

**Б.М.Барбашов
В.В.Нестеренко**

**МОДЕЛЬ
РЕЛЯТИВИСТСКОЙ
СТРУНЫ
в физике адронов**



МОСКВА
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ
1987

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
<i>Глава 1.</i> Функционал действия для релятивистской струны и лагранжев формализм	5
1. Релятивистская струна в физике элементарных частиц	5
2. Действие для релятивистской струны	8
3. Принцип Гамильтона и уравнения движения	14
4. Решение уравнений движения рядами Фурье. Ковариантный формализм	21
5. Нековариантный лагранжев формализм	25
6. Решение задачи Коши для уравнений движения релятивистской струны в лагранжевом формализме	28
7. Примеры движений релятивистской струны	34
<i>Глава 2.</i> Гамильтонов формализм и квантование	36
8. Связи и уравнения движения в фазовом пространстве	36
9. Гамильтонова теория релятивистской струны с калибровочными условиями. Нековариантное квантование	41
10. Ковариантный гамильтонов формализм и ковариантное квантование	49
11. Квантовая теория релятивистской струны Рорлиха	52
<i>Глава 3.</i> Струна с массами на концах. Заряженная струна	55
12. Теория ограниченного класса движений релятивистской струны с массами на концах	55
13. Некоторые точные решения для струны с массами на концах	62
14. Бесконечная струна, нагруженная точечной массой	68
15. Нерелятивистский предел в теории струны с массами на концах. Струна с закрепленными концами	72
16. Релятивистская струна во внешнем электромагнитном поле	76
17. Ограниченный класс движений струны с массами и зарядами на концах в постоянном однородном электромагнитном поле	86
<i>Глава 4.</i> Геометрический подход в теории релятивистской струны	89
18. Общие сведения из теории поверхностей	89
19. Минимальные поверхности	95
20. Нелинейные уравнения в геометрической теории струны и их общие решения	99
21. Исследование солитонных решений уравнения Лиувилля. Квазиклассическое квантование	106
22. Параметризация $t = \tau$ в теории струны	111
23. Калибровочный произвол в выборе базиса на мировой поверхности струны	115
24. Релятивистская струна в пространстве-времени де Ситтера	119
25. Обобщение струнной модели в геометрическом подходе	127
<i>Глава 5.</i> Связь релятивистской струны с полевыми моделями. Обобщение струнного подхода к физике адронов	132
	175

26. Струноподобные решения классических полевых уравнений	132
27. Струны в теории магнитных зарядов Дирака	133
28. Нелинейные модели Борна-Иффельда и релятивистская струна	136
29. Струна и нелинейная двумерная сигма-модель	138
30. Метод квантования релятивистской струны, предложенный Поляковым	142
31. Струнная модель бариона	146
32. Спиновая струна и суперструна	149
33. Некоторые обобщения струнной модели	155
34. Релятивистские струны в квантовой хромодинамике	159
Заключение	161
<i>Приложение А.</i> Дуальные модели	163
<i>Приложение Б.</i> Тожества Нетер в теории струны	166
Список литературы	168

Барбашов Б. М., Нестеренко В. В. Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987. 176 с.

Дано систематическое изложение теории релятивистской струны и различных ее модификаций. Исследуются классическая и квантовая динамика свободной струны, поведение струны во внешнем электромагнитном поле, струна с точечными массами на концах, струна в пространстве-времени с кривизной, спиновая струна, суперструна и барионная струна. Рассмотрен геометрический подход к модели струны, базирующийся на дифференциальной геометрии вложенных многообразий. Исследована связь релятивистской струны с полевыми моделями: квантовой хромодинамикой, нелинейной сигма-моделью, моделью Борна-Инфельда. Изложена квантовая теория струны, использующая нелинейное уравнение Лиувилля.

Для научных работников в области физики элементарных частиц, а также для аспирантов и студентов старших курсов физических факультетов университетов, специализирующихся по физике элементарных частиц и по математической физике.

Табл. 2. Ил. 9. Библиогр. 134.

Рецензент Л. Д. Соловьев

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Борис Михайлович Барбашов
Владимир Витальевич Нестеренко

МОДЕЛЬ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ В ФИЗИКЕ АДРОНОВ

Редактор З. Д. Андреевко. Художественные редакторы А. А. Белоус, А. Т. Кирьянов
Технические редакторы Г. Н. Лядохина, Т. Н. Тюрина. Корректор С. Ю. Торокина
Операторы М. А. Панфилова, Н. С. Потемина

ИБ №1260

Набор выполнен в Энергоатомиздате на Композере ИБМ-82. Подписано в печать 27.06.86. Т-16332. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная №2. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,23. Усл. кр.-отт. 10,46. Уч.-изд. л. 11,55. Тираж 2150 экз. Заказ 3162. Цена 1р. 70к. Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10
Московская типография №9 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
109033, Москва, Ж-33, Волочаевская ул., 40

Б 1704070000-028 12-87
051 (01) -87

© Энергоатомиздат, 1987

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современные представления о строении адронов и механизме их взаимодействия привели к изучению динамики одномерно-протяженного объекта — релятивистской струны. Модель релятивистской струны дает наглядную картину удержания кварков в адронах, к которой приводят весьма правдоподобные рассуждения в рамках квантовой хромодинамики. Кроме того, релятивистская струна возникает в дуально-резонансном подходе к физике элементарных частиц, в теории монополей, в нелинейных моделях Борна-Инфельда. В последние годы суперсимметричное обобщение струнной модели рассматривается как весьма обнадеживающий подход к объединению всех фундаментальных взаимодействий, включая и гравитацию. Теория суперструн в большой степени базируется на аппарате, развитом для описания адронных струнных моделей.

Книга посвящена систематизированному изложению модели релятивистской струны и различных ее модификаций. При этом в качестве основной области приложений данной модели мы считали адронную физику. Но тем не менее в книге изложена и суперструна, а в заключении кратко обсуждаются возможные применения суперструнной теории к объединению всех фундаментальных взаимодействий.

Первые исследования по динамике релятивистской струны, выполненные в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований в Дубне Н. А. Черниковым и одним из авторов этой книги еще в 1965 г., нашли самую горячую поддержку и одобрение Дмитрия Ивановича Блохинцева, который живо интересовался всеми нестандартными подходами к физике микромира и активно работал сам в этих направлениях. Хорошо известно его высказывание: "Фактов всегда достаточно — не хватает фантазии".

Несмотря на многолетнюю историю модели релятивистской струны, приходится констатировать, что законченной квантовой теории этого объекта еще нет. Поэтому предлагаемая вниманию читателей книга не есть изложение завершенной, вполне устоявшейся теории. Скорее, ее следует рассматривать как попытку осветить различные подходы к данной проблеме, которые по нашему мнению заслуживают внимания.

Часть результатов, в особенности касающихся классической теории струны, строго установлены, и они, несомненно, сохранят свое значение

и при дальнейшем развитии теории. Это — линейно растущий с расстоянием потенциал, порождаемый струной, линейные асимптотики траекторий Редже, особенности на мировой поверхности струны и др.

О том, для кого предназначена наша книга, и о стиле изложения, которого мы старались придерживаться, говорит следующая цитата:

”Многие современные научные сочинения написаны неким полумистическим языком как бы специально для того, чтобы создать у читателя тягостное ощущение постоянного присутствия какого-то супермена. Данная книга выполнена в скромном стиле и предназначена для обычных читателей”. (Л а н ц о ш К. Вариационные принципы механики. — М.: Мир, 1965, с. 11).

На отборе материала для данной книги, несомненно, отразились наши интересы. Помимо наиболее важных, с нашей точки зрения, фактов в теории релятивистской струны мы включили в книгу исследование тех вопросов, которыми занимались сами. Часть результатов получена нами в соавторстве с А. М. Червяковым, А. Л. Кошкарковым, О. М. Федоренко. Мы выражаем им свою искреннюю признательность.

Авторы

ГЛАВА 1

ФУНКЦИОНАЛ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ И ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ

1. Релятивистская струна в физике элементарных частиц

Экспериментальные данные по высокоэнергетическому взаимодействию элементарных частиц, получаемые на современных ускорителях, все более убедительно свидетельствуют о том, что физика адронов описывается квантовой хромодинамикой (КХД) [1]. Фундаментальными объектами в этой теории являются спинорные поля, сопоставляемые с кварками, которые взаимодействуют с неабелевыми калибровочными полями безмассовых векторных глюонов. Адроны трактуются как связанные состояния кварков. В рамках КХД удастся объяснить основную особенность поведения кварков, а именно то, что на малых расстояниях они практически не взаимодействуют друг с другом (асимптотическая свобода). Однако, могут ли кварки существовать в свободном состоянии или нет — этот принципиальный вопрос в рамках КХД остается нерешенным.

Весьма вероятно, что при расстоянии между кварками, приближающемся к размеру адрона, энергетически более выгодны такие конфигурации глюонных полей, когда эти поля не заполняют все пространство (как в электродинамике), а концентрируются вдоль линий, соединяющих кварки [2]. Энергия двух кварков, связанных такой трубкой глюонного поля, пропорциональна расстоянию между ними. Следовательно, силы притяжения между кварками не убывают с расстоянием, а остаются постоянными. Поэтому никакое внешнее воздействие не может разорвать эту связь и привести к рождению свободного кварка. Эти рассуждения в современной квантовой хромодинамике постулируются как гипотеза о невыветании кварков. Важной поддержкой этой гипотезы, помимо качественных рассуждений в рамках КХД, является отсутствие экспериментальных указаний на существование свободных кварков.

Использование асимптотической свободы и гипотезы о невыветании кварков позволяет описывать в КХД процессы с большими поперечными импульсами, рождение лептонных пар, струйные процессы в e^+e^- — аннигиляции, т. е. такие реакции, в которых детали образования конечных состояний из кварков и глюонов несущественны. Описание спектра масс адронов и эксклюзивных процессов находится за пределами возможностей современного аппарата КХД.

Примером одномерных струнных конфигураций полей, которые уже ранее встречались в физике, являются магнитные вихри в теории сверх-

и при дальнейшем развитии теории. Это — линейно растущий с расстоянием потенциал, порождаемый струной, линейные асимптотики траекторий Редже, особенности на мировой поверхности струны и др.

О том, для кого предназначена наша книга, и о стиле изложения, которого мы старались придерживаться, говорит следующая цитата:

”Многие современные научные сочинения написаны неким полумистическим языком как бы специально для того, чтобы создать у читателя тягостное ощущение постоянного присутствия какого-то супермена. Данная книга выполнена в скромном стиле и предназначена для обычных читателей”, (Л а н ц о ш К. Вариационные принципы механики. — М.: Мир, 1965, с. 11).

На отборе материала для данной книги, несомненно, отразились наши интересы. Помимо наиболее важных, с нашей точки зрения, фактов в теории релятивистской струны мы включили в книгу исследование тех вопросов, которыми занимались сами. Часть результатов получена нами в соавторстве с А. М. Червяковым, А. Л. Кошкарковым, О. М. Федоренко. Мы выражаем им свою искреннюю признательность.

Авторы

ГЛАВА 1

ФУНКЦИОНАЛ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ И ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ

1. Релятивистская струна в физике элементарных частиц

Экспериментальные данные по высокоэнергетическому взаимодействию элементарных частиц, получаемые на современных ускорителях, все более убедительно свидетельствуют о том, что физика адронов описывается квантовой хромодинамикой (КХД) [1]. Фундаментальными объектами в этой теории являются спинорные поля, сопоставляемые с кварками, которые взаимодействуют с неабелевыми калибровочными полями безмассовых векторных глюонов. Адроны трактуются как связанные состояния кварков. В рамках КХД удается объяснить основную особенность поведения кварков, а именно то, что на малых расстояниях они практически не взаимодействуют друг с другом (асимптотическая свобода). Однако, могут ли кварки существовать в свободном состоянии или нет — этот принципиальный вопрос в рамках КХД остается нерешенным.

Весьма вероятно, что при расстоянии между кварками, приближающемся к размеру адрона, энергетически более выгодны такие конфигурации глюонных полей, когда эти поля не заполняют все пространство (как в электродинамике), а концентрируются вдоль линий, соединяющих кварки [2]. Энергия двух кварков, связанных такой трубкой глюонного поля, пропорциональна расстоянию между ними. Следовательно, силы притяжения между кварками не убывают с расстоянием, а остаются постоянными. Поэтому никакое внешнее воздействие не может разорвать эту связь и привести к рождению свободного кварка. Эти рассуждения в современной квантовой хромодинамике постулируются как гипотеза о невыветании кварков. Важной поддержкой этой гипотезы, помимо качественных рассуждений в рамках КХД, является отсутствие экспериментальных указаний на существование свободных кварков.

Использование асимптотической свободы и гипотезы о невыветании кварков позволяет описывать в КХД процессы с большими поперечными импульсами, рождение лептонных пар, струйные процессы в e^+e^- — аннигиляции, т. е. такие реакции, в которых детали образования конечных состояний из кварков и глюонов несущественны. Описание спектра масс адронов и эксклюзивных процессов находится за пределами возможностей современного аппарата КХД.

Примером одномерных струнных конфигураций полей, которые уже ранее встречались в физике, являются магнитные вихри в теории сверх-

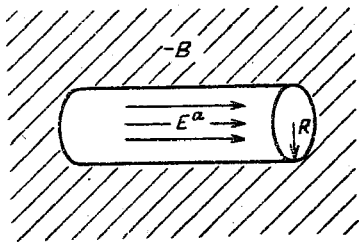


Рис. 1. Трубка хромозлектрического потока радиусом R в вакууме КХД, плотность энергии которого отрицательна и равна $-B$

проводимости. При напряженности, большей некоторого критического значения, внешнее магнитное поле в виде тонких ступок магнитосиловых линий начинает проникать в сверхпроводник второго рода. Следует отметить, что непосредственно в хромодинамике струноподобные решения не были получены, однако в ряде более простых полевых моделей такие решения найдены [3].

Причина возникновения локализованных вдоль линии конфигураций глюонного поля — это наличие вакуумных вдоль линии конфигураций внешнего давления на глюонную трубку. Поперечные размеры трубки (ее радиус) определяются равновесием внешнего давления вакуумных полей и давления хромозлектрического поля внутри трубки. Рассмотрим отрезок такой трубки (рис. 1). Обычно предполагается, что вакуумные поля в КХД имеют отрицательную плотность энергии ($-B$). На этом предположении строятся модели кварковых мешков. Радиус трубки глюонного поля в струнной модели адронов можно получить минимизацией энергии ϵ , приходящейся на единицу длины трубки:

$$\epsilon = (1/2) |E^a|^2 \pi R^2 + B \pi R^2. \quad (1.1)$$

Здесь первое слагаемое — это классическая энергия глюонного поля внутри трубки. Для простоты оно предполагается однородным. Второе слагаемое в (1.1) представляет собой взятую с обратным знаком энергию вакуумных полей, вытесненных трубкой глюонного поля. Напряженность хромозлектрического поля $|E^a|$ задается потоком Φ этого поля, генерируемым парой кварк — антикварк:

$$|E^a| = \Phi / (\pi R^2). \quad (1.2)$$

Поперечные размеры трубки определяются из требования минимума энергии, приходящейся на единицу ее длины, $\partial \epsilon / \partial R = 0$. Радиус трубки, получаемый из этого условия,

$$R_0 = (\Phi / (2\pi^2 B))^{1/4}. \quad (1.3)$$

Такая конфигурация глюонной трубки устойчива, так как

$$\partial^2 \epsilon / \partial R^2 |_{R=R_0} = 8\pi B > 0. \quad (1.4)$$

Это рассмотрение — чисто классическое. Полной квантовой теории этого явления, конечно, нет. Расчеты в однопетлевом приближении [4] показывают, что в общих чертах эта картина сохраняется и на кван-

товом уровне. Если поток хромозлектрического поля внутри глюонной трубки мал по сравнению с критическим значением, то квантовые флюктуации также малы и их роль сводится лишь к уменьшению плотности энергии, приходящейся на единицу длины глюонной трубки.

Конфигурации глюонных полей, локализованные вдоль линий, соединяющих кварки, моделирует релятивистская струна с точечными массами на концах. Модель релятивистской струны значительно проще, чем такая чрезвычайно сложная квантовополевая теория, как хромодинамика, вместе с тем струнная модель воспроизводит основные предсказания, полученные в полевом подходе [5]. Поэтому релятивистскую струну можно использовать как сравнительно простую модель составного адрона, которая согласуется с хромодинамикой. В частности, релятивистская струна, связывающая две массивные частицы, приводит к потенциалу между ними, линейно растущему с расстоянием.

Действие релятивистской струны очевидно должно представлять собой соответствующее приближение к действию неабелева глюонного поля. Однако уже одно требование релятивистской инвариантности и аналогия с действием точечной частицы позволяют написать действие струны практически однозначно. Действие релятивистской струны выбирается пропорциональным площади мировой поверхности, покрываемой струной в процессе своего движения в пространстве Минковского.

Следует отметить, что модель релятивистской струны впервые возникла не в рамках КХД, а рассматривалась ранее в других разделах теоретической физики: в электродинамике с магнитными зарядами Дирака [6], в нелинейных полевых моделях типа Борна—Инфельда [7], в дуально-резонансных моделях адронов [8–12], в моделях мешков [13]. Связь релятивистской струны с монополями Дирака и полями Борна—Инфельда обсуждается ниже, в § 27, 28. Здесь же кратко рассмотрим релятивистскую струну как динамическую основу дуально-резонансных моделей.

Дуально-резонансные модели (см. приложение А) являются "вершиной" так называемого S -матричного подхода к адронной физике. В этом подходе делается попытка без лагранжиана взаимодействия и динамических уравнений сразу построить амплитуду рассеяния, описывающую взаимодействия адронов, исходя лишь из таких общих принципов, как причинность, релятивистская инвариантность, унитарность и аналитичность. Как известно, в полной мере эта программа до сих пор не реализована. Наиболее интересные с физической точки зрения адронные амплитуды, полученные в этом подходе, дают дуально-резонансные модели [9, 10]. Адронная амплитуда, в этих моделях должна удовлетворять помимо перечисленных выше требований еще и принципу дуальности. В формулировке понятия дуальности важную роль сыграли правила сумм при конечных энергиях, полученные А. А. Логуновым, Л. Д. Соловьевым и А. Н. Тавхелидзе в 1967 г. [14].

Эти правила связали низкоэнергетические резонансы с параметрами, описывающими асимптотическое поведение амплитуды рассеяния.

В дуальном подходе предполагается, что адронный спектр — эквидистантный и состоит из бесконечного числа резонансов с нулевой шириной. Этот спектр генерируется бесконечным счетным набором осцилляторных операторов рождения и уничтожения: a_n^\pm , a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, каждый из которых является лоренцевским вектором. Такой набор операторов можно получить при квантовании одномерно-протяженного релятивистского объекта конечного размера (струны, нити). Прямое обобщение на релятивистский случай обычной линейной струны с позиций дуальных моделей не годится, так как из ее квадратичного лагранжиана не следуют ограничения на физические векторы состояний, которые можно было бы отождествить с условиями Вирасоро в дуальных моделях. Поэтому для релятивистской струны был предложен нелинейный лагранжиан [15].

Релятивистская струна заслуживает внимания и вне связи с физикой элементарных частиц, как пример простейшего протяженного релятивистского объекта [16].

Таким образом, исследование модели релятивистской струны представляет несомненный интерес для современной теоретической физики.

2. Действие для релятивистской струны

К модели релятивистской струны наиболее просто можно прийти, обобщая релятивистскую динамику точки на одномерно-протяженные объекты. В настоящее время кажется удивительным, почему такое обобщение не было сделано сразу же после создания специальной теории относительности. Тем более, что проблема релятивистского описания протяженных тел является предметом постоянных исследований с момента создания этой теории по настоящее время.

Как хорошо известно, релятивистская динамика точки с массой m и координатами $\mathbf{r}(t)$ задается функцией действия

$$S_T = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2/c^2} dt, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$; c — скорость света. Пусть теперь мы имеем одномерно-протяженный объект, который для простоты будем называть релятивистской струной. Его положение в пространстве в момент времени t задается трехмерной вектор-функцией $\mathbf{r}(t, \sigma)$, $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. Параметр σ "нумерует" точки струны. Далее, предположим, что вдоль струны однородно распределена масса с плотностью на единицу длины ρ_0 . Теперь предположим, что внутренние силы между соседними точ-

ками струны таковы, что они не дают вклад в действие (например, среди внутренних сил нет обычных сил упругости). Тогда действие релятивистской струны получаем, интегрируя (2.1) вдоль всей струны:

$$S_{\text{стр}} = -\rho_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dl \sqrt{1 - v_1^2/c^2}. \quad (2.2)$$

Здесь $\mathbf{v}_1(t, \sigma)$ — нормальная составляющая вектора скорости струны в точке σ ,

$$\mathbf{v}(t, \sigma) = \frac{\partial \mathbf{r}(t, \sigma)}{\partial t} - \mathbf{k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \right), \quad (2.3)$$

где \mathbf{k} — касательный вектор к струне в точке σ :

$$\mathbf{k} = (\partial \mathbf{r} / \partial \sigma) / (\partial \mathbf{r} / \partial \sigma)^2; \quad (2.4)$$

dl — дифференциальный элемент длины струны,

$$dl = d\sigma \sqrt{(\partial \mathbf{r} / \partial \sigma)^2}. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (2.2), получаем

$$S_{\text{стр}} = -\rho_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \sqrt{(\partial \mathbf{r} / \partial \sigma)^2 (1 - v^2/c^2)}. \quad (2.6)$$

В действие струны введена только нормальная составляющая скорости точек струны, т. е. внутренняя динамика струны не рассматривается.

Недостатком формулы (2.6), так же как и (2.1), является отсутствие явной релятивистской ковариантности. Напомним, как это устраняется в случае точечной частицы. Время t в (2.1) будем считать функцией некоторого параметра τ , тогда функциями τ будут и координаты точки $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t(\tau)) = \mathbf{x}(\tau)$. Лоренцевский вектор $x^\mu(\tau) = \{ct(\tau), \mathbf{x}(\tau)\}$ задает траекторию материальной точки в пространстве-времени Минковского. После такой замены формула (2.1) принимает вид

$$S_T = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\dot{x}^2} d\tau, \quad (2.7)$$

где $\dot{x}^\mu = dx^\mu(\tau)/d\tau$; $\mu = 0, 1, 2, 3$; $\dot{x}^2 = c^2 \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{x}}^2$.

Действие точечной частицы в форме (2.7) имеет наглядную геометрическую интерпретацию: оно пропорционально длине мировой траектории частицы.

Сделаем аналогичную замену в действии струны (2.2). Будем считать время t в этой формуле функцией некоторого нового параметра τ и старого параметра σ . В результате и координаты струны становятся функциями этих параметров: $\mathbf{r}(t, \sigma) = \mathbf{r}(t(\tau, \sigma), \sigma) = \mathbf{x}(\tau, \sigma)$. Можно ввести в рассмотрение лоренцевский вектор, задающий четырехмерные координаты струны в пространстве-времени $x^\mu(\tau, \sigma) = \{ct(\tau, \sigma), \mathbf{x}(\tau, \sigma)\}$. Сделаем

* С таким же успехом можно говорить о распределении вдоль струны энергии с линейной плотностью $\rho_0 c^2$, не конкретизируя ее природу.

замену переменных интегрирования в формуле (2.2):

$$\left. \begin{aligned} t &= t(\tau, \sigma); \quad \sigma \rightarrow \sigma; \\ dt d\sigma &= \frac{\partial(t, \sigma)}{\partial(\tau, \sigma)} d\tau d\sigma = \dot{t} d\tau d\sigma; \\ \partial\tau/\partial t &= \dot{x}/\dot{t}, \quad \partial\tau/\partial\sigma = x' - (t'/\dot{t})\dot{x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Здесь используются следующие сокращенные обозначения частных производных по параметрам τ и σ :

$$\dot{f}(\tau, \sigma) = \partial f(\tau, \sigma)/\partial\tau; \quad f'(\tau, \sigma) = \partial f(\tau, \sigma)/\partial\sigma. \quad (2.9)$$

После подстановки (2.3), (2.4) и (2.8) в (2.2) действие струны принимает релятивистски инвариантный вид:

$$S_{\text{стр}} = -\gamma \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \int_{\tau_1(\sigma)}^{\tau_2(\sigma)} d\tau \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}, \quad (2.10)$$

где $\gamma = \rho_0 c$. Функции $\tau_i(\sigma)$, $i = 1, 2$ задают область интегрирования в новых переменных τ, σ .

Формула (2.10) имеет простой геометрический смысл: с точностью до множителя $-\gamma$ она представляет собой функционал площади мировой поверхности струны, заданной параметрически: $x^\mu(\tau, \sigma)$. Действительно, пусть в евклидовом пространстве размерностью больше 2 параметрически задана поверхность $x = x(\tau, \sigma)$. Площадь параллелограмма, образованного пересечением бесконечно близких координатных линий на этой поверхности: $\sigma = \sigma_0$, $\sigma = \sigma_0 + d\sigma$ и $\tau = \tau_0$, $\tau = \tau_0 + d\tau$, определяется, очевидно, формулой

$$d\Sigma_1 = |\dot{x}| |x'| \sin a \cdot d\tau d\sigma,$$

где $a(\tau, \sigma)$ — угол между двумя касательными векторами \dot{x} и x' в точке (τ_0, σ_0) . С помощью элементарных преобразований выражение для $d\Sigma_1$ легко привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} d\Sigma_1 &= |\dot{x}| \cdot |x'| \sqrt{1 - \cos^2 a} d\tau d\sigma = \\ &= |\dot{x}| \cdot |x'| \sqrt{1 - \frac{(\dot{x}x')^2}{\dot{x}^2 x'^2}} d\tau d\sigma = \sqrt{\dot{x}^2 x'^2 - (\dot{x}x')^2} d\tau d\sigma. \end{aligned}$$

Теперь легко записать площадь поверхности в евклидовом пространстве, заданной параметрически: $x^\mu(\tau, \sigma)$. Параметры τ, σ изменяются в некоторой двумерной области Ω , лежащей в плоскости τ, σ . Площадь Σ_1 такой поверхности определяется интегралом

$$\Sigma_1 = \iint_{\Omega} d\tau d\sigma \sqrt{\dot{x}^2 x'^2 - (\dot{x}x')^2}.$$

Эта формула непосредственно обобщается на поверхности в псевдоевклидовом пространстве, заданные параметрически $x^\mu(\tau, \sigma)$, $\{\tau, \sigma \in$

$\in \Omega\}$:

$$\Sigma = \iint_{\Omega} d\tau d\sigma \sqrt{|\dot{x}^2 x'^2 - (\dot{x}x')^2|}.$$

Таким образом, действие релятивистской струны (2.10) равно площади ее мировой поверхности $x^\mu(\tau, \sigma)$ в пространстве Минковского, умноженной на константу $-\gamma$. Учитывая геометрический характер действия струны, мы должны вести интегрирование в формуле (2.10) по некоторой двумерной области Ω , принадлежащей плоскости τ, σ :

$$S_{\text{стр}} = -\gamma \iint_{\Omega} d\Sigma, \quad (2.11)$$

где

$$d\Sigma = \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}x'^2} d\tau d\sigma.$$

Естественно считать, что Ω представляет собой часть плоскости τ, σ , ограниченной последовательностью кривых T_1, C_2, T_2, C_1 (рис. 2,а). В этом случае инвариантность действия (2.11) при произвольных заменах параметров τ, σ

$$\tau \rightarrow \bar{\tau} = f_1(\tau, \sigma); \quad \sigma \rightarrow \bar{\sigma} = f_2(\tau, \sigma) \quad (2.12)$$

очевидна. Конкретный вид области Ω не существует, но уравнения Эйлера удобно решать для области Ω , имеющей форму прямоугольника (рис. 2,б). В некоторых случаях бывает целесообразно рассмотреть вначале область Ω в виде "криволинейной трапеции" (рис. 2,в) и так выбрать условия калибровки на динамические переменные струны, чтобы они согласовывались с требованием $\dot{\sigma}_i(\tau) = 0$, $i = 1, 2$. Характерным примером здесь служит задача о движении во внешнем электромагнитном поле релятивистской струны с зарядами на концах (см. § 16).

При выводе формулы (2.10) или (2.11) предполагалось, что нормальная составляющая скорости точек струны $v_{\perp}(t, \sigma)$ меньше скорости света $c = 1$:

$$|v_{\perp}| < 1. \quad (2.13)$$

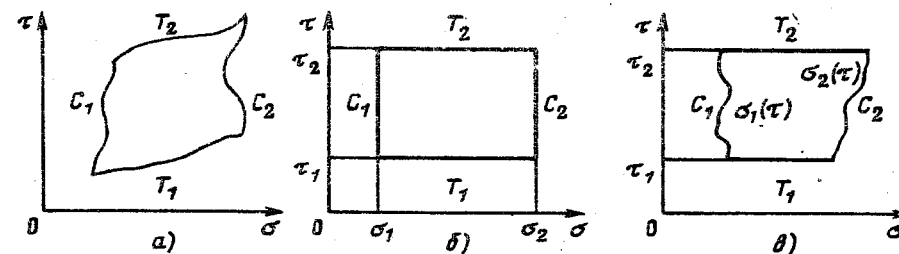


Рис. 2. Различные формы области Ω изменения параметров τ и σ в функционале действия релятивистской струны

После замены переменных (2.8) это условие переходит, очевидно, в требование положительности подкоренного выражения в (2.10):

$$(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2 > 0. \quad (2.14)$$

Это неравенство означает, что если вершина светового конуса лежит на мировой поверхности струны, то касательная плоскость к этой поверхности, проходящая через вершину конуса, пересекает его по двум прямым, т. е. мировая поверхность струны является времениподобной. Действительно, направление линий пересечения касательной плоскости со световым конусом задается изотропным лоренцевским вектором n^μ , который представляет собой линейную комбинацию касательных векторов к мировой поверхности струны \dot{x}^μ и x'^μ : $n^\mu = a\dot{x}^\mu + bx'^\mu$, где a и b — некоторые функции параметров τ и σ . Уравнение

$$n^2 = a^2 \left(\dot{x} + \frac{b}{a} x' \right)^2 = a^2 \left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}x' \frac{b}{a} + x'^2 \frac{B^2}{a^2} \right) = 0 \quad (2.15)$$

дает два различных значения для отношения b/a , если выполнено условие (2.14).

Такое расположение по отношению к световому конусу плоскостей, касательных к мировой поверхности струны означает, что на любой из них базис образован двумя лоренцевскими векторами, один из которых времениподобный, а другой — пространственноподобный. Следовательно, в каждой точке мировой поверхности струны существуют два касательных вектора, один из которых времениподобный, а второй пространственноподобный. Будем считать, что времениподобное направление на мировой поверхности струны задается вектором $\dot{x}^\mu(\tau, \sigma)$, т. е. в используемой нами метрике

$$\dot{x}^2 = (\dot{x}^0)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2 > 0. \quad (2.16)$$

Физически это означает, что *полная скорость точек струны меньше скорости света*. Это сразу следует из формул (2.6):

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)^2 = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{\dot{t}^2} < 1, \text{ если } \dot{x}^2 = \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{x}}^2 > 0. \quad (2.17)$$

Вторым базисным вектором на касательной плоскости к мировой поверхности струны является $x'^\mu = \partial x^\mu / \partial \sigma$. Из рассуждений, изложенных выше, следует, что этот вектор пространственноподобный:

$$x'^2 < 0. \quad (2.18)$$

Это означает, что всегда можно выбрать такую систему отсчета, в которой будут покоиться две бесконечно близкие точки на струне с координатами σ и $\sigma + d\sigma$. При этом параметр τ считается постоянным.

Таким образом, из условий (2.13) или (2.14) следует, что внутренняя метрика на мировой поверхности струны должна быть гиперболического типа. Эта метрика определяет квадрат интервала между двумя

бесконечно близкими точками на мировой поверхности струны $x^\mu(\tau, \sigma)$:

$$ds^2 = (\dot{x}^\mu d\tau + x'^\mu d\sigma)^2 = \dot{x}^2 d\tau^2 + 2\dot{x}x' d\tau d\sigma + x'^2 d\sigma^2 = \sum_{ij=0,1} g_{ij}(u) du^i du^j, \quad (2.19)$$

где

$$u^0 = \tau; \quad u^1 = \sigma; \quad g_{00} = \dot{x}^2; \quad g_{01} = \dot{x}x'; \quad g_{11} = x'^2. \quad (2.20)$$

Условия (2.14), (2.16) и (2.18) записываются теперь так:

$$g = \det(g_{ij}) < 0; \quad g_{00} > 0; \quad g_{11} < 0. \quad (2.21)$$

Следует отметить, что условия (2.16) и (2.18) не являются репараметризационно-инвариантными, т. е. они могут выполняться только в некоторой фиксированной системе координат τ, σ . При переходе к другим параметрам τ, σ эти условия в общем случае нарушаются. В отличие от них условие (2.14), означающее, что мировая поверхность струны времениподобная, инвариантно при произвольных заменах параметров τ, σ (2.12), так как определитель метрического тензора g помножается в этом случае на квадрат якобиана $\partial(\bar{\tau}, \bar{\sigma}) / \partial(\tau, \sigma)$.

Используя определение внутренней метрики на мировой поверхности струны (2.19), (2.20), действие (2.11) можно записать так:

$$S_{\text{стр}} = -\gamma \iint_{\Omega} \sqrt{-g} d\tau d\sigma. \quad (2.22)$$

Действие (2.22) получило в литературе название "действие релятивистской струны Намбу—Гото". Но в физике элементарных частиц оно рассматривалось впервые в работе [7] в связи с исследованием нелинейных квантовополевых моделей Борна—Инфельда (см. § 28).

Предложенный здесь вывод функционала действия для релятивистской струны (2.22), конечно, нельзя считать вполне строгим. Действительно, мы совершенно не рассматривали внутреннюю динамику струны, т. е. взаимодействие соседних точек струны друг с другом. Такой вывод следует рассматривать скорее как некоторое наводящее соображение, которое дает физическое пояснение, почему действие релятивистской струны следует брать в форме (2.22).

Размерным параметром, входящим в теорию релятивистской струны, является константа γ , которую мы определили как произведение линейной плотности массы ρ_0 , распределенной вдоль струны, на скорость света c :

$$\gamma = \rho_0 c.$$

Таким образом, размерность γ равна MT^{-1} .

Иногда константу γ трактуют как величину, характеризующую натяжение струны. Эта интерпретация основывается на том факте, что при умножении γ на скорость света c получается константа с размерностью

силы или натяжения. Конкретные примеры движения релятивистской струны, которые рассмотрены в § 7, показывают, что этот объект может совершать периодические колебательные движения, проявляя тем самым свойства упругости. И это несмотря на то, что при выводе формулы (2.22) мы не предполагали существование обычных сил упругости между соседними точками струны.

Чтобы оценить численно γ , можно использовать связь релятивистской струны с дуально-резонансными моделями, в которых одним из основных параметров является универсальный наклон реджевских траекторий a' , причем $\gamma^{-1} = 2\pi a'$. Если для a' взять значение 1 ГэВ^{-2} , то натяжение релятивистской струны окажется равным 14 т!

Действие релятивистской струны (2.22) непосредственно обобщается на случай D -мерного пространства-времени с сигнатурой метрики $(+ - - \dots)$. Для этого достаточно считать, что в формулах (2.19) – (2.21) координаты струны $x^\mu(\tau, \sigma)$ являются D -мерным лоренцевским вектором $\mu = 0, 1, \dots, D-1$.

Точечный предел в теории струны. Покажем, как действие релятивистской струны (2.22) переходит в действие точечной частицы (2.7), если длина струны стремится к нулю. Вначале представим размерную константу γ в формуле (2.22) в виде

$$\gamma = m_0 c / l_0,$$

где m_0 и l_0 – константы с размерностью массы и длины соответственно; c – скорость света. Далее выделим в действии струны (2.22) интегрирование по σ так, чтобы оно давало длину струны

$$S_{\text{стр}} = -m_0 c \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}^2(\tau, \sigma^*)} \frac{1}{l_0} \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \sqrt{\frac{(\dot{x}x')^2}{\dot{x}^2} - x'^2} = \\ = -m_0 c \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}^2(\tau, \sigma^*)} L(\tau) / l_0, \quad (2.23)$$

где $L(\tau) = \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 / \dot{x}^2 - x'^2}$ – обычная трехмерная длина струны, записанная в ковариантном виде [15], а $\sigma^*(\tau)$ – некоторая точка на отрезке $[\sigma_1(\tau), \sigma_2(\tau)]$, $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$. Если теперь предположить, что $L(\tau) \rightarrow 0$ и соответственно $l_0 \rightarrow 0$, причем $(L(\tau)/l_0) \rightarrow a < +\infty$, то формула (2.23) переходит в действие точечной релятивистской частицы с массой am_0 .

3. Принцип Гамильтона и уравнения движения

Чтобы получить уравнения движения для релятивистской струны из вариационного принципа, будем варьировать функционал

$$S = -\gamma \iint_{\Omega} \sqrt{|g|} d^2 u, \quad (3.1)$$

имеющий смысл для любого знака g . Но из решений уравнений Эйлера возьмем только такие, которые описывают времениподобные поверхности, т. е. дополним уравнения движения условием $g < 0$. При этом необходимо исследовать вопрос совместности этого условия с уравнениями движения. Область Ω в формуле (3.1) ограничена последовательностью кривых T_1, C_2, T_2, C_1 , как это показано на рис. 2,а. Пусть заданы начальное и конечное положения струны:

$$x^\mu(\tau, \sigma) |_{T_i} = \rho_i^\mu(\lambda); \quad T_i = \{\tau_i(\lambda), \sigma_i(\lambda)\}, \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

Потребуем обращение в нуль вариации δS при условии

$$\delta x^\mu(\tau, \sigma) |_{T_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

В результате получим

$$\delta S = \iint_{\Omega} d\tau d\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} \delta x'^\mu \right) = 0, \quad (3.4)$$

где $\mathcal{L} = -\gamma \sqrt{|g|}$. Теперь используем формулу Стокса (или формулу Грина)

$$\iint_{\Omega} d\tau d\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial \tau} - \frac{\partial P}{\partial \sigma} \right) = \oint_{\partial \Omega} (P d\tau + Q d\sigma). \quad (3.5)$$

Полагая в (3.5)

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu; \quad P = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} \delta x'^\mu \quad (3.6)$$

и учитывая, что

$$\delta \dot{x}^\mu = \frac{\partial}{\partial \tau} \delta x^\mu; \quad \delta x'^\mu = \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta x^\mu, \quad (3.7)$$

преобразуем формулу (3.4) к следующему виду:

$$\delta S = -\iint_{\Omega} d\tau d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} \right) \right] \delta x^\mu + \\ + \oint_{\partial \Omega} \delta x^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} d\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} d\tau \right) = 0. \quad (3.8)$$

Вариации координат струны δx^μ произвольны везде в области Ω и на граничных кривых C_1 и C_2 , а на кривых T_1 и T_2 они равны нулю. Поэтому из (3.8) получаем уравнения движения

$$L_\mu(\partial x, \partial^2 x) \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} \right) = 0, \quad (3.9)$$

$$\tau, \sigma \in \Omega, \quad \mu = 0, 1, \dots, D-1$$

и граничные условия

$$\int_{C_1+C_2} \delta x^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} d\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} d\tau \right) = 0. \quad (3.10)$$

Если $\sigma_i(\tau)$, $i = 1, 2$ — функции, задающие кривые C_i , $i = 1, 2$, то граничные условия (3.10) можно записать так:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{\sigma}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} = 0; \quad \tau, \sigma \in C_i, \quad i=1, 2, \quad \mu=0, 1, \dots, D-1. \quad (3.11)$$

Для области Ω , имеющей форму прямоугольника (см. рис. 2,б), граничные условия (3.11) упрощаются:

$$\pi_\mu(\tau, \sigma) \equiv -\partial \mathcal{L} / \partial x'^\mu |_{C_i} = 0, \quad i=1, 2. \quad (3.12)$$

Инвариантность действия релятивистской струны (3.1) при произвольных преобразованиях параметров τ, σ приводит, согласно второй теореме Нетер, к линейной зависимости между уравнениями Эйлера (3.9). Как показано в приложении Б, проекции левых частей уравнений (3.9) на \dot{x}^μ и x'^μ тождественно равны нулю:

$$L_\mu(\partial x, \partial^2 x) \dot{x}^\mu = 0, \quad L_\mu(\partial x, \partial^2 x) x'^\mu = 0. \quad (3.13)$$

Эти тождества выполняются не только для лагранжиана Намбу–Гото (3.1), но и для любого лагранжиана \mathcal{L} , зависящего от набора полей $x^\mu(\tau, \sigma)$ и их первых производных и приводящего к действию, инвариантному относительно произвольных преобразований координат τ, σ .

Таким образом, в системе уравнений (3.9) имеем не n независимых уравнений на координаты струны, а всего $n-2$. Это приводит к тому, что решение уравнений (3.9) содержит две произвольные функции параметров τ, σ . Действительно, эти уравнения ковариантны (сохраняют свой вид) при переходе к новым координатам $\bar{\tau}, \bar{\sigma}$ с помощью двух произвольных функций:

$$\tau = f_1(\bar{\tau}, \bar{\sigma}); \quad \sigma = f_2(\bar{\tau}, \bar{\sigma}). \quad (3.14)$$

Поэтому, если имеем некоторое решение системы (3.9) в переменных τ, σ , то, выполняя в нем замену (3.14), получаем опять решение системы (3.9), содержащее две произвольные функции двух переменных.

Такой функциональный произвол позволяет наложить на решения системы уравнений (3.9) два условия. Обычно эти условия берутся в следующем виде:

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 0, \quad \dot{x}x' = 0 \quad (3.15)$$

или, что эквивалентно,

$$(\dot{x} \pm x')^2 = 0. \quad (3.16)$$

С геометрической точки зрения условия (3.15) означают, что на мировой поверхности струны выбрана изометрическая или конформно-плоская система криволинейных координат τ, σ [17]. В теории релятивистской струны эти условия называют ортонормальной калибровкой.

Внутренняя метрика на мировой поверхности струны (2.19) при выполнении условий (3.15) принимает вид

$$ds^2 = \lambda(\tau, \sigma) [(d\tau)^2 - (d\sigma)^2], \quad (3.17)$$

где $\lambda(\tau, \sigma) = g_{00}(\tau, \sigma) = -g_{11}(\tau, \sigma)$, $g_{01}(\tau, \sigma) = g_{10}(\tau, \sigma) = 0$.

Квадратичную форму (2.19) всегда можно привести к конформно-плоскому виду (3.17) с помощью замены переменных (2.12), определяемой решением системы двух уравнений в частных производных первого порядка (уравнения Бельтрами):

$$g_{01} \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial u^0} - g_{00} \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial u^1} + \sqrt{-g} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^0} = 0;$$

$$g_{01} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^0} - g_{00} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} + \sqrt{-g} \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial u^0} = 0.$$

Запишем уравнения движения для релятивистской струны (3.9), подставив туда $\mathcal{L} = -\gamma \sqrt{|g|}$:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{\sqrt{|g|}} (g_{11} \dot{x}^\mu - g_{01} x'^\mu) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{1}{\sqrt{|g|}} (g_{00} x'^\mu - g_{01} \dot{x}^\mu) \right] = 0,$$

$$\mu = 0, 1, \dots, D-1. \quad (3.18)$$

В ортонормальной калибровке (3.15) уравнения движения (3.18) сводятся к уравнению Д'Аламбера на координаты струны:

$$\ddot{x}^\mu - \dot{x}''^\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, D-1, \quad (3.19)$$

а граничные условия (3.11) принимают вид

$$x'^\mu + \dot{x}^\mu \dot{\sigma}(\tau) = 0; \quad \tau, \sigma \in C_i, \quad i=1, 2; \quad \mu=0, 1, \dots, D-1. \quad (3.20)$$

Уравнения (3.19) и (3.20) должны быть дополнены условиями, которые были сделаны при их выводе из действия (3.1):

1) условия ортонормальной калибровки

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 0, \quad \dot{x}x' = 0; \quad (3.21)$$

2) условие времениподобности мировой поверхности струны (2.14)

$$g = \dot{x}^2 x'^2 - (\dot{x}x')^2 < 0; \quad (3.22)$$

3) условия на касательные векторы к мировой поверхности струны

$$g_{00} = \dot{x}^2 > 0, \quad g_{11} = x'^2 < 0. \quad (3.23)$$

Очевидно, что из (3.21) и (3.23) следует (3.22). Поэтому требуется следить за соблюдением только условий (3.21) и (3.23). Покажем в

дальнейшем при исследовании задачи Коши в теории релятивистской струны, что условия (3.21) и (3.23) достаточно наложить в начальный момент $\tau = \tau_0$, тогда они будут выполнены во все последующие моменты τ . В этом смысле мы и будем понимать совместность условий (3.21)–(3.23) с уравнениями движения.

Из граничных условий (3.20) в изометрической системе координат (3.21) получаем

$$\dot{x}^2(\tau, \sigma_i(\tau)) = -\dot{x}'^2(\tau, \sigma_i(\tau)) = 0, \text{ если } \dot{\sigma}_i \neq 1, \quad i = 1, 2. \quad (3.24)$$

Следовательно, концы струны движутся со скоростью света, и на траекториях концов струны ее мировая поверхность оказывается изотропной или светоподобной с $g = 0^*$. Это приводит к некоторым формальным трудностям при вариации действия (3.1), так как в уравнения Эйлера (3.18) и граничные условия (3.11) входят отрицательные степени g [18]. Однако этих трудностей можно избежать, если все слагаемые с отрицательными степенями g в (3.18) и (3.11) рассматривать вначале вне мировых траекторий концов струны и здесь использовать дополнительные условия (3.15), а потом уже перейти к пределу $\{\tau, \sigma\} \rightarrow C_i$, $i = 1, 2$ [19].

Варьирование функций $\sigma_i(\tau)$, $i = 1, 2$, в действии струны, описывающих движение ее концов на плоскости (τ, σ) (см. рис. 2, а), приводит к требованию

$$\mathcal{L} = 0, \quad \tau, \sigma \in C_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.25)$$

Но это равенство, как отмечалось выше, является следствием граничных условий (3.12) или (3.20).

Рассмотрение времениподобных мировых поверхностей с $g < 0$ привело к краевой задаче (3.19)–(3.21) гиперболического типа. Это позволяет корректно сформулировать для данных уравнений задачу Коши.

Вариационная задача с действием (3.1) близка классической задаче Плато в геометрии (см. гл. 4). В задаче Плато, рассматриваемой в евклидовом пространстве, ищется поверхность, натянутая на заданный контур и имеющая наименьшую площадь.

Классическая задача Плато сводится к эллиптическим уравнениям, для которых можно корректно сформулировать только краевую задачу.

Поверхности в евклидовом, псевдоевклидовом или римановом пространстве, для которых первая вариация функционала площади обращается в нуль, называются минимальными (хотя в действительности они являются только экстремальными поверхностями). Очевидно, что

* Условие $g = 0$ на концах струны следует из (3.12) и без использования ортонормальной системы координат (3.21). Действительно, легко проверяются тождества $\pi x' = -\gamma\sqrt{-g}$, $\pi \dot{x} = 0$, $\pi^2 + \gamma^2 \dot{x}^2 = 0$. Поэтому при выполнении (3.12) $g = 0$ и $\dot{x}^2 = 0$.

минимальные поверхности не обязательно имеют наименьшую площадь. Для такого утверждения потребовалось бы исследование вторых и более высокого порядка вариаций площади.

Пока мы рассматривали только свободную релятивистскую струну конечных размеров, описываемую наряду с уравнениями движения (3.9) еще и граничными условиями (3.11). Иногда отказываются от учета граничных условий (3.11) и рассматривают бесконечную релятивистскую струну, динамика которой определяется только уравнениями движения (3.9) или в ортонормальной калибровке — уравнениями (3.19), (3.21). В качестве области Ω изменения параметров τ и σ в этом случае выбирают бесконечную полосу $\tau_1 < \tau < \tau_2$, $-\infty < \sigma < +\infty$. При последовательном выводе такой модели из вариационного принципа необходимо наложить на искомые решения уравнений (3.9) такие условия поведения при $\sigma \rightarrow \pm\infty$, в силу которых автоматически обращались бы в нуль интегралы в (3.10).

Полубесконечная струна получается в случае, если рассматривается только одно граничное условие (3.11).

Чтобы получить действие для замкнутой релятивистской струны, следует дополнить определение функционала действия струны (3.1) условием

$$x^\mu(\tau, \sigma_1(\tau)) = x^\mu(\tau, \sigma_2(\tau)), \quad (3.26)$$

где $\sigma_i(\tau)$, $i = 1, 2$ — функции, задающие кривые C_i ; $i = 1, 2$ на рис. 2.

При варьировании действия для замкнутой струны необходимо считать, что вариации $\delta x^\mu(\tau, \sigma)$ на границах C_1 и C_2 равны:

$$\delta x^\mu(\tau, \sigma_1(\tau)) = \delta x^\mu(\tau, \sigma_2(\tau)). \quad (3.27)$$

Уравнения движения для замкнутой струны, очевидно, будут теми же самыми, что и для открытой струны, изменятся только граничные условия. В случае произвольной области Ω граничные условия для замкнутой струны, следующие из (3.10), довольно сложные. Если в качестве Ω взят прямоугольник (рис. 2, б), то из (3.10) с учетом (3.27) получаем

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} \right|_{\sigma=\sigma_1} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} \right|_{\sigma=\sigma_2}. \quad (3.28)$$

В ортонормальной системе координат на мировой поверхности струны (3.21) граничные условия (3.28) записываются так:

$$x'^\mu(\tau, \sigma_1) = x'^\mu(\tau, \sigma_2). \quad (3.29)$$

Таким образом, замкнутая струна описывается уравнениями движения (3.9) [или (3.19), (3.21)] и граничными условиями (3.26), (3.29).

Рассмотрим теперь следствия, к которым приводит инвариантность действия релятивистской струны (3.1) по отношению к преобразова-

ниями Пуанкаре:

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu; \quad \omega_\nu^\cdot{}^\mu + \omega^\mu{}_\nu^\cdot = \delta_\nu^\mu. \quad (3.30)$$

Этому преобразованию координат струны соответствует вариация действия (3.8), равная нулю. Подставим в формулу (3.8) решение уравнений движения (3.9), удовлетворяющее граничным условиям (3.10). В результате получим

$$\int_{T_1+T_2} \delta x^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} d\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} d\tau \right), \quad (3.31)$$

где δx^μ определено в (3.30). Из (3.30) и (3.31) следуют закон сохранения полного четырех-импульса струны

$$\int_{T_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} d\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} d\tau \right) = \int_{T_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} d\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} d\tau \right) \quad (3.32)$$

и закон сохранения углового момента струны

$$\begin{aligned} & \int_{T_1} \left[x_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\nu} d\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\nu} d\tau \right) - x_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} d\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} d\tau \right) \right] = \\ & = \int_{T_2} \left[x_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\nu} d\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\nu} d\tau \right) - x_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} d\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} d\tau \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Интегрирование в формулах (3.32) и (3.33) по кривым T_1 и T_2 (см. рис. 2) ведется в одном и том же направлении (например, в сторону возрастания σ).

Если кривые T_1 и T_2 заданы уравнениями

$$\tau = \tau_1, \quad \tau = \tau_2, \quad (3.34)$$

то формулы (3.32) и (3.33), которые определяют импульс и угловой момент струны, сохраняющиеся в процессе движения, упрощаются:

$$P_\mu = - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}; \quad (3.35)$$

$$M_{\mu\nu} = - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \left(x_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\nu} - x_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right). \quad (3.36)$$

В ортонормальной калибровке (3.21) формулы (3.35), (3.36) записываются так:

$$P_\mu = \gamma \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \dot{x}_\mu(\tau, \sigma); \quad (3.37)$$

$$M_{\mu\nu} = \gamma \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma (x_\mu \dot{x}_\nu - x_\nu \dot{x}_\mu). \quad (3.38)$$

Отметим, что полученные выше формулы для полного импульса и полного момента струны верны для любых граничных условий (конечная струна, замкнутая, бесконечная и т. д.). Требуется лишь, чтобы используемые при этом решения уравнений движения удовлетворяли соответствующим граничным условиям.

4. Решение уравнений движения рядами Фурье. Ковариантный формализм

Если релятивистская струна конечна или замкнута, то решение уравнений движения (3.18) и соответствующих граничных условий (3.26) и (3.28) можно представить в виде рядов Фурье. При этом удобно использовать конформно-плоскую систему координат τ, σ , в которой выполнены условия (3.16) или (3.21).

Дополнительные условия (3.16) можно учесть двумя путями: их можно наложить как условия на фурье-амплитуды или же разрешить явно, выразив две компоненты радиуса-вектора струны $x^\mu(\tau, \sigma)$ через остальные.

Рассмотрим вначале первый путь, получивший название *ковариантного формализма*. В качестве области Ω , в которой изменяются параметры τ, σ , возьмем прямоугольник (см. рис. 2, б). Удобно считать, что $\sigma_1 = 0$, а $\sigma_2 = \pi$ для свободной струны и $\sigma_2 = 2\pi$ — для замкнутой струны.

Итак, ищем решение уравнений движения

$$\ddot{x}^\mu - x''^\mu = 0, \quad (4.1)$$

удовлетворяющее дополнительным условиям

$$(\dot{x} \pm x')^2 = 0 \quad (4.2)$$

и граничным условиям для свободной струны

$$x'^\mu(\tau, \sigma) = 0; \quad \sigma = 0; \quad \sigma = \pi \quad (4.3)$$

или граничным условиям для замкнутой струны

$$x^\mu(\tau, 0) = x^\mu(\tau, 2\pi); \quad x'^\mu(\tau, 0) = x'^\mu(\tau, 2\pi). \quad (4.4)$$

Свободная струна. Подстановка общего решения уравнений (4.1)

$$x^\mu(\tau, \sigma) = \psi_+^\mu(\tau + \sigma) + \psi_-^\mu(\tau - \sigma) \quad (4.5)$$

в граничные условия (4.3) дает

$$\psi'_{+\mu}(\tau) - \psi'_{-\mu}(\tau) = 0, \quad \psi'_{+\mu}(\tau + \pi) - \psi'_{-\mu}(\tau - \pi) = 0. \quad (4.6)$$

Штрих у функций $\psi_{\pm\mu}(z)$ означает дифференцирование по всему аргументу z . Из (4.6) следует, что векторы $\psi'_{+\mu}(z)$ и $\psi'_{-\mu}(z)$ равны друг

другу и периодичны с периодом 2π :

$$\psi'_{\pm\mu}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n\mu} \exp(-inz), \quad a_{n\mu} = a_{-n\mu}^*, \quad (4.7)$$

а условие (4.2) требует, чтобы они были изотропны $(\psi'_{\pm})^2 = 0$.

Множитель $(2\sqrt{\pi\gamma})^{-1}$ в фурье-разложении (4.7) введен для удобства. Интегрируя (4.7) и подставляя в (4.5), получаем

$$x_{\mu}(\tau, \sigma) = \frac{i}{\sqrt{\pi\gamma}} \sum_{n \neq 0} \exp(-in\tau) \frac{a_{n\mu}}{n} \cos(n\sigma) + Q_{\mu} + P_{\mu} \frac{\tau}{\pi\gamma}, \quad (4.8)$$

$$a_{n\mu} = a_{-n\mu}^*, \quad n \neq 0,$$

где P_{μ} — сохраняющийся полный импульс струны (3.35), который в ортонормальной калибровке (4.2) определяется формулой

$$P_{\mu} = \gamma \int_0^{\pi} \dot{x}_{\mu}(\tau, \sigma) d\sigma, \quad (4.9)$$

Q_{μ} — координаты центра масс струны в момент $\tau = 0$,

$$Q_{\mu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x_{\mu}(0, \sigma) d\sigma. \quad (4.10)$$

Подставляя разложение (4.8) в формулу (3.38), получаем угловой момент струны, выраженный через фурье-амплитуды:

$$M_{\mu\nu} = Q_{\mu}P_{\nu} - Q_{\nu}P_{\mu} - \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (a_{-n\mu}a_{n\nu} - a_{-n\nu}a_{n\mu}). \quad (4.11)$$

Полный момент струны состоит из двух слагаемых: из углового момента струны как целого

$$L_{\mu\nu} = Q_{\mu}P_{\nu} - Q_{\nu}P_{\mu} \quad (4.12)$$

и "спинового" углового момента, обусловленного внутренним движением струны

$$S_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (a_{-n\mu}a_{n\nu} - a_{-n\nu}a_{n\mu}). \quad (4.13)$$

В терминах фурье-амплитуд $a_{n\mu}$ дополнительные условия (4.2) записываются так:

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{n-m}a_m = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.14)$$

где $a_{0\mu} = P_{\mu}/\sqrt{\pi\gamma}$. Эти условия фактически сводятся к ограничениям на начальные данные $x_{\mu}(0, \sigma)$ и $\dot{x}_{\mu}(0, \sigma)$, которые определяют фурье-амплитуды $a_{n\mu}$ и константы P_{μ} и Q_{μ} в разложении (4.8):

$$\left. \begin{aligned} a_{n\mu} &= 2 \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \int_0^{\pi} d\sigma \cos(n\sigma) \left\{ \dot{x}_{\mu}(0, \sigma) - in x_{\mu}(0, \sigma) \right\}, \\ a_{-n\mu} &= a_{n\mu}^*, \quad n > 0; \\ Q_{\mu} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x_{\mu}(0, \sigma) d\sigma, \quad P_{\mu} = \gamma \int_0^{\pi} \dot{x}_{\mu}(0, \sigma) d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Условие $L_0 = 0$ из (4.14) позволяет представить массу струны в следующем виде:

$$M^2 = P^2 = -\pi\gamma \sum_{m \neq 0} a_m \mu a_{-m}^{\mu}. \quad (4.16)$$

Классическое выражение для спина струны J определяется формулой

$$J^2 = \frac{1}{2} \left[S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - \frac{2}{M^2} P_{\nu} S^{\nu\rho} P^{\sigma} S_{\sigma\rho} \right].$$

Если использовать такую ортонормальную параметризацию τ, σ , в которой τ пропорционально x^0 ($a_n^0 = 0, n \neq 0$), то в системе покоя струны второй член в формуле для J^2 обращается в нуль:

$$J^2 = \sum_{n,m} \frac{1}{nm} \left\{ |(a_n^* a_m)|^2 - |(a_n a_m^*)|^2 \right\}. \quad (4.17)$$

С помощью неравенства Коши — Буняковского

$$|(ab)|^2 \leq |a|^2 |b|^2 = (a^* a)(b^* b),$$

где a и b — комплексные векторы в евклидовом пространстве, можно выписать следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |(a_n^* a_m)| - |(a_n a_m^*)| &\leq |(a_n a_m)|^2 \leq (a_n a_n^*) (a_m^* a_m) \leq \\ &\leq nm (a_n a_n^*) (a_m^* a_m), \quad n, m > 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Скалярное произведение здесь берется только по пространственным компонентам амплитуд a_n^{μ} , суммирования по n и m нет. Подставляя (4.18) в (4.17), получаем

$$J^2 \leq \sum_{n,m} (a_n^* a_n) (a_m^* a_m) = (M^2 / (2\pi\gamma))^2.$$

Здесь использовано следующее выражение для квадрата массы струны:

$$M^2 = 2\pi\gamma \sum_{n>0} a_n^* a_n.$$

Таким образом, для всех движений свободной струны имеет место соотношение

$$J \leq a' M^2, \quad a' = (2\pi\gamma)^{-1}, \quad (4.19)$$

которое переходит в равенство для вращающейся струны, имеющей

форму прямолинейного отрезка (см. § 7). Струнная модель запрещает тем самым существование частиц с большими спинами, но малыми массами.

Замкнутая струна. Из (4.5) и (4.4) следует:

$$\psi_{+\mu}(\tau) + \psi_{-\mu}(\tau) = \psi_{+\mu}(\tau + 2\pi) + \psi_{-\mu}(\tau - 2\pi); \quad (4.20)$$

$$\psi'_{+\mu}(\tau) - \psi'_{-\mu}(\tau) = \psi'_{+\mu}(\tau + 2\pi) - \psi'_{-\mu}(\tau - 2\pi). \quad (4.21)$$

После дифференцирования (4.20) по τ убеждаемся, что обе функции $\psi'_{+\mu}$ и $\psi'_{-\mu}$ являются периодическими с периодом 2π :

$$\psi'_{+\mu}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n\mu} \exp(-inz);$$

$$\psi'_{-\mu} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_{n\mu} \exp(-inz), \quad a_n = a_n^*, \quad \beta_n = \beta_n^*. \quad (4.22)$$

Координаты замкнутой струны описываются следующим рядом Фурье:

$$x_\mu(\tau, \sigma) = \frac{i}{2\sqrt{\gamma\pi}} \sum_{n \neq 0} \frac{\exp(-in\tau)}{n} [a_{n\mu} \exp(-in\sigma) + \beta_{n\mu} \exp(in\sigma)] +$$

$$+ \frac{P_\mu}{2\pi\gamma} \tau + Q_\mu. \quad (4.23)$$

Из-за того что в разложении для $x_\mu(\tau, \sigma)$ теперь есть и синусы, и косинусы, происходит удвоение фурье-амплитуд по сравнению с открытой струной.

В формуле (4.22) константы P_μ и Q_μ имеют тот же смысл, как и в случае открытой струны. Условия ортонормальной калибровки (4.2) для замкнутой струны приводят к двум сериям равенств, аналогичным (4.14), для амплитуд $a_{n\mu}$ и $\beta_{n\mu}$ в отдельности:

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{n-m} a_m = 0; \quad \bar{L}_n = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \beta_{n-m} \beta_m = 0,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.24)$$

где $a_{0\mu} = \beta_{0\mu} = P_\mu / (2\sqrt{\pi\gamma})$. Для массы замкнутой струны получаем из (4.24)

$$M^2 = P^2 = -4\pi\gamma \sum_{m \neq 0} a_{m\mu} a_{-m}^\mu = -4\pi\gamma \sum_{m \neq 0} \beta_{m\mu} \beta_{-m}^\mu. \quad (4.25)$$

Сравнивая (4.20) и (4.8), убеждаемся, что замкнутая струна обладает всеми решениями, которые существуют в теории открытой струны. Действительно, подбирая начальные данные так, чтобы $a_n = \beta_n$, сведем (4.20) к (4.8). Наглядно это можно представить как "сложение" замкнутой струны вдвое, причем точки сгиба струны имеют световую скорость.

Для замкнутой струны можно получить ограничение на ее спин:

$$J \leq \frac{\alpha'}{2} M^2. \quad (4.26)$$

Это неравенство иллюстрируется следующим примером. Если взять две свободные струны, имеющие форму прямолинейных отрезков, концы которых совпадают, то получим замкнутую струну, сложенную вдвое. Если такую струну заставить вращаться с постоянной угловой скоростью как целое, то спин системы удвоится по сравнению со свободной струной, а M^2 увеличится в 4 раза.

5. Нековариантный лагранжев формализм

При нековариантной трактовке динамики релятивистской струны две компоненты вектора $x_\mu(\tau, \sigma)$ выражаются через остальные с помощью условий (4.2) и дополнительных калибровочных условий. Дело в том, что потребовав выполнение условий (4.2), задающих изометрическую систему координат на мировой поверхности струны, мы еще не полностью зафиксировали параметры τ, σ . Уравнения (4.1), (4.2) допускают преобразования

$$\bar{\tau} \pm \bar{\sigma} = f_\pm(\tau \pm \sigma) \quad (5.1)$$

с функциями f_\pm , подчиненными лишь одному условию, чтобы якобиан этого преобразования был отличен от нуля:

$$\partial(\bar{\tau}, \bar{\sigma}) / \partial(\tau, \sigma) = f'_+(\tau + \sigma) f'_-(\tau - \sigma) \neq 0. \quad (5.2)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по всему аргументу функций f_+, f_- . Далее в этом параграфе речь пойдет о свободной струне. Обобщение на другие струнные модели будет очевидным. Чтобы траектории свободных концов струны на плоскости $\bar{\tau}, \bar{\sigma}$ по-прежнему описывались уравнениями

$$\bar{\sigma} = 0; \quad \bar{\sigma} = \pi, \quad (5.3)$$

функции $f_\pm(\tau \pm \sigma)$ в (5.1) должны быть равны одной и той же функции $f(\tau \pm \sigma)$, подчиняющейся следующему условию периодичности:

$$f(\tau) = f(\tau - 2\pi) + 2\pi. \quad (5.4)$$

Определенным выбором функций f_\pm можно добиться того, чтобы выполнялось условие

$$n\dot{x} = (nP/\gamma\pi)\tau + nQ, \quad (5.5)$$

где n^μ — произвольный постоянный вектор, не зависящий от τ и σ ; P^μ — полный импульс струны (4.9); Q^μ — координаты центра масс струны в момент $\tau = 0$ (4.10). Условие (5.5), окончательно фиксирующее параметры τ, σ , эквивалентно следующим двум:

$$n\dot{x} = nP/\gamma\pi, \quad n\dot{x}' = 0. \quad (5.6)$$

Докажем возможность наложения условия (5.5) на координаты струны. Пусть в исходных изометрических параметрах τ, σ на мировой поверхности струны условие (5.5) не выполнено. Совершим переход к новым параметрам $\bar{\tau}, \bar{\sigma}$ по формуле (5.1), определив функции f_{\pm} из уравнений

$$\frac{du^{\pm}}{d\bar{u}^{\pm}} = \frac{(nP)}{2\pi\gamma} (n\psi'_{\pm}(u^{\pm}))^{-1}. \quad (5.7)$$

Здесь $u^{\pm} = \tau \pm \sigma$, $\psi_{\pm\mu}(u^{\pm})$ — функции из общего решения уравнений движения (4.5). Введем также новые функции $\bar{\psi}_{\pm}(\bar{u}^{\pm}) = \psi_{\pm}(u^{\pm}(\bar{u}^{\pm}))$. Теперь легко показать, что уравнения (5.6), записанные для новых функций $\bar{\psi}_{\pm}(\bar{u}^{\pm})$ и в новых переменных \bar{u}^{\pm} , выполняются тождественно. Действительно,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}'_{\pm}(\bar{u}^{\pm}) &= \frac{d}{d\bar{u}^{\pm}} \psi_{\pm}(u^{\pm}(\bar{u}^{\pm})) = \psi'_{\pm}(u^{\pm}) \frac{du^{\pm}}{d\bar{u}^{\pm}}; \\ \bar{\psi}'_{-}(\bar{u}^{-}) &= \psi'_{-}(u^{-}) du^{-} / d\bar{u}^{-}, \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

поэтому, учитывая (5.7), получаем:

$$\left. \begin{aligned} n\bar{x} &= n\bar{\psi}_{+}(\bar{u}^{+}) + n\bar{\psi}_{-}(\bar{u}^{-}) = \\ &= n\psi'_{+}(u^{+}) \frac{du^{+}}{d\bar{u}^{+}} + n\bar{\psi}'_{-}(u^{-}) \frac{du^{-}}{d\bar{u}^{-}} = \frac{nP}{\gamma\pi}; \\ n\bar{x}' &= n\bar{\psi}'_{+}(\bar{u}^{+}) - n\bar{\psi}'_{-}(\bar{u}^{-}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Здесь для простоты опущены лоренцевы индексы, по которым выполняется суммирование.

Уравнения (5.7) задают такие преобразования параметров τ, σ , при которых прямые $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$ переходят в прямые $\bar{\sigma} = 0, \bar{\sigma} = \pi$. Это является следствием того, что функции $\psi_{\pm}(u^{\pm})$ в силу граничных условий (4.6) равны друг другу и периодичны с периодом 2π .

Якобиан преобразования (5.2) отличен от нуля для всех движений струны, которые удовлетворяют требованию

$$n\psi'_{\pm}(u^{\pm}) = \frac{1}{2} n(\dot{x} \pm x') \neq 0. \quad (5.10)$$

Наложение калибровочных условий в теории релятивистской струны в некотором смысле аналогично выбору потенциала $A_{\mu}(x)$ в электродинамике. Электромагнитный потенциал можно заменить величиной $A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\lambda(x)$ с произвольной функцией $\lambda(x)$. Если же на $A_{\mu}(x)$ наложить условие Лоренца

$$\partial_{\mu}A^{\mu}(x) = 0, \quad (5.11)$$

то будут допустимы такие преобразования, когда $\partial_{\mu}\partial^{\mu}\lambda(x) = 0$. Окончательно зафиксировать выбор $A_{\mu}(x)$ можно, потребовав, например, дополнительно к (5.11) $A_0(x) = 0$ (кулоновская калибровка).

26

Используя (5.6) и условия (4.2), можно найти частные производные по τ и σ двух компонент вектора x^{μ} как функции остальных компонент x_{\perp} . Для этой цели удобно взять в качестве вектора n^{μ} изотропный вектор $n^2 = 0$ с отличными от нуля двумя компонентами: временной компонентой $n^0 = 1$ и одной пространственной $n^1 = 1$. В этом случае калибровку (5.5) называют светоподобной. В переменных светового конуса $x^{\mu} = \{x^{+}, x^{-}, x_{\perp}\}$, $x^{\pm} = (x^0 \pm x^1)/\sqrt{2}$ получаем:

$$\dot{x}^{+} = \pi\gamma(\dot{x}_{\perp}^2 + x_{\perp}^{\prime 2})/2P^{-}; \quad \dot{x}^{\pm} = \pi\gamma\dot{x}_{\perp} x'_{\perp}/P^{-}; \quad \dot{x}^{-} = P^{-}/\pi\gamma; \quad x'^{-} = 0. \quad (5.12)$$

На этом этапе, очевидно, теряется явная релятивистская инвариантность теории. В терминах фурье-амплитуд равенства (5.12) принимают вид:

$$a_n^{\pm} = \frac{\sqrt{\pi\gamma}}{P^{-}} L_{n\perp}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad a_k^{-} = 0, \quad k \neq 0, \quad (5.13)$$

где

$$L_{n\perp} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m\perp} \alpha_{m\perp}; \quad \alpha_{0\perp} = \frac{P_{\perp}}{\sqrt{\pi\gamma}}; \quad \alpha_0^{\pm} = \frac{P^{\pm}}{\sqrt{\pi\gamma}}. \quad (5.14)$$

В частности, для массы струны как целого получаем из формул (5.13) при $n=0$ следующее выражение:

$$M^2 = P^2 = -P_{\perp}^2 + 2P^{+}P^{-} = \pi\gamma \sum_{m \neq 0} \alpha_{-m\perp} \alpha_{m\perp}. \quad (5.15)$$

Отсюда сразу следует положительная определенность величины M^2 .

Если в уравнении (5.5), фиксирующем калибровку, взять другой вектор n^{μ} , то при разрешении дополнительных условий (5.2) относительно независимых компонент вектора x^{μ} появляются квадратные корни, что значительно усложняет переход к квантовой теории.

Начальные данные для поперечных компонент вектора x^{μ} могут быть заданы произвольно, но они однозначно определяют начальные условия для зависимых компонент x^{\pm} согласно формулам (5.12).

В заключение этого параграфа кратко рассмотрим вопрос: все ли движения релятивистской струны могут быть описаны в светоподобной калибровке (5.5) с $n^2 = 0$? Или иначе, есть ли такие движения струны, которые нарушают условие (5.10)? Очевидно, что такие движения действительно существуют [20, 21], если вектор n^{μ} изотропный ($n^2 = 0$), например, когда векторы $\psi'_{\pm\mu}(u^{\pm})$ параллельны n^{μ} (напомним, что векторы $\psi'_{\pm\mu}(u^{\pm})$ — изотропные).

Это обстоятельство послужило поводом к тому, чтобы подвергнуть сомнению результаты, полученные в теории релятивистской струны в светоподобной калибровке и искать другие калибровочные условия (см. § 11).

Условие (5.10) будет заведомо выполнено, если n^{μ} — времениподобный вектор $n^2 > 0$. В этом случае условие (5.10), записанное в си-

стеме отсчета, где $n^\mu = \{n^0, 0, 0, \dots\}$,

$$n \psi'_\pm(u^\pm) = n^0 \psi'_{\pm 0}(u^\pm) \neq 0 \quad (5.16)$$

всегда удовлетворено, так как $\psi'_{\pm 0}(u^\pm) \neq 0$ в силу изотропности векторов $\psi'_{\mu\pm}(u^\pm)$.

6. Решение задачи Коши для уравнений движения релятивистской струны в лагранжевом формализме

Вначале рассмотрим бесконечную струну, когда нет граничных условий и $-\infty < \sigma < +\infty$. Динамика струны в ортонормальной калибровке описывается в этом случае уравнением Даламбера (3.19) и дополнительными условиями (3.21). Параметром эволюции, как это уже отмечалось ранее, является τ . Пусть в пространстве Минковского задана пространственноподобная кривая $\rho^\mu(\sigma)$, описывающая начальное положение струны при $\tau=0$:

$$\rho^\sigma(\sigma) = x^\mu(0, \sigma); \quad (\rho')^2 < 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1, \quad -\infty < \sigma < +\infty. \quad (6.1)$$

И пусть $v^\mu(\sigma)$ – начальные скорости точек струны:

$$\left. \begin{aligned} v^\mu(\sigma) = \dot{x}^\mu(0, \sigma); \quad (v'^\mu)^2 > 0, \\ \mu = 0, 1, \dots, n-1; \quad -\infty < \sigma < +\infty. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Кроме того, естественно считать, что движение релятивистской струны происходит в направлении возрастания времени $t = x^0$. Для этого необходимо предположить, что вектор скорости точек струны в начальный момент $\tau=0$ лежит в будущем светового конуса, т. е. $v^0(\sigma) > 0$.

По формуле Даламбера получаем общее решение задачи Коши для уравнений движения (3.19):

$$x^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} \left[\rho^\mu(\sigma + \tau) + \rho^\mu(\sigma - \tau) + \int_{\sigma - \tau}^{\sigma + \tau} v^\mu(\lambda) d\lambda \right]. \quad (6.3)$$

Попробуемся удовлетворить дополнительным условиям (3.21). Подставляя (6.3) в (3.18), получаем

$$(\dot{x}^\mu \pm x'^\mu)^2 = (\rho'_{(\pm)} \pm v'_{(\pm)})^2 = 0, \quad (6.4)$$

где $\rho'_{(\pm)} \equiv \rho^\mu(\sigma \pm \tau)$; $v'_{(\pm)} \equiv v^\mu(\sigma \pm \tau)$, а штрих у функции ρ означает дифференцирование по всему аргументу. Таким образом, если данные Коши (6.1) и (6.2) удовлетворяют условиям (3.21), то им будет удовлетворять и решение (6.3).

Теперь перейдем к рассмотрению условий на начальные данные Коши, к которым приводит требование выполнения (3.23). Подставляя (6.3) в (3.23) и учитывая (6.4), получаем

$$4\dot{x}^2(\tau, \sigma) = (v_{(+)} + \rho'_{(+)})_\mu (v_{(-)} - \rho'_{(-)})^\mu > 0. \quad (6.5)$$

Векторы $v_{(+)} + \rho'_{(+)}$ и $v_{(-)} - \rho'_{(-)}$ в силу (6.4) изотропны, поэтому условие (6.5) можно переписать так:

$$4\dot{x}^2(\tau, \sigma) = (v_{(+)}^0 + \rho'_{(+)}{}^0)(v_{(-)}^0 - \rho'_{(-)}{}^0)(1 \pm \cos \alpha(\tau, \sigma)) > 0, \quad (6.6)$$

где $\alpha(\tau, \rho)$ – угол между пространственными составляющими векторов $v_{(+)}^\mu + \rho'_{(+)}{}^\mu$ и $v_{(-)}^\mu - \rho'_{(-)}{}^\mu$. Таким образом, условие (6.5) сводится к требованию, чтобы временные компоненты векторов $v_{(+)}^\mu + \rho'_{(+)}{}^\mu$ и $v_{(-)}^\mu - \rho'_{(-)}{}^\mu$ имели одинаковый знак:

$$(v_{(+)}^0 + \rho'_{(+)}{}^0)(v_{(-)}^0 - \rho'_{(-)}{}^0) > 0. \quad (6.7)$$

Задачу Коши для уравнений движения релятивистской струны можно сформулировать и в другом, более геометрическом виде [22]. Пусть опять имеем начальную конфигурацию струны (6.1) и пусть вдоль этой кривой задано положение касательных плоскостей к мировой поверхности струны в начальный момент $\tau = 0$. Для задания семейства касательных плоскостей вдоль $\rho^\mu(\lambda)$ достаточно задать еще одну векторную функцию $w^\mu(\lambda)$ и потребовать, чтобы касательные плоскости содержали векторы $\rho'^\mu(\lambda)$ и $w^\mu(\lambda)$. Эти плоскости должны резать световой конус по двум прямым. Как было показано в § 2, это требование приводит к условию

$$(\rho' w)^2 - \rho'^2 w^2 > 0. \quad (6.8)$$

Задача Коши состоит в нахождении такого решения уравнений движения струны (3.19), удовлетворяющего дополнительным условиям (3.21), которое описывало бы мировую поверхность, проходящую при $\tau = 0$ через кривую $\rho^\mu(\lambda)$ и касательную в каждой точке этой кривой плоскости, построенной на векторах $\rho'^\mu(\lambda)$ и $w^\mu(\lambda)$. Из такой постановки задачи видно, что для начальных данных важен не весь вектор $w^\mu(\lambda)$, а только та его составляющая, которая ортогональна к $\rho'^\mu(\lambda)$:

$$w^\mu(\lambda) = w_{\perp}^\mu(\lambda) + w_{\parallel}^\mu(\lambda); \quad w_{\perp}^\mu(\lambda) \rho'_\mu(\lambda) = 0. \quad (6.9)$$

Действительно, в задании касательной плоскости участвует только $w_{\perp}(\lambda)$, и только эта величина входит в условие (6.8), которое с учетом (6.9) принимает вид

$$(\rho' w_{\perp})^2 - \rho'^2 w_{\perp}^2 - \rho'^2 w_{\parallel}^2 = -\rho'^2 w_{\parallel}^2 > 0 \text{ или } w_{\perp}^2 > 0.$$

Таким образом, различные векторы $w^\mu(\lambda)$, имеющие равные перпендикулярные составляющие $w_{\perp}^\mu(\lambda)$, приводят к одним и тем же движениям струны. Следовательно, составляющая w_{\parallel}^μ , параллельная ρ'^μ , не имеет физического смысла.

Общее решение уравнений движения (3.19) имеет вид

$$x^\mu(\tau, \sigma) = \psi_{+}^\mu(\tau + \sigma) + \psi_{-}^\mu(\tau - \sigma). \quad (6.10)$$

Чтобы удовлетворялись условия ортонормальной калибровки (3.21), векторы ψ_{\pm}^μ должны быть изотропными:

$$(\psi_{\pm}^\mu(\tau \pm \sigma))^2 = 0. \quad (6.11)$$

Штрих здесь означает дифференцирование по всему аргументу функций ψ_{\pm}^{μ} . В начальный момент $\tau = 0$ конфигурация струны определяется, согласно (6.1), векторной функцией $\rho^{\mu}(\lambda)$, поэтому

$$\psi_{+}^{\mu}(\sigma) + \psi_{-}^{\mu}(-\sigma) = \rho^{\mu}(\sigma). \quad (6.12)$$

Скорость точек струны при $\tau = 0$

$$\dot{x}^{\mu}(\tau, \sigma) |_{\tau=0} = \psi_{+}^{\prime\mu}(\sigma) + \psi_{-}^{\prime\mu}(-\sigma) \quad (6.13)$$

лежит, очевидно, в касательной плоскости к начальной конфигурации струны. Следовательно,

$$\psi_{+}^{\prime\mu}(\sigma) + \psi_{-}^{\prime\mu}(-\sigma) = a(\sigma)\rho^{\prime\mu}(\sigma) + b(\sigma)w^{\mu}(\sigma). \quad (6.14)$$

Коэффициенты $a(\sigma)$ и $b(\sigma)$ найдем из требования, чтобы функции ψ_{\pm} в (6.12) и (6.14) удовлетворяли (6.11). Это дает два уравнения для определения a и b :

$$\left. \begin{aligned} (1+a^2)\rho'^2 + 2ab(\rho'w) + b^2w^2 &= 0; \\ a\rho'^2 + b(\rho'w) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Из (6.15) следует:

$$a = \frac{\rho'w}{\sqrt{(\rho'w)^2 - \rho'^2w^2}}; \quad b = -\frac{\rho'^2}{\sqrt{(\rho'w)^2 - \rho'^2w^2}}. \quad (6.16)$$

Интегрируя (6.14) и используя (6.12) и (6.16), получаем решение задачи Коши для бесконечной струны [22]:

$$x^{\mu}(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} [\rho^{\mu}(\sigma + \tau) + \rho^{\mu}(\sigma - \tau)] + \frac{1}{2} \int_{\sigma - \tau}^{\sigma + \tau} \frac{(\rho'w)\rho^{\prime\mu} - \rho'^2w^{\mu}}{\sqrt{(\rho'w)^2 - \rho'^2w^2}} d\lambda. \quad (6.17)$$

Как и следовало ожидать, в формулу (6.17) входит только перпендикулярная составляющая вектора w^{μ} . Если использовать разложение (6.9), то интеграл в (6.17) записывается в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \int_{\sigma - \tau}^{\sigma + \tau} v_{\perp}(\lambda) \sqrt{-\frac{\rho'^2(\lambda)}{w_{\perp}^2(\lambda)}} d\lambda.$$

Можно показать, что под интегралом в формуле (6.17) стоит с точностью до постоянного множителя γ плотность канонического импульса струны в начальный момент $p^{\mu}(0, \sigma)$, где

$$p^{\mu}(\tau, \sigma) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu}} = \gamma \frac{(\dot{x}x')x^{\prime\mu} - x'^2\dot{x}^{\mu}}{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2x'^2}}. \quad (6.18)$$

Подставляя в (6.18) $x^{\prime\mu}(0, \sigma)$ и $\dot{x}^{\mu}(0, \sigma)$ из формулы (6.17),

$$x^{\prime\mu}(0, \sigma) = \rho^{\prime\mu}(\sigma), \quad \dot{x}^{\mu}(0, \sigma) = \frac{(\rho'w)\rho^{\prime\mu} - \rho'^2w^{\mu}}{\sqrt{(\rho'w)^2 - \rho'^2w^2}}, \quad (6.19)$$

получаем

$$p^{\mu}(0, \sigma) = \gamma \frac{(\rho'w)\rho^{\prime\mu} - \rho'^2w^{\mu}}{\sqrt{(\rho'w)^2 - \rho'^2w^2}}. \quad (6.20)$$

Отметим, что скорость точек струны в начальный момент $\dot{x}^{\mu}(0, \sigma)$, найденная по формуле (6.17), совпадает с $w^{\mu}(\sigma)$ только в том случае, когда начальные данные $\rho^{\prime\mu}(\sigma)$ и $w^{\mu}(\sigma)$ удовлетворяют дополнительным условиям (3.21):

$$\rho'^2 + w^2 = 0, \quad \rho'w = 0. \quad (6.21)$$

Если эти условия выполнены, то подынтегральное выражение в (6.17) есть просто скорость струны в начальный момент, и формула (6.17) переходит в (6.3) с $w^{\mu} = v^{\mu} = \dot{x}^{\mu}(0, \sigma)$.

В общем случае, согласно (6.19),

$$\dot{x}^{\mu}(0, \sigma) = w_{\perp}^{\mu}(\sigma) (-\rho'^2(\sigma)/w_{\perp}^2(\sigma))^{1/2},$$

несмотря на то, что в формулы (6.18) и (6.20) $\dot{x}^{\mu}(0, \sigma)$ и $w^{\mu}(\sigma)$ входят одинаково. Здесь нет противоречия, так формулу (6.18) нельзя обратить, т. е. выразить скорости $\dot{x}^{\mu}(\tau, \sigma)$ через импульсы $p^{\mu}(\tau, \sigma)$. Это является следствием сингулярности лагранжиана релятивистской струны:

$$\det \left\| \frac{\partial p_{\mu}}{\partial \dot{x}^{\nu}} \right\| = \det \left\| -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\mu} \partial \dot{x}^{\nu}} \right\| = 0. \quad (6.22)$$

(см. гл. 2).

Рассмотренная выше задача Коши в теории релятивистской струны является переформулировкой на гиперболический случай геометрической проблемы построения минимальной поверхности, проходящей через заданную кривую и касающейся семейства плоскостей, заданных вдоль этой кривой. Координаты такой минимальной поверхности в случае трехмерного евклидова пространства определяются формулами Шварца [23], а в случае n -мерного евклидова пространства — формулами, полученными в [24]:

$$X_s(u, v) = \frac{1}{2} [x_s(u) + x_s(v)] + \frac{i}{2} \sum_{r=1}^n \int P_{sr} dx_r, \quad (6.23)$$

Здесь $X_s(u, v)$ — координаты минимальной поверхности, удовлетворяющие уравнениям

$$\partial^2 X_s(u, v) / \partial u \partial v = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n; \quad (6.24)$$

$$\sum_{s=1}^n (\partial_u X_s)^2 = \sum_{s=1}^n (\partial_v X_s)^2 = 0, \quad (6.25)$$

где u, v — комплексные переменные. Эта поверхность проходит через заданную кривую, координаты которой описываются аналитическими функциями $x_s(t)$. Касательные плоскости к минимальной поверхности

вдоль этой кривой имеют направляющие косинусы, заданные *аналитическими функциями* $P_{sr}(t)$:

$$P_{sr}P_{sr}' = \delta_{rr}'; \quad P_{sr} = -P_{rs}. \quad (6.26)$$

Направляющие косинусы P_{sr} выражаются через метрический тензор и касательные векторы к поверхности следующим образом:

$$P_{sr} = J_{sr} / \sqrt{g}, \quad (6.27)$$

где

$$J_{sr} = \partial(x_s, x_r) / \partial(u, v). \quad (6.28)$$

Подставляя (6.27) и (6.28) в (6.23), получаем евклидов аналог формулы (6.17).

В формулах Шварца и в их обобщениях на n -мерный случай существенно, чтобы начальные данные задавались аналитическими функциями. Именно это позволяет восстановить координаты всей минимальной поверхности, зная их значения вдоль заданной кривой.

Полученное решение задачи Коши для уравнений движения струны

$$x^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} \left[\rho^\mu(\sigma + \tau) + \rho^\mu(\sigma - \tau) \right] + \frac{1}{2\gamma} \int_{\sigma - \tau}^{\sigma + \tau} p^\mu(0, \lambda) d\lambda, \quad (6.29)$$

очевидно, будет удовлетворять и самым общим уравнениям Лагранжа (3.18), в которых не используется ортонормальная параметризация (3.21). Учитывая, что уравнения (3.18) ковариантны при произвольной замене параметров τ, σ (3.14), можно из (6.29) получить общее решение уравнений (3.18), если в (6.29) сделать замену

$$\tau = f_1(\bar{\tau}, \bar{\sigma}); \quad \sigma = f_2(\tau, \sigma); \quad \partial(f_1, f_2) / \partial(\bar{\tau}, \bar{\sigma}) \neq 0. \quad (6.30)$$

Координаты струны $x^\mu(\tau, \sigma)$ при перепараметризации (6.30) преобразуются как скаляры

$$\bar{x}^\mu(\bar{\tau}, \bar{\sigma}) = x^\mu(f_1(\bar{\tau}, \bar{\sigma}), f_2(\bar{\tau}, \bar{\sigma})), \quad (6.31)$$

поэтому искомое решение можно записать в следующем виде:

$$x^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} \left[\rho^\mu(F(\tau, \sigma)) + \rho^\mu(G(\tau, \sigma)) \right] + \frac{1}{2\gamma} \int_{G(\tau, \sigma)}^{F(\tau, \sigma)} \tilde{p}^\mu(\lambda) d\lambda. \quad (6.32)$$

Здесь опущена черта у переменных τ и σ и введены две новые произвольные функции:

$$F(\tau, \sigma) = f_1(\tau, \sigma) + f_2(\tau, \sigma); \quad G(\tau, \sigma) = f_1(\tau, \sigma) - f_2(\tau, \sigma). \quad (6.33)$$

Если эти функции выбрать так, чтобы $F(0, \sigma) = \sigma$, $G(0, \sigma) = \sigma$, то формула (6.32) будет давать в произвольной параметризации решение задачи Коши для лагранжевых уравнений (3.18) с начальными данными:

$$x^\mu(0, \sigma) = \rho^\mu(\sigma), \quad p^\mu(0, \sigma) = \tilde{p}^\mu(\sigma).$$

Наглядное представление о движении релятивистской струны можно получить лишь в том случае, если эволюционный параметр τ на мировой поверхности струны совпадает (или пропорционален) с временем t . В этом случае начальные данные в задаче Коши должны удовлетворять определенным условиям [22].

Начальная конфигурация струны $\rho^\mu(\lambda)$, очевидно, должна иметь вид

$$\rho^\mu(\lambda) = \{t_0, x_0(\lambda)\}, \quad (6.34)$$

где t_0 — константа (начальный момент); $x_0(\lambda)$ — пространственная начальная конфигурация струны. Для задания начальной полоски вектор $w^\mu(\lambda)$ естественно выбрать так:

$$w^\mu(\lambda) = \{1, w(\lambda)\}. \quad (6.35)$$

Если выполняется условие гиперболичности

$$(x'_0 w)^2 + x_0'^2 (1 - w^2) > 0 \quad (6.36)$$

и параметр λ в (6.34) и (6.35) выбран так, что имеет место равенство

$$x'^2(\lambda) = \sqrt{(x'_0 w)^2 + x_0'^2 (1 - w^2)}, \quad (6.37)$$

то решение задачи Коши определяется формулами:

$$t = \tau; \quad x(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left[x_0(\sigma - t) + x_0(\sigma + t) \right] + \frac{1}{2} \int_{\sigma - t}^{\sigma + t} \left[w - \frac{(x'_0 w)}{x_0'^2} x'_0 \right] d\lambda. \quad (6.38)$$

Чтобы не беспокоиться о выполнении начальными данными условия (6.37), можно пользоваться следующей формулой, определяющей $x(t, \sigma)$ [22]:

$$x(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left[x_0(\sigma - t) + x_0(\sigma + t) \right] + \frac{1}{2} \int_{\sigma - t}^{\sigma + t} \frac{\sqrt{1 - x_0'^2} x_0'^2 u - (x'_0 u) x'_0}{x_0'^2 \sqrt{x_0'^2 u^2 - (x'_0 u)^2}} d\lambda. \quad (6.39)$$

Здесь начальная пространственная полоска для мировой поверхности струны задается векторными функциями, подчиненными только одному условию:

$$x_0'^2 u^2 - (x'_0 u)^2 > 0. \quad (6.40)$$

Исходя из решений (6.38) и (6.39), легко показать, что во все моменты времени выполняются равенства

$$\dot{x}x' = 0, \quad \dot{x}^2 + x'^2 = 1. \quad (6.41)$$

Это частный случай условий ортонормальной калибровки (3.16) при $t = \tau$.

В работе [22] приведены формулы, дающие решение задачи Коши в теории релятивистской струны и в том случае, когда начальные дан-

ные заданы как функции одной из декартовых координат объемлющего пространства.

Формула (6.17) позволяет получить решение задачи Коши и для конечной струны. Чтобы удовлетворить граничным условиям (4.3), достаточно продолжить за интервал $0 < \lambda < \pi$ начальные данные $\rho^\mu(\lambda)$ и $p^\mu(\lambda)$ четно относительно точек $0, \pi$ [см. формулу (6.20)].

7. Примеры движений релятивистской струны

Решение задачи Коши для релятивистской струны позволяет изучать ее конкретные движения из заданных начальных положений [21]. Нелинейный характер этого объекта приводит к ряду особенностей в его движении. Прежде всего, длина струны может меняться в процессе движения, причем струна может даже стягиваться в точку. Скорость свободных концов струны всегда равна скорости света, что является следствием граничных условий (4.3) и условий ортогональной калибровки (4.2), согласно которым $\dot{x}^2(\tau, \sigma_i) = 0, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = \pi$. Полагая $t = \tau$, получаем $(dx(t, \sigma_i)/dt)^2 = 1$. Если струна в начальный момент покоилась, то траектории ее свободных концов совпадают с конфигурацией струны в начальный момент.

Рассмотрим несколько простейших примеров движений струны.

Пусть в начальный момент струна имеет форму окружности радиусом R и покоится в плоскости x, y :

$$x_0(\lambda) = R \cos(\lambda/R); \quad y_0(\lambda) = R \sin(\lambda/R); \quad z_0(\lambda) = 0, \quad t_0(\lambda) = 0;$$

$$v(\lambda) = 0; \quad v_t(\lambda) = 1.$$

По формуле (6.3) получаем

$$t = \tau; \quad x(t, \sigma) = R \cos(t/R) \cos(\sigma/R);$$

$$y(t, \sigma) = R \cos(t/R) \sin(\sigma/R); \quad z = 0.$$

Таким образом, кольцо остается в плоскости x, y и пульсирует с периодом πR . Отметим, что в данном случае безразлично, считать ли струну бесконечной и свернутой в кольцо или же рассматривать ее как конечную, но замкнутую.

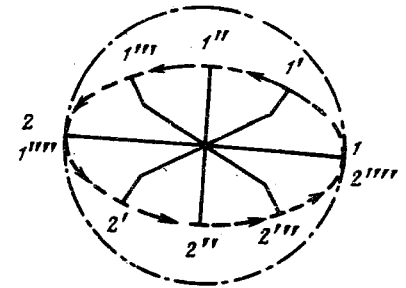
Струна, имевшая в начальный момент форму прямолинейного отрезка и покоившаяся, начинает осциллировать, то сжимаясь в точку, то принимая искомые размеры. При этом ее концы периодически меняются местами.

Рассмотрим вращение струны в плоскости. Возьмем начальные данные в виде

$$x^\mu(0, \sigma) = \left\{ 0, \frac{1}{\sqrt{\gamma}\omega} \sin(\omega\sigma), 0, 0 \right\};$$

$$\dot{x}^\mu(0, \sigma) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\gamma}}, 0, \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sin(\omega\sigma), 0 \right\}, \quad -L < \sigma < L.$$

Рис. 3. Вращение струны в плоскости: 1, 2; 1', 2' - 1'', 2'' - последовательные положения струны



Форма струны в последующие моменты времени показана на рис. 3. Струна вращается, оставаясь в плоскости x, y , но не все ее точки имеют одну и ту же угловую скорость. Поэтому в профиле струны появляются изломы и ее длина меняется во времени. Если же $2\omega L = \pi$, то струна вращается с угловой скоростью ω как жесткий стержень. Квадрат массы струны определяется следующим выражением:

$$M^2 = P_0^2 = 4\gamma L^2.$$

Угловой момент струны равен

$$J = \gamma \int_{-L}^{+L} d\sigma (x\dot{y} - y\dot{x}) = (1/\omega^2) [\omega L - \sin(2\omega L)].$$

Если $2\omega L = \pi$, то струна имеет максимальный угловой момент, причем $J = M^2/(2\pi\gamma) = a'M^2$. Таким образом, имеем линейно растущую реджевскую траекторию с параметром наклона $a' = (2\pi\gamma)^{-1}$.

На рис. 4 приведены профили струны, имевшей в начальный момент форму окружности, разрезанной в одной точке. Концы струны остаются в процессе движения свободными, при этом их траектории совпадают с исходным профилем струны.

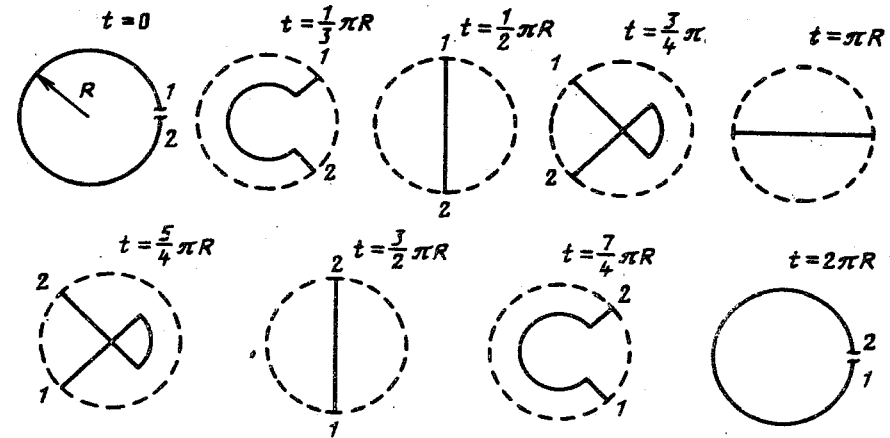


Рис. 4. Движение струны, имевшей в начальный момент форму окружности (концы струны 1 и 2 свободны)

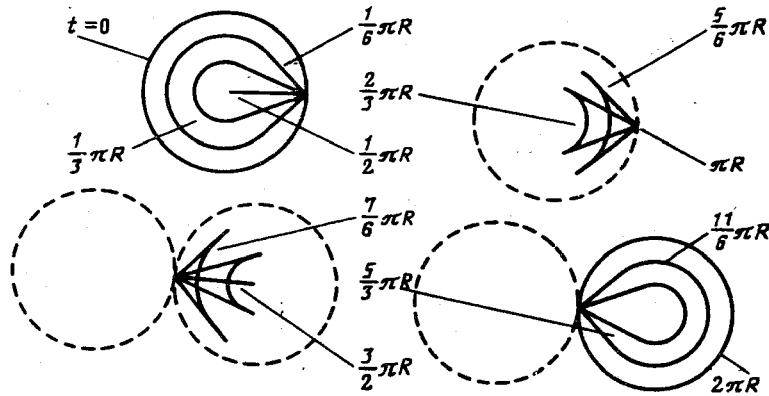


Рис. 5. Движение струны, имевшей в начальный момент форму окружности (концы струны закреплены)

Движение той же струны, но с закрепленными концами, показано на рис. 5.

Другие примеры классических движений релятивистской струны можно найти в [12, 25].

ГЛАВА 2

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ И КВАНТОВАНИЕ

8. Связи и уравнения движения в фазовом пространстве

Особенности гамильтоновой динамики релятивистской струны, так же, как и ее динамика в конфигурационном пространстве, определяются свойствами инвариантности действия (2.22). Как уже отмечалось ранее, это действие инвариантно при замене параметров τ, σ по формулам (2.12) с двумя произвольными функциями двух переменных. Отсюда следует, что лагранжиан Намбу–Гото вырожденный [26]. Действительно, в тождествах Нетер (3.13)

$$L_{\mu}(\partial x, \partial^2 x) \dot{x}^{\mu} \equiv 0, \quad L_{\mu}(\partial x, \partial^2 x) x'^{\mu} \equiv 0, \quad (8.1)$$

которые справедливы при всех значениях функций $x^{\mu}(\tau, \sigma)$, должны независимо обращаться в нуль коэффициенты при каждой из производных $x^{\mu}(\tau, \sigma)$. Приравнявая нулю коэффициенты при $\ddot{x}^{\mu}(\tau, \sigma)$, $\mu = 0, 1, \dots, D-1$, получаем

$$\Lambda_{\mu\nu}(\partial x) \dot{x}^{\nu} = \Lambda_{\mu\nu}(\partial x) x'^{\nu} = 0, \quad (8.2)$$

где

$$\Lambda_{\mu\nu}(\partial x) = \partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{x}^{\mu} \partial \dot{x}^{\nu}. \quad (8.3)$$

Таким образом, матрица $\Lambda_{\mu\nu}$ имеет два собственных вектора \dot{x}^{μ} и x'^{ν} , которым соответствуют нулевые собственные значения. Следовательно,

$$\text{rank } \|\Lambda_{\mu\nu}\| = D - 2, \quad (8.4)$$

где D – размерность пространства-времени. Это означает, что в теории должны быть две первичные связи между каноническими переменными: координатами струны $x^{\mu}(\tau, \sigma)$ и импульсами

$$p_{\mu}(\tau, \sigma) = -\partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}^{\mu}. \quad (8.5)$$

Это утверждение не зависит от конкретного вида лагранжиана \mathcal{L} , а основывается только на симметрии действия при преобразованиях (2.12).

В случае лагранжиана (2.22) канонически сопряженные импульсы определяются формулой

$$p^{\mu} = \gamma \frac{(\dot{x}x') x'^{\mu} - x'^2 \dot{x}^{\mu}}{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}}, \quad (8.6)$$

с помощью которой легко получить связи между x^{μ} и p^{μ} :

$$\varphi_1(x, p) = \gamma^2 x'^2 + p^2 = 0; \quad (8.7)$$

$$\varphi_2(x, p) = x'p = 0. \quad (8.8)$$

Эти связи можно записать и так:

$$(\gamma x'^{\mu} \pm p^{\mu})^2 = 0. \quad (8.9)$$

Следует отметить, что условие (8.8) опять универсально для всех параметризационно инвариантных лагранжианов и только связь (8.7) зависит от конкретного вида \mathcal{L} (см. приложение Б).

Других связей (вторичных) в теории струны нет, так как в этой теории нет лагранжевых связей, т. е. уравнений Эйлера, не содержащих вторых производных по τ от координат струны. Это утверждение непосредственно следует из тождеств Нетер (8.1), так как лагранжевы связи получаются проектированием уравнений Эйлера на нулевые векторы матрицы $\Lambda_{\mu\nu}$.

Канонический гамильтониан

$$\mathcal{H}_c = -\dot{x}_{\mu} p^{\mu} - \mathcal{L} \quad (8.10)$$

для лагранжиана Намбу–Гото обращается тождественно в нуль, так как в этой модели лагранжиан является однородной функцией первой степени по скоростям $\dot{x}^{\mu}(\tau, \sigma)$.

Связи (8.7), (8.8) должны быть связями первого рода, т. е. находиться в инволюции, по крайней мере в слабом смысле. Только в этом случае динамика струны в фазовом пространстве содержит функциональный произвол, причем точно такой же, как и лагранжева динамика.

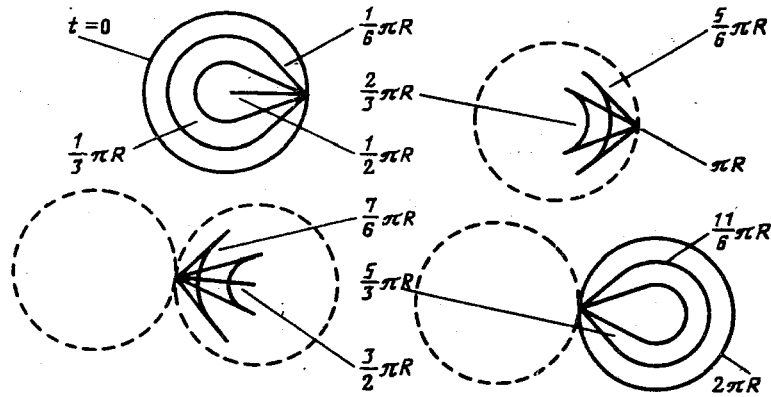


Рис. 5. Движение струны, имевшей в начальный момент форму окружности (концы струны закреплены)

Движение той же струны, но с закрепленными концами, показано на рис. 5.

Другие примеры классических движений релятивистской струны можно найти в [12, 25].

ГЛАВА 2

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ И КВАНТОВАНИЕ

8. Связи и уравнения движения в фазовом пространстве

Особенности гамильтоновой динамики релятивистской струны, так же, как и ее динамика в конфигурационном пространстве, определяются свойствами инвариантности действия (2.22). Как уже отмечалось ранее, это действие инвариантно при замене параметров τ, σ по формулам (2.12) с двумя произвольными функциями двух переменных. Отсюда следует, что лагранжиан Намбу–Гото вырожденный [26]. Действительно, в тождествах Нетер (3.13)

$$L_{\mu}(\partial x, \partial^2 x) \dot{x}^{\mu} \equiv 0, \quad L_{\mu}(\partial x, \partial^2 x) x'^{\mu} \equiv 0, \quad (8.1)$$

которые справедливы при всех значениях функций $x^{\mu}(\tau, \sigma)$, должны независимо обращаться в нуль коэффициенты при каждой из производных $x^{\mu}(\tau, \sigma)$. Приравнявая нулю коэффициенты при $\ddot{x}^{\mu}(\tau, \sigma)$, $\mu = 0, 1, \dots, D-1$, получаем

$$\Lambda_{\mu\nu}(\partial x) \dot{x}^{\nu} = \Lambda_{\mu\nu}(\partial x) x'^{\nu} = 0, \quad (8.2)$$

где

$$\Lambda_{\mu\nu}(\partial x) = \partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{x}^{\mu} \partial \dot{x}^{\nu}. \quad (8.3)$$

Таким образом, матрица $\Lambda_{\mu\nu}$ имеет два собственных вектора \dot{x}^{μ} и x'^{ν} , которым соответствуют нулевые собственные значения. Следовательно,

$$\text{rang } \|\Lambda_{\mu\nu}\| = D - 2, \quad (8.4)$$

где D – размерность пространства-времени. Это означает, что в теории должны быть две первичные связи между каноническими переменными: координатами струны $x^{\mu}(\tau, \sigma)$ и импульсами

$$p_{\mu}(\tau, \sigma) = -\partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}^{\mu}. \quad (8.5)$$

Это утверждение не зависит от конкретного вида лагранжиана \mathcal{L} , а основывается только на симметрии действия при преобразованиях (2.12).

В случае лагранжиана (2.22) канонически сопряженные импульсы определяются формулой

$$p^{\mu} = \gamma \frac{(\dot{x}x') x'^{\mu} - x'^2 \dot{x}^{\mu}}{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}}, \quad (8.6)$$

с помощью которой легко получить связи между x^{μ} и p^{μ} :

$$\varphi_1(x, p) = \gamma^2 x'^2 + p^2 = 0; \quad (8.7)$$

$$\varphi_2(x, p) = x' p = 0. \quad (8.8)$$

Эти связи можно записать и так:

$$(\gamma x'^{\mu} \pm p^{\mu})^2 = 0. \quad (8.9)$$

Следует отметить, что условие (8.8) опять универсально для всех параметризационно инвариантных лагранжианов и только связь (8.7) зависит от конкретного вида \mathcal{L} (см. приложение Б).

Других связей (вторичных) в теории струны нет, так как в этой теории нет лагранжевых связей, т. е. уравнений Эйлера, не содержащих вторых производных по τ от координат струны. Это утверждение непосредственно следует из тождеств Нетер (8.1), так как лагранжевы связи получаются проектированием уравнений Эйлера на нулевые векторы матрицы $\Lambda_{\mu\nu}$.

Канонический гамильтониан

$$\mathcal{H}_c = -\dot{x}_{\mu} p^{\mu} - \mathcal{L} \quad (8.10)$$

для лагранжиана Намбу–Гото обращается тождественно в нуль, так как в этой модели лагранжиан является однородной функцией первой степени по скоростям $\dot{x}^{\mu}(\tau, \sigma)$.

Связи (8.7), (8.8) должны быть связями первого рода, т. е. находиться в инволюции, по крайней мере в слабом смысле. Только в этом случае динамика струны в фазовом пространстве содержит функциональный произвол, причем точно такой же, как и лагранжева динамика.

Скобки Пуассона двух функционалов

$$F = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathcal{F}(x(\tau, \sigma), p(\tau, \sigma)) d\sigma \quad \text{и} \quad G = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathcal{G}(x(\tau, \sigma), p(\tau, \sigma)) d\sigma$$

введем обычным путем:

$$\{F, G\} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(\frac{\delta F}{\delta p^\mu} \frac{\delta G}{\delta x_\mu} - \frac{\delta F}{\delta x^\mu} \frac{\delta G}{\delta p_\mu} \right) d\sigma. \quad (8.11)$$

Это приводит к следующим значениям для скобок Пуассона канонических переменных:

$$\left. \begin{aligned} \{x_\mu(\tau, \sigma), p_\nu(\tau, \sigma')\} &= -g_{\mu\nu} \Delta(\sigma, \sigma'); \\ g_{\mu\nu} &= \text{diag}(1, -1, -1, \dots); \\ \{x_\mu(\tau, \sigma), x_\nu(\tau, \sigma')\} &= \{p_\mu(\tau, \sigma), p_\nu(\tau, \sigma')\} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

где функция $\Delta(\sigma, \sigma')$ играет роль δ -функции для области $[\sigma_1, \sigma_2]$:

$$f(\sigma) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \Delta(\sigma, \sigma') f(\sigma') d\sigma', \quad \sigma_1 < \sigma < \sigma_2. \quad (8.13)$$

В частности, если струна бесконечная, $\sigma_1 \rightarrow -\infty$, $\sigma_2 \rightarrow +\infty$, то $\Delta(\sigma, \sigma')$ в этом случае есть просто δ -функция Дирака

$$\Delta(\sigma, \sigma') = \delta(\sigma - \sigma'). \quad (8.14)$$

Из (8.11)–(8.13) следует:

$$\{x'_\mu(\tau, \sigma), p_\nu(\tau, \sigma')\} = g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \sigma'} \Delta(\sigma, \sigma'). \quad (8.15)$$

Для упрощения формул там, где это возможно, будем опускать явную зависимость от τ у канонических переменных.

С помощью формул (8.12) и (8.15) легко вычислить алгебру скобок Пуассона связей (8.7), (8.8):

$$\left. \begin{aligned} \{\varphi_1(\sigma), \varphi_1(\sigma')\} &= 4\gamma^2 (\varphi_2(\sigma) + \varphi_2(\sigma')) \frac{\partial}{\partial \sigma'} \Delta(\sigma, \sigma'); \\ \{\varphi_2(\sigma), \varphi_2(\sigma')\} &= (\varphi_2(\sigma) + \varphi_2(\sigma')) \frac{\partial}{\partial \sigma'} \Delta(\sigma, \sigma'); \\ \{\varphi_1(\sigma), \varphi_2(\sigma')\} &= (\varphi_1(\sigma) + \varphi_1(\sigma')) \frac{\partial}{\partial \sigma'} \Delta(\sigma, \sigma'). \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Следует отметить, что алгебра (8.16) универсальна для всех параметризационно инвариантных теорий [26] и ее структура не зависит от конкретного вида лагранжиана.

Если связи $\varphi_i(\sigma)$, $i = 1, 2$, трактовать как генераторы преобразований фазового пространства $x^\mu(\sigma)$, $p^\mu(\sigma)$, то соответствующее групповое пространство можно рассматривать, согласно (8.16), как сим-

метрическое пространство с подгруппой стабильности, порождаемой $\varphi_2(\sigma)$.

Вычислим скобки Пуассона связей (8.7) и (8.8) с координатами струны

$$\left. \begin{aligned} \{\varphi_1(\sigma), x_\mu(\sigma')\} &= 2p_\mu(\sigma) \Delta(\sigma, \sigma'); \\ \{\varphi_2(\sigma), x_\mu(\sigma')\} &= x'_\mu(\sigma) \Delta(\sigma, \sigma'). \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

Эти формулы позволяют интерпретировать $\varphi_2(\sigma)$ как генератор σ перепараметризации, а $\varphi_1(\sigma)$ генерирует динамическую эволюцию системы.

С помощью метода неопределенных множителей Лагранжа можно перейти от уравнений Эйлера (3.9) к уравнениям движения в фазовом пространстве:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_\mu(\tau, \sigma) &= -\frac{\delta H_T}{\delta p^\mu(\tau, \sigma)} = -\frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial p^\mu(\tau, \sigma)}; \\ \dot{p}_\mu(\tau, \sigma) &= \frac{\delta H_T}{\delta x^\mu(\tau, \sigma)} = \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial x'^\mu} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

где H_T – обобщенный гамильтониан, являющийся линейной комбинацией связей (8.7) и (8.8):

$$H_T = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathcal{H}_T d\sigma = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma [\lambda_1(\tau, \sigma) \varphi_1(\tau, \sigma) + \lambda_2(\tau, \sigma) \varphi_2(\tau, \sigma)]. \quad (8.19)$$

Уравнения (8.18) должны быть дополнены граничными условиями

$$\partial \mathcal{H}_T / \partial x'^\mu |_{\sigma=\sigma_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (8.20)$$

В явном виде уравнения (8.18) и граничные условия (8.20) записываются так:

$$\dot{x}_\mu = -2\lambda_1 p_\mu - \lambda_2 x'_\mu; \quad (8.21)$$

$$\dot{p}_\mu = -2\gamma^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} (\lambda_1 x'_\mu) - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\lambda_2 p_\mu); \quad (8.22)$$

$$2\lambda_1 \gamma^2 x'_\mu + \lambda_2 p_\mu |_{\sigma=\sigma_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (8.23)$$

Из всех решений этих уравнений необходимо взять только те, которые удовлетворяют условиям (8.7) и (8.8).

Для произвольного функционала $G = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathcal{G}(x, x', p, \tau) d\sigma$ полная производная по τ вдоль фазовых траекторий определяется формулой

$$dG/dt = \partial G / \partial \tau + \{G, H_T\}. \quad (8.24)$$

При этом предполагается выполнение граничных условий

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_\mu} \right) \Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2} = 0. \quad (8.25)$$

Условия (8.7) и (8.8), накладываемые связями, являются инвариантными соотношениями для уравнений движения (8.18). С помощью (8.24) легко проверить, что $d\varphi_i/d\tau = 0$, $i = 1, 2$, на решениях этих уравнений. Таким образом, условия (8.7) и (8.8) достаточно наложить на начальные данные, чтобы они выполнялись всегда.

Как и во всякой теории со связями первого рода, в динамике струны в фазовом пространстве имеет место функциональный произвол. Множители Лагранжа $\lambda_i(\tau, \sigma)$, $i = 1, 2$, в уравнениях движения остаются произвольными функциями. Это соответствует функциональному произволу при лагранжевом описании динамики струны в общековариантном подходе.

Докажем эквивалентность гамильтонова описания динамики струны [уравнения (8.21)–(8.23)] и лагранжева [уравнения (3.18) и (3.12)].

Пусть $x^\mu(\tau, \sigma)$ и $p^\mu(\tau, \sigma)$ – решения гамильтоновых уравнений (8.21) и (8.22) с произвольными функциями $\lambda_i(\tau, \sigma)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие граничным условиям (8.23) и связям (8.7), (8.8). Тогда из (8.21) с помощью (8.7) и (8.8) получаем:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\gamma} \frac{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}}{x'^2}; \quad \lambda_2 = -\frac{(\dot{x}x')}{x'^2}. \quad (8.26)$$

Следует отметить, что эти формулы вовсе не означают возможность фиксации неопределенных множителей Лагранжа в рамках уравнений (8.21), (8.7), (8.8). Мы предположили, что $x^\mu(\tau, \sigma)$ есть решение уравнений Гамильтона с произвольными функциями $\lambda_i(\tau, \sigma)$, $i = 1, 2$, и формулы (8.26) показывают, что выражения, стоящие в правых частях этих равенств, являются произвольными функциями τ и σ .

Если подставим теперь в (8.22) найденные значения для множителей Лагранжа (8.26) и выражение для импульса $p^\mu(\tau, \sigma)$ из (8.21), то в точности получим уравнения Эйлера (3.18)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ (-g)^{-1/2} [\dot{x}_\mu x'^2 - x'_\mu (\dot{x}x')] \right\} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ (-g)^{-1/2} [x'_\mu \dot{x}^2 - \dot{x}_\mu (\dot{x}x')] \right\} = 0. \quad (8.27)$$

Аналогичная подстановка в (8.23) дает граничные условия в лагранжевом формализме (3.12).

Можно поступить наоборот, т. е. из лагранжевых уравнений (3.18) и (3.12) получить гамильтоновы уравнения (8.21)–(8.23). При этом уравнение (8.21) возникает из определения (8.6) и формул (8.26), а второе уравнение Гамильтона (8.22) – из (3.18), (8.26) и (8.6).

В [12] гамильтоновы уравнения (8.21) и (8.22) записаны в следующем виде:

$$\dot{a}_\mu = -(fa_\mu)'; \quad \dot{b}_\mu = -(gb_\mu)', \quad (8.28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_\mu &= p_\mu + \gamma x'_\mu; & b_\mu &= p_\mu - \gamma x'_\mu, \\ f &= 2\gamma\lambda_1 + \lambda_2; & g &= -2\gamma\lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

В этой же работе найдено общее решение уравнений (8.28), содержащее две произвольные функции двух переменных τ, σ . Как и следовало ожидать, это решение для $x_\mu(\tau, \sigma)$ воспроизводит общее решение лагранжевых уравнений (3.18), определяемое формулой (6.39). Общее решение для $p_\mu(\tau, \sigma)$ можно получить, если в определение (8.6) подставить (6.39):

$$p_\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{p}_\mu(F(\tau, \sigma)) F'(\tau, \sigma) + \tilde{p}_\mu(G(\tau, \sigma)) G'(\tau, \sigma) + \gamma [\rho'_\mu(F(\tau, \sigma)) F'(\tau, \sigma) - \rho'_\mu(G(\tau, \sigma)) G'(\tau, \sigma)] \right\}. \quad (8.30)$$

В этой формуле ρ_μ и \tilde{p}_μ – данные Коши для гамильтоновых уравнений (8.28)

$$x_\mu(0, \sigma) = \rho_\mu(\sigma); \quad p_\mu(0, \sigma) = \tilde{p}_\mu(\sigma), \quad (8.31)$$

которые должны удовлетворять дополнительным условиям (8.7), (8.8). Функции $F(\tau, \sigma)$ и $G(\tau, \sigma)$ подчиняются единственному требованию:

$$F(0, \sigma) = \sigma; \quad G(0, \sigma) = \sigma. \quad (8.32)$$

К сожалению, построить квантовую теорию релятивистской струны, используя общие решения (6.39) и (8.30), не удастся. При квантовании приходится тем или иным путем фиксировать функциональный произвол в гамильтоновом формализме.

9. Гамильтонова теория релятивистской струны с калибровочными условиями. Нековариантное квантование

Существуют два способа устранения функционального произвола в гамильтоновой динамике струны. Первый состоит в наложении на канонические переменные струны калибровочных условий дополнительно к первичным связям (8.7), (8.8). Другой путь – это выбор определенных значений для множителей Лагранжа $\lambda_i(\tau, \sigma)$ в гамильтоновых уравнениях движения (8.21)–(8.23). Вначале рассмотрим первый способ.

Согласно гамильтоновой теории для систем с вырожденными лагранжианами для устранения функционального произвола в динамике таких систем в фазовом пространстве необходимо наложить столько

калибровочных условий на канонические переменные, сколько имеется в теории связей первого рода [27]. Таким образом, в теории релятивистской струны, где всего две связи первого рода, требуется ввести два калибровочных условия. Эти условия должны явно зависеть от параметра эволюции τ , как и во всякой параметризационно-инвариантной теории с тождественно равным нулю каноническим гамильтонианом [28]. Кроме того, в совокупности калибровочные условия и связи первого рода должны образовать систему связей второго рода [27]. При выборе калибровочных условий в теории струны необходимо принимать во внимание следующие соображения. Функциональный произвол здесь обусловлен не физической, а чисто геометрической природой параметров τ и σ . Поэтому, чтобы устранить этот произвол, естественно связать параметры τ и σ с физическими переменными, описывающими струну (координатами, импульсом). Свяжем, например, эволюционный параметр τ с линейной комбинацией координат струны, задаваемой постоянным вектором n^μ , не зависящим от τ и σ :

$$\chi_1(\sigma) = \gamma n_\mu \left(x^\mu - \frac{P^\mu}{\gamma \pi} \tau - Q^\mu \right) = 0. \quad (9.1)$$

Здесь P_μ — полный импульс струны:

$$P_\mu = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} p_\mu(\tau, \sigma) d\sigma. \quad (9.2)$$

Вычислим скобки Пуассона калибровочного условия $\chi_1(\sigma)$ со связями (8.7) и (8.8):

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \varphi_1(\sigma), \chi_1(\sigma') \right\} &= 2\gamma(np(\sigma)) \Delta(\sigma, \sigma'); \\ \left\{ \varphi_2(\sigma), \chi_1(\sigma') \right\} &= \gamma(nx'(\sigma)) \Delta(\sigma, \sigma') = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Из (9.3) следует, что условие (9.1) не нарушает инвариантность теории при σ -репараметризации, генерируемой связью φ_2 , но инвариантность при преобразованиях, порождаемых φ_1 , нарушена, так как $(np) \neq 0$. Действительно, (np) не может равняться нулю, потому что

$$\begin{aligned} (np) &= \gamma(|g|)^{-1/2} [(\dot{x}x') - x'^2(n\dot{x})] = -\gamma(|g|)^{-1/2} x'^2(n\dot{x}) = \\ &= -(|g|)^{-1/2} x'^2(nP)/\pi, \end{aligned} \quad (9.4)$$

и мы предполагаем, что проекция полного импульса струны P_μ на постоянный вектор n_μ не равна нулю. Таким образом, одного условия (9.1) недостаточно, чтобы полностью устранить функциональный произвол в теории. Потребуем, чтобы скалярное произведение (np) , определяемое формулой (9.4), было равно константе:

$$(np) = -(|g|)^{-1/2} x'^2 \frac{(nP)}{\pi} = C. \quad (9.5)$$

Тогда, умножая уравнения Эйлера—Лагранжа (3.18) на постоянный вектор n и учитывая (9.4) и (9.5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(n_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_\mu} \right) &= \gamma \frac{\partial}{\partial \sigma} [(|g|)^{-1/2} (\dot{x}x') (n\dot{x})] = \\ &= - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{(np)(\dot{x}x')}{x'^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Таким образом,

$$n_\mu \partial \mathcal{L} / \partial x'_\mu = f(\tau). \quad (9.7)$$

Но согласно граничным условиям (3.12), функция $f(\tau)$ должна равняться нулю. Поэтому во всей области Ω изменения параметров τ и σ имеем

$$(np)(\dot{x}x')/x'^2 = 0. \quad (9.8)$$

Следовательно, калибровочные условия (9.4) и (9.5) привели к выполнению одного из условий ортонормальной калибровки лагранжева формализма:

$$\dot{x}x' = 0. \quad (9.9)$$

Подставим теперь (9.9) в (9.5):

$$(-x'^2/\dot{x}^2)^{1/2} = (\pi/nP)C. \quad (9.10)$$

Если теперь положить константу C равной nP/π , то будет выполнено и второе условие ортонормальной калибровки в лагранжевом формализме:

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 0. \quad (9.11)$$

Окончательно второе калибровочное условие в гамильтоновом формализме возьмем в следующем виде:

$$\chi_2(\sigma) = np - nP/\pi = 0. \quad (9.12)$$

Если условие (9.12) переписать в интегральном виде

$$\sigma/\pi = (1/nP) \int_{\sigma_1}^{\sigma} d\sigma' (np),$$

то можно интерпретировать параметр σ как относительную долю проекции на вектор n импульса той части струны, которая заключена между границей $\sigma = \sigma_1$ и точкой σ .

Выпишем скобки Пуассона χ_2 с φ_1 , φ_2 и χ_1 :

$$\left\{ \varphi_1(\sigma), \chi_2(\sigma') \right\} = -2\gamma^2 (nx'(\sigma)) \Delta(\sigma, \sigma') = 0; \quad (9.13)$$

$$\left\{ \varphi_2(\sigma), \chi_2(\sigma') \right\} = (np(\sigma)) \frac{\partial}{\partial \sigma} \Delta(\sigma, \sigma') = \frac{(nP)}{\pi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \Delta(\sigma, \sigma'); \quad (9.14)$$

$$\left\{ \chi_1(\sigma), \chi_2(\sigma') \right\} = \gamma n^2 \left(\frac{1}{\pi} - \Delta(\sigma, \sigma') \right). \quad (9.15)$$

Из (9.14) следует, что калибровочное условие (9.12), как это и требуется в обобщенной гамильтоновой динамике, нарушает инвариантность теории по отношению к σ -параметризации, генерируемой φ_2 .

Теперь потребуем, чтобы калибровочные условия (9.1) и (9.12) сохранялись в процессе эволюции струны:

$$d\chi_i/d\tau = 0, \quad i = 1, 2. \quad (9.16)$$

Это позволит определить множитель Лагранжа в гамильтоновых уравнениях (8.2) и (8.22). Действительно, используя (8.19), (8.24), (9.3), (9.13) и (9.14), получаем:

$$\frac{d\chi_1}{d\tau} = -\frac{nP}{\pi} + \{\chi_1, H_T\} = -\frac{nP}{\pi} - 2\gamma \frac{nP}{\pi} \lambda_1 = 0; \quad (9.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_2}{d\tau} &= \{\chi_2, H_T\} = -\frac{nP}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \lambda_2(\tau, \sigma') \frac{\partial}{\partial \sigma} \Delta(\sigma', \sigma) d\sigma' = \\ &= -\frac{(nP)}{\pi} \lambda_2'(\tau, \sigma) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = -1/(2\gamma); \quad \lambda_2 = f(\tau). \quad (9.18)$$

Чтобы определить функцию $f(\tau)$, спроектируем граничные условия (8.23) на постоянный вектор n^μ , с помощью которого были написаны калибровочные условия (9.1) и (9.2):

$$\lambda_2(\tau, \sigma) (np) |_{\sigma=\sigma_i} = f(\tau) nP/\pi = 0, \quad i = 1, 2. \quad (9.19)$$

Таким образом,

$$\lambda_2(\tau, \sigma) = f(\tau) = 0. \quad (9.20)$$

Гамильтоновы уравнения движения и граничные условия принимают вид:

$$\dot{x}_\mu = \gamma^{-1} p_\mu; \quad \dot{p}_\mu = \gamma x_\mu''; \quad (9.21)$$

$$x'_\mu = 0; \quad \sigma = \sigma_i, \quad i = 1, 2. \quad (9.22)$$

Отсюда следует:

$$\ddot{x}_\mu - x_\mu'' = 0. \quad (9.23)$$

Гамильтоновы связи (8.7) и (8.8) на решениях уравнений движения (9.21) переходят в условия ортонормальной калибровки лагранжева формализма:

$$(\dot{x} \pm x')^2 = 0, \quad (9.24)$$

а калибровочные условия (9.1) и (9.12) оказываются эквивалентны одному лагранжеву условию (5.5). Таким образом, калибровка (9.1), (9.12) в гамильтоновом формализме полностью воспроизводит лагранжеву динамику с калибровочным условием (5.5).

После того как функциональный произвол в гамильтоновой динамике струны зафиксирован калибровочными условиями (9.1) и (9.12), переход к квантовой теории можно осуществить двумя эквивалентными путями.

Так как в совокупности первичные связи (8.7), (8.8) и калибровочные условия (9.1), (9.12) являются связями второго рода, то можно использовать формализм скобок Дирака [26]. Коммутатор двух операторов \hat{F} и \hat{G} определяется в этом случае формулой

$$[\hat{F}, \hat{G}] = i\{F, G\}^*, \quad (9.25)$$

где $\{F, G\}^*$ — скобки Дирака функций $F(q, p)$ и $G(q, p)$:

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \theta_\mu\} (\Delta^{-1})_{\mu\nu} \{\theta_\nu, G\}. \quad (9.26)$$

Здесь $\theta_\mu(q, p) = 0$ — полный набор всех связей второго рода; $\Delta_{\mu\nu} = \{\theta_\mu, \theta_\nu\}$. Правило (9.25) гарантирует в квантовой теории выполнение условий связей $\theta_\mu(q, p) = 0$ в строгом смысле (т. е. обращение их

в нуль как операторов). Квантование релятивистской струны в светоподобной калибровке с $n^2 = 0$ с помощью скобок Дирака можно найти в [29]. Здесь же изложим другой путь, основанный на явном выделении независимых динамических переменных [30]. Для целей квантования такое выделение необходимо провести так, чтобы независимые переменные остались каноническими. В общем случае это осуществляется с помощью соответствующего канонического преобразования, задаваемого условиями калибровки [27, 28]. В параметризационно-инвариантных теориях это преобразование явно зависит от времени. Гамильтонианом, задающим динамику на физическом подмногообразии фазового пространства, оказывается производная по параметру эволюции от производящей функции данного канонического преобразования [28]. Однако для релятивистской струны в светоподобной калибровке (9.1), (9.12) с $n^2 = 0$ прямое разрешение связей (8.7), (8.8), (9.1), (9.12) по отношению к переменным $x^\pm = (x^0 \pm x^1)/\sqrt{2}$ и $p^\pm = (p^0 \pm p^1)/\sqrt{2}$ позволяет выделить независимые канонические переменные, роль которых играют оставшиеся поперечные компоненты x_\perp и p_\perp .

Пусть n^μ — постоянный изотропный вектор с двумя отличными от нуля компонентами $n^0 = n^1 = 1$. Тогда, учитывая (5.12), получаем из (8.7), (8.8), (9.1) и (9.12):

$$p^+ = \pi [p_\perp]^2 + \gamma^2 x_\perp'^2 / (2P^-); \quad x'^+ = \pi p_\perp x'_\perp / P^-; \quad p^- = P^- / \pi; \quad x'^- = 0.$$

Гамильтониан, который ответствен за динамику независимых канонических переменных x_\perp и p_\perp , можно взять в виде

$$H = \int_0^\pi d\sigma \mathcal{H} = \frac{P^-}{\pi} \int_0^\pi d\sigma p^+(\tau, \sigma) = \frac{\gamma}{2} \int_0^\pi d\sigma \{(\gamma^{-1} p_\perp)^2 + x_\perp'^2\}. \quad (9.27)$$

Действительно, из вариационного принципа в гамильтоновом формализме

$$\delta S = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma (p_\perp \dot{x}_\perp - \mathcal{H}) = 0$$

следуют канонические уравнения движения

$$\dot{x}_\perp = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\perp} = \gamma^{-1} p_\perp; \quad \dot{p}_\perp = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x'_\perp} \right) = \gamma x''_\perp \quad (9.28)$$

и граничные условия

$$\partial \mathcal{H} / \partial x'_\perp = \gamma x'_\perp = 0; \quad \sigma = 0, \pi,$$

которые эквивалентны соответствующим уравнениям в (9.21) и (9.22).

Учитывая это, в качестве решений для $x_\perp(\tau, \sigma)$ и $p_\perp(\tau, \sigma)$ можно взять разложения, следующие из (4.8) и (9.28):

$$\left. \begin{aligned} x_\perp(\tau, \sigma) &= \frac{i}{\sqrt{\pi\gamma}} \sum_{n \neq 0} \exp(-in\tau) \frac{\alpha_{n\perp}}{n} \cos(n\sigma) + Q_\perp + \frac{P_\perp}{\pi\gamma} \tau; \\ p_\perp(\tau, \sigma) &= \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \sum_{n \neq 0} \exp(-in\tau) \alpha_{n\perp} \cos(n\sigma) + \frac{P_\perp}{\pi}, \end{aligned} \right\} \quad (9.29)$$

где $\alpha_{-n\perp} = \alpha_{n\perp}^*$.

Фурье-амплитуды зависимых переменных α_n^\pm , очевидно, даются формулами (5.13) и (5.14).

Гамильтониан (9.27) с учетом разложений (9.29) принимает вид

$$H = L_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n\perp} \alpha_{n\perp} = \frac{P_\perp^2}{2\pi\gamma} + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \alpha_{-n\perp} \alpha_{n\perp}. \quad (9.30)$$

При переходе к квантовой теории амплитуды $\alpha_{n\perp}$ считаются операторами с коммутационными соотношениями

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = n \delta_{ij} \delta_{n+m, 0}; \quad [Q^i, P^j] = \delta_{ij}, \quad n, m = \pm 1, \pm 2, \dots; \\ i, j = 2, 3, \dots, D-1, \quad (9.31)$$

где D — размерность пространства-времени, в котором движется струна. Обычные операторы рождения и уничтожения $a_{n\perp}^+$ и $a_{n\perp}$, $n = 1, 2, \dots$, с коммутаторами

$$[a_n^i, a_m^j] = \delta_{n,m} \delta_{ij}, \quad [a_n^+, a_m^+] = [a_n, a_m] = 0$$

связаны с α_n следующим образом:

$$\alpha_{n\perp} = \sqrt{n} a_{n\perp}, \quad \alpha_{-n\perp} = \alpha_n^+ = \sqrt{n} a_n^+, \quad n = 1, 2, \dots$$

Формулы (9.31) эквивалентны "одновременным" коммутаторам:

$$[x^i(\tau, \sigma), p^j(\tau, \sigma')] = i \{x^i(\tau, \sigma), p^j(\tau, \sigma')\} = i \delta_{ij} \Delta(\sigma, \sigma');$$

$$[x^i(\tau, \sigma), x^j(\tau, \sigma')] = [p^i(\tau, \sigma), p^j(\tau, \sigma')] = 0;$$

$$\Delta(\sigma, \sigma') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(\sigma - \sigma' + 2n\pi) + \delta(\sigma + \sigma' + 2n\pi)] = \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\exp(in(\sigma - \sigma')) + \exp(in(\sigma + \sigma'))].$$

Чтобы не иметь дело с бесконечностями, в квантовой теории, в формулах (5.13) и (5.14), необходимо перейти к нормальному произведению операторов $\alpha_{n\perp} \alpha_{m\perp}$. При этом к классическим выражениям можно добавить некоторую константу, обычно обозначаемую $-\alpha(0)$:

$$\alpha_n^+ = \frac{\sqrt{\pi\gamma}}{P} [L_{n\perp} - \delta_{n,0} \alpha(0)],$$

где

$$L_{n\perp} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{n-m\perp} \alpha_{m\perp} :.$$

Эта же константа должна быть введена в формулу для квадрата массы струны (5.15):

$$M^2 = \pi\gamma \sum_{m \neq 0} : \alpha_{-m\perp} \alpha_{m\perp} : - 2\pi\gamma \alpha(0) \quad (9.32)$$

и в гамильтониан (9.30):

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{-n\perp} \alpha_{n\perp} : - \alpha(0).$$

Легко получить квантовые уравнения движения. Например, для $\alpha_n(\tau)$ имеем

$$d\alpha_n(\tau)/d\tau = i [H, \alpha_{n\perp}(\tau)] = -in \alpha_{n\perp}(\tau),$$

т. е. $\alpha_{n\perp}(\tau) = \alpha_{n\perp} \exp(-in\tau)$, что соответствует разложениям (9.29).

В рассматриваемом случае норма векторов состояний, очевидно, положительна, так как они строятся действием на вакуум только операторов a_n^+ . Эти векторы в точности совпадают с так называемыми "поперечными" состояниями в дуально-резонансной модели Венециано [8-10].

Основная проблема в нековариантном подходе — это доказательство релятивистской инвариантности теории в квантовом случае. Для этого необходимо убедиться в том, что генераторы группы Пуанкаре P_μ и $M_{\mu\nu}$, построенные с помощью динамических переменных струны, удовлетворяют известным коммутационным соотношениям. Генератором трансляций является полный импульс струны P_μ , а тензор углового

момента струны

$$M_{\mu\nu} = \int_0^\pi (x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu) d\sigma = Q_\mu P_\nu - Q_\nu P_\mu - \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_{-n\mu} \alpha_{n\nu} - \alpha_{-n\nu} \alpha_{n\mu}) \quad (9.33)$$

есть генератор лоренцевских поворотов. Оказывается, что все коммутационные соотношения имеют правильное значение, кроме коммутатора [30]:

$$[M^{+i}, M^{+j}] = \frac{2}{D-2} \sum_{m=1}^{\infty} [m(1 - \frac{1}{24}(D-2)) + \frac{1}{m} (\frac{1}{24}(D-2) - \alpha(0))] (\alpha_{-m}^i \alpha_m^j - \alpha_{-m}^j \alpha_m^i),$$

где $2 \leq i, j \leq D-1$; D — размерность пространства-времени. Алгебра группы Пуанкаре требует, чтобы $[M^{+i}, M^{+j}] = 0$. Поэтому единственная возможность согласовать данную теорию с релятивистской инвариантностью — это потребовать, чтобы $\alpha(0) = 1$ и $D = 26$. Отсюда следует, в частности, что основное состояние струны, согласно формуле (9.32), имеет мнимую массу (таххион).

Число физических состояний с заданным значением квадрата массы струны

$$\alpha' M^2 = -\alpha(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{24} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i$$

быстро растет с ростом M^2 , что видно из приведенной ниже таблицы.

$\alpha' M^2$	Векторы состояния	Число состояний
$-\alpha(0)$	$ 0\rangle$	1
$-\alpha(0) + 1$	$\alpha_{-1}^i 0\rangle$	24
$-\alpha(0) + 2$	$\alpha_{-2}^i 0\rangle$ $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j 0\rangle$	24 300
$-\alpha(0) + 3$	$\alpha_{-3}^i 0\rangle$ $\alpha_{-2}^i \alpha_{-1}^j 0\rangle$ $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k 0\rangle$	24 576 2600

Интересно отметить, что введение константы $\alpha(0)$ в операторы L_0 и M^2 можно интерпретировать как учет нулевых колебаний струны [31]. Действительно, с учетом этих колебаний классическое выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{D-2} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{D-2} n \alpha_n^{i+} \alpha_n^i$$

следует заменить в квантовой теории следующим оператором:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{i=1}^{D-2} (\alpha_n^{i+} \alpha_n^i + \frac{1}{2}) = \frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{D-2} n \alpha_n^{i+} \alpha_n^i. \quad (9.34)$$

Таким образом,

$$\alpha(0) = -\frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (9.35)$$

Расходящийся ряд в (9.35) должен быть регуляризован. Сравним его с ζ -функцией Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad \text{Re } s > 1.$$

Эта функция может быть продолжена аналитически в точку $s = -1$, что дает

$$\zeta(-1) = -1/12.$$

Поэтому можно считать, что перенормированное значение $\alpha(0)$ равно*

$$\alpha(0) = (D-2)/24. \quad (9.36)$$

Такая процедура перенормировки согласована с релятивистской инвариантностью квантовой теории струны, которая, как было показано выше, требует $D=26$, $\alpha(0) = 1$.

В [31] получение конечного значения $\alpha(0)$ интерпретировалось как перенормировка скорости света (с этой скоростью распространяются возмущения вдоль свободной релятивистской струны).

10. Ковариантный гамильтонов формализм и ковариантное квантование

Функциональный производный в обобщенной гамильтоновой теории со связями первого рода можно устранить, фиксируя множители Лагранжа $\lambda_i(\tau, \sigma)$, $i = 1, 2$, в обобщенном гамильтониане (8.19). Никаких общих правил для этого, к сожалению, нет [33], и здесь приходится руководствоваться единственным требованием, чтобы гамильтонова теория после фиксирования множителей Лагранжа воспроизводила динамику в конфигурационном пространстве.

Если в (8.21) и (8.22) считать, что $\lambda_2(\tau, \sigma) = 0$ и $\dot{\lambda}_1(\tau, \sigma) = 0$, то из этих уравнений можно исключить импульсы $p_\mu(\tau, \sigma)$:

$$\ddot{x}_\mu - 4\gamma^2 \lambda_1 \lambda_1' x_\mu' - 4\gamma^2 \lambda_1^2 x_\mu'' = 0. \quad (10.1)$$

* Регуляризация с помощью ζ -функции Римана широко используется при квантовании полей в пространстве-времени с кривизной [32].

Теперь положим $\lambda_1 = (-2\gamma)^{-1}$, тогда $p_\mu = \gamma \dot{x}_\mu$ и (10.1) сводится к волновому уравнению

$$\ddot{x}_\mu - x''_\mu = 0, \quad (10.2)$$

а дополнительные условия (8.7) и (8.8) дают ортонормальную параметризацию лагранжева формализма

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 0; \quad \dot{x}x' = 0. \quad (10.3)$$

Граничные условия (8.23) для канонических переменных (8.23) переходят в граничные условия (4.3) в конфигурационном пространстве. Таким образом, выбор множителей Лагранжа в виде

$$\lambda_1 = -1/(2\gamma); \quad \lambda_2 = 0 \quad (10.4)$$

позволяет получить из гамильтоновых уравнений (8.21)–(8.23) лагранжеву динамику релятивистской струны.

В § 9 получены те же значения для множителей Лагранжа, что и (10.4), но там предварительно были введены калибровочные условия (9.1) и (9.12).

Решением для $x_\mu(\tau, \sigma)$ является разложение (4.8), а для $p_\mu(\tau, \sigma) = \gamma \dot{x}_\mu(\tau, \sigma)$ имеем следующий ряд Фурье:

$$p_\mu(\tau, \sigma) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \sum_{n \neq 0} \exp(-in\tau) a_{n\mu} \cos(n\sigma) + \frac{p_\mu}{\pi}.$$

В квантовой теории постулируются следующие коммутаторы:

$$[a_{m\mu}, a_{n\nu}] = -mg_{\mu\nu} \delta_{n+m,0}, \quad n, m \neq 0, \quad [Q_\mu, P_\nu] = -ig_{\mu\nu}, \quad (10.5)$$

где $g_{00} = -g_{ii} = 1$.

Временные компоненты a_{n0}^+ , $n > 0$, действуя на вакуум, будут приводить к векторам состояний с отрицательной нормой. Физическими состояниями являются только такие, которые удовлетворяют условиям $\varphi_i |\Phi\rangle = 0$, $i = 1, 2$, что эквивалентно требованиям

$$[L_n - \delta_{n,0} a(0)] |\Phi\rangle = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10.6)$$

где $L_n = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} :a_{n-m} a_m:$, $L_n = L_{-n}$. Эти условия полностью совпадают с условиями Вирасоро в дуально-резонансной модели Венециано (см. приложение А).

Из формул (10.6) при $n=0$ определяется масса струны

$$M^2 = P^2 = -\pi\gamma \sum_{m \neq 0} :a_{-m} a_m: - 2\pi\gamma a(0). \quad (10.7)$$

Операторы L_n удовлетворяют следующей алгебре:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{D}{12} n(n^2 - 1) \delta_{n+m,0}, \quad (10.8)$$

где D – размерность пространства-времени. Важным моментом является появление c – числового члена в коммутаторе (10.8), из-за которого алгебра операторов L_n оказывается незамкнутой. Это заставляет использовать в условиях (10.6), определяющих физические векторы состояний, только операторы L_n с $n \geq 0$. В классической теории, где роль коммутаторов играют скобки Пуассона, этого члена нет:

$$\{L_n, L_m\} = -i(n-m)L_{n+m}. \quad (10.9)$$

Алгебра (10.9) изоморфна алгебре Ли конформной группы на плоскости.

Появление швингеровского члена в коммутаторе (10.8) связано с переходом к нормальному произведению операторов a_n в L_n . Проще всего получить этот член, вычисляя с помощью теоремы Вика [34] среднее по вакууму от коммутатора (10.8) и учитывая, что спаривание операторов $a_k^\rho a_j^\sigma$ равно $g^{\rho\sigma} \theta(k) \theta(-j) k \delta_{k+j,0}$, где $\theta(k)$ – ступенчатая функция.

Физическое пространство векторов состояний с положительной нормой* удастся построить только в пространстве-времени с размерностью $D = 26$ и если $a(0) = 1$ [30]. Основное состояние струны, как следует из формулы (10.7), имеет минимую массу (тахин). Причиной этих особенностей оказывается c – числовой член в коммутаторе (10.8).

Следует отметить, что светоподобная калибровка (9.1), (9.12) здесь явно, казалось бы, не используется, однако так называемые поперечные состояния, необходимые для доказательства теоремы об отсутствии духов, базируются именно на этой калибровке [8].

Математический аппарат квантовой теории релятивистской струны, рассмотренный здесь, полностью совпадает с операторным формализмом в дуально-резонансной модели Венециано (см. приложение А). Это позволяет рассматривать релятивистскую струну как динамическую основу дуально-резонансного подхода.

Нековариантный метод в теории струны аналогичен квантованию электромагнитного поля в кулновской калибровке, ковариантный подход является аналогом метода Ферми в квантовой электродинамике. Следует, однако, отметить, что здесь есть и существенное различие: дополнительные условия на вектор-потенциал в теории Максвелла линейны, а в теории струны условия (8.7) и (8.8) квадратичны по x_μ и p_ν .

При квантовании замкнутой струны (см. § 4) имеются два набора коммутирующих друг с другом операторов рождения и уничтожения a_n^μ и β_n^μ . Физические векторы состояний подчинены калибровочным условиям

$$L_n |\Phi\rangle = \bar{L}_n |\Phi\rangle = 0, \quad n \geq 1; \quad (L_0 - \bar{L}_0) |\Phi\rangle = 0$$

* Решение уравнений (10.6) не содержит векторов состояний с отрицательной нормой, если $a(0) = 1$, $1 \leq D \leq 26$ или $a(0) < 1$, $1 \leq D \leq 25$.

и условию массовой оболочки

$$[L_0 + \bar{L}_0 - \alpha(0)] |\Phi\rangle = 0.$$

Замкнутой струне соответствует дуальная модель Вирасоро—Шапиро [8, 9]. В этой модели нет духовых состояний, если $D=26$ и $\alpha(0)=2$. Следовательно, модель содержит безмассовую частицу со спином 2 — "гравитон".

Замкнутые струны моделируют в адронных реакциях обмен квантовыми числами вакуума, так как таким струнам нельзя приписать никаких отличных от нулевых квантовых чисел. Обычно с вакуумными обментами отождествляется особенность Померанчука. Для этой траектории $\alpha'_P(0) \approx 0,4$ (ГэВ) $^{-2}$ и $\alpha_P(0) \approx 1$. Такой наклон вакуумной траектории можно объяснить в теории замкнутой струны [см. формулу (4.16)], однако, значение $\alpha_P(0) \approx 1$ находится в явном противоречии с требованием $\alpha(0)=2$ в теории замкнутой струны.

11. Квантовая теория релятивистской струны Рорлиха

Необычные результаты в квантовой теории релятивистской струны, такие, как ограничение на размерность пространства-времени, тахионные состояния, с точки зрения дуальных моделей вполне приемлемы. Более того, они даже необходимы, чтобы релятивистскую струну можно было рассматривать как динамическую основу дуальных моделей. Фактически фоковское пространство, которое было построено в операторном формализме для дуально-резонансных амплитуд, было перенесено без изменений в квантовую теорию релятивистской струны [30].

Однако с физической точки зрения такую ситуацию, конечно, нельзя признать удовлетворительной. Трудно понять, что такой хорошо изученный в классической теории и в нерелятивистской квантовой механике объект, как струна, не может быть последовательно рассмотрен на квантовом уровне в реальном 4-мерном пространстве-времени. Были предприняты попытки найти другие квантовые решения в задаче релятивистской струны, которые бы не сталкивались с указанными выше трудностями. В этом направлении интересные результаты получил Рорлих [35].

В подходе Рорлиха основными являются следующие два момента: 1) выбор калибровочного условия, фиксирующего параметр τ ; 2) использование именно этого условия для исключения состояний с отрицательной нормой, причем физические векторы состояний строятся в системе центра масс струны. Эта система отсчета — единственная выделенная для релятивистского составного объекта, каким является струна. Во всех предыдущих попытках квантования струны этот факт совершенно не учитывался.

Калибровка "светового конуса" (5.5) с $n^2 = 0$ явно или неявно использовалась во всех предыдущих методах квантования струны. Ее существенный недостаток, как уже отмечалось в § 5, состоит в том, 52

что она не позволяет описать такие движения струны, когда

$$n(\dot{x} \pm x') = 0. \quad (11.1)$$

Поэтому Рорлих [35] предложил вместо произвольного вектора n_μ в условиях (5.6) взять полный импульс струны

$$P\dot{x} = P^2/(\gamma\pi); \quad Px' = 0, \quad (11.2)$$

что эквивалентно требованию

$$Px = P^2\tau/(\gamma\pi) + PQ. \quad (11.3)$$

Можно считать, что $P^2 > 0$, и тогда

$$P(\dot{x} \pm x') \neq 0.$$

Таким образом, новая калибровка не приводит к каким-либо ограничениям на движение струны.

Подставляя в (11.3) разложение (4.8), получаем

$$G_n = a_{n\mu} P^\mu = 0, \quad n \neq 0. \quad (11.4)$$

Это означает, что в системе центра масс струны, где $P = 0$, временные фурье-компоненты a_{n0} равны нулю, а именно они при квантовании приводят к состояниям с отрицательной нормой. Поэтому в квантовой теории удобно строить физическое пространство векторов состояний именно в этой системе отсчета.

Уравнения (11.4) теперь рассматриваются как условия на векторы состояний $|\mathcal{F}\rangle_{CM}$:

$$G_n |\mathcal{F}\rangle_{CM} = a_{n\mu} P^\mu |\mathcal{F}\rangle_{CM} = a_{n0} P^0 |\mathcal{F}\rangle_{CM}, \quad (11.5)$$

причем достаточно потребовать выполнения этого равенства для $n > 0$. Иными словами, на векторы состояний накладываются только отрицательно частотные компоненты условия (11.4), аналогично тому, как это делается с условием Лоренца в квантовой электродинамике.

Если предположить, что $P^0 |\mathcal{F}\rangle_{CM} = 0$, то из (11.5) получаем

$$a_{n0} |\mathcal{F}\rangle_{CM} = 0, \quad n > 0,$$

т. е. и в квантовом случае временные компоненты операторов $a_{n\mu}$, $n > 0$ равны фактически нулю*. Таким образом, векторы состояний в системе центра масс струны строятся путем действия на вакуум только пространственных компонент операторов:

$$a_{m\mu}^+ = a_{m\mu}^+ / \sqrt{m}, \quad m > 0;$$

$$|\mathcal{F}\rangle_{CM} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(a_{nx}^+)^{\lambda_{nx}}}{\sqrt{\lambda_{nx}!}} \frac{(a_{ny}^+)^{\lambda_{ny}}}{\sqrt{\lambda_{ny}!}} \frac{(a_{nz}^+)^{\lambda_{nz}}}{\sqrt{\lambda_{nz}!}} |0\rangle = |\lambda_1, \lambda_2, \dots\rangle,$$

* Следует отметить, что условие (11.5) использовалось, например, для исключения состояний с отрицательной нормой в кварковой модели адронов с потенциалом релятивистского осциллятора [36].

где векторы $\lambda_n = (\lambda_{nx}, \lambda_{ny}, \lambda_{nz})$ имеют неотрицательные целочисленные компоненты.

В произвольной системе отсчета векторы состояний получаются из $|\mathcal{F}\rangle_{CM}$ действием унитарного оператора

$$U = \exp \left\{ i a_\mu P^\mu + (i/2) \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \right\}, \quad (11.6)$$

где a_μ — вектор сдвига; $\omega_{\mu\nu}$ — параметры лоренцевского поворота; P_μ — полный импульс струны; $M_{\mu\nu}$ — тензор углового момента струны (9.33). Положительная определенность векторов состояний при этом, очевидно, сохранится, так как $[U, G_n] = 0$.

Физические состояния $|\Phi\rangle$ должны быть подчинены еще дополнительным условиям (10.6) с $n \geq 0$:

$$L_n |\Phi\rangle = \lambda_n |\Phi\rangle + \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} G_n |\Phi\rangle = \lambda_n |\Phi\rangle = 0, \quad n > 0; \quad (11.7)$$

$$L_0 |\Phi\rangle = \lambda_0 |\Phi\rangle + \frac{P^2}{2\pi\gamma} |\Phi\rangle = \frac{m_0^2}{2\pi\gamma} |\Phi\rangle, \quad (11.8)$$

где $\lambda_n = -\frac{1}{2} \sum_{m \neq 0, n} : a_{n-m} a_m :$.

Связи G_n , $n > 0$, и L_m , $m \geq 0$, в совокупности являются связями первого рода по классификации Дирака [26], так как образуют замкнутую алгебру:

$$[G_n, G_m] = 0, \quad n, m > 0, \quad [L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m}, \quad n, m > 0,$$

$$[G_k, L_n] = k G_{n+k}, \quad k > 0, \quad n \geq 0.$$

Поэтому условия (11.5), исключая духовые состояния, и условия (11.7), (11.8), определяющие физические векторы состояний, непротиворечивы. Отметим, что в коммутаторе $[L_n, L_m]$ нет c — числового члена, так как $n \geq 0$ и $m \geq 0$.

Условия (11.7) и (11.8), выбирающие из фоковского пространства векторов с положительной нормой \mathcal{F}_+ подпространство физических векторов $|\Phi\rangle$, не нарушают релятивистской инвариантности теории, так как $[L_n, U] = 0$, $n \geq 0$, где U — оператор (11.6), осуществляющий преобразование из неоднородной группы Лоренца.

Таким образом, в квантовой теории релятивистской струны, предложенной Рорлихом, нельзя на операторном уровне разрешить связи для выделения независимых динамических переменных. Уравнения, разрешающие связи, выполняются только в слабом смысле, так как на векторы состояний накладывается лишь "аннигиляционная часть" связей.

В заключение отметим, что вопрос о том, можно ли построить дуальную модель на основе такой квантовой теории релятивистской струны, остается открытым.

СТРУНА С МАССАМИ НА КОНЦАХ. ЗАРЯЖЕННАЯ СТРУНА

12. Теория ограниченного класса движений релятивистской струны с массами на концах

Требование репараметризационной инвариантности не позволяет разделить массу, так же как и заряд, вдоль струны. Остается единственная возможность — поместить массы на концах струны. Если же отказаться от репараметризационной инвариантности, то в этом случае нельзя будет последовательно ввести в теорию ограничения на динамические переменные (калибровочные условия), с помощью которых можно было бы исключить состояния с отрицательно определенной нормой [37].

Как уже отмечалось во введении, модель релятивистской струны с точечными массами на концах дает наглядную картину удержания кварков в адронах. К такому представлению о взаимодействии кварков приводят весьма правдоподобные рассуждения, базирующиеся на квантовой хромодинамике [2–5].

Исследованию модели релятивистской струны с массивными концами посвящено много работ [37–47]. Уже на классическом уровне в этой задаче возникают принципиальные трудности, а именно, невозможность разрешить в явном виде нелинейные граничные условия. Здесь получены лишь частные результаты. Были исследованы отдельные типы движения релятивистской струны с массивными концами [38, 39, 46] (например, вращение ее как целого), детально изучалась классическая динамика такой струны в двумерном пространстве-времени [43], полностью был исследован нерелятивистский предел в данной задаче и было показано, как возникает здесь линейно растущий с расстоянием потенциал [16]. Рассматривались некоторые модификации модели релятивистской струны с массами на концах, позволяющие провести квантование теории [37, 40, 41, 42, 44].

Действие для релятивистской струны с массами на концах выбирается в следующем виде [38, 40]:

$$S = -\gamma \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d\sigma \sqrt{(\dot{x}^\mu x^\mu)^2 - \dot{x}^2 x'^2} - \sum_{i=1}^2 m_i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\left(\frac{dx_\nu(\tau, \sigma_i(\tau))}{d\tau} \right)^2}, \quad (12.1)$$

где γ — константа, имеющая размерность квадрата массы; m_1 и m_2 — массы на концах струны; $x^\mu(\tau, \sigma)$ — параметрическое задание мировой поверхности струны, $\dot{x}_\mu = \partial x_\mu / \partial \tau$, $x'_\mu = \partial x_\mu / \partial \sigma$; $dx_\nu(\tau, \sigma_i(\tau)) / d\tau \equiv$

где векторы $\lambda_n = (\lambda_{nx}, \lambda_{ny}, \lambda_{nz})$ имеют неотрицательные целочисленные компоненты.

В произвольной системе отсчета векторы состояний получаются из $|\mathcal{F}\rangle_{CM}$ действием унитарного оператора

$$U = \exp \left\{ i a_\mu P^\mu + (i/2) \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \right\}, \quad (11.6)$$

где a_μ — вектор сдвига; $\omega_{\mu\nu}$ — параметры лоренцевского поворота; P_μ — полный импульс струны; $M_{\mu\nu}$ — тензор углового момента струны (9.33). Положительная определенность векторов состояний при этом, очевидно, сохранится, так как $[U, G_n] = 0$.

Физические состояния $|\Phi\rangle$ должны быть подчинены еще дополнительным условиям (10.6) с $n \geq 0$:

$$L_n |\Phi\rangle = \lambda_n |\Phi\rangle + \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} G_n |\Phi\rangle = \lambda_n |\Phi\rangle = 0, \quad n > 0; \quad (11.7)$$

$$L_0 |\Phi\rangle = \lambda_0 |\Phi\rangle + \frac{P^2}{2\pi\gamma} |\Phi\rangle = \frac{m_0^2}{2\pi\gamma} |\Phi\rangle, \quad (11.8)$$

где $\lambda_n = -\frac{1}{2} \sum_{m \neq 0, n} : a_{n-m} a_m :$.

Связи G_n , $n > 0$, и L_m , $m \geq 0$, в совокупности являются связями первого рода по классификации Дирака [26], так как образуют замкнутую алгебру:

$$[G_n, G_m] = 0, \quad n, m > 0, \quad [L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m}, \quad n, m > 0,$$

$$[G_k, L_n] = k G_{n+k}, \quad k > 0, \quad n \geq 0.$$

Поэтому условия (11.5), исключая духовые состояния, и условия (11.7), (11.8), определяющие физические векторы состояний, непротиворечивы. Отметим, что в коммутаторе $[L_n, L_m]$ нет c — числового члена, так как $n \geq 0$ и $m \geq 0$.

Условия (11.7) и (11.8), выбирающие из фокковского пространства векторов с положительной нормой \mathcal{F}_+ подпространство физических векторов $|\Phi\rangle$, не нарушают релятивистской инвариантности теории, так как $[L_n, U] = 0$, $n \geq 0$, где U — оператор (11.6), осуществляющий преобразование из неоднородной группы Лоренца.

Таким образом, в квантовой теории релятивистской струны, предложенной Рорлихом, нельзя на операторном уровне разрешить связи для выделения независимых динамических переменных. Уравнения, разрешающие связи, выполняются только в слабом смысле, так как на векторы состояний накладывается лишь "аннигиляционная часть" связей.

В заключение отметим, что вопрос о том, можно ли построить дуальную модель на основе такой квантовой теории релятивистской струны, остается открытым.

СТРУНА С МАССАМИ НА КОНЦАХ. ЗАРЯЖЕННАЯ СТРУНА

12. Теория ограниченного класса движений релятивистской струны с массами на концах

Требование репараметризационной инвариантности не позволяет разделить массу, так же как и заряд, вдоль струны. Остается единственная возможность — поместить массы на концах струны. Если же отказаться от репараметризационной инвариантности, то в этом случае нельзя будет последовательно ввести в теорию ограничения на динамические переменные (калибровочные условия), с помощью которых можно было бы исключить состояния с отрицательно определенной нормой [37].

Как уже отмечалось во введении, модель релятивистской струны с точечными массами на концах дает наглядную картину удержания кварков в адронах. К такому представлению о взаимодействии кварков приводят весьма правдоподобные рассуждения, базирующиеся на квантовой хромодинамике [2–5].

Исследованию модели релятивистской струны с массивными концами посвящено много работ [37–47]. Уже на классическом уровне в этой задаче возникают принципиальные трудности, а именно, невозможность разрешить в явном виде нелинейные граничные условия. Здесь получены лишь частные результаты. Были исследованы отдельные типы движения релятивистской струны с массивными концами [38, 39, 46] (например, вращение ее как целого), детально изучалась классическая динамика такой струны в двумерном пространстве-времени [43], полностью был исследован нерелятивистский предел в данной задаче и было показано, как возникает здесь линейно растущий с расстоянием потенциал [16]. Рассматривались некоторые модификации модели релятивистской струны с массами на концах, позволяющие провести квантование теории [37, 40, 41, 42, 44].

Действие для релятивистской струны с массами на концах выбирается в следующем виде [38, 40]:

$$S = -\gamma \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \sqrt{(\dot{x}^\mu x^\nu)^2 - \dot{x}^2 x'^2} - \sum_{i=1}^2 m_i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\left(\frac{dx_\nu(\tau, \sigma_i(\tau))}{d\tau} \right)^2}, \quad (12.1)$$

где γ — константа, имеющая размерность квадрата массы; m_1 и m_2 — массы на концах струны; $x^\mu(\tau, \sigma)$ — параметрическое задание мировой поверхности струны, $\dot{x}_\mu = \partial x_\mu / \partial \tau$, $x'_\mu = \partial x_\mu / \partial \sigma$; $dx_\nu(\tau, \sigma_i(\tau)) / d\tau \equiv$

$\equiv \dot{x}_\nu(\tau, \sigma_i(\tau)) + x_\nu(\tau, \sigma_i(\tau)) \dot{\sigma}_i(\tau)$. Функции $\sigma_i(\tau), i = 1, 2$, описывают движение концов струны в плоскости параметров τ, σ . В пространстве Минковского используется метрика с сигнатурой $(+, -, -, -)$. Для параметров τ, σ будем часто использовать следующие обозначения:

$$u^0 = \tau; \quad u^1 = \sigma; \quad x^\mu_{,i} = \partial x^\mu / \partial u^i; \quad i = 0, 1; \quad u^\pm = u^0 \pm u^1.$$

При выводе уравнений, определяющих динамику струны, в действии S должны варьироваться координаты струны $x^\mu(\tau, \sigma)$ и функции $\sigma_i(\tau)$. Варьирование в (12.1) $x^\mu(\tau, \sigma)$ дает уравнения движения и граничные условия. Как и в теории свободной струны, на мировой поверхности $x^\mu(\tau, \sigma)$ можно выбрать конформно-плоскую систему координат τ, σ , в которой

$$(\dot{x}_\mu \pm x'_\mu)^2 = 0. \quad (12.2)$$

В этом случае уравнения движения становятся линейными:

$$\ddot{x}_\mu - x''_\mu = 0, \quad (12.3)$$

но они дополняются нелинейными граничными условиями, представляющими главную трудность в решении рассматриваемой задачи:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}_\nu + x'_\nu \dot{\sigma}}{\sqrt{\dot{x}^2 (1 - \dot{\sigma}^2)}} \right) &= x'_\nu + \dot{x}_\nu \dot{\sigma}, \quad \sigma = \sigma_1(\tau); \\ \mu_2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}_\nu + x'_\nu \dot{\sigma}}{\sqrt{\dot{x}^2 (1 - \dot{\sigma}^2)}} \right) &= -x'_\nu - \dot{x}_\nu \dot{\sigma}, \quad \sigma = \sigma_2(\tau), \\ \mu_i &= m_i / \gamma, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Варьирование функции $\sigma_i(\tau), i = 1, 2$ в (12.1), как это было показано в [45], не приводит ни к каким новым уравнениям по сравнению с (12.2)–(12.4). Таким образом, функции $\sigma_i(\tau), i = 1, 2$ – это несущественные динамические переменные, и, не теряя общности, их можно положить равными константам:

$$\sigma_1(\tau) = 0; \quad \sigma_2(\tau) = \pi. \quad (12.5)$$

Такой выбор функций $\sigma_i(\tau)$ можно обосновать еще и так. Уравнения (12.2)–(12.4), которые были получены без фиксирования функций $\sigma_i(\tau)$, сохраняют свой вид при конформных преобразованиях параметров τ, σ с произвольными функциями f_\pm :

$$\bar{\tau} \pm \bar{\sigma} = f_\pm(\tau \pm \sigma) \quad (12.$$

Это легко увидеть, переписав граничные условия (12.4) так:

$$\begin{aligned} (-1)^{i+1} \mu_i \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\psi'_{+\nu}(u_i^+) \dot{u}_i^+ + \psi'_{-\nu}(u_i^-) \dot{u}_i^-}{\sqrt{2 \psi'_+(u_i^+) \psi'_-(u_i^-)} \dot{u}_i^+ \dot{u}_i^-} \right) &= \\ &= \gamma [\psi'_{+\nu}(u_i^+) \dot{u}_i^+ - \psi'_{-\nu}(u_i^-) \dot{u}_i^-], \\ i = 1, 2; \quad u_i^\pm &= \tau \pm \sigma_i(\tau). \end{aligned}$$

Здесь $\psi_{+\mu}(u^+)$ и $\psi_{-\mu}(u^-)$ – функции, дающие общее решение уравнений (12.2) и (12.3):

$$x_\mu(\tau, \sigma) = \psi_{+\mu}(u^+) + \psi_{-\mu}(u^-), \quad (\psi'_\pm(u^\pm))^2 = 0, \quad u^\pm = \tau \pm \sigma.$$

С помощью преобразований (12.6) криволинейная трапеция на плоскости τ, σ с границами $\tau = \tau_1, \sigma = \sigma_1(\tau), \tau = \tau_2, \sigma = \sigma_2(\tau)$ всегда может быть преобразована в прямоугольник $\tau = \tau_1, \sigma = 0, \tau = \tau_2, \sigma = \pi$ (см. рис. 2).

С учетом (12.5) граничные условия (12.4) упрощаются, но по-прежнему остаются нелинейными относительно координат струны $x^\mu(\tau, \sigma)$:

$$\mu_1 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}_\nu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \right) = x'_\nu, \quad \sigma = 0, \quad \mu_2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}_\nu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \right) = -x'_\nu, \quad \sigma = \pi. \quad (12.7)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению решений линейных уравнений (12.3), удовлетворяющих нелинейным условиям (12.2) и граничным условиям (12.7).

Получить общее решение уравнений движения (12.3), удовлетворяющее нелинейным граничным условиям (12.7), не удастся. Если же ограничиться такими движениями струны, для которых параметр τ является собственным временем массивных точек на концах струны [40], т.е.

$$\dot{x}^2(\tau, 0) = \dot{x}^2(\tau, \pi) = m^{-2}, \quad m_1 = m_2 = m, \quad (12.8)$$

то граничные условия (12.7) становятся линейными:

$$\ddot{x}^2(\tau, 0) = q \dot{x}'_\nu(\tau, 0); \quad \ddot{x}^2(\tau, \pi) = -q \dot{x}'_\nu(\tau, \pi); \quad q = \gamma / m^2. \quad (12.9)$$

Отметим, что фиксирование калибровки одним условием (12.8) не привело бы к ограничению движений струны, если бы точечной массой была нагружена бесконечная струна или же масса была бы помещена на конец полубесконечной струны (см. § 14).

Полагая $x(\tau, \sigma) = \exp(-i\omega\tau)u(\sigma)$, приходим к следующей краевой задаче на функцию $u(\sigma)$:

$$u''(\sigma) + \omega^2 u(\sigma) = 0; \quad \omega^2 u(0) = -qu'(0); \quad \omega^2 u(\pi) = qu'(\pi).$$

Особенностью этой краевой задачи является зависимость граничных условий от спектрального параметра ω [48]. Решение имеет вид

$$u_n(\sigma) = N_n [\cos(\omega_n \sigma) - (\omega_n/q) \sin(\omega_n \sigma)], \quad (12.10)$$

где N_n — нормировочные множители, а ω_n — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}(\omega_n \pi) = 2\omega_n q / (\omega_n^2 - q^2),$$

которое эквивалентно следующим двум:

$\operatorname{tg}(\omega_n \pi/2) = -\omega_n/q$ (n — четные), $\operatorname{ctg}(\omega_n \pi/2) = \omega_n/q$, (n — нечетные). Такие же уравнения, только отличающиеся знаком, были получены в [37] при рассмотрении релятивистской струны с массами в рамках другого подхода.

Собственные функции (12.10) удовлетворяют условиям ортогональности [48]

$$\int_0^\pi d\sigma u_n(\sigma) \xi(\sigma) u_m(\sigma) = \delta_{n,m}$$

и полноты

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\sigma) u_n(\sigma') \xi(\sigma') = \delta(\sigma, \sigma'), \quad (12.11)$$

где $\xi(\sigma) = 1 + q^{-1} [\delta(\sigma) + \delta(\sigma - \pi)]$, а функция $\delta(\sigma, \sigma')$ определяется требованием, чтобы

$$\int_0^\pi d\sigma' f \delta(\sigma, \sigma') = f(\sigma)$$

для любой достаточно гладкой функции $f(\sigma)$, заданной на отрезке $0 \leq \sigma \leq \pi$.

Нормировочные множители N_n равны

$$N_n^{-2} = (\pi/2) (1 + \omega_n^2/q^2) + 1/q; \quad n > 0; \quad N_0^{-2} = \pi + 2/q.$$

Теперь для $x_\mu(\tau, \sigma)$ получаем следующее разложение:

$$x_\mu(\tau, \sigma) = \frac{i}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \exp(-i\omega_n \tau) \frac{a_{n\mu}}{\omega_n} u_n(\sigma) + Q_\mu + \frac{q}{2+q\pi} \frac{P_\mu}{\gamma} \tau. \quad (12.12)$$

Таким образом, $x_\mu(\tau, \sigma)$ является почти периодической функцией по τ и по σ [49].

Когда массы на концах струны стремятся к нулю, $q \rightarrow \infty$ и $\omega_n \rightarrow n$, $u_n(\sigma) \rightarrow \sqrt{2/\pi} \cos(n\sigma)$, а разложение (12.12) переходит в решение для свободной струны (4.8).

Подставляя (12.12) в дополнительные условия (12.2), получаем

$$\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \exp[-i(\omega_n + \omega_m)(\tau \pm \sigma)] a_n a_m N_n N_m (1 \mp \mp i \frac{\omega_n}{q}) \left(1 \mp i \frac{\omega_n}{q} \right) = 0, \quad (12.13)$$

где опять $a_{0\mu} = \sqrt{2/\gamma} P_\mu$. Так как частоты ω_n , в отличие от свободной струны, нецелочисленные, то из (12.13) следуют ограничения на амплитуды $a_{n\mu}$:

$$\left. \begin{aligned} a_n a_m &= 0 \text{ при } n \neq -m; \quad n, m = \pm 1, \pm 2, \dots; \\ a_n P &= 0, \quad n \neq 0, \\ P^2 &= -\frac{\gamma}{2} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{N_n}{N_0} \right)^2 \left(1 + \frac{\omega_n^2}{q^2} \right) a_{-n} a_n. \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$

Эти ограничения значительно более строгие, чем условия Вирасоро (4.14) в теории безмассовой струны. Этот результат не противоречит тому факту, что исходное действие (12.1) имеет ту же репараметризационную инвариантность, что и действие Намбу (2.22) для свободной струны. Дело в том, что здесь рассмотрены не все движения струны с массами на концах, а только такие, которые удовлетворяют условиям (12.8). В случае безмассовой струны $\omega_n = n$ и из (12.13) следуют условия Вирасоро

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{n-m} a_m = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Кроме ограничений (12.14) необходимо чтобы на концах струны выполнялись соотношения (12.8), которые приводят к равенству

$$\frac{1}{2\gamma} \sum_{n \neq 0} N_n^2 \frac{\omega_n^2}{q^2} a_{-n} a_n = -\frac{1}{m^2}. \quad (12.15)$$

Сохраняющийся полный импульс струны с массами на концах имеет вид

$$P_\mu = \int_0^\pi p_\mu(\tau, \sigma) d\sigma = \gamma \int_0^\pi \xi(\sigma) \dot{x}_\mu(\tau, \sigma) d\sigma.$$

Для тензора углового момента $M_{\mu\nu}$ получаем выражение

$$M_{\mu\nu} = Q_\mu P_\nu - Q_\nu P_\mu - \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{\omega_n} (a_{-n\mu} a_{n\nu} - a_{-n\nu} a_{n\mu}). \quad (12.16)$$

Квадрат массы струны, очевидно, равен

$$M^2 = P^2 = -\frac{\gamma}{2} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{N_n}{N_0}\right)^2 a_{-n} a_n + 4m^2 \left(1 + \frac{q\pi}{2}\right)^2. \quad (12.17)$$

Если струна не совершает никаких колебательных движений ($a_n = 0$, $n \neq 0$), квадрат ее массы все равно отличен от $4m^2$:

$$M_0^2 = 4m^2 (1 + \pi q/2)^2. \quad (12.18)$$

При переходе к квантовой теории постулируются следующие коммутационные соотношения:

$$[a_{m\mu}, a_{n\nu}] = -\omega_m \delta_{m+n, 0} g_{\mu\nu}; \quad [Q_\mu, P_\nu] = -ig_{\mu\nu}.$$

С учетом условий полноты (12.11) это приводит к обычным "одно-временным" коммутаторам для $x_\mu(\tau, \sigma)$ и $p_\nu(\tau, \sigma')$:

$$[x_\mu(\tau, \sigma), p_\nu(\tau, \sigma')] = [x_\mu(\tau, \sigma), \gamma \dot{x}_\nu(\sigma') \dot{x}_\nu(\tau, \sigma')] = -ig_{\mu\nu} \delta(\sigma, \sigma').$$

Остальные коммутаторы равны нулю.

Используя решение (12.12), можно найти коммутаторы и для различных τ и τ' , например,

$$[x_\mu(\tau, \sigma), x_\nu(\tau', \sigma')] = i \frac{g_{\mu\nu}}{\gamma(2 + \pi q)} (\tau' - \tau) + \frac{g_{\mu\nu}}{2\gamma} \sum_{m \neq 0} \frac{\exp(-i\omega_m(\tau - \tau'))}{\omega_m} u_m(\sigma) u_m(\sigma').$$

В качестве гамильтониана системы, который дает правильные уравнения движения для $a_{n\mu}(\tau)$, можно взять величину

$$H = \frac{P^2}{2} \frac{q}{\gamma(2 + \pi q)} + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} a_{-n} a_n. \quad (12.19)$$

Связи (12.14) и (12.15) на амплитуды $a_{n\mu}$ в квантовой теории накладываются как условия на физические векторы состояний

$$L_{nm} |\Phi\rangle \equiv a_n a_m |\Phi\rangle = 0, \quad n > 0, m \neq -n, 0; \quad (12.20)$$

$$G_n |\Phi\rangle \equiv a_n P |\Phi\rangle = 0, \quad n > 0; \quad (12.21)$$

$$\left. \begin{aligned} P^2 |\Phi\rangle &= \left\{ -\frac{\gamma}{2} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{N_n}{N_0}\right)^2 \left(1 + \frac{\omega_n^2}{q^2}\right) : a_{-n} a_n : + \beta_1 \right\} |\Phi\rangle; \\ \left\{ \frac{1}{2\gamma} \sum_{n \neq 0} N_n^2 \frac{\omega_n^2}{q^2} : a_{-n} a_n : + \beta_2 \right\} |\Phi\rangle &= -m^{-2} |\Phi\rangle, \end{aligned} \right\} \quad (12.22)$$

где константы β_1 и β_2 возникли при переходе к нормальному произведению операторов $:a_{-n} a_n:$. Выполнение условий (12.20) и (12.21) достаточно потребовать только для указанных в этих формулах значений n и m . В этом случае операторы в (12.20)–(12.22) и гамильтониан (12.19) образуют замкнутую алгебру. Следовательно, условия (12.20)–(12.22) на векторы состояний непротиворечивы, и эволюция системы во времени не приведет к выходу за рамки этого набора условий.

Условие (12.21) можно использовать, как это было сделано Рорлихом [35] в случае свободной струны, для построения физического пространства векторов состояний с положительно определенной нормой в системе центра масс струны, где $\mathbf{P} = 0$. Так как G_n и L_{nm} коммутируют с оператором U [см. формулу (11.6)], осуществляющим преобразование из неоднородной группы Лоренца, то построенное таким путем физическое пространство векторов будет релятивистски инвариантным.

В частности, для оператора M^2 в системе центра масс струны имеем следующее выражение:

$$M^2 = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} (N_n/N_0)^2 \omega_n a_n^+ a_n + m_0^2; \quad a_n^+ = a_{-n}^+ = a_{-n}/\sqrt{\omega_n}, \quad n > 0,$$

где $m_0^2 = \beta_1 + \beta_2 + M^2$, m_0^2 определено в формуле (12.18).

Полученные формулы для квадрата массы струны (12.17) и тензора углового момента (12.16) точно такие же, как и в теории безмассовой струны. Однако частоты ω_n теперь не целочисленные, поэтому массовый спектр в рассматриваемом случае более богат. Большая часть его вырождения, характерная для свободной струны, снимается. Существенно отличаются от условий Вирасоро (10.6) ограничения на векторы состояний (12.20). Удовлетворить им, вероятно, можно только конечным набором амплитуд a_n , причем число отличных от нуля a_n не должно превышать размерность пространства-времени, в котором движется струна. В этой связи следует отметить серию работ [50, 51], в которых в четырехмерном пространстве-времени была построена последовательная квантовая теория для ограниченного класса движений свободной безмассовой релятивистской струны (одномодовое приближение). В этом подходе отличной от нуля считается только одна фурье-амплитуда a_n^μ в разложении (4.8). Существенно при этом использование квантовых

операторов типа углового момента, что позволяет обойти трудности с расстановкой операторных множителей.

Релятивистская струна с массами на концах рассматривалась также в [42]. Однако авторы этой работы не использовали репараметризационно-инвариантный лагранжиан (12.1), а исходили из линейризованного действия для струны с массами на концах:

$$S = -\frac{\gamma}{2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma (\dot{x}^2 - x'^2) - \frac{m^2}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{t_1}^{t_2} d\tau \dot{x}^2(\tau, \sigma_i),$$

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \pi. \quad (12.23)$$

Это действие сразу приводит к линейным граничным условиям (12.9). Однако здесь возникают следующие трудности. Во-первых, не ясно, какое отношение имеют полученные решения к струне с массами на концах, описываемой обычной функцией действия (12.1), и, во-вторых, из действия (12.23) непосредственно не следуют калибровочные условия, с помощью которых можно было бы исключить состояния с отрицательной нормой. Использование для этой цели условий Вирасоро из теории безмассовой струны, как это делается в [42], выглядит довольно искусственно.

13. Некоторые точные решения для струны с массами на концах

Теория релятивистской струны с массивными концами является более реалистической моделью по сравнению со свободной струной хотя бы уже потому, что концы струны, нагруженные массами, не могут, в отличие от свободного случая, двигаться со скоростью света.

Учитывая трудности в квантовой теории свободной струны, было естественно попытаться получить непротиворечивую теорию этого объекта, устремляя к нулю массы в теории массивной струны. С помощью такого предельного перехода в работах [43] в двумерном пространстве-времени была построена квантовая теория безмассовой струны, удовлетворяющая требованию релятивистской инвариантности.

В смысле физической наглядности несравненным преимуществом обладает такая параметризация мировой поверхности струны, в которой эволюционный параметр τ совпадает с временем $t = x^0(\tau, \sigma)$. В этом случае действие (12.1) записывается так:

$$S = -\gamma \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\pi d\sigma \sqrt{x'^2(1 - \dot{x}^2) + (\dot{x} x')^2} -$$

$$- \sum_{i=1}^2 m_i \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \dot{x}_i^2} dt; \quad x_i = x(t, \sigma_i), \quad i = 1, 2, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \pi.$$

Здесь точка означает дифференцирование по t . Действие (13.1) инвариантно при произвольных преобразованиях параметра σ , поэтому соответствующий лагранжиан — вырожденный. В теории есть одна связь между каноническими переменными $x(t, \sigma)$ и $p(t, \sigma)$:

$$x'p = 0, \quad (13.2)$$

где

$$p(t, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial \dot{x}} = \frac{\gamma^2}{\mathcal{L}_{\text{стр}}} [x'(\dot{x} x') - \dot{x}(x')^2]; \quad (13.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{стр}} = -\gamma \sqrt{x'^2(1 - \dot{x}^2) + (\dot{x} x')^2}. \quad (13.4)$$

Учитывая равенства [22]

$$p\dot{x} - \mathcal{L}_{\text{стр}} = -\frac{\gamma^2}{\mathcal{L}_{\text{стр}}} x'^2; \quad p^2 + \gamma^2 x'^2 = \left(-\frac{\gamma^2}{\mathcal{L}_{\text{стр}}} x'^2\right)^2, \quad (13.5)$$

получаем выражение для канонического гамильтониана:

$$H = \int_0^\pi d\sigma \sqrt{p^2 + \gamma^2 x'^2} + \sum_{i=1}^2 \sqrt{p_i^2 + m_i^2}, \quad (13.6)$$

где

$$p_i = m\dot{x}_i / \sqrt{1 - \dot{x}_i^2}, \quad i = 1, 2. \quad (13.7)$$

Согласно условию (13.2), векторы $p(t, \sigma)$ и $x'(t, \sigma)$ ортогональны друг другу, поэтому H_2 можно переписать так:

$$H = \int_0^\pi d\sigma |p + \gamma x'| + \sum_{i=1}^2 \sqrt{p_i^2 + m_i^2}. \quad (13.8)$$

Струна с массами на концах в двумерном пространстве-времени. Динамика такой струнной модели изучалась в работах [5, 43]. В этом случае вектор $x(t, \sigma)$ имеет только одну компоненту $x(t, \sigma)$, а плотность импульса струны $p(t, \sigma)$, согласно (13.3), равна нулю. Поэтому

$$H = \gamma \int_0^\pi |x'| d\sigma + \sum_{i=1}^2 \sqrt{p_i^2 + m_i^2}. \quad (13.9)$$

Если исключить из рассмотрения движения струны, которые приводят к образованию на ней складок, то (13.9) можно переписать так:

$$H = \gamma |x(0) - x(\pi)| + \sum_{i=1}^2 \sqrt{p_i^2 + m_i^2}. \quad (13.10)$$

Таким образом, канонические переменные, описывающие струну, выпадают из рассмотрения. Вместо струны, соединяющей две точечные части-

цы, в теории появляется линейно растущий с расстоянием потенциал взаимодействия между этими частицами (одномерный кулоновский потенциал).

Варьирование действия (13.1) в двумерном случае

$$S = -\gamma \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\pi d\sigma |x'| - \sum_{i=1}^2 \int_{t_1}^{t_2} m_i \sqrt{1 - \dot{x}_i^2} dt \quad (13.11)$$

приводит к следующим уравнениям Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{x'}{|x'|} \right) = 0, \quad 0 < \sigma < \pi \quad (13.12)$$

и граничным условиям

$$\frac{d}{dt} \frac{m_i \dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} \mp \gamma \frac{x'}{|x'|} = 0, \quad \begin{cases} \sigma = 0, \\ \sigma = \pi. \end{cases} \quad (13.13)$$

В случае равных масс $m_1 = m_2 = m$ решение этих уравнений, записанное в системе центра масс $p_1 + p_2 = 0$, имеет вид [43]

$$x(t, \sigma) = \pm \left(\frac{2\sigma}{\pi} - 1 \right) \left\{ -[(t - t_0) + m^2/\gamma^2]^{1/2} + \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{m^2}{\gamma^2} \right)^{1/2} \right\}. \quad (13.14)$$

Для времени t , заключенном в интервале $-\pi/2 < t < \pi/2$, необходимо брать знак (+) и полагать $t_0 = 0$. Это решение продолжается непрерывно для других значений t так, как это показано на рис. 6. При этом для $\pi/2 < t < 3\pi/2$ необходимо положить $t_0 = \pi$ и взять знак (-) и т.д.

Предел нулевых масс в этом решении

$$x(t, \sigma) = \pm (1 - 2\sigma/\pi) (|t - t_0| - \pi/2) \quad (13.15)$$

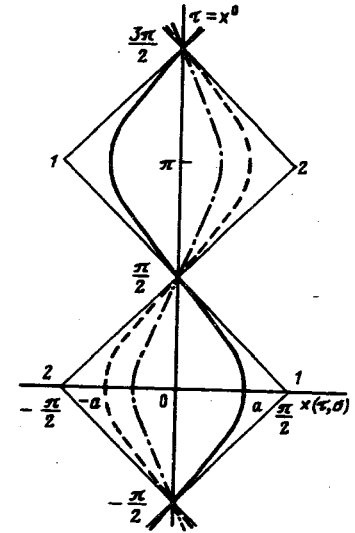
воспроизводит так называемые продольные движения безмассовой струны, которые не описывались в светоподобной калибровке [20, 21, 52]. Решения (13.14) и (13.15) показаны на рис. 6.

Спектр масс M в квантовой теории, определяемой гамильтонианом (13.9), может быть найден путем решения нелокального уравнения Шредингера

$$\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} dk' G(k, k') \psi(k') + [\sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m^2} - M] \psi(k) = 0. \quad (13.16)$$

Рис. 6. Движение релятивистской струны с точечными массами на концах в двумерном пространстве-времени:

— траектория точки $\sigma = \pi$; --- точки $\sigma = 0$ и - - - - - точки $\sigma = \pi/4$; константа a равна $(\pi^2/4 + m^2/\gamma^2)^{1/2}$; 1, 2 — траектории концов струны при $m = 0$



Функция Грина в этом уравнении определяется так:

$$G(k, k') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r dr \cos[r(k - k')] \exp(-\epsilon r) = \mathcal{P} \left\{ \frac{1}{\pi(k - k')^2} \right\}. \quad (13.17)$$

Здесь \mathcal{P} — символ главного значения. Для случая светоподобной калибровки уравнение Шредингера вместо (13.16) принимает следующий вид:

$$\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} dk' G(k, k') \psi(k') + \left[\frac{m_1^2}{1/2 - k} + \frac{m_2^2}{1/2 + k} - M^2 \right] \psi(k) = 0, \quad (13.18)$$

где $G(k, k')$ определяется формулой (13.17). Интересно отметить, что Хофт [53] получил это уравнение для двумерной хромодинамики.

Точные решения уравнений (13.16) и (13.18) неизвестны.

В работах [43] было показано, что квантовая теория релятивистской струны с массами на концах в двумерном пространстве-времени не нарушает релятивистскую инвариантность. Это утверждение справедливо и для безмассового предела в рассматриваемой теории. Авторы работ [43] отмечают зависимость спектральных свойств построенной ими квантовой теории релятивистской струны от выбора классических канонических переменных, в терминах которых проводится квантование.

Вращающаяся струна с массами на концах. В [38] в калибровке $t = \tau$ получено частное решение для струны с массами на концах, вращающейся с угловой скоростью ω как жесткий стержень. Уравнения Эйлера, получаемые варьированием действия (13.1), имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial \dot{x}} \right) = - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial x'} \right), \quad (13.19)$$

где $\mathcal{L}_{\text{стр}}$ — лагранжиан струны в калибровке $t = \tau$ определяется форму-

лой (13.4). Граничные условия записываются так:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{1-\dot{x}_1^2}} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial x'}, \quad \sigma = 0; \\ m \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{1-\dot{x}_2^2}} &= -\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial x'}, \quad \sigma = \pi. \end{aligned} \right\} \quad (13.20)$$

Мы положили для простоты $m_1 = m_2 = m$. Оказывается, что частное решение уравнений (13.19) и (13.20) можно представить в виде

$$x(t, \sigma) = \rho(\sigma) (\cos \omega t, \sin(\omega t), 0). \quad (13.21)$$

В этом случае струна имеет форму прямолинейного отрезка длиной $|\rho(\pi) - \rho(0)|$ и вращается как целое с угловой скоростью ω . Мировая поверхность струны представляет собой геликоид [23]. Среди линейных поверхностей (т.е. поверхностей, образованных перемещением в пространстве прямых линий) только геликоид и плоскость являются минимальными поверхностями. Учитывая, что $\dot{x} x' = 0$, легко проверить следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial \dot{x}} \right) = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial x'} \right) = -\frac{\gamma \omega^2 \rho \rho'}{\sqrt{1-\omega^2 \rho^2}} \times$$

$$\times [\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0]. \quad (13.22)$$

Следовательно, уравнения движения (13.19) удовлетворяются решением (13.21) тождественно при любой функции $\rho(\sigma)$. В этом проявляется инвариантность действия (13.1) по отношению к произвольным преобразованиям параметра σ .

Подстановка (13.21) в первое граничное условие (13.20) дает

$$m \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}_1^2}} = -\frac{m \omega^2 \rho(0)}{\sqrt{1-\rho^2(0)\omega^2}} [\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0]; \quad (13.23)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{стр}}}{\partial x'} - \frac{\gamma}{\rho'} \sqrt{1-\rho^2 \omega^2} x' =$$

$$= -\gamma \sqrt{1-\rho^2 \omega^2} [(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)],$$

Таким образом, граничные условия будут удовлетворены, если функция $\rho(\sigma)$ подчиняется требованию

$$\omega \rho(0) = -\omega \rho(\pi) = \omega R, \quad (13.24)$$

где

$$\omega R = \sqrt{1 + m^2 \omega^2 / (4\gamma^2)} - m\omega / (2\gamma). \quad (13.25)$$

Постоянная R , введенная в формулу (13.24), имеет смысл половины расстояния между концами струны. При $\omega \rightarrow 0$ $R \rightarrow \infty$.

Из формулы (13.25) следует, что при заданной частоте ω и фиксированной массе m всегда найдется такое расстояние $2R$ между массивными концами струны, при котором центробежные силы, действующие на точечные массы, будут уравниваться натяжением струны. В этом отношении поведение релятивистской струны принципиально отличается, например, от поведения пружины с постоянной упругостью k , которая соединяет две точечные массы. Согласно механике Ньютона, такая система может вращаться только с одной заданной частотой $\omega^2 = 2k/m$.

Посчитаем энергию E и угловой момент J вращающейся релятивистской струны с массами на концах. Для решения (13.21) плотность импульса струны (13.3) имеет вид

$$p(t, \sigma) = \frac{\gamma |\rho'| \rho \omega}{\sqrt{1-\rho^2 \omega^2}} [-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0]. \quad (13.26)$$

В силу условий (13.24) $\rho'(\sigma) < 0$. Подставляя (13.21) и (13.26) в (13.6), получаем

$$E = \gamma \int_0^\pi \frac{|\rho'| d\sigma}{\sqrt{1-\rho^2 \omega^2}} + \frac{2m}{\sqrt{1-\omega^2 R^2}} = \frac{2\gamma}{\omega} \arcsin(\omega R) +$$

$$+ \frac{2m}{\sqrt{1-\omega^2 R^2}}. \quad (13.27)$$

Первое слагаемое здесь — это вклад в энергию, обусловленный струной. Если вращение нерелятивистское ($\omega R \ll 1$), то это слагаемое приводит к линейно растущему потенциалу $2\gamma R$ между массивными частицами на концах струны.

Для углового момента системы получаем следующее выражение*:

$$J = \int_0^\pi d\sigma (x p_y - y p_x) + \frac{2m \omega R^2}{\sqrt{1-\omega^2 R^2}} = \gamma \omega \int_0^\pi d\sigma \frac{|\rho'| \rho^2}{\sqrt{1-\omega^2 \rho^2}} +$$

$$+ \frac{2m \omega R^2}{\sqrt{1-\omega^2 R^2}} = \frac{\gamma}{\omega^2} [\arcsin(\omega R) - \omega R \sqrt{1-\omega^2 R^2}] +$$

$$+ \frac{2m \omega R^2}{\sqrt{1-\omega^2 R^2}}. \quad (13.28)$$

* В [39] в формуле (35), определяющей J , вместо разности двух членов, задающих угловой момент струны, стоит по ошибке их сумма (см. для сравнения [46]).

Связь между J и $M^2 = E^2$, получаемая исключением R из (13.27) и (13.28), нелинейна при малых M^2 . Но она переходит в линейную при $M^2 \rightarrow \infty$ [46]. При этом имеет место неравенство $J < a'M^2$, где $a' = (2\pi\gamma)^{-1}$.

В пределе нулевых масс на концах струны $m \rightarrow 0$ получаем тот же ответ, что и для свободной струны:

$$E \rightarrow \gamma \frac{\pi}{\omega}; \quad J \rightarrow \frac{\gamma \pi}{\omega^2} \frac{\pi}{2}; \quad J = \frac{1}{2\pi\gamma} E^2 = a'E^2. \quad (13.29)$$

Здесь учтено, что при $m \rightarrow 0$ из формулы (13.25) следует $\omega R \rightarrow 1$. Рассмотренная задача представляет интерес и как пример непротиворечивого описания релятивистского кругового движения массивных частиц [54].

В [46] была предпринята попытка исследовать такой класс движений релятивистской струны с массами на концах, который бы одновременно объединял прямолинейное одномерное движение массивных концов струны по соединяющей их линии и вращение струны как целого. Предполагалось, что струна сохраняет форму прямолинейного отрезка и совершает движения только в заданной плоскости, причем траектории ее концов симметричны относительно центра струны (равные массы).

14. Бесконечная струна, нагруженная точечной массой

Если бесконечную струну нагрузить одной точечной массой, то всегда можно выбрать такую параметризацию на ее мировой поверхности, чтобы параметр эволюции τ был пропорционален собственному времени массивной точки [41]. Существенно, что это не ограничивает класс допустимых движений бесконечной струны, в отличие от случая конечной струны с двумя массивными концами. После выбора такой параметризации рассматриваемая задача полностью линеаризуется и в явном виде удается получить общее решение уравнений движения и граничных условий.

Действие для бесконечной релятивистской струны с точечной массой m в точке $\sigma = 0$ определим следующим образом:

$$S = -\gamma \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} - m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}^2(\tau, 0)}. \quad (14.1)$$

Вариирование действия (14.1) с условиями $\delta x_\mu(\tau_1, \sigma) = \delta x_\mu(\tau_2, \sigma) = 0$ и $\delta x_\mu(\tau, \sigma = \pm \infty) = 0$ приводит к уравнениям движения

$$\ddot{x}_\mu(\tau, \sigma) - x_\mu''(\tau, \sigma) = 0 \quad (14.2)$$

и нелинейному условию в точке $\sigma = 0$

$$m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}_\nu(\tau, 0)}{\sqrt{\dot{x}^2(\tau, 0)}} \right) = \gamma [x'_\nu(\tau, 0+0) - x'_\nu(\tau, 0-0)]. \quad (14.3)$$

При этом на искомые решения $x_\mu(\tau, \sigma)$ наложена, как обычно, ортогональная калибровка

$$(\dot{x} \pm x')^2 = 0. \quad (14.4)$$

Уравнения (14.2)–(14.4) инвариантны при переходе к новым параметрам с произвольной функцией f :

$$\bar{\sigma}(\tau, \sigma) = (1/2) [f(\tau + \sigma) - f(\tau - \sigma)]; \quad \bar{\tau}(\tau, \sigma) = (1/2) [f(\tau + \sigma) + f(\tau - \sigma)].$$

Поэтому всегда можно выбрать f так, что параметр временной эволюции $\bar{\tau}$ будет пропорционален собственному времени частицы,

$$\dot{\bar{x}}^2(\tau, 0) = m\gamma^{-3/2}. \quad (14.5)$$

Действительно, если ввести новый лоренцевский вектор $\bar{x}_\mu(\bar{\tau}, \bar{\sigma}) \equiv x_\mu(\tau(\bar{\tau}, \bar{\sigma}), \sigma(\bar{\tau}, \bar{\sigma}))$, то $\dot{\bar{x}}_\mu^2(\tau, 0)$ можно представить так:

$$\dot{\bar{x}}_\mu^2(\tau, 0) = \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{x}_\mu(\bar{\tau}, 0) \right]^2 f'^2(\tau).$$

Чтобы $(\partial \bar{x}_\mu(\bar{\tau}, 0)/\partial \bar{\tau})^2 = m\gamma^{-3/2}$, достаточно положить $f'^2(\tau) = m^{-1} \gamma^{3/2} \dot{\bar{x}}_\mu^2(\tau, 0)$.

С учетом (14.5) условие (14.3) линеаризуется:

$$\ddot{x}_\mu(\tau, 0) = k [x'_\mu(\tau, 0+0) - x'_\mu(\tau, 0-0)], \quad k = \gamma^{1/4}/m^{1/2}. \quad (14.6)$$

Разделение переменных $x(\tau, \sigma) = \exp(i\omega\tau)u(\omega, \sigma)$ приводит к краевой задаче на функцию $u(\omega, \sigma)$

$$u''(\omega, \sigma) + \omega^2 u(\omega, \sigma) = 0; \\ -\omega^2 u(\omega, 0) = k [u'(\omega, 0+0) - u'(\omega, 0-0)].$$

Особенностью этой граничной задачи опять является зависимость граничных условий от спектрального параметра ω [48]. Решения этой задачи можно представить в следующем виде:

$$u(\omega, \sigma) = N_\omega [\cos(\omega\sigma) - (\omega/2k) \sin(\omega|\sigma|)],$$

где нормировочный множитель $N_\omega = [\pi(1 + \omega^2/(4k^2))]^{-1/2}$. Функции $u(\omega, \sigma)$ удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma u(\omega, \sigma) \xi(\sigma) u(\omega', \sigma) = \delta(\omega + \omega') + \delta(\omega - \omega') \quad (14.7)$$

и полноты

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega u(\omega, \sigma) u(\omega, \sigma') \xi(\sigma) / 2 = \delta(\sigma, \sigma'). \quad (14.8)$$

В этих формулах весовая функция $\xi(\sigma) = 1 + k^{-1}\delta(\sigma)$, а $\delta(\sigma, \sigma')$ определяется с помощью равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma' f(\sigma') \delta(\sigma', \sigma) = f(\sigma),$$

которое должно быть справедливо для произвольной четной функции

$$f(\sigma): f(\sigma) = f(-\sigma), \quad -\infty < \sigma < +\infty.$$

Для координат струны $x_\mu(\tau, \sigma)$ имеем теперь следующее представление:

$$x_\mu(\tau, \sigma) = \frac{i}{\sqrt{2\gamma}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{a_\mu(\omega)}{\omega} \exp(-i\omega\tau) u(\omega, \sigma), \quad (14.9)$$

где $a_\mu(-\omega) = a_\mu^*(\omega)$.

Полный импульс рассматриваемой системы с учетом (14.9) имеет вид

$$P_\mu = - \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \xi(\sigma) \dot{x}_\mu(\tau, \sigma) = \\ = \frac{\gamma}{k} \dot{x}_\mu(\tau, 0) + \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \dot{x}_\mu(\tau, \sigma).$$

Вводя затухающий множитель $\exp(-\epsilon|\sigma|)$, $\epsilon > 0$, для сходимости интегралов от осциллирующих функций, получаем $P_\mu = 0$.

Подстановка решения (14.9) в условия ортогональной калибровки (14.4) приводит к ограничениям на фурье-амплитуды:

$$L^\pm(\Omega) = \frac{1}{2} \int d\omega N_\omega N_{\Omega-\omega} \alpha(\omega) \alpha(\Omega - \omega) \times \\ \times \left(1 \mp i \frac{\omega}{2k} \right) \left(1 \mp i \frac{\Omega - \omega}{2k} \right) = 0. \quad (14.10)$$

Эти уравнения должны быть дополнены условием (14.5), из которого следует еще одна связь на амплитуды $\alpha(\omega)$:

$$L(\Omega) = \frac{1}{2} \int d\omega N_\omega N_{\Omega-\omega} \alpha(\omega) \alpha(\Omega - \omega) - \frac{2\pi}{k^2} \delta(\Omega) = 0. \quad (14.11)$$

Уравнения (14.10) и (14.11) существенно отличаются от ограничений на амплитуды $\alpha(\omega)$, которые имеют место в теории свободной беско-

нечной струны [7]:

$$L_0(\Omega) = (1/2) \int d\omega \alpha(\omega) \alpha(\Omega - \omega) = 0.$$

Если массу частицы устремить к нулю, то $k \rightarrow \infty$ и все связи $L^\pm(\Omega)$ и $L(\Omega)$ переходят в $L_0(\Omega)$.

Учитывая (14.11), ограничения (14.10) можно заменить одним условием:

$$L_1(\Omega) = \frac{1}{2} \int d\omega \omega(\Omega - \omega) N_\omega N_{\Omega-\omega} \alpha(\omega) \alpha(\Omega - \omega) = 0. \quad (14.12)$$

Из разложения (14.9) с учетом условия ортогональности (14.7) получаем

$$a_\mu(\omega) = \exp(i\omega\tau) \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma u(\omega, \sigma) [\gamma^{-1} p_\mu(\tau, \sigma) - i\omega \xi(\sigma) x_\mu(\tau, \sigma)], \quad (14.13)$$

где p_μ — плотность канонического импульса, $p_\mu(\tau, \sigma) = \gamma \xi(\sigma) \dot{x}_\mu(\tau, \sigma)$. Используя формулу (14.13), найдем скобку Пуассона фурье-амплитуд:

$$\{a_\mu(\omega_1), a_\nu(\omega_2)\} = i g_{\mu\nu} \omega_1 \delta(\omega_1 + \omega_2).$$

Теперь можно вычислить скобки Пуассона связей (14.11) и (14.12).

Так, для $L(\Omega)$ имеем

$$\{L(\Omega_1), L(\Omega_2)\} = i(\Omega_1 - \Omega_2) \times \\ \times \frac{1}{2} \int d\omega N_\omega N_{\Omega_1 + \Omega_2 - \omega} \frac{1 - \frac{\omega - \Omega_1}{4k^2} \frac{\omega - \Omega_2}{4k^2}}{\left(1 + \frac{(\omega - \Omega_1)^2}{4k^2}\right) \left(1 + \frac{(\omega - \Omega_2)^2}{4k^2}\right)} \times \\ \times \alpha(\omega) \alpha(\Omega_1 + \Omega_2 - \omega). \quad (14.14)$$

Такие же сложные выражения получаются и для скобок Пуассона связей $L_1(\Omega_1)$, $L_1(\Omega_2)$ и $L(\Omega_1)$, $L_1(\Omega_2)$. Таким образом, условия (14.11) и (14.12) оказываются связями второго рода по терминологии Дирака [26]. Это следовало ожидать, так как такие связи всегда появляются в калибровочных теориях, когда полностью фиксируется калибровка [29]. В рассматриваемом случае выбор параметров τ, σ полностью зафиксирован условиями (14.4) и (14.5).

В квантовой теории связи второго рода должны выполняться как операторные равенства. Для этого коммутаторы динамических переменных следует определять с помощью скобок Дирака [26, 29] по формулам (9.25) и (9.26). Связи $\theta_\mu(q, p) = 0$ в рассматриваемом случае —

это уравнения (14.11) и (14.12). Из-за сложности матрицы $\Delta_{\mu\nu}$ [формула (14.14)] практически воспользоваться методом Дирака и построить квантовую теорию не удастся. Возможный путь преодоления этой трудности заключается в поиске таких канонических переменных для квантования, которые имели бы нулевые скобки Пуассона со связями $L(\Omega)$ и $L_1(\Omega)$.

Аналогичное рассмотрение можно провести и для полубесконечной струны, на конце которой помещена точечная масса [45].

15. Нерелятивистский предел в теории струны с массами на концах. Струна с закрепленными концами

Введем в действие струны с массами на концах (13.1) явно скорость света c и учтем, что размерность константы γ в этом случае равна MT^{-1} (см. § 2):

$$S = -\gamma \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\pi d\sigma \sqrt{x'^2 (c^2 - \dot{x}^2) + (\dot{x} x')^2} - \sum_{i=1}^2 m_i c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 - \dot{x}_i^2} dt. \quad (15.1)$$

Теперь предположим, что скорости всех точек струны $\dot{x}(t, \sigma)$ и ее концов $\dot{x}_i(t)$ значительно меньше скорости света c :

$$|\dot{x}(t, \sigma)| \ll c, \quad |\dot{x}_i| \ll c. \quad (15.2)$$

В результате получаем

$$S \rightarrow -\gamma c \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{x'^2} - \sum_{i=1}^2 m_i c^2 + \sum_{i=1}^2 \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2}. \quad (15.3)$$

Интеграл по σ дает длину струны в момент времени t (в предположении, что на струне нет складок). Варьирование первого слагаемого в (15.3) по координатам струны, очевидно, приведет к требованию, чтобы струна имела форму прямолинейного отрезка, соединяющего массивные точки на ее концах. Поэтому эффективное действие \bar{S} , которое дает уравнения движения для точечных масс на концах струны, имеет вид

$$\bar{S} = -\gamma c \int_{t_1}^{t_2} |x_1(t) - x_2(t)| dt - \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2. \quad (15.4)$$

Следовательно, в нерелятивистском пределе струна генерирует линейно растущий с расстоянием потенциал взаимодействия между точечными массами, которые она соединяет:

$$V(|x_1 - x_2|) = \gamma c |x_1(t) - x_2(t)|. \quad (15.5)$$

Координаты струны из динамики полностью выпадают. К этому же результату приводит и анализ уравнений движения струны в нерелятивистском пределе [16].

Таким образом, модель релятивистской струны, соединяющей две точечные массы, можно рассматривать как релятивизацию в духе Пуанкаре [55, 56] нерелятивистской задачи двух тел с линейным потенциалом взаимодействия.

Отметим, что именно линейный потенциал (по крайней мере, на больших расстояниях между кварками) широко используется в феноменологических составных кварковых моделях адронов [57, 58]. В рамках этого подхода удастся получить, например, спектр масс J/ψ -мезонов, подбирая соответствующим образом параметры теории и, в частности, константу γ в формуле (15.5). В работе [58] для γ было получено следующее значение:

$$\gamma = 0,19 (\text{ГэВ})^2. \quad (15.6)$$

С другой стороны, константу γ можно связать с универсальным наклоном реджевских траекторий α' , если рассматривать релятивистскую струну как динамическую основу дуальных моделей (см. приложение А). В этом подходе

$$\gamma = (2\pi\alpha')^{-1}.$$

Беря экспериментальное значение для наклона реджевских траекторий $\alpha' = 0,895 (\text{ГэВ})^{-2}$, получаем

$$\gamma = 0,18 (\text{ГэВ})^2. \quad (15.7)$$

Согласие между значениями константы γ , найденными в рамках составной кварковой модели (15.6) и в дуально-резонансной модели (15.7), можно рассматривать как указание на то, что эти два подхода имеют одну и ту же динамическую основу.

Струна с закрепленными концами. В ряде работ [59–63] была предпринята попытка вычислить квантовые поправки к линейному потенциалу (15.5), генерируемому струной. Рассмотрим здесь расчет этих поправок путем вычисления энергии релятивистской струны с закрепленными концами. В отличие от [61] будем использовать не светоподобную калибровку, а физически наглядную параметризацию $t = \tau$. Как было показано в § 6, при такой параметризации можно считать без потери общности, что выполнены условия

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 1; \quad \dot{x} x' = 0. \quad (15.8)$$

Решение уравнений движения

$$\ddot{x} - x'' = 0 \quad (15.9)$$

и граничных условий для струны с закрепленными концами

$$x(t, 0) = 0, \quad x(t, \pi) = R \quad (15.10)$$

представим рядами Фурье

$$x(t, \sigma) = R \frac{\sigma}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} \sin(n\sigma) \exp(-int) \quad (15.11)$$

(здесь используется система единиц, где время t безразмерно).

В силу действительности $x(t, \sigma)$ амплитуды α_n удовлетворяют условию

$$\alpha_n^* = \alpha_{-n}. \quad (15.12)$$

Классические скобки Пуассона между $x(t, \sigma)$ и $p(t, \sigma) = \gamma \dot{x}(t, \sigma)$ определяются формулой

$$\left\{ x^i(t, \sigma), p^j(t, \sigma') \right\} = \delta^{ij} \Delta_-(\sigma, \sigma'), \quad (15.13)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, D-1,$$

где $\Delta_-(\sigma, \sigma')$ — антипериодическая δ -функция:

$$\Delta_-(\sigma, \sigma') = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\delta(\sigma - \sigma' + 2\pi n) - \delta(\sigma + \sigma' + 2\pi n)] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin(n\sigma) \sin(n\sigma'). \quad (15.14)$$

Это эквивалентно следующим скобкам Пуассона между фурье-амплитудами:

$$\left\{ \alpha_n^i, \alpha_m^j \right\} = -in \delta^{ij} \delta_{n+m, 0}. \quad (15.15)$$

Подстановка (15.11) в (15.8) дает

$$L_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m} \alpha_m = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (15.16)$$

$$L_0 = \frac{1}{\pi\gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n} \alpha_n = 1; \quad \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \alpha_0 = \frac{R}{\pi}. \quad (15.17)$$

Энергия струны

$$E = \int_0^\pi \sqrt{p^2 + \gamma^2 x'^2} d\sigma \quad (15.18)$$

с учетом (15.8) и (13.3) определяется формулой

$$E = \gamma \int_0^\pi \sqrt{\dot{x}^2 + x'^2} d\sigma, \quad (15.19)$$

которую можно переписать, согласно (15.17), так:

$$E = \sqrt{\gamma^2 R^2 + \gamma\pi \sum_{n \neq 0} \alpha_{-n} \alpha_n}. \quad (15.20)$$

На первый взгляд такое преобразование подкоренного выражения в (15.16), равного единице, может показаться искусственным. Однако необходимо иметь в виду то, что рассматриваемая система является гамильтоновой теорией со связью (15.2). Для фурье-амплитуд связи определяются формулами (15.16) и (15.17). Все физические величины должны быть вычислены с учетом этих связей.

При переходе к квантовой теории амплитуды α_n становятся операторами, коммутационные соотношения которых должны быть постулированы в соответствии со скобками Пуассона (15.15) и связью (15.2). Матричный элемент оператора энергии по основному состоянию дает статический потенциал с квантовыми поправками

$$V(R) = \sqrt{\gamma^2 R^2 + \gamma\pi \epsilon_0}, \quad (15.21)$$

где ϵ_0 — константа, которая должна быть добавлена к сумме $\sum_{n \neq 0} \alpha_{-n} \alpha_n$ при переходе к квантовой теории (вклад нулевых мод). Если по аналогии с теорией свободной релятивистской струны считать, что

$$\epsilon_0 = -2\alpha(0) = -(D-2)/12, \quad (15.22)$$

где D — размерность пространства-времени, то статический потенциал принимает вид

$$V(R) = \sqrt{\gamma^2 R^2 - \gamma\pi(D-2)/12}. \quad (15.23)$$

Этот же результат был получен в [61] в светоподобной калибровке, а в [60] — путем приближенного вычисления соответствующего функционального интеграла в главном порядке по $(D-2)^{-1}$ при $D \rightarrow \infty$.

Универсальная первая поправка к линейному потенциалу была получена в [59]:

$$V(R) = \gamma R - \frac{\pi}{24R} (D-2). \quad (15.24)$$

Вычисления по теории возмущений при $\gamma R^2 \rightarrow \infty$ второй квантовой поправки к линейному статическому потенциалу, выполненные в [62], привели к следующему результату:

$$V(R) \rightarrow \gamma R - \frac{\pi(D-2)}{24R} + \left(\frac{\pi(D-2)}{12R} \right)^2 \frac{1}{8\gamma R}. \quad (15.25)$$

В [63] для этой величины получено другое выражение:

$$V(R) \rightarrow \gamma R - \frac{\pi(D-2)}{24R} + \left(\frac{\pi(D-2)}{12R} \right)^2 \frac{1}{4\gamma R}. \quad (15.26)$$

Обе формулы, (15.25) и (15.26), отличаются от разложения (15.23) при $\gamma R \rightarrow \infty$.

Квантовые поправки к линейному потенциалу зависят от процедуры вычисления расходящихся выражений и имеют природу, как это интерпретируется в [63], аналогичную эффекту Казимира.

Струнная картина возникновения линейного потенциала между кварками, очевидно, справедлива только при рассмотрении $R > R_{кр}$,

$$\text{где } R_{кр} = \frac{\pi}{\gamma} \frac{D-2}{12} \quad [60].$$

16. Релятивистская струна во внешнем электромагнитном поле

Лагранжиан взаимодействия. Основным принципом при выборе лагранжиана взаимодействия является сохранение репараметризационной инвариантности, которой обладает действие свободной струны. [64]. В случае электромагнитного поля этому условию удовлетворяет лагранжиан

$$\mathcal{L}_{int} = g x'_{\mu} \dot{x}_{\nu} F^{\mu\nu}(x). \quad (16.1)$$

Соответствующее действие имеет вид

$$\begin{aligned} S_{int} &= g \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma x'_{\mu} \dot{x}_{\nu} F^{\mu\nu}(x) = \\ &= -g \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left. \frac{dx_{\nu}}{d\tau} A^{\nu}(x) \right|_{\sigma=\sigma_1(\tau)} + g \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left. \frac{dx_{\nu}}{d\tau} A^{\nu}(x) \right|_{\sigma=\sigma_2(\tau)}, \end{aligned}$$

где $dx^{\nu}/d\tau = \dot{x}_{\nu} + x'_{\nu} \dot{\sigma}(\tau)$. Таким образом, S_{int} описывает взаимодействие с электромагнитным полем двух точечных зарядов, расположенных на концах струны. Эти заряды равны, но противоположны по знаку: $g_1 = -g_2 = g$.

Из равенства (16.2) следует, что электромагнитное поле не изменяет ни уравнений движения (3.19), ни дополнительных условий (3.21), которые остаются такими же, как и в свободном случае. Граничные условия получаются из уравнений (3.11) заменой $\mathcal{L}_{стр}$ на $\mathcal{L}_{стр} + \mathcal{L}_{int}$:

$$\gamma x'_{\nu} + g F_{\nu\mu} \dot{x}^{\mu} + (\dot{x}_{\nu} + g F_{\nu\mu} x'^{\mu}) \dot{\sigma} = 0, \quad (16.3)$$

$$\sigma = \sigma_i(\tau), \quad i = 1, 2.$$

Вариационный принцип и в этом случае не определяет явный вид функций $\sigma_i(\tau)$, $i = 1, 2$, поэтому можно вновь положить $\sigma_1(\tau) = 0$, $\sigma_2(\tau) = \pi$. Это существенно упрощает граничные условия (16.3):

$$\gamma x'_{\mu} + g F_{\mu\nu} \dot{x}^{\nu} = 0, \quad \sigma = 0, \pi. \quad (16.4)$$

Однако при выборе калибровки, согласующейся с граничными условиями, мы будем пользоваться формулами (16.3).

Найти решение уравнений движения (3.19), удовлетворяющее граничным условиям (16.4), удается в двух случаях: когда $F_{\mu\nu} = \text{const}$ [64] (постоянное однородное электромагнитное поле) и в поле плоской моноэнергетической электромагнитной волны [65].

Эти примеры показывают, что взаимодействие с электромагнитным полем не меняет эквидистантный характер спектра масс струны. Следует отметить некоторые особенности в постановке данной задачи. В действии (16.2) внешнее электромагнитное поле считается заданным, а излучение зарядов струны, их взаимодействие друг с другом через электромагнитное поле и массы зарядов не учитываются. Это приводит, в частности, к тому, что заряженные концы струны могут двигаться со скоростью света.

Постоянное однородное электромагнитное поле. Ковариантный формализм. Если $F_{\mu\nu} = \text{const}$, то решение уравнений движения (3.19), удовлетворяющее граничным условиям (16.4), представляется рядом Фурье [64]

$$\begin{aligned} x^{\mu}(\tau, \sigma) &= \frac{i}{\sqrt{\pi\gamma}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2n} \left\{ \alpha_n^{\mu} \exp(-in(\tau + \sigma)) + \right. \\ &+ \left. [(1-f)^{-1}]^{\mu}_{\rho} (1+f)^{\rho\beta} \alpha_{n\beta} \exp(in(\tau + \sigma)) \right\} + \\ &+ [(1-f^2)^{-1}]^{\mu}_{\rho} Q^{\rho} + \frac{1}{\pi\gamma} P^{\mu} \tau - f^{\mu\nu} \frac{P_{\nu}}{\pi\gamma} \left(\sigma - \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (16.5)$$

где $f_{\mu\nu} = g F_{\mu\nu}/\gamma$, $\alpha_{-n\mu} = \alpha_{n\mu}^*$.

Это разложение описывает движение релятивистской струны в таких полях, для которых

$$\begin{aligned} \det \parallel (1-f)^{\mu}_{\nu} \parallel &= \det \parallel (1+f)^{\mu}_{\nu} \parallel = 1 + \left(\frac{g}{\gamma} \right)^2 (H^2 - E^2) - \\ &- \left(\frac{g}{\gamma} \right)^4 (EH)^2 \neq 0. \end{aligned}$$

В частности, формула (16.5) теряет смысл, когда $(g/\gamma)^2 E^2 = 1$ и $H = 0$. Явный вид обратных матриц $(1-f)^{-1}$, $(1-f^2)^{-1}$, входящих в разложение (16.5), в дальнейшем не потребуется*.

*Здесь принято следующее определение обратной матрицы: $(A^{-1})^{\mu}_{\rho} A^{\rho}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$, где δ^{μ}_{ν} — символ Кронекера, и вверх всегда подымается первый индекс у лоренцевского тензора $A_{\mu\nu}$: $A^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\rho} A_{\rho\nu}$.

Подстановка решения (16.5) в дополнительные условия (3.21) приводит к тем же ограничениям на амплитуды Фурье $a_{n\mu}$, что в свободном случае:

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{n-m\mu} a_m^\mu = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad L_{-n} = L_n^*. \quad (16.6)$$

Только в нулевую моду $a_{0\mu}$ теперь входит тензор $f_{\mu\nu}$:

$$a_{0\mu} = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} (1 - f)_{\mu\rho} P^\rho.$$

Тот факт, что дополнительные условия (16.6) совпали с условиями Вирасоро, не удивителен, так как S_{int} (16.2) обладает такой же репараметризационной инвариантностью, как и действие свободной струны (2.22).

Для плотности канонического импульса имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned} P_\mu &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \gamma(\dot{x}_\mu + f_{\mu\nu} \dot{x}^\nu) = \\ &= \sqrt{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 + f)_{\mu\rho} a_n^\rho \exp(-in\sigma). \end{aligned} \quad (16.7)$$

Полный канонический импульс струны

$$\mathcal{P}_\mu = \int_0^\pi d\sigma p_\mu(\tau, \sigma) \quad (16.8)$$

сохраняется. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_\mu}{d\tau} &= -\int_0^\pi d\sigma \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \int_0^\pi d\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} \right) = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0. \end{aligned}$$

При получении этого равенства были использованы уравнения движения (3.19) и граничные условия (3.12) с заменой $\mathcal{L}_{\text{стр}}$ на $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{стр}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$.

Подставляя разложение (16.7) в (16.8), получаем

$$\mathcal{P}_\mu = (1 - f^2)_{\mu\rho} P^\rho. \quad (16.9)$$

Если в случае свободной струны можно было считать, что механический и канонический импульсы совпадают (по аналогии с теорией свободной точечной частицы), то для струны с зарядами во внешнем поле это не так. Возникает вопрос: как определить массу струны в данном случае? Можно считать, например, что $M^2 = \mathcal{P}^2$. Но такое определение приводит к тахионным состояниям уже в классической теории. Эту трудность можно обойти, если положить, что $M^2 = P^2$, где P_μ — константа, стоящая в линейном по τ члене в разложении (16.5). Используя условие (16.6) при $n=0$, получаем

$$M^2 = P^2 = P_\mu (f^2)^{\mu\nu} P_\nu - \gamma\pi \sum_{n \neq 0} a_{-n} a_n. \quad (16.10)$$

Далее будет показано, что эта величина, действительно, положительно определена.

Изложенный выше метод является ковариантным формализмом для релятивистской струны во внешнем поле. Можно получить и нековариантное решение этой задачи, подобно тому, как это было сделано в теории свободной струны.

Нековариантный формализм. Прежде всего необходимо найти условия калибровки, аналогичные (9.1), (9.12), причем они не должны противоречить требованию $\dot{\sigma}_i(\tau) = 0$, $i = 1, 2$. При выборе калибровки удобно использовать граничные условия (16.3), в которых функции $\sigma_i(\tau)$ еще не зафиксированы. Спроектируем уравнения (16.3) на постоянный вектор n^μ :

$$n x' + n f \dot{x} + (n \dot{x} + n f \dot{x}') \dot{\sigma} = 0, \quad \sigma = \sigma_i(\tau), \quad i = 1, 2. \quad (16.11)$$

Теперь выберем калибровку, задав следующие условия:

$$n x' + n f \dot{x} = 0; \quad n \dot{x} + n f \dot{x}' = n \mathcal{P} / (\gamma\pi), \quad (16.12)$$

где \mathcal{P}_μ — полный канонический импульс струны (16.8), (16.9). Из (16.11) и (16.12) следует, что $\dot{\sigma}_i(\tau) = 0$, т.е. калибровка (16.12) однозначно фиксирует функции $\sigma_i(\tau)$.

Покажем, что условия (16.12) фактически означают переход к новым параметрам $\bar{\tau}, \bar{\sigma}$: $\bar{\tau} \pm \bar{\sigma} = f_\pm(\tau \pm \sigma)$ с функциями f_\pm , определяемыми конкретным движением струны. Координаты струны $x_\mu(\tau, \sigma)$ удовлетворяют уравнению Д'Аламбера (3.19), поэтому их можно представить в виде

$$x^\mu(\tau, \sigma) = \psi_+^\mu(u^+) + \psi_-^\mu(u^-), \quad u^\pm = \tau \pm \sigma. \quad (16.13)$$

Подставляя (16.13) в первую формулу (16.12), получаем

$$n^\nu \psi'_{+\nu}(u^+) + g n^\nu F_{\nu\mu} \psi_+^\mu(u^+) - n^\nu \psi'_{-\nu}(u^-) + g n^\nu F_{\nu\mu} \psi_-^\mu(u^-) = 0, \quad (16.14)$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу функции.

Перейдем к новым параметрам $\bar{u}^{\pm} = \bar{u}^{\pm}(u^{\pm})$ по формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{du^+}{d\bar{u}^+} &= \frac{(n\mathcal{P})}{2\gamma\pi} (n\psi'_+(u^+) + gnF\psi'_+(u^+))^{-1}; \\ \frac{du^-}{d\bar{u}^-} &= \frac{(n\mathcal{P})}{2\gamma\pi} (n\psi'_-(u^-) - gnF\psi'_-(u^-))^{-1}. \end{aligned} \right\} (16.15)$$

Введем также и новые функции $\bar{\psi}_+(\bar{u}^+) = \psi_+(u^+(\bar{u}^+))$; $\bar{\psi}_-(\bar{u}^-) = \psi_-(u^-(\bar{u}^-))$.

Теперь легко показать, что уравнение (16.14), записанное для новых функций $\bar{\psi}_+(\bar{u}^+)$, $\bar{\psi}_-(\bar{u}^-)$ и новых переменных \bar{u}^+ , \bar{u}^- , выполняется тождественно. Действительно,

$$\bar{\psi}'_+(\bar{u}^+) = \frac{d}{d\bar{u}^+} \psi_+(u^+(\bar{u}^+))' = \psi'_+(u^+) \frac{du^+}{d\bar{u}^+};$$

$$\bar{\psi}'_-(\bar{u}^-) = \psi'_-(u^-) \frac{du^-}{d\bar{u}^-},$$

поэтому, учитывая (16.15), получаем

$$\begin{aligned} n\bar{\psi}'_+(\bar{u}^+) + gnF\bar{\psi}'_+(\bar{u}^+) - n\bar{\psi}'_-(\bar{u}^-) + gnF\bar{\psi}'_-(\bar{u}^-) &= \\ = \frac{(n\mathcal{P})}{2\gamma\pi} - \frac{(n\mathcal{P})}{2\gamma\pi} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь для простоты опущены лоренцевские индексы, по которым выполняется суммирование.

Аналогично получаем, что в новых переменных

$$n\dot{x} + gnFx' = (n\mathcal{P})/(\gamma\pi).$$

Уравнения (16.12) и (3.21) позволяют выразить две компоненты вектора $x^{\mu}(\tau, \sigma)$ через остальные. Для этого необходимо рассмотреть определенную конфигурацию внешнего электромагнитного поля и подобрать постоянный вектор n^{μ} .

Произвольное электромагнитное поле соответствующим преобразованием Лоренца может быть сведено к следующим четырем случаям:

- 1) $E \neq 0$, $H = 0$ ($E^2 - H^2 > 0$, $EH = 0$);
- 2) $E = 0$, $H \neq 0$ ($E^2 - H^2 < 0$, $EH = 0$);
- 3) E и H отличны от нуля и параллельны (инвариант $E^2 - H^2$ принимает произвольные значения, $EH \neq 0$);
- 4) электрическое и магнитное поля во всех системах отсчета равны по модулю и перпендикулярны друг другу ($E^2 - H^2 = 0$, $EH = 0$).

Если отлично от нуля только электрическое или только магнитное поле, то матрица $(F^2)^{\mu}_{\nu}$ кратна единичной и из граничных условий (16.4) с учетом (3.21) следует, что скорость концов струны в этом случае равна скорости света. Для других конфигураций электромагнитного поля граничные условия не определяют однозначно скорость концов струны.

Во всех четырех случаях, указанных выше, удается получить решение в виде рядов Фурье и определить оператор квадрата массы струны [64]. При этом оказывается, что электрическое поле приводит к увеличению расстояния между эквидистантными уровнями этого оператора. Из решений видно, что существуют предельные значения электрического поля, при которых решения меняют свой характер. Эти значения равны $E = E_{кр}$, где $E_{кр} = (2\pi\hbar ca'g)^{-1}$. Если принять, что абсолютное значение заряда на концах струны равно заряду электрона, а $a' \approx 0,9$ (ГэВ) $^{-2}$ (как это делается при сопоставлении свободной релятивистской струны с дуальными моделями), то $E_{кр} \approx 10^{22}$ В/см. Для сравнения отметим, что это значение превышает в 10^{12} раз напряженность электрического поля, действующего в атоме водорода на электрон. При значении внешних полей $|E| \ll E_{кр}$, $|H| \ll E_{кр}$ все решения для струны во внешнем поле переходят в свободные.

В качестве примера рассмотрим случай, когда электрическое поле E и магнитное H отличны от нуля и параллельны. Решение задачи в остальных случаях проводится аналогично.

Направим поля E и H по оси x :

$$f_{01} = gE/\gamma = e; \quad f_{32} = gH/\gamma = h.$$

Постоянный вектор n_{μ} , входящий в условия калибровки (16.12), удобно взять в виде

$$n^{\mu} = (1, 1, 0, 0). \quad (16.16)$$

Подставляя (16.16) в (16.12), получаем

$$x'^{\pm} = ex^{\pm}, \quad \dot{x}^{\pm} = ex^{\pm} + \sqrt{2}\mathcal{P}^{\pm}/(\gamma\pi), \quad (16.17)$$

Граничные условия (16.4) в покомпонентной записи имеют вид

$$x'^{\pm} \pm e\dot{x}^{\pm} = 0; \quad y' + h\dot{z} = 0, \quad z' - h\dot{y} = 0 \quad (16.18)$$

при $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$.

Независимыми переменными будем считать y и z . Уравнения движения (3.19) и граничным условиям (16.18) удовлетворяют следующие разложения y и z в ряды Фурье:

$$y(\tau, \sigma) = [Q_y + P_y\tau/(\gamma\pi) - \hbar P_z(\sigma - \pi/2)/(\gamma\pi)](1 + h^2)^{-1/2} +$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{\pi\gamma(1+h^2)}} \sum_{m \neq 0} \frac{\exp(-im\tau)}{m} [a_{my} \cos(m\sigma) + ih a_{mz} \sin(m\sigma)],$$

$$z(\tau, \sigma) = [Q_z + P_z \tau / (\gamma\pi) + hP_y \left(\sigma - \frac{\pi}{2}\right) / (\gamma\pi)] (1+h^2)^{-1/2} +$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{\pi\gamma(1+h^2)}} \sum_{m \neq 0} \frac{\exp(-im\tau)}{m} [a_{mz} \cos(m\sigma) - ih a_{my} \sin(m\sigma)]. \quad (16.19)$$

Зависимые компоненты x^\pm определяются из уравнений (16.17) и (3.21):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}^+ &= \frac{\gamma\pi}{2\mathcal{P}^-} (\dot{x}_\perp^2 + x_\perp'^2 - 2e x_\perp x_\perp'); & \dot{x}^- &= \frac{\mathcal{P}^-}{\gamma\pi} \frac{1}{1-e^2}; \\ x^+ &= -\frac{\gamma\pi}{2\mathcal{P}^-} [e(\dot{x}_\perp^2 + x_\perp'^2) - 2\dot{x}_\perp x_\perp']; & x^- &= \frac{\mathcal{P}^-}{\gamma\pi} \frac{e}{1-e^2}, \end{aligned} \right\} (16.20)$$

где x_\perp — двумерный вектор с компонентами y и z . Зависимые компоненты также можно представить рядами Фурье, удовлетворяющими граничным условиям (16.18):

$$x^\pm(\tau, \sigma) = \frac{i}{2\sqrt{\pi\gamma}} \sum_{n \neq 0} \frac{\exp(in\sigma)}{n} [(1 \pm e) a_n^\pm \exp(-in\tau) - (1 \mp e) a_{-n}^\pm \exp(in\tau)] + \frac{p^\pm}{\pi\gamma} (\tau \mp e\sigma). \quad (16.21)$$

Подставляя (16.19) и (16.21) в (16.20), получаем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n^+ &= \frac{\sqrt{\pi\gamma}}{\mathcal{P}^-} L_{n\perp}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; & \alpha_k^- &= 0, \quad k \neq 0; \\ \mathcal{P}^- &= P^- (1 - e^2), \end{aligned} \right\} (16.22)$$

где

$$L_{n\perp} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m\perp} \alpha_{m\perp}; \quad \alpha_0^\mu = \frac{p^\mu}{\sqrt{\pi\gamma}}, \quad \mu = \pm, y, z.$$

Плотность канонического импульса (16.7) имеет следующие компоненты:

$$P_y = \gamma(\dot{y} + h\dot{z}), \quad P_z = \gamma(\dot{z} - h\dot{y}), \quad p^\pm = \gamma(\dot{x}^\pm \pm e x'^\pm).$$

Разложения (16.19) и (16.21) позволяют представить p_μ в виде

$$p_\perp = \frac{\sqrt{1+h^2}}{\pi} [P_\perp + \sqrt{\pi\gamma} \sum_{m \neq 0} \exp(-im\tau) \alpha_{m\perp} \cos(m\sigma)],$$

$$p^+ = \frac{1-e^2}{\pi} [P^+ + \sqrt{\pi\gamma} \sum_{m \neq 0} \exp(-im\tau) \alpha_m^+ \cos(m\sigma)],$$

$$p^- = \frac{1-e^2}{\pi} p^-.$$

Динамика независимых канонических переменных x_\perp и p_\perp определяется функцией Гамильтона

$$H = \frac{\gamma}{2} \int_0^\pi d\sigma \left\{ (\gamma^{-1} p_y - hz')^2 + (\gamma^{-1} p_z + hy')^2 + x_\perp'^2 \right\} =$$

$$= (1 - e^2) L_{0\perp}.$$

Для квадрата массы струны $M^2 = p^2$ из (16.22) получаем

$$M^2 = (1 - e^2)^{-1} [\pi\gamma \sum_{m \neq 0} \alpha_{-m\perp} \alpha_{m\perp} + e^2 P_\perp^2]. \quad (16.23)$$

Таким образом, M^2 — положительно определенная величина, так как считается, что $e^2 < 1$. При $e \rightarrow 0$ формула (16.23) переходит в выражение для квадрата массы свободной струны (5.15).

Квантовая теория. Квантование релятивистской струны в постоянном однородном электромагнитном поле во многом аналогично квантованию свободной струны. Полный лагранжиан с учетом взаимодействия (16.1) сингулярен, поэтому канонические переменные $x_\mu(\tau, \sigma)$ и $p_\mu(\tau, \sigma)$ подчиняются условиям

$$\varphi_1 = (p_\mu - \gamma f_{\mu\nu} x'^\nu)^2 + \gamma^2 x_\mu'^2 = 0; \quad \varphi_2 = (p_\mu - \gamma f_{\mu\nu} x'^\nu) x'^\mu = 0. \quad (16.24)$$

Гамильтониан, построенный по обычным правилам (8.10), тождественно равен нулю. Поэтому функцией Гамильтона служит линейная комбинация связей (16.24)

$$H = -\frac{\gamma}{2} \int_0^\pi d\sigma [(\gamma^{-1} p_\mu - f_{\mu\nu} x'^\nu)^2 + x_\mu'^2]. \quad (16.25)$$

Первое уравнение Гамильтона

$$\dot{x}_\mu = -\partial \mathcal{H} / \partial p^\mu = \gamma^{-1} p_\mu - f_{\mu\nu} x'^\nu \quad (16.26)$$

устанавливает связь между каноническим импульсом p_μ и координатой x_μ . Второе уравнение Гамильтона имеет вид

$$\dot{p}_\mu = \gamma x''_\mu - (p_\sigma - \gamma f_{\sigma\nu} x''^\nu) f_\mu^\sigma. \quad (16.27)$$

Из (16.25) и (16.26) следует, что

$$\ddot{x}_\mu - f_{\mu\nu} x^\nu = 0$$

Граничные условия

$$\partial \mathcal{H} / \partial x'_\mu = 0, \quad \sigma = 0, \pi$$

с учетом (16.26) записываются так:

$$x'_\mu + f_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = 0$$

Следовательно, выбор функции Гамильтона в форме (16.25) сводит гамильтонов формализм к лагранжевой динамике в ортогональной калибровке. Поэтому в качестве решений для $x_\mu(\tau, \sigma)$ и $p_\mu(\tau, \sigma)$ можно взять разложения (16.5) и (16.7). Учитывая это, получаем следующее выражение для функции Гамильтона (16.25):

$$H = L_0 = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-m} \alpha_m.$$

Связи (16.24) после подстановки в них решений (16.5) и (16.7) сводятся к условиям (16.6) на фурье-амплитуды α_n .

При переходе к квантовой теории, как и в свободном случае, постулируются коммутационные соотношения (10.5), а коммутаторы между Q_μ , P_ν и $\alpha_{n\rho}$ считаются равными нулю. Это эквивалентно обычным "одновременным" коммутаторам:

$$[x_\mu(\tau, \sigma), p_\nu(\tau, \sigma')] = -ig_{\mu\nu} \Delta(\sigma, \sigma');$$

$$[x_\mu(\tau, \sigma), x_\nu(\tau, \sigma')] = [p_\mu(\tau, \sigma), p_\nu(\tau, \sigma')] = 0.$$

Теперь проблема сводится к исключению состояний с отрицательной нормой. Будем следовать методу Рорлиха и наложим на решение (16.5) условия, аналогичные (11.2). Для этого в уравнениях светоподобной калибровки для струны во внешнем поле (16.12) заменим постоянный вектор n_μ вектором K_μ , связанным с полным механическим импульсом струны P_μ : $K_\mu = (1+f)_{\mu\rho}^{-1} P^\rho$. Калибровку теперь зададим следующим образом:

$$K_\mu x^\mu + K_\mu f^{\mu\nu} \dot{x}_\nu = 0; \quad K_\mu \ddot{x}^\mu + K_\mu f^{\mu\nu} x'_\nu = K_\mu \mathcal{P}^\mu / (\pi\gamma). \quad (16.28)$$

Подставляя (16.5) и (16.9) в (16.28), получаем требование

$$\alpha_{n\mu} P^\mu = 0, \quad n \neq 0. \quad (16.29)$$

означающее, что в системе центра масс струны, где $P = 0$, временные фурье-компоненты α_{n0} отсутствуют, $\alpha_{n0} = 0$. Поэтому пространство векторов состояний с положительной нормой в системе центра масс струны строится так же, как и для свободной струны. Далее эти векторы должны быть подчинены еще условиям ортогональной калибровки (16.6), которые с учетом (16.29) принимают вид

$$L_n |\Phi\rangle = (\Lambda_n + \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}} \alpha_{n\mu} f^{\mu\nu} P_\nu) |\Phi\rangle = 0, \quad n > 0; \quad (16.30)$$

$$L_0 |\Phi\rangle = \left(\Lambda_0 - \frac{1}{2\pi\gamma} [P^2 - P^\mu (f^2)_{\mu\nu} P^\nu] \right) |\Phi\rangle = \alpha(0) |\Phi\rangle, \quad (16.31)$$

где $\Lambda_n = (-1/2) \sum_{m \neq 0, n} : \alpha_n - m \alpha_m : \dots$. Операторы, входящие в уравнения

(16.29) – (16.31), образуют замкнутую алгебру, т.е. их коммутаторы в слабом смысле [26] равны нулю. Таким образом, эта система связей не противоречива.

С помощью условия (16.31), записанного в системе, где $P = 0$, формулу для квадрата массы струны во внешнем электромагнитном поле можно представить так:

$$M^2 = P_0^2 = \frac{2\pi\gamma}{1 - (gE/\gamma)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n : \alpha_n^+ \alpha_n : + m_0^2, \quad (16.32)$$

где

$$m_0^2 = -2\pi\gamma \alpha(0) / (1 - (gE/\gamma)^2).$$

Знак m_0^2 определяется из следующих рассуждений. Оператор P_0^2 в системе центра масс струны имеет, очевидно, положительный спектр,

а собственные значения N оператора $\sum_{n=1}^{\infty} n : \alpha_n^+ \alpha_n :$ могут быть равны

любому целому положительному числу $N = 0, 1, 2, \dots$. Если $(gE/\gamma)^2 < 1$, то, действуя левой и правой частями равенства (16.32) на $|\Phi\rangle_{\text{см}}$, получаем условие $m_0^2 > 1$, или $\alpha(0) < 1$, т.е. струна не имеет тахионных состояний. Если же $(gE/\gamma)^2 > 1$, то это ведет к требованию

$$m_0^2 > 2\pi\gamma N / |1 - (gE/\gamma)^2|,$$

которому нельзя удовлетворить никаким конечным значениям m_0^2 , так как N может быть сколь угодно велико. Таким образом, приходим к выводу, полученному ранее в нековариантном формализме, о том,

что релятивистскую струну во внешнем электромагнитном поле можно рассматривать в ортогональной калибровке только, когда $(gE/\gamma)^2 < 1$.

Из формулы (16.32) следует, что оператор M^2 имеет эквидистантный спектр, но расстояние между его уровнями увеличилось в $[1 - (gE/\gamma)^2]^{-1}$ раз по сравнению со свободным случаем.

Таким образом, метод Рорлиха позволяет построить квантовую теорию релятивистской струны, взаимодействующей с постоянным однородным электромагнитным полем, которая релятивистски инвариантна и не имеет тахионных состояний.

На квантовании этой модели нековариантным методом [64] останавливаться не будем, так как оно проводится в полной аналогии с теорией свободной струны.

Плоская моноэнергетическая волна. Точное решение уравнений движения было получено для релятивистской струны в поле плоской моноэнергетической электромагнитной волны [65]. Не приводя решение явно, отметим лишь его характерные особенности. Концы струны, как и в свободном случае, движутся со скоростью света. Решение имеет резонансный характер. Условие возникновения резонанса $2kP = n$, где k — волновой вектор электромагнитного поля; P — полный импульс струны; n — любое целое число. Массовый спектр струны остается таким же, как и в случае свободной струны.

17. Ограниченный класс движений струны с массами и зарядами на концах в постоянном однородном электромагнитном поле

Полное действие струны с зарядами и массами на концах [66]

$$S = -\gamma \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} + g \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma x'_\mu \dot{x}_\nu F^{\mu\nu}(x) - m \sum_{i=1}^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}^2(\tau, \sigma_i)}, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \pi \quad (17.1)$$

приводит к следующим граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\dot{x}_\nu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \right) &= \gamma x'_\nu + g F_{\nu\mu} \dot{x}^\mu, \quad \sigma = 0, \\ m \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\dot{x}_\nu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \right) &= -\gamma x'_\nu - g F_{\nu\mu} \dot{x}^\mu, \quad \sigma = \pi. \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

Уравнения движения и условия ортогональной калибровки остаются по-прежнему такими же, как и в свободном случае (3.19), (3.21).

Найти классическое решение данной задачи удастся для постоянного однородного электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = \text{const}$ и только для таких движений струны, когда τ есть собственное время концов струны (12.8).

Граничные условия (17.2) в этом случае линейризуются:

$$\dot{x}'_\nu = q(x'_\nu + f_{\nu\mu} \dot{x}^\mu), \quad \sigma = 0; \quad \dot{x}'_\nu = -q(x'_\nu + f_{\nu\mu} \dot{x}^\mu), \quad \sigma = \pi, \quad (17.3)$$

где $f_{\mu\nu} = gF_{\mu\nu}/\gamma$; $q = \gamma/m^2$.

Разделяя переменные $x_\mu(\tau, \sigma) = \exp(-i\omega\tau) v_\mu(\sigma)$, приходим к следующей краевой задаче для функций $v_\mu(\sigma)$:

$$\left. \begin{aligned} v_\mu''(\sigma) + \omega^2 v_\mu(\sigma) &= 0; \\ \omega^2 v_\mu(\pi) &= -q[v_\mu'(0) - i\omega f_{\mu\nu} v^\nu(0)]; \\ \omega^2 v_\mu(\pi) &= q[v_\mu'(\pi) - i\omega f_{\mu\nu} v^\nu(\pi)]. \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

Частоты ω_n определяются из трансцендентного уравнения

$$\text{tg}(\pi\omega_n) = 2q\omega_n/(\omega_n^2 - q^2 - a^2), \quad (17.5)$$

где

$$2a^2 = I_1 \pm \sqrt{I_1^2 + 4I_2}; \quad I_1 = g^2 m^{-4} (H^2 - E^2); \quad I_2 = g^4 m^{-8} (EH)^2$$

Как и в случае струны с массами на концах, частоты ω_n располагаются симметрично относительно нуля, поэтому их можно пронумеровать так, что $\omega_0 = 0$; $\omega_n = -\omega_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Для $v_\mu(\sigma)$ получаем

$$v_{n\mu} = a_n^\nu [g_{\mu\nu} \cos(\omega_n \sigma) - \left(\frac{\omega_n}{q} - if \right)_{\mu\nu} \sin(\omega_n \sigma)], \quad (17.6)$$

где новые коэффициенты a_n^ν удовлетворяют уравнениям

$$(a^2 + q^2 f^2)_{\mu\nu} a_n^\nu = 0.$$

Определитель этой системы уравнений тождественно равен нулю, поэтому есть $4 - r$ линейно независимых решений ϵ_μ^i , $i = 1, 2, \dots, 4 - r$, где r — ранг матрицы $(a^2 + q^2 f^2)_{\mu\nu}$. Можно показать, что $r = 2$, кроме случая, когда поля E и H равны и перпендикулярны друг другу ($E^2 - H^2 = 0$, $EH = 0$). Здесь $r = 1$.

Таким образом, для $a_{n\mu}$ имеем разложение

$$a_{n\mu} = \sum_{i=1}^{4-r} C_n^i \epsilon_\mu^i. \quad (17.7)$$

Теперь решение $x_\mu(\tau, \sigma)$ можно представить в виде

$$x^\mu(\tau, \sigma) = [(1 - f^2)^{-1}]^{\mu\nu} Q_\nu + \frac{q(P^\mu \tau - f^{\mu\nu} P_\nu \sigma)}{\gamma(2 + \pi q)} +$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{i=1}^{4-r} \epsilon_{\nu}^i \sum_{n \neq 0} C_n^i \frac{\exp}{\omega_n} (-i\omega_n r) [g^{\mu\nu} \cos(\omega_n \sigma) - \left(\frac{\omega_n}{q} g^{\mu\nu} - i f^{\mu\nu} \right) \sin(\omega_n \sigma)]. \quad (17.8)$$

Из разложения (17.8) следует, что возбуждения струны в рассматриваемой задаче обладают свойством, аналогичным свойству поляризации электромагнитного поля. Число различных состояний "поляризации" для возбуждений струны всегда меньше размерности пространства-времени, в котором она движется. Это означает уменьшение числа внутренних степеней свободы релятивистской струны с зарядами и массами на концах, помещенной в постоянное однородное электромагнитное поле.

Если массы концов струны устремить к нулю, то $\omega_n \rightarrow n$ и разложение (17.8) переходит в решение для струны во внешнем поле (16.5). С другой стороны, при $f_{\mu\nu} = 0$ из (17.8) получаем решение для струны с массами на концах (12.12).

Из дополнительных условий (3.21) и (12.8) следуют ограничения на амплитуды a_n , аналогичные (12.14), (12.15).

Для квадрата массы струны получаем выражение

$$M^2 = P^2 = -\frac{\gamma}{2} \left(\frac{2}{q} + \pi \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + 4m^2 \left(1 + \frac{\pi q}{2} \right)^2 = -\gamma \left(\frac{2}{q} + \pi \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n a_n^+ a_n + 4m^2 \left(1 + \frac{\pi q}{2} \right)^2, \quad (17.9)$$

где, как обычно, $a_n = a_n / \sqrt{\omega_n}$. Эта формула по внешнему виду совпадает с соответствующим выражением (12.17) в случае струны с массами на концах. Различие заключается в уравнениях, определяющих собственные частоты струны.

Найденное классическое решение показывает, что введение зарядов и масс в модель релятивистской струны существенно влияет на массовый спектр системы. Кроме того, интересна возможность классифицировать возбуждения струны в этом случае по состояниям, аналогичным состояниям поляризации классического электромагнитного поля.

18. Общие сведения из теории поверхностей

Принципиальные трудности, возникшие при построении квантовой теории релятивистской струны (нефизическая размерность пространства времени, тахионные состояния), стимулировали поиски нестандартных подходов в этой модели. Один из таких подходов — геометрический — основывается на описании мировой поверхности релятивистской струны дифференциальными формами, удовлетворяющими условиям интегрируемости, которые представляют собой нелинейные уравнения в частных производных Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи [67]. В геометрическом подходе эти уравнения рассматриваются как уравнения движения, задающие динамику струны. Замечательным свойством этих уравнений в теории релятивистской струны является возможность построить их общее решение [68]. Простейшие из этих уравнений — нелинейное уравнение Лиувилля и упрощенная система двух нелинейных уравнений Лунда — Редже. Уравнение Лиувилля возникает помимо теории релятивистской струны при исследовании инстантонных решений в неабелевых калибровочных теориях, а система Лунда — Редже представляет интерес для нелинейной двумерной сигма-модели с группой симметрии $SO(4)$. Геометрический подход в теории релятивистской струны приводит к новым системам нелинейных уравнений, для которых можно указать алгоритм построения общих решений.

Прежде чем переходить к квантованию релятивистской струны в рамках геометрического подхода, необходимо исследовать на классическом уровне нелинейные уравнения, описывающие динамику струны в данном подходе. Этому и посвящена в основном данная глава.

Пусть имеется некоторое n -мерное плоское пространство с произвольной сигнатурой метрики, координаты которого будем обозначать так: x^μ , $\mu = 0, 1, \dots, n-1$. Если в этом пространстве задана m -мерная поверхность ($m \leq n$), то это означает, что задан набор из n функций от m переменных u^1, \dots, u^m :

$$x^\mu(u^1, u^2, \dots, u^m), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (18.1)$$

причем

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial x^\mu}{\partial u^i} \right\| \equiv \text{rank} \left\| x_{,i}^\mu \right\| = m. \quad (18.2)$$

В этом случае говорят о параметрическом задании m -мерной поверхности, и параметры u^1, u^2, \dots, u^m играют роль криволинейных координат.

$$+ \frac{i}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{i=1}^{4-r} \epsilon_{\nu}^i \sum_{n \neq 0} C_n^i \frac{\exp}{\omega_n} (-i\omega_n \tau) [g^{\mu\nu} \cos(\omega_n \sigma) - \left(\frac{\omega_n}{q} g^{\mu\nu} - i f^{\mu\nu} \right) \sin(\omega_n \sigma)]. \quad (17.8)$$

Из разложения (17.8) следует, что возбуждения струны в рассматриваемой задаче обладают свойством, аналогичным свойству поляризации электромагнитного поля. Число различных состояний "поляризации" для возбуждений струны всегда меньше размерности пространства-времени, в котором она движется. Это означает уменьшение числа внутренних степеней свободы релятивистской струны с зарядами и массами на концах, помещенной в постоянное однородное электромагнитное поле.

Если массы концов струны устремить к нулю, то $\omega_n \rightarrow n$ и разложение (17.8) переходит в решение для струны во внешнем поле (16.5). С другой стороны, при $f_{\mu\nu} = 0$ из (17.8) получаем решение для струны с массами на концах (12.12).

Из дополнительных условий (3.21) и (12.8) следуют ограничения на амплитуды a_n , аналогичные (12.14), (12.15).

Для квадрата массы струны получаем выражение

$$M^2 = P^2 = -\frac{\gamma}{2} \left(\frac{2}{q} + \pi \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + 4m^2 \left(1 + \frac{\pi q}{2} \right)^2 = -\gamma \left(\frac{2}{q} + \pi \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n a_n^+ a_n + 4m^2 \left(1 + \frac{\pi q}{2} \right)^2, \quad (17.9)$$

где, как обычно, $a_n = a_n / \sqrt{\omega_n}$. Эта формула по внешнему виду совпадает с соответствующим выражением (12.17) в случае струны с массами на концах. Различие заключается в уравнениях, определяющих собственные частоты струны.

Найденное классическое решение показывает, что введение зарядов и масс в модель релятивистской струны существенно влияет на массовый спектр системы. Кроме того, интересна возможность классифицировать возбуждения струны в этом случае по состояниям, аналогичным состояниям поляризации классического электромагнитного поля.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

18. Общие сведения из теории поверхностей

Принципиальные трудности, возникшие при построении квантовой теории релятивистской струны (нефизическая размерность пространства времени, тахионные состояния), стимулировали поиски нестандартных подходов в этой модели. Один из таких подходов — геометрический — основывается на описании мировой поверхности релятивистской струны дифференциальными формами, удовлетворяющими условиям интегрируемости, которые представляют собой нелинейные уравнения в частных производных Гаусса, Петерсона — Кодаци и Риччи [67]. В геометрическом подходе эти уравнения рассматриваются как уравнения движения, задающие динамику струны. Замечательным свойством этих уравнений в теории релятивистской струны является возможность построить их общее решение [68]. Простейшие из этих уравнений — нелинейное уравнение Лиувилля и упрощенная система двух нелинейных уравнений Лунда — Редже. Уравнение Лиувилля возникает помимо теории релятивистской струны при исследовании инстантонных решений в неабелевых калибровочных теориях, а система Лунда — Редже представляет интерес для нелинейной двумерной сигма-модели с группой симметрии $SO(4)$. Геометрический подход в теории релятивистской струны приводит к новым системам нелинейных уравнений, для которых можно указать алгоритм построения общих решений.

Прежде чем переходить к квантованию релятивистской струны в рамках геометрического подхода, необходимо исследовать на классическом уровне нелинейные уравнения, описывающие динамику струны в данном подходе. Этому и посвящена в основном данная глава.

Пусть имеется некоторое n -мерное плоское пространство с произвольной сигнатурой метрики, координаты которого будем обозначать так: x^μ , $\mu = 0, 1, \dots, n-1$. Если в этом пространстве задана m -мерная поверхность ($m \leq n$), то это означает, что задан набор из n функций от m переменных u^1, \dots, u^m :

$$x^\mu(u^1, u^2, \dots, u^m), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (18.1)$$

причем

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial x^\mu}{\partial u^i} \right\| \equiv \text{rank} \left\| x^\mu_{,i} \right\| = m. \quad (18.2)$$

В этом случае говорят о параметрическом задании m -мерной поверхности, и параметры u^1, u^2, \dots, u^m играют роль криволинейных координат.

нат на ней. Функции (18.1) дают исчерпывающую информацию о поверхности [69].

Однако в ряде случаев не требуется такое детальное описание поверхности, например при исследовании сразу целого класса поверхностей, характеризуемых каким-либо общим признаком, или же при изучении локальных свойств поверхности в окрестности заданной точки. Для этих целей и во многих других случаях удобно задавать поверхность ее основными дифференциальными формами.

В теории поверхностей используют квадратичные и линейные дифференциальные формы. Первые были введены в геометрию Гауссом, вторые — Дарбу и Картаном. Эти формы естественно возникают при рассмотрении подвижного базиса на поверхности.

В каждой точке поверхности с координатами $\{u^1, \dots, u^m\}$ построим ортонормированный базис, образованный набором из n векторов:

$$e_a^\mu (u^1, u^2, \dots, u^m), \quad a = 1, 2, \dots, n; \quad (18.3)$$

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} e_a^\mu e_b^\mu c_\mu = \epsilon_a \delta_{ab}, \quad \epsilon_a = \pm 1, \quad c_\mu = \pm 1 \quad (18.4)$$

[суммирования по a в (18.4) нет], причем первые m векторов e_i^μ , $i = 1, \dots, m$ — касательные к поверхности (18.1), а остальные $n-m$ векторов e_a^μ , $a = m+1, \dots, n$ — нормали к этой поверхности. Множители c_μ и ϵ_a в (18.4) учитывают сигнатуру метрики объемлющего пространства. Начало базиса (18.3) поместим в точку $x^\mu(u^1, \dots, u^m)$. Напомним, что набор из m касательных к поверхности (18.1) векторов дают частные производные $x^\mu_{,i}$, $i = 1, 2, \dots, m$. В общем случае эти векторы не ортонормированные, но в силу (18.2) они заведомо линейно независимы в каждой точке поверхности. Поэтому базис (18.3) всегда можно построить.

Оказывается, что если в каждой точке поверхности известен такой базис, то по нему можно восстановить и поверхность. Если нас интересуют локальные свойства поверхности, то достаточно найти дифференциальные уравнения, определяющие изменение базиса (18.3) при движении его начала $x^\mu(u^1, \dots, u^m)$ по поверхности. Эти уравнения описывают изменение радиус-вектора поверхности:

$$dx^\mu = \omega^i e_i^\mu, \quad i = 1, \dots, m, \quad (18.5)$$

и изменение базисных ортов e_a^μ :

$$de_a^\mu = \Omega_a^b e_B^\mu \quad (18.6)$$

при движении базиса $\{x^\mu, e_a^\mu, a = 1, \dots, n\}$ по поверхности. Здесь ω^i и Ω_a^b — линейные дифференциальные формы:

$$\omega^i = \omega_j^i(u^1, \dots, u^m) du^j, \quad (18.7)$$

$$\Omega_a^b = \Omega_a^B |_{|k} (u^1, \dots, u^m) du^k, \quad i, j, k = 1, \dots, m, \quad a, b = 1, \dots, n. \quad (18.8)$$

По повторяющимся индексам, как всегда, предполагается суммирование в соответствующих пределах. Дифференцирование соотношений (18.4) дает

$$\Omega_a^b \epsilon_b + \Omega_b^a \epsilon_a = 0, \quad a, b = 1, \dots, n$$

(по a и b суммирования нет).

Уравнения (18.5) и (18.6) являются системой линейных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$d\theta_r(u) = \sum_{i=1}^m \psi_{rs}^i(u) \theta_s(u) du^i \quad (18.9)$$

или в эквивалентной записи

$$\partial \theta_r / \partial u^i = \psi_{rs}^i(u) \theta_s(u), \quad i = 1, \dots, m, \quad (18.10)$$

где $\theta_r(u)$ — набор переменных $\{x^\mu, e_a^\mu\}$. На функции $\theta_r(u)$ наложены условия (18.4). Поэтому уравнения (18.9), (18.10) и (18.4) являются системой смешанного типа. Условия интегрируемости уравнений (18.10) отражают тот факт, что

$$\theta_{r,ij} = \theta_{r,ji}, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (18.11)$$

Эти условия приводят к следующим требованиям на матрицы коэффициентов ψ^i в уравнениях (18.10):

$$\psi_{,j}^i - \psi_{,i}^j + [\psi^i, \psi^j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (18.12)$$

Чтобы переписать условия интегрируемости (18.11) в терминах дифференциальных форм ω^i и Ω_a^b , удобно использовать формализм внешнего дифференцирования [17]. Нам потребуется только правило внешнего дифференцирования линейных форм. Пусть a — линейная дифференциальная форма в базисе $\{du^1, \dots, du^m\}$:

$$a = a_i(u) du^i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда внешний дифференциал этой формы da определится так:

$$da = da_i \wedge du^i = \frac{\partial a_i(u)}{\partial u^j} du^j \wedge du^i = \sum_{i < j} (a_{i,j} - a_{j,i}) du^j \wedge du^i, \quad (18.13)$$

где \wedge — знак внешнего произведения;

$$du^i \wedge du^j = -du^j \wedge du^i. \quad (18.14)$$

В результате внешнего дифференцирования линейной формы a получаем внешнюю дифференциальную форму второй степени, или 2-форму. Дальнейшее внешнее дифференцирование дает формы более высокой степени. Функция $f(u^1, \dots, u^m)$ называется дифференциальной формой нулевой степени. Ее внешний дифференциал совпадает с обычным дифференциалом $df = f_{,i} du^i$.

Используя (18.13), легко убедиться, что

$$d^2 f \equiv ddf = 0, \quad (18.15)$$

так как $f_{,ij} = f_{,ji}$. Из (18.13) и (18.14) следует правило дифференцирования внешнего произведения двух форм. Если a и b — внешние дифференциальные формы степени p и q , соответственно, то

$$d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^p a \wedge db. \quad (18.16)$$

Нам потребуется частный случай формулы (18.16), когда $p = 1, q = 0$, т.е. b — просто функция $f(u^1, \dots, u^m)$:

$$d(a \cdot f) = da \cdot f - a \wedge df. \quad (18.17)$$

Условия интегрируемости уравнений (18.9), которые даются равенством (18.11), на языке внешних форм записываются, согласно (18.15), в следующем виде:

$$d^2 \theta_r = dd\theta_r = 0. \quad (18.18)$$

Возвратившись к уравнениям (18.5) и (18.6), можно переписать условия их интегрируемости (18.18) так:

$$d^2 x^\mu = ddx^\mu = 0, \quad d^2 e_a^\mu = dd e_a^\mu = 0. \quad (18.19)$$

Из (18.19) с учетом (18.5), (18.6) и (18.17) получаем:

$$\omega^j \wedge \Omega_j^a = 0; \quad (18.20)$$

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \Omega_j^i; \quad (18.21)$$

$$d\Omega_a^b = \Omega_a^c \wedge \Omega_c^b. \quad (18.22)$$

$$i, j, k, \dots = 1, \dots, m; \quad a, b, c, \dots = 1, \dots, n; \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots = m+1, \dots, n.$$

В покомпонентной записи эти уравнения выглядят так:

$$\omega_i^j \Omega_j^a |k - \omega_k^j \Omega_j^a |i = 0; \quad (18.23)$$

$$\omega_{k,l}^i - \omega_{l,k}^i = \omega_j^i \Omega_j^i |k - \omega_k^j \Omega_j^i |l; \quad (18.24)$$

$$\Omega_a^b |i,k - \Omega_a^b |k,i = \Omega_a^c |k \Omega_c^b |i - \Omega_a^c |i \Omega_c^b |k. \quad (18.25)$$

Фактически уравнения (18.23)–(18.25) представляют собой иную запись уравнений (18.12) с учетом явного вида матриц ψ .

В курсах дифференциальной геометрии [69, 70] доказывается, что система уравнений смешанного типа (18.5), (18.6) и (18.4) при выполнении условий интегрируемости (18.20)–(18.22) имеет решение $\{x^\mu(u^1, \dots, u^m), e_a^\mu(u^1, \dots, u^m)\}$, зависящее от $n(n+1)/2$ констант интегрирования, где n — размерность объемлющего пространства. Различный выбор констант интегрирования соответствует сдвигам и поворотам поверхности в пространстве как целого.

Таким образом, имеет место следующая *основная теорема* в теории поверхностей (теорема О. Бонне). Дифференциальные формы ω^i, Ω_a^b , удовлетворяющие условиям интегрируемости (18.23)–(18.25), определяют поверхность $x^\mu(u^1, \dots, u^m)$ с точностью до преобразований из группы движений объемлющего пространства.

Помимо линейных форм в теории поверхностей, начиная с работ Гаусса, используются *квадратичные дифференциальные формы*. Первая квадратичная форма g_{ij} задает *внутреннюю геометрию* поверхности:

$$dx^\mu dx^\mu c_\mu = x_{,i}^\mu x_{,j}^\mu c_\mu du^i du^j = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u) du^i du^j, \quad (18.26)$$

$$g_{ij} = x_{,i}^\mu x_{,j}^\mu c_\mu.$$

Вторые квадратичные формы $b_{\alpha|ij}$ определяют *внешнюю геометрию* поверхности и задаются формулой

$$\nabla_j x_{,i}^\mu = \sum_{\alpha=m+1}^n \epsilon_\alpha b_{\alpha|ij} e_\alpha^\mu, \quad (18.27)$$

где ∇_j — *ковариантное дифференцирование* по отношению к метрике g_{ij} :

$$\nabla_j x_{,i}^\mu = x_{,ij}^\mu - \Gamma_{ij}^k x_{,k}^\mu. \quad (18.28)$$

Здесь Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля для g_{ij} [69]:

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl} \Gamma_{l,ij} = (g^{kl}/2) (g_{li,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}).$$

Первая (g_{ij}) и вторые $(b_{\alpha|ij})$ квадратичные формы задают движение по поверхности базиса, образованного набором из m касательных векторов $x_{,i}^\mu, i = 1, \dots, m$ и $n-m$ нормальными $e_\alpha^\mu, \alpha = m+1, \dots, n$ из формулы (18.3). Движение этого базиса описывается уравнениями (18.27) и аналогичными уравнениями на нормали $e_\alpha^\mu, \alpha = m+1, \dots, n$, которые в терминах g_{ij} и $b_{\alpha|ij}$ имеют вид

$$\partial e_\alpha^\mu / \partial u^i = -b_{\alpha|ij} g^{jk} x_{,k}^\mu + \sum_\beta \epsilon_\beta \nu_{\beta\alpha} e_\beta^\mu. \quad (18.29)$$

Здесь дополнительно к квадратичным дифференциальным формам g_{ij} и $b_{\alpha|ij}$ введены так называемые векторы кручения $\nu_{\beta\alpha|i} = -\nu_{\alpha\beta|i}$, $\alpha, \beta = m+1, \dots, n, i = 1, \dots, m$.

Условия интегрируемости линейных уравнений (18.27), (18.29)

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial u^j \partial u^i}; \quad \frac{\partial^2 e_a^\mu}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 e_a^\mu}{\partial u^j \partial u^i}$$

легко выписать, пользуясь известным выражением для коммутатора двух ковариантных производных [69]:

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) \lambda_k = R_{kij}^l \lambda_l. \quad (18.30)$$

Здесь λ_k — произвольный ковариантный вектор, R_{kij}^l — тензор кривизны Римана—Кристоффеля для метрики g_{ij}

$$R_{ijkl} = (1/2)(g_{il,jk} + g_{jk,il} - g_{ik,jl} - g_{jl,ik}) + g^{rs}(\Gamma_{s,jk} \Gamma_{r,il} - \Gamma_{s,il} \Gamma_{r,jk}).$$

Условия интегрируемости даются уравнениями Гаусса

$$R_{ijkl} = \sum_{\alpha=m+1}^n \epsilon_\alpha (b_{\alpha|ik} b_{\alpha|jl} - b_{\alpha|il} b_{\alpha|jk}), \quad (18.31)$$

Петерсона—Кодацци

$$\nabla_k b_{\alpha|ij} - \nabla_j b_{\alpha|ik} = \sum_{\beta} \epsilon_\beta (\nu_{\beta\alpha|k} b_{\beta|ij} - \nu_{\beta\alpha|j} b_{\beta|ik}) \quad (18.32)$$

и Риччи

$$\nu_{\beta\alpha|j,k} - \nu_{\beta\alpha|k,j} + \sum_{\gamma} \epsilon_\gamma (\nu_{\gamma\beta|j} \nu_{\gamma\alpha|k} - \nu_{\gamma\beta|k} \nu_{\gamma\alpha|j}) + g^{lm} (b_{\beta|lj} b_{\alpha|mk} - b_{\beta|lk} b_{\alpha|mj}) = 0. \quad (18.33)$$

Таким образом, если набор функций g_{ij} , $b_{\alpha|ij}$ и $\nu_{\alpha\beta|i}$ удовлетворяет уравнениям (18.31)–(18.33), то он определяет поверхность $x^\mu(u^1, \dots, u^m)$ с точностью до движения ее в пространстве как целого.

Уравнения (18.31)–(18.33) полностью эквивалентны условиям интегрируемости (18.23)–(18.25) и представляют собой фактически запись этих условий в терминах других переменных.

Между линейными и квадратичными дифференциальными формами поверхности имеет место следующая связь:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^m \epsilon_k \omega_i^k \omega_j^k; \quad (18.34)$$

$$b_{\alpha|ij} = - \sum_{k=1}^m \epsilon_k \omega_i^k \Omega_{\alpha}^{\circ k} \cdot |j; \quad (18.35)$$

$$\nu_{\gamma\alpha|i} = \epsilon_\gamma \Omega_{\alpha}^{\circ \gamma} \cdot |i, \quad i, j, k, l, \dots = 1, \dots, m, \\ \alpha, \beta, \gamma, \dots = m+1, \dots, n. \quad (18.36)$$

В модели релятивистской струны фигурируют двумерные поверхности, вложенные в n -мерное псевдоевклидово пространство с сигнатурой метрики $(+ - - \dots)$. Поэтому в рассматриваемом случае $\epsilon_1 = -\epsilon_s = 1, s = 2, \dots, n, c_0 = -c_r = 1, r = 1, \dots, n-1$.

Двумерные поверхности, по сравнению с подмногообразиями большей размерности, являются выделенным случаем, так как уравнения вложения (18.23)–(18.25) или (18.31)–(18.33) оказываются наиболее простыми. На двумерной поверхности всегда можно выбрать криволинейную систему координат $\{u^1, u^2\}$, в которой метрический тензор g_{ij} будет иметь конформно-плоский вид:

$$g_{11} = \pm g_{22}, \quad g_{12} = g_{21} = 0. \quad (18.37)$$

Более того, тензор кривизны R_{ijkl} для двумерной поверхности имеет всего одну существенную компоненту $-R_{1212}$.

19. Минимальные поверхности

Минимальные поверхности [69, 71, 72] характеризуются обращением в нуль *средней кривизны* по направлению всех нормалей $e_a^\mu(u^1, u^2)$, $a = 3, \dots, n$, к поверхности в данной точке $\{u^1, u^2\}$. Средняя кривизна h_α по направлению e_a^μ есть шпур соответствующего тензора второй квадратичной формы $b_{\alpha|ij}$:

$$h_\alpha = b_{\alpha|ij} g^{ij}. \quad (19.1)$$

Таким образом, для минимальной поверхности

$$h_\alpha = 0, \quad \alpha = m+1, \dots, n. \quad (19.2)$$

История минимальных поверхностей восходит к работам Лагранжа (1760). Век спустя, в 1864г., бельгийский физик Плато установил, что мыльные пленки, натянутые на замкнутый проволочный контур, образуют поверхность, площадь которой минимальна по сравнению с любой другой поверхностью, ограниченной тем же контуром. Математическая задача нахождения минимальной поверхности, покрывающей заданный контур, получила название *проблемы Плато*. Дарбу охарактеризовал эту проблему как великую задачу, завещанную физикой геометрии. Трудно найти другую математическую задачу, которая привлекала бы столько выдающихся ученых. Ею занимались Эйлер, Лаг-

ранж, Монж, Лежандр, Пуассон, Риман, Вейерштрасс, Бонне, Бельтрами, Ли, Дарбу, Шварц, Бьянки и многие другие. В настоящее время эта область исследований по-прежнему интересует математиков [71, 72]. Вероятно, еще рано говорить о "закончившейся бурной молодости" этой проблемы и начале ее "усталой старости" [73].

Задачу нахождения минимальной поверхности можно сформулировать как вариационную задачу для функционала

$$S = \int d^m u |g|^{1/2}, \quad (19.3)$$

где $g = \det \|g_{ij}\|$, $g_{ij}(u)$ — индуцированная метрика (18.26) на поверхности $x^\mu(u^1, \dots, u^m)$. Действительно, можно показать [69], что из уравнений Эйлера для (19.3) следуют условия (19.2)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta x_\mu} &= \sqrt{|g|} \nabla^i \nabla_i x^\mu = \sqrt{|g|} g^{ij} \nabla_i x^\mu_{,j} = \\ &= \sqrt{|g|} \sum_{\alpha=m+1}^n \epsilon_\alpha g^{ij} b_{\alpha|ij} e_\alpha^\mu = 0. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Здесь было использовано известное правило дифференцирования определителя [151] $dg = dg_{ik} g^{ik} g = -g_{ik} dg^{ik} g$, из которого непосредственно следует, что

$$\frac{\partial g}{\partial x_{\mu,i}} = \frac{\partial g_{lm}}{\partial x_{\mu,i}} g^{lm} g.$$

Кроме того, мы учли равенство (18.26) и определение (18.27) для коэффициентов вторых квадратичных форм $b_{\alpha|ij}$. Так как нормали e_α^μ , $\alpha = m+1, \dots, n$, линейно независимы, то

$$h_\alpha = g^{ij} b_{\alpha|ij} = 0, \quad \alpha = m+1, \dots, n. \quad (19.5)$$

Из уравнений (19.4) следует, что координаты минимальной поверхности $x^\mu(u^1, \dots, u^m)$ являются гармоническими функциями параметров u^1, \dots, u^m :

$$\nabla^i \nabla_i x^\mu(u^1, \dots, u^m) = 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (19.6)$$

где

$$\nabla^i \nabla_i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \quad (19.7)$$

— оператор Лапласа — Бельтрами для метрики g_{ij} .

Из (19.4) также видно, что среди n уравнений (19.6), как минимум m уравнений являются следствием остальных. К этому же выводу мож-

но прийти, применяя вторую теорему Нетер [74] к функционалу (19.3), который инвариантен относительно преобразований

$$\bar{u}^i = f^i(u^1, \dots, u^m), \quad i = 1, \dots, m, \quad (19.8)$$

с m произвольными функциями f^i . Действительно, проектируя (18.4) и (18.6) на $x^\mu_{,j}$, получаем m тождеств Нетер:

$$c_\mu x^\mu_{,j} \nabla^i \nabla_i x^\mu \equiv 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (19.9)$$

Уравнения (19.6) на координаты минимальной поверхности $x^\mu(u^1, \dots, u^m)$ — в общем случае нелинейные уравнения в частных производных второго порядка, так как метрический тензор g_{ij} определяется через x^μ согласно (18.26). Но если минимальная поверхность двумерна, то на ней, как и на всякой двумерной поверхности, можно выбрать конформно-плоскую систему координат u^1, u^2 (18.37), в которой уравнения (19.6) линеаризуются:

$$x^\mu_{,11} \pm x^\mu_{,22} = 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1. \quad (19.10)$$

В теории релятивистской струны, как это было показано в гл. 1, следует рассматривать гиперболическую метрику g_{ij} , поэтому в (18.37) и в (19.10) возьмем нижний знак.

Таким образом, в нашем случае координаты мировой поверхности струны будут подчиняться следующим уравнениям:

$$x^\mu_{,11} - x^\mu_{,22} = 0, \quad \mu = 0, \dots, n-1; \quad (19.11)$$

$$x^2_{,1} = g_{11} = -g_{22} = -x^2_{,2} = e^{-\varphi}; \quad g_{12} = c_\mu x^\mu_{,1} x^\mu_{,2} = 0. \quad (19.12)$$

Согласно материалу предыдущего параграфа, минимальную поверхность можно описывать или ее радиус-вектором $x^\mu(u^1, u^2)$, подчиняющимся уравнениям (19.11), (19.12), или набором переменных g_{ij} , $b_{\alpha|ij}$, $\nu_{\alpha\beta|i}$, которые удовлетворяют условиям минимальности (19.5) и уравнениям Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи (18.31) — (18.33). Зная решение (19.11) и (19.12), можно восстановить g_{ij} , $b_{\alpha|ij}$ и $\nu_{\alpha\beta|i}$ и получить решение соответствующих нелинейных уравнений в частных производных (18.31) — (18.33). При этом полученное решение уравнений Гаусса, Петерсона — Кодацци и Риччи будет общим, если представление для $x^\mu(u^1, u^2)$, удовлетворяющее (19.11) и (19.12), будет содержать достаточное число произвольных функций.

Оказывается, что для этой цели удобно ввести в объемлющем пространстве специальный базис [70, 75], образованный двумя изотропными векторами η_1^μ и η_2^μ , $\eta_i^2 = 0$, $i = 1, 2$, $(\eta_1 \eta_2) = 1$ и $n-2$ пространственно-подобными взаимно ортогональными единичными векторами η_α^μ , $\eta_\alpha^2 = -1$, причем $(\eta_1 \eta_\alpha) = (\eta_2 \eta_\alpha) = 0$, $(\eta_\alpha \eta_\beta) = 0$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 3, 4, \dots, n$. В этом базисе нелинейные условия (19.12) представляют

собой алгебраические уравнения на коэффициентные функции, которые просто разрешаются.

Прежде чем переходить к построению разложения для $x^\mu(u^1, u^2)$ в базисе $\{\eta_\alpha^\mu\}$, воспользуемся инвариантностью уравнений (19.11) и (9.12) при конформных преобразованиях параметров u^1, u^2

$$u^\pm = f_\pm(u^\pm); \quad u^\pm = u^1 \pm u^2 \quad (19.13)$$

с произвольными функциями f_\pm и наложим на координаты струны $x^\mu(u^1, u^2)$ дополнительно к (19.12) следующие условия [76]:

$$(x_{,11}^\mu \pm x_{,12}^\mu)^2 = -q_\pm^2, \quad (19.14)$$

где q_\pm^2 — произвольные положительные константы. Вместо (19.14) можно выбирать и другие условия. Одна из таких возможностей рассмотрена в § 22.

Построим теперь разложение для $x^\mu(u^1, u^2)$ в базисе $\{\eta_\alpha^\mu\}$. Пусть

$$x^\mu(u^1, u^2) = \psi_+^\mu(u^+) + \psi_-^\mu(u^-) \quad (19.15)$$

есть общее решение уравнений (19.11). Тогда в силу (19.12) $\psi_+^\mu(u^+)$ и $\psi_-^\mu(u^-)$ должны быть изотропными векторами

$$(\psi_\pm')^2 = 0. \quad (19.16)$$

Штрихом будем обозначать дифференцирование по аргументу функции. Чтобы удовлетворить (19.14), необходимо потребовать

$$(\psi_\pm'')^2 = -q_\pm^2/4. \quad (19.17)$$

Будем искать разложения для $\psi_\pm'(u^\pm)$ в следующем виде:

$$\psi_\pm'(u^\pm) = A_\pm(u^\pm) [\eta_1 + B_\pm(u^\pm)\eta_2 \pm \sum_{r=1}^{n-2} f_{\pm r}(u^\pm)\eta_{r+2}]. \quad (19.18)$$

Подставляя (19.18) в (19.16) и (19.17), получаем

$$A_\pm(u^\pm) = \frac{q_\pm}{2 \sqrt{\sum_{r=1}^{n-2} [f'_{\pm r}(u^\pm)]^2}}; \quad B_\pm(u^\pm) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n-2} f_{\pm s}^2(u^\pm). \quad (19.19)$$

Таким образом, имеем следующее представление для векторов $\psi_\pm'(u^\pm)$ [75, 76]:

$$\psi_\pm'(u^\pm) = \frac{q_\pm}{2 \sqrt{\sum_{r=1}^{n-2} [f'_{\pm r}(u^\pm)]^2}} \left[\eta_{1+} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n-2} f_{\pm s}^2(u^\pm) \eta_{2 \pm} \pm \sum_{p=1}^{n-2} f_{\pm p}(u^\pm) \eta_{p+2} \right]. \quad (19.20)$$

С помощью этих формул можно получить выражение для метрики двумерной минимальной поверхности в n -мерном псевдоевклидовом пространстве

$$e^\varphi = (g_{11})^{-1} = -(g_{22})^{-1} = (2\psi_+'(u^+) \psi_-'(u^-))^{-1} = \frac{4}{q_+ q_-} \frac{\sqrt{\sum_{r=1}^{n-2} [f'_{+r}(u^+)]^2 \sum_{s=1}^{n-2} [f'_{-s}(u^-)]^2}}{\sum_{p=1}^{n-2} [f_{+p}(u^+) + f_{-p}(u^-)]^2} \equiv \Lambda_{n-2}(u^1, u^2). \quad (19.21)$$

Таким образом, формулы (19.20) и (19.21) дают возможность выразить дифференциальные формы минимальной поверхности через $2(n-2)$ произвольных функций одной переменной.

20. Нелинейные уравнения в геометрической теории струны и их общие решения

Теперь перейдем к явному получению нелинейных уравнений, описывающих динамику струны в геометрическом подходе. Общие решения для них будут строиться с помощью разложений (19.20) и (19.21). Отметим сразу, что эти уравнения вовсе нетривиальны, т.е. они не сводятся подстановкой к линейным уравнениям в частных производных. Простейшее из них — нелинейное уравнение Лиувилля [68].

Рассмотрим уравнения (18.31) — (18.33) для двумерной минимальной поверхности в конформно-плоской системе координат (19.12). Условия минимальности (19.5) в этих координатах записываются так:

$$b_{\alpha|11} = b_{\alpha|22}, \quad \alpha = 3, \dots, n. \quad (20.1)$$

С помощью несложных преобразований из уравнений Петерсона—Кодацци (18.32) можно получить

$$\frac{\partial}{\partial u^\mp} \sum_{\alpha=3}^n (b_{\alpha|11} \pm b_{\alpha|12})^2 = 0. \quad (20.2)$$

С другой стороны, в силу (18.27)

$$\sum_{\alpha=3}^n (b_{\alpha|11} \pm b_{\alpha|12})^2 = -[\nabla_1(x_{,1}^{\mu} \pm x_{,2}^{\mu})]^2. \quad (20.3)$$

Это равенство можно продолжить дальше, если учесть явный вид символов Кристоффеля для метрики (19.12)

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\varphi_{,1}/2; \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = -\varphi_{,2}/2. \quad (20.4)$$

Действительно, подстановка (20.4) в (20.3) с учетом (19.14) дает

$$\sum_{\alpha=3}^n (b_{\alpha|11} \pm b_{\alpha|12})^2 = -[\nabla_1(x_{,1}^{\mu} \pm x_{,2}^{\mu})]^2 = -(x_{,11}^{\mu} \pm x_{,12}^{\mu})^2 = q_{\pm}^2. \quad (20.5)$$

Таким образом, условие (19.14) на координаты минимальной поверхности $x^{\mu}(u^1, u^2)$ согласуется с уравнениями (18.32).

Рассмотрим вначале простейший случай релятивистской струны в трехмерном пространстве Минковского. Уравнения Петерсона–Кодацци (18.32) дают

$$\left. \begin{aligned} b_{11,1} - b_{12,2} = 0; \quad b_{11,2} - b_{12,1} = 0; \\ b_{11} + b_{12} = q_+(u^+); \quad b_{11} - b_{12} = q_-(u^-); \quad u^{\pm} = u^1 \pm u^2. \end{aligned} \right\} \quad (20.6)$$

Без потери общности функции $q_{\pm}(u^{\pm})$ можно считать константами. Уравнение Гаусса (18.31) сводится к уравнению Лиувилля

$$\varphi_{,11} - \varphi_{,22} = 2q_+q_-e^{\varphi}. \quad (20.7)$$

Здесь мы воспользовались следующей формулой для тензора кривизны в метрике (19.12) (см., например, [67]):

$$R_{1212} = -(1/2)e^{-\varphi}(\varphi_{,11} - \varphi_{,22}).$$

Представление (19.21) для метрического тензора минимальной поверхности с $n = 3$ дает хорошо известное [68, 70] общее решение уравнения Лиувилля (20.6)

$$e^{\varphi} = \Lambda_1 = \frac{4}{q_+q_-} \frac{f_+'(u^+)f_-'(u^-)}{[f_+'(u^+) + f_-'(u^-)]}. \quad (20.8)$$

Уравнение (20.6) должно быть дополнено соответствующими граничными условиями. В случае свободной струны из формул (3.24) и (19.12) получаем

$$\varphi(\tau, 0) = \varphi(\tau, \pi) = +\infty. \quad (20.9)$$

Для замкнутой струны согласно (3.26) и (3.29) функция $\varphi(\tau, \sigma)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\varphi(\tau, 0) = \varphi(\tau, 2\pi). \quad (20.10)$$

Чтобы получить граничные условия на $\varphi(\tau, \sigma)$ в теории струны с массами на концах, движущейся в трехмерном пространстве-времени, подставим в (12.7) дериационные формулы Гаусса (18.28):

$$x_{,11}^{\mu} = -(\varphi_{,1}/2)x_{,1}^{\mu} - (\varphi_{,2}/2)x_{,2}^{\mu} - b_{11}e^{\mu}.$$

Проекция граничных условий (12.7) на x^{μ} обращается в нуль, проекция на нормаль e^{μ} дает

$$b_{11}(\tau, \sigma_i) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (20.11)$$

Этому можно удовлетворить, учитывая (20.6), если положить $q_+(u^+) = q, q_-(u^-) = -q$. Наконец, проектируя (12.7) на x'^{μ} , получаем

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(\tau, 0) &= (2\gamma/m_1) \exp\{-\varphi(\tau, 0)/2\}; \\ \varphi'(\tau, \pi) &= -(2\gamma/m_2) \exp\{-\varphi(\tau, \pi)/2\}. \end{aligned} \right\} \quad (20.12)$$

Таким образом, в геометрическом подходе классическая динамика релятивистской струны, движущейся в трехмерном пространстве-времени, описывается одним нелинейным уравнением Лиувилля (20.7) для скалярной функции $\varphi(\tau, \sigma)$, подчиняющейся граничным условиям (20.9), (20.10) или (20.12). Это может служить основой для построения квантовой теории релятивистской струны, базирующейся не на векторных уравнениях (4.1)–(4.3), а на одном уравнении (20.7). Некоторые результаты, полученные в этой области, изложены в следующем параграфе.

Следует отметить, что нелинейное уравнение Лиувилля с граничными условиями типа (20.9) и (20.12) интенсивно исследовалось в связи с квантовой теорией релятивистской струны, предложенной А.М. Поляковым (см. § 30).

При увеличении размерности пространства-времени, в котором движется струна, резко увеличивается число уравнений в системе (18.31)–(18.33), причем число функций $g_{ij}, b_{\alpha|ij}, v_{\alpha\beta|i}$ превышает число уравнений. Однако эта система уравнений значительно упростится, если выбрать соответствующим образом подвижный базис на минимальной поверхности. Действительно, в выводе уравнений Гаусса, Петерсона–Кодацци и Риччи (18.31)–(18.33) ничего не изменится, если от базиса

$$x_{,1}^{\mu}, x_{,2}^{\mu}, e_3^{\mu}, e_4^{\mu}, \dots, e_n^{\mu} \quad (20.13)$$

перейти к новому базису, получающемуся из (20.13) вращением из группы $SO(1,1) \times SO(n-2)$, которое не перемешивает касательное

пространство поверхности $\{x_{,1}^\mu, x_{,2}^\mu\}$ с ее нормальным пространством $\{e_3^\mu, \dots, e_n^\mu\}$.

Если размерность объемлющего пространства $n \geq 4$, то в пространстве, нормальном к двумерной минимальной поверхности, есть два взаимно-ортогональных пространственноподобных вектора, которые естественно связаны с минимальной поверхностью [76]: $\nabla_1 x_{,1}^\mu$ и $\nabla_1 x_{,2}^\mu$. Вектор $\nabla_2 x_{,2}^\mu$, согласно (18.27) и (20.1), совпадает с $\nabla_1 x_{,1}^\mu$. Действительно, из равенства (20.5) при $q_+^2 = q_-^2 = q^2$ следует:

$$(\nabla_1 x_{,1} \cdot \nabla_1 x_{,2}) = 0. \quad (20.14)$$

Поэтому естественно направить две нормали к минимальной поверхности по векторам $\nabla_1 x_{,1}^\mu$ и $\nabla_1 x_{,2}^\mu$, например, так: e_3^μ по $\nabla_1 x_{,1}^\mu$, а e_4^μ по $\nabla_1 x_{,2}^\mu$. Тогда из (18.27) сразу получаем

$$b_{3|12} = b_{4|11} = b_{4|22} = b_{a|ij} = 0, \quad a = 5, \dots, n, \quad i, j = 1, 2. \quad (20.15)$$

Чтобы удовлетворить условию (20.5), можно положить

$$b_{3|11} = q \cos(\theta/2); \quad b_{4|12} = q \sin(\theta/2). \quad (20.16)$$

Уравнение Гаусса (18.31) принимает теперь вид

$$\varphi_{,11} - \varphi_{,22} = 2q^2 e^\varphi \cdot \cos \theta; \quad e^{-\varphi} = x_{,1}^2 = -x_{,2}^2, \quad (20.17)$$

причем это уравнение остается справедливым для любой размерности объемлющего пространства, в которое погружена мировая поверхность струны.

Через функцию $\theta(u^1, u^2)$ с помощью уравнений Петерсона-Кодацци (18.32) при $\alpha = 3, 4$ определяется вектор кручения $\nu_{34|i}, i = 1, 2$:

$$\nu_{34|1} = \theta_{,2}/2; \quad \nu_{34|2} = \theta_{,1}/2. \quad (20.18)$$

В четырехмерном пространстве-времени система (18.31) – (18.33) сводится к двум нелинейным уравнениям:

$$\varphi_{,11} - \varphi_{,22} = 2q^2 e^\varphi \cos \theta; \quad \theta_{,11} - \theta_{,22} = 2q^2 e^\varphi \sin \theta, \quad (20.19)$$

где функция $\varphi(u^1, u^2)$ определяет конформно-плоскую метрику на минимальной поверхности $g_{11} = -g_{22} = e^{-\varphi}, g_{12} = 0$, а $\theta(u^1, u^2)$ задает вторые квадратичные формы $b_{3|ij}$ и $b_{4|ij}$ ($i, j = 1, 2$) и вектор кручения $\nu_{34|i}$ по формулам (20.15), (20.16) и (20.18).

Специальный выбор нормалей e_3^μ и e_4^μ к минимальной поверхности позволил сразу получить из общей системы (18.31) – (18.33) систему из двух уравнений для двух функций φ и θ в отличие от [67, 77], где нормали e_3^μ и e_4^μ никак не фиксировались. В этих работах приходилось вводить вспомогательные функции α_\pm , которые входили в конечные уравнения только в виде разности $\theta = \alpha_+ - \alpha_-$.

Общее решение системы (20.19) получаем с помощью формул (18.20) и (18.21):

$$e^\varphi = \Lambda_2, \quad (20.20)$$

$$\theta = \arctg \frac{b_{4|12}}{b_{3|11}} = \arctg \sqrt{\frac{(\nabla_1 x_{,2})^2}{(\nabla_1 x_{,1})^2}}. \quad (20.21)$$

Для явного выражения θ через произвольные функции $f_\pm(u^\pm)$ удобно пользоваться не формулами (18.15), (18.20) и (20.21), а определить θ из первого уравнения (20.19), подставив туда (20.20). В результате получаем:

$$\theta(u^1, u^2) = \arccos \Delta_2, \quad (20.22)$$

где

$$\Delta_r = \frac{2}{\sqrt{\sum_{k=1}^r f_{+k}^{\prime 2} \sum_{j=1}^r f_{-j}^{\prime 2}}} \times$$

$$\times \left[\frac{\sum_{i=1}^r (f_{+i} + f_{-i}) f_{+i}' \sum_{j=1}^r (f_{+j} + f_{-j}) f_{-j}'}{\sum_{i=1}^r (f_{+i} + f_{-i})^2} - \sum_{i=1}^r f_{+i}' f_{-i}' \right], \quad (20.23)$$

$$f_{\pm i} \equiv f_{\pm i}(u^\pm).$$

В [78] общее решение системы (20.19) было получено путем сведения этих уравнений к одному уравнению Лиувилля на комплексную функцию $\varphi + i\theta = w$:

$$w_{,11} - w_{,22} = 2q^2 e^w. \quad (20.24)$$

Таким образом, с математической точки зрения динамика релятивистской струны в четырехмерном пространстве-времени описывается одним нелинейным уравнением Лиувилля (20.24) на комплексную функцию $w(u^1, u^2)$. Если струна конечна, то это уравнение должно быть дополнено соответствующими граничными условиями. Однако на этом останавливаться не будем, а перейдем к рассмотрению геометрической теории струны в n -мерном пространстве-времени. Такое исследование может оказаться полезным, например, при построении в струнной модели $1/n$ -разложения по аналогии с нелинейными сигма-моделями.

Вначале рассмотрим релятивистскую струну в пятимерном пространстве-времени. Здесь возникает новая система трех нелинейных уравнений, не встречавшаяся ранее в литературе, для которой удастся построить явно общее решение. Выбирая нормали e_3 и e_4 так, как это было описано выше, получаем формулы (20.15), (20.16), (20.18) и уравнение (20.17). Дополнительно к переменным, фигурировавшим в четырехмерном случае, здесь появляются два вектора кручения, $\nu_{35|i}$ и $\nu_{45|i}$, $i = 1, 2$. Уравнения Петерсона–Кодацци (18.22) с $\alpha = 5$ дают

$$\nu_{35|2} \cos(\theta/2) = \nu_{45|1} \sin(\theta/2); \quad \nu_{45|2} \sin(\theta/2) = \nu_{35|1} \cos(\theta/2). \quad (20.25)$$

Чтобы удовлетворить этим равенствам, необходимо положить:

$$\left. \begin{aligned} \nu_{35|2} &= h(u^1, u^2) \sin(\theta/2); \quad \nu_{45|1} = h(u^1, u^2) \cos(\theta/2); \\ \nu_{45|2} &= p(u^1, u^2) \cos(\theta/2); \quad \nu_{35|1} = p(u^1, u^2) \sin(\theta/2). \end{aligned} \right\} \quad (20.26)$$

Уравнения Риччи (18.33) записываются теперь в следующем виде:

$$\theta_{,11} - \theta_{,22} - (h^2 - p^2) \sin \theta = 2q^2 e^\varphi \sin \theta; \quad (20.27)$$

$$\sin(\theta/2) (h_{,1} - p_{,2}) + \cos(\theta/2) (h\theta_{,1} - p\theta_{,2}) = 0; \quad (20.28)$$

$$\cos(\theta/2) (p_{,1} - h_{,2}) + \sin(\theta/2) (h\theta_{,2} - p\theta_{,1}) = 0. \quad (20.29)$$

Подстановка

$$h = \kappa_{,2} (\sin(\theta/2))^{-2}; \quad p = \kappa_{,1} (\sin(\theta/2))^{-2} \quad (20.30)$$

обращает уравнение (20.28) в тождество, а (20.29) дает

$$(\text{ctg}^2(\theta/2) \kappa_{,1})_{,1} = (\text{ctg}^2(\theta/2) \kappa_{,2})_{,2}. \quad (20.31)$$

Окончательно система (18.31) – (18.33) в случае пятимерного объемлющего пространства сводится к трем нелинейным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{,11} - \varphi_{,22} &= 2q^2 e^\varphi \cos \theta, \\ \theta_{,11} - \theta_{,22} + 2 \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} (\kappa_{,1}^2 - \kappa_{,2}^2) &= 2q^2 e^\varphi \cos \theta; \\ (\text{ctg}^2(\theta/2) \kappa_{,1})_{,1} &= (\text{ctg}^2(\theta/2) \kappa_{,2})_{,2}. \end{aligned} \right\} \quad (20.32)$$

Интересно отметить, что последнее уравнение в (20.32) в точности совпадает со вторым уравнением в нелинейной системе Лунда–Редже [79].

Выпишем общее решение системы (20.32):

$$\left. \begin{aligned} e^\varphi &= \Lambda_3; \quad \theta = \arccos \Delta_3; \\ \frac{\kappa_{,1}^2}{\sin^2(\theta/2)} &= q^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} e^\varphi - (\theta_{,2}^2/4) - \left[\left(\frac{\nabla_1 x_{,1}^\mu}{q \cos(\theta/2)} \right)_{,1} \right]^2; \\ \frac{\kappa_{,2}^2}{\sin^2(\theta/2)} &= -q^2 \cos^2(\theta/2) e^\varphi - (\theta_{,1}^2/4) - \left[\left(\frac{\nabla_1 x_{,1}^\mu}{q \cos(\theta/2)} \right)_{,2} \right]^2. \end{aligned} \right\} \quad (20.33)$$

Величины Λ_3 и Δ_3 определяются формулами (19.21) и (20.23), соответственно, а ковариантную производную $\nabla_1 x_{,1}^\mu$ следует строить с помощью разложений (19.15) и (19.20).

Система из $(n-2)$ нелинейных уравнений, описывающих релятивистскую струну в n -мерном пространстве-времени, была получена в [80] путем полного устранения функционального произвола в уравнениях вложения (18.21) – (18.33). Эта система в переменных светового конуса $\sqrt{2}\xi = u^1 + u^2, \sqrt{2}\eta = u^1 - u^2$ записывается так:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\xi\eta} &= q^2 e^\varphi \sqrt{1 - \|\psi\|^2}; \\ \psi_{\xi\eta}^\alpha + \frac{(\psi \psi_\eta)}{1 - \|\psi\|^2} \psi_\xi^\alpha &= q^2 e^\varphi \sqrt{1 - \|\psi\|^2} \psi^\alpha, \quad \alpha = 3, 4, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (20.34)$$

Уравнения (20.34) сводятся к полученным ранее нелинейным уравнениям следующими подстановками:

$$n = 3, \quad \psi^\alpha = 0, \quad \text{уравнение Лиувилля (20.7);}$$

$$n = 4, \quad \psi^1 = \sin \theta, \quad \text{уравнения (20.19);}$$

$$n = 5, \quad \psi^1 = \sin \theta \cos \kappa; \quad \psi^2 = \sin \theta \sin \kappa, \quad \text{уравнения (20.32).}$$

Таким образом, в релятивистски-инвариантной калибровке (19.14) классическая динамика струны в n -мерном пространстве Минковского описывается системой нелинейных уравнений (20.34). Для построения квантовой теории этих уравнений несомненный интерес представляет выяснение вопроса, является ли система (20.34) вполне интегрируемой на классическом уровне.

Следует отметить внешнее сходство уравнений (20.34), описывающих релятивистскую струну в n -мерном пространстве-времени, с уравнениями движения в нелинейных двумерных сигма-моделях с группой симметрии $SO(n)$ [81, 82].

Другой способ редукции уравнений Гаусса, Петерсона–Кодацци, Риччи для мировой поверхности струны в n -мерном пространстве-вре-

мени был предложен в [83]. Возможность построения общих решений для уравнений струнного типа (20.32), (20.34) рассматривалась в рамках чисто группового подхода в [84].

21. Исследование солитонных решений уравнения Лиувилля. Квазиклассическое квантование

Перейдем к исследованию уравнения Лиувилля (20.7) для действительной функции $\varphi(u^1, u^2)$, описывающего релятивистскую струну в трехмерном пространстве-времени. Общее решение этого уравнения, найденное Лиувиллем в 1853г., определяется формулой (20.8).

Рассмотрим частные решения этого уравнения — солитоны*, имеющие вид

$$\varphi(\tau, \sigma) = F(\sigma - v\tau), \quad (21.1)$$

где $|v| < 1$. Выделить такие решения в формуле (20.8) довольно трудно, проще подставить (21.1) в (20.7) [85]. Это приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению на F :

$$(1 - v^2)F'' = -Re^F, \quad R = 2q_+q_-.$$

Для $R > 0$

$$\exp \varphi_1(\tau, \sigma) = \frac{m^2}{32R} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{m}{8} \frac{\sigma - v\tau - \sigma_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right), \quad (21.2)$$

где m — произвольная константа, которая, как показано далее, есть масса солитона (21.2). Если $R < 0$, то имеем солитоны двух типов:

$$\exp \varphi_2(\tau, \sigma) = \frac{m^2}{32|R|} \operatorname{cosech}^2 \left(\frac{m}{8} \frac{\sigma - v\tau - \sigma_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right); \quad (21.3)$$

$$\exp \varphi_3(\tau, \sigma) = \frac{m^2}{32|R|} \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{m}{8} \frac{\sigma - v\tau - \sigma_0}{\sqrt{1 - v^2}} \right). \quad (21.4)$$

Решения (21.2) и (21.3) представляют собой уединенные волны, движущиеся со скоростью, меньшей 1. Решение (21.4) есть периодический солитон, описывающий "гребенку" волн. Следует отметить, что (21.3) и (21.4) имеют неинтегрируемые особенности $e^{\varphi_i} \sim z^{-2}$ при $z \rightarrow 0$, $z = (\sigma - v\tau - \sigma_0)/\sqrt{1 - v^2}$, $i = 2, 3$, и тем самым формально не удовлетворяют требованиям, которые обычно предъявляются

*Уравнение (20.7) в переменных $\tau \pm \sigma$ исследовалось методом обратной задачи рассеяния в [86], однако солитонные решения этого уравнения с точки зрения физики элементарных частиц там не обсуждались.

к солитонным решениям [87]. Однако, чтобы не усложнять терминологию, эти решения также будем называть солитонами и покажем, что их особенности не приводят к принципиальным трудностям.

Помимо односолитонных решений уравнение (20.7), как это следует из результатов [86], имеет и n -солитонное решение. Такое решение описывает один солитон, движущийся с произвольной скоростью, и $n-1$ солитонов, движущихся с единичной скоростью. Из n -солитонного решения при $n = 1$ следует только солитон (21.2), в то время как (21.3) и (21.4) таким путем получить нельзя. Для простоты и наглядности ограничимся здесь рассмотрением только односолитонных решений.

Лагранжиан для уравнения Лиувилля имеет вид

$$\mathcal{L} = (1/2) (\dot{\varphi}^2 - \varphi'^2) + Re^\varphi. \quad (21.5)$$

Потенциальная энергия в этом лагранжиане $V(\varphi) = Re^\varphi$ является монотонной функцией переменной φ . Обычно же солитоны рассматривают в моделях со спонтанным нарушением симметрии, где $V(\varphi)$ имеет не менее двух минимумов. В данной модели это отличие от изученных ранее приводит к ряду особенностей, например, для солитонов уравнения (20.7) обычным приемом нельзя ввести топологический заряд.

Покажем, что решениям (21.2) — (21.4) можно сопоставить энергию, импульс и массу с правильным релятивистским соотношением. Тензор энергии-импульса для солитонов возьмем в следующем виде:

$$\theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{m^2}{32} \eta^{\mu\nu} - \frac{m^2}{16} v^\mu v^\nu, \quad (21.6)$$

где $T^{\mu\nu}$ — канонический тензор энергии-импульса поля $\varphi(\tau, \sigma)$, соответствующий лагранжевой плотности (21.5)

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L};$$

$\mu, \nu = 0, 1$; $\eta^{00} = -\eta^{11} = 1$, v^μ — вектор скорости солитона $v^0 = 1/\sqrt{1 - v^2}$; $v^1 = v/\sqrt{1 - v^2}$. Добавка к $T^{\mu\nu}$ в формуле (21.6) не зависит от координат τ, σ и приводит к сходящимся на бесконечности интегралам для энергии и импульса солитонов:

$$P^\mu = \int \theta^{\mu 0} [\varphi_c(\tau, \sigma)] d\sigma. \quad (21.7)$$

Подставляя в (21.7) решения $\varphi_i(\tau, \sigma)$ (21.2)–(21.4), получаем

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{-m}{\sqrt{1-v^2}}; & P_1 &= -\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}; \\ E_i &= \frac{mI_i}{\sqrt{1-v^2}}; & P_i &= \frac{mI_i v}{\sqrt{1-v^2}}, \quad i = 2, 3, \end{aligned} \right\} \quad (21.8)$$

$$\text{где } I_2 = \int_0^{\infty} d\sigma \operatorname{sh}^{-2} \sigma, \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} d\sigma (\operatorname{ctg}^2 \sigma - 1).$$

Таким образом, в первом случае массой солитона можно считать постоянную m , а для солитонов (21.3) и (21.4) масса равна mI_i , $i = 2, 3$. Расходящиеся в нуле интегралы I_i можно регуляризовать, введя, например, обрезание, однако в дальнейшем будет достаточно того, что между E_i и P_i в формулах (21.8) есть правильное релятивистское соотношение. Именно этот факт позволяет уже в классической теории сопоставлять солитонам частицы с отличной от нуля массой покоя.

Перейдем к исследованию устойчивости солитонов. Вначале рассмотрим статические солитонные решения, которые определяются формулами (21.2)–(21.4) при $v = 0$. Для этого представим решение уравнения (20.7) в виде

$$\varphi(\tau, \sigma) = \varphi_i(\tau, \sigma) + \exp(i\omega\tau)\psi(\sigma). \quad (21.9)$$

Подстановка в (20.7) приводит в линейном приближении к уравнению на $\psi(\sigma)$, имеющему вид одномерного уравнения Шредингера с потенциалом $V[\varphi_i(\sigma)] = -R \exp(-\varphi_i(\sigma))$:

$$\left(-\frac{d^2}{d\sigma^2} + V[\varphi_i(\sigma)] \right) \psi(\sigma) = \omega^2 \psi(\sigma), \quad (21.10)$$

где

$$V[\varphi_1(\sigma)] = -\frac{m^2}{32} \operatorname{sech}^2\left(\frac{m}{8}\sigma\right); \quad (21.11)$$

$$V[\varphi_2(\sigma)] = \frac{m^2}{32} \operatorname{cosech}^2\left(\frac{m}{8}\sigma\right); \quad (21.12)$$

$$V[\varphi_3(\sigma)] = \frac{m^2}{32} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{m}{8}\sigma\right). \quad (21.13)$$

Если в уравнении (21.10) $\omega^2 > 0$, то решение $\varphi_i(\sigma)$ устойчиво в классической теории и в силу релятивистской инвариантности устойчиво

и $\varphi_i(\tau, \sigma)$. При $\omega^2 < 0$ поправка к $\varphi_i(\sigma)$ в (21.9) экспоненциально растет по времени и солитон неустойчив.

Следует отметить, что с математической точки зрения процедура исследования устойчивости солитонных решений в линейном приближении не вполне строгая [88]. Но более подробно на этом вопросе останавливаться не будем.

Уравнение (21.9) с потенциалами (21.11)–(21.13) решается точно [89]. В первом случае ω^2 имеет одно отрицательное значение $\omega_1^2 = -m^2/64$ и непрерывный спектр, начинающийся с трансляционной моды $\omega_0 = 0$. Так как $\omega_1^2 < 0$, то солитонное решение $\varphi_1(\tau, \sigma)$ неустойчиво уже в классической теории.

Для потенциала (21.12) ω^2 имеет непрерывный спектр $\omega^2 > 0$ и трансляционную моду $\omega = 0$, которая опять граничит с непрерывным спектром. Решение $\varphi_2(\tau, \sigma)$ устойчиво.

Потенциал (21.13) сводится к потенциалу Пешля–Теллера [89]. Периодичность этого потенциала не существенна для решений уравнения (21.10), так как соседние потенциальные ямы разделены непроходимыми барьерами. Поэтому можно ограничиться рассмотрением одной из таких ям. В этом случае есть только дискретный спектр $\omega_n^2 = m^2(n+1)^2/64$, $n = 1, 2, \dots$, и трансляционная мода $\omega_0 = 0$. Решение $\varphi_3(\tau, \sigma)$ устойчиво.

Таким образом, солитону $\varphi_1(\tau, \sigma)$ в классике соответствует нестабильная частица с массой m и с временем жизни порядка $8m^{-1}$. Солитоны $\varphi_2(\tau, \sigma)$ и $\varphi_3(\tau, \sigma)$ описывают устойчивые частицы.

Перейдем теперь к квазиклассическому квантованию солитонных решений в геометрической теории релятивистской струны. Предложено несколько подходов к построению квантовой теории полевых моделей, имеющих частицеподобные классические решения [90, 91]. Идейно эти методы на первый взгляд несхожи, однако основные уравнения, определяющие спектр состояний, практически одни и те же. Не останавливаясь на деталях рассуждений, будем следовать так называемому каноническому квантованию частицеподобных решений, наиболее близкому обычному полювому подходу, хотя и несколько формальному [91].

Поле $\varphi(\tau, \sigma)$ представим в виде

$$\varphi(\tau, \sigma) = \varphi_c(\sigma - \sigma_0) + \psi(\tau, \sigma), \quad (21.14)$$

где $\varphi_c(\sigma - \sigma_0)$ – солитонные решения (21.2)–(21.4) при $v = 0$. В качестве координат системы выбираем положение центра масс солитона $\sigma_0(\tau) = \sigma_0 + v\tau$ и поле $\psi(\tau, \sigma)$, им сопоставляем канонически сопряженные импульсы $p_0(\tau)$ и $p(\tau, \sigma)$, соответственно.

После подстановки (21.14) в (21.6) полный гамильтониан разбиваем на свободную часть и гамильтонион взаимодействия $H = H_0 + H_1$, где $H_0 = m + (1/2) \int d\sigma (p^2 + \psi^2 - R\psi^2 e^{\varphi_c})$ – гамильтониан частицы с массой m и поля $\psi(\tau, \sigma)$, помещенного во внешнее классическое по-

ле $-Re\varphi_c$. Гамильтониан H_1 , описывающий взаимодействие $\psi(\tau, \sigma)$ с солитоном, зависит от σ_0, p_0, ψ и p . Явный вид H_1 довольно сложен [184] и выписывать его здесь не будем.

Из уравнений Гамильтона с H_0 следует:

$$\ddot{\psi} - \psi'' = R \exp(\varphi_c) \psi.$$

Далее используем стандартный метод квантования во внешнем поле с помощью разложений:

$$\psi(\tau, \sigma) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [b_k \psi_k(\sigma) \exp(-i\omega_k \tau) + b_k^+ \psi_k^+(\sigma) \exp(i\omega_k \tau)],$$

$$p(\tau, \sigma) = \sum_k (-i) \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} [b_k \psi_k(\sigma) \exp(-i\omega_k \tau) - b_k^+ \psi_k^+(\sigma) \exp(i\omega_k \tau)],$$

где $\psi_k(\sigma)$ — полный набор решений уравнения (21.10), из которого исключена нулевая мода

$$\sum_k \psi_k(\sigma) \psi_k^+(\sigma') = \delta(\sigma - \sigma') - \frac{1}{m} \varphi'_c(\sigma) \varphi'_c(\sigma').$$

Здесь знак суммы \sum_k означает одновременно и интегрирование по k , если оно необходимо. Постулируем канонические коммутационные соотношения

$$[b_k, b_{k'}^+] = \delta_{kk'}, [b_k, b_{k'}] = [b_k^+, b_{k'}^+] = 0,$$

и строим гильбертово пространство состояний $|P, \{k_i\}\rangle = b_{\{k_i\}}^+ |P\rangle$, характеризуемых общим импульсом P и набором импульсов "мезонов" $\{k_i\}$. На этой основе стандартным путем можно развить теорию возмущений.

Свободный гамильтониан H_0 после перехода к нормальному произведению операторов b_k принимает вид

$$H_0 = m + \sum_k \omega_k b_k^+ b_k. \quad (21.15)$$

Вычисляя матричные элементы H_0 по векторам состояний $|P, \{k_i\}\rangle$, получаем энергетический спектр системы в нулевом приближении теории возмущений. Очевидно, что он полностью определяется спектром ω в уравнении (21.10).

Солитон (21.2), неустойчивый в классике, тем более будет неустойчив в квантовой теории, так как вклад в энергию (21.15) от дискретного спектра в этом случае чисто мнимый.

Решению (21.3) в квантовой теории соответствует стабильная частица с массой m , а поле $\psi(\tau, \sigma)$ описывает безмассовые "мезоны".

Число сингулярностей в классических решениях уравнения Лиувилля сохраняется во времени [92], поэтому переходы солитонных частиц в мезонные состояния должны быть запрещены.

Наиболее богатый спектр дает периодический солитон (21.4):

$$E_0 = m; E_n = m + (m/8)(n+1), \quad n = 1, 2, \dots$$

Интересно, что этот спектр эквидистантный, если не рассматривать нижние состояния с энергией E_0 и E_1 . Расстояние между энергетическими уравнениями определяется массой солитона $m/8$ и может принимать любые значения. Состояния этого спектра стационарны только в пренебрежении взаимодействием H_1 , которое должно приводить к переходам между ними, т.е. реально здесь есть серия резонансов.

Периодический солитон и порождаемый им спектр естественно рассматривать в теории замкнутой релятивистской струны. В обычном подходе эта модель имеет эквидистантный спектр стационарных состояний [см. формулу (4.25)]. Тот факт, что энергетические уровни в дуально-резонансном подходе имеют нулевую ширину, с физической точки зрения является существенным недостатком. В этом отношении более реалистичен спектр масс, получаемый при явном учете солитонных решений в теории релятивистской струны.

В заключение сделаем следующее замечание.

Основой геометрического подхода к теории релятивистской струны является переход от переменных $x^\mu(\tau, \sigma)$ к одной функции $\varphi(\tau, \sigma) = -\ln \tilde{x}^2$. С математической точки зрения координаты $x^\mu(\tau, \sigma)$ и $\varphi(\tau, \sigma)$ несут одну и ту же информацию о динамике системы, так как, интегрируя деривационные формулы (18.5), (18.6) или (18.27), (18.19) с функцией $\varphi(\tau, \sigma)$, являющейся решением уравнения Лиувилля (20.7), можно восстановить $x^\mu(\tau, \sigma)$ [75]. Однако рассматривать этот переход как каноническое преобразование нельзя. Более того, квантование в переменных $x_\mu(\tau, \sigma)$ и $\varphi(\tau, \sigma)$ приводит к различным результатам. В связи с этим возникает вопрос, в каких переменных необходимо проводить квантование нелинейных моделей. Вероятно, решающим критерием здесь может быть только физическая оценка конечных результатов.

22. Параметризация $t = \tau$ в теории струны

В модели релятивистской струны, как уже отмечалось, представляет интерес такое описание двумерной минимальной поверхности в пространстве Минковского, когда одна из криволинейных координат $u^1 = \tau$ на этой поверхности совпадает с временной координатой объемлющего пространства $x^0 = t$. Это так называемая калибровка $t = \tau$. Геометрическое описание минимальной поверхности с помощью дифференциальных форм в параметризации $t = \tau$ приводит к новым нелинейным уравнениям, общее решение которых может быть выписано методом, аналогичным изложенному в § 20.

В параметризации $t = \tau$ двумерная минимальная поверхность, погруженная в n -мерное псевдоевклидово пространство Минковского, описывается $(n-1)$ -мерным евклидовым вектором $x = \{x^1, x^2, \dots, x^{n-1}\}$, зависящим от двух параметров: $u^1 = \tau = x^0 = t$ и $u^2 = \sigma$. Уравнения, определяющие минимальную поверхность, записываются теперь так [см. (3.19) и (6.48)]:

$$x_{,11} - x_{,22} = 0; \quad (22.1)$$

$$x_{,1}^2 + x_{,2}^2 = 1; \quad x_{,1} x_{,2} = 0. \quad (22.2)$$

Условия (22.2) диктуют следующий вид метрического тензора на поверхности $x(u^1, u^2)$:

$$g_{11} = x_{,1}^2 = \sin^2 \theta; \quad g_{22} = x_{,2}^2 = \cos^2 \theta; \quad g_{12} = 0. \quad (22.3)$$

В дальнейшем нам потребуются символы Кристоффеля, соответствующие этой метрике,

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^1 = \operatorname{ctg} \theta \cdot \theta_{,1}; & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \operatorname{ctg} \theta \cdot \theta_{,2}; \\ \Gamma_{11}^2 &= \Gamma_{22}^2 = -\operatorname{tg} \theta \cdot \theta_{,2}; & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = -\operatorname{tg} \theta \cdot \theta_{,1}. \end{aligned} \right\} \quad (22.4)$$

Двумерная поверхность $x(u^1, u^2)$ в $(n-1)$ -мерном евклидовом пространстве, определяемая уравнениями (22.1), (22.2), не является минимальной по отношению к этому пространству, т.е. для нее не выполняются условия

$$g^{ij} b_{a|ij} = 0, \quad a = 3, \dots, n-1. \quad (22.5)$$

Тем не менее уравнения (22.1) и (22.2), переписанные в терминах квадратичных форм g_{ij} и $b_{a|ij}$, приводят к таким же равенствам, как и (20.1):

$$b_{a|11} = b_{a|22}, \quad a = 3, \dots, n-1. \quad (22.6)$$

Единственная существенная компонента тензора кривизны R_{1212} в метрике (22.3) имеет вид [67]

$$R_{1212} = (1/2) \sin(2\theta)(\theta_{,11} - \theta_{,22}). \quad (22.7)$$

Уравнение Гаусса (18.31) записывается так:

$$\frac{1}{2} \sin(2\theta)(\theta_{,11} - \theta_{,22}) = \sum_{a=3}^{n-1} (b_{a|11}^2 - b_{a|12}^2). \quad (22.8)$$

Построение общих решений системы уравнений (22.8), (18.32) и (18.33) будет основываться, как и в § 20, на записи решений уравнений (22.1), удовлетворяющих нелинейным условиям (22.2), в специальном базисе.

Начнем рассмотрение с простейшего случая трехмерного пространства-времени, в которое помещена минимальная поверхность. В параметризации $t = \tau$ координаты $x^1(u^1, u^2)$ и $x^2(u^1, u^2)$ задают плоскость, которая является проекцией минимальной поверхности из пространства $\{x^0, x^1, x^2\}$ на координатную плоскость Ox^1x^2 . В этом случае $b_{a|ij} = 0$ и $\nu_{a\beta|i} = 0$. Единственным нетривиальным уравнением в системе (18.32), (18.33), (22.8) оказывается уравнение Гаусса (22.8), которое сводится к уравнению Д'Аламбера

$$\theta_{,11} - \theta_{,22} = 0. \quad (22.9)$$

Продemonстрируем на этом простом примере всю схему получения общих решений уравнений (18.31)–(18.33). Решение уравнений (22.1) и (22.2) для двумерного радиуса-вектора $x(u^1, u^2)$ возьмем в виде

$$x(u^1, u^2) = \psi_+(u^+) - \psi_-(u^-), \quad (\psi'_\pm)^2 = 1, \quad u^\pm = u^1 \pm u^2; \quad (22.10)$$

$$\psi'_\pm(u^\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \varphi_\pm(u^\pm), \pm \sin \varphi_\pm(u^\pm) \right\}. \quad (22.11)$$

Согласно (22.3) функция $\theta(u^1, u^2)$ определяется формулой

$$\theta(u^1, u^2) = \operatorname{arctg}(x_{,1}^2/x_{,2}^2)^{1/2}. \quad (22.12)$$

Подставляя сюда (22.10) и (22.11), получаем общее решение уравнения (22.9)

$$\theta(u^1, u^2) = \operatorname{arctg} \left[\frac{1 - \cos(\varphi_+ + \varphi_-)}{1 + \cos(\varphi_+ + \varphi_-)} \right]^{1/2} = \frac{1}{2} [\varphi_+(u^+) + \varphi_-(u^-)]. \quad (22.13)$$

Перейдем теперь к четырехмерному псевдоевклидову пространству, в которое погружена минимальная поверхность. В этом случае уравнения (18.32), (18.33), (22.8) не будут столь тривиальны, как рассмотренное выше уравнение (22.9).

В параметризации $t = \tau$ минимальная поверхность описывается трехкомпонентным евклидовым вектором $x(u^1, u^2)$, который задает проекцию этой поверхности из четырехмерного пространства Минковского в обычное трехмерное евклидово пространство. Система уравнений (18.23), (18.32) и (22.8) с учетом (22.4) и (22.6) сводится, как это нетрудно показать, к двум нелинейным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \theta_{,11} - \theta_{,22} + \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} (\kappa_{,1}^2 \kappa_{,2}^2) &= 0; \\ (\operatorname{ctg}^2 \theta \cdot \kappa_{,1})_{,1} &= (\operatorname{ctg}^2 \theta \cdot \kappa_{,2})_{,2} \end{aligned} \right\} \quad (22.14)$$

где функция $\kappa(u^1, u^2)$ определяет коэффициенты второй квадратич-

ной формы

$$b_{11} = b_{22} = \operatorname{ctg} \theta \kappa_{,2}; \quad b_{12} = \operatorname{ctg} \theta \cdot \kappa_{,1}. \quad (22.15)$$

Система (22.14) отличается от известных уравнений Лунда-Редже [79] отсутствием в первом уравнении слагаемого $\sin \theta \cos \theta$. Уравнения (22.14) можно получить из системы (20.32), если положить там $\varphi \rightarrow -\infty$, $\theta \rightarrow 2\theta$. Однако, как найти общее решение для (22.14), исходя из решения для системы (20.32), неясно. Поэтому будем строить общее решение для системы нелинейных уравнений (22.14) заново.

Опять представим вектор $x(u^1, u^2)$ с помощью формулы (22.10) а для $\psi_{\pm}(u^{\pm})$ возьмем сферические координаты в трехмерном евклидовом пространстве:

$$\psi'_{\pm}(u^{\pm}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sin \omega_{\pm} \cos \varphi_{\pm}, \pm \sin \omega_{\pm} \sin \varphi_{\pm}, \pm \cos \omega_{\pm} \right\}, \quad (22.16)$$

$$\omega_{\pm} \equiv \omega_{\pm}(u^{\pm}), \quad \varphi_{\pm} \equiv \varphi_{\pm}(u^{\pm}).$$

Для функции $\theta(u^1, u^2)$ согласно (22.12) получаем

$$\theta(u^1, u^2) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{1 - [\sin \omega_+ \sin \omega_- \cos(\varphi_+ + \varphi_-) - \cos \omega_+ \cos \omega_-]}{1 + [\sin \omega_+ \sin \omega_- \cos(\varphi_+ + \varphi_-) - \cos \omega_+ \cos \omega_-]} \right\}. \quad (22.17)$$

Используя теорему косинусов для сферического треугольника, легко убедиться, что 2θ в (22.17) есть угол, лежащий в сферическом треугольнике напротив стороны $\varphi_+ + \varphi_-$: у которой прилегающие углы равны ω_+ и ω_- .

В систему (22.16) входят только частные производные функции $\kappa(u^1, u^2)$. Согласно деривационным формулам (18.27) они определяются следующим образом:

$$\kappa_{,1} = \operatorname{tg} \theta \cdot \sqrt{(\nabla_1 x_{,2})^2}; \quad \kappa_{,2} = \operatorname{tg} \theta \cdot \sqrt{(\nabla_1 x_{,1})^2}. \quad (22.18)$$

Очевидно, что разложения (22.10) и (22.16) позволяют выразить $\kappa_{,i}$, $i = 1, 2$, через четыре произвольные функции одной переменной $\varphi_{\pm}(u^{\pm})$ и $\omega_{\pm}(u^{\pm})$, поэтому не будем приводить здесь эти громоздкие формулы.

Таким образом, в калибровке $t = \tau$ релятивистская струна описывается или одним уравнением Д'Аламбера (22.9) (трехмерное пространство-время) или же системой двух явно интегрируемых нелинейных уравнений (22.14) (четырёхмерное пространство-время). В случае конечной струны уравнения (22.9) и (22.14) должны быть дополнены соответствующими граничными условиями.

23. Калибровочный произвол в выборе базиса на мировой поверхности струны

При описании мировой поверхности струны дифференциальными формами, как уже отмечалось, существует калибровочный произвол, связанный с $SO(1,1) \times SO(n-2)$ -вращениями подвижного базиса в каждой точке этой поверхности, причем в касательной плоскости действует группа $SO(1,1)$, а в нормальном пространстве — группа $SO(n-2)$, где n — размерность пространства-времени, в котором движется струна. Этот произвол может быть использован для того, чтобы наложить специальные калибровочные условия на дифференциальные формы мировой поверхности струны. В результате эти формы будут определяться решением не уравнения Лиувилля (20.7) или нелинейной системы (22.14), а одного уравнения Д'Аламбера [93]. В случае уравнения Лиувилля этот факт является прямым следствием преобразования Бэклунда, связывающего решение уравнения Лиувилля и уравнения Д'Аламбера. При этом угол поворота подвижного базиса на мировой поверхности струны, с помощью которого осуществляется переход к новой калибровке, определяется решением уравнения Д'Аламбера, а уравнение Лиувилля описывает метрику на мировой поверхности струны в обычной ортонормальной калибровке.

Рассмотрим вначале теорию релятивистской струны в трехмерном пространстве-времени, где она сводится, как это было показано ранее, к нелинейному уравнению Лиувилля (20.7) на действительную функцию. Учитывая (18.8), (18.20) и (18.21) и условие минимальности мировой поверхности струны (19.5), можно представить матрицы $\Omega_a \cdot b$ в виде

$$\Omega_a \cdot b \cdot |_1 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{a_{,2}}{a} & -\frac{b_{11}}{a} \\ \frac{a_{,2}}{a} & 0 & -\frac{b_{12}}{a} \\ -\frac{b_{11}}{a} & \frac{b_{12}}{a} & 0 \end{vmatrix}; \quad \Omega_a \cdot b \cdot |_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{a_{,1}}{a} & -\frac{b_{12}}{a} \\ \frac{a_{,1}}{a} & 0 & -\frac{b_{11}}{a} \\ -\frac{b_{12}}{a} & \frac{b_{11}}{a} & 0 \end{vmatrix}. \quad (23.1)$$

Условие интегрируемости (18.22) записывается, очевидно, так:

$$\Omega_{1,2} - \Omega_{2,1} + [\Omega_1, \Omega_2] = 0. \quad (23.2)$$

Положим $a^2 = e^{-\varphi}$ и подставим (23.1) в (23.2):

$$\varphi_{,11} - \varphi_{,22} = 2q_+(u^+)q_-(u^-)e^{\varphi}; \quad (23.3)$$

$$b_{11,1} - b_{12,2} = 0; \quad (23.4)$$

$$b_{11,2} - b_{12,1} = 0; \quad (23.5)$$

$$b_{11} + b_{12} = q_+(u^+); \quad b_{11} - b_{12} = q_-(u^-); \quad u^{\pm} = u^1 \pm u^2. \quad (23.6)$$

Без потери общности можно считать функции $q_{\pm}(u^{\pm})$ константами [85]:

$$q_+(u^+) = q_-(u^-) = q. \quad (23.7)$$

Воспользуемся теперь калибровочным произволом в теории и перейдем от базиса $\{e_a^{\mu}\}$ к новому базису $\{\bar{e}_a^{\mu}\}$

$$e_a = g_a^{\cdot b} \bar{e}_b \quad (23.8)$$

с помощью матрицы

$$g[\lambda(u^1, u^2)] = \begin{vmatrix} \text{ch } \lambda & \text{sh } \lambda & 0 \\ \text{sh } \lambda & \text{ch } \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (23.9)$$

Дифференциальные формы $\Omega_a^{\cdot b}$ преобразуются как калибровочные поля

$$\bar{\Omega}_i = g^{-1} \Omega_i g - g^{-1} \partial_i g. \quad (23.10)$$

Выпишем в явном виде преобразованные матрицы $\bar{\Omega}_i$:

$$\bar{\Omega}_a^{\cdot b} \cdot |_1 = \begin{vmatrix} 0 & -(\varphi_{,2}/2) - \lambda_{,1} & -q e^{\varphi/2} \text{ch } \lambda \\ -(\varphi_{,2}/2) - \lambda_{,1} & 0 & q e^{\varphi/2} \text{sh } \lambda \\ -q e^{\varphi/2} \text{ch } \lambda & -q e^{\varphi/2} \text{sh } \lambda & 0 \end{vmatrix} \quad (23.11)$$

$$\Omega_a^{\cdot b} \cdot |_2 = \begin{vmatrix} 0 & -(\varphi_{,1}/2) - \lambda_{,2} & q e^{\varphi/2} \text{sh } \lambda \\ -(\varphi_{,1}/2) - \lambda_{,2} & 0 & -q e^{\varphi/2} \text{ch } \lambda \\ q e^{\varphi/2} \text{sh } \lambda & q e^{\varphi/2} \text{ch } \lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Теперь обратимся к преобразованию Бэклунда, связывающему решение уравнения Лиувилля и уравнения Д'Аламбера:

$$\varphi_{,1}/2 + \lambda_{,2} = -|q| e^{\varphi/2} \text{ch } \lambda; \quad \varphi_{,2}/2 + \lambda_{,1} = |q| e^{\varphi/2} \text{sh } \lambda, \quad (23.12)$$

причем функция $\varphi(u^1, u^2)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\varphi_{,11} - \varphi_{,22} = 2q^2 e^{\varphi}, \quad (23.13)$$

а функция $\lambda(u^1, u^2)$ — уравнению Д'Аламбера

$$\lambda_{,11} - \lambda_{,22} = 0. \quad (23.14)$$

Если

$$\exp \varphi = (4/q^2) [f'_+(u^+) f'_-(u^-)] / [f_+(u^+) + f_-(u^-)]^2 \quad (23.15)$$

— общее решение уравнения Лиувилля (23.13), то решение уравнения Д'Аламбера (23.14), входящее в преобразование Бэклунда (23.12),

будет также выражаться через функции $f_+(u^+)$ и $f_-(u^-)$:

$$\lambda(u^1, u^2) = -\frac{1}{2} \ln f_+(u^+) + \frac{1}{2} \ln f_-(u^-). \quad (23.16)$$

Возьмем в качестве параметра преобразования $\lambda(u^1, u^2)$ в матрицах (23.11) решение (23.16). Тогда из (23.12) будет следовать, что преобразованные матричные элементы $\Omega_a^{\cdot b}$ удовлетворяют условиям

$$\bar{\Omega}_0^{\cdot 1} \cdot |_i = -\text{sign } q \cdot \bar{\Omega}_1^{\cdot 2} \cdot |_i, \quad i = 1, 2, \quad (23.17)$$

где $\text{sign } q$ — знаковая функция:

$$\text{sign } q = \begin{cases} +1, & q > 0, \\ -1, & q < 0. \end{cases} \quad (23.18)$$

Нетрудно убедиться с помощью (23.1) и (23.2), что в терминах преобразованных дифференциальных форм теория релятивистской струны в трехмерном пространстве-времени определяется уравнением Д'Аламбера

$$a_{,11} - a_{,22} = 0, \quad a = \exp(-\varphi/2). \quad (23.19)$$

Условия (23.13) при $q < 0$ дают калибровочные условия Камимуря [94] в теории релятивистской струны, движущейся в трехмерном пространстве-времени.

Перейдем теперь к четырехмерному пространству Минковского. Как было показано в § 20, теория струны в этом случае сводится к нелинейному уравнению Лиувилля (20.24) на комплекснозначную функцию. Нормали e_3^{μ} и e_4^{μ} мировой поверхности струны в каждой ее точке удобно направить по векторам $\nabla_1 x_{,1}^{\mu}$ и $\nabla_1 x_{,2}^{\mu}$. В результате матрицы Ω , описывающие изменение базиса e_a^{μ} , $a = 1, \dots, 4$, при движении его начала по поверхности, принимают вид:

$$\Omega_a^{\cdot b} \cdot |_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\varphi_{,2}/2 & -Q_c & 0 \\ -\varphi_{,2}/2 & 0 & 0 & -Q_s \\ -Q_c & 0 & 0 & \theta_{,2}/2 \\ 0 & Q_s & -\theta_{,2}/2 & 0 \end{vmatrix}, \quad (23.20)$$

$$\Omega_a^{\cdot b} \cdot |_2 = \begin{vmatrix} 0 & -\varphi_{,1}/2 & 0 & -Q_s \\ -\varphi_{,1}/2 & 0 & -Q_c & 0 \\ 0 & Q_c & 0 & \theta_{,1}/2 \\ -Q_s & 0 & -\theta_{,1}/2 & 0 \end{vmatrix},$$

где $Q_c = q \exp(\varphi/2) \cos(\theta/2)$, $Q_s = q \exp(\varphi/2) \sin(\theta/2)$.

Условия совместности (23.2) с матрицами Ω (23.20) приводят, как это легко убедиться, к уравнению Лиувилля на комплекснозначную функцию $w = \varphi + i\theta$:

$$w_{,11} - w_{,22} = 2q^2 e^w. \quad (23.21)$$

Калибровочный произвол в теории позволяет перейти от подвижного базиса e_a^μ , $a = 1, \dots, 4$, к новому базису e_a^μ , $a = 1, \dots, 4$, с помощью матрицы из группы $SO(1,1) \times SO(2)$:

$$g[\lambda(u^1, u^2), \psi(u^1, u^2)] = \begin{vmatrix} \text{ch}\lambda & \text{sh}\lambda & 0 & 0 \\ \text{sh}\lambda & \text{ch}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{vmatrix}. \quad (23.22)$$

Выпишем явно матричные элементы $\bar{\Omega}_a^{\cdot b}$, полученные по формуле (23.10):

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Omega}_{1 \cdot 1}^{\cdot 2} + i\bar{\Omega}_{0 \cdot 1}^{\cdot 3} &= q \exp\left[\frac{1}{2}(\varphi + i\theta)\right] \text{sh}(\lambda + i\psi); \\ \bar{\Omega}_{0 \cdot 1}^{\cdot 1} - i\bar{\Omega}_{2 \cdot 1}^{\cdot 3} &= -\frac{1}{2}(\varphi_{,2} + i\theta_{,2}) - (\lambda_{,1} + i\psi_{,1}); \\ \bar{\Omega}_{1 \cdot 2}^{\cdot 2} + i\bar{\Omega}_{0 \cdot 2}^{\cdot 3} &= -q \exp\left[\frac{1}{2}(\varphi + i\theta)\right] \text{ch}(\lambda + i\psi); \\ \bar{\Omega}_{0 \cdot 2}^{\cdot 1} - i\bar{\Omega}_{2 \cdot 2}^{\cdot 3} &= -\frac{1}{2}(\varphi_{,1} + i\theta_{,1}) - (\lambda_{,2} + i\psi_{,2}). \end{aligned} \right\} \quad (23.23)$$

Обобщая преобразования Бэклунда (23.12) на комплекснозначные функции $\varphi + i\theta$ и $\lambda + i\psi$ и учитывая (23.23), можно наложить следующие условия на матрицы $\bar{\Omega}$:

$$\bar{\Omega}_{0 \cdot 1}^{\cdot 1} - i\bar{\Omega}_{2 \cdot 1}^{\cdot 3} = -\text{sign } q \cdot (\bar{\Omega}_{1 \cdot 1}^{\cdot 2} + i\bar{\Omega}_{0 \cdot 1}^{\cdot 3}). \quad (23.24)$$

Отсюда непосредственно следуют калибровочные условия Камимуры в теории релятивистской струны, движущейся в четырехмерном пространстве-времени [94]:

$$\bar{\Omega}_{0 \cdot 1}^{\cdot 1} = \bar{\Omega}_{1 \cdot 1}^{\cdot 2}; \quad \bar{\Omega}_{2 \cdot 1}^{\cdot 3} = -\bar{\Omega}_{0 \cdot 1}^{\cdot 3}, \quad q < 0. \quad (23.25)$$

Если выполнены условия (3.25), то уравнения вложения (18.20)–(18.22) для мировой поверхности струны сводятся к уравнению Д'Аламбера на одну комплекснозначную функцию [94].

Таким образом, калибровка Камимуры в теории релятивистской струны, движущейся в трех- и четырехмерном пространстве-времени, является прямым следствием преобразования Бэклунда для уравнения Лиувилля. Отметим, что в случае трехмерного пространства-времени возможна еще и другая трактовка этой калибровки. В [95] было

показано, что калибровку Камимуры можно рассматривать как следствие конформной инвариантности в теории релятивистской струны, движущейся в трехмерном пространстве-времени.

Возможность описания классической динамики струны линейным свободным уравнением (23.21) вовсе не означает, что квантовая теория этого объекта тривиальна. Проблема заключается в том, чтобы коммутационные соотношения, накладываемые на функцию $w(t, \sigma)$, были согласованы с коммутаторами координат струны $x^\mu(\tau, \sigma)$.

Мы рассматривали только локальные свойства мировой поверхности струны и совсем не затрагивали поведение этой поверхности в целом, описание ее топологических особенностей (самопересечений, наложений и т.д.). Эти нетривиальные проблемы требуют дальнейших исследований в рамках предложенного подхода.

Можно дать другую интерпретацию полученных результатов, а именно: нелинейное уравнение Лиувилля калибровочно-эквивалентно свободному уравнению Д'Аламбера. Напомним, что в теории нелинейных эволюционных уравнений два уравнения называют калибровочно-эквивалентными [82], если их линейные спектральные задачи связаны калибровочным преобразованием (23.10).

24. Релятивистская струна в пространстве-времени де Ситтера

Весьма вероятно, что гравитация может играть очень важную роль в мире элементарных частиц. Поэтому модели элементарных частиц должны допускать обобщение на пространство-время с отличной от нуля кривизной. Рассмотрим в рамках геометрического подхода модель релятивистской струны в пространстве-времени де Ситтера [77].

Действие струны легко обобщается на случай неплоского пространства-времени

$$\begin{aligned} S &= -\gamma \iint d^2u \sqrt{-\det \left\| \frac{\partial x^\mu}{\partial u^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial u^j} g_{\mu\nu}(x) \right\|} = \\ &= -\gamma \iint d^2u \sqrt{-\det \|a_{ij}\|}, \end{aligned} \quad (24.1)$$

где $x^\mu(u^1 = \tau, u^2 = \sigma)$ – параметрическое задание мировой поверхности струны; $g_{\mu\nu}(x)$ – метрический тензор пространства-времени; $a_{ij} = g_{\mu\nu} x_{,i}^\mu x_{,j}^\nu$ – метрический тензор на мировой поверхности струны; $a = \det \|a_{ij}\|$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; $i, j = 1, 2$.

Варьирование действия (24.1) приводит к задаче о нахождении двумерной минимальной поверхности в четырехмерном римановом пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}(x)$. Используя правило дифференцирования определителя

$$\partial_i |a|^{1/2} = (1/2) a_{jk,i} a^{jk} |a|^{1/2}, \quad (24.2)$$

получаем из (24.1) уравнение Эйлера:

$$\frac{1}{2} x_{,i}^{\mu} x_{,j}^{\nu} a^{ij} \sqrt{|a|} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \partial_i (x_{,i}^{\mu} a^{ij} \sqrt{|a|}) g_{\mu\rho} - x_{,j}^{\mu} a^{ij} \sqrt{|a|} \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} x_{,i}^{\nu} = 0. \quad (24.3)$$

Последний член в (24.3) с учетом симметрии a^{ij} можно записать так:

$$x_{,i}^{\mu} x_{,j}^{\nu} a^{ij} \sqrt{|a|} \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{|a|} a^{ij} x_{,i}^{\mu} x_{,j}^{\nu} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} \right). \quad (24.4)$$

Подставим теперь (24.4) в (24.3). В результате получим

$$\sqrt{-a} g_{\mu\nu} (\square x^{\nu} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} g^{\rho\sigma} a^{ij} x_{,i}^{\rho} x_{,j}^{\sigma}) = 0, \quad (24.5)$$

где $\square x^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{-a} a^{ik} x_{,k}^{\nu})$ — ковариантный оператор Лапласа—Бельтрами относительно внутренней метрики a_{ij} на мировой поверхности струны; $\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}(g)$ — символы Кристоффеля для метрики $g_{\mu\nu}(x)$. Если пространство-время плоское, то $\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}(g) = 0$ и получаем хорошо известное условие в теории минимальных поверхностей в евклидовом пространстве [72] $\square x^{\nu} = 0$.

Далее будем считать, что пространство-время имеет постоянную кривизну (вселенная де Ситтера). Метрический тензор $g_{\mu\nu}(x)$ в этом случае можно взять, например, в римановой форме [69]

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} / (1 + (K/4)x^2)^2, \quad (24.6)$$

где $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$; $x^2 = x^{\mu} x^{\nu} \eta_{\mu\nu}$. Константа K входит в определение тензора кривизны Римана—Кристоффеля вселенной де Ситтера

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} = K (g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa}). \quad (24.7)$$

В координатах Вейерштрасса z^{μ} , $\mu = 1, 2, 3, 4, 5$, вселенную де Ситтера можно рассматривать как гиперboloид в псевдоевклидовом пятимерном пространстве

$$(z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2 - (z^4)^2 + \epsilon (z^5)^2 = \epsilon R^2, \quad (24.8)$$

где $\epsilon = +1$ для пространства-времени де Ситтера первого рода и $\epsilon = -1$ для пространства-времени де Ситтера второго рода. Константа K связана с R формулой

$$K = \epsilon / R^2. \quad (24.9)$$

Вместо того чтобы решать уравнения (24.5) относительно координат струны $x^{\mu}(u^1, u^2)$ при заданной метрике пространства-времени $g_{\mu\nu}(x)$ [см. формулы (24.6)], будем описывать мировую поверхность струны ее основными квадратичными формами $a_{ij}(u^1, u^2)$, $b_{\alpha|ij}(u^1, u^2)$ и векторами кручения $v_{\alpha\beta|i} = -v_{\beta\alpha|i}$, $i, j = 1, 2$, $\alpha, \beta = 3, 4$. Согласно теореме вложения римановых многообразий [69] эти величины будут определять двумерную поверхность, вложенную в пространство постоянной кривизны, с точностью до движения поверхности как целого в том и только в том случае, если выполняются соответствующие уравнения Гаусса, Петерсона—Кодацци и Риччи. В случае объемлющего пространства постоянной кривизны уравнение Гаусса записывается так [69]:

$$R_{ijkl} = \sum_{\sigma=3}^4 e_{\sigma} (b_{\sigma|ik} b_{\sigma|jl} - b_{\sigma|il} b_{\sigma|jk}) + K (a_{ik} a_{jl} - a_{il} a_{jk}). \quad (24.10)$$

Уравнения Петерсона—Кодацци и Риччи остаются такими же, как и для плоского объемлющего пространства [см. уравнения (18.32) и (18.33)]. В уравнениях (24.10), (18.32) и (18.33) латинские индексы принимают значения 1, 2, а греческие — 3, 4. В левой части уравнения Гаусса (24.10) стоит тензор кривизны Римана—Кристоффеля R_{ijkl} , определяемый метрическим тензором мировой поверхности струны a_{ij} . Для двумерной поверхности этот тензор имеет всего одну существенную компоненту

$$R_{1212} = \frac{1}{2} (2a_{12,12} - a_{11,22} - a_{22,11}) + a^{lm} (\Gamma_{m,21} \Gamma_{l,12} - \Gamma_{m,22} \Gamma_{l,11}). \quad (24.11)$$

Символы Кристоффеля в (24.11) соответствуют внутренней метрике на мировой поверхности струны

$$\Gamma_{i,jk} = (1/2) (a_{ik,j} + a_{ij,k} - a_{jk,i}). \quad (24.12)$$

Ковариантное дифференцирование в формулах (18.32) выполняется по отношению к метрическому тензору a_{ij} .

В уравнения (24.10), (18.32) и (18.33) не входит в явном виде метрика пространства-времени $g_{\mu\nu}(x)$. Единственным следствием того, что пространство-время имеет постоянную, отличную от нуля кривизну, является второй член в правой части уравнения Гаусса (24.10).

Из уравнений движения (24.5) следует требование минимальности мировой поверхности струны [69]

$$a^{ij} b_{\alpha|ij} = 0, \quad \alpha = 3, 4. \quad (24.13)$$

На мировой поверхности струны всегда можно выбрать изометричес-

кую систему координат u^1 и u^2 , в которой

$$a_{11} = -a_{22} = a, \quad a_{12} = 0. \quad (24.14)$$

В этой системе координат условия (24.13) принимают вид

$$b_{\alpha|11} = b_{\alpha|22}, \quad \alpha = 3, 4. \quad (24.15)$$

Если исключить из уравнений Петерсона–Кодацци (18.32) векторы кручения $\nu_1 = \nu_{43|1}$ и $\nu_2 = \nu_{43|2}$ и учесть (24.15), то получим

$$\frac{\partial}{\partial u^\pm} \sum_{\alpha=3}^4 (b_{\alpha|11} \mp b_{\alpha|12})^2 = 0,$$

где $u^\pm = u^1 \pm u^2$. Таким образом,

$$\sum_{\alpha=3}^4 (b_{\alpha|11} \pm b_{\alpha|12})^2 = q_\pm(u^\pm),$$

где q_\pm — две произвольные функции. Удобно ввести следующие переменные:

$$\begin{aligned} b_{3|11} \pm b_{3|12} &= q_\pm(u^\pm) \cos \alpha_\pm; \\ b_{4|11} \pm b_{4|12} &= q_\pm(u^\pm) \sin \alpha_\pm; \\ \alpha_+ - \alpha_- &= \theta; \quad a_{11} = -a_{22} = a = e^\varphi. \end{aligned}$$

В новых переменных уравнения Гаусса (24.10) и Риччи (18.33) отделяются от системы (24.10), (18.32), (18.33):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{,11} - \varphi_{,22} &= 2q_+(u^+)q_-(u^-)e^\varphi \cos \theta + 2Ke^{-\varphi}; \\ \theta_{,11} - \theta_{,22} &= 2q_+(u^+)q_-(u^-)e^\varphi \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (24.16)$$

а уравнения Петерсона–Кодацци (18.32) принимают вид

$$\nu_1 + \nu_2 = a_{-,1} + a_{-,2}; \quad \nu_1 - \nu_2 = a_{+,1} - a_{+,2}. \quad (24.17)$$

Произвольные функции $q_\pm(u^\pm)$ в (24.16) можно исключить заменой переменных

$$\begin{aligned} \tilde{u}^\pm &= \int du^\pm \sqrt{2q_\pm(u^\pm)}; \quad \sqrt{q_+(u^+)q_-(u^-)} \exp(\varphi(u^1, u^2)) = \\ &= \exp(\tilde{\varphi}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)); \quad \theta(u^1, u^2) = \tilde{\theta}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2). \end{aligned}$$

Теперь уравнения (24.16) записываются следующим образом:

$$\varphi_{,11} - \varphi_{,22} = e^\varphi \cos \theta + Ke^\varphi, \quad \theta_{,11} - \theta_{,22} = e^\varphi \sin \theta \quad (24.18)$$

(знак \sim для упрощения обозначений здесь опущен). Таким образом, в данном подходе уравнениями движения, полностью определяющими динамику струны в пространстве-времени де Ситтера, являются уравнения (24.18).

Если кривизна K стремится к нулю, то система (24.18) переходит в однонелинейное уравнение Лиувилля на комплекснозначную функцию $w = \varphi + i\theta$ (см. § 20):

$$w_{,11} - w_{,22} = e^w. \quad (24.19)$$

В том случае, когда $K \neq 0$, замена переменных $\tilde{u}^\pm = |K|^{1/4} u^\pm$, $\exp(\varphi(u^1, u^2)) = |K|^{1/2} \exp(\tilde{\varphi}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))$,

$$\theta(u^1, u^2) = \tilde{\theta}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$$

позволяет убрать эту константу в уравнениях (24.18)

$$\varphi_{,11} - \varphi_{,22} = e^\varphi \cos \theta + \epsilon e^{-\varphi}, \quad \theta_{,11} - \theta_{,22} = e^\varphi \sin \theta. \quad (24.20)$$

Полагая в (24.20) $\theta = 0$, получаем уравнение

$$\varphi_{,11} - \varphi_{,22} = 2 \cdot \begin{cases} \sinh \varphi, & K < 0; \\ \cosh \varphi, & K > 0, \end{cases} \quad (24.21)$$

описывающее минимальную поверхность в трехмерном пространстве-времени де Ситтера. Уравнение (24.21) является обобщением на случай знаконеопределенной метрики известного в дифференциальной геометрии результата о вложении минимальной поверхности в трехмерное пространство постоянной кривизны.

Нелинейные уравнения (24.18), описывающие релятивистскую струну в пространстве-времени де Ситтера, обладают замечательным свойством — они допускают представление Лакса. Поэтому для их исследования может быть применен метод обратной задачи рассеяния [87].

При построении пары операторов Лакса для системы (24.18) будем использовать тот факт, что уравнения Гаусса (24.10), Петерсона–Кодацци (18.32), Риччи (18.33) являются условием совместности системы уравнений первого порядка, описывающих движение базиса по мировой поверхности струны [69]. В пространстве де Ситтера введем координаты Вейерштрасса (24.8) и в качестве подвижного базиса возьмем два касательных вектора к мировой поверхности струны $z_{,1}^\mu$ и $z_{,2}^\mu$, две единичные нормали η_3^μ и η_4^μ и вектор z^μ . В теории струны вектор $z_{,1}^\mu$ должен быть времениподобным, а векторы $z_{,2}^\mu$, η_3^μ , η_4^μ — пространственноподобными. Учитывая это, а также выбор знаков в квадратичной форме (24.8), получаем уравнения, описывающие движение базиса

$$z_{,1}^\mu, z_{,2}^\mu, \eta_3^\mu, \eta_4^\mu, z^\mu \quad (24.22)$$

по мировой поверхности струны [69]:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_j z^\mu_{,i} &= \sum_{\sigma=3}^4 \epsilon_\sigma b_{\sigma|ij} \eta_\sigma^\mu - K a_{ij} z^\mu; \\ \eta_{\sigma,i}^\mu &= -b_{\sigma|ij} a^{jm} z_{,m}^\mu + \sum_\tau \epsilon_\tau \nu_{\tau\sigma|i} \eta_\sigma^\mu. \end{aligned} \right\} \quad (24.23)$$

Свертка с метрическим тензором a^{ij} первого уравнения (24.23) дает с учетом (24.13) известный результат в теории минимальных поверхностей, вложенных в пространства постоянной кривизны [96]: действие оператора Лапласа–Бельтрами на вектор z^μ определяется уравнением

$$\square z^\mu = -2Kz^\mu. \quad (24.24)$$

Ни в какой системе криволинейных координат u^1, u^2 уравнение (24.24) не линеаризуется, в отличие от уравнения (19.6) при $m = 2$. Поэтому не удастся явно построить общее решение для (24.24) и на его основе получить общие решения для соответствующих уравнений вложения Гаусса и Петерсона–Кодадзи (24.18), следуя рассуждениям § 20. Однако геометрическая природа уравнений (24.18) позволяет построить для них операторное представление Лакса.

Вместо векторов (24.22) введем ортонормальный подвижный базис

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= z_{,1} e^{\varphi/2}; \quad \bar{e}_2 = iz_{,2} e^{\varphi/2}; \quad \bar{e}_3 = ie_3; \quad \bar{e}_4 = ie_4; \\ \bar{e}_5 &= \sqrt{\epsilon} \frac{z^\mu}{R}; \quad \bar{e}_a \bar{e}_b = \delta_{ab}. \end{aligned} \quad (24.25)$$

С помощью формул (24.23) и (24.25) мы получаем следующие уравнения, описывающие движение базиса $\{\bar{e}_a\}$ по минимальной поверхности:

$$\frac{\partial \bar{e}_a}{\partial u^j} = \sum_{b=1}^5 \omega_{ab}^j \bar{e}_b, \quad a, b = 1, \dots, 5, \quad j = 1, 2, \quad (24.26)$$

где ω^j – матрицы, размером 5×5 , принадлежащие алгебре Ли группы $SO(5)$:

$$\omega^1 = \begin{vmatrix} 0 & i(\varphi_{,2}/2) & iQ_c & 0 & -\sqrt{\epsilon} R^{-1} e^{\varphi/2} \\ -i(\varphi_{,2}/2) & 0 & 0 & -Q_s & 0 \\ -iQ_c & 0 & 0 & \theta_{,2}/2 & 0 \\ 0 & Q_s & -\theta_{,2}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\epsilon} R^{-1} e^{\varphi/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (24.27)$$

$$\omega^2 = \begin{vmatrix} 0 & i\varphi_{,1}/2 & 0 & -iQ_s & 0 \\ -i\varphi_{,1}/2 & 0 & -Q_c & 0 & i\sqrt{\epsilon} R^{-1} e^{\varphi/2} \\ 0 & Q_c & 0 & \theta_{,1}/2 & 0 \\ -iQ_s & 0 & -\theta_{,1}/2 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{\epsilon} R^{-1} e^{\varphi/2} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (24.28)$$

где $Q_c = q e^{\varphi/2} \cos(\theta/2)$; $Q_s = q e^{\varphi/2} \sin(\theta/2)$.

Теперь используем тот факт, что группа $SO(5)$ допускает представление матрицами (4×4) . В этом представлении генераторы группы $SO(5)$ определяются формулами

$$I_{\mu\nu} = (1/4) [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad \mu, \nu = 1, \dots, 5, \quad (24.29)$$

где γ_μ – известные матрицы Дирака

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, 5. \quad (24.30)$$

Для дальнейшего удобно взять такое представление γ -матриц, в котором матрица $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ диагональна:

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_k \\ -i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (24.31)$$

где σ_k , $k = 1, 2, 3$, – матрицы Паули.

Уравнениям (24.26) можно однозначно сопоставить следующие две системы линейных уравнений, содержащие теперь только по четыре уравнения:

$$\frac{\partial \psi_a}{\partial u^j} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu > 1}^5 \omega_{\mu\nu}^j (\gamma_\mu \gamma_\nu)_{ab} \psi_b = \frac{1}{4} \Omega_{ab}^j \psi_b, \quad j = 1, 2. \quad (24.32)$$

Здесь $\psi_a(u^1, u^2)$ – четырехкомпонентная функция-столбец, а Ω^j – матрицы (4×4) вида

$$\Omega^j = 2 \sum_{\mu > \nu = 1}^5 \omega_{\mu\nu}^j \gamma_\mu \gamma_\nu, \quad j = 1, 2. \quad (24.33)$$

Чтобы выписать эти матрицы явно, введем обозначения

$$\Omega^j = \begin{pmatrix} a_{11}^j & a_{12}^j \\ a_{21}^j & a_{22}^j \end{pmatrix}, \quad (24.34)$$

где a_{kl}^j – матрицы (2×2) . Используя (24.26)–(24.33), получаем для a_{kl}^j в уравнениях (24.34) разложения по матрицам σ_i :

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^1 &= Q^* \sigma_1 - \kappa_{,2}^* \sigma_3; & a_{11}^2 &= -iQ^* \sigma_1 - \kappa_{,1}^* \sigma_3; \\ a_{12}^1 &= a_{21}^1 = -i\sigma_1 R^{-1} \sqrt{\epsilon} e^{\varphi/2}; & a_{12}^2 &= a_{21}^2 = -\sigma_2 \sqrt{\epsilon} R^{-1} e^{-\varphi/2}; \\ a_{22}^1 &= Q\sigma_2 - \kappa_{,2} \sigma_3; & a_{22}^2 &= -iQ\sigma_1 - \kappa_{,1} \sigma_3; \end{aligned} \right\} (24.35)$$

где $Q = qe^{\kappa}$; $2\kappa = \varphi + i\theta$; $\epsilon = \pm 1$.

Условия совместимости для линейных уравнений (24.32)

$$\Omega_{,2}^1 - \Omega_{,1}^2 + (1/4) [\Omega^1, \Omega^2] = 0 \quad (24.36)$$

сводятся к системе двух нелинейных уравнений (24.18). Чтобы ввести спектральный параметр в (24.32), необходимо перейти к новым переменным \bar{u}^1, \bar{u}^2 :

$$\bar{u}^1 + \bar{u}^2 = \lambda (u^1 + u^2); \quad \bar{u}^1 - \bar{u}^2 = \lambda^{-1} (u^1 - u^2). \quad (24.37)$$

При этом уравнения (24.18) сохраняют свой вид, а в матричные элементы Ω_{ab}^j войдут комбинации $\lambda \pm 1/\lambda$. Мы не будем проделывать здесь эти элементарные преобразования.

В заключение кратко перечислим основные результаты других авторов, занимавшихся исследованием релятивистской струны в пространстве-времени с кривизной.

В [97] уравнения движения для релятивистской струны в общей теории относительности (24.5) получены из уравнений гравитационного поля точно так же, как Эйнштейн, Инфельд и Гоффман вывели геодезические уравнения движения для точечной сингулярности из полевых уравнений теории гравитации. Как и в плоском случае, уравнения (24.5) существенно упрощаются, если используются такие параметры τ, σ на мировой поверхности струны, для которых выполнены условия

$$(\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu + x'_\mu x'_\nu) g^{\mu\nu}(x) = 0, \quad \dot{x}_\mu x'_\nu g^{\mu\nu}(x) = 0. \quad (24.38)$$

С учетом (24.38) уравнения движения (24.5) записываются так:

$$\ddot{x}^\mu - x''^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu (\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho - x'^\nu x'^\rho) = 0. \quad (24.39)$$

В [65] уравнения (24.39) в теории замкнутой струны решены для гравитационного поля, имеющего вид монохроматической волны:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \epsilon_\mu \epsilon_\nu \exp(ikx); \\ \epsilon^2 = k^2 = k\epsilon = 0, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

В этом случае пространство-время плоское в направлении векторов k и ϵ . Решение имеет резонансный характер, как и при взаимодействии заряженной релятивистской струны с плоской электромагнитной волной (см. § 16).

В [98] получено точное решение для свободной конечной струны в пространстве-времени с метрикой

$$ds^2 = 2dx^1 dx^4 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c[(x^2)^2 \pm (x^3)^2] (dx^4)^2,$$

где c — константа (пространство-время Переса, описывающее сильные гравитационные волны с изотропным тензором энергии-импульса).

25. Обобщение струнной модели в геометрическом подходе

Для простоты ограничимся случаем трехмерного пространства-времени. В геометрическом подходе естественным обобщением модели релятивистской струны является рассмотрение более общего класса *мировых поверхностей с постоянной средней кривизной* $h = \text{const}$. Ниже изложен геометрический подход к теории одномерно-протяженного объекта с мировой поверхностью постоянной средней кривизны в трехмерном пространстве-времени [99].

В изотермической системе координат (19.12) на произвольной поверхности $x^\mu(u^1, u^2)$, вложенной в трехмерной псевдоевклидово пространство, первая и вторая квадратичные формы имеют вид

$$\Phi_1 = ds^2 = \lambda du^+ du^-; \quad (25.1)$$

$$\Phi_2 = h ds^2 + (1/2) \lambda [Q_+ (du^+)^2 + Q_- (du^-)^2], \quad (25.2)$$

где $2Q_\pm = b_1^1 - b_2^2 \pm 2b_2^1$ и введены конусные переменные $u^\pm = u^1 \pm u^2$. Коэффициенты этих форм $\lambda = g_{11}$, b_{ij} , $i, j = 1, 2$, как функции координат u^i , заданных на поверхности, должны удовлетворять дифференциальным уравнениям Гаусса (18.31) и Петерсона—Кодацци (18.32).

Уравнения Петерсона—Кодацци в нашем случае записываются так:

$$\frac{\partial h}{\partial u^-} - \lambda^{-1} \frac{\partial(\lambda Q_-)}{\partial u^+} = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial u^+} - \lambda^{-1} \frac{\partial(\lambda Q_+)}{\partial u^-} = 0. \quad (25.3)$$

Учитывая, теперь, что для рассматриваемой поверхности $h = \text{const}$, получаем

$$\lambda Q_\pm = q_\pm(u^\pm), \quad (25.4)$$

где $q_\pm(u^\pm)$ — произвольные функции. Оставшийся после наложения условий (19.12) произвол в выборе координатной сетки на данной поверхности можно использовать, чтобы зафиксировать координатную сеть в линиях кривизны [67]:

$$b_{12} = 0. \quad (25.5)$$

Используя инвариантность уравнений (19.2) и (19.12) относительно конформных преобразований координат $\tilde{u}^\pm = \tilde{u}^1 \pm \tilde{u}^2 = f_\pm(u^\pm)$, легко

показать, что соответствующим выбором функций условию (25.5) всегда можно удовлетворить. Действительно, если положить

$$\tilde{u}^{\pm} = 2 \int du^{\pm} \sqrt{q_{\pm}(u^{\pm})}, \quad (25.6)$$

то первая и вторая квадратичные формы (25.1), (25.2) преобразуются следующим образом:

$$\Phi_1 = ds^2 = \frac{\lambda}{4\sqrt{q_+q_-}} [(d\tilde{u}^1)^2 - (d\tilde{u}^2)^2]; \quad (25.7)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{h\lambda}{\sqrt{q_+q_-}} \right) (d\tilde{u}^1)^2 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{h\lambda}{\sqrt{q_+q_-}} \right) (d\tilde{u}^2)^2. \quad (25.8)$$

В новых переменных (25.6) уравнение Гаусса имеет вид

$$\square \ln \lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2 \lambda}{\sqrt{q_+q_-}} - \frac{\sqrt{q_+q_-}}{\lambda} \right), \quad \square \equiv \frac{\partial^2}{(\partial u^1)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial u^2)^2}. \quad (25.9)$$

Если средняя кривизна поверхности (25.9) $h = 0$, то, вводя обозначение $\lambda = (1/4)\sqrt{q_+q_-} e^{\varphi}$ из (25.9), получаем уравнение Лиувилля (20.7). В рассматриваемом случае ($h = \text{const}$) с помощью замены $\lambda = \sqrt{q_+q_-} e^{\varphi}/h$ (25.9) сводится к нелинейному уравнению на функцию $\Phi(u^1, u^2)$:

$$\square \varphi = h \operatorname{sh} \varphi. \quad (25.10)$$

С учетом этой замены первая и вторая квадратичные формы (25.7), (25.8) принимают вид

$$\Phi_1 = \frac{e^{\varphi}}{4h} [(du^1)^2 - (du^2)^2], \quad (25.11)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{4} (1 + e^{\varphi}) (du^1)^2 + \frac{1}{4} (1 - e^{\varphi}) (du^2)^2. \quad (25.12)$$

Таким образом, в трехмерном пространстве-времени теория одномерно-протяженного релятивистского объекта с мировой поверхностью постоянной средней кривизны сводится к одному нелинейному уравнению (25.10).

Покажем теперь, каким образом рассматриваемая модель может быть изложена в обычном подходе, когда в качестве динамических переменных выбираются координаты $x^{\mu}(u^1, u^2)$ радиус-вектора мировой поверхности. Уравнение (25.10) по своему построению является условием совместности деривационных формул Гаусса-Вейнгартена (18.27), (18.29). Для данной поверхности они записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= (1/2)\lambda^{-1} (\dot{\lambda} \dot{x} + \lambda' x') - b_{11} n; \\ \dot{x}' &= (1/2)\lambda^{-1} (\lambda' \dot{x} + \dot{\lambda} x') - b_{12} n; \\ x'' &= (1/2)\lambda^{-1} (\dot{\lambda} \dot{x} + \lambda' x') - b_{22} n, \end{aligned} \right\} \quad (25.13)$$

где $n = [\dot{x} \times x'] / \sqrt{|g|}$ (25.13) — единичный пространственноподобный вектор*. Вычитая в (25.13) из первого уравнения третье и учитывая (19.5), получаем хорошо известный в теории поверхностей [72] результат

$$\square x + 2h [\dot{x} \times x'] = 0, \quad (25.14)$$

справедливый для любого регулярного отображения $x^{\mu}(u^1, u^2)$. В изотермической системе координат (19.12) на рассматриваемой поверхности $x^{\mu}(u^1, u^2)$ уравнения движения (25.14) есть уравнения Эйлера для функционала

$$S = -\kappa \iint d^2 u \left\{ \sqrt{-g} + \frac{2h}{3} (x [\dot{x} \times x']) \right\}. \quad (25.15)$$

Здесь следует отметить сходство рассматриваемой модели с теорией релятивистской струны, взаимодействующей специальным образом с внешним скалярным полем [79].

Условия калибровки для $x^{\mu}(u^1, u^2)$, позволяющие зафиксировать координатную сеть в линиях кривизны (25.5), можно получить, используя конформную инвариантность уравнений движения (25.14) и дополнительных условий (4.2). Для этого, как обычно, перейдем к новым переменным $\tilde{u}^i(u)$ по формуле (25.6), в которой следует положить:

$$q_{\pm}(u^{\pm}) = \frac{[\dot{x} \times x']}{2\dot{x}^2} (\ddot{x} + x'' \pm 2\dot{x}'),$$

тогда в этих переменных выполняются следующие условия:

$$\dot{x}' [\dot{x} \times x'] = 0; \quad (\ddot{x} + x'') [\dot{x} \times x'] = \dot{x}^2/2. \quad (25.16)$$

Подставляя разложения (25.13) в (25.15), получаем для коэффициентов второй квадратичной формы выражения (25.8).

Таким образом, в трехмерном пространстве-времени динамика одномерно-протяженного релятивистского объекта с мировой поверхностью постоянной средней кривизны h в обычном подходе полностью определяется уравнениями движения (25.14) и дополнительными условиями (4.2), (25.16).

* Векторное произведение $[a \times b]$ в трехмерном пространстве Минковского определяется формулой $[a \times b]^{\mu} = \epsilon^{\mu\nu\rho} a_{\nu} b_{\rho}$, $\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2$; $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ — полностью антисимметричный тензор, $\epsilon^{012} = 1$, $\epsilon_{\mu\nu\rho} \epsilon^{\mu\nu\sigma} = (\delta_{\nu}^{\lambda} \delta_{\rho}^{\sigma} - \delta_{\nu}^{\sigma} \delta_{\rho}^{\lambda})$.

Уравнение (25.10) по своему построению является условием совместности деривационных формул Гаусса (25.13) и Вейнгартена (18.29), представляющих собой дифференциальные операторы первого порядка. Поэтому представляется естественным рассматривать эти операторы в качестве пары операторов Лакса, которые необходимы для решения нелинейного уравнения (25.10) методом обратной задачи рассеяния [87].

Введем в рассмотрение единичный ортогональный базис

$$e_1 = \dot{x}/\sqrt{g_{11}}; \quad e_2 = -ix'/\sqrt{|g_{22}|}; \quad e_3 = -in, \quad (25.17)$$

где \dot{x} и x' — касательные векторы в данной точке поверхности, а n — единичный пространственноподобный вектор, ортогональный к \dot{x} и x' . При движении по поверхности с метрикой (25.7) изменение этого базиса сводится к вращению в трехмерном евклидовом пространстве R_3 . Деривационные формулы Гаусса—Вейнгартена в базисе (25.17) записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial u^1} &= \frac{i\varphi_{,2}}{2} e_2 - i\sqrt{h} \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2} e_3; & \frac{\partial e_1}{\partial u^2} &= \frac{i\varphi_{,1}}{2} e_2; \\ \frac{\partial e_2}{\partial u^1} &= -i \frac{\varphi_{,2}}{2} e_1, & \frac{\partial e_2}{\partial u^2} &= -\frac{i\varphi_{,1}}{2} e_1 + \sqrt{h} \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2} e_3; \\ \frac{\partial e_3}{\partial u^1} &= i\sqrt{h} \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2} e_1, & \frac{\partial e_3}{\partial u^2} &= -\sqrt{h} \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2} e_2. \end{aligned} \right\} \quad (25.18)$$

Кососимметрические матрицы, стоящие в правых частях этих уравнений, являются матрицами бесконечно малых вращений в трехмерном евклидовом пространстве R_3 . Такое вращение подвижного трехгранника $\{e_a\}$ можно описать на языке спиноров $\psi(u^1, u^2)$:

$$\partial\psi/\partial u^j = (i/2)(\omega^j \sigma) \psi, \quad j = 1, 2, \quad (25.19)$$

где

$$\omega^1 = (i\sqrt{h} \operatorname{sh}(\varphi/2), i\varphi_{,2}/2, 0); \quad \omega^2 = (0, i\varphi_{,1}/2, \sqrt{h} \operatorname{ch}(\varphi/2)).$$

Для удобства в формуле (25.19) совершен поворот в спинорном пространстве $\psi(u^1, u^2)$ на угол $\pi/2$ вокруг оси x . Геометрически спиноры $\psi(u^1, u^2)$ являются чисто вспомогательными величинами. Тем не менее, условие совместности спинорных уравнений (25.19), так же как и условие совместности для (25.18), дает уравнение Гаусса (25.10) для квадратичных форм (25.11) и (25.12). Величины ω^j в (25.19) зависят только от функции $\varphi(u^1, u^2)$, в то время как для метода обратной задачи рассеяния необходимо ввести в ω^j еще и спектральный параметр γ . Для этого воспользуемся инвариантностью уравне-

ния (25.10) при лоренцевых преобразованиях в двумерном пространстве u^1, u^2 : $\tilde{u}^1 + \tilde{u}^2 = \gamma(u^1 + u^2)$, $\tilde{u}^1 - \tilde{u}^2 = \gamma^{-1}(u^1 - u^2)$. Уравнения (25.19) инвариантны относительно такой замены и принимают вид

$$\partial\psi/\partial u^j = (i/2)\Omega_k^j(\varphi, \gamma)\sigma_k \psi, \quad j = 1, 2. \quad (25.20)$$

Здесь

$$\Omega_k^1 = \left\{ 2i\gamma_+ \sqrt{h} \operatorname{sh}(\varphi/2), i\varphi_{,2}/2, -2\gamma_- \sqrt{h} \operatorname{ch}(\varphi/2) \right\};$$

$$\Omega_k^2 = \left\{ -2i\gamma_- \sqrt{h} \operatorname{sh}(\varphi/2), i\varphi_{,1}/2, 2\gamma_+ \sqrt{h} \operatorname{ch}(\varphi/2) \right\}$$

и введены обозначения $\gamma_{\pm} = (\gamma \pm \gamma^{-1})/4$. Условия совместности уравнений (25.20) дают по-прежнему нелинейное уравнение (25.10).

Согласно (25.20), линейная спектральная задача для (25.10) сводится к уравнению

$$d\psi/dx = (i/2)\Omega_k^2(\varphi, \gamma)\sigma_k \psi, \quad x = \tilde{u}^2, \quad t = \tilde{u}^1. \quad (25.21)$$

Далее можно стандартным путем использовать метод обратной задачи рассеяния (см., например [87]) для решения задачи Коши, введения переменных "действие—угол" для гамильтоновой системы, связанной с уравнением (25.10), и построения бесконечных серий законов сохранения. Однако на этих вопросах здесь мы останавливаться не будем.

Предложенное обобщение модели релятивистской струны существенно отличается от других работ по этому вопросу тем, что в теории сохраняется инвариантность относительно выбора координат u^1 и u^2 на мировой поверхности струны. Именно это обстоятельство и позволяет в конечном счете описать динамику модели нелинейным уравнением (25.10).

Нами совершенно не затрагивалась проблема граничных условий, т.е. одномерно-протяженный релятивистский объект (струна) рассматривался как бесконечный. Для физических приложений интересно исследовать в рамках данной модели граничные условия для струны со свободными концами или же поместить на концы точечные массы. В последнем случае можно поставить задачу в духе работ [55, 56] о потенциале, к которому приводит связь двух точечных масс струной в рассматриваемой нами обобщенной модели.

Обобщение струнной модели в четырехмерном пространстве Минковского в рамках данного метода рассматривалось в [100].

СВЯЗЬ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ С ПОЛЕВЫМИ МОДЕЛЯМИ. ОБОБЩЕНИЕ СТРУННОГО ПОДХОДА К ФИЗИКЕ АДРОНОВ

26. Струноподобные решения классических полевых уравнений

Вихревые решения в теории сверхпроводимости. Такие решения хорошо известны в теории сверхпроводимости и сверхтекучести. Наглядно локализацию магнитного поля в одном измерении можно представить себе так. Возьмем длинную полость внутри сверхпроводника и поместим в нее два магнитных заряда противоположных знаков. Так как магнитное поле не проникает внутрь сверхпроводника, то оно будет полностью локализовано внутри полости.

Более реалистичский пример, не использующий гипотетические магнитные заряды — это проникновение магнитного поля в сверхпроводник второго рода. Известно, что при определенном значении напряженности внешнее магнитное поле проникает внутрь сверхпроводника второго рода, но только в виде тонких сгустков магнитосиловых линий. Центральная часть этого сгустка находится не в сверхпроводящем состоянии, остальная масса проводника — в сверхпроводящем.

Такие вихревые решения были найдены в уравнениях сверхпроводимости которые базируются на следующем выражении для свободной энергии f сверхпроводника:

$$f = f_0 + \alpha(T) |\Psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \Psi \right|^2 + \frac{B^2}{8\pi}, \quad (26.1)$$

где f_0 — свободная энергия основного состояния; функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ имеет смысл волновой функции куперовской пары электронов; $e^* = 2e$ — заряд этой пары; m^* — эффективная масса пары; B — внешнее магнитное поле; T — температура.

Вихревые решения в Модели Хигса. Выражение для свободной энергии (26.1) является фактически нерелятивистским пределом хигсовского лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |(\partial_\mu + ieA_\mu)\Phi|^2 + a|\Phi|^2 - b(|\Phi|^2)^2, \quad (26.2)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; a и b — положительные константы. Поэтому естественно, что локализованные в одном измерении струноподобные решения были найдены и в уравнениях движения, соответствующих лагранжиану Хигса [3].

Если в полевой модели есть струноподобное решение, то можно показать, что лагранжиан, соответствующий этому решению, есть лагранжиан Намбу для релятивистской струны (2.11). Действительно, полевые функции в этом случае отличны от нуля только вдоль струны, поэтому

$$S_{\text{стр}} \sim \int dt \int ds \sqrt{1 - v_\perp^2}, \quad (26.3)$$

где t — время; s — параметр, совпадающий с длиной струны $(\partial x(t, s)/\partial s)^2 = 1$; множитель $\sqrt{1 - v_\perp^2}$ введен для учета лоренцевского сокращения за счет движения струны с поперечной скоростью v_\perp :

$$v_\perp = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \right). \quad (26.4)$$

Подставляя (26.4) в (26.3), получаем

$$S_{\text{стр}} \sim \int dt \int ds \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \right)^2}.$$

Если в этой формуле перейти от t и s к произвольным параметрам τ , σ на мировой поверхности струны, то получим, очевидно, действие Намбу (2.11).

В модели Хигса (26.2) струноподобные решения могут быть или бесконечными в пространстве, или замкнутыми, причем в последнем случае радиус кривизны струны должен быть значительно больше ее поперечных размеров. Чтобы получить в этом подходе конечную струну или вихрь, необходимо ввести источники магнитного поля — магнитные заряды или монополи, на которых могли бы заканчиваться магнитные силовые линии струны.

27. Струны в теории магнитных зарядов Дирака

В электродинамике Дирака с магнитными зарядами [6] струны являются чисто вспомогательным математическим понятием; они не несут энергию, и все наблюдаемые величины не зависят от их движения. Ситуация, однако, существенно меняется, если электромагнитное поле в теории Дирака заменить векторным полем с массой. В этой полевой модели струны представляют собой уже физические объекты так как они несут энергию. Лагранжиан, описывающий их движение, практически совпадает с лагранжианом Намбу (2.22). Рассмотрим кратко эту модель.

В электродинамике Дирака с магнитными зарядами уравнения Максвелла обобщаются следующим образом:

$$\partial F_{\mu\nu} / \partial x_\nu = -j_\mu^e; \quad (27.1)$$

$$\partial \tilde{F}_{\mu\nu} / \partial x_\nu = -j_\mu^m, \quad (27.2)$$

где $\tilde{F}_{\mu\nu} = (1/2)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ — тензор, дуальный к $F_{\mu\nu}$; j_μ^e и j_μ^m — токи, порождаемые электрическими и магнитными зарядами соответственно:

$$j_\mu^e(z) = \sum_e e \int \frac{dx_\mu}{ds} \delta^{(4)}(z - x(s)) ds;$$

$$j_\mu^m(z) = \sum_g g \int \frac{dx_\mu}{ds} \delta^{(4)}(z - x(s)) ds.$$

Отличие от обычной теории заключается в том, что в уравнении (27.2) в правой части стоит не нуль, а $-j_\mu^m$. Если есть магнитные заряды, то нельзя использовать обычное определение тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ через векторный потенциал A_μ ,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (27.3)$$

так как из (27.3) следует, что $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\text{div } \mathbf{H} = 0$, в то время как необходимо, чтобы $\text{div } \mathbf{H} = \rho^m$, где ρ^m — плотность магнитных зарядов.

Дирак предположил, что уравнение (27.3) в каждый момент времени нарушается в одной точке на замкнутой поверхности, окружающей магнитный заряд. Так как такая поверхность может быть выбрана произвольно, то связь (27.3) не выполняется фактически вдоль нити или струны, соединяющей магнитные заряды противоположных знаков или уходящей одним концом на бесконечность. Каждый магнитный полюс должен находиться на конце такой струны.

В пространстве Минковского дираковская струна покрывает двумерную поверхность $x^\mu(\tau, \sigma)$, на которой не выполняется уравнение (27.3). Дирак добавил в правую часть этого уравнения тензорное поле $\tilde{G}_{\mu\nu}(z)$, локализованное на мировой поверхности струн,

$$F_{\mu\nu}(z) = \partial_\mu A_\nu(z) - \partial_\nu A_\mu(z) + \tilde{G}_{\mu\nu}(z). \quad (27.4)$$

Подстановка (27.4) в (27.5) приводит к уравнению для $G_{\mu\nu}(z)$:

$$\partial^\nu G_{\mu\nu}(z) = j_\mu^m(z) = \sum_g g \int \frac{dx_\mu}{ds} \delta^{(4)}(z - x(s)) ds.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$G_{\mu\nu}(z) = \iint d^2v \delta^{(4)}(z - x(\tau, \sigma)) \sigma_{\mu\nu}(\tau, \sigma), \quad (27.5)$$

где $\sigma_{\mu\nu} = \partial(x_\mu, x_\nu) / \partial(\tau, \sigma)$; $d^2v = d\tau d\sigma$. Движение электрических зарядов описывается таким же уравнением, как и в электродинамике Максвелла:

$$m \frac{d^2 z_\nu}{ds^2} = e \frac{dz^\mu}{ds} F_{\nu\mu}(z). \quad (27.6)$$

Для магнитных зарядов постулируется аналогичное уравнение:

$$m \frac{d^2 z_\nu}{ds^2} = g \frac{dz^\mu}{ds} F_{\nu\mu}(z). \quad (27.7)$$

Действие в теории Дирака определяется выражением

$$S = - \sum_{e,g} m \int ds - \frac{1}{4} \int d^4z F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e \int A^\mu(z) \frac{dz_\mu(s)}{ds} ds. \quad (27.8)$$

При варьировании этого действия $F_{\mu\nu}$ необходимо рассматривать как функцию векторного потенциала A_μ и переменных струны согласно формулам (27.4) и (27.6). Варьирование S приводит к уравнениям (27.1), (27.6) и (27.7), в то время как уравнение (27.2) является следствием (27.4) и (27.5) в полной аналогии с теорией Максвелла. Существенно, что никаких уравнений для переменных струны $x_\mu(\tau, \sigma)$ не возникает, что отражает нефизический характер этих переменных.

Связь дираковской струны с дуальной струной. В [3] рассмотрено действие (27.8) для двух магнитных зарядов* противоположного знака $\pm g$, но в отличие от теории Дирака считается, что масса векторного поля $A_\mu(x)$ отлична от нуля и равна m_V . Можно предположить, например, что эта масса возникла в результате хиггсовского механизма при взаимодействии поля A_μ со скалярным полем Φ согласно лагранжиану (26.2). Уравнение (27.1) заменяется теперь уравнением Клейна-Гордона с правой частью

$$(\square - m_V^2) A^\nu = -\partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu}, \quad (27.9)$$

причем на поле A_μ наложено условие Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$. Из (27.9) следует, что

$$A^\nu(z) = -\int \Delta(z-y) \partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu}(y) d^4y, \quad (27.10)$$

где $\Delta(z)$ — функция Грина уравнения (27.9). Исключая из формулы (27.8) поле A_μ , с помощью (27.10) получаем выражение для эффективного действия, зависящее только от переменных струны $x^\mu(\tau, \sigma)$:

$$\begin{aligned} \int d^2v \tilde{\mathcal{L}}_{\text{эф}} = & \frac{1}{4} g^2 m_V^2 \iint d^2v d^2\bar{v} \sigma_{\mu\nu} \Delta(x - \bar{x}) \bar{\sigma}^{\mu\nu} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \iint g^{(i)} g^{(j)} \dot{x}^{(i)\mu} \Delta(x^{(i)} - \bar{x}^{(j)}) \dot{\bar{x}}^{(j)\nu} d\tau d\bar{\tau} - \end{aligned}$$

* Название "магнитные заряды" в этом случае чисто условное и основывается только на аналогии рассматриваемой здесь модели с теорией монополя Дирака.

$$- \sum_{i=1}^2 \int m^{(i)} \sqrt{\dot{x}^{(i)\mu} \dot{x}^{(i)\mu}} d\tau. \quad (27.11)$$

Первое слагаемое в этой формуле представляет собой юкавское взаимодействие двух мировых поверхностей $x^\mu(\tau, \sigma)$ и $\bar{x}^\mu(\bar{\tau}, \bar{\sigma})$, которое переносится векторным полем $A_\mu(x)$. Второе слагаемое обусловлено взаимодействием магнитных токов друг с другом и их самодействием. Наконец, третье слагаемое есть кинетический член магнитных монополей с массами $m^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Переменные струны $x^\mu(\tau, \sigma)$ исчезают из эффективного действия (27.11), если векторное поле безмассовое, $m_V = 0$, и струна в этом случае, как уже отмечалось выше, становится нефизическим объектом.

Из геометрических соображений ясно, что первый член в формуле (27.11) с учетом δ -образного характера функции Грина $\Delta(z)$ пропорционален площади мировой поверхности струны $x^\mu(\tau, \sigma)$, соединяющей монополи. Более детальный расчет [3, 101] показывает, что этот член действительно сводится к лагранжиану струны

$$\mathcal{J}_{\text{стр}} = -\gamma \sqrt{|\det(\sigma_{\mu\nu})|}, \quad (27.12)$$

причем константа γ оказывается равной

$$\gamma = \frac{1}{2\pi\alpha'} = \frac{g^2}{8\pi} m_V^2 \ln\left(\frac{1}{r_\perp^2 m_V^2} + 1\right),$$

где величина r_\perp характеризует поперечные размеры струны. Как было показано выше при рассмотрении хигсовского лагранжиана (26.2), поперечные размеры струны характеризуются величиной m_S^{-1} , где m_S — масса скалярного поля Хигса, поэтому можно положить $r_\perp \sim m_S^{-1}$ (см. работы [3]).

Если расстояние между магнитными зарядами велико по сравнению с m_V^{-1} , то в формуле (27.11) будет доминировать лагранжиан струны (27.12). В этом случае первое и третье слагаемые (27.11) дают действие релятивистской струны с массами на концах (12.1). На малых расстояниях главную роль начинает играть взаимодействие между монополями, описываемое вторым членом в формуле (27.11). В статическом случае между монополями действует потенциал притяжения Юкавы $(-g^2/4\pi) \exp(-m_V r)/r$. Это взаимодействие, очевидно, будет сдвигать низколежащие уровни в спектре масс струны.

28. Нелинейные модели Борна—Инфельда и релятивистская струна

Релятивистская струна тесно связана с нелинейными моделями Борна—Инфельда в двумерном пространстве-времени [7, 22]. Простейшая модель такого типа для скалярного безмассового поля $\varphi(t, x)$ задает

ся лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\kappa^2 \sqrt{1 - \kappa^{-2}(\varphi_t^2 - \varphi_x^2)}, \quad (28.1)$$

где $\varphi_x = \partial\varphi(t, x)/\partial x$, $\varphi_t = \partial\varphi(t, x)/\partial t$, а κ — константа, имеющая размерность обратной длины. В физике элементарных частиц лагранжиан (28.1) рассматривался Д.И. Блохинцевым [102] как простейший пример существенно нелинейной полевой модели, а также В. Гайзенбергом [103] в мезодинамике при исследовании мезонных ливней. (Полевую модель называют *существенно нелинейной* [102], если в ее уравнениях движения коэффициенты при старших (вторых) производных не постоянны, а являются функциями полевых переменных и их первых производных. В математике такие уравнения называют квазилинейными. Характеристики (т.е. направления, по которым распространяются возмущения) для квазилинейных уравнений не прямолинейны. Их форма в каждой точке зависит от значений полевых переменных и их градиентов в этой точке [102]).

Варьирование этого лагранжиана приводит к нелинейному уравнению на поле $\varphi(t, x)$

$$(\kappa^2 + \varphi_x^2) \varphi_{tt} - 2\varphi_t \varphi_x \varphi_{tx} - (\kappa^2 - \varphi_t^2) \varphi_{xx} = 0. \quad (28.2)$$

Если $[1 - \kappa^{-2}(\varphi_t^2 - \varphi_x^2)] > 0$, то (28.2) — уравнение гиперболического типа. При $\kappa \rightarrow \infty$ лагранжиан (28.1) переходит в лагранжиан свободного поля $\varphi(t, x)$, а уравнение (28.2) — в уравнение Д'Аламбера.

Задача, описываемая уравнением (28.2), может быть сформулирована по-иному, в параметрическом виде. Функция $\varphi(t, x)$ описывает поверхность в трехмерном пространстве-времени $t, x, y = \kappa^{-1} \varphi(t, x)$. Эту поверхность можно задать параметрически, введя в рассмотрение лоренцевский вектор x^μ ($\mu = 0, 1, 2$), зависящий от двух параметров τ, σ и имеющий компоненты

$$x^\mu(\tau, \sigma) = (t(\tau, \sigma); x(\tau, \sigma); y(\tau, \sigma) = \kappa^{-1} \varphi(t(\tau, \sigma); x(\tau, \sigma)). \quad (28.3)$$

Учитывая, что

$$\varphi_x = \kappa^2 \frac{\begin{vmatrix} y' & t' \\ \dot{y} & \dot{t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix}}; \quad \varphi_t = \kappa^2 \frac{\begin{vmatrix} x' & t' \\ \dot{x} & \dot{t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix}} \quad (28.4)$$

и то, что при переходе к интегрированию по переменным τ, σ произведение $dt dx$ следует заменить выражением $(x' \dot{t} - \dot{x} t') d\tau d\sigma$, для функции действия, соответствующей лагранжиану (28.1), получим следующее выражение:

$$S = -\kappa^2 \int dt \int dx \sqrt{1 - \kappa^{-2}(\varphi_t^2 - \varphi_x^2)} = \\ = -\kappa^2 \int d\tau \int d\sigma - \sqrt{(\dot{x} x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}. \quad (28.5)$$

А это и есть действие бесконечной релятивистской струны (2.22) в трехмерном пространстве-времени $x^\mu = (t, x, y)$.

Если в электродинамике Борна–Инфельда с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\kappa^2 \sqrt{1 + \kappa^{-2} F - \kappa^{-4} G^2},$$

где $F = (1/2)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$; $G = (1/4)\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}$; $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, рассматривать только плоские волны, то задача сведется к исследованию лагранжиана релятивистской струны. Пусть волна распространяется вдоль оси x . Потенциал $A_\mu(x)$ в этом случае зависит только от t и x . Если исключить из рассмотрения электрическое поле, направленное по оси x , $F_{01} = 0$, то в лагранжиан Борна–Инфельда войдут только две компоненты потенциала $A_\mu(x) - A_y(t, x)$ и $A_z(t, x)$:

$$\mathcal{L} = -\kappa^2 \sqrt{(1 + \kappa^2 \sum_{i=y,z} A_{i,x}^2)(1 - \kappa^2 \sum_{i=y,z} A_{i,t}^2) + (\kappa^2 \sum_{i=y,z} A_{i,t} A_{i,x})^2}.$$

Переход от переменных (t, x) к (τ, σ) опять приводит к действию для релятивистской струны (2.22) в четырехмерном пространстве $(t, x, \kappa^{-1}A_y, \kappa^{-1}A_z)$.

Самый общий вид лагранжиана n полей типа Борна–Инфельда в двухмерном пространстве (t, x) , сводящийся к лагранжиану струны в пространстве $n+2$ измерений путем введения параметров τ и σ , дается выражением

$$\mathcal{L} = -\kappa^2 \sqrt{(1 + \kappa^{-2} \sum_{i=1}^n \varphi_{ix}^2)(1 - \kappa^{-2} \sum_{i=1}^n \varphi_{it}^2) + (\kappa^{-2} \sum_{i=1}^n \varphi_{it} \varphi_{ix})^2}. \quad (28.6)$$

Действие (28.6), описывающее одновременно и систему нелинейных скалярных полей Борна–Инфельда, и бесконечную релятивистскую струну, детально исследовалось в [7]. Была решена задача Коши для уравнений движения и исследовано рассеяние двух плоских волн в классическом случае. В этих же работах был предложен метод квантования, в котором нелинейные дополнительные условия накладываются на векторы состояний. Здесь же была получена алгебра связей, которая включает в себя как частный случай алгебру Вирасоро (10.8) в теории конечной струны (однако швингеровский член в этой алгебре, зависящий от размерности пространства-времени, не был найден).

Связь релятивистской струны с нелинейными полевыми моделями Борна–Инфельда исследовалась также в [104].

29. Струна и нелинейная двумерная сигма-модель

Покажем, как в теории релятивистской струны, движущейся в трехмерном пространстве-времени, возникает двумерная нелинейная сигма-модель с группой симметрии $SO(1, 2)/SO(1, 1)$ [105].

Естественным кандидатом на полевою переменную в нелинейной сигма-модели, связанной с релятивистской струной, является нормаль $m^\mu(u^1, u^2)$, $\mu = 0, 1, 2$ к мировой поверхности струны. Эта нормаль осуществляет отображение мировой поверхности струны, т.е. минимальной поверхности, на однополостный гиперboloид (гауссово отображение):

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 = -1. \quad (29.1)$$

Попытаемся получить замкнутые уравнения на нормаль $m^\mu(u^1, u^2)$. Для этого подействуем на левую и правую части уравнения (18.29) оператором ∇^i и просуммируем по $i = 1, 2$:

$$\nabla^i \nabla_i m^\mu = -\nabla^i (b_i^j x_{,j}^\mu) = -(\nabla^i b_i^j) x_{,j}^\mu - b_i^j \nabla^i x_{,j}^\mu. \quad (29.2)$$

Здесь использовано очевидное равенство $\nabla_i m^\mu = m_{,i}^\mu$, так как нормаль $m^\mu(u^1, u^2)$, как и радиус-вектор поверхности $x^\mu(u^1, u^2)$ — это скаляр по отношению к преобразованию криволинейных координат на поверхности u^1, u^2 . Первое слагаемое в правой части (28.2) преобразуем спомощью уравнения Петерсона–Кодацци (18.32), а второе — с помощью дериационных формул Гаусса (18.27):

$$\nabla_i \nabla^i m^\mu = -(\nabla^j b_i^j) m_{,j}^\mu + b_i^j m_{,j}^\mu. \quad (29.3)$$

Так как мировая поверхность струны является минимальной поверхностью, то согласно (19.2) $b_i^i = 0$. Формула (29.3) теперь принимает вид

$$\nabla_i \nabla^i m^\mu = b_i^j b_j^i m_{,i}^\mu. \quad (29.4)$$

Из дериационных формул Вейнгартена (18.29) с помощью (18.26) легко получить

$$m_{,i}^\mu m_{,\mu}^i = b_i^j b_k^i x_{,j}^\mu x_{,\mu}^k = b_i^j b_k^i g_j^k = b_i^j b_j^i. \quad (29.5)$$

Окончательно имеем следующие уравнения для нормали $m^\mu(u^1, u^2)$:

$$\nabla_i \nabla^i m^\mu - (m_{,\nu}^\nu m_{,\nu}^\mu) m^\mu = 0. \quad (29.6)$$

Напомним, что ковариантное дифференцирование ∇_i выполняется здесь по отношению к внутренней метрике на мировой поверхности струны (18.26). Поэтому система уравнений (29.6) будет замкнута, если будет задана метрика минимальной поверхности (18.26). Однако зависимость уравнений (29.6) от метрического тензора (18.26) чисто формальная, так как на мировой поверхности всегда можно выбрать конформно-плоскую систему координат

$$g_{11} = -g_{22}, \quad g_{12} = g_{21} = 0. \quad (29.7)$$

В результате уравнения (29.6) принимают вид

$$m_{,11}^{\mu} - m_{,22}^{\mu} - [(m_{,1}^{\nu} m_{\nu,1}) - (m_{,2}^{\nu} m_{\nu,2})] m^{\mu} = 0, \quad (29.8)$$

что в точности совпадает с уравнением для n -поля с группой симметрии $SO(1, 2)/SO(1, 1)$.

В теории n -поля уравнения (29.8) обычно дополняются условиями [81, 106]

$$(m_{,1}^{\mu} \pm m_{,2}^{\mu})^2 = 1, \quad (29.9)$$

что всегда можно сделать, учитывая конформную инвариантность (29.8), т.е. инвариантность при замене $\bar{u}^1 \pm \bar{u}^2 = f_{\pm}(u^1 \pm u^2)$. В модели релятивистской струны другие условия на первые производные нормали $m^{\mu}(u^1, u^2)$:

$$\bar{g}_{11} = m_{,1}^2 = -\bar{g}_{22} = -m_{,2}^2; \quad \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = (m_{,1} m_{,2}) = 0, \quad (29.10)$$

где \bar{g}_{ij} — метрический тензор на однополостном гиперboloиде $m^2 = -1$, на который нормаль $m^{\mu}(u^1, u^2)$ отображает мировую поверхность струны. Условия (29.10) непосредственно следуют из дериационных формул Вейнгартена (18.29) с учетом конформно-плоской метрики (29.7) в теории струны.

Таким образом, в теории релятивистской струны, движущейся в трехмерном пространстве-времени, естественно возникает нелинейная двумерная сигма-модель с группой симметрии $SO(1, 2)/SO(1, 1)$, задаваемая уравнениями (29.8) и условиями (29.10).

Сигма-модель в теории струны и нелинейное уравнение Лиувилля. Хорошо известна связь обычной $SO(3)/SO(2)$ нелинейной сигма-модели с уравнением синус-Гордона [106], которое интегрируется методом обратной задачи рассеяния. Сигма-модель (29.9), (29.10), возникающая в теории релятивистской струны, тесно связана с нелинейным уравнением Лиувилля, для которого известно общее решение (20.8). Установим эту связь, для чего необходимо обратиться к уравнениям Гаусса (18.31) и Петерсона—Кодацци (18.32) и рассмотреть их для гиперboloида

$$(m^{\mu})^2 = -1. \quad (29.11)$$

Коэффициенты второй квадратичной формы \bar{b}_{ij} для гиперboloида (29.11) определяются формулами (18.29), которые в данном случае имеют вид

$$\bar{\nabla}_j m_{,i}^{\mu} = -\bar{b}_{ij} m^{\mu}, \quad (29.12)$$

где $\bar{\nabla}_j$ означает ковариантное дифференцирование по отношению к метрике*

*В дифференциальной геометрии [70, 73] \bar{g}_{ij} называется тензором третьей квадратичной формы поверхности $x^{\mu}(u^1, u^2)$.

$$\bar{g}_{ij} = m_{,i}^{\mu} m_{\mu,j}. \quad (29.13)$$

В формулах (29.12) учтен тот факт, что единичной нормалью к гиперboloиду (29.11) является сам вектор m^{μ} . Из (29.12) и (29.13) получаем

$$\bar{b}_{ij} = (\bar{\nabla}_j m_{,i}^{\mu} m_{\mu}) = (m_{,ij}^{\mu} m_{\mu}) = -(m_{,i}^{\mu} m_{\mu,j}) = -\bar{g}_{ij}, \quad (29.14)$$

где \bar{g}_{ij} — метрический тензор (29.10) на гиперboloиде (29.11).

Покажем теперь, что геометрически уравнения (29.8) и (29.10), определяющие сигма-модель, эквивалентны одному нелинейному уравнению Лиувилля на скалярную функцию. Для этого покажем, что уравнения Гаусса (18.31) и Петерсона—Кодацци (18.22) для гиперboloида, определяемого уравнениями (29.1), (29.8) и (29.10), сводятся к уравнению Лиувилля (20.7).

Уравнения Петерсона—Кодацци (18.22) для \bar{b}_{ij} из (29.14)

$$\bar{\nabla}_k \bar{b}_{ij} = \bar{\nabla}_j \bar{b}_{ik} \quad (29.15)$$

в силу леммы Риччи $\bar{\nabla}_i \bar{g}_{kl} = 0$ удовлетворяются тождественно.

Нетривиально единственное уравнение Гаусса (18.31)

$$\bar{R}_{12\ 12} = \bar{b}_{12} \bar{b}_{12} - \bar{b}_{11} \bar{b}_{22}, \quad (29.16)$$

где $\bar{R}_{12\ 12}$ — тензор кривизны для метрики \bar{g}_{ij} . С учетом (29.13) и (29.10) уравнение (29.16) принимает вид

$$\bar{R}_{12\ 12} = -\bar{g}_{11} \bar{g}_{22} = (\bar{g}_{11})^2. \quad (29.17)$$

Вводя обозначение

$$\bar{g}_{11} = \exp \varphi \quad (29.18)$$

и используя известное выражение для \bar{R}_{ijkl} через \bar{g}_{ij} и его производные (см. § 20), получаем из (29.17) нелинейное уравнение Лиувилля

$$\varphi_{,11} - \varphi_{,22} = 2e^{\varphi}. \quad (29.19)$$

Общее решение этого уравнения, определяемое формулой (20.8), позволяет получить по формулам (29.18) и (29.14) общее решение для первой и второй квадратичных форм поверхности $m^{\mu}(u^1, u^2)$. Согласно основной теореме в теории поверхностей (см. § 18) это эквивалентно общему решению для самого радиуса-вектора поверхности $m^{\mu}(u^1, u^2)$. Таким образом, доказано, что классическая динамика нелинейной сигма-модели (29.8), (29.10) полностью описывается нелинейным уравнением Лиувилля (29.19).

Если струна движется в четырехмерном пространстве-времени, то в каждой точке ее мировой поверхности есть две единичные пространственноподобные нормали. Эти нормали и два единичных касательных вектора к мировой поверхности струны образуют подвижный базис.

Существенно, что теория струны допускает поворот этого базиса с помощью преобразований из группы $SO(1, 1) \times SO(2)$, которые не перемешивают касательное и нормальное пространство к мировой поверхности. Поэтому здесь должна возникнуть нелинейная двумерная сигма-модель на симметрическом пространстве $SO(1, 3)/[SO(1, 1) \times SO(2)]$.

В [107] модель релятивистской струны в n -мерном пространстве-времени представлена на классическом уровне как некоторый замкнутый подсектор $SO(1, 1) \times SO(n-2)$ калибровочной двумерной теории поля.

30. Метод квантования релятивистской струны, предложенный Поляковым

В этом подходе [108] вместо действия Намбу–Гото используется другое действие, квадратичное по координатам струны:

$$S = -\frac{\kappa^2}{2} \int \int_{\Omega} d^2 u \sqrt{|g|} g^{ij}(u) x_{,i}^{\mu} x_{,j}^{\mu}. \quad (30.1)$$

Здесь $x^{\mu}(u^1, u^2)$ — координаты струны; $g_{ij}(u^1, u^2)$ — вспомогательное поле симметричного тензора второго ранга, заданного в Ω ; κ — константа с размерностью массы, которую будем полагать далее равной единице. Это действие инвариантно относительно произвольных невырожденных преобразований параметров u^1, u^2 , по отношению к которым $x^{\mu}(u^1, u^2)$ — скаляры. Оно получило название *гравитационного*, или *индуцированного*, действия струны. Впервые действие (30.1) использовали в [109] для исследования модели спиновой струны.

На классическом уровне действие (30.1) полностью эквивалентно действию Намбу–Гото (3.1). Варьирование (30.1) по $x^{\mu}(u)$ дает уравнение

$$\square_g x^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial u^i} (g^{ij} \sqrt{|g|} x_{,j}^{\mu}) = 0, \quad (30.2)$$

где \square_g — ковариантный оператор Лапласа–Бельтрами для метрического тензора g_{ij} . Чтобы выписать уравнение движения, получающееся при варьировании (30.1) по g^{ij} , воспользуемся известным правилом дифференцирования определителя:

$$dg = dg_{ik} g^{ik} g = -g_{ik} dg^{ik} g. \quad (30.3)$$

Из этой формулы непосредственно следует:

$$\frac{\partial |g|^{1/2}}{\partial g^{ij}} = \frac{1}{2} |g|^{-1/2} \frac{\partial |g|}{\partial g^{ij}} = -\frac{1}{2} |g|^{-1/2} g g_{ij} = -\frac{1}{2} |g|^{1/2} g_{ij}. \quad (30.4)$$

Используя (30.4), получаем

$$\delta S / \delta g^{ij} = (1/2) \sqrt{|g|} T_{ij} = - (1/2) \sqrt{|g|} (x_{,i}^{\mu} x_{,\mu,j} - (1/2) g_{ij} x_{,k}^{\mu} x_{,\mu,l} g^{kl}) = 0. \quad (30.5)$$

Здесь $T_{ij}(u)$ — симметричный "метрический" тензор энергии-импульса полей $x^{\mu}(u)$.

В случае двумерной области Ω

$$g_{ij} g^{ij} = 2 \quad (30.6)$$

и решение уравнения (30.5) определяется равенством

$$g_{ij} \sim x_{,i}^{\mu} x_{,\mu,j}. \quad (30.7)$$

Таким образом, тензорное поле $g_{ij}(u)$ пропорционально метрике на мировой поверхности струны, индуцированной вложением этой поверхности в пространство Минковского. Если (30.7) подставить в (30.2), то получим требование минимальности для мировой поверхности струны. Таким образом, на классическом уровне действие (30.1) полностью эквивалентно действию Намбу–Гото (3.1).

Важным свойством действия (30.1) является его вейлевская (конформная) инвариантность, т.е. инвариантность по отношению к преобразованию метрики

$$g_{ij}(u) \rightarrow \exp(\omega(u)) g_{ij}(u). \quad (30.8)$$

Координаты струны $x^{\mu}(u^1, u^2)$ при этом не изменяются, так как конформный вес скалярного поля в двумерном пространстве-времени равен 2.

Квантование релятивистской струны, предложенное А.М. Поляковым, существенно базируется на том факте, что на квантовом уровне конформная инвариантность теории нарушается.

При квантовании рассматривается евклидов функциональный интеграл

$$Z = \int [dg_{ij}] [dx^{\mu}] \exp \left\{ - (1/2) \int d^2 u \sqrt{g} g^{ij} x_{,i}^{\mu} x_{,\mu,j} - \mu_0^2 \int d^2 u \sqrt{g} \right\}. \quad (30.9)$$

Добавка к классическому действию $-\mu_0^2 \int d^2 u \sqrt{g}$ введена для перенормировки. Выполняя интегрирование по частям в первом члене в показателе экспоненты, получаем

$$Z = \int [dg_{ij}] [dx^{\mu}] \exp \left\{ - (1/2) \int d^2 u \sqrt{g} x^{\mu} \square_g x^{\mu} - \mu_0^2 \int d^2 u \sqrt{g} \right\}. \quad (30.10)$$

Интегрирование по $[dx^{\mu}]$ выполним с учетом конформной аномалии

[32]. Для этого положим:

$$e^{-F} = \int [dx^\nu] \exp \left\{ - (1/2) \int d^2 u \sqrt{g} x^\nu \square_g x^\nu - \mu_0^2 \int d^2 u \sqrt{g} \right\}. \quad (30.11)$$

Эта величина представляет собой производящий функционал системы из n скалярных безмассовых полей (ν — индекс внутренней симметрии), находящихся в фоновом гравитационном поле $g_{ij}(u)$. Это стандартный прием при нахождении в *однопетлевом приближении* эффективного действия квантованного поля, находящегося во внешнем фоновом гравитационном поле [32].

Варьируя (30.11) по g^{ij} , получаем

$$\langle T_{ij} \rangle = - (2/\sqrt{g}) \delta F / \delta g^{ij}. \quad (30.12)$$

В конформно-плоской метрике

$$g_{ij}(u) = \rho(u) \delta_{ij} = \exp(\varphi(u)) \delta_{ij} \quad (30.13)$$

формула (30.12) дает

$$\langle T_i^i \rangle = - (2/\sqrt{g}) g^{ij} \frac{\delta F}{\delta g^{ij}} = -2 \frac{\delta F}{\delta \rho} = n Y(u, u', t), \quad (30.14)$$

где $Y(u, u', t)$ определяется из уравнения "теплопроводности" [32]

$$\frac{d}{dt} Y(u, u', t) = - \square_g Y(u, u', t); \quad (30.15)$$

$$Y(u, u', 0) = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta(u, u'). \quad (30.16)$$

Здесь "собственное время" t играет роль параметра обрезания, который должен быть положен равным нулю после того, как расходящаяся часть выделена и включена в перенормированную константу взаимодействия. Множитель n в правой части (30.14) появился из-за наличия n скалярных полей $x^\mu(u^1, u^2)$. Решение уравнения (30.15) разложением $Y(u, u', t)$ в ряд по t дает

$$Y(u, u, t) = - \frac{i}{4\pi t} + \frac{1}{24\pi} R + O(t), \quad (30.17)$$

где скалярная кривизна R в конформно-плоской метрике (30.13) определяется формулой

$$R = - (1/\rho) \partial^2 \ln \rho. \quad (30.18)$$

Отсюда следует:

$$\langle T_i^i \rangle = \frac{n}{24\pi} R + \text{const.} \quad (30.19)$$

Подставляя (30.19) в (30.14), получаем

$$-F = - \frac{n}{48\pi} \int d^2 u \left[\frac{1}{2} (\partial_i \ln \rho)^2 + \mu_0^2 \rho \right]. \quad (30.20)$$

Чтобы корректно учесть калибровку (30.13), в производящий функционал (30.9) необходимо ввести соответствующий определитель Фаддеева—Попова [108]

$$\Delta^{1/2}(\varphi) = \frac{1}{2} \ln \det L = \frac{26}{48\pi} \int d^2 u \left[\frac{1}{2} (\partial_i \varphi)^2 + \mu_0^2 e^\varphi \right], \quad (30.21)$$

где оператор L имеет вид

$$L_{ij} = \nabla^i \nabla^j - \nabla^j \nabla^i + g_{ij} \nabla^i \nabla^j. \quad (30.22)$$

Учитывая все это, получаем следующее выражение для производящего функционала (30.9):

$$Z = \int [d\varphi] \exp \left\{ - \frac{26-n}{48\pi} \int d^2 u \left[\frac{1}{2} (\partial_i \varphi)^2 + \mu_0^2 e^\varphi \right] \right\}. \quad (30.23)$$

Таким образом, квантовая теория релятивистской струны в пространстве-времени с размерностью n , не равной 26, свелась к квантовой теории безмассового скалярного поля $\varphi(u^1, u^2)$ в двумерном пространстве-времени. Это поле подчиняется нелинейному уравнению Лиувилля

$$\partial_i^2 \varphi + \mu_0^2 e^\varphi = 0. \quad (30.24)$$

Квантованию этого уравнения посвящено большое количество работ, но законченная теория еще не построена. Не имея возможности перечислить их все, мы приведем здесь ссылки только на некоторые из них [110, 111]. Важным моментом в этих исследованиях оказался выбор правильных граничных условий для уравнения Лиувилля [111]. Для замкнутой струны рассматриваются периодические граничные условия ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$)

$$\varphi(\tau, 0) = \varphi(\tau, 2\pi), \quad \varphi'(\tau, 0) = \varphi'(\tau, 2\pi). \quad (30.25)$$

Для открытой струны уравнение Лиувилля дополняется нелинейными граничными условиями

$$\varphi'(\tau, 0) = \rho_1 \exp[\varphi(\tau, 0)/2]; \quad \varphi'(\tau, \pi) = \rho_2 \exp[\varphi(\tau, \pi/2)], \quad (30.26)$$

$$0 \leq \sigma \leq \pi, \quad \rho_1, \rho_2 = \text{const.}$$

Интересно отметить, что условия (30.26) лишь знаками отличаются от граничных условий (20.12) в классической геометрической теории релятивистской струны с массами на концах, движущейся в трехмер-

ном пространстве-времени. Это различие оказывается принципиальным при построении решений уравнения Лиувилля, удовлетворяющих граничным условиям (30.26) и (20.12).

В [124] было предложено еще одно действие для релятивистской струны, эквивалентное на классическом уровне действию Намбу—Гото (3.1) и допускающее суперсимметричное обобщение.

31. Струнная модель бариона

Теория конечной релятивистской струны может претендовать на описание лишь мезонов, состоящих из двух кварков. Эти кварки должны быть помещены на концах струны. Барионы, в построении которых участвуют три кварка, требуют исследования более сложных струнных конфигураций (рис. 7). Качественному обсуждению таких струнных моделей посвящены работы [25, 112].

В первом варианте (рис. 7, а) отличие от конечной мезонной струны можно получить только в том случае, если третий кварк, помещенный в середине струны, имеет ненулевую массу. Из-за нелинейных граничных условий в точке, где находится массивный средний кварк, эта задача оказывается нерешенной в общем виде даже на классическом уровне. Если же концы струны устремить на бесконечность, т.е. рассматривать бесконечную струну, нагруженную точечной массой, то удастся построить общее решение уравнений движения и граничных условий на классическом уровне (см. § 14). Но квантовой теории этой модели также нет.

Струнные конфигурации второго типа (рис. 7, б) детально не исследовались.

Ряд работ [113 — 116] был посвящен струнной модели бариона (рис. 7, в). Три конечные струны имеют одну общую точку (глюонная тройная вершина), внешние концы струн считаются свободными. Рассмотрим кратко эту модель в специальной параметризации, когда все три мировые поверхности струн $x_{(i)}^\mu$, $i = 1, 2, 3$, описываются одними и теми же параметрами τ, σ : $-\infty < \tau < +\infty$; $0 \leq \sigma \leq \pi$ [114 — 116]. В общем случае [113] каждой ветви струны соответствуют свои параметры τ_i, σ_i , $i = 1, 2, 3$, однако построить решение уравнений движения в такой параметризации не удастся. Одна из трудностей, возникающих здесь, — это краевая задача с подвижной границей.

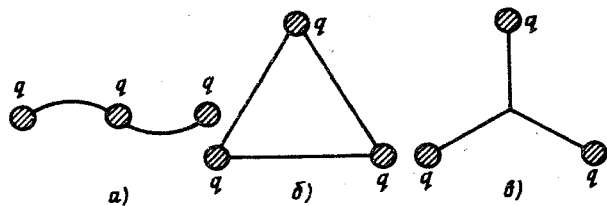


Рис. 7. Струнная модель бариона

Действие для барионной струны возьмем в виде суммы трех слагаемых:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi d\sigma \sum_{i=1}^3 \mathcal{L}_{(i)}, \quad (31.1)$$

где $\mathcal{L}_{(i)} = -\gamma [(\dot{x}_{(i)}^\mu x'_{(i)\mu})^2 - \dot{x}_{(i)}^2 x'^2_{(i)}]^{1/2}$. Точка и штрих означают, как обычно, дифференцирование по τ и σ соответственно. В точке соединения струн $\sigma = \pi$ имеем

$$x_{(1)}^\mu(\tau, \pi) = x_{(2)}^\mu(\tau, \pi) = x_{(3)}^\mu(\tau, \pi). \quad (31.2)$$

Чтобы получить уравнения движения и граничные условия, необходимо проварьировать действие (31.1), причем вариации $\delta x_{(i)}^\mu(\tau, \sigma)$ должны удовлетворять следующим требованиям: $\delta x_{(i)}^\mu(\tau_1, \sigma) = \delta x_{(i)}^\mu(\tau_2, \sigma) = 0$, $\delta x_{(i)}^\mu(\tau, 0)$ — произвольны, $\delta x_{(1)}^\mu(\tau, \pi) = \delta x_{(2)}^\mu(\tau, \pi) = \delta x_{(3)}^\mu(\tau, \pi)$. Такое варьирование дает уравнения движения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p_{(i)}^\mu + \frac{\partial}{\partial \sigma} \pi_{(i)}^\mu = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (31.3)$$

и граничные условия

$$\pi_{(i)}^\mu(\tau, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (31.4)$$

$$\sum_{i=1}^3 \pi_{(i)}^\mu(\tau, \pi) = 0, \quad (31.5)$$

где

$$p_{(i)}^\mu = -\partial \mathcal{L}_{(i)} / \partial \dot{x}_{(i)\mu}; \quad \pi_{(i)}^\mu = -\partial \mathcal{L}_{(i)} / \partial x'_{(i)\mu}. \quad (31.6)$$

Чтобы продвинуться дальше в анализе динамики барионной струны, на всех трех листах ее мировой поверхности вводится ортонормальная параметризация

$$(\dot{x}_{(i)}^\mu \pm x'_{(i)\mu})^2 = 0. \quad (31.7)$$

В результате уравнения движения и граничные условия принимают вид

$$\ddot{x}_{(i)}^\mu - x''_{(i)}^\mu = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (31.8)$$

$$x'_{(i)\mu}(\tau, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (31.9)$$

$$\sum_{i=1}^3 x'_{(i)\mu}(\tau, \pi) = 0. \quad (31.10)$$

Получить явное решение линейной краевой задачи (31.8) – (31.10), (31.2) позволяет следующее представление для координат струны

$$x_{(i)}^{\mu} = \psi^{\mu} + \lambda_i \Phi + \lambda_i^* \Phi^*, \quad i = 1, 2, 3, \quad (31.11)$$

где $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \exp(i\Delta)$; $\lambda_3 = \exp(-i\Delta) = \lambda_2^*$, $\Delta = 2\pi/3$. Действительная функция $\psi(\tau, \sigma)$ и комплексная функция $\Phi(\tau, \sigma)$ удовлетворяют уравнению Д'Аламбера. Для них граничные условия (31.9), (31.10) и (31.2) записываются так:

$$\psi'_{\mu}(\tau, 0) = \psi'_{\mu}(\tau, \pi) = 0, \quad (31.12)$$

$$\Phi'_{\mu}(\tau, 0) = 0, \quad \Phi_{\mu}(\tau, \pi) = 0. \quad (31.13)$$

Функция $\psi_{\mu}(\tau, \sigma)$ разлагается в такой же ряд Фурье, как и координаты свободной мезонной струны

$$\psi_{\mu}(\tau, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{3\pi\gamma}} \sum_{n \neq 0} \exp(-in\tau) \frac{a_{n\mu}}{n} \cos n\sigma + Q_{\mu} + \frac{P_{\mu}\tau}{3\pi\gamma}. \quad (31.14)$$

Фурье-разложение для функции $\Phi(\tau, \sigma)$ содержит полуцелые частоты:

$$\Phi(\tau, \sigma) = \frac{2i}{\sqrt{3\pi\gamma}} \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots} \exp(-i\frac{n}{2}\tau) \frac{g_n}{n} \cos \frac{n}{2}\sigma. \quad (31.15)$$

Подстановка (31.14) и (31.15) в (31.7) приводит к связям на амплитуды a_n и g_n , которые образуют замкнутую алгебру. Однако при переходе к квантовой теории за счет нормального упорядочивания операторов эта алгебра оказывается незамкнутой. Как и в коммутаторе операторов Вирасоро в мезонной струне, здесь появляются швингеровские члены, зависящие от размерности пространства-времени. Это не позволило в [114] до конца провести построение квантовой теории барионной струны, в частности, доказать теорему об отсутствии духов.

Несколько другой подход к классической динамике барионной струны был предложен в [116]. Однако здесь уже на классическом уровне среди первичных связей в теории появились связи второго рода как следствие выбора специальной параметризации на мировой поверхности струны.

Конкретные движения барионной струны были рассмотрены в [113]. Было построено решение, описывающее вращающуюся в заданной плоскости как целое барионную струну, каждая ветвь которой имеет форму прямолинейного отрезка, причем углы в 120° между ветвями струны сохраняются в процессе вращения. Наклон реджевской траектории в этом случае оказался равным $(2/3)a'$. Второе решение описывает барионную струну, у которой все три ветви имеют прямолинейную форму, наложены друг на друга и вращаются с постоянной скоростью

как один жесткий стержень. Наклон траектории Редже здесь равен $(1/3)a'$. Более удовлетворительный с физической точки зрения наклон траектории Редже ($\sim a'$) получается в решении, описывающем барионную струну в шестимерном пространстве-времени.

Ограниченный класс движений барионной струны, показанной на рис. 7, в, с массивными концами был рассмотрен в [115]. Путем численных расчетов на ЭВМ классическая динамика барионной струны исследовалась в [117].

32. Спиновая струна и суперструна

Как было показано в гл. 2, обычная струнная модель, базирующаяся на действии Намбу–Гото (2.22), может быть непротиворечиво проквантована стандартным методом только в пространстве-времени с размерностью $D = 26$. Учитывая это, можно надеяться, что введение дополнительных степеней свободы в струнную модель позволит понизить критическую размерность пространства-времени D . Эти дополнительные степени свободы возьмут на себя роль "лишних" компонент радиуса-вектора струны $x^{\mu}(\tau, \sigma)$.

Релятивистская струна с дополнительными фермионными степенями свободы, описывающими ее спиновые свойства, была построена как динамическая основа дуально-резонансных моделей Неве–Шварца и Рамона (см. приложение А). Подбор соответствующего лагранжиана оказался сложной задачей [109, 118], хотя сами уравнения движения и дополнительные условия в теории спиновой струны довольно просты. Приведем здесь гамильтонову формулировку классической динамики спиновой струны.

Помимо координат струны $x^{\mu}(\tau, \sigma)$ и канонически сопряженных им импульсов $p^{\mu}(\tau, \sigma)$ в теории присутствуют антикоммутирующие переменные $S_1^{\mu}(\tau, \sigma)$ и $S_2^{\mu}(\tau, \sigma)$, описывающие распределенный вдоль струны спин ($0 \leq \sigma \leq \pi$). Уравнения движения имеют вид

$$\dot{x}^{\mu} = p^{\mu}; \quad \dot{p}^{\mu} = x''^{\mu}; \quad (32.1)$$

$$\dot{S}_1^{\mu} = S_1'^{\mu}; \quad \dot{S}_2^{\mu} = -S_2'^{\mu}. \quad (32.2)$$

Для упрощения формул константа $\gamma = (2\pi a')^{-1}$ положена равной единице. Координаты струны $x^{\mu}(\tau, \sigma)$ удовлетворяют граничным условиям для обычной открытой струны

$$x'^{\mu}(\tau, 0) = x'^{\mu}(\tau, \pi) = 0. \quad (32.3)$$

Граничные условия для спиновых переменных $S_i^{\mu}(\tau, \sigma)$, $i = 1, 2$, могут быть двух типов:

$$S_1^{\mu}(\tau, 0) = S_2^{\mu}(\tau, 0); \quad S_1^{\mu}(\tau, \pi) = \epsilon S_2^{\mu}(\tau, \pi). \quad (32.4)$$

Здесь $\epsilon = -1$ для спиновой струны, связанной с дуальной моделью Не-

ве-Шварца, которая описывает мезоны с целым спином, $\epsilon = +1$ для струны в дуальной модели Рамона, описывающей фермионы с полуцелым спином.

В теории имеют место следующие связи:

$$\left. \begin{aligned} (p+x')^2 + 4iS_1S_1' &= 0; \\ (p-x')^2 - 4iS_2S_2' &= 0; \\ S_1(p+x') &= 0; \\ S_2(p-x') &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (32.5)$$

Ни в уравнениях движения, ни в граничных условиях бозонные и фермионные переменные не взаимодействуют друг с другом. Только связи (32.5) и (32.6) объединяют их в одну систему.

Если во всех уравнениях (32.1) – (32.6) положить $S_1^\mu = S_2^\mu = 0$, то мы получим теорию свободной релятивистской струны в ортонормальной калибровке (см. § 10).

Уравнения (32.1) – (32.4) генерируются гамильтонианом, являющимся линейной комбинацией связей (32.5),

$$H = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\sigma [p^2 + x'^2 + i(S_1 \cdot S_1' - S_2 \cdot S_2')]. \quad (32.7)$$

При этом ненулевые скобки Пуассона задаются формулами

$$\{x^\mu(\tau, \sigma), p^\nu(\tau, \sigma')\} = -g^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'); \quad (32.8)$$

$$\{S_i^\mu(\tau, \sigma), S_j^\nu(\tau, \sigma')\} = \frac{1}{2} \delta_{ij} g^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'), \quad 0 \leq \sigma, \sigma' \leq \pi. \quad (32.9)$$

Решения уравнений движения, удовлетворяющие граничным условиям, определяются рядами Фурье:

$$x^\mu(\tau, \sigma) = Q^\mu + P^\mu \frac{\tau}{\pi} + \frac{i}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \neq 0} \exp(-in\tau) \frac{\alpha_n^\mu}{n} \cos(n\sigma), \quad (32.10)$$

$$p^\mu(\tau, \sigma) = P^\mu \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \neq 0} \exp(-in\tau) \alpha_n^\mu \cos(n\sigma), \quad \alpha_n = \alpha_{-n}^*; \quad (32.11)$$

$$S_1^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_k b_k^\mu \exp[-ik(\tau + \sigma)]; \quad (32.12)$$

$$S_2^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_k b_k^\mu \exp[-ik(\tau - \sigma)]; \quad b_k^\mu = b_{-k}^{*\mu}. \quad (32.13)$$

В случае модели Неве-Шварца суммирование по k в (32.12) и (32.13) ведется по полуцелым значениям k , а для модели Рамона – по целым.

Связи (32.5), (32.6) в терминах Фурье-амплитуд записываются следующим образом:

$$G_n = 0, \quad H_n = 0, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (32.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G_n &= -\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-k} \alpha_k - \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k b_{n-k} b_k, \\ H_n &= -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{n-k} \alpha_k, \quad \alpha_0^\mu = P^\mu / \sqrt{\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (32.15)$$

Формулы (32.8) и (32.9) определяют скобки Пуассона между фурье-амплитудами в разложениях (32.10) – (32.13):

$$\left. \begin{aligned} \{Q^\mu, P^\nu\} &= -g^{\mu\nu}; \quad \{\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu\} = ing^{\mu\nu} \delta_{n+m, 0}, \\ \{b_n^\mu, b_m^\nu\} &= ig^{\mu\nu} \delta_{n+m, 0}. \end{aligned} \right\} \quad (32.16)$$

Легко проверить, что скобки Пуассона связей (32.15) образуют замкнутую алгебру:

$$\left. \begin{aligned} \{G_n, G_m\} &= -i(n-m)G_{n+m}; \quad \{H_n, H_m\} = -2iG_{n+m}; \\ \{G_n, H_m\} &= -i\left(\frac{n}{2} - m\right)H_{n+m}. \end{aligned} \right\} \quad (32.17)$$

Квантовая теория спиновой струны может быть построена двумя путями: ковариантным и нековариантным, в полной аналогии со свободной бесспиновой струной. Рассмотрим кратко ковариантный метод.

Разложения (32.11) – (32.13) при квантовании считаются операторными выражениями. Формулы (32.16) переходят в коммутаторы и антикоммутаторы:

$$\left. \begin{aligned} [Q^\mu, P^\nu] &= -ig^{\mu\nu}; \quad [\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = -ng^{\mu\nu} \delta_{n+m, 0}; \\ [b_n^\mu, b_m^\nu] &= -g^{\mu\nu} \delta_{n+m, 0}. \end{aligned} \right\} \quad (32.18)$$

В калибровочных условиях $H_n = 0$ расстановка операторов не требуется, в G_n , как обычно, постулируется нормальное произведение операторных множителей

$$G_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-k} \alpha_k - \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k b_{n-k} b_k. \quad (32.19)$$

Это приводит к тому, что алгебра (32.17) искажается, становится незамкнутой:

$\epsilon = +1$ (модель Рамона):

$$\left. \begin{aligned} [G_n, G_m]_- &= (n-m)G_{n+m} + (D/8)n^3\delta_{n+m,0}; \\ [H_n, H_m]_+ &= 2G_{n+m} + (D/2)n^2\delta_{n+m,0}; \\ [G_n, H_m]_- &= [(n/2) - m]H_{n+m}; \end{aligned} \right\} \quad (32.20)$$

$\epsilon = -1$ (модель Неве-Шварца):

$$\left. \begin{aligned} [G_n, G_m] &= (n-m)G_{n+m} + (D/8)n(n^2-1)\delta_{n+m,0}; \\ [H_n, H_m]_+ &= 2G_{n+m} + (D/2)(n^2-1/4)\delta_{n+m,0}; \\ [G_n, H_m]_- &= [(n/2) - m]H_{n+m}. \end{aligned} \right\} \quad (32.21)$$

Далее физическими считаются такие векторы состояний, которые удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} H_n|\psi\rangle &= 0; \quad G_n|\psi\rangle = 0; \quad \alpha'M^2 = n, \quad n = 0, 1, \dots; \quad \epsilon = 1; \\ H_r|\psi\rangle &= 0, \quad r = 1/2, 3/2, \dots; \quad G_n|\psi\rangle = 0, \quad n > 0; \quad (G_0 - 1/2)|\psi\rangle = 0; \\ \alpha'M^2 &= m, \quad m = -1/2, 0, 1/2, 1, \dots, \quad \epsilon = -1. \end{aligned} \right\} \quad (32.22)$$

Наличие швингеровских членов в алгебре связей (32.20) и (32.21), зависящих от размерности пространства-времени, в конечном счете является причиной того, что исключить векторы состояний с отрицательной нормой удастся только в пространстве-времени с размерностью $D = 10$ [8]. Таким образом, введение спиновых переменных в теорию струны действительно привело к понижению критической размерности пространства-времени. В модели Римана тахионов нет.

Модели релятивистских струн с фермионными степенями свободы явились первыми примерами *суперсимметричных* квантовополевых теорий [118, 119].

В подходе Рорлиха спиновая струна была проквантована в [120], квантовая теория фермионной струны с конечным числом степеней свободы была построена в [51], на основе "гравитационного" действия спиновая струна исследовалась в [121]. Возможность компактификации дополнительных шести измерений в теории спиновой струны обсуждалась в [122], а в [123] рассматривалась связь этой модели с десятимерной суперсимметричной теорией Янга-Миллса и с эйнштейновским действием.

Суперструна. Функционал действия и динамические переменные. Суперструна представляет собой некоторую модификацию спиновой релятивистской струны. В этой модели использовано другое описание для спиновых переменных, распределенных вдоль струны. В спиновой струне это осуществлялось с помощью грасмановых переменных $S_i^\mu(\tau, \sigma)$, $\mu = 0, 1, \dots, D-1$, $i = 1, 2$, являющихся лоренцевским век-

тором в D -мерном пространстве Минковского и майорановским спинором в двумерном пространстве, касательном к мировой поверхности струны. Суперсимметрия, имеющая место в спиновой струне, относилась фактически к двумерному пространству τ, σ , а не к объемлющему десятимерному пространству Минковского. Эту суперсимметрию можно попытаться расширить. Прямое построение $N = 2$ суперсимметричной струнной теории путем удвоения числа полей приводит к модели с критической размерностью $D = 2$. Такая модель, очевидно, не представляет физического интереса.

Другой путь — это поиски новых представлений для фермионного поля, заданного вдоль струны. Для суперсимметрии в теории необходимо, чтобы число физических степеней свободы спинорного поля равнялось числу бозонных степеней свободы, т.е. числу поперечных компонент вектора $x^\mu(\tau, \sigma)$ (восемь в случае десятимерного пространства-времени). Проще всего построить теорию суперструны в светоподобной калибровке, оперируя только независимыми динамическими переменными. Алгебра Ли группы $SO(8)$ имеет три действительных неэквивалентных восьмимерных представления: одно векторное и два спинорных. Поэтому переход от спиновой струны к суперструне осуществляется заменой

$$S_i^n(\tau, \sigma) \rightarrow Q_i^a(\tau, \sigma), \quad (32.23)$$

где $n = 1, 2, \dots, D-1$; $i = 1, 2$ — спиновый индекс в двумерном пространстве τ, σ ; a — восьмизначный спиновый индекс по группе $SO(8)$. Действие суперструны в светоподобной калибровке имеет вид [119]

$$S = \frac{T}{2} \iint d\tau d\sigma [\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^n \partial_\beta x^n + i \bar{Q}^a \rho^a \partial_\alpha Q^a], \quad (32.24)$$

где $\alpha, \beta = 0, 1$; ρ^a — γ -матрицы Дирака в двумерном пространстве τ, σ ; $\rho^0 = -i\sigma_2, \rho^1 = \sigma_1$.

Все формулы из нековариантной квантовой теории спиновой струны с помощью замены (32.23) переносятся в теорию суперструны. Релятивистская инвариантность опять-таки выполняется только в десятимерном пространстве-времени, и основное состояние теории — безмассовое (тахионов нет). Используются граничные условия, как и в спиновой струне Рамона ((32.4) с $\epsilon = 1$). Поэтому разложение грасмановых переменных идет по целочисленным модам $k = 0, \pm 1, \dots$:

$$\left. \begin{aligned} Q_1^a(\tau, \sigma) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_k Q_k^a \exp[-ik(\tau + \sigma)]; \\ Q_2^a(\tau, \sigma) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_k Q_k^a \exp[-ik(\tau - \sigma)]. \end{aligned} \right\} \quad (32.25)$$

В квантовой теории операторы Q_n^a подчиняются антикоммутиационным соотношениям

$$[Q_n^a, Q_m^b] = \delta_{n+m,0} \delta_{ab}. \quad (32.26)$$

Операторы Q_{-n}^a , $n > 0$, являются операторами рождения. При действии на бозонные состояния они превращают их в фермионные, причем число бозонных и фермионных состояний в каждом супермультиплете с фиксированной массой одинаково.

Чтобы проверить релятивистскую инвариантность теории, необходимо построить зависимые операторы x^\pm , M^{\pm} и убедиться, что алгебра Пуанкара выполняется, если $D = 10$ [119].

Полное действие для суперструны. По аналогии со спиновой струной, [109, 118] суперструны было построено полное действие, из которого следуют как динамические уравнения, так и калибровочные условия [124, 125]. Полный набор динамических переменных для суперструны состоит из пространственно-временных координат $x^\mu(\tau, \sigma)$ и антикоммутирующих грассмановых переменных $\theta_i^a(\tau, \sigma)$, $i = 1, 2$. Действие строится в десятимерном пространстве Минковского. Второй спинорный индекс a пробегает $2^5 = 32$ значений, так как размерность γ -матриц Дирака в D -мерном пространстве-времени равна 2^k , где k — целая часть числа $D/2$.

Требуется, чтобы переменные θ_i^a были майорано-вейлевским спинором по индексу a :

$$h^{ab} \theta_i^b = 0; \quad \bar{\theta}_i^a = -\theta_i^b (\gamma^0)^{ba}, \quad (32.27)$$

где h означает вейлевский проектор $2h = (1 \pm \gamma_{11})$. Такое условие может быть выполнено только в пространстве-времени с размерностью $D = 2 \pmod{8}$, т.е. $D = 2, 10, \dots$. В условиях (32.27) имеется две возможности: θ_1^a и θ_2^a могут иметь одну и ту же киральность или противоположную. Комплексные переменные $\theta_i^a(\tau, \sigma)$, $i = 1, 2$, содержат 2^7 независимых действительных функций. Условия (32.27), а также граничные условия и уравнение Дирака для θ_i^a снижают число независимых фермионных степеней свободы до $2^3 = 8$.

Динамика свободной суперструны определяется действием

$$S = \frac{T}{2} \iint d\tau d\sigma (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2), \quad (32.28)$$

где

$$\mathcal{I}_1 = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \pi_\alpha^\mu \pi_{\mu\beta}; \quad \pi_\alpha^\mu = \partial_\alpha x^\mu - i \bar{\theta}_i \gamma^\mu \partial_\alpha \theta_i;$$

$$\mathcal{I}_2 = -i \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\mu [\bar{\theta}_1 \gamma_\mu \partial_\beta \theta_1 - \theta_1 - \bar{\theta}_2 \gamma_\mu \partial_\beta \theta_2] +$$

$$+ \epsilon^{\alpha\beta} \bar{\theta}_1 \gamma_\mu \partial_\alpha \theta_1 \bar{\theta}_2 \gamma_\mu \partial_\beta \theta_2, \quad \alpha, \beta = 0, 1; \quad \mu = 0, 1, \dots, 9.$$

Кроме локальной репараметризационной инвариантности это действие обладает глобальной $N = 2$ суперсимметрией при преобразованиях:

$$\delta \theta_i = \frac{1}{4} l_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} \theta_i + \epsilon_i; \quad \delta x^\mu = l^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu + i \bar{\epsilon}_i \gamma^\mu \theta_i; \quad \delta g^{\alpha\beta} = 0.$$

Граничные условия для θ_i понижают эту симметрию до $N = 1$. Далее действие (32.28) инвариантно и при локальных суперсимметричных преобразованиях [125].

Локальная суперсимметрия и репараметризационная инвариантность позволяют перейти к светоподобной калибровке $x^- \sim \tau, \gamma^- \theta_i = 0$. В этой калибровке оставшиеся независимые переменные удовлетворяют свободным уравнениям движения, генерируемым действием (32.24).

Второе слагаемое в полном действии суперструны (32.28), порождаемое \mathcal{I}_2 , аналогично дополнительному члену Веса-Зумино в действии для нелинейных сигма-моделей. Это добавка приводит к дополнительной локальной фермионной симметрии в действии суперструны (32.28), которая характерна только для двумерия.

Для объединения всех фундаментальных взаимодействий на основе суперструнной теории (см. заключение) необходимо считать, что размерная константа T в действии суперструны (32.24) или (32.28) по порядку равна $(T)^{-1/2} \sim 10^{-33}$ см, т.е. суперструны должны иметь планковские размеры.

33. Некоторые обобщения струнной модели

Релятивистские мембраны. Действие релятивистской струны (2.22) легко обобщается на объекты большей размерности, например мембраны [126, 127] или трехмерные объекты. Координатами такого объекта в n -мерном пространстве-времени является лоренцевский вектор $x^\mu(u^0, u^1, \dots, u^k)$, который при $k = 1$ описывает струну, при $k = 2$ — мембрану и т.д. Действие по аналогии с теорией релятивистской струны можно взять пропорциональным объему подмногообразия, которое покрывает этот объект в пространстве-времени:

$$S = -\kappa \int d^{k+1} u \sqrt{|g|}, \quad (33.1)$$

где $g = \det \|g_{ij}\|$; $g_{ij} = \partial_i x^\mu \partial_j x_\mu$, $i, j = 0, 1, \dots, k$; κ — константа, имеющая размерность L^{-k-1} . Варьирование (33.1) (см. § 19) приводит к следующим уравнениям движения:

$$\square x^\mu(u^0, u^1, \dots, u^k) = 0, \quad (33.2)$$

где $\square = \nabla_i \nabla^i$ — инвариантный оператор Лапласа-Бельтрами для метрики g_{ij} [см. формулу (19.7)]. Физический интерес представляют решения уравнений (33.2), которые описывают $k+1$ -мерное подмногообразие пространства-времени, имеющее в каждой точке один

временноподобный касательный вектор $x_{,0}^2 > 0$ и k пространственно-подобных касательных векторов $x_{,s}^2 < 0, s = 1, \dots, k$.

Как уже отмечалось в § 19, уравнения (33.2) удается линеаризовать только при $k = 1$ (теория струны). В общем случае такую линеаризацию выполнить невозможно. Действительно, согласно второй теореме Нетер на $x^\mu(u)$ можно наложить $k + 1$ дополнительных условий, а для линеаризации (33.2) требуется $(k^2 + 3k)/2$ условий. Поэтому в теории релятивистских мембран удается получить только частные решения [126].

Фазовое пространство ограничено связями, число которых равно $k + 1$ (см. приложение Б),

$$\varphi_0 = p^2 + \kappa g_k = 0; \quad \varphi_i = p x_{,i} = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (33.3)$$

где $p_\mu = -\partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}^\mu$, $g_k = \det \|g_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, k$. Канонический гамильтониан тождественно равен нулю. Все связи (33.3) инволютивны между собой, т.е. они являются связями первого рода. Однако на квантовом уровне иволютивность связей нарушается швингеровскими членами [126]. Ни выбором калибровочных условий, ни фиксированием множителей Лагранжа в обобщенном гамильтониане не удастся получить при $k > 1$ линейные уравнения движения в фазовом пространстве. Это основное препятствие при построении квантовой теории протяженных релятивистских объектов типа мембран, т.е. при нахождении спектра состояний, доказательстве релятивистской инвариантности теории и т.д.

В [127] с помощью функционального интегрирования в фазовом пространстве была построена S -матрица для релятивистских систем, описываемых действием (33.1).

Если перейти к формализму, в котором метрика $g_{ij}(u)$ выступает независимой переменной по отношению к координатам мембраны $x^\mu(u)$, то лагранжиан в (33.1) можно переписать в квадратичном по $x_{,i}^\mu$ виде

$$\mathcal{L} = -\kappa \sqrt{|g|} [g^{ij} x_{,i}^\mu x_{\mu,j} - (k-1)], \quad i, j = 0, 1, \dots, k. \quad (33.4)$$

В полной аналогии с рассуждениями § 30 можно показать, что на классическом уровне (33.4) приводит к той же динамике, что и (33.1).

Струнная модель Шильда–Егучи. Действие Намбу–Гото (2.22) не позволяет рассматривать двумерные мировые поверхности, касательные в каждой своей точке к световому конусу с вершиной в этой точке. Для таких мировых поверхностей определитель метрического тензора $g = \dot{x}^2 x'^2 - (\dot{x}x')^2$ обращается в нуль и пользоваться уравнениями движения (3.18) нельзя. Чтобы избежать эту трудность и включить в рассмотрение мировые поверхности с $g = 0$, Шильд [19] предложил действие струны взять в следующем виде:

$$S = -M^4 \iint_0 d\tau d\sigma |g|, \quad (33.5)$$

где M — некоторая константа с размерностью массы; g — определитель индуцированной метрики (2.20) на мировой поверхности струны. Можно рассматривать струнные действия и более общего вида [60, 128]

$$S = -M^4 \nu \iint_0 d\tau d\sigma |g|^\nu, \quad \nu > 1/2. \quad (33.6)$$

Уравнения движения (3.9) для (33.6) записываются так:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} (|g|^\nu g^{ij} x_{,j}^\mu) = 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1. \quad (33.7)$$

Умножая (33.7) на $x_{,k}^\mu$, получаем

$$\frac{2\nu-1}{2\nu} \frac{\partial}{\partial u^k} (|g|^\nu) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (33.8)$$

Если $\nu \neq 1/2$, то (33.8) означает, что на решениях уравнений движения (33.7) лагранжева плотность в (33.6) постоянна. Если считать, что

$$g = \text{const} < 0, \quad (33.9)$$

то уравнения движения (33.7), очевидно, совпадут с уравнениями Эйлера в теории струны Намбу–Гото (19.6), записанными в специальной параметризации, где выполнено условие (33.9). Но действие (33.6) позволяет рассматривать и случай $g = 0^*$.

Струнные модели, задаваемые формулой (33.5) или (33.6), допускают только такие преобразования параметров τ, σ , которые удовлетворяют условию

$$\partial(\bar{\tau}, \bar{\sigma}) / \partial(\tau, \sigma) = 1. \quad (33.10)$$

При этих преобразованиях область Ω в плоскости τ, σ отображается в новую область $\bar{\Omega}$, которая имеет ту же самую площадь (симплектические преобразования). Математическая теорема [129] утверждает, что любые две замкнутые гладкие кривые, ограничивающие одну и ту же площадь, всегда могут быть переведены одна в другую таким отображением. Следовательно, функционалы действия (33.5) и (33.6) не зависят от деталей выбора области Ω , в которой изменяются параметры τ, σ , а зависят только от площади этой области. Это позволило Егучи [130] предложить новую квантовую теорию струны с действием (33.5), в которой площадь области Ω играет роль параметра эволю-

*Здесь имеет место полная аналогия с изотропными мировыми траекториями, которые нельзя описать действием (2.7). Для учета таких траекторий требуется рассматривать точечные лагранжианы вида $[\dot{x}]^2]^\nu, \nu > 1/2$.

ции. Однако, пока еще неясно, какова связь этой теории со стандартным квантованием.

Преобразования параметров τ, σ , подчиняющиеся условию (33.10), содержат одну произвольную функцию двух переменных. Поэтому лагранжианы в (33.5) и (33.6) — вырожденные [67]. Фазовое пространство ограничено одной связью:

$$p(\tau, \sigma) x'(\tau, \sigma) = 0. \quad (33.11)$$

Каноническое квантование струнной модели Шильда—Егучи (33.6) не проводилось. В [128] путем континуального интегрирования в конфигурационном пространстве показана эквивалентность в квазиклассическом приближении струнных моделей Намбу—Гото (2.22), Шильда—Егучи (33.5), (33.6) и Полякова (30.1). Эти модели в главном по (1/D)-приближении дают одно и то же выражение для статического кварк-антикваркового потенциала.

Гауссова кривизна в действии струны. Площадь поверхности — это простейший, но не единственный инвариант по отношению к репараметризации поверхности и ее изгибанию. Следующий инвариант такого рода — интеграл по поверхности от гауссовой кривизны $K = R/2$, где $R = g^{il} g^{jk} R_{ijkl}$:

$$S_1 = \gamma' \iint d\tau d\sigma \sqrt{|g|} R. \quad (33.12)$$

Здесь γ' — безразмерная константа. Если добавить S_1 к действию (2.22), то уравнения движения струны (3.18) останутся прежними, а изменятся только граничные условия [40]. Это является следствием геометрической теоремы Гаусса—Бонне [70, 73], согласно которой двойной интеграл в (33.12) может быть преобразован к интегралу по контуру, ограничивающему мировую поверхность струны в пространстве-времени:

$$S_1 = \gamma' \oint k_g ds + \text{const}, \quad (33.13)$$

где k_g — геодезическая кривизна [70, 73] упомянутого выше контура. Нелинейные краевые условия, следующие из действия

$$S = S_{N-G} + S_1, \quad (33.14)$$

получены в ортонормальной калибровке (4.2) в [107, 131]:

$$\gamma' \left(-\frac{2}{a} \dot{x}'_\mu + \frac{\dot{a}}{a^2} x'_\mu + \frac{a'}{a^2} \dot{x}'_\mu \right) \gamma x'_\mu \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0, \quad (33.15)$$

$$\gamma' \left(-\ddot{x}'_\mu + \frac{\dot{a}}{2a} \dot{x}'_\mu + \frac{a'}{2a} x'_\mu \right) \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0, \quad (33.16)$$

где $a(\tau, \sigma) = \dot{x}^2(\tau, \sigma) = -x'^2(\tau, \sigma)$, $\dot{x}x' = 0$. Существенной особенностью этих условий является то, что они содержат не только первые,

но и вторые производные радиуса-вектора мировой поверхности струны. В результате число краевых условий удвоилось.

С геометрической точки зрения условия (33.15) и (33.16) более привлекательны по сравнению с аналогичными условиями в теории свободной струны, описываемой только действием (2.22). Теперь ненулевые компоненты метрического тензора на мировой поверхности струны $a(\tau, \sigma)$ должны на границах $\sigma = 0, \pi$ принимать постоянные (не зависящие от τ) ненулевые значения. Это приводит к неингулярным линейным граничным условиям для уравнения Лиувилля, описывающего основные дифференциальные формы на мировой поверхности струны. Статические решения уравнения Лиувилля такого типа были рассмотрены в [107].

34. Релятивистские струны в квантовой хромодинамике

Связь между релятивистской струной и квантовой хромодинамикой не сводится только к феноменологическому моделированию струнной трубки хромозлектрического поля, соединяющего кварки. Оказывается, что в теории Янга—Миллса можно выделить такие объекты, динамика которых будет описываться теми же уравнениями, что и динамика струны [132].

Рассмотрим вильсоновский функционал (вильсоновскую петлю)

$$W(x_\mu(s)) = \text{Tr} P \exp(\oint dx^\mu A_\mu), \quad (34.1)$$

где $A_\mu(x)$ — векторный потенциал в неабелевой калибровочной теории, обычно определяемый как антиэрмитова матрица в соответствующей алгебре Ли:

$$A_\mu = ig A_\mu^a T^a. \quad (34.2)$$

Кривая $x_\mu(s)$ описывает замкнутый контур в пространстве-времени:

$$x_\mu(s) = x_\mu(s+1). \quad (34.3)$$

Функционал (34.1) калибровочно инвариантен.

Чтобы получить уравнение, которому удовлетворяет функционал (34.1), рассмотрим вариационную производную $\delta W/(\delta x_\nu(\eta))$ при фиксированном потенциале $A_\mu(x)$. Такая вариационная производная рассматривалась впервые, вероятно, Манделштамом еще в 1962 г.:

$$\frac{\delta W}{\delta x_\mu(\eta)} = \text{Tr} P [x'_\nu(\eta) G_{\mu\nu}(x(\eta)) \exp(\oint A_\sigma dx^\sigma)], \quad (34.4)$$

где $x'_\nu(\eta) = dx_\nu/d\eta$, $G_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu - [A_\nu, A_\mu]$. Дальнейшее варьирование (34.4) дает

$$\frac{\delta^2 W}{\delta x_\mu(\eta)^2} = \text{Tr} P [D_\rho G^{\rho\nu}(x(\eta)) x'_\nu(\eta) \exp(\oint A_\lambda dx^\lambda) \delta(0) +$$

$$+ \text{Tr} P [(G_{\mu\nu}(x(\eta)) x'^{\nu}(\eta))^2 \exp(\oint A_{\lambda} dx^{\lambda})]. \quad (34.5)$$

Здесь D_{ρ} — ковариантная производная:

$$D^{\rho} G_{\rho\nu} = \partial^{\rho} G_{\rho\nu} - [A^{\rho}, G_{\rho\nu}]. \quad (34.6)$$

Если $A_{\mu}(x)$ удовлетворяет свободным полевым уравнениям в теории Янга—Миллса

$$D^{\mu} G_{\mu\nu} = 0, \quad (34.7)$$

то сингулярное слагаемое с $\delta(0)$ в правой части (34.5) исчезает. В результате получаем уравнение для вильсоновского функционала

$$\delta^2 W / \delta x_{\mu}(\eta)^2 = \text{Tr} P [(G_{\rho\nu} x'_{\nu})^2 \exp(\oint A^{\lambda} dx^{\lambda})], \quad (34.8)$$

аналогичное условию в динамике струны на физические векторы состояний

$$(p^2 + \gamma x'^2) \Phi = 0, \quad (34.9)$$

если оператор p_{μ} реализовать как вариационную производную

$$p_{\mu}(\sigma) = -i \delta / \delta x^{\mu}(\sigma). \quad (34.10)$$

Подставляя (34.10) в (34.9), получаем

$$\frac{\delta^2 \Phi}{\delta x_{\mu}(\sigma)^2} = \frac{1}{4\pi^2 \alpha'^2} (x'_{\nu}(\sigma))^2 \Phi. \quad (34.11)$$

Чтобы вывести (34.11), требуется довольно тонкий анализ процедуры перенормировок в уравнениях Швингера—Дайсона для вильсоновского функционала (34.1), а также использование определенного приближения, основывающегося на операторном разложении вблизи светового конуса. Мы не будем останавливаться на этих специальных вопросах (см., например, [133]), а отметим лишь, что основной параметр струнной теории — наклон реджевской траектории α' — определяется в КХД формулой

$$\alpha' \sim \mu^{-2} \exp(1/ag^2), \quad (34.12)$$

где μ — точка вычитания в процедуре перенормировок; ag^2 — первый член в разложении β -функции Калана—Симанзика.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем кратко итоги исследованиям по струнным моделям.

Несомненным является следующий факт. Одной и той же классической теории струны (Намбу—Гото, спиновой струны и т.д.) могут соответствовать разные квантовые варианты этих моделей. Одни из них представляют собой динамическую основу для дуальных моделей и, следовательно, имеют нефизическую размерность пространства-времени и могут иметь тахионные состояния. Другие квантовые варианты струнных моделей [35, 50, 51, 108] формулируются в обычном четырехмерном пространстве-времени, не имеют тахионных состояний и не связаны с дуально-резонансным подходом к физике адронов. Такая неоднозначность квантования струнных моделей не является особенностью, присущей только им. И для более простых теорий однозначного алгоритма квантования нет. Для физики представляют интерес обе группы квантовых моделей струн.

Струнные модели в четырехмерном пространстве-времени моделируют трубку глюонного поля, соединяющую кварки в адронах (см. §1). Гипотеза о невыетании кварков, которая в настоящее время заменяет в квантовой хромодинамике решение задачи об асимптотических состояниях, а также формулировка КХД в терминах струнных переменных (см. §34) дали новый толчок развитию таких моделей струны. Кроме того, возникновение релятивистских струн в четырехмерном пространстве-времени рассматривается сейчас в космологии как наиболее естественное объяснение механизма появления неоднородностей в распределении вещества в ранней вселенной, которые в конце концов привели к формированию галактик. В процессе расширения вселенной и понижения ее температуры происходят последовательные фазовые переходы, понижающие симметрию соответствующего квантовополевого лагранжиана [например, с $SU(5)$ или $SO(10)$ к $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ и далее к $SU(3) \times U(1)$]. Оказывается, что при понижении температуры ниже температуры фазового перехода фаза с более высокой симметрией не исчезает полностью, а может еще существовать в форме одномерных объектов ("космических" струн) или же двумерных ("доменных" стенок).

В последнее время большой интерес вызывают суперсимметричные обобщения струнных моделей с $D > 4$. Нетривиальное суперсимметричное расширение допускает спиновая струна, которая может быть про-

квантована стандартным методом при $D = 10$. Такие струнные модели с явной суперсимметрией в десятимерном пространстве-времени получили название *суперструн* [119]. Вторично-квантованная полевая теория суперструн в D -мерном мире рассматривается как фундаментальная теория, охватывающая все взаимодействия (гравитационное, слабое, электромагнитное и сильное). При этом полагают, что константа $\sqrt{a'}$ имеет порядок планковских размеров. В силу ряда причин, детальный механизм которых еще не вполне ясен, происходит компактификация $(D - 4)$ -измерений до планковских размеров $R \sim 10^{-33}$ см. Чтобы получить теорию, описывающую доступную сейчас для наблюдений область физических явлений, необходимо $\sqrt{a'}$ и R устремить к нулю. В этом пределе теория суперструн дает супергравитацию и суперсимметричную теорию Янга-Миллса. Высказывается надежда, что в этом случае шансов на взаимное сокращение расхождений в супергравитации больше по сравнению с обычным подходом, так как исходная теория суперструн имеет не одну, а две размерные константы (a' и R).

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ДУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Построение дуально-резонансных моделей было инициировано следующим свойством адронных амплитуд, обнаруженным экспериментально. С погрешностью порядка 10% неупругие адронные амплитуды, например $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$, могут быть описаны как сумма резонансов в прямом канале (Δ, N^*, \dots) или как сумма полюсов Редже (ρ, ρ', \dots) в перекрестном канале. Такое свойство адронных процессов получило название *дуальности* [8-10] (рис. 8). В этом подходе используется приближение бесконечно узких резонансов и не учитываются унитарные поправки. Тем не менее описание адронных процессов оказывается значительно лучшим, чем одновременное суммирование вкладов от резонансов и от полюсов Редже, как этого требует стандартная теория поля. Такое суммирование при построении адронной амплитуды приводит к расхождению с экспериментом приблизительно в 2 раза.

Приближение бесконечно узких резонансов не описывает асимптотическое поведение упругих амплитуд, которое обусловлено особенностью Померанчука. Вероятно, эта особенность генерируется унитарными поправками, однако до конца ее природа еще не выяснена.

Конкретное аналитическое выражение для мезон-мезонной амплитуды рассеяния, удовлетворяющее принципу дуальности, впервые было предложено Венециано [10]:

$$A(s, t, u) = F(s, t) + F(t, u) + F(u, s), \quad (\text{A.1})$$

где

$$F(s, t) = g^2 \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))} \equiv g^2 B(-\alpha(s), -\alpha(t)). \quad (\text{A.2})$$

Здесь g^2 — константа; Γ и B — функции Эйлера; $\alpha(s) = \alpha_0 + \alpha's$ — линейные траектории Редже. Как известно, адроны, построенные из легких u -, d -, s -кварков, в хорошем приближении лежат на линейных реджевских траекториях. Принцип дуальности и формулы Венециано (A.1), (A.2) были обобщены на N -частичные процессы. Для этого был разработан специальный математический аппарат — операторный формализм, близкий к фейнмановской диаграммной технике в квантовой теории поля [8-10]. Именно в этом подходе наиболее просто проследить связь между дуальными моделями и релятивистской струной.

В операторном формализме вводится бесконечный набор операторов рождения $a_{n\nu}^+$ и уничтожения $a_{m\mu}$ удовлетворяющих следующим правилам коммутаций:

$$[a_{m\mu}^+, a_{n\nu}] = -g^{\mu\nu} \delta_{n,m}, \quad (\text{A.3})$$

где $g^{00} = -g^{11} = \dots = -g^{D-1 D-1} = 1$; D — размерность псевдоевклидова пространства, в котором действуют операторы $a_{m\mu}$. Амплитуде Венециано B_N , имеющей N внешних линий, сопоставляется древесная диаграмма, представленная на рис. 9. Амплитуда B_N строится согласно следующим правилам соответствия. Внешним концам с импульсами p_1 и p_N сопоставляются вакуумные состояния $\langle 0 |$ и $| 0 \rangle$,

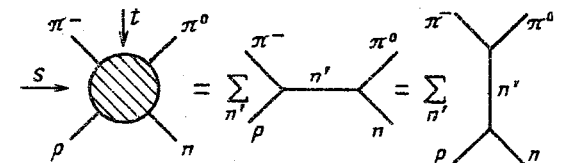


Рис. 8. Принцип дуальности для адронных амплитуд

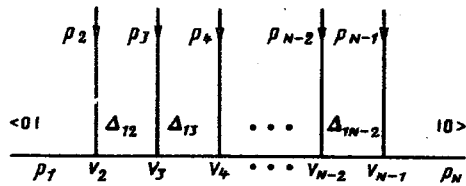


Рис. 9. Борновский член в N -точечной дуальной амплитуде Венециано B_N (обозначения пояснены в тексте)

которые определяются, как обычно, требованием $a_{m\mu}|0\rangle = \langle 0|a_{m\mu}^+ = 0$. Каждой вершине соответствует вершинный оператор $V(p_i)$, ($i = 2, 3, \dots, N-1$):

$$V(p_i) = \exp\left(i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_i a_n^+}{\sqrt{n}}\right) \exp\left(i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_i a_n}{\sqrt{n}}\right),$$

где α' — наклон траекторий Редже. Внутренним линиям на диаграмме сопоставляется пропагатор Δ_{ij} .

$$\Delta_{ij} = [s_{ij} + \alpha' M^2 + \alpha(0)]^{-1},$$

где $s_{ij} = (p_i + p_{i+1} + \dots + p_j)^2$; $\alpha(0)$ — значение реджевской траектории в нуле, $\alpha(s_{ij}) = \alpha(0) + \alpha' s_{ij}$; $\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^+ a_n$ — массовый оператор.

Согласно этим правилам для N -точечной амплитуды Венециано B_N получаем следующее выражение:

$$B_N = \langle 0 | V(p_2) \Delta_{12} V(p_3) \Delta_{13} \dots V(p_{N-1}) | 0 \rangle.$$

Вычисляя вакуумное среднее в этой формуле, можно преобразовать B_N к обычному интегральному представлению для N -точечной амплитуды Венециано [8–10]:

$$B_N = \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{i=1}^{N-3} dx_i x_i^{-\alpha(s_{1i})-1} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (1-x_{ij})^{-p_i p_j}, \quad (\text{A.4})$$

Таблица

Дуальная модель	Основная траектория $\alpha(s)$	Спин-состояние с $M=0$	Значение $-\alpha(0) = \alpha' M^2$ для тахионного состояния
Венециано	$1 + \alpha' s$	1	-1
Вирасоро — Шапиро	$2 + \frac{1}{2} \alpha' s$	2	-4
Рамона	$1/2 + \alpha' s$	1/2	Нет
Неве — Шварца	$1 + \alpha' s, (\rho f)$	1	
	$1/2 + \alpha' s, (\pi \omega)$	1/2	-1/2

где $x_{ij} = x_{i-1} x_i \dots x_{j-2}$.

Векторы состояний в рассматриваемом формализме строятся, как обычно, действием операторов рождения $a_{m\mu}^+$ на вакуум. Однако из-за метрического тензора $\eta_{\mu\nu}$ в коммутаторе (A.1) появляются векторы с отрицательной нормой. Физические векторы состояний $|\Phi\rangle$ (с положительной нормой) определяются условиями Вирасоро:

$$L_n |\Phi\rangle = 0, \quad n = 1, 2, \dots; \quad [L_0 - \alpha(0)] |\Phi\rangle = 0,$$

где

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{n-m} a_m; \quad \alpha_0 \mu = \sqrt{2\alpha'} p_\mu; \quad \alpha_{-k} = \alpha_k^+ = \sqrt{k} a_k^+, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для исключения духовых состояний необходимо потребовать, чтобы $\alpha(0) = 1$ и размерность пространства D , в котором действуют операторы $a_{n\mu}$, равнялась бы 26.

Таким образом, операторный формализм в дуальном подходе полностью совпадает с квантовой теорией релятивистской струны. Константа γ в действии Намбу — Гото (2.22) оказывается связанной с универсальным наклоном реджевских траекторий α' : $\gamma = (2\pi\alpha')^{-1}$. Более того, было показано, что дуальная амплитуда (A.4) может быть получена как квантовомеханическая амплитуда вероятности в теории, рассматривающей слияние и разрывы струн [134].

Помимо модели Венециано был построен ряд других, более сложных дуально-резонансных моделей. Две модели включают фермионные переменные. Одна из них описывает мезоны, построенные из кварков (модель Неве — Шварца), другая модель задает амплитуду фермион-фермионного рассеяния (модель Рамона). Непротиворечивая формулировка этих моделей оказалась возможной только в десятимерном пространстве-времени. Дуальная модель Вирасоро — Шапиро базируется на главной реджевской траектории, которую можно связать с особенностью Померанчука $\alpha(s) = 2 + (1/2)\alpha' s$. Основные характеристики дуальных моделей и их связь с соответствующими струнными и квантовополевыми моделями приведены в таблице.

Критическая размерность пространства-времени	Предел $\alpha' \rightarrow 0$	Соответствующая струнная модель
26	Скалярная теория $\lambda\varphi^3$	Свободная струна
26	Квантовая гравитация	Замкнутая струна
10	Безмассовая электродинамика	Спиновая струна (фермионные переменные — лоренцевский вектор)
10	Скалярная электродинамика	То же

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ТОЖДЕСТВА НЕТЕР В ТЕОРИИ СТРУНЫ

Следствия инвариантности функционала действия при преобразованиях, задаваемых произвольными функциями координат и времени, определяются второй теоремой Нетер [74]: если действие системы инвариантно по отношению к бесконечной группе преобразований, задаваемых r произвольными функциями координат и времени и их производными до k -го порядка включительно, то имеют место r тождеств, содержащих левые части уравнений Эйлера и их производные до k -го порядка.

Согласно этой теореме инвариантность действия релятивистской струны (3.1) относительно замены параметров τ и σ приводит к тождествам, которым должны удовлетворять левые части уравнений движения струны (3.9).

Будем рассматривать координаты струны $x^\mu(\tau, \sigma)$ как поля, заданные в двумерном пространстве $\tau = u^0$ и $\sigma = u^1$. Пусть лагранжиан системы $\mathcal{L}(x, x_{,i})$, где $x_{,i} = \partial x / \partial u^i$, выбран так, что действие $S = \iint_{\Omega} d^2 u \mathcal{L}(x, x_{,i})$ инвариантно

относительно замены параметров $u^i \rightarrow \bar{u}^i = f^i(u)$. Конкретный вид \mathcal{L} несуществен. При бесконечно малых изменениях параметров u^i на $\epsilon^i(u)$,

$$\bar{u}^i = u^i + \epsilon^i(u),$$

вариация действия δS , равная нулю, имеет вид

$$\delta S = \iint_{\Omega} d^2 u \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{,i}^\mu} \delta x_{,i}^\mu + \mathcal{L} \partial_i \epsilon^i \right] = 0. \quad (Б.1)$$

Обозначая левые части уравнений Эйлера

$$L_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{,i}^\mu} \right),$$

и учитывая, что $\delta x_{,i}^\mu = -x_{,i}^\mu \epsilon^j$, формулу (Б.1) преобразуем следующим образом:

$$\delta S = \iint_{\Omega} d^2 u \left\{ \left[\left(\mathcal{L} \delta_{ij} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{,i}^\mu} x_{,j}^\mu \right) \epsilon^j \right]_{,i} - L_\mu x_{,j}^\mu \epsilon^j \right\} = 0. \quad (Б.2)$$

Вначале рассмотрим такие вариации $\epsilon^j(u)$ независимых переменных u^j , которые обращаются в нуль на границе области интегрирования Ω . Тогда очевидно, что слагаемое в квадратных скобках в формуле (Б.2) не дает вклада в δS , и, как следствие этого, получаем два тождества:

$$L_\mu x_{,i}^\mu \equiv 0, \quad i = 0, 1. \quad (Б.3)$$

Это и есть как раз те тождества, о которых говорится во второй теореме Нетер. Таким образом, проекции левых частей уравнений Эйлера на векторы \dot{x}_μ и x_μ тождественно равны нулю. Дополнительно к ним можно получить еще ряд тождеств.

Выражение, стоящее в круглых скобках в формуле (Б.2), является каноническим тензором энергии-импульса, соответствующим инвариантности теории при трансляциях в пространстве параметров u^0, u^1 :

$$t_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{,i}^\mu} x_{,j}^\mu - \delta_{ij} \mathcal{L}. \quad (Б.4)$$

Этот тензор тождественно равен нулю:

$$t_{ij} \equiv 0. \quad (Б.5)$$

Действительно, в силу произвольности функций $\epsilon^i(u)$ в подынтегральном выражении в (Б.2) должны тождественно и независимо обращаться в нуль коэффициенты как при этих функциях, так и при их производных.

Запишем тождества (Б.5) в явном виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\mu &\equiv 0; & \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} x'^\mu &\equiv 0; \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} x'^\mu &\equiv 0; & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} \dot{x}^\mu &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (Б.6)$$

Первые два тождества означают, что лагранжева плотность в рассматриваемой теории должна быть однородной функцией первой степени по каждой из производных \dot{x}^μ и x'^μ . Учитывая определение плотности канонического импульса

$$p_\mu(u) = -\partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}^\mu, \quad (Б.7)$$

из первого тождества в (Б.6) непосредственно получаем, что гамильтониан, построенный по каноническим правилам, в данном случае тождественно равен нулю. Третье тождество в (Б.6) представляет собой связь между каноническими переменными $x^\mu(u)$ и $p^\mu(u)$:

$$p_\mu x'^\mu \equiv 0. \quad (Б.8)$$

Аналогичную связь между x и p дает и первое тождество после исключения из него скоростей \dot{x}^μ с помощью определения (Б.7). Чтобы провести это исключение явно, необходимо воспользоваться конкретным видом \mathcal{L} . В случае действия Намбу-Гото (2.22) канонический импульс p_μ определяется формулой (8.6), из которой следует:

$$\dot{x}^\mu = \frac{(\dot{x} x')}{x'^2} x'^\mu - \gamma^{-1} p^\mu \frac{\sqrt{-g}}{x'^2}. \quad (Б.9)$$

Подставляя (2.22), (Б.9) и (Б.7) в первое тождество (Б.6), получаем с учетом (Б.8)

$$\gamma^2 x'^2 + p^2 = 0. \quad (Б.10)$$

Таким образом, тождества Нетер (Б.6) дают две связи, ограничивающие динамику в фазовом пространстве.

Все выше изложенное непосредственно переносится и на случай k -мерного параметрического пространства с $k > 2$. В этом случае имеем k тождеств типа (Б.3) и $k \times k$ тождеств (Б.5), которые приводят к k связям в фазовом пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев И.В. Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях. Современные проблемы физики. М.: Наука, 1981.
- Индурайн Ф. Квантовая хромодинамика. М.: Мир, 1986.
- Marciano W., Pagels H. Quantum Chromodynamics// Phys. Rep. C. 1978. Vol. 36. N 3. p. 137–276.
2. Намбу Й. Почему нет свободных кварков?// Успехи физ. наук. 1978. Т. 124. С. 147–169.
- Wilson K.C. Confinement of quarks// Phys. Rev. D. 1974. Vol. 10. N 8. p. 2445–2459.
3. Nielsen H.B., Olesen P. Vortex-line models for dual strings// Nucl. Phys. 1973. Vol. B61. P. 45–16.
- Nambu Y. Strings, monopoles, and gauge fields// Phys. Rev. 1974. Vol. D10. N 12. P. 4262–4268.
4. Flory C.A. Stability properties of an Abelianized chromoelectric flux tube// Ibid. 1984. Vol. D29. No 4. P. 722–730.
5. Bars I., Hanson A.J. Quarks at the ends of the string//Ibid. 1976. Vol. D13. N 6. P. 1744–1760.
- Bars I. A quantum string theory of hadrons and its relation to quantum chromodynamics in two dimensions// Nucl. Phys. 1976. Vol. B111. N 3. P. 413–440.
6. Монополь Дирака. Сб. статей: Пер. с англ/ Под ред. Б.М. Болотовского и Ю.Д. Усачева. М.: Мир, 1970.
7. Барбашов Б.М., Черников Н.А. Решение и квантование нелинейной двумерной модели типа Борна–Инфельда// Журн. эксперим. и теорет. физ. 1966. Т. 60. Вып. 5. С. 1296–1308; Решение задачи о рассеянии двух плоских волн в нелинейной скалярной теории поля типа Борна–Инфельда// Там же. 1966. Т. 51. Вып. 2 (8). С. 658–668.
8. Rebbi C. Dual models and relativistic quantum strings// Phys. Rep. C, 1974, Vol. 12, No 1, P. 1–73.
- Scherk J. An introduction to the theory of dual models and strings// Rev. Mod. Phys. 1975. Vol. 47. N 1, P. 123–164.
9. Шелест В.А., Зиновьев Г.М., Миранский В.А. Модели сильновзаимодействующих частиц. М.: Атомиздат, 1966. – Т. 2.
- Frampton P.H. Dual resonance models. Lond.: Benjamin, 1974.
10. Veneziano G. An introduction to dual models of strong interactions and their physical motivations// Phys. Rep. 1974. Vol. C 9, N 4. P. 199–242.
11. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Динамика релятивистской струны// Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1978. т. 9. Вып. 5. С. 709–758.
12. Пронько Г.П., Разумов А.В., Соловьев Л.Д. Классическая динамика релятивистской струны// Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1983. Т. 14. Вып. 3. С. 558–577.
13. Владимирский В.В. Релятивистская струна как предельный случай вытянутого мешка// Ядерная физика. 1984. Т. 39. Вып. 2. С. 493–495.
14. Logunov A.A., Soloviev L.D., Tavkhelidze A.N. Dispersion sum rules and high energy scattering// Phys. Lett. 1967. Vol. 24B. N 4. P. 181–182.
15. Nambu Y. Lectures for the Copenhagen Symposium, 1970.
- Goto T. Relativistic quantum mechanics of one-dimensional mechanical continuum and subsidiary condition of dual resonance model// Prog. Theor. Phys. 1971. Vol. 46. N. 5. P. 1560–1569.
16. Черников Н.А., Шавахина Н.С. Пример релятивистской задачи двух тел. I. Краевая задача для минимальной поверхности// Теорет. мат. физ. 1980. Т. 42. № 1. С. 59–70; II. Уравнения движения. – Теорет. мат. физ. 1980. Т. 43. № 3. С. 356–366.
17. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
18. Salisbury D.C., Sundermeyer K. Stationary properties of Nambu strings// Nucl. Phys. 1981. Vol. B 191. N 1. P. 260–268.
19. Schild A. Classical null strings// Phys. Rev. 1977. Vol. D 16. N 6. P. 1722–1726.
20. Patrascioiu A. Quantum dynamics of a massless relativistic string// Nucl. Phys. 1974. Vol. B81. N 3. P. 525–547.
21. Барбашов Б.М., Кошкарлов А.Л., Федоренко О.М. Некоторые вопросы классической динамики релятивистской струны. Препринт ОИЯИ P2-10169. Дубна. 1976.
22. Барбашов Б.М., Черников Н.А. Классическая динамика релятивистской струны. Препринт ОИЯИ P2-7852. Дубна. 1974.
23. Норден А.П. Теория поверхностей. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1956.
24. Beckenbach E.F. Minimal surfaces in euclidean N-space// Amer. J. Math. 1933. Vol. 55, N 3. P. 458.
25. Artru X. Classical string phenomenology. How strings work// Phys. Rep. 1983. Vol. 97C. N 2, 3. P. 147–171.
26. Дирак П. Лекции по квантовой механике: Дирак П. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
27. Фаддеев Л.Д. Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов// Теорет. мат. физ. 1969. Т. 1. № 1. С. 3–18.
28. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., Червяков А.М. Функциональный интеграл для систем со связями, явно зависящими от времени// Теорет. мат. физ. 1985. Т. 63, № 1. С. 88–96.
29. Hanson A.J., Regge T., Teitelboim C. Constrained hamiltonian systems// Contrib. centro linceo interdisc. di scienze mat. No 22. 1976.
30. Quantum dynamics of a massless relativistic string./ P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi, C.V. Thorn. // Nucl. Phys. 1973. Vol. B 56. N 1. P. 109–135.
31. Brink L., Nielsen H.B. A simple physical interpretation of the critical dimension of space-time in dual models// Phys. Lett. 1973. Vol. 45 B. N 4. P. 332–336.
32. Биррелл Н., Девис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М.: Мир, 1984.
33. Sundermeyer K. Constrained dynamics: Lecture Notes in Physics. Vol. 169. Berlin: Springer Verlag, 1982.
34. Боголюбов Н.Н., Широков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1985.
35. Röhrlich F. Quantum dynamics of the relativistic string// Phys. Rev. Lett. 1975. Vol. 34, N 13, P. 842–845; Covariant loops and strings in a positive definite Hilbert space// Nuovo cimento. 1977. Vol. 37 A. N 3. P. 242–265; Solution of the relativistic string problem// Nucl. Phys. 1976. Vol. B 112. N 1. P. 177–188; Covariant quantization of a quark-binding string// Phys. Rev. 1977. Vol. D 16. N 2. P. 354–365.
36. Feynman R.P., Kislinger M., Ravndal F. Current matrix elements from a relativistic quark model// Ibid. 1971. Vol. D 3. N 11. P. 2706–2732.
37. Lanyi G. Quantum dynamics of relativistic massive strings// Ibid. 1976. Vol. D 14. No 4. P. 972–984.

38. Chodos A., and Thorn C.B. Making the massless string massive// Nucl. Phys. 1974. Vol. B 72. N 3. P. 509–522.
39. Frampton P.H. String approaches to hadron structure// Phys. Rev. 1975. Vol. D 12. N 2. P. 538–545.
40. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Релятивистская струна с массами на концах// Теорет. мат. физ. 1977. Т. 31. № 3. С. 291–299.
41. Barbashov V.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. Infinite relativistic string with a point-like mass// Lett. Math. Phys. 1978. Vol. 2. P. 291–295.
42. Andreo R., Rohdlich R. A string model of mesons// Nucl. Phys. 1976. Vol. B 115. P. 521–532.
43. Study of the longitudinal kink models of the string/ W.A. Bardeen, I. Bars, A.J. Hanson, R.D. Peccei. // Phys. Rev. 1976. Vol. D 13. N 8. P. 2364–2382; Quantum Poincare covariance of the two-dimensional string// Ibid. 1976. Vol. D 14. N 8. P. 2193–2196.
44. Kamimura K. Massive string model of mesons and baryons// Progr. Theor. Phys. 1979. Vol. 62. N 2. P. 508–521.
45. Barbashov V.M. Some solutions of the equations of motion of the relativistic string with massive ends// Nucl. Phys. 1977. Vol. B 129. N 1. P. 175–188.
46. Ida M. Relativistic motion of massive quarks joined by a massless string// Progr. Theor. Phys. 1978. Vol. 59. No. 5. P. 1661–1676.
47. Konisi G., Oogaki I., Takahasi W. A theory of dual massive strings// Nucl. Phys. 1977. Vol. B 119. N 3. P. 435–452.
48. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
49. Бор Г. Почти периодические функции. – М.: ОГИЗ, 1934.
50. Одномодовое приближение в квантовой теории релятивистской струны. Струнное поле/ В.И. Бородулин, О.Л. Зорин, Г.П. Пронько, А.В. Разумов, Л.Д. Соловьев// Теорет. мат. физ. 1985. Т. 65. № 1. С. 119–140.
- Пронько Г.П., Разумов А.В., Соловьев Л.Д. Лагранжиан и квантование прямой молниевидной струны// Препринт ИФВЭ 85–74. Серпухов. 1985.
51. Плосчай М.С., Пронько Г.П., Разумов А.В. Квантовая теория фермионной струны с конечным числом степеней свободы// Теорет. мат. физ. 1983. Т. 57. № 3. С. 323–337.
52. Andreo K.H. and Rohdlich F. Longitudinal vibrations of the relativistic string// Phys. Rev. 1978. Vol. D 18. N 8. P. 2967–2981.
53. 't Hooft G. A two-dimensional model for mesons// Nucl. Phys. 1974. Vol. B 75. N 3. P. 561–470.
54. Шавахина Н.С. О круговом релятивистском движении двух одинаковых тел. Препринт ОИЯИ, P2–83–231, Дубна, 1983.
55. Пуанкаре А. О динамике электрона// Принцип относительности. М.: Атомиздат, 1973. С. 00–00.
56. Шавахина Н.С. Релятивистская задача двух тел с постоянной по величине силой притяжения// Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 4. С. 952–856.
57. Grosse H., Martin A. Exact results on potential models for quarkonium systems// Phys. Rep. C. 1980. Vol. 60. N 6. P. 341–392.
58. Spectrum of charmed quark-antiquark bound states/ E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita e.a.// Phys. Rev. Lett. 1975. Vol. 34. N 6. P. 369–372.
59. Lüscher M. Symmetry-breaking aspects of the roughening transition in gauge theories// Nucl. Phys. 1981. Vol. B 180. N 2. P. 317–329.
- Stack J. D. and Stone M. Elementary derivation of the universal attractive Coulomb term in the interquark potential// Phys. Lett. 1981. Vol. 100B. N 6. P. 476–480.
60. Alvarez O. The static potential in string models// Phys. Rev. 1981. Vol. D 24. N 2. P. 440–449.
61. Поздеев М.Ю., Пронько Г.П., Разумов А.В. Релятивистская струна с закрепленными концами// Теорет. мат. физ. 1984. Т. 58. № 3. С. 377–387.

- Arvis J.F. The exact $q\bar{q}$ potential in Nambu string theory// Phys. Lett. 1983. Vol. 127 B. N 1, 2. P. 106–108.
62. Filk T. Regularization procedure for string functionals// Preprint Bonn HE-81-16. Bonn: Bonn University, 1981.
63. Dietz K., Filk T. On the renormalization of string functionals// Ibid. HE-82-21, Bonn: Bonn University, 1982.
64. Барбашов Б.М., Кошкарлов А.Л., Нестеренко В.В. Релятивистская струна в постоянном однородном электромагнитном поле// Теорет. мат. физ. 1977. Т. 32. № 3. С. 176–186.
- Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., Червяков А.М. Ковариантный формализм для релятивистской струны в постоянном однородном электромагнитном поле// Там же. С. 336–343.
65. Theory of an interacting string and dual-resonance model/ M. Ademollo, A. D'Adda, R.D. Auria e.a.// Nuovo cimento. 1974. Vol. 21 A. N 1. P. 77–145.
66. Barbashov V.M., Nesterenko V.V. The relativistic string with charges and masses at ends// Proc. of the conf. Hadron structure. 1977. Vol. 4. P. 67–77, Bratislava, 1979.
67. Barbashov V.M., Nesterenko V.V. Differential geometry and nonlinear field models// Fortschr. Phys. 1980, Bd. 28, N 819. S 427–464.
68. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Геометрический анализ нелинейных уравнений в теории релятивистской струны// Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1984. Т. 15. Вып. 5. С.1032–1072.
69. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
70. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии: Пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
71. Nitsche J.C.C. Vorlesungen über Minimalflächen. Berlin: Springer Verlag, 1975.
72. Osserman R. Minimal varieties// Bull. Amer. Math. Soc. 1969, Vol. 75. N 6. 1092–1120.
73. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. – М.: Гостехтеориздат, 1957.
74. Barbashov V.M., Nesterenko V.V. Continuous symmetries in field theory// Fortschr. Phys. 1983. Bd. 31. N 10. S. 535–567.
75. Omnes R. A new geometric approach to the relativistic string// Nucl. Phys. 1979. Vol. B 149. No. 2. P. 269–284.
- Барбашов Б.М., Кошкарлов А.Л. Геометрический подход к динамике релятивистской струны// Теорет. мат. физ. 1979. Т. 39. № 1. С. 27–34.
76. Barbashov V.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. General solutions of nonlinear equations in the geometric theory of the relativistic string// Commun. Math. Phys. 1982, Vol. 84, P. 471–481.
77. Barbashov V.M., Nesterenko V.V. Relativistic string model in a space-time of a constant curvature// Ibid. 1981. Vol. 78. N 4. P. 499–506.
78. Barbashov V.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. The solitons in some geometrical field theories// J. Phys. A. 1980. Vol. 13. P. 301–312.
79. Lund F., Regge T. Unified approach to strings and vortices with soliton solutions// Phys. Rev. 1976. Vol. D 14. N 6. P. 1524–1535.
80. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., Червяков А.М. Редукция в модели релятивистской струны для произвольной размерности пространства Минковского// Теорет. мат. физ. 1984. Т. 59. № 2. С. 209–219.
81. Pohlmeyer K. Integrable hamiltonian systems and interactions through quadratic constraint// Commun. Math. Phys. 1976. Vol. 46. N 3. P. 207–221.
- Pohlmeyer K., Rehren K.-H. – Reduction of the two-dimensional $O(n)$ nonlinear σ -model// J. Math. Phys. 1979. Vol. 20. N 12. P. 2628–2632.
82. Honerkamp J. Gauge equivalence of exactly integrable field theoretic models// Ibid. 1981. Vol. 22. N 2. P. 277–281.
83. Желтухин А.А. О калибровочном описании и нелинейных уравнениях струны в d -мерном пространстве-времени// Теорет. мат. физ. 1983. Т. 56. № 2. С. 230–245.

84. Leznov A.N., Saveliev M.V. Two-dimensional exactly and completely integrable dynamical systems. Monopoles, instantons, dual models, relativistic strings, Lund-Regge model, generalized Toda lattice, etc.// Commun. Math. Phys. 1983. Vol. 89. N 1. P. 59–75.
85. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., Червяков А.М. Солитоны в некоторых геометрических теориях поля/ Теорет. мат. физ. 1979. Т. 40, № 1. С. 15–27.
86. Андреев В.А. Применение метода обратной задачи рассеяния к уравнению $G_{xt} = e^{\sigma}$ // Там же. 1976. Т. 29. № 2. С. 213–220.
87. Теория солитонов. Метод обратной задачи/ В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. М.: Наука, 1980.
88. Жидков Е.П., Кирчев К.П. Устойчивость решений вида уединенных волн некоторых нелинейных уравнений математической физики// Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1985. Т. 16. Вып. 3. С. 597–648.
89. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.:Изд-во иностр. лит. 1960. Т. 2.
90. Faddeev L.D., Korepin V.E. Quantum theory of solitons// Phys. Rep. 1978. Vol. 42. N 1. P. 1–87.
91. Разумов А.В., Хрусталева О.А. Применение метода Боголюбова к квантованию бозонных полей в окрестности классического решения// Теорет. мат. физ. 1976. Т. 29. № 3. С. 300–308.
92. Tomboulis E. Canonical quantization of nonlinear waves// Phys. Rev. 1975. Vol. D 12. N 6. P. 1678–1683.
93. Аркадьев В.А., Погребков А.К., Поливанов М.К. Метод обратной задачи рассеяния в применении к сингулярным решениям нелинейных уравнений I, II// Теорет. мат. физ. 1982. Т. 53. № 2. С. 163–180; 1983. Т. 54. № 1. С. 23–37.
94. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Преобразование Бэклунда для уравнения Лиувилля и калибровочные условия в теории релятивистской струны// Там же. 1983. Т. 56. № 2. С. 180–191.
95. Kamimura K. Relativistic string model in differential form// Lett. Math. Phys. 1980. Vol. 4. N 2. P. 115–122.
96. Barbashov B.M., Nesterenko V.V. Bäcklund transformation for the Liouville equation and gauge conditions in the relativistic string theory. JINR preprint E2-82-922. Dubna, JINR, 1982.
97. Takahashi T. Minimal immersions of Riemannian manifolds// J. Math. Soc. Japan. 1966. Vol. 18. P. 380–386.
98. Gürses M., Gürsey F. Derivation of the string equation of motion in general relativity// Phys. Rev. 1975. Vol. D 11, N 4. P. 967–969.
99. Иванова Г.Г. Релятивистская струна в пространстве-времени Переса// Изв. высш. учебных завед. Математика. 1985. № 9 (280). С. 64–66.
100. Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. Generalization of the relativistic string model in the geometrical approach// Lett. Math. Phys. 1979. Vol. 3. P. 359–365.
101. Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. Обобщение модели релятивистской струны в рамках геометрического подхода// Теорет. мат. физ. 1980. Т. 45. № 3. С. 365–378.
102. Nepomechie R.I., Rubin M.A., Hosotani Y. A new formulation of the string action// Phys. Lett. 1981. Vol. 105B. N 6. 457–461.
103. Блохинцев Д.И. Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
104. Heisenberg W. Mesonenerzeugung als Stosswellenproblem// Z. Phys. 1952. Bd. 133. Hf. 1/2. S. 65–79.
105. Tze H.C. Born duality and strings in hadrodynamics and electrodynamics// Nuovo cimento. 1974. Vol. 22A. N 4. P. 507–526.
106. Nielsen H.B., Olesen P. Local field theory of the dual string// Nucl. Phys. 1973. Vol. B 57. N 2. P. 367–380.
107. Nesterenko V.V. A nonlinear two-dimensional sigma-model in relativistic string theory// Lett. Math. Phys. 1983. Vol. 7. N 4. P. 287–293.
108. Нестеренко В.В. Нелинейная сигма-модель для уравнения Буллоу–Додда// теорет. мат. физ. 1984. Т. 58. № 2. С. 192–199.
109. Желтухин А.А. О топологической структуре экстремумов действия классической релятивистской струны// Ядерная физика, 1981, Т. 34, Вып. 2 (8). С. 562–573;
- Классическая релятивистская струна как двумерная $SO(1,1) \times SO(2)$ -калибровочная модель// – Теорет. мат. физ. 1982. т. 52. № 1. С. 73–88;
- О связи релятивистской струны с двумерными полевыми моделями// – Ядерная физика. 1981. Т. 33. Вып. 6. С. 1723–1728.
110. Polyakov A.M. Quantum geometry of bosonic strings// Phys. Lett. 1981. Vol. 103B. N 3. P. 207–210.
111. Brink L., Vecchia P. Di, Hove P. A locally supersymmetric and reparametrization invariant action for the spinning string// 1976. Vol. 65 B. N 5. P. 471–474.
112. D'Hoker E., Jachiw R. Classical and quantal Liouville field theory// Phys. Rev. 1982. Vol. D 26. N 12. P. 3517–3542.
113. Braaten E., Curtright T., Thorn C. An exact operator solution of the quantum Liouville field theory// Ann. Phys. 1983. Vol. 147. N 2. P. 365–416.
114. Johansson L., Kilberg A., Marnelius R. Sectors of solutions and minimal energies in classical Liouville theories for strings// Phys. Rev. 1984. Vol. D 29. N 12. P. 2798–2813.
115. Artru X. String model with baryons: topology; classical motion// Nucl. Phys. 1975. Vol. B85. N 2. P. 442–460.
116. Collins P.A., Hopkinson J.F.L., Tucker R.W. Classical solutions for the relativistic three-string baryon problem// Ibid. 1975. Vol. B 100. N 1. P. 157–178.
117. Sundermeyer K., de la Torre A. Toward quantization of a "three-string"// Phys. Rev. 1977. Vol. D 15. N 6. P. 1745–1755.
118. Кошкарлов А.Л. Динамика релятивистской барионной струны с массами на концах. Сообщение ОИЯИ, P2-11104, Дубна, 1977.
119. Плющай М.С., Пронько Г.П., Разумов А.В. Струнная модель бариона. 1. Канонический формализм и общее решение классических уравнений движения три-струны// Теорет. мат. физ. 1985, Т. 63, № 1, С. 97–112.
120. Струнная модель бариона. 2. Частные решения классических уравнений движения три-струны/ С.В. Клименко, В.Н. Кочин, М.С. Плющай и др.// Теорет. мат. физ. 1985. Т. 64. № 2. С. 245–258.
121. Deser S. Zumino B. A complete action for the spinning string// Phys. Lett. 1976. Vol. B 65. N 4. P. 369–373.
122. Brink L., Schwarz J.H. Local complex supersymmetry in two dimensions// Nucl. Phys. 1977. Vol. B 121. N 2. P. 285–295.
123. Schwarz J.H. Superstring theory// Phys. Rep. 1982. Vol. 89. C. No. 3. P. 223–322.
124. Mc. Keon G. First quantization of the spinning string// Canad. J. Phys. 1980. Vol. 58. No. 10. P. 1492–1495.
125. Polyakov A.M. Quantum geometry of fermionic strings// Phys. Lett. 1981. Vol. B 103. No. 3. P. 211–213.
126. Fradkin E.S., Tseytlin A.A. Quantization of two-dimensional supergravity and critical dimensions for string models// Ibid. 1981. Vol. B 106. N 1, 2. P. 63–68.
127. Cremmer E., Scherk J. Dual models in four dimensions with internal symmetries// Nucl. Phys. 1976. Vol. B 103. N 3. P. 399–425.
128. Gliozzi F., Scherk J., Olive D. Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model// Ibid. 1977. Vol. B 122. N 2. P. 253–290.
129. Scherk J., Schwarz J.H. Dual models for non-hadrons// Ibid. 1974. Vol. B 81. N 1. P. 118–144.
130. Волков Д.В., Желтухин А.А. Об описании струн в пространстве и суперпространстве// Украинский физический журнал. 1985. Т. 30. № 6. С. 809–813.

125. Green M.B., Schwarz J.H. Covariant description of superstrings//Phys. Lett. 1984. Vol. B 136. N 5,6. P. 367-370.
126. Collins P.A., Tucker R.W. Classical and quantum mechanics of free relativistic membranes// Nucl. Phys. 1976. Vol. B 112. N 1. P. 150-176.
- Sugamoto A. Theory of membranes// Ibid. 1983. Vol. B 215 /FS7/. P. 381-406.
127. Фрадкина Т.Е. Обобщенное каноническое квантование и S -матрица для релятивистских мембран: Краткие сообщения по физике. № 12. С. 39-45. М.: ФИАН, 1983.
128. Fradkin E.S., Tseytin A.A. Quantized string models// Ann. Phys. 1982. Vol. 143. N 2. P. 413-447.
129. Moser J. On the volume elements on a manifold// Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 120. N 2. P. 286-294.
130. Eguchi T. New approach to the quantized string theory// Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 44. N 3. P. 126-129.
131. Barbashov B.M., Koshkarov A.L. Some solutions of boundary conditions for relativistic string with massive ends// Lett. Math. Phys. 1979. Vol. 3. P. 39-46.
132. Nambu Y. QCD and the string model// Phys. Lett. 1979. Vol. 80 B. N 4, 5. P. 372-376.
133. Neveu A. Dual resonance models and strings in QCD. Preprint LPTENS 82/33. Paris, 1982.
134. Mandelstam S. Interacting-string picture of dual-resonance models// Nucl. Phys 1973. Vol. 64 B. P. 205-235.