Engler A., Fowler P. H., Jones P. B. — «Nuovo Cim.», 1956, 3, 1400.
57. Biswas S., Prasad N., Mitra I. S. — «Proc. Ind. Acad. Sci.», 1957, A46, 167.
58. Hossain A., Wotruba M. F., Wataghin A. — «Nuovo Cim.», 1961, 22, 308, 861.
59. Sood P. M., Ahuja S. D. M. — «Ind. J. of Pure Appl. Phys.», 1967, 5, 132.
60. Kamal A. A., Rao G. K., Rao Y. V. — «Nuovo Cim.», 1964, 32, 863.
61. Yash Pal, Ray A. K. — «Nuovo Cim.», 1963, 27, 960.
62. Bozoki G., Gombosi E., Jenik L., Nagy E., Sahini M. Vth Int. Conf. on Nucl. Phot. Geneva, CERN, 1964.
63. Wong E., Jain P. L. — «Nuovo Cim.», 1968, 56a, 922.
64. Fichtel C., Friedlander M. W. — «Nuovo Cim.», 1958, 10, 1032.
65. Калашников Н. П., Рязанов М. И. — ЖЭТФ, 1964, 47, 1055.
66. Калашников Н. П., Рязанов М. И. — ЖЭТФ, 1966, 50, 117.
67. Fowler P. H. — «Phil. Mag.», 1950, 41, 169.
68. Molière G. — «Z. Naturforsch.», 1955, 10a, 177.
69. Moual J. E. — «Phil. Mag.», 1950, 41, 1058.
70. D'Espagnat B. — «Compt. Rend.», 1951, 232, 800.
71. D'Espagnat B. — «J. Phys. et Radium.», 1952, 13, 74.
72. Schonland D. S. — «Proc. Phys. Soc.», 1952, A65, 640.
73. Johnston R. H. W. — «Nuovo Cim. Suppl.», 1956, 4, 456.
74. Biswas S., Georg E. C., Swamy M. S. — «Nuovo Cim. Suppl.», 1954, 12, 361.
75. Гурсунов Р. А., Часников И. Я., Шарипов К. В. Ядерная фотография. М., Изд-во АН СССР, 1962.
76. Пугачев В. С. Теория случайных функций. М., Физматгиз, 1962.
77. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. М., «Мир», 1965.
78. Воинов В. Г., Часников И. Я. — «Изв. АН КазССР, серия физ.-мат.», 1967, 4, 3.
79. Király P. VI Int. Conf. on Nucl. Phot. Florence, 1966.
80. Biswas S., Peters B., Rama B. — «Proc. Ind. Acad. Sci.», 1955, A41, 154.
81. Ekström A. G. — «Arkiv fysik», 1954, 9, 49.
82. Скирда Н. В. — «Ж. науч. и прикл. фотогр. и кинематогр.», 1967, 12, 12.
83. Вайсенберг А. О., Смирнитский В. А., Рабин Н. В. — ПТЭ, 1957, 2, 112.

84. Беловицкий Г. Е., Головин В. Н., Сухов Л. В. — ПТЭ, 1956, 1, 102.
85. Часников И. Я. Материалы совещания по методике толстослойных фотоэмульсий. Дубна, ОИЯИ, 1957.
86. Такибаев Ж. С., Шахворостов В. Н. — ЖЭТФ, 1954, 26, 507.
87. Gottstein K. — «Nuovo Cim. Suppl.», 1954, 12, 619.
88. Greiner D. E. Vth Int. Conf. on Nucl. Phot. Geneva, CERN, 1964.
89. Déraux B. — «Ann. de Phys.», 1961, 6, 86.
90. Déraux B., Tsai-Chü. — «Compt. Rend.», 1959, 249, 2187.
91. Воинов В. Г. — «Изв. АН КазССР, серия физ.-мат.», 1968, 4, 61.
92. Dentan I. P. 2nd Int. Conf. on Nucl. Phot. Montreal, 1959.
93. Kreker U. Vth Int. Conf. on Nucl. Phot. Geneva, CERN, 1964.
94. Barkas W. H., Smith F. M., Birnbaum W. — «Phys. Rev.», 1955, 98, 605.
95. Apostolakis A. J., Major J. V. — «Brit. J. Appl. Phys.», 1957, 8, 9.
96. Гайтинов А. Ш., Избасаров М., Стрельцов И. С., Такибаев Ж. С., Часников И. Я. — ПТЭ, 1966, 3, 54.
97. Debenedetti A., Garelli C. N., Tallone L., Vigone M. — «Nuovo Cim.», 1956, 4, 1142.
98. Часников И. Я., Такибаев Ж. С., Воос Э. Г. — ПТЭ, 1959, 1, 54.
99. Dahl-Jensen E. Korpuskularphotographie, IV. München, 1963.
100. Аكوпова А. Б., Медкунян Л. В., Сальман А. Г. — «Ж. научн. и прикл. фотогр. и кинематогр.», 1967, 12, 266.
101. Fay H. — «Z. Naturforsch.», 1955, 10a, 572.
102. Lohrman E., Teucher M. — «Nuovo Cim.», 1956, 3, 59.
103. Apostolakis A. J., Clarke J. O., Major J. V. — «Nuovo Cim.», 1957, 5, 337.
104. Fisher F. W., Lord J. J. — «Nuovo Cim.», 1959, 7, 44.
105. Часников И. Я., Такибаев Ж. С., Турсунов Р. А., Шарапов К. В. — ПТЭ, 1960, 5, 15.
106. Самойлович Д. М., Вайсенберг А. О., Колганова Э. Д., Песоцкая Е. А., Смирницкий В. А. Ядерная фотография. М., Изд-во АН СССР, 1962.
107. Аكوпова А. Б. — ПТЭ, 1964, 2, 64.
108. Жюдек Б. Ядерная фотография. М., Изд-во АН СССР, 1962.
109. Lavakare P. J., Sudarshan E. C. G. — «Nuovo Cim. Suppl.», 1962, 26, 251.
110. Lagnaux J. P., Renard P. — «Bull. Centre Phys. Nucléaire Univ. Libre Bruxelles.», 1962, 3, 12.

111. Marzari-Chiesa A., Wataghin A. — «Nuovo Cim. Suppl.», 1962, 26, 279.
112. Venkateswar Rao V., Kamal A. A. Vth Int. Conf. on Nucl. Phot. Geneva, CERN, 1964.
113. Шарапов К. В., Турсунов Р. А., Такибаев Ж. С., Воос Э. Г. «Изв. АН КазССР, серия физ.-мат.», 1963, 2, 94.
114. Aditya P. K., Bhatya Y. S., Sood P. M. — «Nuovo Cim.», 1963, 29, 577.
115. Rao G. K., Kamal A. A. Vth Int. Conf. on Nucl. Phot. Geneva, CERN, 1964.
116. Ван-Шу-Фей, Далхажаев Н., Лебедев Р. М., Стрельцов В. Н. Препринт ОИЯИ, P-523. Дубна, 1960.
117. Jones J. J., Kalbach R. M. — «Nuovo Cim.», 1964, 31, 10.
118. Мильцева В. А., Богомолов К. С., Дебердеев М. Ю. Препринт ОИЯИ, 3501. Дубна, 1967.
119. Богомолов К. С., Воинов В. Г., Мильцева В. А., Часников И. Я. Препринт ОИЯИ, 1-3974. Дубна, 1968.
120. Часников И. Я., Ананов З. В., Такибаев Ж. С., Стрельцов И. С. — ЖЭТФ, 1963, 45, 29.
121. Часников И. Я. — Труды ИЯФ АН КазССР, 1960, 3, 64.
122. Kalashnikov N. P. — «Nuovo Cim.», 1966, 45a, 510.
123. Jánossy L., Lee A., Rózsa P. — «Nuovo Cim. Suppl.», 1965, 3, 281.
124. Баранов В. И. — ПТЭ, 1967, 1.
125. Баранов В. И. — ПТЭ, 1968, 4, 219.
126. Fowler P. H., Waddington C. S. — «Phil. Mag.», 1956, 1, 637.
127. Fenyves E., Gombosi E., Jánossy L., Király P., Lee A., Rózsa P. Vth Int. Conf. on Nucl. Phot. Geneva, CERN, 1964.
128. Fenyves E., Gombosi E., Király P. — «Nuovo Cim. Suppl.», 1965, 3, 297.
129. Jánossy L. — «Acta Phys. Hung.», 1957, 7, 385.
130. Худсон Д. Статистика для физиков. М., «Мир», 1967.
131. Jánossy L., Rózsa P. — «Nuovo Cim.», 1961, 19, 817.
132. Koshiha M., Karlon M. F. — «Phys. Rev.», 1955, 97, 91.
133. Friedlander E. M., Marcu M., Friedlander J. Vth Int. Conf. on Nucl. Phot. Geneva, CERN, 1964.
134. Patou C., Khan M. R. — «Compt. Rend.», 1967, 264, 1275.
135. Альпер З., Фридлендер Э. — ПТЭ, 1959, 6, 39.
136. Лойнова М., Тучек Я. Препринт ОИЯИ, 1-3974. Дубна, 1968.
137. Lipkin H. J., Rosendorff S., Yekutieli G. — «Nuovo Cim.», 1955, 2, 1015.

138. Lipkin H. J., Rosendorff S., Yekutieli G. — «Bull. Research Council Israel», 1955, 5a, 88.
 139. Dado S., Rosendorff S. — «Nuovo Cim.», 1967, 50b, 238.
 140. Cosyns M. G. E. — «Bull. Centre Phys. Nucléaire Univ. Libre Bruxelles», 1951, 30, 1.
 141. Berger M. J., Lord J. J., Shein M. — «Phys. Rev.», 1951, 83, 850.
 142. Menon M. G. K., O'Ceallaigh C., Rochat O. — «Phil. Mag.», 1951, 42, 932.
 143. Agnese A., Paoli G., Scotto M., Wataghin A. — «Acta Phys. Hung.», 1968, 25, 71.
 144. Бозоки Д., Гомбоши Е. — ПТЭ, 1963, 6, 61.
 145. Chemel B., Tsai-Chü. — «Compt. Rend.», 1959, 249, 1494.
 146. Seod P. M., Chohan V. S. Vth Int. Conf. on Nucl. Phot. Geneva, CERN, 1964.
 147. Aditya P. K. — «Nuovo Cim.», 1964, 31, 473.
 148. Aditya P. K. — «Ind. J. Phys.», 1966, 40, 238.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От авторов	3
Глава I. Метод ядерных фотографических эмульсий	5
§ 1. Толстослойные ядерные фотографические эмульсии	6
§ 2. Преимущества и недостатки фотометода	7
§ 3. Приборы для измерения многократного рассеяния	10
Глава II. Теория многократного кулоновского рассеяния	13
§ 1. Сечение упругого кулоновского рассеяния	—
§ 2. Многократное кулоновское рассеяние	19
§ 3. Формула для определения энергии частиц по многократному кулоновскому рассеянию	30
§ 4. Корреляционные свойства вторых разностей координат	38
Глава III. Шумы, дисторсии и ложное рассеяние	48
§ 1. Шумы	—
§ 2. Дисторсии	57
§ 3. Ложное рассеяние	65
Глава IV. Методы исключения ложного и оценки кулоновского рассеяния	78
§ 1. Статистическое вычитание ложного рассеяния	—
§ 2. Метод кратных ячеек	79
§ 3. Оценка кулоновского рассеяния с помощью параметра ρ	81
§ 4. Метод максимального правдоподобия	83
§ 5. Метод корреляционных моментов	94
§ 6. Метод относительного рассеяния	100
Глава V. Постоянная многократного кулоновского рассеяния	104
§ 1. Расчет	—
§ 2. Экспериментальные значения	109
Заключение	117
Приложение	119
Литература	125

«В

50т

Lib

19т

«Р

А.

24т

Рн

ВАСИЛИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ ВОИНОВ,
ИВАН ЯКОВЛЕВИЧ ЧАСНИКОВ

**МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ
В ЯДЕРНЫХ ФОТОЭМУЛЬСЯХ**

*Утверждено к печати Ученым советом Института
ядерной физики Академии наук Казахской ССР*

Редактор *С. Е. Цыганова*
Худож. редактор *И. Д. Суцких*
Обложка художника *А. С. Воробьева*
Техн. редактор *Л. И. Шашкова*
Корректор *М. С. Титова*

Сдано в набор 2/IV 1989 г. Подписано к печати 18/VI 1989 г.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага № 2. Печ. л. 8,25.
Уч.-изд. л. 9. Тираж 1480. УГ02861.

Цена 1 р. 10 к.

Типография издательства «Наука», г. Алма-Ата, ул. Шенченко, 28
Зак. 46.