

# Токи в физике адронов

---

В. Де Альфаро  
С. Фубини  
Г. Фурлан  
К. Росетти

---

Перевод с английского  
под редакцией  
д-ра физ.-мат. наук Ю. В. Новожилова  
и канд. физ.-мат. наук Л. В. Прохорова

---

Издательство «МИР»  
Москва 1976

---



# Currents in Hadron Physics

---

V. De Alfaro

S. Fubini

G. Furlan

C. Rossetti

---

North-Holland  
Publishing Company,  
Amsterdam—London

---

American Elsevier Publishing Company,  
Inc., New York

---

1973

---



Книга представляет собой фундаментальную монографию о современной физике элементарных частиц (адронами называются элементарные частицы, взаимодействие которых относится к классу сильных взаимодействий). Авторы книги — известные физики, внесшие большой вклад во многие из рассматриваемых в книге разделов физики частиц. Книга предназначена для научных работников, специализирующихся в области физики высоких энергий, а также для аспирантов-теоретиков и студентов старших курсов физических факультетов.

*Редакция литературы по физике*

© North-Holland Publishing Company, 1973  
© Перевод на русский язык, «Мир», 1976

# Предисловие редакторов перевода

Книга Де Альфаро, Фубини, Фурлана и Росетти «Токи в физике адронов» подводит итог почти десятилетним усилиям физиков в попытках описать взаимодействие адронов.

В основе нынешних успехов теории сильных взаимодействий по существу лежат следующие два важных результата:

- 1) установление аналитических свойств амплитуд перехода и в особенности постулирование представления Мандельстама;
- 2) обнаружение групп симметрий адронов.

Опираясь на эти факты, удалось достигнуть существенного прогресса в описании взаимодействия адронов при очень высоких энергиях (теория полюсов Редже) и при низких (пороговых) энергиях (алгебра токов, феноменологические лагранжианы). Комбинированное применение указанных свойств привело к открытию ряда так называемых «правил сумм», самое знаменитое из которых — соотношение Адлера — Вейсбергера.

Формально, если судить по названию, книга Де Альфаро и др. посвящена взаимодействию адронов при низких энергиях. Действительно, большая ее часть так или иначе связана с методом алгебры токов. В отличие от области высоких энергий, где могут встретиться любые неожиданности, область низких энергий связана с ограниченным кругом явлений и, по-видимому, может быть полностью описана путем введения нескольких эмпирических констант. Кроме того, здесь накоплен богатый экспериментальный материал. Естественно, что на эту тему существует огромное число исследований, разбросанных по журнальным статьям. Последним обстоятельством было стимулировано появление ряда монографий [1—5], посвященных алгебре токов. Предлагаемая читателям книга — первый исчерывающий отчет о достижениях метода алгебры токов. От предшествующих монографий на эту тему ее отличает законченность и ясность изложения и, что особенно ценно, стремление установить связь между различными методами и подходами.

Вместе с тем книга посвящена не только методу алгебры токов. За исключением некоторых отдельных вопросов (мультипериферическая модель, разрезы в плоскости комплексного момента и т. п.), в книге отражены все самые существенные достижения физики элементарных частиц последних лет, т. е. по существу она представляет собой монографию о современной физике элементарных частиц.

По своей структуре книга Де Альфаро и др. естественным образом распадается на 3 части. Первая часть — вводная (гл. 1, 2), занимающая примерно четверть всего объема, знакомит читателя с аналитической теорией  $S$ -матрицы (полюса Редже) и с основами электромагнитных и слабых взаимодействий адронов.

Далее следует центральная часть, посвященная собственно алгебре токов (гл. 3—8, занимающие примерно половину книги). Помимо классических результатов алгебры токов (низкоэнергетические теоремы, правила сумм, вытекающие из свойств аналитичности амплитуд перехода, гл. 3, 4), здесь излагаются метод феноменологических лагранжианов, нелинейные реализа-

ции киральной симметрии, теория спонтанного нарушения симметрии и т. п. (гл. 5). В последующих главах описан другой способ получения правил сумм — прямым насыщением одновременных коммутаторов (гл. 6). Обстоятельно исследуется вопрос о роли выбора системы отсчета при выводе правил сумм (гл. 7). В отдельной главе (8) подробно анализируется вывод правил сумм в системе бесконечно большого импульса.

Наконец, последние 3 главы (почти треть книги) посвящены наиболее обещающим достижениям физики последних лет. Гл. 9 вводит читателя в проблематику дуальных моделей, претендующих на корректное, хотя и приближенное, описание сильных взаимодействий при всех энергиях. Это направление, породившее большие надежды и обширную литературу, продолжает развиваться и поныне. В последних двух главах излагаются новейшие результаты, выходящие за пределы «классической» алгебры токов. В гл. 10 рассмотрены алгебраические свойства дивергенций токов, масштабные преобразования и т. д., а также результаты, касающиеся взаимодействия лептонов с адронами при высоких энергиях (скейлинг Бьёркена, партонная модель). Интерпретация этих результатов в рамках алгебры токов (алгебра токов на световом конусе, билакальные операторы и т. п.) дается в гл. 11.

За время, прошедшее с момента написания книги, был выполнен ряд важных исследований как в области теории, так и в области эксперимента, которые, естественно, не могли войти в книгу.

Из теоретических результатов прежде всего следует отметить успехи, связанные с изучением неабелевых калибровочных полей. Выяснилось, что в рамках этих теорий можно построить весьма изящную объединенную модель слабых и электромагнитных взаимодействий, которая оказывается ренормируемой [6—7]. Эта модель существенно опирается на описанное в гл. 5 явление спонтанного нарушения симметрии. Слабые и электромагнитные взаимодействия выступают здесь как разные проявления некоего единого взаимодействия, подобно тому как электрические и магнитные поля есть разные проявления единого электромагнитного поля. На таком пути открывается заманчивая возможность «объединить» не только слабые и электромагнитные, но и сильные взаимодействия [8—11]. Далее, в неабелевых калибровочных теориях был обнаружен феномен так называемой «асимптотической свободы» [12, 13]. Если в электродинамике ренормированный заряд конечен только в случае бесконечного затравочного заряда, то в неабелевых калибровочных теориях конечному ренормированному заряду соответствует нулевой затравочный, т. е. асимптотически, на малых расстояниях, частицы ведут себя как невзаимодействующие. Весьма возможно, что этот неожиданный результат окажется существенным элементом будущих теоретических построений.

Наконец, следует упомянуть о проблеме «токовых» (current) и «структурных» (constituent) кварков. Уже в самое последнее время была разрешена одна из трудностей «наивной» кварковой модели, в которой нуклон состоит из 3-х кварков, пион из кварка и антикварка и т. д. Эта модель неплохо описывает статические характеристики частиц (массы, магнитные моменты), однако попытки описать в ее рамках взаимодействие движущихся частиц, например распады частиц, терпели неудачу. В то же время токи, фигурирующие в постулированной Гелл-Манном алгебре, также были построены из свободных кварковых полей. Как это ни удивительно, долго не замечали, что последние не могут быть полями структурных кварков «наивной» модели: отождествление полей ведет к отсутствию аномальных магнитных моментов у нуклонов, равенству  $-G_A/G_V = 5/3$  и т. д. Надлежащий учет этого обстоятельства позволил получить удовлетворительное описание распадов целого ряда резонансов (см. обзор [14]). Можно только сожалеть, что это важное наблюдение было сделано слишком поздно и не попало в книгу.

В области эксперимента прежде всего отметим неожиданный рост (почти на 10%) полных и упругих сечений  $pp$ -рассеяния в интервале энергий  $12 \text{ ГэВ} \lesssim \sqrt{s} \lesssim 53 \text{ ГэВ}$  [15, 16]. Этот факт еще не нашел убедительного объяснения. Возможно, он сигнализирует о том, что мы приблизились к границе качественно новой области физики элементарных частиц. На встречных протонных пучках в ЦЕРН'е обнаружили еще одно любопытное явление — аномально большое число пионов с большим поперечным импульсом ( $p_{\perp} > 2 \text{ ГэВ}/c$ ), вылетающих перпендикулярно направлению сталкивающихся пучков [17]. По-видимому, его следует рассматривать как свидетельство присутствия в нуклоне каких-то точечных объектов, именуемых обычно партонами.

Далее были открыты так называемые «нейтральные токи» (слабое взаимодействие, например, лептонов и адронов без передачи адронам электрического заряда [18, 19]). Заметим, что существование нейтральных токов предсказывается объединенными моделями слабых и электромагнитных взаимодействий. Хотя это открытие еще не доказывает справедливости предложенных до сих пор моделей, оно служит веским аргументом в их пользу.

За последние 2—3 года была получена более полная информация о процессах электро- и нейтринорождения на нуклонах. Эксперимент в целом подтверждает наличие скейлинга в этих процессах и пока не противоречит предсказаниям кварк-партоновой модели. Вместе с тем все больше данных свидетельствуют против гипотезы, что партоны есть «голые» нуклоны, пионы и т. д. В частности, измеренная недавно средняя множественность частиц, рождающихся при столкновении электронов с нуклонами, не обнаруживает существенной зависимости от  $q^2$  ( $q$  — 4-импульс виртуального фотона), что противоречит этой гипотезе [20].

С ростом энергий встречных электрон-позитронных пучков появились данные о взаимодействии с адронами виртуальных фотонов с большим времениподобным импульсом. Сюрпризом явилось поведение полного сечения процесса  $e^+ + e^- \rightarrow$  адроны. Ожидалось, что это сечение будет убывать как  $1/s$  ( $\sqrt{s}$  — полная энергия реакции в системе центра масс), а между тем оно оказалось постоянным начиная с  $\sqrt{s} \approx 3 \text{ ГэВ}$  и до  $\sqrt{s} = 5 \text{ ГэВ}$  [21, 22]. Поскольку природа партонов еще не выяснена, представляется преждевременным утверждать, что этот факт противоречит скейлингу, обнаруженному в процессах электророждения.

Другой интересный факт — рост с увеличением  $s$  доли энергии, приходящейся на нейтральные частицы в реакции  $e^+ + e^- \rightarrow$  адроны («энергетический кризис») — также ждет своего объяснения. Будем надеяться, что ведущиеся в настоящее время и планируемые в ближайшем будущем эксперименты помогут разобраться в сути этих явлений.

В книге приведена обширная, хотя и не полная, библиография. При переводе были добавлены ссылки на исследования советских авторов, не вошедшие в основной список литературы, а также ссылки на исследования, опубликованные после выхода книги в свет; предпочтение отдавалось работам обзорного характера, в которых можно найти и более подробную библиографию.

Перевод книги выполнен Ю. П. Щербиным (Введение, гл. 1, 2, 10), А. Н. Васильевым (гл. 3—7) и В. А. Франке (гл. 8, 9 и 11).

Июнь 1974 г.

Ю. В. Новожиллов,  
Л. В. Прохорова

## Литература

1. Ne'eman Y., Algebraic Theory of Particle Physics, New York, 1967.
2. Renner B., Current Algebras and Their Applications, Oxford, 1968.
3. Адлер С., Дашен Р., Алгебры токов и их применение в физике частиц, изд-во «Мир», 1970.
4. Бернштейн Дж., Элементарные частицы и их токи, изд-во «Мир», 1970.

5. *Сакураи Дж.*, Токи и мезоны, М., 1972.
6. *Weinberg S.*, Phys. Rev. Letters, 19, 1264 (1967); 27, 1688 (1971).
7. *Salam A.*, в книге Elementary Particle Theory, ed. N. Svartholm, Stockholm, 1968.
8. *Прохоров Л. В.*, Письма в ЖЭТФ, 16, 561 (1972); доклад на семинаре «Кварки и партоны», М., 1974.
9. *Pati J., Salam A.*, Phys. Rev., D8, 1240 (1973).
10. *Georgi H., Glashow S.*, Phys. Rev. Letters, 32, 438 (1974).
11. *Glashow S.*, Доклад на семинаре «Кварки и партоны», М., 1974.
12. *Gross D., Wilczek F.*, Phys. Rev. Letters, 30, 1343 (1973); Phys. Rev., D8, 3633 (1973).
13. *Politzer H.*, Phys. Rev. Letters, 30, 1346 (1973).
14. *Weyers J.*, Constituent Quarks and Current Quarks, preprint TH 1743-CERN, 1973.
15. *Amaldi U. et al.*, Phys. Letters, B43, 231 (1973); B44, 112 (1973).
16. *Amendolia S. et al.*, Phys. Letters, B44, 119 (1973).
17. *Banner et al.*, Phys. Letters, B44, 537 (1973).
18. *Hasert F. et al.*, Phys. Letters, B46, 121, 138 (1973).
19. *Benvenuti A. et al.*, Phys. Rev. Letters, 32, 800 (1974).
20. *Garbincius P. et al.*, Phys. Rev. Letters, 32, 328 (1974).
21. *Litke A. et al.*, Phys. Rev. Letters, 30, 1189 (1973).
22. *Tarnopolsky G. et al.*, Phys. Rev. Letters, 32, 432 (1974).

## Предисловие авторов

---

Мы полностью понимали (и еще лучше поняли в процессе работы), как рискованно сейчас писать книгу об элементарных частицах. В этой передовой области изысканий очень быстро меняются точки зрения и модели. Но в то же время мы считаем, что за двадцать лет исследований, и особенно за последние лет десять, уже накоплен ряд идей и результатов, которые можно рассматривать как твердо установленные. В своей книге мы и попытались изложить некоторые из этих результатов, в частности относящиеся к адронным токам и их алгебраическим свойствам.

В такой ситуации крайне легко допустить ошибки по меньшей мере двойного рода: а) опустить какие-нибудь важные идеи или факты, которые выпали из нашего поля зрения, и б) включить такие вопросы, которые окажутся несущественными или устаревшими к моменту опубликования.

Что касается таких ошибок, то мы можем только надеяться на снисхождение наших читателей, а также на понимание со стороны тех, кто сам способствовал развитию данной области науки.

Как правило, в книге приводятся сведения, которыми мы располагали к концу 1970 г. Глава 11 — явное исключение из этого правила: мы не устояли здесь перед соблазном представить новые результаты по физике светового конуса, что позволило прояснить ряд затронутых проблем.

При написании книги нам очень помогли многочисленные друзья. Многие разделы были переписаны с учетом полезных советов и критических замечаний С. Адлера, Р. Дашена, Р. Джакива, Г. Венециано и С. Вейнберга. Мы признательны за плодотворные обсуждения Д. Амати, С. Франчинетти, Р. Гатто, Г. Сегре, М. Верде, Д. Валеке, В. Вайскопфу, Г. Вику, Б. Зумино. Мы хотели бы выразить благодарность Р. Броуеру, Г. Денардо и Д. Врэ за прочтение части рукописи и полезные советы.

Мы признательны за сердечность и гостеприимство многим научным учреждениям и ученым. В частности, приносим благодарность профессорам А. Саламу и П. Будини из Международного центра теоретической физики в Триесте. Фурлан благодарит профессора С. Кейзена из Института высших исследований в Принстоне и профессора факультета физики Мичиганского университета И. Томозаву, Фубини — профессоров Дж. Прентки, В. Тирринга и Б. Зумино из теоретического отдела ЦЕРНа, Де Альфаро — профессора факультета естественных наук Парижского университета VI Р. Вин Мо.

Наконец, мы выражаем свою глубокую благодарность М. Гелл-Манну. Его критические замечания и разъяснения позволили нам значительно лучше понять предмет, для развития которого он так много сделал.

Неоценимую техническую помощь нам оказали Ф. Поркведду из туринского филиала Итальянского национального института ядерной физики и С. Стабиле из Триестского университета; благодарим также Н. Крмон за перепечатку рукописи.



# Введение

---

Экспериментаторы обнаруживают частицы по их взаимодействию с какой-то измерительной аппаратурой, и поэтому при изучении и описании субъядерных частиц можно взять за основу виды их взаимодействий. В конце концов все фундаментальные характеристики частицы так или иначе связаны с ее взаимодействием. Например, масса, заряд и магнитный момент характеризуют ее взаимодействие с гравитационным и электромагнитным полями.

Если взглянуть на развитие наших знаний о различных типах взаимодействий с исторической точки зрения, то мы увидим, что до важных открытий в области ядерной физики люди очень хорошо объясняли известные им явления на основе двух фундаментальных полей, *гравитационного и электромагнитного*. Из-за своей специфики эти два фундаментальных взаимодействия господствовали в разных областях научных исследований. Астрономия полностью базировалась на гравитационных силах, а для объяснения микроскопических свойств атомов, молекул и твердых тел достаточно было электромагнитных сил. Задача (не всегда простая) заключалась в отыскании соответствующих приближенных схем для решения трудных, но четко поставленных проблем многих тел. Такая ситуация, которая показалась бы идеальной теоретику семидесятых годов, не казалась достаточно простой ученым того времени, которым пришлось предпринять много изящных, хотя и не совсем успешных попыток объединить электромагнетизм и гравитацию в «единую» теорию поля.

С появлением ядерной физики положение радикально изменилось, так как стало ясно, что необходимы два новых типа взаимодействия:

- 1) *слабые взаимодействия*, ответственные за бета-распад; слабые взаимодействия потребовали введения нового рода частиц — нейтрино;
- 2) *сильные взаимодействия*, необходимые для объяснения сильной связи нуклонов в ядрах <sup>1)</sup>.

Физика элементарных частиц в основном подтверждает результаты, полученные при изучении ядер. Здесь играют роль следующие три взаимодействия (в порядке убывания силы): *сильные, электромагнитные и слабые*. Гравитация же при современном уровне эксперимента, по-видимому, не играет какой-либо роли, поскольку мала соответствующая константа связи.

Фундаментальное различие трех типов взаимодействия приводит к столь же фундаментальному разбиению частиц на две группы:

1. *Лептоны*, для которых возможны только слабое и электромагнитное взаимодействия. Это пары ( $e, \nu_e$ ) и ( $\mu, \nu_\mu$ ) и фотон. Нейтрино занимают особое положение, будучи единственными частицами, которые взаимодействуют только слабо.

2. *Адроны*, а именно частицы  $p, n, \pi, \rho$  и т. д., для которых основным является сильное взаимодействие. Очень мало населенному миру

---

<sup>1)</sup> Такую связь можно считать сильной по сравнению, например, со связью электронов в атомах.

лептонов соответствует громадное число стабильных или нестабильных адронов. Для спектра адронов, по-видимому, даже нет верхней границы; как и в ядерной физике, здесь подчас трудно провести различие между весьма короткоживущими изобарами и непрерывным спектром.

Таким образом, мы видим, что важнейшие свойства элементарных частиц в значительной мере определяются тем, как они взаимодействуют. Это, в конце концов, не так и удивительно для области, где существенны крайне релятивистские эффекты и где рождение и уничтожение частиц — самое обычное явление. Конечно, в очень сложном мире адронов мы оказываемся в гораздо менее выгодном положении, чем в более простом мире лептонов. Однако не исключено, что проблемы, связанные с лептонами, например проблема существования мюона, взаимодействующего так же, как электрон, но имеющего гораздо большую массу, требуют более радикального изменения наших теоретических представлений.

Одно из самых важных достижений в исследовании элементарных частиц — открытие внутренних симметрий, которые играют очень важную роль при классификации частиц по мультиплетам и при отыскании соотношений между их массами, магнитными моментами и константами связи. Эти симметрии, вообще говоря, нельзя считать точными, ибо лишь некоторые члены лагранжиана инвариантны по отношению к соответствующим преобразованиям. Эмпирическое правило таково: чем слабее взаимодействие, тем уже его симметрия.

Мы начнем с того, что рассмотрим «симметричный» мир, а затем будем постепенно вводить различные члены, нарушающие симметрию. Всем хорошо известен замечательный успех группы  $SU(3)$  при объединении в мультиплеты частиц с различными зарядами и гиперзарядами. Однако расщепление экспериментально установленных массовых уровней весьма велико, порядка 100 МэВ, и отсюда делается вывод о том, что часть сильных взаимодействий должна быть ответственна за нарушение  $SU(3)$ -симметрии. Тем самым мы разбиваем сильные взаимодействия на сверхсильную часть, инвариантную относительно  $SU(3)$ -преобразований, и умеренно сильную часть, которая нарушает эту инвариантность. Но, кроме того, было высказано предположение, что умеренно сильная часть лагранжиана, будучи неинвариантной, имеет простые свойства преобразований по отношению к  $SU(3)$ . На этой основе были выведены массовые формулы, которые очень хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Самая важная подгруппа группы  $SU(3)$  — группа  $SU(2)$ , действующая в изотопическом спиновом пространстве;  $SU(2)$ -инвариантность приводит в физике частиц к хорошо известной «зарядовой независимости», которая играет важную роль в ядерной физике. Сильные взаимодействия  $SU(2)$ -инвариантны; расщепление масс в изотопических мультиплетах — порядка нескольких мегаэлектронвольт, его объясняют нарушением  $SU(2)$ -симметрии, обусловленным наличием электромагнитных взаимодействий.

Слабые взаимодействия ответственны за дальнейшее нарушение законов симметрии. Следует помнить, что слабый лагранжиан вызывает несохранение странности и ведет к нарушению одного из наиболее почитаемых законов симметрии — закона сохранения четности.

Наконец, в связи с недавним открытием нарушения  $CP$ -симметрии приходится вводить новый класс сверхслабых взаимодействий.

Этим наши знания исчерпываются. Вполне возможно, что:

1. Когда-нибудь мы обнаружим более широкие мультиплеты, обусловленные симметриями, точными для более ограниченного класса взаимодействий. На это, по-видимому, указывает значительный успех некоторых выводов, основанных на  $SU(6)$ -инвариантности.

2. Часть симметрий, остающихся точными (например,  $TCP$ -инвариантность), может быть нарушена еще более слабым видом взаимодействий.

Изложим теперь подробнее современные взгляды на различные типы взаимодействий.

Хотя электромагнитные взаимодействия не единственные в микрофизике, они тем не менее играют фундаментальную роль. Теория электронов (или мюонов) и фотонов — единственный случай, когда понятия квантовой теории поля оказываются вполне адекватными. Правда, математические трудности очень велики, но практически можно считать любое явление с любой степенью точности и согласие с экспериментом весьма внушительное (до  $10^{-10}$ !). Изучение электромагнитных взаимодействий адронов затрудняется наличием сильных взаимодействий. Однако строгое сохранение электромагнитного тока приводит к крайне важным точным результатам, не зависящим от детального вида сильных взаимодействий. Во-первых, сохранение тока придает точный физический смысл понятию универсальности. В самом деле, мы можем исходить, например, из лагранжиана, в котором «голые» заряды  $e^+$ ,  $\pi^+$  и протона одинаковы. Сохранение тока гарантирует совпадение ренормировочных эффектов в этих трех случаях, так что *физические* заряды трех частиц также одинаковы. Более того, закон сохранения тока позволяет нам доказывать точные теоремы, связывающие сечения рассеяния низкоэнергетических «мягких» фотонов с наблюдаемыми параметрами, такими, как заряды или магнитные моменты адронов.

Электромагнитная теория часто служит моделью для теорий и слабых и сильных взаимодействий. Современные теории слабых взаимодействий обнаруживают большое сходство с квантовой электродинамикой. Мы увидим, что при рассмотрении слабых взаимодействий часто появляются такие понятия, как сохранение заряда, универсальность и тождества Уорда. В развитии же теории сильных взаимодействий играли и играют важную роль такие понятия, как векторная доминантность или поля Янга — Миллса, тоже навеянные электродинамикой.

Отметим, наконец, что все экспериментальные данные в физике элементарных частиц базируются практически на известных нам свойствах электромагнитных взаимодействий. Это наводит на мысль, что электромагнитный ток и аналогичные ему слабый и гравитационный токи — единственные действительно наблюдаемые операторы.

Введение слабых токов для описания слабых взаимодействий имело далеко идущие последствия. Значительный прогресс, достигнутый в понимании природы и свойств слабых взаимодействий, представляет собой одно из самых поразительных достижений в изучении субъядерных частиц. Причины для этого две. Во-первых, малая величина константы связи позволяет нам рассматривать слабые взаимодействия только в низшем порядке теории возмущений. Во-вторых, существуют частицы, например лептоны, которые не обладают сильными взаимодействиями. Следовательно, эффекты слабых взаимодействий можно выделить, если рассматривать либо чисто лептонные процессы (такие, как  $\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu$ ), либо полулептонные процессы (такие, как  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$ ,  $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$ ), в которых влияние недостаточно известных нам сильных взаимодействий может быть учтено введением точно определенных феноменологических параметров.

Окончательная картина слабых взаимодействий замечательно проста и очень похожа на электродинамику. Перечислим кратко ее главные особенности.

Слабое взаимодействие есть взаимодействие типа ток — ток. В электродинамике также имеются токи (взаимодействующие посредством электромагнитного поля). Есть и фундаментальное различие: фотон с нулевой мас-

сой покоя приводит к дальнедействующему электромагнитному взаимодействию ток — ток, тогда как взаимодействие слабых токов практически точечное. Можно формально восстановить сходство между двумя типами связи, постулировав существование промежуточного бозона с большой массой, который служил бы посредником в слабых взаимодействиях. Было высказано предположение, что различие в массах электромагнитного и слабого промежуточных бозонов каким-то образом связано с разными радиусами действия двух взаимодействий.

Токи характеризуются внутренними квантовыми числами, такими, как заряд или гиперзаряд, и, будучи когерентной суперпозицией вектора и аксиального вектора, приводят к сильному (в некоторых случаях к максимальному) несохранению четности. И эти токи аналогично электромагнитным токам обладают крайне важными свойствами частичного сохранения.

Что касается явной формы слабых токов, то из-за наличия сильных взаимодействий адронный случай резко отличается от лептонного. В самом деле, мы хорошо знаем, как лептонные токи выражаются через лептонные поля. Здесь имеет место суперпозиция (с одинаковыми коэффициентами) векторного и аксиального токов, а также сохранение лептонного числа наряду с электрон-мюонной универсальностью.

Случай же адронных слабых токов до сих пор еще весьма не ясен, хотя здесь и наблюдается большой прогресс (особенно в последнее время). Первые успехи в изучении адронных токов были достигнуты при изучении законов сохранения таких токов и алгебраических свойств соответствующих зарядов. Действительно, все слабые токи подчиняются приближенным законам сохранения, причем точность, с которой выполняются эти законы, сильно зависит от типа тока (позднее данный вопрос будет рассмотрен подробнее). Как и в электромагнитном случае, сохранение тока придает физическую определенность понятию универсального слабого взаимодействия. В частности, в случае сохраняющих странность слабых векторных токов, когда нарушение симметрии имеет чисто электромагнитное происхождение, экспериментальные подтверждения универсальности выглядят весьма убедительно. Очень важное развитие теории, связанное с введением угла Кабиббо, привело к тому, что понятие универсальности было распространено и на странные векторные токи.

Из закона сохранения тока прямо следует, что соответствующий заряд (т. е. интеграл по всему пространству от временной компоненты тока) является константой движения. Поэтому единственные не равные нулю матричные элементы такого заряда — это матричные элементы между состояниями с равными массами. Данное простое обстоятельство лежит в основе важного соотношения между законом сохранения тока и симметриями. Поскольку коммутатор двух констант движения есть тоже константа движения, набор сохраняющихся зарядов, характеризующих внутренние квантовые числа типа электрического заряда или гиперзаряда (таковыми и являются слабые заряды), допускает объединение в мультиплеты состояний с разными квантовыми числами, но одинаковыми массами. Структура мультиплетов соответствует симметрии, которая однозначно определяется коммутаторной алгеброй данных зарядов. Далее, для почти сохраняющихся зарядов имеются главные матричные элементы (скажем, порядка 1) между состояниями с почти одинаковыми массами (т. е. принадлежащими одному и тому же приближенному мультиплету) и матричные элементы, исчезающие при выполнении закона сохранения, которые берутся между состояниями с сильно различающимися массами (т. е. состояниями, в пределе точной симметрии или точного закона сохранения принадлежащими разным представлениям).

Итак, коль скоро слабые заряды почти сохраняются и характеризуются квантовыми числами, в природе должны существовать приближенные мультиплеты, содержащие частицы с разными зарядами и гиперзарядами. Посколь-

ку это действительно имеет место, можно сказать, что *природа выбирает слабые заряды в качестве генераторов внутренней симметрии.*

Существующие в природе приближенные мультиплеты объединяют в себе частицы с одинаковыми спинами и одинаковой четностью, и их легко отождествить с  $SU(3)$ -мультиплетами. Генераторы группы  $SU(3)$  представляют собой скалярные операторы положительной четности, и поэтому их следует отождествить со слабыми векторными зарядами. Окончательный вывод таков: слабые векторные заряды обладают всеми свойствами алгебры Ли группы  $SU(3)$ .

Тогда возникает проблема аксиальных зарядов, которые являются скалярными операторами с отрицательной четностью. Опираясь на кварковую модель, Гелл-Манн высказал предположение, что векторный и аксиальный заряды удовлетворяют алгебре  $SU(3) \otimes SU(3)$ .

Если попытаться распространить все сказанное выше на аксиальные заряды, то мы придем к выводу, что должны существовать более широкие мультиплеты, содержащие частицы с одинаковыми спинами, но разными четностями. Существование же таких более широких структур отнюдь не подтверждается имеющимися данными о спектре элементарных частиц. В конце концов было установлено, что частичное сохранение аксиальных токов связано с существованием псевдоскалярной частицы малой массы <sup>1)</sup>, пиона. Аксиальные заряды вызывают переходы преимущественно между состояниями, различающимися на нечетное число пионов. Таким образом, ввиду малой массы пиона можно говорить о группах состояний обеих четностей с близкими энергиями. Итак, из частичного сохранения аксиального тока не следует, что должны существовать более широкие мультиплеты; из него следуют лишь некоторые выводы об испускании и поглощении мягких пионов с малым 4-импульсом. Такое «аномальное» поведение аксиальных токов прямо связано со спонтанным нарушением симметрии (так называемый «механизм Голдстоуна — Намбу»). Точнее говоря, аксиальный ток строго сохранялся бы в мире, в котором масса пиона была бы равной нулю. Тогда можно было бы доказать важные общие теоремы об испускании и поглощении пионов с нулевым 4-импульсом. Прямой и общий метод теоретического исследования мягких пионов основан на использовании феноменологических лагранжианов и нелинейных реализаций киральной симметрии. Имеется, конечно, близкая аналогия между теоремами о мягких пионах и хорошо известными теоремами о мягких фотонах, существование которых связано с точным сохранением электромагнитного тока.

На следующей стадии развития теории адронных токов более важное значение приобретают конкретные предположения о структуре сильно взаимодействующих частиц.

Напомним, что в лептонном случае токи можно в явном виде выразить через поля ( $e - \nu_e$ ) и ( $\mu - \nu_\mu$ ). Было бы очень желательно иметь возможность и адронные токи выражать через некоторые фундаментальные поля. Модель кварковых триплетов дает простейшую форму таких токов, но необходимо подчеркнуть, что даже если бы мы абсолютно не сомневались в кварковой модели, положение с адронными токами существенно отличалось бы от положения с лептонными. В самом деле, присутствие сильных взаимодействий, основные свойства которых в лучшем случае известны лишь частично, не позволяет сколько-нибудь уверенно вычислять матричные элементы токов между адронными состояниями.

В такой ситуации был найден благоразумный выход — выделить те свойства кварковой модели, которые слабо зависят от неизвестных деталей сильного взаимодействия. В качестве первого шага в данном направлении

<sup>1)</sup> В физике элементарных частиц массовая шкала задается по существу массой нуклона.

нужно было постулировать на основании кварковой модели определенный вид одновременных коммутаторов для (непринтегрированных) временных компонент токов. Эти коммутаторы определяются каноническими коммутационными соотношениями для кваркового поля и поэтому совершенно не зависят от вида лагранжиана взаимодействия; их форму можно также постулировать, исходя из вида зарядовых коммутаторов и тех или иных разумных предположений об их не слишком сингулярном поведении при совпадении аргументов.

Поскольку зарядовые плотности не являются приближенными константами движения, эти коммутаторы вряд ли дадут столь же простые результаты, как и в случае зарядов. Рассматривая одночастичные матричные элементы зарядовых плотностей в пределе бесконечно большого импульса, можно получить большой набор дисперсионных правил сумм. Эти правила сумм могут рассматриваться как естественное обобщение на элементарные частицы соотношения Томаса — Рейхе — Куна. Аналогия станет еще более очевидной, если мы вспомним, что старое правило сумм базировалось на фундаментальном коммутаторе квантовой механики  $[p, q]$ ; новые же дисперсионные правила сумм опираются на коммутаторы между токами, которые считаются «наблюдаемыми» в теории частиц. Дисперсионные правила сумм дают общие соотношения между различными видами экспериментальных данных, а также позволяют выводить интересные соотношения между массами и константами связи различных частиц.

Новейшие приложения, основанные на изучении коммутаторов на световом конусе, более существенным образом опираются на конкретную форму кварковой модели. Развитие этого направления было стимулировано главным образом результатами опытов по глубоко-неупругому рассеянию электронов. Метод светового конуса дает возможность весьма просто интерпретировать важное свойство масштабной инвариантности, экспериментально уже обнаруженное. Коммутаторы на световом конусе приводят к новому обобщению понятия тока — введению так называемых «бислокальных операторов», которые в кварковой модели представляют собой билинейные формы кварковых полей, взятых в разных точках. Масштабно-инвариантные структурные функции, с помощью которых выражаются все экспериментальные данные инклюзивного лептон-адронного рассеяния, даются одночастичными матричными элементами бислокальных операторов. Таким образом, мы видим, что наблюдаемы не только локальные токи, но и бислокальные операторы. Это наводит на мысль рассмотреть на световом конусе алгебру бислокальных операторов, которая оказывается замкнутой. Изучение такой «обобщенной алгебры» — дело будущего.

Простую интерпретацию глубоко неупругого рассеяния, полностью эквивалентную использованию алгебры на световом конусе, дает так называемая партонная модель. В этой модели глубоко-неупругое рассеяние представляется в виде суммы элементарных взаимодействий с точечными составными частями нуклона — партонами, совпадающими в нашей конкретной интерпретации с кварками. В самом деле, равенство нулю сечения глубоко-неупругого рассеяния за счет обмена продольным фотоном убедительно свидетельствует о том, что спин партонов равен  $1/2$ .

Конечно, в свете всего сказанного складывается весьма парадоксальная ситуация: во многих отношениях дело обстоит так, как будто кварки существуют, но четких доказательств существования кварков все еще нет. Оставим эту проблему для будущего исследования и перейдем к теории сильных взаимодействий.

Если взглянуть на спектр известных адронов, то, естественно, впечатление простоты не возникает. Начав с легчайших частиц с небольшими спинами (типа  $\pi$ -,  $\rho$ -мезона и нуклона), мы обнаруживаем все возрастающее число уровней с растущими массами и спинами. Верхняя граница спектра в настоя-

щее время определяется только экспериментальными возможностями в отношении энергии и разрешения. Несмотря на то что обнаружено много красивых закономерностей, а некоторые теоретические схемы имели во многих случаях частичный успех, мы еще очень далеки от построения единой схемы, позволяющей объяснить и классифицировать адронные состояния. Ввиду сложного характера спектра естественно предположить, по аналогии с ядерной физикой, что все адроны — составные объекты, построенные из нескольких фундаментальных частиц. Мы уже видели, что наиболее многообещающей из таких моделей была модель, основанная на триплетях кварков. Она оказалась очень полезной для предварительной интерпретации низколежащих адронных состояний и для разработки алгебры токов. Но очень трудно сказать, будут ли когда-нибудь преодолены трудности *реальной* кварковой модели. Не говоря уже об отсутствии каких-либо экспериментальных доказательств существования самих кварков, такие их особенности, как дробный заряд, дробное барийное число и, возможно, неправильная связь спина со статистикой, составляют серьезную проблему для будущих исследований.

Весьма разумная руководящая идея при изучении сильных взаимодействий — не полагаться на какую-нибудь конкретную модель, а постараться вывести из общей лагранжевой схемы те свойства, которые должны быть у любой приемлемой модели. Такая логика привела к  $S$ -матричному подходу, игравшему центральную роль в физике сильных взаимодействий. Было установлено, что различные общие требования типа релятивистской инвариантности, принципа перестановки, унитарности и аналитичности очень сильно ограничивают возможный выбор  $S$ -матрицы; результаты явились весьма плодотворные феноменологические исследования, позволившие выявить много разных закономерностей в экспериментальных данных. Один из самых важных результатов такого подхода — теория полюсов Редже, которая одновременно дает общую схему классификации элементарных частиц и позволяет делать общие теоретические выводы о рассеянии при высоких энергиях на основании низкоэнергетических параметров, полученных при изучении резонансов.

Из теории Редже выросло новое перспективное направление исследований, основанное на сверхсходимости и дуальности. В частности, у дуальной резонансной модели, предложенной Венециано, много шансов стать отправной точкой для новых важных теоретических разработок в физике семидесятых годов.

Замечательный, хотя и не полный, успех теории  $S$ -матрицы вызвал к жизни гораздо более общий и претендующий на большее подход, именуемый «бутстрапом». Он основан на том соображении, что физические параметры адронной физики можно полностью определить, если найти самосогласованное решение всех условий аналитичности, унитарности и перекрестной симметрии. С такой точки зрения ни одну частицу не следует считать более фундаментальной, чем любую другую, и каждую из них можно принять за начальную точку при отыскании самосогласованного решения («ядерная демократия»).

На первый взгляд может показаться удивительным, что простые требования общей самосогласованности могут обладать столь громадной предсказательной силой. Но те, кто работают в области сильных взаимодействий, знают, что обеспечить выполнение хотя бы части указанных выше условий очень трудно, так что даже разные приближенные схемы проще всего различать по тому, *какое из общих требований нарушено*.

Может показаться, что кварковый и бутстрапный подходы взаимно исключают друг друга. В принципе это, конечно, верно. Но практически необходимо помнить, что мы пока весьма далеки от того, чтобы достаточно полно объяснить поведение адронов. Поэтому на данном уровне частичный бутстрап и составная модель на основе кварков, которых никто еще не видел,

вполне могут не очень сильно различаться по духу и по результатам. И то и другое приближение содержит долю истины, и весьма вероятно, что будущая адекватная теория элементарных частиц объединит в себе оба аспекта.

\* \* \*

Наша книга посвящена изложению некоторых важных результатов, полученных в физике элементарных частиц. Особый упор делается на электромагнитные и слабые взаимодействия и на фундаментальные проблемы изучения матричных элементов адронных токов. Но поскольку для исследования слабых адронных токов нужно детально знать сильные взаимодействия, две главы посвящены обзору тех разделов физики сильных взаимодействий, которые особенно важны для нашей темы. Остановимся несколько подробнее на содержании книги.

В гл. 1 дается обзор некоторых последних достижений теории  $S$ -матрицы. Мы не ставили себе целью дать полное изложение физики сильных взаимодействий, а ограничились лишь теми вопросами, которые имеют прямое отношение к алгебре токов.

В гл. 2 рассматриваются токи, встречающиеся при анализе слабых и электромагнитных взаимодействий, их общие и феноменологические свойства. Эта глава подготавливает нас к основному вопросу — применению алгебры токов. Существует несколько методов для получения требуемых результатов. Например:

1. По аналогии с электродинамикой мы можем исходить из обобщенных тождеств Уорда. Тогда мы сразу получаем низкоэнергетические теоремы о мягких пионах (гл. 3). В сочетании с предположениями об аналитических свойствах и асимптотическом поведении соответствующих амплитуд тождества Уорда дают широкий класс дисперсионных правил сумм (гл. 4). Главное преимущество такого метода (по крайней мере для неискушенного теоретика) — его явная релятивистская инвариантность. Так, например, он очень хорошо сочетается с методами теории  $S$ -матрицы, что дает возможность распространить аналитический подход на амплитуды, соответствующие слабым и электромагнитным токам.

2. Весьма общий и многое проясняющий подход базируется на использовании феноменологических лагранжианов (гл. 5). Введение нелинейных реализаций киральной симметрии позволяет последовательно и самым общим образом получать амплитуды, содержащие любое число мягких пионов. Это делается в рамках лагранжева метода путем учета вклада только от диаграмм типа деревьев.

3. Самый прямой путь использования алгебры токов — это, пользуясь свойством полноты, выводить правила сумм из матричных элементов коммутаторов между физическими состояниями. Такой метод вполне аналогичен методу, которым пользуются в нерелятивистской квантовой механике. На первый взгляд он кажется простым и надежным. Но, к сожалению, это не так в силу двух обстоятельств, связанных с существованием релятивистским характером нашей задачи: а) форма правил сумм зависит от системы отсчета, в которой мы работаем, и б) имеются вклады от несвязных и полунесвязных диаграмм, пренебречь которыми в общем случае нельзя. При переходе к другой системе отсчета меняется соотношение различных вкладов в правила сумм. Таким образом, метод прямого насыщения матричных элементов коммутатора (гл. 6—8) оказывается поистине сложным искусством, требующим большого умения.

В гл. 6 будет показано, что наличие однопионного вклада прямо связано со свойствами мягких пионов. Выбрав в качестве системы отсчета покоящуюся или почти покоящуюся систему, можно прямо вычислить искомые низкоэнергетические пределы, а также надежно оценить поправки, обусловленные ненулевой массой пиона.



Гл. 7 будет посвящена общему исследованию связи между одновременными коммутаторами и группой Лоренца. Это необходимо, чтобы глубже понять физический смысл зависимости правил суммы от системы отсчета.

Гл. 8 посвящена тщательному изучению системы отсчета с бесконечно большим импульсом. Предел  $p \rightarrow \infty$  позволяет нам сразу же получить, исходя из одновременных коммутаторов, дисперсионные правила сумм с фиксированными массами (типа тех, о которых говорилось в гл. 4). Большое преимущество данного метода заключается в том, что алгебраические аспекты самих правил сумм и схем их насыщения проявляются в нем явным и четким образом.

Переход к пределу бесконечно большого импульса используется теперь не только в алгебре токов, но и в общей теории поля, в диаграммах Фейнмана и в партонных моделях. Это один из самых мощных методов использования неявной лоренцевской инвариантности, присущей задачам физики элементарных частиц.

Окидывая мысленным взором последние достижения алгебры токов, мы видим, что все три подхода имеют свои преимущества и все они выдвигают на первый план разные стороны проблемы. Это позволит читателю избрать ту процедуру, которая ему больше по вкусу или больше подходит для его конкретных нужд.

Наконец, последние три главы содержат обзор совсем недавних достижений как в теории сильных взаимодействий, так и в алгебре токов. В гл. 9 мы остановимся на новом подходе, основанном на идее дуальности. Это изящное новое направление может в будущем привести к существенным успехам в теории адронов.

Гл. 10 посвящена обзору самых последних методов и идей, связанных с адронными токами. Упоминаются, в частности, новая трактовка масштабного преобразования, основанная на использовании тензора энергии — импульса, и красивые новейшие результаты по глубоко-неупругому электронному рассеянию.

И наконец, гл. 11 посвящена новому методу, который получил существенное развитие в первой половине 1971 г. и основан на использовании коммутаторов на световом конусе. Это обеспечивает единую трактовку многих вопросов, уже рассматривавшихся в главах 8 и 10, и, по нашему мнению, открывает широкие возможности для дальнейшего продвижения вперед.

# Обозначения и определения

## 1. Специальные символы

Перечислим использующиеся в этой книге специальные символы, объясняя их значение.

\* «комплексно-сопряженный»;

† «эрмитово-сопряженный»;

~ «ведет себя подобно» (в асимптотических соотношениях, например  $\sin x \sim x$ ),

«имеет величину порядка» (в грубых равенствах, например,  $\pi \sim 1$ ),

«имеет те же трансформационные свойства, как» (в теоретико-групповых соотношениях);

$\approx$  «приблизительно равно» (например,  $G \approx 10^{-5} m_p^{-2}$ );

$\propto$  «пропорционально»;

$\div$  «от... до» (например,  $a = 1 \div 2$ );

$\stackrel{!}{=}$  в дисперсионных соотношениях означает, что равенство сохраняется после выполнения необходимого числа вычитаний;

+ э. с. «плюс эрмитово-сопряженный оператор»;

+ перекр. чл. «плюс перекрестный член»;

$\lim_{\text{Бьёрк}}$  «предел в смысле Бьёркена».

Обычно мы используем первые буквы греческого алфавита

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

для обозначения индексов внутренней симметрии.

Греческие буквы

$$\mu, \nu, \rho, \dots$$

обычно используются для индексов, связанных с преобразованием Лоренца.

Латинские буквы

$$i, j, k, \dots$$

обычно служат пространственными индексами.

## 2. Метрика и связанные с ней определения

Контравариантные компоненты 4-вектора, как обычно, будут иметь индексы сверху:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x}).$$

Ковариантные компоненты 4-вектора характеризуются нижними индексами:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\mathbf{x}),$$

причем наш метрический тензор определен следующим образом:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1, & g_{kk} &= -1 \quad (k=1, 2, 3); \\ g_{\mu\nu} &= 0 \quad \text{при } \mu \neq \nu; \\ g_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}, & g_{\mu}^{\nu} &= \delta_{\mu}^{\nu}. \end{aligned}$$

Оператор градиента записывается так:

$$\begin{aligned} \partial^{\mu} &\equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \\ \partial_{\mu} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right); \end{aligned}$$

таким образом,

$$\partial^{\mu} A_{\mu} = \frac{\partial A_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_{\mu} A^{\mu}.$$

Здесь  $\nabla$  есть, очевидно, оператор градиента в трехмерном евклидовом пространстве:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Оператор Лапласа обозначается так:

$$\Delta \equiv \Delta_2 = \nabla \cdot \nabla,$$

а оператор Даламбера определен в таком виде:

$$\square \equiv \partial^{\mu} \partial_{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_2.$$

### 3. Основные тензоры и матрицы

Стандартные матрицы Паули, действующие в спиновом пространстве, выглядят так:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

причем  $\sigma_i = -\sigma^i$ .

Полностью антисимметричный тензор (Риччи — Леви — Чивиты)  $\varepsilon_{ijk}$  в трехмерном евклидовом пространстве определяется посредством условия

$$\varepsilon_{123} = 1,$$

причем  $\varepsilon^{123} = -1$ .

В четырехмерном пространстве Минковского полностью антисимметричный тензор  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  определен так:

$$\varepsilon_{0ijk} = \varepsilon_{ijk},$$

т. е.

$$\varepsilon_{0123} = 1,$$

причем  $\varepsilon^{0123} = -1$ .

Матрицы Дирака  $\gamma^{\mu} = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$  мы выбираем в следующем виде:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0, & \gamma^{k\dagger} &= -\gamma^k; \\ \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} &\equiv \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}; \\ \boldsymbol{\gamma}_{\mu} &= (\gamma^0 \equiv \boldsymbol{\gamma}_0, -\boldsymbol{\gamma}). \end{aligned}$$

Матрица  $\gamma^5$ , которую мы будем писать с индексом внизу или наверху, определена так:

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

при этом

$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5.$$

Далее, мы вводим четырехмерные матрицы  $\sigma$ , определенные таким образом:

$$\sigma = \gamma^0\gamma\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

и, как обычно, вводим антисимметричные матрицы  $\sigma_{\mu\nu}$ , определенные следующим образом:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} i [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \equiv \frac{1}{2} i (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu);$$

в силу определения имеем

$$\sigma_{\mu\nu}^\dagger = \sigma_{\mu\nu}.$$

#### а. Матрицы внутренней симметрии

Для обозначения внутренних степеней свободы мы используем как верхние, так и нижние индексы.

Матрицы Паули, действующие в изоспиновом пространстве, обозначаются так:  $\tau^\alpha \equiv \tau_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Вводятся также матрицы

$$\tau^\pm = \frac{1}{2} (\tau_1 \pm i\tau_2).$$

Явный вид матриц  $\tau^\alpha$  такой же, как и матриц  $\sigma^i$ .

Полностью антисимметричный тензор в изоспиновом пространстве обозначается так:  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$  и определяется посредством условия  $\varepsilon_{123} = 1$ .

Восемь матриц Гелл-Манна для группы  $SU(3)$  обозначены, как обычно, через  $\lambda^\alpha \equiv \lambda_\alpha$ . Их явная форма такова:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Они удовлетворяют правилам коммутации

$$\begin{aligned} [\lambda^\alpha, \lambda^\beta] &= 2if_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\gamma, \\ \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} &= \frac{4}{3}\delta_{\alpha\beta} + 2d_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\gamma. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $f_{\alpha\beta\gamma}$  полностью антисимметричны по всем трем индексам, в то время как  $d_{\alpha\beta\gamma}$  полностью симметричны. Следующие компоненты коэф-

Коэффициентов  $f_{\alpha\beta\gamma}$  и  $d_{\alpha\beta\gamma}$  отличны от нуля:

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, \\ f_{147} &= -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}, \\ f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ d_{118} &= d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ d_{448} &= d_{558} = d_{668} = d_{778} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \\ d_{148} &= d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = d_{377} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

#### 4. Обозначения для токов и зарядов

Повсюду в этой книге и в особенности в гл. 2 мы постоянно будем иметь дело с разными видами токов и соответствующими им зарядами. Перечислим основные обозначения для них.

Токи:

$$\begin{aligned} y^\mu &= l^\mu + J^\mu \text{ полный слабый ток;} \\ l^\mu &= l_V^\mu - l_A^\mu \text{ лептонный слабый ток;} \\ l_V^\mu &\text{ лептонный слабый векторный ток;} \\ l_A^\mu &\text{ лептонный слабый аксиальный ток;} \\ l_{V\alpha}^\mu &\text{ лептонные векторные } SU(2)\text{-токи;} \\ l_{A\alpha}^\mu &\text{ лептонные аксиальные } SU(2)\text{-токи;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J^\mu &= V^\mu - A^\mu = J_{(\Delta S=0)}^\mu + J_{(\Delta S=\Delta Q)}^\mu \text{ адронный слабый ток;} \\ V^\mu &\text{ адронный слабый векторный ток;} \\ A^\mu &\text{ адронный слабый аксиальный ток;} \\ J_{(\Delta S=0)}^\mu &= J_{I^3}^\mu \text{ адронный слабый ток, сохраняющий странность;} \\ J_{(\Delta S=\Delta Q)}^\mu &= J_{Y^3}^\mu \text{ адронный слабый ток, меняющий странность;} \\ V_\alpha^\mu &\text{ адронные векторные } SU(3)\text{-токи;} \\ A_\alpha^\mu &\text{ адронные аксиальные } SU(3)\text{-токи;} \\ j_\alpha^\mu &\text{ адронный } SU(3) \otimes SU(3)\text{-ток (т. е. обозначение } j_\alpha^\mu \text{ справедливо как для } V_\alpha^\mu, \text{ так и для } A_\alpha^\mu); \\ j_\mu &\text{ ток вообще;} \\ j_{\text{эл.-м}}^\mu &\text{ электромагнитный ток.} \end{aligned}$$

Заряды

$$\begin{aligned} L_+ &= \int l^0(x) d^3x, & L_- &= (L_+)^\dagger, & L_3 &= \frac{1}{2} [L_+, L_-], \\ H_+ &= \int J^0(x) d^3x, & H_- &= (H_+)^\dagger, & H_3 &= \frac{1}{2} [H_+, H_-], \\ Q_V^\alpha &= \int l_{V\alpha}^0(x) d^3x, & Q_A^\alpha &= \int l_{A\alpha}^0(x) d^3x, & (\alpha &= 1, 2, 3), \\ Q^\alpha &= \int V_\alpha^0(x) d^3x, & \bar{Q}^\alpha &= \int A_\alpha^0(x) d^3x & (\alpha &= 1, 2, \dots, 8). \end{aligned}$$

Подчеркнем еще раз, что индексы внутренней симметрии могут писаться сверху или снизу, поэтому  $Q^\alpha \equiv Q_\alpha$ ,  $V_\mu^\alpha \equiv V_{\mu\alpha}$  и т. д.

При написании зарядов, действующих как операторы сдвига, мы используем на равных правах три обозначения, например:

$$Q_{V^+} \equiv Q^{V^+} \equiv Q_V^+ = (Q_4 + iQ_5)$$

и т. д.

### 5. Основные уравнения и нормировочные условия

При избранной нами метрике падающая волна выглядит так:

$$e^{-ikx} \equiv e^{-ik^\mu x_\mu} \equiv e^{i(kx - \omega t)}, \quad (0.1)$$

а рассеянная так:

$$e^{ikx} \equiv e^{ik^\mu x_\mu} \equiv e^{-i(kx - \omega t)}. \quad (0.2)$$

Тогда трансляционная инвариантность некоторого локального оператора  $A(x)$  выражается следующим образом<sup>1)</sup>:

$$A(x) = e^{iPx} A(0) e^{-iPx}, \quad (0.3)$$

где  $P^\mu$  — оператор полного 4-импульса.

Уравнение Клейна — Гордона для свободных полей записывается так:

$$(\square + m^2) \varphi(x) = 0 \quad (0.4)$$

или, в импульсном пространстве,

$$(m^2 - p^2) \varphi = 0. \quad (0.5)$$

Если  $\varphi$  — взаимодействующее поле, то в уравнение добавляется источник  $\chi(x)$ :

$$(\square + m^2) \varphi(x) = \chi(x) \quad (0.6)$$

или, в импульсном пространстве,

$$(m^2 - p^2) \varphi = \chi. \quad (0.7)$$

Уравнение Дирака для спинора  $u$ , описывающего частицу, выглядит так:

$$(\hat{p} - m) u(p) = 0 \quad (\hat{p} = \gamma^\mu p_\mu), \quad (0.8)$$

$$\bar{u}(p) (\hat{p} - m) = 0 \quad (\bar{u} = u^\dagger \gamma^0). \quad (0.9)$$

Для спинора  $v$ , описывающего античастицу, уравнение Дирака имеет вид

$$(\hat{p} + m) v(p) = 0, \quad (0.10)$$

$$\bar{v}(p) (\hat{p} + m) = 0. \quad (0.11)$$

Мы избираем ковариантную нормировку для физических состояний с данным импульсом  $p$ :

$$\langle p, \alpha | p', \alpha' \rangle = 2E (2\pi)^3 \delta^3(p - p') \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (0.12)$$

здесь индексом  $\alpha$  обозначены все остальные квантовые числа, необходимые для описания состояния. По ходу изложения будет ясно, что под ними подразумевается.

Избранная нормировка приводит к следующим нормировочным соотношениям для спиноров:

$$\begin{cases} \bar{u}(p) u(p) = 2m, \\ u^\dagger(p) u(p) = 2E \end{cases} \quad (0.13)$$

<sup>1)</sup> Полный оператор 4-импульса мы будем иногда обозначать символом  $\Pi_\mu$ , чтобы не спутать его с некоторыми кинематическими переменными.

и

$$\begin{cases} \bar{v}(p)v(p) = -2m, \\ v^\dagger(p)v(p) = -2E. \end{cases} \quad (0.14)$$

Поэтому суммирование по поляризациям для частиц со спином  $1/2$  дает

$$\sum_s u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p) = \hat{p} + m, \quad (0.15)$$

$$\sum_s v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p) = \hat{p} - m. \quad (0.16)$$

Ковариантная нормировка (0.12) приводит к следующему соотношению полноты:

$$\sum_p |p\rangle\langle p| = \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0). \quad (0.17)$$

### 6. Вероятности перехода, постоянные распада и эффективные сечения

Вероятность перехода в единице 4-объема из начального состояния  $|i\rangle$  в конечное состояние  $|f\rangle$  равна

$$\omega_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) |\langle f | T | i \rangle|^2, \quad (0.18)$$

где  $T$  есть «ковариантная  $T$ -матрица».

Для процесса распада вероятность перехода  $d\Gamma_{fi}$  в единицу времени для определенного конечного состояния равна

$$d\Gamma_{fi} = \frac{\omega_{fi}}{\rho_i} dN_f, \quad (0.19)$$

где  $\rho_i$  — плотность распадающихся состояний, а  $dN_f$  — число конечных состояний. При нашем условии нормировки (0.12) имеем

$$\rho_i = 2E_i. \quad (0.20)$$

Число допустимых состояний для частицы с импульсом, заключенным в пределах от  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{p} + d^3p$ , равно  $d^3p/[(2\pi)^3 2E]$ . Поэтому, если в конечном состоянии  $|f\rangle$  имеется  $n$  частиц ( $|f\rangle = |p_1, \dots, p_n\rangle$ ), то

$$dN_f = \prod_{j=1}^n \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j} = \frac{1}{(2\pi)^{3n} 2^n} \prod_{j=1}^n \frac{d^3p_j}{E_j}. \quad (0.21)$$

Для постоянной распада  $\Gamma(i \rightarrow f)$  получаем из уравнений (0.19) — (0.21)

$$\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3n} 2^n 2E_i} \int \prod_{j=1}^n \frac{d^3p_j}{E_j} \delta^4\left(p_i - \sum_{j=1}^n p_j\right) |\langle f | T | i \rangle|^2. \quad (0.22)$$

В особенно интересном случае распада покоящейся частицы  $a$  на две частицы  $b$  и  $c$  легко получить из (0.22), что

$$\Gamma(a \rightarrow b + c) = \frac{|\mathbf{q}|}{8\pi m_a^2} |\langle b, c | T | a \rangle|^2, \quad (0.23)$$

где  $|\mathbf{q}|$  — фиксированный импульс каждой из конечных частиц

$$|\mathbf{q}| = \frac{1}{2} \left\{ \frac{[m_a^2 - (m_b + m_c)^2][m_a^2 - (m_b - m_c)^2]}{m_a^2} \right\}^{1/2}, \quad (0.24)$$

а матричный элемент  $T$  вычисляется при значениях  $p_b = (E_b, \mathbf{q})$ ,  $p_c = (E_c, -\mathbf{q})$ .

Очевидно, что если частицы обладают спином, то в вышеприведенных формулах подразумевается усреднение по спину состояния  $a$  с суммированием по спином конечного состояния.

Для процесса столкновения

$$i \equiv a_1 + a_2 \rightarrow f$$

эффективное сечение определяется так:

$$d\sigma(a_1 + a_2 \rightarrow f) = \frac{\omega f_i}{J_{i_j}} dN_f, \quad (0.25)$$

где  $J_i$  — плотность потока падающих частиц, равная

$$J_i = \rho_1 \rho_2 v, \quad (0.26)$$

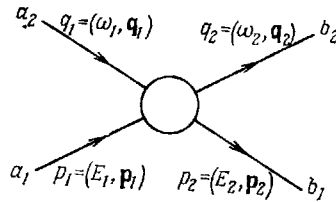
а  $\rho_i$  — плотность падающих частиц [формула (0.20)] и  $v$  — относительная скорость. Тогда для эффективного сечения получается следующее выражение:

$$d\sigma(a_1 + a_2 \rightarrow f) = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_{a_1} + p_{a_2} - p_f)}{(2\pi)^{3n} 4E_{a_1} E_{a_2} v} |T_{fi}|^2 \prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{2E_j}. \quad (0.27)$$

В случае реакции две частицы — в две,

$$a_1 + a_2 \rightarrow b_1 + b_2,$$

введем для частиц кинематические переменные, показанные на фиг. 0.1, и положим, как обычно,  $s = (p_1 + q_1)^2$  — квадрат полной энергии в системе



Фиг. 0.1

центра масс двух падающих частиц. В этой системе мы положим

$$\mathbf{k}_i \equiv \mathbf{p}_1 = -\mathbf{q}_1; \quad \mathbf{k}_f \equiv \mathbf{p}_2 = -\mathbf{q}_2. \quad (0.28)$$

Относительная скорость частиц  $a_1$  и  $a_2$  в системе центра масс равна

$$v = \left| \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{q}_1}{\omega_1} \right| = |\mathbf{k}_i| \frac{\sqrt{s}}{E_1 \omega_1}. \quad (0.29)$$

Из выражения (0.27) теперь легко вывести общее выражение для дифференциального эффективного сечения реакции две частицы — в две в системе центра масс:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s} \frac{|\mathbf{k}_f|}{|\mathbf{k}_i|} |T(s, t)|^2. \quad (0.30)$$

В формуле (0.30) положим, как обычно,

$$\langle f | T | i \rangle = T(s, t), \quad (0.31)$$

где  $t$  — квадрат передаваемого 4-импульса:

$$t = (p_2 - p_1)^2. \quad (0.32)$$

В формулах (0.27) и (0.30) по-прежнему предполагается надлежащее суммирование и усреднение по спином.



В случае упругого рассеяния ( $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f|$ ) из выражения (0.30) сразу получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s} |T(s, t)|^2. \quad (0.33)$$

Кроме того, если все частицы имеют одинаковые массы, то

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{s(s-4m^2)} |T(s, t)|^2. \quad (0.34)$$

Инвариантная амплитуда рассеяния  $T(s, t)$  для скалярных частиц следующим образом разлагается по парциальным волнам:

$$T(s, t) = 8\pi \frac{\sqrt{s}}{k} \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta), \quad (0.35)$$

и, таким образом,

$$T(s, t) = 8\pi \sqrt{s} f(\theta), \quad (0.36)$$

где, как обычно,

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \quad (0.37)$$

и

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2. \quad (0.38)$$

Сдвиги фаз вблизи порога даются соотношением

$$\delta_l \underset{k \rightarrow 0}{\sim} k^{2l+1} a_l, \quad (0.39)$$

где  $a_l$  — длина рассеяния.

Поэтому из формулы (0.35) явствует, что амплитуда  $T$  на пороге связана с длиной рассеяния  $s$ -волны следующим образом:

$$T_{\text{порог}} = 8\pi (m_1^2 + m_2^2) a_0. \quad (0.40)$$

В силу свойства унитарности ковариантная  $T$ -матрица удовлетворяет соотношению ( $|i\rangle$  — бесспиновое состояние):

$$\text{Im} \langle i | T | i \rangle = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_{\text{промежут}} \delta^4(p_i - p_{\text{промежут}}) \langle i | T^\dagger | \text{промежут} \rangle \langle \text{промежут} | T | i \rangle, \quad (0.41)$$

где подразумевается суммирование по дискретным индексам и интегрирование по каждому промежуточному состоянию  $p_j$  с мерой  $d^3p_j / [2E_j (2\pi)^3]$ . В то же время из равенства (0.27) [пользуясь формулой (0.29)] получаем для полного сечения

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{(2\pi)^4}{4k_i \sqrt{s}} \sum_{f1} \delta^4(p_i - p_f) |\langle f | T | i \rangle|^2. \quad (0.42)$$

Сравнение формул (0.41) и (0.42) дает оптическую теорему

$$\text{Im} T(s, 0) = 2k_i \sqrt{s} \sigma_{\text{полн}}. \quad (0.43)$$

В лабораторной системе соотношение (0.43) выглядит так:

$$\text{Im} T(s, 0) = 2 |q_{\text{лаб}}| m \sigma_{\text{полн}}, \quad (0.44)$$

где  $m$  — масса мишени,  $q_{\text{лаб}}$  — импульс падающей частицы.

# I. Введение в теорию сильных взаимодействий

## § 1. Введение

Наша книга посвящена главным образом слабым адронным токам и алгебре токов. Поэтому может показаться странным, что она начинается с главы о сильных взаимодействиях. И в самом деле, физику сильных взаимодействий можно, по крайней мере формально, считать совершенно независимой областью исследований, чего нельзя сказать о слабых взаимодействиях сильно взаимодействующих систем. Если встать на менее формальную точку зрения, то, конечно, следует признать, что слабые и электромагнитные взаимодействия относятся к самым удобным средствам исследования сильно взаимодействующих систем. Это такие экспериментальные средства, которые не возмущают систему, тогда как сильно взаимодействующая «экспериментальная аппаратура» ставит более сложные проблемы.

Попытки развить замкнутую теорию сильных взаимодействий основаны на поисках  $S$ -матрицы, которая удовлетворяла бы ряду важных требований, таких, как требования унитарности, максимальной аналитичности и перекрестной симметрии. По своему статусу это временная теория, о точных решениях в ней не может быть и речи, и одной из ее целей является выяснение того, в какой мере важны различные требования. Так что «теория  $S$ -матрицы 1956» совершенно отлична от издания 1962 г., а оно в свою очередь отличается от теории  $S$ -матрицы выпуска 1970 г.

В этой части книги мы постараемся так изложить предмет, чтобы ему не грозило слишком быстрое старение. Особый упор мы будем делать на те сведения и результаты, которые важны для алгебры токов и для новейшего развития теории сильных взаимодействий (гл. 9).

Если не считать некоторых важных исключений, то в основном усилия в теории  $S$ -матрицы затрачиваются на анализ двухчастичных процессов, т. е. на изучение ковариантных амплитуд, описывающих процессы с четырьмя внешними линиями. Для простоты по большей части рассматривается случай бесспиновых частиц. В § 11 мы отметим то новое и характерное, что вносится ненулевым спином.

Рассмотрим процесс, в котором участвуют четыре асимптотически свободные частицы с импульсами  $p_1, \dots, p_4$  и массами  $p_i^2 = M_i^2$ . Трансляционная инвариантность требует, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{i=0}^4 p_i = 0.$$

Временная компонента  $p_{i0}$  каждого вектора может быть выбрана как положительной, так и отрицательной, что будет соответствовать падающей или рассеянной частице. Каждому такому набору с определенными знаками, согласующемуся с законом сохранения энергии, априори соответствует свой физический процесс (конечно, число независимых процессов снижают общие свойства симметрии амплитуды, такие, как  $CPT$ -инвариантность). Если массы удовлетворяют обычным условиям стабильности <sup>1)</sup>, то возможны три

<sup>1)</sup> Т. е. ни одна частица не может распасться на три остальные.

варианта, описывающие различные процессы рассеяния, а именно <sup>1)</sup>:

$$A + B \rightarrow C + D,$$

$$A + \bar{D} \rightarrow \bar{B} + C,$$

$$A + \bar{C} \rightarrow B + D!$$

Возможность такой группировки частиц по различным парам (каналам) характерна для релятивистской теории и будет играть главную роль только там, где важное значение приобретает релятивистский подход (при энергиях порядка масс частиц). В ядерной физике указанная возможность играет обычно небольшую роль, ибо там разность между  $p_0$  и  $-p_0$  равна примерно  $2M_{\text{ядро}}$ , т. е. весьма велика в масштабе энергетических уровней. Следовательно, новым фундаментальным положением физики элементарных частиц является положение о том, что одна амплитуда описывает одновременно различные процессы и поэтому должна удовлетворять всем требованиям (таким, как требование унитарности), предъявляемым к подобным процессам (принцип перестановки) <sup>2)</sup>. Невозможно, конечно, перейти от одного канала к другому, пройдя непрерывный ряд физических процессов, так как области кинематических переменных, где различные процессы являются физическими, не перекрываются друг с другом. Поэтому нам приходится прибегнуть к методу аналитического продолжения. Возможность применения этого метода очевидна для фейнмановских амплитуд в теории возмущений. В этом случае для любой амплитуды в явном виде устанавливается зависимость от кинематических переменных и аналитическое продолжение, не вызывая затруднений, производится автоматически.

В теории сильных взаимодействий для того, чтобы придать смысл принципу перестановки, необходимо решить задачу аналитического продолжения из одного канала в другой. Полной теории, основанной на общих аксиомах теории поля, не существует, поэтому очень помогает метод теории возмущений. Имеется, однако, ряд положений, относительно которых среди физиков достигнуто общее согласие. Самое важное положение о сингулярностях амплитуды гласит, что каждая сингулярность связана с определенным динамическим процессом и ее положение есть функция масс промежуточных (и внешних) состояний, участвующих в этом процессе. В качестве первого примера рассмотрим процесс с  $N$  внешними линиями; если в данном канале, характеризующемся начальными импульсами  $p_1, \dots, p_r$ , где  $(p_1 + \dots + p_r)^2 = s$ , существует промежуточное одночастичное состояние массы  $M$ , то такой вклад приводит в амплитуде к полюсной сингулярности вида  $F_1(p_1, \dots, p_r) F_2(p_{r+1}, \dots, p_N)/(s - M^2)$ . Таким образом, полюса по каждой переменной связаны с одночастичными обменами.

Конечно, существуют более сложные многочастичные промежуточные состояния с непрерывным спектром масс, которые ведут к более сложным сингулярностям, в общем случае точкам ветвления и разрезам. Принцип максимальной аналитичности (иногда называемый принципом максимальной аналитичности первого рода) устанавливает, что нет других сингулярностей (как, например, сингулярностей, зависящих только от внешних масс) или что они могут быть тривиально факторизованы путем соответствующего определения амплитуд <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Ниже  $B, C$  и  $D$  — это зарядово-сопряженные частицы. Напомним, что «падающая» частица отрицательной энергии соответствует рассеянной зарядово-сопряженной частице. Обращение направления стрелки получается из  $CPT$ -инвариантности.

<sup>2)</sup> Принцип перестановки (substitution rule) иногда называют правилом перехода к перекрестным каналам (или процессам). — *Прим. ред.*

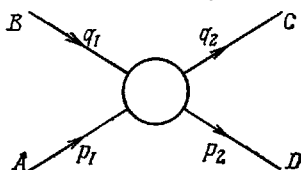
<sup>3)</sup> Принято считать, что сингулярности такого типа, положение которых зависит только от масс внешних частиц, не имеют отношения к динамике, и поэтому их называют кинематическими сингулярностями. (Гл. 1, § 4. Подробнее см. в книге [577]. — *Прим. ред.*)

В дальнейшем при анализе примера четырехчастичной амплитуды нам станет понятно все значение этого принципа, которое, оказывается, больше, нежели можно было бы ожидать.

### § 2. Двухчастичная задача, общие замечания

Здесь мы остановимся на общих свойствах амплитуды, связывающей две падающие и две рассеянные скалярные частицы.

Сначала введем ряд кинематических величин и понятий. Рассматривается процесс рассеяния, изображенный на фиг. 1.1, где  $q_i$  и  $p_i$  — переносимые



Фиг. 1.1

частицами 4-импульсы, связанные законом сохранения импульса  $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ . Мы введем инвариантные переменные (переменные Мандельстама)

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + q_1)^2, \\ t &= (p_1 - p_2)^2, \\ \bar{s} &= (p_1 - q_2)^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Каждая из них представляет собой квадрат энергии соответствующей реакции в системе центра масс; переменная  $s$  связана с реакцией  $A + B \rightarrow C + D$ ; переменная  $t$  — с реакцией  $A + \bar{D} \rightarrow \bar{B} + C$  и переменная  $\bar{s}$  — с реакцией  $A + \bar{C} \rightarrow \bar{B} + D$ . В дальнейшем мы будем говорить «канал  $s$ », «канал  $t$ » и т. д., имея в виду в случае канала  $s$ , что  $p_1, q_1$  относятся к линиям падающих частиц, а  $p_2, q_2$  — к линиям рассеянных ( $p_{10} > 0, q_{10} > 0$ ); в случае канала  $t$  величины  $p_1$  и  $-p_2$  относятся к падающим, а величины  $q_2$  и  $-q_1$  — к рассеянным частицам ( $p_{10} > 0, p_{20} < 0, q_{20} > 0, q_{10} < 0$ ) и т. д.

Эти три переменные не являются независимыми:

$$s + t + \bar{s} = p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2. \tag{1.2}$$

При наличии такого соотношения удобно ввести треугольную систему координат на плоскости, в которой все переменные равноправны (используется то обстоятельство, что в равностороннем треугольнике алгебраическая сумма расстояний от некоторой точки до трех его сторон есть постоянная величина).

Посмотрим, какими будут в таком представлении области, соответствующие трем физически допустимым реакциям. Предположим на время, что падающие и рассеянные частицы имеют одну и ту же массу  $m$ . Это упростит кинематику без потери общности для поставленной нами цели.

Для  $s$ -канальной реакции импульсы могут быть параметризованы следующим образом:

$$\begin{aligned} p_1 &= (\omega, \mathbf{k}), & p_2 &= (\omega, \mathbf{k}'), \\ q_1 &= (\omega, -\mathbf{k}), & q_2 &= (\omega, -\mathbf{k}'), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где  $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| \equiv k; \omega^2 = k^2 + m^2$ .

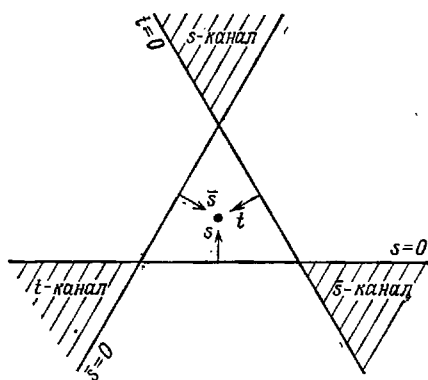
Введем угол рассеяния для  $s$ -канала

$$\cos \theta_s = \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{k^2}. \tag{1.4}$$

Тогда инвариантные переменные  $s, t, \bar{s}$  выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} s &= 4(k^2 + m^2) \equiv (2\omega)^2, \\ t &= -2k^2(1 - \cos \theta_s), \\ \bar{s} &= -2k^2(1 + \cos \theta_s). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Чтобы для  $s$ -канала реакция была физически возможной, должны выполняться условия  $k^2 > 0$  и  $-1 \leq \cos \theta_s \leq +1$ . Следовательно,  $s \geq 4m^2$ ,  $-4k^2 \leq t \leq 0$ ,  $-4k^2 \leq \bar{s} \leq 0$ . В этом случае  $t$  и  $\bar{s}$  играют роль переданных импульсов для  $s$ -канала. То же самое можно сказать о каждом канале. Таким образом, мы видим, что в плоскости  $(s, t, \bar{s})$  физически допустимые области для всех трех процессов разные и не пересекаются (исключением является случай, когда внешние частицы имеют нулевую массу). Физические области показаны на фиг. 1.2, где изображена мандельштамовская плоскость  $(s, t, \bar{s})$ .



Фиг. 1.2

Мы уже говорили во введении о принципе перестановки как о краеугольном камне сегодняшних попыток построить релятивистскую теорию рассеяния частиц. Начнем с определения амплитуды рассеяния. Введем  $S$ -матрицу в канале  $s$ :

$$\begin{aligned} \langle q_2, p_2 | S | q_1, p_1 \rangle &= \delta_{(1)(2)} + \\ &+ i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \langle 2 | T | 1 \rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

При нашем условии нормировки,  $\langle p_1 | p_2 \rangle = 2E (2\pi)^3 \delta^3(p_1 - p_2)$ , амплитуда рассеяния  $\langle 2 | T | 1 \rangle$  есть лоренц-инвариантная функция и, следовательно, функция инвариантных переменных для случая скалярных частиц, т. е. мы имеем

$$\langle 2 | T | 1 \rangle = T(s, t, \bar{s}). \quad (1.7)$$

Далее, принцип перестановки есть утверждение об амплитуде  $T(s, t, \bar{s})$ . Он гласит, что физическое рассеяние в трех разных каналах в соответствующих им допустимых областях плоскости Мандельстама описывается одной и той же аналитической функцией  $T(s, t, \bar{s})$ . Такое утверждение имеет смысл лишь тогда, когда существует метод аналитического продолжения функции  $T(s, t, \bar{s})$  из физической области одного канала в физическую область других каналов. Именно здесь возникает вопрос об аналитических свойствах амплитуды рассеяния. Становится понятной та важная роль, которую играют аналитические свойства амплитуды в области релятивистского рассеяния, где принципиальное значение имеет наличие трех разных физических процессов, тесно связанных между собой.

В § 5 мы остановимся подробнее на вопросе об аналитических свойствах амплитуды. Здесь же только отметим, что результатов, полученных из аксиом современной квантовой теории поля, пока недостаточно для обоснования принципа перестановки и приходится прибегать к моделям, главным образом к теории возмущений. Укажем также, что введенный ранее набор переменных Мандельстама  $s, t, \bar{s}$  является наиболее подходящим для простого выражения аналитических свойств.

Другое крайне важное требование к амплитуде, легко выражаемое в том же наборе переменных, — это требование перекрестной симметрии, которое

есть следствие принципа перестановки для случая, когда имеются два одинаковых канала. Предположим, что в рассмотренном выше примере частицы  $B$  и  $\bar{D}$  одинаковы. Тогда, если при фиксированном  $t$  поменять местами  $s$  и  $\bar{s}$ , то амплитуда не должна измениться, т. е.

$$T(s, t, \bar{s}) = T(\bar{s}, t, s). \quad (1.8)$$

Равенство такого типа называют перекрестной симметрией.

В высшей степени важное представление амплитуды рассеяния дается разложением ее по собственным состояниям полного углового момента  $J$ , который в нашем случае (скалярные частицы) совпадает с орбитальным угловым моментом. В такое разложение входит угол рассеяния в системе центра масс, и поэтому надо рассматривать конкретный канал.

Взяв  $s$ -канал, имеем

$$T(s, \cos \theta_s) = 8\pi \sqrt{s} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(s) P_l(\cos \theta_s), \quad (1.9)$$

причем в случае равных масс частиц для  $\cos \theta_s$  может быть получено следующее выражение в переменных Мандельштама [использованы формулы (1.5)]:

$$\cos \theta_s = \frac{\bar{s}-t}{\bar{s}+t} = \frac{t-\bar{s}}{s-4m^2}. \quad (1.10)$$

Ясно, что разложение по парциальным волнам устраняет возможность равноправной трактовки трех различных каналов, описываемых, согласно закону перестановки, одной амплитудой. Но зато благодаря сохранению полного углового момента в процессе взаимодействия все те свойства, которые «диагональны» в представлении углового момента, очень просто выражаются в этом представлении. Мы имеем в виду, например, унитарность или вклад отчетливо выраженного резонанса.

В той части нашей книги, где рассматриваются сильные взаимодействия, взаимосвязь между свойствами, которые легче всего формулируются с помощью парциальных волн, и свойствами, которые проще выражаются посредством переменных Мандельштама (перекрестная симметрия и аналитичность), будет иметь первостепенное значение.

### § 3. Унитарность

Унитарность — фундаментальное свойство амплитуды рассеяния. Из унитарности  $S$ -матрицы,  $S^\dagger = S^{-1}$ , мы можем получить для  $T$ -матрицы, введенной уравнением (1.6), следующее условие:

$$i\{\langle i|T|f\rangle^* - \langle f|T|i\rangle\} = (2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_i - p_n) \langle f|T^\dagger|n\rangle \langle n|T|i\rangle. \quad (1.11)$$

Инвариантность по отношению к отражению времени дает соотношение <sup>1)</sup>

$$\langle i|T|f\rangle = \langle f|T|i\rangle, \quad (1.12)$$

так что уравнение (1.11) принимает вид

$$\text{Im} \langle f|T|i\rangle = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_i - p_n) \langle f|T^\dagger|n\rangle \langle n|T|i\rangle. \quad (1.13)$$

<sup>1)</sup> Мы имеем дело со скалярными частицами, в противном случае уравнение (1.12) читается так:  $\langle \tilde{i}|T|\tilde{f}\rangle = \langle f|T|i\rangle$ , где  $|\tilde{i}\rangle$ ,  $|\tilde{f}\rangle$  — обращенные во времени состояния, в общем случае не совпадающие с первоначальными. [Равенство (1.12) имеет место лишь при инвариантности теории относительно отражения пространства — времени (если частицы бесспиновые). Формула (1.12) получается также, если помимо  $T$ -инвариантности учесть и релятивистскую инвариантность. См. [578]. — Прим. ред.]

В то же время имеются следующие выражения для дифференциального упругого и полного сечений рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s} |\langle f; p_2, q_2 | T | i; p_1, q_1 \rangle|^2, \quad (1.14)$$

$$\sigma_t = \frac{(2\pi)^4}{4k\sqrt{s}} \sum_n \delta^4(p_i - p_n) |\langle n | T | i; p_1, q_1 \rangle|^2, \quad (1.15)$$

где  $k$  — импульс падающей частицы в системе центра масс.

Используя соотношение (1.13) для случая, когда начальное и конечное состояния одинаковы, получаем оптическую теорему

$$\sigma_t = \frac{1}{2k\sqrt{s}} \operatorname{Im} \langle i | T | i \rangle, \quad (1.16)$$

которая связывает полное сечение рассеяния с мнимой частью амплитуды упругого рассеяния вперед.

Уравнение (1.13) накладывает на амплитуду ограничение, имеющее огромное значение. Оно связывает различные амплитуды при одной и той же энергии. Действительно, справа стоят все амплитуды рождения, совместимые с законом сохранения энергии. Ниже порога рождения уравнение (1.13) представляет собой нелинейное соотношение для амплитуды («упругая унитарность»).

Соотношение упругой унитарности принимает особенно простой вид для парциальных волн. Так как для рассеяния скалярных частиц орбитальный угловой момент является хорошим квантовым числом, соотношение унитарности распадается на нелинейные тождества для каждой парциальной волны. Рассмотрим соотношение упругой унитарности более детально. Если мы находимся ниже порога рождения, то уравнение (1.13) принимает вид

$$\operatorname{Im} T(s, \cos \theta_{12}) = \frac{1}{8(2\pi)^2} \frac{r k}{\sqrt{s}} \int d\Omega_3 T(s, \cos \theta_{13}) T^*(s, \cos \theta_{23}), \quad (1.17)$$

где мы используем переменные  $s$ -канала в системе центра масс,  $k$  есть импульс частицы,  $\cos \theta_{12}$  — косинус угла рассеяния и интегрирование производится по всем направлениям промежуточного трехмерного импульса  $\mathbf{k}_3$ .

Теперь разложим амплитуду по парциальным волнам:

$$T(s, \cos \theta_{12}) = 8\pi \sqrt{s} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(s) P_l(\cos \theta_{12}). \quad (1.18)$$

Если подставить это разложение в уравнение (1.17), то получится соотношение упругой унитарности для парциальной волны:

$$\operatorname{Im} f_l(s) = k |f_l(s)|^2, \quad (1.19)$$

которое выполняется, если парциальная амплитуда имеет вид

$$\tilde{f}_l(s) = \frac{1}{k} e^{i\delta_l(s)} \sin \delta_l(s), \quad (1.20)$$

где  $\delta_l(s)$  — вещественная фаза. Принимая во внимание полную унитарность в неупругой области, получаем ограничение на фазу (теперь комплексную)

$$\operatorname{Im} \delta_l(s) \geq 0. \quad (1.21)$$

Подчеркнем еще раз то обстоятельство, что унитарность принимает особенно простую форму при разложении по парциальным волнам благодаря диагональности амплитуды рассеяния в представлении углового момента. Свойства же аналитичности, как мы увидим, не выражаются столь просто в представлении углового момента; но они довольно легко формулируются при использовании переменных Мандельштама  $s$ ,  $t$  и  $\bar{s}$ . Широко распространено

мнение, что такая взаимосвязь между аналитичностью и унитарностью (т. е. то, что их нельзя одновременно представить в простом виде) уже указывает на сложность релятивистской динамики элементарных частиц.

Сразу же становится ясно, что свойство унитарности оказывает глубокое влияние на аналитические свойства амплитуды рассеяния в переменных Мандельштама. Из уравнения (1.13) мы видим, что мнимая часть амплитуды не равна нулю, когда допустимы те промежуточные состояния, в которых сохраняется энергия. При рассмотрении, например, таких двухчастичных процессов, как пион-пионное рассеяние, это означает, что амплитуда  $T(s, t)$  имеет ненулевую мнимую часть, когда  $s$  больше некоторой величины (в нашем случае  $s = 4m_\pi^2$ ; это наименьшая энергия, допустимая для промежуточного состояния). Далее, при рассмотрении  $T(s, t)$  как аналитической функции комплексной переменной  $s$  при фиксированном  $t$  условие унитарности приводит к тому, что  $T(s, t)$  должна иметь ряд точек ветвления на вещественной оси переменной  $s$  с разрезами вдоль вещественной оси. Действительно, если допустить, что в комплексной  $s$ -плоскости существует область, в которой  $T(s, t)$  есть вещественная функция переменной  $s$ , то соотношение  $\text{Im } T(s, t) \neq 0$  на части вещественной оси означает наличие точек ветвления на вещественной оси.

Влияние, оказываемое условием унитарности на аналитические свойства амплитуды, будет иметь чрезвычайно важное значение. Как мы увидим, ввиду отсутствия законченных результатов в аксиоматической теории поля нам придется встать на путь постулирования аналитических свойств с учетом унитарности и принципа перестановки. Это означает, что у нас будут ограничения на аналитические свойства, обусловленные унитарностью во всех трех каналах двухчастичной реакции.

Сингулярности амплитуды, вызванные наличием промежуточных состояний в соотношении унитарности [уравнение (1.13)], обычно называются динамическими сингулярностями. Предполагается, что инвариантная амплитуда  $T(s, t)$  имеет только те сингулярности (по всем переменным), которые требуются условием унитарности (принцип максимальной аналитичности); таким образом исключаются все другие возможные сингулярности (так называемые кинематические сингулярности).

И наконец, мы хотели бы упомянуть об одном интересном применении унитарности в сочетании с принципом перестановки. Имеется в виду обобщенная оптическая теорема для так называемых *инклюзивных* реакций.

Инклюзивной называют такую реакцию, в которой только одна из появляющихся в конечном состоянии частиц действительно наблюдается. Символически это можно записать так:

$$A + B \rightarrow C + \text{все остальное.}$$

Если теперь формально применить принцип перестановки, то получим

$$A + B + \bar{C} \rightarrow \text{все остальное.}$$

Это означает, что сечение инклюзивной реакции можно рассматривать как полное сечение трехчастичной реакции, начальное состояние которой содержит падающие частицы  $A, B, \bar{C}$ .

Недавно, развивая эту точку зрения, Мюллер [310] предложил обобщенную оптическую теорему для инклюзивных реакций в следующем виде:

$$\sigma_{A+B \rightarrow C+\text{все остальное}} = \text{Im } T(A+B+\bar{C} \rightarrow A+B+\bar{C}).$$

Формула Мюллера основана на недоказанных сильных предположениях об аналитическом продолжении амплитуды. Но она дает нам в руки прекрасную возможность феноменологически связать сумму по части конечных состояний с мнимой частью амплитуды рассеяния для процесса с шестью



внешними линиями. Поскольку в настоящее время существуют модели для описания такой амплитуды (как, например, мультиреджонная или дуальная резонансная модель), на основании вышеупомянутой обобщенной оптической теоремы можно было бы сделать интересные выводы относительно спектра рождающихся частиц.

### 1. Теорема о конечном состоянии

Наша книга в основном посвящена таким смешанным задачам, в которых электромагнитные и слабые явления рассматриваются только в низшем порядке теории возмущений. При обсуждении подобных задач мы иногда встречаемся с амплитудами реакций, в которых единственно возможные конечные состояния отличны от начальных (ср., например, фоторождение пионов). Поэтому стоило бы упомянуть о так называемой теореме о конечном состоянии, относящейся именно к такой ситуации. В этом случае соотношения унитарности принимает вид

$$\text{Im} \langle f | T | i \rangle = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \sum_{f'} \delta^4(p_i - p_{f'}) \langle f | T^\dagger | f' \rangle \langle f' | T | i \rangle, \quad (1.22)$$

где  $\langle f | T | f' \rangle$  — амплитуда упругого перехода  $f' \rightarrow f$ .

Переходя к разложению по угловому моменту, имеем

$$\begin{aligned} \langle f' | T | i \rangle &= 8\pi \sqrt{s} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g_l(s) P_l(\cos \theta), \\ \langle f | T^\dagger | f' \rangle &= 8\pi \sqrt{s} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l^*(s) P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Из равенства (1.22) мы получаем связь между парциальными волнами  $f_l(s)$  и  $g_l(s)$ :

$$\text{Im} g_l(s) = k f_l(s) g_l^*(s), \quad (1.24)$$

где  $k$  — импульс конечного состояния в системе центра масс.

Следовательно, функция  $g_l(s)$  должна иметь вид

$$g_l(s) = R_l(s) e^{i\delta_l(s)},$$

где  $R_l(s)$  — вещественная функция,  $\delta_l(s)$  — фаза функции  $f_l(s)$ . Итак, фаза парциальной амплитуды реакции должна совпадать с фазой рассеяния в конечном состоянии. Физически такое положение имеет место в двух важных случаях. Во-первых, если канал  $i$  соответствует системе со слабым или электромагнитным взаимодействием, то вероятностью перехода опять в тот же канал можно полностью пренебречь (как в классическом примере фоторождения пионов). Во-вторых, канал  $i$  может быть виртуальным, т. е. находится ниже порога (это может случиться при аналитическом продолжении; пример — процесс  $N + \bar{N} \rightarrow \pi + \pi$  ниже порога,  $s < 4m_N^2$ ).

### § 4. Некоторые свойства разложения по парциальным волнам

Здесь на примере одного простого и интересного случая мы продемонстрируем все важное значение утверждения об отсутствии кинематических сингулярностей у инвариантной амплитуды, описывающей рассеяние двух скалярных частиц (в формализме разложения по парциальным волнам). Рассмотрим процесс рассеяния, кинематика которого изображена на фиг. 1.1, и предположим, что у всех частиц разные массы. Сосредоточим внимание

на разложении по парциальным волнам в канале  $t^1$ ); поэтому введем переменную  $\cos \theta_t$ , где  $\theta_t$  — угол рассеяния в канале  $t$ , т. е. угол между трехмерными импульсами  $p_1$  и  $-q_1$  в системе центра масс частиц с импульсами  $p_1$  и  $-p_2$ . В инвариантных переменных Мандельштама получаем следующее выражение для  $\cos \theta_t$  <sup>2)</sup>:

$$\begin{aligned} \cos \theta_t &= \frac{\begin{pmatrix} P & \Delta \\ Q & \Delta \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} P & \Delta \\ P & \Delta \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} Q & \Delta \\ Q & \Delta \end{pmatrix}^{1/2}} = \frac{\hat{P} \hat{Q}}{(\hat{P}^2)^{1/2} (\hat{Q}^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{(PQ) - (Pu)(Qu)}{(P^2 - (Pu)^2)^{1/2} (Q^2 - (Qu)^2)^{1/2}} = \frac{v + \frac{a}{t}}{(\hat{P}^2)^{1/2} (\hat{Q}^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где

$$\begin{aligned} P_\mu &= \frac{1}{2} (p_1 + p_2)_\mu, \quad Q_\mu = \frac{1}{2} (q_1 + q_2)_\mu, \\ \Delta_\mu &= (p_1 - p_2)_\mu = (q_2 - q_1)_\mu, \\ v &= PQ = \frac{1}{4} (s - \bar{s}), \quad t = \Delta^2, \\ \hat{P}_\mu &= P_\mu - \frac{(P\Delta)}{t} \Delta_\mu, \quad \hat{Q}_\mu = Q_\mu - \frac{(Q\Delta)}{t} \Delta_\mu, \\ u_\mu &= \frac{\Delta_\mu}{|\sqrt{t}|}, \\ \hat{P}^2 &= \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{4} t - \frac{1}{4t} (p_1^2 - p_2^2)^2, \\ \hat{Q}^2 &= \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) - \frac{1}{4} t - \frac{1}{4t} (q_1^2 - q_2^2)^2, \\ a &= -(P\Delta)(Q\Delta) = \frac{1}{4} (p_1^2 - p_2^2) (q_1^2 - q_2^2). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Отметим, что в случае разных масс выражение (1.25) оказывается очень сложным и содержит нежелательные сингулярности. Именно, из-за наличия квадратных корней в уравнении (1.25) появляются особенности по переменной  $t$  там, где амплитуда, согласно принципу максимальной аналитичности, не имеет особенностей. Следовательно, в разложении амплитуды в канале  $t$  по парциальным волнам

$$T(t, \cos \theta_t) = 8\pi \sqrt{t} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) g_l(t) P_l(\cos \theta_t) \quad (1.27)$$

корневые сингулярности полиномов Лежандра  $P_l(\cos \theta_t)$  должны компенсироваться сингулярностями парциальной волны  $g_l(t)$ . Ввиду этого представляется целесообразным слегка переопределить разложение по парциальным волнам, чтобы с самого начала избежать появления нежелательных сингулярностей.

Вместо разложения по полиномам Лежандра (1.27) мы осуществим разложение по парциальным волнам с помощью полиномов  $\mathcal{P}_l(p^2, q^2, pq)$ , определенных так:

$$\mathcal{P}_l(p^2, q^2, pq) = |p|^l |q|^l P_l(\cos \theta_t). \quad (1.28)$$

<sup>1)</sup> Никаких оснований для того, чтобы предпочесть один канал другому, нет. Необходимо только выбрать какой-то конкретный канал. Мы выбрали  $t$ -канал потому, что это позволит записать формулы (1.25) и (1.26) в таком виде, который пригодится нам в дальнейшем.

<sup>2)</sup> Символом  $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}$  мы обозначаем определитель  $\begin{vmatrix} (A_1 B_1) & (A_1 B_2) \\ (A_2 B_1) & (A_2 B_2) \end{vmatrix}$ , элементы которого равны скалярным произведениям 4-векторов  $A_i, B_j$ .

Здесь  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  — импульсы падающей и рассеянной частиц в системе центра масс  $t$ -канала. Простые вычисления показывают, что <sup>1)</sup>

$$\mathbf{p}^2 = -\hat{P}^2, \quad \mathbf{q}^2 = -\hat{Q}^2.$$

Таким образом, полиномы  $\mathcal{P}_l$  являются функциями величин  $\mathbf{p}^2$  и  $\mathbf{q}^2$  и скалярного произведения  $\mathbf{p}\mathbf{q} = -\left(v + \frac{a}{t}\right)$ , и, следовательно, мы избегаем корневых сингулярностей, имеющих в обычном разложении (1.27). Теперь можно разложить амплитуду таким образом:

$$T(t, \cos \theta_t) = 8\pi \sqrt{t} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \mathcal{G}_l(t) \mathcal{P}_l(\mathbf{p}^2, \mathbf{q}^2, \mathbf{p}\mathbf{q}), \quad (1.29)$$

и, конечно,

$$g_l(t) = |\mathbf{p}|^l |\mathbf{q}|^l \mathcal{G}_l(t). \quad (1.30)$$

Отсутствие кинематических сингулярностей в полной амплитуде означает, что функция  $\mathcal{G}(t)$  регулярна при  $\mathbf{q}^2 = 0$  или  $\mathbf{p}^2 = 0$ . Согласно формуле (1.30), имеем <sup>2)</sup>

$$g_l(t) = \begin{cases} O(|\mathbf{p}|^l) & \text{при } |\mathbf{p}| \rightarrow 0, \\ O(|\mathbf{q}|^l) & \text{при } |\mathbf{q}| \rightarrow 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Таким образом, пороговые выражения для парциальных волн во входном и выходном каналах мы получили на основании кинематических соображений; обычно же их получают «динамическим» методом, исходя из порогового поведения функций Бесселя. На этом примере видна сила принципа максимальной аналитичности. Наши рассуждения могут быть продолжены, ибо скалярное произведение  $\mathbf{p}\mathbf{q}$  также имеет кинематический полюс при  $t = 0$  (только в случае разных масс), которого не должно быть в амплитуде. Полюс отсутствует, если при  $t^l = 0$  парциальная амплитуда  $\mathcal{G}_l(t)$  ( $l > 0$ ) ведет себя как  $t^l$  при  $t \rightarrow 0$  [с точки зрения теории полюсов Редже такой способ удовлетворять требованиям следовало бы назвать «уклонением» (evasion), см. § 9]. Это условие крайне нефизично. Другой возможный выход — потребовать взаимного гашения различных волн при  $t = 0$ . Мы рассмотрим этот вопрос в § 9 в свете теории полюсов Редже; там такое гашение приводит к появлению так называемых *дочерних* траекторий.

## § 5. Аналитические свойства амплитуды рассеяния

Из сказанного выше ясно, почему аналитические свойства амплитуды представляют большой интерес. Их исследование можно начать с общих аксиом квантовой теории поля; тогда мы получим определенные результаты в виде ограниченного числа дисперсионных соотношений для некоторых амплитуд рассеяния, функций распространения и для некоторых формфакторов. Хотя эти результаты и очень важны, для наших целей их недостаточно. Поэтому нам приходится прибегнуть к помощи теоретико-полевых моделей, таких, как разложение по теории возмущений, а также к нерелятивистской потенциальной теории.

Здесь мы ограничимся тем, что перечислим общепринятые положения. Сначала возьмем простейший случай полюсов по какой-нибудь одной переменной. Амплитуда  $T(s, t)$  имеет полюс, скажем, по переменной  $s$ , [когда

<sup>1)</sup> 4-векторы  $\hat{P}_\mu$  и  $\hat{Q}_\mu$ , определенные формулой (1.26), обладают тем свойством, что их отличные от нуля компоненты в системе центра масс  $t$ -канала и есть трехмерные векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ :  $\hat{P}_\mu = (0, \mathbf{p})$ ,  $\hat{Q}_\mu = (0, \mathbf{q})$ .

<sup>2)</sup> В частности, в случае упругого рассеяния  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|$  и  $g(t) = O(|\mathbf{p}|^{2l})$  при  $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$ .

существует стабильная частица с квантовыми числами того канала, для которого  $s$  соответствует энергии в системе центра масс. Полюс расположен в точке  $s = M^2$  ( $M$  — масса частицы). Зависимость вычета от других переменных определяется угловым моментом частицы  $J$ . Вычет в полюсе может быть представлен в виде произведения двух ренормированных констант взаимодействия частицы с начальным и конечным состояниями.

Обосновать такое свойство амплитуды можно с помощью фейнмановской теории возмущений или теории потенциального рассеяния, в которых связанные состояния описываются полюсом при энергии  $E = E_b$ , где  $E_b$  — энергия связи.

Сингулярности амплитуды по одной переменной не исчерпываются отдельными полюсами. Когда речь шла об условии унитарности, мы уже выяснили, что должны присутствовать также разрывы. Очевидно, например, что если подставить в правую часть уравнения (1.17) полюсной вклад  $T(s, t) = 1/(m^2 - t)$ , то это приведет к появлению у  $\text{Im } T(s, t)$  разрыва по  $t$  при фиксированном  $s$  и, конечно, разрыва у  $T(s, t)$  при фиксированном  $t$  для вещественных  $s > 4m^2$ .

В общем случае, используя унитарность в  $s$ -канале при фиксированном  $t$ , мы приходим к выводу о том, что на части вещественной оси должен существовать разрыв, идущий от  $s_0$  ( $s_0$  — наименьшая возможная масса промежуточного состояния) до  $\infty$ . Должен существовать также другой разрыв, идущий от  $-\infty$  до некоторого значения<sup>1)</sup>  $s_1$ , так как мы можем использовать соотношение унитарности при фиксированном  $t$  в  $\bar{s}$ -канале с учетом соотношения

$$s + t + \bar{s} = \sum_{i=1}^4 m_i^2.$$

В согласии со сказанным выше предположим, что амплитуда  $T(s, t)$  при фиксированном вещественном  $t$  [по крайней мере при значениях  $t$ , лежащих в некоторой области, скажем внутри эллипса Лемана<sup>2)</sup>] есть вещественная аналитическая функция переменной  $s$ :

$$T^*(s, t) = T(s^*, t), \quad (1.32)$$

с полюсами и разрезами на вещественной оси. Тогда для  $T(s, t)$  можно написать дисперсионное соотношение<sup>3)</sup>

$$\begin{aligned} T(s, t) &\doteq \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{\text{Im } T(s', t)}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{s_1} ds' \frac{\text{Im } T(s', t)}{s' - s} \doteq \\ &\doteq \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{A_s(s', t)}{s' - s} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{s_1} ds' \frac{A_{\bar{s}}(s', t)}{s' - s}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Здесь  $A_s(s, t)$  и  $A_{\bar{s}}(s, t)$  — абсорбционные части амплитуды в  $s$ - и  $\bar{s}$ -каналах. Как обычно, (при вещественных  $s$ )

$$\text{Im } T(s, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im } T(s + i\varepsilon, t) = \frac{1}{2i} [T(s + i0) - T(s - i0)], \quad (1.34)$$

и, конечно,

$$\begin{aligned} A_s(s, t) &= \text{Im } T(s, t), \quad s > s_0, \\ A_{\bar{s}}(s, t) &= -\text{Im } T(s, t), \quad s < s_1. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Например, в случае пл-рассеяния  $s_0 = 4m_\pi^2$ ,  $s_1 = -t$ .

<sup>2)</sup> См. [304]. — Прим. ред.

<sup>3)</sup> Для простоты вклад изолированных полюсов в амплитуду опущен.

Равенство (1.33) представляет собой дисперсионное соотношение при фиксированном  $t$ . Символ  $\doteq$  указывает на то, что мы написали его, пренебрегая возможностью плохого асимптотического поведения амплитуды на бесконечности. Это означает, что равенство (1.33) есть скорее утверждение об аналитических свойствах по  $s$  при фиксированном  $t$  и что мы должны заметить его дисперсионным соотношением с надлежащими вычитаниями в соответствии с поведением амплитуды на бесконечности. Итак, пусть  $N$  — наименьшее положительное целое число, для которого

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} s^{-N} T(s, t) = 0. \quad (1.35)$$

Применим теперь теорему Коши к функции  $s^{-N} T(s, t)$ , имеющей полюс порядка  $N$  при  $s = 0$ . Тогда уравнение (1.33) переписется так:

$$T(s, t) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n s^n + \frac{s^N}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds' \frac{\text{Im} T(s', t)}{s'^N (s' - s)}. \quad (1.36)$$

Чтобы написать дисперсионное соотношение в виде (1.36), нужно знать коэффициенты  $c_n$ .

В то же время, если условие (1.35) выполняется при отрицательных значениях  $N$ ,  $\bar{N} = -M$ , то мы имеем

$$s^M T(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds' \frac{s'^M \text{Im} T(s', t)}{s' - s}, \quad (1.37)$$

и из регулярности  $T(s, t)$  при  $s = 0$  следуют условия сверхсходимости

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds s^n \text{Im} T(s, t) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, M-1. \quad (1.38)$$

Разумеется, такого рода рассуждения можно повторить для любого канала, и мы получим дисперсионные соотношения при фиксированном  $s$ ,  $t$  или  $\bar{s}$ . Особое значение имеют дисперсионные соотношения для упругого рассеяния вперед, когда мнимые части под интегралом могут быть выражены через полные сечения [формула (1.16)].

Полученные дисперсионные соотношения дают решение задачи об аналитическом продолжении при условии постоянства какой-либо переменной  $s$ ,  $t$  или  $\bar{s}$ . Мы еще не можем переходить от одного физического канала к другому. Здесь нам на помощь приходит принцип максимальной аналитичности, т. е. предположение о том, что амплитуда по всем переменным имеет только те сингулярности, которые следуют из рассмотренных выше соображений. Это утверждение содержится в представлении для двухчастичной амплитуды, предложенном Мандельштамом [1]:

$$T(s, t) \doteq \frac{1}{\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dx dy \rho_{st}(x, y)}{(x-s)(y-t)} + \frac{1}{\pi^2} \int_{t_0}^{\infty} \int_{s_0}^{\infty} \frac{dx dy \rho_{\bar{t}\bar{s}}(x, y)}{(x-t)(y-\bar{s})} + \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \int_{s_0}^{\infty} \frac{dx dy \rho_{ss}(x, y)}{(x-\bar{s})(y-s)}. \quad (1.39)$$

Интегрирование по каждой переменной ведется в пределах той части положительной вещественной оси, которая лежит правее порога соответствующего канала <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Кроме тех случаев, конечно, когда имеются аномальные пороги. Вкладом изолдрованных полюсов мы опять пренебрегаем. (Относительно аномальных порогов см. [580]. — *Прим. ред.*)

Поскольку у нас остается в силе определение (1.34), мы не считаем, что формула (1.39) справедлива именно в таком виде, в каком она написана. Ее следует понимать как краткую запись утверждения об аналитических свойствах амплитуды по двум переменным, а не как утверждение об асимптотическом поведении спектральных функций  $\rho_{ij}$ .

В теории потенциального рассеяния формула вида (1.39) может быть строго доказана для широкого класса потенциалов при условии конечного числа вычитаний (благодаря перерелятивистскому характеру модели в формуле имеется только один двойной интеграл). Но мы не можем полностью принять этот результат. Как мы увидим позже (гл. 9), у нас достаточно оснований полагать, что асимптотическое поведение амплитуды в релятивистской теории совершенно отлично от такового в потенциальной теории рассеяния. Так что мы будем рассматривать представление Мандельштама как «хранилище» аналитических свойств амплитуды.

Дисперсионные соотношения при фиксированном  $t$  следуют очевидным образом из представления (1.39). Уравнение (1.33) легко получается, если положить

$$A_s(s, t) \doteq \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} dy \frac{\rho_{st}(s, y)}{y-t} + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} dx \frac{\rho_{ss}^-(x, s)}{x-s},$$

$$A_{\bar{s}}(s, t) \doteq \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} dx \frac{\rho_{t\bar{s}}(x, \bar{s})}{x-t} + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} dy \frac{\rho_{\bar{s}\bar{s}}^-(\bar{s}, y)}{y-\bar{s}}.$$
(1.40)

Наше отношение к использованию представления Мандельштама можно выразить следующим образом: все представления, полученные из формулы (1.39) путем фиксирования одной из переменных Мандельштама  $s$ ,  $t$  и  $\bar{s}$ , мы считаем справедливыми (после проведения конечного числа вычитаний); те же выражения, для вывода которых требуются асимптотики других типов (т. е. асимптотики при фиксации других переменных, отличных от  $s$ ,  $t$  и  $\bar{s}$ ), как, например, дисперсионные соотношения для парциальных волн, мы считаем гораздо менее надежными.

Мы видели, что соотношение унитарности «диагонально» для парциальных волн. Аналитические же свойства отдельной парциальной волны очень сложны. Действительно, в предыдущем параграфе мы видели, как сложно выражается величина  $\cos \theta_l$  через мандельштамовские переменные, по крайней мере в случае неравных масс. Аналитические свойства, простые в переменных  $s$ ,  $\bar{s}$  и  $t$ , обычно превращаются в сложные при переходе к парциальным волнам. Кроме того, эти аналитические свойства неустойчивы по отношению к разности масс. В самом деле, переходя от случая равных масс рассеивающихся частиц к случаю со слегка различными массами, мы сталкиваемся с большими изменениями в расположении сингулярностей парциальных амплитуд. В этом нетрудно убедиться, рассмотрев какую-нибудь парциальную волну с учетом представления Мандельштама:

$$f_l(s) = \frac{1}{16\pi V_s} \int_{-1}^1 T(s, \cos \theta_s) P_l(\cos \theta_s) d \cos \theta_s.$$
(1.41)

Получаются такие интегралы:

$$\iint dx dy \frac{\rho_{st}(x, y)}{x-s} \int_{-1}^1 \frac{P_l(\cos \theta_s) d \cos \theta_s}{y-t(s, \cos \theta_s)},$$

$$\iint dx dy \rho_{\bar{s}\bar{s}}^-(x, y) \int_{-1}^1 \frac{P_l(\cos \theta_s) d \cos \theta_s}{[x-t(s, \cos \theta_s)] [y-\bar{s}(s, \cos \theta_s)]}.$$
(1.42)

Легко видеть, что простые сингулярности полной амплитуды, например отдельные полюса по переменной  $t$ , приводят к сложным точкам ветвления у парциальной амплитуды и что локализация сингулярностей функции  $f_l(s)$  в комплексной  $s$ -плоскости в сильной степени зависит от внешних масс. Это обычное проявление того обстоятельства, что унитарность и аналитичность не могут быть просто выражены в каком-нибудь одном представлении для амплитуды. С таким же положением мы столкнемся в следующем параграфе, посвященном полюсам Редже, а именно: простая аналитическая структура амплитуды с необходимостью приводит к весьма сложной структуре уровней (т. е. частиц) по угловому моменту.

Наконец, отметим, что для описания асимптотического поведения парциальной амплитуды мы не располагаем столь же приемлемой моделью <sup>1)</sup>, как модель полюсов Редже для описания асимптотического поведения полной амплитуды при фиксированном  $s$ ,  $\bar{s}$  или  $t$ . Например, в теории потенциального рассеяния парциальные волны асимптотически стремятся к своему борновскому значению, тогда как в модели Венециано (гл. 9) дисперсионные соотношения для  $f_l(s)$  с конечным числом вычитаний вообще невозможны.

Заканчивая наш краткий обзор аналитических свойств амплитуды по переменным Мандельстама, подчеркиваем, что для выяснения этих свойств в общем случае и упругих и неупругих реакций требуется гораздо более детальный анализ с неизбежным применением более сложного математического аппарата.

Одним из главных источников информации являются фейнмановские амплитуды, которые могут быть найдены методом теории возмущений в рамках ренормируемой теории поля. Хотя многие из теоретиков, изучающих  $S$ -матрицу, относятся обычно с подозрением к выводам теоретико-полевых моделей, соответствующая информация об аналитических свойствах пока еще извлекается из амплитуд, найденных методом теории возмущений. Этот вопрос очень важен, но он выходит за рамки нашей книги. Отсылаем читателя к книге Идена, Ландсхофа, Олива и Полкинхорна [311].

## § 6. Аналитичность второго рода

Выше мы говорили об аналитических свойствах амплитуды. Как подчеркивалось, чтобы установить дисперсионные соотношения типа уравнения (1.33) или представление Мандельстама, необходима информация об асимптотическом поведении амплитуды. Но наша амплитуда — функция двух переменных, а общая проблема асимптотического поведения по двум переменным совершенно не изучена. Мы имеем отдельные успехи в рамках более скромной программы, когда асимптотика изучается при условии, что некоторая функция переменных Мандельстама  $s$ ,  $t$ ,  $\bar{s}$  остается постоянной. Нам очень хотелось бы знать асимптотику в особенно интересных случаях большого  $s$  и фиксированного  $t$  или большого  $s$  и фиксированного  $\bar{s}/t$  (фиксированный ненулевой угол).

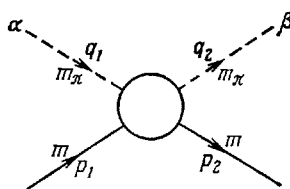
Ответ получен в единственном случае фиксированного переданного импульса <sup>2)</sup>. Даже если доказательство этого результата, полученного знаменитой теорией полюсов Редже, и не безупречно, все же оно, как полагает большинство работающих в данной области, достаточно надежно.

Ниже мы будем исходить из специальной формы теории Редже, предложенной Хури [2], в которой она особенно удобна для изучения аналитической структуры релятивистской задачи.

<sup>1)</sup> Если не считать даваемого соотношением унитарности ограничения в физической области:  $|f_l(s)| \leq 1/k$  [формула (1.20)].

<sup>2)</sup> Или любой другой мандельстамовской переменной.

Конкретизируем задачу. Мы рассматриваем рассеяние пиона на скалярной мишени с изоспином  $1/2$  (это мог бы быть и нуклон, если усреднить по поляризациям!). Введем обычную кинематику, представленную на фиг. 1.3, где  $q_i$  — импульсы пиона, а  $p_i$  — импульсы скалярной мишени с  $I = 1/2$ ;  $\alpha$



Фиг. 1.3

и  $\beta$  — начальный и конечный изоспиновые индексы пиона. Выделим зависимость от изоспина следующим образом:

$$T^{\beta\alpha}(s, t) = \delta_{\alpha\beta} T_1(s, t) + \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^\alpha] T_2(s, t). \quad (1.43)$$

В согласии с перекрестными свойствами амплитуды  $T^{\beta\alpha}$  амплитуда  $T_1$  есть четная функция относительно перестановки  $q_1 \leftrightarrow -q_2$  или  $s \leftrightarrow \bar{s}$ , а  $T_2$  — нечетная.

Амплитуды  $T_i$  удовлетворяют следующим дисперсионным соотношениям при фиксированном  $t$ :

$$T_1(s, t) \doteq \frac{1}{\pi} \int_{(m+m_\pi)^2}^{\infty} ds' \frac{A_1(s', t)}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{(m+m_\pi)^2}^{\infty} ds' \frac{A_1(s', t)}{s' - \bar{s}}, \quad (1.44)$$

$$T_2(s, t) \doteq \frac{1}{\pi} \int_{(m+m_\pi)^2}^{\infty} ds' \frac{A_2(s', t)}{s' - s} - \frac{1}{\pi} \int_{(m+m_\pi)^2}^{\infty} ds' \frac{A_2(s', t)}{s' - \bar{s}}. \quad (1.45)$$

Конечно, в выражениях (1.44) и (1.45) в общем случае необходимы вычитания и, как и раньше, символ  $\doteq$  означает, что эти выражения справедливы только при условии выполнения необходимого при данном  $t$  числа вычитаний.

Теперь разложим правые части равенств (1.44) и (1.45) в ряды по степеням  $s$  и  $\bar{s}$ :

$$T_1(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1n}(t) (s^n + \bar{s}^n), \quad (1.46)$$

$$T_2(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(t) (s^n - \bar{s}^n), \quad (1.47)$$

где коэффициенты  $a_{in}$  даются формулами

$$a_{1n}(t) \doteq \frac{1}{\pi} \int_{(m+m_\pi)^2}^{\infty} ds \frac{A_1(s, t)}{s^{n+1}} = \frac{1}{\pi} \int_{(m+m_\pi)^2}^{\infty} ds \frac{\text{Im} T_1(s, t)}{s^{n+1}}, \quad (1.48)$$

$$a_{2n}(t) \doteq \frac{1}{\pi} \int_{(m+m_\pi)^2}^{\infty} ds \frac{A_2(s, t)}{s^{n+1}} = \frac{1}{\pi} \int_{(m+m_\pi)^2}^{\infty} ds \frac{\text{Im} T_2(s, t)}{s^{n+1}}. \quad (1.49)$$

Выражения (1.46) и (1.47) правильно описывают перекрестные свойства амплитуд  $T_1$  и  $T_2$ . Выражения (1.48) и (1.49) сохраняют символ  $\doteq$ , означающий теперь, что они определяют коэффициенты  $a_{in}(t)$  лишь при  $n \geq N$ , где  $N$  — число вычитаний в формулах (1.44) и (1.45).



Существенный шаг далее состоит в определении двух функций:

$$a_1(z, t) = \frac{1}{\pi} \int_{(m+m_n)^2}^{\infty} ds \frac{A_1(s, t)}{s^{1+z}}, \quad (1.50)$$

$$a_2(z, t) = \frac{1}{\pi} \int_{(m+m_n)^2}^{\infty} ds \frac{A_2(s, t)}{s^{1+z}}. \quad (1.51)$$

Эти функции позволяют получить коэффициенты  $a_{i_n}(t)$  при  $n \geq N$ , т. е. когда интегралы (1.50) и (1.51) несомненно сходятся. Функции  $a_i(z, t)$  могут быть в принципе аналитически продолжены влево от прямой  $\text{Re } z = N$ . Практическая потребность в таком продолжении связана с выводом правил сумм при конечной энергии (гл. 9).

Не исключено, что продолжение  $a_i(z, t)$  «интерполирует» также и остальные коэффициенты  $a_{i_n}(t)$ , при  $n < N$ . Такое предположение (подтверждаемое моделью потенциального рассеяния или теорией возмущений) называется гипотезой о максимальной аналитичности второго рода. Скажем несколько слов об этом <sup>1)</sup>.

Если предположить, что независимо от числа вычитаний  $N$ , необходимых в формулах (1.44) и (1.45), функции  $a_i(z, t)$  дают все коэффициенты  $a_{i_n}(t)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то мы приходим к заключению, что величинами  $\text{Im } T_i(s, t)$ , найденными путем аналитического продолжения функций  $a_i(z, t)$ , полностью определяется вся амплитуда. Это напоминает случай, когда отсутствуют вычитания; различие здесь не в физической стороне дела, а в более сложном математическом выводе полного соотношения между мнимой и вещественной частями амплитуды. Таким образом, мы видим, что отсутствие прямой связи между  $\text{Im } T_i(s, t)$  и  $\text{Re } T_i(s, t)$  обусловлено не сходимостью или расходимостью интегральных представлений (1.50) и (1.51), а новым физическим содержанием этой задачи. Предположим, например, что к амплитуде добавляется контактный член, который не влияет на мнимую часть. Очевидно, что такой вклад нарушил бы максимальную аналитичность второго рода, не изменив при этом сходимости интегралов в формулах (1.50) и (1.51). Другим примером мог бы служить обмен «элементарной» частицей со спином  $J$  в  $t$ -канале, что видоизменило бы коэффициенты  $a_{i_n}$  при  $n \leq J$ .

Поскольку структура  $S$ -матрицы, к сожалению, до конца не известна, мы располагаем максимумом свободы при постулировании максимальной аналитичности. Крайнее толкование этого принципа состоит в том, что мы представляем разложения (1.46) и (1.47) в виде

$$T_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{1n}(t) (s^n + \bar{s}^n), \quad (1.52)$$

$$T_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n}(t) (s^n - \bar{s}^n),$$

где, конечно,  $a_{i_n}(t) = 0$ ,  $n = -1, -2, -3, \dots$ , и требуем, чтобы функции  $a_i(z, t)$  давали все коэффициенты  $a_{i_n}$  даже при отрицательных значениях  $n$ . Тогда получаем

$$a_i(-n, t) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.53)$$

Как мы увидим ниже, из уравнений (1.53) вытекают так называемые правила сумм при конечной энергии. Эти уравнения показывают, что на мнимую часть амплитуды, позволяющую вычислить всю амплитуду, накладывается бесконечное множество условий.

<sup>1)</sup> См. работу [3]. Первые идеи в этом направлении восходят к Иги [4].

Прежде чем идти дальше, остановимся на вопросе об однозначности интерполирующих функций. Очевидно, что если  $a(z)$  есть интерполирующая функция, то, например, функция

$$a(z) + \sin \pi z$$

также будет обеспечивать правильную интерполяцию. Отметим, однако, плохое асимптотическое поведение  $\sin \pi z$  в комплексной  $z$ -плоскости. Критерием для выбора «хорошей» интерполирующей функции является ее пригодность для вычисления интеграла в  $z$ -плоскости, что требует соответствующего асимптотического поведения при больших  $|z|$ . Теорема Карлсона [5] гарантирует, что в области  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$  существует однозначная интерполирующая функция с хорошим асимптотическим поведением при больших  $|z|$ . Теорема состоит в следующем.

Пусть  $f(z)$  есть аналитическая функция в области  $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ . Пусть

$$\limsup_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{-1} \ln |f(|z|e^{i\varphi})| < B \sin \varphi, \quad B < \pi \quad (1.54)$$

и

$$f(n) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда  $f(z) = 0$ .

Таким образом, если мы нашли функцию  $f(z)$ , удовлетворяющую условию (1.54) и интерполирующую набор коэффициентов  $f_n$ , то такая интерполяция единственна. Действительно, предположим, что мы нашли другую интерполирующую функцию  $f'(z)$ , удовлетворяющую тем же условиям. В силу вышеупомянутой теоремы разность  $f(z) - f'(z)$  тождественно равна нулю.

Но, как легко видеть из выражений (1.50) и (1.51), интерполирующие функции  $a_1(z, t)$  и  $a_2(z, t)$  являются карлсоновскими, т. е. удовлетворяют условиям (1.54), и поэтому обеспечивают интерполяцию, однозначно определяемую требованием «наилучшего» асимптотического поведения.

Проиллюстрируем сказанное на следующем конкретном примере:

$$T(s) = (1-s)^\alpha. \quad (1.55)$$

Эта функция имеет разрез, начинающийся при  $s = 1$ ; скачок на разрезе дается выражением

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T(s) &\equiv \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{T(s+i\varepsilon) - T(s-i\varepsilon)\} = \operatorname{Im} T(s+i0) = \\ &= -\sin \pi \alpha (s-1)^\alpha \theta(s-1). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Можно написать, что

$$T(s) \doteq \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\operatorname{Im} T(s')}{s'-s} ds'. \quad (1.57)$$

Символ  $\doteq$  означает, что если  $\alpha > 0$  и  $N-1 < \alpha < N$  ( $N$  положительное и целое), то сначала необходимо выполнить  $N$  вычитаний.

Теперь определим функцию  $a(z)$ :

$$a(z) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\operatorname{Im} T(s)}{s^{1+z}} ds. \quad (1.58)$$

Она задана этим интегралом при  $\operatorname{Re} z > \alpha$ . Подставив выражение для  $\operatorname{Im} T(s)$  и вычислив интеграл, получим

$$a(z) = -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(z-\alpha)}{\Gamma(z+1)} = \frac{\Gamma(z-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(z+1)}. \quad (1.59)$$

Функция  $a(z)$  обеспечивает интерполяцию коэффициентов степенного разложения  $T(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ . Действительно, коэффициент  $a_n$  дается следующей биномиальной формулой:

$$a_n = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n+1)}, \quad (1.60)$$

откуда видно, что при  $z = n$  выражение (1.59) совпадает с (1.60). Фактическое значение параметра  $\alpha$  не существенно, им определяется лишь область сходимости интегрального представления (1.58) для функции  $a(z)$ .

Отметим, что при больших  $|z|$  функция (1.59) асимптотически ведет себя совершенно иначе, нежели выражение (1.60) при простой замене  $n$  на  $z$ . Этот пример показывает, что функция (1.58) — это та единственная интерполяционная функция, которая выделяется теоремой Карлсона. Функция  $T(s)$  обладает свойством максимальной аналитичности второго рода, так как независимо от числа вычитаний  $a(z)$  дает все коэффициенты степенного разложения. Более того, здесь этот принцип применим в полном объеме, поскольку в формуле (1.59) функция  $\Gamma(z+1)$  в знаменателе обеспечивает равенство нулю величин  $a(-n)$ . Поэтому функция  $T(s)$  удовлетворяет принципу максимальной аналитичности в его крайней форме.

Приведем пример, когда этот принцип нарушается. Рассмотрим функцию

$$T'(s) = T(s) + c. \quad (1.61)$$

Поскольку  $\text{Im } T' = \text{Im } T$ , интерполирующая функция будет та же. Но коэффициенты  $a'_n$  разложения функции  $T'(s)$  в ряд теперь таковы:

$$a'_n = a_n + c\delta_{n0}, \quad (1.62)$$

и, очевидно,  $a(z)$  не воспроизводит  $a'_0$ .

## § 7. Полюса и асимптотическое поведение

Общие аналитические свойства величин  $a_i(z, t)$  по переменной  $z$  [формулы (1.50) и (1.51)] однозначно определяются, если точно известны  $T_i(s, t)$ . К сожалению, мы не знаем этих функций, а поэтому аналитические свойства приходится устанавливать, пользуясь моделями (потенциального рассеяния или разложения по теории возмущений).

Не пытаясь рассматривать эту проблему в общем виде, возьмем простейший случай, когда у функции  $a_i(z, t)$  имеются полюса, которые имеют очень важное значение как для классификации частиц, так и для изучения асимптотического поведения амплитуд.

Предположим, что имеется интерполирующая функция  $a_i(z, t)$  с простым полюсом в точке  $z$ :

$$a(z, t) = \frac{\beta(t)}{\alpha(t) - z}. \quad (1.63)$$

Коэффициенты  $a_n$  даются формулой

$$a_n = \frac{\beta(t)}{\alpha(t) - n}, \quad (1.64)$$

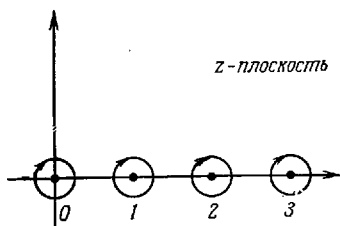
и степенное разложение амплитуды (мы пренебрегаем перекрестной симметрией) таково:

$$T(s, t) = \beta(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{\alpha(t) - n}. \quad (1.65)$$

Выражение (1.65) показывает, что амплитуда  $T(s, t)$  имеет полюса при значениях  $t$ , удовлетворяющих уравнениям  $\alpha(t_0) = 0, \alpha(t_1) = 1, \alpha(t_2) = 2, \dots$ .

Согласно физической интерпретации полюсов амплитуды, в  $t$ -канале имеются частицы, квадраты масс которых равны  $t_0, t_1$  и т. д. Конечно, если величины  $t_0, t_1, \dots$  комплексны, то тогда следует говорить о резонансах и  $\text{Im } t_i$  связана с шириной резонансного состояния.

На вопросе о спине этих состояний мы остановимся позже. Сначала посмотрим, как связаны эти полюса с асимптотическим поведением амплитуды при фиксированном  $t$  и  $|s| \rightarrow \infty$ . Дело в том, что полюса интерполирующей



Фиг. 1.4

функции  $a_i(z, t)$ , лежащие в плоскости Хури, важны не только в их связи с частицами. Ими определяется также асимптотическое поведение амплитуд при больших  $s$  и фиксированных  $t$ . Первым этот вопрос выяснил Редже [6, 7], используя в представлении углового момента преобразование Ватсона — Зоммерфельда [156, 157].

Начнем с разложений (1.46) и (1.47). Воспользовавшись существованием интерполирующих функций, определенных формулами (1.50) и (1.51), можно представить эти разложения в интегральной форме:

$$T_1(s, t) = \frac{1}{2} i \int_{\gamma} \frac{a_1(z, t)}{\sin \pi z} \{(-s)^z + (-\bar{s})^z\} dz, \tag{1.66}$$

$$T_2(s, t) = \frac{1}{2} i \int_{\gamma} \frac{a_2(z, t)}{\sin \pi z} \{(-s)^z - (-\bar{s})^z\} dz \tag{1.67}$$

при таких  $t$ , что полюса не попадают в неотрицательные целочисленные точки. Путь интегрирования  $\gamma$  в плоскости  $z$  показан на фиг. 1.4.

Но из теории потенциального рассеяния известно, что при больших  $\text{Re } z$  мы имеем  $a_i(z, t) \sim (\text{ch } \xi)^{-z}$ , где  $\xi$  — вещественное положительное число (зависящее от  $t$ ), и что  $a_i(z)$  равны нулю при  $|\text{Im } z| \rightarrow \infty$  и фиксированном  $\text{Re } z$ . Тогда при  $s$  и  $\bar{s}$ , лежащих внутри радиуса сходимости ряда (1.46), и при условии, что  $a_i(z)$  имеют в качестве сингулярностей только простые полюса, представления (1.66) и (1.67) могут быть преобразованы к виду:

$$T_1(s, t) = \frac{1}{2} i \int_{-\eta-i\infty}^{-\eta+i\infty} dz \frac{a_1(z, t)}{\sin \pi z} [(-s)^z + (-\bar{s})^z] + \pi \sum_i \frac{\beta_{1i}(t)}{\sin \pi \alpha_{1i}(t)} [(-s)^{\alpha_{1i}(t)} + (-\bar{s})^{\alpha_{1i}(t)}], \tag{1.68}$$

$$T_2(s, t) = \frac{1}{2} i \int_{-\eta-i\infty}^{-\eta+i\infty} dz \frac{a_2(z, t)}{\sin \pi z} [(-s)^z - (-\bar{s})^z] + \pi \sum_i \frac{\beta_{2i}(t)}{\sin \pi \alpha_{2i}(t)} [(-s)^{\alpha_{2i}(t)} - (-\bar{s})^{\alpha_{2i}(t)}]. \tag{1.69}$$

Функциями  $\alpha_{1i}(t)$ ,  $\alpha_{2i}(t)$  определяется положение полюсов  $a_1(z, t)$  и  $a_2(z, t)$  правее прямой  $\text{Re } z = -\eta$ ,  $0 < \eta < 1$ . Мы предполагаем, что их число конечно.

Теперь можно заняться вопросом об асимптотическом поведении амплитуд при больших  $s$ . Асимптотика уравнений (1.68) и (1.69) определяется в основном теми полюсами  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ , которые имеют наибольшую вещественную часть [мы предполагаем, что, как и в случае потенциального рассеяния, такие полюса существуют; это соответствует гипотезе о справедливости дисперсионных соотношений (при фиксированном  $t$ ) с конечным числом вычитаний].

Из выражений (1.68) и (1.69) находим поведение амплитуды при высоких энергиях [ $s \rightarrow \infty$ ,  $s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (s + i\varepsilon)$ ]:

$$T_1(s, t) \sim \frac{\pi \beta_1(t)}{\sin \pi \alpha_1(t)} \{1 + e^{-i\pi \alpha_1(t)}\} s^{\alpha_1(t)}, \quad (1.70)$$

$$T_2(s, t) \sim \frac{\pi \beta_2(t)}{\sin \pi \alpha_2(t)} \{-1 + e^{-i\pi \alpha_2(t)}\} s^{\alpha_2(t)}. \quad (1.71)$$

Конечно, последовательность полюсов в области  $\text{Re } z \geq 0$  соответствует последовательности членов асимптотического разложения амплитуд. Следовательно, мы пришли к тому, что было уже сформулировано вначале: траектории  $\alpha_i(t)$  связывают две фундаментальные характеристики теории элементарных частиц: спектр частиц и поведение амплитуды при высоких энергиях.

Сделаем несколько замечаний об асимптотических разложениях (1.70) и (1.71).

Во-первых, мы видим, что симметрия амплитуд относительно перестановки  $s \leftrightarrow \bar{s}$  выражается в наличии сигнатурного множителя  $(\pm 1 + e^{-i\pi \alpha})$  (причина, по которой он назван сигнатурным, станет понятной в следующем разделе).

Во-вторых, амплитуда комплексна:

$$\begin{aligned} \text{Re } T_{1,2} &\sim \pi \frac{\pm 1 + \cos \pi \alpha_{1,2}}{\sin \pi \alpha_{1,2}} \beta_{1,2}(t) s^{\alpha_{1,2}(t)}, \\ \text{Im } T_{1,2} &\sim -\pi \beta_{1,2}(t) s^{\alpha_{1,2}(t)}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Из-за наличия величины  $\sin \pi \alpha_1$  в знаменателе вещественная часть амплитуды  $T_1$  имеет полюс, когда траектория проходит через целые значения, т. е. при  $\alpha_1(t) = n$ , где  $n$  четное. Сигнатурный множитель предотвращает появление полюса при нечетном  $n$ . Для нечетной амплитуды  $T_2$  справедливо обратное утверждение. Эти полюса воспроизводят сингулярности амплитуд, фигурирующие в уравнении (1.65) при неотрицательных  $n$ . Чтобы разобрать случай отрицательных целых  $n$ , нужно распространить принцип максимальной аналитичности второго рода на область  $\text{Re } z < 0$ .

Допустим теперь существование максимальной аналитичности второго рода во всей  $z$ -плоскости. Как было установлено ранее, из этого следует, что  $a_i(-n, t) = 0$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Предположив затем, что единственными сингулярностями функций  $a_i(z)$  на конечном расстоянии являются простые полюса<sup>1)</sup>; можно сдвинуть контур интегрирования в формулах (1.68) и (1.69) на сколько угодно влево. Формулы останутся прежними, с той разницей, что значения  $\eta$  теперь не ограничены единичным отрезком и суммирование должно вестись по всем полюсам, лежащим правее  $\text{Re } z = -\eta$ . Если не учитывать аналитичность второго рода, то в разложение амплитуды

<sup>1)</sup> Мы понимаем, что вполне могут присутствовать и более сложные сингулярности; это лишь упрощенный вариант общего случая.

добавилась бы сумма членов типа

$$\sum_{m=1}^n (-1)^m a_i (-m) [(-s)^{-m} \pm (-\bar{s})^{-m}], \quad n < \eta < n + 1.$$

Мы видим, что одно из следствий аналитичности второго рода состоит в том, что в асимптотическом разложении амплитуд не появляется фиксированных целых отрицательных степеней. Таким образом, все члены в асимптотическом разложении происходят от движущихся траекторий. Из этого также следует, что, когда траектория пересекает отрицательные целые значения, вычет должен быть равным нулю.

Условия  $a(-n, t) = 0$ , исключаящие из асимптотики<sup>1</sup> степени с фиксированными показателями, представляют большой интерес. При любом фиксированном значении  $t$  в плоскости  $z$  существует область  $\text{Re } z > \text{Re } \alpha(t)$  [ $\alpha(t)$  — главная траектория], в которой интегралы [формулы (1.50) и (1.51)] для интерполирующих функций сходятся. Теперь вычислим  $a(z, t)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} a(z, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{A(s, t)}{s^{1+z}} ds = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_A} \frac{A(s, t)}{s^{1+z}} ds + \frac{1}{\pi} \int_{s_A}^{\infty} \frac{A(s, t)}{s^{1+z}} ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_A} \frac{A(s, t)}{s^{1+z}} ds + \sum_i \beta_i(t) \int_{s_A}^{\infty} \frac{ds}{s^{1+z-\alpha_i(t)}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_A} \frac{A(s, t)}{s^{1+z}} ds + \sum_i \beta_i(t) \frac{s_A^{\alpha_i(t)-z}}{z-\alpha_i(t)}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Здесь  $s_A$  — энергия, при которой амплитуда хорошо описывается асимптотическим разложением. В выражении (1.73) необходимо суммировать по вкладам всех полюсов  $\alpha_i(t)$  независимо от их положения.

Легко выполняемое аналитическое продолжение по  $z$  позволяет рассматривать представление (1.73) при отрицательных целых значениях аргумента. Условия  $a(-n-1, t) = 0$  теперь выглядят так:

$$\frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_A} s^n A(s, t) ds = \sum_i \beta_i(t) \frac{s_A^{\alpha_i(t)+n+1}}{\alpha_i(t)+n+1}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (1.74)$$

Эти соотношения называются правилами сумм при конечной энергии (ПСКЭ) [8—13, 334, 572]. Подробнее мы рассмотрим их в гл. 9.

Обратимся снова к нашему примеру из § 6,

$$T(s) = (1-s)^\alpha. \quad (1.74')$$

Функция  $a(z)$  давалась выражением (1.59):

$$a(z) = \frac{\Gamma(z-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(z+1)}. \quad (1.75)$$

Полюса функции  $a(z)$  определяются полюсами функции  $\Gamma(z-\alpha)$ ; следовательно, у нас имеется последовательность полюсов Редже в точках  $z = \alpha_N \equiv \alpha - N, N = 0, 1, 2, \dots$ . Если вклад первого полюса  $\alpha_0 = \alpha$  подставить в формулу (1.66) (степенями  $\bar{s}$  в этом примере пренебрегаем!), то для главного члена асимптотики при больших  $s$  мы получим правильный ответ

$$T(s) \sim (-s)^\alpha \quad (1.76)$$

[ср. с формулой (1.75)]. Заметим, что условие  $a(-n) = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  также выполняется, в чем нетрудно убедиться, воспользовавшись выражением (1.59). Кроме того, когда полюс движется и проходит через отрицательные целые значения, вычет его, очевидно, равен нулю в соответствии с ранее сказанным.

Условия  $a(-n) = 0$  наводят на мысль о том, что можно переопределить амплитуду так, чтобы устранить нули при отрицательных целых значениях. Это обычно делают так:

$$a(z) = \frac{\tilde{a}(z)}{\Gamma(z+1)}, \quad (1.77)$$

где функция  $\tilde{a}(z)$ , вообще говоря, не равна нулю при  $z = -n$ .

Вычет  $\beta(t)$  функции  $a(z)$  в полюсе при  $z = \alpha(t)$  связан с аналогичным ему вычетом  $\tilde{\beta}(t)$  формулой

$$\beta(t) = \frac{\tilde{\beta}(t)}{\Gamma[\alpha(t)+1]}. \quad (1.78)$$

Нет оснований считать, что вычет  $\tilde{\beta}(t)$  равен нулю в окрестностях точек  $\alpha(t) = -n$ ; функция  $\tilde{\beta}(t)$  обычно предполагается гладкой в этих областях. Для нашего примера [формула (1.75)]

$$\tilde{a}(z) = \frac{\Gamma(z-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)}$$

и полюс в точке  $z = \alpha$  имеет ненулевой вычет  $1/\Gamma(n)$ , если  $\alpha = -n$ .

### § 8. Полюса Редже

В предыдущем параграфе мы отметили роль полюсов Хури в асимптотике амплитуды при фиксированных  $t$  и больших  $s$ . Вернемся теперь к формуле (1.65):

$$T(s, t) = \beta(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{\alpha(t) - n}. \quad (1.79)$$

Мы замечаем, что когда  $\alpha(t)$  проходит через неотрицательные целые значения, амплитуда имеет полюс, который соответствует частице или резонансу. Спин рассматриваемого состояния определяется вычетом соответствующего полюса. В самом деле, при фиксированном  $t$  функция  $\cos \theta_t$  линейна в переменных Мандельштама  $s$ ,  $\bar{s}$  или  $v$  [формула (1.25)]:

$$\cos \theta_t = \frac{v + \frac{a}{t}}{(\hat{P}^2)^{1/2} (\hat{Q}^2)^{1/2}} = \frac{\frac{1}{4}(s - \bar{s}) + \frac{a}{t}}{(\hat{P}^2)^{1/2} (\hat{Q}^2)^{1/2}}, \quad (1.80)$$

где величины

$$\hat{P}^2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4t}(p_1^2 - p_2^2)^2$$

и

$$\hat{Q}^2 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4t}(q_1^2 - q_2^2)^2$$

зависят только от  $t$  и внешних масс.

Поэтому функция  $s^n$  (или  $\bar{s}^n$ ) может быть разложена по полиномам Лежандра  $P_l(\cos \theta_t)$ ,  $l \leq n$ . Тем самым мы приходим к заключению, что полюс  $\alpha(t_0) = 0$  соответствует по крайней мере одной частице со спином  $J = 0$  в канале  $t$ , полюс  $\alpha(t_1) = 1$  соответствует по крайней мере дублету частиц  $J = 0$ ,  $J = 1$  с одинаковыми массами и т. д. Такое вырождение урв-

ней является, конечно, следствием нашего разложения в степенные ряды по переменной  $s$ , т. е., вообще говоря, следствием того, что мы используем  $s$ ,  $t$  и  $z$  как основные переменные.

Вырождение можно устранить простым способом — ввести новые полюса по  $z$  и соответствующим образом скомбинировать их вычеты. Возьмем, например, интерполирующую функцию

$$a(z, t) = \frac{\beta_0(t)}{\alpha(t)-z} + \frac{\beta_1(t)}{\alpha(t)-1-z}, \quad (1.81)$$

которая приводит к амплитуде

$$T(s, t) = \beta_0(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{\alpha(t)-n} + \beta_1(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{\alpha(t)-n-1}. \quad (1.82)$$

Полюса низшего порядка дают вклад

$$\frac{\beta_0(t)}{\alpha(t)} + \frac{\beta_0(t)s + \beta_1(t)}{\alpha(t)-1}, \quad (1.83)$$

и, подбирая  $\beta_0$  и  $\beta_1$  так, чтобы выполнялось соотношение  $\beta_0(t_1)s + \beta_1(t_1) = \cos \theta_t$  [где  $\alpha(t_1) = 1$ ], получаем один уровень  $J = 1$ , соответствующий «массе»  $t_1$ .

Можно и дальше устранять спиновое вырождение полюсов таким «ручным» методом. Но лучше всего с самого начала вместо степенных рядов (1.46) или (1.47) использовать другое разложение для амплитуды. Это, собственно, и есть метод Редже [6, 7]. Чтобы избежать спинового вырождения, следует исходить из разложения по парциальным волнам в  $t$ -канале:

$$T(s, t) = 8\pi \sqrt{t} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) F_l(t) P_l(\cos \theta_t) \quad (1.84)$$

и искать непосредственно интерполирующую функцию  $F(l, t)$  парциальной амплитуды  $F_l(t)$ . Впервые это было сделано в потенциальной теории рассеяния. В рамках теории  $S$ -матрицы можно прибегнуть к методу, аналогичному методу предыдущего параграфа. В простом случае, когда в дисперсионных соотношениях при фиксированном  $t$  нет левого разреза, т. е. когда справедлива формула

$$T(s, t) \doteq \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds' \frac{\text{Im } T(s', t)}{s' - s}, \quad (1.85)$$

интерполирующая функция  $F(l, t)$  получается просто заменой <sup>1)</sup>  $s^{l-1}$  на  $Q_l(\cos \theta_t)$  в формулах (1.50) и (1.51), что аналогично методу, использованному для определения  $a(z, t)$ . Это приводит нас к формуле Грибова — Фруассара [14, 15] для интерполирующей функции

$$F(l, t) = \frac{1}{8\pi \sqrt{t}} \frac{1}{2\pi k_t^2} \int_{s_0}^{\infty} ds \text{Im } T(s, t) Q_l(\cos \theta_t). \quad (1.86)$$

Случай дисперсионных соотношений при фиксированном  $t$ , имеющих как правый, так и левый разрезы, несколько сложнее и детально обсуждаться не будет <sup>2)</sup>. Этот общий случай практически совпадает с тем, что мы имеем в потенциальной теории в  $t$ -канале при наличии обменных потенциалов, когда четные и нечетные волны интерполируются отдельно.

<sup>1)</sup> Величина  $Q_l$  — функция Лежандра второго рода.

<sup>2)</sup> См., например, книгу [23].



Интерполяция (1.86) и ее обобщение на случай обменных сил удовлетворяют условиям теоремы Карлсона. Их связь с интерполяционной функцией Хури дается следующей теоремой.

Если для набора  $F_l$  имеется единственная интерполяционная функция  $F(l)$ , которая является мероморфной функцией в полуплоскости  $\text{Re } l > -1/2$ , с конечным числом полюсов в точках  $l = \alpha_i$ ,  $\text{Re } \alpha_i > -1/2$ , и при  $|l| \rightarrow \infty$  (в правой полуплоскости) мы имеем  $F(l) \sim \sqrt{l} e^{-l\xi}$ , где  $\xi$  — вещественное и положительное число, то существует единственная интерполяционная функция  $a(z)$  для набора  $a_n$ , которая мероморфна в полуплоскости  $\text{Re } z > -1/2$ , и  $a(z) \sim (\text{ch } \xi)^{-z}$  при  $\text{Re } z \rightarrow \infty$  в этой полуплоскости. Полюса  $a(z)$  будут даваться тем же набором  $\alpha_i$ , что и полюса  $F(l)$ , с дополнительными, в общем случае, полюсами в точках  $\alpha_i - 1, \alpha_i - 2, \dots, \alpha_i - n, -1/2 < \text{Re}(\alpha_i - n) \leq 1/2$ .

Справедлива также обратная теорема, т. е. условие теоремы и ее заключение можно поменять местами. Можно также сказать, что полюса функции  $F(l)$  будут даваться тем же набором  $\alpha'_i$ , что и у функции  $a(z)$ , с дополнительными полюсами в точках  $\alpha'_i - 1, \alpha'_i - 2, \dots, \alpha'_i - n$  при условии  $-1/2 < \text{Re}(\alpha'_i - n) \leq 1/2$ . Полюса в плоскости  $l$  (Редже) в точках  $\alpha'_i - k$ , получающиеся из полюса в плоскости  $z$  (Хури), называют обычно *дочерними полюсами*, тогда как полюса в  $z$ -плоскости в точках  $\alpha_i - k$ , получающиеся из полюса в плоскости Редже, называются *спутниками*. Два приведенных выше утверждения о положении полюсов не противоречат друг другу; из них не следует также, что число полюсов в областях  $\text{Re } z > -1/2$  и  $\text{Re } l > -1/2$  должно быть одинаковым.

Преимущество полюсов Редже перед полюсами Хури состоит в том, что различные полюса соответствуют состояниям с определенным спином. Рассмотрим амплитуду, имеющую один полюс Редже:

$$F(l, t) = \frac{\beta(t)}{\alpha(t) - l}, \quad (1.87)$$

и подставим это выражение в формулу (1.84). Получаем

$$T(s, t) = 8\pi \sqrt{t} \beta(t) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{P_l(\cos \theta_l)}{\alpha(t) - l}. \quad (1.88)$$

Полюс появляется в амплитуде при значении  $t = t_l$ , таком, что  $\alpha(t_l) = l$ , и, следовательно, имеется связанное состояние или резонанс. Вычет теперь пропорционален  $P_l(\cos \theta_l)$ , т. е. это состояние имеет угловой момент  $l$  (нет вырождения по угловому моменту). В то же время разложение (1.88) менее удобно для изучения аналитических свойств по  $s$ , так как соотношение (1.80), связывающее  $s$  и  $\cos \theta_l$ , довольно громоздко, а функция Лежандра второго рода  $Q_l$  сложнее степенных функций. Таким образом, мы приходим к выводу, что метод Редже больше подходит для рассмотрения одночастичных свойств и, конечно, всех тех свойств амплитуды, которые «диагональны» по собственным состояниям углового момента, т. е. таких, как унитарность и факторизация. Представление же углового момента не вполне нас устраивает ввиду сложности аналитических свойств [формула (1.80)] функции  $\cos \theta_l$  по переменным  $s, t, \bar{s}$ , тогда как разложение Хури весьма удобно для изучения аналитичности. Это навело на мысль, что спиновое вырождение полюсов Хури имеет какой-то физический смысл, по крайней мере для частиц с массами, близкими к нулю (точнее говоря, для траекторий при  $t = 0$ ), и что сложная взаимосвязь между аналитичностью и унитарностью могла бы быть ответственной за сложную структуру спектра элементарных частиц.

Как мы видели, траектория Редже  $\alpha(t)$  характеризуется одним значением углового момента  $l$  в каждой точке пересечения  $\alpha(t) = l$ . Мы же хотим несколько большего — одной частицы для каждого пересечения. Чтобы обе-

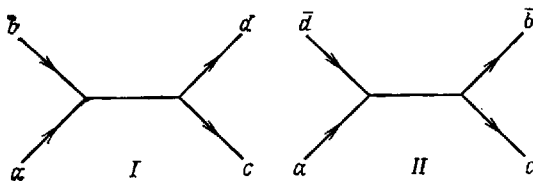
спечить это, воспользуемся свойством унитарности. Предположим, что при некоторой энергии  $t = M^2$  существует только одночастичное состояние  $|M; J, \lambda\rangle$  со спином  $J$  ( $\lambda$  — поляризационный индекс), которое может давать вклад в соотношение унитарности (1.13) для амплитуды двухчастичного процесса  $A \rightarrow B$  ( $t$ -канал, частицы скалярные):

$$\text{Im} \langle B; -p_1, p_2 | T | A; q_1, -q_2 \rangle = \pi \delta(t - M^2) \sum_{\lambda} \langle B; -p_1, p_2 | T^{\dagger} | M; J, \lambda \rangle \times \langle M; J, \lambda | T | A; q_1, -q_2 \rangle. \quad (1.89)$$

Благодаря тому что унитарность диагональна в представлении углового момента, для  $J$ -й парциальной волны получаем

$$F_J(t) = \frac{R_{AB}}{M^2 - t}, \quad (1.90)$$

причем вычет  $R_{AB}$  факторизуется:  $R_{AB} = g_A g_B$ , где  $g_A = \langle M; J | T | A; l = J \rangle$ , а  $g_B = \langle B; l = J | T^{\dagger} | M; J \rangle$ . Следовательно, в точках пересечения  $\alpha(t_J) = J$  реджевский вычет  $\beta_{AB}(t_J)$  также факторизуется:  $\beta_{AB}(t_J) = \beta_A(t_J) \beta_B(t_J)$  для любого начального и конечного состояний  $A$  и  $B$ . Это было бы невозможно, если бы существовали еще и другие частицы с тем же угловым моментом и той же массой.



Фиг. 1.5

Таким образом, проще всего предположить, что траектория Редже, интерполирующая не вырожденные по массам частицы, имеет факторизующийся вычет:  $\beta_{AB}(t) = \beta_A(t) \beta_B(t)$ . Мы приходим к заключению, что траектория Редже с факторизующимися вычетами интерполирует единственное семейство не вырожденных по массам частиц.

Важное значение имеет связанное с этим понятие сигнатуры. Амплитуда процесса  $A \rightarrow B$  и, следовательно, вычет  $R_{AB} = g_A g_B$  инвариантны при замене  $q_1 \leftrightarrow -q_2, p_1 \leftrightarrow -p_2$ . Для констант взаимодействия имеются две возможности:  $g_A(q_1, q_2) = \pm g_A(-q_2, -q_1), g_B(p_1, p_2) = \pm g_B(-p_2, -p_1)$ , причем знаки здесь коррелированы. Знак констант взаимодействия зависит исключительно от той частицы, обмен которой происходит; этот знак мы и припишем траектории. Это дополнительное квантовое число траектории называется сигнатурой. Траекториями с положительной сигнатурой интерполируются только частицы с четным спином; траекториями же с отрицательной сигнатурой интерполируются частицы с нечетным спином, так как, например, вершина, подчиняющаяся равенству  $g(q_1, q_2) = g(-q_2, -q_1)$ , не может дать вклада в нечетные парциальные волны.

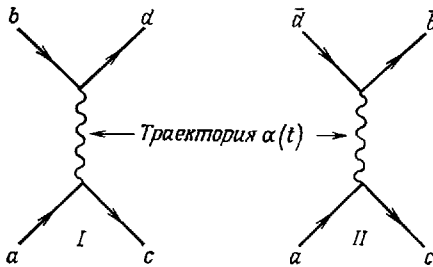
На данном этапе при исследовании асимптотического поведения амплитуды можно не учитывать перекрестную симметрию. Представим графически (фиг. 1.5) вклады  $s$ -канала ( $I$ ) и  $\bar{s}$ -канала ( $II$ ) в дисперсионные соотношения при фиксированном  $t$ . Асимптотическое поведение вкладов  $I$  и  $II$  при фиксированном  $t$  можно изобразить на диаграмме как обмен полюсом Редже в канале  $t$  (фиг. 1.6). Асимптотически вклады  $I$  и  $II$  ведут себя как выражение

$$\frac{\beta_{bd}\beta_{ac}}{\sin \pi \alpha} (-s)^{\alpha} + \frac{\beta_{\bar{d}\bar{b}}\beta_{\bar{a}\bar{c}}}{\sin \pi \alpha} (-\bar{s})^{\alpha}.$$

В соответствии с сигнатурой траектории это выражение дает в амплитуду вклад вида

$$\frac{\beta_{bd}\beta_{ac}}{\sin \pi\alpha} (\pm 1 + e^{-i\pi\alpha}) s^\alpha, \quad (1.91)$$

где верхний знак соответствует траекториям с положительной сигнатурой, а нижний — траекториям с отрицательной сигнатурой.



Фиг. 1.6

Отметим, что вопрос о траекториях с положительной и отрицательной сигнатурой существует и в теории потенциального рассеяния [16]. Действительно, если наряду с обычными потенциалами учитывать и обменные, то эффективные потенциалы для парциальных волн с четными и нечетными  $l$  будут неодинаковыми и придется использовать две разные интерполирующие функции. Траектории, соответствующие функциям с четным  $l$ , характеризуются положительной сигнатурой и не вносят сингулярности в полную

амплитуду при приближении к нечетным целым значениям; для траекторий же функций, которые интерполируют нечетные парциальные волны, верно обратное.

### § 9. Дочерние траектории <sup>1)</sup>

Может возникнуть вопрос: какой подход удобнее — Хури или Редже? Как мы уже отмечали, на этот вопрос нет простого ответа, потому что с точки зрения унитарности и возможности простого описания уровней лучше представление Редже, а при исследовании аналитичности удобнее представление Хури. В этом параграфе мы хотим показать, каким образом отсутствие простых аналитических свойств в подходе Редже приводит к сложной структуре реджевских траекторий.

Напомним, как функция  $\cos \theta_t$  выражается через инвариантные переменные в случае неравных масс [формулы (1.25) и (1.26)]:

$$\begin{aligned} \cos \theta_t &= \frac{\begin{pmatrix} P & u \\ Q & u \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} P & u \\ P & u \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} Q & u \\ Q & u \end{pmatrix}^{1/2}} = \frac{(\hat{P}\hat{Q})}{(\hat{P}^2)^{1/2} (\hat{Q}^2)^{1/2}} = \frac{(PQ) - (Pu)(Qu)}{[P^2 - (Pu)^2]^{1/2} [Q^2 - (Qu)^2]^{1/2}} = \\ &= \frac{v + \frac{a}{t}}{(\hat{P}^2)^{1/2} (\hat{Q}^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (1.92)$$

где  $u^\mu = \Delta^\mu / |\sqrt{t}|$  есть единичный вектор в направлении  $\Delta_\mu$ ,

$$\hat{P}_\mu = P_\mu - (Pu) u_\mu, \quad \hat{Q}_\mu = Q_\mu - (Qu) u_\mu,$$

$$v = PQ = \frac{1}{4}(s - \bar{s}), \quad a = \frac{1}{4}(p_1^2 - p_2^2)(q_1^2 - q_2^2) = -(P\Delta)(Q\Delta),$$

и

$$\hat{P}^2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4t}(p_1^2 - p_2^2)^2,$$

$$\hat{Q}^2 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4t}(q_1^2 - q_2^2)^2.$$

<sup>1)</sup> См. работы [17—20, 63, 64]. Краткое изложение основных идей и обширный список литературы можно найти в работах Толлера [21] и Домокоша [22]. См. также монографию Коллинза и Сквайрса [23].

Как уже отмечалось в § 4, в общем случае  $\cos \theta_t$  содержит нежелательные сингулярности по переменным Мандельштама. Чтобы ликвидировать корневые точки ветвления, мы ввели с помощью уравнения (1.28) полиномы  $\mathcal{P}_i(p^2, q^2, pq)$ , которые представляют собой скалярные функции векторов  $\hat{P}_\mu$  и  $\hat{Q}_\mu$ . Но при этом не полностью устраняются нежелательные свойства. Рассмотрим выражение для скалярного произведения <sup>1)</sup>

$$pq = -\left(v + \frac{a}{t}\right). \quad (1.93)$$

При  $a$  фиксированном и не равном нулю (случай фиксированных разных масс) выражение (1.93) имеет чисто кинематический полюс при  $t = 0$ , который, согласно сказанному в § 4, необходимо исключить из амплитуды. Следствия из этого требования в рамках теории полюсов Редже мы и хотим проанализировать в данном параграфе.

Правда, нам могут возразить, что точка  $t = 0$  в случае неравных масс не играет выделенной роли, и выразить удивление, что речь идет об аналитичности именно в этой точке. Вопрос этот важен, так как его решение открывает путь к применению теоретико-групповых методов. Рассмотрим выражение для  $pq$ :

$$pq = -[(PQ) - (Pu)(Qu)]. \quad (1.94)$$

Если  $\Delta_\mu \rightarrow 0$ , а векторы  $P$  и  $Q$  фиксированы, то предельное значение произведения  $pq$  будет функцией единичного вектора  $u^\mu = \Delta^\mu / (\Delta^2)^{1/2}$ , т. е. оно сохраняет информацию о том направлении, по которому мы достигли значения  $\Delta_\mu = 0$ . Отметим, что, когда  $\Delta_\mu$  уменьшается до нуля при фиксированных  $P_\mu$  и  $Q_\mu$ , обязательно должны изменяться массы внешних частиц. В частности, значению  $\Delta_\mu = 0$  соответствуют попарно равные массы.

Итак, мы видим, что  $pq$  при  $\Delta_\mu = 0$  не удовлетворяет требованию независимости от направления  $u_\mu$ , вдоль которого  $\Delta_\mu \rightarrow 0$ . Мы же хотим, чтобы полная амплитуда обладала таким свойством независимости [24] (по крайней мере, если в теории нет частиц с нулевой массой, что обычно имеет место в теории сильных взаимодействий). Это требование подсказано релятивистским разложением амплитуды по теории возмущений. Отметим, что указанное свойство выходит за рамки принципа максимальной аналитичности, так как если  $P_\mu$  и  $Q_\mu$  фиксированы, то при переходе  $\Delta_\mu \rightarrow 0$  меняются также и массы.

Причина, по которой произведение  $pq$  оказывается в этом отношении плохой переменной, проста. Трехмерное скалярное произведение определено в системе центра масс  $t$ -канала, т. е. в той системе, в которой  $\Delta_\mu$  имеет только временную компоненту. Если  $\Delta_\mu$  остается фиксированным, то мы классифицируем состояния в  $t$ -канале по их трансформационным свойствам относительно преобразований, поворачивающих векторы  $P$  и  $Q$ , но не меняющих  $\Delta_\mu$ . Если  $\Delta_\mu$  времениподобно, то группа таких преобразований есть группа вращений  $O(3)$ , которая является вигнеровской малой группой группы Пуанкаре. Если  $\Delta_\mu = 0$ , то малая группа расширяется и превращается в однородную группу Лоренца, тогда как переменная  $pq$  всегда связана с группой  $O(3)$ . Требование большей (лоренцевой) симметрии амплитуды при  $\Delta_\mu = 0$  трудно выразить, пользуясь переменной  $pq$ , которая, однако, удобна для выражения унитарности и приводит к простой структуре спектра частиц.

Общим требованием независимости амплитуды от  $u_\mu$  при  $\Delta_\mu \rightarrow 0$  или эквивалентным ему требованием аналитичности при  $t = 0$  и постоянных неравных друг другу массах обусловлена сложная структура траекторий Редже. Мы будем исходить из второго требования. Требование однозначности

<sup>1)</sup> Как указано в § 4, в системе центра масс  $t$ -канала  $\hat{P}_\mu$  и  $\hat{Q}_\mu$  имеют вид  $\hat{P}_\mu = (0, p)$ ,  $\hat{Q}_\mu = (0, q)$ .

амплитуды при  $\Delta_\mu = 0$  ведет к совершенно аналогичному рассмотрению, лишь со слегка измененной терминологией.

Вернемся к выражению (1.93) и покажем, что исключение из амплитуды полюсов при  $t = 0$ , имеющихся в этом выражении для  $pq$  при фиксированном  $a \neq 0$ , накладывает на реджевские траектории ряд ограничений (в рамках теории полюсов Редже).

Предположим, что мы уже устранили корневые сингулярности в выражении для  $\cos \theta_t$ , выполнив разложение по парциальным волнам и «реджизацию», с помощью функций <sup>1)</sup>  $\mathcal{P}_{\alpha(t)}(pq)$ . Рассмотрим теперь амплитуду  $T(s, t)$ ; пусть ее асимптотическое поведение при больших  $s$  и фиксированных  $t$  определяется вкладом главного полюса Редже:

$$T(s, t) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \beta(t) \mathcal{P}_{\alpha(t)}(pq). \quad (1.95)$$

Асимптотическое разложение правой части соотношения (1.95) при больших  $\nu$  дает <sup>2)</sup>

$$T(s, t) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} K\beta(t) \left[ \nu^\alpha + \nu^{\alpha-1} \frac{b_1}{t} + \nu^{\alpha-2} \left( c_0 + \frac{c_2}{t^2} \right) + \dots \right]. \quad (1.96)$$

Сразу же видно, что все степени, кроме высшей, содержат полюса при  $t = 0$ . Существует несколько способов лечения этого «недуга». Проще всего было бы допустить, что при  $t = 0$  вычет функции  $\beta(t)$  стремится к нулю так, что может скомпенсировать любую степень  $t^{-n}$ . В этом случае при  $t = 0$  амплитуда и траектория «расцепляются». Такое поведение траектории может быть названо «уклонением» (evasion) [20]. Если разные траектории Редже никак не связаны друг с другом при  $t = 0$ , то уклонение — единственный путь сохранить аналитичность при  $t = 0$ . Другой способ, при котором не нарушается связь траекторий с амплитудой, заключается в построении семейства траекторий  $\alpha_n(t)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , «дочерних» по отношению к основной траектории  $\alpha(t)$ . Эти траектории таковы, что при  $t = 0$  мы имеем  $\alpha_n(0) = \alpha(0) - n$ . Наличие дочерних траекторий позволяет путем комбинирования вычетов исключить полюсные сингулярности, вносимые каждой отдельной траекторией. Покажем, как это делается, исключив полюс в коэффициенте при  $\nu^{\alpha-1}$  у основной и первой дочерней траекторий.

Асимптотическое поведение амплитуды дается формулой

$$T(s, t) = K\beta(t) \left[ \nu^\alpha + \nu^{\alpha-1} \frac{b_1}{t} + O(\nu^{\alpha-2}) \right] + K'\beta'(t) [\nu^{\alpha_1} + O(\nu^{\alpha_1-1})]. \quad (1.97)$$

Если при  $t = 0$  у нас  $\alpha_1(0) = \alpha(0) - 1$ , то коэффициент при  $\nu^{\alpha-1}$  будет конечным при  $t = 0$  при условии, что сумма  $K\beta(t) \frac{b_1}{t} + K'\beta'(t)$  конечна при  $t = 0$ . Легко видеть, что такие рассуждения могут быть повторены с учетом следующих дочерних траекторий. В принципе нам потребуется бесконечно большое число дочерних траекторий <sup>3)</sup>, поскольку бесконечно число членов в асимптотическом разложении функции  $\mathcal{P}_{\alpha(t)}(pq)$ .

Итак, вопрос об ограничении на амплитуду рассеяния при  $t = 0$  можно рассматривать двумя совершенно эквивалентными способами. Именно, можно сказать, что в случае рассеяния частиц неравных масс переменная  $pq$  имеет полюс при  $t = 0$ , присутствие которого нежелательно в амплитуде. Но можно также сказать, что при  $\Delta_\mu \rightarrow 0$  и при фиксированных 4-векторах  $P_\mu$  и  $Q_\mu$  величина  $pq$  имеет предел, зависящий от направления, по которому

<sup>1)</sup> Аналитические свойства и положение сингулярностей в плоскости углового момента не изменяется, очевидно, при использовании вместо полиномов Лежандра функций  $\mathcal{P}_{\alpha(t)}(pq)$ , если  $|p| \neq 0$ ,  $|q| \neq 0$ .

<sup>2)</sup> Коэффициенты  $K$ ,  $b_1$ ,  $c_0$ ,  $c_2$  и т. д. являются функциями величины  $a$  из формулы (1.92) и коэффициентов асимптотического разложения  $\mathcal{P}_{\alpha(t)}(pq)$  при больших  $pq$ .

<sup>3)</sup> Если только  $\alpha(0)$  не равно целому числу  $j$ ; в этом случае необходимо иметь  $j$  дочерних траекторий.

$\Delta_\mu$  стремится к нулю, а это тоже неподходящее для амплитуды свойство. В результате оказывается, что во всех случаях, кроме случая уклонения, когда траектория не связана с амплитудой при  $t = 0$ , одной траектории Редже, как это, казалось бы, следовало из унитарности, недостаточно, и приходится ввести дочерние траектории, которые при  $t = 0$  отстоят от основной траектории на целые числа.

Отметим, что любая суперпозиция полюсов Хури обладает правильными аналитическими свойствами и, кроме того, она, очевидно, не зависит от единичного вектора  $u_\mu$  при  $\Delta_\mu \rightarrow 0$ . Можно было бы спросить, не существует ли какой-нибудь особенно простой комбинации полюсов Хури, относя слово «простая» к структуре уровней, описывающих частицы, или к структуре траекторий. Во-первых, мы требуем минимально возможного вырождения траекторий, совместимого с имеющимися ограничениями. Во-вторых, вспомним, что малая группа таких преобразований, которые оставляют  $\Delta_\mu$  инвариантным, совпадает с полной группой Лоренца при  $\Delta_\mu = 0$ . Следовательно, можно ожидать, что при  $\Delta_\mu = 0$  будет очень плодотворен теоретико-групповой подход. Конечно, если величина  $\Delta_\mu$  времениподобна, то этот вектор сам по себе нарушает симметрию, оставляя только обычную  $O(3)$ -симметрию; тем не менее теоретико-групповой подход очень помогает при классификации уровней [см. формулы Домокоша для траекторий (1.98) и (1.135)].

Рассмотрим семейство растущих равноудаленных траекторий, отстоящих друг от друга на целые числа. Точкам пересечения этих траекторий с прямыми  $J = n$ , где  $n$  — целое число, отвечают определенные уровни. Частицы с одной и той же массой будут группироваться в спиновые мультиплеты следующим образом:  $J = 0$ ;  $J = 0, 1$ ;  $J = 0, 1, 2$ ; . . . . Такое объединение спинов совпадает с тем, которое содержится в представлениях группы Лоренца, даваемых неприводимыми симметричными тензорами, например скалярами, 4-векторами, симметричными тензорами второго ранга с нулевым следом и т. д.

Напомним, что представления группы Лоренца<sup>1)</sup> можно классифицировать по собственным значениям двух операторов Казимира  $F = \frac{1}{2}(J^2 - K^2)$  и  $G = \mathbf{JK}$ . В рассматриваемом нами случае бесспиновых частиц следует (по соображениям четности) ввести только представления, соответствующие  $G = 0$ . Если положить  $\mathbf{K} = i\mathbf{V}$ , то формально появляется группа  $O(4)$ , группа вращений в четырехмерном пространстве. Ее неприводимые унитарные представления будут порождать неприводимые конечномерные представления группы Лоренца, которые будут уже неунитарными, поскольку эрмитовым операторам  $\mathbf{V}$  соответствуют неэрмитовы операторы  $\mathbf{K}$ . Представления группы  $O(4)$ , соответствующие  $G = 0$ , содержат по одному разу каждое представление группы  $O(3)$  с  $0 \leq l \leq N$ <sup>2)</sup>. Базисными функциями этих представлений служат присоединенные полиномы Гегенбауэра, ортогональные на трехмерной сфере. Таким образом, мы пришли к разложению амплитуды при  $\Delta_\mu = 0$  по полиномам Гегенбауэра<sup>3)</sup>, зависящим от четырехмерного «угла»  $(PQ)/|P||Q|$ , а не по полиномам Лежандра с аргументом  $\cos \theta_t$ . По аналогии с полюсами Редже и в комплексной плоскости индекса четырехмерного представления  $N$  могут быть полюса (индекс  $N$ , как уже говорилось, соответствует максимальному угловому моменту, содержащемуся в представлении). Мы будем называть их полюсами Толлера. Полюс Толлера  $\alpha_T$  содержит все полюса Редже вида  $\alpha_n = \alpha_T - n$  (последовательность обрывается при  $\alpha_n = 0$ , если  $\alpha_T = N$ , где  $N$  — целое число).

Одиночный полюс Толлера, должным образом факторизованный, гаран-

1) Читатель найдет краткое введение в теорию группы Лоренца в приложении III.

2) Число  $N$  связано с собственными значениями операторов Казимира. См. приложение III, в частности уравнение (III.14).

3) См., например, [18].

тирует, что сопутствующие ему дочерние траектории представляют одиночные уровни. Теория Толлера обеспечивает выполнение всех ограничений при  $t = 0$  с использованием минимального числа уровней. Полюс Толлера соответствует, конечно, определенному набору полюсов Хури, и наоборот. Отсюда следует, что одиночный полюс Хури хотя и удовлетворяет всем требованиям, не наипростейшим образом описывает уровни.

Наконец, отметим, что дочерние траектории, отстоящие друг от друга при  $t = 0$  на целые числа, появляются и при рассмотрении релятивистского уравнения Бете — Солпитера

Использование неунитарных представлений группы Лоренца наводит на мысль, что могут возникнуть трудности с индефинитной метрикой, т. е. могут появиться «духовые» уровни. Это существенно при времениподобном  $t$ , когда траектория проходит через целые значения. Посмотрим, как ведут себя дочерние траектории вблизи  $t = 0$  и при пересечении целых значений.

Этот вопрос крайне важен, так как он прямо связан со спектром частиц. Простые теоретико-групповые соображения мало могут помочь: при  $\Delta_\mu \neq 0$  справедлива  $O(3)$ -симметрия и любая отдельно взятая траектория Редже оказывается приемлемой. Но имеющиеся ограничения не исчерпываются только требованиями аналитичности, поскольку все сказанное выше справедливо и для производных амплитуды по  $t$ . Конечно, все возможные ограничения, полученные из условий аналитичности и независимости от  $u_\mu$ , выполняются для одного полюса Хури или для одного полюса Толлера. Оба требования ведут к появлению бесконечного семейства траекторий Редже, отстоящих друг от друга на целые числа. Хотя связь не всегда именно такая, траектории всегда взаимосвязаны. Связь эта была установлена Домокошем [18], а позднее Бронзаном, Джонсом и Куо [25] на основании уравнения Бете — Солпитера или из соображений аналитичности. Домокош получил разложение

$$\alpha_n(t) = \alpha_0(0) - n + \{b_1 + b_2[\alpha_0(0) - n][\alpha_0(0) - n + 1]\}t + O(t^2). \quad (1.98)$$

Эта формула относится к бозонным траекториям. Общая структура траекторий вблизи  $t = 0$  такова. Положение всех дочерних траекторий при  $t = 0$  определяется, как мы видели, положением главной траектории. Чтобы найти первую производную каждой траектории в точке  $t = 0$ , нужно знать производные главной траектории, первой дочерней и т. д.

Несколько слов о сигнатуре. Если мы приписываем какую-то сигнатуру главной траектории, то дочерние траектории должны иметь чередующиеся сигнатуры.

На этом мы покончим с вопросом о поведении дочерних траекторий вблизи  $t = 0$  и перейдем к вопросу о физических уровнях, т. е. о сопоставляемых частицам пересечениях траекторий с прямыми  $J = n$ , где  $n$  — целые числа. Рассмотрим семейство равноудаленных растущих траекторий, соответствующих одному полюсу Толлера. В общем случае мы обнаружим следующие пересечения по мере увеличения квадрата массы  $t$ :

$$J = 0; \quad J = 0, \quad J = 1; \quad J = 0, \quad J = 1, \quad J = 2, \dots$$

Конечно, эти пересечения происходят при отличных от нуля и все увеличивающихся значениях  $t$  (частицы имеют ненулевую массу и траектории имеют конечную производную). Поэтому лоренцевская симметрия не может быть точной, так как она точна только при  $t = 0$ . Но ее можно принять приближенно для классификации уровней.

Самый нижний уровень,  $J = 0$ , соответствует скаляру, т. е. одномерному представлению группы Лоренца. Два следующих пересечения параллельных траекторий при одном и том же более высоком значении  $t$ ,  $J = 0$  и  $J = 1$ , соответствуют векторному представлению группы Лоренца. Последующие пересечения,  $J = 0$ ,  $J = 1$ ,  $J = 2$ , соответствуют девятимерному

представлению группы Лоренца, связанному с симметричным тензором, имеющим нулевой след, и т. д.

Рассмотрим подробнее, например, второй уровень,  $J = 0, 1$ . Мы видим, что частица с  $J = 1$  обязательно сопровождается частицей с  $J = 0$ . Понять, почему это так, нетрудно (это далеко не новая проблема). Состояние частицы со спином 1 имеет три компоненты, соответственно возможным поляризациям. Суммирование по поляризациям для частицы со спином 1 дает

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} + \frac{\Delta_{\mu} \Delta_{\nu}}{\Delta^2}, \quad (1.99a)$$

или

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} + \frac{\Delta_{\mu} \Delta_{\nu}}{M^2}. \quad (1.99b)$$

Член с  $\Delta_{\mu} \Delta_{\nu}$  в формулах (1.99) присутствует в силу того, что имеются только три поляризации, а не четыре, как было бы, если справа стояло бы просто  $-g_{\mu\nu}$ . Разница между формулами (1.99a) и (1.99b) вне массовой поверхности очевидна. В формуле (1.99a) частица вне массовой поверхности сохраняет только спин 1, а в формуле (1.99b) вне массовой поверхности имеется вклад и состояния с  $J = 0$ .

В обоих случаях наличие члена с  $\Delta_{\mu} \Delta_{\nu}$  приводит к неприятностям. В случае (1.99a) это уже рассматривавшиеся в данном параграфе трудности, связанные с пределом  $\Delta_{\mu} \rightarrow 0$ ; в случае (1.99b) (формула типична для фейнмановских диаграмм) амплитуды растут слишком быстро с ростом  $\Delta_{\mu}$ , что делает теорию перенормируемой.

Можно было бы ввести частицу, описываемую 4-вектором и содержащую и  $J = 1$  и  $J = 0$ , с вычетом пропагатора  $-g_{\mu\nu}$ . Но тогда возникнет новая трудность. Пусть такая частица-4-вектор образуется из двух начальных и переходит в две конечные скалярные частицы. Амплитуда процесса  $A$  такова:

$$A = -g^2 \frac{(PQ)}{M^2 - t} = \frac{1}{M^2 - t} \left[ -g^2 \left( \frac{P \Delta}{P \Delta} \right)^{1/2} \left( \frac{Q \Delta}{Q \Delta} \right)^{1/2} \cos \theta_t - g^2 \frac{(P\Delta)(Q\Delta)}{M^2} \right].$$

Мы видим, что здесь имеются вклады от  $S$ - и  $P$ -волн. Но понятно также, что эффективная константа взаимодействия  $S$ -волны  $g_s$  — мнимая,  $g_s = ig(P\Delta) = ig^{1/2}(m_1^2 - m_2^2)$ , а  $P$ -волны — вещественная. [Напомним, что  $\left( \frac{P \Delta}{P \Delta} \right)^{1/2}$  и  $\left( \frac{Q \Delta}{Q \Delta} \right)^{1/2}$  — мнимые величины.]

И это не случайно. Суть дела в том, что мы оперируем неунитарными представлениями группы Лоренца. Их можно рассматривать как состояния в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой. Таким образом, избегая одних трудностей, мы сталкиваемся с другими.

Такие же трудности должны встретиться при подходах, основанных на четырехмерной симметрии (т. е. использующих неунитарные представления группы Лоренца). Но мы не можем рассмотреть этот вопрос во всей общности, пока у нас нет явного продолжения от значения  $t = 0$  (где ограничения ставят перед нами саму проблему) до значений  $t$ , при которых обнаруживаются частицы. Разумеется, все эти связанные с метрикой и духовыми состояниями трудности исчезают, если траектории изгибаются при времениподобных  $t$  и не пересекаются с прямой  $J = 1$ .

С этими проблемами мы еще встретимся в гл. 9, где речь будет идти о представлении Венециано.

### § 10. Сингулярности в плоскости углового момента

Траектории Редже и вообще разложение по комплексным угловым моментам используются столь широко для феноменологического описания рассеяния при высоких энергиях, что даже поверхностное изложение этой



теории заслуживало бы главы, если не книги. Читатель извинит нас, если мы не возьмемся за такую задачу, поскольку она выходит за рамки настоящего обзора; к тому же имеются прекрасные пособия по этому вопросу. Здесь мы хотим только напомнить некоторые общие положения о диффракционном рассеянии, а также свойства сингулярностей амплитуды в плоскости комплексного углового момента.

Хорошо известно [23], что поведение амплитуды при больших энергиях определяется вкладом так называемой особенности Померанчука  $\alpha_P$ , характеризующейся квантовыми числами вакуума. Относительно этой особенности лучше всего установлено то, что практически  $\alpha_P = 1$  при  $t = 0$ . Этот результат означает постоянство полного сечения рассеяния при высоких энергиях. Наклон  $(d\alpha_P/dt)_{t=0}$  известен плохо, и, по-видимому, он весьма мал.

Вид траектории Померанчука еще не совсем ясен, и с этим связан ряд теоретических проблем. Если при  $t = 0$  мы имеем  $\alpha_P = 1$ , то это будет предельно допустимым значением с точки зрения ограничения Фруассара [26—28, 100], следующего из условия унитарности (см. далее в данном параграфе). Мы также увидим вскоре, что если траектория пересекает  $l = 1$  при  $t = 0$ , то должен существовать разрез. Кроме того, роль траектории Померанчука при использовании правил сумм при конечной энергии и в дуальных резонансных моделях (гл. 9) отлична от роли других траекторий Редже.

Самые успешные применения теории Редже связаны с  $\rho$ -траекторией,  $\alpha_\rho(t)$ , характеризующейся изоспином 1 и отрицательной сигнатурой. Ее существование твердо установлено, в частности, в результате анализа данных о пион-нуклонном рассеянии с перезарядкой. При  $t = 0$  величина  $\alpha_\rho(0)$  равна примерно 0,5 и наклон траектории, по-видимому, порядка 1 ГэВ<sup>-2</sup>. Теория перезарядки при высоких энергиях является лучшим подтверждением существования траекторий Редже. При изучении правил сумм в случае конечной энергии (при их насыщении)  $\rho$ -траектория также находит интересные применения; например, она хорошо воспроизводится при учете лишь изобар в прямом канале (гл. 9).

Основное ограничение на траектории и сингулярности накладывает теорема Фруассара, утверждающей, что  $\text{Im } T(s, 0) \ll s \ln^2 s$  при  $s \rightarrow \infty$ . Действительно, из этой теоремы следует, что при  $t = 0$  не может быть траекторий, проходящих выше единицы [т. е. с  $\alpha(0) > 1$ ].

Особенности в комплексной  $l$ -плоскости не ограничиваются, конечно, изолированными полюсами. В принципе должны встречаться и более сложные сингулярности.

Выясним сначала вопрос о наличии неподвижных (т. е. не зависящих от  $t$ ) полюсов в амплитуде сильных взаимодействий. На первый взгляд неподвижный полюс представляется простейшим объектом. В самом деле, уже борновское приближение дает фиксированный полюс по комплексному угловому моменту. Правда, при переходе к более высоким приближениям фиксированный борновский полюс превращается в движущуюся траекторию. Общий анализ, основанный на соотношении унитарности для парциальных волн с комплексными значениями углового момента<sup>1)</sup>, показывает, что в амплитуде недопустимы неподвижные полюса. Конечно, этот результат неприменим к таким (упомянутым в § 3) смешанным задачам, в которых некоторые физические эффекты рассматриваются только в низшем борновском приближении. Тогда унитарность нарушена с самого начала и неподвижные полюса вполне могут присутствовать. Мы обнаружим их в амплитудах, изучаемых в алгебре токов; там они играют важную роль.

Устранив, таким образом, неподвижные полюса из теории сильных взаимодействий с помощью соотношения унитарности, прибегнем к нему снова, чтобы показать необходимость существования более сложных, чем движущихся,

<sup>1)</sup> См., например, [23], стр. 132.

щиеся полюса, сингулярностей, т. е. разрезов [29, 30]. Воспользуемся условием упругой унитарности [формула (1.17)] в асимптотической области (энергии велики):

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T(s, t) &= \frac{2}{(8\pi)^2 s} \int dt_1 dt_2 T(s, t_1) T^*(s, t_2) K(t_1, t_2, t), \\ K(t_1, t_2, t) &= \theta(-t_1^2 - t_2^2 - t^2 + 2t_1 t_2 + 2t_1 t + 2t_2 t) \times \\ &\quad \times (-t_1^2 - t_2^2 - t^2 + 2t_1 t_2 + 2t_1 t + 2t_2 t)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (1.100)$$

и вычислим мнимую часть амплитуды, которую будем считать обусловленной одним полюсом Редже

$$T(s, t) = c(t) s^{\alpha(t)}. \quad (1.101)$$

Таким образом, получаем ( $\alpha$  вещественно)

$$\operatorname{Im} T(s, t) = \frac{2}{(8\pi)^2} \int dt_1 dt_2 |c(t)|^2 s^{\alpha(t_1) + \alpha(t_2) - 1} K(t_1, t_2, t). \quad (1.102)$$

Мы видим, что эта формула содержит непрерывный вклад степеней  $s^{\alpha(t_1) + \alpha(t_2) - 1}$ . Наличие этого множителя означает существование разреза в плоскости углового момента. Наивысшим показателем степени определяется положение точки ветвления. В случае растущих траекторий показатель степени принимает максимальное (в области интегрирования) значение при  $t_1 = t_2 = 1/2 t$ . Тогда положение точки ветвления определяется формулой  $\lambda = 2\alpha(1/2 t) - 1$ . Такие же разрезы обнаружены у диаграмм теории возмущений Фейнмана. Особенности существуют, правда, только у непланарных диаграмм, а у простейших планарных диаграмм их нет.

Отметим, что разрез доходит до полюса при  $\alpha = 1$ . Кроме того, ограничение Фруассара совпадает с требованием, чтобы вклад от полюса в асимптотику амплитуды рассеяния вперед был по крайней мере того же порядка, что и вклад от разреза. Это не удивительно, поскольку ограничение Фруассара, как и разрез, можно вывести эвристически из условия унитарности. Рассмотрим оптическую теорему:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T(s, 0) &= 2k \sqrt{s} \sigma_{\text{полн}} = 2k \sqrt{s} (\sigma_{\text{упр}} + \sigma_r) = \\ &= \frac{2}{(8\pi)^2} \frac{k}{\sqrt{s}} \int d\Omega |T(s, t)|^2 + 2k \sqrt{s} \sigma_r, \end{aligned} \quad (1.103)$$

откуда получаем неравенство

$$\operatorname{Im} T(s, 0) \geq \frac{2}{(8\pi)^2} \frac{k}{\sqrt{s}} \int d\Omega |T(s, t)|^2 = \frac{1}{32\pi} \frac{1}{k \sqrt{s}} \int_{-4k^2}^0 dt |T(s, t)|^2. \quad (1.104)$$

Делая затем грубое предположение о независимости формы дифракционного пика от энергии,  $T(s, t) = s^{\alpha} f(t)$  при условии  $\int_{-\infty}^0 dt |f(t)|^2 < \infty$ , сразу же получаем  $\operatorname{Re} \alpha \leq 1$ , что почти (с точностью до логарифмического множителя) совпадает с оценкой Фруассара.

### § 11. Частицы со спином

В этом параграфе мы укажем, в основном на конкретных примерах, на то новое, что появляется при анализе рассеяния частиц, обладающих спином. Во-первых, в случае частиц со спином приходится вводить несколько инвариантных амплитуд, соответствующих разным поляризационным состояниям частиц. Мы не собираемся рассматривать общую проблему определения амплитуд. Метод спиральных состояний, предложенный Якобом

и Вико [31], позволяет, кроме всего прочего, определять число необходимых амплитуд и описывать, вообще говоря, процессы с любыми спинами. В приложении II мы рассмотрим также один метод определения инвариантных амплитуд, который хотя и не является таким общим, как метод спиральных амплитуд, оказывается тем не менее весьма полезным.

Во-вторых, для амплитуд, описывающих процессы со спином, становится сложнее взаимосвязь между аналитичностью и унитарностью.

Все сказанное в предыдущих параграфах о скалярных частицах применимо, конечно, без каких-либо изменений к амплитудам, усредненным по поляризациям. Но в случае частиц со спином появляются две новые группы явлений:

1. Поскольку набор инвариантов, используемых при исследовании аналитических свойств, и набор инвариантов, удобных для формулировки унитарности, неодинаковы, несколько иным оказывается и асимптотическое поведение амплитуд с простыми аналитическими свойствами. Асимптотика имеет теперь вид [16]  $A_i(s, t) \sim s^{\alpha(t)-N} t$ , где  $\alpha(t)$  — траектория Редже скалярной теории, а  $N_i$  — положительные целые числа, зависящие от амплитуды<sup>1)</sup>. В связи с этим можно получить сверхсходящиеся правила сумм [32, 33] в тех областях, где для бесспинового случая сходимость отсутствовала бы.

2. Особенности поведения при  $t = 0$ , с которыми мы уже встречались в скалярном случае (дочерние траектории), становятся более сложными. Теперь, чтобы обеспечить «хорошие» аналитические свойства, приходится объединять больше траекторий, в том числе и дублеты по четности.

Анализ проблемы спина в полном объеме представлял бы большой интерес. Но общая теория инвариантов [105] довольно трудна, и пока еще нет теории, применимой во всех случаях. Поэтому мы ограничимся тем, что проиллюстрируем основные вопросы, связанные с учетом спина, на простых примерах.

### 1. Псион-нуклонное рассеяние и сверхсходимость

Рассмотрим процесс рассеяния, кинематика которого изображена на фиг. 1.7. Разложим амплитуду рассеяния  $T$  на инвариантные амплитуды следующим образом:

$$T = \bar{u}(p_2) [A(v, t) + (\gamma Q) B(v, t)] u(p_1), \quad (1.105)$$

где  $A(v, t)$  и  $B(v, t)$  — инвариантные амплитуды, не имеющие кинематических сингулярностей. Напомним дисперсионные соотношения для этих амплитуд при фиксированном  $t$ :

$$\begin{aligned} A(v, t) &\doteq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv' \frac{\text{Im } A(v', t)}{v' - v}, \\ B(v, t) &\doteq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv' \frac{\text{Im } B(v', t)}{v' - v}. \end{aligned} \quad (1.106)$$

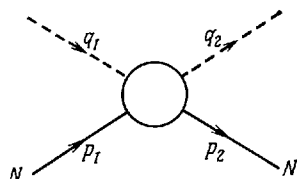
Вклад от нуклонного полюса включен в мнимую часть:

$$\text{Im } B(s, t) = \pi g_{\pi N}^2 \delta(v - v_B) + \text{Im } B(v, t)_{\text{непр.}}$$

Приведенные амплитуды крайне удобны для исследования аналитичности по переменным Мандельстама. Условие же унитарности и разложение по парциальным волнам для амплитуд  $A$  и  $B$  оказываются довольно сложными из-за наличия спина. Если мы хотим оставаться в рамках одночастичных

<sup>1)</sup> Об асимптотическом поведении спиральных амплитуд см., например, в работах [101—104].

уровней и, следовательно, хотим иметь простые траектории Редже, то необходимо провести реджизацию, т. е. аналитически продолжить разложения амплитуд по парциальным волнам. В качестве образца для реджизации при наличии спина мы используем случай скалярных частиц. Поэтому сначала нужно найти такие амплитуды, которые были бы столь же удобными для реджизации, как и амплитуды скалярных частиц. Нам нужны амплитуды, удовлетворяющие следующему требованию: если разложить их в ряд по полиномам Лежандра от аргумента  $\cos \theta_t$ ,  $\Phi = \sum \varphi_J(t) P_J(\cos \theta_t)$ , то вклад



Фиг. 1.7

состояния с полным значением спина  $J$  должен содержаться только в коэффициенте  $\varphi_J(t)$  при полиноме Лежандра с индексом  $J$ . В случае произвольной амплитуды рассеяния частиц со спином это не имеет места. Как только такой специальный набор амплитуд найден, мы можем провести реджизацию точно так же, как и в скалярном случае. Конечно, появятся и некоторые отличия от скалярного случая. На них мы и хотим остановиться.

Способ построения инвариантных амплитуд требуемого сорта (мы будем называть их скаляроподобными или производными амплитудами) излагается в приложении II. В случае  $\pi - N$ -рассеяния, который мы сейчас рассматриваем, инварианты, пригодные для разложения по парциальным волнам в канале  $t$ , даются следующей формулой:

$$T = \Phi_1 + \gamma_\mu \partial_T^\mu \Phi_2. \tag{1.107}$$

Здесь символом  $\partial_T^\mu$  обозначена производная по  $P = 1/2(p_1 + p_2)$ , взятая при условии постоянства нуклонной массы (т. е. фиксированы  $P\Delta$  и  $P^2$ ). Как показано в приложении II, то обстоятельство, что в этой формуле свертываются только векторы  $\gamma_\mu$  и  $\partial_T^\mu$ , относящиеся к одному и тому же состоянию  $N - \bar{N}$  (напомним, что мы работаем в канале  $N + \bar{N} \rightarrow \pi + \pi$ ), означает, что в разложении по полиномам Лежандра

$$\Phi_i(v, t) = \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) \varphi_{iJ}(t) P_J(\cos \theta_t) \tag{1.108}$$

парциальная волна  $\varphi_{iJ}(t)$  содержит в  $t$ -канале только вклады состояний с определенным значением  $J$  полного углового момента.

Нетрудно вывести соотношение <sup>1)</sup> между  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и амплитудами  $A$ ,  $B$  [формула (II.44)]:

$$A = \Phi_1 + \frac{m_N v}{\frac{1}{4}t - m_N^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}, \tag{1.109}$$

$$B = \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}.$$

<sup>1)</sup> Введем здесь, кстати, другой набор амплитуд, который потребуется нам в гл. 9. Положим

$$T = A' + \frac{1}{6} [(\gamma Q)(\gamma P)(\gamma \Delta)]_A B',$$

где  $[...]_A$  означает полную антисимметризацию по  $Q$ ,  $P$ ,  $\Delta$ . Амплитуды  $A'$ ,  $B'$  связаны с введенными ранее следующим образом:

$$A' = A - \left(\frac{1}{4}t - m_n^2\right)^{-1} m_n v B = \Phi_1, \quad E^2 = \left(\frac{1}{4}t - m_n^2\right)^{-1} B = \left(\frac{1}{4}t - m_n^2\right)^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}.$$

Чтобы найти траекторию, содержащую частицы с невырожденными значениями углового момента, необходимо реджизовать  $\Phi_1(v, t)$  и  $\Phi_2(v, t)$ . Интерполирующие функции в плоскости комплексного углового момента  $\varphi_i^{(R)}(l, t)$  находятся тем же методом, что и в скалярном случае. Очевидно, что точки пересечения любой отдельной траектории с прямыми  $l = n$ , где  $n$  — целое число, соответствуют для данных амплитуд определенным значениям углового момента. Рассмотрим вклад от полюсного члена

$$\varphi_i^{(R)}(l, t) = \frac{\beta_i(t)}{\alpha(t) - l}. \quad (1.110)$$

Подставляя функцию (1.110) в разложение (1.108), видим, что каждое пересечение соответствует одному значению  $J$ . Действительно, мы получаем

$$\Phi_i(v, t) = \beta_i(t) \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) \frac{P_J(\cos \theta_l)}{\alpha(t) - J}.$$

Нетрудно также убедиться в том, что условие унитарности просто выражается через производные амплитуд; следовательно, и свойства факторизации легко выражаются с их помощью.

Аналогично тому как это было сделано в § 6—8, введем разложение Хури и найдем связь между ним и разложением Редже. Разложение Хури для амплитуд  $A(v, t)$  и  $B(v, t)$  получим, представив их в виде степенных рядов по переменной  $v$ <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} A(v, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) v^n, \\ B(v, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) v^n. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Конечно, если принять во внимание изоспиновую симметрию в  $t$ -канале, то будут присутствовать только четные или нечетные степени переменной в соответствии с видом амплитуды и ее изотопическими состояниями:  $I = 0$  или  $I = 1$ .

Интерполирующие функции в  $z$ -плоскости Хури даются формулами

$$\begin{aligned} a(z, t) &= \frac{1}{\pi} \int dv \frac{\text{Im } A(v, t)}{v^{1+z}}, \\ b(z, t) &= \frac{1}{\pi} \int dv \frac{\text{Im } B(v, t)}{v^{1+z}}. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Простейшими сингулярностями в плоскости  $z$  являются простые полюса Хури, которые, однако, приводят к довольно сложной структуре частиц, что происходит, как мы увидим, по двум причинам: первая — это, как и в случае скалярных амплитуд, сложное соотношение между траекториями Редже и Хури; вторая — наличие спина, еще более усложняющее связь между траекториями Редже и Хури.

Чтобы получить разложение Хури для производных амплитуд, начинают, как и в скалярном случае, с разложения Редже, а затем определяют интерполирующие функции Хури  $\varphi_i(z, t)$ . Это делается с помощью приведенной в § 8 теоремы, связывающей эти две интерполирующие функции.

Теперь можно установить интересную взаимосвязь между интерполирующими функциями Хури  $a(z, t)$ ,  $b(z, t)$  и функциями  $\varphi_i(z, t)$ . Эта связь

<sup>1)</sup> Такое разложение, несомненно, возможно в соответствующей области переменной  $z$ ; в общем случае необходимы еще разложения по степеням  $s$  и  $\bar{s}$  в отдельности.

сразу же вытекает из соотношений (1.109):

$$\begin{aligned} a(z, t) &= \varphi_1(z, t) + \frac{m_N}{1/4t - m_N^2} z \varphi_2(z, t), \\ b(z, t) &= (z + 1) \varphi_2(z + 1, t). \end{aligned} \quad (1.113)$$

Отметим сдвиг на единицу в  $z$ -плоскости для  $b(z, t)$  по сравнению с  $\varphi_2(z, t)$ . Таким образом, последовательность полюсов Хури и их сателлитов, начинающихся в точке  $z = \alpha(t)$  для  $a(z, t)$  и в точке  $z = \alpha(t) - 1$  для  $b(z, t)$ , будет соответствовать одному полюсу Редже при  $l = \alpha(t)$  в амплитудах  $\varphi_1^{(R)}(l, t)$  и  $\varphi_2^{(R)}(l, t)$ . Первым следствием из этого оказывается то, что асимптотическое поведение амплитуд  $A(v, t)$  и  $B(v, t)$  при больших  $v$  и фиксированных  $t$  будет даваться формулами <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} A(v, t) &\sim c_1 v^{\alpha(t)}, \\ B(v, t) &\sim c_2 \alpha(t) v^{\alpha(t)-1}. \end{aligned} \quad (1.114)$$

В общем случае произвольного спина картина не изменится и мы будем получать амплитуды, ведущие себя асимптотически как  $v^\alpha$ ,  $v^{\alpha-1}$ ,  $v^{\alpha-2}$  и т. д. Это обстоятельство оказалось полезным при исследовании сверхсходящихся правил сумм. Действительно, даже в случае нелинейных траекторий и при наличии траекторий со значениями  $\alpha(t)$ , большими  $-1$ , сверхсходящиеся правила сумм могут быть установлены для соответствующих амплитуд с переворотом спина.

Отметим, что такое асимптотическое поведение амплитуд для процессов со спином можно установить эвристически путем рассуждений, подобных приводившимся в § 10, где говорилось об ограничении Фруассара. В работе [101] такая асимптотика была выведена из общих принципов теории поля.

Рассмотрим, наконец, вопрос, который имеет отношение и к алгебре токов. Из соотношения

$$b(z, t) = (z + 1) \varphi_2(z + 1, t) \quad (1.115)$$

видно, что если  $b(-1, t) \neq 0$ , то амплитуда  $\varphi_2(z, t)$  имеет неподвижный полюс при  $z = 0$ . В силу же сказанного в § 10 существование такого неподвижного полюса в амплитудах сильных взаимодействий исключено. Поэтому должно выполняться соотношение  $b(-1, t) = 0$ . Этого не требуется для некоторых амплитуд, изучаемых в алгебре токов; в гл. 4 мы увидим, что для них величина  $b(-1)$  не равна нулю.

В заключение можно сказать, что в данном случае происходит обмен теми же траекториями, что и в скалярном случае (например, в  $\pi\pi$ -рассеянии). Легко сообразить, что учет ограничений при  $t = 0$  (рассеяние вперед) не ведет к чему-либо новому. Аналитичность при  $t = 0$ , так же как и в скалярном случае, требует существования бесконечного числа дочерних траекторий. Нечто новое появится при учете этих ограничений в процессе реджизации для перекрестного  $s$ -канала, где спин полуцелый. Но там ситуация меняется полностью. Прежде чем перейти к этому случаю, остановимся несколько подробнее на свойстве сверхсходимости, воспользовавшись для этого примером  $\rho\pi$ -рассеяния.

## 2. $\rho\pi$ -рассеяние и сверхсходимость

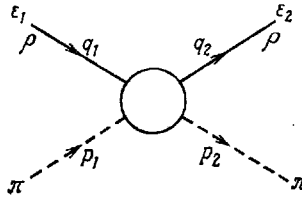
Рассмотрим процесс  $\rho\pi$ -рассеяния, кинематика которого изображена на фиг. 1.8;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — векторы поляризации частиц  $\rho$ . Принимая во внимание условия  $(\varepsilon_1 q_1) = (\varepsilon_2 q_2) = 0$  и инвариантность по отношению к обращению

<sup>1)</sup> Отметим, что во второй из формул (1.114) появляется любопытный множитель  $\alpha(t)$ . Это обстоятельство будет использовано при насыщении правил сумм при конечной энергии (гл. 9).

времени, можно следующим образом разложить амплитуду рассеяния на четыре инвариантные амплитуды:

$$T = (\varepsilon_1 P) (\varepsilon_2 P) A(\nu, t) + [(\varepsilon_1 P) (\varepsilon_2 Q) + (\varepsilon_1 Q) (\varepsilon_2 P)] B(\nu, t) + \\ + (\varepsilon_1 Q) (\varepsilon_2 Q) C(\nu, t) + (\varepsilon_1 \varepsilon_2) D(\nu, t). \quad (1.116)$$

Амплитуды  $A, B, C, D$  не имеют кинематических сингулярностей и удобны для исследования аналитических свойств. Их можно разложить в ряды по переменной  $\nu$  и определить, как обычно, интерполирующие амплитуды



Фиг. 1.8

Хури  $a(z, t), \dots$ . В то же время необходимо ввести подходящие для реджизации инварианты, для которых просты разложение по парциальным волнам и соотношение унитарности:

$$T = \varepsilon_{1\mu} \varepsilon_{2\nu} T^{\mu\nu}, \\ T^{\mu\nu} = \left( \frac{\partial}{\partial Q_\mu^T} \frac{\partial}{\partial Q_\nu^T} + \frac{\partial}{\partial Q_\nu^T} \frac{\partial}{\partial Q_\mu^T} \right) \Phi_1(\nu, t) + \left( Q^\mu \frac{\partial}{\partial Q_\nu^T} + Q^\nu \frac{\partial}{\partial Q_\mu^T} \right) \Phi_2(\nu, t) + \\ + Q^\mu Q^\nu \Phi_3(\nu, t) + g^{\mu\nu} \Phi_4(\nu, t). \quad (1.117)$$

В формуле (1.117) введены обозначения

$$\frac{\partial}{\partial Q_\mu^T} = \Gamma^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial Q_\nu^T}, \quad \text{где} \quad \Gamma^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} \mu & P & \Delta \\ \nu & Q & \Delta \\ P & \Delta & \Delta \\ P & \Delta & \Delta \end{vmatrix},$$

и дифференцирование производится при постоянных массах [см. приложение II, равенство (II.29) и последующие].

В данном случае производные амплитуды также обладают тем свойством, что в их разложении по полиномам Лежандра коэффициент при каждом полиноме  $P_J(\cos \theta_t)$  содержит вклад тех и только тех состояний, которые имеют полный угловой момент  $J$  в  $t$ -канале ( $\rho + \rho \rightarrow \pi + \pi$ ).

Связь между двумя наборами инвариантов устанавливается путем несложных вычислений (необходима осторожность при вычислении второй производной по  $Q_\mu^T$ , так как  $\partial/\partial Q_\mu$  и  $\Gamma^{\mu\nu}$  не коммутируют):

$$A = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \nu^2}, \quad B = \omega \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \nu^2} + \frac{\omega}{\nu} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \nu}, \\ C = \omega^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \nu^2} + 2\omega \left( \frac{\omega}{\nu} + \frac{2}{t} \right) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \nu} + 2\omega \frac{\partial \Phi_2}{\partial \nu} + \Phi_4, \quad (1.118) \\ D = \Phi_4 + \omega \frac{\partial \Phi_1}{\partial \nu},$$

где

$$\omega = \frac{\nu}{\frac{1}{4} t - m_\rho^2}.$$

Как и раньше, соотношение унитарности простым образом записывается через производные инвариантные функции, а последние можно соответствующим образом реджизовать. Одиночная реджевская траектория, связанная с этими инвариантами, будет давать пересечения, соответствующие вполне определенным спинам. Факторизация также при этом формулируется просто. Затем аналогично скалярному случаю вводятся интерполирующие амплитуды Хури  $\varphi_i(z, t)$ . Связь между двумя наборами интерполирующих амплитуд находится путем подстановки разложений по степеням  $v$  в равенства (1.118):

$$\begin{aligned}
 a(z, t) &= (z+2)(z+1)\varphi_1(z+2, t), \\
 b(z, t) &= \frac{1}{\frac{1}{4}t - m_\rho^2} (z+1)z\varphi_1(z+1, t) + \\
 &+ \frac{1}{\frac{1}{4}t - m_\rho^2} (z+1)\varphi_1(z+1, t) + (z+1)\varphi_2'(z+1, t), \\
 c(z, t) &= \left(\frac{1}{4}t - m_\rho^2\right)^{-2} z(z-1)\varphi_1(z, t) + \frac{3t - 4m_\rho^2}{t\left(\frac{1}{4}t - m_\rho^2\right)^2} z\varphi_1(z, t) + \\
 &+ \frac{2}{\frac{1}{4}t - m_\rho^2} z\varphi_2(z, t) + \varphi_4(z, t), \\
 d(z, t) &= \varphi_4(z, t) + \frac{1}{\frac{1}{4}t - m_\rho^2} z\varphi_1(z, t).
 \end{aligned} \tag{1.119}$$

Отметим сдвиг на две единицы в  $z$ -плоскости у  $a(z, t)$  по сравнению с  $\varphi_1(z, t)$  и сдвиг на одну единицу у  $b(z, t)$ . Для физических амплитуд при больших  $v$  и фиксированных  $t$  отсюда получаются следующие асимптотические формулы, обусловленные наличием в производных амплитудах полюса Редже при  $l = \alpha$ :

$$\begin{aligned}
 A(v, t) &\sim c_1 v^{\alpha(t)-2}, \\
 B(v, t) &\sim c_2 v^{\alpha(t)-1}, \\
 C(v, t) &\sim c_3 v^{\alpha(t)}, \\
 D(v, t) &\sim c_4 v^{\alpha(t)}.
 \end{aligned} \tag{1.120}$$

Кроме того, отсутствие неподвижных полюсов в производных амплитудах сильных взаимодействий  $\varphi_i(z, t)$  означает, что

$$a(-2, t) = a(-1, t) = b(-1, t) = 0. \tag{1.121}$$

Конечно, при учете перекрестной симметрии для состояний с определенной симметрией некоторые из этих равенств могут оказаться тривиальными. Например, в интересном случае обмена  $\rho$ -траекторией с изоспином 1 в  $t$ -канале сохраняется только соотношение  $a(-1, t) = 0$ . Если вспомнить определение  $a(z, t)$  и асимптотическое поведение  $A(v, t)$  при больших  $v$ , то мы получим свержсходящееся правило сумм:

$$\int \overline{\text{Im}} A^-(v, t) dv = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_\rho(t) < 1. \tag{1.122}$$

Общие вопросы, затрагивающие это и сходные правила сумм (в частности, вопрос о том, при каких значениях  $t$  удобнее их использовать, а также о возможности их «насыщения» изобарами), будут рассмотрены в гл. 9. Здесь мы только покажем первый случай успешного применения правил сумм [32] при  $t = 0$ , введя в качестве промежуточных состояний легчайшие, дающие ненулевой вклад изобары  $\pi$  и  $\omega$ . Используя феноменологические



взаимодействия

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rho\pi\pi} &= g_{\rho\pi\pi} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \rho_{\mu}^{\alpha}(x) \pi^{\beta}(x) \partial^{\mu} \pi^{\gamma}(x), \\ \mathcal{L}_{\omega\rho\pi} &= g_{\omega\rho\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\mu} \omega_{\nu}(x) \partial_{\rho} \rho_{\sigma}^{\alpha}(x) \pi^{\alpha}(x), \end{aligned}$$

получаем из (1.122) соотношение

$$4g_{\rho\pi\pi}^2 = m_{\rho}^2 g_{\omega\rho\pi}^2. \quad (1.123)$$

Чтобы проверить эту формулу, подставим полученное значение  $g_{\omega\rho\pi}$  в выражение для ширины распада  $\omega \rightarrow 3\pi$ , даваемое моделью Гелл-Манна, Шарпа и Вагнера [34]:

$$\Gamma(\omega \rightarrow 3\pi) = \frac{1}{4} \frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} \frac{g_{\omega\rho\pi}^2}{4\pi} \frac{(m_{\omega} - 3m_{\pi})^4}{m_{\rho}^2 - 4m_{\pi}^2} m_{\omega} m_{\pi}^2 \frac{3,56}{3^{3/2}}.$$

Взяв значение <sup>1)</sup>  $g_{\rho\pi\pi}^2/4\pi \approx 2,4$ , получаем

$$\Gamma(\omega \rightarrow 3\pi) \approx 8 \text{ МэВ},$$

тогда как экспериментальное значение

$$\Gamma_{\text{эксп}}(\omega \rightarrow 3\pi) \approx 11 \text{ МэВ}.$$

Таким образом, соотношение (1.123) выполняется довольно точно.

### 3. Конспирация в пион-нуклонном рассеянии и траектории Редже в случае полупцелого спина <sup>2)</sup>

Исследуем теперь, исходя из дисперсионных соотношений при фиксированном  $s$  или  $\bar{s}$ , свойства амплитуды пион-нуклонного рассеяния и ее асимптотическое поведение при больших  $t$ . Эта асимптотика будет иметь вид  $t^{\alpha(s)}$ , причем теперь траектория  $\alpha(s)$  интерполирует частицы с полупцелыми спинами. Поставленная задача сильно отличается от соответствующей задачи в случае бесспиновых частиц. К тому же различие гораздо больше, чем для упомянутого ранее разложения по парциальным волнам в канале  $N + \bar{N} \rightarrow \pi + \pi$ , которое не могло привести к новым результатам для траекторий благодаря наличию в конечном состоянии псевдоскалярных пионов.

Начнем с разбиения на инвариантные амплитуды. Введем вектор

$$K = p_1 + q_1 = p_2 + q_2,$$

причем  $K^2 = s = W^2$ . Разложим амплитуду следующим образом:

$$|T = \left(1 + \frac{(\gamma K)}{W}\right) \psi_1(s, t) + \left(1 - \frac{(\gamma K)}{W}\right) \psi_2(s, t). \quad (1.124)$$

Связь между новыми амплитудами  $\psi_1, \psi_2$  и обычными амплитудами [формула (1.105)] дается равенствами

$$\begin{aligned} A &= \psi_1 + \psi_2 + \frac{m_N}{W} (\psi_1 - \psi_2), \\ B &= \frac{2}{W} (\psi_1 - \psi_2), \end{aligned} \quad (1.125)$$

<sup>1)</sup> Соответствующее ширине порядка 125 МэВ.

<sup>2)</sup> Ограничения на амплитуды рассеяния со спином при  $t = 0$  и их следствия относительно полюсов Редже впервые были рассмотрены Голдбергером, Грисару, Мак-Дауэллом и Вонгом [35], Грибовым, Окунем и Померанчуком [36], Волчковым и Грибовым [37]. Подробно вопрос излагается в работе Лидера [20] и в соответствующих разделах книги Коллинза и Сквайрса [23].

и обратными им

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{2} \left[ A + \frac{1}{2} (W - m_N) B \right], \\ \psi_2 &= \frac{1}{2} \left[ A - \frac{1}{2} (W + m_N) B \right].\end{aligned}\tag{1.126}$$

Разложим эти амплитуды по парциальным волнам в  $s$ -канале:

$$\begin{aligned}\psi_1(s, t) &= \chi_1(W) \sum_{J=1/2}^{\infty} [f_J^+(s) P'_{J+1/2}(\cos \theta_s) - f_J^-(s) P'_{J-1/2}(\cos \theta_s)], \\ \psi_2(s, t) &= \chi_2(W) \sum_{J=1/2}^{\infty} [f_J^+(s) P'_{J-1/2}(\cos \theta_s) - f_J^-(s) P'_{J+1/2}(\cos \theta_s)],\end{aligned}\tag{1.127}$$

где

$$\begin{aligned}\chi_1(W) &= \frac{8\pi W^2}{(W + m_N)^2 - m_\pi^2}, \\ \chi_2(W) &= \frac{8\pi W^2}{(W - m_N)^2 - m_\pi^2},\end{aligned}\tag{1.128}$$

$f_J^\pm$  — парциальная волна с полным спином  $J = l + 1/2$  ( $l$  — орбитальный угловой момент  $\pi - N$ -системы), а  $f_J^-$  соответствует значению  $J = l - 1/2$ <sup>1)</sup>. Обратные формулы для парциальных волн таковы:

$$\begin{aligned}f_J^+(s) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d \cos \theta_s \left[ \frac{\psi_1}{\chi_1} P_{J-1/2}(\cos \theta_s) - \frac{\psi_2}{\chi_2} P_{J+1/2}(\cos \theta_s) \right], \\ f_J^-(s) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d \cos \theta_s \left[ \frac{\psi_1}{\chi_1} P_{J+1/2}(\cos \theta_s) - \frac{\psi_2}{\chi_2} P_{J-1/2}(\cos \theta_s) \right].\end{aligned}\tag{1.129}$$

Посмотрим, как эти парциальные волны ведут себя в окрестности точки  $W = 0$ . Парциальная волна  $f_J^\pm$  — это функция переменной  $s$  с корневой точкой ветвления при  $s = 0$  (кинематическая особенность), или, другими словами, это регулярная функция переменной  $W$  при  $W = 0$ . Амплитуды  $A$  и  $B$  не имеют точек ветвления такого типа, они регулярны при  $s = 0$ . Отсюда следует некоторое условие для парциальных амплитуд  $f_J^\pm(s)$ . Действительно, из соотношения (1.126) видно, что

$$\psi_1(W) = \psi_2(-W).\tag{1.130}$$

В то же время из равенств (1.128) следует, что

$$\chi_1(W) = \chi_2(-W).\tag{1.131}$$

Поэтому, подставляя все эти соотношения в формулу (1.129), получаем симметрию Мак-Дауэлла [38]:

$$f_J^+(W) = -f_J^-(W).\tag{1.132}$$

В частности, при  $s = 0$  (т. е. при  $W = 0$ ) имеем

$$\begin{aligned}\psi_1(0, t) - \psi_2(0, t) &= 0, \\ f_J^+(0) + f_J^-(0) &= 0.\end{aligned}\tag{1.133}$$

Подчеркнем аналогию между данным случаем и случаем скалярных частиц (ограничения для парциальных волн при  $t = 0$ , § 4). Там мы видели, что, вообще говоря, существование одиночной не равной нулю парциальной

<sup>1)</sup> Более распространенное обозначение  $f_{l\pm}$  связано с нашим так:

$$f_J^\pm = f_{l\pm} \quad (l = J \mp 1/2).$$

волны запрещено [не зависящая от других парциальная волна  $\mathcal{G}_l(t)$  должна убывать при  $t = 0$  как  $t^l$ ] и все волны должны взаимно уничтожаться, чтобы не было полюса при  $t = 0$ . В данном случае невозможно устремить к нулю некоторую парциальную волну  $f_{\pm}^{\dagger}(0)$ , не устремив к нулю соответствующую ей волну  $f_{\mp}(0)$ .

Такая связь сразу же сказывается при реджизации амплитуды. Введя интерполирующие функции для парциальных волн, напишем представление Ватсона — Зоммерфельда для амплитуд:

$$\begin{aligned} \psi_1(s, t) &= \frac{1}{2i} \chi_1(W) \int_{\gamma} \frac{dJ}{\cos \pi J} \{f^+(J, W) P'_{J+1/2}(-\cos \theta_s) + \\ &\quad + f^-(J, W) P'_{J-1/2}(-\cos \theta_s)\}, \\ \psi_2(s, t) &= -\frac{1}{2i} \chi_2(W) \int_{\gamma} \frac{dJ}{\cos \pi J} \{f^+(J, W) P'_{J-1/2}(-\cos \theta_s) + \\ &\quad + f^-(J, W) P'_{J+1/2}(-\cos \theta_s)\}, \end{aligned} \quad (1.134)$$

где  $f^{\pm}(J, W)$  — интерполирующие функции для  $f_{\pm}^{\dagger}(W)$ , а путь интегрирования  $\gamma$  состоит из обходимых по часовой стрелке окружностей с центрами в точках  $J = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ .

Симметрия Мак-Дауэлла, очевидно, должна распространяться и на интерполирующие функции. Рассмотрим полюсной вклад

$$\begin{aligned} f^+(J, W) &= \frac{\beta^+(W)}{J - \alpha^+(W)}, \\ f^-(J, W) &= \frac{\beta^-(W)}{J - \alpha^-(W)}. \end{aligned}$$

В силу симметрии Мак-Дауэлла должно выполняться равенство  $\alpha^+(W) = \alpha^-(W)$  и, в частности, равенство  $\alpha^+(0) = \alpha^-(0)$  [конечно, и  $\beta^+(0) = \beta^-(0)$ ]. Таким образом, мы приходим к выводу, что при нулевой массе четные траектории совпадают с нечетными<sup>1)</sup>. Этот результат напоминает нам о дочерних траекториях. Тогда мы пришли к спиновым мультиплетам, и все они имели одинаковую натуральную четность; теперь же мы обнаружили дублеты по четности. В рассматриваемом случае дочерние траектории, конечно, тоже необходимы из тех же самых соображений аналитичности, что и в скалярном случае. Рассмотрение траекторий, соответствующих частицам полупеделого спина, приводит к дополнительному удвоению.

Домокош [22] получил следующую формулу для траектории в окрестности  $s = 0$ , которая интерполирует частицы с  $J = l + 1/2$  при положительных  $W$  и частицы с  $J = l - 1/2$  при отрицательных  $W$ :

$$\begin{aligned} \alpha_n(W) &= \alpha_0(0) - n + a \left[ \alpha_0(0) - n + \frac{1}{2} \right] W + \\ &+ \left\{ b_1 + a^2 \left[ \alpha_0(0) - n + \frac{1}{2} \right] + b_2 \left[ \alpha_0(0) - n + \frac{1}{2} \right]^2 \right\} W^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.135)$$

Вывод этой формулы такой же, как и формулы (1.98) для траекторий с целым спином. В рассматриваемом нами особенно простом случае полупеделого спина изъятая симметрия  $W \rightarrow -W$  позволяет просто получить основной результат о дублетах по четности. Совершенно четко обнаруживается тесная связь с трактовкой дочерних траекторий в скалярном случае. Требование, чтобы амплитуды  $A$  и  $B$  не имели кинематических сингуляр-

<sup>1)</sup> Напомним, что парциальная волна  $f_{\pm}^{\dagger}$  имеет четность  $P = (-1)^{J+1/2}$ , а волна  $f_{\mp}$  имеет четность  $P = (-1)^{J-1/2}$ , так что состояния, соответствующие пересечениям траекторий Редже  $\alpha^+(W) = J$ ,  $\alpha^-(W) = J$ , характеризуются противоположными четностями.

ностей при  $W = 0$ , в сочетании с формулами (1.125) приводит к соотношению  $\psi_1(0, t) - \psi_2(0, t) = 0$ .

Тот же результат можно получить, перейдя к пределу  $K_\mu \rightarrow 0$  вне массовой поверхности. Это можно сделать, когда пионы являются виртуальными и продолжение по пионной массе производится до значения  $m_\pi = m_N$ . Действительно, при  $K_\mu = 0$  имеем  $q_1^2 = p_1^2$  и  $q_2^2 = p_2^2$ . В этом случае в разложении амплитуды [формула (1.124)]

$$T = \psi_1 + \psi_2 + \frac{\gamma K}{W} (\psi_1 - \psi_2),$$

предельное значение вектора  $K_\mu/W$  зависит от пути перехода к пределу  $K_\mu \rightarrow 0$ . Поэтому требование, чтобы амплитуда  $T$  имела определенный предел при  $K_\mu \rightarrow 0$ , снова содержит в качестве необходимого условия соотношение  $\psi_1(0, t) = \psi_2(0, t)$ .

Итак, существенно новой чертой траекторий Редже, обусловленной наличием спина, является удвоение по четности, продемонстрированное на данном примере. Данный вывод никоим образом не ограничен только полуцелыми траекториями, в этом случае его лишь легче получить. Чтобы доказать удвоение траекторий в общем случае, необходимо рассмотреть канал, в котором и падающие и рассеянные частицы обладают спином; в случае бозонных траекторий для получения удвоения достаточно рассмотреть спиновую структуру рассеяния в таком канале и потребовать аналитичности по  $t$  от асимптотики амплитуды при больших  $\nu$ .

Удвоение траекторий можно объяснить и с точки зрения теории групп. Известно, что представления группы Лоренца характеризуются значениями двух операторов:  $F = 1/2 (J^2 - K^2)$  и  $G = JK$  (приложение III). Мы уже видели, какое значение имеют конечномерные представления с  $G = 0$ , когда речь шла о дочерних траекториях. Тогда оператор  $G$  принимал только нулевые значения, так как это псевдоскалярный оператор и невозможно построить представления с  $G \neq 0$  для состояния с двумя скалярными частицами. Теперь, при наличии спина, появляется возможность построить представления с  $G \neq 0$ . Поскольку  $G$  — псевдоскалярный оператор, в этих представлениях содержатся дублеты по четности. Самый известный пример такого рода — представление, даваемое антисимметричным тензором  $F^{\mu\nu}$ , которое содержит дублеты по четности в виде векторов  $E^i = F^{0i}$  и  $H^h = 1/2 \epsilon_{ij}^h F^{ij}$ , причем последний есть аксиальный вектор. При собственных преобразованиях Лоренца комбинации  $\mathbf{H} + i\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H} - i\mathbf{E}$  преобразуются отдельно, а преобразования четности меняют их местами. Аналогично для дираковского спинора  $u$  комбинации  $(1 + \gamma_5)u$  и  $(1 - \gamma_5)u$  преобразуются независимо при собственных преобразованиях Лоренца, но при изменении четности переходят друг в друга.

Поэтому становится понятным, что в основе явления «конспирации» (удвоения траекторий) лежат те же теоретико-групповые причины, что и в основе феномена дочерних траекторий. Правда, выше говорилось, что представления с  $G \neq 0$  возможны только при наличии спина. Необходимы же они лишь в случае полуцелого спина, поскольку все представления с полуцелым спином имеют  $G \neq 0$  и удвоение по четности, а в случае целого спина они не нужны, так как для траектории с целым спином не требуется обязательного наличия партнера с противоположной четностью. Но тогда амплитуды процесса в направлении вперед не должны быть асимптотически независимыми, что должно приводить к обнаружимым следствиям для определенных процессов. Такое положение обычно называют «уклонением», имея в виду уклонение от ограничений.

С более формальной, чисто групповой точки зрения при  $K_\mu = 0$  амплитуда для процесса со спином должна раскладываться по базисным функциям неприводимых конечномерных представлений группы Лоренца (или по

неприводимым конечномерным унитарным представлениям группы  $SU(2) \otimes SU(2)$ , после выполнения поворота Вика]. Эти представления классифицируются по наивысшему возможному спину  $N$  и наинизшему спину  $M$  (операторы Казимира  $F$  и  $G$  легко выразить через  $N$  и  $M$ ). При разложении амплитуды, описывающей переход частиц со спинами  $j_1$  и  $j_2$  в частицы со спинами  $j_3$  и  $j_4$ , величина  $N$  в случае целого спина принимает все значения от 0 до  $\infty$ , а  $M$  пробегает значения от 0 до  $\min(j_1 + j_2, j_3 + j_4)$  (в случае полуцелого спина разложения должны начинаться с  $1/2$ ). Это объясняется тем, что при  $K_\mu = 0$  две частицы со спинами  $j_1$  и  $j_2$  не могут перейти в состояние, низший спин которого больше, чем  $j_1 + j_2$ . Поэтому при анализе процесса  $\pi + N \rightarrow \pi + N$  должно выполняться условие  $M = 1/2$  [формула Домокоша (1.135) относится фактически к этому случаю], тогда как, например, при анализе процесса  $\rho + \pi \rightarrow \rho + \pi$  требуются представления с  $M = 0$  и  $M = 1$ . Далее, все представления с  $M > 0$  содержат дублеты по четности. Разложение только по функциям с  $M = 0$  (в случае целого спина) не является достаточно общим и в конце концов приводит обычно к соотношениям между амплитудами, т. е. к следствиям, которые можно экспериментально наблюдать. При реджизации необходимо интерполировать дискретные значения  $N$ , сохраняя  $M$  постоянным, и, следовательно, при  $s = 0$  полюса Редже должны группироваться в мультиплеты в соответствии со значением  $M$  у интерполируемых четырехмерных парциальных волн (полюса Толлера). А что же будет с уровнями, описывающими частицы? Допустим, что у нас имеются линейные параллельные траектории. Полюс Толлера с определенным значением  $M$  при пересечении с целыми значениями  $N_0$  приводит к частицам со спином  $J$ ,  $M \leq J \leq N_0$ , и с обеими четностями для каждого спина (кроме случая  $M = 0$ ). Напомним, что представления, о которых здесь идет речь, неунитарны, а поэтому при использовании теоретико-групповых формулировок для описания частиц могут появляться духовые состояния с мнимыми константами взаимодействия.

### Приложение I. Проектирующий оператор в случае частиц с любым спином

В данном приложении мы рассмотрим вопрос о проектирующих операторах в спиновом пространстве частицы. Формулы, которые мы при этом выведем, очень помогут нам при вычислениях с изобарами любого спина. Излагаемый метод анализа принадлежит в основном С. Вейнбергу [39]<sup>1)</sup>.

Частицу со спином  $l$  и определенным импульсом  $\Delta_\mu$  ( $\Delta^2 = m^2$ ) можно представлять себе как вектор в  $(2l + 1)$ -мерном векторном пространстве  $W_l$ . Пусть  $|\Delta_\mu, \alpha\rangle$  ( $\alpha = 0, 1, \dots, 2l + 1$ ) есть полный набор векторов в этом пространстве. Введем «проектирующий оператор для состояния со спином  $l$  и импульсом  $\Delta_\mu$ »:

$$\mathcal{P}(\Delta_\mu) = \sum_{\alpha} |\Delta_\mu, \alpha\rangle \langle \Delta_\mu, \alpha|. \quad (I.1)$$

Ввиду того что масса  $m$  постоянна и не равна нулю, для описания лоренц-инвариантного поведения частицы можно выбрать любое лоренцево представление (приложение III), содержащее спин  $l$ , при соответствующих дополнительных условиях. В случае целых  $l$  мы выберем представление симметричными тензорами с  $M = 0$  и  $N = l$ , т. е. представление  $(1/2l, 1/2l)$  при дополнительных условиях

$$\Delta^\mu \varphi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l} = 0, \quad (I.2)$$

$$\varphi_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_e} = 0. \quad (I.3)$$

Уравнение (I.3) гарантирует, что мы действительно имеем дело с неприводимым представлением  $(1/2l, 1/2l)$  однородной группы Лоренца. Из уравне-

<sup>1)</sup> См. также [40—42].

ния (I.2) следует, что  $\Phi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}$  преобразуется по неприводимому представлению группы вращений размерности  $2l + 1$  в системе центра масс.

В случае же полуцелого спина  $J = l + 1/2$  мы возьмем дираковский спинор  $\chi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}$ , полностью симметричный по всем  $l$  четырехмерным индексам и удовлетворяющий уравнениям

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \chi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} &= 0, \\ (\gamma\Delta - m) \chi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} &= 0. \end{aligned} \quad (I.4)$$

Это соответствует выделению состояния с требуемой спин-четностью из представления группы Лоренца

$$\left[ \left( \frac{1}{2}, 0 \right) \oplus \left( 0, \frac{1}{2} \right) \right] \otimes \left( \frac{1}{2} l, \frac{1}{2} l \right),$$

в котором  $M = 1/2$ . Из (I.4) также получаем

$$\chi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}^\mu = 0, \quad (I.5)$$

$$\Delta^\mu \chi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_l} = 0. \quad (I.6)$$

В силу определения (I.1) проектирующий оператор будет тензором ранга  $2l$  в случае целого спина и матрицей в  $\gamma$ -пространстве, имеющей  $2l$  тензорных индексов, в случае полуцелого спина. Мы обозначим его символом  $\mathcal{P}_{v_1\dots v_l}^{\mu_1\dots\mu_l}$ .

Проектирующий оператор будет удовлетворять всем условиям, содержащимся в определении  $\Phi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}$  или  $\chi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_l}$ . Он будет полностью симметричным и иметь нулевой след раздельно по всем верхним и нижним индексам и будет удовлетворять уравнению

$$\Delta_{\mu_1} \mathcal{P}_{v_1 v_2 \dots v_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l} = \Delta^{v_1} \mathcal{P}_{v_1 v_2 \dots v_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l} = 0 \quad (I.7)$$

и, кроме того, в случае полуцелого спина

$$\gamma_{\mu_1} \mathcal{P}_{v_1 \dots v_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} = \gamma^{v_1} \mathcal{P}_{v_1 \dots v_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} = 0, \quad (I.8)$$

$$(\gamma\Delta - m) \mathcal{P}_{v_1 \dots v_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} = \mathcal{P}_{v_1 \dots v_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} (\gamma\Delta - m) = 0. \quad (I.9)$$

Такой проектор представляет собой сложный тензор. Гораздо проще иметь дело с «сокращенным» проектором, у которого верхние и нижние индексы свернуты с помощью фиксированных векторов  $k_\mu$  и  $k'_\mu$ :

$$\mathcal{P}(k, k') = k_{\mu_1} \dots k_{\mu_l} \mathcal{P}_{v_1 \dots v_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} k'^{v_1} \dots k'^{v_l}. \quad (I.10)$$

Первоначальный проектор можно получить из него путем дифференцирования:

$$\mathcal{P}_{v_1 \dots v_l}^{\mu_1 \dots \mu_l} = \frac{1}{(l!)^2} \frac{\partial}{\partial k_{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial k_{\mu_l}} \frac{\partial}{\partial k'^{v_1}} \dots \frac{\partial}{\partial k'^{v_l}} \mathcal{P}(k, k'). \quad (I.11)$$

Сокращенный проектор удобнее, так как при практическом его использовании в расчетах с изобарами все индексы свертываются с внешними векторами, кроме разве что некоторого числа индексов, прямо связанных с тензорами поляризации, если внешние частицы обладают спином.

Построим же сокращенный проектор. Сначала мы построим его в системе, где частица покоится, т. е. при  $\Delta_\mu = (m, 000)$ . В такой системе только пространственные компоненты проектора будут отличными от нуля и мы будем иметь дело с оператором

$$\prod_{n_1 \dots n_l}^{m_1 \dots m_l},$$

где индексы  $m_i, n_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) пробегает значения от 1 до 3. Тогда

$$\mathcal{F}(k, k') = \Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = k_{m_1} \dots k_{m_l} \Pi_{n_1 \dots n_l}^{m_1 \dots m_l} k'^{n_1} \dots k'^{n_l}, \quad (I.12)$$

где  $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$  — пространственные компоненты  $k_\mu, k'_\mu$  в системе покоя. Оператор  $\Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  представляет собой скаляр в случае целого спина и матрицу в пространстве действия  $\sigma$ -матриц в случае полужелого спина, так как в силу уравнения (I.9) в системе покоя сохраняются только верхние компоненты спинора.

Вычислив  $\Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ , мы найдем и ковариантный оператор, который сводится к  $\Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  в системе покоя. Тем самым сокращенный проектирующий оператор  $\mathcal{F}(k, k')$  будет полностью определен.

В случае целого спина  $l$  оператор  $\Pi$  представляет собой скаляр, зависящий только от  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , и однородную функцию степени  $l$  по обоим переменным. Поэтому можно написать

$$\Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = k^l k'^l \Pi_l(x), \quad (I.13)$$

где

$$x = \cos \theta = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{kk'}, \quad (I.14)$$

$$k = |\mathbf{k}|, \quad k' = |\mathbf{k}'|$$

и  $\Pi_l$  — полином степени  $l$ . В таком случае условие равенства следа нулю выглядит так (свертываются два индекса, которые становятся свободными после дифференцирования):

$$\frac{\partial}{\partial k_i} \frac{\partial}{\partial k^i} \Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \Delta_{(k)} k^l k'^l \Pi_l(x) = 0. \quad (I.15)$$

В полярных координатах имеем

$$\Delta_{(k)} = \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial k^2} k + \frac{\partial}{\partial x} (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial k^2} k - L^2 \quad (I.16)$$

[обозначение  $\frac{\partial}{\partial x} (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} = -L^2$  пригодится позже] и уравнение (I.15) принимает вид

$$\left[ l(l+1) + \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} \right] \Pi_l(x) = 0, \quad (I.17)$$

т. е. оператор  $\Pi_l(x)$  должен быть пропорциональным полиному Лежандра степени  $l$ :

$$\Pi_l(x) = c_l P_l(x). \quad (I.18)$$

Вычислим теперь нормировочный множитель, пользуясь следующим основным свойством всех проектирующих операторов:

$$\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}, \quad (I.19)$$

т. е.

$$\Pi_{i_1 \dots i_l}^{m_1 \dots m_l} \Pi_{n_1 \dots n_l}^{i_1 \dots i_l} = \Pi_{n_1 \dots n_l}^{m_1 \dots m_l}. \quad (I.20)$$

Уравнение (I.20) можно представить в виде

$$\frac{1}{(l!)^2} \frac{\partial}{\partial k_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial k_{i_l}} \Pi_l(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial k_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial k_{i_l}} \Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \Pi(\mathbf{k}', \mathbf{k}'). \quad (I.21)$$

Если вспомнить, что

$$\Delta_{(k)} [\Phi(\mathbf{k})]^2 = 2\Phi_l(\mathbf{k}) \Delta_{(k)} \Phi(\mathbf{k}) + 2[\nabla_{(k)} \Phi(\mathbf{k})]^2 \quad (I.22)$$

и учесть условие равенства нулю следа, то уравнения (I.21) и (I.22) дают

$$(3 \times 2 - L^2) \dots [(2l+1)2l - L^2] \Pi_l^2(x) = 2^l (l!)^2 \Pi_l(1). \quad (I.23)$$

При интегрировании по  $x$  вклад операторов  $L^2$  равен нулю и мы получаем

$$(2l + 1)! \int \Pi_l^2(x) dx = 2^l (l!)^2 2 \Pi_l(1). \quad (I.24)$$

Таким образом,

$$\Pi_l(x) = \frac{l!}{(2l-1)!!} P_l(x). \quad (I.25)$$

В случае полуцелого спина  $J = l + 1/2$  оператор  $\Pi_l(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  представляет собой матрицу в  $\sigma$ -пространстве, инвариантную относительно вращений и однородную функцию степени  $l$  по переменным  $k$  и  $k'$ . Поэтому он должен иметь вид

$$\Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = k^l k'^l A_l(\cos \theta) + i \mathbf{k} \times \mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\sigma} k^{l-1} k'^{l-1} B_{l-1}(\cos \theta), \quad (I.26)$$

где  $A_l$  и  $B_{l-1}$  — полиномы степени  $l$  и  $l - 1$ . Условие (I.8) в системе покоя выглядит так:

$$\sigma_{m_k} \Pi_{n_1 \dots n_l}^{m_1 \dots m_k \dots m_l} = 0. \quad (I.27)$$

Из уравнения (I.27) получаем

$$\sigma_i \frac{\partial}{\partial k_i} \Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = 0. \quad (I.28)$$

Отсюда путем некоторых преобразований мы приходим к формулам

$$B_{l-1}(x) = -\frac{1}{l+1} \frac{d}{dx} A_l(x), \quad (I.29)$$

$$A_l(x) = c_l P_l(x). \quad (I.30)$$

Нормировочную постоянную  $c_l$  можно вычислить так же, как и в предыдущем случае, но только теперь придется вычислять след по внешним спиновым индексам и потребуются некоторые алгебраические операции с матрицами  $\sigma$ . В итоге получим

$$A_l(x) = \frac{(l+1)!}{(2l+1)!!} P_l(x), \quad (I.31)$$

и, следовательно,

$$\Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{l!}{(2l+1)!!} \left[ (l+1) - i \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{k}'}{kk'} \frac{d}{dx} \right] k^l k'^l P_l(x). \quad (I.32)$$

Учитывая свойства полиномов Лежандра, перепишем уравнение (I.32) в виде

$$\Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{l! k^l k'^l}{(2l+1)!!} \left[ P_{l+1}(x) - \frac{(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}')}{kk'} P_l(x) \right]. \quad (I.33)$$

Выражения (I.33) и (I.25) можно сразу же обобщить так, чтобы получить релятивистский сокращенный проектирующий оператор  $\mathcal{P}(k, k')$ . Нам нужны векторы

$$\begin{aligned} \hat{k} &= k - \frac{(\Delta k)}{m^2} \Delta, \\ \hat{k}' &= k' - \frac{(\Delta k')}{m^2} \Delta \end{aligned} \quad (I.34)$$

и оператор

$$\frac{(\gamma \Delta) + m}{2m}, \quad (I.35)$$

которые в системе покоя имеют вид

$$\hat{k} \equiv (0, \mathbf{k}), \quad \hat{k}' \equiv (0, \mathbf{k}'), \quad (I.36)$$

$$\frac{(\gamma \Delta) + m}{2m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (I.37)$$



Если теперь в случае целого спина  $l$  ввести оператор

$$\mathcal{P}(k, k') = \frac{(-1)^l l!}{(2l-1)!!} P_l \left( \frac{(\hat{k} \hat{k}')}{|\hat{k}| |\hat{k}'|} \right) |\hat{k}|^l |\hat{k}'|^l, \quad (I.38)$$

а в случае полуцелого спина  $J = l + 1/2$  — оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(k, k') = & \frac{(-1)^l l!}{(2l+1)!!} \left[ P_{l+1} \left( \frac{(\hat{k} \hat{k}')}{|\hat{k}| |\hat{k}'|} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{(\gamma \hat{k})(\gamma \hat{k}')}{|\hat{k}| |\hat{k}'|} P_l \left( \frac{(\hat{k} \hat{k}')}{|\hat{k}| |\hat{k}'|} \right) \right] \frac{(\gamma \Delta) + m}{2m} |\hat{k}|^l |\hat{k}'|^l, \end{aligned} \quad (I.39)$$

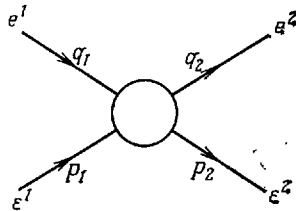
то, как нетрудно убедиться, при  $\Delta_\mu = (m, 0)$  оба оператора будут переходить в  $\Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ . Следовательно, это и будут искомые сокращенные проектирующие операторы.

Точно так же можно найти сокращенные проектирующие операторы, соответствующие представлению с  $M = 0$  однородной группы Лоренца. Но в этом случае условия типа (I.7) не накладываются.

В заключение отметим, что тензоры поляризации, удовлетворяющие уравнениям (I.2) и (I.6), становятся, вообще говоря, сингулярными при  $\Delta^2 \rightarrow 0$ . Рассмотрим, например, случай векторного поля  $\varphi_\mu = \varepsilon_\mu e^{i\Delta x}$ . Уравнение (I.2) дает  $\Delta^\mu \varepsilon_\mu = 0$ , а в системе центра масс  $\Delta_\mu = ((\Delta^2)^{1/2}, 0)$ . Следовательно, вектор поляризации в системе центра масс, обозначаемый через  $\hat{\varepsilon}_\mu$ , обладает свойством  $\hat{\varepsilon}_0 = 0$ . Далее, выберем, например,  $\hat{\varepsilon}_\mu = (0001)$  и произведем преобразование Лоренца в направлении  $z$ , так что частица приобретет энергию  $E$  и импульс  $p_z$ . Получим вектор  $\varepsilon_\mu = (-p_z/|\Delta|, 0, 0, E/|\Delta|)$ , который имеет особенность в пределе  $\Delta^2 \rightarrow 0$  при постоянном  $p_z$ . В этом проявляется то обстоятельство, что при  $\Delta_\mu \rightarrow 0$  уравнение (I.2) теряет смысл, так же как и система центра масс. В случае  $\Delta_\mu \rightarrow 0$  предельное значение тензора уже не может удовлетворять соотношению (I.2). Это имеет прямое отношение к тому, что говорилось о дочерних полюсах Редже в гл. 1.

### Приложение II. Метод определения инвариантных амплитуд для процесса рассеяния $2 \rightarrow 2$ в случае частиц с любым спином

Ниже мы изложим метод определения инвариантных амплитуд в случае частиц со спином [43, 44]. Хотя он и не обладает всей общностью формализма спиральности, он дает некоторые преимущества: простые перекрестные соот-



Фиг. II.1

ношения, простое определение полного спина и прямую связь с инвариантными амплитудами, полученными на основе теории возмущений. Он представляет собой обобщение метода вычислений с изобарами на основе сокращенного проектирующего оператора, изложенного в приложении I.

Рассмотрим процесс типа  $2 \rightarrow 2$  с обычной кинематикой (фиг. II.1). На схеме  $e^1, \varepsilon^1$  — тензоры поляризации начальных, а  $e^2, \varepsilon^2$  — конечных

состояний, не обязательно поперечные по отношению к импульсам (это даст нам возможность использовать формализм такого рода для описания процессов, рассматриваемых в алгебре токов). Введем, как обычно [формулы (1.26)],

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} (p_1 + p_2), \\
 Q &= \frac{1}{2} (q_1 + q_2), \quad p_1 + q_1 = p_2 + q_2, \\
 \Delta &= q_2 - q_1 = p_1 - p_2, \\
 t &= \Delta^2, \quad s = (p_1 + q_1)^2, \quad \bar{s} = (p_1 - q_2)^2, \\
 v &= (PQ) = \frac{1}{4} (s - \bar{s}), \\
 \hat{P}_\mu &= P_\mu - \frac{(P\Delta)}{t} \Delta_\mu, \\
 \hat{Q}_\mu &= Q_\mu - \frac{(Q\Delta)}{t} \Delta_\mu, \\
 u_\mu &= \frac{\Delta_\mu}{\sqrt{t}}
 \end{aligned} \tag{II.1}$$

и косинус угла рассеяния в  $t$ -канале в системе центра масс, как и раньше [формула (1.25)]<sup>1)</sup>,

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_t &= \frac{(\hat{P}\hat{Q})}{(\hat{P}^2)^{1/2} (\hat{Q}^2)^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} P & \Delta \\ Q & \Delta \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} P & \Delta \\ P & \Delta \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} Q & \Delta \\ Q & \Delta \end{pmatrix}^{1/2}} = \\
 &= \frac{(PQ) - (Pu)(Qu)}{[P^2 - (Pu)^2]^{1/2} [Q^2 - (Qu)^2]^{1/2}} = \frac{v + \frac{a}{t}}{(\hat{P}^2)^{1/2} (\hat{Q}^2)^{1/2}} = \lambda(t) + \nu\rho(t). \tag{II.2}
 \end{aligned}$$

Все переменные, относящиеся к верхним частицам  $q_1$  и  $q_2$ , мы будем обозначать буквой  $u$ , а переменные нижних частиц  $p_1, p_2$  — буквой  $l$ . Связь между наборами  $u$  и  $l$  вытекает из закона сохранения полного углового момента в  $t$ -канале и закона сохранения импульса  $\Delta = (p_1 - p_2) = q_2 - q_1$ .

Чтобы выделить вклад состояния с угловым моментом  $J$  ( $t$ -канал) в различные амплитуды, рассмотрим поведение последних при вращениях в системе центра масс (т. е. при таких преобразованиях, при которых  $\Delta$  остается постоянным). Обозначим через  $R_u$  оператор вращения кинематических переменных набора  $u$  (характеризующийся углами Эйлера  $\varphi_u$ ), а через  $R_l$  — оператор вращения переменных набора  $l$  (характеризующийся углами  $\varphi_l$ ). Полная инвариантность амплитуды по отношению к вращению требует инвариантности относительно операции  $R(\varphi, \varphi) = R_u(\varphi) R_l(\varphi)$ , равной произведению одинаковых вращений обеих групп переменных  $u$  и  $l$ .

Введем новую, более широкую группу преобразований

$$R(\varphi_u, \varphi_l) = R_u(\varphi_u) R_l(\varphi_l), \tag{II.3}$$

где вращения переменных  $u$  и  $l$  независимы ( $\varphi_u \neq \varphi_l$ ).

Очевидно, что, хотя матрица рассеяния и инвариантна относительно операций типа  $R(\varphi, \varphi)$ , при отдельных вращениях  $R_u(\varphi_u)$  или  $R_l(\varphi_l)$  только верхних переменных или только нижних переменных она инвариантна лишь в случае, если верхнее (или нижнее) состояние является скаляром относительно вращений. Кроме того, амплитуда, соответствующая данному  $J$

<sup>1)</sup> Символом  $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$  мы обозначаем определитель порядка  $n$ , элемент  $ij$  которого равен  $(a_i b_j)$ , скалярному произведению векторов  $a_i$  и  $b_j$ .

в  $t$ -канале, при операции  $R_u$  или  $R_l$  преобразуется, очевидно, по  $(2J + 1)$ -мерному представлению.

Проще всего пояснить это на таком примере, когда оба набора  $u$  и  $l$  состоят из бесспиновых частиц. Вклад промежуточного состояния спина  $J$  таков:

$$\sum_m Y_J^{m*}(\Omega_u) Y_J^m(\Omega_l) = \frac{2J+1}{4\pi} P_J(\cos \theta). \quad (\text{II.4})$$

Если теперь принять во внимание то обстоятельство, что верхние или нижние линии могут переносить спин, то нетрудно дать общий рецепт наиболее удобного объединения импульсов и поляризаций с целью получения инвариантных множителей <sup>1)</sup>. В самом деле, если объединить переменные  $u$  и  $l$  так, чтобы получить множители, учитывающие полную зависимость от поляризации и инвариантные относительно операций  $R_u$  и  $R_l$ , взятых по отдельности, то коэффициент при произведении этих множителей в разложении амплитуды рассеяния будет обладать тем свойством, что вклад в него спина  $J$  при операции  $R_u$  или  $R_l$  преобразуется по  $J$ -представлению. Такая факторизация достигается раздельным использованием величин типа  $u$  или типа  $l$ .

Но чтобы получить правильное число инвариантов, нужно к величинам  $e_1, e_2, q_1, q_2$  добавить еще и градиент  $\partial/\partial Q_u$ , а к величинам  $e_1, e_2, p_1, p_2$  — градиент  $\partial/\partial P_u$ . Очевидно, что эти градиенты следует вычислять при постоянном  $\Delta$ , так что существует только один независимый градиент для состояния  $u$  и один для состояния  $l$  (т. е.  $\partial/\partial p_1 = \partial/\partial p_2, \partial/\partial q_1 = \partial/\partial q_2$ ). Это очень напоминает производные от полиномов Лежандра, появляющиеся в хорошо известном спиральном разложении.

Итак, мы можем написать разложение амплитуды в виде

$$T = \sum_{m, n} \bar{\alpha}_m^{(u)} \alpha_n^{(l)} F_{mn}, \quad (\text{II.5})$$

где  $\alpha_m^{(u)}$  — скалярные комбинации тензоров поляризации  $e$  (и матриц  $\gamma$ , если нужно) с импульсами и градиентами набора  $u$ , а  $\alpha_n^{(l)}$  — скаляры, образованные из величин набора  $l$ . Величина  $F_{mn}$  — лоренц-инвариантная функция импульсов. В разных конкретных случаях в силу симметрии, например сохранения четности или инвариантности по отношению к обращению времени, а также в силу дополнительных условий число независимых амплитуд может еще сократиться.

Наконец, с учетом сказанного выше можно сделать вывод, что для состояния, характеризуемого полным угловым моментом  $J$ , функции  $F$  ведут себя, как и в бесспиновом случае, а именно при одном вращении  $R_u$  или  $R_l$  они преобразуются по представлению с индексом  $J$ . Поэтому вклад спина  $J$  в  $F_{mn}$  имеет вид

$$\bar{F}_{mn}^{(J)}(t, \cos \theta_t) = P_J(\cos \theta_t) f_{mn}^{(J)}(t). \quad (\text{II.6})$$

В результате в общем случае получается разложение, аналогичное разложению в бесспиновой задаче,

$$F_{mn}(t, \cos \theta_t) = \sum_J (2J+1) P_J(\cos \theta) f_{mn}^{(J)}(t), \quad (\text{II.7})$$

где величины  $f_{mn}^{(J)}(t)$  содержат вклады от промежуточных состояний с полным спином  $J$  в  $t$ -канале. Связь между спином и разложением по полиномам Лежандра та же, что и в скалярном случае.

Существование разных функций  $f_{mn}^{(J)}$  при данном значении  $J$  связано, конечно, с тем, что полный момент  $J$  можно разными способами получить из спина и орбитального момента.

<sup>1)</sup> Мы ограничиваемся случаем целого спина  $u$  промежуточного состояния. Случай полуцелого спина рассматривается в работе [45].

Важной особенностью нашего метода является то, что все амплитуды  $F_{mn}(t, \cos \theta_i)$  не имеют кинематических сингулярностей по  $\cos \theta_i$ , т. е. по переменной  $v$  (при постоянных  $t$  и массах  $p_1^2, q_i^2$ ). Больше того, единственные сингулярности по этой переменной, как и в скалярном случае, связаны с нарушением сходимости разложения по полиномам Лежандра, а это динамический эффект, не зависящий от спина частиц.

Амплитуды  $F_{mn}$  можно назвать «скаляроподобными амплитудами», потому что они выражают такую же связь между полным угловым моментом и полиномами Лежандра, как и в случае скалярных частиц; их можно также назвать «производными» амплитудами.

Посмотрим теперь, что мы получим, подействовав оператором градиента  $\partial/\partial P_\mu$  на скалярную функцию  $F(t, \cos \theta_i, p_1^2, q_i^2)$ . Во-первых, величина  $\Delta$  и, следовательно, величина  $t$  должны оставаться постоянными. Величины же  $P^2$  и  $P\Delta$  изменяются под действием оператора градиента, а поскольку

$$P^2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{4}t, \quad (\text{II.8})$$

$$P\Delta = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2), \quad (\text{II.9})$$

«массы»  $p_1^2$  и  $p_2^2$  не остаются постоянными при вычислении градиента. В принципе в этом нет ничего плохого; действительно, если рассматриваемая амплитуда связана с алгеброй токов и ее внешние линии являются «пробными» токами с переменными массами, то такая операция может быть достаточно просто выполнена и оказаться очень полезной.

Но если мы имеем дело с амплитудами сильных взаимодействий и не хотим делать гипотез о продолжении амплитуд за массовую поверхность, то мы должны применять оператор градиента при постоянных  $t$  и массах  $p_1^2, p_2^2$ . В таком случае, когда мы пишем  $dF = (\partial F/\partial P_\mu) dP_\mu$ , дифференциалы  $dP_\mu$  должны подчиняться условиям  $\Delta^\mu dP_\mu = 0$  и  $P^\mu dP_\mu = 0$ . При дифференцировании эти условия обеспечивают постоянство масс  $p_1^2$  и  $p_2^2$ , а также  $t$ . Обозначим такое дифференцирование символом  $\partial/\partial P_\mu^T$ .

Мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial P_\mu^T} = I^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial P^\nu}, \quad (\text{II.10})$$

где

$$I_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} \quad (\text{II.11})$$

и

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{1}{(P\Delta)^2 - P^2\Delta^2} [P^2\Delta_\mu\Delta_\nu + \Delta^2P_\mu P_\nu - (P\Delta)(P_\mu\Delta_\nu + \Delta_\mu P_\nu)], \quad (\text{II.12})$$

или также

$$I_{\mu\nu} = \frac{\begin{pmatrix} \mu & P & \Delta \\ \nu & P & \Delta \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} P & \Delta \\ P & \Delta \end{pmatrix}}. \quad (\text{II.11}')$$

Уравнение (II.10) гарантирует инвариантность  $P^2$ ,  $\Delta^2$  и  $(P\Delta)$ , а следовательно, и  $p_1^2$ ,  $p_2^2$ ,  $t$  при операции дифференцирования  $\partial/\partial P_\mu^T$ .

Можно также представить градиент  $\partial/\partial P_\mu^T$  в виде

$$\frac{\partial}{\partial P_\mu^T} = [(P\Delta)^2 - P^2\Delta^2]^{-1} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} P_\nu \Delta_\rho W_\sigma, \quad (\text{II.13})$$

где

$$W_\sigma = \varepsilon_{\sigma\alpha\beta\gamma} P^\alpha \Delta^\beta \frac{\partial}{\partial P_\gamma}. \quad (\text{II.14})$$

Уравнение (II.13) интересно в связи с вопросом о физическом смысле вектора  $W_\sigma$ . В системе центра масс  $t$ -канала, в которой  $\Delta_\mu = (\sqrt{t}, 0)$ , имеем

$$W_\mu \rightarrow W = -\sqrt{t} \mathbf{p} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \quad (\text{II.15})$$

где  $\mathbf{p}$  — импульс в системе центра масс. Следовательно, вектор  $W$  пропорционален относительному орбитальному угловому моменту частиц с импульсами  $p_1$  и  $p_2$ .

Подчеркнем еще раз, что можно использовать либо оператор градиента типа «вне массовой поверхности» (ограничений нет, только  $t$  не затрагивается дифференцированием), либо оператор (II.10) типа «на массовой поверхности». Первый больше подходит для амплитуд алгебры токов, так как он меняет «массы», а второй — для сильных взаимодействий. Они, конечно, полностью эквивалентны во многих важных приложениях, таких, как исследование аналитических свойств и асимптотического поведения амплитуд по переменной  $v$ .

Чтобы пояснить эти условия, рассмотрим простой случай, когда «внизу» (l) имеются частицы со спинами 0 и 1, а «вверху» (u) — частицы со спином 0. Достаточно построить только l-инварианты. Если принять во внимание, что для частицы со спином 1, импульсом  $p_1$  и вектором поляризации  $\varepsilon_1$  выполняются условия

$$(\varepsilon_1 p_1) = 0 \text{ и, следовательно, } (\varepsilon_1 \Delta) = -2 (\varepsilon_1 P), \quad (\text{II.16})$$

то независимы следующие инварианты <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(l)} &= (\varepsilon_1 P), \\ \alpha_2^{(l)} &= \left( \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial P^T} \right), \\ \alpha_3^{(l)} &= (\varepsilon_1 W), \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

где  $W_\mu$  — вектор, определенный формулой (II.14). Интересно посмотреть, во что превращаются эти «взаимодействия» в системе центра масс, в которой  $W_\mu$  дается уравнением (II.15) и  $P = (0, \mathbf{p})$ , если две частицы с импульсами  $p_1$  и  $p_2$  имеют равные массы. Мы имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(l)} &= -\varepsilon \mathbf{p}, \\ \alpha_2^{(l)} &= \frac{1}{p^2 \sqrt{t}} \mathbf{p} \times W \varepsilon, \\ \alpha_3^{(l)} &= -\varepsilon W, \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

и эти величины можно классифицировать как «продольное», «магнитное» и «электрическое» взаимодействия.

Интересно также отметить, что, если наша векторная частица — фотон, то совершенно естественным образом может быть введена градиентная инвариантность. В самом деле,  $(\varepsilon_1 W)$  и  $\varepsilon_1 (\partial/\partial P^T)$  градиентно-инвариантны по построению, так что градиентная инвариантность сводится лишь к требованию равенства нулю коэффициента при  $\alpha_1^{(l)}$ . Это соответствует требованию отсутствия продольных переходов.

Исчерпывающий анализ общих свойств представленного набора инвариантов можно найти в работе Ребби [45]. Здесь мы применим его метод к некоторым случаям, которые представляют для нас особый интерес в дальнейшем.

<sup>1)</sup> Конечно, со стороны  $u$  связаны только  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  или только  $\alpha_3$  (в зависимости от относительной четности частиц).

### 1. Скалярно-векторное рассеяние (вне массовой поверхности)

Предположим, что линии  $q_1, q_2$  изображают 4-векторы токов, а линии  $p_1, p_2$  соответствуют скалярным (или обе псевдоскалярным) объектам. Очевидно, что анализ, аналогичный проведенному выше, после учета условий поперечности для векторов поляризации и учета ограничений, следующих из инвариантности по отношению к отражению времени, даст нам разложение амплитуды для  $\pi\pi$ -рассеяния.

Напишем

$$T = \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu T_{\mu\nu}, \quad (\text{II.19})$$

где  $T$  — интересующая нас амплитуда. Поскольку линии  $p_1, p_2$  относятся к скалярным состояниям, инварианты «стороны  $l$ » сведутся к единице. На «стороне  $u$ » можно построить тензоры второго ранга из  $Q_\mu, \Delta_\mu, g_{\mu\nu}$  и  $\partial/\partial Q_\mu$  (при дифференцировании мы не фиксируем массы). Можно взять их в таком виде:

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial Q^\mu} \frac{\partial}{\partial Q^\nu}, & \beta_{\mu\nu}^{(1)} &= Q_\mu \frac{\partial}{\partial Q^\nu}, \\ \beta_{\mu\nu}^{(2)} &= Q_\nu \frac{\partial}{\partial Q^\mu}, & \beta_{\mu\nu}^{(3)} &= \Delta_\mu \frac{\partial}{\partial Q^\nu}, \\ \beta_{\mu\nu}^{(4)} &= \Delta_\nu \frac{\partial}{\partial Q^\mu}, & \gamma_{\mu\nu}^{(1)} &= Q_\mu Q_\nu, \\ \gamma_{\mu\nu}^{(2)} &= Q_\mu \Delta_\nu, & \gamma_{\mu\nu}^{(3)} &= \Delta_\mu Q_\nu, \\ \gamma_{\mu\nu}^{(4)} &= \Delta_\mu \Delta_\nu, & \gamma_{\mu\nu}^{(5)} &= g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

и тогда для  $T_{\mu\nu}$  можно написать

$$T_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} F + \sum_{i=1}^4 \beta_{\mu\nu}^{(i)} G_i + \sum_{i=1}^5 \gamma_{\mu\nu}^{(i)} H_i. \quad (\text{II.21})$$

Инвариантные амплитуды  $F, G_i$  и  $H_i$  представляют собой «скалярно-подобные» амплитуды, и их разложение по парциальным волнам дается формулами

$$\begin{aligned} F(\nu, t, q_i^2, p_i^2) &= \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) P_J(\cos \theta_t) F^{(J)}(t, q_i^2, p_i^2), \\ G_i(\nu, t, q_i^2, p_i^2) &= \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) P_J(\cos \theta_t) G_i^{(J)}(t, q_i^2, p_i^2), \\ H_i(\nu, t, q_i^2, p_i^2) &= \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) P_J(\cos \theta_t) H_i^{(J)}(t, q_i^2, p_i^2). \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Теперь применим градиентные операторы, введенные в формулах (II.20) и (II.21). Вспоминая соотношения (II.8) и (II.9), имеем

$$\frac{\partial}{\partial Q^\mu} = Q_\mu \frac{\partial}{\partial \xi} + \Delta_\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + P_\mu \frac{\partial}{\partial \nu}, \quad (\text{II.23})$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial q_1^2} + \frac{\partial}{\partial q_2^2}; \quad \frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial q_2^2} - \frac{\partial}{\partial q_1^2} \quad (\text{II.24})$$

— производные по «массам». Используя выражение (II.23) вместе с определениями (II.20) и (II.21), приходим к разложению

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= A P_\mu P_\nu + B_1 Q_\mu P_\nu + B_2 P_\mu Q_\nu + B_3 \Delta_\mu P_\nu + B_4 P_\mu \Delta_\nu + \\ &+ C_1 P_\mu \Delta_\nu + C_2 Q_\mu \Delta_\nu + C_3 \Delta_\mu Q_\nu + C_4 \Delta_\mu \Delta_\nu + C_5 g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}, \\
 B_1 &= \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial v} + \frac{\partial G_1}{\partial v}, \\
 B_2 &= \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial v} + \frac{\partial G_2}{\partial v}, \\
 B_3 &= \frac{\partial^2 F}{\partial \mu \partial v} + \frac{\partial G_3}{\partial v}, \\
 B_4 &= \frac{\partial^2 F}{\partial \mu \partial v} + \frac{\partial G_4}{\partial v}, \\
 C_1 &= \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} (G_1 + G_2) + H_1, \\
 C_2 &= \frac{\partial^2 F}{\partial \mu \partial \xi} + \frac{\partial G_4}{\partial \xi} + H_2, \\
 C_3 &= \frac{\partial^2 F}{\partial \mu \partial \xi} + \frac{\partial G_2}{\partial \mu} + H_3, \\
 C_4 &= \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} (G_3 + G_4) + H_4, \\
 C_5 &= \frac{\partial F}{\partial \xi} + H_5.
 \end{aligned} \tag{II.26}$$

Как явствует из построения, амплитуды  $A$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  не содержат кинематических сингулярностей по  $v$  при фиксированном  $t$ . Они удовлетворяют (не говоря о вычитаниях) дисперсионным соотношениям по переменной  $v$  при фиксированном  $t$ . Их разложения по парциальным волнам следуют из уравнений (II.22). Если мы хотим использовать изобарную модель с угловым моментом  $l$  в  $t$ -канале, то достаточно положить

$$\begin{aligned}
 \text{Im } F^{(J)} &= fg\delta(t-t_l)\delta_{Jl}, \\
 \text{Im } G_i^{(J)} &= g_i g \delta(t-t_l)\delta_{Jl}, \\
 \text{Im } H_i^{(J)} &= h_i g \delta(t-t_l)\delta_{Jl},
 \end{aligned} \tag{II.27}$$

где  $f$ ,  $g_i$  и  $h_i$  играют роль констант взаимодействия изобары с  $J = l$  и массой  $m = \sqrt{t_l}$  с векторными частицами, а  $g$  — константа взаимодействия со скалярными частицами.

Мы замечаем, что скалярноподобные амплитуды  $F$ ,  $G_i$ ,  $H_i$  не вполне физические. Действительно, из выражений (II.26) видно, что  $F$  и  $G_i$  содержат неизвестную аддитивную величину. Можно добавить к  $F$  любую величину вида  $a + bv$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные, и произвольную постоянную к каждой из  $G_i$ , не меняя физической ситуации.

Это обстоятельство имеет важное значение. Выясним его физическую основу. Полином первого порядка по  $v$  является также полиномом первого порядка по  $\cos \theta_i$ . Поэтому в амплитуде  $F$  мы можем, очевидно, по своему усмотрению модифицировать вклады с  $J = 0$  и  $J = 1$  в  $t$ -канале, не меняя физической стороны дела. Это означает, что вклады с  $J = 0, 1$  в  $F$  не имеют физического смысла. Почему? Это сразу же становится ясно, если провести расчет с изобарами, выписать вершинные функции и использовать метод сокращенного проектирующего оператора из приложения I. Обозначим через  $L$  относительный угловой момент в канале  $t$  для частиц  $q_1$  и  $q_2$ ; тогда амплитуда  $F$  будет соответствовать переходу с  $L = J - 2$ . Следовательно, значения  $J = 0$  и  $J = 1$  в амплитуде  $F$  будут соответствовать отрицательным  $L$ , т. е. отвечать переходам, лишенным смысла.

То же самое можно сказать об амплитудах  $G_i$ , для которых  $L = J - 1$ , так что  $J = 0$  отвечает переходу, не имеющему физического смысла.

Наблюдаемые амплитуды  $A$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  относятся к амплитудам «типа теории возмущений».

## 2. Скалярно-векторное рассеяние (на массовой поверхности)

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда линии  $q_1, q_2$  относятся к векторным частицам, а обе линии  $p_1, p_2$  соответствуют псевдоскалярным частицам (рл-рассеяние). В этом случае должны выполняться дополнительные условия

$$(\varepsilon_1 q_1) = (\varepsilon_2 q_2) = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1 \Delta) &= 2 (\varepsilon_1 Q), \\ (\varepsilon_2 \Delta) &= -2 (\varepsilon_2 Q). \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

Кроме того, желательно, чтобы градиент вычислялся при постоянных массах. Мы для этого введем тензор  $I_{\mu\nu}$  [формула (II.11)]. Тогда разложение типа (II.21) будет выглядеть так <sup>1)</sup>:

$$T = \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu T_{\mu\nu},$$

$$T_{\mu\nu} = \left( \frac{\partial}{\partial Q^T_\mu} \frac{\partial}{\partial Q^T_\nu} + \frac{\partial}{\partial Q^T_\nu} \frac{\partial}{\partial Q^T_\mu} \right) \Phi_1 + Q_\mu \frac{\partial}{\partial Q^T_\nu} \Phi_2 + Q_\nu \frac{\partial}{\partial Q^T_\mu} \Phi_3 + Q_\mu Q_\nu \Phi_4 + g_{\mu\nu} \Phi_5, \quad (\text{II.29})$$

где

$$\frac{\partial}{\partial Q^T_\mu} = I^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial Q^\nu}.$$

В случае рл-рассеяния в силу инвариантности по отношению к отражению времени мы требуем полной симметрии при перестановках  $q_1 \leftrightarrow \leftrightarrow -q_2, p_1 \leftrightarrow -p_2, \varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2$  и поэтому  $\Phi_2 = \Phi_1$ .

После применения градиентных операторов<sup>2)</sup> мы приходим к разложению  $T = (\varepsilon_1 P) (\varepsilon_2 P) A + (\varepsilon_1 P) (\varepsilon_2 Q) B_1 + (\varepsilon_1 Q) (\varepsilon_2 P) B_2 + + (\varepsilon_1 Q) (\varepsilon_2 Q) C + (\varepsilon_1 \varepsilon_2) D,$  (II.30)

где (штрих, очевидно, означает дифференцирование по  $\nu$ )

$$\begin{aligned} A &= \Phi_1'', \\ B_1 &= \frac{\begin{pmatrix} \Delta & Q \\ \Delta & P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q & P \\ Q & \Delta \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} Q & \Delta \\ \Delta & Q \end{pmatrix}} \Phi_1'' + \frac{\Delta^2 + 2Q\Delta}{\begin{pmatrix} Q & \Delta \\ \Delta & Q \end{pmatrix}} \Phi_1' + \Phi_3', \\ B_2 &= \frac{\begin{pmatrix} \Delta & Q \\ \Delta & P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q & P \\ Q & \Delta \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} Q & \Delta \\ \Delta & Q \end{pmatrix}} \Phi_1'' + \frac{\Delta^2 + 2Q\Delta}{\begin{pmatrix} Q & \Delta \\ \Delta & Q \end{pmatrix}} \Phi_1' + \Phi_2', \\ C &= \frac{\begin{pmatrix} \Delta & Q \\ \Delta & P \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} Q & P \\ Q & \Delta \end{pmatrix}^2}{\begin{pmatrix} Q & \Delta \\ \Delta & Q \end{pmatrix}^2} \Phi_1'' + \frac{2(\Delta^2 + Q\Delta - 2Q^2) \begin{pmatrix} \Delta & Q \\ \Delta & P \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} Q & \Delta \\ \Delta & Q \end{pmatrix}^2} \Phi_1' + \\ &+ \frac{\begin{pmatrix} \Delta & Q \\ \Delta & P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q & P \\ Q & \Delta \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} Q & \Delta \\ \Delta & Q \end{pmatrix}} \Phi_2' + \frac{\begin{pmatrix} \Delta & Q \\ \Delta & P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q & P \\ Q & \Delta \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} Q & \Delta \\ \Delta & Q \end{pmatrix}} \Phi_3' + \Phi_4', \\ D &= \frac{\begin{pmatrix} \Delta & P \\ \Delta & Q \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} Q & \Delta \\ \Delta & Q \end{pmatrix}} \Phi_1' + \Phi_5. \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

<sup>1)</sup> Мы используем симметризованное выражение

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial Q^T_\mu} \frac{\partial}{\partial Q^T_\nu} + \frac{\partial}{\partial Q^T_\nu} \frac{\partial}{\partial Q^T_\mu} \right\};$$

антисимметризованная часть дает комбинацию остальных инвариантов, и поэтому в ней нет необходимости.

<sup>2)</sup> При вычислении второй производной необходима осторожность, так как  $\partial/\partial Q_\mu$  и  $I_{\mu\nu}$  не коммутируют.



Разложение скалярноподобных амплитуд  $\varphi_i$  по парциальным волнам и здесь имеет вид (II.22), причем коэффициенты при  $P_J (\cos \theta_i)$  в этом разложении содержат вклады только тех состояний, которые в  $t$ -канале имеют полный угловой момент  $J$ .

Мы видим, что  $\varphi_1$  определяется с точностью до аддитивной величины  $a_1 + a_2 v$ , а  $\varphi_2, \varphi_3$  — с точностью до аддитивной постоянной;  $S$ - и  $P$ -волны величины  $\varphi_1$  и  $S$ -волны величин  $\varphi_2, \varphi_3$  не имеют физического смысла.

### 3. Два скаляра — в два вектора

В качестве следующего примера исследуем случай, когда линии  $q_1, p_1$  представляют скалярные частицы, а линии  $q_2, p_2$  — векторные;  $e_\mu, \varepsilon_\mu$  — соответствующие векторы поляризации. В таком случае

$$(eq_2) = (\varepsilon p_2) = 0 \quad (\text{II.32})$$

и

$$\begin{aligned} (e\Delta) &= -2 (eQ), \\ (\varepsilon\Delta) &= 2 (\varepsilon P). \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Мы уже говорили о выборе инвариантов для обеих «сторон» [«верхней» и «нижней» в данном случае, формулы (II.17)]. Разложим теперь амплитуду  $T$  следующим образом:

$$\begin{aligned} T = \left( e \frac{\partial}{\partial Q} \right) \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial P} \right) F + (eQ) \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial P} \right) G_1 + \left( e \frac{\partial}{\partial Q} \right) (\varepsilon P) G_2 + \\ + (eQ) (\varepsilon P) H + (eW^\mu) (\varepsilon W^\mu) S, \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

где

$$\begin{aligned} W_\mu^l &= \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} P^\alpha \Delta^\beta \frac{\partial}{\partial P_\gamma}, \\ W_\mu^u &= \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} Q^\alpha \Delta^\beta \frac{\partial}{\partial P_\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Мы воспользуемся методом исследования «вне массовой поверхности», когда на операторы градиента не накладывается каких-либо ограничений. Отметим, что амплитуды  $F, G_i, H$  в канале  $t$  содержат вклад от состояний с натуральной четностью, тогда как амплитуда  $S$  содержит вклад от состояний с ненатуральной четностью, которые теперь могут присутствовать.

Разложение  $F, G_i, H, S$  по парциальным волнам выполняется, как и в формулах (II.22), при соблюдении обычной для скалярноподобных амплитуд связи между коэффициентом при  $P_J (\cos \theta_i)$  и состояниями с данными  $J$ .

Чтобы вычислить производные в формуле (II.34), введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_u} &= \frac{\partial}{\partial q_1^2} + \frac{\partial}{\partial q_2^2}, \\ \frac{\partial}{\partial \mu_u} &= \frac{\partial}{\partial q_2^2} - \frac{\partial}{\partial q_1^2}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi_l} &= \frac{\partial}{\partial p_1^2} + \frac{\partial}{\partial p_2^2}, \\ \frac{\partial}{\partial \mu_l} &= \frac{\partial}{\partial p_1^2} - \frac{\partial}{\partial p_2^2}. \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

После несложных преобразований приходим к разложению

$$T = A (eP) (\varepsilon Q) + B_1 (eQ) (\varepsilon Q) + B_2 (eP) (\varepsilon P) + C (eQ) (\varepsilon P) + D (e\varepsilon), \quad (\text{II.37})$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \Delta^2 \frac{\partial S}{\partial v} + \left( \frac{P}{Q} \Delta \right) \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}, \\
 B_1 &= \left( \frac{\partial}{\partial \xi_u} - \frac{\partial}{\partial \mu_u} \right) \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial G_1}{\partial v} - (P\Delta) \frac{\partial S}{\partial v} - \left[ \left( \frac{P}{P} \Delta \right) + \left( \frac{P}{P} \Delta \right) \right] \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}, \\
 B_2 &= \left( \frac{\partial}{\partial \mu_l} - \frac{\partial}{\partial \xi_l} \right) \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial G_2}{\partial v} + (Q\Delta) \frac{\partial S}{\partial v} + \left[ \left( \frac{Q}{Q} P \right) - \left( \frac{Q}{Q} \Delta \right) \right] \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}, \\
 C &= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi_u \partial \xi_l} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_u \partial \mu_l} - \frac{\partial^2}{\partial \mu_u \partial \xi_l} - \frac{\partial^2}{\partial \mu_u \partial \mu_l} \right\} F + \left( \frac{\partial}{\partial \xi_l} + \frac{\partial}{\partial \mu_l} \right) G_1 + \\
 &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial \xi_u} - \frac{\partial}{\partial \mu_u} \right) G_2 + H + (PQ) \frac{\partial S}{\partial v} + \\
 &\quad + \left[ \left( \frac{Q}{P} \Delta \right) + \left( \frac{P}{P} Q \right) - \left( \frac{Q}{Q} P \right) + \left( \frac{Q}{Q} P \right) \right] \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}, \\
 D &= \frac{\partial F}{\partial v} + [v\Delta^2 - (P\Delta)(Q\Delta)] \frac{\partial S}{\partial v} + \left( \frac{P}{P} Q \Delta \right) \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}.
 \end{aligned} \tag{II.38}$$

Отметим, что, как и раньше, к каждой амплитуде  $F$ ,  $G_i$ ,  $S$  можно добавить константу, не меняя при этом физической стороны процесса. Это означает, что  $S$ -волны в указанных амплитудах не имеют физического смысла. Как легко видеть, в случае амплитуд  $F$  и  $G_i$  это связано с тем, что для того, чтобы получить значение  $J = 0$ , для падающих или рассеянных частиц в канале  $t$  необходимо было бы иметь значение орбитального углового момента, равное  $-1$  (точка, не имеющая физического смысла). В случае же амплитуды  $S$  точка  $J = 0$  оказывается лишенной физического смысла, ввиду сохранения четности. Действительно, в силу закона сохранения четности нельзя связывать состояние  $J^P = 0^-$  с системой, состоящей из скаляра и вектора. Подставляя, наконец,  $(P\Delta) = (Q\Delta) = 0$  (равные массы), получаем

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - t \frac{\partial S}{\partial v} + vt \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}, \\
 B_1 &= \left( \frac{\partial}{\partial \xi_u} - \frac{\partial}{\partial \mu_u} \right) \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial G_1}{\partial v} - P^2 t \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}, \\
 B_2 &= \left( \frac{\partial}{\partial \xi_l} + \frac{\partial}{\partial \mu_l} \right) \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial G_2}{\partial v} - Q^2 t \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}, \\
 C &= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi_u \partial \xi_l} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_u \partial \mu_l} - \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \mu_u} - \frac{\partial^2}{\partial \mu_u \partial \mu_l} \right\} F + \left( \frac{\partial}{\partial \xi_l} - \frac{\partial}{\partial \mu_l} \right) G_1 + \\
 &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial \xi_u} - \frac{\partial}{\partial \mu_u} \right) G_2 + H + v \frac{\partial S}{\partial v} + (vt + Q^2 P^2 - v^2) \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}, \\
 D &= \frac{\partial F}{\partial v} + vt \frac{\partial S}{\partial v} + t(Q^2 P^2 - v^2) \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}.
 \end{aligned} \tag{II.39}$$

Для изучения свержходящихся соотношений может оказаться удобной амплитуда вида

$$D' = vA + D = v \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{\partial F}{\partial v} + tQ^2 P^2 \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}. \tag{II.40}$$

#### 4. Пион-нуклонное рассеяние

В качестве последнего примера рассмотрим вкратце случай  $\pi N$ -рассеяния. Пусть  $p_1, p_2$  соответствуют нуклонам, а  $q_1, q_2$  — пионам. В качестве инвариантов, связанных с нуклонами, можно выбрать

$$\begin{aligned}
 \alpha^{(1)} &= 1, \\
 \alpha^{(2)} &= \gamma^\mu I_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial P_\nu} = \left( \frac{P}{P} \Delta \right)^{-1} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu P^\nu \Delta^\rho W^\sigma
 \end{aligned} \tag{II.41}$$

в соответствии с формулой (II.13).

Запишем физическую амплитуду  $\pi N$ -рассеяния так:

$$T = \bar{u}(p_2) \left( \Phi_1 + \gamma^\mu I_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \Phi_2 \right) u(p_1). \quad (\text{II.42})$$

Выполнив дифференцирование, получим,

$$T = \bar{u}(p_2) [A + (\gamma Q) B] u(p_1), \quad (\text{II.43})$$

где

$$A = \Phi_1 + \frac{m_n v}{\frac{1}{4} t - m_n^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}, \quad (\text{II.44})$$

$$B = \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}.$$

Мы видим, что к  $\Phi_2$  можно добавить константу без каких-либо физических последствий;  $S$ -волна амплитуды  $\Phi_2$  не имеет физического смысла ( $J = 0$  — бессмысленное значение).

### Приложение III. Однородная группа Лоренца

Здесь мы кратко напомним необходимые в данной главе элементарные сведения об однородной группе Лоренца.

Начнем с трехмерной группы вращений  $O(3)$ , которая является подгруппой группы Лоренца. Ее алгебра Ли определяется коммутационными соотношениями для генераторов  $J^i$  (операторов углового момента)

$$[J^i, J^j] = i\epsilon_k^{ij} J^k, \quad (\text{III.1})$$

где  $\epsilon_k^{ij} = (-1)^P$ ,  $P$  — четность последовательности  $(ijk)$  относительно последовательности  $(1\ 2\ 3)$ .

Оператор Казимира  $\mathbf{J}^2 = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2$  коммутирует с генераторами. Конечномерные унитарные неприводимые представления этой алгебры характеризуются собственными значениями оператора Казимира  $\mathbf{J}^2 = j(j+1)$ , где  $j$  — целое или полуцелое. Они соответствуют неприводимым унитарным представлениям группы  $SU(2)$  (унитарных, унимодулярных матриц  $2 \times 2$ ), а для описания представлений  $O(3)$  необходимы только целые значения  $j$ . Действительно, хорошо известная реализация алгебры (III.1) дается представлением генераторов в виде бесконечномерных матриц:

$$J^i = \epsilon_{jk}^i x^k p^j, \quad [p^i, x^j] = -i\delta_{ij}, \quad (\text{III.2})$$

действующих в гильбертовом пространстве функций  $\psi(x)$ . Такая реализация приводит только к целым значениям  $j$ .

Непрерывная однородная группа Лоренца представляет собой шестипараметрическую группу, образованную генераторами  $J^i, K^i$ ;  $J^i$  — генераторы группы вращений  $O(3)$ , их алгебра дается уравнением (III.1). Генераторы лоренцева поворота  $K^i$  соответствуют поворотам на инфинитезимальный мнимый угол в плоскости  $(x^i, it)$ , которая ортогональна плоскости двух других пространственных координат, т. е. они представляют собой генераторы бесконечно малых преобразований Лоренца. Перестановочные соотношения для них таковы:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon_k^{ij} J^k, \quad (\text{III.3})$$

$$[J^i, K^j] = i\epsilon_k^{ij} K^k, \quad (\text{III.3}')$$

$$[K^i, K^j] = -i\epsilon_k^{ij} J^k. \quad (\text{III.3}'')$$

В соотношении (III.3') выражается то обстоятельство, что  $\mathbf{K}$  — вектор. Перейдем к явно ковариантным обозначениям, введя антисимметричный

тензор  $M^{\mu\nu}$ , так что  $M^{ij} = -\varepsilon_k^{ij} J^k$ ,  $M^{i0} = K^i$ , т. е.

$$M^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -K^1 & -K^2 & -K^3 \\ K^1 & 0 & -J^3 & J^2 \\ K^2 & J^3 & 0 & -J^1 \\ K^3 & -J^2 & J^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь совокупность равенств (III.3) выглядит следующим образом:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i \{g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma}\}. \quad (\text{III.4})$$

Знак «минус» в уравнении (III.3') имеет глубокий смысл. Он связан с тем, что группа Лоренца некомпактна, т. е. интеграл по инвариантной мере, взятый по всему групповому многообразию, расходится. Поясним это. Четырехмерная группа вращений  $O(4)$  — это шестипараметрическая группа, параметры которой — вещественные углы вращения, и алгебра ее генераторов отличается от алгебры группы Лоренца «только» знаком в последней формуле (III.3'). Очевидно, что  $O(4)$  — компактная группа, связанная с вещественными поворотами. Группу Лоренца можно формально получить, если ввести три мнимых угла (соответственно преобразованиям Лоренца по трем координатным осям); но тогда при интегрировании по углам вместо пределов  $-1$  и  $+1$  кое-где появятся пределы  $1$  и  $\infty$ , что, как уже указывалось, приведет к расходимости интеграла по инвариантной мере.

Если положить

$$K = iB, \quad (\text{III.5})$$

то алгебра Лоренца формально станет идентичной алгебре группы  $O(4)$ :

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] &= i\varepsilon_k^{ij} J^k, \\ [J^i, B^j] &= i\varepsilon_k^{ij} B^k, \\ [B^i, B^j] &= i\varepsilon_k^{ij} J^k. \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Это, конечно, не означает, что прикосновением волшебной палочки мы некомпактную группу превратим в компактную группу  $O(4)$ . Компактная группа имеет унитарные конечномерные представления (и поэтому генераторы ее представляются эрмитовыми конечномерными матрицами), а некомпактная не может иметь унитарных конечномерных представлений. Если не заботиться об унитарности, то благодаря соотношению (III.5), любое представление группы  $O(4)$  дает нам представление генераторов группы Лоренца. Проблема в следующем: представим ли генератор  $B$  или  $K$  унитарными эрмитовыми матрицами? В случае конечномерных унитарных представлений группы  $O(4)$ , которые мы исследуем, оператор  $B$ , конечно, эрмитов и, следовательно, оператор  $K$  антиэрмитов. Поэтому мы и приходим к неунитарным представлениям группы Лоренца.

Рассмотрим алгебру (III.6). Нетрудно убедиться, что два вектора

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2}(J + B), \\ M_2 &= \frac{1}{2}(J - B) \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

образуют две независимые алгебры группы  $SU(2)$ :

$$\begin{aligned} [M_1^i, M_1^j] &= i\varepsilon_k^{ij} M_1^k, \\ [M_2^i, M_2^j] &= i\varepsilon_k^{ij} M_2^k, \\ [M_1^i, M_2^j] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Отметим, что, хотя векторы  $M_1$  и  $M_2$  преобразуются независимо при преобразованиях Лоренца, оператор четности переставляет  $M_1$  и  $M_2$ , что видно из векторного характера величины  $V$  и аксиально-векторного характера величины  $J$ .

Величины  $M_1^2$  и  $M_2^2$  инвариантны относительно непрерывных преобразований Лоренца, и их собственными значениями можно характеризовать представление группы Лоренца.

Замечая, что алгебра (III.6) изоморфна алгебре (III.8) группы  $SU(2) \otimes SU(2)$ , получаем классификацию неприводимых конечномерных представлений алгебры (III.6) по собственным значениям операторов Казимира  $M_1^2 = j_1(j_1 + 1)$ ,  $M_2^2 = j_2(j_2 + 1)$ , где  $j_1$  и  $j_2$  — целые и полужелые положительные числа. Следовательно, мы будем сопоставлять конечномерным неприводимым представлениям группы Лоренца пару целых или полужелых чисел  $(j_1, j_2)$ . Такие представления неунитарны; это явствует из того, что генераторы  $V$  представляются эрмитовыми матрицами ( $V = M_1 - M_2$ ), а генераторы  $K$  — нет. Операция четности, однако, не может быть описана в этих представлениях (если  $j_1$  не равно  $j_2$ ). Чтобы включить также и пространственную инверсию, необходимо использовать суперпозицию двух представлений ( $j_1 \neq j_2$ ):

$$(j_1, j_2) \oplus (j_2, j_1), \quad (\text{III.9})$$

Наконец, вопрос о том, какие представления группы вращений содержатся в одном таком представлении, легко решить, если вспомнить, что

$$J = M_1 + M_2. \quad (\text{III.10})$$

Согласно теореме о сложении двух угловых моментов, значения углового момента меняются от  $M = |j_1 - j_2|$  до  $N = j_1 + j_2$ . Каждое представление группы  $SU(2)$  появляется один раз (дважды в представлениях (III.9) вследствие удвоения четности). Единственные представления, содержащие значения углового момента с одной четностью, отвечают  $M = 0$ , или  $j_1 = j_2$ . Угловые моменты, содержащиеся в таких представлениях, все имеют натуральную или ненатуральную четности. Такие представления, для которых  $N$  наверняка целые, могут быть получены из хорошо известного представления

$$M^{\mu\nu} = x^\nu p^\mu - x^\mu p^\nu, \quad [p^\mu, x^\nu] = ig^{\mu\nu}. \quad (\text{III.11})$$

Определим, наконец, инварианты

$$F = M_1^2 + M_2^2 = \frac{1}{2}(J^2 + V^2) = \frac{1}{2}(J^2 - K^2), \\ G = i(M_1^2 - M_2^2) = iJB = JK. \quad (\text{III.12})$$

Операторы  $F$  и  $G$  могут быть представлены в явно ковариантной форме:

$$F = \frac{1}{4} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \\ G = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\mu\nu} M^{\rho\sigma}. \quad (\text{III.13})$$

Инварианты  $F$  и  $G$  следующим образом выражаются через  $N$  и  $M$ :

$$F = \frac{1}{2}[N(N + 2) + M^2], \\ G = iM(N + 1). \quad (\text{III.14})$$

Представлению (III.11) соответствуют значения  $G = 0$  и в силу уравнения (III.14) также  $M = 0$ . Базисные функции этих представлений выражаются через полиномы Гегенбауэра [18].

## 2. Слабые и электромагнитные токи

### § 1. Введение

Данная глава посвящена предварительному исследованию вопроса о роли токов в физике элементарных частиц.

Мы займемся проблемой конструирования подходящего лагранжиана для слабых и электромагнитных взаимодействий, а также кратко остановимся на их общих свойствах, правилах отбора и т. д.

Окончательная картина, которая вырисовывается в результате такого исследования, оказывается простой и приятной, коль скоро мы отречаемся, по крайней мере в лептонном случае, от более глубокого понимания теории. Тогда нам приходится признать, что в квантовой электродинамике достигнуто мирное сосуществование теории с ее расходимостями, а в области слабых взаимодействий теоретику доступен только низший порядок теории возмущений. Точно так же мы не будем затрагивать и вопрос о том, что мюон — это, по-видимому, тяжелый электрон, а промежуточный бозон (предполагаемый переносчик слабого взаимодействия), по-видимому, отсутствует. Поскольку же при работе в низшем порядке по электромагнитной и слабой константам связи эти проблемы удастся оставить в стороне, многоинтересного может быть выяснено об адронном аспекте рассматриваемых явлений. Это именно та область, где начиная с 1960 г. наблюдается действительный прогресс, и этому вопросу в основном и посвящена вся наша книга (и, в частности, данная глава).

#### 1. Токи и заряды при лагранжевом методе

Много ценных идей, важных для дальнейшего, может дать анализ теоретико-полевых моделей. Поэтому мы кратко напомним некоторые положения лагранжева метода и с самого начала установим ряд фундаментальных соотношений для токов и их дивергенций.

Допустим, что система описывается лагранжевой плотностью  $\mathcal{L}$ , которая представляет собой функцию набора  $\{\varphi\}$  независимых полей  $\varphi_r(x)$  и набора  $\{\partial_\mu\varphi\}$  их первых производных

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{\varphi\}, \{\partial_\mu\varphi\}). \quad (2.1)$$

Тогда поля  $\varphi_r(x)$  удовлетворяют уравнениям движения Эйлера — Лагранжа

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi_r(x)]} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r(x)}. \quad (2.2)$$

Канонически-сопряженные импульсы определим обычным образом:

$$\Pi_r'(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi_r)}, \quad (2.3)$$

и, наконец, предположим, что выполняются канонические коммутационные соотношения <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} [\varphi_r(x, t), \varphi_s(y, t)] &= 0, \\ [\varphi_r(x, t), \Pi_s(y, t)] &= i\delta_{rs}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\ [\Pi_r(x, t), \Pi_s(y, t)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Понятие тока естественным образом появляется в рамках лагранжева метода при рассмотрении локальных инфинитезимальных калибровочных преобразований полей  $\varphi_r(x)$ . Введем набор независимых бесконечно малых функций  $x$ ,  $\varepsilon_\alpha(x)$  и определим калибровочное преобразование полей

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi'_r(x) = \varphi_r(x) - i\varepsilon_\alpha(x) F_r^\alpha(\{\varphi\}), \quad (2.5)$$

где производится суммирование по индексу  $\alpha$ . Такое преобразование приводит к вариации лагранжевой плотности

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r} \delta\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)} \partial_\mu\delta\varphi_r. \quad (2.6)$$

Подставив в формулу (2.6) явное выражение для  $\delta\varphi_r$ , с учетом уравнений движения (2.2), получим выражение

$$\delta\mathcal{L} = -i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)} F_r^\alpha(\{\varphi\}) \partial_\mu\varepsilon_\alpha(x) + \varepsilon_\alpha(x) \partial_\mu \left\{ -i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)} F_r^\alpha(\{\varphi\}) \right\}. \quad (2.7)$$

Такая форма выражения для  $\delta\mathcal{L}$  наводит на мысль, что можно ввести набор «токов»:

$$j_\mu^\alpha(x) = -i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\varphi_r)} F_r^\alpha(\{\varphi\}). \quad (2.8)$$

Тогда выражение (2.7) может быть переписано так:

$$\delta\mathcal{L} = j_\mu^\alpha(x) \partial^\mu\varepsilon_\alpha(x) + \varepsilon_\alpha(x) \partial^\mu j_\mu^\alpha(x). \quad (2.9)$$

Следовательно, ток можно ввести также в виде

$$j_\mu^\alpha(x) = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial[\partial^\mu\varepsilon_\alpha(x)]}. \quad (2.10)$$

Тогда для его 4-дивергенции получим

$$\partial^\mu j_\mu^\alpha(x) = \frac{\partial\delta\mathcal{L}}{\partial\varepsilon_\alpha(x)}. \quad (2.11)$$

Формула (2.11) особенно удобна: она позволяет сразу вычислять дивергенцию токов, коль скоро известно  $\delta\mathcal{L}$ , без какого-либо дальнейшего использования уравнений движения.

Из формулы (2.9) следует фундаментальная теорема (теорема Нётер): если лагранжиан инвариантен по отношению к совокупности калибровочных преобразований с постоянными параметрами (т. е.  $\varepsilon_\alpha$  не зависит от  $x$ ), то с каждым  $\varepsilon_\alpha$  связан ток, дивергенция которого равна нулю:

$$\partial^\mu j_\mu^\alpha(x) = 0. \quad (2.12)$$

Из уравнения (2.12) следует, что обобщенные «заряды»

$$Q^\alpha = \int j_0^\alpha(x) d^3x \quad (2.13)$$

не зависят от времени. Поэтому их собственные значения — хорошие квантовые числа системы. В самом деле, если ток удовлетворяет обычным тре-

<sup>1)</sup> Для простоты мы говорим о полях так, как если бы они были бозонными полями. Если имеются также фермионные поля, то канонические коммутаторы заменяются каноническими антикоммутаторами и в ходе дальнейших рассуждений ничто не меняется.

бованиям на бесконечности, то

$$\frac{dQ^\alpha}{dt} = \int d^3x \frac{\partial j_0^\alpha(x)}{\partial t} = \int d^3x (\partial^0 j_0^\alpha + \nabla \mathbf{j}^\alpha) = \int d^3x \partial^\mu j_\mu^\alpha(x), \quad (2.14)$$

и, таким образом, с учетом уравнения непрерывности (2.12) имеем

$$\frac{dQ^\alpha}{dt} = 0. \quad (2.15)$$

Ток, удовлетворяющий уравнению непрерывности (2.12), будем называть **сохраняющимся**.

Наиболее интересные случаи, которые и будут нами рассмотрены, относятся к линейным инфинитезимальным калибровочным преобразованиям, т. е. к преобразованиям вида

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi'_r(x) = \varphi_r(x) - i\varepsilon_\alpha(x) l_{rs}^\alpha \varphi_s(x), \quad (2.16)$$

где  $l_{rs}^\alpha$  — константы и производится суммирование по индексу  $s$ . В этом случае выражение (2.8) для тока записывается так:

$$j_\mu^\alpha(x) = -i l_{rs}^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi_r)} \varphi_s(x), \quad (2.17)$$

а соответствующий заряд имеет вид

$$Q^\alpha(t) = -i l_{rs}^\alpha \int \Pi_r(x) \varphi_s(x) d^3x. \quad (2.18)$$

Согласно теореме Нётер, оператор заряда не зависит от времени, если  $j_\mu^\alpha$  — сохраняющийся ток.

Формула (2.18), в которой заряд  $Q^\alpha$  в явном виде выражается через поля и канонически сопряженные импульсы, вместе с каноническими коммутационными соотношениями (2.4) дает возможность вычислить

$$[Q^\alpha(t), \varphi_r(\mathbf{x}, t)] = -l_{rs}^\alpha \varphi_s(\mathbf{x}, t). \quad (2.19)$$

Это — очень важное коммутационное соотношение, так как оно показывает, что  $Q^\alpha(t)$  есть генератор инфинитезимального калибровочного преобразования (2.16) с постоянными  $\varepsilon_\alpha$ . Если рассматривать поля  $\varphi_r(x)$  как операторы в гильбертовом пространстве, то это преобразование требует введения унитарного оператора

$$U = \exp(i\varepsilon_\alpha G^\alpha), \quad (2.20)$$

где оператор  $G^\alpha$  эрмитов, если  $\varepsilon_\alpha$  (как мы и будем считать) — вещественно. Тогда

$$\varphi'_r(x) = \exp(i\varepsilon_\alpha G^\alpha) \varphi_r(x) \exp(-i\varepsilon_\alpha G^\alpha) = \varphi_r(x) + i\varepsilon_\alpha [G^\alpha, \varphi_r(x)] + O(\varepsilon^2). \quad (2.21)$$

Из преобразований (2.16) и инфинитезимальных преобразований (2.21) с постоянными  $\varepsilon_\alpha$  следует, что

$$[G^\alpha, \varphi_r(x)] = -l_{rs}^\alpha \varphi_s(x). \quad (2.22)$$

Сравнение с (2.19) показывает, что мы можем отождествить генератор  $G^\alpha$ , соответствующий бесконечно малому калибровочному преобразованию при постоянных  $\varepsilon_\alpha$ <sup>1)</sup>, с зарядом  $Q^\alpha(t)$  [формула (2.18)].

<sup>1)</sup> В случае калибровочных преобразований, зависящих от  $x$ , корректным обобщением оператора (2.20) является оператор  $U = \exp[iG(\varepsilon)]$ , который дает

$$[G(\varepsilon), \varphi_r(x)] = -\varepsilon_\alpha(x) l_{rs}^\alpha \varphi_s(x).$$

Тогда из локальных коммутационных соотношений

$$[j_0^\alpha(\mathbf{x}, t), \varphi_r(\mathbf{y}, t)] = -l_{rs}^\alpha \varphi_s(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

мы видим, что в качестве  $G(\varepsilon)$  можно взять

$$G(\varepsilon) = \int \varepsilon_\alpha(x) j_0^\alpha(x) d^3x.$$



При рассмотрении нескольких инфинитезимальных преобразований, не зависящих от  $x$ , фундаментальную роль играют коммутаторы между генераторами, т. е. между зарядами  $Q^\alpha(t)$ . Используя явный вид зарядов (2.18) и канонические коммутационные правила (2.4), легко получить

$$[Q^\alpha(t), Q^\beta(t)] = -i(l_{rs}^{\alpha\beta} - l_{rt}^{\beta\alpha}) \int \Pi_r(x) \varphi_s(x) d^3x. \quad (2.23)$$

Величина в правой части равенства (2.23) обнаруживает замечательное сходство с зарядом [формула (2.18)], но приводится к нему только в том случае, если константы  $l_{rs}^\alpha$ , содержащиеся в калибровочных преобразованиях (2.16), удовлетворяют соотношению

$$l_{rs}^{\alpha\beta} - l_{rt}^{\beta\alpha} = C_{\gamma}^{\alpha\beta} l_{rs}^{\gamma}, \quad (2.24)$$

где  $C_{\gamma}^{\alpha\beta}$  — произвольные константы. Если соотношение (2.24) выполняется, то равенство (2.23) имеет вид

$$[Q^\alpha(t), Q^\beta(t)] = C_{\gamma}^{\alpha\beta} Q^{\gamma}(t), \quad (2.25)$$

т. е. заряды  $Q^\alpha$  образуют замкнутую алгебру Ли<sup>1)</sup>.

Важно уяснить себе, что в этом случае константы  $l_{rs}^\alpha$  можно рассматривать как  $rs$ -элементы матрицы  $L^\alpha$  в  $N$ -мерном пространстве [ $r, s = 1, \dots, N$ , где  $N$  — число независимых полей, на которые действует калибровочное преобразование (2.16)]:

$$l_{rs}^\alpha = (L^\alpha)_{rs}. \quad (2.26)$$

В таких обозначениях соотношение (2.24) имеет вид

$$[L^\alpha, L^\beta] = C_{\gamma}^{\alpha\beta} L^{\gamma}, \quad (2.27)$$

выражая то обстоятельство, что матрицы  $L^\alpha$  являются представлением размерности  $N$  для генераторов алгебры Ли (2.25). Пользуясь обозначением (2.26), можем переписать калибровочное преобразование (2.16) для постоянных  $\varepsilon_\alpha$  в более компактной форме

$$\varphi_r(x) \rightarrow \varphi_r'(x) = \exp(-i\varepsilon_\alpha L^\alpha) \varphi_r(x). \quad (2.28)$$

Все сказанное нами относительно формулы (2.24) имеет очень важное значение. Мы показали, что инвариантность лагранжиана относительно калибровочных преобразований, связанных с группой унитарных симметрий, позволяет ввести набор сохраняющихся зарядов, которые являются генераторами алгебры Ли этой группы.

## § 2. Лептонные токи

Мы отводим целый параграф лептонным токам по двум причинам. Во-первых, лептонные токи с их специфическими свойствами идеально подходят для роли пробных тел при изучении электромагнитных и слабых взаимодействий адронов. Другими словами, если пренебречь высшими порядками по электромагнитной и слабой константам связи, то лептонные токи действуют как внешние поля, которые удобно использовать для изучения адронной вершины, и действительно, долгое время теория слабых взаимодействий была теорией полулептонных процессов, подобных  $\beta$ -распаду<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> При этом постоянные  $C_{\gamma}^{\alpha\beta}$  уже не могут быть произвольными — они должны удовлетворять коммутационным соотношениям, аналогичным (2.25), следующим из тождества Якоби для  $Q^\alpha$ . — Прим. ред.

<sup>2)</sup> Хотя первые намеки на несохранение четности были получены из нелептонных распадов, таких, как  $K \rightarrow 2\pi$ .

Таким образом, сначала нужно изучить простейший из участвующих во взаимодействии токов.

Во-вторых, поскольку лептоны можно рассматривать как «голые» барионы, мы можем попытаться отделить те свойства, которые фундаментальны и остаются неизменными при включении сильных взаимодействий, от тех свойств, которые при этом изменяются. В частности, можно задаться вопросом, существуют ли универсальные характеристики лептонов и барионов, которые сохранялись бы в любой более или менее реальной теории.

## 1. Электромагнитный лагранжиан и свойства инвариантности

Мы начнем с электромагнитного лептонного тока, скажем электронного тока. Как хорошо известно, электромагнитный ток естественным образом вводится в выражении для взаимодействия заряженной частицы с фотонами. Обычный способ построения такого выражения основан на градиентной инвариантности фотонного поля  $\mathcal{A}_\mu(x)$ . Она состоит в том, что физические следствия теории не изменяются, если вместо  $\mathcal{A}_\mu(x)$  взять  $\mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu \varepsilon(x)$ . Следовательно, если мы имеем лагранжиан, то правило таково: электромагнитное взаимодействие вводится заменой  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu \mp ie \mathcal{A}_\mu(x)$  для каждой заряженной частицы.

В частности, в случае свободного электрона, описываемого лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi + \text{с.}, \quad (2.29)$$

подстановка  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ie \mathcal{A}_\mu$  вводит взаимодействие <sup>1)</sup>

$$\mathcal{L}_{\text{эл.-м}} = e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \mathcal{A}^\mu = e j_\mu \mathcal{A}^\mu. \quad (2.30)$$

Указанное правило можно назвать «минимальным» с точки зрения требований простоты <sup>2)</sup>.

Нам хотелось бы особенно подчеркнуть то обстоятельство, что дивергенция тока  $j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$  равна нулю:

$$\partial^\mu j_\mu(x) = 0. \quad (2.31)$$

Из уравнения непрерывности (2.31) вытекает закон сохранения оператора электрического заряда <sup>3)</sup>

$$Q = \int d^3x j_0(x, t), \quad (2.32)$$

а именно

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad (2.33)$$

если, конечно,  $j_\mu$  удовлетворяет обычным требованиям на бесконечности.

<sup>1)</sup> Мы принимаем  $e = + (4\pi/137)^{1/2}$ .

<sup>2)</sup> Пользуясь, например, неоднозначностью в определении первоначальной плотности лагранжиана, легко добавить более сложные заведомо градиентно-инвариантные члены типа взаимодействия Паули  $\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi \partial^\mu \mathcal{A}^\nu$ . В книге Сакураи [155] приведен пример, принадлежащий Вентцелю: к  $\mathcal{L}_0$  можно добавить 4-дивергенцию вида  $\lambda \partial_\mu (\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \partial_\nu \psi)$ , и тогда правило  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ie \mathcal{A}_\mu$  дает новые члены типа Паули. Таким образом, требование простоты относится и к исходному лагранжиану.

<sup>3)</sup> Более общим определением  $Q$  является  $Q = \int_\sigma j_\mu(x) d\sigma^\mu$ , где  $\sigma$  — пространственно-подобная поверхность. Свойство сохранения эквивалентно утверждению, что  $Q$  не зависит от  $\sigma$ . Поэтому  $Q$  является лоренцевым скаляром.

Уравнение (2.31) мы будем называть «законом сохранения электромагнитного тока». В нашем примере условие (2.31) прямо следует из уравнений движения для  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ :

$$\begin{aligned} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi &= -e\gamma_\mu \mathcal{A}^\mu \psi, \\ i\partial^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu + m\bar{\psi} &= e\bar{\psi} \gamma_\mu \mathcal{A}^\mu \end{aligned} \quad (2.34)$$

в полной аналогии со случаем классической электродинамики, где уравнение непрерывности является следствием уравнений Максвелла для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Полезно, однако, вывести его независимым и более общим методом, основываясь на свойствах инвариантности теории.

Применим общие рассуждения, проведенные в § 1, п. 1, к простому случаю фермиона, описываемого лагранжевой плотностью (2.29). Лагранжиан  $\mathcal{L}_0$ , очевидно, инвариантен относительно калибровочных преобразований с постоянным параметром  $\varepsilon$ :  $\psi \rightarrow \exp(-i\varepsilon)\psi$ ,  $\bar{\psi} \rightarrow \exp(i\varepsilon)\bar{\psi}$ , а при  $\varepsilon$ , зависящем от  $x$ , находим

$$\delta \mathcal{L}_0 = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \partial^\mu \varepsilon(x), \quad (2.35)$$

и, следовательно, соответствующий ток есть

$$j_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x), \quad \text{причем } \partial^\mu j_\mu(x) = 0. \quad (2.36)$$

Таким образом, ток, связанный с  $\mathcal{A}_\mu$  в электромагнитном взаимодействии (2.30), тождествен току, порожденному локальными фазовыми преобразованиями. Кроме того, отсюда следует, что замена  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ie\mathcal{A}_\mu$  гарантирует инвариантность полного лагранжиана  $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{эл.-м}}$  при одновременном преобразовании

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \exp[-ie\varepsilon(x)]\psi(x), \\ \mathcal{A}_\mu(x) &\rightarrow \mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu \varepsilon(x). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Нужно иметь в виду, однако, что возможность определения (сохраняющегося) тока посредством калибровочных преобразований не зависит от существования векторной частицы, взаимодействующей с этим током и обладающей нужными трансформационными свойствами. В самом деле, существование сохраняющегося тока есть проявление инвариантности лагранжиана, а взаимодействие с физической частицей — это дополнительное свойство, которое может привести к следствиям динамического характера, таким, как низкоэнергетические теоремы для физических амплитуд. К этому вопросу мы еще вернемся.

## 2. Полный лептонный лагранжиан

Теперь рассмотрим все лептоны и их полный лагранжиан. В настоящее время известно 4 лептона:  $\mu^-$ ,  $e^-$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_e$ , а также соответствующие античастицы  $\mu^+$ ,  $e^+$ ,  $\bar{\nu}_\mu$ ,  $\bar{\nu}_e$ .

Полный лагранжиан, который можно написать с учетом электромагнитных и слабых взаимодействий, имеет вид <sup>1)</sup>

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{эл.-м}} + \mathcal{L}_{\text{слаб}},$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \{ \bar{\mu} (i\gamma\partial - m_\mu) \mu + \bar{e} (i\gamma\partial - m_e) e + \bar{\nu}_\mu i\gamma \partial \nu_\mu + \bar{\nu}_e i\gamma \partial \nu_e \} + \text{э.с.}, \quad (2.38)$$

$$\mathcal{L}_{\text{эл.-м}} = e \{ \bar{\mu} \gamma_\lambda \mu + \bar{e} \gamma_\lambda e \} \mathcal{A}^\lambda,$$

где массы нейтрино положены равными нулю. Что же касается слабых взаимодействий, то, исходя из имеющейся экспериментальной информации,

<sup>1)</sup> Выписывая в явном виде произведения полевых операторов, мы всегда подразумеваем надлежащую антисимметризацию гейзенберговских полей.

мы приходим к следующей структуре для  $\mathcal{L}_{\text{слаб}}$ :

$$\mathcal{L}_{\text{слаб}} = -\frac{G}{\sqrt{2}} l_{\lambda}^{\dagger}(x) l^{\lambda}(x). \quad (2.39)$$

Здесь  $l^{\lambda}(x)$  — так называемый слабый лептонный ток, который определяется следующим образом:

$$l^{\lambda}(x) = \bar{e}(x) \gamma^{\lambda} (1 - \gamma^5) \nu_e(x) + \bar{\mu}(x) \gamma^{\lambda} (1 - \gamma^5) \nu_{\mu}(x) = l_{\text{вект}}^{\lambda} - l_{\text{акс}}^{\lambda} \equiv l_V^{\lambda} - l_A^{\lambda}. \quad (2.40)$$

Различные члены лагранжиана  $\mathcal{L}_{\text{слаб}}$  описывают, кроме  $\mu$ -распада ( $\mu^{-} \rightarrow e^{-} + \tilde{\nu}_e + \nu_{\mu}, \mu^{+} \rightarrow e^{+} + \nu_e + \tilde{\nu}_{\mu}$ ), также индуцируемые слабым взаимодействием процессы рассеяния  $\mu^{-} + \nu_e \rightarrow e^{-} + \nu_{\mu}$ ,  $e^{-} + \tilde{\nu}_e \rightarrow e^{-} + \tilde{\nu}_e$  и т. д. (с той же самой константой связи).

Ниже мы рассмотрим по отдельности те свойства полного эффе́ктивного лагранжиана (2.38), которые имеют прямое отношение к поставленным нами целям.

#### а. Сохранение лептонных чисел

Лагранжиан (2.38), очевидно, инвариантен относительно двух независимых калибровочных преобразований с постоянными параметрами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(x) \\ \nu_{\mu}(x) \end{array} \right\} \rightarrow \exp(-i\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \mu(x) \\ \nu_{\mu}(x) \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} e(x) \\ \nu_e(x) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e(x) \\ \nu_e(x) \end{array} \right\} \quad (2.41)$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(x) \\ \nu_{\mu}(x) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu(x) \\ \nu_{\mu}(x) \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} e(x) \\ \nu_e(x) \end{array} \right\} \rightarrow \exp(-i\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} e(x) \\ \nu_e(x) \end{array} \right\}. \quad (2.42)$$

Применяя аппарат, развитый в § 1, п. 1 для общего локального преобразования, можно показать, что из этих свойств инвариантности лагранжиана  $\mathcal{L}$  следует существование двух сохраняющихся векторных токов:

$$j_{\lambda}^{(\mu)} = \bar{\mu} \gamma_{\lambda} \mu + \bar{\nu}_{\mu} \gamma_{\lambda} \nu_{\mu} \quad (2.43)$$

и

$$j_{\lambda}^{(e)} = \bar{e} \gamma_{\lambda} e + \bar{\nu}_e \gamma_{\lambda} \nu_e. \quad (2.44)$$

Соответствующие сохраняющиеся заряды — это так называемые мюонные и электронные числа

$$\begin{aligned} Q^{(\mu)} &= \int j_0^{(\mu)}(x) d^3x = N_{\mu^{-}} + N_{\nu_{\mu}} - (N_{\mu^{+}} + N_{\tilde{\nu}_{\mu}}), \\ Q^{(e)} &= \int j_0^{(e)}(x) d^3x = N_{e^{-}} + N_{\nu_e} - (N_{e^{+}} + N_{\tilde{\nu}_e}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Поэтому лептонам можно приписать два хороших квантовых числа  $q^{(\mu)}$ ,  $q^{(e)}$ :

$$\begin{aligned} q^{(e)} &= \begin{cases} 1 & \text{для } e^{-}, \nu_e, \\ -1 & \text{для } e^{+}, \tilde{\nu}_e, \end{cases} \text{ нуль в иных случаях;} \\ q^{(\mu)} &= \begin{cases} 1 & \text{для } \mu^{-}, \nu_{\mu}, \\ -1 & \text{для } \mu^{+}, \tilde{\nu}_{\mu}, \end{cases} \text{ нуль в иных случаях.} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Важно уяснить себе ту «кинематическую» роль, которую играют введенные выше заряды при классификации частиц. Конечно, сохранение мюонного и электронного зарядов приводит к выполнению правил отбора  $\Delta q^{(\mu)} = \Delta q^{(e)} = 0$ , которые, в частности, запрещают переход  $\mu \rightarrow e + \gamma$ , что могло бы быть легко осуществлено введением в лагранжиан взаимодействия типа Паули  $i\bar{e}\sigma_{\mu\nu}\mu F^{\mu\nu}$ .

### б. $\mu$ — $e$ -универсальность

Мюон и электрон удивительно (и загадочно) сходны во всех отношениях, кроме массы, и это выражено в самом лагранжиане (2.38), так как по построению он инвариантен при замене <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned}\mu &\leftrightarrow e, \\ \nu_\mu &\leftrightarrow \nu_e, \\ m_\mu &\leftrightarrow m_e.\end{aligned}\quad (2.47)$$

В частности, мюон и электрон входят в лагранжиан слабого взаимодействия абсолютно симметрично и характеризуются одной и той же константой связи. Благодаря этому однозначно определяется, например, теоретическое отношение вероятностей распадов  $\pi_{\mu 2}/\pi_{e 2}$ , которое дается простой формулой [66, стр. 469; 69, стр. 271]

$$\frac{\Gamma(\pi \rightarrow e\nu_e)}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu_\mu)} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} (0,965) \approx 1,23 \cdot 10^{-4}. \quad (2.48)$$

Множитель 0,965 связан с электромагнитными поправками. Экспериментальное же значение [67] равно  $(1,247 \pm 0,028) \cdot 10^{-4}$ . Аналогичным образом  $\mu$  —  $e$ -универсальность подтверждается вычислениями гиромагнитного отношения мюона и электрона, основанными на обычном выражении для взаимодействия электрон-позитронного и фотонного полей.

### в. Специфические свойства лагранжиана слабых взаимодействий

Теперь кратко остановимся на специфических свойствах лагранжиана  $\mathcal{L}_{\text{слаб}}$  [формулы (2.39) и (2.40)]. Ограничения, свойственные локальной связи (2.39) (например, ее несоответствие с требованиями унитарности при высоких энергиях), хорошо известны. Столь же хорошо известна и гипотеза о существовании промежуточного бозона <sup>2)</sup>. Нашей же задачей является исследование слабой вершины адрона, и в этом случае вполне допустимо предположение о точечной структуре лептонных токов, коль скоро высшими порядками по слабым взаимодействиям в дальнейшем мы всегда будем пренебрегать.

Константу связи  $G$  можно найти путем анализа распада  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ . После учета радиационных поправок [68] получаем [69, стр. 230]

$$\{\tau^{(\mu)}\}^{-1} = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \left[ 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \left( \pi^2 - \frac{25}{4} \right) \right] \quad (2.49)$$

и, взяв [0]

$$\{\tau^{(\mu)}\}_{\text{эксп}} = (2,1983 + 0,0008) \cdot 10^{-6} \text{ с}, \quad (2.50)$$

находим

$$G = (1,4350 \pm 0,0011) \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3. \quad (2.51)$$

В естественных единицах ( $\hbar = c = 1$ )

$$G \approx 10^{-5} m_N^2, \quad (2.51')$$

причем  $m_N$  — масса нуклона.

Далее, лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{слаб}}$  не инвариантен относительно пространственной инверсии. При этом нарушение четности максимально в том смысле, что  $\gamma_\lambda$  и  $\gamma_\lambda \gamma_5$  входят в  $\mathcal{L}_{\text{слаб}}$  с одинаковым весом. Но если взглянуть с другой точки зрения, то можно сразу же отметить интересную особенность: поскольку лептонный ток имеет вид  $l\gamma_\lambda (1 - \gamma_5) \nu_l$  ( $l = \mu, e$ ), нейтрино всегда появ-

<sup>1)</sup> Иначе говоря, симметрия  $(\mu, \nu_\mu) \leftrightarrow (e, \nu_e)$  нарушается только массовым членом.

<sup>2)</sup> См. книгу Л. Б. Окуня [579]. — *Прим. ред.*

ляются в комбинации  $\nu_L(x) = 1/2 (1 - \gamma_5) \nu(x)$ . На этом основана «двухкомпонентная» теория нейтрино, которая утверждает, что полный лагранжиан зависит только от  $\nu_L(x) = 1/2 (1 - \gamma_5) \nu(x)$  (т. е.  $\gamma_5 \nu_L = -\nu_L$ ), а не от  $\nu_R(x) = 1/2 (1 + \gamma_5) \nu(x)$ .

Поэтому нейтрино оказывается левовинтовой частицей, а антинейтрино — правовинтовой<sup>1)</sup>. Подчеркнем, что, строго говоря, это относится лишь к нейтрино с нулевыми массами, поскольку только тогда  $\mathcal{L}$  будет инвариантом относительно подстановки  $\nu(x) \rightarrow -\gamma_5 \nu(x)$  ( $\gamma_5$ -инвариантность). Данное требование инвариантности позволяет нам также исключить и возможную в принципе связь нейтрино с электромагнитным полем: в самом деле, взаимодействие  $\bar{\nu} \sigma_{\rho\lambda} \nu F^{\rho\lambda}$  меняет свой знак при замене  $\nu \rightarrow -\gamma_5 \nu$ .

Сама по себе теория двухкомпонентного нейтрино еще не приводит к чистой  $V - A$ -связи, поскольку с этой теорией совместима и  $S - P$ -комбинация  $\bar{l}(x) (1 - \gamma_5) \nu_l(x)$  ( $l = \mu, e$ ). Но если потребовать дополнительно, чтобы другие лептоны, по крайней мере в слабых взаимодействиях, также описывались комбинацией  $\bar{l}_L(x) = (1 - \gamma_5) l(x)$ , то  $S - P$ -комбинация будет исключена, ибо в этом случае

$$\bar{l} (1 + \gamma_5) (1 - \gamma_5) \nu_L = 0,$$

тогда как

$$\bar{l} (1 + \gamma_5) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) \nu_l = 2\bar{l} \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) \nu_l.$$

Заметим, что полный лагранжиан не инвариантен относительно замены  $l \rightarrow -\gamma_5 l$  из-за массовых членов. Таким образом, например, левая поляризация электрона не будет полной, а  $\langle \sigma n \rangle = -v/c$ .

### 3. Слабые лептонные токи

Проведенный нами анализ свойств лептонного лагранжиана позволил ввести сохраняющиеся лептонные токи (2.43) и (2.44) (плюс, естественно, электромагнитный ток). Но это не те токи, которые используются при описании слабого взаимодействия лептонов [формула (2.40)], и нам нужно сейчас выяснить, при каких условиях ток  $l^\lambda(x)$  может сохраняться, а лагранжиан — обнаруживать признаки дополнительной, хотя бы и приближенной, симметрии.

С этой целью удобно ввести формализм, подобный изоспиновому, определив полные электронные и мюонные спиноры:

$$\Psi^{(l)}(x) = \begin{pmatrix} l(x) \\ \nu_l(x) \end{pmatrix}; \quad l = \mu, e. \quad (2.52)$$

Пользуясь стандартными матрицами Паули  $\tau_\alpha$ , лептонный лагранжиан можно переписать в виде (электромагнитную часть мы будем опускать)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{l=\mu, e} \left[ \frac{1}{2} (\bar{\Psi}^{(l)} i \gamma \partial \Psi^{(l)} + \text{э. с.}) - m_l \bar{\Psi}^{(l)} \frac{1 + \tau_3}{2} \Psi^{(l)} \right] - \\ & - \frac{G}{\sqrt{2}} \sum_{l, l'=\mu, e} [\bar{\Psi}^{(l)} \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) \tau_+ \Psi^{(l')}] [\bar{\Psi}^{(l')} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \tau_+ \Psi^{(l)}]^\dagger. \end{aligned} \quad (2.53)$$

<sup>1)</sup> Доказательство этого хорошо известно, и мы приведем его для полноты изложения. Уравнение движения для свободного нейтрино имеет вид

$$\gamma_\mu \left( p^\mu / E \right) \nu_L \equiv (\gamma_0 - \gamma_n) \nu_L = 0, \quad n = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}. \quad (I)$$

В то же время равенство  $\gamma_5 \nu_L = -\nu_L$  и уравнение (I) можно переписать в виде

$$-\gamma_0 \gamma_n \gamma_5 \nu_L = \nu_L. \quad (II)$$

Поскольку же в нашем представлении  $\gamma_0 \gamma_n \gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma n & 0 \\ 0 & \sigma n \end{pmatrix}$ , из уравнения (II) следует, что

$$(\sigma n) \nu_L = -\nu_L. \quad (III)$$

Сохраняющиеся лептонные токи, определенные формулами (2.43) и (2.44),

$$j_\lambda^{(l)} = \bar{\Psi}^{(l)} \gamma_\lambda \Psi^{(l)} \quad (l = \mu, e), \quad (2.54)$$

являются скалярами в изоспиновом лептонном пространстве, которое мы только что ввели. Лептонные же токи, используемые при описании слабых взаимодействий, т. е. векторные токи

$$l_{V\lambda}^\pm = \sum_l \bar{\Psi}^{(l)} \gamma_\lambda \tau^\pm \Psi^{(l)} \quad (2.55)$$

и аксиальные токи

$$l_{A\lambda}^\pm = \sum_l \bar{\Psi}^{(l)} \gamma_\lambda \gamma_5 \tau^\pm \Psi^{(l)} \quad (2.56)$$

ведут себя как члены регулярного представления лептонной изоспиновой группы <sup>1)</sup>.

Такие токи в обобщенном виде

$$\begin{aligned} l_{V\lambda}^\alpha &= \sum_l \bar{\Psi}^{(l)} \gamma_\lambda \frac{1}{2} \tau^\alpha \Psi^{(l)}, \\ l_{A\lambda}^\alpha &= \sum_l \bar{\Psi}^{(l)} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{2} \tau^\alpha \Psi^{(l)} \end{aligned} \quad (2.57)$$

не сохраняются. Дело в том, что массовый член и часть лагранжиана (2.53), описывающая слабое взаимодействие, выделяют определенные направления в лептонном изоспиновом пространстве. Это значит, что лагранжиан (2.53) не инвариантен при четных и нечетных преобразованиях, которые переставляют лептоны и порождаются зарядами

$$\begin{aligned} Q_V^\alpha &= \sum_l \int \bar{\Psi}^{(l)} \gamma_0 \frac{1}{2} \tau^\alpha \Psi^{(l)} d^3x, \\ Q_A^\alpha &= \sum_l \int \bar{\Psi}^{(l)} \gamma_0 \gamma_5 \frac{1}{2} \tau^\alpha \Psi^{(l)} d^3x \end{aligned} \quad (2.58)$$

в соответствии с известными законами преобразования

$$\Psi^{(l)} \rightarrow \exp(i\varepsilon_\alpha Q_V^\alpha) \Psi^{(l)} \exp(-i\varepsilon_\alpha Q_V^\alpha) = \exp\left(-i\varepsilon_\alpha \frac{1}{2} \tau^\alpha\right) \Psi^{(l)}, \quad (2.59)$$

$$\Psi^{(l)} \rightarrow \exp(i\varepsilon_\alpha Q_A^\alpha) \Psi^{(l)} \exp(-i\varepsilon_\alpha Q_A^\alpha) = \exp\left(-i\varepsilon_\alpha \frac{1}{2} \tau^\alpha \gamma_5\right) \Psi^{(l)}. \quad (2.59')$$

Поэтому заряды  $Q_V^\alpha$  и  $Q_A^\alpha$  постоянны только в пределе при  $m_e = 0$ ,  $m_\mu = 0$  и  $G = 0$ . Иными словами, токи  $l_{V\lambda}^\alpha$  и  $l_{A\lambda}^\alpha$  лишь «частично сохраняются» в том смысле, что их расходимости пропорциональны  $m_e$ ,  $m_\mu$  или  $G$ .

Частичное сохранение слабых лептонных токов можно проиллюстрировать на примере распадов  $\pi \rightarrow e\nu$ ,  $\pi \rightarrow \mu\nu$ , которые запрещены, если положить  $m_e$ ,  $m_\mu$  равными нулю. В самом деле, в низшем порядке по  $G$  амплитуда распада дается соотношением

$$M(\pi \rightarrow l + \tilde{\nu}_l) \propto G \langle \tilde{\nu}_l | l_\lambda | 0 \rangle \langle 0 | J^\lambda | \pi \rangle \delta^4(p_\pi - p_l - p_{\tilde{\nu}_l}), \quad (2.60)$$

где  $J^\lambda$  — адронный ток <sup>2)</sup>. Из соображений инвариантности можно написать

$$\langle 0 | J^\lambda | \pi \rangle = i f_\pi p_\pi^\lambda = i f_\pi (p_l + p_{\tilde{\nu}_l})^\lambda. \quad (2.61)$$

<sup>1)</sup> Такое представление обычно называют присоединенным (см., например, [580]). — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Как будет показано далее в книге, эффективный лагранжиан для лептонных распадов адронов имеет ток-токовую структуру  $l_\lambda J^\lambda$ .

Мы видим, что интересующий нас матричный элемент пропорционален  $\langle \tilde{\nu}_l | D_l(0) | 0 \rangle$ , где

$$D_l(x) = \partial_\lambda \tilde{l}^\lambda(x) = \partial_\lambda \tilde{l}_V^\lambda(x) - \partial_\lambda \tilde{l}_A^\lambda(x). \quad (2.62)$$

Тогда из уравнения Дирака следует, что

$$\langle \tilde{\nu}_l | D_l(0) | 0 \rangle \propto m_e. \quad (2.63)$$

Это означает, что в пределе при  $m_l = 0$  переход запрещен, т. е.  $D_l = 0$ . Поскольку такое свойство сохранения в данном случае равнозначно  $\gamma_5$ -инвариантности,  $l \rightarrow -\gamma_5 l$ , соотношение (2.63) говорит, что в силу закона сохранения углового момента пион не может распадаться на левовинтовой лептон и правовинтовое нейтрино  $\tilde{\nu}_l$ .

Поэтому результат (2.63) можно рассматривать как очень простое проявление приближенной киральной симметрии лептонов.

### а. Алгебра слабых лептонных зарядов

Посмотрим теперь, каковы важнейшие свойства токов и зарядов, определенных выражениями (2.57) и (2.58). Сначала заметим, что левые лептонные заряды, фигурирующие в слабых взаимодействиях,

$$Q_L^\alpha = \frac{1}{2} (Q_V^\alpha - Q_A^\alpha), \quad (2.64)$$

подчиняются  $SU(2)$ -алгебре:

$$[Q_L^\alpha(t), Q_L^\beta(t)] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} Q_L^\gamma(t) \quad (2.65)$$

( $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$  — антисимметричный тензор Леви-Чивиты). При переходе к сферическим компонентам  $Q_L^\pm = Q_L^1 \pm iQ_L^2$  коммутационные соотношения приобретают вид

$$\begin{aligned} [Q_L^+, Q_L^-] &= 2Q_L^3, \\ [Q_L^3, Q_L^\pm] &= \pm Q_L^\pm. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Заметим, что нейтральная величина

$$Q_L^3 = \frac{1}{2} \int d^3x [\mu^\dagger (1 - \gamma_5) \mu - \nu_\mu^\dagger (1 - \gamma_5) \nu_\mu + e^\dagger (1 - \gamma_5) e - \nu_e^\dagger (1 - \gamma_5) \nu_e]$$

у нас появляется автоматически, хотя ее и не было в гамильтониане слабого взаимодействия (отсутствие слабых нейтральных токов). Иначе говоря, константа связи в члене  $g l_{L\lambda}^3 l_{L\lambda}^3$  равна нулю.

Более того, и это очень важно, данная алгебраическая структура не зависит от инвариантности лагранжиана  $\mathcal{L}$  относительно преобразований, порождаемых зарядами  $Q_L^\alpha$ . Действительно, заряды  $Q_L^\alpha$  подчиняются коммутационным соотношениям (2.65) независимо от того, сохраняются они или нет.

Кроме левых зарядов, использованных при построении слабого гамильтониана, представляет интерес ввести и правые заряды

$$Q_R^\alpha = \frac{1}{2} (Q_V^\alpha + Q_A^\alpha). \quad (2.67)$$

Это соответствует возможности рассматривать отдельно векторные и аксиально-векторные величины. Тогда

$$\begin{aligned} [Q_L^\alpha, Q_L^\beta] &= i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} Q_L^\gamma, \\ [Q_R^\alpha, Q_R^\beta] &= i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} Q_R^\gamma, \\ [Q_L^\alpha, Q_R^\beta] &= 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$



Следовательно, заряды  $Q_L^\alpha, Q_R^\beta$  подчиняются алгебре двух коммутирующих  $SU(2)$ -групп, т. е.  $SU(2) \otimes SU(2)$ -алгебре.

Полная алгебра эквивалентна следующей системе коммутационных соотношений <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} [Q_V^\alpha, Q_V^\beta] &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Q_V^\gamma, \\ [Q_V^\alpha, Q_A^\beta] &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Q_A^\gamma, \\ [Q_A^\alpha, Q_A^\beta] &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Q_V^\gamma. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Может показаться, что все изложенное, хотя и правильно, носит несколько формальный характер, так как приведенные результаты немедленно следуют из явного вида лептонного лагранжиана, но читателю следует иметь их в виду как корректные послышки для дальнейших обобщений.

### § 3. Адронные токи и кварковая модель

#### 1. Взаимодействие адронов и лептонов

Теория, изложенная в предыдущем параграфе, вводит в круг проблем, касающихся только лептонов: это, во-первых, случай квантовой электродинамики, рассматриваемой как теория фотонов и электронов (и мюонов), а во-вторых, слабые взаимодействия с участием нейтрино (например,  $\mu$ -распад).

В то же время в первой главе книги были изложены элементы феноменологического описания чисто адронных взаимодействий, основанного на дисперсионной теории и теории полюсов Редже.

Это естественным образом подводит нас к главной проблеме настоящей книги — к исследованию взаимодействия между адронами и лептонами. Как будет показано позднее, это взаимодействие хорошо описывается эффективным лагранжианом типа ток  $\times$  ток

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = -\frac{G}{\sqrt{2}} J_\mu l^\mu + \text{э. с.}, \quad (2.70)$$

где  $J_\mu$  — адронный ток, причем априори не исключается, что взаимодействие осуществляется промежуточным бозоном. Масса такого бозона, по-видимому, велика (все экспериментальные данные указывают на это). Пока мы имеем дело с малыми передаваемыми импульсами, эффекты, связанные с промежуточным бозоном, неощутимы, а поправками высоких порядков, которые должны быть значительными на малых расстояниях, можно пренебречь.

Конечно, при исследовании взаимодействия между адронами и лептонами мы не будем подходить одинаково к тем и другим. Это объясняется тем, что лептоны участвуют только в электромагнитных и слабых взаимодействиях, которые с точностью до нескольких процентов определяются членами низшего порядка теории возмущений. Таким образом, электронное, мюонное и нейтринное поля в первом приближении можно рассматривать

<sup>1)</sup> При проверке простых одновременных коммутаторов типа (2.68) можно пользоваться следующей формулой: из выражения для канонического антикоммутатора

$$\{\psi_r^\dagger(x, t), \psi_s(y, t)\} = \delta_{rs} \delta^3(x-y)$$

сразу же получаем

$$\begin{aligned} & \int d^3x d^3y [\psi^\dagger(x, t) \Gamma \tau^\alpha \psi(x, t), \psi^\dagger(y, t) \Gamma' \tau^\beta \psi(y, t)] = \\ & = \frac{1}{2} \int d^3x \psi^\dagger(x) ([\Gamma, \Gamma'] \{\tau^\alpha, \tau^\beta\} + \{\Gamma, \Gamma'\} [\tau^\alpha, \tau^\beta]) \psi(x), \end{aligned}$$

где  $\Gamma$  — любая дираковская матрица.

как свободные поля, и их матричные элементы вычисляются элементарно. Поэтому (если забыть о проблеме поправок более высокого порядка) часть нашей задачи, связанная с лептонами, практически решена, ибо в предыдущих параграфах даются точные выражения для лептонных токов.

Вся задача сводится к адронным токам. Даже если бы мы могли выразить их через фундаментальные поля, например в кварковой модели, рассматриваемой в следующем пункте, это не очень много дало бы нам, так как структура кваркового поля совершенно отлична от структуры свободных полей.

Но недавно было выяснено (и в этом важнейшее достижение алгебры токов), что такие явления можно адекватно описать, исходя из общих свойств токов, независимо от того, как эти токи выражаются через поля. Поскольку понятие тока тесно связано со свойствами инвариантности теории, мы отведем несколько следующих разделов кварковой модели, которая позволяет исследовать свойства симметрии сильных взаимодействий и, кроме того, просто и ярко проиллюстрировать способ явного построения адронных токов.

## 2. Кварковая модель

### а. Симметрия $SU(3)$ как симметрия сильных взаимодействий

Поскольку нам предстоит теперь ввести адронные токи, напомним сначала некоторые основные свойства сильных взаимодействий. Прежде всего, сильные взаимодействия сохраняют изоспин  $I$ , его третью компоненту  $I_3$  и гиперзаряд  $Y$ , барионное число  $B$ , а следовательно, и странность  $S$ . Поэтому мы можем классифицировать адронные состояния, приписывая им эти квантовые числа. Зарядовая независимость позволяет использовать изоспин как индекс неприводимого представления группы  $SU(2)$ ; тогда частицы с разными зарядами объединяются вместе как одинаковые с точки зрения сильных взаимодействий.

Далее, сильные взаимодействия обнаруживают приближенную симметрию, выражающуюся в возможности сгруппировать вместе частицы с разной странностью. Хотя частицы, которые мы хотим объединить, довольно сильно различаются по массе, некоторые приближенные следствия такой симметрии проявляются весьма недвусмысленно. Это наводит на мысль о разделении сильных взаимодействий на «сверхсильные» и «умеренно сильные». Сверхсильные взаимодействия были бы инвариантными относительно преобразований, порождаемых внутренней группой симметрии, которая шире, чем изоспиновая группа  $SU(2)$ , а умеренно сильные взаимодействия были бы ответственны за нарушение этой симметрии.

Поскольку мы имеем два аддитивных квантовых числа  $I_3$  и  $Y$ , нам нужна группа ранга 2. В этом смысле наиболее подходящей оказалась группа  $SU(3)$ , которая в настоящее время и рассматривается обычно как приближенная группа симметрии сильных взаимодействий.

При классификации адронов по представлениям группы  $SU(3)$  в один  $SU(3)$ -супермультиплет объединяются  $SU(2)$ -мультиплеты, отличающиеся значениями гиперзаряда. Например, пионы помещаются в тот же самый псевдоскалярный октет, что и  $K$ ,  $\bar{K}$ ,  $\eta$ . Векторные мезоны  $\rho$ ,  $K^*$ ,  $\omega$ ,  $\phi$  заполняют другой октет и связанный с ним синглет. Барионы с квантовыми числами  $J^P = 1/2^+$  хорошо размещаются в октетном представлении, которое содержит нуклон и  $\Lambda^-$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Xi$ -гипероны, тогда как адроны с  $J^P = 3/2^+$ , т. е.  $N^*$ ,  $Y^*$ ,  $\Xi^*$  и  $\Omega^-$ , принадлежат 10-мерному представлению (декаплету). Такая классификация хорошо подтверждается экспериментом. Для состояний с большими массами имеются указания на существование мезонных нонетов (октет и связанный с ним синглет) с квантовыми числами  $J^P = 1^+, 2^+$  и октета барионов  $1/2^-$ . Для этих состояний общая картина еще

не совсем ясна, но есть все основания думать, что  $SU(3)$ -классификация не сказала своего последнего слова.

В приложении I мы приводим сведения о группе  $SU(3)$ , которые потребуются при чтении книги <sup>1)</sup>.

### б. Кварки <sup>2)</sup>

Успех  $SU(3)$ -симметрии в объяснении и описании внутренних свойств элементарных частиц заставил многих физиков задуматься: не существуют ли частицы, соответствующие простейшему представлению этой группы (триплету) <sup>3)</sup>?

Все высшие представления группы  $SU(3)$  можно получить путем разложения прямого произведения определенного числа триплетов. Отсюда сама собой напрашивается мысль о составной модели элементарных частиц, базирующейся на фундаментальном триплете частиц со спином  $1/2$  и с дробными зарядами, т. е. на кварках. Конечно, здесь мы имеем тесную аналогию с ядерной физикой, где успех группы  $SU(2)$  связан с тем, что ядра можно рассматривать как составные частицы, построенные из членов фундаментального дублета  $p, n$ .

Конкретнее, все известные нам барионы (подобно нуклону,  $\Delta$ -резонансу и т. д.) должны быть сконструированы из трех кварков, а все известные мезоны должны состояться из пар кварк — антикварк.

В известном смысле кварковая модель — это современный вариант модели Сакаги [75], в которой фундаментальными частицами были протон, нейтрон и  $\Lambda$ -гиперон. Итак, вводятся три фундаментальных кварка  $q_1, q_2, q_3$  со спином  $1/2$  и с квантовыми числами, приведенными ниже в таблице <sup>4)</sup>.

Кварк	$q_1$	$q_2$	$q_3$
Барионное число $B$	$1/3$	$1/3$	$1/3$
Гиперзаряд $Y$	$1/3$	$1/3$	$-2/3$
Изоспин $I$	$1/2$	$1/2$	0
Третья компонента изоспина $I_3$	$1/2$	$-1/2$	0
Заряд $Q$	$2/3$	$-1/3$	$-1/3$

Система кварк — антикварк ( $q\bar{q}$ ) имеет нулевое барионное число и должна соответствовать мезонам; их относят к  $SU(3)$ -синглетам и октетам,

<sup>1)</sup> Прекрасный обзор с указанием литературы по данному вопросу читатель может найти в работе [74].

<sup>2)</sup> «Three quarks for Muster Mark!  
Sure he has'nt got much of a bark  
and sure any he has it's all beside the mark».  
(Три кварка для Мастера Марка!  
Скверный, конечно, имеет он барк.  
К тому ж и другие барки, видно, не лучшей марки.)

Из «Пожинок по Финнегану» Дж. Джойса.

При переводе этого отрывка с английского оригинала возникают трудности, связанные с тем, что слова «quark» в английском лексиконе нет. Это новое слово, подобное многим другим словам в произведениях Дж. Джойса. Но это слово не является новым в семействе германских языков и имеет свои корни в старогерманском, а также в старославянском языках. В германских языках кварк — скисшее молоко, а в обиходном языке оно означает беспорядок или нечто не имеющее значения. В старом восточногерманском и чешском языках архаической формой этого слова был «kwagog».

(Информацией, содержащейся в этом примечании, мы обязаны нашему ученому другу Дж. Денардо.)

<sup>3)</sup> Полный список литературы по кварковой модели имеется, например, в работах [72, 73, 76]. (См. также [583]. — Прим. ред.)

<sup>4)</sup> Мы следуем здесь триплетной модели Гелл-Манна [70] и Цвейга [71].

поскольку

$$(\bar{q}q) \Rightarrow 3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8.$$

Барионы же должны быть составлены из трех кварков, и, следовательно, они принадлежат представлениям 1, 8 или 10 группы  $SU(3)$ :

$$(qqq) \Rightarrow 3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10.$$

Частицы, которые имеют квантовые числа, не согласующиеся с приведенной выше классификацией (они соответствовали бы комбинации более чем трех кварков), называются «экзотическими». До настоящего времени нет каких-либо ясных экспериментальных данных о их существовании (если не считать, конечно, ядерных изобар).

Даже краткий перечень успехов кварковой модели в систематике барионных и мезонных состояний явно выходит за рамки нашей книги. Мы будем пользоваться кварковой схемой как простейшим  $SU(3)$ -представлением и как моделью при построении особенно простых выражений для адронных токов.

### в. $SU(3)$ -токи и заряды

Введем кварковое поле  $q$  как трехкомпонентный вектор группы  $SU(3)$ , каждая компонента которого является, конечно, обычным четырехкомпонентным спинором группы Лоренца. Лагранжиан записывается в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{вз}}, \quad (2.71)$$

где  $\mathcal{L}_0$  — лагранжиан свободных кварков:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} [\bar{q} (i\gamma\partial - M) q + \text{э. с.}]. \quad (2.72)$$

В выражении (2.72) величину  $M$  следует рассматривать как массовую матрицу в трехмерном пространстве с элементами  $M_{ih} = m_i \delta_{ih}$  (если структура рассматриваемого члена в кварковом пространстве специально не определена, то всегда будет подразумеваться наличие единичного оператора).

Пользуясь аппаратом, развитым в § 1, п. 1, нетрудно убедиться, что свободный лагранжиан инвариантен относительно калибровочного преобразования 1-го рода

$$q \rightarrow \exp(-i\varepsilon) q, \quad (2.73)$$

связанного с сохраняющимся током

$$V_\mu = \bar{q} \gamma_\mu q. \quad (2.74)$$

Таким образом, преобразование (2.73) порождается зарядом

$$Q_B = \int V_0(x) d^3x = N_q - N_{\bar{q}}, \quad (2.75)$$

который не зависит от времени, что гарантирует сохранение кваркового (или барионного) числа. Кварковое поле преобразуется так:

$$q(x) \rightarrow \exp(i\varepsilon Q_B) q(x) \exp(-i\varepsilon Q_B) = \exp(-i\varepsilon) q(x), \quad (2.76)$$

откуда следуют коммутационные соотношения

$$[Q_B, q_i(x)] = -q_i(x). \quad (2.77)$$

Если массы всех кварков одинаковы, то член  $\mathcal{L}_0$  инвариантен также относительно общего калибровочного  $SU(3)$ -преобразования:

$$q_i \rightarrow \exp\left(-i\varepsilon_\alpha \frac{1}{2} \lambda^\alpha\right) q_i = \left(1 - i\varepsilon_\alpha \frac{1}{2} \lambda^\alpha\right)_{ih} q_h + O(\varepsilon_\alpha \varepsilon_\alpha), \quad (2.78)$$

где  $\lambda^\alpha$  — матрицы Гелл-Манна (приложение I). В этом случае имеется восемь сохраняющихся векторных токов:

$$V_\mu^\alpha(x) = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varepsilon_\alpha)} = \bar{q} \gamma_\mu \frac{1}{2} \lambda^\alpha q, \quad (2.79)$$

$$\partial^\mu V_\mu^\alpha(x) = 0.$$

Генераторами преобразования (2.78), определенными соотношением

$$\exp(i\varepsilon_\alpha Q^\alpha) q_h \exp(-i\varepsilon_\alpha Q^\alpha) = \exp\left(-i\varepsilon_\alpha \frac{1}{2} \lambda^\alpha\right) q_h, \quad (2.80)$$

являются восемь не зависящих от времени скалярных зарядов

$$Q^\alpha = \int d^3x V_0^\alpha(x) = \int d^3x q^\dagger(x) \frac{1}{2} \lambda^\alpha q(x). \quad (2.81)$$

Поэтому в соответствии с общими методами § 1, п. 1 мы имеем

$$[Q^\alpha, q_h(x)] = -\left(\frac{1}{2} \lambda^\alpha\right)_{hl} q_l(x). \quad (2.82)$$

Используя точное выражение для зарядов (2.81), можно сразу же убедиться в справедливости соотношения (2.82), если принять также во внимание канонические антикоммутиационные соотношения для кварковых полей:

$$\{q_i(x, t), q_j(y, t)\} = \{q_i^\dagger(x, t), q_j^\dagger(y, t)\} = 0, \quad (2.83)$$

$$\{q_i^\dagger(x, t), q_j(y, t)\} = \delta_{ij} \delta^3(x - y).$$

Группа калибровочных  $SU(3)$ -преобразований, конечно, не является абелевой. Коммутационные соотношения для  $Q^\alpha$  легко можно установить, исходя из выражения (2.81), приведенных выше соотношений (2.83) и коммутационных соотношений для  $\lambda$ -матриц:

$$[\lambda^\alpha, \lambda^\beta] = 2if_{\alpha\beta\gamma} \lambda^\gamma. \quad (2.84)$$

Как и следовало ожидать, мы получаем

$$[Q^\alpha, Q^\beta] = if_{\alpha\beta\gamma} Q^\gamma, \quad (2.85)$$

т. е. заряды  $Q^\alpha$  удовлетворяют алгебре  $SU(3)$ .

Если массы кварков неодинаковы, то массовый член в свободном лагранжиане нарушает симметрию. Вариация лагранжиана при калибровочном преобразовании (2.78) дается выражением

$$\delta \mathcal{L}_0 = V_\mu^\alpha(x) \partial^\mu \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha \partial^\mu V_\mu^\alpha(x). \quad (2.86)$$

Явная форма [токов  $V_\mu^\alpha(x)$  остается прежней:

$$V_\mu^\alpha(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \frac{1}{2} \lambda^\alpha q(x), \quad (2.87)$$

но они теперь не сохраняются, так как их расходимости отличны от нуля:

$$\partial^\mu V_\mu^\alpha(x) = i\bar{q}(x) \left[ M, \frac{1}{2} \lambda^\alpha \right] q(x). \quad (2.88)$$

Используя равенство  $M_{ik} = m_i \delta_{ik}$ , перепишем уравнение (2.88) следующим образом:

$$\partial^\mu V_\mu^\alpha(x) = i\bar{q}_i (m_i - m_k) \left( \frac{1}{2} \lambda^\alpha \right)_{ik} q_k. \quad (2.89)$$

В уравнении (2.89) находит выражение то обстоятельство, что несохранение токов — прямое следствие различия кварков по массам.

Итак, в данном случае плотность лагранжиана не инвариантна относительно калибровочного  $SU(3)$ -преобразования (2.78), т. е. рассматриваемая система не обладает точной  $SU(3)$ -симметрией. Но такие преобразования позволяют нам определить восемь векторных  $SU(3)$ -токов (2.87) и соответствующие заряды

$$Q^\alpha(t) = \int d^3x V_0^\alpha(\mathbf{x}, t) = \int d^3x q^i(\mathbf{x}, t) \frac{1}{2} \lambda^\alpha q(\mathbf{x}, t). \quad (2.90)$$

Отметим, что, хотя эти заряды не являются более константами движения, коммутационные соотношения при равных временах

$$[Q^\alpha(t), Q^\beta(t)] = i f_{\alpha\beta\gamma} Q^\gamma(t) \quad (2.91)$$

не зависят от присутствия в лагранжиане члена, нарушающего симметрию. Другими словами, алгебра  $SU(3)$ , порождаемая зарядами  $Q^\alpha(t)$ , имеет место независимо от сохранения зарядов и справедливости уравнения непрерывности для токов.

До сих пор мы рассматривали токи и заряды для свободных полей. Но существует много видов взаимодействий, которые не изменяют предыдущих результатов. К ним относится «глюонное» взаимодействие, которое описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\text{вв}} = -g\bar{q}(x) \gamma_\mu q(x) G^\mu(x), \quad (2.92)$$

где  $G^\mu(x)$  — скалярное относительно группы  $SU(3)$  поле. Поскольку  $\mathcal{L}_{\text{вв}}$  не содержит связей с производными, выражение для токов остается прежним, но лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{вв}}$  инвариантен относительно группы преобразований (2.78), а поэтому не изменяются и дивергенции токов.

### г. Аксиальные токи и заряды

Перейдем теперь к аксиальным токам. В рамках кварковой модели они трактуются совершенно аналогично векторным токам.

Рассмотрим действие на кварковое поле преобразования

$$q(x) \rightarrow q'(x) = \exp\left(-i\varepsilon_\alpha \frac{1}{2} \lambda^\alpha \gamma_5\right) q(x), \quad (2.93)$$

которое порождается восемью не сохраняющимися четность генераторами  $\bar{Q}^\alpha(t)$ , определяющимися соотношением

$$\exp(i\varepsilon_\alpha \bar{Q}^\alpha) q(x) \exp(-i\varepsilon_\alpha \bar{Q}^\alpha) = \exp\left(-i\varepsilon_\alpha \frac{1}{2} \lambda^\alpha \gamma_5\right) q(x). \quad (2.94)$$

Как следствие,

$$[\bar{Q}^\alpha, q_k(x)] = -\left(\frac{1}{2} \lambda^\alpha\right)_{kl} \gamma_5 q_l(x). \quad (2.95)$$

Применяя стандартную процедуру к лагранжиану (2.72), мы находим выражения для восьми аксиальных токов:

$$A_\mu^\alpha(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{2} \lambda^\alpha q(x) \quad (2.96)$$

и связанных с ними «аксиальных» зарядов:

$$\bar{Q}^\alpha(t) = \int d^3x A_0^\alpha(\mathbf{x}, t) = \int d^3x q^i(\mathbf{x}, t) \gamma_5 \frac{1}{2} \lambda^\alpha q(\mathbf{x}, t). \quad (2.97)$$

Нетрудно убедиться, что при таком определении зарядов уравнение (2.96) действительно выполняется.

Токи (2.96) не сохраняются, и их дивергенции таковы:

$$\partial^\mu A_\mu^\alpha(x) = i\bar{q}(x) \left\{ M, \frac{1}{2} \lambda^\alpha \right\} \gamma_5 q(x) = i\bar{q}_l(x) (m_l + m_k) \left(\frac{1}{2} \lambda^\alpha\right)_{lk} \gamma_5 q_k(x). \quad (2.98)$$

Неинвариантность лагранжиана относительно преобразований (2.93) связана исключительно с присутствием массового члена. Аксиальные токи (2.96) сохранились бы только в пределе нулевой массы кварков.

Подчеркиваем, что, будучи псевдоскалярными величинами, аксиальные заряды  $\bar{Q}^\alpha$  не порождают замкнутой алгебры. Коммутационные соотношения для аксиальных зарядов, которые могут быть выведены из их явных выражений, таковы:

$$[\bar{Q}^\alpha(t), \bar{Q}^\beta(t)] = i f_{\alpha\beta\gamma} Q^\gamma(t), \quad (2.99)$$

где  $Q^\gamma(t)$  — операторы «векторных» зарядов, введенных ранее [формула (2.90)]. Если же мы рассмотрим расширенную систему коммутаторов, взяв как аксиальные, так и векторные заряды, то будем иметь:

$$\begin{aligned} [Q^\alpha(t), Q^\beta(t)] &= i f_{\alpha\beta\gamma} Q^\gamma(t), \\ [Q^\alpha(t), \bar{Q}^\beta(t)] &= i f_{\alpha\beta\gamma} \bar{Q}^\gamma(t), \\ [\bar{Q}^\alpha(t), \bar{Q}^\beta(t)] &= i f_{\alpha\beta\gamma} Q^\gamma(t), \end{aligned} \quad (2.100)$$

т. е.  $\bar{Q}^\alpha$  и  $Q^\alpha$  вместе порождают замкнутую алгебру.

Алгебра, определяющаяся коммутационными соотношениями (2.100), изоморфна алгебре  $SU(3) \otimes SU(3)$ . В самом деле, если ввести для кварковых полей киральные преобразования

$$\begin{aligned} q &\rightarrow \exp(i\varepsilon_\alpha Q_L^\alpha) q \exp(-i\varepsilon_\alpha Q_R^\alpha) = \exp\left(-i\varepsilon_\alpha \frac{1-\gamma_5}{2} \frac{\lambda^\alpha}{2}\right) q, \\ q &\rightarrow \exp(i\varepsilon_\alpha Q_R^\alpha) q \exp(-i\varepsilon_\alpha Q_L^\alpha) = \exp\left(-i\varepsilon_\alpha \frac{1+\gamma_5}{2} \frac{\lambda^\alpha}{2}\right) q, \end{aligned} \quad (2.101)$$

где  $Q_L^\alpha$  и  $Q_R^\alpha$  — генераторы вида

$$\begin{aligned} Q_L^\alpha(t) &= \frac{1}{2} \{Q^\alpha(t) - \bar{Q}^\alpha(t)\} = \int d^3x q^\dagger(x) \frac{\lambda^\alpha}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} q(x), \\ Q_R^\alpha(t) &= \frac{1}{2} \{Q^\alpha(t) + \bar{Q}^\alpha(t)\} = \int d^3x q^\dagger(x) \frac{\lambda^\alpha}{2} \frac{1+\gamma_5}{2} q(x), \end{aligned} \quad (2.102)$$

то с учетом коммутационных соотношений (2.100) получаем две системы киральных генераторов (2.102), которые образуют две взаимно коммутирующие  $SU(3)$ -алгебры:

$$\begin{aligned} [Q_L^\alpha, Q_L^\beta] &= i f_{\alpha\beta\gamma} Q_L^\gamma, \\ [Q_R^\alpha, Q_R^\beta] &= i f_{\alpha\beta\gamma} Q_R^\gamma, \\ [Q_L^\alpha, Q_R^\beta] &= 0. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Таким образом, киральные заряды подчиняются алгебре  $SU(3) \otimes SU(3)$ . О системе коммутационных соотношений (2.100) также обычно говорят как об алгебре  $SU(3) \otimes SU(3)$ .

Киральные токи, связанные с киральными преобразованиями (2.101), таковы:

$$\begin{aligned} J_{L\mu}^\alpha(x) &= \bar{q}(x) \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \frac{\lambda^\alpha}{2} q(x), \\ J_{R\mu}^\alpha(x) &= \bar{q}(x) \gamma_\mu \frac{1+\gamma_5}{2} \frac{\lambda^\alpha}{2} q(x). \end{aligned} \quad (2.104)$$

У них такая же  $(1 \pm \gamma_5)$  структура, как и у слабых лептонных токов, рассмотренных в § 2, п. 3а. К этому мы вскоре вернемся.

Отметим, наконец, очень важную особенность кварковой модели: восемь векторных операторов (2.87) и восемь аксиальных токов (2.96) преобра-

зуются в рамках группы  $SU(3)$  как компоненты тензорного оператора, принадлежащего представлению 8, т. е.

$$\begin{aligned} [Q^\alpha(t), V_\mu^\beta(\mathbf{x}, t)] &= if_{\alpha\beta\gamma} V_\mu^\gamma(\mathbf{x}, t), \\ [Q^\alpha(t), A_\mu^\beta(\mathbf{x}, t)] &= if_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\gamma(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Соотношения (2.105) легко проверить, подставив в них выражения для зарядов и токов.

Далее, если мы рассмотрим полную группу  $SU(3) \otimes SU(3)$ , то система 16 векторных и аксиальных токов преобразуется по представлению  $(8, 1) \oplus (1, 8)$  этой группы. Это значит, что кроме соотношений (2.105) выполняются также следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [\bar{Q}^\alpha(t), V_\mu^\beta(\mathbf{x}, t)] &= if_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\gamma(\mathbf{x}, t), \\ [\bar{Q}^\alpha(t), A_\mu^\beta(\mathbf{x}, t)] &= if_{\alpha\beta\gamma} V_\mu^\gamma(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.106)$$

### д. Дивергенции токов и их трансформационные свойства

Пользуясь выражениями для токов и зарядов, найденными на основе кварковой модели, мы вывели одновременные коммутаторы этих величин. Как уже подчеркивалось, такие коммутационные соотношения справедливы независимо от того, является ли ток сохраняющейся величиной, и, следовательно, независимо от конкретного вида гамильтониана (или лагранжиана). Это весьма важное обстоятельство.

Но физическая картина становится более полной, когда известны свойства полного или частичного сохранения зарядов. Поэтому мы проанализируем трансформационные свойства гамильтониана кварковой модели и дивергенций токов относительно преобразований группы  $SU(3) \otimes SU(3)$ .

Из выражения для лагранжевой плотности (2.72) находим гамильтониан

$$\mathcal{H} = -\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \frac{1}{2} [\bar{q} (i\gamma \nabla) q + \text{э. с.}] + \bar{q} M q \equiv \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'_0. \quad (2.107)$$

Гамильтониан  $\mathcal{H}$  разделен здесь на две части: одна из них, а именно  $\bar{q} \gamma \nabla q$ , очевидно, инвариантна относительно преобразований  $SU(3) \otimes SU(3)$ , другая же, вообще говоря, нарушает симметрии  $SU(3) \otimes SU(3)$ ,  $SU(3)$ ,  $SU(2) \otimes SU(2)$ , а если мы рассматриваем и электромагнетизм, то и  $SU(2)$ -симметрию<sup>1)</sup>.

Легче всего это показать, если ввести соответствующие базисные векторы для группы  $SU(3) \otimes SU(3)$ , т. е.  $q_R^L = 1/2 (1 \mp \gamma_5) q$ . Тогда

$$\bar{q} \gamma_\mu q = \bar{q}_L \gamma_\mu q_L + \bar{q}_R \gamma_\mu q_R, \quad (2.108)$$

и мы видим, что эта величина есть скаляр группы  $SU(3) \otimes SU(3)$ . В то же время

$$\bar{q} M q = \bar{q}_L M q_R + \bar{q}_R M q_L \quad (2.109)$$

(матрица  $M$  не действует в дираковском пространстве), и поэтому  $\bar{q} M q$  при  $SU(3) \otimes SU(3)$ -преобразованиях есть тензорный оператор, принадлежащий представлению  $(3^*, 3) \oplus (3, 3^*)$ . Такими же трансформационными свойствами обладают и билинейные комбинации  $\bar{q} \lambda^\alpha q$ ,  $\bar{q} \lambda^\alpha \gamma_5 q$ .

Для дальнейшего обобщения полезно переписать  $\mathcal{H}$  в более удобной форме. Прежде всего, следуя Гелл-Манну [77], мы объединяем описание  $SU(3) \otimes SU(3)$ -токов и токов, пропорциональных оператору числа квар-

<sup>1)</sup> Ход рассуждений здесь и далее не изменится, если к  $\mathcal{H}$  добавить член взаимодействия, подобный  $\bar{q} \lambda_\mu q G^\mu$ , как это и имеет место в «глюонной» модели.



ков, введением девятой  $3 \times 3$ -матрицы

$$\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (2.110)$$

Девять матриц  $\lambda^\alpha$  ( $\alpha = 0, \dots, 8$ ) подчиняются следующим правилам:

$$\begin{aligned} [\lambda^\alpha, \lambda^\beta] &= 2if_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\gamma, \\ \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} &= 2d_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\gamma, \\ T_r(\lambda^\alpha\lambda^\beta) &= 2\delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.111)$$

причем коэффициент  $f_{\alpha\beta\gamma}$  равен нулю, если хотя бы один из индексов  $\alpha, \beta, \gamma$  равен нулю, и дается выражением (2.84) для остальных возможных комбинаций ( $\alpha, \beta, \gamma$ ); матрица  $d_{\alpha\beta\gamma}$  имеет дополнительные не равные нулю матричные элементы, когда один из индексов нуль, а два других одинаковы  $d_{0\alpha\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

В таких обозначениях массовую матрицу  $M$  можно переписать в виде

$$M \equiv \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \equiv c_0\lambda^0 + c_3\lambda^3 + c_8\lambda^8, \quad (2.112)$$

где

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(m_1 + m_2 + m_3), \\ c_3 &= \frac{1}{2}(m_1 - m_2), \\ c_8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(m_1 + m_2 - 2m_3). \end{aligned} \quad (2.113)$$

Поэтому часть  $\mathcal{H}' = \bar{q}Mq$  гамильтониана, нарушающую симметрию  $SU(3) \otimes \otimes SU(3)$ , можно переписать как

$$\mathcal{H}' = c_0u^0 + c_3u^3 + c_8u^8, \quad (2.114)$$

где

$$u^\alpha(x) = \bar{q}(x)\lambda^\alpha q(x) \quad (\alpha = 0, \dots, 8). \quad (2.115)$$

Выражение (2.114) показывает, каковы трансформационные свойства гамильтониана  $\mathcal{H}'$  при  $SU(3)$ -преобразованиях;  $SU(3)$  — структура гамильтониана  $\mathcal{H}'$  является простейшей из тех, что обеспечивают сохранение гиперзаряда и третьей компоненты изоспина.

Теперь мы сосредоточим наше внимание на рассмотрении дивергенций векторных и аксиальных токов, которые были определены формулами (2.88) и (2.98):

$$D^\alpha(x) \equiv \partial^\mu V_\mu^\alpha(x) = i\bar{q}(x) \left[ M, \frac{1}{2}\lambda^\alpha \right] q(x), \quad (2.116a)$$

$$\bar{D}^\alpha(x) \equiv \partial^\mu A_\mu^\alpha(x) = i\bar{q}(x) \left\{ M, \frac{1}{2}\lambda^\alpha \right\} q(x). \quad (2.116b)$$

В кварковой модели явные выражения для дивергенций токов (2.116a), (2.116b) выводятся очень просто. Но, имея в виду дальнейшие обобщения, мы выведем сейчас формулу, не зависящую от модельных представлений. Начнем с соотношения

$$\dot{Q}^\alpha = \int D^\alpha(x) d^3x = i[H, Q^\alpha] = i \int [\mathcal{H}(x, t) Q^\alpha(t)] d^3x \quad (2.117)$$

и его локальной формы [79]

$$D^\alpha(x) = i[\mathcal{H}(x, t), Q^\alpha(t)] = i[\mathcal{H}'(x, t), Q^\alpha(t)]. \quad (2.118)$$

Конечно, в кварковой модели явное выражение  $\mathcal{J}\mathcal{B}'$  должно воспроизводить предыдущие выражения (2.116а, б) для  $D^\alpha$  и  $\bar{D}^\alpha$ . Подставив  $\mathcal{J}\mathcal{B}'$  из (2.114) в уравнение (2.118) и используя фундаментальные коммутационные и антикоммутационные соотношения для различных величин, получим

$$D^\alpha(x) = (c_3 f_{\alpha_3\beta} + c_8 f_{\alpha_8\beta}) u^\beta(x), \quad (2.119a)$$

$$\bar{D}^\alpha(x) = (c_0 d_{0\alpha\beta} + c_3 d_{3\alpha\beta} + c_8 d_{8\alpha\beta}) v^\beta(x), \quad (2.119б)$$

где мы определили 9 новых псевдоскалярных операторов

$$v^\alpha(x) = i\bar{q}(x) \lambda^\alpha \gamma_5 q(x). \quad (2.120)$$

Пользуясь формулами (2.112), нетрудно убедиться, что равенства (2.116а, б) и (2.119а, б) совпадают.

Имея явное выражение для дивергенции, мы можем проанализировать свойства сохранения токов. Из этих свойств следуют важные экспериментальные заключения, если отождествить (как это будет сделано в следующей главе) кварковые токи с теми токами, которые участвуют в слабых и электромагнитных взаимодействиях. С этой точки зрения мы и хотим обсудить более детально свойства различных кварковых токов.

Начнем с изоспиновых векторных токов

$$\begin{aligned} V_\mu^{I^+} &\equiv V_\mu^1 + iV_\mu^2 = \bar{q}\gamma_\mu I^+ q = \bar{q}_1 \gamma_\mu q_2, \\ V_\mu^{I^-} &= (V_\mu^{I^+})^\dagger, \end{aligned} \quad (2.121)$$

которые являются партнерами изовекторного тока  $V_\mu^3$  по  $SU(2)$ -изоспиновому триплету. Если пренебречь электромагнитными поправками, то изовекторные токи сохраняются, поскольку

$$\partial^\mu V_\mu^{I^+} = i(m_1 - m_2) \bar{q}_1 q_2, \quad (2.122)$$

и в этом пределе мы должны иметь  $m_1 = m_2$ , ибо для кварков  $q_1, q_2$  предполагается только электромагнитное (малое) расщепление масс. При дальнейшем рассмотрении в большинстве случаев мы будем пренебрегать электромагнитными эффектами и считать, что изовекторные векторные токи сохраняются.

Для  $V$ -спиновых векторных токов

$$\begin{aligned} V_\mu^{V^*} &\equiv V_\mu^4 + iV_\mu^5 = \bar{q}\gamma_\mu V^* q = q_1 \gamma_\mu q_3, \\ V_\mu^{V^*} &= (V_\mu^{V^*})^\dagger, \end{aligned} \quad (2.123)$$

имеем

$$\partial^\mu V_\mu^{V^*} = i(m_1 - m_3) \bar{q}_1 q_3, \quad (2.124)$$

т. е. их дивергенции пропорциональны массовому расщеплению между изоспиновым дублетом и изоспиновым синглетом в кварковом триплете: это расщепление вызывается умеренно сильным взаимодействием, нарушающим  $SU(3)$ -симметрию сильных взаимодействий. Таким образом, в пределе точной  $SU(3)$ -симметрии (т. е. в пределе точной инвариантности кваркового лагранжиана по отношению к  $SU(3)$ -преобразованиям) странные токи (2.123) также сохранялись бы точно. Но мы не можем пренебречь нарушением  $SU(3)$ -симметрии и поэтому получаем, что степень несохранения странных векторных токов зависит от отношения члена, нарушающего  $SU(3)$ -симметрию, к  $SU(3)$ -инвариантному члену или, скажем, от отношения  $(m_1 - m_3)/(m_1 + m_3)$ . Если, как это обычно и делается, считать массу кварков очень большой, то должно как-то проявляться частичное сохранение странных векторных токов. В этом и состоит суть так называемой гипотезы ЧСВТ, которая действительно утверждает сохранение  $V$ -спиновых токов в пределе точной  $SU(3)$ -симметрии для сильно взаимодействующих частиц.

В заключение рассмотрим аксиально-векторные точки

$$\begin{aligned} A_\mu^{I^+} &= \bar{q}_1 \gamma_\mu \gamma_5 q_2, & A_\mu^{V^+} &= \bar{q}_1 \gamma_\mu \gamma_5 q_3, \\ A_\mu^{I^-} &= (A_\mu^{I^+})^\dagger, & A_\mu^{V^-} &= (A_\mu^{V^+})^\dagger. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Как уже упоминалось, даже в модели свободных кварков они были бы сохраняющимися только в пределе нулевой массы кварков, поскольку

$$\begin{aligned} \partial^\mu A_\mu^{I^+} &= i(m_1 + m_2) \bar{q}_1 q_2, \\ \partial^\mu A_\mu^{V^+} &= i(m_1 + m_3) \bar{q}_1 q_3. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Тем не менее в тех процессах, в которых масса кварков не играет важной роли, аксиальные токи должны, вероятно, обнаруживать подобие частичного сохранения. Иначе говоря, по крайней мере при высоких энергиях аксиальные токи также должны вести себя как сохраняющиеся токи. Как будет показано в § 6, хотя этот вывод кварковой модели качественно верен, он дает неверные количественные оценки. Мы увидим, что на самом деле частичное сохранение аксиальных токов связано с малостью массы псевдоскалярных мезонов.

Вернемся к общему выражению для дивергенций векторного и аксиального токов. При записи уравнения (2.119) мы ввели девять скалярных операторов:

$$u^\alpha(x) = \bar{q}(x) \lambda^\alpha q(x) \quad (\alpha = 0, \dots, 8), \quad (2.127)$$

и девять псевдоскалярных:

$$v^\alpha(x) = i \bar{q}(x) \lambda^\alpha \gamma_5 q(x) \quad (\alpha = 0, \dots, 8). \quad (2.128)$$

Каждый из этих наборов преобразуется при  $SU(3) \otimes SU(3)$ -преобразованиях по представлению  $(\mathbf{3}^*, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{3}^*)$  (конечно, каждый набор содержит  $SU(3)$ -синглет плюс  $SU(3)$ -октет).

Их трансформационные свойства можно выразить следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} [Q^\alpha, u^\beta] &= i f_{\alpha\beta\gamma} u^\gamma, \\ [Q^\alpha, v^\beta] &= i f_{\alpha\beta\gamma} v^\gamma, \\ [\bar{Q}^\alpha, u^\beta] &= i d_{\alpha\beta\gamma} v^\gamma, \\ [\bar{Q}^\alpha, v^\beta] &= -i d_{\alpha\beta\gamma} u^\gamma \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha &= 1, \dots, 8, \\ \beta, \gamma &= 0, 1, \dots, 8. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Интересно, что, поскольку значения изоспина или гиперзаряда, равные 2, не содержатся в  $u^\alpha, v^\alpha$ -мультиплеттах, некоторые полезные «экзотические» коммутаторы обращаются в нуль. Например,

$$[Q^{I^*}, D^{I^*}] = [Q^{V^+}, D^{V^+}] = \dots = 0. \quad (2.130)$$

В заключение заметим следующее. Поскольку, вообще говоря, мы не будем учитывать электромагнитные эффекты, мы должны считать равными массы двух кварков, входящих в изодублет ( $m_1 = m_2$ ). Поэтому  $c_3 = 0$  и гамильтониан (2.114), нарушающий  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрию, приводится к виду

$$\mathcal{H}' = c_0 u^0 + c_8 u^8, \quad (2.131)$$

т. е.  $\mathcal{H}'$  преобразуется как комбинация  $SU(3)$ -скаляра и восьмой компоненты октета. Это соответствует простейшему выбору, который гарантирует коммутацию  $\mathcal{H}$  с  $Q^1, Q^2, Q^3$  и  $Q^8$  (сохранение изоспина и гиперзаряда). Таким образом, имеем

$$\partial^\mu V_\mu^\alpha = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 1, 2, 3, 8, 0, \quad (2.132)$$

тогда как при  $\alpha = 4, 5, 6, 7$  дивергенции пропорциональны нарушающему  $SU(3)$ -симметрию параметру  $c_8$ , т. е. разности  $m_1 - m_3$ . Что же касается дивергенций аксиальных токов, то здесь

$$\bar{D}^{1,2,3} = \frac{\sqrt{2}c_0 + c_8}{\sqrt{3}} v^{1,2,3}, \quad (2.133)$$

и поэтому для точной  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии необходимо условие  $\sqrt{2}c_0 + c_8 = 0$ . Это условие выполняется при  $m_1 = m_2 = 0$ . Даже не говоря о равенстве нулю масс фермионов (специфическое требование, следующее из кварковой модели), интересно отметить [79], что если достаточно точной симметрией микромира является симметрия  $SU(2) \otimes SU(2)$ , то отношение  $c_8/c_0$  не должно слишком сильно отличаться от значения  $-\sqrt{2}$ . Если же принять во внимание только успехи  $SU(3)$ -классификации, то следует предположить, что  $c_8/c_0 \ll 1$ .

### 3. Электромагнитные и слабые взаимодействия в рамках кварковой модели

Рассмотрим теперь вопрос о том, как, оставаясь в мире лептонов и кварков, описать электромагнитные и слабые адронные взаимодействия, используя различные токи, введенные нами в предыдущих разделах.

Начнем с электромагнитных взаимодействий. Введем их в модель свободных кварков, исходя из принципа минимального электромагнитного взаимодействия. Для этого нужно произвести следующую подстановку в лагранжиан свободных кварков:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ie \frac{1}{2} \left( \lambda^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda^8 \right) \mathcal{A}_\mu. \quad (2.134)$$

Подстановка (2.134) необходима потому, что принцип минимального взаимодействия означает замену  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ie_{(k)} \mathcal{A}_\mu$  для каждой частицы, несущей заряд  $e_{(k)}$ ; в кварковом случае мы имеем

$$e \frac{1}{2} \left( \lambda^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda^8 \right) |q_k\rangle = e_{(k)} |q_k\rangle. \quad (2.135)$$

При подстановке (2.134) в лагранжиан свободных кварков появляется лагранжиан электромагнитного взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\text{эл.-м}} = -e j_\mu^{\text{эл.-м}}(x) \mathcal{A}^\mu(x), \quad (2.136)$$

где

$$j_\mu^{\text{эл.-м}}(x) = \frac{1}{2} \bar{q}(x) \gamma_\mu \left( \lambda^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda^8 \right) q(x) = V_\mu^3(x) + \frac{1}{2} V_\mu^8(x). \quad (2.137)$$

Электромагнитный кварковый ток следующим образом выражается через введенные ранее кварковые токи:

$$V_\mu^3 = \bar{q} \gamma_\mu \frac{1}{2} \lambda^3 q, \quad (2.138)$$

$$V_\mu^8 \equiv \frac{2}{\sqrt{3}} V_\mu^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{q} \gamma_\mu \lambda^8 q, \quad (2.139)$$

т. е. он составлен из их изовекторной и изоскалярной частей. Электромагнитный ток (2.137) сохраняется точно. Так и должно быть, поскольку  $\lambda^3, \lambda^8$ , будучи диагональными одновременно с массовым оператором  $M$ , приводят к сохранению как  $V_\mu^3$ , так  $V_\mu^8$ .

Теперь кратко остановимся на вопросе о возможной структуре слабых взаимодействий в кварковой модели. Во-первых, отметим, что в мире, сконструированном нами из лептонов и кварков, слабые распады адронов будут

обусловлены переходами

$$q_2 \rightleftharpoons q_1 + l + \tilde{\nu}_l \quad (2.140)$$

для процессов без изменения странности и переходами

$$q_3 \rightleftharpoons q_1 + l + \tilde{\nu}_l \quad (2.141)$$

для процессов с  $\Delta S = \Delta Q$ .

Так, например,  $\beta$ -распад нейтрона (который имеет кварковую структуру  $n = q_1 q_2 q_3$ ) обусловлен переходом одного из кварков  $q_2$

$$q_2 \rightarrow q_1 + e^- + \tilde{\nu}_e, \quad (2.142)$$

тогда как кварк  $q_1$  и другой кварк  $q_3$  оказываются просто наблюдателями. Точно так же  $\pi^+$  ( $= q_2 q_1$ )-распад  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$  объясняется аннигиляцией  $q_1$  и  $q_2$  в  $\mu^+$  и  $\nu_\mu$ .

Чтобы описать этот вид слабого перехода, вспомним, во-первых, что в чисто лептонном случае слабые взаимодействия очень хорошо описываются лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\text{слаб}}^{\text{лепт}} = -\frac{G}{\sqrt{2}} l_\mu^\dagger l^\mu, \quad (2.143)$$

где  $l_\mu$  есть  $V - A$ -лептонный ток [формула (2.40)].

Но в предыдущем разделе мы видели, что, исходя из лагранжиана свободных кварков, можно сконструировать кварковые токи

$$J_\mu^\alpha(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda^\alpha q(x) \equiv V_\mu^\alpha(x) - A_\mu^\alpha(x), \quad (2.144)$$

которые имеют такую же  $V - A$ -структуру, как и  $l_\mu$ , и определяются точно таким же путем.

Это наводит на мысль, что в мире лептонов и кварков слабые полулептонные взаимодействия должны описываться лагранжианом, имеющим вид произведения кваркового тока (2.144) на лептонный ток:

$$\mathcal{L}_{\text{слаб}} = -\frac{G_0^{(\alpha)}}{\sqrt{2}} J_\mu^\alpha l^\mu + \text{э. с.} \quad (2.145)$$

Здесь  $G_0^\alpha$  — соответствующая «голая» константа связи.

Тем самым устанавливается глубокая связь между свойствами симметрии адронных систем и характером их взаимодействия с лептонными парами: для классификации адронных состояний и при конструировании электромагнитных и слабых лагранжианов используется один и тот же набор токов и зарядов. Это позволяет дать альтернативное определение операторов симметрии сильных взаимодействий [ $SU(3) \otimes SU(3)$ -генераторов] как слабых зарядов, матричные элементы которых можно измерять в слабых и электромагнитных процессах.

Индекс  $\alpha$  в формуле (2.145) следует определять в соответствии с тем конкретным процессом, который мы хотим описать лагранжианом (2.145). Поэтому для распадов с сохранением странности мы должны взять

$$\mathcal{L}_{\text{слаб}}^{(\Delta S=0)} = -\frac{G_0^{(I)}}{\sqrt{2}} J_\mu^{I+} l^\mu + \text{э. с.}, \quad (2.146)$$

тогда как для странных распадов соответствующий лагранжиан должен иметь вид

$$\mathcal{L}_{\text{слаб}}^{(\Delta S=\Delta Q)} = -\frac{G_0^{(V)}}{\sqrt{2}} J_\mu^{V+} l^\mu + \text{э. с.} \quad (2.147)$$

Полулептонные слабые взаимодействия в принципе можно описывать, по крайней мере в кварковой модели, двумя изоспиновыми векторными

токами  $V_{\mu}^{\pm}$ , двумя  $V$ -спиновыми векторными токами  $V_{\mu}^{V\pm}$  и их аксиальными партнерами, которые были введены в предыдущем разделе. Что касается  $U$ -спиновых токов, завершающих все возможные варианты токов в рамках схемы  $SU(3) \otimes SU(3)$ , то они должны вызывать переходы с изменением странности и  $\Delta Q = 0$ . Поскольку такие переходы экспериментально никогда не наблюдались, будем считать, что для этих токов константы связи равны нулю.

#### а. Универсальность электромагнитного взаимодействия

Фундаментальным свойством как электромагнитных, так и слабых взаимодействий является их универсальность. В электромагнитном случае универсальность означает, что для всех заряженных частиц константа связи с фотонным полем одна и та же, причем электрический заряд — универсальная константа как для лептонов, так и для адронов. Это означает, что если в лагранжевой схеме для каждой заряженной частицы вводится одна и та же голая константа связи  $e_0$ , то включение сильных взаимодействий не приводит к ее перенормировке.

Как нетрудно сообразить, универсальность есть простое следствие сохранения электромагнитного тока. Мы уже видели, что при калибровочном преобразовании 1-го рода каждого заряженного поля

$$\psi \rightarrow \exp(-i\varepsilon) \psi \quad (2.148)$$

лагранжева плотность остается без изменения и тем самым определяется сохраняющийся ток

$$j_{\mu} = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial (\partial^{\mu} \varepsilon)}, \quad \partial^{\mu} j_{\mu} = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \varepsilon} = 0, \quad (2.149)$$

который и является электромагнитным током, фигурирующим в лагранжиане взаимодействия, построенном исходя из принципа минимального электромагнитного взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{\text{ва}} = -e_0 j_{\mu} A^{\mu}. \quad (2.150)$$

Генератор фазового преобразования (2.148), определенный соотношением

$$\exp(i\varepsilon Q) \psi \exp(-i\varepsilon Q) = \exp(-i\varepsilon) \psi, \quad (2.151)$$

как уже говорилось, в точности равен оператору электрического заряда

$$Q = \int d^3x j_0(x), \quad (2.152)$$

который не зависит от времени.

Так как  $\dot{Q} = 0$ , заряд  $Q$  разрешает переходы только между физическими состояниями, имеющими одинаковый 4-импульс. В самом деле, если  $H$  есть полный гамильтониан, то, учитывая соотношение

$$\dot{Q} = i[H, Q], \quad (2.153)$$

мы будем иметь

$$0 = \langle p_2 | [H, Q] | p_1 \rangle = (E_2 - E_1) \langle p_2 | Q | p_1 \rangle. \quad (2.154)$$

Таким образом,  $E_1 = E_2$  при  $\langle p_2 | Q | p_1 \rangle \neq 0$ ; кроме того,  $\langle p_2 | Q | p_1 \rangle \neq 0$  только при  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$ , так как из определения заряда следует:

$$\begin{aligned} \langle p_2 | Q | p_1 \rangle &= \int d^3x \langle p_2 | j_0(x) | p_1 \rangle = \\ &= (2\pi)^3 \langle p_2 | j_0(0) | p_1 \rangle \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1). \end{aligned} \quad (2.155)$$

При интегрировании в соотношении (2.155) было использовано свойство трансляционной инвариантности

$$O(x) = \exp(iPx) O(0) \exp(-iPx), \quad (2.156)$$

где  $P_\mu$  — оператор 4-импульса.

После такого педагогического «резюме» установим факт «универсальности» или, точнее, отсутствие перенормировки заряда при включении сильных взаимодействий. Напомним, что заряд  $e$  физического состояния  $|p\rangle$ , уничтожаемого заряженным полем  $\psi$ , определяется как <sup>1)</sup>

$$\langle p' | e_0 Q | p \rangle = [(2\pi)^3 2E \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')] e, \quad (2.157)$$

причем  $e_0$  — это затравочный заряд, введенный в лагранжиан взаимодействия (2.150). Таким образом, среднее значение оператора заряда в состоянии  $|p\rangle$  в точности равно отношению  $r$  физического заряда  $e$  к голому заряду  $e_0$ :

$$\langle p' | Q | p \rangle = [(2\pi)^3 2E \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')] r, \quad (2.159)$$

$$r = \frac{e}{e_0}.$$

Напомним, наконец, что из соотношения (2.151) следует коммутационное соотношение

$$[Q, \psi(x)] = -\psi(x). \quad (2.160)$$

Возьмем теперь матричные элементы правой и левой частей соотношения (2.160) между вакуумом и физическим состоянием  $|p\rangle$  и подставим в коммутатор полную систему промежуточных физических состояний:

$$\sum_n \langle 0 | Q | n \rangle \langle n | \psi | p \rangle - \sum_n \langle 0 | \psi | n \rangle \langle n | Q | p \rangle = -\langle 0 | \psi | p \rangle. \quad (2.161)$$

Поскольку оператор  $Q$  допускает переходы только между состояниями с одинаковыми 4-импульсами, а заряд вакуума равен нулю, в левой части равенства (2.161) остаются только те состояния, которые имеют тот же самый импульс и ту же массу, что и состояние  $|p\rangle$ . Если нет состояний, вырожденных по массе и имеющих одинаковые с  $|p\rangle$  квантовые числа [как это и имеет место в действительности, когда в сумме по полному набору состояний пренебрегают фотонами <sup>2)</sup>], то соотношение (2.161) приводится просто к равенству

$$- \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} \langle 0 | \psi | p' \rangle \langle p' | Q | p \rangle = -\langle 0 | \psi | p \rangle. \quad (2.162)$$

Интегрируя по промежуточному импульсу  $p'$  с учетом соотношения (2.155), получаем

$$\frac{1}{2E} \langle p | j_0 | p \rangle \langle 0 | \psi | p \rangle = \langle 0 | \psi | p \rangle. \quad (2.163)$$

Следовательно,

$$\langle p | j_0 | p \rangle = 2E \quad (2.164)$$

и

$$\langle p' | Q | p \rangle = (2\pi)^3 2E \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (2.165)$$

т. е.

$$r = 1 \quad \text{или} \quad e = e_0 \quad (2.166)$$

и заряд не ренормируется эффектами сильных взаимодействий.

<sup>1)</sup> Множитель  $(2\pi)^3 2E \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$  появляется в связи с принятой нами ковариантной нормировкой физических состояний:

$$\langle p' | p \rangle = (2\pi)^3 2E \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (2.158)$$

<sup>2)</sup> Напомним, что мы по-прежнему ограничиваемся низшим порядком по электромагнитным взаимодействиям.

Если бы в сумме по полному набору состояний мы приняли во внимание также и фотоны, то появилось бы бесконечно большое число вкладов, выроденных по массе. Они-то и ответственны за перенормировку затравочного заряда при учете электромагнитных взаимодействий<sup>1)</sup>.

### б. Универсальность слабого взаимодействия

В идеальном случае, когда слабые токи строго сохраняются, рассуждения, аналогичные проведенным в предыдущем разделе, привели бы нас к заключению, что затравочная константа связи слабого взаимодействия в лагранжиане должна быть равна физической константе связи.

По аналогии с выражением (2.159) напомним для матричного элемента слабого заряда  $Q^T$ ,  $T = I^\pm, V^\pm, U^\pm$  между некоторыми физическими состояниями  $|a\rangle$  и  $|a'\rangle$  выражение

$$\langle a' | Q^T | a \rangle = [T_{a'a} (2\pi)^3 2E_a \delta^3(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_{a'})] r, \quad (2.167)$$

где  $T_{a'a}$  — матричный элемент нарушающего  $SU(3)$ -симметрию оператора  $T$  между состояниями  $a$  и  $a'$  (в том представлении, к которому принадлежат состояния  $a$  и  $a'$ ), а  $r$  — ренормировочное отношение

$$r = \frac{G}{G_0} \quad (2.168)$$

«физической» константы связи слабого взаимодействия к «голой». Поскольку  $Q^T$  не зависит от времени, величина  $r$  равна единице.

Чтобы доказать это в явном виде, вернемся к кварковой модели и рассмотрим коммутационное соотношение [формула (2.82)]

$$[Q^T, q_i] = -T_{ij} q_j. \quad (2.169)$$

Взяв в обеих частях равенства (2.169) матричные элементы между вакуумом и кварковым состоянием  $|q_j\rangle$ , подставив в коммутатор полный набор промежуточных состояний и воспользовавшись тем, что  $Q^T$  не зависит от времени, после простых выкладок получим

$$\frac{1}{2E_j} \langle q_i | j_0^T | q_j \rangle \langle 0 | q_i | q_i \rangle = T_{ij} \langle 0 | q_j | q_j \rangle.$$

Таким образом,

$$\langle q_i | j_0^T | q_j \rangle = 2E_j T_{ij}$$

и

$$\langle q_i | Q^T | q_j \rangle = T_{ij} (2\pi)^3 2E_j \delta^3(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j). \quad (2.170)$$

Поэтому

$$r \equiv \frac{G}{G_0} = 1,$$

В рассматриваемой модели каждый адрон построен из кварков и слабый распад адрона — это на самом деле слабый распад одного из кварков, тогда

<sup>1)</sup> Это соответствует хорошо известному факту, что ренормировочная константа фотонной волновой функции  $Z_3$  отлична от единицы, тогда как в соответствии с тождеством Уорда — Такахаши отношение  $Z_1/Z_2$  констант, ренормирующих вершину и пропагатор заряженной частицы (например, протона), равно единице. Если исходить из лагранжиана голых частиц  $e_0 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \mathcal{A}^\mu$ , то эффект сильных взаимодействий ведет к перенормировке операторов  $\psi$  согласно равенству  $\psi = Z_3^{1/2} \psi_R$ , и, следовательно, находим  $e_0 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \mathcal{A}^\mu = e_0 Z_2 \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_R \mathcal{A}^\mu = e Z_1 \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_R \mathcal{A}^\mu$ . Величина  $Z_1$  — это так называемая вершинная ренормировочная константа, а  $e = (Z_2/Z_1) e_0$  — ренормированный заряд. Тогда равенство  $e = e_0$  эквивалентно равенству  $Z_1 = Z_2$ . Заметим, что величина  $\mathcal{A}_\mu$  не была ренормирована в соответствии с тем, что мы ограничиваемся низшим порядком по электромагнитному взаимодействию. При учете высших порядков следует также проводить и перенормировку  $\mathcal{A}_\mu$ :  $\mathcal{A}_\mu = Z_3^{1/2} \mathcal{A}_\mu^R$  и  $e = Z_3^{1/2} e_0$ .



как остальные кварки выступают в роли наблюдателей. Поскольку же сохраняющиеся токи не ренормируются, каждый сохраняющийся ток взаимодействует одинаково со всеми адронными вершинами.

Таким образом, для всех слабых полулептонных распадов адронов с  $\Delta S = 0$  должна быть одна и та же физическая константа связи  $G^{(l)}$  (если не считать малых отклонений, связанных с пренебрежением электромагнитными поправками).

В случае странных токов, которые сохраняются только частично, эффекты перенормировки могут быть разными в разных конкретных случаях. Но поскольку степень несохранения определяется только умеренно сильными взаимодействиями, эффект перенормировки не должен быть слишком значительным. Таким образом, измеренные константы связи должны быть почти одинаковыми для разных процессов.

Что же касается аксиальных токов, то, поскольку (по крайней мере в кварковой модели) их частичное сохранение должно обнаруживаться лишь при очень высоких энергиях, в этом случае возможны довольно значительные эффекты перенормировки. К более детальному анализу вопроса о частичном сохранении аксиальных токов мы вернемся в § 6.

### в. Феноменология

В свете сказанного для описания слабого взаимодействия между кварками и лептонами (без учета чисто нелептонных распадов) соблазнительно взять лагранжиан в виде

$$\mathcal{L}_{\text{слаб}} = -\frac{G}{\sqrt{2}} \bar{l}_\mu^i l^\mu - \left( \frac{G_0^{(l)}}{\sqrt{2}} J_\mu^{I^+} l^\mu + \frac{G_0^{(V)}}{\sqrt{2}} J_\mu^{V^+} l^\mu + \text{э. с.} \right). \quad (2.171)$$

Ток

$$J_\mu^{I^+, V^+} = V_\mu^{I^+, V^+} - A_\mu^{I^+, V^+} \quad (2.172)$$

выражается через кварковые поля формулами (2.121), (2.123) и (2.125), и, как уже говорилось, оператор имеет  $V - A$ -структуру. Трансформационные свойства оператора  $J_\mu$  таковы, что все правила отбора, характеризующие реальные полулептонные процессы, выполняются.

Мы подошли к последнему пункту своего исследования, а именно к важным феноменологическим соотношениям между  $G$ ,  $G_0^{(l)}$ ,  $G_0^{(V)}$ . Они позволят нам представить лагранжиан слабых взаимодействий в окончательной простой форме.

Рассмотрим сначала  $\beta$ -распад нейтрона. Поскольку передаваемый импульс практически равен нулю, измеряемый матричный элемент равен

$$\langle p | G_0^{(l)} J_\mu^{I^+} | n \rangle = G_0^{I^-} \bar{u}_p \gamma_\mu (1 - r_A \gamma_5) u_n, \quad (2.173)$$

где [69, стр. 254; 80]

$$G_0^{(l)} \equiv G_V^{(l)} = (1,4173 \pm 0,0034) \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3 \quad (2.174)$$

и

$$r_A \equiv \frac{G_A^{(l)}}{G_V^{(l)}} = 1,22 \pm 0,02. \quad (2.175)$$

Сравнивая исходный лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\text{слаб}}^{(l)} = -\frac{G_0^{(l)}}{\sqrt{2}} \bar{q}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) q_2 l^\mu \quad (2.176)$$

с физическим матричным элементом (2.173), мы видим, что отклонение  $\gamma_\mu (1 - r_A \gamma_5)$  от чистого  $V - A$ -варианта вполне естественно было бы интер-

претировать как эффект перенормировки, вызванный сильными взаимодействиями. Точно так же константа  $G^{(I)}$ , характеризующая лептонные распады с сохранением странности  $\Delta S = 0$ , вовсе не обязана совпадать с константой  $G$ , характеризующей чисто лептонные слабые взаимодействия.

Но из экспериментальных данных следует, что

$$\left| \frac{G^{(I)} - G}{G} \right| \leq 1,2\%.$$

Это впечатляющий результат.

Чтобы объяснить его, нужно вспомнить, как мы объясняли ранее равенство наблюдаемых зарядов протона и позитрона. Именно, поскольку электромагнитный ток сохраняется, заряды не ренормируются, а это приводит к предположению об универсальности взаимодействия, устанавливающему равенство затравочных зарядов.

Хочется думать, что аналогичный принцип лежит и в основе приближенного равенства  $G$  и  $G^{(I)}$ . Поэтому мы предположим, что слабые взаимодействия универсальны хотя бы в той мере, в какой это касается векторной части. Количественно это значит, что  $G = G_0^{(I)}$ , и лагранжиан можно переписать в очень простой форме с одной константой связи в виде множителя <sup>1)</sup> (переходы, изменяющие странность, мы пока игнорируем):

$$\mathcal{L}_{\text{слаб}} = -\frac{G}{\sqrt{2}} \{l_\mu^\dagger l^\mu + [\bar{q}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) q_2 l^\mu + \text{э. с.}]\}. \quad (2.177)$$

Тогда сильные взаимодействия ренормируют аксиально-векторную часть, но равенство  $G = G_0^{(I)} = G^{(I)}$  не нарушается вследствие сохранения тока  $V_\mu^{I+} = \bar{q}_1 \gamma_\mu q_2$ .

Конечно, первым недостатком рассматриваемой теории оказывается то, что ток  $V_\mu^{I+}$  не сохраняется при учете электромагнитных (и слабых) эффектов. Или можно объяснить отклонение от полной универсальности на 1—2%. Чтобы найти по экспериментально определенным временам жизни «голые» (теперь уже относительно электромагнитных взаимодействий) константы  $G$  и  $G_0^{(I)}$ , нужно оценить радиационные поправки в  $\mu$ - и  $\beta$ -распадах <sup>2)</sup>. Окончательный результат таков:

$$\left| \frac{G_0^{(I)} - G}{G} \right| \approx 2\%,$$

и это расхождение невозможно объяснить электромагнитными эффектами.

### г. Угол Кабиббо

С гораздо более серьезными трудностями мы встречаемся при попытке обобщить принцип универсальности на переходы с изменением странности. Проще всего было бы предположить, что токи  $J_\mu^{I+}$  и  $J_\mu^{V+}$  входят в лагранжиан с одинаковыми константами связи, т. е. что полный лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{слаб}} = -\frac{G}{\sqrt{2}} \{l_\mu^\dagger l^\mu + [(\bar{q}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) q_2 + \bar{q}_1 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) q_3) l^\mu + \text{э. с.}]\}. \quad (2.178)$$

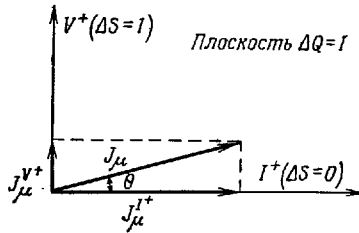
Но это резко противоречит экспериментальным данным, из которых следует, что константа связи тока  $J_\mu^{V+}$  с лептонами составляет только  $1/10$

<sup>1)</sup> Согласно кварковой модели, которой мы здесь придерживаемся, закономерности реальных процессов всегда выражаются в свойствах кваркового лагранжиана.

<sup>2)</sup> См., например, [106].

соответствующей константы связи для  $J_\mu^{I^+}$ <sup>1)</sup>. В принципе возможна сильная перенормировка (90%!), так как из-за нарушения  $SU(3)$ -симметрии ток  $J_\mu^{V^+}$  не является более сохраняющимся. Но, согласно теореме Адемолло — Гатто [56] (см. § 6), эффекты перенормировки должны быть вторичного порядка по членам, нарушающим  $SU(3)$ -симметрию.

Поэтому более привлекательной оказывается трактовка инвариантности, предложенная Гелл-Манном, Леви [81] и Кабиббо [82], при которой сохраняется разумная интерпретация принципа универсальности и в то же время дается объяснение различия констант  $G_0^{(I)}$ ,  $G_0^{(V)}$  и  $G$ .



Фиг. 2.1

Важно четко себе представить, что с лептонным током  $l_\mu$  надо сравнивать не изоспиновый ток  $J_\mu^{I^+}$ , а  $SU(3)$ -ток, являющийся смесью  $I$ - и  $V$ -спиновых компонент, именно:  $J_\mu = a (\cos \theta J_\mu^{I^+} + \sin \theta J_\mu^{V^+})$ . Другими словами, полный слабый адронный ток  $J_\mu$  можно рассматривать как вектор в плоскости  $\Delta Q = 1$ , который имеет отличные от нуля проекции на ось  $I^+ (\Delta S = 0)$ , и на ось  $V^+ (\Delta S = 1)$  (фиг. 2.1).

При этом именно полную длину адронного вектора, т. е.  $a^2$ , мы и должны сравнивать с силой лептонной части. Фактически, в пределе точной  $SU(3)$ -симметрии параметр смешивания компонент с  $\Delta S = 0$  и  $\Delta S = 1$  произволен, а направление вектора легко изменить путем  $SU(3)$ -преобразования.

Тогда, согласно Кабиббо [82], требование универсальности приводит к равенству

$$a^2 = 1,$$

т. е. мы приходим к новой форме полного адронного тока

$$J_\mu = \cos \theta J_\mu^{I^+} + \sin \theta J_\mu^{V^+}. \quad (2.179)$$

Как уже отмечалось, в пределе точной  $SU(3)$ -симметрии направление вектора  $J_\mu$  несущественно, и нетрудно убедиться, что ток (2.179) может быть получен из  $J_\mu^{I^+}$  обычным вращением на угол  $(-2\theta)$  вокруг седьмой оси:

$$J_\mu = \exp(-2i\theta Q_7) J_\mu^{I^+} \exp(2i\theta Q_7)$$

Фактически в любой теории, где  $SU(3)$ -нарушающие члены не введены в явном виде, нет способа определения угла Кабиббо  $\theta$ . Дело в том, что угол определяется только при условии, что направление вектора  $I^+$  в пространстве  $SU(3)$  фиксировано. Единственная возможность отличить направление  $I^+$  от  $V^+$  или от какой-либо их линейной комбинации основана на том, что при нарушении симметрии  $SU(3)$  ток  $V_\mu^{I^+}$  остается сохраняющимся,

<sup>1)</sup> Это сразу же слет, едуннапример, из сравнения распада  $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$  с распадом  $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$ , в котором фигурируют только векторные переходы. Предполагая в обоих случаях одинаковые константы связи, получаем ширину  $\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e)$ , примерно в  $10^2$  раз большую, чем экспериментально наблюдаемая.

а ток  $V_{\mu}^{V+}$  — нет. Таким образом, чтобы построить теорию, позволяющую фиксировать угол  $\theta$ , следует связать слабые взаимодействия с теми взаимодействиями, которые нарушают  $SU(3)$ -симметрию адронов.

Другими словами, если обратиться к кварковой модели,  $SU(3)$ -нарушение выделяет набор кварков

$$(q_1, q_2), q_3,$$

тогда как слабые взаимодействия выделяют набор

$$(q_1, q_2 \cos \theta + q_3 \sin \theta), -q_2 \sin \theta + q_3 \cos \theta.$$

Поэтому, возвращаясь к взаимодействию адронов с лептонами, мы заключаем, что требование универсальности теперь равносильно условию для затравочных констант связи

$$\begin{aligned} G_0^{(I)} &= G \cos \theta, \\ G_0^{(V)} &= G \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.180)$$

где угол  $\theta$  одинаков как для векторных, так и для аксиальных переходов (согласно полной  $V - A$ -структуре тока).

Определение угла  $\theta$ , так же как и более глубокое обоснование выбора тока в виде (2.179), будет проведено позже. Оказывается, что угол  $\theta$  достаточно мал ( $\theta \approx 0,25$ ) и позволяет объяснить как подавление процессов с  $\Delta S = \Delta Q$ , так и малые отклонения от универсальности в переходах с  $\Delta S = 0$ , о которых шла речь в конце предыдущего раздела.

#### § 4. Алгебра зарядов и токов

Мы подошли к ключевому вопросу в теории слабых взаимодействий. В самом деле, мы начинаем понимать, что токи, введенные в рамках кварковой модели, обнаруживают алгебраические свойства, носящие более общий характер и лежащие в основе новой теории — алгебры токов.

Суть дела в том, чтобы прямо постулировать эти коммутационные соотношения для токов и зарядов [78]. Одна из целей нашей книги — показать, что многие простые и важные результаты можно получить из коммутационных соотношений, не обращаясь к какой-либо динамической модели. Прежде чем перейти к анализу различных коммутаторов, наметим основные вехи. Самыми фундаментальными мы считаем коммутационные соотношения между зарядами. Они вытекают из одной только гипотезы, что заряды, содержащиеся в лагранжиане слабых взаимодействий, есть генераторы алгебры  $SU(3) \otimes SU(3)$ . Мы увидим, что эти коммутационные соотношения полностью обеспечивают модельно-независимое определение перенормированных констант связи; а поэтому и универсальности. Комбинируя же коммутационные соотношения с условием полноты, нетрудно объяснить взаимосвязь между сохранением заряда и отсутствием перенормировки. В случае частично сохраняющихся токов можно выделить эффекты перенормировки в особенно простой форме, из которой и следует фундаментальная теорема Адемолло — Гатто.

Очень важным результатом, следующим из алгебры зарядов, является то обстоятельство, что, последовательно проводя аналогию между адронными и лептонными токами, мы почти автоматически приходим к токам вида (2.179).

Коммутационные соотношения зарядовых плотностей прямо следуют из зарядовых коммутационных соотношений и простейшего предположения о локальности. Они также в значительной мере модельно-независимы.

Если набраться смелости, то можно было бы на основе кварковой модели вывести и другие коммутационные отношения, в которые входили бы и прост-

ранственные компоненты токов. Такие соотношения обоснованы гораздо хуже и сильно связаны со спецификой кварковой модели. Почти все результаты, излагаемые в нашей книге, не опираются на такие менее надежные коммутаторы.

### 1. Зарядовые коммутаторы и универсальность

Кварковая модель позволила нам установить одно обстоятельство фундаментального значения, а именно что заряды, входящие в лагранжиан слабого взаимодействия, суть генераторы алгебры  $SU(3) \otimes SU(3)$ . Допустим, что это справедливо и в общей теории, т. е. 16 зарядов  $Q^\alpha$ ,  $\bar{Q}^\alpha$ , определенные формулами  $Q^\alpha = \int d^3x V_0^\alpha(x)$ ,  $\bar{Q}^\alpha = \int d^3x A_0^\alpha(x)$ , подчиняются коммутационным соотношениям следующего типа:

$$\begin{aligned} [Q^\alpha, Q^\beta] &= if_{\alpha\beta\gamma} Q^\gamma, \\ [Q^\alpha, \bar{Q}^\beta] &= if_{\alpha\beta\gamma} \bar{Q}^\gamma, \\ [\bar{Q}^\alpha, \bar{Q}^\beta] &= if_{\alpha\beta\gamma} Q^\gamma. \end{aligned} \quad (2.181)$$

Мы будем рассматривать токи как абстрактные операторы с определенными общими характеристиками и свойствами (такими, например, как квантовые числа, которые они несут, свойства сохранения или частичного сохранения и т. д.), не выраженные в явном виде через фундаментальные поля.

Если токи не сохраняются (общий случай), то соответствующие им заряды зависят от времени и коммутаторы таких зарядов следует рассматривать как *одновременные*. Неявная ковариантность этой формулировки очень важна и будет предметом исследования во многих разделах этой книги.

Начав с коммутационных соотношений (2.181), мы можем трактовать принцип универсальности модельно-независимым образом. Универсальность означает, что для всех слабых токов  $j_\mu^\alpha (= V_\mu^\alpha$  или  $A_\mu^\alpha)$  затравочные константы связи  $G_\mu^{(\alpha)}$  с любым адронным состоянием одинаковы<sup>1)</sup>. Напомним, что наблюдаемые слабые заряды — это не заряды  $Q^\alpha$ , а величины вида

$$C^\alpha = G_0^{(\alpha)} Q^\alpha. \quad (2.182)$$

Как уже говорилось в разделе о кварковой модели, данное соотношение следует из того, что в лагранжиане взаимодействия кварковый ток  $j_\mu^\alpha$  умножается на соответствующую затравочную константу связи  $G_0^{(\alpha)}$ .

Таким образом, рассматривая надлежащие коммутационные соотношения между величинами  $C^\alpha$ , мы можем определить универсальные «голые» константы связи, причем метод определения абсолютно не связан ни с лагранжевым формализмом, ни с тем, как ток  $J_\mu$  выражается через поля.

Рассмотрим, например, коммутатор двух сопряженных зарядов  $C^{T+}$  и  $C^{T-}$  ( $T = I, V, U$ ); сразу же видно, что

$$[C^{T+}, C^{T-}] = 2(G_0^{(T)})^2 Q_3^T. \quad (2.183)$$

Поскольку заряд  $Q_3^T$  диагонален (строго сохраняется), вычисляя среднее значение обеих частей равенства (2.183) для некоторого физического состояния, получаем в правой части (2.183) величину  $2(G_0^{(T)})^2$ , умноженную на собственное значение  $Q_3^T$  в этом состоянии. В то же время, пользуясь свойством полноты, можно представить левую часть в виде суммы произведений наблюдаемых матричных элементов. Таким образом, соотношение (2.183) позволяет

<sup>1)</sup> Более общая формулировка универсальности состоит тогда в следующем: все слабые взаимодействия определяются только через одну универсальную константу связи  $G$  плюс угол Кабиббо  $\theta$ .

определить  $G_0^{(T)}$  полностью модельно-независимым способом, коль скоро мы считаем, что справедливы фундаментальные коммутационные соотношения, которым удовлетворяют реенормированные заряды  $Q^\alpha$ . В то же время соотношение (2.183) дает, по крайней мере в принципе, возможность прямого определения голых констант связи  $G_0^{(T)}$ . Универсальность означает теперь, что вычисленное значение  $G_0^{(T)}$  не зависит от того адронного состояния, которое мы выбираем при вычислении средних значений правой и левой частей соотношения (2.183).

Конкретизируя индекс  $T$ , мы должны получить в согласии со сказанным ранее о принципе универсальности, что

$$\begin{aligned} G_0^{(I)} &= G \cos \theta, \\ G_0^{(V)} &= G \sin \theta, \\ G_0^{(U)} &= 0, \end{aligned} \quad (2.184)$$

и фактически здесь появляется только одна новая константа — угол Кабиббо.

В частном случае сохраняющихся токов, например изоспиновых (в пренебрежении электромагнитными поправками), из соотношения (2.183) следует отсутствие перенормировок, связанных с сильным взаимодействием. Действительно, рассмотрим среднее значение коммутатора

$$[C^{I+}, C^{I-}] = 2(G_0^{(I)})^2 Q^3, \quad (2.185)$$

к примеру, для протонных состояний с импульсами  $p$  и  $p'$ .

Вводя в левую часть (2.185) полную систему физических промежуточных состояний, имеем

$$\sum_i \langle p' | C^{I+} | i \rangle \langle i | C^{I-} | p \rangle - \sum_i \langle p' | C^{I-} | i \rangle \langle i | C^{I+} | p \rangle = [2E(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')] (G_0^{(I)})^2. \quad (2.186)$$

Из предположения о сохранении тока  $V_\mu^{I+}$  получаем, что заряды  $Q^{I+}$ , а следовательно, и заряды  $C^{I+}$  разрешают переходы только между частицами, принадлежащими одному изоспиновому мультиплету.

В первой сумме единственным разрешенным промежуточным состоянием оказывается нейтрон, тогда как во второй сумме нет ни одного допустимого состояния. С учетом определения [ср. с формулой (2.157)]

$$\langle p | C^{I+} | n \rangle = (2\pi)^3 2E \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_n) G^{(I)} \quad (2.187)$$

несложные выкладки показывают, что соотношение (2.186) эквивалентно равенству

$$(G^{(I)})^2 = (G_0^{(I)})^2. \quad (2.188)$$

Равенство (2.188) означает, что если ток  $V_\mu^T$  сохраняется, то физически наблюдаемая константа связи  $G^{(T)}$  равна голой константе  $G_0^{(T)}$ , определяемой формулой (2.183). Естественно, что эта константа  $G_0^{(T)}$  совпадает с константой, фигурирующей в члене лагранжиана слабого взаимодействия, содержащем ток  $V_\mu^T$ .

Разумеется, заряды  $C^\alpha$  мы ввели только из педагогических соображений. Можно начать непосредственно с коммутационных соотношений

$$[Q^{I+}, Q^I] = 2Q^3 \quad (2.189)$$

и использовать то важное обстоятельство, что одночастичный матричный элемент

$$\langle p | Q^{I+} | n \rangle = [(2\pi)^3 2E \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_n)] r^I \quad (2.190)$$

по определению связан с ренормировочным множителем  $r^I$ :

$$r^I = \frac{G^{(I)}}{G_0^{(I)}}. \quad (2.191)$$

Далее мы всегда будем иметь дело только с ренормированными зарядами  $Q^\alpha$ .

Другим примером применения алгебры зарядов может служить доказательство отсутствия дополнительной перенормировки электрического заряда при включении сильных взаимодействий. Вычислим матричные элементы обеих частей коммутатора между состояниями  $\pi^-$  и  $\pi^0$ :

$$[Q^3, Q^{I+}] = Q^{I+}. \quad (2.192)$$

С учетом определений

$$\begin{aligned} \langle \pi^0 | Q^{I+} | \pi^- \rangle &= \sqrt{2} [(2\pi)^3 2E\delta^3(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_-)] r^I, \\ \langle \pi^- | Q^3 | \pi^- \rangle &= -[(2\pi)^3 2E\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})] r^3, \\ \langle \pi^0 | Q^3 | \pi^0 \rangle &= 0, \quad r^3 = e_\pi / e_0, \end{aligned} \quad (2.193)$$

простые выкладки позволяют привести соотношение (2.192) к равенству

$$r^3 = -1, \quad \text{т. е.} \quad e_\pi = -e = -e_0. \quad (2.194)$$

Отсутствие перенормировки, связанной с сильными взаимодействиями, показано без какого-либо явного введения полей.

#### а. Теорема Адемолло — Гатто

В самом общем случае нам приходится иметь дело с токами, которые не сохраняются в точном смысле этого слова, даже если они и обнаруживают некое частичное сохранение. Таким образом, ренормировочный множитель  $r^I$  должен отличаться от единицы.

Как было уже показано, сохранение токов прямо связано со свойствами симметрии лагранжиана, тогда как степень несохранения определяется членом, нарушающим симметрию.

Таким образом, для данного калибровочного преобразования удобно переписать лагранжиан в следующем виде:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + f \mathcal{L}_B, \quad (2.195)$$

где  $\mathcal{L}_0$  — часть, обладающая рассматриваемой симметрией,  $f \mathcal{L}_B$  — член, нарушающий симметрию, и  $f$  — параметр, определяющий силу нарушающего симметрию взаимодействия, т. е. степень несохранения соответствующего тока, поскольку матричные элементы дивергенции тока пропорциональны  $f$ . Например, в рамках кварковой модели, рассмотрев калибровочное преобразование, связанное со странным векторным током, получим, что параметр  $f$  пропорционален разности ( $m_1 - m_2$ ) масс кварков, принадлежащих изоспиновому дублету и синглету.

В предельном случае сохраняющихся токов ( $f = 0$ ) соответствующие заряды связывают только состояния, принадлежащие одному и тому же мультиплету. Этим и объясняется на самом деле отсутствие эффектов перенормировки. В реальном случае мы можем классифицировать частицы по представлениям некоторой группы [ $SU(2)$ ,  $SU(3)$  и  $SU(3) \otimes SU(3)$ ], но это не значит, что физические состояния действительно образуют базис определенных представлений этих групп. Поскольку соответствующая симметрия более или менее нарушена, физические состояния содержат примеси бесконечного числа чистых состояний, образующих базис различных представлений рассматриваемых групп. Однако в примеси доминирует одно из состояний, по которому мы и классифицируем частицу, — именно то единственное, которое остается в предельном случае  $f = 0$ .

Вводя в коммутаторы зарядов полную систему *физических* промежуточных состояний, получаем в соответствующей сумме бесконечное число вкладов. Но если токи частично сохраняются, то среди бесконечного числа вкладов будет один, доминирующий в сумме. Это и есть тот фундаментальный член суммы, который остается в предельном случае точной симметрии. Остальные члены носят характер малых поправок к главному члену, возникающих из-за нарушения симметрии.

Переходя к количественному исследованию вопроса, введем для матричных элементов зарядов такое представление, которое будет удобно при описании тех из них, что исчезают в пределе точной симметрии.

Начнем с тождества

$$[Q^\alpha, H] = i \int d^3x D^\alpha(x), \quad (2.196)$$

где  $H$  — полный гамильтониан. Взяв в обеих частях тождества (2.196) матричные элементы между двумя физическими состояниями (которые являются собственными векторами оператора  $H$ !), тотчас же получаем требуемое представление

$$\langle b | Q^\alpha | a \rangle = i \frac{\langle b | D^\alpha | a \rangle}{E_a - E_b} (2\pi)^3 \delta^3(p_a - p_b). \quad (2.197)$$

Если в пределе точной симметрии состояния  $|b\rangle$  и  $|a\rangle$  не принадлежат одному представлению, то из равенства (2.197) сразу следует, что

$$\langle b | Q^\alpha | a \rangle = O(f), \quad (2.198)$$

так как матричный элемент  $Q^\alpha$  в этом случае определяется только членом  $\mathcal{L}_B$  из формулы (2.195). Если же  $|b\rangle$  и  $|a\rangle$  в пределе точной симметрии принадлежат одному и тому же представлению, то уравнение (2.197) формально остается в силе, но оно бесполезно: в этом случае разность  $E_a - E_b$  также фактически равна  $O(f)$ , поскольку из соотношения (2.195) следует, что

$$H = H_0 + fH_B. \quad (2.199)$$

Теперь легко можно показать, что ренормировочная константа  $r^T$  для несохраняющихся токов  $j_\mu^T$  отличается от своего предельного значения в случае точной симметрии только поправками второго порядка по  $f$ . В этом и состоит суть теоремы Адемолло — Гатто<sup>1)</sup>, которая утверждает, что

$$r^T = 1 + O(f^2). \quad (2.200)$$

Чтобы доказать соотношение (2.200), рассмотрим наиболее интересный для нас случай векторных токов, не сохраняющих странность. Начнем с коммутатора для двух  $V$ -спиновых зарядов противоположного знака:

$$[Q^{V^+}, Q^{V^-}] = Q^3 + \frac{3}{2} Q^Y. \quad (2.201)$$

Для примера возьмем в обеих частях равенства (2.201) матричные элементы между состояниями  $\pi^+$  с импульсами  $p_1$  и  $p_2$ :

$$\langle \pi^+(p_2) | [Q^{V^+}, Q^{V^-}] | \pi^+(p_1) \rangle = (2\pi)^3 2E_\pi \delta^3(p_2 - p_1). \quad (2.202)$$

Вставим полную систему промежуточных физических состояний и выберем среди вкладов основной, соответствующий  $\bar{K}^0$ -состоянию, единственному, которое дает в сумму отличный от нуля вклад и принадлежит тому же мульт-

<sup>1)</sup> В оригинальной работе Адемолло и Гатто [56] равенство (2.200) было выведено только на основе теории групп в предположении определенных трансформационных свойств гамильтониана  $H_B$  ( $H_B \sim Y$ ). Простой же вывод, изложенный нами, принадлежит Фубини и Фурлану [83]. См. также [84, 85].



тишлегу, что и пион. Пользуясь определением

$$\langle \bar{K}^0(p) | Q^{V^-} | \pi^+(p_1) \rangle = (2\pi)^3 (4E_\pi E_K)^{1/2} \delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) r_{K\pi}^V, \quad (2.203)$$

преобразуем (2.202) к следующему виду:

$$(r_{K\pi}^V)^2 2E_\pi (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \sum_n \langle p_2 | Q^{V^+} | n \rangle \langle n | Q^{V^-} | p_1 \rangle - \\ - \langle p_2 | Q^{V^-} | n \rangle \langle n | Q^{V^+} | p_1 \rangle = 2E_\pi (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2). \quad (2.204)$$

Выражая матричные элементы, исчезающие в пределе точной симметрии, по формуле (2.197) и вспоминая, что  $D^V = O(f)$ , из уравнения (2.204) немедленно получаем

$$(r_{K\pi}^V)^2 = 1 + O(f^2). \quad (2.205)$$

Коммутационное соотношение (2.201) позволяет очень просто установить, что физическая константа связи  $G^V$  отличается от затравочной  $G_0^V$  только ренормализационными эффектами, которые квадратично зависят от параметра  $f$ ; характеризующего нарушение симметрии.

Очевидно, что ценность данного результата зависит от величины параметра  $f$ . Если он мал, то должно выполняться равенство  $G^m \approx G_0^m$ . Если же параметр достаточно велик, то соотношение (2.200) остается в силе, но из него не следует никаких практических выводов. При этом различные гипотезы о квазисохранении, т. е. о частичном сохранении токов, будут иметь смысл только при условии малости параметра, характеризующего нарушение симметрии. Лишь тогда можно гарантировать приближенную универсальность констант связи, наблюдаемую в действительности.

### б. Универсальность в формулировке Гелл-Манна

Введение одновременных коммутационных соотношений для векторных и аксиальных зарядов позволило дать совершенно общее определение затравочных констант связи. Кроме того, мы нашли общий рецепт вычисления ренормировочных множителей — путем исследования явных выражений для членов, исчезающих в пределе точной симметрии.

Мы покажем сейчас, как путем таких же рассуждений можно обосновать общую структуру адронного слабого тока (2.179). Для этого воспользуемся общим определением универсальности для слабых взаимодействий.

Рассмотрим лептонные заряды  $V - A$  (левые заряды):

$$L^+ = \frac{1}{2} \int d^3x l_0(x) = \frac{1}{2} \int d^3x \{ e^\dagger (1 - \gamma_5) \nu_e + \dots \}, \\ L^- = (L^+)^\dagger, \quad (2.206) \\ L^3 = \frac{1}{2} \int d^3x l_0^3(x) = \frac{1}{2} \int d^3x \{ e^\dagger (1 - \gamma_5) e + \dots \}.$$

Напомним читателю, что эти операторы удовлетворяют алгебре  $SU(2)$  (§ 2, п. 3, а):

$$[L^+, L^-] = 2L^3, \quad (2.207) \\ [L^3, L^\pm] = \pm L^\pm.$$

По аналогии с (2.206) введем теперь слабые адронные заряды:

$$H^+ = \frac{1}{2} \int d^3x J_0(x), \quad (2.208) \\ H^- = (H^+)^\dagger,$$

где  $J_\mu$  — полный адронный слабый ток, общий вид которого таков:

$$J_\mu = a(V_\mu^{I^+} - A_\mu^{I^+}) + b(V_\mu^{V^+} - A_\mu^{V^+}). \quad (2.209)$$

Согласно Гелл-Манну [70, 78, 86], универсальность слабых взаимодействий обеспечивается, если потребовать, чтобы адронные заряды удовлетворяли тем же коммутационным соотношениям группы  $SU(2)$ , что и лептонные заряды:

$$[H^+, H^-] = 2H^3, \quad (2.210)$$

$$[H^3, H^\pm] = \pm H^\pm. \quad (2.211)$$

Из соотношения (2.210), пользуясь одновременными коммутаторами группы  $SU(3) \otimes SU(3)$ , находим в явном виде  $H^3$ :

$$H^3 = |a|^2 \frac{1}{2} (Q^3 - \bar{Q}^3) + |b|^2 \frac{1}{4} [(Q^3 - \bar{Q}^3) + \sqrt{3} (Q^8 - \bar{Q}^8)] - \\ - \frac{1}{4} ab^* (Q^{U^-} - \bar{Q}^{U^-}) - \frac{1}{4} a^* b (Q^{U^+} - \bar{Q}^{U^+}),$$

тогда как из соотношения (2.211) получаем

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad (2.212)$$

т. е.  $a = \cos \theta$ ,  $b = \sin \theta$ , так что снова

$$J_\mu = \cos \theta J_\mu^{J^+} + \sin \theta J_\mu^{V^+}. \quad (2.213)$$

Гелл-Мани и Неэман [87] доказали также, что если слабые заряды вида (2.213) удовлетворяют алгебре  $SU(2)$ , то отсюда следует справедливость алгебры  $SU(3) \otimes SU(3)$  для полного набора зарядов  $Q^\alpha$ ,  $\bar{Q}^\alpha$ .

Отметим, что мы не выделяем особо часть  $V$  или  $A$ , но сразу выбираем взаимодействие типа  $V - A$  и получаем автоматически общий угол  $\theta$ . Вообще говоря, можно было бы начать с такого выражения для  $J_\mu$ :

$$J_\mu = a_V V_\mu^{I^+} - a_A A_\mu^{I^+} + b_V V_\mu^{V^*} - b_A A_\mu^{V^*}. \quad (2.214)$$

Тогда требование, чтобы соответствующие векторный и аксиальный заряды подчинялись, как в случае лептонных токов, алгебре  $SU(2) \otimes SU(2)$ , приводит к равенствам

$$a_A = a_V, \quad b_A = b_V, \\ |a_V|^2 + |b_V|^2 = 1, \quad (2.215)$$

т. е.

$$\theta_V = \theta_A. \quad (2.216)$$

Универсальность векторных и аксиально-векторных констант связи относится к ненормированным величинам, которые однозначно определяются при изложенном подходе. Но практически для определения  $\theta$  по экспериментальным данным нужно точно знать, каковы эффекты перенормировки. В принципе их можно вычислить способом, схематически изложенным в предыдущем разделе. Этот вопрос мы оставим до гл. 8.

## 2. Коммутаторы токов и зарядов

В рамках кварковой модели было в явной форме доказано, что векторные и аксиальные кварковые токи преобразуются в пространстве  $SU(3)$  как члены регулярного представления<sup>1)</sup>:

$$[Q^\alpha(t), V_\mu^\beta(x, t)] = i f_{\alpha\beta\gamma} V_\mu^\gamma(x, t), \\ [Q^\alpha(t), A_\mu^\beta(x, t)] = i f_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\gamma(x, t). \quad (2.217)$$

Кроме того, при классификации на основе группы  $SU(3) \otimes SU(3)$  эти 16 токов преобразуются по регулярному представлению  $(1, 8) \oplus (8, 1)$ .

<sup>1)</sup> См. первое примечание на стр. 98. — *Прим. ред.*

Это значит, что в дополнение к соотношениям (2.217) мы также имеем соотношения

$$\begin{aligned} [\bar{Q}^\alpha(t), V_\mu^\beta(\mathbf{x}, t)] &= if_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\gamma(\mathbf{x}, t), \\ [\bar{Q}^\alpha(t), A_\mu^\beta(\mathbf{x}, t)] &= if_{\alpha\beta\gamma} V_\mu^\gamma(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (2.218)$$

Мы примем соотношения (2.217) и (2.218) как выражающие еще одно фундаментальное свойство слабых адронных токов [78]. Подчеркнем, что предположение о справедливости соотношений (2.217) и (2.218) — это простейшее предположение, совместимое с коммутационными соотношениями для скалярных и псевдоскалярных зарядов. Таким образом, исходя из требования простоты, мы принимаем гипотезу, что независимо от своего явного вида адронные слабые токи преобразуются по представлению  $(1, 8) \oplus \oplus (8, 1)$  группы  $SU(3) \otimes SU(3)$  (алгебре которой подчиняются заряды  $Q^\alpha$  и  $\bar{Q}^\alpha$ ). Как будет видно из дальнейшего, мы можем в какой-то мере проверить правильность этих предположений и, по-видимому, соотношения (2.217) и (2.218) имеют весьма солидное обоснование.

При исследовании многих проблем методами алгебры токов часто требуется знать более общие коммутаторы, чем только что установленные, а именно коммутаторы самих компонент токов.

Начнем с коммутатора зарядовых плотностей. Разумеется, мы всегда имеем в виду одновременные коммутаторы, поэтому из требования локальности (равенство нулю коммутатора, когда токовые координаты  $x$  и  $y$  разделены пространственно-подобным интервалом) вытекает перестановочное соотношение для зарядовых плотностей

$$[V_0^\alpha(\mathbf{x}, t), V_0^\beta(\mathbf{y}, t)] = a^{\alpha\beta}(x) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + b_k^{\alpha\beta}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \dots \quad (2.219)$$

с конечным числом производных функции Дирака<sup>1)</sup>.

Сформулируем гипотезу минимальности: коммутаторы токовых компонент содержат минимальное число градиентов функции Дирака, совместимое с другими наложенными условиями<sup>2)</sup>. Не вступая в противоречие с этой гипотезой, постулируем, что коммутатор  $[V_0^\alpha, V_0^\beta]$  не содержит градиентных членов, т. е. в правой части равенства (2.219) имеется лишь первый член. Тогда операторы  $a^{\alpha\beta}(x)$  фиксируются требованием, чтобы после интегрирования уравнения (2.219) по всему пространству мы получили коммутатор

$$[Q^\alpha(t), V_0^\beta(\mathbf{y}, t)] = if_{\alpha\beta\gamma} V_0^\gamma(\mathbf{y}, t), \quad (2.220)$$

откуда

$$a^{\alpha\beta}(x) = if_{\alpha\beta\gamma} V_0^\gamma(x). \quad (2.221)$$

Таким образом, мы постулируем, что для коммутатора (2.219) в общем случае справедливо соотношение

$$[V_0^\alpha(\mathbf{x}, t), V_0^\beta(\mathbf{y}, t)] = if_{\alpha\beta\gamma} V_0^\gamma(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.222)$$

которое эквивалентно предположению, что зарядовые плотности векторного тока порождают локальную алгебру  $SU(3)$  в каждой точке пространства.

Поскольку в кварковой модели известно, как токи выражаются через кварковые поля, можно вычислить коммутатор двух зарядовых плотностей.

<sup>1)</sup> Конечное число производных функций  $\delta^3(x)$  гарантирует, что степень нелокальности в коммутаторе (2.219) остается «малой».

<sup>2)</sup> См. следующий раздел, а также гл. 3, § 1 и гл. 7, приложение I, п. 4.

Простые выкладки, основанные на несложной формуле

$$\begin{aligned} [q^\dagger(\mathbf{x}) \Gamma \lambda^\alpha q(\mathbf{x}), q^\dagger(\mathbf{y}) \Gamma' \lambda^\beta q(\mathbf{y})] = \\ = \frac{1}{2} q^\dagger(\mathbf{x}) ([\Gamma, \Gamma'] \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} + \{\Gamma, \Gamma'\} [\lambda^\alpha, \lambda^\beta]) q(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (2.223)$$

показывают, что кварковая модель согласуется с предположением (2.222).

Коммутационные соотношения, содержащие зарядовые плотности аксиальных токов, выводятся по обычному правилу:

$$\begin{aligned} [A, V] &\rightarrow A, \\ [A, A] &\rightarrow V. \end{aligned}$$

Таким образом, эти 16 зарядовых плотностей порождают локальную алгебру  $SU(3) \otimes SU(3)$  в каждой точке пространства:

$$\begin{aligned} [V_0^\alpha(\mathbf{x}, t), V_0^\beta(\mathbf{y}, t)] &= if_{\alpha\beta\gamma} V_0^\gamma(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [V_0^\alpha(\mathbf{x}, t), A_0^\beta(\mathbf{y}, t)] &= if_{\alpha\beta\gamma} A_0^\gamma(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [A_0^\alpha(\mathbf{x}, t), A_0^\beta(\mathbf{y}, t)] &= if_{\alpha\beta\gamma} V_0^\gamma(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.224)$$

#### а. Ток-токовые коммутаторы

Перейдем теперь к коммутаторам, в которые входят пространственные компоненты токов, т. е. рассмотрим коммутаторы типа  $[j_0, j_k]$  и  $[j_k, j_l]$ . Их вид установлен не слишком надежно, а результат кварковой модели для этого случая несколько сомнителен. Полноты ради мы все же укажем, к каким выводам можно прийти на основании кварковой модели, если исходить из правила (2.223).

Коммутатор для временной и пространственной компоненты векторных токов оказывается равным

$$[V_0^\alpha(\mathbf{x}, t), V_k^\beta(\mathbf{y}, t)] = if_{\alpha\beta\gamma} V_k^\gamma(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.225)$$

Для коммутаторов чисто пространственных компонент конечный результат гораздо сложнее:

$$\begin{aligned} [V_k^\alpha(\mathbf{x}, t), V_l^\beta(\mathbf{y}, t)] = \left\{ if_{\alpha\beta\gamma} \delta_{kl} V_0^\gamma(\mathbf{x}, t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} i \delta_{\alpha\beta\gamma} \bar{q} \gamma_0 \sigma_{kl} q + i d_{\alpha\beta\gamma} \bar{q} \gamma_0 \sigma_{kl} \frac{1}{2} \lambda^\gamma q \right\} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (2.226)$$

где, как обычно,

$$\sigma_{kl} = \frac{i}{2} [\gamma_k, \gamma_l].$$

Мы видим, что коммутаторы разных пространственных компонент токов порождают новую разновидность объектов, т. е. пространственные компоненты кварковых токов не образуют замкнутой алгебры, как это имеет место для временных компонент. Отметим, однако, что в частном случае, когда рассматриваются коммутаторы одинаковых пространственных компонент разных токов, соотношение (2.226) сводится к очень простому результату

$$[V_i^\alpha(\mathbf{x}, t), V_i^\beta(\mathbf{y}, t)] = if_{\alpha\beta\gamma} V_0^\gamma(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.227)$$

Для коммутаторов, содержащих пространственные компоненты аксиальных токов, получаются аналогичные выражения.

В действительности приведенный выше способ вычисления коммутационных соотношений для плотностей тока слишком примитивен, и, как мы сейчас увидим, против некоторых из указанных результатов имеются серьезные возражения.

В самом деле, возьмем случай электромагнитного тока, для которого из соотношения (2.225) прямо следует

$$[j_0^{\text{эл.-м}}(\mathbf{x}, t), j^{\text{эл.-м}}(\mathbf{y}, t)] = 0. \quad (2.228)$$

Как показал Швингер [88], результат (2.228) противоречит физическому требованию, чтобы энергия была положительной, и поэтому должен быть соответствующим образом изменен. Действительно, из уравнения (2.228) следует

$$[j_0^{\text{эл.-м}}(\mathbf{x}, t), \nabla j^{\text{эл.-м}}(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad (2.229)$$

так что, используя уравнение непрерывности, в пределе  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  находим

$$[j_0^{\text{эл.-м}}(\mathbf{x}, t), \partial^0 j_0^{\text{эл.-м}}(\mathbf{x}, t)] = 0. \quad (2.230)$$

Вычислив вакуумное среднее обеих частей равенства (2.230) и подставив полный набор промежуточных состояний, получим

$$\sum_n E_n |\langle 0 | j_0^{\text{эл.-м}} | n \rangle|^2 = 0. \quad (2.231)$$

Поскольку для физических промежуточных состояний мы имеем  $E_n > 0$ , условие (2.231) требует равенства  $\langle 0 | j_0^{\text{эл.-м.}} | n \rangle = 0$  для всех  $|n\rangle$  что, как можно показать, приводит к равенству  $j_0^{\text{эл.-м.}}(\mathbf{x}) = 0$  в операторном смысле.

Таким образом, уравнение (2.228) не согласуется с требованием положительности энергии и метрики. О причинах такой несогласованности можно догадаться, если вернуться к вычислению, проведенному в рамках кварковой модели. Применив канонические антикоммутаторы, находим

$$[j_0^{\text{эл.-м}}(\mathbf{x}), j_k^{\text{эл.-м}}(\mathbf{y})] = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \{ \bar{\gamma}(\mathbf{x}) \gamma_{k\gamma}(\mathbf{y}) - \bar{q}_\alpha(\mathbf{y}) \gamma_{k\gamma}(\mathbf{x}) \}. \quad (2.232)$$

Из соотношения (2.232) видно, что равенство нулю правой части при  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  оказывается следствием взаимного уничтожения двух величин, которые, возможно, плохо определены при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ . Это значит, что в кварковой модели (и в любой другой модели, где токи даются билинейными операторными выражениями) коммутаторы токовых плотностей могут обладать сингулярностями высокого порядка. Для вычисления таких коммутаторов необходим предельный переход, который, однако, может оказаться весьма произвольным, т. е. конечный результат может зависеть от конкретного пути перехода к пределу.

Простой способ определить сингулярное произведение полевых операторов в одной и той же точке — принять в общем случае

$$V_\mu^\alpha(\mathbf{x}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{q} \left( \mathbf{x} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}, t \right) \gamma_\mu \frac{1}{2} \lambda^\alpha q \left( \mathbf{x} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}, t \right). \quad (2.233)$$

Тогда в первой части коммутационных соотношений (2.232) появляются дополнительные градиентные члены и, как нетрудно показать, их явный вид таков:

$$S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q^\dagger \left( \mathbf{x} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \right) \left\{ \gamma_0 \gamma_\mu \frac{1}{2} \lambda^\alpha, \gamma_0 \gamma_\nu \frac{1}{2} \lambda^\beta \right\} q \left( \mathbf{x} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \right) \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \nabla \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \quad (2.234)$$

+ члены высшего порядка по  $\varepsilon$ .

Чтобы получить представление о структуре градиентных членов в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , нужно исследовать их матричные элементы в рамках данной модели. Например, в случае свободных фермионов оказывается<sup>1)</sup>, что

$$\langle 0 | [j_0^{\text{эл.-м}}(\mathbf{x}), j_k^{\text{эл.-м}}(\mathbf{y})] | 0 \rangle \sim \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.235)$$

<sup>1)</sup> См., например, [89].

В случае же квантовой электродинамики, когда коэффициент при градиентном члене в низшем порядке теории возмущений представляет собой расходящийся интеграл, связанный с поляризацией вакуума, он обращается в нуль<sup>1)</sup> в результате согласованной регуляризации (метод Паули — Вилларса), так что мы опять приходим к соотношению (2.228).

Мы не будем далее углубляться в данный частный вопрос. Очевидно, что коммутационные соотношения, содержащие пространственные компоненты и связанные с ними градиентные члены, сильно зависят от выбранной модели, а коммутаторы кварковой модели оказываются далеко не простейшими. Поэтому в следующем разделе мы изложим простую и удобную модель, которая дает «минимальный» набор коммутаторов токовых плотностей.

### б. Коммутаторы алгебры полей

В рамках любой конкретной теоретико-полевой модели коммутационные соотношения между токами выводятся из тех или иных канонических коммутационных соотношений для полевых операторов. Например, в кварковой модели коммутаторы алгебры токов следуют из формул для токов, выраженных через кварковые поля, и из канонического антикоммутационного соотношения

$$\{\bar{q}_h(\mathbf{x}, t), q_l(\mathbf{y}, t)\} = \gamma_0 \delta_{hl} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Успехом алгебры токов подсказан новый подход, при котором токи рассматриваются как фундаментальные координаты, т. е. как канонические переменные.

Поскольку токи — векторные величины, крайне интересно было бы принять их за независимые векторные поля и исходя из этого написать канонические коммутационные соотношения сразу для токов.

Идентификация может быть проведена на основе тождества

$$j_\mu^\alpha(x) = C_{(\alpha)} \varphi_\mu^\alpha(x), \quad (2.236)$$

где  $\varphi_\mu^\alpha(x)$  — массивное векторное поле с теми же квантовыми числами, что и ток в левой части равенства (2.236) [ $J^P = 1^\mp$ ,  $\alpha$  — индекс группы  $SU(3)$ ]. Теперь уже нет никаких неоднозначностей в определении тока как локального оператора.

Тождество (2.236) — это теоретико-полевой вариант так называемой модели векторной доминантности, которая подробнее будет изложена в § 7. Вывод тождества (2.236) в рамках лагранжева метода, его точный смысл и присущие ему ограничения будут во всех подробностях рассмотрены в гл. 5; здесь же мы ограничимся тем, что изложим главную идею и результаты данного подхода.

Учитывая, что данная модель, по-видимому, оказывается особенно успешной применительно к  $SU(2)$ -векторным (сохраняющимся) токам, начнем с этого случая. Тогда  $\varphi_\mu^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) соответствует ненормированному полю  $\rho$ -мезона, рассматриваемого как стабильная частица с квантовыми числами  $J^P = 1^-$ ,  $I^G = 1^+$ .

В канонической теории поля предполагается, что пространственные компоненты  $\rho$ -поля являются независимыми переменными, коммутирующими при равных временах:

$$[\varphi_i^\alpha(\mathbf{x}, t), \varphi_j^\beta(\mathbf{y}, t)] = 0. \quad (2.237)$$

Тогда тождество (2.236) сразу же приводит к подобному же соотношению для коммутатора чисто пространственных токовых компонент  $[V_i^\alpha(\mathbf{x}), V_j^\beta(\mathbf{y})] = 0$ . Далее нам необходимо убедиться, что коммутаторы  $[V_0^\alpha, V_0^\beta]$ ,

<sup>1)</sup> См., например, [90].

$[V_0^\alpha, V^\beta]$  сохраняют стандартный вид и в то же время определяют швингеровские члены. Это требует некоторых усилий, так как оператор  $\varphi_0^\alpha$  не является независимой переменной и должен быть выражен через  $\varphi_i^\alpha$  и канонические импульсы  $\Pi_k^\alpha = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}_k^\alpha$ .

Таким образом, кое-что нам придется сказать и об  $\mathcal{L}$ . Подробные выкладки, которые мы отложим до гл. 5, приводят к следующей минимальной форме токовых коммутаторов:

$$[V_0^\alpha(\mathbf{x}), V_0^\beta(0)] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_0^\gamma(0) \delta^3(\mathbf{x}), \quad (2.238)$$

$$[V_0^\alpha(\mathbf{x}), V_k^\beta(0)] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_k^\gamma(0) \delta^3(\mathbf{x}) + i\delta_{\alpha\beta} \frac{c^2}{m_0^2} \partial_k \delta^3(\mathbf{x}), \quad (2.239)$$

$$[V_k^\alpha(\mathbf{x}), V_l^\beta(0)] = 0. \quad (2.240)$$

Кроме уравнения (2.240), другим замечательным отличием от кварковой модели оказывается то, что градиентный член в соотношении (2.239) есть конечное  $c$ -число. Это приводит к значительным упрощениям, поскольку, как будет видно из дальнейшего,  $c$ -числовые швингеровские члены могут быть явно выделены с самого начала и они оказываются несущественными почти во всех приложениях (одно из исключений — вычисление вакуумного среднего). Иначе обстоит дело, когда у нас  $q$ -числовые, т. е. операторные, швингеровские члены. Итак, в нашем распоряжении по меньшей мере одна модель, где ситуация особенно проста, и, хотя почти все наши результаты будут носить более общий характер, для ясности мы часто будем апеллировать к алгебре полей.

Обобщение уравнений (2.238) — (2.240) на другие токи, возможно, потребует некоторых усилий мысли, поскольку аксиальные  $SU(2)$ -токи и странные токи обоих типов не сохраняются и должны иметь также пропорциональные компоненты, пропорциональные  $\partial_\mu\varphi$ .

Мы воспользуемся идеей Ли, Вейнберга и Зумино [91] работать с такой лагранжиановой схемой, где все токи сохраняются и где выполняются обобщенные тождества

$$V_\mu^\alpha = cv_\mu^\alpha, \quad (2.241)$$

$$A_\mu^\alpha = ca_\mu^\alpha, \quad (2.242)$$

причем  $c$  — затравочная константа, одинаковая для обоих токов.

Затем, как мы уже делали, предположим, что все результаты относительно токовых коммутаторов остаются справедливыми и в реальной ситуации независимо от того, сохраняются или не сохраняются токи.

В итоге оказывается, что одновременные коммутаторы плотностей токов имеют вид ( $\alpha, \beta = 1, \dots, 8$ )

$$[V_0^\alpha(\mathbf{x}), V_0^\beta(0)] = [A_0^\alpha(\mathbf{x}), A_0^\beta(0)] = i f_{\alpha\beta\gamma} V_0^\gamma(0) \delta^3(\mathbf{x}), \quad (2.243)$$

$$[V_0^\alpha(\mathbf{x}), V_l^\beta(0)] = [A_0^\alpha(\mathbf{x}), A_l^\beta(0)] = i f_{\alpha\beta\gamma} V_l^\gamma(0) \delta^3(\mathbf{x}) + i \frac{c^2}{m_0^2} \delta_{\alpha\beta} \partial_l \delta^3(\mathbf{x}), \quad (2.244)$$

$$[V_k^\alpha(\mathbf{x}), V_l^\beta(0)] = [A_k^\alpha(\mathbf{x}), A_l^\beta(0)] = 0. \quad (2.245)$$

Кроме того,

$$[V_0^\alpha(\mathbf{x}), A_0^\beta(0)] = i f_{\alpha\beta\gamma} A_0^\gamma(0) \delta^3(\mathbf{x}), \quad (2.246)$$

$$[V_0^\alpha(\mathbf{x}), A_k^\beta(0)] = [A_0^\alpha(\mathbf{x}), V_k^\beta(0)] = i f_{\alpha\beta\gamma} A_k^\gamma(0) \delta^3(\mathbf{x}), \quad (2.247)$$

$$[A_k^\alpha(\mathbf{x}), V_l^\beta(0)] = 0. \quad (2.248)$$

В соотношении (2.244) величина  $m_0$  — это затравочная масса, одинаковая для всех векторных частиц модели. В связи с этим еще раз отметим, что одновременные коммутационные соотношения дают возможность определить

величину  $c^2/m_0^2$ . Наконец, можем заметить, что в смешанных коммутаторах  $[V_0, A_i] = [A_0, V_i]$  [соотношения (2.247)] нет швингеровских членов.

Наш предварительный анализ можно резюмировать следующим образом: при рассмотрении локальных коммутаторов, содержащих пространственные компоненты токов, в теории появляется сильная зависимость от модели. Поэтому крайне желательно найти строгие критерии, которые позволили бы сделать выбор между различными теоретико-полевыми моделями, такими, например, как кварковая модель и алгебра полей. Правда, существуют правила сумм<sup>1)</sup>, выражающие коэффициент производных от  $\delta^3(\mathbf{x})$  через интегралы по сечениям (например, по сечениям процесса  $e^+e^- \rightarrow$  адроны), но никаких определенных оснований для выбора той или иной модели пока еще нет<sup>2)</sup>.

### § 5. Сохраняющиеся и частично сохраняющиеся векторные токи

На основе кварковой модели мы установили, что существуют одновременные коммутаторы токов с простой алгебраической структурой. Кроме того, мы пришли к выводу, что при больших импульсах все токи должны быть асимптотически сохраняющимися, поскольку несохранение связано с наличием массовых членов. Но как показывает более тщательный анализ сохранения токов, в поведении различных токов наблюдаются резкие расхождения. Электромагнитные токи сохраняются точно; изоспиновые токи сохраняются, если отсутствует электромагнитное взаимодействие. Сохранение же странных векторных токов имеет место, когда выключены умеренно сильные взаимодействия. Наконец, мы увидим, что частичное сохранение аксиальных токов тесно связано с малостью массы псевдоскалярных бозонов (таких, как  $\pi$ -мезон). Эти различия обязательно следует учитывать при детальном анализе матричных элементов токов между адронными состояниями.

В данном параграфе мы проанализируем следствия частичного сохранения токов в процессах с одной лептонной парой (или одним реальным фотоном), которые характеризуются матричными элементами типа  $\langle B | J_\mu | A \rangle$ . Чтобы описать электрон-протонное рассеяние, электророждение и т. д., следует положить  $J_\mu = j_\mu^{\text{эл.-м}}, |A\rangle = |p\rangle, |B\rangle = |p\rangle$  или  $|B\rangle = |p\pi\rangle, \dots$ . Аналогично, чтобы описать слабые процессы, нужно положить  $J_\mu = J_\mu^{\text{слаб}}$ ; это соответствует описанию  $\beta$ -распада, распада пиона, рождения пиона в нейтринных реакциях и т. д. Процессы с более чем одной лептонной парой описываются матричными элементами упорядоченного по времени произведения нескольких токовых операторов. При исследовании таких процессов (в следующей главе) мы будем в основном опираться на алгебру токов и на свойства их частичного сохранения.

#### 1. Электромагнитные токи

Сначала кратко остановимся на некоторых хорошо известных свойствах матричных элементов электромагнитного тока. Детальное изучение электромагнитных свойств адронов выходит за рамки нашей книги. Но некоторые следствия точного сохранения тока

$$\partial^\mu j_\mu^{\text{эл.-м}} = 0, \quad (2.249)$$

например отсутствие перенормировки заряда и низкоэнергетические теоремы, могут служить весьма полезными ориентирами при интерпретации аналогичных результатов, вытекающих из алгебры токов.

<sup>1)</sup> См. гл. 6 и работу [89].

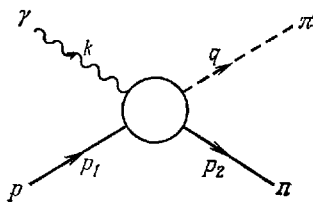
<sup>2)</sup> Хотя алгебра полей может претендовать на успех правил сумм Вейнберга [92], о которых будет сказано в гл. 6.



Рассмотрим конкретный пример — фоторождение заряженных пионов:



(кинематические переменные представлены на фиг. 2.2).



Фиг. 2.2

Покажем, что уравнение непрерывности (2.249) в сочетании с некоторыми простыми следствиями из аналитических свойств  $S$ -матричных элементов приводит к двум фундаментальным результатам:

1) пионный заряд точно равен изовекторному заряду нуклона (универсальность)<sup>1)</sup>;

2) справедлива теорема Кролла — Рудермана [93]. Фундаментальные переменные процесса таковы:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + k)^2, \\ \bar{s} &= (p_2 - k)^2, \\ t &= (q - k)^2. \end{aligned} \quad (2.251)$$

Поскольку масса фотона равна нулю, справедливо следующее соотношение:

$$(s - m_p^2) + (\bar{s} - m_n^2) + (t - m_\pi^2) = 0. \quad (2.252)$$

Физическую амплитуду фоторождения

$$T = e \varepsilon^\mu T_\mu,$$

где  $\varepsilon^\mu$  — вектор поляризации фотона и

$$T_\mu = i \langle p_2, q | j_\mu^{\text{оп.-м}} | p_1 \rangle, \quad (2.253)$$

можно выразить через полный набор инвариантов:

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu T_\mu = \bar{u} [ &\gamma_5 (\gamma \varepsilon) A + \gamma_5 (\gamma k) (\gamma \varepsilon) B + \gamma_5 (P \varepsilon) C + \gamma_5 (\gamma k) (P \varepsilon) D + \\ &+ \gamma_5 (q \varepsilon) E + \gamma_5 (\gamma k) (q \varepsilon) F ] u. \end{aligned} \quad (2.254)$$

В выражении (2.254)

$$P = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \quad (2.255)$$

и инвариантные функции  $A, B, C, D, E$  и  $F$  зависят от переменных  $s, \bar{s}, t$ , связанных соотношением (2.252); кроме того, поскольку мы имеем дело с реальным фотоном,

$$k \varepsilon = k^2 = 0. \quad (2.256)$$

Сохранение тока, налагая условие

$$k^\mu T_\mu = 0, \quad (2.257)$$

приводит к соотношениям

$$(Pk) C + (qk) E = 0, \quad (2.258)$$

$$A + (Pk) D + (qk) F = 0, \quad (2.259)$$

<sup>1)</sup> Излагаемое далее доказательство универсальности принадлежит Домби [94].

где

$$\begin{aligned} (Pk) &= \frac{1}{4} [(s - m_p^2) - (\bar{s} - m_n^2)], \\ (qk) &= \frac{1}{2} (m_\pi^2 - t). \end{aligned} \quad (2.260)$$

Посмотрим теперь, что произойдет с уравнениями (2.258) и (2.259) в точке

$$\begin{aligned} s &= m_p^2, \\ \bar{s} &= m_n^2, \\ t &= m_\pi^2, \end{aligned} \quad (2.261)$$

т. е. при

$$(Pk) = (qk) = 0. \quad (2.262)$$

Точка, определяемая равенствами (2.261), вообще говоря, находится вне физической области процесса фоторождения

$$s \geq (m_n + m_\pi)^2, \quad t \leq -\frac{m_\pi^2}{1 + \frac{m_\pi}{m_p}},$$

но ее можно достичь путем аналитического продолжения. Из структуры уравнений (2.258), (2.259) и (2.262), казалось бы, можно заключить, что благодаря наличию коэффициентов  $(Pk)$  и  $(qk)$  уравнение (2.258) выполняется автоматически, а из уравнения (2.259) следует равенство  $A$  нулю. Но это неверно, так как амплитуды имеют сингулярности полюсного типа:

- 1) протонный полюс при  $\bar{s} = m_p^2$ ,
- 2) нейтронный полюс при  $\bar{s} = m_n^2$ ,
- 3) пионный полюс при  $t = m_\pi^2$ .

Инвариантные функции имеют в этих полюсах следующие вычеты:

	Протон	Нейтрон	Пион	
$A$	0	0	0	} $(V\sqrt{2}g_{\pi N})$ .
$B$	$F_1^p + F_2^p$	$F_1^n + F_2^n$	0	
$C$	$2F_1^p$	$2F_1^n$	0	
$D$	$-2F_2^p/2m_p$	$-2F_2^n/2m_n$	0	
$E$	$F_1^p$	$-F_1^n$	$2F_\pi$	
$F$	$-F_2^p/2m_p$	$F_2^n/2m_n$	0	

Здесь мы использовали следующее определение соответствующих вершинных функций:

$$\langle N_2 | j_\mu^{\text{эл.-м}} | N_1 \rangle = \bar{u}_2 \left\{ \gamma_\mu (F_1^N + F_2^N) - \frac{F_2^N}{2m_N} (p_1 + p_2)_\mu \right\} u_1 \quad (N = p, n), \quad (2.264)$$

$$\langle \pi_2^+ | j_\mu^{\text{эл.-м}} | \pi_1^+ \rangle = (p_1 + p_2)_\mu F_\pi, \quad (2.265)$$

$$\langle n\pi^+ | p \rangle = i\sqrt{2} g_{\pi N} \bar{u}_n \gamma_5 u_p; \quad (2.266)$$

$F_1$  и  $F_2$  — дираковские формфакторы, нормированные согласно равенствам

$$eF_1^p(0) = e_p, \quad eF_1^n(0) = e_n, \quad (2.267)$$

$$F_2^p(0) = k_p, \quad F_2^n(0) = k_n, \quad (2.268)$$

и  $F_\pi$  — электромагнитный формфактор пиона,

$$eF_\pi(0) = e_{\pi^+}; \quad (2.269)$$

$e_p$ ,  $e_n$  и  $e_{\pi^+}$  — физические заряды протона, нейтрона и пиона <sup>1)</sup>, а  $k_p$  и  $k_n$  — аномальные магнитные моменты протона и нейтрона (в единицах  $e/2m$ );  $g_{\pi N}$  — физическая пион-нуклонная константа связи ( $g_{\pi N}^2/4\pi \approx 14,5$ ).

Вычислив левую часть равенства (2.258) в пределе, когда  $s$ ,  $\bar{s}$  и  $t$  стремятся к значениям (2.261), находим соотношение между вычетами полюсов функций  $S$  и  $E$ :

$$e_p - e_n = e_{\pi^+}, \quad (2.270)$$

откуда следует, что физический заряд  $\pi^+$  точно равен изовекторному нуклонному заряду.

Из уравнения (2.259) в том же пределе получаем, что амплитуда  $A$  конечна и дается формулой

$$A(s = m_p^2, \bar{s} = m_n^2, t = m_\pi^2) = -\frac{\sqrt{2} g_{\pi N}}{2m_N} (F_2^p - F_2^n). \quad (2.271)$$

Формулой (2.271) амплитуда  $A(m_p^2, m_n^2, m_\pi^2)$  точно выражается через аномальный магнитный момент нуклона и физическую пион-нуклонную константу связи  $g_{\pi N}$ . Как уже указывалось, для физических частиц кинематическая конфигурация (2.261) лежит вне физической области процесса фоторождения. Но соотношение (2.271) можно использовать в рамках дисперсионной теории, взяв, например, точку (2.261) в качестве удобной точки для проведения вычитаний.

В идеализированном случае нулевой пионной массы (который вскоре станет для нас привычным!) точка (2.261) будет соответствовать порогу фоторождения, а уравнение (2.271) будет выражением низкоэнергетической теории. Нетрудно сообразить, что (при  $m_\pi = 0$ ) уравнение (2.271) эквивалентно теореме Кролла — Рудермана [93], согласно которой для полной физической амплитуды фоторождения

$$T = e\varepsilon^\mu T_\mu \quad (2.272)$$

должно выполняться предельное соотношение

$$\lim_{q_\mu, k_\mu \rightarrow 0} T = -\sqrt{2} g_{\pi N} e (\sigma\varepsilon). \quad (2.273)$$

Соотношение (2.273) проще всего вывести из равенства (2.271), если взять прежде всего случай рассеяния вперед ( $q = k$ ,  $p_1 = p_2 = p$ ) и затем соответствующую калибровку  $(p\varepsilon) = 0$ , выполняющуюся при  $\varepsilon_0 = 0$  и  $\mathbf{p} = 0$ . Тогда уравнение (2.254) приводится к виду

$$\varepsilon^\mu T_\mu = \bar{u} \left( A_1' - \frac{\nu}{m} B \right) \gamma_5 \gamma_\mu u \varepsilon^\mu. \quad (2.274)$$

При этом нужно воспользоваться следующим тождеством, справедливым в случае рассеяния вперед:

$$\bar{u} \gamma_5 (\gamma k) \gamma_\mu u = -\frac{\nu}{m_N} \bar{u} \gamma_5 \gamma_\mu u + \frac{p_\mu}{m_N} \bar{u} \gamma_5 (\gamma k) u, \quad (2.275)$$

где

$$\nu = pk. \quad (2.276)$$

Теперь учтем, что при  $\nu \rightarrow 0$  должно выполняться [формула (2.263)] соотношение

$$\frac{\nu B}{m_N} = -\frac{\sqrt{2} g_{\pi N}}{2m_N} \{ (F_1^p - F_1^n) + (F_2^p - F_2^n) \} + O(\nu). \quad (2.277)$$

<sup>1)</sup> Поскольку все сказанное относится к любой группе адронов, мы ради общности вводим для нейтронного заряда особый символ  $e_n$  (хотя  $e_n = 0$ ).

Уравнение (2.274) вместе с формулами (2.272), (2.274) и (2.277) дает немедленно соотношение

$$\lim_{q, h \rightarrow 0} T = - \frac{\sqrt{2} g_{\pi N}}{2m_N} \bar{e} u \gamma_5 (\gamma \epsilon) u, \quad (2.278)$$

т. е. искомую теорему Кролла — Рудермана (2.273), поскольку  $\gamma_0 \gamma_5 (\gamma \epsilon) = (\sigma \epsilon)$ .

## 2. Слабые векторные токи

В изящной схеме, предложенной Гелл-Манном и Кабиббо, слабые векторные токи адронов отождествляются с  $I$ - и  $V$ -спиновыми токами и, следовательно, как и соответствующие  $SU(3)$ -генераторы, обладают некоторыми фундаментальными свойствами сохранения или частичного сохранения. Нам кажется целесообразным в данном разделе более обстоятельно изложить те практические результаты, касающиеся матричных элементов полуплеетонных распадов, которые оказываются следствием этих свойств.

### а. Токи, сохраняющие странность

Начнем с распадов, сохраняющих странность. Вспомним, в частности, что установленные путем анализа  $\beta$ -распада трансформационные свойства тока  $J_\mu = V_\mu - A_\mu$  (как члена изовекторного триплета), а также приближенное равенство (векторных) констант  $\beta$ - и  $\mu$ -распада привели к гипотезе сохранения векторного тока (СВТ) [95—97]. Как хорошо известно, эта гипотеза состоит в том, что векторную часть адронного тока, ответственную за  $\beta$ -распад, принимают равной

$$V_\mu = V_\mu^{I+}, \quad (2.279)$$

и, следовательно, если пренебречь электромагнитными эффектами, то

$$\partial^\mu V_\mu^{I+} = 0. \quad (2.280)$$

В силу теоремы об отсутствии перенормировки это уравнение позволяет нам сформулировать предположение об универсальности затравочных величин (относительно сильных взаимодействий) в виде утверждения о равенстве наблюдаемых векторных констант связи. Конечно, это не относится к аксиально-векторной части, поскольку ток  $A_\mu^{I+}$  не сохраняется, что делает возможным его перенормировку, при которой затравочная  $V - A$ -структура заменяется экспериментально наблюдаемым отношением ренормированных констант  $r_A = G_A/G_V \approx 1,2$ .

Из гипотезы СВТ вытекает много важных следствий, допускающих прямую проверку. Так, при любом передаваемом импульсе матричный элемент слабого векторного тока можно выразить через матричный элемент электромагнитного тока, причем их отношение равно просто коэффициенту Клебша — Гордана. Напомним некоторые следствия из гипотезы СВТ.

### 1) Слабый магнетизм

В данном случае лучше всего исходить из самого общего выражения для электромагнитной вершины нуклона. Поскольку

$$j_\mu^{\text{эл.-м}} = j_\mu^{\text{изовект}} + j_\mu^{\text{изоскал}}, \quad (2.281)$$

можно написать выражение

$$\langle p_2 | j_\mu^{\text{эл.-м}} | p_1 \rangle = \bar{u}_2 \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{2} (F_1^S + F_1^V \tau_3) + \frac{i}{2m_N} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \frac{1}{2} (F_2^S + F_2^V \tau_3) \right\} u_1, \quad (2.282)$$

в котором нуклонная вершина разложена по дираковским формфакторам  $F_1, F_2$ . Формфакторы для протонного и нейтронного состояний таковы:

$$\begin{aligned} F_{1,2}^p &= \frac{1}{2} (F_{1,2}^S + F_{1,2}^V), \\ F_{1,2}^n &= \frac{1}{2} (F_{1,2}^S - F_{1,2}^V). \end{aligned} \quad (2.283)$$

Тогда, используя условия нормировки  $F_1^p(0) = 1, F_1^n(0) = 0, F_2^p(0) = k_p \approx 1,79, F_2^n(0) = k_n \approx -1,91$  (аномальные магнитные моменты), получаем, что

$$\begin{aligned} F_1^S(0) &= F_1^V(0) = 1, \\ F_2^S(0) &= k_p + k_n \approx -0,12, \\ F_2^V(0) &= k_p - k_n \approx 3,70. \end{aligned} \quad (2.284)$$

Обратимся теперь к векторной части<sup>1)</sup> матричного элемента, ответственного за  $\beta$ -распад,

$$M = G \cos \theta \langle e^- \bar{\nu}_e | l^\mu | 0 \rangle \langle p | V_\mu^{I+} | n \rangle. \quad (2.285)$$

Положим<sup>2)</sup>

$$\langle p_2 | V_\mu^{I+} | p_1 \rangle = \bar{u}_2 \left\{ \gamma_\mu F_1^+(q^2) + \frac{i}{2m_N} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2^+(q^2) \right\} \tau_+ u_1. \quad (2.286)$$

Поскольку  $V_\mu^{I+}$  и  $V_\mu^3$  — члены одного и того же изотриплета, матричные элементы (2.282) и (2.286) связаны между собой изоспиновым вращением, так что

$$F_{1,2}^+(q^2) = F_{1,2}^V(q^2). \quad (2.287)$$

В частности, при  $q^2 = 0$  мы снова получаем теорему об отсутствии перенормировки:

$$F_1^+(0) = 1, \quad (2.288)$$

а также новое условие

$$F_2^+(0) = k_p - k_n \approx 3,70. \quad (2.289)$$

В равенстве (2.289) выражается факт существования слабого магнетизма, на что впервые указал Гелл-Манн [111]. Поскольку передаваемый импульс при  $\beta$ -распаде нейтрона мал, равенство (2.289) можно проверить по данным о  $\beta$ -распаде ядер. В соответствии с остроумным предложением Гелл-Манна [111] в ряде лабораторий была проведена такая проверка путем сравнения распадов ядер  $^{12}\text{N}, ^{12}\text{B}$  и  $^{12}\text{C}^*$  в основное состояние ядра  $^{12}\text{C}$  с  $\beta^+, \beta^-$  и  $\gamma$ -переходами. Экспериментальные данные полностью согласуются с гипотезой СВТ<sup>3)</sup>.

## 2) Пионный $\beta$ -распад

Из свойств инвариантности следует, что [распад  $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$  определяется только матричным элементом  $\langle \pi^0 | V_\mu^{I-} | \pi^+ \rangle$ . Имеем

$$\langle \pi_2^0 | V_\mu^{I-} | \pi_1^+ \rangle = (p_1 + p_2)_\mu F^+(q^2) \sqrt{2}. \quad (2.290)$$

Рассуждая так же, как и ранее, выражение (2.290) можно связать с электромагнитной пионной вершиной

$$\langle \pi_2^+ | V_\mu^3 | \pi_1^+ \rangle = (p_1 + p_2)_\mu F_\pi(q^2). \quad (2.291)$$

<sup>1)</sup> Чисто векторный переход можно проанализировать, рассмотрев ядерные ферми-переходы, например  $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N} + e^+ + \nu_e$ .

<sup>2)</sup> Член, пропорциональный  $q_\mu$ , не может существовать, поскольку ток сохраняется. Впрочем, это следует уже из симметрии относительно обращения времени и зарядовой симметрии.

<sup>3)</sup> Относительно литературы по данному вопросу см. [66, стр. 445].

Тогда

$$F^+(q^2) = F_\pi(q^2) \quad (2.292)$$

и можно вычислить вероятность процесса ( $q^2 \approx 0$ ). Теоретическое значение (при  $\cos \theta \approx 1$ )

$$\frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} \approx 1,05 \cdot 10^{-8} \quad (2.293)$$

согласуется с экспериментальным <sup>1)</sup>  $(1,03 \pm 0,07) \cdot 10^{-8}$ .

### 3) Бета-распад $\Sigma$ -гиперона

Рассмотрим, наконец, процесс  $\Sigma^+ \rightarrow \Lambda + e^+ + \nu_e$ . Поскольку

$$\langle \Lambda | V_\mu^{I-} | \Sigma^+ \rangle = \langle \Lambda | V_\mu^3 | \Sigma^0 \rangle = \bar{u}_\Lambda \sigma_{\mu\nu} q^\nu \frac{f(q^2)}{2m} u_\Sigma, \quad (2.294)$$

при  $q \approx 0$  векторная часть не дает вклада, что опять-таки согласуется с экспериментом.

Итак, можно заключить, что, по крайней мере при малых  $q$ , экспериментальная проверка изоспиновой структуры адронных токов подтверждает справедливость гипотезы СВТ.

### 4) Определение угла Кабиббо путем анализа распадов, сохраняющих странность

Мы еще не затрагивали вопрос об определении параметра  $\cos \theta$ , введение которого диктуется как эффектами подавления распадов, подчиняющихся правилу  $\Delta S = \Delta Q$ , так и малыми отклонениями от равенства  $G = G_0^{(I)}$ , следующего из утверждения об универсальности. Поскольку при таком анализе нам предстоит выявить весьма тонкие эффекты, мы должны учитывать электромагнитные поправки.

При наличии электромагнитных взаимодействий векторные токи  $V_\mu^{I\pm}$  нельзя более считать сохраняющимися, и наряду с хорошо известными следствиями этого (например, появление электромагнитной разности масс частиц, входивших первоначально в один мультиплет) теперь возможны и эффекты перенормировки. Таким образом, вид вершин (2.286) и (2.290) будет более сложным: будут отличными от нуля члены с  $q_\mu$ , а  $F_{\frac{1}{2}, 2}^+$  будут отличаться от электромагнитных формфакторов членами порядка  $e^2$ .

Итак, чтобы проверить универсальность и найти  $\cos \theta$ , необходимо учесть электромагнитные поправки порядка  $e^2$ . Это не так просто, ибо на самом деле необходимо вычислить множество радиационных поправок к  $\beta$ -распаду, чтобы найти по экспериментальному значению времени жизни «голую» (теперь уже относительно электромагнитных взаимодействий) величину  $G_0^{(I)} = G \cos \theta$ .

К сожалению, в случае  $\beta$ -распада результат вычисления оказывается расходящимся <sup>2)</sup>. В первых приближенных вычислениях нуклон трактовался как голый фермион и использовалась процедура обрезания. Что касается векторной части, то вычисления, проведенные недавно на основе алгебры токов, практически подтверждают этот результат. Поправки же, связанные с аксиально-векторной частью, в значительной степени модельно-зависимы, и теоретическая картина еще не совсем ясна.

<sup>1)</sup> Оба численные значения взяты из работы [69, стр. 266].

<sup>2)</sup> Величину  $G$  можно точно найти путем анализа  $\mu$ -распада, поскольку в этом случае электромагнитные поправки конечны [формула (2.49)]. Литературу и подробное обсуждение этого и рассматриваемых далее вопросов можно найти, например, в работе [106].

Взяв конкретную модель [99], исходя из данных о скорости распада ядра  $^{14}\text{O}$ , получаем

$$\frac{G_0^{(I)}}{G} = \cos \theta = \frac{1,4032 \pm 0,0026}{1,43506 \pm 0,00026} = 0,9778 \pm 0,0018, \quad (2.295)$$

т. е.

$$\sin \theta = 0,2095 \pm 0,0086. \quad (2.296)$$

### б. Токи, не сохраняющие странность

Перейдем теперь к полулептонным распадам с изменением странности. Их векторная часть описывается  $V$ -спиновым током  $V_\mu^{V+}$ , который не сохраняется, причем его дивергенция — того же порядка величины, что и нарушение  $SU(3)$ -симметрии. Поэтому мы не можем рассуждать так, как в предыдущем разделе:  $V$ -спиновые векторные заряды будут теперь ренормироваться и  $V$ -спиновая токовая вершина адронов будет отличаться от соответствующей электромагнитной вершины. Чтобы сделать какие-либо теоретические выводы, теперь нужна некоторая информация (или гипотезы, заменяющие такую информацию) о характере нарушения  $SU(3)$ -симметрии. Например, уже из изложенного нами доказательства теоремы Адемолло — Гатто видно, как можно вычислить отклонение (во втором порядке) ренормировочного множителя от единицы, если заданы матричные элементы дивергенции  $\partial^\mu V_\mu^{V+}$ .

#### 1) $K_{l3}$ -распад

Рассмотрим в качестве простой иллюстрации случай  $K_{l3}$ -распада  $K \rightarrow \pi + l + \bar{\nu}_l$ . Матричный элемент такого перехода имеет вид

$$M = G \sin \theta \langle l \nu_l | l^\mu | 0 \rangle \langle \pi^0 | V_\mu^{V-} | K^+ \rangle, \quad (2.297)$$

где из соображений инвариантности берется только векторная часть адронного тока. Самое общее выражение для адронной вершины

$$\langle \pi^0 | V_\mu^{V-} | K^+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (p_K + p_\pi)_\mu f_+(q^2) + (p_K - p_\pi)_\mu f_-(q^2) \}, \quad (2.298)$$

$$q^2 = (p_K - p_\pi)^2$$

содержит два вещественных формфактора:  $f_+(q^2)$  и  $f_-(q^2)$ . Из этого выражения легко получить следующую формулу:

$$\langle \pi^0 | \partial^\mu V_\mu^{V-} | K^+ \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \{ m_\pi^2 - m_K^2 \} f_+(q^2) - q^2 f_-(q^2), \quad (2.299)$$

откуда видно, что в любом случае формфактор  $f_-$  должен быть того же порядка, что и члены, нарушающие  $SU(3)$ -симметрию (такие, например, как  $m_\pi^2 - m_K^2$  и  $\partial^\mu V_\mu^{V-}$ ). Поэтому в пределе точной  $SU(3)$ -симметрии мы имеем  $f_-(q^2) = 0$ , и  $SU(3)$ -поворот приводит к равенству  $f_+(q^2) = F_\pi(q^2)$ . Итак, в пределе точной  $SU(3)$ -симметрии снова получаем  $r_{K\pi} \equiv f_+(0) = F_\pi(0) = 1$ .

Реальная физическая ситуация соответствует нарушенной  $SU(3)$ -симметрии, и, следовательно, нужно вычислять оба формфактора  $f_\pm(q^2)$ .

Взяв случай распада  $K \rightarrow \pi + e + \bar{\nu}_e$ , в котором вклад формфактора  $f_-$ , вероятно, пренебрежимо мал, попытаемся найти по измеренной вероятности распада угол Кабиббо. Предполагая, что зависимость  $f_+$  от  $q^2$  определяется  $K^*$ -мезонным обменом<sup>1)</sup>, и используя экспериментальное зна-

<sup>1)</sup> См., например, [99]. Численное значение (2.300), а также отношение (2.308) зависят от этого предположения.

чение вероятности распада  $K_{l3}$ , получаем

$$f_+(0) \sin \theta = 0,21 \pm 0,01. \quad (2.300)$$

Если в разности  $f_+(0) - 1$  пренебречь поправками второго порядка, то, исходя из равенства (2.300), можно найти угол Кабиббо (который в данном контексте является «голой» величиной). При таком условии и проводил свои первоначальные вычисления Кабиббо [82], но для окончательной проверки теории, очевидно, необходимо оценить  $f_+(0)$  количественно.

Весьма убедительные рассуждения, основанные на формализме алгебры токов, развитом в гл. 8, приводят к заключению, что  $f_+(0) + 1$  и, первый расчет [84] дал  $f_+(0) \approx 0,96$  (гл. 8, § 5, п. 2) в согласии с теоремой Адемолло — Гатто. При таком значении  $f_+(0)$  имеем

$$\sin \theta \approx 0,22. \quad (2.301)$$

Правда, другой расчет [98] предсказывает значительно бóльшие поправки, а именно  $f_+(0) \approx 0,85$ , так что в вопросе о факторе  $f_+(0)$  пока нет полной ясности. Но согласие между результатами (2.301) и (2.296) можно считать весьма обнадеживающим.

## 2) $K_{l2}$ -распад

Независимый метод определения угла  $\theta$  основан на распадах, индуцируемых одним только аксиально-векторным током. Более обстоятельному исследованию свойств аксиальных токов мы посвятим следующие разделы, а здесь затронем лишь некоторые моменты, связанные с определением угла Кабиббо. Рассмотрим процессы  $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ ,  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ , матричные элементы которых таковы:

$$M_K = G \left\{ \begin{array}{l} \sin \theta \\ \cos \theta \end{array} \right\} \langle \mu^+ \nu_\mu | l^\mu | 0 \rangle \langle 0 | A_\mu | \pi^+ \rangle. \quad (2.302)$$

В силу свойств инвариантности получаем

$$\langle 0 | A_\mu^{l^-} | \pi^+ \rangle = i q_{\pi\mu} f_\pi \sqrt{2} \equiv i q_{\pi\mu} f_\pi^{(c)}, \quad (2.303)$$

$$\langle 0 | A_\mu^{V^-} | K^+ \rangle = i q_{K\mu} f_K, \quad (2.304)$$

где  $f_\pi$ ,  $f_K$  — феноменологические параметры. Тогда из отношения

$$\frac{\Gamma(K \rightarrow \mu\nu)}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu)} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \left( \frac{f_K}{f_\pi^{(c)}} \right)^2 \frac{(\text{фазовое пространство})_K}{(\text{фазовое пространство})_\pi} \quad (2.305)$$

находим

$$\frac{f_K}{f_\pi^{(c)}} \operatorname{tg} \theta \approx 0,27. \quad (2.306)$$

В пределе точной  $SU(3)$ -симметрии отношение  $f_K/f_\pi^{(c)}$  равно единице, и если пренебречь поправками к этому предельному значению [хотя они представляют собой величины *первого* порядка по нарушению  $SU(3)$ -симметрии], то получим

$$\sin \theta = 0,2655 \pm 0,0006. \quad (2.307)$$

Очевидно, что при  $f_K/f_\pi^{(c)} > 1$  результат будет еще ближе к значению (2.301), полученному путем анализа мезонных векторных распадов, и тем самым будет подтверждена гипотеза универсальности.

Но такая оценка отношения  $f_K/f_\pi^{(c)}$  все еще отсутствует. Если исходить из универсальности, то, исключив  $\theta$  из уравнений (2.300) и (2.306), в хорошем приближении получим

$$\frac{f_K}{f_\pi^{(c)}} \frac{1}{f_+(0)} \approx 1,28. \quad (2.308)$$



### 3) Полулептонные распады гиперонов

В заключение скажем несколько слов об описании полулептонных распадов гиперонов (например,  $\Sigma \rightarrow N + l + \tilde{\nu}_l$ ) в рамках теории Кабиббо.

Корректный анализ показывает, что структура матричных элементов токов  $V_\mu$ ,  $A_\mu$ , взятых между барионными состояниями, очень сложна: каждая вершина содержит теперь три формфактора и только в пределе точной  $SU(3)$ -симметрии они могут быть связаны  $SU(3)$ -вращением с соответствующими изоспиновыми формфакторами (в частности, часть их, например, те, что умножаются на  $q_\mu$  и  $\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5$ , в этом пределе обращается в нуль).

Поскольку теоретически члены, нарушающие  $SU(3)$ -симметрию, еще не рассчитаны, при вычислении матричных элементов мы вынуждены ограничиваться предельным случаем точной  $SU(3)$ -симметрии. (Именно так и поступил Кабиббо [82], когда выдвинул свою гипотезу.) Далее, пренебрегая зависимостью от  $q_\mu$  (что, по-видимому, вполне допустимо при рассматриваемых значениях  $q^2$ ), получаем окончательно следующее простое выражение:

$$\langle B_\beta | J_\mu^\nu | B_\alpha \rangle = \bar{u}_2 [if_{\beta\gamma\alpha}\gamma_\mu(1 - F\gamma_5) - d_{\beta\gamma\alpha}D\gamma_\mu\gamma_5] u_1,$$

где  $F + D = r_A \approx 1,2$ , и поэтому единственный свободный параметр — величина  $\alpha = D/(F + D)$ .

Оптимальная подгонка к экспериментальным данным по гиперонным распадам дает

$$\alpha \approx 0,66, \quad (2.309)$$

откуда для  $\theta$  получаются значения, лишь качественно согласующиеся со значениями, которые приводились в предыдущих разделах <sup>1)</sup>.

Из нашего краткого обзора можно сделать заключение, что в грубых чертах экспериментальные данные подтверждают теорию Кабиббо в том смысле, что все способы экспериментального определения угла  $\theta$  обнаруживают обнадеживающую тенденцию к согласию. Но для окончательной проверки гипотезы универсальности нужно уметь точно рассчитывать радиационные поправки, а также члены, нарушающие  $SU(3)$ -симметрию. Можно думать, что более глубокое исследование механизма нарушения симметрии  $SU(3)$  [и  $SU(3) \otimes SU(3)$ ] позволит нам окончательно подтвердить теорию.

### § 6. Аксиальные токи

Теперь рассмотрим общие свойства аксиальных токов. Начнем, как обычно, с токов, сохраняющих странность. В рамках кварковой модели уже было показано, что для адронных аксиальных токов «голая» константа связи с лептонами такая же, как и для векторных токов. Фактическое же отклонение физической константы связи от значения, предписываемого универсальностью, можно интерпретировать как эффект сильных взаимодействий. В самом деле, Адлер [57] и Вейсбергер [58] показали, что отклонение отношения  $r_A^2 = (G_A/G_V)^2 \approx (1,2)^2$  от единицы можно строго вычислить как результат перенормировки в виде интеграла по сечениям процессов сильного взаимодействия <sup>2)</sup>.

В то же время мы видели, что в рамках кварковой модели точное сохранение аксиального тока требует равенства нулю масс кварков. Отсюда можно заключить, что сохранение аксиального тока, по крайней мере в такой форме, в какой его принято себе представлять, по-видимому, чуждо природе. Если

<sup>1)</sup> Авторы работы [99] приводят следующий результат:  $\alpha \approx 0,66$ ,  $\sin \theta_V \approx 0,19$ ,  $\sin \theta_A \approx 0,28$ , где  $\theta_V$  и  $\theta_A$  — своего рода «перенормированные» углы, введенные, чтобы учесть эффекты, нарушающие  $SU(3)$ -симметрию.

<sup>2)</sup> Вычисления Адлера — Вейсбергера будут рассматриваться в гл. 3 и 8.

фундаментальной частицей считать пуклон, то, очевидно, тоже ничто не изменится, поскольку приближение  $2m_N \rightarrow 0$  нельзя считать очень хорошим, по крайней мере в области явлений, где фигурируют частицы с массой, измеряющейся в гигаэлектронвольтах.

Мы увидим, что механизм и, конечно же, физические следствия частичного сохранения аксиальных токов носят совершенно иной характер и тесно связаны с малостью пионной массы. Это фундаментальное положение впервые четко сформулировал Намбу [107—110].

Придерживаясь такой точки зрения, рассмотрим сначала фундаментальный матричный элемент тока между вакуумным и однопионным состояниями

$$\langle 0 | A_\mu^\alpha | \pi^\beta \rangle = i \delta_{\alpha\beta} f_\pi q_\mu, \quad (2.310)$$

который ответствен за распады  $\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu$  и  $\pi \rightarrow e + \nu_e$ . Здесь  $q_\mu$  — пионный 4-импульс, а  $f_\pi$  — константа пионного распада, экспериментальное значение которой таково <sup>1)</sup>:

$$f_\pi^{\text{эксп}} \approx 0,68 m_\pi. \quad (2.311)$$

Возьмем дивергенцию от обеих частей равенства (2.310) и введем обозначение

$$\partial^\mu A_\mu^\alpha = \bar{D}^\alpha. \quad (2.312)$$

Тогда

$$\langle 0 | \bar{D}^\alpha | \pi^\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} f_\pi m_\pi^2. \quad (2.313)$$

Таким образом, для того чтобы аксиальный ток строго сохранялся, следует приравнять нулю либо  $f_\pi$ , либо  $m_\pi^2$ . Первый вариант означал бы, что точная киральная инвариантность приводит к правилу отбора, запрещающему пионный распад. Вторым вариантом,  $m_\pi^2 = 0$ , означает, что аксиальный ток строго сохраняется только в пределе нулевой пионной массы. Природа, по-видимому, предпочитает второй вариант.

Чтобы исследовать данный вопрос более обстоятельно, рассмотрим матричный элемент аксиального тока между нуклонными состояниями. В силу хорошо известных свойств инвариантности (в том числе зарядовой симметрии и симметрии относительно отражения времени) можем написать

$$\langle N(p_2) | A_\mu^\alpha | N(p_1) \rangle = \bar{u}(p_2) [\gamma_\mu G_1(q^2) + q_\mu G_2(q^2)] \gamma_5 \frac{1}{2} \tau^\alpha u(p_1), \quad (2.314)$$

где

$$q_\mu = (p_2 - p_1)_\mu \quad (2.315)$$

и величина  $G_1(q^2)$  нормирована так, что

$$G_1(0) = r_A \approx 1,2. \quad (2.316)$$

Матричный элемент дивергенции дается выражением

$$\langle p_2 | \bar{D}^\alpha | p_1 \rangle = i \bar{u}(p_2) \gamma_5 \frac{1}{2} \tau^\alpha u(p_1) G_D(q^2) \quad (2.317)$$

при

$$G_D(q^2) = 2m_N G_1(q^2) + q^2 G_2(q^2). \quad (2.318)$$

Посмотрим снова, при каких условиях строго сохраняется аксиальный ток, т. е. выполняется равенство  $G_D = 0$ . Пример моделей, подобных кварковой, и аналогия с лептонными токами подсказывают, что для этого должны

<sup>1)</sup> См., например, [69, стр. 271]. Заметим, что наша величина  $f_\pi$  отличается от использованной в работе [69] в  $\sqrt{2}$  раз.

одновременно выполняться равенства

$$\begin{cases} m_N = 0, \\ G_2(q^2) = 0, \end{cases} \quad (2.319)$$

т. е. одновременно должны равняться нулю масса нуклона и «псевдоскалярный» член токового матричного элемента. Поскольку эти условия не соответствуют физической реальности, мы потребуем, чтобы сохранение аксиального тока обеспечивалось взаимным уничтожением членов с  $G_1$  и  $G_2$ , т. е. равенством

$$2m_N G_1(q^2) + q^2 G_2(q^2) = 0. \quad (2.320)$$

Правда, если положить в формуле (2.320)  $q^2 = 0$ , то, казалось бы, мы опять приходим к равенству  $G_1(0) = 0$ , которое противоречит опыту. Но это кажущееся противоречие, поскольку  $G_2(q^2)$  имеет полюс при  $q^2 = 0$ , связанный с наличием безмассовой частицы (т. е. пиона!), так что  $\lim_{q^2 \rightarrow 0} q^2 G_2(q^2) \neq 0$ .

Как будет показано в следующем разделе, это приводит к хорошо известной формуле Голдбергера — Треймана [112].

Наконец, так как дивергенции аксиальных токов представляют собой операторы, изменяющие пространственную четность, интересно выяснить, какие условия накладывает эффект сохранения аксиального тока на матричные элементы  $A_\mu^\alpha$  между состояниями противоположной четности.

В частности, мы рассмотрим «дублет по четности», состоящий из нуклона  $N$  ( $J^P = 1/2^+$ ) и нуклонной изобары  $N'$  ( $J^P = 1/2^-$ ):

$$\langle N'(p_2) | A_\mu^\alpha | N(p_1) \rangle = \bar{u}(p_2) \{ \gamma_\mu H_1(q^2) + \sigma_{\mu\nu} q^\nu H_2(q^2) + q_\mu H_3(q^2) \} \frac{1}{2} \tau^{\alpha u}(p_1). \quad (2.321)$$

Матричный элемент дивергенции дается выражением

$$\langle N'(p_2) | \bar{D}^\alpha | N(p_1) \rangle = i H_D(q^2) \bar{u}(p_2) \frac{1}{2} \tau^{\alpha u}(p_1), \quad (2.322)$$

где

$$H_D(q^2) = (m' - m) H_1(q^2) + q^2 H_3(q^2). \quad (2.323)$$

Снова проанализируем условия сохранения аксиального тока, приводящие к равенству  $H_D(q^2) = 0$ . Это равенство обеспечивается, например, при одновременном выполнении двух условий:

$$\begin{cases} m' = m, \\ H_3(q^2) = 0, \end{cases} \quad (2.324)$$

т. е. при наличии вырожденного дублета по четности в отсутствие члена с  $H_3$ . Но и в данном случае природа, по-видимому, не склонна к такому простому варианту  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии. Существование дублетов по четности, члены которых имеют приблизительно равные массы, отнюдь не следует из тех экспериментальных данных о низколежащих резонансах, которые имеются в настоящее время.

Следовательно, равенство  $H_D(q^2) = 0$  обеспечивается взаимным уничтожением членов  $(m' - m) H_1(q^2)$  и  $q^2 H_3(q^2)$  в выражении (2.323). Как и прежде, чтобы величина  $H_1(0)$  не обращалась в нуль в пределе при  $q^2 \rightarrow 0$ , у функции  $H_3(q^2)$  должен быть полюс, связанный с «безмассовым» пионом.

## 1. Идеализированный случай пиона нулевой массы

### а. Соотношение Голдбергера — Треймана

Мы показали, что один из возможных механизмов сохранения аксиального тока существенно связан с точным равенством нулю массы пиона. Остановимся теперь подробнее на теории Намбу [107—110], справедливой в идеа-

лизированном случае  $m_\pi = 0$ , и рассмотрим некоторые результаты, наиболее важные с физической точки зрения.

Сначала выведем кратчайшим путем знаменитую формулу Голдбергера — Треймана. Рассмотрим уравнение (2.320) в пределе при  $q^2 \rightarrow 0$ :

$$G_1(0) = -\frac{1}{2m_N} \lim_{q^2 \rightarrow 0} q^2 G_2(q^2). \quad (2.325)$$

Предел в правой части равенства (2.325) зависит от сингулярностей функции  $G_2(q^2)$  в точке  $q^2 = 0$ . Единственная сингулярность в этой точке обусловлена тем, что масса пиона равна нулю.

Если мы рассмотрим вершину  $\langle N_2 | A_\mu^\alpha | N_1 \rangle$  с точки зрения дисперсионных соотношений, то получим, что вклад в нее, соответствующий обмену пионом (нулевой массы!) (фиг. 2.3), равен

$$-iq_\mu f_\pi 2g_{\pi N} \bar{u}_2 \gamma_5 \frac{1}{2} \tau^\alpha u_1 \frac{1}{-q^2},$$

так что он содержится только в  $G_2(q^2)$ , причем

$$[G_2(q^2)]_\pi = \frac{2g_{\pi N} f_\pi}{-q^2}. \quad (2.326)$$

Поскольку это единственный вклад полюсного типа при  $q^2 = 0$ , из уравнения (2.325) немедленно следует

$$G_1(0) = \frac{g_{\pi N} f_\pi(0)}{m_N}. \quad (2.327)$$

Вспоминая, что  $G_1(0) = r_A$ , получаем соотношение Голдбергера — Треймана <sup>1)</sup>

$$f_\pi(0) = \frac{m_N r_A}{g_{\pi N}}. \quad (2.328)$$

Формула (2.328) — это вполне определенное соотношение, связывающее константу пионного распада  $f_\pi$  с отношением  $r_A$  аксиальной и векторной констант связи слабого взаимодействия и с пион-нуклонной константой связи  $g_{\pi N}$ . Это точное соотношение для такого мира, где пион имеет нулевую массу. Поскольку в реальном физическом мире пионная масса мала по сравнению с массами других адронов, мы вполне можем считать формулу (2.328) приближенным соотношением для физических величин. Другими словами, чтобы из соотношения (2.328) найти зависимость между физическими константами, следует в принципе указать способ аналитического продолжения величин  $f_\pi$ ,  $g_{\pi N}$ ,  $r_A$  по пионной массе от нуля до ее действительного значения. Проще всего считать эти величины гладкими функциями пионной массы: тогда соотношение (2.328) можно прямо сравнивать с экспериментальными данными. Если подставить в правую часть соотношения (2.328) экспериментальные значения ( $r_A \approx 1,22$ ,  $g_{\pi N}^2/4\pi \approx 14,5$ ), то мы получим

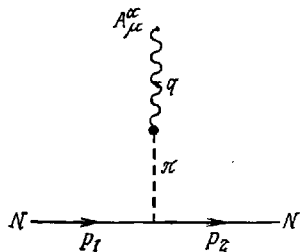
$$f_\pi(0) = 0,61 m_\pi. \quad (2.329)$$

Этот результат удивителен, так как он отличается от соответствующего экспериментального значения (2.311) приблизительно на 11%.

### б. Дублеты по четности

Рассмотрим теперь подробнее следствия сохранения аксиального тока в случае дублета по четности, который уже рассматривался в § 6 [формула (2.321) и далее].

<sup>1)</sup> Голдбергер и Трейман [112] вывели соотношение (2.328) из чисто эвристических соображений. Последующие выводы формулы (2.328) [81, 107, 113, 114] были ближе к изложенному нами доказательству.



Фиг. 2.3

В пределе при  $q^2 \rightarrow 0$  получаем

$$(m - m') H_1(0) = \lim_{q^2 \rightarrow 0} q^2 H_3(q^2). \quad (2.330)$$

Как и ранее, единственным вкладом в правой части равенства (2.330) будет пионный полюс, что приводит к соотношению

$$(m - m') H_1(0) = 2f_\pi g_{NN'\pi}, \quad (2.331)$$

где  $g_{NN'\pi}$  определяется соотношением

$$\mathcal{L}_{NN'\pi} = g_{NN'\pi} \bar{\psi}_{N'} \tau^\alpha \psi_N \varphi_\alpha + \text{с. с.} \quad (2.332)$$

Соотношение (2.331), конечно, аналогично формуле Голдбергера — Треймана. Единственное важное различие, связанное с присутствием частицы противоположной четности, состоит в том, что вместо суммы масс теперь фигурирует их разность. Это значит, что константа связи для взаимодействия пионов с дублетами по четности должна быть весьма малой.

Рассмотрим, как и в электромагнитном случае, более сильный предельный переход  $q_\mu \rightarrow 0$  (а не просто  $q^2 \rightarrow 0$ ). При этом мы вынуждены положить  $m - m' = 0$  и, перейдя к пределу, будем иметь строгое правило отбора

$$g_{NN\pi} = 0. \quad (2.333)$$

Отметим, что при переходе в формуле Голдбергера — Треймана к пределу при  $q_\mu \rightarrow 0$  необходима осторожность, поскольку при этом спинорный матричный элемент  $\bar{u} \gamma_5 u = (\sigma \mathbf{q})$  обращается в нуль. Как станет ясно из дальнейшего, соотношение Голдбергера — Треймана есть тождество между членами *первого порядка по  $q_\mu$* .

#### в. Условие согласованности Адлера [115]

Исследуем в общем случае следствия из сохранения тока в пределе при  $q_\mu \rightarrow 0$ .

Рассмотрим величину

$$T_\mu = \langle b | A_\mu^\alpha | a \rangle, \quad (2.334)$$

где  $|b\rangle$  и  $|a\rangle$  — произвольные адронные состояния. Сохранение тока означает, что

$$q^\mu T_\mu = 0, \quad (2.335)$$

причем

$$q_\mu = (p_b - p_a)_\mu.$$

Выделим в уравнении (2.335) вклад полюса, обусловленного нулевой массой пиона:

$$\{T_\mu\}_\pi = -i \frac{f_\pi q_\mu}{-q^2} \mathcal{G}_{\pi a \rightarrow b}(q^2 = 0), \quad (2.336)$$

где  $\mathcal{G}_{\pi a \rightarrow b}$  — матричный элемент  $\langle b | \pi | a \rangle$  перехода, индуцируемого сильным взаимодействием, и представим  $T_\mu$  в виде

$$T_\mu = \{T_\mu\}_\pi + \bar{T}_\mu. \quad (2.337)$$

Из полученных ранее соотношений следует, что

$$\mathcal{G}_{\pi a \rightarrow b} = \frac{i}{f_\pi} q^\mu \bar{T}_\mu. \quad (2.338)$$

Теперь рассмотрим случай  $q_\mu \rightarrow 0$ . Для простоты сначала допустим, что  $\bar{T}_\mu$  регулярно при  $q_\mu \rightarrow 0$ . Это предположение выполняется не всегда; усложнения, обусловленные дополнительными сингулярностями, будут указаны позже. Из соотношения (2.338) можно заключить следующее:

1. В нулевом порядке по  $q_\mu$  мы имеем

$$\mathcal{G}_{\pi a \rightarrow b} = 0. \quad (2.339)$$

Очевидно, что это обобщенное правило отбора (2.333) для дублета по четности. Отметим, что равенство (2.339) приводит к интересным физическим следствиям только для  $s$ -переходов. Таким образом, в этом пределе они запрещены. В случае переходов с большими  $l$  равенство (2.339) тривиальным образом выполняется благодаря наличию соответствующих кинематических факторов.

2. В линейном приближении по  $q_\mu$  из равенства (2.338) вытекает теоретическое соотношение между амплитудой пионного  $p$ -перехода и амплитудой слабого взаимодействия.

Простейшим примером является, конечно, соотношение Голдбергера — Треймана, которое в данном случае имеет вид

$$f_\pi \mathcal{G}_{\pi NN} \equiv 2g_{\pi N} f_\pi \sigma \mathbf{q} = q^\mu \bar{u} [\gamma_\mu G_1(q^2) + q_\mu \bar{G}_2(q^2)] \gamma_5 u, \quad (2.340)$$

причем из  $\bar{G}_2$  эффект пионного полюса уже вычтен. В линейном приближении по  $q_\mu$  член с  $\bar{G}_2$  пренебрежимо мал и правая часть равенства (2.340) равна  $2m_N G_1(0) \sigma \mathbf{q}$ , т. е. мы опять приходим к хорошо известному результату.

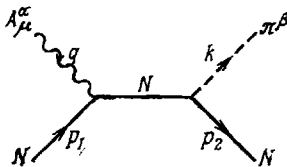
### г. Применение к пион-нуклонному рассеянию

Возвращаясь к случаю  $s$ -переходов, рассмотрим амплитуду  $T_\mu$  [формула (2.334)], когда  $|a\rangle$  — нуклонное состояние, а в состоянии  $|b\rangle$  мы имеем нуклон и пион (с изоспином  $\beta$ ).

Тогда равенство (2.338) дает

$$T_{\pi N}^{\beta\alpha} = \frac{i}{f_\pi} q^\mu \langle \pi^\beta(k), p_2 | A_\mu^\alpha | p_1 \rangle = \frac{i}{f_\pi} i q^\mu \bar{T}_\mu. \quad (2.341)$$

Если положить здесь  $q_\mu = 0$ , то очевидно, что правая часть равенства (2.341) обратится в нуль. Но на самом деле  $\bar{T}_\mu$  дает сингулярный вклад в пределе при  $q_\mu \rightarrow 0$ , как это показано на фиг. 2.4.



Фиг. 2.4

Взяв для простоты случай рассеяния вперед, можем путем простых выкладок убедиться, что ( $v = qp$ )

$$q^\mu \bar{T}_\mu \underset{q_\mu \rightarrow 0}{\sim} \text{const} \frac{q^2}{v} \underset{q_\mu \rightarrow 0}{\rightarrow} 0. \quad (2.342)$$

Кроме аналогичной перекрестной диаграммы, в пределе при  $q_\mu = 0$  нет какого-либо другого сингулярного вклада в  $\bar{T}_\mu$ , и поэтому мы должны иметь

$$\lim_{q_\mu \rightarrow 0} T_{\pi N}^{\beta\alpha}(v, t) \equiv T_{\pi N}^{\beta\alpha}(0, 0) = 0. \quad (2.343)$$

Равенство (2.343) снова оказывается точным. К сожалению, в нем фигурируют лишь нефизические величины и преобразовать его в (приближенное) соотношение для физических величин сложнее, чем в случае формулы Голд-

бергера — Треймана. Это объясняется тем, что в процессе рассеяния мы имеем много величин, которые могут меняться при экстраполяции по пионной массе. Таким образом, результат экстраполяции по массе будет в той или иной мере зависеть от того, какая переменная остается у нас фиксированной при экстраполяции. Вопрос о корректном проведении экстраполяции в соотношениях типа (2.343) будет обстоятельно рассмотрен в гл. 6.

Попытаемся, однако, извлечь из равенства (2.343) некоторые выводы элементарным путем. Если разложить  $T_{\pi N}^{\beta\alpha}$  в ряд по изоспиновым амплитудам,

$$T_{\pi N}^{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} T^+ + \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^\alpha] T^-, \quad (2.344)$$

то соотношение (2.343) оказывается эквивалентным следующим условиям:

$$T^-(0, 0) = 0, \quad (2.345)$$

$$T^+(0, 0) = 0. \quad (2.346)$$

Соотношение (2.345) для  $T^-$  (антисимметричной в изотопических индексах части амплитуды) тривиально из-за требований, налагаемых на  $T^-$  перекрестной симметрией. Что касается равенства (2.346), то заметим, что в пределе при  $q_\mu \rightarrow 0$  может остаться только  $s$ -волна и мы имеем

$$T^+(0, 0) = 8\pi m_N a^+ = \frac{8\pi}{3} m_N (a_1 + 2a_2), \quad (2.347)$$

где  $a^+$  — длина рассеяния  $s$ -волны, соответствующая изоспину 0 в  $t$ -канале, а  $a_1$  и  $a_2$  —  $s$ -волновые длины рассеяния в  $s$ -канале с изоспинами  $1/2$  и  $3/2$ . Таким образом, условие (2.346) означает, что в идеализированном случае безмассового пиона должно выполняться равенство

$$a_1 = -2a_2. \quad (2.348)$$

Попробуем сравнить результат (2.348), считая, что он справедлив для физических пионов, с экспериментальными значениями величин  $a_1$  и  $a_2$  [117]

$$\begin{aligned} a_1^{\text{эксп}} &= (0,171 \pm 0,005) m_\pi^{-1}, \\ a_2^{\text{эксп}} &= -(0,088 \pm 0,004) m_\pi^{-1}. \end{aligned} \quad (2.349)$$

Расхождение между экспериментальными значениями  $a_1$  и  $-2a_2$  оказывается равным  $\sim 4\%$ : согласие впечатляющее. Это еще больше укрепляет надежду на то, что идеализированный мир безмассовых пионов на самом деле не слишком далек от физической реальности.

Результат (2.343) есть «условие согласованности», установленное Адлером. На самом деле Адлер [116] ввел в соотношение (2.343) классическое разбиение амплитуды пион-нуклонного рассеяния

$$T_{\pi N}^{\beta\alpha} = \bar{u}_2 (A^{\beta\alpha} + \gamma q B^{\beta\alpha}) u_1. \quad (2.350)$$

Из равенства (2.343) имеем

$$A^{\beta\alpha}(0, 0) = -\frac{1}{m_N} \lim_{q_\mu \rightarrow 0} v B^{\beta\alpha}(v, t) \quad (2.351)$$

(заметим, что в направлении вперед  $\gamma q = v/m_N$ ). Таким образом, амплитуда  $A^{\beta\alpha}(0, 0)$  полностью определяется только теми вкладками в  $B^{\beta\alpha}$ , которые сингулярны в пределе при  $q_\mu \rightarrow 0$ . Эти вклады соответствуют нуклонным борновским членам (фиг. 2.5). Действительно,

$$T_{\text{борн}}^{\beta\alpha} = -g_{\pi N}^2 \bar{u}_2 \gamma q u_1 \left( \frac{\tau^\beta \tau^\alpha}{2p_1 q} + \frac{\tau^\alpha \tau^\beta}{2p_2 q} \right) \quad (2.352)$$

и, таким образом,

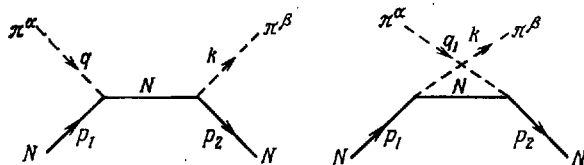
$$B^{\beta\alpha}(v, t) \underset{q_\mu \rightarrow 0}{\sim} -\delta_{\alpha\beta} g_{\pi N}^2 \frac{1}{v}. \quad (2.353)$$

Тогда из равенства (2.351) получаем

$$A^-(0, 0) = 0, \quad (2.354)$$

$$A^+(0, 0) = \frac{g_{\pi N}^2}{m_N}. \quad (2.355)$$

Соотношение (2.354) снова тривиально в силу (нечетной) перекрестной симметрии амплитуды  $A^-$ , а равенство (2.355) должно быть точным тождеством, справедливым в случае нулевой массы пионов.



Фиг. 2.5

В заключение сравним теорию безмассовых фотонов с теорией безмассовых пионов. Аналогия между этими двумя теориями очень интересна. Мы, в сущности, рассматривали закон *строгого сохранения тока*

$$q^\mu T_\mu = 0 \quad (2.356)$$

в пределе при  $q_\mu \rightarrow 0$ . Оказывается, что в пионном случае, как и в случае электромагнитных процессов, равенство (2.356) не выполняется тривиальным образом; в этом пределе отличны от нуля только полюсные вклады в  $T_\mu$ , соответствующие одночастичным диаграммам. Во всех матричных элементах аксиального тока при  $q^2 = 0$  появляется пионный полюс, который дает физический пионный матричный элемент. Кроме него, могут появиться и другие одноадронные полюса, и тогда придется очень тщательно вычислять предел, что связано с более общей проблемой экстраполяционной процедуры, о которой речь пойдет в гл. 6.

## 2. Обобщение на случай физических пионов: гипотеза ЧСАТ

Аксиальные токи обнаруживают своего рода «частичное сохранение», связанное с малостью пионной массы. Такое частичное сохранение будет, например, обеспечено, если допустить, что дивергенции аксиальных токов (которые должны тождественно равняться нулю в пределе  $m_\pi \rightarrow 0$ ) пропорциональны в операторном смысле пионной массе в некоторой положительной степени. В этом и заключается основная идея гипотезы «частичного сохранения аксиальных токов» (ЧСАТ).

Чтобы выяснить смысл частичного сохранения аксиального тока, мы сначала покажем, что формулу Голдбергера — Треймана (2.328) можно вывести путем чисто дисперсионного анализа аксиальных формфакторов, который, однако, должен быть дополнен соответствующим предположением об отсутствии вычитаний. Напомним, что фундаментальную величину  $r_A$  можно представить двояко:

$$\begin{aligned} r_A &= G_1(0), \\ r_A &= \frac{1}{2m_N} G_D(0), \end{aligned} \quad (2.357)$$

где

$$G_D(q^2) = 2m_N G_1(q^2) + q^2 G_2(q^2). \quad (2.358)$$

Важно то, что в дисперсионном соотношении для  $G_1$  пионный полюс не появляется, а в соотношении для  $G_D$  он, очевидно, имеется. Таким обра-



зом, при вычислении  $r_A$  естественно предположить, что для  $G_D$  справедливо дисперсионное соотношение без вычитаний. Это требование в высшей степени нетривиально, так как оно означает полное взаимное уничтожение членов  $2m_N G_1$  и  $q^2 G_2$  при  $q^2 \rightarrow \infty$ . Безусловно, это связано с предположением, что асимптотически (при больших  $q^2$ ) ток сохраняется.

Дисперсионное соотношение для  $G_D(q^2)$  в отсутствие вычитаний имеет вид

$$G_D(q^2) = \frac{2m_\pi^2 f_\pi g_{\pi N}}{m_\pi^2 - q^2} + \frac{1}{\pi} \int_{9m_\pi^2}^{\infty} \frac{\rho_D(q'^2) dq'^2}{q'^2 - q^2}, \quad (2.359)$$

причем первый член в правой части — это вклад пионного полюса, а дисперсионный интеграл — вклад более высоких состояний. В пределе при  $q^2 = 0$  находим

$$r_A = \frac{f_\pi g_{\pi N}}{m_N} + \frac{1}{2m_N} \frac{1}{\pi} \int_{9m_\pi^2}^{\infty} \frac{dq^2}{q^2} \rho_D(q^2). \quad (2.360)$$

Мы видим, что соотношение Голдбергера — Треймана должно приближенно выполняться для физических пионов, если в правиле сумм (2.360) преобладает пионный вклад.

Посмотрим, каков физический смысл того, что в дисперсионном соотношении (2.359) мы пренебрегаем вкладами более высокого порядка по массе. На первый взгляд в пределе при  $m_\pi^2 \rightarrow 0$  полюс должен стремиться к точке  $q^2 = 0$  и поэтому полюсная доминантность должна приводить к точному результату. Но это не так, поскольку вычет полюса тоже пропорционален  $m_\pi^2$  и зависимость от  $m_\pi^2$  исчезает, как можно видеть из правила сумм (2.360). Дело здесь в том, что мы рассматриваем не произвольный псевдоскалярный оператор, а дивергенцию аксиального тока.

Из соотношения (2.313)

$$\langle 0 | \bar{D}^\alpha | \pi^\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} f_\pi m_\pi^2 \quad (2.361)$$

мы видим, что матричный элемент дивергенции аксиального тока между вакуумным и однонуклонным состояниями пропорционален  $m_\pi^2$ . Фундаментальное предположение Намбу [107] состоит в том, что все матричные элементы дивергенции  $\bar{D}^\alpha$  пропорциональны  $m_\pi^2$ . Если это так, то оператор  $\rho_D$  также пропорционален  $m_\pi^2$  и, таким образом, поправочный член в соотношении (2.360) обращается в нуль при  $m_\pi^2 \rightarrow 0$ . Очевидно, что предположение Намбу выполняется, если дивергенция  $\bar{D}^\alpha$  в операторном смысле пропорциональна  $m_\pi^2$ .

Самый простой и самый обычный способ обеспечить такую пропорциональность состоит в том, чтобы принять вслед за Гелл-Манном и Леви [81], что дивергенция аксиального тока  $\bar{D}^\alpha$  является хорошим интерполирующим полем для пиона:

$$\bar{D}^\alpha = C \varphi^\alpha. \quad (2.362)$$

Предполагая, что пионное поле  $\varphi^\alpha$  нормировано надлежащим образом, т. е. что

$$\langle 0 | \varphi^\alpha | \pi^\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.363)$$

и вычисляя матричные элементы правой и левой частей равенства (2.362) между вакуумом и однопионным состоянием, с учетом соотношения (2.361) без труда получаем

$$C = m_\pi^2 f_\pi,$$

откуда

$$\bar{D}^\alpha(x) = m_\pi^2 f_\pi \varphi^\alpha(x). \quad (2.364)$$

Такой закон прямой пропорциональности проверен в рамках нескольких теоретико-полевых моделей, подобных  $\sigma$ -модели Гелл-Манна и Леви [81], о которой будет сказано в гл. 5. В этом случае утверждение прямой пропорциональности оказывается более определенным, так как  $\varphi^\alpha$  становится здесь каноническим пионным полем, удовлетворяющим, например, одновременно перестановочному соотношению  $[\varphi^\alpha, \varphi^\beta] = 0$ .

Совершенно эквивалентным образом соотношение Голдбергера — Треймана можно вывести непосредственно из равенства (2.364), взяв матричные элементы обеих его частей между одноуклонными состояниями. При этом появляется константа связи  $g_{\pi N}$  вне поверхности масс:

$$\langle p_2 | \varphi^\alpha | p_1 \rangle = \frac{g_{\pi N}(q^2)}{m_\pi^2 - q^2} i \bar{u}_2 \gamma_5 \tau^\alpha u_1. \quad (2.365)$$

Соотношение Голдбергера — Треймана можно получить только в предположении, что  $g_{\pi N}(0)$  не слишком сильно отличается от  $g_{\pi N}(m_\pi^2)$ . Следовательно, определение (2.364) должно быть дополнено предположением о гладкости, что в действительности и составляет суть дела.

Конечно, все другие результаты, полученные в идеализированном случае  $m_\pi = 0$ , можно было бы получить путем дисперсионного анализа в предположении о пионной доминантности. Но это значительно сложнее, поскольку вектор  $q_\mu$  фигурирует также и в других инвариантах [например,  $(p + q)^2 = = s!$ ], и, таким образом, мы вынуждены иметь дело с дисперсионным анализом в случае более чем одной переменной.

Этот вопрос, связанный, очевидно, с вопросом о корректной экстраполяции при  $q_\mu \rightarrow 0$ , более обстоятельно будет рассмотрен в гл. 3, 6 и 7.

#### а. ЧСАТ при наличии электромагнитных взаимодействий

Выше мы не учитывали электромагнитные взаимодействия. Нетрудно указать, как нужно изменить соотношение ЧСАТ

$$\partial^\mu A_\mu^\alpha \equiv D^\alpha = \overline{m_\pi^2 f_\pi \varphi^\alpha} \quad (2.366)$$

при наличии электромагнитных взаимодействий, если мы имеем дело с заряженными полями. Такое преобразование соответствует требованию градиентной инвариантности

$$\partial_\mu \varphi_\pm^\pm \rightarrow (\partial_\mu \mp ie \mathcal{A}_\mu) \varphi_\pm^\pm, \quad (2.367)$$

где  $\mathcal{A}_\mu$  — фотонное поле, а индекс  $\pm$  указывает знак заряда, который уничтожается полем  $\varphi$ . Таким образом, в случае заряженных пионов, когда электромагнитные взаимодействия учитываются вплоть до первого порядка по  $e$ , вместо равенства (2.366) имеем

$$(\partial^\mu \mp ie \mathcal{A}^\mu) A_\mu^{i\pm} = \sqrt{2} f_\pi m_\pi^2 \varphi^\pm. \quad (2.368)$$

Как показал Адлер [115], соотношение (2.368) можно также обосновать, исходя из теории поля.

В рассматриваемом приближении по  $e$  для нейтральной компоненты мы по-прежнему имеем

$$\partial^\mu A_\mu^3 = f_\pi m_\pi^2 \varphi^0. \quad (2.369)$$

При учете электромагнитного взаимодействия в соотношении (2.369) могут добавиться только члены порядка  $e^2$ , поскольку в силу инвариантности при зарядовом сопряжении электромагнитное поле должно появляться дважды:

$$C \varphi^0 C^{-1} = \varphi^0, \quad C \mathcal{A}_\mu C^{-1} = -\mathcal{A}_\mu. \quad (2.370)$$

Кроме того, поле  $\mathcal{A}_\mu$  должно фигурировать здесь в градиентно-инвариантной и сохраняющей четность форме. Таким образом, в простейшую градиентно-

инвариантную форму будет дважды входить тензор

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu. \quad (2.371)$$

Фактически же ввиду нечетности  $\pi^0$  мы, кроме тензора  $F_{\mu\nu}$ , вводим дуальный ему тензор

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (2.372)$$

Поэтому должно выполняться соотношение

$$\partial^\mu A_\mu^3 = m_\pi^2 f_\pi \Phi^0 + C F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}. \quad (2.373)$$

Таким образом, при наличии электромагнитных взаимодействий аксиальный ток может не сохраняться даже в пределе нулевой пионной массы.

Чтобы фиксировать константу  $C$ , мы, как предложил Адлер [111], рассмотрим распад  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  в пределе мягких пионов. При этом мы воспользуемся гипотезой ЧСАТ, основанной на соотношении (2.373) и на предположении о гладкости амплитуды в интервале от  $q^2 = 0$  до  $q^2 = m_\pi^2$ .

Введем амплитуду

$$M_\mu = \langle \gamma(k_1), \gamma(k_2) | A_\mu^3 | 0 \rangle, \quad (2.374)$$

которую с учетом требований статистики Бозе, а также лоренцевой и градиентной инвариантности можно записать в виде

$$M_\mu = (k_1 + k_2)_\mu (\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_1 k_2) A_1 + [(k_1 k_2) (\mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 (k_1 - k_2)) + (k_1 \varepsilon_2) (\mu \varepsilon_1 k_1 k_2) - (k_2 \varepsilon_1) (\mu \varepsilon_2 k_1 k_2)] A_2, \quad (2.375)$$

где  $(abcd)$  означает  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma$  и т. д., а  $A_i$  — инвариантные функции, зависящие от

$$q^2 = (k_1 + k_2)^2 = 2k_1 k_2 \quad (k_1^2 = k_2^2 = 0). \quad (2.376)$$

Из соотношений (2.374) и (2.375) вытекает равенство

$$\langle \gamma_1 \gamma_2 | \partial^\mu A_\mu^3 | 0 \rangle = i(k_1 + k_2)^\mu M_\mu = i q^2 (\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_1 k_2) (A_1 - A_2). \quad (2.377)$$

Здесь важно отметить наличие общего множителя  $q^2$ , который, как мы вскоре увидим, препятствует определению скорости распада  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  через другие величины (в противоположность тому, что мы имели в случае соотношения Голдбергера — Треймана).

Из равенства (2.373) выводим

$$\begin{aligned} \langle \gamma_1 \gamma_2 | \partial^\mu A_\mu^3 | 0 \rangle &= 8C (\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_1 k_2) + m_\pi^2 f_\pi \langle \gamma_1 \gamma_2 | \Phi^0 | 0 \rangle = \\ &= 8C (\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_1 k_2) + \frac{m_\pi^2 f_\pi}{m_\pi^2 - q^2} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_1 k_2) F_\pi(q^2), \end{aligned} \quad (2.378)$$

где символом  $F_\pi(q^2)$  обозначена константа распада  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ , определенная вне поверхности масс. Точно она определяется (в случае физических пионов) соотношением

$$\langle \gamma_1 \gamma_2 | \pi^0 \rangle = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_1 k_2) F_\pi, \quad (2.379)$$

откуда следует выражение для вероятности распада  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  в единицу времени

$$\tau^{-1}(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{m_\pi^2}{64\pi} F_\pi^2. \quad (2.380)$$

Как и в тех приложениях ЧСАТ, которые были рассмотрены в предыдущих разделах, в конце концов нас будет интересовать предельный переход  $q^2 \rightarrow 0$  при условии, что выполняется предположение о гладкости. В действительности, поскольку [как это следует из формулы (2.376)] равенство  $q^2 = 0$  означает, что  $k_1$  и  $k_2$  пропорциональны друг другу, инвариант

$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_1 k_2)$  должен обращаться в нуль при переходе к точному пределу. Таким образом, нам приходится ограничиться низшим порядком по  $q^2$ , в котором равенство (2.378) дает

$$\langle \gamma_1 \gamma_2 | \partial^\mu A_\mu^3 | 0 \rangle \sim (\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_1 k_2) [8C + f_\pi F_\pi(0)]. \quad (2.381)$$

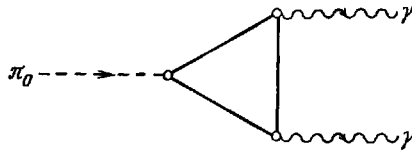
В правой части равенства (2.381) мы имеем в принципе величину  $O(q^2)$  при  $q^2 \rightarrow 0$ . Из соотношения же (2.377) следует, что левая часть имеет порядок  $O(q^4)$  (формфакторы  $A_{1,2}$  регулярны при  $q^2 = 0$ , так как теперь  $m_\pi \neq 0$ ):

$$\langle \gamma_1 \gamma_2 | \partial^\mu A_\mu^3 | 0 \rangle = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 k_1 k_2) O(q^2) = O(q^4). \quad (2.382)$$

Поэтому в пределе при  $q^2 \rightarrow 0$  мы должны иметь

$$C = -\frac{1}{8} f_\pi F_\pi(0). \quad (2.383)$$

Этот результат показывает также, что если бы мы не пользовались модифицированным соотношением ЧСАТ (2.373) (с  $C \neq 0$ ), то пришли бы к неприятному выводу о равенстве нулю константы связи процесса  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  [314, 315].



Фиг. 2.6

Если вернуться теперь к операторному условию ЧСАТ, то проведенный выше анализ показывает, что в случае нейтральных полей модифицированное уравнение ЧСАТ должно выглядеть так:

$$\partial^\mu A_\mu^3 = m_\pi^2 f_\pi \varphi^0 - \frac{1}{8} f_\pi F_\pi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (2.384)$$

Детальный анализ теоретико-полевых аспектов, а также некоторых следствий из уравнения (2.384) можно найти в статьях Адлера [118], Белла и Джакива [316] и других авторов<sup>1)</sup>. Подчеркнем, что хорошей основой для исследования распада  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  и процедуры экстраполяции к нулевому значению пионной массы могут служить тождества Уорда<sup>2)</sup> для трехточечной функции  $T_{\mu\nu\lambda} = \int d^4x d^4y \exp[i(k_1x + k_2y)] \langle 0 | T(j_\mu^{\text{эл.-м.}}(x) j_\nu^{\text{эл.-м.}}(y) A_\lambda^3(0)) | 0 \rangle$ .

При анализе рассмотренной выше проблемы методом теории возмущений в рамках простых теоретико-полевых моделей, например  $\sigma$ -модели или спиновой электродинамики (в частности, в связи с интерпретацией треугольной диаграммы фиг. 2.6), возникает ряд тонких вопросов. Здесь мы заметим лишь, что в рамках упомянутых выше моделей величину  $C$  можно оценить, только исходя из простой треугольной диаграммы фиг. 2.6. Это дает следующий результат:

$$f_\pi F_\pi = -\frac{\alpha}{\pi} \sum \left[ Q^2 \left( \frac{1}{2} \right) - Q^2 \left( -\frac{1}{2} \right) \right], \quad (2.385)$$

где  $Q(I_3)$  — заряд адрона, который фигурирует в треугольной петле и соответствует изотопической компоненте  $I_3$ . В рамках ренормируемых теоретико-полевых моделей [118] было показано, что этот результат, полученный в низшем порядке по сильным взаимодействиям, носит более общий характер.

<sup>1)</sup> Подробная библиография по вопросу о выводе уравнения (2.384) имеется в работе [317], где проводится также глубокий анализ проблемы распада  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ .

<sup>2)</sup> О котором подробнее см. гл. 3.

В случае протонов и нейтронов формулы (2.385) и (2.380) дают

$$\tau^{-1}(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) \approx 9,7 \text{ эВ}, \quad (2.386)$$

что вполне сравнимо с экспериментальным значением

$$\tau^{-1}(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = (7,7 \pm 0,9) \text{ эВ}. \quad (2.387)$$

Кварковая же модель дает амплитуду, которая в 3 раза меньше экспериментально наблюдаемой.

### 3. Обобщение на случай странных аксиальных токов

Общий анализ, проведенный для изоспиновых аксиальных векторных токов, может быть распространен и на случай странных аксиальных токов<sup>1)</sup>  $A_\mu^V$ . Имеется только одно очень важное различие, которое могло бы быть решающим с практической точки зрения: роль, которую в случае изоспиновых токов играет пион, в случае странных аксиальных токов принимает на себя странный псевдоскалярный  $K$ -мезон. В пределе точной  $SU(3)$ -симметрии  $K$ - и  $\pi$ -мезоны имеют одинаковые массы, и, таким образом, все, что справедливо для пионов, в полной мере относится и к каонам. К сожалению, в реальном мире каонная масса приблизительно в 3 раза больше пионной.

Различные результаты, основанные на малости пионных масс, могут быть преобразованы в аналогичные результаты, справедливые при  $m_K \rightarrow 0$ . Но практически они значительно менее ценны. Ясно, что длина пути экстрополяции, необходимая для сравнения с экспериментальными данными выводов, сделанных в пределе нулевой каонной массы, теперь велика и многие поправки, которые в пионном случае можно без всякого ущерба игнорировать, теперь могут оказаться весьма существенными.

Не упуская из виду, что последующие результаты могут быть весьма грубыми, мы все же хотим упомянуть о некоторых обобщениях результатов предыдущего обсуждения на случай странного аксиального тока.

Во-первых, определим матричный элемент, относящийся к слабому лептонному распаду каона:

$$\langle 0 | A_\mu^{V^-} | K^+ \rangle = i f_K q_\mu, \quad (2.388)$$

где  $f_K$  — константа каонного распада, а  $q_\mu$  — каонный 4-импульс. Из равенства (2.388) следует, что

$$\langle 0 | \bar{D}^{V^-} | K^+ \rangle = m_K^2 f_K. \quad (2.389)$$

Тогда обобщенное соотношение пропорциональности Гелл-Манна и Леви имеет вид

$$\bar{D}^{V^-}(x) = m_K^2 f_K \varphi^{K^+}(x), \quad (2.390)$$

причем каонное поле нормировано надлежащим образом:

$$\langle 0 | \varphi^{K^+} | K^+ \rangle = 1. \quad (2.391)$$

Аналог соотношения Голдбергера — Треймана в случае странных токов теперь легко находится, например, из выражения для матричного элемента

$$\langle \Sigma^- | A_\mu^{V^-} | n \rangle = \bar{u}_\Sigma \{ \gamma_\mu G_1(q^2) + q_\mu G_2(q^2) \} \gamma_5 u_n, \quad (2.392)$$

где

$$G_1(0) = r_A^{\Sigma^- n}, \quad (2.393)$$

теми же методами, что и в случае нестранных токов. Из выражения (2.392) получаем для матричного элемента дивергенции

$$\langle \Sigma^- | \bar{D}^{V^-} | n \rangle = i G_D^{\Sigma^- n} \bar{u}_\Sigma \gamma_5 u_n, \quad (2.394)$$

<sup>1)</sup> Первое обобщение такого рода можно найти уже в работе [107].

где

$$G_D^{\Sigma^- n}(q^2) = (m_\Sigma + m_n) G_1(q^2) + q^2 G_2(q^2) \quad (2.395)$$

и, поскольку мы рассматриваем физические каоны,

$$G_D^{\Sigma^- n}(0) = (m_\Sigma + m_n) r_A^{\Sigma^- n}; \quad (2.396)$$

следовательно, функция  $G_2$  регулярна при  $q^2 = 0$ . Если теперь допустить, например, что  $G_D^{\Sigma^- n}$  удовлетворяет дисперсионному соотношению без вычитаний, и предположить, что каонный полюс доминирует по крайней мере при  $q^2 = 0$ , то получаем аналог соотношения Голдбергера — Треймана

$$f_K = \frac{(m_\Sigma + m_N) r_A^{\Sigma^- n}}{\sqrt{2} g_{\Sigma K \Lambda}}. \quad (2.397)$$

Соотношение (2.397) становится точным, если уравнение (2.390) справедливо в пределе нулевой каонной массы.

Соотношение (2.397) можно сравнить с соотношением Голдбергера — Треймана для случая заряженных пионов

$$f_\pi^{(e)} = \frac{\sqrt{2} m_N r_A^{NN}}{g_{\pi N}}. \quad (2.398)$$

В пределе строгой  $SU(3)$ -симметрии мы должны получить  $f_K/f_\pi^{(e)} = 1$ , и, таким образом,

$$\frac{r_A^{\Sigma^- n}}{g_{\Sigma K N}} \frac{g_{\pi N}}{r_A^{NN}} = 1. \quad (2.399)$$

Это соотношение означает, что отношение  $F/D$  для слабых переходов равно аналогичному отношению для сильных взаимодействий.

### § 7. Доминантность векторных мезонов<sup>1)</sup>

Первоначально векторные мезоны ( $J^P = 1^-$ ) были введены, чтобы можно было объяснить некоторые динамические эффекты в нуклонных электромагнитных формфакторах, а также распространить законы сохранения и универсальности, которым подчиняются слабые и электромагнитные векторные токи, на случай сильных взаимодействий. Связь динамического аспекта доминантности векторных мезонов с универсальностью легко показать следующим образом.

Для определенности рассмотрим самый общий случай взаимодействия изовекторной частицы  $\rho$  с частицей «а». Матричный элемент  $T_{\rho a a}$  можно выразить через различные инварианты, в число которых входят спиновые матрицы внешней частицы «а», вектор поляризации  $\rho$ -мезона  $\epsilon_\mu$  и импульсы

$$P = \frac{1}{2} (p_1 + p_2),$$

$$k = p_2 - p_1,$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — импульсы входящей и выходящей частицы «а».

В нулевом порядке по  $k_\mu$  (импульс частицы  $\rho$ ) можно написать

$$T_{\rho a a} = -2g_{\rho a} (P \epsilon) t^\alpha + (\text{члены высшего порядка по } k_\mu), \quad (2.400)$$

где  $t$  — изоспиновые матрицы частицы «а», а  $\alpha$  — изоспиновый индекс  $\rho$ -мезона.

<sup>1)</sup> Более подробное исследование данного вопроса и соответствующую литературу читатель может найти у Сакураи [65, 199].

Мы хотим показать, что из гипотезы о  $\rho$ -доминантности в электромагнитных формфакторах сразу же следует  $\rho$ -универсальность, т. е. константа связи  $g_{\rho a}$  (фигурирующая в первых членах степенного разложения по  $k_\mu$ ) фактически *не зависит* от мишени. Для этого рассмотрим матричный элемент изовекторного тока

$$\langle a_2 | V_\mu^3 | a_1 \rangle = i^3 [2P_\mu G_E(k^2) + \dots], \quad (2.401)$$

где в явном виде представлен только *электрический* формфактор, связанный с членом нулевого порядка в разложении по токовому 4-импульсу  $k_\mu$ . При  $k^2 = 0$  формфактор  $G_E(k^2)$  связан с полным изовекторным зарядом, и поэтому

$$G_E(0) = 1. \quad (2.402)$$

Далее введем связь  $\rho$ -частицы с изовекторным током:

$$\langle 0 | V_\mu^B | \rho^\alpha \rangle = \delta_{\alpha\beta} f_\rho e_\mu. \quad (2.403)$$

Теперь сделаем очень важное допущение, что для формфактора  $G_E(k^2)$  может быть написано дисперсионное соотношение без вычитаний. Выделив явно  $\rho$ -мезонный полюс, получим

$$G_E(k^2) = \frac{g_{\rho a} f_\rho}{m_\rho^2 - k^2} + \int \frac{g(k'^2) dk'^2}{k'^2 - k^2}. \quad (2.404)$$

При  $k^2 = 0$  это соотношение имеет вид

$$1 = \frac{g_{\rho a} f_\rho}{m_\rho^2} + \int \frac{dk'^2}{k'^2} g(k'^2). \quad (2.405)$$

Исходя из гипотезы о доминирующей роли  $\rho$ -вклада в соотношении (2.405) получаем

$$g_{\rho a} = \frac{m_\rho^2}{f_\rho}. \quad (2.406)$$

Этот результат показывает, что константа взаимодействия  $g_{\rho a}$ , которая оказывается функцией переменных  $m_\rho$  и  $f_\rho$ , действительно универсальна.

То обстоятельство, что соотношение (2.406) следует из  $\rho$ -доминантности при  $k^2 = 0$ , указывает на то, что должна существовать общая схема, в которой  $\rho$ -универсальность становится строгой в пределе равной нулю массы  $\rho$ -мезона. Примером могут служить так называемые поля Янга — Миллса, которые вводятся для построения лагранжевых плотностей, инвариантных относительно обобщенных (зависящих от координат) изоспиновых вращений.

Аналогично рецепту для получения минимального электромагнитного взаимодействия в случае любого заряженного поля

$$\partial_\mu \psi^{(c)} \rightarrow (\partial_\mu + ie_c \mathcal{A}_\mu) \psi^{(c)} \quad (2.407)$$

рецепт для построения универсального взаимодействия  $\rho$ -мезона с любой частицей «а» имеет вид

$$\partial_\mu \psi_a \rightarrow (\partial_\mu + i\gamma_\rho \rho_\mu t) \psi_a. \quad (2.408)$$

Подробно такой подход будет изложен в гл. 5. Здесь же мы, исходя из фундаментальной пропорциональности между током и полем, возникающей в рамках янг-миллсовского формализма, т. е. из соотношения

$$V_\mu^\alpha(x) = \gamma_\rho m_\rho^2 \varphi_\mu^\alpha(x), \quad (2.409)$$

где  $\varphi_\mu^\alpha$  — ренормированное  $\rho$ -поле:

$$\langle 0 | \varphi_\mu^\alpha | \rho^\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} e_\mu, \quad (2.410)$$

просто приведем некоторые соображения,<sup>1</sup> убеждающие, что строгая универсальность имеет место в пределе  $m_\rho^2 \rightarrow 0$ . Сравнимая (2.409) с (2.403), ви-

дим, что

$$f_\rho = \gamma_\rho m_\rho^2. \quad (2.411)$$

В то же время равенство (2.409) означает, что спектральная функция  $g(k^2)$  пропорциональна  $m_\rho^2$ . Таким образом, соотношение (2.405) приводится к виду

$$1 = \gamma_\rho g_{\rho\alpha} + \int \frac{dk^2}{k^2} g(k^2). \quad (2.412)$$

При  $m_\rho^2 \rightarrow 0$  дисперсионный интеграл стремится к нулю, а первый член принимает конечное значение. Таким образом, мы видим, что при  $m_\rho^2 = 0$  строго выполняется соотношение универсальности

$$g_{\rho\alpha} = \frac{1}{\gamma_\rho}. \quad (2.413)$$

Аналогия с ЧСАТ абсолютно ясна. В случае ЧСАТ аксиальная дивергенция  $\partial^\mu A_\mu^\alpha = \bar{D}^\alpha$  стремится к нулю, когда пионная масса  $m_\pi^2 \rightarrow 0$ . Это приводит к строгой пионной доминантности для формфакторов, связанных с  $\bar{D}$  при  $k^2 = 0$ . В данном же случае сам векторный ток  $V_\mu^\alpha$  стремится к нулю при  $m_\rho^2 \rightarrow 0$ . Это дает в качестве первого результата строгую  $\rho$ -универсальность.

Разумеется, из указанной аналогии не следует, что мы должны забыть о существенном физическом различии двух подходов. Теоремы, основанные на методе мягких пионов, требуют экстраполяции по массе в интервале шириной  $m_\pi^2$ , довольно узком по энергетической шкале элементарных частиц. Таким образом, результаты, полученные в пределе мягких пионов, в общем должны довольно хорошо согласоваться с экспериментом (что действительно наблюдается). Теория же мягких  $\rho$ -мезонов требует экстраполяции в интервале шириной  $m_\rho^2 \approx 30 m_\pi^2$ . Поэтому модель  $\rho$ -доминантности может дать только порядок соответствующих физических величин.

Для полноты скажем еще несколько слов об обобщении всего изложенного на случай аксиальных токов, в частности о доминантности аксиальных векторных мезонов  $1^+$  в аксиальных формфакторах. Рассматривая для простоты случай внешних нуклонов, имеем

$$\langle N_2 | A_\mu^\alpha | N_1 \rangle = \bar{u}_2 (G_1 \gamma_\mu \gamma_5 + k_\mu \gamma_5 G_2) \frac{1}{2} \tau^\alpha u_1, \quad (2.414)$$

$$k_\mu = (p_2 - p_1)_\mu,$$

так что матричный элемент дивергенции равен

$$\langle N_2 | \bar{D}^\alpha | N_1 \rangle = i \bar{u}_2 \gamma_5 \frac{1}{2} \tau^\alpha u_1 G_D(k^2), \quad (2.415)$$

где

$$G_D(k^2) = 2mG_1(k^2) + k^2 G_2(k^2).$$

В этом случае возникает полюсный вклад как от пиона, так и от  $A_1$ -мезона. Таким образом, нам следует рассмотреть связь  $A_1$ -мезон — нуклон:

$$T_{A_1 NN} = g_{A_1 N} \bar{u} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{1}{2} \tau^\alpha u \varepsilon^\mu \quad (2.416)$$

(в низшем порядке по  $k_\mu$ ); здесь  $\varepsilon^\mu$  — вектор поляризации  $A_1$ -мезона. Определим далее

$$\langle 0 | A_\mu^\alpha | A_1^\beta \rangle = f_A \varepsilon_\mu \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.417)$$

С учетом этих определений вычеты полюсов легко вычисляются; результаты приведены в табл. 2.1.



Таблица 2.1

	Формфакторы		
	$G_1$	$G_2$	$G_D$
Вклад $\pi$ -мезона	0	$2g_{\pi N} f_{\pi}$	$2g_{\pi N} f_{\pi} m_{\pi}^2$
Вклад $A_1$ -мезона	$g_{AN} f_A$	$-\frac{2m_N}{m_A^2} g_{AN} f_A$	0

Ранее уже говорилось, каким образом можно прийти к соотношению Голдбергера — Треймана, допустив для  $G_D$  справедливость дисперсионного соотношения без вычитаний, в котором при  $k^2 = 0$  преобладает пионный вклад. Дисперсионное же соотношение без вычитаний для  $G_1$  с преобладающим при  $k^2 = 0$  вкладом  $A_1$ -мезона дает нам равенство

$$\frac{g_{AN} f_A}{m_A^2} = r_A, \quad (2.418)$$

т. е. аналог соотношения (2.406). Естественно, что в данном случае из-за квазисохраняющегося характера аксиального тока универсальность оказывается только частичной.

Интересно, что из предположения о существовании дисперсионных соотношений без вычитаний одновременно для  $G_1(k^2)$  и  $G_D(k^2)$  следует «соотношение сверхсходимости»

$$\int \rho_2(k^2) dk^2 = 0, \quad (2.419)$$

где  $\rho_2$  — спектральная функция для  $G_2(k^2)$ .

Подставив в левую часть соотношения (2.419) полюсные члены для  $\pi$ - и  $A_1$ -мезонов, получим равенство

$$g_{\pi N} f_{\pi} - \frac{2m_N}{m_A^2} f_A g_{AN} = 0, \quad (2.420)$$

которое в сочетании с равенством (2.418) вновь приводит к соотношению Голдбергера — Треймана.

## Приложение I

### Некоторые сведения о группе $SU(3)$

В данном приложении мы изложим основные сведения о группе  $SU(3)$  и ее алгебре Ли. Наше изложение, вне сомнения, будет неполным, причем внимание, уделяемое тем или иным вопросам, не всегда будет соответствовать тому, насколько они существенны в основном тексте. Нашей целью было дать читателю не полный обзор математической теории, а нечто вроде руководства, которое можно было бы озаглавить: «Сделай сам то, что нужно для физических приложений группы  $SU(3)$ ».

#### 1. Группа $SU(3)$ и ее алгебра Ли

Группой  $SU(3)$  называется группа унитарных унимодулярных преобразований в трехмерном комплексном пространстве. Это 8-параметрическая группа, так как на 18 действительных параметров комплексной матрицы размерности  $3 \times 3$  девять условий накладывает унитарность и одно — унимодулярность.

Наиболее общий вид  $SU(3)$ -преобразования  $U$  таков:

$$U = e^{i\varepsilon_\alpha L^\alpha} \quad (I.1)$$

(суммирование по  $\alpha$  от 1 до 8), где  $\varepsilon_\alpha$  — вещественные параметры (которые можно интерпретировать как обобщенные углы). Восемь линейно независимых операторов  $L^\alpha$  эрмитовы (поскольку  $U$  — унитарное преобразование) и имеют след, равный нулю (поскольку  $U$  — унимодулярное преобразование). Они являются генераторами инфинитезимальных преобразований группы  $SU(3)$ , так как преобразования, близкие к тождественному, выражаются формулой

$$U = (1 + i\varepsilon_\alpha L^\alpha) \quad (I.2)$$

с бесконечно малыми  $\varepsilon_\alpha$ . Структура группы полностью определяется по инфинитезимальным преобразованиям<sup>1)</sup>. Величины  $L^\alpha$  обычно называют  $SU(3)$ -генераторами.

Очевидно<sup>2)</sup>, что из восьми генераторов  $L^\alpha$  существуют два (и только два) оператора, которые одновременно диагональны. Отсюда следует, что  $SU(3)$  — группа ранга два.

Перестановочными соотношениями между операторами  $L^\alpha$  определяется замкнутая алгебра. Действительно, поскольку коммутатор двух эрмитовых операторов, след которых равен нулю, есть антиэрмитов оператор со следом, равным нулю, его можно представить в виде линейной комбинации (с чисто мнимыми коэффициентами) самих  $L^\alpha$ . Таким образом,

$$[L^\alpha, L^\beta] = if_{\alpha\beta\gamma} L^\gamma \quad (I.3)$$

(по  $\gamma$  производится суммирование).

Вещественные коэффициенты  $f_{\alpha\beta\gamma}$  оказываются полностью антисимметричными по всем трем индексам  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . Очевидно, что их значения зависят от конкретного выбора восьми генераторов  $L^\alpha$  в качестве линейно независимых эрмитовых операторов, след которых равен нулю. Наиболее широко используется выбор  $f_{\alpha\beta\gamma}$ , введенный Гелл-Манном [147, 78]. Он вытекает из вида операторов  $L^\alpha$  в низшем по размерности нетривиальном представлении. Ясно, что это трехмерное представление (*фундаментальное представление*), и выбор Гелл-Манна для  $L^\alpha$  таков:

$$L^\alpha = \frac{1}{2} \lambda^\alpha, \quad (I.4)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (I.5)$$

<sup>1)</sup> В действительности алгебра Ли определяет группу Ли с точностью до локального изоморфизма.

<sup>2)</sup> Если считать, что  $L^\alpha$  — это эрмитовы матрицы  $3 \times 3$ , след которых равен нулю, т. е. взять низшее нетривиальное представление операторов  $L^\alpha$ .

Поскольку для  $\lambda^\alpha$  коммутационные соотношения имеют вид

$$[\lambda^\alpha, \lambda^\beta] = 2if_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\gamma, \quad (I.6)$$

получаем отсюда

$$f_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4i} \text{Sp}([\lambda^\alpha, \lambda^\beta] \lambda^\gamma). \quad (I.7)$$

Это соотношение демонстрирует полностью антисимметричный характер коэффициентов  $f_{\alpha\beta\gamma}$  по всем трем индексам и фиксирует

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}, \quad (I.8)$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

причем все остальные коэффициенты  $f_{\alpha\beta\gamma}$  равны нулю.

Заметим, что матрицы  $\lambda^\alpha$  строятся в строгой аналогии с матрицами Паули  $2 \times 2$ . Для матриц  $\lambda^\alpha$  в дополнение к коммутационным соотношениям (I.6) можно также написать антикоммутационные соотношения вида

$$\{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} = c\delta_{\alpha\beta} + 2d_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\gamma. \quad (I.9)$$

Поскольку

$$\text{Sp}(\lambda^\alpha \lambda^\beta) = 2\delta_{\alpha\beta}, \quad (I.10)$$

имеем

$$c = \frac{4}{3}, \quad (I.11)$$

$$d_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4} \text{Sp}(\{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\} \lambda^\gamma). \quad (I.12)$$

Последнее соотношение показывает, что действительные коэффициенты  $d_{\alpha\beta\gamma}$  полностью симметричны по всем индексам и равны

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{388} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad (I.13)$$

$$d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = d_{377} = \frac{1}{2}.$$

Остальные коэффициенты  $d_{\alpha\beta\gamma}$  равны нулю.

## 2. Представления группы $SU(3)$

Базисными векторами фундаментального представления являются, очевидно, три ортонормированных вектора  $|e_i\rangle$  с компонентами  $e_{(i)}^k \equiv \langle e_k | e_i \rangle = \delta_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ). Нетрудно сообразить, что в двумерном подпространстве, образованном векторами  $|e_1\rangle$  и  $|e_2\rangle$ , матрицы  $\lambda^1, \lambda^2$  и  $\lambda^3$  действуют подобно трем матрицам Паули  $\tau^1, \tau^2, \tau^3$  и, следовательно, векторы  $|e_1\rangle$  и  $|e_2\rangle$  можно рассматривать как две компоненты изоспинового дублета, а вектор  $|e_3\rangle$  должен быть изоспиновым синглетом.

Таким образом, первым аддитивным квантовым числом, введенным в  $SU(3)$ -схему, является собственное значение третьей компоненты изоспина  $I_3$ , отождествляемой с  $L^3$ . Второе аддитивное квантовое число, связанное, очевидно, с собственными значениями оператора  $L^8$ , в дальнейшем будет отождествлено с гиперзарядом  $Y$ .

В трехмерном пространстве, образуемом векторами  $|e_1\rangle, |e_2\rangle$  и  $|e_3\rangle$ , произвольный вектор  $|q\rangle$  представляется своими «контравариантными ком-

понентами»  $q^i = \langle e_i | q \rangle$ , преобразующимися при  $SU(3)$ -вращениях по закону

$$q^i \rightarrow q^{i'} = U_k^i q^k, \quad (I.14)$$

где, как обычно, производится суммирование по повторяющимся индексам, а  $U_k^i$  — элементы унитарных унимодулярных матриц ( $3 \times 3$ ).

Существует, однако, и другое, неэквивалентное данному,  $SU(3)$ -представление размерности 3. Дело в том, что произвольный вектор  $|q\rangle$  можно представить также и его «ковариантными компонентами»  $q_i \equiv q^{i*}$ , которые преобразуются по закону

$$q_i \rightarrow q'_i = U_k^{i*} q_k = (U^\dagger)_i^k q_k. \quad (I.15)$$

Такое представление неэквивалентно предшествующему, поскольку не существует матриц  $R$  размерности  $3 \times 3$ , обеспечивающих соотношение

$$RUR^{-1} = U^*$$

для любой унитарной унимодулярной ( $3 \times 3$ )-матрицы  $U^1$ .

Если  $U$  имеет вид (I.1), то

$$U^* = e^{-ie_\alpha L^{\alpha*}}. \quad (I.16)$$

Тогда независимое и неэквивалентное представление  $SU(3)$ -генераторов определяется набором матриц <sup>2)</sup>

$$\bar{L}^\alpha \equiv -L^{\alpha*} = -\frac{1}{2} \overline{\lambda^{\alpha*}}. \quad (I.17)$$

Действительно,  $\bar{L}^\alpha$  удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям (I.3), что и  $L^\alpha$ :

$$[\bar{L}^\alpha, \bar{L}^\beta] = if_{\alpha\beta\gamma} \bar{L}^\gamma. \quad (I.18)$$

В дальнейшем мы будем называть два неэквивалентных трехмерных представления, которые мы ввели, представлением 3 (*фундаментальным представлением*) и представлением 3\* (*сопряженным ему представлением*).

Теперь скажем несколько слов о других возможных  $SU(3)$ -представлениях. Существует, очевидно, тривиальное одномерное представление, в котором каждый генератор равен нулю. Другие, нетривиальные неприводимые представления могут быть найдены следующим образом.

Начав с  $q_i$  и  $q^i$ , мы можем сконструировать тензоры с  $m$  контравариантными (верхними) индексами и  $n$  ковариантными (нижними) индексами:

$$T_{i_1 \dots i_n}^{k_1 \dots k_m} = q^{k_1} \dots q^{k_m} q_{i_1} \dots q_{i_n}. \quad (I.19)$$

Они преобразуются по закону

$$T_{i_1 \dots i_n}^{k_1 \dots k_m} = U_{r_1}^{k_1} \dots U_{r_m}^{k_m} (U^\dagger)_{i_1}^{s_1} \dots (U^\dagger)_{i_n}^{s_n} T_{s_1 \dots s_n}^{r_1 \dots r_m}. \quad (I.20)$$

<sup>1)</sup> Это не относится к группе  $SU(2)$ , где  $U^* = \tau^2 U \tau^2$ , что сразу же видно из структуры произвольной унитарной унимодулярной матрицы в двумерном пространстве

$$U = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & \gamma + i\delta \\ -\gamma + i\delta & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$$

с вещественными  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  и  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$ .

<sup>2)</sup> Это не может служить общим определением сопряженного представления, поскольку матрицы  $RU^*R^{-1}$ , где  $R$  — любая фиксированная, неособенная ( $3 \times 3$ )-матрица, порождают представление, эквивалентное  $U^*$ . Следовательно, с таким же успехом мы могли бы взять в качестве второго трехмерного представления  $SU(3)$ -генераторов представление, определяемое матрицами

$$L^\alpha = -\frac{1}{2} R \lambda^{\alpha*} R^{-1}, \quad (I.17')$$

выбрав  $R$  в соответствии с нашими целями.

Если рассматривать  $q^i$  как компоненты базисных векторов, то элементы тензора  $T_{i_1 \dots i_n}^{k_1 \dots k_m}$  составляют базис  $(3m \times 3n)$ -мерного представления  $SU(3)$ . Это представление приводимо, поскольку тензоры  $\delta_j^i$  и  $\varepsilon_{ijk}$  (так же, как и  $\varepsilon^{ijk}$ ) инвариантны относительно  $SU(3)$ -преобразований<sup>1)</sup>. Таким образом, любое допустимое неприводимое представление группы  $SU(3)$  имеет в качестве базиса элементы тензоров  $T_{\{i_1 \dots i_n\}}^{\{k_1 \dots k_m\}}$ , полностью симметричные как по верхним, так и по нижним индексам:

$$T_{\{\dots i_r \dots i_u \dots\}}^{\{\dots k_r \dots k_s \dots\}} = T_{\{\dots i_r \dots i_u \dots\}}^{\{k_s \dots k_r \dots\}} = T_{\{\dots i_u \dots i_r \dots\}}^{\{k_s \dots k_r \dots\}} \tag{I.21}$$

и имеющие нулевой след (при свертке любого верхнего с одним из нижних индексов):

$$\delta_j^i T_{\{\dots i \dots\}}^{\{j \dots\}} = 0. \tag{I.22}$$

Поскольку тензор с  $m$  симметричными верхними индексами и с  $n$  симметричными нижними индексами имеет

$$\frac{1}{4} (m+1)(m+2)(n+1)(n+2)$$

независимых компонент, а условие равенства нулю следов тензора накладывает еще

$$\frac{1}{4} m(m+1)n(n+1)$$

соотношений между этими компонентами, допустимые размерности неприводимых представлений группы  $SU(3)$  таковы:

$$D(m, n) = \frac{1}{2} (m+1)(n+1)(m+n+2). \tag{I.23}$$

Таким образом, чтобы полностью охарактеризовать неприводимое представление группы  $SU(3)$ , необходимы два числа  $m$  и  $n$ , а именно число фундаментальных и число сопряженных триплетов, которые требуются для построения такого представления. Будем обозначать его символом  $(m, n)$ . Тогда представление  $(n, m)$  соответствует представлению, сопряженному  $(m, n)$ . Представления типа  $(m, m)$  оказываются самосопряженными, и их размерности равны просто

$$D(m, m) = (m+1)^3. \tag{I.24}$$

На практике  $SU(3)$ -представление  $(m, n)$  удобно характеризовать схемой Юнга. Такая схема состоит из клеток, расположенных в двух рядах: в первом ряду  $m+n$  клеток, во втором —  $n$ . Таким образом,

$$(m, n) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & m+n & \\ \hline 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & n & & \\ \hline \end{array} \tag{I.25}$$

Очевидно, что в случае представлений типа  $(m, 0)$  второй ряд отсутствует. Представлению  $(n, m)$ , сопряженному относительно представления  $(m, n)$ , соответствует схема, дополняющая предыдущую до трехстрочной схемы, в каждой строке которой  $(m+n)$  клеток (причем порядок строк в дополнительной схеме должен быть изменен на обратный, чтобы она имела надлежащую форму  $SU(3)$ -схемы Юнга).

<sup>1)</sup> Тензор  $\delta_j^i$  вследствие унитарности, а  $\varepsilon_{ijk}$  — вследствие унимодулярности преобразований.

Ниже приводятся чаще всего используемые  $SU(3)$ -представления и соответствующие схемы Юнга:

$$\begin{array}{lll}
 (0.0) = 1, & \square = (1.0) = 3, & \square\square = (2.0) = 6; \\
 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = (0.0) = 1, & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = (0.1) = 3^*, & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = (0.2) = 6^*; \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = (1.1) = 8, & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = (3.0) = 10, & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = (0.3) = 10^*, & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = (2.2) = 27.
 \end{array} \tag{.26I}$$

Отметим, что схемы Юнга имеют конкретный смысл, так как они воспроизводят свойства симметрии соответствующих тензоров. Но по этому вопросу мы не будем вдаваться в детали.

### а. Весовые диаграммы

Выражение (I.4) для  $SU(3)$ -генераторов в фундаментальном представлении  $\mathbf{3}$  [или (1.0)] показывает, что  $L^3$  и  $L^8$  — это операторы, которые диагонализуются одновременно. Мы можем рассматривать их собственные значения как компоненты вектора в двумерном пространстве (весовом пространстве). Если ввести обозначение

$$\mathbf{H} \equiv (H_1 = L^3, H_2 = L^8), \tag{I.27}$$

то имеем для базисных векторов фундаментального представления

$$\mathbf{H} |e_i\rangle = \mathbf{h}^{(i)} |e_i\rangle, \tag{I.28}$$

где  $\mathbf{h}^{(i)}$  — веса, равные

$$\mathbf{h}^{(1)} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right); \quad \mathbf{h}^{(2)} = \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right); \quad \mathbf{h}^{(3)} = \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right). \tag{I.28'}$$

Компоненты весов суть квантовые числа, служащие для идентификации базисных векторов, и данное неприводимое  $SU(3)$ -представление обычно характеризуют его весовой диаграммой, изображая в плоскости ( $H_1 = L^3$ ,  $H_2 = L^8$ ) вес, связанный с каждым базисным вектором.

Выражения (I.28') сразу же позволяют нам начертить весовую диаграмму фундаментального представления  $\mathbf{3}$  (фиг. I.1, а). Три веса имеют одинаковую длину, и каждый вес можно получить из других поворотом на  $2\pi/3$  вокруг начала.

Для сопряженного представления  $\mathbf{3}^*$  из (I.17) имеем

$$\mathbf{H} \equiv \left( H_1 = \bar{L}^3 = -\frac{1}{2}\lambda^3, H_2 = \bar{L}^8 = -\frac{1}{2}\lambda^8 \right), \tag{I.29}$$

тогда уравнение для собственных значений

$$\mathbf{H} |e_i\rangle = \mathbf{h}_{(i)} |e_i\rangle \tag{I.30}$$

дает решения

$$\mathbf{h}_{(i)} = -\mathbf{h}^{(i)}, \tag{I.30'}$$

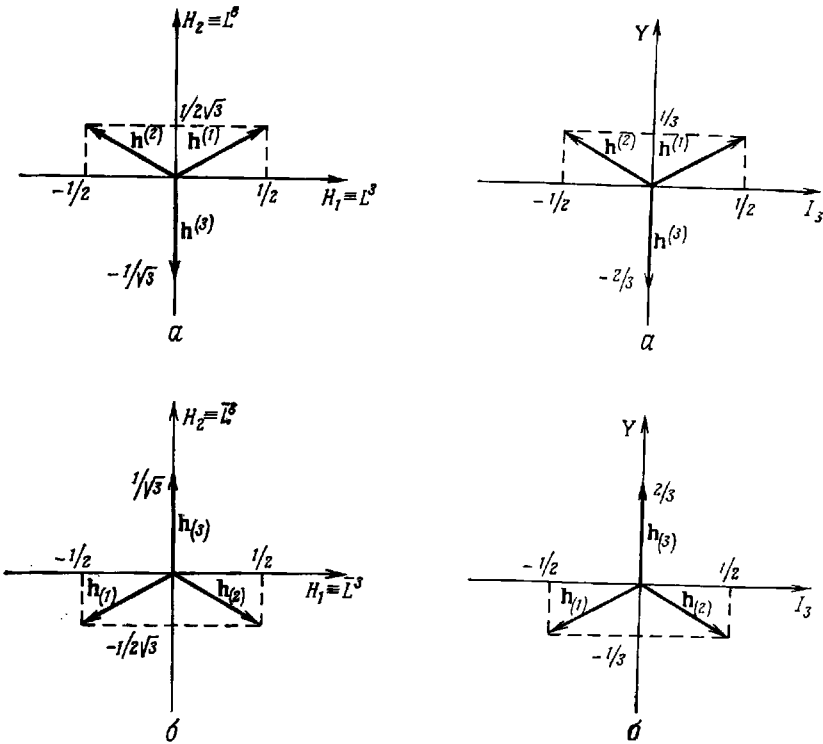
причем  $\mathbf{h}^{(i)}$  — вес (I.28) представления  $\mathbf{3}$ . Весовая диаграмма представления  $\mathbf{3}^*$  (фиг. I.1, б) получается из диаграммы представления  $\mathbf{3}$  просто путем

отражения стрелок относительно начала. То же самое справедливо, очевидно, и для любой пары  $(m, n)$  и  $(n, m)$  сопряженных представлений.

Для физических приложений вместо оператора  $L^8$  лучше ввести эквивалентный ему оператор

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} L^8, \tag{I.31}$$

который будет отождествляться с оператором гиперзаряда. Как уже указывалось,  $L^8$  принимается за  $I_3$ —третью компоненту изоспина.



Фиг. I.1

Фиг. I.2

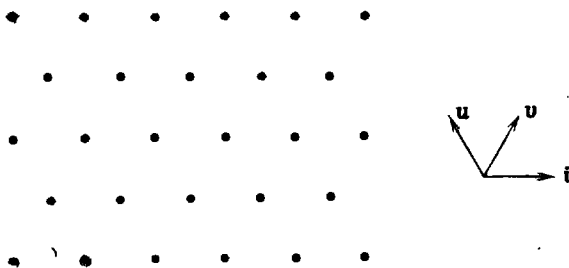
Таким образом, мы будем классифицировать состояния по собственным значениям операторов  $I_3 = L^3$  и  $Y = (2/\sqrt{3}) L^8$ , а не по собственным значениям  $L^3$  и  $L^8$ , так что весовые диаграммы будут, как правило, вычерчиваться в плоскости  $(I_3, Y)$ . При этом, однако, диаграммы теряют свою симметричную форму (которая удобна и к тому же отвечает существу дела). Чтобы сохранить симметричную структуру двумерных  $(I_3, Y)$  диаграмм, мы будем пользоваться разными масштабами по осям  $I_3$  и  $Y$ . На фиг. I.2 показаны весовые диаграммы представлений  $\mathbb{3}$  и  $\mathbb{3}^*$  в такой  $(I_3, Y)$ -плоскости.

Весовые диаграммы для  $SU(3)$ -представлений более высокого порядка могут быть получены путем прямого сложения  $m$  весов представления  $\mathbb{3}$  с  $n$  весами представления  $\mathbb{3}^*$ ; в результате мы получим весовую диаграмму приводимого  $(3m \times 3n)$ -мерного представления. Разложение ее может быть проведено в соответствии с рассмотренной уже процедурой приведения тензоров. Но это не всегда оказывается простой задачей. Поэтому здесь мы ограничимся тем, что приведем без доказательства основные свойства весовых диаграмм высших  $SU(3)$ -представлений.

Начнем с того, что в плоскости  $(I_3, Y)$  введем три фундаментальных вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (1, 0), \\ \mathbf{v} &= \left(\frac{1}{2}, 1\right), \\ \mathbf{u} &= \left(-\frac{1}{2}, 1\right). \end{aligned} \quad (I.32)$$

Будем теперь изображать веса в плоскости  $(I_3, Y)$  просто точками, соответствующими концам весовых векторов. Почти очевидно (см. весовые диа-



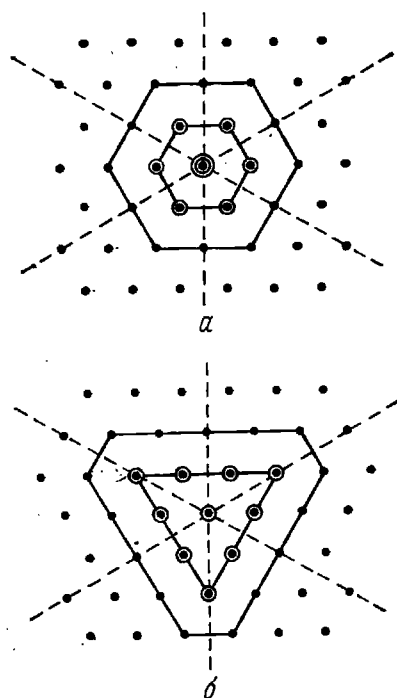
Фиг. I.3

граммы представлений  $3$  и  $3^*$ ), что в самом общем виде  $SU(3)$ -весовая диаграмма будет представлять собой решетку, составленную из правильных треугольников<sup>1)</sup> и полученную трансляцией трех векторов (фиг. I.3). Для  $SU(3)$ -весовых диаграмм справедливы следующие теоремы<sup>2)</sup>:

1. Каждая весовая диаграмма имеет три оси симметрии — прямые линии, проходящие через начало и ортогональные трем векторам  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$ .

2. Точки, составляющие весовую диаграмму, — это все те точки решетки, которые лежат либо внутри, либо на границе выпуклого шестиугольника, построенного с учетом упомянутой выше симметрии, причем его вершины являются точками решетки. Центр шестиугольника всегда соответствует точке  $(0, 0)$ , которая может принадлежать, а может и не принадлежать решетке. Шестиугольник может перейти в треугольник в том случае, когда три противоположные грани превращаются в точки, лежащие на трех осях симметрии.

3. Точке на границе соответствует единственное состояние, т. е. она простая. При удалении от границы во внутреннюю область гексагональных структур кратность весов возрастает шаг за шагом на единицу до тех пор, пока не будет достигнута треугольная структура (и это последний шаг с возрастанием кратности); внутри треугольника кратность точек остается неизменной. Некоторые примеры, иллюстрирующие сказанное, приведены на фиг. I.4.



Фиг. I.4

<sup>1)</sup> Напомним, что у нас разный масштаб по осям  $I_3$  и  $Y$ .

<sup>2)</sup> Доказательство см. в работах [148—150].



4. Представлению  $(m, n)$  соответствуют  $m + 1$  точек на верхней горизонтальной грани и по  $n + 1$  на двух смежных гранях (и, следовательно, на нижней горизонтальной грани). Например, на фиг. 1.4 изображены весовые диаграммы представлений (2,2) и (4,1), размерности которых равны 27 и 35.

Нетрудно видеть, что весовую диаграмму представления  $(n, m)$ , сопряженного с  $(m, n)$ , можно получить путем отражения весовой диаграммы представления  $(m, n)$  относительно начала. Поэтому весовые диаграммы самосопряженных представлений имеют правильную гексагональную структуру [действительно, самосопряженные представления имеют вид  $(m, m)$ ].

В заключение раздела скажем несколько слов об использовании  $SU(3)$ -представлений в физических приложениях. Мы видели, что представление  $(m, n)$  получается в результате композиции  $m$  представлений  $3$  и  $n$  представлений  $3^*$ . Поэтому наивысший вес представления  $(m, n)$  (соответствующий наивысшему значению  $I_3$  и наивысшему возможному при этом значению  $Y$ ) имеет компоненты

$$I_3 = \frac{1}{2}(m + n), \quad Y = \frac{1}{3}(m - n). \quad (I.33)$$

Далее, допустимые значения  $Y$  базисных состояний неприводимого представления всегда различаются на целые числа (см. например, представления  $3$  и  $3^*$ ). Отсюда следует, что единственными представлениями, имеющими базис состояний с целым гиперзарядом, оказываются представления  $(m, n)$ , для которых

$$m - n = 0 \pmod{3}. \quad (I.34)$$

Неприводимые представления наименьших размерностей, обладающие этим свойством, таковы: тривиальное представление  $(0,0)$ ; представление  $(1,1)$ , т. е.  $SU(3)$ -октет, являющийся регулярным<sup>1)</sup> представлением группы

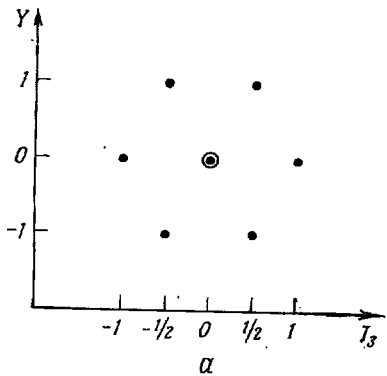
$SU(3)$  и наиболее важным для физических приложений; представление  $(3,0)$ , соответствующее декаплету, и сопряженное с ним представление  $(0,3)$  и т. д. Все физические частицы имеют целые гиперзаряды. Поэтому именно выписанные выше представления используются при классификации известных физических частиц (и резонансов) в рамках схемы  $SU(3)$ .

Для полноты на фиг. 1.5 показаны весовые диаграммы, соответствующие представлениям 8 (а) и 10 (б). В случае фиг. 1.5, а центр диаграммы оказывается дважды вырожденным весом нулевой длины.

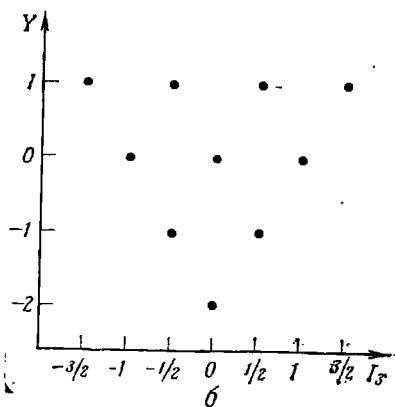
### 3. Произведение представлений

Прямое произведение двух неприводимых  $SU(3)$ -представлений тоже представление группы  $SU(3)$ , которое, однако, приводимо. Разлагая его по неприводимым представлениям, мы получаем ряд Клебша — Гордана для

<sup>1)</sup> Регулярным называется представление, размерность которого равна размерности алгебры. Для него весовая диаграмма совпадает с корневой диаграммой алгебры и матричные элементы генераторов даются непосредственно структурными коэффициентами алгебры [148, 149]. [См. первое примечание на стр. 98. — Прим. ред.]



а



б

Фиг. 1.5

прямого произведения двух представлений:

$$(m_1, n_1) \otimes (m_2, n_2) = \sum_{m, n} \oplus \sigma_{mn} (m, n), \tag{I.35}$$

где  $\sigma_{mn}$  — кратность представления  $(m, n)$ .

Существует много методов определения ряда Клебша — Гордана для прямого произведения любой пары неприводимых представлений. Основной метод заключается в том, что берут прямое произведение соответствующих  $SU(3)$ -тензоров и разлагают его по неприводимым тензорам (§ 2). Однако не во всех случаях эта процедура элементарна. Можно использовать простой метод схем Юнга, который автоматически воспроизводит упомянутую выше процедуру приведения тензорных произведений.

*а. Ряд Клебша — Гордана, метод схем Юнга*

Чтобы получить ряд Клебша — Гордана для произведения  $(m_1, n_1) \otimes (m_2, n_2)$ , начнем с соответствующих схем Юнга. Фиксируем одну из схем. К ней нужно присоединить все клетки другой всеми возможными способами, совместимыми со следующими требованиями:

1. Клетки диаграммы второй (умножаемой) схемы должны присоединяться к фиксированной строка за строкой, начиная с первой (верхней) строки.

2. Получающаяся схема снова должна быть схемой Юнга. Это значит, что число клеток в любой строке не должно возрастать при переходе от этой строки к нижним.

3. Две клетки из одной строки никогда не должны оказываться в одном столбце.

4. Напишем во второй схеме индекс  $a$  в каждой клетке первой строки и индекс  $b$  в каждой клетке второй строки. Взяв все схемы, построенные по изложенным правилам, будем выписывать по порядку индексы в строках справа налево, начиная с первой строки. Тогда допустимы только такие схемы Юнга, для которых в любой момент число выписанных индексов  $a$  больше числа выписанных индексов  $b$  или равно ему.

5. Максимально допустимое число строк в получающихся схемах равно трем, причем в окончательных схемах должны быть отброшены все столбцы с тремя клетками.

Проиллюстрируем теперь метод, вычислив ряд Клебша — Гордана для прямого произведения двух представлений 8.

Переходя к схемам Юнга, имеем

$$\begin{aligned} (1.1) \otimes (1.1) &= \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \square \\ \hline \end{array} = \\ &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline \square & b & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & a & a \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & b & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & \square & a \\ \hline \square & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \\ &\oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & a & \square \\ \hline \square & \square & a \\ \hline \square & b & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & \square & a \\ \hline \square & a & b \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & a \\ \hline \square & a \\ \hline \square & b \\ \hline \end{array} = \\ &= (2.2) \oplus (3.0) \oplus (0.3) \oplus (1.1) \oplus (1.1) + (0.0) = \\ &= 27 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \end{aligned} \tag{I.36}$$

В заключение раздела напомним некоторые чаще всего используемые ряды Клебша — Гордана:

$$\begin{aligned}
 3 \otimes 3^* &= 1 \oplus 8, \\
 3 \otimes 3 &= 3^* \oplus 6, \\
 3 \otimes 3 \otimes 3 &= 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10, \\
 8 \otimes 8 &= 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 27, \\
 8 \otimes 10 &= 8 \oplus 10 \oplus 27 \oplus 35, \\
 10 \otimes 10^* &= 1 \oplus 8 \oplus 27 \oplus 64.
 \end{aligned} \tag{I.37}$$

#### 4. Модифицированная форма алгебры $SU(3)$

В дополнение к эрмитовым  $SU(3)$ -генераторам  $L^a$ , определенным в § 1 и удовлетворяющим алгебре Ли группы  $SU(3)$  в форме, данной Гелл-Манном [формулы (I.3) и (I.8)], удобно ввести «реальные» генераторы, физическая интерпретация которых более прозрачна.

Введем такие «реальные» генераторы, как следующие комбинации эрмитовых генераторов:

$$\begin{aligned}
 I_{\pm}^1 &= L^1 \pm iL^2, \\
 V^{\pm} &= L^4 \pm iL^5, \\
 U^{\pm} &= L^6 \pm iL^7, \\
 I_3 &= L^3, \\
 Y &= \frac{2}{\sqrt{3}} L^8.
 \end{aligned} \tag{I.38}$$

Кроме того, введем сокращенное обозначение

$$\mathbf{H} = (I_3, Y) \tag{I.39}$$

аналогично формуле (I.27).

Генераторы (I.38) определены в полной аналогии с теми генераторами, которые удовлетворяют стандартной форме  $SU(3)$ -алгебры, введенной Рака [148]. Они отличаются от последних только своей нормировкой, которую выбирают обычно в соответствии с (I.38), имея в виду физические приложения.

Мы приведем здесь полный перечень перестановочных соотношений для реальных генераторов (I.38), которые часто используются в вычислениях:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{H}, I^{\pm}] &= \pm i I^{\pm}, & \mathbf{i} &= (1, 0), \\
 [\mathbf{H}, V^{\pm}] &= \pm v V^{\pm}, & \mathbf{v} &= \left(\frac{1}{2}, 1\right), \\
 [\mathbf{H}, U^{\pm}] &= \pm u U^{\pm}, & \mathbf{u} &= \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \\
 [I^+, I^-] &= 2I_3, \\
 [V^+, V^-] &= 2V_3, & V_3 &= \frac{1}{2} \left(I_3 + \frac{3}{2} Y\right), \\
 [U^+, U^-] &= 2U_3, & U_3 &= \frac{1}{2} \left(-I_3 + \frac{3}{2} Y\right), \\
 [I^-, V^+] &= U^+, & [V^-, I^+] &= U^-, \\
 [I^+, U^+] &= V^+, & [U^-, I^-] &= V^-, \\
 [V^+, U^-] &= I^+, & [U^+, V^-] &= I^-.
 \end{aligned} \tag{I.40}$$

Коммутаторы, не включенные в данный список, равны нулю.

Векторы  $i$ ,  $v$  и  $u$ , введенные ранее в п. 2а, играют роль корней алгебры  $SU(3)$ . На фиг. 1.6 они изображены в плоскости  $(I_3, Y)$  (с обычным выбором масштабов, принятым в случае весовых диаграмм). Можно заметить, что диаграмма фиг. 1.6 совпадает с весовой диаграммой регулярного представления, как уже говорилось в примечании в конце п. 2, а.

Из определения (1.40)  $SU(3)$ -алгебры замечаем, что она содержит три  $SU(2)$ -подалгебры, которые мы будем называть <sup>1)</sup>  $I$ -спиновой алгеброй:

$$[I^+, I^-] = 2I_3, \quad [I_3, I^\pm] = \pm I^\pm; \quad (1.41)$$

$V$ -спиновой алгеброй:

$$[V^+, V^-] = 2V_3, \quad [V_3, V^\pm] = \pm V^\pm \quad (1.42)$$

и  $U$ -спиновой алгеброй:

$$[U^+, U^-] = 2U_3, \quad [U_3, U^\pm] = \pm U^\pm. \quad (1.43)$$

В этих соотношениях  $V_3$  и  $U_3$  — комбинации диагональных генераторов  $I_3$  и  $Y$ , определенные формулами (1.40). Для любой из этих подалгебр существует другая комбинация  $I_3$  и  $Y$ , играющая роль скалярного оператора подалгебры. Для  $I$ -спиновой алгебры таковым является генератор  $Y$ , поскольку

$$[I_\alpha, Y] = 0 \quad (\alpha = +, -, 3). \quad (1.44)$$

Если отождествить  $I$  с генераторами изоспиновой группы и  $Y$  — с оператором гиперзаряда, то мы получим хорошо известный результат: состояния, относящиеся к одному и тому же изоспиновому мультиплету, имеют одинаковый гиперзаряд.

В этом отношении особенно интересна  $U$ -спиновая алгебра, так как для нее скалярный оператор равен

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y, \quad (1.45)$$

т. е. оператору электрического заряда (в единицах  $e$ ). Поскольку

$$[U_\alpha, Q] = 0 \quad (\alpha = +, -, 3), \quad (1.46)$$

то состояния, относящиеся к одному и тому же  $U$ -спиновому мультиплету, имеют одинаковый электрический заряд.

Наконец,  $V$ -спиновым скаляром является оператор

$$Q_V = I_3 - \frac{1}{2} Y, \quad (1.47)$$

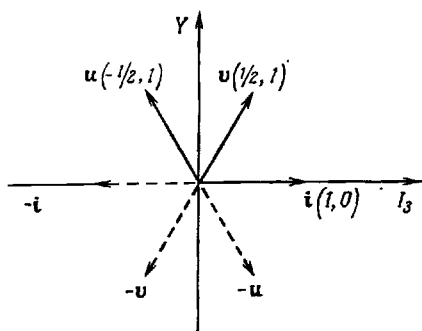
который не имеет непосредственного физического смысла. Но из соотношения

$$[V_\alpha, Q_V] = 0 \quad (\alpha = +, -, 3) \quad (1.48)$$

следует, что состояния, относящиеся к одному и тому же  $V$ -спиновому мультиплету, имеют одинаковое собственное значение  $Q_V$ . Таким образом, переходы между состояниями внутри  $V$ -спинового мультиплета подчиняются правилу отбора  $\Delta Q_V = 0$ , т. е.  $\Delta I_3 = \frac{1}{2} \Delta Y$ . Отсюда видно, что слабые переходы, не сохраняющие странность и удовлетворяющие классическому правилу  $\Delta S = \Delta Q$ , происходят внутри  $V$ -спиновых мультиплетов <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Такая терминология была введена Липкином [151].

<sup>2)</sup> Здесь  $S$  — странность:  $Y = S + B$ , причем  $B$  — барионное число (всегда сохраняется).



Фиг. 1.6

Из сказанного ранее о  $SU(2)$ -подалгебрах алгебры  $SU(3)$  следует, что генераторы  $I^\pm, V^\pm, U^\pm$  действуют на базисные состояния  $SU(3)$ -представления как операторы сдвига. Если обратиться к весовым диаграммам в плоскости  $(I_3, Y)$ , то мы увидим, что генераторы  $I^\pm$  связывают состояния, смещенные на  $\pm 1$ , а генераторы  $V^\pm, U^\pm$  связывают состояния, смещенные на  $\pm 1$  и  $\pm 1/2$ . Другими словами, генераторы  $I^\pm$  вызывают переходы между состояниями с  $\Delta I_3 = \pm 1$  и  $\Delta Y = 0$ ;  $V^\pm$  связывают состояния с  $\Delta I_3 = \pm 1/2, \Delta Y = \pm 1$  (т. е. с  $\Delta S = \Delta Q$ ), и, наконец,  $U^\pm$  связывают состояния с  $\Delta I_3 = \pm 1/2, \Delta Y = \pm 1$  (т. е. с  $\Delta Q = 0$ ).

Если начать с некоторого произвольно выбранного состояния данного представления, то путем многократного применения операторов сдвига в надлежащей последовательности можно построить все базисные векторы такого представления.

## 5. Классификация базисных состояний

Мы уже видели, что в общем случае для неприводимого представления типично наличие кратных весов. При этом для полной характеристики базисных состояний оказывается недостаточно квантовых чисел  $I_3$  и  $Y$ . Мы должны добавить новое квантовое число, чтобы устранить вырождение состояний.

Поскольку оператор  $I^2 = 1/2(I^+I^- + I^-I^+) + I_3^2$  коммутирует как с  $I_3$ , так и с  $Y$ , мы можем выбрать в качестве полного набора квантовых чисел, необходимых для полной характеристики базисных состояний данного представления, набор  $I^2, I_3, Y$ . Таким образом, произвольное базисное состояние данного представления будем обозначать символом  $|I, I_3, Y\rangle$ . Например, в случае октета его центр является точкой кратности два. Вырождение устраняется, если в качестве базисных векторов, соответствующих этой точке, выбрать векторы  $|1, 0, 0\rangle$  и  $|0, 0, 0\rangle$ .

Описанная процедура дает классификацию базисных состояний в соответствии с их трансформационными свойствами относительно преобразований изоспиновой подгруппы  $SU(2)$ , содержащейся в группе  $SU(3)$ . Такой выбор подсказывается, очевидно, физическими соображениями, ибо для сильных взаимодействий  $I$  — хорошее квантовое число.

Формально классификации базисных состояний в соответствии с их трансформационными свойствами относительно преобразований любой из подгрупп  $SU(2)$ , содержащихся в группе  $SU(3)$ , вполне равноправны. Таким образом, мы с тем же успехом могли бы классифицировать базисные состояния по их  $V$ -спиновым характеристикам как  $|V, V_3, Q_V\rangle$  или по их  $U$ -спиновым характеристикам как  $|U, U_3, Q\rangle$ . Отметим, что эти два варианта неэквивалентны. В самом деле, выбор несуществен только для состояний с простыми весами. В случае же кратного веса к каждому  $V$ - (или  $U$ -) спиновому собственному состоянию, принадлежащему данному весу, будет примешано состояние с определенным  $I$ -спином.

### а. Выбор фаз

Рассмотренные ранее классификации базисных состояний по их  $I$ -,  $V$ - и  $U$ -спиновым характеристикам сразу же позволяют определить матричные элементы операторов сдвига в  $SU(2)$ -подпространстве группы  $SU(3)$ .

Приняв обычное соглашение о фазах (Кондон и Шортли [152, 153]), мы имеем для состояний, принадлежащих определенному  $I$ -мультиплету,

$$I^\pm |I, I_3, Y\rangle = +[(I \mp I_3)(I \pm I_3 + 1)]^{1/2} |I, I_3 \pm 1, Y\rangle. \quad (I.49)$$

Отметим, что из формулы (I.49) следует равенство

$$e^{i\pi I_2} |I, I_3, Y\rangle = (-1)^{I+I_3} |I, -I_3, Y\rangle. \quad (I.50)$$

Относительные фазы внутри  $V$ -спинового мультиплетта выберем, следуя Де Сварту [154], точно таким же образом:

$$V^{\pm} |V, V_3, Q_V\rangle = [(V \mp V_3)(V \pm V_3 + 1)]^{1/2} |V, V_3 \pm 1, Q_V\rangle. \quad (I.51)$$

Чтобы фиксировать относительные фазы двух наборов состояний  $|I, I_3, Y\rangle$  и  $|V, V_3, Q_V\rangle$ , начнем с того, что, вообще говоря, мы имеем

$$V^{\pm} |I, I_3, Y\rangle = \sum_{I'} a^{\pm}(I, I', I_3, Y) \left| I', I_3 \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle. \quad (I.52)$$

Тогда относительные фазы для всех состояний неприводимого представления можно полностью определить, как это принято у Де Сварта, исходя из требования, чтобы коэффициенты  $a^{\pm}(I, I', I_3, Y)$  всегда были вещественными и неотрицательными.

При таком выборе фаз операторы сдвига в  $U$ -спиновом пространстве даются следующим выражением:

$$U^{\pm} |U, U_3, Q\rangle = \pm [(U \mp U_3)(U \pm U_3 + 1)]^{1/2} |U, U_3 \pm 1, Q\rangle, \quad (I.53)$$

где символ  $\pm$  означает, что знак теперь нельзя выбрать произвольно и он определяется коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} U^+ &= [I^-, V^+], \\ U^- &= [V^-, I^+]. \end{aligned} \quad (I.54)$$

Из соотношений (I.54) следует, что, подействовав оператором сдвига  $U^{\pm}$  на данное состояние  $|I, I_3, Y\rangle$ , мы получим

$$U^{\pm} |I, I_3, Y\rangle = \sum_{I'} b^{\pm}(I, I', I_3, Y) \left| I', I_3 \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1 \right\rangle, \quad (I.55)$$

где в противоположность тому, что имело место для аналогичного соотношения (I.52), знак  $b^{\pm}$  определяется  $SU(3)$ -алгеброй.

В заключение приведем принятое Де Свартом фазовое соотношение между собственными состояниями данного  $SU(3)$ -представления  $(m, n)$  и собственными состояниями сопряженного ему представления  $(n, m)$ :

$$|(m, n); I, I_3, Y\rangle^* = (-1)^{I_3 + (Y/2)} |(n, m); I, -I_3, -Y\rangle. \quad (I.56)$$

В случае самосопряженного представления, подобного регулярному представлению 8, соотношение (I.65) требует, чтобы выполнялось равенство

$$|I, I_3, Y\rangle^* = (-1)^Q |I, -I_3, -Y\rangle, \quad (I.57)$$

где, очевидно,  $Q = I_3 + (Y/2)$  имеет смысл заряда, когда мы работаем с физическими состояниями.

## 6. Матричные элементы операторов сдвига между собственными состояниями $I$ -спина

В дальнейшем наше внимание будет сконцентрировано на наиболее интересной с практической точки зрения классификации состояний, основанной на  $I$ -спиновом формализме. Ненулевые матричные элементы операторов сдвига  $I^{\pm}$  между базисными состояниями  $|I, I_3, Y\rangle$  данного неприводимого представления группы  $SU(3)$  в этом случае даются непосредственно выражением (I.49).

Отличные от нуля матричные элементы операторов сдвига  $V^{\pm}, U^{\pm}$  между базисными состояниями  $|I, I_3, Y\rangle$ , очевидно, равны коэффициентам  $a^{\pm}, b^{\pm}$  в формулах (I.52) и (I.55). Их легко вычислить для каждого представления, пользуясь коммутационными соотношениями (I.40) для операторов сдвига.

В качестве примера рассмотрим случай представления 8. На фиг. I.7 показана его весовая диаграмма, где в простых обозначениях указана также изоспиновая структура соответствующих собственных состояний. Возьмем теперь коммутационное соотношение

$$[V^+, I^+] = 0 \tag{I.58}$$

и применим его к состоянию  $|d'_-\rangle$ . В силу соотношений (I.49), (I.51) и (I.52) получим

$$I^+V^+|d'_-\rangle = I^+(a_1^+|t_0\rangle + a_2^+|s\rangle) = a_1^+V\sqrt{2}|t_+\rangle$$

и

$$V^+I^+|d'_-\rangle = V^+|d'_0\rangle = |t_+\rangle.$$

Далее из равенства (I.52) получаем условие нормировки

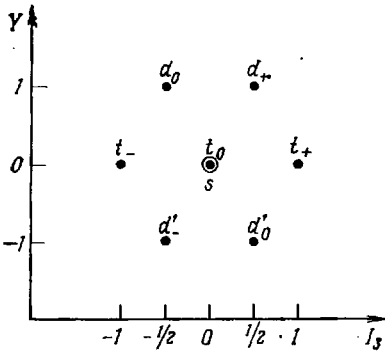
$$(a_1^+)^2 + (a_2^+)^2 = 2.$$

Тогда из коммутационного соотношения (I.58) следует, что

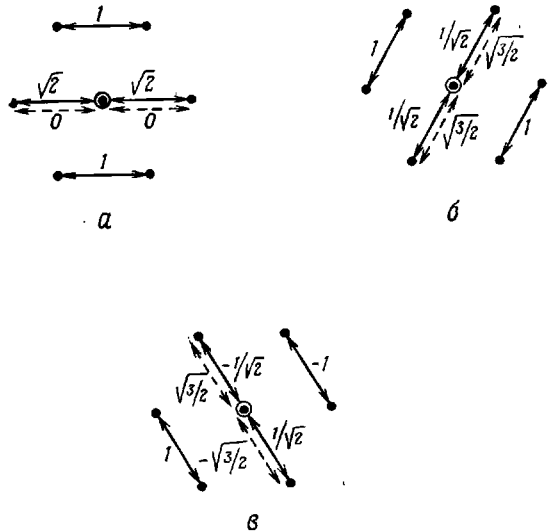
$$\langle t_0|V^+|d'_-\rangle \equiv a_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle s|V^+|d'_-\rangle \equiv a_2^+ = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Точно таким же образом можно легко найти все другие интересующие нас матричные элементы оператора  $V^\pm$ . В целях практического использования их численные значения приведены на фиг. I.8, б.



Фиг. I.7



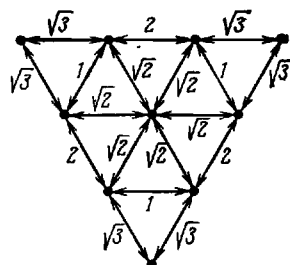
Фиг. I.8 Не равные нулю матричные элементы операторов сдвига  $I^\pm$  (а),  $V^\pm$  (б) и  $U^\pm$  (в) для представления 8. Штриховые линии соответствуют связям изоспинглета.

Коль скоро матричные элементы операторов  $I^\pm$ ,  $V^\pm$  известны, коммутационным соотношением (I.54) фиксируются и матричные элементы генераторов  $U^\pm$ . Таким образом, имеем, например,

$$U^+|t_+\rangle = [I^-, V^+]|t_+\rangle = -V^+I^-|t_+\rangle = -V\sqrt{2}V^+|t_0\rangle = -|d_+\rangle.$$

Полный набор матричных элементов  $U^\pm$  для представления 8 изображен на фиг. I.8, б.

Путем аналогичных рассуждений можно вычислить матричные элементы операторов сдвига для любого интересующего нас представления. На фиг. I.9 изображен случай представления 10, который интересен с практической точки зрения.



Фиг. I.9

### 7. Коэффициенты Клебша — Гордана группы $SU(3)$

Рассмотрим еще раз разложение Клебша — Гордана для прямого произведения двух неприводимых представлений:

$$(m_1, n_1) \otimes (m_2, n_2) = \sum_{m, n} \oplus \sigma_{mn} (m, n). \quad (I.59)$$

Следуя Де Сварту [154], обозначим состояния представления  $(m_i, n_i)$  размерности  $N_i$  символом  $\Phi_{\nu_i}^{\mu_i}$ ; в этом сокращенном обозначении символом  $\mu_i$

представлены все квантовые числа, необходимые, чтобы характеризовать данное представление, а символом  $\nu_i$  — квантовые числа, необходимые, чтобы характеризовать состояние в данном представлении, а именно  $\nu_i$  обозначает набор  $(I, I_3, Y)_i$ . Далее обозначим символом  $\psi$  ( $\mu_1 \mu_2 \mu_\nu$ ) вектор, являющийся элементом базисов неприводимых представлений в правой части разложения Клебша — Гордана (I.59). Здесь индекс  $\nu$  служит для того, чтобы различать представления, появляющиеся в разложении Клебша — Гордана с кратностью, большей, чем единица.

Пространство произведений, размерность которого, очевидно, равна  $N_1 N_2$ , можно рассматривать двумя эквивалентными способами: как образованное  $N_1 N_2$  ортонормированными векторами  $\Phi_{\nu_1}^{\mu_1} \Phi_{\nu_2}^{\mu_2}$  и как образованное набором всех  $N_1 N_2$  векторов  $\psi$  ( $\mu_1 \mu_2 \mu_\nu$ ). Эти два разных набора ортонормированных векторов, очевидно, должны быть связаны унитарным преобразованием

$$\psi \begin{pmatrix} \mu_1 \mu_2 \mu_\nu \\ \nu \end{pmatrix} = \sum_{\nu_1, \nu_2} \begin{pmatrix} \mu_1 \mu_2 \mu_\nu \\ \nu_1 \nu_2 \nu \end{pmatrix} \Phi_{\nu_1}^{\mu_1} \Phi_{\nu_2}^{\mu_2}. \quad (I.60)$$

Величины

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \mu_2 \mu_\nu \\ \nu_1 \nu_2 \nu \end{pmatrix} = \left( \Phi_{\nu_1}^{\mu_1} \Phi_{\nu_2}^{\mu_2}, \psi \begin{pmatrix} \mu_1 \mu_2 \mu_\nu \\ \nu \end{pmatrix} \right) \quad (I.61)$$

есть коэффициенты Клебша — Гордана группы  $SU(3)$ .

Отметим, что, поскольку  $\nu_i = (I, I_3, Y)_i$ , а  $I_3$  и  $Y$  — аддитивные квантовые числа, индекс  $\nu$  в коэффициенте Клебша — Гордана ( $\mu_1 \mu_2 \mu_\nu$ ) следует читать как  $\nu = (I, I_{13} + I_{23}, Y_1 + Y_2)$ . Важнейшие свойства коэффициентов Клебша — Гордана группы  $SU(3)$  изложены в работе Де Сварта [154], к которой первым подробно исследовал их, а также вычислил эти коэффициенты для многих вариантов разложения Клебша — Гордана.

#### а. Теорема Вигнера — Эккарта для группы $SU(3)$

Теорема Вигнера — Эккарта — это очень важная теорема о матричных элементах неприводимого тензорного оператора между базисными состояниями двух неприводимых представлений. Согласно этой теореме, в случае



группы  $SU(3)$  выполняется соотношение<sup>1)</sup>

$$\langle \mu_3, \nu_3 | T_{\nu_2}^{\mu_2} | \mu_1, \nu_1 \rangle = \sum_{\gamma} \left( \begin{matrix} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \gamma \\ \nu_1 \nu_2 \nu_3 \end{matrix} \right) \langle \mu_3 || T^{\mu_2} || \mu_1 \rangle_{\gamma}. \quad (I.62)$$

Величины  $\langle \mu_3 || T^{\mu_2} || \mu_1 \rangle_{\gamma}$  называются приведенными матричными элементами и зависят только от представлений  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , а не от внутренних квантовых чисел  $\nu_1, \nu_2$  и  $\nu_3$ . Таким образом, равенство (I.62) означает, что, если представления  $\mu_1, \mu_2$  и  $\mu_3$  фиксированы, то для определения всех матричных элементов  $\langle \mu_3, \nu_3 | T_{\nu_2}^{\mu_2} | \mu_1, \nu_1 \rangle$  достаточно  $\gamma$  чисел.

На практике же достаточно знать только один приведенный матричный элемент во всех случаях, кроме случая, когда рассматриваются матричные элементы типа  $\langle 8\nu_3 | T_{\nu_2}^8 | 8\nu_1 \rangle$ , поскольку представление 8 два раза встречается в разложении прямого произведения  $8 \otimes 8$ . Итак, только в этом случае нужно знать два приведенных матричных элемента, которые обычно называют матричными элементами типа  $F$  и типа  $D$ . Они связаны с антисимметризованным и симметризованным октетами, появляющимися при разложении произведения  $8 \otimes 8$ .

### 8. Регулярное представление, соотношение между «физическими» и «нейтральными» базисными состояниями

В предыдущих разделах мы ввели два разных набора  $SU(3)$ -генераторов: эрмитов набор  $L^{\alpha}$ , удовлетворяющий алгебре Ли группы  $SU(3)$  в формулировке Гелл-Манна (I.3) и (I.8), и «реальные» генераторы, для которых справедлива модифицированная стандартная форма алгебры (I.40).

В данной книге в зависимости от ситуации мы будем использовать оба этих набора. Выбор Гелл-Манна удобен при записи коммутационных соотношений в наиболее компактном виде. Другой выбор обычно более предпочтителен, когда имеем дело с матричными элементами генераторов между физическими состояниями; дело в том, что их собственные значения определяются действием операторов сдвига на базисные состояния того представления, которому соответствуют физические состояния.

Но когда мы имеем дело с октетами (представление 8 — регулярное представление группы  $SU(3)$ ), матричные элементы эрмитовых генераторов также известны, ибо они равны структурным константам  $if_{\alpha\beta\gamma}$ . Действительно, обозначив базисные состояния<sup>2)</sup> для такого представления символом  $|\pi^{\alpha}\rangle$  ( $\alpha = 1, \dots, 8$ ), нетрудно убедиться, что

$$L_{\beta\gamma}^{\alpha} \equiv \langle \pi^{\beta} | L^{\alpha} | \pi^{\gamma} \rangle = -if_{\alpha\beta\gamma}. \quad (I.63)$$

Тогда действие генератора  $L^{\alpha}$  на базисное состояние  $|\pi^{\beta}\rangle$  дается следующим выражением:

$$L^{\alpha} |\pi^{\beta}\rangle = L_{\gamma\beta}^{\alpha} |\pi^{\gamma}\rangle = if_{\alpha\beta\gamma} |\pi^{\gamma}\rangle. \quad (I.64)$$

Мы можем назвать «нейтральными» те состояния  $|\pi^{\alpha}\rangle$ , которые являются базисными состояниями эрмитова представления. Полезно иметь соотношение между этими нейтральными состояниями и базисными состояниями «реального» представления  $SU(3)$ -генераторов. Изобразим этот последний набор состояний так, как показано на схеме фиг. I.10. Ее структура напоминает классификацию по изоспиновым состояниям, и в соответствии с этим такие состояния будем называть «физическими».

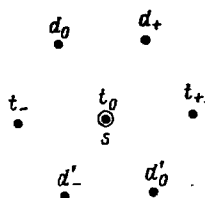
<sup>1)</sup> Доказательство см. в работе [154].

<sup>2)</sup> Мы, очевидно, имеем в виду физически интересный случай псевдоскалярного мезонного октета.

Из физических соображений логично отождествить состояние  $|\pi^3\rangle$  с состоянием  $|t_0\rangle$ :

$$|\pi^3\rangle = |t_0\rangle. \quad (I.65)$$

Учитывая формулу (I.64) и обычное соотношение (I.38) между эрмитовыми



Фиг. I.10

и реальными генераторами, путем последовательного применения операторов сдвига к этому состоянию легко получаем требуемые связи:

$$\begin{aligned} |t_0\rangle &= |\pi^3\rangle, \\ |t_+\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} |\pi^1 + i\pi^2\rangle, \\ |t_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\pi^1 - i\pi^2\rangle, \\ |d_+\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} |\pi^4 + i\pi^5\rangle, \\ |d_0\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} |\pi^6 + i\pi^7\rangle, \\ |d'_0\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} |\pi^6 - i\pi^7\rangle, \\ |d'_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\pi^4 - i\pi^5\rangle, \\ |s\rangle &= |\pi^8\rangle. \end{aligned} \quad (I.66)$$

В качестве примера рассмотрим действие оператора  $I^+ = L^1 + iL^2$  на состояние (I.65). Формула (I.64) дает

$$I^+ |\pi^3\rangle = (L^1 + iL^2) |\pi^3\rangle = (if_{13\gamma} - f_{23\gamma}) |\pi^\gamma\rangle = -|\pi^1 + i\pi^2\rangle.$$

В то же время

$$I^+ |t_0\rangle = \sqrt{2} |t_+\rangle$$

и, следовательно,

$$|t_+\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |\pi^1 + i\pi^2\rangle.$$

Все другие соотношения (I.66) могут быть получены аналогичным образом.

Отметим, что соотношения (I.66), выражающие физические состояния через нейтральные состояния, показывают справедливость фазового условия (I.56), введенного Де Свартом для сопряженных представлений. Как уже отмечалось, оно дает следующее соотношение для самосопряженных представлений:

$$|I, I_3, Y\rangle^* = (-1)^Q |I, -I_3, -Y\rangle. \quad (I.67)$$

Кроме того, если отождествить синглет  $|s\rangle$  с  $\eta$ -мезоном, а триплет  $|t\rangle$  — с пионным триплетом, то, как нетрудно видеть, соотношения (I.66) выражают

то обстоятельство, что  $\rho$ -мезоны нечетны относительно  $G$ -отражения, а  $\eta$ -мезон четен.

Оператор  $G$ -четности определяется как

$$G = C e^{i\pi I_2}, \quad (I.68)$$

где  $C$  — оператор зарядового сопряжения. Как мы уже знаем [формула (I.50)],

$$e^{i\pi I_2} |I, I_3, Y\rangle = (-1)^{I+I_3} |I, -I_3, Y\rangle. \quad (I.69)$$

Таким образом, простое определение

$$C |\pi^\alpha\rangle = |\pi^\alpha\rangle^* \quad (I.70)$$

для нейтральных (бесспиновых) состояний немедленно приводит к равенствам

$$G |\pi^+\rangle = -|\pi^+\rangle, \quad G |\eta\rangle = |\eta\rangle$$

и т. д.

Отметим, наконец, еще одно обстоятельство. Определение (I.66) «сферического» базиса для представления 8 означает, что применение теоремы Вигнера — Экарта в случае группы  $SU(3)$  требует некоторой осторожности, если мы имеем дело с матричными элементами операторов, преобразующихся как реальные  $SU(3)$ -генераторы, а обкладками являются физические состояния. Теорема Вигнера — Экарта фактически относится к тензорным операторам, преобразующимся как базис. Операторы, к которым она применима, преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} T_I^\pm &\sim \mp \frac{1}{\sqrt{2}} I^\pm, \\ T_V^\pm &\sim \mp \frac{1}{\sqrt{2}} V^\pm, \\ T_U^\pm &\sim -\frac{1}{\sqrt{2}} U^\pm, \\ T_3 &\sim I_3, \\ T_8 &\sim \frac{1}{\sqrt{3}} Y. \end{aligned} \quad (I.71)$$

Но в случае матричных элементов вида  $\langle 8, \nu_i | T_\nu^8 | 8, \nu_k \rangle$  теорему Вигнера — Экарта легко сформулировать в виде соотношения между нейтральными базисными состояниями и операторами  $T^\alpha$ , преобразующимися как эрмитовы генераторы  $L^\alpha$ . Действительно, если

$$[L^\alpha, T^\beta] = i f_{\alpha\beta\gamma} T^\gamma, \quad (I.72)$$

то нетрудно доказать, что

$$\langle \pi^\alpha | T^\beta | \pi^\gamma \rangle = i f_{\alpha\beta\gamma} F + d_{\alpha\beta\gamma} D, \quad (I.73)$$

где  $d_{\alpha\beta\gamma}$  — симметричные константы, численные значения которых даются формулами (I.13). Величины  $F$  и  $D$  с точностью до коэффициентов нормировки совпадают с двумя приведенными матричными элементами теоремы Вигнера — Экарта.

### 3. Тождества Уорда и низкоэнергетические пределы

#### § 1. Введение

О лептон-адронных взаимодействиях, осуществляющихся через посредство слабых и электромагнитных токов, вкратце можно сказать следующее.

С одной стороны, в пределах возможной в настоящее время точности хорошо известна не только общая форма лептонных токов, но и их матричные элементы между физическими состояниями, поскольку лептонные поля, очевидно, можно рассматривать как свободные.

С другой стороны, кварковая модель дает очень простые выражения для адронных токов, но эти выражения позволяют установить лишь общие закономерности, такие, как одновременные коммутационные соотношения или частичное сохранение. Для полного же динамического расчета матричных элементов токов потребуются еще существенный прогресс в физике сильных взаимодействий.

В подобной ситуации проще всего поступить так: ввести феноменологическое взаимодействие адронных токов  $J_\mu^\alpha$  с внешним некантованным полем  $W_\mu^\alpha$ , описывающим все лептонные эффекты,

$$\delta\mathcal{L}(W) = -\delta\mathcal{H}(W) = -J_\mu^\alpha W_\alpha^\mu. \quad (3.1)$$

Практически поле  $W_\mu^\alpha$  берется пропорциональным матричному элементу лептонного тока, причем каждому процессу соответствует своя константа связи. (Некантованным поле  $W_\mu^\alpha$  берется потому, что мы работаем в низшем нетривиальном порядке по слабому и электромагнитному взаимодействиям.)

Полную  $S$ -матрицу, являющуюся, конечно, функционалом поля  $W$ , можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} [S = S_0 T \exp \left[ -i \int d^4x J_\mu^\alpha(x) W_\alpha^\mu(x) \right] = \\ = S_0 \left\{ 1 - i \int d^4x J_\mu^\alpha(x) W_\alpha^\mu(x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (-i)^2 \int \int d^4x d^4y W_\alpha^\mu(x) W_\beta^\nu(y) T (J_\mu^\alpha(x) J_\nu^\beta(y)) + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $S_0$  есть  $S$ -матрица сильных взаимодействий. Предполагается, что сильные взаимодействия учитываются точно, а порядок по  $W^\mu$  в написанном выше разложении соответствует числу лептонных пар (или же реальных или виртуальных фотонов), участвующих в данном физическом процессе.

В простейшем случае, когда в процессе участвует всего лишь одна лептонная пара, мы должны исследовать матричные элементы одного адронного тока:

$$\langle B_{\text{out}} | J_\mu^\alpha | A_{\text{in}} \rangle. \quad (3.3)$$

В частности, в предыдущей главе были выведены некоторые условия, которым должны удовлетворять матричные элементы (3.3) в случае полного ( $\partial^\mu J_\mu^\alpha = 0$ ) или частичного ( $\partial^\mu J_\mu^\alpha = D^\alpha$ ) сохранения тока.

Для процессов высшего порядка по  $W^\mu$  нужно знать матричные элементы большего числа токов, такие, как

$$\langle B_{\text{out}} | T (J_\nu^\beta(x) J_\mu^\alpha(y)) | A_{\text{in}} \rangle. \quad (3.4)$$

Целью данной главы является вывод условий, налагаемых на подобные амплитуды. Как мы увидим, основную роль при этом будет играть алгебра токов; в частности, с ее помощью можно вывести тождества «Уорда — Такахаши», которые связывают между собой амплитуды, содержащие  $n + 1$  и  $n$  токов или их дивергенций ( $n \geq 1$ ). Эти тождества представляют собой обобщение хорошо известного соотношения между электронной вершиной и пропагатором в квантовой электродинамике.

### 1. Тождество Уорда

Рассмотрим фурье-образ величины (3.4):

$$T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = i \int d^4x \exp(iqx) \langle B_{\text{out}} | T (J_\nu^\beta(x) J_\mu^\alpha(0)) | A_{\text{in}} \rangle. \quad (3.5)$$

Пусть  $q$  и  $k$  — импульсы, связанные первый с  $J_\nu^\beta$ , а второй с  $J_\mu^\alpha$ . Тогда

$$p_A + k = p_B + q. \quad (3.6)$$

Если свернуть тензор  $T_{\nu\mu}$  с  $q^\nu$  и проинтегрировать по частям, то, помимо члена с дивергенцией, появится дополнительное слагаемое, обусловленное наличием хронологической упорядоченности<sup>1)</sup>. (Поверхностными вкладками на бесконечности пренебрегаем.)

Итак, полное выражение, получающееся после свертывания с  $q_\nu$ , таково:

$$\begin{aligned} q^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} &= \int [d^\nu \exp(iqx)] \langle B | T (J_\nu^\beta(x) J_\mu^\alpha(0)) | A \rangle d^4x = \\ &= - \int d^4x \exp(iqx) \langle B | T (D^\beta(x) J_\mu^\alpha(0)) | A \rangle - \\ &- \int d^4x \exp(iqx) \delta(x_0) \langle B | [J_0^\beta(x), J_\mu^\alpha(0)] | A \rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из этого соотношения видно, что одновременные коммутаторы могут служить ценным источником информации: переход от низшего к высшим порядкам (по  $W$ ) в общем случае требует постулирования коммутационных соотношений для токов или каких-либо других эквивалентных предположений в дополнение к свойствам сохранения или частичного сохранения.

Если в качестве начального шага обратиться к простейшей кварковой модели, то можно использовать простые одновременные коммутационные соотношения, приведенные в предыдущей главе, а именно:

$$[J_0^\beta(\mathbf{x}), J_0^\alpha(\mathbf{y})] = if_{\beta\alpha\gamma} J_0^\gamma(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.8)$$

$$[J_0^\beta(\mathbf{x}), J_k^\alpha(\mathbf{y})] = if_{\beta\alpha\gamma} J_k^\gamma(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.9)$$

Тогда мы получим тождество

$$q^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = U_\mu^{\beta\alpha} - if_{\beta\alpha\gamma} \langle B | J_\mu^\gamma | A \rangle, \quad (3.10)$$

где

$$U_\mu^{\beta\alpha} = - \int d^4x \exp(iqx) \langle B | T (D^\beta(x) J_\mu^\alpha(0)) | A \rangle. \quad (3.11)$$

Равенство (3.10) — это в некотором смысле обобщение полученного Уордом [122] в электродинамике соотношения между вершиной и пропагатором, и мы будем называть его тождеством Уорда.

<sup>1)</sup> Напомним, что  $T (J_\nu^\beta(x) J_\mu^\alpha(0)) = \theta(x_0) [J_\nu^\beta(x), J_\mu^\alpha(0)] + J_\mu^\alpha(0) J_\nu^\beta(x)$ .

Равенство (3.10) можно взять за отправную точку для вывода основных результатов алгебры токов: при некоторых добавочных динамических предположениях из него можно вывести низкоэнергетические теоремы и правила сумм, т. е. два типичных результата алгебры токов.

Тождество Уорда (3.10) носит совершенно общий характер, но наш вывод несколько сомнителен, поскольку опирается на конкретную модель. Действительно, в то время как в правильности коммутатора (3.8) нет оснований сомневаться, нельзя сказать того же о коммутаторе (3.9), т. е.  $[J_0, J]$ . Имеются убедительные доводы, которые мы уже излагали в гл. 2 и к которым мы еще вернемся, в пользу добавочных градиентных членов вида  $S^{\beta\alpha} \nabla \delta^3(x-y) + \dots$ , из-за наличия которых коммутатор  $[J_0, J]$  становится модельно-зависимым. Следовательно, при  $\mu = 0$  равенство (3.10) останется верным, а при  $\mu = k$  ( $= 1, 2, 3$ ) появятся дополнительные члены типа  $q_k \langle B | S^{\beta\alpha} | A \rangle + \dots$ . Присутствие последних будет, конечно, нарушать ковариантность результата.

Ответ на эту загадку простой, но только с физической, а не с математической точки зрения. Дело в том, что фурье-образ хронологического произведения

$$T_{\nu\mu} = i \int d^4x \exp(iqx) \langle B | T(J_\nu^\beta(x) J_\mu^\alpha(0)) | A \rangle$$

не является, вообще говоря, ковариантной величиной и его не следует отождествлять с лоренцевым тензором. Причина проста: ковариантность хронологического произведения связана с локальностью коммутатора  $[J_0, J_\mu]$  (т. е.  $[J_0, J_\mu(x)] \propto \delta^3(x)$ ), а член  $\nabla \delta^3(x)$  вносит «малую» нелокальность.

Таким образом, для восстановления ковариантности к  $T_{\nu\mu}$  нужно добавить дополнительные слагаемые  $C_{\nu\mu}$ , связанные с градиентными членами в коммутаторе токов. Но при выводе тождества Уорда для полной ковариантной амплитуды  $T_{\nu\mu} + C_{\nu\mu}$  в равенстве (3.10) появятся еще два члена, а именно  $q_\nu C^{\nu\mu}$  и градиентная добавка  $S^{\beta\alpha} \nabla \delta^3(x)$ . Обычно предполагается, что эти члены взаимно уничтожаются, так что тождество Уорда принимает свою исходную простую форму.

Существуют формальные доказательства такого взаимного уничтожения<sup>1)</sup>. Другая возможность состоит в замене предположений относительно коммутаторов более изящной, хотя и физически эквивалентной, формулировкой, основанной на обобщенном определении токов в рамках вариационного метода [120]. Поскольку эти вопросы будут подробно обсуждаться в дальнейшем (см., в частности, гл. 7), мы ограничимся здесь проверкой взаимного уничтожения на одном простом примере, который к тому же может проиллюстрировать связь между  $T_{\nu\mu}$  и физическими процессами.

## 2. Калибровочная инвариантность и швингеровские члены (пример)

Рассмотрим процесс

$$\gamma(k) + \pi^+(p_1) \rightarrow \pi^0(p_2) + e^+(q_1) + \nu_e(q_2), \quad (3.12)$$

который в случае реального фотона  $\gamma(k^2 = 0)$  описывается двумя диаграммами фиг. 3.1, т. е. амплитудой  $M_\lambda$ :

$$\varepsilon^\lambda M_\lambda = \varepsilon^\lambda M_\lambda^{(1)} + \varepsilon^\lambda M_\lambda^{(2)}. \quad (3.13)$$

Амплитуда  $M_\lambda^{(i)}$  соответствует вкладу в  $M_\lambda$  диаграммы  $i$  фиг. 3.1.

<sup>1)</sup> См., например, [121].

Имеем

$$\varepsilon^\lambda M_\lambda^{(1)} = \frac{G^{(I)}}{\sqrt{2}} \bar{v}(q_1) \Gamma_{\mu\nu} u(q_2) \langle \pi^0 | J_{I-}^\mu | \pi^+, \gamma \rangle \equiv \frac{G^{(I)}}{\sqrt{2}} \bar{v}(q_1) \Gamma_{\mu\nu} u(q_2) \varepsilon^\lambda K_{\mu\lambda}, \quad (3.14)$$

$$\varepsilon^\lambda M_\lambda^{(2)} = \frac{G^{(I)}}{\sqrt{2}} \bar{v}(q_1) \gamma e \frac{(\gamma q_1 - \gamma k + m_\nu)}{m_\nu^2 - (q_1 - k)^2} \Gamma_{\mu\nu} u(q_2) \langle \pi^0 | J_{I-}^\mu | \pi^+ \rangle. \quad (3.15)$$

Здесь  $\Gamma_\mu$  — слабая вершина ( $e^+ \nu_e$ ), а  $J_\mu = V_\mu - A_\mu$ . Калибровочная инвариантность требует равенства

$$k^\lambda M_\lambda = 0, \quad (3.16)$$

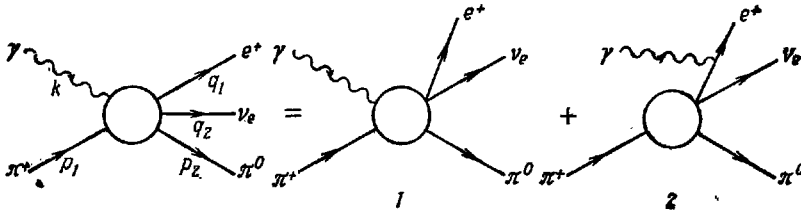
откуда, используя явное выражение (3.15), получаем

$$k^\lambda M_\lambda^{(1)} = -k^\lambda M_\lambda^{(2)} = -\frac{G^{(I)}}{\sqrt{2}} \bar{v}(q_1) \Gamma_{\mu\nu} u(q_2) \langle \pi^0 | J_{I-}^\mu | \pi^+ \rangle,$$

или

$$k^\lambda K_{\mu\lambda} = -\langle \pi^0 | J_{I-}^\mu | \pi^+ \rangle. \quad (3.17)$$

Это и есть условие, налагаемое калибровочной инвариантностью



Фиг. 3.1

на  $\langle \pi^0 | J_{I-}^\mu | \pi^+, \gamma \rangle = \varepsilon^\lambda K_{\mu\lambda}$ . Применяя редукционную формулу к фотону, можно получить более детальное выражение для  $K_{\mu\lambda}$ . Это даст ( $\mathcal{A}_\lambda$  — электромагнитное поле)

$$\begin{aligned} K_{\mu\lambda} &= -i \int d^4x \exp(-ikx) \square \langle \pi^0 | T(J_\mu^{I-} \mathcal{A}_\lambda(x)) | \pi^+ \rangle = \\ &= -i \int d^4x \exp(-ikx) \langle \pi^0 | T(J_\mu^{I-} f_\lambda^{\text{уп-м}}(x)) | \pi^+ \rangle + C_{\mu\lambda} \equiv T_{\mu\lambda} + C_{\mu\lambda}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где  $C_{\mu\lambda} \propto \delta^4(x)$  есть контактный член, возникающий в результате применения оператора  $\square$  к  $T$ -произведению и содержащий одновременные коммутаторы  $[J_\mu, \mathcal{A}_0]$  и  $[J_\mu, \mathcal{A}_\lambda]$ .

После свертывания

$$\begin{aligned} k^\lambda K_{\mu\lambda} &= - \int d^4x \exp(-ikx) \delta(x_0) \langle \pi^0 | [J_\mu^{I-}, j_0^{\text{уп-м}}(x)] | \pi^+ \rangle + k^\lambda C_{\mu\lambda} = \\ &= -\langle \pi^0 | J_\mu^{I-} | \pi^+ \rangle + \text{градиентные члены} + k^\lambda C_{\mu\lambda}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Сравнение с (3.17) приводит к взаимному уничтожению:

$$k^\lambda C_{\mu\lambda} + \text{градиентные члены} = 0. \quad (3.20)$$

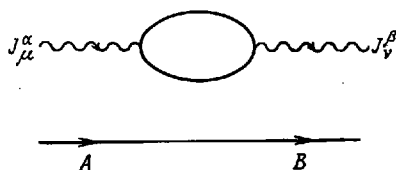
Конечно, чтобы вычислить  $C_{\mu\lambda}$  и градиентные члены, нужно знать зависимость  $J_\mu$  от  $\mathcal{A}_\lambda$ ; последняя, вообще говоря, определяется моделью.

Рассмотренный пример подводит к следующему обобщению:  $T$ -произведение токов обычно не соответствует физическим амплитудам, поскольку

имеются добавочные контактные члены [так называемые  $\Gamma$ -члены<sup>1)</sup>], но в тождестве Уорда  $\Gamma$ -члены взаимно уничтожаются с градиентными членами. Предполагается, что это верно для любого тока, векторного или аксиального, независимо от его свойств сохранения (гипотеза Фейнмана [158]).

Поскольку все приложения в этой и следующих главах (низкоэнергетические теоремы и правила сумм) основаны на тождестве Уорда (3.10), а не на полной форме ковариантной амплитуды, мы будем далее пренебрегать швингеровскими и  $\Gamma$ -членами. Допустимость этого подтверждается тем, что все результаты можно получить путем прямого насыщения «безобидных» коммутаторов, подобных  $[Q, Q]$ ,  $[Q, j_\mu]$  и  $[j_0, j_0]$ .

Ситуация особенно упрощается в таких моделях, как алгебра полей, в которых швингеровские и  $\Gamma$ -члены оказываются *s-числами*. Ковариантные



Фиг. 3.2

амплитуды для двух или более токов можно легко определить вычитанием так называемой несвязной части. Действительно, если  $\Gamma$ -член  $C_{\nu\mu}$  есть *s-число*, то мы имеем

$$\langle B | C_{\nu\mu} | A \rangle = \langle B | A \rangle \langle 0 | C_{\nu\mu} | 0 \rangle. \quad (3.21)$$


Выделим теперь несвязный вклад  $\langle B | A \rangle T_{\nu\mu}^{(0)}$ , соответствующий диаграмме, в которой состояние  $| A \rangle \equiv | B \rangle$  распространяется свободно, как показано на фиг. 3.2.

Следовательно, величина

$$\begin{aligned} K_{\nu\mu} &= T_{\nu\mu} - T_{\nu\mu}^{(0)} \langle B | A \rangle \equiv \\ &\equiv i \int d^4x \exp(iqx) \langle B | T(J_\nu^\beta(x) J_\mu^\alpha(0)) | A \rangle - \\ &- \langle B | A \rangle \langle 0 | T(J_\nu^\beta(x) J_\mu^\alpha(0)) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.22)$$

ковариантна, а тождество Уорда для  $K_{\nu\mu}$  имеет требуемую форму (3.10). Это показывает, между прочим, что таким путем мы всегда можем устранить швингеровские и аналогичные им члены в алгебре полей; единственный способ обнаружить их заключается в измерении величины

$$T_{\nu\mu}^{(0)} \equiv i \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | T(J_\nu(x) J_\mu(0)) | 0 \rangle.$$

<sup>1)</sup> В английской литературе употребляется термин «seagull», поскольку соответствующая такому члену диаграмма  напоминает чайку. При переводе

принято обозначение « $\Gamma$ -член», поскольку прописная буква греческого алфавита  $\Gamma$  (шпсилон) также напоминает чайку. — Прим. ред.



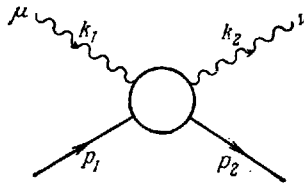
## § 2. Низкоэнергетические пределы в электродинамике

Простейшие следствия тождества Уорда (3.10) получаются при рассмотрении сохраняющихся токов. В этом случае слагаемое с дивергенцией  $U_\mu$  в правой части (3.10) обращается в нуль, что приводит к существенным упрощениям при использовании тождества Уорда.

Самая интересная модель с сохраняющимся током — это, конечно, электродинамика. Для амплитуды комптоновского рассеяния  $T_{\nu\mu}$  тождество Уорда (3.10) принимает простой вид

$$k^\mu T_{\nu\mu} = 0, \quad (3.23)$$

где  $k_\mu$  — импульс одного из фотонов. Независимо от явной формы  $T_{\nu\mu}$  читатель легко узнает в уравнении (3.23) требование инвариантности теории



Фиг. 3.3

относительно калибровочного преобразования  $\varepsilon_\mu \rightarrow \varepsilon_\mu + \lambda k_\mu$  ( $\varepsilon_\mu$  — вектор поляризации фотона).

Комптоновская амплитуда рассеяния  $T_{\nu\mu}$  в случае кинематики, показанной на фиг. 3.3, будет иметь вид

$$T_{\nu\mu} = i \int d^4x \exp(ik_2x) \langle p_2 | T(j_\nu^{\text{эл.-м}}(x) j_\mu^{\text{эл.-м}}(0)) | p_1 \rangle, \quad (3.24)$$

если не обращать внимания на швингеровские члены и предположить ковариантность хронологического произведения в формуле (3.24).

### 1. Комптоновское рассеяние на бесспиновых частицах

Начнем со случая упругого рассеяния реальных фотонов на бесспиновой мишени. В качестве трех независимых импульсов процесса мы возьмем  $k_1$ ,  $k_2$  и

$$P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2). \quad (3.25)$$

Введем инвариантные переменные:

$$\nu = Pk_1, \quad t = (k_2 - k_1)^2 = -2k_1k_2. \quad (3.26)$$

Амплитуда  $T$  для рассматриваемого процесса представляется следующим образом:

$$T = e^2 \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu T_{\nu\mu}. \quad (3.27)$$

Ковариантную амплитуду  $T_{\nu\mu}$  можно выразить через четыре инвариантные амплитуды, являющиеся функциями инвариантных переменных  $\nu$  и  $t$ :

$$T_{\nu\mu} = Ag_{\nu\mu} + Bp_\nu p_\mu + C(p_\nu k_{2\mu} + p_\mu k_{1\nu}) + Dk_{1\nu} k_{2\mu}. \quad (3.28)$$

В равенстве (3.28) мы учли инвариантность относительно обращения времени (которая требует равенства коэффициентов при  $p_\mu k_{1\nu}$  и  $p_\nu k_{2\mu}$ ) и поперечность фотонов ( $\varepsilon_i k_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ ), но не учитывали еще требова-

ния калибровочной инвариантности. Таким образом, четыре инвариантные амплитуды  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  нельзя считать независимыми. Но они очень удобны тем, что не имеют кинематических особенностей (во всяком случае, в теории возмущений). Соотношения между ними, вытекающие из калибровочной инвариантности, немедленно получаются из тождества Уорда

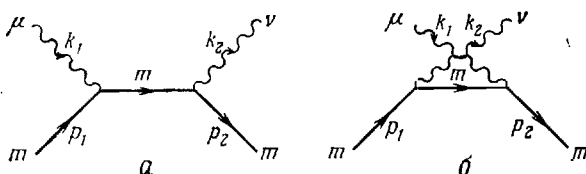
$$k_1^\mu T_{\nu\mu} = 0, \quad (3.29)$$

которое эквивалентно двум уравнениям

$$A + \nu C - \frac{1}{2} t D = 0, \quad (3.30)$$

$$\nu B - \frac{1}{2} t C = 0. \quad (3.31)$$

Эти соотношения (и аналогичные им равенства для других процессов) весьма удобны для вывода низкоэнергетических теорем. Для этого нужно



Фиг. 3.4

лишь перейти к пределу при  $k_1^\mu$  и  $k_2^\nu$  (т. е.  $\nu$  и  $t$ ), стремящихся к нулю. Тогда в уравнениях (3.30) и (3.31) останутся лишь сингулярные в этом пределе вклады в амплитуды  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Амплитуды имеют полюса, соответствующие борновским графикам фиг. 3.4, расположенные в точках

$$m^2 - s \equiv \frac{1}{2} t - 2\nu = 0, \quad (3.32)$$

$$m^2 - \bar{s} \equiv \frac{1}{2} t + 2\nu = 0, \quad (3.33)$$

где  $m$  — масса мишени. Устремляя  $k_1^\mu$  и  $k_2^\nu$  к нулю, мы как раз попадаем на эти особенности. Вычеты в полюсах легко находятся (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Амплитуда	Вычет в полюсе $m^2 - s = 0$	Вычет в полюсе $m^2 - \bar{s} = 0$
$A$	0	0
$B$	-4	-4
$C$	-2	+2
$D$	-1	-1

В пределе при  $k_2 \rightarrow k_1 \rightarrow 0$  соотношение (3.31) оказывается тривиальным тождеством, а соотношение (3.30) дает низкоэнергетическую теорему:

$$\lim_{k_1, k_2 \rightarrow 0} A(\nu, t) \equiv A(0, 0) = 2. \quad (3.34)$$

Это точная формула, которая дает пороговое значение амплитуды  $A(\nu, t)$ .

Низкоэнергетической теореме (3.34) нетрудно придать более привычный вид «предела Тирринга» [123], согласно которому классическая амплитуда комптоновского рассеяния на пороге дается для любой мишени соотношением

$$T_{\text{пор}}^{\text{кл}} = -\frac{e^2}{m} (\epsilon_1 \epsilon_2). \quad (3.35)$$

Для упрощения доказательства этого утверждения выберем калибровку, при которой

$$\varepsilon_1^0 = \varepsilon_2^0 = 0, \quad (3.36)$$

и брейтовскую систему отсчета

$$P = 0. \quad (3.37)$$

В случае рассеяния вперед она совпадает с лабораторной системой  $P_1 = P_2 = 0$ . Тогда амплитуда (3.27) приобретает простой вид

$$T = e^2 [A (\varepsilon_1 \varepsilon_2) + D (\varepsilon_1 k_2) (\varepsilon_2 k_1)]. \quad (3.38)$$

В пределе при  $k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow 0$  слагаемое с  $D$  дает вклад порядка  $O(k_\mu)$ ; пользуясь формулой (3.34), получаем

$$\lim_{k_1, k_2 \rightarrow 0} T = -2e^2 (\varepsilon_1 \varepsilon_2). \quad (3.39)$$

Остается учесть связь между ковариантной амплитудой  $T$  и классической амплитудой:

$$T^{\text{кл}} = (2E_1 2E_2)^{-1/2} T. \quad (3.40)$$

Ясно, что соотношения (3.35) и (3.39) эквивалентны.

Перечислим основные моменты нашего вывода:

- 1) сначала вводятся калибровочно-неинвариантные амплитуды, свободные от кинематических особенностей;
- 2) затем с помощью тождества Уорда находятся соотношения между этими амплитудами;
- 3) на последнем этапе осуществляется переход к пределу нулевых 4-импульсов фотонов.

В заключение отметим, что, хотя наш вывод был проделан для бесспинового случая, предел Тирринга справедлив для любой мишени. Действительно, случай мишени со спином всегда можно свести к бесспиновому случаю надлежащим усреднением по поляризации. Усредненная амплитуда может быть записана в виде (32.7), и все предыдущие построения сохраняют силу.

Но в то же время бесспиновый случай не позволяет нам увидеть низкоэнергетические теоремы во всей их общности. Лоу [124], а также Гелл-Манн и Голдбергер [125] показали, что в разложении амплитуды в ряд по степеням частоты  $\omega$  члены не только нулевого, но и первого порядка по  $\omega$  однозначно фиксируются требованием калибровочной инвариантности. О членах первого порядка, отсутствующих в бесспиновом случае <sup>1)</sup>, будет сказано в следующем разделе.

## 2. Комптоновское рассеяние при низких энергиях на мишенях с произвольным спином <sup>2)</sup>

Рассмотрим физическую амплитуду  $T_{m'm}$  для упругого рассеяния фотона на мишени со спином  $S$ , нормированную, как в работе Лоу [124]; пусть  $k$  — импульс падающего фотона в лабораторной системе отсчета,  $k'$  — импульс уходящего фотона,  $m$  и  $m'$  — значения третьей компоненты спина мишени в начальном и конечном состояниях,  $M$  — масса мишени. Используя после-

<sup>1)</sup> Амплитуды  $A$  и  $D$  в формуле (3.38) являются четными функциями  $\nu$  (вследствие перекрестной симметрии), так что низкоэнергетическое разложение не содержит членов первого порядка.

<sup>2)</sup> Низкоэнергетическое комптоновское рассеяние на мишенях со спином исследовали многие авторы. В работах [124, 125] рассматривался случай спина  $1/2$ ; из работ по высшим спином укажем [126, 127, 531]. Там же можно найти и подробную библиографию.

довательно требование калибровочной инвариантности, можно найти  $T_{m'm}$  с точностью до членов первого порядка по  $\omega$ .

В кулоновской калибровке  $\epsilon_0 = \epsilon'_0 = 0$  имеем:

$$\begin{aligned} T_{m'm} = & (-1)^{2S} \left( \frac{2}{2S+1} \right)^{1/2} \left\{ \left( \frac{2}{2S+1} \right)^{1/2} \frac{e^2}{M} (\mathbf{e}' \cdot \mathbf{e}) \delta_{m'm} - \right. \\ & - \frac{ie}{M} \left[ 2\mu - \left( \frac{S(S+1)}{3} \right)^{1/2} \frac{e}{M} \right] \omega (\mathbf{e}' \times \mathbf{e}) S_{m'm} + \\ & + \frac{ie\mu}{\omega M} [\mathbf{e}\mathbf{k}' (\mathbf{e}' \times \mathbf{k}) - \mathbf{e}'\mathbf{k} (\mathbf{e} \times \mathbf{k}')] S_{m'm} + \\ & \left. + i \frac{\mu^2}{\omega} \left[ \frac{3}{S(S+1)} \right]^{1/2} [(\mathbf{e}' \times \mathbf{k}') \times (\mathbf{e} \times \mathbf{k})] S_{m'm} \right\} + O(\omega^2), \end{aligned} \quad (3.41)$$

где  $\omega$  — энергия фотона,

$$\omega = |\mathbf{k}| \sim |\mathbf{k}'|,$$

$\mu$  — магнитный момент мишени, а  $S$  — спиновая матрица, элементы которой имеют следующий вид:

$$S_{m'm}^{\tau} = \sqrt{6} (-1)^{S-m'} \begin{pmatrix} S & 1 & S \\ -m' & \tau & m \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

В последней формуле матрица  $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$  есть  $3j$ -символ Вигнера. Матрица  $S$  нормирована так, что  $S = \sigma$  в случае спина  $1/2$ .

Соотношение (3.41) получено в работе Саито [126] <sup>1)</sup>.

В частном случае комптоновского рассеяния вперед соотношение (3.41) существенно упрощается <sup>2)</sup>:

$$\begin{aligned} \{T_{m'm}\}_{\text{вперед}} = & (-1)^{2S} \left\{ \frac{2}{2S+1} \frac{e^2}{M} \mathbf{e}' \cdot \mathbf{e} \delta_{m'm} + \right. \\ & \left. + i \left[ \frac{6}{S(S+1)(2S+1)} \right]^{1/2} \omega \left[ \mu - \left( \frac{S(S+1)}{3} \right)^{1/2} \frac{e}{M} \right]^2 (\mathbf{e}' \times \mathbf{e}) S_{m'm} \right\} + O(\omega^2). \end{aligned} \quad (3.43)$$

В очень важном случае мишени со спином  $1/2$  формула (3.41) совпадает с результатом Гелл-Манна, Голдбергера и Лоу

$$\begin{aligned} T = & -\frac{e^2}{M} \mathbf{e}' \cdot \mathbf{e} + \frac{ie}{M} \left( 2\mu - \frac{e}{2M} \right) \omega (\mathbf{e}' \times \mathbf{e}) \sigma - \frac{ie\mu}{\omega M} [\mathbf{e}\mathbf{k}' (\mathbf{e}' \times \mathbf{k}) - \mathbf{e}'\mathbf{k} (\mathbf{e} \times \mathbf{k}')] \sigma + \\ & + \frac{2i\mu^2}{\omega} [(\mathbf{e}' \times \mathbf{k}') \times (\mathbf{e} \times \mathbf{k})] \sigma + O(\omega^2), \end{aligned} \quad (3.44)$$

из которого следует соотношение

$$T_{\text{вперед}} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} -\frac{e^2}{M} \mathbf{e}\mathbf{e}' - 2i\omega\lambda^2 (\mathbf{e}' \times \mathbf{e}) \sigma. \quad (3.45)$$

В этом соотношении член нулевого порядка по  $\omega$  воспроизводит ранее полученный предел Тирринга, а член первого порядка, соответствующий процессам с переворотом спина, связан с аномальным магнитным моментом мишени  $\lambda = k_T e / 2M$ . Следовательно, комптоновское рассеяние при очень низких энергиях в принципе может дать информацию о магнитных моментах. К сожалению, прямая экспериментальная проверка равенства (3.45) затруднительна. Существует, однако, косвенный метод проверки этого равенства (и аналогичных низкоэнергетических теорем), состоящий в замене их правилами сумм. Для комптоновского рассеяния это было сделано Дреллом,

<sup>1)</sup> В работе Саито можно также найти и низкоэнергетические теоремы более высокого порядка по  $\omega$ , в которые входят различные электромагнитные мультиполи.

<sup>2)</sup> При выводе соотношения (3.43) используется равенство

$$[(\mathbf{e}' \times \mathbf{k}) \times (\mathbf{e} \times \mathbf{k})] S = (\mathbf{e}' \times \mathbf{e}) \mathbf{k} (kS) = \omega^2 (\mathbf{e}' \times \mathbf{e}) S.$$

Хирном и Герасимовым. К такой замене мы часто будем прибегать в тех случаях, когда соответствующая низкоэнергетическая теорема не допускает прямой экспериментальной проверки.

### 3. Правило сумм Дрелла — Хирна — Герасимова [128, 129, 532]

Для мишени со спином  $1/2$  комптоновская амплитуда рассеяния вперед может быть выражена через две скалярные инвариантные функции, зависящие от  $\omega^2$  ( $\omega = \frac{v}{M} = \frac{pq}{M}$  есть энергия фотона в лабораторной системе):

$$T(\omega) = f_1(\omega^2) \mathbf{e} \mathbf{e}' + i \omega f_2(\omega^2) (\mathbf{e}' \times \mathbf{e}) \sigma. \quad (3.46)$$

Тогда низкоэнергетическая теорема (3.45) дает

$$f_1(0) = -\frac{e^2}{M} \equiv -\frac{4\pi\alpha}{M}, \quad (3.47)$$

$$f_2(0) = -2\lambda^2 \equiv -\frac{2\pi\alpha}{M^2} k_T^2. \quad (3.48)$$

Данные соотношения можно проанализировать, хотя бы в принципе, преобразовав их в правила сумм. Для этого нужно написать дисперсионное соотношение для интересующей нас величины, что, однако, не всегда дает практически приемлемые результаты.

Покажем, например, что низкоэнергетическая теорема (3.47) запрещает использовать для функции  $f_1(\omega^2)$  дисперсионное соотношение без вычитаний. Действительно, если предположить, что

$$f_1(\omega^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } f_1(\omega'^2)}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'^2, \quad (3.49)$$

то совместное использование оптической теоремы

$$\text{Im } f_1(\omega^2) = \omega \sigma_{\text{полн}}(\omega) \quad (3.50)$$

и соотношения (3.47) приведет к абсурдному результату

$$f_1(0) \equiv -\frac{e^2}{M} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sigma_{\text{полн}}(\omega) d\omega. \quad (3.51)$$

Это значит, что в дисперсионном соотношении для  $f_1$  необходимо по крайней мере одно вычитание. Далее, теория полюсов Редже дает

$$\sigma_{\text{полн}}(\omega) \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \omega^{\alpha(0)-1}. \quad (3.52)$$

Поскольку обмен полюсом Померанчука [ $\alpha_P(0) \approx 1$ ] разрешен, необходимо, по-видимому, более чем одно вычитание.

В то же время чисто реджевское поведение функции  $f_2(\omega^2)$

$$f_2(\omega^2) \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \omega^{\alpha(0)-2} \quad (3.53)$$

допускает для нее дисперсионное соотношение без вычитаний<sup>1)</sup>. Итак, если мы напишем

$$f_2(\omega^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } f_2(\omega'^2)}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'^2, \quad (3.54)$$

<sup>1)</sup> Предположение об отсутствии вычитаний в дисперсионном соотношении для  $f_2$  впервые было высказано Гелл-Манном, Голдбергером и Тирригом [130] в 1954 г. Наша амплитуда  $f_2$ , определенная так, как это делается в работе Дрелла и Хирна [128], отличается от амплитуды ГМГТ лишь множителем  $\omega$ :  $\omega f_2^{\text{ДХ}} = f_2^{\text{ГМГТ}}$ .

то низкоэнергетический предел (3.48) примет следующий вид:

$$-\frac{\alpha\pi^2}{M^2} k_T^2 = \int_0^\infty \text{Im} f_2(\omega^2) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (3.55)$$

Далее, из оптической теоремы имеем

$$\text{Im} f_2(\omega^2) = \frac{1}{2} [\sigma_A(\omega) - \sigma_P(\omega)], \quad (3.56)$$

где  $\sigma_P(\omega)$  и  $\sigma_A(\omega)$  — полные сечения поглощения фотонов, поляризованных по кругу, со спином, параллельным и антипараллельным спину мишени;  $\omega$  — энергия фотона в лабораторной системе.

Объединяя (3.55) и (3.56), получаем окончательную форму правила сумм Дрелла — Хирна — Герасимова

$$\int_0^\infty [\sigma_P(\omega) - \sigma_A(\omega)] \frac{d\omega}{\omega} = \frac{2\alpha\pi^2}{M^2} k_T^2, \quad (3.57)$$

выражающего аномальный магнитный момент мишени  $k_T$  через интеграл от сечений поглощения поляризованных фотонов. Его справедливость зависит от сходимости дисперсионного соотношения без вычитаний (3.54), которое является единственным недоказанным, хотя и очень правдоподобным предположением, сделанным при выводе (3.57). Сравнение соотношения (3.57) с экспериментальными данными позволяет заключить, что это предположение почти наверняка соответствует действительности. Дрелл и Хирн очень тщательно проанализировали экспериментальные данные по фоторождению в частном случае протонной мишени. В этом случае правая часть соотношения (3.57) оказывается равной

$$\frac{2\alpha\pi^2}{m_p^2} k_p^2 \approx 205 \text{ мкб}. \quad (3.58)$$

Для интеграла в левой части, который не так-то легко вычислить, приведем данные Дрелла и Хирна. Первая оценка, использованная при получении 33-резонанса в рамках изобарной модели, дает для левой части приблизительно 200 мкб, что весьма удовлетворительно. Учет же высокоэнергетической области до 1 ГэВ дает, по-видимому, добавку порядка 70 мкб. Таким образом, для достижения полного согласия нужно тщательно учесть данные, соответствующие более высоким энергиям ( $\geq 1$  ГэВ).

### § 3. Пион-нуклонное рассеяние при низких энергиях<sup>2</sup>

В электродинамике тождество Уорда дает превосходный метод выведения теорем о мягких фотонах, как мы это видели на примере предыдущего раздела. Точно так же в случае двух аксиальных изовекторных токов из тождества Уорда (3.10) вытекают фундаментальные теоремы о рассеянии мягких пионов на адронных мишенях. В ходе изложения читатель заметит, что случай мягких пионов во многом отличается от случая мягких фотонов. Тем не менее очень велико и сходство, поскольку в обоих случаях выполняется тождество Уорда и масса пиона мала по сравнению с массами всех других адронов.

Рассмотрим амплитуду «упругого рассеяния вперед» изоспинового аксиального тока на нуклоне с импульсом  $p$  (фиг. 3.5). Она имеет следующий вид:

$$T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = i \int d^4x \exp(iqx) \langle p | T(A_\nu^\beta(x) A_\mu^\alpha(0)) | p \rangle. \quad (3.59)$$

Чтобы найти низкоэнергетический предел, рассмотрим идеальный случай безмассовых пионов, когда аксиальные токи сохраняются. В этом случае тождество Уорда (3.10) упрощается:

$$q^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = -i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \langle p | V_\mu^\gamma(0) | p \rangle. \quad (3.60)$$

Здесь  $V_\mu^\gamma$  — сохраняющийся изовекторный ток:

$$\langle p | V_\mu^\gamma | p \rangle = \bar{u}(p) \gamma_\mu u(p) \frac{1}{2} \tau^\gamma = p_\mu \tau^\gamma. \quad (3.61)$$

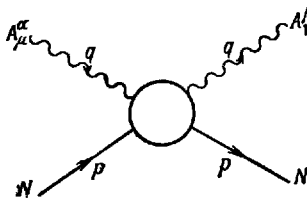
Свертывая равенство (3.60) с  $q^\mu$  и вводя, как обычно, кинематическую переменную

$$v = (pq), \quad (3.62)$$

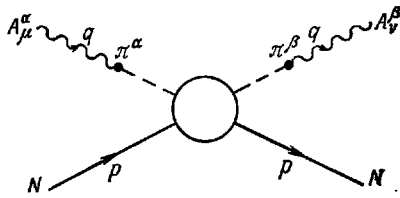
получаем

$$q^\mu q^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = \frac{1}{2} [\tau^\alpha, \tau^\beta] v. \quad (3.63)$$

Из этого соотношения мы можем теперь вывести «теорему о мягких пионах» точно таким же способом, как и в предыдущем разделе. Устремим  $q_\mu$



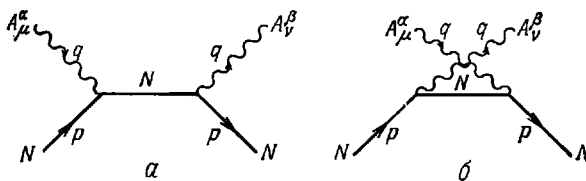
Фиг. 3.5



Фиг. 3.6

к нулю и выделим те члены в  $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$ , которые имеют особенности при  $q_\mu = 0$  и потому дают не исчезающие в пределе при  $q_\mu \rightarrow 0$  вклады в левую часть соотношения (3.63).

В принципе, имеются два таких вклада: один — соответствующий двойному полюсу безмассового пиона (фиг. 3.6), а другой — соответствующий



Фиг. 3.7

прямой (а) и перекрестной (б) диаграммам с промежуточным нуклоном (фиг. 3.7).

Выражение для пионного вклада таково:

$$\{T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}\}_\pi = -\frac{q_\nu q_\mu}{(q^2)^2} f_\pi^2 T_{\pi N}^{\beta\alpha}, \quad (3.64)$$

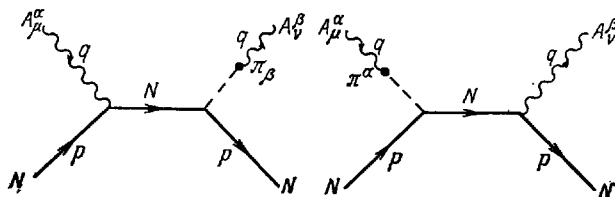
где величина  $T_{\pi N}^{\beta\alpha} = T_{\pi N}^{\beta\alpha}(q^2 = 0, v)$  определяется как вычет в полюсе при  $q^2 = 0$  и, следовательно, представляет собой амплитуду рассеяния сильно взаимодействующих безмассовых пионов на нуклонах. С учетом выражения (3.64) находим пионный вклад в левую часть соотношения (3.63):

$$\{q^\mu q^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}\}_\pi = -f_\pi^2 T_{\pi N}^{\beta\alpha}(q^2 = 0, v). \quad (3.65)$$

Для вычисления нуклонных диаграмм фиг. 3.7 воспользуемся упрощенным выражением для нуклонной вершины:

$$\langle N' | A_V^\beta | N \rangle = r_A \bar{u}' \gamma_\nu \gamma_5 u \frac{1}{2} \tau^\beta. \quad (3.66)$$

Внимательный читатель заметит, что мы не включили в (3.66) псевдоскалярный формфактор  $G_p(q^2)$ , который может ввести опасный полюс в случае безмассового пиона. Дело в том, что мы уже выделили двойной пионный полюс,



Фиг. 3.8

а полюса первого порядка, соответствующие диаграммам фиг. 3.8, взаимно уничтожаются (это верно, конечно, и для перекрестных диаграмм).

Таким образом, нуклонный вклад в левую часть (3.63) имеет вид

$$\{q^\mu q^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}\}_N = r_A^2 \frac{v^2 - m_\pi^2 q^2}{\frac{1}{4} q^4 - v^2} \frac{1}{2} \{[\tau^\beta, \tau^\alpha] \nu - q^2 \delta_{\beta\alpha}\}. \quad (3.67)$$

Равенство (3.63) теперь можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} -f_\pi^2 T_{\pi N}^{\beta\alpha}(q^2=0, \nu) + r_A^2 \frac{v^2 - m_\pi^2 q^2}{\frac{1}{4} q^4 - v^2} \frac{1}{2} \{[\tau^\beta, \tau^\alpha] \nu - q^2 \delta_{\beta\alpha}\} + O(q_\mu q_\nu) = \\ = \frac{1}{2} [\tau^\alpha, \tau^\beta] \nu. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Это соотношение весьма удобно для вывода теорем о мягких пионах для пион-нуклонной амплитуды рассеяния  $T_{\pi N}^{\beta\alpha}$ , что достигается устремлением  $q_\mu$  к нулю. Однако нуклонный вклад порождает следующую проблему: его значение при  $q_\mu = 0$  зависит от того, каким именно образом  $q_\mu$  стремится к нулю. Если строго придерживаться теории безмассовых пионов, то в уравнении (3.68) мы должны всюду положить  $q^2 = 0$  и лишь затем перейти к пределу при  $\nu \rightarrow 0$ ; это дает

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{T_{\pi N}^{\beta\alpha}(q^2=0, \nu)}{\nu} = \frac{1 - r_A^2}{f_\pi^2} \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^\alpha]. \quad (3.69)$$

Используя обычное изоспиновое разложение]

$$T_{\pi N}^{\beta\alpha} = T^+ \delta_{\beta\alpha} + T^- \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^\alpha], \quad (3.70)$$

получаем следующие низкоэнергетические пределы:

$$T^+(0, 0) = 0, \quad (3.71)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{T^-(q^2=0, \nu)}{\nu} = \frac{1 - r_A^2}{f_\pi^2}, \quad (3.72)$$

справедливые для мира с безмассовыми пионами.



Равенство (3.71) есть условие согласованности Адлера [115, 116], о котором уже говорилось в гл. 2, § 6. Мы видели, что данные о  $\pi N$ -рассеянии вблизи порога хорошо согласуются с соотношением (3.71).

В действительности для сравнения низкоэнергетических пределов (3.71) и (3.72) с пороговыми экспериментальными данными нужно, чтобы пион-нуклонная амплитуда рассеяния  $T_{\pi N}^{\beta\alpha}$  была определена вне «поверхности масс» как функция обеих переменных  $q^2$  и  $\nu$ . Таким образом, при наивном прямом сравнении молчаливо предполагается, что функция  $T_{\pi N}^{\beta\alpha}(q^2, \nu)$  является гладкой в области, окружающей точку  $(0, 0)$ , для которой справедливы низкоэнергетические пределы, и точку  $(m_\pi^2, m_\pi m_N)$ , к которой относятся экспериментальные данные.

Эвристический способ решения проблемы, правильность которого будет полностью подтверждена в гл. 6, таков: принимается, что равенство (3.68) пригодно для определения не только  $T_{\pi N}^{\beta\alpha}(q^2 = 0, \nu)$ , но и  $T_{\pi N}^{\beta\alpha}(q^2, \nu)$  в той области, где обе переменные  $q^2$  и  $\nu$  являются малыми (по обычной шкале адронных масс). Итак, при малых  $q_\mu$  напишем

$$T_{\pi N}^{\beta\alpha}(q^2, \nu) = \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^\alpha] \frac{\nu}{f_\pi^2} - \frac{r_A^2}{f_\pi^2} \frac{\nu^2 - m_N^2 q^2}{\nu^2 - \frac{1}{4} q^4} \frac{1}{2} \{[\tau^\beta, \tau^\alpha] \nu - q^2 \delta_{\alpha\beta}\} + O(q^2). \quad (3.73)$$

Из этого соотношения можно найти величину  $T_{\pi N}^{\alpha\beta}$  вблизи физического порога процесса, т. е. в точке

$$\begin{aligned} q^2 &= m_\pi^2, \\ \nu &= m_\pi m_N. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Поскольку нуклонный вклад в этой точке обращается в нуль<sup>1)</sup>, мы приходим к простому выражению

$$\{T_{\pi N}^{\beta\alpha}\}_{\text{порог}} = \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^\alpha] \frac{m_\pi m_N}{f_\pi^2} + O(m_\pi^2). \quad (3.75)$$

Учитывая изоспиновое разложение (3.70), получаем два соотношения:

$$\{T_{\pi N}^+\}_{\text{порог}} = O(m_\pi^2), \quad (3.76)$$

$$\{T_{\pi N}^-\}_{\text{порог}} = \frac{m_\pi m_N}{f_\pi^2} [1 + O(m_\pi^2)]. \quad (3.77)$$

Отметим, что равенство (3.76) согласуется с равенством (3.71) для безмассового пиона, а соотношение (3.77), выведенное Томозавой [131] и независимо от него Вейнбергом [132], совершенно отличается от равенства (3.72), справедливого в случае строго безмассовых пионов.

Важно уяснить себе, что тот же самый результат (3.75) можно получить, если, переходя к пределу при  $q_\mu \rightarrow 0$  в выражении для  $q^\mu q^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$ , сначала принять физически обоснованное условие  $q = 0$ , а затем положить  $q_0 = m_\pi \rightarrow 0$  (в системе покоя нуклона, если мы хотим оставаться вблизи порога). В этом проявляется различие между случаями строго безмассовой частицы и частицы малой массы. Во втором случае мы должны иметь в виду, что частица имеет массу, даже переходя к пределу при  $q_\mu \rightarrow 0$ . Так мы и будем всюду поступать в данной главе.

## 1. Сравнение с экспериментом

Чтобы сравнить теоретические пороговые соотношения с экспериментальными данными, выразим пороговые значения амплитуд через  $s$ -волновые длины рассеяния. При нашей нормировке амплитуд имеем

$$T_{\text{порог}}^\pm = 8\pi (m_N + m_\pi) a^\pm, \quad (3.78)$$

<sup>1)</sup> Это следует из законов сохранения углового момента и четности.

где  $a^+$  и  $a^-$  — длины рассеяния  $s$ -волн, соответствующих обмену в  $t$ -канале изоспинами 0 и 1. Связь с длинами рассеяния  $a_1$  и  $a_3$ , соответствующими изоспинам  $1/2$  и  $3/2$  в  $s$ -канале, дается соотношениями

$$\begin{aligned} a^+ &= \frac{1}{3} (a_1 + 2a_3), \\ a^- &= \frac{1}{3} (a_1 - a_3). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Условие согласованности Адлера принимает теперь следующий вид:

$$a_1 + 2a_3 \approx 0, \quad (3.80)$$

а из соотношения Вейнберга — Томозавы (3.77) следует <sup>1)</sup>

$$a_1 - a_3 \approx \frac{3m_\pi m_N}{8\pi(m_N + m_\pi)} \frac{1}{f_\pi^2} \approx 0,25 m_\pi^{-1}. \quad (3.81)$$

Итак, теория мягких пионов дает

$$\begin{aligned} a_1 &\approx 0,166 m_\pi^{-1}, \\ a_3 &\approx -0,083 m_\pi^{-1}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Экспериментальные же значения [117] таковы:

$$\begin{aligned} a_1^{\text{эксп}} &= (0,171 \pm 0,005) m_\pi^{-1}, \\ a_3^{\text{эксп}} &= -(0,088 \pm 0,004) m_\pi^{-1}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Таким образом, выводы теории мягких пионов, если их правильно интерпретировать, очень хорошо согласуются с экспериментальными данными о  $\pi N$ -рассеянии.

## 2. Рассеяние мягких пионов на произвольной мишени

Методом, изложенным в предыдущем разделе, можно вычислить и  $s$ -волновые длины рассеяния мягких пионов на произвольной мишени.

Правая часть тождества Уорда (3.60) (подразумевается усреднение по спине мишени) в общем случае имеет следующий вид:

$$-i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \langle p | V_\mu^\gamma | p \rangle = -i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} 2p_\mu T_T^\gamma = 2(t_\gamma)_\mu^{\beta\alpha} T_T^\gamma p_\mu, \quad (3.84)$$

где  $T_T$  и  $t$  — операторы изоспина мишени и пиона. Тогда выделение пионного полюса дает следующий низкоэнергетический предел:

$$T_{\pi T}^{\beta\alpha} \underset{q_\mu \rightarrow 0}{\sim} -\frac{2}{f_\pi^2} (t_\gamma^{\beta\alpha} T_T^\gamma) v. \quad (3.85)$$

Считая эту формулу справедливой вблизи порога, получаем ( $M$  — масса мишени)

$$(T_{\pi T})_{\text{порог}} = -\frac{2}{f_\pi^2} t T_T m_\pi M. \quad (3.86)$$

Далее, при заданном полном изоспине  $I$  системы пион — мишень имеем

$$2t T_T = (t + T_T)^2 - T_T^2 - t^2 = I(I+1) - I_T(I_T+1) - 2.$$

Вводя  $s$ -волновую длину рассеяния  $a_I$ , через которую выражается пороговое значение  $T_{\pi T}$  при заданном полном изоспине  $I$ ,

$$\{T_{\pi T}^{(I)}\}_{\text{порог}} = 8\pi (M + m_\pi) a_I,$$

<sup>1)</sup> Мы берем  $m_N \approx 6,7 m_\pi$ ;  $f_\pi \approx 0,68 m_\pi$  (экспериментальные значения).

переписываем соотношение (3.86) в окончательном виде:

$$a_I = -L \left(1 + \frac{m_\pi}{M}\right)^{-1} [I(I+1) - I_T(I_T+1) - 2], \quad (3.87)$$

где

$$L = \frac{m_\pi}{8\pi J_\pi^2} \quad (3.88)$$

есть некоторая универсальная длина, не зависящая от типа мишени. Соотношение (3.87) в общем виде впервые вывел Вейнберг [132]. В принципе оно дает  $s$ -волновые длины рассеяния мягких пионов на любой мишени, кроме пиона.

Численно величина  $L$  оказывается равной

$$L \approx 0,088 m_\pi^{-1}, \quad (3.89)$$

если взять экспериментальное значение  $f_\pi \approx 0,68 m_\pi$ , и

$$L = L^{GT} \approx 0,109 m_\pi^{-1}, \quad (3.90)$$

если взять значение  $f_\pi$  из соотношения Голдбергера — Треймапа, которое должно быть точным в пределе безмассового пиона. Это говорит о неоднозначности, возникающей, когда низкоэнергетические теоремы понимаются как непосредственно приложимые к покоящимся физическим пионам. Более того, к соотношению (3.86) вообще следует относиться с известной осторожностью: например, оно дает нулевые длины рассеяния для любой изоскалирной мишени, с чем, конечно, трудно согласиться. Таким образом, интерпретация соотношения (3.86) как приближенно справедливого для физических пионов должна быть дополнена некоторой аккуратной процедурой экстраполяции, позволяющей перейти от нефизической точки  $\nu = q^2 = 0$  [в которой равенство (3.85) точно выполняется] к физической точке. Такая экстраполяция (гл. 6) в некоторых случаях, по-видимому, может вносить значительные поправки.

### 3. Теоремы о мягких пионах и правила сумм

Другой возможный способ проверки теорем о мягких пионах — преобразовать их в правила сумм так, как мы уже делали при выводе правила сумм Дрелла — Хирна — Герасимова для случая комптоновского рассеяния на нуклонах (§ 2, п. 3). Здесь важно, чтобы для соответствующей функции можно было написать дисперсионное соотношение без вычитаний.

В данном случае асимптотика амплитуд  $T^+(\nu)$  и  $T^-(\nu)$  легко находится, если, как обычно, предположить, что асимптотическое поведение амплитуд  $\pi N$  рассеяния определяется обменом полюсами Редже. Для  $T^+$  разрешен обмен полюсом Померанчука, тогда как для  $T^-$  главный вклад дает обмен  $\rho$ -мезонным полюсом. Следовательно (мы рассматриваем рассеяние вперед!),

$$\begin{aligned} T^+(\nu) &\underset{\nu \rightarrow \infty}{\sim} \text{const } \nu^{\alpha_{P(0)}} \approx \text{const } \nu, \\ T^-(\nu) &\underset{\nu \rightarrow \infty}{\sim} \text{const } \nu^{\alpha_{\rho(0)}} \approx \text{const } \nu^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Кроме того, функция  $T^+(\nu)$  четна относительно замены  $\nu \rightarrow -\nu$ , а функция  $T^-(\nu)$  нечетна. Последнее обстоятельство вместе с асимптотическими свойствами (3.91) позволяет нам написать дисперсионное соотношение без вычитаний для  $T^-(\nu)/\nu$ , чего нельзя сделать, конечно, для  $T^+$ . Итак, для  $T^-$  имеем

$$\frac{T^-(\nu)}{\nu} = \frac{m_\pi^2 g_{\pi N}^2}{\nu^2 - \frac{1}{4} m_\pi^4} + \frac{2}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\text{Im } T^-(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2} d\nu'. \quad (3.92)$$

Здесь выделен нуклонный борновский член;  $v_0$  — порог реакции  $\pi N$ . При пороговом значении  $v$ , используя информацию, содержащуюся в низкоэнергетической теореме (3.77), получаем

$$\frac{1}{f_\pi^2} = \frac{g_{\pi N}^2}{m_N^2 - \frac{1}{4} m_\pi^2} + \frac{2}{\pi} \int_{m_\pi m_N}^{\infty} dv \frac{\text{Im } T^-(v)}{v^2 - m_\pi^2 m_N^2} + O(m_\pi^2). \quad (3.93)$$

Поскольку равенство (3.93) справедливо лишь с точностью до поправок порядка  $O(m_\pi^2)$ , можно написать

$$\frac{1}{f_\pi^2} = \frac{g_{\pi N}^2}{m_N^2} + \frac{2}{\pi} \int_{m_\pi m_N}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \text{Im } T^-(v) + O(m_\pi^2). \quad (3.94)$$

Используя соотношение Голдбергера — Треймана

$$f_\pi = \frac{m_N r_A}{g_{\pi N}}, \quad (3.95)$$

справедливое с той же точностью, получаем следующее красивое правило сумм для аксиально-векторной ренормировочной константы  $r_A = G_A/G_V$ :

$$r_A^2 = 1 + \frac{2m_N^2}{\pi g_{\pi N}^2} \int_{m_\pi m_N}^{\infty} \frac{dv}{v^2} \text{Im } T^-(v) + O(m_\pi^2). \quad (3.96)$$

Воспользуемся теперь оптической теоремой

$$\text{Im } T^-(v) = 2k(v) m_N \sigma_{\text{полн}}^-(v), \quad (3.97)$$

где

$$k(v) = \frac{1}{m_N} (v^2 - m_N^2 m_\pi^2)^{1/2} \approx \frac{v}{m_N}, \quad (3.98)$$

а величина  $\sigma_{\text{полн}}^-$  следующим образом выражается через физические полные сечения:

$$\sigma_{\text{полн}}^- = \frac{1}{2} (\sigma_{\text{полн}}^{\pi^- p} - \sigma_{\text{полн}}^{\pi^+ p}). \quad (3.99)$$

С учетом соотношений (3.97) — (3.99) приводим равенство (3.96) к окончательному виду:

$$r_A^2 = 1 + \frac{2m_N^2}{g_{\pi N}^2} \frac{1}{\pi} \int_{m_\pi m_N}^{\infty} \frac{dv}{v} [\sigma_{\text{полн}}^{\pi^- p}(v) - \sigma_{\text{полн}}^{\pi^+ p}(v)] + O(m_\pi^2). \quad (3.100)$$

Здесь с точностью до поправок порядка  $O(m_\pi^2)$  параметр слабого взаимодействия  $r_A$  выражается через полные сечения  $\pi N$ -рассеяния, определяющиеся сильными взаимодействиями.

Правило сумм (3.100) есть знаменитое соотношение Адлера — Вейсбергера [57, 58, 133, 134]. С его помощью легко вычислить  $r_A$  по хорошо известным полным сечениям рассеяния заряженных пионов на протонах. Адлер и Вейсбергер провели тщательные расчеты. Первый получил

$$r_A \approx 1,24, \quad (3.101)$$

а второй

$$r_A \approx 1,16.$$

Расхождение между этими двумя значениями объясняется различием в методах, которыми тот и другой вычисляли поправки <sup>1)</sup> порядка  $O(m_\pi^2)$ .

<sup>1)</sup> Подробнее об этом говорится в гл. 8.

Вспоминая экспериментальное значение

$$r_A^{\text{экс}} = 1,22 \pm 0,02,$$

закключаем, что согласие впечатляющее!

Скажем еще несколько слов о первоначальной форме низкоэнергетического предела (3.72), справедливого для строго безмассовых пионов. Его также можно переписать в виде правила сумм Адлера — Вейсбергера. Делается это просто. Рассмотрим дисперсионное соотношение (3.92) в идеальном случае безмассового пиона. В правой части равенства (3.92) можно опустить нуклонный борновский член, так как он пропорционален  $m_\pi^2$ ; при  $\nu = 0$  имеем

$$\frac{1-r_A^2}{f_\pi^2} = \frac{2}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2} \text{Im } T^-(q^2=0, \nu). \quad (3.102)$$

Используя соотношение Голдбергера — Треймана и оптическую теорему, из (3.102) получаем

$$r_A^2 = 1 + \frac{2m_N^2}{g_{\pi N}^2} \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} \{ \sigma_{\text{полн}}^{\pi^-\rho}(q^2=0, \nu) - \sigma_{\text{полн}}^{\pi^+\rho}(q^2=0, \nu) \}, \quad (3.103)$$

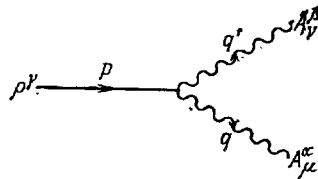
что в точности совпадает с правилом сумм Адлера — Вейсбергера в его первоначальной форме. Соотношения (3.103) и (3.100) полностью эквивалентны, если предположить, что  $\sigma_{\text{полн}}$  — гладкая функция переменной  $q^2$ .

#### § 4. Теорема о мягких пионах для распада $\rho \rightarrow 2\pi$

Возьмем теперь другой пример, а именно распад  $\rho \rightarrow \pi\pi$ , где имеются два безмассовых пиона, участвующих в сильном взаимодействии. Мы рассмотрим амплитуду

$$T_{\nu\mu}^{\beta\alpha\gamma} = i \int d^4x \exp(iq'x) \langle 0 | T (A_\nu^\beta(x) A_\mu^\alpha(0)) | \rho^\gamma(p) \rangle, \quad (3.104)$$

соответствующую диаграмме фиг. 3.9, и применим к ней тождество (3.10).



Фиг. 3.9

Поскольку мы считаем пион безмассовым, аксиальный ток сохраняется и мы имеем

$$q'_\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha\gamma} = -i\epsilon_{\beta\alpha\delta} \langle 0 | V_\mu^\delta | \rho^\gamma(p) \rangle, \quad (3.105)$$

где  $V_\mu^\delta$  — вектор-изовекторный ток. Пользуясь определением

$$\langle 0 | V_\mu^\delta | \rho^\gamma(p) \rangle = f_\rho \epsilon_\mu \delta_{\delta\gamma}, \quad (3.106)$$

где  $\epsilon_\mu$  — вектор поляризации  $\rho$ -мезона, подчиненный дополнительному условию

$$p^\mu \epsilon_\mu = 0 \quad (3.107)$$

[обеспечивающему совместность соотношения (3.106) с условием сохранения тока  $V_\mu^\delta$ ], имеем

$$q'^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha\gamma} = i f_\rho \varepsilon_\mu \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}. \quad (3.108)$$

Повторное свертывание с  $q^\mu$  дает

$$q^\mu q'^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha\gamma} = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (e q) f_\rho. \quad (3.109)$$

Выполним теперь предельный переход  $q'_\mu \rightarrow q_\mu \rightarrow 0$ , удерживая лишь члены первого порядка<sup>1)</sup>, порождаемые вкладами пионных полюсов в  $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha\gamma}$ . С учетом соотношения

$$\langle \pi^\beta(q'), \pi^\alpha(q) | \rho^\nu(p) \rangle = i \varepsilon^{\beta\alpha\nu\epsilon} (q' - q)_\nu g_{\rho\pi\pi}, \quad (3.110)$$

получаем теорему о мягких пионах:

$$f_\rho = 2 f_\pi^2 g_{\rho\pi\pi}. \quad (3.111)$$

Прежде чем перейти к анализу следствий из соотношения (3.111), выразим  $f_\rho$  через более привычные величины. Для этого воспользуемся предположением о  $\rho$ -универсальности (гл. 2, § 7), согласно которому

$$f_\rho = \frac{m_\rho^2}{g_{\rho\pi\pi}}. \quad (3.112)$$

Подстановка выражения (3.112) в равенство (3.111) приводит к соотношению

$$g_{\rho\pi\pi}^2 = \frac{m_\rho^2}{2 f_\pi^2}, \quad (3.113)$$

которое впервые вывели Каварабаяши и Сузуки [135] и независимо от них Фаязуддин и Риазуддин [136].

Константе связи  $g_{\rho\pi\pi}$ , вычисленной из этого равенства, соответствует ширина распада  $\rho \rightarrow 2\pi$ , равная 115 МэВ, тогда как экспериментальное значение этой ширины равно  $\sim 100$  МэВ<sup>2)</sup>. Согласие довольно удивительное, поскольку оно явно лучше, чем можно было в принципе ожидать. Действительно, для вычисления ширины распада  $\rho \rightarrow 2\pi$  необходима физическая константа связи  $g_{\rho\pi\pi}$  ( $m_\rho^2, m_\pi^2, m_\pi^2$ ), а наш способ дает  $g_{\rho\pi\pi}$  ( $m_\rho^2, 0, 0$ ); далее, если учесть наличие общей  $\delta^4(p - q - q')$  (которая всегда подразумевалась), то наш предел требует, чтобы обращалась в нуль и величина  $m_\rho^2$ . Заметим, что это как раз то условие, при котором предположение о  $\rho$ -доминантности становится точным.

Любопытно отметить, что формулу (3.113) можно вывести, исходя из тех же самых предположений (коммутационные соотношения алгебры токов, переход к мягким пионам и  $\rho$ -доминантность) при анализе другого процесса — пион-нуклонного рассеяния. Напомним сначала результат теории мягких пионов:

$$\left\{ \frac{T^-(\nu)}{\nu} \right\}_{\nu=m_\pi, m_N} \approx \frac{1}{f_\pi^2}. \quad (3.114)$$

Если мы теперь вычислим  $T^-$  в предположении, что основной вклад дает обмен  $\rho$ -мезоном (фиг. 3.10), пользуясь определением (3.110) для вершины  $\rho\pi\pi$  и соотношением

$$\langle \bar{N}(-p) N(p') | \rho^\nu \rangle = -g_{\rho NN} \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \varepsilon^\mu \frac{1}{2} \tau^\nu \quad (3.115)$$

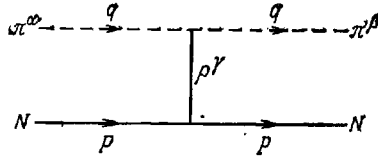
<sup>1)</sup> Члены нулевого порядка по  $q_\mu$  отсутствуют, поскольку переход является чисто  $\rho$ -волновым.

<sup>2)</sup> Общепринято экспериментальное значение  $\sim 120$  МэВ, но последние данные, полученные в Новосибирске, указывают на меньшую ширину ( $\sim 90$  МэВ).

для вершины  $\rho NN$ , то легко получим

$$T^-(\nu) \approx \{T^-(\nu)\}_\rho = 2\nu g_{\rho\pi\pi} g_{\rho NN} \frac{1}{m_\rho^2}. \quad (3.116)$$

Предположение о  $\rho$ -универсальности ( $g_{\rho NN} = g_{\rho\pi\pi}$ ) с учетом соотношения (3.114) приводит к соотношению КСФР (3.113).



Фиг. 3.10

Правда, и такой вывод соотношения (3.113) по меньшей мере столь же сомнителен, как и предыдущий. Но это соотношение играет важную роль, и вопрос о его обосновании остается открытым.

### § 5. Общий случай процессов с одним мягким пионом во внешнем поле

В данном параграфе мы остановимся на низкоэнергетических теоремах для процессов с рождением одного мягкого пиона. Мы будем рассматривать идеальный случай безмассовых пионов и сохраняющихся аксиальных токов. Общий метод получения низкоэнергетических пределов аналогичен использованному ранее.

Установим сначала общий вид предела мягких пионов для амплитуды рождения одного пиона. Рассмотрим случай, когда в результате воздействия произвольного внешнего «поля»  $\Lambda$  на адронную мишень, находящуюся в состоянии  $A$ , рождается один мягкий пион, а мишень переходит в состояние  $B$ . Начнем с определения амплитуды:

$$T_\mu^\alpha = i \int d^4x \exp(iqx) \langle B | T(A_\mu^\alpha(x) \Lambda(0)) | A \rangle. \quad (3.117)$$

Свертывая  $T_\mu^\alpha$  с  $q^\mu$  и учитывая равенство  $\partial^\mu A_\mu^\alpha = 0$ , имеем

$$q^\mu T_\mu^\alpha = - \int d^4x \exp(iqx) \langle B | [A_0^\alpha(x), \Lambda(0)] | A \rangle \delta(x_0). \quad (3.118)$$

Мы будем переходить к пределу при  $q_\mu \rightarrow 0$ , полагая сначала  $\mathbf{q} = 0$ , а затем  $q_0 \rightarrow 0$ . При таком способе предельного перехода правая часть равенства (3.118) является просто матричным элементом коммутатора аксиального заряда  $\bar{Q}^{(\alpha)}(0)$  с «полем»  $\Lambda(0)$ , так что это равенство принимает следующий вид:

$$\lim_{\mathbf{q}=0, q_0 \rightarrow 0} q^\mu T_\mu^\alpha = - \langle B | [\bar{Q}^\alpha, \Lambda] | A \rangle. \quad (3.119)$$

Безмассовый пион дает следующий вклад в левую часть равенства (3.119):

$$\{T_\mu^\alpha\}_\pi = if_\pi \frac{q_\mu}{-q^2} T^\alpha, \quad (3.120)$$

где  $T^\alpha$  — амплитуда рождения мягкого пиона для процесса

$$(\Lambda) + A \rightarrow B + \pi^\alpha.$$

Поэтому равенство (3.119) можно переписать иначе:

$$if_\pi T^\alpha(q^2=0, \nu=0) = \langle B | [\bar{Q}^\alpha, \Lambda] | A \rangle + \lim_{\mathbf{q}=0, q_0 \rightarrow 0} \{q^\mu \bar{T}_\mu^\alpha\}, \quad (3.121)$$

где  $\bar{T}^\alpha$  — амплитуда, содержащая всевозможные сингулярные при  $q_\mu = 0$  вклады в  $T_\mu^\alpha$ , кроме собственно пионного.

Равенство (3.121) и есть то общее соотношение, которое мы хотели получить; оно содержит «в зародыше» все однопионные низкоэнергетические теоремы. В следующих разделах мы применим соотношение (3.121) для решения ряда очень интересных конкретных задач.

### 1. Фоторождение одного пиона на нуклонах

В частном случае, когда  $|B\rangle \equiv |p_2\rangle$  и  $|A\rangle \equiv |p_1\rangle$  — нуклонные состояния, а  $\Lambda$  — электромагнитный ток  $j_\nu^{\text{эл.-м}}$ , соотношение (3.121) принимает следующий вид:

$$f_\pi \{T_\nu^\alpha(\gamma p_1 \rightarrow p_2 \pi^\alpha)\}_{q_\mu=0} = i\varepsilon_{\alpha 3 \nu} \langle p_2 | A_\nu^\gamma | p_1 \rangle + \lim_{q_\mu \rightarrow 0} q^\mu \bar{T}_{\mu\nu}^\alpha. \quad (3.122)$$

Здесь  $T_\nu^\alpha$  — амплитуда фоторождения безмассового пиона с нулевой энергией и проекцией изоспина  $\alpha$ :

$$T_\nu^\alpha = i \langle p_2 \pi^\alpha | j_\nu^{\text{эл.-м}} | p_1 \rangle. \quad (3.123)$$

Правая часть равенства (3.122) записана с учетом коммутационного соотношения

$$[\bar{Q}^\alpha, j_\nu^{\text{эл.-м}}] = i\varepsilon_{\alpha 3 \nu} A_\nu^\gamma, \quad (3.124)$$

вытекающего из общих предположений алгебры токов.

Как и в случае  $\pi N$ -рассеяния, нуклонный вклад зависит от пути перехода к пределу при  $q_\mu \rightarrow 0$ ; кроме того, дело осложняется наличием нескольких скалярных инвариантных функций. Полное решение этой проблемы будет дано в гл. 6, а здесь мы ограничимся лишь кратким интуитивным выводом результатов, справедливых вблизи порога фоторождения физических пионов<sup>1)</sup>.

Мы возьмем в качестве независимых импульсов

$$q, \quad P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad k = p_2 + q - p_1 \equiv \Delta + q, \quad (3.125)$$

а в качестве инвариантных переменных

$$v = qP = kP, \quad t = (q - k)^2, \quad q^2, \quad k^2 = 0. \quad (3.126)$$

При осуществлении предельного перехода мы должны положить сначала  $q = 0$ , а затем устремить к нулю  $q_0$  [формула (3.121)]. При этом

$$\begin{aligned} v &\equiv q_0 P_0 \rightarrow 0, & q^2 &= v^2/P_0^2 \rightarrow 0, \\ t &= -q^2 - 2\Delta q \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Далее, для удобства выберем брейтовскую систему отсчета  $P = 0$  (в частном случае фоторождения безмассовых пионов она совпадает с лабораторной системой). Тогда нуклон не дает вклада, что сразу же следует из законов сохранения углового момента и четности. Таким образом, мы получаем еще один вариант вывода Кролла — Рудермана [93]. Но еще лучше поступить иначе и получить, так же как и в случае  $\pi N$ -рассеяния, первый член в разложении по  $v$  нечетных амплитуд. В брейтовской системе имеем следующую

<sup>1)</sup> Библиографию, касающуюся экспериментальной стороны вопроса, можно найти в гл. 6.



кинематику:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{k} = \Delta, \\ q_0 = \frac{v}{P_0}, \quad \Delta_0 = 0, \quad k_0 = q_0 = \frac{v}{P_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} q^\lambda = \frac{v}{P^2} P^\lambda, \\ k^\lambda = \frac{v}{P^2} P^\lambda + \Delta^\lambda, \end{cases} \quad (3.128)$$

$$P_0 = \left( m_N^2 - \frac{1}{4} t \right)^{1/2} \rightarrow m_N,$$

$$\Delta q = 0, \quad t = -q^2 = -\frac{v^2}{P^2} \rightarrow 0.$$

Амплитуду  $T_v^\alpha$  удобно свернуть с 4-вектором поляризации фотона  $\varepsilon_v$ , удовлетворяющим условию  $(k\varepsilon) = 0$ . Очевидно, что единственными подходящими ковариантными структурами будут тогда  $\gamma_5 (\gamma\varepsilon)$  и  $\gamma_5 (P\varepsilon)$ .

После несложных выкладок, основанных на формулах (3.128), для нуклонного полюсного вклада в  $q^\mu \varepsilon^\nu \bar{T}_{\mu\nu}^\alpha$  получаем

$$\lim_{q_\mu \rightarrow 0} q^\mu \varepsilon^\nu \bar{T}_{\mu\nu}^\alpha = \frac{r_A}{2m_N} \gamma_5 (P\varepsilon) (\tau^\alpha + \delta_{\alpha 3}). \quad (3.129)$$

Подставив это выражение в формулу (3.122) и прибегнув к обычному разложению (нуклонные спиноры подразумеваются)

$$\langle p_2 | A_v^\gamma | p_1 \rangle = [\gamma_v \gamma_5 G_1(t) + \Delta_v \gamma_5 G_2(t)] \frac{1}{2} \tau^\gamma, \quad (3.130)$$

окончательно имеем

$$\begin{aligned} f_\pi \varepsilon^\nu T_v^\alpha \approx & -\frac{1}{2} r_A \gamma_5 (\gamma\varepsilon) \frac{1}{2} [\tau^\alpha, \tau^3] - \\ & - \gamma_5 (P\varepsilon) \frac{v}{2m_N^2} G_2(t) \frac{1}{2} [\tau^\alpha, \tau^3] + \frac{r_A}{2m_N} \gamma_5 (P\varepsilon) (\tau^\alpha + \delta_{23}). \end{aligned} \quad (3.131)$$

Слагаемое с  $G_2(t)$  в этом выражении требует осторожности, поскольку в пределе безмассовых пионов

$$G_2(t) \sim \frac{2f_\pi g_{\pi N}}{-t} \sim \frac{2f_\pi g_{\pi N}}{q^2} \sim \frac{2f_\pi g_{\pi N}}{v^2/m_N^2}. \quad (3.132)$$

Этот вклад в точности соответствует обмену безмассовым пионом в  $t$ -канале (как хорошо известно, его учет важен в связи с калибровочной инвариантностью).

Далее мы введем следующее инвариантное разложение:

$$\varepsilon^\nu T_v^\alpha = \gamma_5 (\gamma\varepsilon) T_1^\alpha + \gamma_5 (P\varepsilon) T_2^\alpha, \quad (3.133)$$

а также в изоспиновом пространстве

$$T_i^\alpha = \frac{1}{2} [\tau_\alpha, \tau_3] T_i^{(-)} + \delta_{\alpha 3} T_i^{(+)} + \tau_\alpha T_i^{(0)}, \quad i = 1, 2. \quad (3.134)$$

И наконец, вспомним требование калибровочной инвариантности  $k^\mu T_\mu^\alpha = 0$ , которое принимает следующий вид:

$$T_1^\alpha = \frac{v}{2m_N} T_2^\alpha. \quad (3.135)$$

Отметим, что в антисимметричном случае требование калибровочной инвариантности выполняется автоматически, поскольку при учете соотношения Голдбергера — Треймана

$$\begin{aligned} f_\pi T_1^{(-)} &= -\frac{1}{2} r_A, \\ f_\pi T_2^{(-)} \frac{v}{2m_N} &= -\frac{v^2}{4m_N^2} \frac{2f_\pi g_{\pi N}}{q^2} = -\frac{f_\pi g_{\pi N}}{2m_N} = -\frac{1}{2} r_A. \end{aligned} \quad (3.136)$$

В симметричном же случае калибровочную инвариантность можно использовать для того, чтобы выразить  $T_1^{(+, 0)}$  через  $T_2^{(+, 0)} = r_A/2m_N f_\pi$ :

$$T_1^{(+, 0)} = \frac{\nu r_A}{4m_N^2 f_\pi}. \quad (3.137)$$

Отсюда видно, что  $T_1^{(+, 0)} \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow 0$ , как и должно быть по соображениям перекрестной симметрии. Но если мы хотим воспользоваться низкоэнергетической теоремой для получения содержательной информации о физической амплитуде, то мы можем считать соотношение (3.137) верным вблизи физического порога<sup>1)</sup>  $\nu_{\text{порог}} \approx m_N m_\pi$ , что дает

$$\{T_1^{(+, 0)}\}_{\text{порог}} \approx \frac{m_\pi r_A}{4m_N f_\pi}. \quad (3.138)$$

Выбирая для удобства калибровку  $(P\varepsilon) = 0$ , получаем для амплитуды фоторождения вблизи порога

$$e\nu T_\nu^\alpha = \gamma_5 (\gamma\varepsilon) T^\alpha. \quad (3.139)$$

Ведущие члены в разложении по степеням  $m_\pi$  (точнее, по степеням  $\nu$  и  $q^2$ ) имеют следующий вид (с учетом соотношения Голдбергера — Треймана в последних равенствах):

$$\begin{aligned} T^{(-)} &\approx -\frac{r_A}{2f_\pi} \approx -\frac{g_{\pi N}}{2m_N}, \\ T^{(+, 0)} &\approx \frac{m_\pi r_A}{4m_N f_\pi} \approx \frac{m_\pi}{2m_N} \frac{g_{\pi N}}{2m_N}. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Эти равенства представляют собой модификацию теоремы Кролла — Рудермана [формула (2.278)] применительно к случаю физических пионов.

Вводя амплитуды заряженных пионов

$$\begin{aligned} T(\gamma p \rightarrow \pi\pi^+) &= \sqrt{2} (T^{(-)} + T^{(0)}), \\ T(\gamma n \rightarrow \pi\pi^-) &= \sqrt{2} (T^{(-)} - T^{(0)}), \end{aligned} \quad (3.141)$$

из (3.140) получаем, например, для отношения  $d\sigma(\pi^-)/d\sigma(\pi^+)$  простой результат

$$R \equiv \frac{d\sigma(\pi^-)}{d\sigma(\pi^+)} = \left( \frac{2m_N + m_\pi}{2m_N - m_\pi} \right)^2 \approx 1,34, \quad (3.142)$$

тогда как экспериментальное значение составляет  $1,265 \pm 0,075$  (теорема Кролла — Рудермана дает  $R = 1$ ).

Что касается сечений, напомним, что в системе центра масс

$$\left\{ \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{q}|} \frac{d\sigma(\pi^+)}{d\Omega} \right\}_{\text{порог}} = \frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{m_N}{m_N + m_\pi} \right)^2 |T(\pi^+)|^2. \quad (3.143)$$

Теорема Кролла — Рудермана в пределе строго безмассового пиона дает

$$\left\{ \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{q}|} \frac{d\sigma(\pi^+)}{d\Omega} \right\}_{\text{порог}} = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{g_{\pi N}^2}{2m_N^2} \approx 23 \text{ мкб} \cdot \text{ср}^{-1}, \quad (3.144)$$

что значительно больше экспериментального значения  $15,6 \pm 0,5 \text{ мкб} \cdot \text{ср}^{-1}$ . Пользуясь же формулой (3.140), находим (взяв для  $f_\pi$  экспериментальное значение  $\sim 0,68 m_\pi$ ):

$$\left\{ \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{q}|} \frac{d\sigma(\pi^+)}{d\Omega} \right\}_{\text{порог}} = \frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{m_N}{m_N + m_\pi} \right)^2 \frac{r_A^2}{2f_\pi^2} \left( 1 - \frac{m_\pi}{2m_N} \right)^2 \approx 12,5 \text{ мкб} \cdot \text{ср}^{-1}. \quad (3.145)$$

<sup>1)</sup> В низшем порядке по  $m_\pi$  не существует различия между обычным порогом и порогом в брейтовской системе.

Расхождение между двумя результатами указывает на то, что в данном случае экстраполяция теоремы о мягких пионах в физическую область вносит ошибку порядка 15—20% (в амплитуде), так что необходим более точный учет поправок.

## 2. Низкоэнергетические теоремы и правила сумм для фоторождения

При анализе  $\pi K$ -рассеяния в § 4 было указано, что от теории длин рассеяния для мягких пионов удобно перейти к дисперсионным соотношениям при фиксированном  $t$  (и фиксированных массах), получив таким образом правило сумм Адлера — Вейсбергера, связывающее параметр слабого взаимодействия  $r_A$  с интегралом от амплитуд сильного взаимодействия.

Мы хотим поступить таким же образом с низкоэнергетическими теоремами для фоторождения. Задача несколько осложняется наличием большего числа инвариантов, и мы приведем лишь основные моменты доказательства и конечные результаты. Прежде всего мы должны выразить входящую в формулу (3.139) амплитуду  $T$  через  $M_1, \dots, M_4$  — инварианты Чу, Голдбергера, Лоу и Намбу [137] (для этих инвариантов справедливы дисперсионные соотношения без вычитаний), а затем сравнить низкоэнергетические предельные соотношения с соответствующими величинами, выраженными через дисперсионные интегралы. Пренебрегая поправками порядка пионной массы, находим

$$\frac{T^{(+, 0)}(v_0)}{v_0} \approx \frac{g_{\pi N}}{4m_N^2} (1 + k^{(V, S)}) - \frac{2}{\pi m_N} \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{v} \operatorname{Im} M_1^{(+, 0)}(v), \quad (3.146)$$

$$T^{(-)}(v_0) \approx -\frac{g_{\pi N}}{2m_N}, \quad (3.147)$$

где  $v_0 \approx m_\pi m_N$ , а  $k^{(V, S)}$  — аномальные магнитные моменты нуклона<sup>1)</sup> ( $k_{\text{эксп}}^V \approx 3,70$ ;  $k_{\text{эксп}}^S \approx -0,12$ ). Подстановка низкоэнергетической теоремы (3.140) в соотношение (3.146) дает

$$k^V \approx \frac{8m_N^2}{g_{\pi N}} \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{v} \operatorname{Im} M_1^{(+)}(v), \quad (3.148)$$

$$k^S \approx \frac{8m_N^2}{g_{\pi N}} \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{v} \operatorname{Im} M_1^{(0)}(v), \quad (3.149)$$

тогда как равенство (3.147) оказывается эквивалентным соотношению Голдбергера — Треймана. В формулах (3.148) и (3.149) электромагнитные параметры  $k^{(V, S)}$  изящно выражены через интегралы от амплитуд фоторождения [138] (правда, эти формулы строго выполняются лишь в пределе безмассового пиона, но мы будем пренебрегать эффектами экстраполяции).

Что касается вычисления дисперсионных интегралов, то ситуация здесь сложнее, чем в случае правила сумм Адлера — Вейсбергера, куда входят хорошо известные сечения  $\pi N$ -рассеяния. Проще всего вычислить эти интегралы, предположив [138], что основной вклад в  $\operatorname{Im} M_1^{(+, 0)}$  дают два первых резонанса, т. е.  $N_{33}$  (1236) (дающий основной вклад в  $k^V$ , но не дающий никакого вклада в  $k^S$ ) и  $N_{13}$  (1515) (который дает небольшие вклады и в  $k^V$  и в  $k^S$ ). В результате получается

$$k^V \approx 3,80, \quad k^S \approx -0,18.$$

Согласие с экспериментальными значениями обнадеживающее, если принять во внимание грубость рассмотренного приближения.

<sup>1)</sup> Определение  $k^{V, S}$  см. в гл. 2, § 5, п. 2. — Прим. ред.

3.  $K_{l3}$ -распад

Теперь выведем соотношение между константой распада  $K$ -мезона на лептонную пару и формфакторами его полулептонного распада на лептонную пару и нуль.

Матричные элементы, описывающие адронную часть процесса, имеют вид

$$\langle 0 | A_\mu^{V-} | K^+(p) \rangle = i p_\mu f_K \quad (3.150)$$

для  $K_{l2}$ -распада, связанного с аксиальным током, и

$$\langle \pi^0(q) | V_\mu^{V-} | K^+(p) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(q+p)_\mu f_+(t) + (p-q)_\mu f_-(t)], \quad t = (p-q)^2 \quad (3.151)$$

для  $K_{l3}$ -распада, описываемого векторным током.

В пределе нулевой массы рождающегося пиона зависимость между  $f_K$  и  $f_\pm$  нетрудно найти из общего соотношения (3.121), рассмотрев частный случай, когда: 1)  $A$  есть векторный ток  $V_\nu^{V-}$ , 2) индекс  $\alpha$  равен трем (что соответствует рождению  $\pi^0$ -мезона), 3) состояния  $|A\rangle$  и  $|B\rangle$  — это  $K^+$ -мезон и вакуум.

Поскольку в пределе при  $q_\mu \rightarrow 0$  мы имеем только пионный полюсный вклад в  $T_\mu$ , соотношение (3.121) принимает следующий вид:

$$\{i f_\pi \langle \pi^0 | V_\mu^{V-} | K^+ \rangle\}_{q_\mu=0} = \langle 0 | [\bar{Q}^3, V_\nu^{V-}] | K^+ \rangle = -\frac{1}{2} \langle 0 | A_\nu^{V-} | K^+ \rangle. \quad (3.152)$$

Последнее равенство вытекает из коммутационных соотношений алгебры токов.

Из равенства (3.152) с учетом определений (3.150) и (3.151) получаем

$$f_+(m_K^2) + f_-(m_K^2) = -\frac{f_K}{\sqrt{2} f_\pi}. \quad (3.153)$$

Это равенство можно переписать в более изящной форме, заметив, что использованная нами константа  $f_\pi$  связана с распадом нейтрального пиона, тогда как для заряженного пиона константой распада будет <sup>1)</sup>

$$f_{\pi^+} = -\sqrt{2} f_\pi.$$

Следовательно, мы можем записать равенство (3.145) более симметрично:

$$f_+(m_K^2) + f_-(m_K^2) = \frac{f_K}{f_{\pi^+}}. \quad (3.154)$$

Это простое соотношение впервые вывели Каллан и Трейман [139], а также Матур, Окубо и Пандит [140]. К сожалению, его нелегко проверить. Дело в том, что разрешенные физические значения  $t$  лежат в интервале от нуля (в пренебрежении лептонными массами) до  $(m_K - m_\pi)^2$ , так что формфакторы, входящие в равенство (3.154), берутся при нефизическом значении  $t$ ; кроме того, наблюдаемые формфакторы соответствуют физическому значению  $q^2 = m_\pi^2$ , а в равенстве (3.154) они берутся при  $q^2 = 0$ .

Следовательно, чтобы придать равенству (3.154) физический смысл, в принципе необходима экстраполяция по двум переменным  $q^2$  и  $t$ . Но если считать, что такая экстраполяция допустима, то можно попытаться сравнить равенство (3.154) с экспериментом. Для этого можно, как это обычно делается при анализе экспериментальных данных <sup>2)</sup>, предположить, что формфакторы  $f_\pm$  линейно зависят от  $t$ :

$$f_\pm(t) = f_\pm(0) \left( 1 + \frac{t}{m_\pi^2} \lambda_\pm \right). \quad (3.155)$$

<sup>1)</sup> Знак минус объясняется принятым соотношением фаз физических состояний [см. приложение относительно группы  $SU(3)$  в гл. 2].

<sup>2)</sup> См., например, [141].

Подставляя выражение (3.155) в равенство (3.154), получаем замечательные соотношения

$$\xi(0) \left(1 + \lambda_- \frac{m_K^2}{m_\pi^2}\right) \approx \left(\frac{f_K}{f_{\pi^+ f_+}(0)} - 1\right) - \frac{\lambda_+}{m_\pi^2} m_K^2, \quad (3.156)$$

$$\xi(t) = \frac{f_-(t)}{f_+(t)},$$

связывающие три независимых параметра  $\xi(0)$ ,  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$ , измеряемых в  $K_{l3}$ -распаде. Экспериментально параметры  $\xi$  и  $\lambda_-$  определяются только в  $K_{\mu 3}$ -распаде<sup>1)</sup>, а  $\lambda_+$  можно измерить как в  $K_{\mu 3}$ -, так и в  $K_{e3}$ -распаде. Что касается первого процесса, то, хотя разные способы определения  $\xi$  и  $\lambda_+$  (один — по спектру и поляризации  $\mu$ -мезона, другой — по отношению  $\Gamma_{\mu 3}/\Gamma_{e3}$ ) дают, по-видимому, разные значения для этих параметров, их все же можно согласовать [141]:

$$\begin{aligned} \xi(0) &= -0,85 \pm 0,20, \\ \lambda_+ &= 0,045 \pm 0,012, \quad \lambda_- = 0 \\ \left(\frac{d\xi(0)}{d\lambda_+}\right) &= -17. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Комбинация же  $K_{\mu 3}$ - и  $K_{e3}$ -измерений дает для  $\lambda_+$  значение [141]

$$\lambda_+ = 0,034 \pm 0,06,$$

что соответствует наилучшему значению  $\xi$

$$\xi(0) = -0,65 \pm 0,20 \quad \text{при} \quad \lambda_- = 0. \quad (3.158)$$

Если мы подставим в (3.156) приведенные выше экспериментальные значения величины  $f_{\pi^+}$ , а величину  $f_K/f_{\pi^+ f_+}(0)$  возьмем равной 1,27 и 1,24<sup>2)</sup>, то получим два значения

$$\xi(0) \approx -0,32, \quad (3.159)$$

и

$$\xi(0) \approx -0,21. \quad (3.160)$$

Первое из них нужно сравнивать с (3.157), а второе — с (3.158). Расхождение неприятное, если считать, что приближение мягких пионов хорошо соответствует действительности. Но предыдущие результаты показывают, что для достижения полного согласия между экспериментом и выводами теории мягких пионов нужно, по-видимому, внести большие поправки (~ 60%) на конечную массу пиона. Разумеется; возможны и другие причины, например отклонения от линейной зависимости формфакторов. К данному вопросу мы вернемся в гл. 10, § 2, п. 4.

#### 4. $K_{l4}$ -распад

Точно так же, как было выведено соотношение (3.154), Каллан и Трейман [139] вывели соотношение между формфакторами  $K_{l3}$ - и  $K_{l4}$ -распадов.

Правда, в данном случае из-за наличия двух пионов в конечном состоянии необходима особая аккуратность при переходе к пределу мягких пионов, и на первый взгляд может даже показаться, что такой переход дает

<sup>1)</sup> Формфактор  $f_-$  практически не дает вклада в амплитуду  $K_{e3}$ -распада вследствие малости массы электрона.

<sup>2)</sup> Напомним читателю, что определяемая по  $K_{l3}$ -распаду величина  $f_+(0) \sin \theta_v$ , а следовательно, и  $f_K/f_{\pi^+ f_+}(0)$  зависит от предполагаемого наклона формфактора  $f_+(t)$ . Приведенные значения найдены из эмпирического соотношения  $f_K/f_{\pi^+ f_+}(0) \approx 1,16(1 + 2\lambda_+)$ , которое установлено при интерполяции последних экспериментальных данных [573].

противоречивые результаты. Но, как мы увидим, это неверно, если соблюдать величайшую осторожность при интерпретации получаемых соотношений.

Для определенности будем говорить о распаде  $K^+$ -мезона, ибо только для него в настоящее время имеются экспериментальные данные. Соответствующий адронный матричный элемент таков:

$$-iT_v^{\alpha\beta} = \langle \pi^\alpha(q_1), \pi^\beta(q_2) | J_v^{V-} | K^+(p) \rangle, \quad (3.161)$$

где

$$J_v^{V-} = V_v^{V-} - A_v^{V-}. \quad (3.162)$$

Векторное слагаемое не дает заметного вклада (соответствующая парциальная ширина — порядка  $10^{-3}$  [69, стр. 497]). Поэтому мы пренебрежем им и напишем просто

$$iT_v^{\alpha\beta} = \langle \pi^\alpha(q_1), \pi^\beta(q_2) | A_v^{V-} | K^+(p) \rangle. \quad (3.163)$$

Что касается изоспина, то конечное двухпионное состояние может быть либо изосинглетом, либо изотриплетом, поскольку и  $A_v^{V-}$  и  $K^+$  — изодублеты. Поэтому матричный элемент (3.163) разлагается следующим образом:

$$iT_v^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} [(q_1 + q_2)_\nu S_1 + (q_1 - q_2)_\nu S_2 + (p - q_1 - q_2)_\nu S_3] + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} [(q_1 + q_2)_\nu T_1 + (q_1 - q_2)_\nu T_2 + (p - q_1 - q_2)_\nu T_3]. \quad (3.164)$$

Здесь  $S_i$  и  $T_i$  — инвариантные формфакторы, удовлетворяющие следующим требованиям симметрии:

$$S_i(q_1, q_2) = (-1)^{i+1} S_i(q_2, q_1), \quad (3.165)$$

$$T_i(q_1, q_2) = (-1)^i T_i(q_2, q_1) \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.166)$$

(следствие статистики Бозе).

Найдем теперь соотношение между этими формфакторами и формфакторами  $K_{13}$ -распада:

$$\langle \pi^0(q) | V_v^{V-} | K^+(p) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(p+q)_\nu f_+(t) + (p-q)_\nu f_-(t)], \quad (3.167)$$

удовлетворяющими, как было показано, соотношению Каллана — Треймана — Матура — Окубо — Пандита (КТМОП):

$$f_+(m_K^2) + f_-(m_K^2) = \frac{f_K}{f_{\pi^+}}. \quad (3.168)$$

Исходной точкой вывода опять является общее условие (3.121), где в качестве  $|A\rangle$  и  $|B\rangle$  берутся состояния  $\pi^\beta$  и  $K^+$ , а в качестве  $\Lambda$  — странный аксиальный ток  $A_v^{V-}$ . В пределе при  $q_1 \rightarrow 0$  получаем (в скобки заключен индекс мягкого пиона)

$$if_\pi T_v^{(\alpha)\beta} = \langle \pi^\beta(q_2) | [\bar{Q}^\alpha, A_v^{V-}] | K^+(p) \rangle + \lim_{q_1 \rightarrow 0} \{q_1^\mu \bar{T}_{v\mu}^{\alpha\beta}\}, \quad (3.169)$$

где

$$T_{v\mu}^{\alpha\beta} = i \int d^4x \exp(iq_1x) \langle \pi^\beta(q_2) | T(A_\mu^\alpha(x) A_v^{V-}(0)) | K^+(p) \rangle. \quad (3.170)$$

Входящий в первое слагаемое правой части (3.169) коммутатор можно записать следующим образом:

$$[\bar{Q}^\alpha, A_v^{V-}] = -\frac{1}{2} \delta_{\alpha 3} V_v^{V-} - \frac{1}{2} (\delta_{\alpha 1} - i\delta_{\alpha 2}) V_v^{U-}. \quad (3.171)$$

Отсюда

$$\langle \pi^\beta(q_2) | [\bar{Q}^\alpha, A_v^{V-}] | K^+(p) \rangle = A + B, \quad (3.172)$$

причем первое слагаемое

$$A \equiv -\frac{1}{2} \delta_{\alpha 3} \langle \pi^\beta | V_v^{V-} | K^+ \rangle = -\frac{1}{2} \delta_{\alpha 3} \delta_{\beta 3} \langle \pi^0 | V_v^{V-} | K^+ \rangle$$

непосредственно выражается через матричный элемент  $K_{l_3}$ -распада (3.167), тогда как второе слагаемое

$$\begin{aligned} B &\equiv -\frac{1}{2} (\delta_{\alpha 1} - i\delta_{\alpha 2}) \langle \pi^\beta | V_v^{U-} | K^+ \rangle = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{\alpha 1} - i\delta_{\alpha 2}) (\delta_{\beta 1} + i\delta_{\beta 2}) \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \pi^+ | V_v^{U-} | K^+ \rangle = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 1} + \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} + i\varepsilon_{\alpha\beta 3}) \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \pi^+ | V_v^{U-} | K^+ \rangle \end{aligned}$$

можно получить из того же самого матричного элемента путем  $SU(3)$ -поворота

$$\langle \pi^+ | V_v^{U-} | K^+ \rangle = -\sqrt{2} \langle \pi^0 | V_v^{V-} | K^+ \rangle. \quad (3.173)$$

Итак, имеем окончательно:

$$\begin{aligned} \langle \pi^\beta(q_2) | [\bar{Q}^\alpha, A_v^{V-}] | K^+(p) \rangle &= -\frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} + i\varepsilon_{\alpha\beta 3}) \langle \pi^0(q_2) | V_v^{V-} | K^+(p) \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} + i\varepsilon_{\alpha\beta 3}) \frac{1}{\sqrt{2}} [(p+q_2)_v f_+ + (p-q_2)_v f_-]. \end{aligned} \quad (3.174)$$

Допустим на время (как сделали Каллан и Трейман [139]), что можно пренебречь последним членом в формуле (3.169). Тогда, пользуясь соотношениями (3.164) и (3.174), легко получить

$$S_3(q_1=0, q_2) = T_3(q_1=0, q_2) = \frac{1}{2f_{\pi^+}} [f_+((p-q_2)^2) + f_-((p-q_2)^2)] \quad (3.175)$$

и

168 2

$$\begin{aligned} S_1(q_1=0, q_2) - S_2(q_1=0, q_2) &= T_1(q_1=0, q_2) - T_2(q_1=0, q_2) = \\ &= \frac{1}{f_{\pi^+}} f_+((p-q_2)^2). \end{aligned} \quad (3.176)$$

Равенства (3.175) и (3.176) и есть искомые соотношения, связывающие между собой формфакторы  $K_{l_4}$ - и  $K_{l_3}$ -распадов (вне поверхности масс).

Рассмотрим сначала распад

$$K^+ \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + l^+ + \nu_l \quad (3.177)$$

и возьмем, как обычно,

$$iT_v^{00} = \frac{1}{m_K} [(q_1+q_2)_v F_1^{00} + (q_1-q_2)_v F_2^{00} + (p-q_1-q_2)_v F_3^{00}]. \quad (3.178)$$

Из определения (3.164) следует

$$F_i^{00} = m_K S_i. \quad (3.179)$$

Поэтому равенства (3.175) и (3.176) ведут к соотношениям

$$\begin{aligned} F_3^{(0)0}(q_1=0, q_2) &= \frac{m_K}{2f_{\pi^+}} (f_+ + f_-), \\ F_1^{(0)0}(q_1=0, q_2) - F_2^{(0)0}(q_1=0, q_2) &= \frac{m_K}{f_{\pi^+}} f_+, \end{aligned} \quad (3.180)$$

полученным ранее Калланом и Трейманом [139]. К сожалению, их невозможно проверить из-за отсутствия экспериментальных данных о распаде (3.177).

Перейдем теперь к распаду

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + l^+ + \nu_l. \quad (3.181)$$

Здесь важно то, какой из двух пионов мы будем считать мягким. Действительно, определив

$$iT_v^{+-} = \frac{1}{m_K} [(q_+ + q_-)_\nu F_1^{+-} + (q_+ - q_-)_\nu F_2^{+-} + (p - q_+ - q_-)_\nu F_3^{+-}] \quad (3.182)$$

и учитывая, что

$$T_v^{+-} = -\frac{1}{2} [T_v^{11} + T_v^{22} + i(T_v^{12} - T_v^{21})], \quad (3.183)$$

имеем

$$F_i^{+-} = -m_K [S_i(q_+, q_-) - T_i(q_+, q_-)]. \quad (3.184)$$

Итак, в пределе при  $q^+ \rightarrow 0$  соотношения (3.175) и (3.176) принимают следующий вид:

$$F_1^{(+)-} = F_2^{(+)-}, \quad (3.185)$$

$$F_3^{(+)-} = 0. \quad (3.185')$$

Если же, считая мягким  $\pi^-$ -мезон, мы возьмем

$$\begin{aligned} iT_v^{-+} &\equiv -\frac{1}{2} i [(T_v^{11} + T_v^{22}) - i(T_v^{12} - T_v^{21})] = \\ &= \frac{1}{m_K} [(q_- + q_+)_\nu F_1^{-+} + (q_- - q_+)_\nu F_2^{-+} + (p - q_- - q_+)_\nu F_3^{-+}], \end{aligned} \quad (3.186)$$

о получим

$$F_i^{-+} = -m_K [S_i(q_-, q_+) + T_i(q_-, q_+)]. \quad (3.187)$$

С учетом соотношений (3.175) и (3.176) при  $q_- \rightarrow 0$  получаем низкоэнергетические пределы

$$F_1^{(-)+} - F_2^{(-)+} = -\frac{2m_K}{f_{\pi^+}} f_+, \quad (3.188)$$

$$F_3^{(-)+} = -\frac{m_K}{f_{\pi^+}} (f_+ + f_-). \quad (3.188')$$

На первый взгляд может показаться, что из соотношений (3.185) и (3.188) следует равенство  $f_+ = f_- = 0$ , по крайней мере при одновременном стремлении  $q_+$  и  $q_-$  к нулю, и тогда наше сравнение лишено всякого интереса. Но, взглянув на требования перекрестной симметрии (3.165) и (3.166), замечаем, что

$$F_1^{+-} = F_1^{-+}, \quad F_2^{+-} = -F_2^{-+}. \quad (3.189)$$

Следовательно, равенства (3.185) и (3.188) вполне могут быть совместными без каких-либо ограничений на  $f_+$ . Далее, если предположить, что форм-факторы  $F_{1,2}$  являются гладкими функциями  $q_1$  и  $q_2$ , то приходим к соотношению

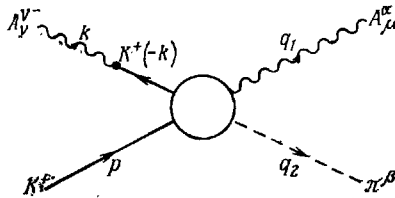
$$|F_1^{+-}| \approx |F_2^{+-}| \approx m_K \left| \frac{f_+}{f_{\pi^+}} \right|, \quad (3.190)$$

допускающему, как мы увидим позднее, экспериментальную проверку.

Значительно большие затруднения вызывают результаты, касающиеся  $F_3$ , поскольку соотношения (3.185') и (3.188') в действительности несовместны с предположением о гладкости  $F_3$ . Именно это обстоятельство обеску-



ражило Каллана и Треймана, так как быстрое изменение формфакторов весьма затруднило бы физическую интерпретацию предыдущих результатов. Каллан и Трейман [139] попытались объяснить быстрое изменение  $F_3$  наличием гипотетического сильного взаимодействия в  $s$ -состоянии двух конечных пионов, проявляющегося в области экстраполяции переменных  $q_{1,2}$ . В действительности же, как показал Вейнберг [142], это кажущееся противоречие объясняется гораздо проще: оно возникает из-за того, что пренебрегают последним членом в соотношении (3.169). Действительно, в пределе при  $q_1 \rightarrow 0$  существует добавочный полюс, порождаемый промежуточным  $K$ -мезоном на линии странного тока, как показано на фиг. 3.11.



Фиг. 3.11

Как нетрудно убедиться, учет этой диаграммы изменяет изложенные выше рассуждения только в том, что касается  $F_3$ , поскольку

$$\{q_1^\mu T_{\nu\mu}^{\alpha\beta}\}_K = \frac{-if_K k_\nu}{m_K^2 - k^2} \langle \pi^\beta(q_2) K^+(-k) | A_\mu^\alpha | K^+(p) \rangle q_1^\mu. \quad (3.191)$$

В рамках рассматриваемой схемы «одного мягкого пиона» вычисление этой величины оказывается весьма тонким делом. Но действительно важно лишь то, что предыдущие результаты для  $F_1$  и  $F_2$  не изменяются при учете последнего члена в соотношении (3.169).

**Матричный элемент**

$$\langle \pi^\beta(q_2) K^+(-k) | A_\mu^\alpha | K^+(p) \rangle \equiv \tau_\mu^{\beta\alpha} \quad (3.192)$$

можно вычислить обычным образом, переходя к низкоэнергетическому пределу для  $\pi^\beta(q_2 \rightarrow 0)$ . Правда, тогда мы придем к пределу двух мягких пионов и результат опять будет зависеть от порядка выполнения предельных переходов. Чтобы справиться с этой трудностью, нужно быть очень аккуратным и удерживать все члены до первого порядка по  $q_{1,2}$ .

Чтобы вычислить  $\tau_\mu^{\beta\alpha}$  в соотношении (3.192), введем

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu}^{\beta\alpha} = i \int d^4x \exp(iq_2x) \langle K^+(-k) | T(A_\lambda^\beta(x) A_\mu^\alpha(0)) | K^+(p) \rangle$$

и еще раз воспользуемся основной формулой (3.121), которая дает

$$if_\pi \tau_\mu^{\beta\alpha} \xrightarrow{q_2 \rightarrow 0} \langle K^+(-k) | \bar{Q}^\beta, A_\mu^\alpha | K^+(p) \rangle = \\ = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \langle K^+(-k) | V_\mu^\gamma | K^+(p) \rangle = \frac{1}{2} i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} (p-k)_\mu, \quad (3.193)$$

поскольку теперь в пределе при  $q_2 \rightarrow 0$  нет других полюсных вкладов. Подставляя в (3.191), имеем

$$\{q_1^\mu T_{\nu\mu}^{\alpha\beta}\}_K \xrightarrow{q_2 \rightarrow 0} = \frac{i}{2} \frac{f_K}{f_\pi} \frac{pq_1}{p(q_1+q_k)} \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} k_\nu. \quad (3.194)$$

Поскольку мы собираемся переходить к низкоэнергетическому пределу по обоим пионам, их следует трактовать как равноправные и учитывать слагаемое, аналогичное (3.194), которое возникнет, если мы перейдем сначала к пределу при  $q_1 \rightarrow 0$  и затем при  $q_2 \rightarrow 0$ . Таким образом, член,

отброшенный в формуле (3.169), оказывается равным

$$-\frac{i}{2} \frac{f_K}{f_\pi} \frac{p(q_1 - q_2)}{p(q_1 + q_2)} e^{\beta \alpha_3} k_\nu.$$

Поэтому он дает вклад лишь в амплитуду  $T_3$ , для которой получаем

$$\begin{aligned} T_3(q_1, q_2) &\underset{q_1, q_2 \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2f_\pi^+} [f_+(m_K^2) + f_-(m_K^2)] - \frac{f_K}{2f_\pi^2} \frac{p(q_1 - q_2)}{p(q_1 + q_2)} = \\ &= \frac{f_K}{2f_\pi^2} \left[ 1 - 2 \frac{p(q_1 - q_2)}{p(q_1 + q_2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.195)$$

Последнее равенство получено с учетом соотношения КТМОП (3.168).

Формула (3.195) показывает, что, как и предполагали Каллан и Трейман,  $T_3$ , а следовательно, и  $F_3$  являются быстро меняющимися функциями  $q_1$  и  $q_2$ . Но это не имеет ничего общего с сильным лл-взаимодействием в  $s$ -состоянии. Вспоминая соотношение (3.187), имеем

$$F_3^+ = -m_K [S_3(q_-, q_+) + T_3(q_-, q_+)], \quad (3.196)$$

и, так как в силу соотношения КТМОП

$$S_3(q_-, q_+) \underset{q_-, q_+ \rightarrow 0}{\sim} \frac{f_K}{2f_\pi^+}, \quad (3.197)$$

получаем окончательно

$$F_3^+(q_-, q_+) \underset{\substack{q_- \rightarrow 0 \\ q_+ \rightarrow 0}}{\sim} -m_K \frac{f_K}{f_\pi^2} \left[ 1 - \frac{p(q_- - q_+)}{p(q_- + q_+)} \right]. \quad (3.198)$$

Отсюда

$$F_3^{(+)}(q_-, q_+ = 0) = 0 \quad (3.199)$$

в соответствии с результатом Каллана и Треймана и

$$F_3^{(+)}(q_- = 0, q_+) = -2m_K \frac{f_K}{f_\pi^2}. \quad (3.200)$$

Поскольку добавочное слагаемое (3.191) не дает вклада в  $F_1$  и  $F_2$  (а также в  $F_3^{(0)}$ ), в предыдущих соотношениях можно прямо положить  $q_2$  равным нулю и получить теоретическое выражение для формфакторов  $K_{l_4}$ -распада в (нефизической) точке  $q_1 = q_2 = 0$ . Из (3.180) имеем

$$F_3^{(00)} = \frac{m_K f_K}{2f_\pi^2} \quad (3.201)$$

в силу соотношения КТМОП и

$$F_1^{(00)} = m_K \frac{f_+(m_K^2)}{f_\pi^+}, \quad (3.202)$$

поскольку  $F_2^{(00)} = 0$  вследствие перекрестной симметрии, а из (3.185) и (3.188) получаем

$$|F_1^{(+)}| = |F_2^{(+)}| = \left| \frac{m_K}{f_\pi^+} f_+(m_K^2) \right|. \quad (3.203)$$

Последние соотношения лучше всего подходят для сравнения с экспериментальными данными. Дело в том, что формфактор  $F_3$  входит в выражение для ширины  $K_{l_4}$ -распада с кинематическим коэффициентом, пропорциональным массе лептона, и потому дает пренебрежимо малый вклад. Экспериментальную информацию об этом формфакторе получить очень трудно.

Единственная возможность сравнить равенства (3.203) с экспериментом — это предположить, что  $F_1$  и  $F_2$  — постоянные. В самом деле, поскольку

$$F_i = F_i(q_1^2, q_2^2, k^2, pq_1, pq_2),$$

равенства (3.203) относятся к

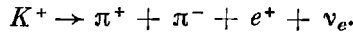
$$F_i(0, 0, m_K^2, 0, 0),$$

т. е. каждая переменная имеет нефизическое значение. Поэтому не очень ясно, как именно следует проводить экстраполяцию, необходимую для физической интерпретации результатов. Проще всего предположить, что  $F_1$  и  $F_2$  аппроксимируются постоянными, во всяком случае в области экстраполяции. Это, очевидно, приемлемо лишь в отсутствие какого-либо сильного лл-взаимодействия в состоянии  $J = I = 0$  в области энергий двух пионов ( $4m_\pi^2 \leq s_{2\pi} \leq 7,5 m_\pi^2$ ). Если окажется, что предположение о постоянстве  $F_1, F_2$  согласуется с экспериментом, то это будет подтверждением сделанного независимо Вейнбергом [132] вывода о малости длин лл-рассеяния. Его приближенные оценки

$$a_0 \approx \frac{7}{4} L \approx 0,20 m_\pi^{-1}, \quad a_2 \approx -\frac{1}{2} L \approx -0,06 m_\pi^{-1}$$

меньше любых полученных ранее.

Итак, допустим, что соотношение (3.203) относится к физическим значениям  $F_{1,2}$ . Для проверки его рассмотрим процесс



При постоянных  $F_1$  и  $F_2$  вероятность распада дается выражением [69, стр. 496]

$$\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu_e) = \sin^2 \theta [1,59 (F_1^{+-})^2 + 0,31 (F_2^{+-})^2] \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}. \quad (3.204)$$

Используя (3.203), имеем

$$\Gamma(K_{e4}^+) \approx \sin^2 \theta \left[ \frac{m_K}{f_{\pi^+}} f_+(m_K^2) \right]^2 \cdot 1,9 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}. \quad (3.205)$$

Для прикидки возьмем, за наименее лучшее,  $f_+(m_K^2) \approx f_+(0) \approx 1$ , что соответствует пределу точной  $SU(3)$ -симметрии. Тогда

$$\Gamma(K_{e4}^+) \approx 1,6 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1},$$

а экспериментальное значение [69, стр. 496] таково:

$$\Gamma(K_{e4}^+) = (2,9 \pm 0,6) \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.$$

Далее, из соотношения (3.203) следует, что

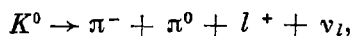
$$\left| \frac{F_1^{+-}}{F_2^{+-}} \right| = 1. \quad (3.206)$$

Экспериментальное же значение [69, стр. 496] левой части равенства (усредненное по пионному спектру) таково:

$$\left| \left\langle \frac{F_1^{+-}}{F_2^{+-}} \right\rangle \right| = 0,9 \pm 0,2. \quad (3.207)$$

Результат недвусмысленно свидетельствует в пользу сделанных предположений.

До сих пор мы все время говорили о распаде  $K^+$ -мезона, поскольку экспериментальные данные имеются лишь для этого распада. Для полноты изложения приведем аналогичные теоретические данные для распада  $K^0$ -мезона. Рассмотрим процесс



получим (обозначения самоочевидны):

$$F_1^{(-0)} = 0, \quad F_2^{(-0)} = \frac{\sqrt{2} m_K f_+(m_K^2)}{f_{\pi^+}}, \quad (3.208)$$

$$F_3^{(-0)} \underset{\substack{q \rightarrow 0 \\ q_0 \rightarrow 0}}{\sim} \frac{\sqrt{2} m_K f_K}{f_{\pi^+}^2} \frac{p(q_- - q_0)}{p(q_- + q_0)}.$$

В заключение параграфа отметим, что при исследовании  $K_{14}$ -распада мы приходим в конечном итоге к такой конфигурации, когда оба пиона считаются мягкими. Поэтому представляется целесообразным разработать метод, при котором оба пиона трактовались бы одинаковым образом. Впервые это сделал Вейнберг [142] именно для описания  $K_{14}$ -распада. При таком подходе в качестве исходной точки берется хронологическое произведение трех аксиальных токов (два из них соответствуют мягким пионам, а третий — лептонной паре). Преимущество метода в том, что становится более прозрачным переход к низкоэнергетическому пределу. Недостатком же является значительное усложнение выкладок. Метод Вейнберга мы кратко изложим в следующем параграфе.

### § 6. Два мягких пиона во внешнем поле

Как уже говорилось, при изучении  $K_{14}$ -распада в рамках алгебры токов было бы желательным иметь метод, при котором два мягких пиона рассматривались бы симметрично. В равной степени это относится, например, к распаду  $K \rightarrow 2\pi$  (последовательный подход, опирающийся на алгебру токов и переход к пределу мягких пионов, требует симметричной трактовки обоих мягких пионов).

Мы изложим ниже общий метод, пригодный для анализа процессов с двумя мягкими пионами во внешнем «поле»  $\Lambda(x)$ . Это будет по существу прямое обобщение метода, изложенного в § 5.

Рассмотрим величину

$$T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = i \int d^4x d^4y \exp(iq_2x) \exp(iq_1y) \langle B | T(A_\nu^\beta(x) A_\mu^\alpha(y) \Lambda(0)) | A \rangle, \quad (3.209)$$

где, как обычно,  $A_\nu^\beta$  и  $A_\mu^\alpha$  — аксиальные токи с квантовыми числами пиона, а  $|A\rangle$  и  $|B\rangle$  — адронные состояния.

Свертывая обычным образом, получаем выражение

$$q_1^\mu q_2^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\beta\alpha\nu} (q_2 - q_1)^\mu T_\mu^\nu + \frac{1}{2} i \langle B | \Lambda^{\beta\alpha} + \Lambda^{\alpha\beta} | A \rangle, \quad (3.210)$$

явно симметричное относительно перестановки  $(\alpha, q_1) \leftrightarrow (\beta, q_2)$ . В равенстве (3.210) использованы следующие обозначения:

$$T_\mu^\nu = i \int d^4x \exp[i(q_1 + q_2)x] \langle B | T(V_\mu^\nu(x) \Lambda(0)) | A \rangle, \quad (3.211)$$

где  $V_\mu^\nu$  — сохраняющийся изовекторный ток;  $\Lambda^{\alpha\beta}$  в интересующем нас случае  $q_1 = q_2 = 0$  есть

$$\Lambda^{\alpha\beta} = -[\bar{Q}^\alpha(0), [\bar{Q}^\beta(0), \Lambda(0)]]. \quad (3.212)$$

Переходя в формуле (3.210) к пределу при  $q_1, q_2 \rightarrow 0$  и выделяя два пионных полюса, находим

$$T^{\beta\alpha} = \frac{1}{2f_\pi^2} \langle B | \Lambda^{\beta\alpha} + \Lambda^{\alpha\beta} | A \rangle + \frac{1}{2f_\pi^2} \lim_{q_1, q_2 \rightarrow 0} \varepsilon^{\beta\alpha\nu} (q_2 - q_1)^\mu T_\mu^\nu - \frac{1}{f_\pi^2} \lim_{q_1, q_2 \rightarrow 0} \{q_1^\mu q_2^\nu \bar{T}_{\nu\mu}^{\beta\alpha}\}, \quad (3.213)$$

где, как обычно,  $T^{\beta\alpha}$  — амплитуда процесса с двумя мягкими пионами

$$(\Lambda) + A \rightarrow B + \pi^\alpha + \pi^\beta, \quad (3.214)$$

а  $\bar{T}_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$  в пределе при  $q_1, q_2 \rightarrow 0$  содержит все возможные полюсные вклады, кроме собственно пионных.

Соотношение (3.213) — это основная формула, которой мы будем пользоваться в любой задаче с двумя симметрично трактуемыми мягкими пио-

нами. Как уже отмечалось, она пригодна и для анализа  $K_{l4}$ -распада. В данном случае ввиду специфики кинематики необходимо соблюдать особую осторожность при переходе к пределу и удерживать все члены вплоть до первого порядка по  $q_1, q_2$ . Это должно быть ясно из сказанного в предыдущем параграфе. Подробные вычисления мы приводить не будем, поскольку результаты в точности совпадают с полученными ранее.

Одно из специальных приложений соотношения (3.213) будет рассмотрено в § 7, п. 2,б при анализе распада  $K \rightarrow 2\pi$ .

### § 7. Нелептонные распады гиперонов<sup>1)</sup>

Наш анализ слабых взаимодействий ограничивался лептон-лептонными и адрон-лептонными процессами. Но возможны, конечно, и странные распады адронов на адроны, и еще неизвестно, имеем ли мы право обобщить на этот случай представление о ток-токовой структуре гамильтониана  $\mathcal{H}_{\text{слаб}}$  слабого взаимодействия. Было бы весьма заманчиво ввести единый слабый ток

$$\psi_{\mu} = l_{\mu} + J_{\mu}^{+}, \quad (3.215)$$

равный сумме лептонного тока  $l_{\mu}$  [формула (2.40)] и адронного тока

$$J_{\mu}^{+} = \cos \theta J_{\mu}^{I+} + \sin \theta J_{\mu}^{V+} \quad (3.216)$$

[формула (2.213)], и постулировать следующее простое выражение для плотности гамильтониана слабого взаимодействия:

$$\mathcal{H}_{\text{слаб}} = \frac{G}{\sqrt{2}} \psi_{\mu}^{+} \psi^{\mu}. \quad (3.217)$$

В выражении (3.217) появляется новое слагаемое

$$\mathcal{H}_{\text{слаб}}^{\text{нелепт}} = \frac{G}{\sqrt{2}} \{J_{\mu}^{-}, J^{\mu+}\}, \quad (3.218)$$

соответствующее, как предполагается в рамках данной схемы, нелептонным слабым процессам. Ясно, что анализ этого слагаемого будет значительно сложнее, ибо оно нелинейно по адронному току.

Опытные данные<sup>2)</sup> по нелептонным распадам адронов довольно определенно свидетельствуют:

- 1) об отсутствии распадов с  $\Delta Y = 0$  и  $\Delta Y = 2$ ;
- 2) о практически полном отсутствии распадов с  $\Delta I = 3/2$ ;
- 3) о почти всеобщей справедливости правил отбора  $\Delta Y = 1$  и  $\Delta I = 1/2$ .

Но нелептонный слабый гамильтониан (3.218) преобразуется по приводимому представлению группы  $SU(3)$ :

$$\mathcal{H}_{\text{слаб}}^{\text{нелепт}} \sim 1 \oplus 8_s \oplus 27.$$

Скалярная часть, очевидно, ответственна лишь за нелептонные слабые взаимодействия с сохранением странности, для которых нет экспериментальных данных, так что оставим ее пока в стороне.

Мы будем рассматривать лишь не сохраняющую странность часть гамильтониана  $\mathcal{H}_{\text{слаб}}^{\text{нелепт}}$  и писать просто

$$\mathcal{H}^{\text{нелепт}} = \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \theta \sin \theta (\{J_{\mu}^{I-}, J_{V+}^{\mu}\} + \{J_{\mu}^{I+}, J_{V-}^{\mu}\}). \quad (3.219)$$

Гамильтониан  $\mathcal{H}^{\text{нелепт}}$  содержит октет и 27-plet. Практически полное отсутствие переходов с  $\Delta I = 3/2$  говорит о существовании какого-то динамического механизма (за который ответственны сильные взаимодействия?),

<sup>1)</sup> Подробную библиографию можно найти в работах [69, 143, 144].

<sup>2)</sup> См., например, [69, 143].

приводящего к относительному усилению вклада октетного слагаемого по сравнению с 27-pletом. Далее, нелептонные слабые распады характеризуются, по-видимому, константой связи порядка  $G/\sqrt{2}$ , а не  $G/\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta$ , так что подобное усиление необходимо также и для того, чтобы скомпенсировать подавляющий множитель  $\sin \theta \cos \theta$ , который неизбежно появляется в формуле (3.219), если исходить из предположения, что все слабые процессы описываются простейшим универсальным гамильтонианом (3.217).

Эти вопросы пока не имеют удовлетворительного теоретического решения, и саму структуру гамильтониана нелептонного слабого взаимодействия еще можно считать спорной.

Здесь мы хотим лишь схематически показать, каким образом слабый гамильтониан (3.219) в сочетании с алгеброй токов и гипотезой ЧСАТ позволяет добиться простой параметризации нелептонных распадов адронов и воспроизвести некоторые закономерности, связанные с правилом  $\Delta I = 1/2$ .

### 1. Нелептонные распады гиперонов

Сначала кратко остановимся на нелептонных распадах гиперонов. Из общих соображений можно сказать, что амплитуда перехода

$$Y \rightarrow Y' + \pi$$

должна иметь следующую структуру:

$$i \langle Y' \pi | \mathcal{H}_{\text{слаб}} | Y \rangle = \bar{u}' (A + \gamma_5 B) u, \quad (3.220)$$

где  $A$  соответствует, очевидно, не сохраняющему четность распаду в  $s$ -состояние, а  $B$  — сохраняющему четность распаду в  $p$ -состояние.

Поскольку мы собираемся переходить к пределу мягких пионов ( $4$ -импульс рождающегося пиона  $q_\mu \rightarrow 0$ ), ясно, что простейшие результаты получаются из меняющей четность части взаимодействия  $\mathcal{H}^{\text{чет. несохр}}$ , рассмотрением которой мы в дальнейшем и ограничимся. Для полноты изложения напомним определения

$$\mathcal{H}^{\text{чет. несохр}} = -\frac{G}{2\sqrt{2}} \sin 2\theta (\{A_\mu^{I+}, V_\mu^{I-}\} + \{A_\mu^{V+}, V_\mu^{I-}\}) + \text{э. с.}, \quad (3.221)$$

$$\mathcal{H}^{\text{чет. сохр}} = \frac{G}{2\sqrt{2}} \sin 2\theta (\{V_\mu^{I+}, V_\mu^{I-}\} + \{A_\mu^{I+}, A_\mu^{I-}\}) + \text{э. с.} \quad (3.222)$$

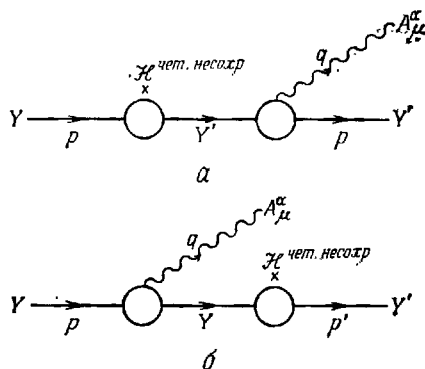
Теперь мы можем применить к амплитуде

$$T_\mu^\alpha = i \int d^4x \exp(iqx) \langle Y' | T(A_\mu^\alpha(x) \mathcal{H}^{\text{чет. несохр}}(0)) | Y \rangle \quad (3.223)$$

общую теорему о мягких пионах (3.121), которая в данном случае выглядит так:

$$\{f_\pi T^{\text{чет. несохр}}(Y \rightarrow Y' + \pi)\}_{q_\mu=0} = \langle Y' | [\bar{Q}^\alpha, \mathcal{H}^{\text{чет. несохр}}] | Y \rangle + \lim_{q_\mu \rightarrow 0} q^\mu \bar{T}_\mu^\alpha. \quad (3.224)$$

Разберемся сначала с возможными полюсными вкладами в последнем члене. Как и раньше, такие вклады могут возникать из диаграмм типа тех, которые показаны на фиг. 3.12. Например, из диаграммы *a* имеем (пренебрегая



Фиг. 3.12

на время изоспиновой зависимостью):

$$\{q_\mu \bar{T}_\mu\}_{(a)} \underset{q_\mu \rightarrow 0}{\sim} r_{y'y'}^A a_{y'y'} (m_{y'} - m_y) \frac{\bar{u}' \gamma q u}{-2p'q}. \quad (3.225)$$

Мы воспользовались следующими определениями:

$$\langle Y' | A_\mu | Y' \rangle \underset{q_\mu \rightarrow 0}{\sim} r_{y'y'}^A \bar{u}' \gamma_\mu \gamma_5 u',$$

$$\langle Y' | \mathcal{H}^{\text{чет. несохр.}} | Y \rangle = a_{y'y'} \bar{u}' \gamma_5 u.$$

Таким образом, предел конечен, но по порядку величины равен нарушению  $SU(3)$ -симметрии, на что ясно указывает множитель  $m_{y'} - m_y$ . Как обычно, мы будем пренебрегать им. Отметим также, что предел при  $q_\mu \rightarrow 0$  требует равенства  $m_{y'} = m_y$ , если только мы не отказываемся от закона сохранения 4-импульса  $p = p' + q$ . Поэтому выражения, подобные (3.225), в действительности будут давать вклад лишь в низкоэнергетические теоремы более высокого порядка (по  $q_\mu$ ).

Если сравнить данное приложение низкоэнергетической теории с рассмотренными ранее ( $\pi N$ -рассеяние или фоторождение пионов), то из сказанного выше явствует, что экстраполяция низкоэнергетических соотношений в физическую область потребует теперь поправок не только на массу пиона, но и на нарушение  $SU(3)$ -симметрии. Таким образом, здесь мы сталкиваемся со значительно более сложной проблемой.

Чтобы вывести низкоэнергетические соотношения из равенства (3.224), нам нужно теперь вычислить одновременной коммутатор в его правой части. Это легко сделать, используя коммутационные соотношения алгебры токов [равенства (2.218)] и выражение (3.221) для гамильтониана  $\mathcal{H}^{\text{чет. несохр.}}$ . В итоге матричные элементы  $[\bar{Q}^a, \mathcal{H}^{\text{чет. несохр.}}]$  будут сведены к матричным элементам  $\mathcal{H}^{\text{чет. сохр.}}$ . Для различных конкретных нелептонных распадов гиперонов мы получим из (3.224) следующие результаты <sup>1)</sup>:

$$f_{\pi A} (\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0) = -\langle p | [\bar{Q}^3, \mathcal{H}^{\text{чет. несохр.}}] | \Sigma^+ \rangle = \frac{1}{2} \langle p | \mathcal{H}^{\text{чет. сохр.}} | \Sigma^+ \rangle,$$

$$f_{\pi A} (\Lambda \rightarrow n\pi^0) = -\langle n | [\bar{Q}^3, \mathcal{H}^{\text{чет. несохр.}}] | \Lambda \rangle = \frac{1}{2} \langle n | \mathcal{H}^{\text{чет. сохр.}} | \Lambda \rangle,$$

$$f_{\pi A} (\Xi^0 \rightarrow \Lambda\pi^0) = -\langle \Lambda | [\bar{Q}^3, \mathcal{H}^{\text{чет. несохр.}}] | \Xi^0 \rangle = \frac{1}{2} \langle \Lambda | \mathcal{H}^{\text{чет. сохр.}} | \Xi^0 \rangle,$$

$$\sqrt{2} f_{\pi A} (\Sigma^- \rightarrow n\pi^-) = -\langle n | [\bar{Q}^4, \mathcal{H}^{\text{чет. несохр.}}] | \Sigma^- \rangle = \sqrt{2} \langle n | \mathcal{H}^{\text{чет. сохр.}} | \Sigma^0 \rangle,$$

$$\sqrt{2} f_{\pi A} (\Lambda \rightarrow p\pi^-) = -\langle p | [\bar{Q}^4, \mathcal{H}^{\text{чет. несохр.}}] | \Lambda \rangle = -\langle n | \mathcal{H}^{\text{чет. сохр.}} | \Lambda \rangle, \quad (3.226)$$

$$\sqrt{2} f_{\pi A} (\Xi^- \rightarrow \Lambda\pi^-) = -\langle \Lambda | [\bar{Q}^4, \mathcal{H}^{\text{чет. несохр.}}] | \Xi^- \rangle = \langle \Lambda | \mathcal{H}^{\text{чет. сохр.}} | \Xi^0 \rangle,$$

$$\sqrt{2} f_{\pi A} (\Sigma^+ \rightarrow p\pi^+) = \langle p | [\bar{Q}^1, \mathcal{H}^{\text{чет. несохр.}}] | \Sigma^+ \rangle =$$

$$= \langle p | \mathcal{H}^{\text{чет. сохр.}} | \Sigma^+ \rangle - \sqrt{2} \langle n | \mathcal{H}^{\text{чет. сохр.}} | \Sigma^0 \rangle.$$

Здесь семь амплитуд выражаются через четыре скалярные вершины; следовательно, имеем три уравнения связи:

$$A (\Lambda \rightarrow p\pi^-) + \sqrt{2} A (\Lambda \rightarrow n\pi^0) = 0, \quad (3.227)$$

$$A (\Xi^- \rightarrow \Lambda\pi^-) - \sqrt{2} A (\Xi^0 \rightarrow \Lambda\pi^0) = 0, \quad (3.228)$$

$$A (\Sigma^- \rightarrow n\pi^-) + A (\Sigma^+ \rightarrow p\pi^+) = \sqrt{2} A (\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0). \quad (3.229)$$

<sup>1)</sup> Формулы взяты из статьи Бладмана [143], в которой дается превосходный обзор по вопросу всех нелептонных слабых процессов.

Два первых соотношения замечательно хорошо согласуются с правилом  $\Delta I = 1/2$ . Это очевидно: мы рассматриваем только  $s$ -волновую часть амплитуд распадов, так что  $\langle N\pi | \mathcal{H}^{\text{чет. несох}} | \Xi \rangle$  и  $\langle N\pi | \mathcal{H}^{\text{чет. несох}} | \Lambda \rangle$  выражаются теперь через  $\langle \Lambda | \mathcal{H}^{\text{чет. сох}} | \Xi \rangle$  и  $\langle N | \mathcal{H}^{\text{чет. сох}} | \Lambda \rangle$ , откуда ясно, что мы имеем дело лишь с переходами, для которых  $\Delta I = 1/2$ .

Что касается соотношения (3.229), то его можно сравнить с соотношением, следующим из правила  $\Delta I = 1/2$ ,

$$A(\Sigma^- \rightarrow n\pi^-) - A(\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+) = \sqrt{2}A(\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0). \quad (3.230)$$

Различие лишь в знаке перед  $A(\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+)$ . Поскольку оно ненаблюдаемо, в настоящее время невозможно сделать выбор между соотношениями (3.229) и (3.230).

В литературе довольно много внимания уделяется вычислениям  $p$ -волн и более детальным моделям для  $\mathcal{H}^{\text{слаб}}$ , но эти вопросы выходят за рамки нашей книги.

## 2. Нелептонные распады $K$ -мезонов <sup>1)</sup>

Напомним сначала феноменологию нелептонных распадов  $K$ -мезонов. Главной особенностью таких распадов является существование (приближенного) правила отбора  $\Delta I = 1/2$ , и поэтому интересно выяснить, способна ли алгебра токов его предсказать. Этот вопрос будет рассмотрен в следующих разделах.

Приведем теперь основные данные о распадах  $K \rightarrow 2\pi$  и  $K \rightarrow 3\pi$  <sup>2)</sup>.

### а. Распад $K \rightarrow 2\pi$

В силу требований статистики Бозе конечные пионы должны находиться в четном изоспиновом состоянии: разрешены лишь значения  $I = 0$  и  $I = 2$ . Но если справедливо правило  $\Delta I = 1/2$ , то состояние с  $I = 2$  исключается, вследствие чего распад  $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$  оказывается запрещенным. Найденное экспериментально отношение

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0)}{\Gamma(K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)} \approx \frac{1}{700} \quad (3.231)$$

слишком велико, чтобы распад  $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$  можно было приписать электромагнитному взаимодействию. Действительно, тогда отношение (3.231) было бы порядка  $(\alpha/\pi)^2 \approx (1/500)^2$ . Величина же этого отношения, представленная в формуле (3.231), свидетельствует, по-видимому, о присутствии (подавленных) переходов с  $\Delta I = 3/2$ . Далее, правило  $\Delta I = 1/2$  дает

$$\frac{\Gamma(K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_S^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)} = 2, \quad (3.232)$$

что в общем согласуется с экспериментом (хотя присутствие малой примеси переходов с  $\Delta I = 3/2$  не исключается).

Как мы увидим, алгебра токов (плюс теория мягких пионов) правильно предсказывает основные закономерности распада  $K \rightarrow 2\pi$ , соответствующие правилу  $\Delta I = 1/2$ , но не позволяет количественно вычислить отношение (3.231).

<sup>1)</sup> В нашей элементарной трактовке мы будем полностью пренебрегать очень важной проблемой  $CP$ -несохранения в распаде  $K \rightarrow 2\pi$ .

<sup>2)</sup> Более подробные данные, как экспериментальные, так и теоретические, о распадах  $K$ -мезонов можно найти в работе [69]. Все экспериментальные значения, которыми приводим, взяты из этой работы.



б. Распад  $K \rightarrow 3\pi$ 

В этом случае, если исходить из правила  $\Delta I = 1/2$ , то единственным разрешенным состоянием трех конечных пионов будет состояние с  $I = 1$ <sup>1)</sup>. Самое общее выражение для изовекторной амплитуды  $A$ , описывающей все распады  $K \rightarrow 3\pi$ , должно иметь следующий вид:

$$A(s_1, s_2, s_3) = \sum_{\text{цикл}} (\pi_1 \pi_2) \pi_3 f(s_1, s_2; s_3), \quad (3.233)$$

где сумма берется по всем циклическим перестановкам индексов 1, 2, 3, а  $\pi_i$  — изоспиновые волновые функции пионов. В соответствии с требованиями статистики Бозе функция  $f$  симметрична относительно перестановки первых двух аргументов:

$$f(s_i, s_j; s_k) = f(s_j, s_i; s_k). \quad (3.234)$$

Кинематические переменные  $s_i$  определены следующим образом:

$$s_i = (p_K - p_{\pi i})^2. \quad (3.235)$$

Из (3.233) находим амплитуды различных распадов  $K \rightarrow 3\pi$ :

$$A(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} [f(s_-, s_+; s'_+) + f(s_-, s'_+; s_+)],$$

$$A(K^+ \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^+) = \frac{1}{\sqrt{2}} f(s_0, s'_0; s_+), \quad (3.236)$$

$$A(K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0) = -f(s_-, s_+; s_0),$$

$$A(K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0) = -\frac{1}{\sqrt{6}} \{f(s_0, s'_0; s''_0) + f(s_0, s''_0; s'_0) + f(s'_0, s'_0; s_0)\}.$$

Отсюда можно найти вероятности различных распадов. В действительности мы должны сравнивать не сами вероятности  $\Gamma$ , а их приведенные значения  $\Gamma^*$  (отношения вероятностей  $\Gamma$  к соответствующим фазовым объемам), так как разности масс пионов и каонов нельзя считать пренебрежимо малыми по сравнению с характерными энергиями распадов  $K \rightarrow 3\pi$ . Из (3.236) имеем

$$\frac{\Gamma^*(K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0)}{\Gamma^*(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0)} = 2, \quad (3.237)$$

$$\frac{\Gamma^*(K_L^0 \rightarrow 3\pi^0)}{\Gamma^*(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-) - \Gamma^*(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^0)} = 1. \quad (3.238)$$

Поскольку энергии, выделяющиеся в распадах  $K \rightarrow 3\pi$ , малы, для амплитуд  $A$  обычно используется линейное приближение:

$$A(s_1, s_2; s_3) = a \left\{ 1 - \frac{\sigma}{m_\pi^2} (s_3 - s_0) \right\}, \quad (3.239)$$

где

$$s_0 \equiv \frac{1}{3} (s_1 + s_2 + s_3) = m_\pi^2 + \frac{1}{3} m_K^2. \quad (3.240)$$

В данном приближении имеем соотношение

$$|A|^2 = a^2 \left[ 1 - \frac{2\sigma}{m_\pi^2} (s_3 - s_0) \right], \quad (3.241)$$

из которого следует линейный по энергии пионный спектр (что подтверждается экспериментально).

<sup>1)</sup> Для распадов заряженных  $K$ -мезонов отсутствие состояния с  $I = 0$  очевидно, а для нейтральных  $K$ -мезонов это следует из  $CP$ -инвариантности.

При данной параметризации можно найти соотношения между значениями  $a$  и наклонами  $\sigma$ , а именно:

$$a(+ + -) = 2a(0 0 +), \quad (3.242)$$

$$a(0 0 0) = \sqrt{\frac{3}{2}} a(+ - 0),$$

$$\sigma(0 0 +) = -2\sigma(+ + -), \quad (3.243)$$

$$\sigma(+ - 0) = \sigma(0 0 +). \quad (3.244)$$

Из (3.242) следует:

$$\frac{\Gamma^*(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-)}{\Gamma^*(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0\pi^0)} = 4, \quad (3.245)$$

$$\frac{\Gamma^*(K_L^0 \rightarrow 3\pi^0)}{\Gamma^*(K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0)} = \frac{3}{2}.$$

В действительности можно показать, что соотношения (3.245), как и любое из предыдущих для величин, относящихся к распаду одного и того же каона, являются всего лишь следствиями изовекторного характера ( $I = 1$ ) конечного состояния пионов, которое не запрещено и слабым гамильтонианом с правилом отбора  $\Delta I = 3/2$ . Соотношения же (3.237), (3.238) и (3.244) весьма чувствительны к нарушению правила  $\Delta I = 1/2$ . Предсказания первого типа согласуются с экспериментом очень хорошо. Что касается проверки правила  $\Delta I = 1/2$ , то экспериментальные данные таковы:

$$\frac{\Gamma^*(K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0)}{\Gamma^*(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0\pi^0)} = 1,70 \pm 0,08, \quad (3.237')$$

$$\frac{\Gamma^*(K_L^0 \rightarrow 3\pi^0)}{\Gamma^*(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-) - \Gamma^*(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0\pi^0)} = 0,95 \pm 0,05, \quad (3.238')$$

$$\sigma(+ - 0) = -0,24 \pm 0,02, \quad (3.244')$$

$$\sigma(0 0 +) = -0,25 \pm 0,02.$$

Согласие нельзя назвать замечательным; в частности, значение (3.237') свидетельствует, по-видимому, о присутствии небольшой, но вполне заметной примеси переходов с  $\Delta I = 3/2$ .

Наш краткий обзор феноменологических закономерностей распадов  $K \rightarrow 2\pi$  и  $K \rightarrow 3\pi$  мы закончим выводом, что современные экспериментальные данные определенно подтверждают правило  $\Delta I = 1/2$ , хотя и указывают на присутствие примеси порядка нескольких процентов амплитуд с  $\Delta I = 3/2$ .

Перейдем теперь к анализу распадов  $K \rightarrow 2\pi$  и  $K \rightarrow 3\pi$  методами алгебры токов в пределе мягких пионов. Мы увидим, что с помощью алгебры токов можно объяснить характерное для этих распадов фундаментальное правило  $\Delta I = 1/2$ .

### 1. Распад $K \rightarrow 3\pi$ и распад $K \rightarrow 2\pi$

В этом разделе мы рассмотрим распад  $K \rightarrow 3\pi$ , а в следующем — распад  $K \rightarrow 2\pi$ . Такой порядок объясняется двумя соображениями.

Во-первых, кинематика распада  $K \rightarrow 3\pi$  такова, что можно переходить к низкоэнергетическому пределу только для одного из трех пионов и потому можно воспользоваться более простым методом § 5. Прямое же применение основной формулы (3.121) дает нам соотношение между амплитудами распадов  $K \rightarrow 3\pi$  и  $K \rightarrow 2\pi$ , причем амплитуда последнего будет реальной физической амплитудой. Как следствие этого из справедливости правила  $\Delta I = 1/2$  для распада  $K \rightarrow 2\pi$  вытекает его справедливость и для распада  $K \rightarrow 3\pi$ , во всяком случае в пределе одного мягкого пиона.

Во-вторых, при распаде  $K \rightarrow 3\pi$  конечная энергия пионов мала, так что приближение мягких пионов представляется особенно логичным. Переходя в амплитуде распада  $K \rightarrow 3\pi$  к низкоэнергетическому пределу по одному из пионов, мы получим ее значения в трех точках на плоскости Далица, соответствующих нулевой энергии трех пионов. Эти три точки лежат, конечно, вне физической области и даже довольно далеко от нее. Поэтому нам, как обычно, необходим некоторый метод аналитического продолжения, чтобы перейти от низкоэнергетических пределов к физической области. Но в данном случае мы имеем дело с трехчастичным распадом и экспериментально наблюдаемый трехпионный спектр свидетельствует о (приблизительно) линейном характере зависимости амплитуды  $A_{3\pi}$  от энергий пионов с простой параметризацией (3.239).

Приступая к вычислениям, прежде всего напомним, что в распад  $K \rightarrow 3\pi$  дает вклад лишь сохраняющая четность часть  $\mathcal{H}^{\text{чет. сохр}}$  гамильтониана слабого взаимодействия. Воспользуемся теперь соотношением (3.124) применительно к частному случаю, когда

$$\Lambda = \mathcal{H}^{\text{чет. сохр}}, |B\rangle = |\pi_1, \pi_2\rangle, |A\rangle = |K_i\rangle$$

и

$$T = \lim_{q_3 \rightarrow 0} \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3^\alpha | \mathcal{H}^{\text{чет. сохр}} | K_i \rangle. \quad (3.246)$$

Здесь  $\alpha$  и  $i$  — изоспиновые индексы. В данном конкретном примере мы решили выбрать мягким пион 3, так что система  $\pi_1\pi_2$  оказывается в чисто синглетном ( $I = 0$ ) состоянии (для распада  $K^+ \rightarrow 2\pi^0 + \pi^+$  пион  $\pi_3$  есть  $\pi^+$  и т. д.). Поскольку в правой части равенства (3.124) полюсные члены отсутствуют, оно принимает следующий вид:

$$\lim_{q_3 \rightarrow 0} \langle \pi_1\pi_2\pi_3^\alpha | \mathcal{H}^{\text{чет. сохр}} | K_i \rangle = -\frac{i}{f_\pi} \langle \pi_1\pi_2 | [\bar{Q}^\alpha, \mathcal{H}^{\text{чет. сохр}}] | K_i \rangle. \quad (3.247)$$

С учетом предполагаемой структуры  $\mathcal{H}^{\text{чет. сохр}}$  и  $\mathcal{H}^{\text{чет. несохр}}$  [формулы 3.221) и (3.222)] немедленно получаем

$$[\bar{Q}^\alpha, \mathcal{H}^{\text{чет. сохр}}] = -[Q^\alpha, \mathcal{H}^{\text{чет. несохр}}]. \quad (3.248)$$

Далее, поскольку состояние  $|\pi_1\pi_2\rangle$  является изосинглетом ( $I = 0$ ), имеем

$$Q^\alpha | \pi_1\pi_2 \rangle = 0 \quad (3.249)$$

и

$$Q^\alpha | K_i \rangle = \left( \frac{1}{2} \tau^\alpha \right)_{ii} | K_i \rangle, \quad (3.249')$$

что позволяет привести равенство (3.247) к окончательному виду

$$\lim_{q_3 \rightarrow 0} \langle \pi_1\pi_2\pi_3^\alpha | \mathcal{H}^{\text{чет. сохр}} | K_i \rangle = \frac{i}{f_\pi} \left( \frac{\tau^\alpha}{2} \right)_{ii} \langle \pi_1\pi_2 | \mathcal{H}^{\text{чет. несохр}} | K_i \rangle. \quad (3.250)$$

Это и есть искомое соотношение, гарантирующее, во всяком случае в рассмотренном пределе, справедливость правила  $\Delta I = 1/2$  для распада  $K \rightarrow 3\pi$  при условии, что оно справедливо для распада  $K \rightarrow 2\pi$ .

Допустим, что данное условие выполняется<sup>1)</sup>; тогда можно сделать количественные выводы относительно распада  $K \rightarrow 3\pi$ . Напишем

$$\langle \pi_1\pi_2 | \mathcal{H}^{\text{чет. несохр}} | K \rangle = \frac{b}{\sqrt{2}} (\pi_1\pi_2) (\beta^\dagger K), \quad (3.251)$$

где  $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  есть изоспиновый шпурин (в предположении, что  $\Delta I = 1/2$ ,  $\mathcal{H}^{\text{чет. несохр}}$  ведет себя подобно компоненте изотопического дублета с изоспином  $-1/2$ ),  $\pi_i$  и  $K$  — изоспиновые волновые функции, а  $b$  — величина,

<sup>1)</sup> Этот вопрос будет рассмотрен в следующем разделе.

определяющаяся экспериментальным значением вероятности распада  $K \rightarrow 2\pi$ :

$$b = |A(K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-)| \approx 2,9 \cdot 10^{-6} m_\pi. \quad (3.252)$$

Далее,

$$-i \langle \pi_1 \pi_2 \pi_3 | \mathcal{H}^{\text{чет. сохр}} | K \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta^\dagger(\tau A) K, \quad (3.253)$$

причем  $A$  определяется соотношением (3.233).

Пользуясь введенными величинами, перепишем соотношение (3.250):

$$\beta^\dagger(\tau A_S) K = \frac{b}{2f_\pi} (\pi_1 \pi_2) \beta^\dagger(\tau K) \pi_3. \quad (3.254)$$

Здесь

$$A_S = \lim_{q_3 \rightarrow 0} A,$$

так что аргументы функции  $A_S$  таковы:

$$s_3 = m_K^2, \quad s_1 = s_2 = m_\pi^2, \quad s_0 = \frac{1}{3} m_K^2 + \frac{2}{3} m_\pi^2. \quad (3.255)$$

Это и есть та (не принадлежащая физической области) точка, для которой мы получаем теоретический результат. Как уже говорилось, окончательное сравнение с экспериментальными данными оказывается возможным благодаря линейной параметризации (3.239). Итак, подставив функцию

$$f(s_i, s_j; s_k) = a \left[ 1 - \frac{\sigma}{m_\pi^2} (s_k - s_0) \right] \quad (3.256)$$

в соотношение (3.254), находим

$$\begin{aligned} a \left[ 1 - \frac{2\sigma(m_K^2 - m_\pi^2)}{3m_\pi^2} \right] &= \frac{b}{2f_\pi}, \\ a \left[ 1 + \frac{\sigma(m_K^2 - m_\pi^2)}{3m_\pi^2} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (3.257)$$

откуда

$$a = \frac{b}{6f_\pi} \approx \begin{cases} 0,70 \cdot 10^{-6} \\ 0,78 \cdot 10^{-6} \end{cases} \quad (3.258)$$

в зависимости от того, какое из значений  $f_\pi$  (экспериментальное или соответствующее соотношению Голдбергера — Треймана) мы возьмем, и

$$\sigma = -3 \frac{m_K^2}{m_K^2 - m_\pi^2} \approx -0,26. \quad (3.259)$$

Если мы обратимся теперь к различным вариантам распада  $K \rightarrow 3\pi$ , то получим следующие теоретические результаты:

$$\begin{aligned} -a(+ - 0) &= \sqrt{2} a(0 0 +) = \frac{1}{\sqrt{2}} a(+ + -) = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{3}} |a(0 0 0)| = a = \frac{b}{6f_\pi} \end{aligned} \quad (3.260)$$

и

$$\sigma(+ - 0) = \sigma(0 0 +) = -2\sigma(+ + -) = \sigma \approx -0,26. \quad (3.261)$$

В этих равенствах выражается правило  $\Delta I = 1/2$  для распада  $K \rightarrow 3\pi$ , выведенное с помощью алгебры токов из правила  $\Delta I = 1/2$  для распада  $K \rightarrow 2\pi$ , а кроме того, здесь мы имеем конкретный количественный результат.

Мы уже видели в § 7, п. 2, что экспериментальные данные хорошо согласуются с правилом  $\Delta I = 1/2$ .

Для проверки же количественного вывода из алгебры токов совместно с приближением мягких пионов можно сравнить результаты (3.258) и (3.259) с экспериментальными значениями

$$|a(+ - 0)| = a^{\text{экс}} = (0,82 \pm 0,03) \cdot 10^{-6}, \quad (3.258')$$

$$\sigma(+ - 0) = \sigma^{\text{экс}} = -0,24 \pm 0,02. \quad (3.259')$$

Итак, еще одно предсказание алгебры токов оказывается очень хорошим.

Прежде чем заключить, что данный подход правилен, мы должны рассмотреть еще один вопрос. Дело в том, что у нас не было симметрии в подходе к трем пионам, поскольку мы переходили к низкоэнергетическому пределу лишь по одному из них. Возникает вопрос: что произойдет, если для перехода к пределу мы выберем другой пион? Ответ очевиден: предсказания алгебры токов для амплитуд будут разными в зависимости от того, который из трех пионов считается мягким. Но эти предсказания непротиворечиво взаимосвязаны линейной параметризацией (3.256).

Поясним это простым примером. Рассмотрим распад

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$

и предположим, что вместо  $\pi^0$  мягким берется заряженный пион, например  $\pi^-$ . Тогда амплитуда  $A(s_{\pi^+}, s_{\pi^-}; s_{\pi^0})$  выражается через амплитуду распада

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0,$$

который запрещен, если справедливо правило  $\Delta I = 1/2$ . Таким образом

$$\lim_{s_{\pi^-} \rightarrow 0} A(s_{\pi^+}, s_{\pi^-}; s_{\pi^0}) = 0. \quad (3.262)$$

Но теперь предсказание относится к другой точке, а именно:

$$\begin{aligned} s_1 &\equiv s_{\pi^+} = m_{\pi}^2, \\ s_2 &\equiv s_{\pi^-} = m_K^2, \\ s_3 &\equiv s_{\pi^0} = m_{\pi}^2, \\ s_0 &= \frac{1}{3} m_K^2 + \frac{2}{3} m_{\pi}^2. \end{aligned} \quad (3.263)$$

С учетом обычной параметризации из равенства (3.262) получаем

$$a(+ - 0) \left[ 1 + \frac{\sigma(+ - 0)}{m_{\pi}^2} \frac{m_K^2 - m_{\pi}^2}{3} \right] = 0, \quad (3.264)$$

откуда

$$\sigma(+ - 0) = -\frac{3m_{\pi}^2}{m_K^2 - m_{\pi}^2} \approx -0,26,$$

что совпадает с полученным ранее результатом.

Итак, для распада  $K \rightarrow 3\pi$  низкоэнергетическое приближение оказывается вполне самосогласованным. Еще раз подчеркнем, что в данном случае мы столкнулись с очень благоприятной ситуацией, поскольку известное экспериментально трехпионное распределение дает надежную основу для процедуры экстраполяции, без которой невозможно окончательные сравнение низкоэнергетических теоретических выводов с экспериментальными данными.

## 2. Распад $K \rightarrow 2\pi$

В случае распада  $K \rightarrow 2\pi$  подход, основанный на переходе к однопионному низкоэнергетическому пределу, неприменим. Действительно, мы получим разные результаты в зависимости от того, который из двух пионов будем

считать мягким, а требование совместности этих результатов (в предположении, что сравнение допустимо) будет означать, что

$$A(K \rightarrow 2\pi) = 0,$$

т. е. приведет к весьма обескураживающему заключению.

Однако низкоэнергетическое приближение по одному из пионов, очевидно, и не может быть корректным для распада  $K \rightarrow 2\pi$ , поскольку кинематика реального процесса требует равенства (с точностью до знака) 3-импульсов рождающихся пионов, так что, желая быть последовательными, мы должны считать мягкими оба пиона. Тогда в силу закона сохранения энергии-импульса приходится считать мягким и каон, так что все выводы будут относиться к точке, очень далекой от физической области. Но это лучшее из того, что мы можем сделать в данный момент.

При анализе распада  $K \rightarrow 2\pi$  мы воспользуемся результатами для общего случая двух мягких пионов, рассмотренного в § 6. В нашем случае

$$\Lambda = \mathcal{E}^{\text{чет. несохр}}, \quad |B\rangle = |0\rangle, \quad |A\rangle = |K_i\rangle$$

и

$$T^{\beta\alpha} \rightarrow T_i^{\beta\alpha} = \lim_{q_1, q_2 \rightarrow 0} \langle \pi^\alpha(q_1) \pi^\beta(q_2) | \mathcal{E}^{\text{чет. несохр}} | K_i(p) \rangle. \quad (3.265)$$

Мы собираемся переходить к низкоэнергетическому пределу, положив сначала  $q_1 = -q_2 = 0$ , а затем устремив к нулю  $q_{10}$  и  $q_{20}$ . Тогда

$$\Lambda^{\alpha\beta} = -[\bar{Q}^\alpha, [\bar{Q}^\beta, \mathcal{E}^{\text{чет. несохр}}]] = -[Q^\alpha, [Q^\beta, \mathcal{E}^{\text{чет. несохр}}]]. \quad (3.266)$$

Последнее равенство получено с учетом явного вида  $\mathcal{E}^{\text{слаб}}_{\text{нелепт}}$  [формулы (3.218), (3.221) и (3.222)]. Воспользуемся теперь соотношением (3.213). Последние два члена не дают вклада, если переход к низкоэнергетическому пределу выполняется одновременно для обоих пионов, т. е. сначала полагается  $q_{10} = q_{20} = q_0$ , а затем  $q_0 \rightarrow 0$ . Это почти очевидно для слагаемого, содержащего  $T_\mu^\nu$ , поскольку оно явно соответствует рождению в  $p$ -состоянии, тогда как при распаде  $K \rightarrow 2\pi$  конечные пионы должны находиться в  $s$ -состоянии. Чтобы показать это, заметим, что амплитуда

$$T_\mu^\nu = i \int d^4x \exp[i(q_1 + q_2)x] \langle 0 | T(V_\mu^\nu(x) \mathcal{E}^{\text{чет. несохр}}(0)) | K_i(p) \rangle \quad (3.267)$$

допускает простую параметризацию

$$T_\mu^\nu = (q_1 + q_2)_\mu A \quad (3.268)$$

вследствие закона сохранения энергии-импульса

$$p = q_1 + q_2$$

(шпурионной линии, соответствующей  $\mathcal{E}^{\text{чет. несохр}}$ , импульс не приписывается). Чтобы определить  $A$ , вычислим свертку

$$\begin{aligned} (q_1 + q_2)^\mu T_\mu^\nu &\equiv (q_1 + q_2)^2 A \equiv (q_{10} + q_{20})^2 A = \\ &= -\langle 0 | [Q^\nu, \mathcal{E}^{\text{чет. несохр}}] | K_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.269)$$

Отсюда следует

$$(q_2 - q_1)^\mu T_\mu^\nu \equiv (q_{20}^2 - q_{10}^2) A = \frac{q_{10} - q_{20}}{q_{10} + q_{20}} \langle 0 | [Q^\nu, \mathcal{E}^{\text{чет. несохр}}] | K_i \rangle. \quad (3.270)$$

Этот результат показывает, что, вообще говоря, второе слагаемое в правой части равенства (3.213) зависит от способа перехода к пределу при

$q_{10}, q_{20} \rightarrow 0$ . Но в нашем случае, если мы хотим сохранить симметрию между двумя пионами, мы вынуждены, как уже говорилось, положить  $q_{10} = q_{20}$ , что ведет к исчезновению вклада (3.270). Как показано в работе Бушия и Мейера [145], то же самое происходит и с последним членом в правой части равенства (3.213).

Итак, из (3.213) получаем окончательно:

$$\begin{aligned} \lim_{q_1=q_2 \rightarrow 0} \langle \pi^\alpha(q_1) \pi^\beta(q_2) | \mathcal{S}^{\text{чет. несохр}} | K_i(p) \rangle = \\ = -\frac{i}{2f_\pi^2} \langle 0 | \{ [Q^\beta, [Q^\alpha, \mathcal{S}^{\text{чет. несохр}}]] + \\ + [Q^\alpha, [Q^\beta, \mathcal{S}^{\text{чет. несохр}}]] \} | K_i(p) \rangle. \end{aligned} \quad (3.271)$$

Двойные коммутаторы в формуле (3.271) преобразуются подобно  $\mathcal{S}^{\text{чет. несохр}}$ , поскольку  $Q^\alpha$  и  $Q^\beta$  — изоспиновые генераторы; вклад даже при наличии слагаемого с  $I = 3/2$  дает лишь часть  $\mathcal{S}^{\text{чет. несохр}}$  с  $I = 1/2$ , поскольку матричные элементы в формуле (3.271) берутся между каонами и вакуумом. Поэтому правило  $\Delta I = 1/2$  в пределе мягких пионов оказывается точным. Это и есть самый важный результат, который можно вывести для распада  $K \rightarrow 2\pi$  на основе алгебры токов и предела мягких пионов.

Количественные данные о ширине этого распада можно получить, только сделав какие-либо предположения о явном виде  $\mathcal{S}^{\text{слаб}}_{\text{элепт}}$ , и мы не намерены рассматривать этот вопрос.

В заключение еще раз подчеркнем, что правило  $\Delta I = 1/2$  оказывается строгим лишь для нефизической точки, в которой не только пионы, но и каон имеют нулевые массы. В данном случае у нас нет достаточно обоснованного метода для перехода от низкоэнергетических соотношений к выводам для физической амплитуды. Поэтому в принципе нельзя исключить наличие в последней вкладов с  $\Delta I = 3/2$ .

### § 8. Проблема распада $\eta \rightarrow 3\pi$

Очень хорошие результаты, полученные для распада  $K \rightarrow 3\pi$ , наводят на мысль применить тот же метод мягких пионов и алгебры токов при изучении процесса  $\eta \rightarrow 3\pi$ . К сожалению, результат оказывается плачевным и до сих пор еще не нашел объяснения.

Покажем, что происходит. С экспериментальной точки зрения процессы  $\eta \rightarrow 3\pi$  и  $K \rightarrow 3\pi$  очень сходны и трехпионный спектр в  $\eta$ -распаде согласуется с параметризацией типа той, которая для распада  $K \rightarrow 3\pi$  дается соотношением (3.239). Амплитуда процесса

$$\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$

хорошо описывается эмпирической формулой [146]

$$A(\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0) = a_\eta \left[ 1 - \sigma_\eta \frac{s_3 - s_0}{m_\pi^2} \right] \quad (3.272)$$

(обозначения такие же, как в случае распада  $K \rightarrow 3\pi$  не считая очевидной замены  $K \rightarrow \eta$ ), где

$$\sigma_\eta = -0,19 \pm 0,02. \quad (3.273)$$

Удивительно, что экспериментальные данные превосходно согласуются с равенством

$$\sigma_\eta = -\frac{3m_\pi^2}{m_\eta^2 - m_\pi^2} \approx -0,20, \quad (3.274)$$

которое можно написать по аналогии с соотношением (3.259) для распада  $K \rightarrow 3\pi$ . Но это равенство всего лишь игра чисел, оно не имеет никакого теоретического обоснования.

При распаде  $\eta \rightarrow 3\pi$  четность сохраняется, а  $G$ -четность — нет, и поэтому обычно считается, что процесс протекает благодаря электромагнитному взаимодействию второго порядка:

$$A(\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0) = \langle \pi^+\pi^-\pi^0 | \mathcal{H}^{\text{эл.-м}}(0) | \eta \rangle, \quad (3.275)$$

где

$$\mathcal{H}^{\text{эл.-м}}(0) = e^2 \int d^4x D^{\mu\nu}(x) T(j_\mu^{\text{эл.-м}}(x) j_\nu^{\text{эл.-м}}(0)), \quad (3.276)$$

а  $D^{\mu\nu}(x)$  — фотонный пропагатор. Следовательно, мы можем попытаться применить обычный одноионный метод (§ 5) и, таким образом, связать низкоэнергетический предел амплитуды  $\eta \rightarrow 3\pi$  с матричным элементом известного коммутатора. Переходя к низкоэнергетическому пределу по  $\pi^0$ , из основной формулы (3.121) получаем

$$A(\eta \rightarrow \pi^+\pi^-(\pi^0)) = -\frac{i}{f_\pi} \langle \pi^+\pi^- | [\bar{Q}^3, \mathcal{H}^{\text{эл.-м}}] | \eta \rangle = 0, \quad (3.277)$$

поскольку

$$[\bar{Q}^3, j_\mu^{\text{эл.-м}}] = 0 \quad (3.278)$$

в соответствии с коммутационными соотношениями алгебры токов.

Итак, в низкоэнергетическом пределе по  $\pi^0$  амплитуда распада  $\eta \rightarrow 3\pi$  должна обращаться в нуль. Этот результат полностью противоречит эмпирической параметризации (3.272), которая дает

$$A(\eta \rightarrow \pi^+\pi^-(\pi^0)) = a_\eta \left( 1 - \sigma_\eta \frac{2}{3} \frac{m_\eta^2 - m_\pi^2}{m_\pi^2} \right) \approx 2,8a_\eta. \quad (3.279)$$

Непонятно, почему метод, очень хорошо применимый к распаду  $K \rightarrow 3\pi$ , оказывается совершенно несостоятельным в случае распада  $\eta \rightarrow 3\pi$ . Этот вопрос остается самой крупной нерешенной проблемой в данном подходе.



## 4. Алгебра токов и дисперсионные правила сумм

### § 1. Введение

В предыдущей главе мы видели, каким образом из соотношений типа тождества Уорда выводятся низкоэнергетические теоремы. Теперь мы переходим к изучению правил сумм, которые получаются из тех же тождеств Уорда при некоторых предположениях относительно аналитических свойств и асимптотического поведения рассматриваемых амплитуд. Мы начнем с элементарного вывода правил сумм, основанного на ряде довольно жестких ограничений. Позднее, в § 8, мы избавимся от ненужных предположений и рассмотрим всю проблему с более общей точки зрения.

Идея состоит в том, чтобы объединить информацию, содержащуюся в тождествах Уорда, с информацией об аналитических свойствах инвариантных амплитуд, входящих в разложение следующего тензора:

$$T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}(q_2, p_2; q_1, p_1) = i \int d^4x \exp(iq_2x) \langle p_2 | T(j_\nu^\beta(x) j_\mu^\alpha(0)) | p_1 \rangle \quad (4.1)$$

( $j_\mu^\alpha$  — произвольный векторный или аксиальный ток). Здесь  $T$  — оператор хронологического упорядочения. Как уже отмечалось в гл. 3, § 1, правая часть равенства (4.1) не всегда является ковариантным тензором  $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$ , и мы прежде всего должны переопределить ее так, чтобы она стала ковариантной. На этом вопросе мы подробнее остановимся в гл. 7, а пока начнем с выражения (4.1), как если бы оно давало ковариантный тензор, и все следствия, которые мы собираемся вывести, будут правильными, если для  $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$  взять корректное ковариантное выражение из гл. 7.

Можно считать, что амплитуда (4.1) описывает процесс, показанный схематически на фиг. 4.1. Адронные состояния  $|p_1\rangle$  и  $|p_2\rangle$  предполагаются бесспиновыми (или же усредненными по спину) и имеющими одинаковые массы<sup>1)</sup> и четности; индексы токов  $\alpha$  и  $\beta$  связаны с группой внутренней симметрии [как правило, это индексы группы  $SU(3)$ ].

В принципе амплитуду  $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$  можно измерить, наблюдая процессы типа  $\mu^- + \pi \rightarrow \pi + e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ , но в настоящее время об этом не может быть и речи. В действительности нас интересует не сама амплитуда  $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$ , а абсорбтивные части входящих в ее разложение инвариантных амплитуд, которые в случае рассеяния вперед ( $t=0$ ) имеют более прямой физический смысл. Абсорбтивные амплитуды — основной объект изучения в данной главе, и все окончательные результаты выражаются через эти величины.

Тензор второго ранга  $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$  можно разложить на инвариантные амплитуды:

$$T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = A^{\beta\alpha} P_\mu P_\nu + B_1^{\beta\alpha} Q_\mu P_\nu + B_2^{\beta\alpha} P_\mu Q_\nu + B_3^{\beta\alpha} \Delta_\mu P_\nu + \\ + B_4^{\beta\alpha} P_\mu \Delta_\nu + C_1^{\beta\alpha} Q_\mu Q_\nu + C_2^{\beta\alpha} Q_\mu \Delta_\nu + C_3^{\beta\alpha} \Delta_\mu Q_\nu + C_4^{\beta\alpha} \Delta_\mu \Delta_\nu + C_5^{\beta\alpha} g_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

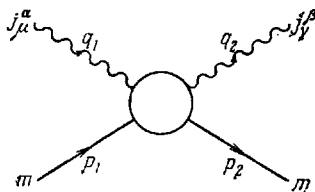
<sup>1)</sup> Это условие накладывается только для упрощения кинематики.

где  $P = 1/2 (p_1 + p_2)$ ,  $Q = 1/2 (q_1 + q_2)$ ,  $\Delta = p_1 - p_2 = q_2 - q_1$  и  $\Delta^2 = t$ . Амплитуды, входящие в это разложение, являются функциями  $t$ ,  $q_1^2$ ,  $q_2^2$  и  $v = (PQ) = (Pq_1) = (Pq_2)$ .

Исходя из определения (4.1), нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}(q_2, p_2; q_1, p_1) = T_{\mu\nu}^{\beta\alpha}(-q_1, p_2; -q_2, p_1). \quad (4.3)$$

Для упрощения записи обозначим через  $Q_{12}$  всю систему кинематических



Фиг. 4.1

переменных  $t$ ,  $q_1^2$ ,  $q_2^2$  в следующем порядке:

$$Q_{12} \equiv (t, q_1^2, q_2^2), \quad (4.4)$$

а через  $Q_{21}$  — ту же систему с переставленными индексами 1 и 2:

$$Q_{21} \equiv (t, q_2^2, q_1^2). \quad (4.4')$$

Согласно тождеству (4.3), инвариантные амплитуды, входящие в разложение (4.2), удовлетворяют следующим перекрестным соотношениям:

$$\begin{aligned} A^{\beta\alpha}(v, Q_{12}) &= A^{\alpha\beta}(-v, Q_{21}), \\ B_4^{\beta\alpha}(v, Q_{12}) &= -B_2^{\alpha\beta}(-v, Q_{21}), \\ B_3^{\beta\alpha}(v, Q_{12}) &= B_4^{\alpha\beta}(-v, Q_{21}), \\ C_i^{\beta\alpha}(v, Q_{12}) &= C_i^{\alpha\beta}(-v, Q_{21}), \quad i = 1, 4, 5, \\ C_2^{\beta\alpha}(v, Q_{12}) &= -C_3^{\alpha\beta}(-v, Q_{21}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

## 2. Тождества Уорда

Выведем теперь несколько равенств типа тождества Уорда, из которых в свою очередь будут следовать довольно интересные соотношения между инвариантными амплитудами.

Как и в гл. 3, § 1, свернем  $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$  с  $q_2^\nu$ . Пользуясь коммутационными соотношениями кварковой модели

$$[j_0^\beta(x, 0), j_\mu^\alpha(0)] = if_{\beta\alpha\gamma} j_\mu^\gamma(0) \delta^3(x), \quad (4.6)$$

получаем обобщенное тождество Уорда

$$q_2^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = U_\mu^{\beta\alpha} - if_{\beta\alpha\gamma} \langle p_2 | j_\mu^\gamma(0) | p_1 \rangle, \quad (4.7)$$

в котором

$$U_\mu^{\beta\alpha} = - \int d^4x \exp(iq_2x) \langle p_2 | T(D^\beta(x) j_\mu^\alpha(0)) | p_1 \rangle. \quad (4.8)$$

Мы ограничимся случаем, когда оба тока в формуле (4.1) одновременно либо векторные, либо аксиальные, так что  $j_\mu^\nu \equiv V_\mu^\nu$  есть векторный ток<sup>1)</sup>; далее для простоты допустим, что ток  $V$  сохраняется, и потому можно просто положить

$$\langle p_2 | V_\mu^\nu | p_1 \rangle = (p_1 + p_2)_\mu F^\nu(t). \quad (4.9)$$

Тогда соотношение (4.7) принимает следующий вид:

$$q_2^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = U_\mu^{\beta\alpha} - 2if_{\beta\alpha\gamma} P_\mu F^\gamma(t). \quad (4.10)$$

Присутствие  $c$ -числовых швингеровских членов в правой части равенства 4.6 не отражается на конечном результате; действительно, амплитуду  $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$  на самом деле следовало бы определять, вычитая из правой части (4.1) вакуумное среднее того же коммутатора, как это уже говорилось в гл. 2, § 4, п. 2.

В то же время мы можем вывести еще одно тождество Уорда, вычислив точно так же величину  $q_1^\mu T_{\nu\mu}^{\alpha\beta}$ . Оно имеет следующий вид:

$$q_1^\mu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = V_\nu^{\beta\alpha} - 2if_{\beta\alpha\gamma} P_\nu F^\gamma(t), \quad (4.11)$$

где

$$V_\nu^{\beta\alpha} = \int d^4x \exp(-iq_1x) \langle p_2 | T(j_\nu^\beta(0) D^\alpha(x)) | p_1 \rangle. \quad (4.12)$$

Соотношение (4.11) можно вывести из (4.10), пользуясь формулами (4.5) и равенством

$$V_\mu^{\beta\alpha}(q_1, q_2) = -U_\mu^{\alpha\beta}(-q_2, -q_1). \quad (4.13)$$

Наконец, таким же способом получим тождество

$$q_1^\mu q_2^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = W^{\beta\alpha} - 2ivf_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t) + S^{\beta\alpha}, \quad (4.14)$$

в котором величины

$$W^{\beta\alpha} = i \int d^4x \exp(iq_2x) \langle p_2 | T(D^\beta(x) D^\alpha(0)) | p_1 \rangle, \quad (4.15)$$

$$S^{\beta\alpha} = i \int d^3x \exp(-iq_2x) \langle p_2 | [j_0^\beta(x, 0), D^\alpha(0)] | p_1 \rangle \quad (4.16)$$

обладают следующими перекрестными свойствами:

$$W^{\beta\alpha}(v, Q_{12}) = W^{\alpha\beta}(-v, Q_{21}), \quad (4.17)$$

$$S^{\beta\alpha}(Q_{12}) = S^{\alpha\beta}(Q_{21}). \quad (4.18)$$

Напомним, что написанное выше перекрестное соотношение для  $S^{\beta\alpha}$  выведено в предположении, что ток  $j_\mu^\nu \equiv V_\mu^\nu$  сохраняется; в противном случае оно неверно.

Другие тождества Уорда получаются из  $U_\mu^{\beta\alpha}$  и  $V_\nu^{\beta\alpha}$ :

$$q_1^\mu U_\mu^{\beta\alpha} = W^{\beta\alpha} + S^{\beta\alpha}, \quad (4.19)$$

$$q_2^\nu V_\nu^{\beta\alpha} = W^{\beta\alpha} + S^{\beta\alpha}. \quad (4.20)$$

Из тождеств (4.10), (4.11), (4.14), (4.19) и (4.20) следуют весьма интересные соотношения между рассматриваемыми инвариантными амплитудами. Прежде всего введем по аналогии с (4.2) инвариантное разложение

<sup>1)</sup> Поскольку начальное и конечное адронные состояния предполагаются бесспиновыми состояниями с одинаковой четностью, матричный элемент аксиального тока, аналогичный элементу (4.9), обращается в нуль. Поэтому тот случай, когда один из токов в формуле (4.1) векторный, а другой — аксиальный, может быть рассмотрен точно так же.

для амплитуд  $U_\mu^{\beta\alpha}$  и  $V_\mu^{\beta\alpha}$ :

$$U_\nu^{\beta\alpha} = U_1^{\beta\alpha} P_\mu + U_2^{\beta\alpha} Q_\mu + U_3^{\beta\alpha} \Delta_\mu, \quad (4.21)$$

$$V_\mu^{\beta\alpha} = V_1^{\beta\alpha} P_\mu + V_2^{\beta\alpha} Q_\mu + V_3^{\beta\alpha} \Delta_\mu. \quad (4.22)$$

Входящие сюда инвариантные амплитуды удовлетворяют следующим перекрестным соотношениям:

$$\begin{aligned} U_1^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= -V_1^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}), \\ U_2^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= V_2^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}), \\ U_3^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= -V_3^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Полученные ранее тождества Уорда можно теперь переписать в виде системы соотношений:

$$\nu A^{\beta\alpha} + (Qq_2) B_2^{\beta\alpha} + (\Delta q_2) B_4^{\beta\alpha} = U_1^{\beta\alpha} - 2if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t), \quad (4.24')$$

$$\nu B_1^{\beta\alpha} + (Qq_2) C_1^{\beta\alpha} + (\Delta q_2) C_2^{\beta\alpha} + C_5^{\beta\alpha} = U_2^{\beta\alpha}, \quad (4.24'')$$

$$\nu B_3^{\beta\alpha} + (Qq_2) C_3^{\beta\alpha} + (\Delta q_2) C_4^{\beta\alpha} + \frac{1}{2} C_5^{\beta\alpha} = U_3^{\beta\alpha}, \quad (4.24''')$$

$$\nu A^{\beta\alpha} + (Qq_1) B_1^{\beta\alpha} + (\Delta q_1) B_3^{\beta\alpha} = V_1^{\beta\alpha} - 2if_{\beta\alpha\gamma} F_s^\gamma(t), \quad (4.25')$$

$$\nu B_2^{\beta\alpha} + (Qq_1) C_1^{\beta\alpha} + (\Delta q_1) C_3^{\beta\alpha} + C_5^{\beta\alpha} = V_2^{\beta\alpha}, \quad (4.25'')$$

$$\nu B_4^{\beta\alpha} + (Qq_1) C_2^{\beta\alpha} + (\Delta q_1) C_4^{\beta\alpha} - \frac{1}{2} C_5^{\beta\alpha} = V_3^{\beta\alpha}, \quad (4.25''')$$

$$\begin{aligned} \nu^2 A^{\beta\alpha} + \nu [(Qq_1) B_1^{\beta\alpha} + (Qq_2) B_2^{\beta\alpha} + 2(\Delta q_1) B_3^{\beta\alpha} + 2(\Delta q_2) B_4^{\beta\alpha}] + \\ + (Qq_1)(Qq_2) C_1^{\beta\alpha} + (Qq_1)(\Delta q_2) C_2^{\beta\alpha} + (\Delta q_1)(Qq_2) C_3^{\beta\alpha} + \\ + (\Delta q_1)(\Delta q_2) C_4^{\beta\alpha} + (q_1 q_2) C_5^{\beta\alpha} = W^{\beta\alpha} - 2if_{\beta\alpha\gamma} \nu F^\gamma(t) + S^{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\nu U_1^{\beta\alpha} + (Qq_1) U_2^{\beta\alpha} + (\Delta q_1) U_3^{\beta\alpha} = W^{\beta\alpha} + S^{\beta\alpha}, \quad (4.27)$$

$$\nu V_1^{\beta\alpha} + (Qq_2) V_2^{\beta\alpha} + (\Delta q_2) V_3^{\beta\alpha} = W^{\beta\alpha} + S^{\beta\alpha}. \quad (4.28)$$

Читатель заметит, что равенства (4.25) и (4.28) можно получить, первое из (4.24), а второе из (4.27), с помощью перекрестных соотношений (4.5), (4.17), (4.18) и (4.23).

### 3. Правила сумм

Теперь мы хотим показать, каким образом из полученных результатов вместе с некоторыми добавочными предположениями можно вывести правила сумм дисперсионного типа.

Мы начнем с наиболее элементарного вывода [46]. Позднее, в § 8, мы ослабим налагаемые ограничения (правда, в ущерб простоте!).

Итак, допустим на время, что любая из введенных ранее инвариантных амплитуд ( $A$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $U_i$ ,  $V_i$ ,  $W$ ) удовлетворяет дисперсионному соотношению без вычитаний по переменной  $\nu$  при фиксированных  $t$ ,  $q_1^2$ ,  $q_2^2$ ; иначе говоря, для каждой из амплитуд справедливо представление типа

$$\begin{aligned} A^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= \frac{1}{\pi} \int_{\nu_s}^{\infty} d\nu' \frac{a^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12})}{\nu' - \nu - i\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\nu_s} d\nu' \frac{a^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12})}{\nu' - \nu + i\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{a^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12})}{\nu' - \nu - i\varepsilon} - \frac{a^{\beta\alpha}(-\nu', Q_{12})}{\nu' + \nu - i\varepsilon} \right]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Абсорбтивные инвариантные амплитуды  $a^{\beta\alpha}$ ,  $b_1^{\beta\alpha}$ ,  $c_1^{\beta\alpha}$ ,  $u_1^{\beta\alpha}$ ,  $v_1^{\beta\alpha}$ ,  $w^{\beta\alpha}$  определяются разложениями следующих тензоров [эти разложения аналогичны разложениям (4.2), (4.21) и (4.22)]:

$$i_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = \frac{1}{2}(2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_2 + q_2 - p_n) \langle p_2 | j_\nu^\beta | n \rangle \langle n | j_\mu^\alpha | p_1 \rangle, \quad (4.30)$$

$$u_\mu^{\beta\alpha} = \frac{1}{2} i (2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_2 + q_2 - p_n) \langle p_2 | D^\beta | n \rangle \langle n | j_\mu^\alpha | p_1 \rangle, \quad (4.31)$$

$$v_\mu^{\beta\alpha} = -\frac{1}{2} i (2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_2 + q_2 - p_n) \langle p_2 | j_\mu^\beta | n \rangle \langle n | D^\alpha | p_1 \rangle, \quad (4.31')$$

$$w^{\beta\alpha} = \frac{1}{2}(2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_2 + q_2 - p_n) \langle p_2 | D^\beta | n \rangle \langle n | D^\alpha | p_1 \rangle. \quad (4.32)$$

Эти тензоры имеют вполне определенные носители по переменной  $\nu$ , так что абсорбтивные амплитуды определены при значениях  $\nu$ , превышающих некоторое подходящее  $\nu_s$ . Значения абсорбтивных амплитуд в области  $-\infty < \nu \leq -\nu_s$  находятся из определений:

$$\begin{aligned} a^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= -a^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}), \\ b_1^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= b_2^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}), \\ b_3^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= -b_4^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}), \\ c_1^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= -c_1^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}), \\ c_2^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= c_3^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}), \\ c_4^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= -c_4^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}), \\ c_5^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= -c_5^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}), \\ u_1^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= v_1^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}), \\ u_2^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= -v_2^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}), \\ u_3^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= v_3^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}), \\ w^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) &= -w^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Определения эти таковы, что интегралы, подобные входящему в правую часть равенства (4.29), автоматически удовлетворяют перекрестным соотношениям (4.5) и (4.23). С учетом равенств (4.33) представления типа (4.29) можно переписать следующим образом:

$$A^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) = \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{a^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12})}{\nu' - \nu - i\varepsilon} + \frac{a^{\alpha\beta}(\nu', Q_{21})}{\nu' + \nu - i\varepsilon} \right], \quad (4.34)$$

$$B_1^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) = \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{b_1^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12})}{\nu' - \nu - i\varepsilon} - \frac{b_2^{\alpha\beta}(\nu', Q_{21})}{\nu' + \nu - i\varepsilon} \right], \quad (4.35)$$

$$B_3^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) = \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{b_3^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12})}{\nu' - \nu - i\varepsilon} + \frac{b_4^{\alpha\beta}(\nu', Q_{21})}{\nu' + \nu - i\varepsilon} \right], \quad (4.36)$$

$$C_l^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) = \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{c_l^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12})}{\nu' - \nu - i\varepsilon} + \frac{c_l^{\alpha\beta}(\nu', Q_{21})}{\nu' + \nu - i\varepsilon} \right] \quad (l=1, 4, 5), \quad (4.37)$$

$$C_2^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) = \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{c_2^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12})}{\nu' - \nu - i\varepsilon} - \frac{c_3^{\alpha\beta}(\nu', Q_{21})}{\nu' + \nu - i\varepsilon} \right], \quad (4.38)$$

$$U_i^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) = \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{u_i^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12})}{\nu' - \nu - i\varepsilon} - \frac{v_i^{\alpha\beta}(\nu', Q_{21})}{\nu' + \nu - i\varepsilon} \right], \quad i = 1, 3, \quad (4.39)$$

$$U_2^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) = \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{u_2^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12})}{\nu' - \nu - i\varepsilon} + \frac{v_2^{\alpha\beta}(\nu', Q_{21})}{\nu' + \nu - i\varepsilon} \right], \quad (4.40)$$

$$W^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) = \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{w^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12})}{\nu' - \nu - i\varepsilon} + \frac{w^{\alpha\beta}(\nu', Q_{21})}{\nu' + \nu - i\varepsilon} \right]. \quad (4.41)$$

Остальные амплитуды можно легко найти по написанным выше, пользуясь все теми же перекрестными соотношениями. Если написанные выше выражения для амплитуд подставить в тождества Уорда (4.24) — (4.28), то получим аналогичные (хотя и не идентичные) соотношения между абсорбтивными амплитудами. В качестве примера рассмотрим соотношение (4.24'):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{\bar{v}a^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12}) + (Qq_2) b_2^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12}) + (\Delta q_2) b_4^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12}) - u_1^{\beta\alpha}(\nu', Q_{12})}{\nu' - \nu - i\varepsilon} \right] + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{va^{\alpha\beta}(\nu', Q_{21}) + (Qq_2) b_1^{\alpha\beta}(\nu', Q_{21}) - (\Delta q_2) b_3^{\alpha\beta}(\nu', Q_{21}) - v_1^{\alpha\beta}(\nu', Q_{21})}{\nu' + \nu - i\varepsilon} \right] = \\ & = -2if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t). \quad (4.42) \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & \frac{P}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{va^{\beta\alpha} + \dots}{\nu' - \nu} \right] + \frac{P}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{va^{\alpha\beta} + \dots}{\nu' + \nu} \right] + \\ & + i [va^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) + (Qq_2) b_2^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) + (\Delta q_2) b_4^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) - u_1^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12})] + \\ & + i [-va^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}) + (Qq_2) b_1^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}) - (\Delta q_2) b_3^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21}) - \\ & - v_1^{\alpha\beta}(-\nu, Q_{21})] = -2if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t). \quad (4.43) \end{aligned}$$

Поскольку величина  $if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t)$  вещественна<sup>1)</sup>, это соотношение дает

$$va^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) + (Qq_2) b_2^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) + (\Delta q_2) b_4^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) - u_1^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) = 0, \quad (4.44)$$

$$va^{\alpha\beta}(\nu, Q_{21}) + (Qq_2) b_1^{\alpha\beta}(\nu, Q_{21}) - (\Delta q_2) b_3^{\alpha\beta}(\nu, Q_{21}) - v_1^{\alpha\beta}(\nu, Q_{21}) = 0. \quad (4.45)$$

Мы получаем два отдельных равенства вследствие того, что два выражения в квадратных скобках в формуле (4.43) имеют разные носители по переменной  $\nu$ . Равенство (4.44) подобно равенству (4.24') (отсутствует слагаемое с формфактором), и его можно получить формально, просто взяв мнимую часть (4.24') в области  $\nu > \nu_0$ . Равенство (4.45) получается аналогичным образом из равенства (4.25') после замены  $Q_{21} \rightarrow Q_{12}$  или, что эквивалентно, вычислением мнимой части равенства (4.24') при  $\nu < -\nu_0$ .

<sup>1)</sup> Напомним, что формфактор  $F^\gamma(t)$  определен как матричный элемент векторного тока  $V_\mu^\gamma$  между физическими состояниями.

Отсутствие в соотношениях (4.44) и (4.45) слагаемого с формфактором (который не зависит от  $\nu$ ) означает, что должно существовать различие в асимптотическом поведении при больших  $\nu$  между вещественной и мнимой частями амплитуд. Это важное обстоятельство подробно анализируется в следующем разделе.

Из равенства (4.43) с учетом тождеств (4.44) и (4.45) можно вывести очень важное правило сумм. Действительно, преобразуя тождество

$$\frac{P}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{\nu a^{\beta\alpha} + \dots}{\nu' - \nu} \right] + \frac{P}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \left[ \frac{\nu a^{\alpha\beta} + \dots}{\nu' + \nu} \right] = -2if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t) \quad (4.46)$$

[соответствующее вещественным частям равенства (4.43)] с учетом (4.44) и (4.45), имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu [a^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) - a^{\alpha\beta}(\nu, Q_{21})] \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu a^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) = 2if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t). \quad (4.47)$$

Это весьма общее правило сумм впервые было выведено Фубини [46] и независимо от него Дашеном и Гелл-Манном [47, 48].

Рассмотрев для простоты адронную мишень с изоспином  $1/2$  и ограничившись случаем аксиальных  $SU(2)$ -токов, можно, как обычно, определить

$$A^{\beta\alpha} = A^+ \delta_{\beta\alpha} + A^- \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha] \quad (4.48)$$

и

$$F^\nu(t) = F(t) \frac{1}{2} \tau_\nu. \quad (4.49)$$

Здесь  $F(t)$  — электрический формфактор мишени, т. е.

$$if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t) = \frac{1}{4} [\tau_\beta, \tau_\alpha] F(t). \quad (4.50)$$

Тогда общее правило сумм (4.47) принимает следующий вид:

$$\frac{2}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu a^-(\nu, t, q_1^2, q_2^2) = F(t). \quad (4.51)$$

Это правило сумм было выведено в предположении о справедливости дисперсионных соотношений без вычитаний для  $A^{\beta\alpha}$ ,  $B_2^{\beta\alpha}$ ,  $B_4^{\beta\alpha}$  и  $U_1^{\beta\alpha}$  [формула (4.34) и далее]. Точно так же, предполагая, что дисперсионные соотношения без вычитаний справедливы для всех амплитуд, можно получить остальные правила сумм:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_i^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) d\nu = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.52)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) d\nu = -S^{\beta\alpha}(Q_{12}), \quad (4.53)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v_1^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) d\nu = -S^{\beta\alpha}(Q_{12}), \quad (4.54)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu a^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) d\nu = -S^{\beta\alpha}(Q_{12}). \quad (4.55)$$

Не все из них независимы. В качестве исходных можно взять соотношения (4.47) и (4.52) при  $i = 1, 3$ , а также (4.53) и (4.55); тогда остальные правила сумм будут следствиями перекрестных соотношений (4.33).

#### § 4. Асимптотическое поведение амплитуд слабого взаимодействия

Справедливость полученных правил сумм зависит, разумеется, от асимптотического поведения абсорбтивных амплитуд, которое еще предстоит выяснить. В этой связи прежде всего отметим, что из соотношений (4.24) — (4.28) следуют равенства

$$\begin{aligned} a^{\beta\alpha} &= \frac{1}{v} \left( \sum_i \alpha_i b_i^{\beta\alpha} + k_1 u_1^{\beta\alpha} \right), \\ b_i^{\beta\alpha} &= \frac{1}{v} \left[ \sum_i \beta_i c_i^{\beta\alpha} + \sum_{i=2}^3 (k_{i_1} u_i^{\beta\alpha} + k_{i_2} v_i^{\beta\alpha}) \right], \\ u_1^{\beta\alpha} &= \frac{1}{v} \left( \sum_{i=2}^3 \lambda_i u_i^{\beta\alpha} - w^{\beta\alpha} \right), \\ v_1^{\beta\alpha} &= \frac{1}{v} \left( \sum_{i=2}^3 \lambda_i v_i^{\beta\alpha} - w^{\beta\alpha} \right), \\ \sum_i \gamma_i c_i^{\beta\alpha} + \sum_{i=2}^3 (\rho_i u_i^{\beta\alpha} + \rho_i v_i^{\beta\alpha}) &= w^{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

в которых различные коэффициенты не зависят от  $v$ . Если теперь предположить, что при больших  $v$

$$\{c_i^{\beta\alpha}, u_{2,3}^{\beta\alpha}, v_{2,3}^{\beta\alpha}, w^{\beta\alpha}\} \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \text{const } f(v), \quad (4.57)$$

то получим

$$\begin{aligned} a^{\beta\alpha} &\underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \text{const } \frac{f(v)}{v^2}, \\ b_i^{\beta\alpha} &\underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \text{const } \frac{f(v)}{v}, \\ \{u_1^{\beta\alpha}, v_1^{\beta\alpha}\} &\underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \text{const } \frac{f(v)}{v}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Поэтому ясно, что из правил сумм (4.52) — (4.55) и (4.47) последнее имеет больше всего шансов быть справедливым.

Если для абсорбтивных амплитуд предположить реджевское поведение с ведущей траекторией  $\alpha(t)$ , то можно написать

$$\begin{aligned} \{c_i^{\beta\alpha}, u_{2,3}^{\beta\alpha}, v_{2,3}^{\beta\alpha}, w^{\beta\alpha}\} &\underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \text{const } v^{\alpha(t)}, \\ \{b_i^{\beta\alpha}, u_1^{\beta\alpha}, v_1^{\beta\alpha}\} &\underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \text{const } v^{\alpha(t)-1}, \\ a^{\beta\alpha} &\underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \text{const } v^{\alpha(t)-2}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Такое различие в реджевском поведении абсорбтивных амплитуд согласуется и с результатами, полученными методом производной амплитуды (гл. 1, приложение II), но там речь шла о самих амплитудах, а не об их мнимых частях. Напомним, что там мы имели дело с сильными взаимодействиями, тогда как теперь рассматриваются амплитуды второго порядка по слабому или электромагнитному взаимодействию. Как мы увидим, это приводит



к существенному различию в поведении вещественных частей амплитуд. Рассмотрим, например, соотношение (4.24'):

$$\sqrt{A}^{\beta\alpha} + (Qq_2) B_{\frac{1}{2}}^{\beta\alpha} + (\Delta q_2) B_{\frac{1}{4}}^{\beta\alpha} - U_1^{\beta\alpha} = -2if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t). \quad (4.60)$$

Взяв мнимую часть этого равенства и отметив, что слагаемое с формфактором при этом исчезает, заключаем, что соотношение (4.60) вполне согласуется с предположением о чисто реджевском поведении абсорбтивных амплитуд. Но это же равенство противоречит предположению о реджевском поведении вещественных частей. Действительно, если принять, что интерполирующие функции парциальных амплитуд не имеют неподвижных полюсов в плоскости комплексного углового момента, то постоянная в правой части равенства (4.60) не имеет аналога в смысле асимптотического поведения левой части. Таким образом, мы вынуждены отказаться от предположения о чисто реджевском поведении одновременно и вещественных и мнимых частей изучаемых амплитуд. Возникновение нереджевских асимптотических членов объясняется смешанным характером задачи, когда слабые и электромагнитные процессы рассматриваются в низшем порядке теории возмущений, тогда как сильные взаимодействия учитываются в принципе точно. Если выключить сильные взаимодействия, то порождаемые ими амплитуды рассеяния адронов должны обратиться в нуль; амплитуды в разложении (4.2) будут тогда сводиться к их борновскому приближению по слабому взаимодействию. Поэтому при высоких энергиях, помимо характерных для сильного взаимодействия реджевских полюсных членов, могут, по-видимому, оставаться и некоторые другие вклады, зависящие от структуры электромагнитного и слабого токов, причем они должны проявляться лишь в вещественных частях амплитуд. Действительно, при высоких энергиях мнимая часть целиком определяется вкладами промежуточных состояний, порождаемых сильными взаимодействиями, тогда как борновское приближение по слабому взаимодействию является там вещественным.

Итак, мы приходим к выводу, что в случае амплитуд, включающих комбинации частиц и токов, асимптотическое реджевское поведение можно предполагать только для мнимых частей [40, 44, 49].

Отметим, что общее правило сумм (4.47) справедливо при условии  $\alpha(t) < 1$ . Отсюда ясно, что интеграл в левой части (4.51) сходится, во всяком случае (при  $t = 0$ , поскольку входящая в него амплитуда соответствует обмену изоспином 1 в  $t$ -канале и для ее ведущей траектории ( $\rho$ -траектории) мы имеем  $\alpha_\rho(0) \approx 0,5$ ). Остальные же правила сумм наверняка несправедливы, во всяком случае до тех пор, пока не исключены вклады изоспина 2 и отсутствует достоверная информация о соответствующих траекториях. Позднее, при более общем анализе, мы увидим, что даже в этом случае справедливы некоторые тождества, которые могут быть преобразованы в правила сумм при соответствующем асимптотическом поведении амплитуд. Прежде чем перейти к этому вопросу, рассмотрим некоторые проблемы, возникающие в связи с правилом сумм (4.47).

### § 5. Сверхсходимость и правила сумм, следующие из алгебры токов

Сначала отметим, что правая часть равенства (4.47)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dv a^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2, q_2^2) = 2if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t) \quad (4.61)$$

не зависит от «масс» токов  $q_1^2$  и  $q_2^2$ . Исторически именно этим обстоятельством и был обусловлен вывод сверхсходящихся правил сумм (СПС) для сильных взаимодействий [50]. Для конкретности рассмотрим случай пионной мишени

и векторных токов, принадлежащих изотопическому мультиплету с  $I = 1$ . Исследуя возможные особенности амплитуды  $A^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2, q_2^2)$  как функции «масс»  $q_i^2$  (остальные кинематические переменные фиксированы), мы должны обнаружить вклад  $\rho$ -мезонного промежуточного состояния в виде изолированного полюса в точке  $q_1^2 = m_\rho^2$  по каждой из переменных  $q_i^2$ . Поэтому мы должны например, иметь <sup>1)</sup>

$$\lim_{q_2^2 \rightarrow m_\rho^2} (m_\rho^2 - q_2^2) A^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2, q_2^2) = f_\rho A_{(\rho)}^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2), \quad (4.62)$$

где  $A_{(\rho)}^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2)$  — подходящая инвариантная амплитуда, описывающая процесс рождения  $\rho$ -мезона на пионной мишени под воздействием исходного тока. Из равенства (4.61), пользуясь тем, что  $F_\mu^\nu(t)$  не зависит от  $q_i^2$ , получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im} \bar{A}_{(\rho)}^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2) dv = 0. \quad (4.63)$$

Фактически это равенство — соотношение сверхсходимости для мнимой части «смешанной»<sup>2)</sup> амплитуды  $A_{(\rho)}^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2)$ , описывающей рождение  $\rho$ -мезона исходным током. Мы можем затем выделить  $\rho$ -мезонный полюс и по переменной  $q_1^2$ , написав:

$$\overline{\lim}_{q_1^2 \rightarrow m_\rho^2} (m_\rho^2 - q_1^2) A_{(\rho)}^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2) = f_{\rho\pi} A_{\rho\pi}^{\beta\alpha}(v, t). \quad (4.64)$$

В итоге получаем соотношение сверхсходимости для амплитуды  $\rho\pi$ -рассеяния

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im} A_{\rho\pi}^{\beta\alpha}(v, t) dv = 0, \quad (4.65)$$

совпадающее с соотношением (1.122). Тем самым показано, что соотношения сверхсходимости для адронных и смешанных амплитуд можно вывести из правил сумм алгебры токов, пользуясь тем, что правые части последних не зависят от «масс»  $q_1^2, q_2^2$ . Отметим, что при данном выводе СПС конкретная структура коммутаторов алгебры токов несущественна. Важно только то, чтобы коммутаторы типа (4.6) были локальными (или почти локальными), т. е. чтобы величины

$$\int d^3x \exp(-iq_2x) \langle p_2 | [V_0^\beta(x, 0), V_\mu^\alpha(0)] | p_1 \rangle$$

и

$$S^{\beta\alpha} = i \int d^3x \exp(-iq_2x) \langle p_2 | [V_0^\beta(x, 0), D^\alpha(0)] | p_1 \rangle$$

не зависели от  $q_1^2$  и  $q_2^2$  (или же были полиномиальными функциями этих переменных).

Обратное также верно: пользуясь подобными (4.63) соотношениями сверхсходимости для смешанных амплитуд и простейшими наиболее надежными коммутационными соотношениями алгебры токов (а именно коммутаторами зарядов и токов), можно вывести общее правило сумм (4.61) из тождества Уорда (4.60).

<sup>1)</sup> Величина  $f_\rho$  есть константа связи  $\rho$ -мезона с током:

$$\langle 0 | V_\mu^\alpha | \rho^\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \epsilon_\mu f_\rho;$$

$\epsilon_\mu$  — вектор поляризации  $\rho$ -мезона.

<sup>2)</sup> В оригинале «semistrong»; имеется в виду, что данная амплитуда содержит как адронные, так и лептонные токи. — Прим. ред.

Рассмотрим для простоты случай сохраняющихся векторных токов и начнем с такой конфигурации импульсов, для которой  $q_1^2 = t$ ,  $q_2^2 = 0$ . Из (4.60) имеем

$$vA^{\beta\alpha} = -2if_{\beta\alpha\gamma}F^\gamma(t), \quad (4.66)$$

$$v\alpha^{\beta\alpha} = 0. \quad (4.67)$$

Отсюда следует, что

$$a^{\beta\alpha} = c^{\beta\alpha}(t) \delta(v), \quad (4.68)$$

т. е. в качестве промежуточных состояний в амплитуду  $a^{\beta\alpha}(v, t, t, 0)$  могут давать вклад лишь частицы того же сорта, что и мишень.

В этом случае тензор  $t_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$ , входящий в формулу (4.30), принимает следующий вид:

$$t_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = \pi \langle \pi(p_2) | j_\nu^\beta | \pi(p_1 + q_1) \rangle \langle \pi(p_1 + q_1) | j_\mu^\alpha | \pi(p_1) \rangle \frac{1}{2} \delta(v). \quad (4.69)$$

Теперь вспомним определение (4.9):

$$\langle \pi(p') | j_\mu^\beta | \pi(p) \rangle = (p + p')_\mu F^\beta((p - p')^2). \quad (4.70)$$

Из фундаментального предположения о трансформационных свойствах токов относительно группы  $SU(3)$

$$[Q^\beta, j_\mu^\alpha(x)] = if_{\beta\alpha\gamma} j_\mu^\gamma(x) \quad (4.71)$$

следует, что

$$F^\gamma(t) = L^\gamma F_\pi(t), \quad (4.72)$$

где  $L^\gamma$  — надлежащая  $SU(3)$ -матрица, а  $F_\pi(t)$  — электрический формфактор пиона, нормированный условием  $F_\pi(0) = 1$ . Отсюда легко находим

$$a^{\beta\alpha}(v, t, t, 0) = 2\pi L^\beta L^\alpha F_\pi(t) \delta(v). \quad (4.73)$$

Пользуясь коммутационным соотношением  $[L^\beta, L^\alpha] = if_{\beta\alpha\gamma} L^\gamma$ , получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a^{\beta\alpha}(v, t, t, 0) dv &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} [a^{\beta\alpha}(v, t, t, 0) - a^{\alpha\beta}(v, t, 0, t)] dv = \\ &= 2if_{\alpha\beta\gamma} F^\gamma(t), \end{aligned} \quad (4.74)$$

которое и представляет собой правило сумм (4.47) для рассматриваемой конфигурации импульсов  $q_1^2 = t$ ,  $q_2^2 = 0$ .

Выполним теперь аналитическое продолжение<sup>1)</sup> от  $A^{\beta\alpha}(v, t, t, 0) \equiv \equiv A(s, 0)$  до  $A^{\beta\alpha}(v, t, t, q_2^2) \equiv A(s, q_2^2)$ . Если предположить, что амплитуда  $A(s, q_2^2)$  как функция  $q_2^2$  при прочих фиксированных переменных имеет полюса и разрезы, соответствующие возможным адронным промежуточным состояниям, то можно написать

$$A(s, q_2^2) = A(s, 0) + q_2^2 \int \frac{\rho(s, q'^2)}{q'^2(q'^2 - q_2^2)} dq'^2, \quad (4.75)$$

где  $\rho(s, q^2)$  — функция, содержащая вклады как дискретных, так и непрерывных (по спектру масс) адронных состояний и отличная от нуля лишь для времени подобных  $q^2$ . Решающим соображением является то, что вели-

<sup>1)</sup> В данном конкретном случае вместо  $v$  удобнее использовать переменную  $s = = (p_1 + q_1)^2$ . Пороговое значение  $\text{Im} A^{\beta\alpha}(v)$  в действительности может зависеть от  $q_2^2$ .

чина  $\rho(s, q^2)$  пропорциональна амплитуде рождения адронного состояния с массой  $q^2$  и надлежащими квантовыми числами. Далее, предположим, что амплитуда  $\rho(s, q^2)$  удовлетворяет сверхсходящемуся правилу сумм

$$\int ds \operatorname{Im} \rho(s, q^2) = 0 \quad (4.76)$$

(конечно, имеется в виду мнимая часть в  $s$ -канале при фиксированном  $q^2$ ). Интегрируя мнимую часть равенства (4.75) по  $\nu$  и используя предположение (4.76) совместно с равенством (4.74), получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} [a^{\beta\alpha}(\nu, t, t, q_2^2) - a^{\alpha\beta}(\nu, t, q_2^2, t)] d\nu = 2if_{\beta\alpha\gamma} F^\nu(t). \quad (4.77)$$

Таким образом, нам нужно только «нормировочное условие» для некоторого частного значения  $q_1^2, q_2^2$ , а все остальное следует из сверхсходимости. Удобно выбрать конфигурацию  $q_1^2 = t, q_2^2 = 0$  или, что эквивалентно,  $q_1^2 = 0, q_2^2 = t$ , поскольку в этих случаях для получения правила сумм нужны лишь коммутаторы зарядов и токов.

### § 6. Особенности формфакторов и расходимость правил сумм

Перейдем теперь к очень важной проблеме, возникающей в связи с общим правилом сумм (4.47), которое в конечном счете есть некое интегральное представление аналитической функции  $F^\nu(t)$ . Последняя, будучи формфактором, должна иметь особенности при времениподобных (т. е. положительных) значениях  $t$ . В простом случае изовекторного формфактора ближайшей особенностью должен быть  $\rho$ -мезонный полюс в точке  $t = m_\rho^2$ . Следовательно, интеграл в левой части равенства (4.47), будучи продолженным в область положительных значений  $t$ , при  $t = m_\rho^2$  должен обращаться в бесконечность. Каков же механизм образования этой особенности?

На первый взгляд дело в том, что продолженная функция  $a^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)$  имеет особенность при  $t = m_\rho^2$  из-за наличия  $\rho$ -мезонного вклада в  $t$ -канале для парциальной волны с  $J = 1$ . Но более внимательный анализ показывает, что это не так. Действительно, разложение амплитуды  $A^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)$  по парциальным волнам в  $t$ -канале начинается с  $J = 2$ . В отсутствие вкладов с  $J = 0, 1$  в амплитуде  $A^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)$  можно убедиться либо прямой проверкой, либо используя изложенную в гл. 1 (приложение II) теорию производных инвариантов. Для данной амплитуды парциальные волны с  $J = 0, 1$  в  $t$ -канале вообще не имеют смысла («nonsense waves»). Таким образом, амплитуда  $A^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)$  в  $t$ -канале не может содержать вкладов таких состояний, которые породили бы особенности формфактора  $F^\nu(t)$ , связанного с векторным током.

Коль скоро исключена возможность того, что особенности функции  $F^\nu(t)$  появляются из-за особенностей функции  $a^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)$ , остается единственный механизм, а именно расходимость интеграла в левой части равенства (4.47). Такое объяснение согласуется и с предыдущим утверждением о том, что  $a^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)$  асимптотически ведет себя как  $\nu^{\alpha-2}$  [формула (4.59), где  $\alpha$  — ведущая траектория с изоспином 1, т. е.  $\rho$ -траектория. Отсюда ясно, что при том значении  $t_0$ , при котором  $\alpha(t_0) = 1$ , интеграл должен расходиться; в то же время  $t_0 = m_\rho^2$ , по определению [50].

В § 8, п. 1 мы рассмотрим механизм возникновения этой расходимости с точки зрения комплексной плоскости Хури или Редже; мы увидим, что для ее появления необходимо вполне определенное соотношение между неподвижными и движущимися полюсами в плоскости Хури [51—54].

### § 7. Частные кинематические конфигурации импульсов; предел точной симметрии и поправки к нему

Если бы мы имели дело со случаем точной симметрии, то дивергенция тока  $D^\alpha$  обращалась бы в нуль, а вместе с ней обратились бы в нуль и амплитуды  $U_i$ ,  $V_i$  и  $W$ . Действительно, из соотношений (4.8), (4.12) и (4.15) видно, что амплитуды  $U_i$  и  $V_i$  — это величины первого порядка по параметру нарушения симметрии, тогда как  $W$  — величина второго порядка. Поэтому подходящим выбором значений кинематических переменных  $q_1^2$ ,  $q_2^2$  и  $t$  можно добиться того, чтобы в некотором тождестве Уорда осталась всего лишь одна амплитуда. Соответствующее правило сумм легко насыщается, и результат оказывается прямым следствием симметрии теории. Поясним сказанное примером. Соотношение (4.24') при  $q_2^2 = (q_1 q_2) = 0$  дает

$$\nu A^{\beta\alpha}(\nu, t, t, 0) = U_{1i}^{\beta\alpha}(\nu, t, t, 0) - 2if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t), \quad (4.78)$$

$$\int \nu a^{\beta\alpha}(\nu, t, t, 0) = u_{1i}^{\beta\alpha}(\nu, t, t, 0). \quad (4.79)$$

Таким образом, в пределе точной симметрии ( $U_1 = 0$ ) величина  $\alpha^{\beta\alpha}$  может быть отличной от нуля лишь при  $\nu = 0$ ; другими словами, промежуточными могут быть лишь те состояния, масса которых совпадает с массой частиц мишени. Поэтому правило сумм (4.47) дает результат, соответствующий пределу точной симметрии, и, что еще важнее, оно дает метод вычисления поправок к этому результату в случае, когда симметрия оказывается нарушенной.

Перейдем теперь к некоторым конкретным примерам и выведем несколько наиболее важных правил сумм. Их количественный анализ мы оставим, однако, до гл. 8, посвященной методу бесконечно большого импульса, который более удобен, особенно в случае мишени со спином.

Мы начнем со случая меняющих странность векторных токов при  $q_2^2 = (q_1 q_2) = 0$ , когда справедливы соотношения (4.78) и (4.79). Итак, положим  $\beta = V^+$ ,  $\alpha = V^-$ , а в качестве мишени возьмем  $\pi^+$ . В этом случае величина  $if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t) = F_\pi(t)$  является электрическим формфактором пиона, а правило сумм (4.47) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu [a_{\pi^+ V^-}^{\nu^+ V^-}(\nu, t, t, 0) - a_{\pi^- V^+}^{\nu^- V^+}(\nu, t, 0, t)] = 2F_\pi(t). \quad (4.80)$$

В этом правиле сумм удобно выделить вклады тех одночастичных состояний, которые в пределе точной  $SU(3)$ -симметрии могут иметь такую же массу, как и частицы мишени. В нашем примере таковым будет промежуточное  $\bar{K}^0$ -состояние, а поэтому

$$\begin{aligned} a^{\nu^+ V^-} &= 2\pi\delta(\nu - \nu_K) f_+(0) f_+(t) + \{a^{\nu^+ V^-}\}_{\text{непр}}, \\ a^{\nu^- V^+} &= \{a^{\nu^- V^+}\}_{\text{непр}}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

где  $\nu_K = \frac{1}{2}(m_K^2 - m_\pi^2)$  обращается в нуль в пределе точной  $SU(3)$ -симметрии. Формфактор  $f_+(t)$  определен следующим образом (гл. 2, § 5, п. 2, б):

$$\begin{aligned} \langle \bar{K}^0 | \bar{V}_\mu^- | \pi^+ \rangle &= (p_\pi + p_K)_\mu f_+(t) + (p_K - p_\pi)_\mu f_-(t), \\ t &= (p_K - p_\pi)^2. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Переписав (4.80) с учетом (4.79) и (4.81), получим

$$f_+(0) f_+(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\text{непр}} d\nu [u_1^{\nu^+ V^-}(\nu, t, 0, 0) - u_1^{\nu^- V^+}(\nu, t, 0, t)] = F_\pi(t). \quad (4.83)$$

Это правило сумм <sup>1)</sup> очень удобно для вычисления поправок, необходимых в связи с нарушением  $SU(3)$ -симметрии (собственно, для этого оно и было впервые предложено). В пределе точной симметрии ( $u_1 = v_1 = 0$ ) мы имели бы

$$\begin{aligned} f_+^2(0) &= 1, \\ f_+(t) &= F_\pi(t), \end{aligned} \tag{4.84}$$

а поправка к этому пределу дается интегральным членом в формуле (4.83).

Отметим, что эта поправка имеет первый порядок по параметру нарушения, поскольку выражения (4.8) и (4.12) для  $u_1$  и  $v_1$  содержат только по одному оператору  $DV^\pm$ .

Переходя теперь к случаю  $q_1^2 \equiv t = 0$ , получаем другой очень важный результат. Для данной конфигурации импульсов непрерывный вклад в  $a^{V^+V^-}$  можно найти с помощью соотношения (4.26):

$$v^2 a^{V^+V^-}(v, 0, 0, 0) = w^{V^+V^-}(v, 0, 0, 0). \tag{4.85}$$

Правило сумм принимает тогда следующий вид:

$$f_+^2(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\text{непр}} [w^{V^+V^-}(v, 0, 0, 0) - w^{V^-V^+}(v, 0, 0, 0)] \frac{dv}{v^2} = 1. \tag{4.86}$$

Вспоминая, что выражение (4.15) для  $W^{\beta\alpha}$  квадратично по дивергенции  $SU(3)$ -тока, заключаем, что поправки к пределу точной симметрии  $f_+^2(0) = 1$  имеют второй порядок по параметру нарушения  $SU(3)$ -инвариантности. Это есть дисперсионный вариант [55] теоремы Адемолло — Гатто [56].

Для той же конфигурации импульсов можно получить еще более важный результат, рассмотрев случай двух аксиальных  $SU(2)$ -токов и мишени с изоспином  $1/2$  <sup>2)</sup>. Правило сумм (4.47) принимает тогда следующий вид <sup>3)</sup>:

$$r_A^2 + \frac{2}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{v^2} w^-(v, 0, 0, 0) = 1, \tag{4.87}$$

где  $r_A$  — ренормировочное отношение аксиальной и векторной констант связи при  $t = 0$ . В частном случае нуклонной мишени соотношение (4.87) представляет собой правило сумм Адлера — Вейсбергера [57, 58].

Рассмотрим теперь другую конфигурацию импульсов, а именно  $t = 0$ ,  $q_1^2 = q_2^2 = (q_1 q_2) = u$  (мишень все та же — изодублет). Взяв индексы  $\beta, \alpha$  соответствующими двум заряженным изовекторным токам, из равенства (4.47) получим довольно интересный результат [59]. С учетом обычного разложения  $a^{\beta\alpha} = a^+ \delta_{\beta\alpha} + a^- 1/2 [\tau_\beta, \tau_\alpha]$  имеем<sup>3)</sup>

$$F_1^2(u) + \frac{2}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} a^-(v, 0, u, u) dv = 1. \tag{4.88}$$

Это равенство представляет собой фактически частный случай соотношения (4.51), в котором выделен «нуклонный» вклад и использовано определение

$$\overline{\langle \overline{p'} | V_\mu^\alpha | p \rangle} = (p + p')_\mu \frac{1}{2} \tau_\alpha F_1((p - p')^2). \tag{4.89}$$

Соотношение (4.24') в нашем случае дает

$$va^- + ub_2^- = 0, \tag{4.90}$$

<sup>1)</sup> Аналогичное правило сумм для  $f_-(t)$  написать нельзя вследствие расходимости.

<sup>2)</sup> Например, нуклон, усредненный по поляризации.

<sup>3)</sup> Мы пользуемся разложением  $W^{\beta\alpha} = W^+ \delta_{\beta\alpha} + W^- 1/2 [\tau_\beta, \tau_\alpha]$ .

что позволяет переписать (4.88) в виде

$$F_1^2(u) - \frac{2u}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} b_2^-(v, 0, u, u) \frac{dv}{v} = 1. \quad (4.91)$$

Беря производную в точке  $u = 0$  и используя добавочное соотношение

$$vb_2^- + uc_1^- + c_5^- = 0,$$

вытекающее из равенства (4.25''), получаем

$$\left\{ \frac{dF_1(u)}{du} \right\}_{u=0} = -\frac{1}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} c_5^-(v, 0, 0, 0) \frac{dv}{v^2}. \quad (4.92)$$

Путем соответствующих выкладок абсорбтивную амплитуду  $c_5^-$  в данной конфигурации импульсов можно выразить через полные сечения рассеяния «изовекторных фотонов»; тогда соотношение (4.92) свяжет эти сечения со средним радиусом изовекторного заряда  $\langle r_V^2 \rangle = 6 \{dF_1(u)/du\}_{u=0}$ . В такой форме равенство (4.92) совпадает с хорошо известным правилом сумм, полученным впервые Кабиббо и Радикати [60]. Отметим, что к этому же правилу сумм можно прийти, отправляясь от другой конфигурации импульсов, а именно  $q_1^2 = q_2^2 = 0$ ,  $2(q_1q_2) = -t$ .

В гл. 8, посвященной методу  $p \rightarrow \infty$ , мы вновь вернемся к этим правилам сумм и рассмотрим случай мишеней со спином. Интересующийся читатель найдет там более подробный анализ различных вкладов в правила сумм и их численные оценки.

### § 8. Функции, интерполирующие парциальные волны, и тождества алгебры токов

Выполняя обещание, данное в § 3, мы изложим в этом разделе корректный вывод правил сумм. Построения § 3 были эвристическими — предположив справедливость дисперсионных соотношений без вычитаний для всех инвариантных амплитуд в разложении (4.2), мы получили правила сумм (4.47), (4.52) — (4.55), справедливые в лучшем случае лишь тогда, когда интегралы сходятся. При подходе, который мы собираемся изложить, предположение о дисперсионных соотношениях без вычитаний заменяется некоторыми более общими предположениями относительно инвариантных амплитуд.

Главную роль будет играть предположение о том, что инвариантные амплитуды, входящие в тождества Уорда (4.24) — (4.28), удовлетворяют принципу максимальной аналитичности второго рода [61] (гл. 1, § 6). При таком условии коммутационные соотношения токов можно переписать в виде некоторых соотношений для интерполирующих функций Хури, справедливых при любых значениях масс и передаваемого импульса  $t$ ; если, кроме того, в интересующей нас точке сходятся интегралы в выражениях [типа (1.50) и (1.51)] для интерполирующих функций, то указанные соотношения преобразуются в правила сумм § 3.

В качестве исходной точки вывода напишем разложения по степеням  $v$  для всех инвариантных амплитуд, введенных в предыдущих разделах:

$$A^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2, q_2^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{\beta\alpha}(t, q_1^2, q_2^2) v^n, \quad (4.93)$$

$$B_i^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2, q_2^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{in}^{\beta\alpha}(t, q_1^2, q_2^2) v^n$$

и т. д. Зависимость  $\alpha_n^{\beta\alpha}$ ,  $\beta_{in}^{\beta\alpha}$ , ... от кинематических переменных  $t$ ,  $q_1^2$  и  $q_2^2$  выписываться не будет.

Правда, подобные разложения не всегда законны, поскольку точка  $\nu = 0$  не при всех значениях  $t$ ,  $q_1^2$ ,  $q_2^2$  является точкой аналитичности; но их использование существенно упрощает выкладки, не отражаясь на справедливости конечных результатов <sup>1)</sup>.

При  $n$ , превышающих некоторое  $\lambda_0$  <sup>2)</sup>, коэффициенты  $\alpha_n^{\beta\alpha}$ ,  $\beta_{in}^{\beta\alpha}$  и т. д. можно, подобно тому как это было сделано в гл. 1, § 6, выразить следующей формулой обращения:

$$\begin{aligned}\alpha_n^{\beta\alpha} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{a^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)}{\nu^{1+n}}, \\ \beta_{in}^{\beta\alpha} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{b_i^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)}{\nu^{1+n}}.\end{aligned}\quad (4.94)$$

При выводе этих формул используются представления (4.29) для амплитуд; абсорбтивные части при  $\nu > \nu_s$  определяются разложением (4.30) для тензора  $t_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$ , а при  $\nu < -\nu_s$  перекрестными соотношениями (4.33).

Введем теперь интерполирующие амплитуды Хури:

$$\begin{aligned}\alpha^{\beta\alpha}(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{a^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)}{\nu^{1+z}}, \\ \beta_i^{\beta\alpha}(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{b_i^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)}{\nu^{1+z}}.\end{aligned}\quad (4.95)$$

В соответствии с асимптотическим поведением абсорбтивных амплитуд введенные выше функции аналитичны в области  $\text{Re } z > \lambda_0$  и при целых положительных  $z = n$ ,  $n > \lambda_0$  принимают значения, совпадающие с коэффициентами рядов (4.93), например  $\alpha^{\beta\alpha}(n) \equiv \alpha_n^{\beta\alpha}$ .

Допустим теперь, что амплитуды удовлетворяют требованию максимальной аналитичности второго рода. Это значит, что интерполирующие функции (4.95) допускают аналитическое продолжение по меньшей мере до  $\text{Re } z = 0$ , а их значения при всех неотрицательных целых  $n = 0, 1, \dots$  также совпадают с соответствующими коэффициентами рядов (4.93).

Асимптотика любой из амплитуд при больших  $\nu$  (при фиксированных  $q_1^2$ ,  $q_2^2$  и  $t$ ) находится тогда обычным образом. Взяв в качестве примера амплитуду  $A^{\beta\alpha}$  (остальные амплитуды трактуются аналогично), напишем<sup>1</sup>

$$A^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{\beta\alpha} \nu^n = \frac{i}{2} \int_{\gamma} \frac{\alpha^{\beta\alpha}(z)}{\sin \pi z} (-\nu)^z dz. \quad (4.96)$$

При фиксированных  $t$ ,  $q_1^2$ ,  $q_2^2$  функция  $\alpha^{\beta\alpha}(z)$  предполагается аналитичной в окрестностях точек  $z = 0, 1, 2, \dots$ , а контур интегрирования  $\gamma$  состоит из небольших окружностей с центрами в этих точках, которые обходятся по часовой стрелке. Обычные рассуждения, основанные на развороте контура

<sup>1)</sup> В соответствии с предположениями об аналитичности инвариантных амплитуд (гл. 1, § 5) точка  $\nu = 0$  является регулярной при  $t > 2m^2 + q_1^2 + q_2^2 - 2s_0$ , где  $s_0$  — пороговое значение для абсорбтивной амплитуды по  $s$ . Если же точка  $\nu = 0$  не принадлежит области аналитичности, то все рассуждения можно повторить, отправляясь от какого-нибудь другого разложения (например, от двойного ряда по  $s$  и  $\bar{s}$ ).

<sup>2)</sup> Например, если  $a^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)$  при фиксированных  $t$ ,  $q_1^2$ ,  $q_2^2$  ведет себя следующим образом:

$$a^{\beta\alpha} \underset{\nu \rightarrow +\infty}{\sim} \nu^\lambda, \quad a^{\beta\alpha} \underset{\nu \rightarrow -\infty}{\sim} \nu^{\lambda'}.$$

то  $\lambda_0 = \max \{\text{Re } \lambda, \text{Re } \lambda'\}$ .



интегрирования, показывают, что асимптотика  $A^{\beta\alpha}$  при больших  $\nu$  определяется крайней правой особенностью интерполирующей функции  $\alpha^{\beta\alpha}(z)$ .

Очень важным следствием оказывается то, что целые степени  $\nu^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  не могут входить в асимптотические разложения при больших  $\nu$ , поскольку точки  $z = 0, 1, 2, \dots$  лежат справа от развернутого контура интегрирования.

Вернемся еще раз к уравнению (4.24'):

$$\nu A^{\beta\alpha} + B_0^{\beta\alpha} = -2if_{\beta\alpha\nu} F^{\nu}(t). \quad (4.97)$$

Здесь

$$B_0^{\beta\alpha} = (Qq_2) B_2^{\beta\alpha} + (\Delta q_2) B_4^{\beta\alpha} - U_1^{\beta\alpha}. \quad (4.98)$$

Заменив амплитуды интегралами типа (4.96), получаем

$$\frac{i\pi}{2} \nu \int_{\mathbb{E}} dz \frac{\alpha^{\beta\alpha}(z) (-\nu)^z}{|\sin \pi z|} + \frac{i}{2} \int_{\gamma} dz \frac{\beta_0^{\beta\alpha}(z) (-\nu)^z}{\sin \pi z} = -2if_{\beta\alpha\nu} F^{\nu}(t). \quad (4.99)$$

Выделим теперь в левой части равенства (4.99) то слагаемое, которое соответствует не зависящему от  $\nu$  выражению  $-2if_{\beta\alpha\nu} F^{\nu}(t)$  в правой части. Учитывая, что интеграл от  $\beta_0^{\beta\alpha}(z)$  не может содержать постоянной, заключаем, что в левой части равенства (4.99) постоянная может появиться лишь за счет вклада  $1/\nu$  в интеграле от  $\alpha^{\beta\alpha}(z)$ ; вклад же этот обусловлен полюсом функции  $1/\sin \pi z$  в точке  $z = -1$ . Следовательно,<sup>1</sup>

$$\lim_{\nu \rightarrow -1} \alpha^{\beta\alpha}(z) = 2if_{\beta\alpha\nu} F^{\nu}(t). \quad (4.100)$$

Остальные тождества Уорда приведут тем же путем к соотношениям<sup>1</sup>):

$$\beta_{i1}^{\beta\alpha}(-1) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (4.101)$$

$$\eta_{u_1}^{\beta\alpha}(-1) = -S^{\beta\alpha}, \quad (4.102)$$

$$\eta_{v_1}^{\beta\alpha}(-1) = -S^{\beta\alpha}, \quad (4.103)$$

$$\alpha_{\frac{1}{2}}^{\beta\alpha}(-2) = -S^{\beta\alpha}. \quad (4.104)$$

В действительности не все из них независимы. В качестве таковых можно взять (4.100) и (4.101) при  $i = 1, 3$ , (4.102) и (4.104), а все прочие будут их следствиями при учете перекрестных соотношений (4.33).

Приведенные выше равенства получены без каких-либо предположений относительно расположения и характера различных особенностей в  $z$ -плоскости. Входящие в их левые части функции  $\alpha^{\beta\alpha}(z)$ ,  $\beta_i^{\beta\alpha}(z)$  и т. д. определены через абсорбтивные части соответствующих амплитуд интегралами типа (4.95) или их аналитическими продолжениями. Если эти интегралы сходятся при  $z = -1$ , то соотношения (4.100) — (4.103) превращаются в правила сумм (4.47), (4.52) — (4.54). Если к тому же определяющий  $\alpha^{\beta\alpha}(z)$  интеграл сходится и при  $z = -2$ , то из (4.104) получим также и правило сумм (4.55).

Итак, мы видим, что тождества Уорда всегда можно переписать в виде ряда соотношений для интерполирующих функций Хури. Ответ на вопрос, можно ли преобразовать эти соотношения в правила сумм, зависит, конечно, от асимптотического поведения амплитуд, другими словами, от расположения особенностей в  $z$ -плоскости. Таким образом соотношения (4.100) — (4.104) являются более общими, чем правила сумм § 3. В тех случаях, когда прямой переход к правилу сумм невозможен, следует попытаться вычислить

<sup>1</sup>) Интерполирующие функции Хури, соответствующие  $u_i^{\beta\alpha}$ ,  $v_i^{\beta\alpha}$ , ..., обозначаются через  $\eta_{u_i}(z)$ ,  $\eta_{v_i}(z)$  и т. д.

величины  $\alpha^{\beta\alpha}(-1)$ ,  $\alpha^{\beta\alpha}(-2)$  и т. д. каким-либо другим способом, используя то или иное аналитическое продолжение интегралов (4.95).

Есть и другой, весьма простой метод получения соотношений (4.100) — (4.104). Уравнение (4.97) связывает абсорбтивные амплитуды:

$$v\alpha^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2, q_2^2) + b_0^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2, q_2^2) = 0. \quad (4.105)$$

Прямым следствием этого соотношения и определения (4.95) интерполирующих функций является равенство

$$\alpha^{\beta\alpha}(z - 1) = -\beta_0^{\beta\alpha}(z), \quad (4.106)$$

справедливое во всей области, в которой функции  $\alpha^{\beta\alpha}(z)$ ,  $\beta_0^{\beta\alpha}(z)$  определены аналитическим продолжением интеграла (4.95). Далее, из (4.97) имеем

$$\beta_0^{\beta\alpha}(0) = -2if_{\beta\alpha\gamma}F^\gamma(t). \quad (4.107)$$

Подставляя этот результат в (4.106), получаем

$$\alpha^{\beta\alpha}(-1) = 2if_{\beta\alpha\gamma}F^\gamma(t), \quad (4.108)$$

что совпадает с (4.100). Остальные соотношения такого типа получаются аналогично.

Правило сумм (4.47), в которое переходит соотношение (4.108) в предположении сходимости интеграла для  $\alpha^{\beta\alpha}(z)$  (4.95) в точке  $z = -1$ , можно понимать как «высокоэнергетическую теорему» для амплитуды  $A^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2, q_2^2)$ :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v A^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2, q_2^2) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2, q_2^2) dv = -2if_{\beta\alpha\gamma}F^\gamma(t). \quad (4.109)$$

В то же время само соотношение (4.108) получается из низкоэнергетической теоремы для амплитуды  $B_0$ :

$$\lim_{v \rightarrow 0} B_0^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2, q_2^2) = -2if_{\beta\alpha\gamma}F^\gamma(t),$$

что как раз и есть равенство (4.107). Если интеграл в представлении (4.95) для  $\beta_0^{\beta\alpha}(z)$  сходится при  $z = 0$ , то соотношение (4.107) превращается в дисперсионное правило сумм:

$$\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b_0^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2, q_2^2) \frac{dv}{v} = -2if_{\beta\alpha\gamma}F^\gamma(t). \quad (4.110)$$

Это правило можно, конечно, получить и из (4.47), используя равенство (4.105).

## 1. Особенности интерполирующих функций

Главный вопрос, который нам нужно теперь выяснить, это характер и расположение особенностей интерполирующих функций в  $z$ -плоскости. Данный вопрос имеет первостепенное значение с точки зрения возможности перехода от полученных ранее соотношений к правилам сумм. Чтобы решить эту задачу, мы должны преобразовать наши соотношения в соответствующие соотношения в плоскости углового момента. Действительно, в плоскости углового момента мы имеем критерии, фиксирующие положение простейших особенностей (полюса Редже), которыми определяется высокоэнергетическое поведение амплитуд. Основная идея состоит в том, чтобы установить связь между амплитудами разложения (4.2) и некоторой другой системой инвариантных амплитуд, допускающих простые разложения в  $t$ -канале (ток + ток  $\rightarrow$  мишень + антимишень) на парциальные волны. Теория таких амплитуд

изложена в гл. 1, приложение II, где, в частности, подробно рассматривался и интересующий нас случай векторных или аксиальных токов и скалярной мишени (гл. 1, приложение II, § 1).

Мы рассмотрим амплитуду  $A^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)$ ; для остальных амплитуд рассуждения аналогичны.

Будем исходить из фундаментального соотношения (II.26) гл. 1

$$A^{\beta\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} F^{\beta\alpha}, \quad (4.111)$$

куда входит скалярноподобная амплитуда  $F^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)$ , определяющаяся разложением (II.21) и соотношением (II.20), гл. 1, приложение II. Эта амплитуда очень просто разлагается по парциальным волнам в  $t$ -канале<sup>1)</sup>:

$$F^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) = \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) P_J(\cos \theta_t) F_J^{\beta\alpha}(Q_{12}), \quad (4.112)$$

причем в парциальную амплитуду  $F_J^{\beta\alpha}(Q_{12})$  дают вклад лишь состояния с полным угловым моментом  $J$  в системе центра масс  $t$ -канала. Другими словами, эта амплитуда обладает точно такими же свойствами, как и амплитуда рассеяния скалярных частиц. В частности, положение полюсов Редже в плоскости комплексного углового момента, так же как и положение особенностей в плоскости Хури, определяется тогда методом, изложенным в гл. 1, § 8.

Введем теперь интерполирующие функции Хури для скалярноподобной амплитуды  $F^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12})$ . Для этого разложим ее в ряд по степеням  $\nu$  аналогично тому, как это было сделано в (4.93):

$$F^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12}) = \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n^{\beta\alpha} \nu^n, \quad (4.113)$$

и обычным образом определим интерполирующую функцию  $\varphi^{\beta\alpha}(z)$  как аналитическое продолжение интеграла

$$\varphi^{\beta\alpha}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{f^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12})}{\nu^{1+z}}, \quad \operatorname{Re} z > \lambda, \quad (4.114)$$

в котором  $f^{\beta\alpha}$  — абсорбтивная часть  $F^{\beta\alpha}$ , а  $\lambda$  — вещественное число, определяющееся условием  $f^{\beta\alpha}(\nu, Q_{12})|_{|\nu| \rightarrow \infty} = O(\nu^\lambda)$ .

Из (4.111) получаем

$$\alpha^{\beta\alpha}(z-2) = z(z-1)\varphi^{\beta\alpha}(z). \quad (4.115)$$

Если учесть соотношение (4.108), то отсюда следует, что функция  $\varphi^{\beta\alpha}(z)$  имеет неподвижный полюс<sup>2)</sup> в точке  $z = +1$  с вычетом

$$R = 2if_{B\alpha\gamma} F^\gamma(t). \quad (4.116)$$

Факт существования такого полюса не имеет каких-либо прямых физических следствий, поскольку наблюдаемыми являются лишь коэффициенты  $\varphi_n$  при  $n \geq 2$  [согласно формуле (4.111), наблюдаемой амплитудой является вторая производная от  $A^{\beta\alpha}(\nu)$ ]. Но из него следует, что интерполирующая функция  $F^{\beta\alpha}(J, t, q_1^2, q_2^2)$  парциальных амплитуд (4.112) также имеет неподвижный полюс в точке  $J = 1$  плоскости комплексного углового момента. Это не ведет к противоречию, поскольку наша амплитуда  $F^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)$  соответствует низшему порядку по слабому и электромагнитному взаимодействиям, и потому

<sup>1)</sup> Напомним, что  $Q_{12} \equiv (t, q_1^2, q_2^2)$ .

<sup>2)</sup> «Неподвижным» мы называем такой полюс в  $z$ -плоскости, положение которого не зависит от  $t$ .

теряют силу обычные соображения, основанные на нелинейности упругой унитарности [51—54].

Неподвижные полюса играют важную роль при решении поставленного в § 6 вопроса относительно механизма возникновения особенностей по  $t$  (соответствующих особенностям формфакторов) в левых частях правил сумм типа

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu a^{\beta\alpha}(\nu, t, q_1^2, q_2^2) = 2if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t). \quad (4.117)$$

Действительно, предположим, что функция  $\varphi^{\beta\alpha}(z)$  имеет только движущиеся полюса, и покажем, что в этом случае интеграл в левой части (4.117) не может породить искомые особенности формфактора.

Рассмотрим для конкретности случай мишени с изоспином  $1/2$  и напомним обычное разложение в изоспиновом пространстве для произвольной амплитуды:

$$F^{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} F^+ + \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha] F^-. \quad (4.118)$$

Если высокоэнергетическое поведение амплитуды  $F^-$  определяется движущимся  $\rho$ -полюсом, т. е.

$$\varphi^-(z) = \frac{\Gamma(z, t)}{z - \alpha_\rho(t)}, \quad (4.119)$$

где  $\Gamma(z, t)$  — функция, регулярная и не равная нулю в окрестности точек  $z = 1$  и  $z = \alpha_\rho(t)$ , то при больших  $\nu$

$$F^-(\nu, t) \underset{\nu \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\gamma(t)}{\sin \pi \alpha_\rho(t)} (-\nu)^{\alpha_\rho(t)}. \quad (4.120)$$

Из соотношений (4.120) и (4.111) следует, что

$$A^{\beta\alpha}(\nu) \underset{\nu \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\gamma(t)}{\sin \pi \alpha_\rho} \alpha_\rho (\alpha_\rho - 1) (-\nu)^{\alpha_\rho - 2}. \quad (4.121)$$

Но такая асимптотика нас не устраивает, поскольку она не ведет к расходимости интеграла (4.117) в точке  $t = m_\rho^2$  (т. е. при  $\alpha_\rho = 1$ ), которая соответствовала бы особенности формфактора в этой точке. Действительно, вычисленный при  $\alpha(t) < 1$  вклад асимптотического члена (4.121) в интеграл

$$\int_{\nu_0}^{\infty} a^-(\nu, Q_{12}) d\nu^1$$

$$\alpha_\rho (\alpha_\rho - 1) \int_{\nu_0}^{\infty} \nu^{\alpha_\rho - 2} d\nu = -\alpha_\rho \nu_0^{\alpha_\rho - 1} \quad (4.122)$$

остается конечным в пределе при  $\alpha_\rho(t) \rightarrow 1$  ( $t \rightarrow m_\rho^2$ ) и не может воспроизвести особенность формфактора. Для решения проблемы нам необходим неподвижный полюс в точке  $z = 1$  у функции  $\varphi^-(z)$ . Положим

$$\varphi^-(z, t) = \frac{B^-(z, t)}{(z-1)(z-\alpha_\rho(t))}, \quad (4.123)$$

где  $B^-(z, t)$  — функция, регулярная и не равная нулю в окрестности точек  $z = 1$  и  $z = \alpha_\rho(t)$ . Из равенства (4.115) имеем

$$\alpha^-(z, t) = \frac{z+2}{z+2-\alpha_\rho(t)} B^-(z+2, t), \quad (4.124)$$

1) Заметим, что  $a^- = \text{Im } A^- \sim -\gamma(t) \alpha_\rho (\alpha_\rho - 1) \nu^{\alpha_\rho - 2}$ .

что соответствует следующей асимптотике:

$$A^- \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} - \left[ \frac{\pi \alpha_\rho}{\sin \pi \alpha_\rho} B^-(\alpha_\rho(t), t) (-v)^{\alpha_\rho - 2} + \frac{B^-(1, t)}{1 - \alpha_\rho(t)} \frac{1}{v} \right]. \quad (4.125)$$

Важно отметить, что последнее выражение остается конечным при  $t \rightarrow m_\rho^2$ , как это и должно быть в соответствии с результатами § 6, где было показано, что амплитуда  $A^-(v, t, q_1^2, q_2^2)$  не может содержать  $\rho$ -полюса в  $t$ -канале (в  $t$ -канале состояние с  $J = 1$  не имеет смысла!). Конечное значение выражения (4.125) обеспечивается взаимным уничтожением двух полюсов.

Асимптотика (4.125) амплитуды  $A^-(v, t, q_1^2, q_2^2)$  в отличие от асимптотики (4.124) порождает в интеграле (4.117) нужную особенность при  $t = m_\rho^2$ . Действительно, соответствующее (4.125) асимптотическое выражение для абсорбтивной части

$$a^-(v, t, q_1^2, q_2^2) \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \pi \alpha_\rho B(\alpha_\rho(t), t) v^{\alpha_\rho - 2} \quad (4.126)$$

не содержит подавляющего множителя  $\alpha_\rho(t) - 1$  и при подстановке в (4.117) дает искомую особенность.

Положение движущихся полюсов функции  $\alpha^{\beta\alpha}(z)$  установить нетрудно, поскольку эта функция связана соотношением (4.115) с  $\varphi^{\beta\alpha}(z)$ , а последняя имеет точно такие же особенности, как амплитуда рассеяния скалярных частиц. Следовательно, каждой реджевской траектории  $\alpha(t)$  соответствует полюс функции  $\varphi^{\beta\alpha}(z)$  в точке  $z = \alpha(t)$  и сопутствующие полюса (спутелиты) в точках  $z = \alpha(t) - 1$  и т. д. (гл. 1, § 8). Согласно уравнению (4.115), особенности функции  $\alpha^{\beta\alpha}(z)$  получаются общим сдвигом (на две единицы влево) особенностей функции  $\varphi^{\beta\alpha}(z)$ .

Точно таким же образом мы можем, конечно, рассмотреть и другие амплитуды, но полагаем, что сказанного достаточно для самого требовательного из читателей.

Попробуем теперь подвести итог всему, что было сделано в этом параграфе. Прежде всего предположив аналитичность второго рода для инвариантных амплитуд и использовав тождества Уорда (4.24) — (4.28), мы получили соотношения (4.100) — (4.104) для интерполирующих функций Хури. Можно ли эти соотношения переписать в виде правил сумм или нельзя — это зависит от асимптотического поведения абсорбтивных частей соответствующих амплитуд при высоких энергиях. Чтобы проанализировать это поведение, мы ввели так называемые скаляроподобные амплитуды (гл. 1, приложение II). Последние точно так же разлагаются по парциальным волнам в  $t$ -канале, как и амплитуды рассеяния скалярных частиц. Поэтому они весьма удобны для определения положения различных особенностей, в частности полюсов Редже в плоскости комплексного углового момента, а следовательно, и в плоскости Хури. Для передачи информации от скаляроподобных амплитуд к физическим мы имеем соотношения (II.26) гл. 1, одним из которых является (4.111); указанные соотношения немедленно переписываются в виде уравнений типа (4.115) для интерполирующих функций Хури. Последними уравнениями определяется расположение особенностей физических интерполирующих амплитуд, подобных  $\alpha^{\beta\alpha}(z)$ , и, конечно, их асимптотическое поведение.

Некоторые из скаляроподобных амплитуд Хури должны иметь неподвижные полюса в нефизических точках [см. текст после формулы (II.27) в гл. 1]. Тогда исчезает подавляющий множитель, который имеется в реджевской асимптотике абсорбтивных амплитуд. Неподвижные полюса дают вклад только в вещественную часть физических амплитуд [формула (4.125)], тогда как мнимые части этих амплитуд имеют, как уже упоминалось в § 4, чисто реджевскую асимптотику [формула (4.126)]. Скаляроподобные амплитуды Хури могут иметь неподвижные полюса потому, что мы рассматриваем амплитуды токов, не удовлетворяющие требованию упругой унитарности.

§ 9. Роль возможных переджизованных адронов

Гипотеза максимальной аналитичности второго рода в рассматриваемой задаче имеет такой же физический смысл, как и в гл. 1, § 6, а именно она и в данном случае запрещает присутствие вкладов элементарных частиц в  $t$ -канале — все частицы реджизованы. Для иллюстрации мы приведем остроумный пример теории, содержащей переджизованные адроны [62].

Рассмотрим случай сохраняющихся изовекторных токов и предположим, что  $\rho$ -мезон есть переджизованная элементарная частица. Вычислим вклад в амплитуду  $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$  диаграммы с обменом  $\rho$ -мезоном (фиг. 4.2), положив для простоты  $q_1^2 = 0$ . Нам понадобятся следующие матричные элементы:

$$\langle 0 | V_\nu^\beta | \rho^\nu \rangle = \delta_{\beta\gamma} f_\rho \varepsilon_\nu, \quad (4.127)$$

$$\langle \rho^\nu | p_1, -p_2 \rangle = -2g^\nu \varepsilon^\mu P_\mu, \quad (4.128)$$

$$\langle \rho^{\nu'}(q_2) | V_\nu^\alpha | \rho^\nu(\Delta) \rangle = -(\varepsilon' \varepsilon) (\Delta + q_2)_\nu i\varepsilon^{\nu'\alpha\nu}, \quad (4.129)$$

где  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  — векторы поляризации  $\rho$ -мезона. В соотношении (4.129) мы пренебрегли вкладами взаимодействия магнитного и квадрупольного типов, оставив только электрический. В результате выкладок получим

$$\{T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}\}_\rho = D^{\beta\alpha} \left[ 2Q_\mu P_\nu + 3\Delta_\mu P_\nu - \frac{\nu}{m_\rho^2} \left( 3\Delta_\mu Q_\nu + \frac{3}{2} \Delta_\mu \Delta_\nu + 2Q_\mu Q_\nu + Q_\mu \Delta_\nu \right) \right], \quad (4.130)$$

где

$$D^{\beta\alpha} = f_\rho g^\nu i \varepsilon^{\beta\alpha\nu} \frac{1}{(m_\rho^2 - q_2^2)(m_\rho^2 - t)}. \quad (4.131)$$

Сравнивая (4.130) с разложением (4.2), получаем следующие выражения для инвариантных амплитуд:

$$\begin{aligned} \{B_1\}_\rho &= 2D^{\beta\alpha}, & \{B_3\}_\rho &= 3D^{\beta\alpha}, \\ \{C_1\}_\rho &= -\frac{2\nu}{m_\rho^2} D^{\beta\alpha}, & \{C_2\}_\rho &= -\frac{\nu}{m_\rho^2} D^{\beta\alpha}, \\ \{C_3\}_\rho &= -\frac{3\nu}{m_\rho^2} D^{\beta\alpha}, & \{C_4\}_\rho &= -\frac{3\nu}{2m_\rho^2} D^{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (4.132)$$

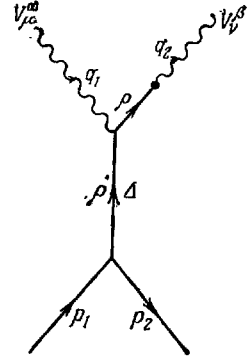
а прочие амплитуды равны нулю. Отсюда видно, что спектральные представления § 3 в данном случае неприменимы, поскольку некоторые из амплитуд имеют дополнительное вещественное слагаемое. Например,

$$\begin{aligned} B_1^{\beta\alpha}(\nu, t, 0, q_2^2) &= 2D^{\beta\alpha} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\nu_s}^{\infty} d\nu' \frac{b_1^{\beta\alpha}(\nu', t, 0, q_2^2)}{\nu' - \nu - i\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\nu_s} d\nu' \frac{b_1^{\beta\alpha}(\nu', t, 0, q_2^2)}{\nu' - \nu + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Мы покажем, что вследствие этого правило сумм (4.47) даже в обобщенной форме (4.100) не выполняется: в его правую часть добавляется некоторое слагаемое.

Действительно, соотношение (4.25') в рассматриваемом случае сохраняющихся токов ( $V_1^{\beta\alpha} = 0$ ) имеет следующий вид:

$$\nu A^{\beta\alpha} + B^{\beta\alpha} = -2i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t), \quad (4.134)$$



Фиг. 4.2

где

$$B^{\beta\alpha} = (Qq_1) B_1^{\beta\alpha} + (\Delta q_1) B_3^{\beta\alpha}. \quad (4.135)$$

Для абсорбтивных частей отсюда следует соотношение

$$va^{\beta\alpha} + b^{\beta\alpha} = 0. \quad (4.136)$$

Вводя интерполирующие функции Хури  $\alpha^{\beta\alpha}(z)$  и  $\beta^{\beta\alpha}(z)$ , определенные обычным образом:

$$\begin{aligned} \alpha^{\beta\alpha}(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{a^{\beta\alpha}(v, t, 0, q_2^2)}{v^{1+z}}, \\ \beta^{\beta\alpha}(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{b^{\beta\alpha}(v, t, 0, q_2^2)}{v^{1+z}}, \end{aligned} \quad (4.137)$$

из (4.136) получим соотношение

$$\alpha^{\beta\alpha}(z-1) = -\beta^{\beta\alpha}(z), \quad (4.138)$$

аналогичное соотношению (4.106) (его можно написать из соображений перекрестной симметрии).

Вычисленный нами вклад  $\rho$ -мезонного промежуточного состояния не имеет никакого отношения к абсорбтивным амплитудам этой модели, поскольку мы считаем  $\rho$ -мезон элементарным. Следовательно, он не дает вклада в интерполирующие функции Хури, определенные интегралами (4.137), и потому функция  $\beta^{\beta\alpha}$  не воспроизводит первый член степенного ряда для амплитуды  $B^{\beta\alpha}(v, t, q_1^2, q_2^2)$

$$B^{\beta\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{\beta\alpha} v^n. \quad (4.139)$$

Вместо этого

$$\beta_0^{\beta\alpha} = \beta^{\beta\alpha}(0) + \bar{\beta}^{\beta\alpha}, \quad (4.140)$$

где

$$\bar{\beta}^{\beta\alpha} = [2(Qq_1) + 3(\Delta q_1)] D^{\beta\alpha} = 2i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} g^\nu f_\rho \frac{q_2^2 - t}{(m_\rho^2 - q_2^2)(m_\rho^2 - t)}. \quad (4.141)$$

Другими словами, в данной модели из-за наличия вклада элементарной частицы амплитуда  $B^{\beta\alpha}(v, t)$  не удовлетворяет требованию аналитичности второго рода.

В связи с этим общее соотношение алгебры токов (4.100) должно быть изменено. Действительно, из (4.138) и (4.140) получаем

$$\alpha^{\beta\alpha}(-1) = -\beta^{\beta\alpha}(0) = \bar{\beta}^{\beta\alpha} - \beta_0^{\beta\alpha}. \quad (4.142)$$

Воспользовавшись теперь, как обычно, тождеством Уорда (4.134), имеем

$$\beta_0^{\beta\alpha} \equiv B^{\beta\alpha}(0, t) = -2i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} F^\nu(t). \quad (4.143)$$

Подставляя (4.141) и (4.143) в соотношение (4.142), получаем

$$\begin{aligned} \alpha^{\beta\alpha}(-1) &= 2i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} F^\nu(t) + \bar{\beta}^{\beta\alpha} = \\ &= 2i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \left[ F^\nu(t) + f_\rho g^\nu \frac{q_2^2 - t}{(m_\rho^2 - q_2^2)(m_\rho^2 - t)} \right]. \end{aligned} \quad (4.144)$$

Это равенство заменяет в рассматриваемом случае общее соотношение алгебры токов (4.100). Если  $a^{\beta\alpha}(v, t, 0, q_2^2)_{v \rightarrow \infty} \sim O(v^{-1-\varepsilon})$ , то его можно записать

в виде правила сумм:

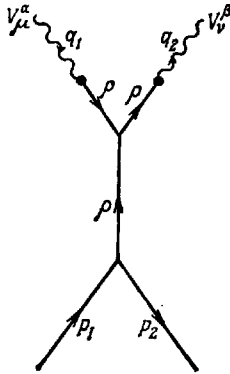
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dv a^{\beta\alpha}(\nu, t, 0, q_2^2) = 2i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \left[ F^\nu(t) + f_\rho g^\nu \frac{q_2^2 - t}{(m_\rho^2 - q_2^2)(m_\rho^2 - t)} \right], \quad (4.145)$$

заменяющего соотношение (4.47).

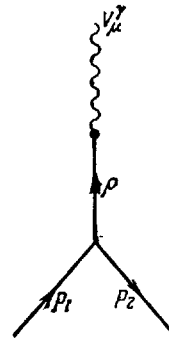
Далее, если мы, пользуясь, так же как и в § 5, соотношением (4.62), выделим амплитуду смешанного процесса  $V_\mu + \pi \rightarrow \rho + \pi$ , то в нашем случае получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \operatorname{Im} A_{(\rho)}^{\beta\alpha}(\nu, t, 0) = 2i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} g^\nu. \quad (4.146)$$

Итак, в нашей модели даже соотношение сверхсходимости (4.63) для смешанной амплитуды  $A_{(\rho)}^{\beta\alpha}(\nu, t, 0)$  оказывается неверным; оно заменяется соотношением (4.146), правая часть которого не равна нулю.



Фиг. 4,3



Фиг. 4,4

Нетрудно показать, что в этой модели правило сумм (4.65) для адронной амплитуды также меняет свой вид — добавляется отличное от нуля слагаемое в его правой части; для этого достаточно вычислить соответствующий диаграмме фиг. 4.3 вклад при произвольном  $q_1^2$  и затем выделить вычет при  $q_1^2 = m_\rho^2$ ,  $q_2^2 = m_\rho^2$ .

Весьма интересно рассмотреть в нашей модели вопрос о  $\rho$ -мезонном полюсе формфактора  $F^\nu(t)$  при времениподобном  $t = m_\rho^2$ . В соотношении (4.145) этот полюс формфактора взаимно уничтожается с аналогичным полюсом дополнительного слагаемого

$$f_\rho g^\nu \frac{q_2^2 - t}{(m_\rho^2 - q_2^2)(m_\rho^2 - t)}$$

Действительно, вычислим полюсный член формфактора, соответствующий диаграмме фиг. 4.4. Пользуясь определениями (4.127) и (4.128), получаем

$$\langle p_2 | V_\mu^\gamma | p_1 \rangle = 2f_\rho g^\nu P_\mu \frac{1}{m_\rho^2 - t} + \text{рег.}, \quad (4.147)$$

где «рег.» означает регулярный при  $t = m_\rho^2$  вклад. Вспоминая определение формфактора

$$\langle p_2 | V_\mu^\gamma | p_1 \rangle = 2P_\mu F^\nu(t), \quad (4.148)$$

получаем

$$F^\nu(t) = f_\rho g^\nu \frac{1}{m_\rho^2 - t} + f_{\text{рег}}^\nu(t), \quad (4.149)$$



где  $f_{\text{рег}}^{\gamma}(t)$  — функция, регулярная при  $t = m_{\rho}^2$ . Подставив (4.149) в соотношение (4.145), видим, что при  $t = m_{\rho}^2$  правило сумм записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu a^{\beta\alpha}(\nu, m_{\rho}^2, 0, q_2^2) = 2i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} f_{\text{рег}}^{\gamma}(m_{\rho}^2). \quad (4.150)$$

Следовательно, в нашей модели интеграл в левой части не имеет особенности при  $t = m_{\rho}^2$ . Это согласуется с тем, что теперь у нас нет вклада в  $a^{\beta\alpha}(\nu, t)$  от обмена в  $t$ -канале  $\rho$ -мезоном, рассматриваемым как элементарная частица.

Все сказанное достаточно проясняет существо дела. Мы видим, что соотношение (4.100) основывается на динамическом предположении, том же самом, которое необходимо и для вывода соотношения сверхсходимости для адронных амплитуд, а именно на предположении об аналитичности второго рода инвариантных амплитуд. С точки зрения физики это означает, что при таком подходе нет элементарных адронов — все обмениваемые в  $t$ -канале частицы должны быть реджизованы.

## 5. Феноменологические лагранжианы и киральная симметрия

### § 1. Введение

Как мы видели в предыдущих главах, для вывода на основе алгебры токов теорем о мягких пионах требуются следующие предположения:

1) что выполняются фундаментальные коммутационные соотношения между зарядами и токами;

2) что в пределе нулевой массы пиона аксиальный ток точно сохраняется.

Подход, излагаемый в данной главе, основан на том, что любая лагранжева теория, удовлетворяющая этим требованиям, должна воспроизводить результаты техники мягких пионов<sup>1)</sup>.

Такой подход возможен благодаря тому, что правильный результат получается уже при учете диаграмм типа деревьев, т. е. беспетлевых диаграмм<sup>2)</sup>. Это несколько смягчит то неприятное обстоятельство, что большинство наших лагранжианов будут в высшей степени неренормируемыми.

Хотя результаты лагранжева подхода нельзя назвать неожиданными, по крайней мере в отношении низкоэнергетических теорем, *метод*, которым выводятся эти теоремы, оказывается новым и интересным.

Самая простая и самая известная теория, инвариантная относительно киральной группы, — это линейная  $\sigma$ -модель [81, 164, 165]. В данной модели существование киральных мультиплетов с частицами одинаковой массы, нулевая масса нуклона, стабильность пиона и т. д. — все это оказывается «естественным» следствием киральной симметрии.

Важнейшим шагом на пути к пониманию физики мягких пионов было выяснение той важной роли, которую играет механизм «спонтанного нарушения киральной симметрии»<sup>3)</sup>. Наличие кирально-неинвариантного вакуума приводит к полной перестройке теории, так что *в итоге* мы приходим к хорошо известным низкоэнергетическим теоремам об испускании и поглощении безмассовых пионов с нулевыми импульсами [171].

Хотя линейная  $\sigma$ -модель дает много ценной информации, ее нельзя признать наиболее удобной для получения интересующих нас результатов. Самый простой путь, ведущий прямо к цели, — использование нелинейных реализаций киральной симметрии (простейший пример — нелинейная  $\sigma$ -модель). В этой новой формулировке пионное поле при киральных преобразованиях переходит в некую функцию поля. В применении к другим полям киральные преобразования перемешивают лишь члены одного и того же изоспинового мультиплета, но с коэффициентами, опять-таки зависящими от пионного поля. Таким образом, мы естественным образом приходим к кирально-инвариантному лагранжиану в теории, в которой масса пиона равна нулю и существование киральных мультиплетов не обязательно. Тем самым нелинейные лагранжианы дают общий подход для последовательного вывода всех результатов, касающихся мягких пионов [171—178].

<sup>1)</sup> Общие обзоры по данному вопросу см., например, в статьях [159—163].

<sup>2)</sup> Напомним читателю, что низкоэнергетические пределы в электродинамике также даются только деревьями.

<sup>3)</sup> См. [166—168, 108—110]. Имеется обзор [169], посвященный спонтанному нарушению симметрии; о применении такого подхода в других областях физики см. [170].

Лагранжев подход может быть обобщен также и для описания векторной доминантности в физических процессах [172—181]. Алгебра полей, основанная на калибровочной теории Янга-Миллса, позволяет естественным образом описать такие свойства мягких  $\rho$ -мезонов, как, например, универсальное  $\rho$ -взаимодействие [182—184, 91]. Исходя из пропорциональности тока полю, можно вывести простые коммутационные соотношения для пространственных компонент токов, о чем уже говорилось в гл. 2.

Существует много различных точек зрения на то, в какой мере приемлем и перспективен лагранжев подход. Ясно, однако, что лагранжева схема, будучи наиболее удобной для вывода теорем о мягких пионах, вместе с тем позволяет глубже понять их. В рамках этой схемы легко рассчитать излучение и поглощение нескольких мягких пионов [185]. Подобные вычисления оказались бы в высшей степени громоздкими, если их проводить обычными методами алгебры токов.

Лагранжев подход использовался также для феноменологического описания взаимодействия «жестких пионов», 4-импульс которых отличен от нуля [186]<sup>1)</sup>. Получающиеся при этом выражения обладают тем немаловажным преимуществом, что они обязательно имеют правильную асимптотику в пределе нулевого импульса. Разумеется, выводы теории жестких пионов зависят от выбора того или иного лагранжиана. Такой выбор, который обычно делают из соображений простоты (например, не рассматривают взаимодействия, содержащие высшие производные), является, очевидно, дополнительным физическим предположением, необходимым для выхода за рамки общей схемы алгебры токов.

Гораздо более оптимистичен подход, при котором какой-нибудь особенно простой лагранжиан рассматривается как отправная точка для некоего более глубокого анализа сильных взаимодействий. При этом надеются, что новые методы позволят выйти за рамки беспетлевых диаграмм и тем самым учесть унитарность. Различные ученые уже провели недавно ряд исследований в данном направлении. Довольно неожиданным результатом явилась необходимость модификации правил Фейнмана при наличии нескольких производных в лагранжиане взаимодействия [244, 245].

На нынешнем этапе трудно отдать предпочтение какой-либо точке зрения. Независимо от этого мы считаем, что без лагранжева подхода наше понимание физики псевдоскалярных и векторных мезонов было бы гораздо менее удовлетворительным.

## § 2. Линейная реализация киральной симметрии

### 1. $\sigma$ -модель

Как уже говорилось,  $\sigma$ -модель — наиболее известный пример лагранжевой теории, обладающей киральной инвариантностью. В ней используются линейные реализации киральной симметрии, подобные тем, которые рассматриваются в случае обычных симметрий, например изоспиновой.

Прежде чем переходить к детальному обсуждению, напомним читателю, что группа  $SU(2) \otimes SU(2)$ , связанная с векторными и аксиально-векторными зарядами  $Q_\alpha$  и  $\bar{Q}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), изоморфна группе вращений в четырехмерном пространстве  $O(4)$ . Действительно, мы можем установить соответствие

$$\begin{aligned} Q_i &\rightarrow L_i, \\ \bar{Q}_i &\rightarrow A_i, \end{aligned} \quad (5.1)$$

<sup>1)</sup> См. также обзоры [187, 188].

где  $L_i$  — обычные операторы углового момента, а  $A_i$  — эрмитовы генераторы «лоренцева поворота». Они выражаются через генераторы четырехмерных вращений  $M_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 1, \dots, 4$ ):

$$\begin{aligned} L_i &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk}, \\ A_i &= M_{4i} \end{aligned} \tag{5.2}$$

и подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [L_\alpha, L_\beta] &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma, \\ [L_\alpha, A_\beta] &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\gamma, \\ [A_\alpha, A_\beta] &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Чтобы построить обычную плотность лагранжиана, инвариантную относительно *внутренней* группы  $O(4)$ , нам нужно классифицировать все частицы по представлениям этой группы. В частности, мы должны включить пин [соответствующий представлению  $I = 1$  группы внутренних вращений  $O(3)$ ] в подходящее представление группы  $O(4)$ . Простой и естественный путь — ввести четырехкомпонентное векторное поле, компонентами которого служили бы три изотопические компоненты пionsа и добавочное скалярное поле  $\sigma$ . Тогда коммутационные соотношения 4-вектора  $(\pi, \sigma = \pi_4)$  с зарядами  $Q_\alpha$  и  $\bar{Q}_\alpha$  будут определяться его трансформационными свойствами:

$$[M_{\mu\nu}, \pi_\lambda] = -i(\delta_{\mu\lambda}\pi_\nu - \delta_{\nu\lambda}\pi_\mu), \tag{5.4}$$

или с учетом (5.1) и (5.2)

$$\begin{aligned} [Q_\alpha, \pi_\beta] &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\pi_\gamma, & [Q_\alpha, \sigma] &= 0, \\ [\bar{Q}_\alpha, \pi_\beta] &= -i\sigma\delta_{\alpha\beta}, & [\bar{Q}_\alpha, \sigma] &= i\pi_\alpha. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Из соотношений (5.5) явствует, что поле  $\sigma$  соответствует  $P$ - и  $G$ -четной частице с  $I = 0$  и  $J = 0$ . Частица  $\sigma$  может взаимодействовать с двумя, четырьмя и т. д. пионами, с барионами и с «вакуумом», т. е.  $\sigma$ -поле может иметь ненулевое вакуумное среднее. Это обстоятельство, как мы увидим в следующем разделе, имеет далеко идущие следствия. Пока лишь ясно, что отличие от нуля вакуумное среднее  $\sigma$ -поля явилось бы нарушением киральной инвариантности: так как  $\langle \pi \rangle_0$  всегда равно нулю (хотя бы в силу закона сохранения четности) и так как в случае точной симметрии  $\pi$  и  $\sigma$  принадлежат одному и тому же неприводимому представлению, величина  $\langle \sigma \rangle_0$  тоже должна быть равной нулю.

Инвариантность относительно преобразований группы  $O(4)$  диктует следующую форму свободного лагранжиана  $(\pi, \sigma)$ -полей:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \pi)^2 + (\partial_\mu \sigma)^2 - \mu^2 (\pi^2 + \sigma^2)]. \tag{5.6}$$

Мы видим, что киральная симметрия требует равенства неренормированных масс пionsа и  $\sigma$ -мезона. Простейший кирально-инвариантный лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = \frac{1}{4} \lambda (\pi^2 + \sigma^2)^2. \tag{5.7}$$

С точки зрения инвариантности допустимы и более высокие степени  $\pi^2 + \sigma^2$ , но взаимодействие (5.7) является единственным явно ренормируемым. Если мы хотим рассмотреть другие поля, то и их следует классифицировать в соответствии с киральной группой  $SU(2) \otimes SU(2)$ . В частности, если требуется рассмотреть нуклонное поле со спином и изоспином  $1/2$ , то его трансформационные свойства при киральных преобразованиях можно опре-

делить в тесной аналогии со свойствами нейтрино:

$$\begin{aligned} [Q_\alpha, \psi] &= -\frac{1}{2} \tau_\alpha \psi, \\ [\bar{Q}_\alpha, \bar{\psi}] &= -\frac{1}{2} \tau_\alpha \gamma_5 \bar{\psi}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Если ввести поля

$$\psi_{R,L} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \psi \quad (5.9)$$

и заряды

$$Q_{R,L}^\alpha = \frac{1}{2} (Q^\alpha \pm \bar{Q}^\alpha), \quad (5.10)$$

то эти формулы преобразуются к виду

$$\begin{aligned} [Q_R^\alpha, \psi_R] &= -\frac{1}{2} \tau^\alpha \psi_R, \quad [Q_L, \psi_R] = 0, \\ [Q_R^\alpha, \psi_L] &= 0, \quad [Q_L^\alpha, \psi_L] = -\frac{1}{2} \tau^\alpha \psi_L. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Отсюда ясно, что  $\psi_R$  и  $\psi_L$  принадлежат к неприводимым представлениям  $(\frac{1}{2}, 0)$  и  $(0, \frac{1}{2})$  группы  $SU(2) \otimes SU(2)$  [и  $O(4)$ ]. Точно так же нетрудно сообразить, что  $(\pi, \sigma)$ -поля преобразуются по представлению  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  киральной группы  $SU(2) \otimes SU(2)$ <sup>1)</sup>.

Если требуется написать кирально-инвариантный лагранжиан для невзаимодействующих нуклонов, то нужно взять лишь

$$\mathcal{L}_{0N} = \frac{1}{2} i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi + \text{в. с.}, \quad (5.12)$$

опустив массовый член, так как  $\bar{\psi}\psi$  есть четвертая компонента кирального вектора, но отнюдь не киральный скаляр. Следовательно, при такой элементарной трактовке киральной симметрии нуклон ведет себя как «адронное нейтрино» — ситуация, довольно далекая от физической реальности.

Явный вид коммутатора

$$[\bar{Q}^\alpha, \bar{\psi}\psi] = i(i\bar{\psi}\gamma_5\tau_\alpha\psi) \quad (5.13)$$

свидетельствует о том, что нуклонный 4-вектор есть  $(i\bar{\psi}\gamma_5\tau\psi, \bar{\psi}\psi)$ , т. е. кирально-инвариантным обобщением обычного псевдоскалярного пион-нуклонного взаимодействия будет

$$\mathcal{L}_{\text{вз } \pi N} = g_{\pi N} \bar{\psi} (\sigma + i\gamma_5 \tau \pi) \psi. \quad (5.14)$$

Выпишем, наконец, полностью простейший пион-нуклонный кирально-инвариантный лагранжиан:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} [(\partial_\mu \pi)^2 + (\partial_\mu \sigma)^2 - \mu^2 (\pi^2 + \sigma^2)] + \frac{1}{4} \lambda (\pi^2 + \sigma^2)^2 + \\ &+ i\bar{\psi} \gamma \partial \psi + g_{\pi N} \bar{\psi} (\sigma + i\gamma_5 \tau \pi) \psi. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Исходя из лагранжиана (5.15), можно получить явные выражения для векторного и аксиального токов. Вспомогательное определение (гл. 2, § 1, п. 1)

$$J_\mu^\alpha = \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_r} \delta_\alpha \psi_r, \quad (5.16)$$

<sup>1)</sup> Другая возможность заключается во введении в качестве кирального партнера пиона  $\sigma$ -частицы с изоспином 1 и  $J^P = 0^+$ . В этом случае  $\pi$  и  $\sigma$  принадлежали бы представлению  $(1, 0) \oplus (0, 1)$  группы  $SU(2) \oplus SU(2)$ . Однако получающаяся теория, не обладая новым физическим содержанием, оказывается более сложной.

где

$$\delta_\alpha \psi_r = i [Q_\alpha, \psi_r], \quad (5.17)$$

и используя ранее приведенные коммутационные соотношения, легко найти

$$V_\mu^\alpha = \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{1}{2} \tau^\alpha \psi + (\boldsymbol{\pi} \times \partial_\mu \boldsymbol{\pi})^\alpha, \quad (5.18)$$

$$A_\mu^\alpha = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{2} \tau^\alpha \psi + (\sigma \partial_\mu \boldsymbol{\pi}^\alpha - (\partial_\mu \sigma) \boldsymbol{\pi}^\alpha). \quad (5.19)$$

Оба тока сохраняются точно. Ясно, далее, что в наименьшем порядке теории возмущений перенормировка отсутствует,  $r_A = 1$ , и распадная константа пиона  $f_\pi$ , связанная с матричным элементом

$$\langle 0 | A_\mu^\alpha | \pi^\beta \rangle = i q_\mu f_\pi \delta_{\alpha\beta}, \quad (5.20)$$

в точности равна нулю.

Перечислим основные положения теории с лагранжианом (5.15) (в низшем порядке теории возмущений):

1. Масса пиона равна массе  $\sigma$ -мезона.
2. Отсутствует прямое (отл)-взаимодействие. В самом деле, из трех 4-векторов невозможно построить  $O(4)$ -инвариант.
3. Масса нуклона равна нулю.
4. Вероятность пионного распада равна нулю.
5. Аксиальная «константа связи» не ренормируется,  $r_A = 1$ .

Нетрудно убедиться, что такие закономерности сохраняются и в высших порядках *обычной теории возмущений*. Но это не означает, что лагранжиан (5.15) должен быть отброшен. Вскоре мы увидим, что при некоторых особенностях взаимодействия нельзя пользоваться обычной теорией возмущений.

## 2. Условие частичного сохранения аксиального тока (ЧСАТ)

Простейший способ нарушить киральную инвариантность — добавить в рассмотренный лагранжиан член

$$\mathcal{L}_B = a\sigma, \quad (5.21)$$

преобразующийся как четвертая компонента  $O(4)$ -вектора (но не как скаляр).

Присутствие этого члена не меняет выражений (5.18) и (5.19) для токов, но дивергенция аксиального тока уже не будет равняться нулю; она будет определяться знаменитым условием ЧСАТ<sup>1)</sup>

$$\partial^\mu A_\mu^\alpha = -a\boldsymbol{\pi}^\alpha. \quad (5.22)$$

Выбор нарушающего симметрию члена в виде (5.21) был сделан, помимо исторических соображений, по следующим причинам. Во-первых, мы уже привыкли брать в качестве нарушающего симметрию члена величину, преобразующуюся по простейшему представлению группы; во-вторых, линейность  $\mathcal{L}_B$  по  $\sigma$  позволяет применить особый математический метод, весьма полезный для дальнейшего.

Простой вид лагранжиана  $\sigma$ -модели [выражения (5.15) и (5.21)], а также пропорциональность дивергенции аксиального тока пионному полю позволяют в явном виде вычислить коммутаторы дивергенций между собой, а также с зарядами группы  $SU(2) \otimes SU(2)$ . Между тем для подробного исследо-

<sup>1)</sup> Условие (5.22) просто вывести обычным методом гл. 2, § 4, п. 1, который дает равенство  $\partial^\mu A_\mu^\alpha = \delta \mathcal{L} / \delta \bar{e}_\alpha$ . В рассматриваемом случае  $\delta \mathcal{L} = a \delta \sigma = i a \bar{e}_\alpha [\bar{Q}_\alpha^-, \sigma] = -a \boldsymbol{\pi}_\alpha \bar{e}_\alpha$ , откуда и следует равенство (5.22).

вания рассеяния физических пионов (гл. 6) нужно знать, как будет показано, следующие коммутаторы (далеко за рамками того, что может дать алгебра токов):  $[\bar{Q}_\alpha, \bar{D}_\beta]$  (так называемый  $\sigma$ -член),  $[\bar{D}_\alpha, \bar{D}_\beta]$  и  $[\bar{D}_\alpha, \dot{\bar{D}}_\beta]$ . Для первого мы немедленно получаем

$$[\bar{Q}_\alpha, \bar{D}_\beta] = -a[\bar{Q}_\alpha, \pi_\beta] = ia\delta_{\alpha\beta}\sigma; \quad (5.23)$$

здесь присутствует лишь член с  $I = 0$ . Далее как следствие канонических коммутационных соотношений мы имеем

$$[\bar{D}_\alpha, \bar{D}_\beta] = 0. \quad (5.24)$$

Наконец, используя тождество между сопряженным импульсом и  $\dot{\pi}_\alpha$ , существующее в ренормируемой  $\sigma$ -модели,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_\alpha} = \dot{\pi}_\alpha,$$

получаем (мы имеем дело с ренормированными полями):

$$[\bar{D}_\alpha(x), \dot{\bar{D}}_\beta(y)] = a^2[\pi_\alpha(x), \dot{\pi}_\beta(y)] = ia^2\delta_{\alpha\beta}\delta^3(x-y). \quad (5.25)$$

Отсюда видно, что в такой упрощенной модели совокупность искомым коммутаторов принимает особенно простой вид, напоминающий структуру коммутаторов для плотностей токов, диктуемую алгеброй полей.

### 3. Головастиковый механизм

Прямым следствием включения нарушающего симметрию члена (5.21) оказывается то, что теперь отличны от нуля разность масс  $\pi - \sigma$ , масса нуклона, константа распада пиона и константа ( $\sigma\pi\pi$ )-взаимодействия. Соответствующие диаграммы представлены на фиг. 5.1, где мы видим новый и важный элемент — *головастиковый процесс*, т. е. прямой переход  $\sigma \rightarrow$  вакуум. Такой переход оказывается возможным благодаря тому, что теперь вследствие нарушения киральной симметрии вакуумное среднее  $\sigma$ -поля  $\langle 0 | \sigma | 0 \rangle$  уже не равно нулю.

Наличие в диаграмме головастика лучше всего рассматривать как указание на то, что мы неправильно пользуемся методом теории возмущений. В самом деле, разложение в ряд теории возмущений следует производить в окрестности точки устойчивого равновесия. Другими словами, мы должны потребовать, чтобы исходный лагранжиан как функция полей удовлетворял «условию равновесия»<sup>1)</sup>

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = 0. \quad (5.26)$$

В связи с этим удобно ввести новое поле

$$\sigma' = \sigma - b, \quad (5.27)$$

так чтобы получающийся лагранжиан не содержал линейных по  $\sigma'$  членов. Теперь в разложении по теории возмущений участвует новое поле  $\sigma'$ . Цель такого преобразования — исключить головастики путем переопределения поля  $\sigma \rightarrow \sigma'$ , причем  $\langle \sigma' \rangle_0 = 0$ .

<sup>1)</sup> Наше изложение носит полуклассический характер, ибо поля рассматриваются не как операторы, а как  $c$ -числа. Это оправдывается тем, что нас будут интересовать лишь диаграммы типа деревьев (§ 3, п. 7). В частности, условие (5.26), ведущее к исключению линейных по полю членов, можно считать *условием отсутствия головастика* лишь в преобращении петлями.

Итак, возьмем невозмущенную плотность лагранжиана

$$\mathcal{L}(\sigma) = \mathcal{L}_0(\sigma) + \mathcal{L}_{\text{вв}}(\sigma) + a\sigma \tag{5.28}$$

и подставим в нее выражение (5.27). Мы получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\sigma') = & \mathcal{L}_0(\sigma') + \mathcal{L}_{\text{вв}}(\sigma') + \sigma'(a - \mu^2 b + \lambda b^3) + \\ & + \frac{1}{2} \lambda b^2 (\pi^2 + 3\sigma'^2) + b\lambda\sigma'(\pi^2 + \sigma'^2) + g_{\pi N} b \bar{\psi}\psi. \end{aligned} \tag{5.29}$$

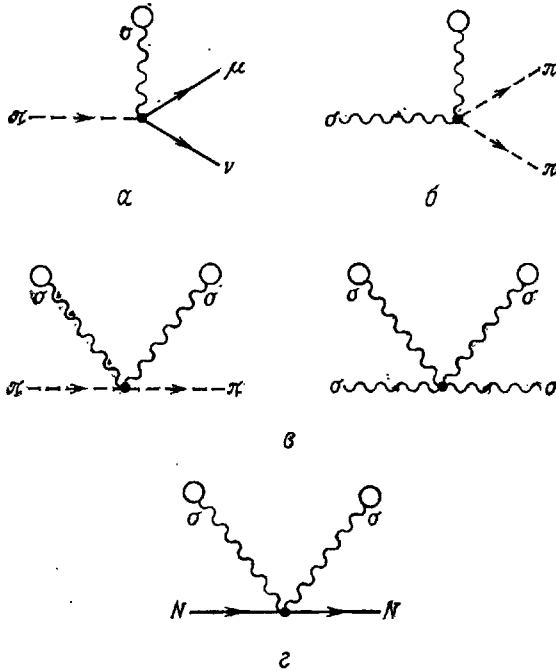
Для исключения линейного по  $\sigma'$  члена потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$a - \mu^2 b + \lambda b^3 = 0. \tag{5.30}$$

Следовательно, параметр  $b$  должен удовлетворять уравнению

$$a = \mu^2 b \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu^2} b^2 \right), \tag{5.31}$$

важной особенностью которого является его нелинейность по параметру  $b$ .



Фиг. 5.1

Мы видим, что существуют три возможных решения  $b_1(a)$ ,  $b_2(a)$ ,  $b_3(a)$ , стремящихся при  $a \rightarrow 0$  к пределам

$$b_1(0) = 0, \tag{5.32}$$

$$b_2(0) = \left( \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2}, \tag{5.33}$$

$$b_3(0) = - \left( \frac{i\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2}.$$

Кроме нормального решения  $b_1$ , обращаемого в нуль при  $a \rightarrow 0$  (т. е. когда нарушающий симметрию член равен нулю), имеются аномальные решения  $b_2$  и  $b_3$ , не равные нулю в этом пределе.



В существовании этих добавочных решений нет ничего загадочного. Поскольку лагранжиан содержит степень поля  $\sigma$  выше второй, уравнение  $\partial\mathcal{L}/\partial\sigma = 0$  должно иметь несколько решений, соответствующих разным точкам равновесия, в окрестностях которых мы (возможно) были бы вправе пользоваться рядом теории возмущений. Разумеется, присутствие взаимодействий, содержащих более четырех  $\sigma$ -полей, приведет к уравнениям более высокого порядка, т. е. к большему числу «аномальных» решений для  $b$ . Аномальные решения имеют очень важное значение и вот почему: поскольку физические эффекты нарушения киральной симметрии *явным образом зависят от постоянной  $b$*  [как видно из формул (5.29) и (5.32)], эффективное нарушение киральной инвариантности может иметь место даже в том случае, если в лагранжиане отсутствует нарушающий симметрию член.

О механизме такого «спонтанного нарушения» киральной симметрии будет подробно сказано в следующем разделе.

#### 4. «Спонтанное» нарушение киральной симметрии

Чтобы лучше ознакомиться с явлением, названным в предыдущем разделе «спонтанным нарушением киральной симметрии», вернемся к кирально-инвариантному лагранжиану  $\sigma$ -модели (5.15) и рассмотрим для простоты лишь его мезонную часть:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \pi)^2 + (\partial_\mu \sigma)^2 - \mu^2 (\pi^2 + \sigma^2)] + \frac{1}{4} \lambda (\pi^2 + \sigma^2)^2. \quad (5.34)$$

Поскольку нас интересует разложение в ряд теории возмущений, мы должны найти точку равновесия, соответствующую минимуму потенциальной энергии. Будем рассматривать  $\pi$  и  $\sigma$  как классические поля; в состоянии с минимальной энергией  $\pi$  и  $\sigma$  суть константы (т. е. они не зависят от  $x$  и  $t$ ), удовлетворяющие уравнениям ( $\mathcal{E}$  — плотность энергии):

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \pi} = 0, \quad (5.35)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma [\mu^2 - \lambda (\pi^2 + \sigma^2)] &= 0, \\ \pi_\alpha [\mu^2 - \lambda (\pi^2 + \sigma^2)] &= 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Таким образом, появляется бесконечное число решений

$$\pi = 0, \quad \sigma = 0; \quad \pi^2 + \sigma^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (5.37)$$

Если мы положим  $\pi = 0$  (чтобы избежать трудностей с четностью и изоспиновой инвариантностью), то точками равновесия будут

$$\sigma = 0, \quad \sigma = \pm \left( \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2}. \quad (5.38)$$

Встает вопрос, в каких случаях следует брать то или иное решение. Это сводится к тому, какая точка будет точкой устойчивого равновесия. Вычислив вторую производную (при  $\pi = 0$ )

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \sigma^2} = \mu^2 - 3\lambda \sigma^2, \quad (5.39)$$

мы видим, что если величина  $\mu^2$  положительна, т. е. если неренормированная масса вещественна (как это имеет место в любом «хорошем» лагранжиане), то решение  $\sigma = 0$  в действительности соответствует случаю устойчивого равновесия. Это означает, что при разложении в ряд теории возмущений законно пользоваться исходным лагранжианом  $\mathcal{L}(\sigma)$ .

Если же величина  $\mu^2$  отрицательна, то точка  $\sigma = 0$  является точкой неустойчивого равновесия. В частности, если  $\lambda$  отрицательно<sup>1)</sup>, то  $\sigma = 0$  соответствует локальному максимуму, а  $\sigma = \pm (\mu^2/\lambda)^{1/2}$  соответствует точкам устойчивого равновесия. Эти два случая ( $\mu^2 > 0$  и  $\mu^2 < 0$ ) схематически представлены на фиг. 5.2 (в обоих случаях  $\lambda < 0$ ).

Наш «рецепт» для такого «ненормального» лагранжиана сводится к следующему: нужно производить разложение в ряд в окрестности тех точек, которые могут быть достигнуты за счет сдвига начала координат от  $\sigma = 0$  до, например,  $\sigma = (\mu^2/\lambda)^{1/2}$ , вводя новую переменную  $\sigma' = \sigma - (\mu^2/\lambda)^{1/2}$ .

Обратимся теперь к квантово-полевоу кирально-инвариантному лагранжиану. Из приведенных (классических) рассуждений следует, что в случае лагранжиана  $\mathcal{L}(\sigma)$  вида (5.15) метод теории возмущений применим лишь при  $\mu^2 > 0$  ( $\lambda < 0$ ); при  $\mu^2 < 0$  ( $\lambda < 0$ ) нужно ввести новое поле  $\sigma' = \sigma - (\mu^2/\lambda)^{1/2}$  и разлагать в ряд теории возмущений новый лагранжиан  $\mathcal{L}'(\sigma') = \mathcal{L}(\sigma') + \delta\mathcal{L}(\sigma')$ . В первом случае (разложение в окрестности  $(\sigma)_0 = 0$ ) все обычные следствия киральной инвариантности, такие, как равенство масс  $\pi$ - и  $\sigma$ -мезонов, равенство нулю массы нуклона и т. д., выполняются строго. Во втором случае [разложение в окрестности  $(\sigma)_0 = \pm (\mu^2/\lambda)^{1/2}$ ] имеет место ситуация, обычно именуемая «спонтанным нарушением» симметрии: хотя лагранжиан и обладает киральной симметрией, у него существуют решения, обладающие меньшей симметрией. Действительно, как мы сейчас убедимся, лагранжиан (5.29) описывает теорию с ненулевой массой нуклона, неодинаковыми массами  $\pi$ - и  $\sigma$ -мезонов и т. д.

Итак, рассмотрим более обстоятельно следствия такого спонтанного нарушения симметрии. Как и в предыдущем разделе, введем

$$\sigma = \sigma' + b, \tag{5.40}$$

где теперь

$$b = \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2}, \quad \lambda b^2 = \mu^2. \tag{5.41}$$

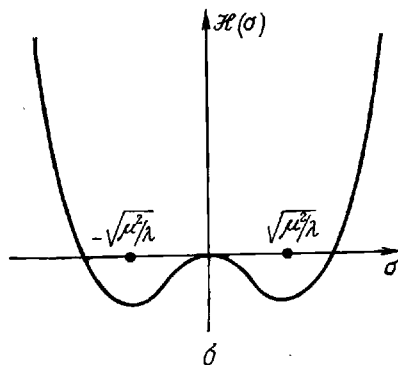
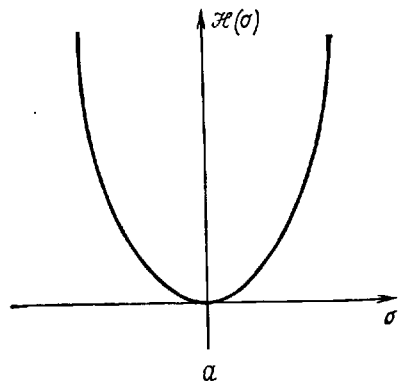
Мезонная часть лагранжиана [формула (5.34)] превращается в

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{бозон}}(\sigma') = & \frac{1}{2} [(\partial_\mu \pi)^2 + (\partial_\mu \sigma')^2] - \frac{1}{2} (\mu^2 - \lambda b^2) \pi^2 - \\ & - \frac{1}{2} (\mu^2 - 3\lambda b^2) \sigma'^2 + \frac{1}{4} \lambda (\pi^2 + \sigma'^2)^2 + b\lambda \sigma' (\pi^2 + \sigma'^2). \end{aligned} \tag{5.42}$$

Массы пиона и  $\sigma$ -мезона оказываются разными, а именно:

$$\begin{aligned} m_\pi^2 &= \mu^2 - \lambda b^2 = 0, \\ m_\sigma^2 &= \mu^2 - 3\lambda b^2 = -2\mu^2. \end{aligned} \tag{5.43}$$

<sup>1)</sup> Эвристическое основание: чтобы гамильтониан был положительным, параметр  $\lambda$  должен быть отрицательным.



Фиг. 5.2

Масса пиона равна нулю (мы уже знаем, что это не просто случайное совпадение!). Физическая масса  $\sigma$ -мезона вещественна, если мы позаботились, чтобы затравочная масса  $\mu$  была чисто мнимой. Получившийся лагранжиан содержит взаимодействия вида  $\sigma' \pi^2$  и  $\sigma'^3$ , причем

$$g_{\sigma\pi\pi} = g_{\sigma\pi\pi} = b\lambda = \frac{m_\sigma^2}{2f_\pi} \quad (5.44)$$

[использовано равенство (5.46)]. Наконец, аксиальный ток принимает вид

$$A_\mu^\alpha = \sigma' \partial_\mu \pi^\alpha - (\partial_\mu \sigma') \pi^\alpha + b \partial_\mu \pi^\alpha \quad (5.45)$$

и постоянную  $b$  можно отождествить с распадной константой пиона:

$$b = -f_\pi. \quad (5.46)$$

Прежде чем познакомиться с другими следствиями нарушения киральной симметрии, отметим, что с точки зрения теории квантованных полей аномальные решения означают присутствие неинвариантного вакуума (т. е. состояния с наименьшей энергией). В самом деле, поскольку вакуумное среднее поля  $\sigma$  есть теперь

$$\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = \left( \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2} \neq 0, \quad (5.47)$$

из уравнений (5.5) следует соотношение

$$\langle 0 | [\bar{Q}_\alpha, \pi_\beta] | 0 \rangle \neq 0, \quad (5.48)$$

и нам приходится допустить, что

$$\bar{Q}_\alpha | 0 \rangle \neq 0, \quad (5.49)$$

а это исключает предположение об инвариантности вакуума относительно киральных преобразований.

Далее, имеется весьма интересная теорема Голдстоуна <sup>1)</sup>, гласящая, что во всякой теории, в которой вакуум не является собственным состоянием заряда, связанного с *сохраняющимся* током, должны существовать безмассовые частицы. Точнее говоря, когда имеется непрерывная группа преобразований, оставляющая лагранжиан (*но не вакуум*) неизменным, обязательно должны существовать безмассовые (и бесспиновые) частицы, связанные с каждым из генераторов таких преобразований.

В нашем случае качественно это можно объяснить следующим образом. Подставим в коммутатор (5.48) разложение единицы по полной системе состояний. Поскольку заряд сохраняется, в разложении появятся лишь состояния с нулевым 4-импульсом и с теми же внутренними квантовыми числами, что и у  $\bar{Q}_\alpha$ , т. е.

$$\langle 0 | \bar{Q}_\alpha | \pi_\alpha \rangle \neq 0, \quad \langle 0 | \bar{Q}_\alpha | (3\pi)_\alpha \rangle \neq 0, \dots$$

Другими словами, если мы выбираем в качестве физического вакуума состояние  $|0\rangle$ , все остальные вакуумы получаются из него просто добавлением безмассовых пионов <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> См. обзор [169].

<sup>2)</sup> Разумеется, деликатным вопросом является точное определение матричного элемента заряда  $\langle 0 | \bar{Q}_\alpha | \pi_\alpha \rangle$ , поскольку для частицы с нулевой массой не существует системы покоя. Возможный выход — определить заряд в конечном объеме и рассмотреть локализованные волновые пакеты.

Еще одно замечание относительно теоремы Голдстоуна может оказаться полезным. Мы рассмотрели здесь лишь частный случай этой теоремы, а сама она носит более общий характер, ибо применима не только при спонтанном нарушении симметрии, а и при нормальной симметрии. Возьмем, например, лагранжиан (5.34) в пределе  $\mu^2 \rightarrow 0$ : он кирально-инвариантен, имеются безмассовые частицы и вырожденный вакуум, но нет никаких аномальных решений.

### 5. Соотношение Голдбергера — Треймана

Выясним, как меняется нуклонная часть лагранжиана (5.15) при сдвиге (5.40). Имеем

$$\mathcal{L}'_{\text{нукл}} = i\bar{\psi}\gamma\partial\psi + g_{\pi N}\bar{\psi}(\sigma' + i\gamma_5\tau\pi)\psi + bg_{\pi N}\bar{\psi}\psi, \quad (5.50)$$

откуда видно, что нуклон приобретает ненулевую массу

$$m_N = -bg_{\pi N} = f_{\pi}g_{\pi N}. \quad (5.51)$$

Равенство (5.51) и является хорошо известным соотношением Голдбергера — Треймана. Это следует из того, что в случае рассматриваемого нами простого лагранжиана  $r_A = 1$  даже при спонтанном нарушении симметрии. Но, как нетрудно убедиться, равенство  $r_A = 1$  уже не есть следствие киральной инвариантности, если у нас в силе механизм Голдстоуна. Соотношение же Голдбергера — Треймана остается тем не менее прежним.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Добавим к нашему лагранжиану кирально-инвариантный член

$$\delta\mathcal{L}' = c \left[ \bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5 \frac{1}{2} \tau\psi (\sigma\partial^{\mu}\pi - \pi\partial^{\mu}\sigma) + \bar{\psi}\gamma_{\mu} \frac{1}{2} \tau\psi (\pi \times \partial^{\mu}\pi) \right]. \quad (5.52)$$

Это вызовет изменение аксиального тока, который получит добавку

$$\delta A_{\mu}^{\alpha} = c\bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5 \frac{1}{2} \tau_{\alpha}\psi (\pi^2 + \sigma^2), \quad (5.53)$$

тогда как векторный ток останется неизменным.

Важно понять, что  $\delta\mathcal{L}'$  играет разную роль в зависимости от того, имеет место механизм Голдстоуна или нет. В нормальном случае выражения (5.52) и (5.53) описывают лишь сложные добавки к пион-нуклонному взаимодействию и к току. Во втором же случае сдвиг  $\sigma = \sigma' + b$  вызывает добавки к аксиальному току и к лагранжиану нуклон-однопионного взаимодействия. В самом деле, полный эффективный аксиальный ток оказывается равным

$$\bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5 \frac{1}{2} \tau_{\alpha}\psi (1 + cb^2) + b\partial_{\mu}\pi_{\alpha} + \dots, \quad (5.54)$$

откуда видно, что аксиальная константа

$$r_A = 1 + cb^2 \quad (5.55)$$

является полностью модельно-зависимой.

В то же время новый эффективный пион-нуклонный лагранжиан есть

$$\mathcal{L}_{\pi N} = g_{\pi N}i\bar{\psi}\gamma_5\tau\psi\pi + cb\bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5 \frac{1}{2} \tau\psi\partial^{\mu}\pi, \quad (5.56)$$

и, используя (в низшем порядке по  $\pi$ ) хорошо известную теорему эквивалентности<sup>1)</sup>, можно ввести единый лагранжиан псевдоскалярного взаимодействия с константой связи

$$G_{\pi N} = g_{\pi N} - cbm_N \quad (5.57)$$

или, с учетом (5.51),

$$G_{\pi N} = g_{\pi N}(1 + cb^2) = g_{\pi N}r_A. \quad (5.58)$$

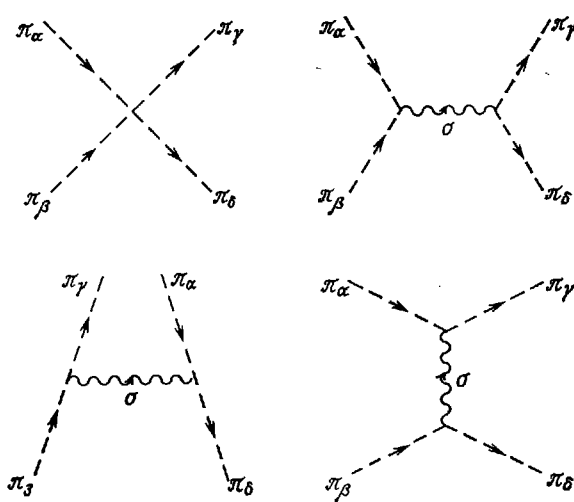
Применив еще раз формулу (5.51), получим соотношение Голдбергера — Треймана

$$m_N r_A = f_{\pi}g_{\pi N}r_A = f_{\pi}G_{\pi N}. \quad (5.59)$$

<sup>1)</sup> Теорема об эквивалентности псевдоскалярной и псевдовекторной связей [304]. — *Прим. ред.*

### 6. Другие свойства $\sigma$ -модели

Лагранжиан  $\sigma$ -модели позволил нам прекрасно проиллюстрировать физику, стоящую за феноменом спонтанного нарушения симметрии и появлением голдстоуновских бозонов, и подвел в конечном счете к хорошо известным следствиям теории сохраняющегося аксиального тока, таким, как соотношение Голдбергера — Треймана, отсутствие массы у пионов и т. д. Поэтому законным будет вопрос, можно ли получить в рамках этой модели другие результаты, излагавшиеся в предыдущих главах. На двух примерах мы покажем, что ответ на этот вопрос оказывается положительным.



Фиг. 5.3

Рассмотрим сначала пион-пионное рассеяние. Простейшие «древовидные» диаграммы (т. е. полюсные диаграммы в наинизшем порядке теории возмущений), следующие из лагранжиана (5.42), представлены на фиг. 5.3. Их вклад в амплитуду  $\pi\pi$ -рассеяния дается формулой

$$T_{\pi\pi} = \lambda (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) + 2\lambda^2 b^2 \left( \frac{\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}}{m_\sigma^2 - s} + \frac{\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}}{m_\sigma^2 - s} + \frac{\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}}{m_\sigma^2 - t} \right). \quad (5.60)$$

Разлагая амплитуду в ряд в окрестности точки  $s = \bar{s} = t = 0$  (пионы безмассовые!), имеем

$$T_{\pi\pi} \approx \left( \lambda + \frac{2\lambda^2 b^2}{m_\sigma^2} \right) (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) + \frac{2b^2\lambda^2}{m_\sigma^4} (s\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \bar{s}\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} + t\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}). \quad (5.61)$$

Далее, приняв во внимание равенства (5.44) и (5.46), мы получаем  $2\lambda^2 b^2 = -\lambda m_\sigma^2$ , т. е. коэффициент в первом члене равен нулю, а коэффициент во втором члене оказывается равным  $1/2f_\pi^2$ . Таким образом, мы окончательно приходим к следующему выражению для пион-пионной амплитуды вблизи порога:

$$T_{\pi\pi} = \frac{1}{2f_\pi^2} (s\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \bar{s}\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} + t\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}), \quad (5.62)$$

которое можно было бы получить в пределе нулевой массы пиона методом гл. 3.

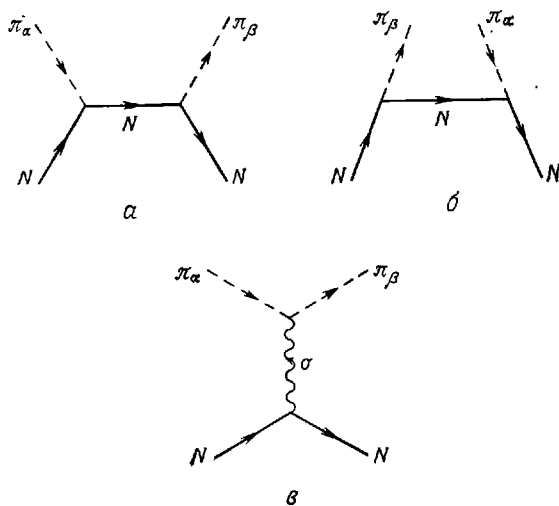
Подобным же образом мы будем действовать и при выводе формулы для амплитуды низкоэнергетического пион-нуклонного рассеяния. Положим

$$T_{\pi N} = T_I + T_{II}, \tag{5.63}$$

где  $T_I$  соответствует диаграммам с нуклонным полюсом (графики *a* и *b* на фиг. 5.4), а  $T_{II}$  — диаграмме с  $\sigma$ -мезонным полюсом (график *в* на фиг. 5.4), причем явный вид  $T_{II}$  таков:

$$T_{II} = -2g_{\pi N}\lambda b \frac{\delta_{\beta\alpha}\bar{u}_2u_1}{m_\sigma^2 - t}. \tag{5.64}$$

Поскольку мы находимся вблизи порога, очевидно, что для сравнения выводимых из кирального лагранжиана выражений с экспериментом нужна экст-



Фиг. 5.4

раполяция из точки  $\nu = 0$  в точку  $\nu_0 = m_\pi m_N$ , соответствующую физическому порогу. Это означает, что при вычислении  $T_I$  следует считать  $\nu = \nu_0 \neq 0$  и  $q^2 \neq 0$ . Тогда при  $t = 0$  мы имеем

$$T_I = -2g_{\pi N}^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\nu_0}{m_N^2} g_{\pi N}^2 \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha]. \tag{5.65}$$

Используя формулы, связывающие между собой  $\lambda$ ,  $b$ ,  $m_\sigma^2$ , и соотношение Голдбергера — Треймана, можно непосредственно убедиться, что опять происходит «чудесное» взаимное уничтожение  $T_{II}$  с частью  $T_I$ , пропорциональной  $\delta_{\alpha\beta}$ . Таким образом, мы приходим к окончательному результату

$$T_{\pi N}^{\beta\alpha} (\text{теор.}) = \frac{m_\pi m_N}{f_\pi^2} \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha], \tag{5.66}$$

полностью совпадающему с результатом вычисления методом алгебры токов (3.75).

Теперь кратко остановимся на более близком к реальности случае, когда лагранжева плотность содержит член, нарушающий киральную симметрию, вида

$$\mathcal{L}_B = a\sigma \tag{5.67}$$

(§ 2, п. 2, 3). Наличие этого члена разрешает, разумеется, появление у пиона конечной массы. Фактически мы должны учесть формулу (5.29) вместе с соот-

ношением (5.30), определяющим  $b$  и гарантирующим разложение по теории возмущений в точке стабильности:

$$b(\mu^2 - \lambda b^2) = a. \quad (5.68)$$

Тогда ренормированные массы пиона и  $\sigma$ -мезона даются соотношениями

$$m_\pi^2 = \mu^2 - \lambda b^2, \quad m_\sigma^2 = \mu^2 - 3\lambda b^2, \quad (5.69)$$

причем, как и прежде,

$$b = -f_\pi.$$

Следовательно, равенство (5.30) можно переписать в виде

$$a = -m_\pi^2 f_\pi \quad (5.70)$$

в согласии с ЧСАТ, поскольку

$$\partial^\mu A_\mu^\alpha = -a\pi^\alpha = m_\pi^2 f_\pi \pi^\alpha. \quad (5.71)$$

Заметим, наконец, что в этом случае мы имеем

$$g_{\sigma\pi\pi} = \lambda b = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2f_\pi} \quad (5.72)$$

в соответствии с предложенным Адлером условием согласованности<sup>1)</sup>, тогда как соотношение Голдбергера — Треймана остается неизменным (в низшем порядке теории возмущений).

Если теперь мы вычислим пион-пионное рассеяние при низких энергиях, то обнаружим, что формула (5.62) останется неизменной; разница заключается лишь в том, что соотношение между  $\lambda$ ,  $f_\pi$  и  $m_\sigma^2$  будет даваться равенством (5.72) [а не (5.44)]. Переписав типичный знаменатель  $\sigma$ -вклада в виде

$$m_\sigma^2 - s = m_\sigma^2 - m_\pi^2 - (s - m_\pi^2) = -2\lambda f_\pi^2 - (s - m_\pi^2), \quad (5.73)$$

тотчас приходим к улучшенной формуле для амплитуды пион-пионного рассеяния

$$T_{\pi\pi} = \frac{1}{2f_\pi^2} [\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}(s - m_\pi^2) + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}(\bar{s} - m_\pi^2) + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}(t - m_\pi^2)]. \quad (5.74)$$

Мы видели, что  $\sigma$ -модель в сочетании с голдстоуновским механизмом спонтанного нарушения симметрии удовлетворительно воспроизводит результаты алгебры токов, касающиеся мягких пионов. Но это «чудо» в конце концов не так уж удивительно, поскольку подобные результаты получаются в любой модели, в которой имеет место алгебра строго сохраняющихся токов (в пределе нулевой массы пиона), как это показано в приложении I к данной главе.

Несколько удивительно то, что правильные результаты (после соответствующей перенормировки) получаются в низшем порядке теории возмущений. Причину этого мы увидим в дальнейшем. Сейчас же заметим, что в рамках  $\sigma$ -модели правильные результаты получились после взаимного уничтожения двух больших членов. Как в случае  $\pi\pi$ -, так и в случае  $\pi N$ -рассеяния постоянные члены взаимно уничтожились с вкладом  $\sigma$ -полюсных диаграмм, оставив в окончательной формуле лишь выражения, линейные и квадратичные по пионному импульсу. Это указывает на то, что эффективное взаимодействие носит градиентный характер. Ясно также, что если бы мы обратились к более сложным задачам, то  $\sigma$ -модель опять дала бы правильный ответ, но только после громоздких вычислений со все большим числом взаимных уничтожений. Таким образом, имеет смысл поискать более простую и в то же время удовлетворительную лагранжеву теорию, которая прямо давала бы правильный ответ.

<sup>1)</sup> См. гл. 2, § 6, п. 1, б, где мы рассматривали аналогичный случай взаимодействия безмассового пиона с фермионным дублетом по четности.

Первым шагом в этом направлении будет констатация того, что рассмотренная модель придает фундаментальное значение  $\sigma$ -полю, тогда как физически важную роль играет пион. Следовательно, целесообразно рассмотреть так называемую нелинейную  $\sigma$ -модель, в которой  $\sigma$ -поле уже не является независимым, но оказывается функцией пионного поля.

### § 3. Нелинейная реализация киральной симметрии

#### 1. Нелинейная $\sigma$ -модель

В предыдущих разделах мы показали, как построить кирально-инвариантный лагранжиан, ассоциируя с пионом поле  $\sigma$ . Неодинаковые массы  $\sigma$ -мезона и пиона (в частности, нулевая масса пиона), отличная от нуля масса нуклона и другие результаты были получены как следствие того, что поле  $\sigma$  имело ненулевое вакуумное среднее  $\langle \sigma \rangle_0 = f_\pi$ . Это «аномальный» способ реализации симметрии, ведущий к «спонтанному нарушению симметрии». Но в свете тех замечаний, которые были сделаны относительно вывода пионных длин рассеяния, удобнее было бы переформулировать теорию так, чтобы поле  $\sigma$  было вообще исключено<sup>1)</sup>, чтобы пион с самого начала имел массу, равную нулю, и т. д.

В таком аспекте мы и собираемся исследовать нелинейную  $\sigma$ -модель, реализующую киральную симметрию с участием лишь пионного поля. Сначала мы рассмотрим отдельно пионное поле, а затем обобщим модель на тот случай, когда имеются и другие поля.

Основная идея по-прежнему заключается в том, чтобы написать кирально-инвариантный лагранжиан с помощью 4-вектора  $(\pi, \sigma)$ , но  $\sigma$  рассматривать уже как функцию пионного поля. Следовательно, мы должны написать соотношение между  $\pi$  и  $\sigma$ , которое сохраняло бы инвариантность лагранжиана и было бы совместным с коммутационными соотношениями (5.5), в частности с такими:

$$\begin{aligned} [\bar{Q}_\alpha, \pi_\beta] &= -i\delta_{\alpha\beta}\sigma, \\ [\bar{Q}_\alpha, \sigma] &= i\pi_\alpha. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Если мы не хотим вводить производных от поля, то придем к соотношению

$$\pi^2 + \sigma^2 = c^2. \quad (5.76)$$

Теперь  $\sigma$ -поле есть нелинейная функция пионного поля:

$$\sigma = (c^2 - \pi^2)^{1/2} = c - \frac{\pi^2}{2c} - \frac{(\pi^2)^2}{8c^3} + \dots, \quad (5.77)$$

и мы вскоре увидим, что фундаментальная константа  $c$ , появляющаяся в формулах (5.76) и (5.77), соответствует распадной константе пиона  $f_\pi$ .

Обратимся к вопросу о лагранжиане бозонных полей. Простейший выбор, совместный с киральной инвариантностью и с условием (5.76), разумеется, таков:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2. \quad (5.78)$$

Заметим, что дополнительные члены, которые можно было бы добавить к  $\mathcal{L}_0$ , обязательно должны содержать не менее двух производных, а поэтому они не изменят дальнейших выводов.

Поскольку поле  $\sigma$  связано с  $\pi$  соотношением (5.77), подстановка этого разложения в лагранжиан (5.78) приведет к появлению членов взаимодей-

<sup>1)</sup> Пока еще нет несомненных экспериментальных доказательств существования  $\sigma$ -мезона.



ствия пионного поля:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 + \frac{1}{8c^2} (\partial_\mu \pi^2)^2 + \dots \quad (5.79)$$

Далее,

$$A_\mu^\alpha = c \partial_\mu \pi_\alpha - \frac{1}{2c} (\delta_{\alpha\beta} \pi^2 - 2\pi_\alpha \pi_\beta) \partial_\mu \pi_\beta + \dots \approx c \partial_\mu \pi_\alpha, \quad (5.80)$$

откуда следует, что  $c = -f_\pi$ . В лагранжиане (5.79) отсутствует член с пионной массой. Ввиду отсутствия скалярного партнера у пиона киральная инвариантность требует равенства нулю массы пиона. Второй член лагранжиана соответствует пион-пионному взаимодействию, ведущему к амплитуде рассеяния вида

$$T_{\pi\pi} = \frac{1}{2f_\pi^2} [\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} (p_1 + p_2) (p_3 + p_4) + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} (p_1 - p_3) (p_2 - p_4) + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} (p_1 - p_4) (p_3 - p_2)], \quad (5.81)$$

в полном согласии с формулой (5.62). Такой вывод  $T_{\pi\pi}$  гораздо лучше, нежели вывод в § 2, поскольку здесь не требуется «чудесного» взаимного уничтожения, а единственная имеющаяся постоянная  $f_\pi$  появляется с самого начала.

Как отмечалось ранее, в формуле (5.81) ни в коем случае нельзя пренебрегать эффектом ненулевой пионной массы. Добавим к лагранжиану кирально-неинвариантный член. Как и в § 2, п. 2, из соображений простоты берем

$$\delta\mathcal{L} = a\sigma = a(f_\pi^2 - \pi^2)^{1/2}. \quad (5.82)$$

Используя разложение (5.77) с учетом того, что  $c = -f_\pi$ , имеем

$$\delta\mathcal{L} = -af_\pi + \frac{a\pi^2}{2f_\pi} + \frac{a\pi^4}{8f_\pi^3} + \dots \quad (5.83)$$

Присутствие члена  $\pi^2$  означает появление у пиона ненулевой массы

$$m_\pi^2 = -\frac{a}{f_\pi} \quad (5.84)$$

в полном соответствии с ЧСАТ.

Следующий член,  $-m_\pi^2(\pi^4/8f_\pi^2)$ , добавляется к лагранжиану лл-взаимодействия, который превращается в

$$\mathcal{L}_{\pi\pi} = \frac{1}{8f_\pi^2} [(\partial_\mu \pi^2)^2 - m_\pi^2 \pi^4] \quad (5.85)$$

и дает улучшенную формулу Вейнберга (5.74). Но вклад в эту формулу нарушающего симметрию члена, очевидно, того же порядка по 4-импульсу пиона, что и вклад основного члена. Поскольку характер нарушения симметрии целиком зависит от специфики модели, мы можем быть уверены в правильности результата лишь по отношению к такой комбинации фаз рассеяния, которая не зависит от члена нарушающего симметрию. Как указано Вейнбергом [132], вблизи физического порога  $s = 4m_\pi^2$ ,  $t = \bar{s} = 0$  это имеет место при следующей комбинации длин рассеяния:

$$2a_0 - 5a_2 = \frac{6m_\pi}{8\pi f_\pi^2} \equiv 6L, \quad L = \frac{m_\pi}{8\pi f_\pi^2} \approx \frac{0,09}{m_\pi}. \quad (5.86)$$

Таким образом, равенство (5.86) — единственный результат, вытекающий из существования киральной симметрии; отношение же  $a_0/a_2$  может быть найдено, лишь если известен член, нарушающий симметрию. Исходя, например, из выражения (5.82) [ведущего к (5.85)], получаем, что

$$\frac{a_0}{a_2} = -\frac{7}{2}. \quad (5.87)$$

т. е.

$$a_0 = \frac{7}{4} L \approx 0,16 \frac{1}{m_\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{2} L \approx -0,045 \frac{1}{m_\pi}. \quad (5.88)$$

Выражения (5.88) и являются хорошо известными формулами Вейнберга [132] для длин рассеяния, первоначально выведенными в рамках алгебры токов<sup>1)</sup>.

## 2. Киральный лоренцев поворот

Прежде чем перейти к детальному исследованию взаимодействия пионов с другими полями, мы хотим ввести фундаментальное каноническое преобразование, которое окажется ключевым для последующего рассмотрения. В излагаемом нами киральном описании мира все поля соответствуют каким-то представлениям киральной группы, в частности  $(\pi, \sigma)$ -поле есть 4-вектор. Произведем теперь киральное преобразование (функция пионного поля), в результате которого пионное поле обратится в нуль, т. е. 4-вектор  $(\pi, \sigma)$  превратится в  $(0, 0, 0, -f_\pi)$ . Такое преобразование представляет собой обычный четырехмерный поворот на угол

$$\theta = \text{arctg} \frac{|\pi|}{\sigma}, \quad (5.89)$$

перемешивающий четвертую компоненту произвольного 4-вектора с продольной (т. е. параллельной вектору  $\pi$ ) компонентой.

К чему приводит такой киральный «лоренцев поворот», мы покажем, рассмотрев сначала его в случае оператора, являющегося 4-вектором в пространстве внутренней симметрии. Нетрудно установить явную форму преобразования:

$$V'_4 = -V_4 \frac{\sigma}{f_\pi} - \frac{V\pi}{f_\pi} = -\frac{1}{f_\pi} \sum_{\mu=1}^4 \pi_\mu V_\mu, \quad (5.90)$$

$$V' = V + \frac{1}{f_\pi} \left( V_4 - \frac{V\pi}{f_\pi - \sigma} \right) \pi. \quad (5.91)$$

В частности, из соотношения (5.91) следует, что

$$V'\pi = \sigma V'_4 + f_\pi V_4. \quad (5.92)$$

Оказывается, что в качестве фундаментальных величин весьма удобно использовать компоненты преобразованного поля. Одним из преимуществ нового вектора  $V'_\mu$  является закон его изменения под действием киральных преобразований. Из соотношения (5.90) тотчас следует равенство

$$[\bar{Q}_\alpha, V'_4] = 0, \quad (5.93)$$

так что  $V'_4$  есть инвариант киральной группы, и  $\bar{Q}_\alpha$ , подобно генераторам изоспина, преобразует лишь пространственные компоненты  $V'$ . Вследствие этого киральными инвариантами оказываются трехмерные скалярные произведения  $V'U'$ . Покажем это более детально. Исходя из простого тождества

$$\left[ \bar{Q}_\alpha, \frac{V'_4 + V_4}{f_\pi - \sigma} \right] = \frac{iV'_\alpha}{f_\pi - \sigma}, \quad (5.94)$$

получаем

$$[\bar{Q}_\alpha, V'_\beta] = \frac{i}{f_\pi - \sigma} [\delta_{\alpha\beta} (V_4 f_\pi + V'_4 \sigma) - V_\alpha \pi_\beta], \quad (5.95)$$

<sup>1)</sup> При таком подходе предположению, что член, нарушающий симметрию, имеет вид (5.82), соответствует предположение, что  $\sigma$ -член,  $[\bar{Q}_\alpha, \bar{D}_\beta] = im_\pi^2 f_\pi \delta_{\alpha\beta} \sigma$ , содержит лишь компоненту с  $I = 0$  [ср. с формулой (5.23)].

откуда с учетом равенства (5.92) имеем

$$[\bar{Q}_\alpha, V'_\beta] = \frac{i}{f_\pi - \sigma} (\delta_{\alpha\beta} V'_\pi \pi - V'_\alpha \pi_\beta) \equiv \frac{i}{2f_\pi} (\delta_{\alpha\beta} V'_\pi \Phi - V'_\alpha \Phi_\beta), \quad (5.96)$$

где  $\Phi$  — новое поле:

$$\Phi = \frac{2f_\pi}{f_\pi - \sigma} \pi. \quad (5.97)$$

Соотношение (5.96) можно переписать так:

$$[\bar{Q}_\alpha, V'] = -\frac{i}{2f_\pi} (\mathbf{e} \times \Phi) \times V', \quad (5.98)$$

и, вводя матрицу единичного изоспина  $\mathbf{t}$  ( $t_{lm}^\alpha = i\epsilon_{l\alpha m}$ ), такую, что

$$(\mathbf{at}) V' = i(\mathbf{a} \times V'),$$

приходим к простой формуле

$$[\bar{Q}_\alpha, V'] = \frac{1}{2f_\pi} (\mathbf{t} \times \Phi)_\alpha V'. \quad (5.99)$$

Мы видим, что в закон преобразования нового вектора  $V'$  входит лишь матрица единичного изоспина и фундаментальное поле  $\Phi$ . В дальнейшем будет показано, что равенство (5.99) легко обобщается на случай любого поля простой подстановкой в правую часть соответствующей изоспиновой матрицы.

### 3. Ковариантная производная и определение пионного поля

В качестве первого применения вышеизложенного рассмотрим случай, когда вектором  $V_\alpha$  является  $\partial_\mu \pi_\alpha$ , т. е. производная пионного изовекторного поля по координате. Согласно равенству (5.91),

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \pi_\beta)' &= \partial_\mu \pi_\beta + \frac{1}{f_\pi} \left( \partial_\mu \sigma - \frac{\partial_\mu \pi \cdot \pi}{f_\pi - \sigma} \right) \pi_\beta = \\ &= (f_\pi - \sigma) \partial_\mu \frac{1}{f_\pi - \sigma} \pi_\beta = \frac{1}{1 + \Phi^2/4f_\pi^2} \partial_\mu \Phi_\beta. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Здесь было использовано определение (5.97) и простое равенство

$$\frac{f_\pi - \sigma}{2f_\pi} = \left( 1 + \frac{\Phi^2}{4f_\pi^2} \right)^{-1}.$$

Формулу (5.100) можно рассматривать как определение фундаментального понятия *ковариантной производной*. В новом представлении все изовекторные поля (и даже, как мы увидим, вообще все поля) должны преобразовываться согласно закону (5.99). Но ни  $\partial_\mu \pi_\alpha$ , ни  $\partial_\mu \Phi_\alpha$  не преобразуются по этому закону, что затрудняет построение с их помощью киральных инвариантов. Подобно квантовой электродинамике и общей теории относительности, формула (5.100) являет нам *ковариантную производную* пионного поля, т. е. такой дифференциальный оператор, который, будучи применен к  $\pi$ , дает объект, преобразующийся согласно фундаментальному закону (5.99). В соответствии с этим положим

$$D_\mu \pi = (f_\pi - \sigma) \partial_\mu \frac{1}{f_\pi - \sigma} \pi, \quad (5.101)$$

или, иначе,

$$D_\mu \Phi = (1 + \Phi^2/4f_\pi^2)^{-1} \partial_\mu \Phi. \quad (5.102)$$

Рассмотрим теперь назревший вопрос об определении пионного поля.

Мы взяли в качестве пионного поля изовектор  $\pi_\alpha$ , но для этого годится и любое другое поле  $\tilde{\pi}_\alpha$ , являющееся локальной, хотя и не обязательно

линейной, функцией поля  $\pi_\alpha$ :

$$\tilde{\pi}_\alpha = \pi_\alpha F(\pi^2). \quad (5.103)$$

Дело в том, что интерполирующее поле для частицы выбирается в значительной степени произвольно (и его выбор не очень существен). Интерполирующее поле должно быть локальным, стремиться к in- и out-полям при  $t \rightarrow \pm \infty$  и быть нормированным, т. е. его матричный элемент между вакуумом и одночастичным состоянием должен иметь правильное значение. Тогда, как строго доказано в аксиоматической теории поля, и старое и новое поле дает одну и ту же  $S$ -матрицу.

Правда, функции Грина в этих двух случаях будут неодинаковыми (внешние линии не на массовой поверхности), но  $S$ -матрицы на массовой поверхности будут совпадать. Дело в том, что  $S$ -матричные элементы находятся из преобразованных по Фурье  $T$ -упорядоченных произведений полей как вычеты в соответствующих полюсах по массовым переменным. Вся эта процедура применима к любому полю  $\pi_\alpha$ .

В случае поля (5.103) его нормировка фиксируется условием

$$\langle 0 | \tilde{\pi}_\alpha | \pi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}, \quad (5.104)$$

эквивалентным (в пренебрежении петлями) условию

$$F(0) = 1. \quad (5.105)$$

Как указал Вейнбер, поле  $\Phi$  вполне подходит для роли пионного поля, поскольку оно обеспечивает рациональное соотношение между  $\pi$  и  $\sigma$ :

$$\pi = \frac{1}{1 + \Phi^2/4f_\pi^2} \Phi, \quad (5.106)$$

$$\sigma = f_\pi \frac{\Phi^2/4f_\pi^2 - 1}{\Phi^2/4f_\pi^2 + 1}. \quad (5.107)$$

В свете сказанного ранее мы можем выбрать  $\Phi$  в качестве нового пионного поля.

Нетрудно убедиться, что при киральных преобразованиях  $\Phi$  меняется по закону

$$[\bar{Q}_\alpha, \Phi_\beta] = if_\pi \left[ \delta_{\alpha\beta} \left( 1 - \frac{\Phi^2}{4f_\pi^2} \right) + \frac{\Phi_\alpha \Phi_\beta}{2f_\pi^2} \right]. \quad (5.108)$$

Формула (5.108) дает нам то, что обычно называется нелинейной реализацией симметрии  $SU(2) \otimes SU(2)$ , и подчинение пионного поля этому условию позволяет избежать введения более или менее фиктивных частиц, подобных  $\sigma$ . Кроме того, из нелинейности закона преобразования  $\Phi$  следует, что однопионное состояние будет преобразовываться в состояния с разными числами пионов (что возможно лишь в случае безмассовых пионов).

Нашей следующей задачей будет построение кирально-инвариантного пионного лагранжиана. Это достигается составлением трехмерных скаляров из величин, преобразующихся по закону (5.99). Единственным объектом такого рода оказывается ковариантная производная  $D_\mu \Phi$  [но не  $\Phi$ , см. формулу (5.108)], определяющаяся выражением (5.102).

Простейший лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} (D_\mu \Phi)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + \Phi^2/4f_\pi^2)^2} (\partial_\mu \Phi)^2. \quad (5.109)$$

Если мы разложим этот лагранжиан в ряд по степеням  $\Phi$ , то получим

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{4f_\pi^2} \Phi^2 (\partial_\mu \Phi)^2 + \dots, \quad (5.110)$$

где опять [ср. с формулой (5.79)] первый кинетический член соответствует безмассовому пиону, а второй член ведет к хорошо известному выражению для амплитуды  $\pi\pi$ -рассеяния вблизи порога.

#### 4. Обобщение на другие поля

В данном разделе мы применим изложенный подход к случаю взаимодействия мягких пионов с другими полями. В качестве первого шага рассмотрим простейшее представление киральной группы, соответствующее нуклонному полю  $\psi$ . Для него мы имеем

$$[\bar{Q}_\alpha, \psi] = -\gamma_5 \frac{1}{2} \tau_\alpha \psi. \quad (5.111)$$

Применим теперь к полю  $\psi$  базисное преобразование, определенное в § 3, п. 2. В результате получим новое поле  $\psi'$ <sup>1)</sup>:

$$\psi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left(1 - \frac{\sigma}{f_\pi}\right)^{1/2} - i \frac{\gamma_5 \tau \pi}{f_\pi (1 - \sigma/f_\pi)^{1/2}} \right] \psi, \quad (5.112)$$

или, выражая его через  $\varphi$ :

$$\psi' = \frac{1}{(1 + \varphi^2/4f_\pi^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{i\gamma_5 \tau \varphi}{2f_\pi}\right) \psi. \quad (5.113)$$

Нетрудно установить трансформационные свойства  $\psi'$  относительно киральных преобразований. Коммутатор  $\bar{Q}_\alpha$  и  $\psi'$  можно найти, исходя из фундаментальных коммутаторов для  $\psi$ ,  $\pi$  и  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} [\bar{Q}_\alpha, \psi'] &= -\frac{i}{2f_\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\sigma}{f_\pi}\right)^{-1/2} \left[ \pi_\alpha - \tau_\alpha \tau \pi - \frac{i\gamma_5 (\pi_\alpha \tau \pi - \pi^2 \tau_\alpha)}{f_\pi (1 - \sigma/f_\pi)} \right] \psi = \\ &= -\frac{i (\pi_\alpha - \tau_\alpha \tau \pi)}{2f_\pi (1 - \sigma/f_\pi)} \psi', \end{aligned} \quad (5.114)$$

причем это выражение можно переписать так:

$$[\bar{Q}_\alpha, \psi'] = \left(\frac{1}{2} \tau \times \pi\right)_\alpha \frac{1}{f_\pi (1 - \sigma/f_\pi)} \psi' = \left(\frac{1}{2} \tau \times \varphi\right)_\alpha \frac{1}{2f_\pi} \psi'. \quad (5.115)$$

Представление нуклонного поля  $\psi'$  оказывается также нелинейным, и однонуклонное состояние будет преобразовываться в состояния с одним нуклоном и произвольным числом пионов. Следовательно, в согласии с изложенными в предыдущих главах результатами алгебры токов мы приходим к определенным соотношениям между процессами  $N_1 \rightarrow N_2$  и  $N_1 \rightarrow N_2 + \pi$ .

Равенство (5.115) свидетельствует, что новое спинорное поле  $\psi'$  преобразуется по тому же общему закону (5.99), который был найден для векторного поля. Но здесь, разумеется, изоспиновой матрицей является  $1/2 \tau_\alpha$ . Поскольку любое представление киральной группы может быть построено как тензорное произведение полей  $\psi$ , упомянутый закон преобразования носит, очевидно, совершенно общий характер. Обозначив через  $\Psi$  любое поле, преобразующееся по определенному представлению киральной группы, а через  $\mathbf{T}$  — соответствующую ему изоспиновую матрицу, имеем

$$[\bar{Q}_\alpha, \Psi'] = \frac{1}{2f_\pi} (\mathbf{T} \times \varphi)_\alpha \Psi'. \quad (5.116)$$

В соотношениях (5.115) и (5.116) мы видим одну важную особенность: в них не фигурируют  $\gamma$ -матрицы, т. е. киральное преобразование зависит лишь от изоспиновой матрицы и пионного поля  $\varphi$ . В то же время кираль-

<sup>1)</sup> Равенство (5.112) проще всего получить из требования, чтобы 4-вектор  $(\bar{\psi}\psi, i\bar{\psi}\gamma_5\tau\psi)$  преобразовывался по законам (5.90) и (5.91).

ное преобразование существенно зависит от пространственно-временной координаты поля  $x^\mu$ . Это означает, что локальные комбинации полей, такие, как

$$\bar{\psi}'(x)\psi'(x), \quad \bar{\psi}'(x)\gamma_\mu\psi'(x), \dots,$$

содержащие любые  $\gamma$ -матрицы, автоматически оказываются кирально-инвариантными. Из инвариантности произведения  $\bar{\psi}'(x)\psi'(x)$  мы можем заключить, что нуклон, а также все остальные частицы, кроме пиона, могут обладать конечной массой <sup>1)</sup>.

Нелокальные же комбинации, подобные  $\bar{\psi}'(x)\psi'(y)$ , не являются кирально-инвариантными, поскольку в законе преобразования полей  $\bar{\psi}'(x)$  и  $\psi'(y)$  фигурируют пионные поля  $\varphi(x)$  и  $\varphi(y)$ .

Самый простой и самый интересный вид нелокальности — это, конечно, нелокальность выражений, содержащих производную  $(\partial/\partial x^\mu)\psi'(x)$ . Прямая проверка показывает, что  $\partial_\mu\psi'(x)$  не преобразуется по закону (5.115). Мы хотим ввести ковариантную производную нового типа  $\mathcal{D}_\mu\psi'(x)$ , которая преобразовывалась бы согласно общему правилу (5.115) и позволяла бы легко строить киральные инварианты с производными. Для этого достаточно заметить, что если сначала взять производную от исходного поля <sup>2)</sup>  $\partial_\mu\psi(x)$ , а затем уже применить оператор вращения, то полученное в результате этого поле

$$(\partial_\mu\psi)' \equiv \chi_\mu = \left(1 + \frac{\varphi^2}{4f_\pi^2}\right)^{-1/2} \left(1 - i\gamma_5 \frac{\tau\varphi}{2f_\pi}\right) \partial_\mu\psi(x) \quad (5.117)$$

будет преобразовываться по закону (5.115).

Связь между  $\chi_\mu$  и  $\partial_\mu(\psi'(x))$  дается формулой

$$\partial_\mu(\psi') = \chi_\mu + \left[\partial_\mu \left(1 + \frac{\varphi^2}{4f_\pi^2}\right)^{-1/2} \left(1 - i\gamma_5 \frac{\tau\varphi}{2f_\pi}\right)\right] \psi, \quad (5.118)$$

и в силу определений

$$\psi = \left(1 + \frac{\varphi^2}{4f_\pi^2}\right)^{-1/2} \left(1 + i\gamma_5 \frac{\tau\varphi}{2f_\pi}\right) \psi', \quad (5.119)$$

$$D_\mu\varphi = \left(1 + \frac{\varphi^2}{4f_\pi^2}\right)^{-1} \partial_\mu\varphi \quad (5.120)$$

мы получаем наконец

$$\partial_\mu(\psi'(x)) - \chi_\mu(x) = \left[\frac{i}{4f_\pi^2} \tau(D_\mu\varphi \times \varphi) - i\gamma_5 \frac{\tau D_\mu\varphi}{2f_\pi}\right] \psi'. \quad (5.121)$$

Поскольку  $\chi_\mu$  и последний член выражения (5.121)

$$-i\gamma_5 \frac{\tau D_\mu\varphi}{2f_\pi} \psi'$$

при киральных преобразованиях меняются согласно требуемому закону, мы можем взять в качестве ковариантной производной поля  $\psi'$  величину

$$\mathcal{D}_\mu\psi'(x) = \partial_\mu\psi'(x) + \frac{i}{2f_\pi^2} \frac{\tau}{2} (\varphi(x) \times D_\mu\varphi(x)) \psi'(x), \quad (5.122)$$

которая уже пригодна для построения киральных инвариантов, ибо она удовлетворяет условию (5.115).

<sup>1)</sup> Одним из оснований для выбора (в § 3, п. 2) канонического преобразования была возможность с самого начала ввести в лагранжиан член нуклонной массы вместо того, чтобы получать его за счет отличного от нуля вакуумного среднего поля  $\sigma$ .

<sup>2)</sup> «Старое» киральное преобразование (5.111) не зависит от  $x$ .

Формулу (5.122) также можно обобщить на случай произвольного поля; общий вид оператора ковариантной производной таков:

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{i}{2f_\pi^2} \mathbf{T} (\boldsymbol{\varphi} \times D_\mu \boldsymbol{\varphi}), \quad (5.123)$$

где  $\mathbf{T}$  — соответствующая изоспиновая матрица.

### 5. Кирально-инвариантные лагранжианы

Дадим теперь метод построения кирально-инвариантных лагранжианов. Поскольку  $\boldsymbol{\varphi}$  не преобразуется ковариантно, пионное поле может входить в лагранжиан только в форме своей ковариантной производной  $D_\mu \boldsymbol{\varphi}$  [формула (5.120)]. Так как рассмотренные киральные преобразования зависели лишь от изоспиновых матриц и поля  $\boldsymbol{\varphi}$ , все сказанное ранее гарантирует инвариантность относительно группы  $SU(2) \otimes SU(2)$  любой локальной функции только переменных  $\psi'$ ,  $\mathcal{D}_\mu \psi'$ ,  $D_\mu \boldsymbol{\varphi}$ , инвариантной относительно изоспиновой группы  $SU(2)$ .

Итак, лагранжева плотность пионов, которая должна описывать безмассовые частицы, имеет вид

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} (D_\mu \boldsymbol{\varphi})^2, \quad (5.124)$$

исследовавшийся уже в предыдущем разделе. Точно так же лагранжеву функцию для нуклона можно записать в виде

$$\mathcal{L}_N = i\bar{\psi}' \gamma_\mu \mathcal{D}^\mu \psi' - M\bar{\psi}' \psi', \quad (5.125)$$

т. е. с учетом (5.122)

$$\mathcal{L}_N = i\bar{\psi}' \gamma_\mu \partial^\mu \psi' - M\bar{\psi}' \psi' - \frac{1}{2f_\pi^2} \bar{\psi}' \gamma_\mu \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \psi' (\boldsymbol{\varphi} \times D_\mu \boldsymbol{\varphi}). \quad (5.126)$$

То, что киральная инвариантность вынуждает нас вводить ковариантную производную нуклонного поля, связано с тем, что движение нуклона обязательно должно сопровождаться излучением и поглощением мягких пионов.

Разлагая последний член уравнения (5.126) в ряд по степеням пионного поля, в первом приближении получаем следующий лагранжиан взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{\pi N} = -\frac{1}{4f_\pi^2} \bar{\psi}' \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \psi' (\boldsymbol{\varphi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\varphi}). \quad (5.127)$$

В низшем порядке теории возмущений из этого выражения вытекает выражение для  $s$ -волновой пион-нуклонной длины рассеяния, даваемое алгеброй токов:

$$a_T = -\frac{1}{4\pi f_\pi^2} \frac{m_\pi m_N}{m_\pi + m_N} \left( t \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \right). \quad (5.128)$$

Вспоминая выражение (5.123), мы видим, что формула (5.128) носит совершенно общий характер, нужно лишь вместо  $\frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}$  подставлять изоспиновую матрицу, соответствующую мишени (гл. 2. § 3, п. 2).

Можно построить и более сложные лагранжианы, учитывающие пион-нуклонные взаимодействия других типов. В частности, самое простое взаимодействие, линейное по пионному полю, — это псевдовекторное взаимодействие

$$\mathcal{L}_{\text{град}} = \frac{f}{m_\pi} \bar{\psi}' \gamma_\mu \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \psi' D^\mu \boldsymbol{\varphi}. \quad (5.129)$$

Экспериментальное значение таково:

$$\frac{f^2}{4\pi} \approx 0,08. \quad (5.130)$$

С обычной псевдоскалярной константой взаимодействия величина  $f$  связана соотношением

$$\frac{f}{m_\pi} = \frac{g_{\pi N}}{2m_N}. \quad (5.131)$$

Взаимодействие (5.129) практически дает лишь  $p$ -волну, и, пользуясь им, можно показать, что в пределе нулевой пионной массы диаграммы с нуклоном в промежуточном состоянии не дают вклада в амплитуду *вблизи порога*. Действительно, диаграмма с одним промежуточным нуклоном при рассеянии вперед дает вклад

$$\begin{aligned} & \frac{g_{\pi N}^2}{4m_N^2} \frac{\bar{u}\gamma q\gamma_5(vp + \gamma q + m_N)\gamma q\gamma_5 u}{m_N^2 - (p+q)^2} \approx \\ & \approx \frac{g_{\pi N}^2}{4m_N^2} \frac{\bar{u}(2v^2/m_N - 2m_N m_\pi^2 + v m_\pi^2/m_N)u}{-m_\pi^2 - 2v} \underbrace{\hspace{2cm}}_{v \rightarrow m_\pi m_N} g_{\pi N}^2 \frac{m_\pi^2}{4m_N^2} \end{aligned} \quad (5.132)$$

в согласии с теми доводами, на основании которых мы пренебрегали вкладом однопуклонного состояния в гл. 3 (где проводились вычисления методом алгебры токов).

Осталось вывести новым методом выражение для векторного и аксиального токов. Вспоминая определение векторного тока

$$V_\mu^\alpha = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_\mu \Psi_r} [Q_\alpha, \Psi_r]$$

и разлагая его в ряд по степеням  $\varphi$ , получаем обычное выражение

$$V_\mu^\alpha = \bar{\Psi}' \gamma_\mu \frac{1}{2} \tau^\alpha \Psi' + (\varphi \times \partial_\mu \varphi)_\alpha + \dots \quad (5.133)$$

На основании этой формулы можно вывести весьма изящное общее выражение для пионного взаимодействия в  $s$ -состоянии. Вспомним, что правило построения взаимодействия таково: нужно произвести замену

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + \frac{i}{2f_\pi^2} \mathbf{T} (\varphi \times D_\mu \varphi). \quad (5.134)$$

В то же время мы знаем, что слабое векторное взаимодействие (по аналогии с электромагнитным) вводится путем замены

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + i \mathbf{T} \mathbf{W}_\mu, \quad (5.135)$$

где  $\mathbf{W}_\mu$  — промежуточное векторное поле, взаимодействующее с векторным адронным током. Таким образом, мы приходим к  $s$ -волновому взаимодействию

$$\mathcal{L}_{s\text{-волн}} = \frac{1}{2f_\pi^2} \mathbf{V}_{\text{мишень}}^\mu (\varphi \times \partial_\mu \varphi) = \frac{1}{2f_\pi^2} \mathbf{V}_{\text{мишень}}^\mu \mathbf{V}_\mu, \text{ пион}. \quad (5.136)$$

Наконец, рассмотрим аксиальный ток:

$$A_\mu^\alpha = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_\mu \Psi'} [\bar{Q}_\alpha, \Psi'] + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_\mu \Phi_\beta} [\bar{Q}_\alpha, \Phi_\beta]. \quad (5.137)$$

Вследствие того, что коммутаторы между  $\bar{Q}_\alpha$  и полями даются формулами (5.108) и (5.115), аксиальный ток обнаруживает новые интересные особенности. В частности, обычный член  $\bar{\Psi}' \gamma_\mu \gamma_5^{1/2} \tau_\alpha \Psi'$  возникает из лагранжиана взаимодействия, а не из лагранжиана свободных нуклонов. Это свидетель-



стствует о том, что у нас нет какого-либо скрытого значения  $g_A$ . Соотношение Голдбергера — Треймана продолжает выполняться и оказывается единственным соотношением между  $f_\pi$  и другими наблюдаемыми параметрами, вытекающим из киральной симметрии.

Поскольку коммутатор аксиального заряда с  $\psi'$  линеен по пионному полю, главный член в разложении по степеням  $\varphi$  дается выражением [в силу формулы (5.108)]

$$A_\mu^\alpha \approx -f_\pi \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_\beta}. \quad (5.138)$$

Член нулевого порядка по  $\varphi$  получается при учете лишь градиентного взаимодействия (5.129), из которого следует

$$A_\mu^\alpha \approx -\frac{g_{\pi N} f_\pi}{i m_N} \bar{\psi}' \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{2} \tau^\alpha \psi', \quad (5.139)$$

т. е. мы имеем для (ненормированной) аксиальной распадной константы

$$g_A = \frac{f_\pi g_{\pi N}}{m_N}. \quad (5.140)$$

Заметим, что при нелинейном подходе к киральной симметрии не требуется какое-нибудь определенное значение  $g_A$  для обеспечения  $SU(2) \otimes SU(2)$ -инвариантности лагранжиана; в то же время он однозначно ведет к формуле Голдбергера — Треймана.

Разумеется, если в формулу (5.138) подставить свободный пионный лагранжиан  $\mathcal{L}_\pi \approx \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2$ , то в выражении для тока появится однопионный член, именно

$$A_\mu^\alpha = -f_\pi \partial_\mu \varphi^\alpha, \quad (5.141)$$

напоминая нам, что  $f_\pi$  — распадная константа пиона.

Отметим, наконец, что соотношение Голдбергера — Треймана может быть дано в самом общем виде [формально аналогичном равенству (5.136)], если записать взаимодействие одного пиона с любым полем в виде

$$\mathcal{L}_{1 \text{ пион}} = \mathbf{I}^\mu D_\mu \varphi \approx \mathbf{I}^\mu \partial_\mu \varphi. \quad (5.142)$$

Из выражения (5.138) следует

$$A_\mu^\alpha = -f_\pi \mathbf{I}_\mu^\alpha, \quad (5.143)$$

и с учетом выражения (5.141) мы получаем соотношение Голдбергера — Треймана в самом общем виде:

$$\mathcal{L}_{1 \text{ пион}} \approx -f_\pi^{-1} A_\mu^\alpha \partial_\mu^\alpha \varphi \sim (A_\mu)_{\text{мипень}} (A^\mu)_{\text{пион}}. \quad (5.144)$$

## 6. Нелинейные реализации киральной симметрии

Подведем итоги последних разделов. Исходя из  $\sigma$ -модели и используя фундаментальное (зависящее от полей) каноническое преобразование § 3, п. 2, мы сумели построить нелинейную реализацию киральной симметрии, согласно которой пионное поле преобразуется по формуле (5.108), т. е.

$$[\bar{Q}_\alpha, \varphi_\beta] = i f_\pi \left[ \delta_{\alpha\beta} \left( 1 - \frac{\varphi^2}{4f_\pi^2} \right) + \frac{\varphi_\alpha \varphi_\beta}{2f_\pi^2} \right], \quad (5.145)$$

а любое другое поле  $\Psi$  — по формуле (5.116), т. е.

$$[\bar{Q}_\alpha, \Psi] = \frac{1}{2f_\pi} (\mathbf{T} \times \varphi)_\alpha \Psi \quad (5.146)$$

(здесь и в дальнейшем мы опускаем штрих).

Кроме того, было показано, что для построения кирально-инвариантных выражений, содержащих производные, следует использовать ковариантные производные

$$D_\mu \Phi = \left(1 + \frac{\Phi^2}{4f_\pi^2}\right)^{-1} \partial_\mu \Phi, \quad (5.147)$$

$$\mathcal{D}_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \frac{i}{2f_\pi^2} \mathbf{T}(\Phi \times D_\mu \Phi) \Psi, \quad (5.148)$$

приводящие к кирально-инвариантным лагранжианам вида  $\mathcal{L}(D_\mu \Phi, \Psi, \mathcal{D}_\mu \Psi)$ . В результате нам удалось, например, перейти от выражения без производных для взаимодействия полей  $\pi$  и  $\sigma$  с нуклонами и с самими собой к градиентному нелинейному взаимодействию нового пионного поля.

Все это свидетельствует об особом характере киральной симметрии по сравнению с более обычными симметриями, подобными изоспиновой. Помимо разницы в законах преобразования (линейные и нелинейные), получающиеся следствия носят совершенно другой характер. Из изоспиновой инвариантности следуют законы сохранения, теоремы о перенормируемости (зарядов) и соотношения между матричными элементами с одинаковым числом частиц. Киральная симметрия ничего не прибавляет к результатам подобного рода; но она дает информацию, обусловленную динамическим характером такой симметрии, а именно низкоэнергетические теоремы, связывающие между собой процессы, в которых участвуют разные числа мягких пионов. Как мы уже подчеркивали, все это вытекает из фундаментального преобразования (5.146), зависящего только от изоспина поля, но не от специфики данного конкретного представления группы  $SU(2) \otimes SU(2)$ , хотя мы и использовали такую информацию при выводе формулы (5.146).

Таким образом, весьма желательно показать (это мы и собираемся сделать в данном разделе), что найденные фундаментальные соотношения можно вывести в самом общем виде из алгебры токов, если с самого начала предположить, что киральная симметрия реализуется нелинейно посредством безмассового пионного поля.

Рассмотрим сначала пионное поле. Предположим, что его коммутатор с аксиальными зарядами зависит лишь от пионного же поля, т. е.

$$[[\bar{Q}_\alpha, \pi_\beta]] = -if_{\alpha\beta}(\pi), \quad (5.149)$$

причем в силу изоспиновой инвариантности

$$f_{\alpha\beta}(\pi) = \delta_{\alpha\beta} f(\pi^2) + \pi_\alpha \pi_\beta g(\pi^2). \quad (5.150)$$

Мы сейчас увидим, что коммутационное соотношение алгебры токов

$$[\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Q_\gamma \quad (5.151)$$

накладывает сильные ограничения на выбор функций  $f$  и  $g$ . Рассмотрим коммутатор

$$[[\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta], \pi_c] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} [Q_\gamma, \pi_c] \quad (5.152)$$

и воспользуемся тождеством Якоби. Получим

$$\frac{\partial f_{bc}}{\partial \pi_d} f_{ad} - \frac{\partial f_{ac}}{\partial \pi_d} f_{bd} = \delta_{ac} \pi_b - \delta_{bc} \pi_a \quad (5.153)$$

или, переходя к «скалярным» функциям  $f$  и  $g$ ,

$$2(f + \pi^2 g) f' + (1 - fg) = 0, \quad (5.154)$$

где  $f' \equiv df/d\pi^2$ .

На первый взгляд кажется, что здесь слишком велика неопределенность, поскольку у нас лишь одно уравнение (5.154) для двух функций  $f$  и  $g$  и мы можем взять любое из бесконечного числа его решений. Но по двум выбранным функциям ( $f$ ,  $g$ ), удовлетворяющим уравнению (5.154), можно, очевидно, построить любое другое решение этого уравнения, если соответствующим образом переопределить пионное поле:

$$\pi^* = \pi F(\pi^2). \quad (5.155)$$

Это означает, что с точностью до тривиальной неопределенности, обусловленной инвариантностью всей теории относительно преобразования (5.155), наш выбор оказывается *практически однозначным*.

Проще всего, конечно, выбрать

$$g = 0, \quad 2ff' + 1 = 0,$$

т. е.

$$f = (c^2 - \pi^2)^{1/2}, \quad c \equiv f(0), \quad (5.156)$$

так что для коммутатора мы имеем

$$[\bar{Q}_\alpha, \pi_\beta] = -i(c^2 - \pi^2)^{1/2} \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.157)$$

Итак, мы в самом общем виде получили закон преобразования нелинейной  $\sigma$ -модели. Переопределяя пионное поле согласно формуле (5.106),

$$\pi = \frac{\Phi}{1 + \Phi^2/4f_\pi^2} \quad (5.158)$$

и используя равенство (5.108), приходим к выражениям для поля  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} f(\Phi^2) &= -f_\pi \left( 1 - \frac{\Phi^2}{4f_\pi^2} \right), \\ g(\Phi^2) &= -\frac{1}{2} f_\pi, \end{aligned} \quad (5.159)$$

также удовлетворяющим уравнению (5.154). Отсюда мы заключаем, что при единственном предположении об отсутствии в формулах киральных преобразований иных полей, кроме пионного, весь анализ, проведенный выше на основе нелинейной  $\sigma$ -модели, носит самый общий характер.

Аналогичным образом легко получить законы преобразования других полей. Прежде всего заметим, что изоспиновая инвариантность требует, чтобы каждое поле  $\Psi$  принадлежало некоторому изоспиновому мультиплету с законом преобразования

$$[Q_b, \Psi] = T_b \Psi. \quad (5.160)$$

По аналогии с вышеизложенным мы предполагаем, что искомый коммутатор зависит лишь от поля  $\Psi$  и пионного поля:

$$[\bar{Q}_\alpha, \Psi] = U_{\alpha b}(\pi) T_b \Psi. \quad (5.161)$$

Еще раз подчеркнем существенную разницу между законом (5.161) и прежними киральными преобразованиями. Операторы в равенстве (5.161) связаны лишь с изоспиновыми индексами  $\Psi$  в отличие от преобразований, включавших либо мультиплеты по четности, либо матрицу  $\gamma_5$ .

Теперь нетрудно показать, что алгебра токов однозначно ведет к уравнению (5.146). Прежде всего в силу изоспиновой инвариантности можно написать

$$U_{ab}(\pi) = \varepsilon_{abc} \pi_c U(\pi^2). \quad (5.162)$$

Снова используя тождество Якоби для двойного коммутатора,

$$[[\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_b], \Psi] = i\varepsilon_{abc} [Q_c, \Psi], \quad (5.163)$$

получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial U_{bl}}{\partial \pi_a} f_{ab} - \frac{\partial U_{al}}{\partial \pi_b} f_{bd} = -U_{ac} U_{bd} \varepsilon_{cdl} + \varepsilon_{abl}, \quad (5.164)$$

где  $f_{ab}$  — функция, удовлетворяющая условию (5.153). После необходимых выкладок мы приходим к единственному решению уравнения (5.164):

$$U(\pi^2) = \{f(\pi^2) - [\pi^2 + f^2(\pi^2)]^{1/2}\}^{-1}. \quad (5.165)$$

В частном случае (5.159), т. е. когда

$$f(\varphi^2) = -f_\pi \left(1 - \frac{\varphi^2}{4f_\pi^2}\right), \quad (5.166)$$

имеем

$$U(\varphi^2) = -\frac{1}{2f_\pi}, \quad (5.167)$$

что однозначно ведет к закону преобразования (5.146).

Разумеется, тем же методом можно вывести в самом общем виде и ковариантные производные, введенные в предыдущем разделе.

## 7. Древоподобные диаграммы и асимптотика

Чтобы глубже разобраться в смысле феноменологического лагранжиана, рассмотрим методы, которыми выводились теоремы о мягких пионах.

В предыдущих разделах было показано, каким образом феноменологический лагранжиан, учитывающий алгебру токов и киральную симметрию, обеспечиваемую безмассовыми пионами, позволяет воспроизвести результаты алгебры токов в рамках обычной лагранжевой теории возмущений. В частности, точные результаты алгебры токов были получены при учете лишь *деревьев*, т. е. беспетлевых диаграмм (в них не остается интегрирований по внутренним линиям после учета закона сохранения 4-импульса в каждой вершине).

Древоподобные диаграммы можно охарактеризовать точнее, если каждому полю (но не лагранжиану) приписать некую константу связи и затем строить ряд теории возмущений по этому параметру. Тогда оказывается, что главный член соответствует беспетлевым диаграммам, следующий — диаграммам с одной петлей и т. д. В общем виде это доказано Калланом, Коулманом, Вессом и Зумино [189]<sup>1)</sup>. Ниже мы воспроизведем их доказательство для случая одного поля.

Имея лагранжиан  $\mathcal{L}(\varphi)$ , введем оператор

$$\mathcal{L}(\varphi, \lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \mathcal{L}(\varphi\lambda). \quad (5.168)$$

Связной диаграмме Фейнмана мы сопоставляем степень параметра  $\lambda$ , вычисляемую так. Пусть  $E$  — число внешних линий,  $I$  — число внутренних линий,  $L$  — число петель,  $V$  — число вершин и  $N_k$  — число хвостов вершины  $k$ . Такой диаграмме соответствует  $\lambda$  в степени

$$P = \sum_{k=1}^V (N_k - 2). \quad (5.169)$$

Но

$$E + 2I = \sum_{k=1}^V N_k,$$

<sup>1)</sup> См. работы [177, 190, 191]. (А также [595—600]. — *Прим. ред.*)

так что

$$P = E + 2I - 2V. \quad (5.170)$$

Поскольку число петель есть

$$L = I - V + 1,$$

мы, исключив  $V$ , получим

$$P = E + 2L - 2. \quad (5.171)$$

Следовательно, для данного процесса, т. е. при фиксированном  $E$ , диаграммы без петель ( $L = 0$ ) соответствуют низшей степени  $P = E - 2$ ; следующая степень соответствует одной петле ( $L = 1$ ) и т. д. Таким образом, деревья связаны с наинизшей степенью  $\lambda$ .

В предыдущем разделе мы говорили об инвариантности  $S$ -матрицы относительно переопределения пионного поля. Это свойство точного решения; но нетрудно сообразить, что им обладает и  $S$ -матрица, вычисленная в приближении деревьев. Действительно, ведь инвариантность имеет место при любой константе связи, поэтому она должна осуществляться в любом порядке по этой константе.

Хотя параметр  $\lambda$  в формуле (5.168) был введен как вспомогательная величина, во многих случаях он соответствует физической постоянной взаимодействия. В качестве простого примера возьмем скалярную квантовую электродинамику, где взаимодействие имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = e j_{\mu}^{\text{эл.-м}} \mathcal{A}^{\mu} + e^2 \varphi^* \varphi \mathcal{A}^2. \quad (5.172)$$

Здесь  $\gamma$ -член, пропорциональный квадрату  $A_{\mu}$ , содержит множитель  $e^2$ . Точно так же в рассмотренном выше феноменологическом лагранжиане взаимодействия пионное поле всегда появляется с множителем  $(1/f_{\pi})^2$ . Эта закономерность, очевидная в частном случае пион-нуклонного взаимодействия, носит совершенно общий характер, в чем можно убедиться, рассмотрев более сложные системы с участием также и мезонных или нуклонных резонансов.

Наконец, мы можем указать причину, по которой нелинейный кирально-инвариантный лагранжиан дает правильный низкоэнергетический предел уже в приближении деревьев. Дело в том, что деревья дают наинизший существенный член в разложении по степеням  $1/f_{\pi}$ ; алгебра же токов и гипотеза о сохранении аксиального тока дают формулы, в которых также фигурируют степени  $1/f_{\pi}$ , ибо в каждом обобщенном тождестве Уорда<sup>2)</sup> пион ассоциирован с  $1/f_{\pi}$ . Это и позволяет провести их отождествление.

Появлением разложения в ряд по степеням  $1/f_{\pi}$  объясняется также необходимость нелинейных реализаций киральной симметрии. Нелинейные лагранжианы автоматически ведут к таким разложениям, тогда как очень трудно (если отвлечься от весьма простых случаев) вычислить правильную амплитуду, исходя, например, из лагранжиана, подобного лагранжиану линейной  $\sigma$ -модели.

После всего сказанного мы можем более определенно охарактеризовать лагранжев подход. Если говорить очень осторожно, то феноменологический лагранжиан (эквивалент алгебре токов плюс сохранение аксиального тока) можно считать лишь простым аппаратом для воспроизведения результатов алгебры токов и техники мягких пионов. Он представляет ценность постольку,

<sup>1)</sup> Напомним, что пион-нуклонная константа связи  $G_{\pi N}$  ( $p$ -волна) пропорциональна  $f_{\pi}^{-1}$  в силу соотношения Голдбергера — Треймана.

<sup>2)</sup> Напомним, что обобщенное тождество Уорда имеет вид  $\lim_{q \rightarrow 0} \langle (n+1) \text{ аксиальных токов} \rangle = \frac{1}{f_{\pi}} \langle n \text{ аксиальных токов} \rangle + (\text{полюса})$ .

поскольку обычные вычисления, проводимые методом алгебры токов, становятся в высшей степени сложными при увеличении числа мягких пионов. С такой точки зрения лагранжев подход есть улучшенный метод мягких пионов, позволяющий в то же время избежать неопределенностей, которые возникают при экстраполяции амплитуд, вычисленных вне массовой поверхности. Следовательно, нет необходимости смотреть на феноменологический лагранжиан как на основу адекватной полевой теории сильных взаимодействий.

Более смелый и (более оптимистический) взгляд на вещи, выходящий далеко за рамки алгебры токов, — считать феноменологический лагранжиан исходным пунктом для более полной теории элементарных частиц. Но трудности, связанные с перенормируемостью (в обычном смысле) теории, пока что препятствовали какому бы то ни было прогрессу в данном направлении.

Правда, имеется возможность повысить информативность киральных лагранжианов. Можно показать, что древовидные диаграммы нелинейных лагранжианов с производными во взаимодействии (столь ценные для быстрого вычисления низкоэнергетического поведения амплитуд) плохо ведут себя при высоких энергиях. Разумеется, не исключено взаимное уничтожение вкладов разных диаграмм. Было показано следующее: если потребовать, чтобы сумма древовидных диаграмм для процесса рассеяния пионов вперед росла не быстрее, чем реальная физическая амплитуда (закон изменения последней берется, например, из теории Редже), то появляются нетривиальные алгебраические соотношения между константами связи и массами. Другими словами, хотя мы, разумеется, и не ожидаем, что древовидные диаграммы с конечным числом резонансов будут точно воспроизводить ход изменения физической амплитуды при высоких энергиях, мы требуем тем не менее, чтобы асимптотически они вели себя не хуже, чем реальная амплитуда.

Соотношения, появляющиеся в связи с этим требованием, в точности совпадают с соотношениями, которые получаются в системе бесконечного импульса при насыщении резонансными состояниями зарядовых коммутаторов (или, иначе, при насыщении лишь резонансными состояниями обобщенных соотношений Адлера — Вейсбергера), и мы отложим их детальное исследование до гл. 8. Такие соотношения хороши тем, что их можно рассматривать как алгебраические следствия и не нужно постулировать в явном виде при конструировании кирально-инвариантного лагранжиана. Таким образом, несмотря на динамический характер киральной симметрии, получены соотношения между массами и зарядами членов киральных мультиплетов [192, 193, 162].

## § 4. Векторные поля и токи

### 1. Векторные калибровочные поля

В предыдущих разделах мы не раз говорили о том, как ведут себя поля при изоспиновых и киральных преобразованиях. В частности, при бесконечно малом изоспиновом повороте поле  $\psi$  преобразуется так:

$$\delta\psi \equiv i[Q\delta\omega, \psi] = -i(T\delta\omega)\psi, \quad (5.173)$$

причем  $T^\alpha$  — соответствующая изоспиновая матрица. В этом случае три параметра  $\delta\omega_\alpha$  (также и параметры аналогичного линейного кирального преобразования) берутся не зависящими от пространственно-временных координат.

Теперь мы рассмотрим более общие преобразования, когда параметры  $\delta\omega_\alpha$  зависят от  $x$ . Другими словами, поле  $\psi(x)$  будет преобразовываться по-разному в разных точках, так что под действием этой расширенной

группы комбинации, подобные  $a_1\psi_1(x_1) + a_2\psi_2(x_2) + \dots$ , будут меняться по очень сложному закону. Ясно также, что производная  $\partial/\partial x^\mu\psi(x)$  уже не будет преобразовываться согласно формуле (5.173). Фактически мы имеем

$$\delta\partial_\mu\psi(x) = -i(T\delta\omega)\partial_\mu\psi(x) - i(T\partial_\mu\delta\omega)\psi(x). \quad (5.174)$$

Это значит, что кинетический член типа  $\bar{\psi}\Gamma_\mu\partial^\mu\psi$  в лагранжиане не инвариантен относительно таких преобразований. Для преодоления этой трудности мы обратимся к пионерской работе Янга и Милса [182], в которой впервые была исследована проблема построения калибровочно-инвариантных теорий для изоспина. Ключевым моментом является введение векторного поля  $\rho_\mu$  с изоспином единица, преобразующегося по «закону калибровочного преобразования второго рода»:

$$\delta\rho_\mu = -i(t\delta\omega)\rho_\mu + \frac{1}{\gamma_0}\partial_\mu\delta\omega = \delta\omega \times \rho_\mu + \frac{1}{\gamma_0}\partial_\mu\delta\omega. \quad (5.175)$$

Здесь  $t$  — соответствующая изоспиновая матрица,  $t_{\beta\gamma}^\alpha = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}$ ,  $\gamma_0$  — некая постоянная, смысл которой вскоре станет ясен.

Исходя из калибровочного поля  $\rho_\mu$ , можно ввести *ковариантную производную*

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i\gamma_0 T\rho_\mu, \quad (5.176)$$

преобразующуюся по закону (5.173). В самом деле <sup>1)</sup>,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{D}_\mu\psi &= \delta\partial_\mu\psi + i\gamma_0 T\delta(\rho_\mu\psi) = \\ &= -i(T\delta\omega)\partial_\mu\psi + i\gamma_0 T(\delta\omega \times \rho_\mu)\psi + \gamma_0(T\rho_\mu)(T\delta\omega)\psi = \\ &= -i(T\delta\omega)(\partial_\mu + i\gamma_0 T\rho_\mu)\psi. \end{aligned} \quad (5.177)$$

Пользуясь ковариантной производной, можно написать инвариантное выражение для плотности «свободного» лагранжиана, например:

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\mathcal{D}^\mu - M)\psi. \quad (5.178)$$

Здесь поражает аналогия с электродинамикой. Формула (5.173) аналогична калибровочному преобразованию первого рода, справедливому для всех заряженных полей. Поле  $\rho$  аналогично электромагнитному полю; правда, оно заряжено. Этим объясняется появление в законе преобразования (5.175) двух членов: первый учитывает наличие у  $\rho$ -поля изоспина, равного единице, второй выражает то обстоятельство, что мы производим калибровочное преобразование второго рода. Наконец, ковариантная производная (5.176) напоминает хорошо известную калибровочно-инвариантную комбинацию  $d_\mu + i e\mathcal{A}_\mu$ , определяющую минимальное электромагнитное взаимодействие.

Из формулы (5.176) вытекает универсальность взаимодействия поля  $\rho$  с частицами. Согласно выражению (5.178), взаимодействие оказывается равным

$$\mathcal{L}_{\rho\psi} = -\gamma_0\bar{\psi}\gamma^\mu T\psi\rho_\mu,$$

причем  $\gamma_0$  не зависит от природы поля  $\psi$ . Таким образом, все константы взаимодействия  $\rho$ -поля одинаковы,  $\gamma_{\rho NN} = \gamma_{\rho\pi\pi} = \dots\gamma_0$ , а это и есть универсальность Сакураи, о которой говорилось в гл. 2, § 7.

Перейдем теперь к лагранжиану для самого  $\rho$ -поля. Поскольку  $\rho_\mu$  преобразуется по «аномальному» закону (5.175), необходимо ввести новое поле в виде функции поля  $\rho_\mu$ , которая преобразовывалась бы согласно общему правилу (5.173). Нетрудно убедиться, что при бесконечно малых калибровочных преобразованиях комбинация

$$\mathbf{i}_{\mu\nu} = \partial_\mu\rho_\nu - \partial_\nu\rho_\mu - \gamma_0\rho_\mu \times \rho_\nu \quad (5.179)$$

<sup>1)</sup> Если учесть равенство  $[T_\alpha, T_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}T_\gamma$ .

меняется так:

$$\delta f_{\mu\nu} = (\delta\omega \times f_{\mu\nu}). \quad (5.180)$$

Очевидно, что  $f_{\mu\nu}$  является обобщением электромагнитного тензора  $F_{\mu\nu}$ .

Следовательно, если мы требуем, чтобы лагранжиан был инвариантным относительно зависящих от координат калибровочных преобразований, то  $\rho$ -поле может входить в него только через  $f_{\mu\nu}$  и через ковариантные производные от других полей:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(f_{\mu\nu}, \psi, \mathcal{D}_\mu\psi). \quad (5.181)$$

В частности, из вида «кинетического» лагранжиана

$$\mathcal{L}_\rho = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \quad (5.182)$$

следует отсутствие у  $\rho$ -поля затравочной массы.

Простейший лагранжиан системы  $\rho$ - и  $\psi$ -полей имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_\psi. \quad (5.183)$$

К нему, конечно, можно добавить другие инвариантные члены, содержащие ковариантные производные более высокого порядка.

Простейшие лагранжианы типа (5.178), (5.182) или (5.183) обладают «слишком большой» симметрией, чтобы описывать реальный мир. Во-первых,  $\rho$ -поле обязано быть безмассовым; во-вторых, и это еще важнее, векторный ток тождественно равен нулю. В самом деле, поскольку ток можно определить с помощью равенства

$$V_\mu^\alpha = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \omega^\alpha}, \quad (5.184)$$

инвариантность  $\mathcal{L}$  относительно самого общего зависящего от  $x$  преобразования означает, что  $\delta \mathcal{L} = 0$  и, следовательно,  $V_\mu^\alpha \equiv 0$ . Обе трудности можно устранить, добавив в лагранжиан массовый член

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} m_0^2 \rho_\mu \rho^\mu, \quad (5.185)$$

который, очевидно, не инвариантен относительно калибровочного преобразования (5.175). Используя определение (5.184), получаем в этом случае

$$V_\mu^\alpha = \frac{m_0^2}{\gamma_0} \rho_\mu^\alpha, \quad (5.186)$$

т. е. мы приходим наконец к изящному соотношению прямой пропорциональности между током и полем.

Таким образом, выход заключается в переходе к лагранжиану, содержащему как инвариантную относительно полной калибровочной группы часть  $\mathcal{L}_1$  [даваемую, например, формулой (5.183)], так и нарушающую калибровочную инвариантность второго рода часть  $\mathcal{L}_2$ , сохраняющую, однако, изоспин. Вследствие этого ток (5.186) сохраняется:

$$\partial^\mu V_\mu^\alpha = \partial^\mu \rho_\mu^\alpha = 0. \quad (5.187)$$

Мы уже отмечали аналогию между пропорциональностью тока полю (5.186) и условием ЧСАТ. Как это условие представляет собой теоретико-полевой вариант пионной доминантности, ведущей, например, к соотношению Голдбергера — Треймана, так и равенство (5.186) оказывается самым прямым (при лагранжевом подходе) выражением идеи векторной доминантности матричных элементов векторных токов.



## 2. Алгебра полей

Пропорциональность тока полю используется в основном для построения простой и красивой схемы с одновременными коммутаторами, содержащими как временные, так и пространственные компоненты плотностей токов.

Обратимся опять к случаю векторных токов и рассмотрим систему, содержащую векторное поле  $\rho_\mu$  и поле материи  $\psi$ . Предположим, что плотность лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_0^2 \rho_\mu \rho^\mu + \mathcal{L}_\psi(\psi, \mathcal{D}_\mu \psi). \quad (5.188)$$

Основным моментом вывода будет изучение канонических коммутационных соотношений теории. С этой целью выберем в качестве независимых лагранжевых «координат» три пространственные компоненты  $\rho_k^\alpha$  поля  $\rho$ . Как мы увидим, временная компонента  $\rho_0^\alpha$  фактически не является независимой величиной в теории векторных полей.

Сопряженные  $\rho_k^\alpha$  импульсы даются формулой <sup>1)</sup>

$$\pi_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_k} = -f_0^k, \quad (5.189)$$

а канонические коммутационные соотношения имеют обычный вид

$$[\rho_k^\alpha(x), \pi_l^\beta(y)] = i \delta_{kl} \delta_{\alpha\beta} \delta^3(x-y). \quad (5.190)$$

Из лагранжиана (5.188) следуют уравнения движения

$$-\partial_\nu f^{\nu\mu} = m_0^2 \rho^\mu - \gamma_0 f^{\mu\lambda} \times \rho_\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \rho_\mu}. \quad (5.191)$$

Если положить  $\mu = 0$ , то получим формулу

$$-\partial_k f^{k0} = m_0^2 \rho_0 + \gamma_0 f^{0k} \times \rho_k + \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \rho_0}, \quad (5.192)$$

или

$$\rho_0 = -\frac{1}{m_0^2} \partial_k \pi^k - \frac{\gamma_0}{m_0^2} \pi_k \times \rho^k - \frac{1}{m_0^2} \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \rho_0}, \quad (5.193)$$

дающую явную зависимость  $\rho_0^\alpha$  от канонических переменных  $\rho_k^\alpha$ ,  $\pi_k^\alpha$  и других полей. Кроме того, если  $\mathcal{L}_\psi$  зависит от  $\rho_\mu$  лишь через посредство ковариантной производной  $\mathcal{D}_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i\gamma_0 (\mathbf{T} \rho_\mu) \psi$ , то

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \rho_0^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \partial_0 \psi} i\gamma_0 T^\alpha \psi. \quad (5.194)$$

Таким образом, последний член в уравнении (5.193) оказывается зависящим от поля  $\psi$  и канонического импульса  $\partial \mathcal{L}_\psi / \partial \partial_0 \psi$ ; обе величины коммутируют с  $\rho_k^\alpha$  при одинаковых временах, и этот член можно не учитывать при вычислении одновременных коммутационных соотношений.

Перейдем теперь к искомым коммутаторам плотностей токов. Во-первых, любые две пространственные компоненты коммутируют, ибо они пропорциональны независимым каноническим переменным:

$$[V_k^\alpha(x), V_l^\beta(y)] = 0. \quad (5.195)$$

Во-вторых, коммутатор временной и пространственной компонент в силу равенств (5.186) и (5.193) и канонических коммутационных соотношений

<sup>1)</sup> Если бы мы выбрали в качестве независимой координаты  $\rho_0^\alpha$ , то ее канонический импульс был бы равен нулю, так как  $\pi_0 = -f_0^0 = 0$ .

имеет вид

$$[V_0^\alpha(x), V_k^\beta(y)] = \frac{m_0^4}{\gamma_0^2} \left[ -\frac{1}{m_0^2} \partial_l \pi_\alpha^l(x) + \frac{\gamma_0}{m_0^2} \rho_l(x) \times \pi_\alpha^l(x), \rho_k^\beta(y) \right] = \\ = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_k^\gamma(x) \delta^3(x-y) + i \frac{m_0^2}{\gamma_0} \delta_{\alpha\beta} \partial_k \delta^3(x-y). \quad (5.196)$$

Наконец, нетрудно убедиться<sup>1)</sup>, что

$$[V_0^\alpha(x), V_0^\beta(y)] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_0^\gamma(x) \delta^3(x-y). \quad (5.197)$$

Еще одно характерное свойство алгебры полей заключается в том, что она дает однозначные выражения для всех коммутаторов, содержащих временные производные от токов<sup>2)</sup>. В частности, приведем следующий результат:

$$[\partial_0 V_k^\alpha(x) - \partial_k V_0^\alpha(x), V_l^\beta(y)] = i\delta_{\alpha\beta} \delta_{kl} \delta^3(x-y) \frac{m_0^4}{\gamma_0^2} + \\ + i \frac{\gamma_0^2}{m_0^2} \varepsilon_{\alpha\gamma\sigma} \varepsilon_{\beta\gamma\sigma} V_l^\sigma(x) V_k^\rho(x) \delta^3(x-y) + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_k^\gamma(x) \partial_l \delta^3(x-y). \quad (5.198)$$

Такой подход к коммутаторам токов, основанный на использовании калибровочных полей, выгоден тем, что теперь мы имеем в своем распоряжении действительно минимальный набор коммутаторов. Этот набор не только содержит важную формулу коммутирования временных компонент, но и ведет к интересным и недвусмысленным утверждениям относительно коммутаторов пространственных компонент или их производных по времени. К таким, например, как утверждение, что швингеровский член в выражении (5.196) есть *c*-число.

Следующим шагом будет расширение рамок этого подхода с тем, чтобы включить в него аксиальные токи и киральные коммутаторы.

### 3. Аксиальные токи и мезоны

Необходимое нам обобщение на случай аксиальных токов, естественно, достигается введением триплета псевдовекторных частиц (описываемых полем  $a_\mu^\alpha$ ) для того, чтобы построить новые тождества ток — поле. Итак, имеется два типа зависящих от *x* калибровочных преобразований: бесконечно-малое изоспиновое калибровочное преобразование с параметрами  $\delta\omega^\alpha(x)$ , преобразующее поле согласно формулам

$$\delta\rho_\mu = \delta\omega \times \rho_\mu + \frac{1}{\gamma_0} \delta_\mu \delta\omega, \quad (5.199) \\ \delta a_\mu = \delta\omega \times a_\mu,$$

и бесконечно-малое киральное калибровочное преобразование с параметрами  $\delta\omega_s^\alpha(x)$ , действующее так:

$$\delta\rho_\mu = \delta\omega_s \times a_\mu, \\ \delta a_\mu = \delta\omega_s \times \rho_\mu + \frac{1}{\gamma_0} \partial_\mu \delta\omega_s. \quad (5.200)$$

Здесь мы тоже не требуем инвариантности лагранжиана относительно всей калибровочной группы; для простоты предположим лишь, что нарушающий калибровочную инвариантность член все же обладает  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрией<sup>3)</sup>. Простейший лагранжиан, обладающий этими свойствами,

<sup>1)</sup> Пользуясь равенством (5.194) и каноническими коммутационными соотношениями для  $\psi$ .

<sup>2)</sup> Благодаря соотношению

$$\pi_k^\alpha = -\partial_0 \rho_k^\alpha + \partial_k \rho_0^\alpha + \gamma_0 (\rho_0 \times \rho_k)^\alpha.$$

<sup>3)</sup> Не уточняя пока, обеспечивается ли она безмассовым пионом или иначе.

таков:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu \rho_\nu - \partial_\nu \rho_\mu - \gamma_0 [\rho_\mu \times \rho_\nu + \mathbf{a}_\mu \times \mathbf{a}_\nu])^2 - \\ -\frac{1}{4} (\partial_\mu \mathbf{a}_\nu - \partial_\nu \mathbf{a}_\mu - \gamma_0 [\rho_\mu \times \mathbf{a}_\nu - \rho_\nu \times \mathbf{a}_\mu])^2 + \frac{1}{2} m_0^2 (\rho_\mu^2 + \mathbf{a}_\mu^2). \quad (5.201)$$

Пропорциональность ток — поле тотчас же следует из соотношений

$$V_\mu^\alpha = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \omega^\alpha} = \frac{m_0^2}{\gamma_0} \rho_\mu^\alpha, \\ A_\mu^\alpha = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \omega_s^\alpha} = \frac{m_0^2}{\gamma_0} \mathbf{a}_\mu^\alpha, \quad (5.202)$$

и  $SU(2) \otimes SU(2)$ -инвариантность всего лагранжиана означает, что оба тока сохраняются:

$$\partial_\mu V^{\mu, \alpha} = \partial_\mu A^{\mu, \alpha} = 0. \quad (5.203)$$

Чтобы установить одновременные коммутационные соотношения, нужно поступить точно так же, как и в предыдущем разделе: найти уравнения движения, исключить  $\rho_0^\alpha$  и  $\mathbf{a}_0^\alpha$  и применить канонические коммутационные соотношения.

Полный набор одновременных коммутаторов, даваемый алгеброй полей, оказывается таким:

1) Для временных компонент

$$[V_0^\alpha(x), V_0^\beta(y)] = [A_0^\alpha(x), A_0^\beta(y)] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_0^\gamma(x) \delta^3(x-y), \\ [V_0^\alpha(x), A_0^\beta(y)] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_0^\gamma(x) \delta^3(x-y). \quad (5.204)$$

2) Для временных и пространственных компонент

$$[V_0^\alpha(x), V_k^\beta(y)] = [A_0^\alpha(x), A_k^\beta(y)] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_k^\gamma(x) \delta^3(x-y) + \\ + \frac{im_0^2}{\gamma_0} \delta_{\alpha\beta} \partial_k \delta^3(x-y), \quad (5.205)$$

$$[V_0^\alpha(x), A_k^\beta(y)] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_k^\gamma(x) \delta^3(x-y).$$

3) Для пространственных компонент

$$[V_k^\alpha, V_l^\beta] = [A_k^\alpha, A_l^\beta] = [V_k^\alpha, A_l^\beta] = 0. \quad (5.206)$$

Приведем еще выражение для следующих коммутаторов, которое пригодится нам в дальнейшем:

$$[\partial_0 V_k^\alpha(x) - \partial_k V_0^\alpha(x), V_l^\beta(y)] = [\partial_0 A_k^\alpha(x) - \partial_k A_0^\alpha(x), A_l^\beta(y)] = \\ = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_k^\gamma(x) \partial_l \delta^3(x-y) + i\delta_{\alpha\beta} \delta_{kl} \frac{m_0^4}{\gamma_0^2} \delta^3(x-y) + \\ + i \frac{\gamma_0^2}{m_0^2} \varepsilon_{\alpha\gamma\rho} \varepsilon_{\beta\gamma\sigma} [V_l^\sigma(x) V_k^\rho(x) + A_l^\sigma(x) A_k^\rho(x)] \delta^3(x-y). \quad (5.207)$$

Набор коммутаторов алгебры полей (5.204) — (5.207) отличается прежде всего замечательной простотой. При более подробном ознакомлении обнаруживается, что равенство (5.204) воспроизводит фундаментальные коммутационные соотношения Гелл-Манна для временных компонент токов и что этот результат алгебры полей идентичен предсказанию кварковой модели. Коммутатор (5.205) для пространственных и временных компонент обладает таким ценным свойством: он дает вполне определенное значение для швингеровского члена, который оказывается  $c$ -числом, причем одним и тем же для коммутаторов векторных и аксиальных токов. Наконец, равенство нулю коммутаторов пространственных компонент типично для алгебры полей,

и этот результат резко отличается от того, что получается в других теоретических моделях (без калибровочных полей).

Окончательная схема, возникающая при таком рассмотрении, проще и информативнее кварковой модели, поскольку она более детальна. Нашей целью будет обосновать тождество поле — ток и коммутационные соотношения, исходя из лагранжиана векторных полей и свойства сохранения токов. Поэтому без лишних слов мы допускаем обобщение  $SU(2) \otimes SU(2)$  на  $SU(3) \otimes SU(3)$ . Соответствующие применения алгебры полей будут рассмотрены в следующей главе.

Удовлетворительное включение векторных мезонов в схему киральной симметрии требует, разумеется, введения пиона, и приходится изучать свойства систем, содержащих  $\rho$ -мезоны,  $A_1$ -мезоны и пионы (это по меньшей мере). Согласно правилам, с которыми мы познакомились, для рассмотрения кирально-инвариантных лагранжианов приходится вводить более сложные ковариантные производные, ведущие к нелинейным взаимодействиям. Формулы при этом становятся очень сложными, а потому мы отсылаем читателя к соответствующей литературе (159—163, 171—178, 194, 195]. Отметим лишь, что наиболее интересные результаты лагранжева подхода к проблеме векторных мезонов будут получены в этой книге обычными методами алгебры токов.

### Приложение I

Мы хотим вкратце показать, что весьма простые результаты линейной  $\sigma$ -модели, полученные в § 2, п. 4 и 5, не зависят от конкретной формы лагранжиана этой модели. Ограничимся случаем лишь  $\pi$ - и  $\sigma$ -полей. Обобщение на другие поля не представляет существенных трудностей.

В самом общем виде кирально-инвариантный лагранжиан можно представить следующим образом:

$$\mathcal{L} = F(\pi^2 + \sigma^2) + \text{члены с производными.} \quad (I.1)$$

Введем новое поле

$$\sigma = \sigma' + b. \quad (I.2)$$

Часть  $\mathcal{L}_0$  лагранжиана, не содержащая производных, будет выглядеть так:

$$\mathcal{L}_0 = F(\Lambda), \quad (I.3)$$

$$\Lambda = \pi^2 + \sigma'^2 + 2\sigma'b + b^2. \quad (I.4)$$

Разложим  $\mathcal{L}_0$  в ряд по степеням  $\pi$  и  $\sigma$ . Имеем

$$\mathcal{L}_0 = A_0(b^2) + 2b\sigma' A_1(b^2) + \pi^2 A_1(b^2) + \sigma'^2 [A_1(b^2) + 4b^2 A_2(b^2)] + 4b\sigma'(\pi^2 + \sigma'^2) A_2(b^2) + (\pi^2)^2 A_2(b^2) + \dots, \quad (I.5)$$

где

$$A_0(b^2) = F(b^2),$$

$$A_1(b^2) = \left( \frac{dF}{d\Lambda} \right)_{\Lambda=b^2}, \quad (I.6)$$

$$A_2(b^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 F}{d\Lambda^2} \right)_{\Lambda=b^2}.$$

Из равенства (I.5) мы заключаем следующее:

1) Условием равновесия является равенство

$$2bA_1(b^2) = 0. \quad (I.7)$$

2) Массы полей  $\pi$  и  $\sigma$  даются формулами

$$m_\pi^2 = -2A_1(b^2), \quad (I.8)$$

$$m_\sigma^2 = -2A_1(b^2) - 8b^2 A_2(b^2). \quad (I.9)$$

3) Константы взаимодействий ( $g_{\pi\pi\pi}$ ) и ( $g_{\sigma\sigma\sigma}$ ) таковы:

$$g_{\pi\pi\pi} = g_{\sigma\sigma\sigma} = 2bA_2(b^2). \quad (I.10)$$

Остановимся на условии равновесия (I.7). Выбор аномального решения соответствует равенству

$$A_1(b^2) = 0, \quad (I.11)$$

именно:

$$m_\pi^2 = 0, \quad m_\sigma^2 = -4bg_{\pi\pi\pi}, \quad (I.12)$$

$$g_{\pi\pi\pi} = \frac{g_{\sigma\pi\pi}}{2b}.$$

В качестве еще одного применения можно вычислить амплитуду  $\pi\pi$ -рассеяния:

$$T_{\pi\pi} = \frac{g_{\sigma\pi\pi}}{2b} (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) + g_{\sigma\pi\pi}^2 \left( \frac{\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}}{m_\sigma^2 - s} + \frac{\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}}{m_\sigma^2 - s} + \frac{\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}}{m_\sigma^2 - t} \right). \quad (I.13)$$

Разлагая ее в ряд по степеням  $s$ ,  $\bar{s}$  и  $t$ , получаем

$$T_{\pi\pi} = g_{\sigma\pi\pi} \left( \frac{1}{2b} + \frac{g_{\sigma\pi\pi}}{m_\sigma^2} \right) (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) +$$

$$+ \frac{g_{\sigma\pi\pi}^2}{m_\sigma^4} (s\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \bar{s}\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} + t\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}). \quad (I.14)$$

С учетом равенства (I.12) это выражение ведет к формуле Вейнберга. Отождествим, наконец,  $b$  с постоянной пионного распада. Из формулы (I.1) для  $\mathcal{L}$  легко вывести следующее выражение для аксиального тока:

$$A_\mu^\alpha = \sigma\partial_\mu\pi^\alpha - (\partial_\mu\sigma)\pi^\alpha \rightarrow b\partial_\mu\pi^\alpha + \dots, \quad (I.15)$$

откуда

$$b = -f_\pi. \quad (I.16)$$

## 6. Правила сумм, следующие из одновременных коммутаторов

### § 1. Введение

В гл. 2—4 мы видели, что один из основных методов применения алгебры токов состоит в использовании так называемых обобщенных тождеств Уорда. Было показано, что с их помощью можно получить два основных результата теории: низкоэнергетические теоремы и дисперсионные правила сумм. Подчеркнем, что метод, основанный на тождествах Уорда, особенно широко применяется, поскольку он позволяет превратить лоренц-неинвариантные по своей форме одновременные коммутаторы в инвариантные тождества, так что все результаты могут быть получены в релятивистски-ковариантном виде.

В этой и следующих главах мы хотим исследовать самый, на первый взгляд, прямой метод использования одновременных коммутационных соотношений. Он состоит в рассмотрении одночастичных матричных элементов коммутационных соотношений и преобразовании их в правила сумм путем непосредственного использования условия полноты системы промежуточных состояний. В применении к хорошо известному коммутатору

$$[q, p] = i\hbar \quad (6.1)$$

этот метод дает знаменитое правило сумм Томаса — Рейхе — Куна <sup>1)</sup>. Та же методика позволила получить важные правила сумм в ядерной физике.

Главная причина, по которой данный метод не нашел широкого применения в физике элементарных частиц, — это, конечно, отсутствие явной лоренц-инвариантности. Действительно, как вскоре станет ясно, матричные элементы коммутационных соотношений (например, для зарядов) между одночастичными состояниями с импульсом  $p$  дают разные правила сумм при разных значениях  $p$ . Несколько менее известное, но столь же существенное обстоятельство — то, что наибольшие вклады в правила сумм часто отличаются от тех, которые можно ожидать, если упрощенно подходить к условию полноты. Поскольку в нашей задаче имеет место релятивистский феномен рождения и уничтожения частиц в вакууме, в правилах сумм присутствуют вклады и несвязных диаграмм, пренебрежение которыми сделало бы некорректным весь метод.

Данная глава и две следующие (гл. 7 и 8) посвящены применению метода насыщения в физических задачах. В рамках алгебры токов этот метод позволил дать единую трактовку двух основных результатов теории: низкоэнергетических теорем для мягких пионов и дисперсионных правил сумм. Их можно рассматривать как два разных типа «правил сумм», которые получаются насыщением одновременных коммутаторов в двух разных системах отсчета. Мы воспроизведем (в иной форме) большую часть результатов, полученных в гл. 3 и 4, при таком подходе. Читателю, желающему лишь мельком ознакомиться с основными результатами алгебры токов, захочется, вероятно, целиком опустить эту альтернативную трактовку. Но при этом потерялась бы

<sup>1)</sup> Доказательство см. в работе [212].

ясность понимания некоторых тонких и характерных особенностей релятивистской теории.

Прежде всего, как подробно говорилось в гл. 3, ковариантность метода тождеств Уорда достигается ценой ухода от ответа на ряд трудных вопросов. Если не считать некоторых крайне благоприятных случаев, то  $T$ -произведение не обладает явной лоренц-инвариантностью; его можно, конечно, сделать инвариантным, добавив соответствующие члены, но тогда нарушается внутренняя простота метода тождеств Уорда, поскольку становится неясным, что удовлетворяет этому тождеству. Причины возникновения такой трудности будут исследованы в гл. 7.

Кроме того, в данной главе мы увидим, что в целом классе правил сумм, полученных путем насыщения одновременных коммутаторов в системе покоя, главным вкладом будет (песвязный) вклад однопионного состояния. Это приведет к новой формулировке низкоэнергетических теорем, так как если удерживать только однопионный член, получатся снова результаты теории мягких пионов. Большое преимущество такого подхода состоит в том, что мы всегда будем работать с физическими пионами; дополнительные члены в правиле сумм представляют собой поправки, обусловленные ненулевой массой пиона. Это позволяет оценить величину поправок к различным мягкопионным формулам.

В то же время, как мы покажем в гл. 8, использование системы отсчета с бесконечно большим импульсом позволяет по-иному вывести дисперсионные соотношения гл. 4. И здесь метод прямого насыщения имеет определенные преимущества: будет четко видна алгебраическая структура правил сумм и сравнительно легко будет обобщить методику на случай мишеней со спином.

Данная глава построена следующим образом. Сначала мы просто применим метод насыщения к вакуумному среднему коммутаторов алгебры полей, что даст нам правила сумм Вейнберга, а затем перейдем к сути проблемы. Мы подробно исследуем структуру суммы по полной системе состояний с точки зрения связанных вкладов и используем результаты такого исследования при насыщении коммутаторов, содержащих хотя бы один аксиальный заряд, в системе покоя внешних частиц. Это позволит весьма простым способом вывести низкоэнергетические теоремы алгебры токов для физических пионов и детально проанализировать некоторые относящиеся сюда примеры.

## § 2. Вакуумные средние значения

### 1. Правило сумм Челлена — Лемана

Для «разминки» рассмотрим простейший случай насыщения вакуумного среднего одновременного коммутатора и приведем несколько интересных примеров. Получающиеся при этом правила сумм будут, разумеется, особенно изящными; данный случай значительно проще случая, когда имеются внешние частицы, но зато он дает меньше интересной информации. Будущие опыты со встречными электронными пучками позволят прямо сравнить теорию с экспериментом и, в частности, определить швингеровские члены по сечениям аннигиляции. Тем не менее даже в отсутствие экспериментальных данных численный анализ правил сумм (в рамках разумных приближений) позволяет получить ряд соотношений, способствующих лучшему пониманию физики элементарных частиц.

Рассмотрим в качестве первого примера канонический коммутатор

$$[\varphi_\beta(\mathbf{x}, 0), \dot{\varphi}_\alpha(0)] = iZ^{-1}\delta_{\beta\alpha}\delta^3(\mathbf{x}), \quad (6.2)$$

где  $Z$  — константа перенормировки волновой функции. Возьмем вакуумное среднее коммутатора (6.2), умножим его на  $\exp(-iqx)$  и проинтегрируем

по всему пространству. Наконец, разложив результат по полному набору физических промежуточных состояний и взяв интеграл, получим правило сумм

$$(2\pi)^3 \sum_n \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_n) E_n \langle 0 | \varphi_\beta | n \rangle \langle n | \varphi_\alpha | 0 \rangle - \begin{pmatrix} \alpha \leftrightarrow \beta \\ \mathbf{q} \leftrightarrow -\mathbf{q} \end{pmatrix} = \delta_{\alpha\beta} Z^{-1}. \quad (6.3)$$

Для удобства введем новую переменную интегрирования  $q_0$  так, чтобы соотношение (6.3) приняло вид

$$\int_0^\infty \rho(q) q_0 dq_0 - \int_{-\infty}^0 \rho(-q) q_0 dq_0 = Z^{-1}, \quad (6.4)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta} \rho(q) &= (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(q - p_n) \langle 0 | \varphi_\beta | n \rangle \langle n | \varphi_\alpha | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | \varphi_\beta(x) \varphi_\alpha(0) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Отметим, что ввиду скалярности полей функция  $\rho(q)$  лоренц-инвариантна и ее зависимость от  $q_\mu$  имеет вид

$$\rho(q) = \theta(q_0) \rho(u), \quad (6.6)$$

где  $u$  — инвариантная переменная:

$$u \equiv q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2. \quad (6.7)$$

Ступенчатая функция  $\theta(q_0)$  входит в формулу (6.6) лоренц-инвариантным образом, поскольку суммирование ведется по физическим промежуточным состояниям, и, следовательно,  $u > 0$ . Подставив соотношение (6.6) в равенство (6.4), получим правило сумм в явно инвариантной форме:

$$\int_0^\infty du \rho(u) = Z^{-1}. \quad (6.8)$$

Для удобства выделим одночастичный, скажем  $\pi$ -мезонный, вклад. Мы имеем дело с ренормированными полями, а поэтому  $\langle 0 | \varphi | \pi \rangle = 1$ , и уравнение (6.8) в конце концов принимает вид

$$1 + \int_0^\infty \sigma(u) du = Z^{-1}, \quad \sigma = \rho - \rho_\pi, \quad (6.9)$$

что совпадает с правилом сумм Челлена — Лемана [213—215] для константы перенормировки  $Z$ . Ввиду положительной определенности  $\sigma$  из формулы (6.9) следует, что если интеграл существует, то

$$0 < Z \leq 1. \quad (6.10)$$

В частности,  $Z^{-1}$  не может обращаться в нуль. В следующем разделе мы увидим, что аналогичное условие положительности не позволяет обращаться в нуль коммутатору  $[j_0, j]$ .

## 2. Коммутаторы токов и швингеровские члены

Обратимся теперь к задаче насыщения вакуумных средних значений коммутаторов плотностей тока. Поскольку, как нетрудно убедиться, учет симметрии при насыщении матричных элементов  $\langle 0 | [j_0, j_0] | 0 \rangle$  и



$\langle 0 | [j, j] | 0 \rangle$  приводит к тривиальным результатам, сконцентрируем свое внимание на величине  $\langle 0 | [j_0^\beta, j^\alpha] | 0 \rangle$  (для простоты ограничимся случаем изовекторных токов  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ). Здесь существен вопрос о природе швингеровского члена. Отметим, что в случае, когда швингеровский член представляет собой  $c$ -число, найти его можно, только вычислив вакуумное среднее коммутационных соотношений. Действительно, если взять матричный элемент между одночастичными состояниями, то  $c$ -числовой швингеровский член привел бы к несвязной части

$$\langle p_2 | ((j_0^\beta, j^\alpha))_{\text{швинг. член}} | p_1 \rangle = \langle p_2 | p_1 \rangle \delta_{\beta\alpha} c i \partial_i \delta^3(x), \quad (6.11)$$

которая не дает вклада в правило сумм.

Поэтому рассмотрим величину

$$\langle 0 | [V_0^\beta(x, 0), V_i^\alpha(0)] | 0 \rangle = i \delta_{\beta\alpha} \partial_i \delta^3(x) \langle 0 | c | 0 \rangle \quad (6.12)$$

или, точнее,

$$\begin{aligned} & \int d^3x \exp(-iqx) \langle 0 | [V_0^\beta(x, 0), V_i^\alpha(0)] | 0 \rangle = \\ & = i \delta_{\beta\alpha} \langle c \rangle_0 \int d^3x \exp(-iqx) \partial_i \delta^3(x) = \delta_{\beta\alpha} q_i \langle c \rangle_0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Обычным способом получаем правило сумм

$$2 \int_0^\infty dq_0 t_{0i}(q) = \langle c \rangle_0 q_i, \quad (6.14)$$

где

$$\delta_{\beta\alpha} t_{\mu\nu}(q) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(q - p_n) \langle 0 | V_\mu^\beta | n \rangle \langle n | V_\nu^\alpha | 0 \rangle. \quad (6.15)$$

Из соображений инвариантности имеем

$$t_{\mu\nu}(q) = [a(u) g_{\mu\nu} + b(u) q_\mu q_\nu], \quad u = q^2, \quad (6.16)$$

и правило сумм (6.14) принимает вид

$$\int_0^\infty du b(u) = \langle c \rangle_0. \quad (6.17)$$

Чрезвычайно важное значение имеет положительная определенность величины  $b(u)$ . Действительно, из сохранения векторного тока следует<sup>1)</sup>, что

$$q^\mu t_{\mu\nu} = 0, \quad (6.18)$$

или

$$t_{\mu\nu} = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) b(u) \quad (6.19)$$

и

$$3ub(u) = -t_\mu^\mu > 0. \quad (6.20)$$

Таким образом, как впервые показал Швингер [88, 196], независимо от рассматриваемой нами модели величина  $\langle c \rangle_0$  не может обращаться в нуль именно в силу требования положительности. Разумеется, ограниченность этой величины обусловлена асимптотическими свойствами теории.

Большое впечатление производит аналогия с правилом сумм Челлена — Лемана (6.8). Эту аналогию можно еще несколько расширить, так как вакуумное усреднение коммутаторов  $[\phi, \phi]$  и  $[\dot{\phi}, \dot{\phi}]$ , подобно усреднению коммутаторов  $[j_0, j_0]$ ,  $[j, j]$ , приводит к тривиальным результатам; вклад могут

<sup>1)</sup> Сохранение тока не является необходимым условием, и такой же вывод можно сделать, например, в случае аксиальных токов.

дать только симметричные по изоспиновым индексам части коммутаторов  $[\varphi, \dot{\varphi}], [j_0, j]$ .

Поскольку мы здесь имеем дело с общими свойствами швингеровских членов, может быть, полезно указать процесс, где они явно проявляются. Рассмотрим аннигиляцию электрона и позитрона в адроны. Для изовекторной части амплитуды в однофотонном приближении имеем

$$T(I=1) = e^2 \langle n | V_\mu^3 | 0 \rangle \frac{1}{q^2} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \delta^4(p_1 + p_2 - q), \quad (6.21)$$

а полное сечение имеет вид ( $m_e \approx 0$ )

$$\begin{aligned} \sigma(I=1) &= \frac{e^4 \pi}{u^3} \left( p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{1\nu} p_{2\mu} - \frac{1}{2} u g_{\mu\nu} \right) \times \\ &\times \sum_n (2\pi)^3 \langle 0 | V_\mu^3 | n \rangle \langle n | V_\nu^3 | 0 \rangle \delta^4(q - p_n) = \frac{16\pi^3 \alpha^2}{u} b(u). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Тогда из равенства (6.17) получаем

$$\langle c \rangle_0^3 = \frac{r_1}{16\pi^3 \alpha^2} \int \sigma(I=1; u) u \, du. \quad (6.23)$$

Таким образом, в разных моделях оказывается разным асимптотическое поведение полного сечения процесса на встречных пучках  $e^+e^- \rightarrow$  адроны [89]. Если  $\langle c \rangle_0^3$  — конечная величина, как в модели алгебры полей, то должно выполняться условие

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \sigma(I=1; u) = 0. \quad (6.24)$$

В кварковой же модели, где  $\langle c \rangle_0$ , по-видимому, бесконечно, должно быть

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \sigma(u=1; u) = \text{const} \quad (\text{или хуже}). \quad (6.25)$$

Аналогичные соотношения выполняются и для изоскалярной части.

Напомним <sup>1)</sup>, что в случае точечных частиц сечение процесса изменяется как  $1/u$ , а это приводит к линейной расходимости интеграла в формуле (6.23). Время покажет.

### 3. Правила сумм Вейнберга

Алгебра полей может служить хорошим примером теории, где швингеровские члены оказываются  $c$ -числами, и поэтому полезно рассмотреть подробнее некоторые следствия такой модели. Характерной особенностью алгебры полей является равенство векторного и аксиально-векторного швингеровских членов, т. е.

$$\begin{aligned} &\int d^3x \exp(-iqx) \langle 0 | [V_0^B(\mathbf{x}), V_k^\alpha(0)] | 0 \rangle = \\ &= \int d^3x \exp(-iqx) \langle 0 | [A_0^B(\mathbf{x}), A_k^\alpha(0)] | 0 \rangle = \delta_{\alpha\beta} q_k C. \end{aligned} \quad (6.26)$$

<sup>1)</sup> Можно вычислить, например,  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$  или просто провести анализ размерностей.

В действительности же можно показать, что равенство  $\langle 0 | [V_0, V_k] | 0 \rangle = \langle 0 | [A_0, A_k] | 0 \rangle$  получается при более слабых предположениях, так что условие (6.26) носит несколько более общий характер <sup>4)</sup>.

Вводя спектральные функции  $a$  и  $b$  с помощью соотношения

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta} t_{\mu\nu}^{(V, A)} &= (2\pi)^3 \sum_n \delta(q - p_n) \langle 0 | (V_\mu^\beta, A_\mu^\beta) | n \rangle \langle n | (V_\nu^\alpha, A_\nu^\alpha) | 0 \rangle = \\ &= \delta_{\beta\alpha} [a^{(V, A)}(u) g_{\mu\nu} + b^{(V, A)}(u) q_\mu q_\nu], \end{aligned} \quad (6.27)$$

мы можем представить (6.26) в виде правила сумм:

$$\int_0^\infty [b^{(V)}(u) - b^{(A)}(u)] du = 0. \quad (6.28)$$

Это и есть так называемое первое правило сумм Вейнберга.

Далее напомним более специфическое следствие тождества поле — ток [соотношение (5.207)]:

$$\langle [\partial_0 V_k^\beta - \partial_k V_0^\beta, V_l^\alpha] \rangle_0 = \langle [\partial_0 A_k^\beta - \partial_k A_0^\beta, A_l^\alpha] \rangle_0. \quad (6.29)$$

Из этого равенства получается правило сумм

$$\int dq_0 (q_0 t_{kl}^{(V)} - q_k t_{0l}^{(V)}) = \int dq_0 (q_0 t_{kl}^{(A)} - q_k t_{0l}^{(A)}), \quad (6.30)$$

а именно второе правило сумм Вейнберга

$$\int_0^\infty [a^{(V)}(u) - a^{(A)}(u)] du = 0. \quad (6.31)$$

Перейдем теперь к вопросу о насыщении этих правил сумм. Имея дело с вакуумными обкладками, мы, очевидно, получаем то преимущество, что у нас существуют строгие правила отбора по угловому моменту и другим квантовым числам. Так, вклад в  $\langle 0 | A_\mu | n \rangle$  дают только состояния с  $J^P = 1^+, 0^-$ , а вклад в  $\langle 0 | V_\mu | n \rangle$  — состояния с  $J^P = 1^-$  (ввиду сохранения векторного тока не могут возникнуть  $0^+$ -члены). Мы пренебрегаем возможными вкладами многочастичных промежуточных состояний и используем при насыщении  $t_{\mu\nu}^{(A)}$  одночастичные состояния  $A_1(1^+)$  и  $\pi(0^-)$ , а при насыщении  $t_{\mu\nu}^{(V)}$  — состояния  $\rho(1^-)$ . Тогда из (6.28) получаем равенство

$$\frac{f_\rho^2}{m_\rho^2} - \frac{f_A^2}{m_A^2} = f_\pi^2, \quad (6.32)$$

а из (6.31) — равенство

$$f_\rho^2 = f_A^2, \quad (6.33)$$

где  $f_\rho$  и  $f_A$  — величины, определяющиеся равенствами

$$\begin{aligned} \langle 0 | V_\mu^\beta | \rho^\alpha \rangle &= \delta_{\beta\alpha} f_\rho \varepsilon_\mu, \\ \langle 0 | A_\mu^\beta | A_1^\alpha \rangle &= \delta_{\beta\alpha} f_A \varepsilon_\mu. \end{aligned} \quad (6.34)$$

<sup>4)</sup> Приведем вывод самого Вейнберга [92]. Рассмотрим

$$\langle 0 | [[\bar{Q}_\beta, A_0^\alpha], V_k^\delta] | 0 \rangle = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \langle [V_0^\gamma, V_k^\delta] \rangle_0 \quad (I)$$

и применим тождество Якоби в левой части. Тогда

$$\langle [[\bar{Q}_\beta, A_0^\alpha], V_k^\delta] \rangle_0 = \langle [S_{kl}^{\alpha\delta}, \bar{Q}_\beta] \rangle_0 i\partial^l \delta^3(\mathbf{x}) + i\varepsilon_{\beta\delta\eta} \langle [A_k^\eta, A_0^\alpha] \rangle_0, \quad (II)$$

где  $S_{kl}^{\alpha\delta}$  — швингеровский член, соответствующий  $[A_0^\alpha, A_k^\delta]$ . Если  $S$  — либо  $c$ -число, либо изоскалярный оператор, либо не содержит части с  $I = 1$ , то  $\langle [S, \bar{Q}] \rangle_0 = 0$ , откуда следует равенство (6.26).

Тогда

$$\frac{m_A^2 - m_\rho^2}{m_A^2 m_\rho^2} = \frac{f_\pi^2}{f_\rho^2}, \quad (6.35)$$

и далее, используя равенство <sup>1)</sup>

$$\frac{f_\pi^2}{f_\rho^2} \approx \frac{1}{2m_\rho^2}, \quad (6.36)$$

мы в конце концов получаем соотношение Вейнберга

$$m_A^2 = 2m_\rho^2. \quad (6.37)$$

Если отождествить с  $A_1$ -частицей <sup>2)</sup> пик в  $\rho$ -спектре при 1080 МэВ, то согласие получается замечательное.

Легко обобщить [119] метод, основанный на двух правилах сумм Вейнберга, на случай групп  $SU(3) \otimes SU(3)$  и  $SU(3)$ . В случае группы  $SU(3)$  окончательные результаты оказываются неудовлетворительными; обычно это объясняется нарушением второго правила сумм, т. е. соотношения (6.29). Если в векторном случае полагаться только на равенство швингеровских членов, то из соотношения

$$\langle 0 | V_0^3, V_k^3 | 0 \rangle = \langle 0 | V_0^8, V_k^8 | 0 \rangle \quad (6.38)$$

с учетом соотношения (6.22) между  $\sigma(u)$  и  $b(u)$  следует, что

$$\int u du [\sigma(e^+e^- \rightarrow I=1) - 3\sigma(e^+e^- \rightarrow I=0)] = 0. \quad (6.39)$$

Отметим, что равенство (6.39) может выполняться даже в случае бесконечных швингеровских членов, если только разность сечений убывает асимптотически достаточно быстро.

Равенство (6.39) интересно, конечно, тем, что его можно прямо проверить, пользуясь измеренными сечениями. Если сделать более конкретные предположения относительно насыщения и использовать состояния векторных мезонов  $\rho$ ,  $\omega$  и  $\phi$ , то легко получить следующее соотношение между вероятностями лептонных распадов:

$$m_\rho \Gamma(\rho \rightarrow e^+e^-) = 3 [m_\omega \Gamma(\omega \rightarrow e^+e^-) + m_\phi \Gamma(\phi \rightarrow e^+e^-)]. \quad (6.40)$$

Равенство (6.40), являющееся следствием первого правила сумм Вейнберга и векторной доминантности, вероятно, вскоре будет проверено экспериментально.

### § 3. Общая структура суммы по полной системе промежуточных состояний

#### 1. Существование несвязных вкладов в сумму по полной системе промежуточных состояний

Теперь можно перейти к задаче о насыщении одновременных коммутаторов, заключенных между одночастичными состояниями. По сравнению со случаем коммутаторов, заключенных между вакуумными обкладками, здесь появятся новые важные особенности; этот вопрос будет выяснен в данной и следующей главах. Первое, что нам нужно исследовать, — это характер возможных вкладов в сумму по полной системе промежуточных состояний.

<sup>1)</sup> Это равенство следует из соотношения КСФР и  $\rho$ -универсальности (гл. 3, § 4). Но его можно рассматривать как эмпирическое, а не теоретическое соотношение.

<sup>2)</sup> Эксперимент указывает на то, что  $A_1$  не описывается амплитудой Брейта — Вигнера, т. е.  $A_1$  не есть резонанс с определенными спином и четностью [616, 617]. Впрочем, см. также работу [734], где эти опыты толкуются иначе. — *Прим. ред.*

Прежде чем браться за эту проблему в общем виде, мы остановимся на одном очень простом примере, который показывает необходимость введения так называемых несвязных членов.

В рамках модели свободных кварков рассмотрим в явном виде хорошо известный коммутатор

$$[\bar{Q}^+, \bar{Q}^-] = 2Q^3. \quad (6.41)$$

При этом заряды выражаются через поля свободных кварков  $q$ :

$$\bar{Q}^\pm = \int d^3x \bar{q} \gamma_0 \gamma_5 \tau^\pm q, \quad (6.42)$$

$$Q^3 = \int d^3x \bar{q} \gamma_0 \frac{1}{2} \tau^3 q. \quad (6.43)$$

Теперь возьмем соотношение (6.41) между однонуклонными состояниями с импульсом  $\mathbf{p}$  и воспользуемся условием полноты системы промежуточных состояний. Поскольку мы имеем дело со свободными полями, у нас может появиться искушение взять в качестве единственного промежуточного состояния тоже свободную частицу. Но одного этого промежуточного состояния, очевидно, недостаточно. Например, если положить  $\mathbf{p} = 0$ , то одночастичный матричный элемент от  $\bar{Q}$  обращается в нуль из-за сохранения углового момента и четности, тогда как правая часть равенства (6.41), несомненно, отлична от нуля.

О причинах такого противоречия нетрудно догадаться, поскольку в уравнении Дирака для одной частицы система физических состояний становится полной только при включении в нее также состояний с отрицательной энергией. В рамках вторично-квантованной теории это означает, что пропущенный член следует связать с рождением пары. Точнее, в рамках теории свободного поля из «одночастичных матричных элементов» аксиальных зарядов отличны от нуля лишь

$$\langle p | \bar{Q}^\pm | p' \rangle = \bar{u} \gamma_0 \gamma_5 \tau^\pm u' (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (6.44)$$

и

$$\langle p\bar{p}' | \bar{Q}^\pm | 0 \rangle = \bar{u} \gamma_0 \gamma_5 \tau^\pm v' (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} + \mathbf{p}'). \quad (6.45)$$

Это означает, что при насыщении необходимо использовать оба матричных элемента (6.44) и (6.45). Тогда имеем

$$\langle p_B | \bar{Q}^+ | p' \rangle \langle p' | \bar{Q}^- | p_A \rangle + \langle p_B | \bar{Q}^+ | p_1 p_2 \bar{p}_3 \rangle \langle p_1 p_2 \bar{p}_3 | \bar{Q}^- | p_A \rangle - \\ - \text{перекр. чл.} = 2 \langle p_B | Q^3 | p_A \rangle. \quad (6.46)$$

Матричный элемент (6.45) появляется в виде несвязного члена при учете в (6.46) вклада от трехчастичного промежуточного состояния:

$$\langle p_B | \bar{Q}^+ | p_1 p_2 \bar{p}_3 \rangle = \langle p_B | p_1 \rangle \langle 0 | \bar{Q}^+ | p_2 \bar{p}_3 \rangle - \langle p_B | p_2 \rangle \langle 0 | \bar{Q}^+ | p_1 \bar{p}_3 \rangle \quad (6.47)$$

(аналогичное выражение можно написать для матричного элемента от  $\bar{Q}^-$ ).

Физический смысл несвязной части выражения (6.47) поясняется диаграммой фиг. 6.1. Вылетающий нуклон  $p_B = p_1$  не участвует в процессе, который представляет собой аннигиляцию свободной частицы и античастицы в вакуум<sup>1</sup>). В итоге правило сумм (6.46) можно записать в виде

$$2 \langle p_B | Q^3 | p_A \rangle \equiv (2\pi)^3 2E \delta^3(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A) = (\Sigma + \Sigma_Z) (2\pi)^3 2E \delta^3(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A), \quad (6.48)$$

или просто

$$\Sigma + \Sigma_Z = 1, \quad (6.49)$$

<sup>1</sup>) Отметим, что в случае свободного поля матричный элемент  $\langle p | \bar{Q} | p\bar{p}\bar{p} \rangle$  не имеет связного вклада. Вообще же говоря, это не так.

где  $\Sigma$  и  $\Sigma_Z$  — члены, определяющиеся соотношениями (фиг. 6.2)

$$\langle p_B | \bar{Q}^+ | p' \rangle \langle p' | \bar{Q}^- | p_A \rangle = 2E (2\pi)^3 \delta^3(p_B - p_A) \Sigma, \quad (6.50)$$

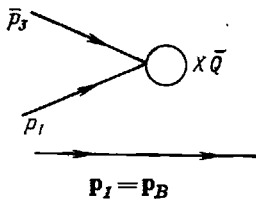
$$-\langle 0 | \bar{Q}^- | p_A p'' \rangle \langle p'' p_B | \bar{Q}^+ | 0 \rangle = 2E (2\pi)^3 \delta^3(p_B - p_A) \Sigma_Z. \quad (6.50')$$

Из равенств (6.44) и (6.45) легко получаем

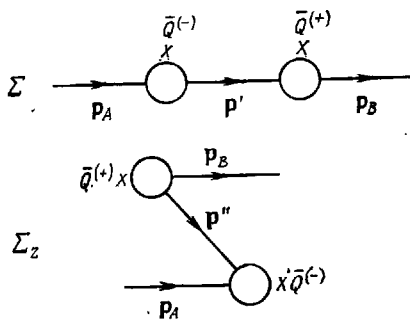
$$\Sigma = \frac{E^2 - m^2}{E^2}, \quad (6.51)$$

$$\Sigma_Z = \frac{m^2}{E^2}.$$

Мы видим, что (а чего иного можно было бы ожидать?) «правило сумм» теперь насыщено (сумма  $\Sigma$  и  $\Sigma_Z$  не зависит, конечно, от  $E$ ), но относительный вес каждого вклада сильно зависит от системы отсчета (т. е. от энергии  $E$ ).



Фиг. 6.1



Фиг. 6.2

В системе покоя  $E = m$  ( $p = 0$ ) вклад дает только член  $\Sigma_Z$ , соответствующий  $Z$ -диаграмме, тогда как в крайнем релятивистском пределе  $E \rightarrow \infty$  остается только одночастичный член  $\Sigma$ .

На данном простом примере, где мы добились упрощения благодаря использованию теории свободного поля, уже видны основные моменты процедуры насыщения: наличие несвязных членов и сильная зависимость веса разных вкладов от системы отсчета. Теперь нам нужен общий метод классификации и выделения различных несвязных вкладов в суммы по полной системе промежуточных состояний. Этим мы займемся в следующем разделе.

## 2. Кластерное разложение

Теперь изложим методику выделения и анализа различных вкладов, возникающих при использовании полного набора промежуточных состояний. Сначала рассмотрим матричный элемент

$$M = \langle p | A | p_1 p_2 \dots p_n \beta \rangle, \quad (6.52)$$

где  $p, p_1, \dots, p_n$  — импульсы, соответствующие тождественным частицам, а  $\beta$  относится ко всем другим частицам, появляющимся в конечном состоянии.

Амплитуду  $M$  можно разбить на несвязную и связную части:

$$M = M^{\text{связн}} + M^{\text{песвязн}}, \quad (6.53)$$

где

$$M^{\text{песвязн}} = \langle p | p_1 \rangle \langle 0 | A | p_2 \dots p_n \beta \rangle \pm \langle p | p_2 \rangle \langle 0 | A | p_1 \dots p_n \beta \rangle \pm \dots \quad (6.54)$$

Знаки плюс в выражении (6.54) появляются, если частица с импульсом  $p$  является бозоном; в фермионном случае знаки соответствуют хорошо известному правилу антисимметризации.

Используя асимптотические операторы рождения и уничтожения, выведем теперь явные выражения для связной и несвязной частей матричного элемента  $M$  (6.52). Это будет очень полезно в дальнейшем. Действительно, нам нужно использовать разложение (6.53) для матричных элементов типа (6.52). Эти матричные элементы входят в билинейные выражения, подобные тем, которые возникают при разложении одновременных коммутаторов или  $T$ -произведений по полному набору состояний. Следующие ниже формулы сделают более ясным физический смысл различных членов, появляющихся в таком разложении.

Написав

$$\langle p | A | n \rangle = \langle 0 | a_{\text{out}}(p) A | n \rangle \quad (6.55)$$

и переставив операторы  $a_{\text{out}}$  и  $A$ , получаем

$$\langle p | A | n \rangle = \langle 0 | [a_{\text{out}}(p), A] | n \rangle + \langle 0 | A a_{\text{out}}(p) | n \rangle. \quad (6.56)$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (6.56),  $\langle 0 | [a_{\text{out}}, A] | n \rangle$ , соответствует полностью связному вкладу в  $\langle p | A | n \rangle$ . В этом нетрудно убедиться, разложив оператор  $A$  по out-операторам. Поскольку рассматривается матричный элемент коммутатора, необходимо переставлять  $a_{\text{out}}(p)$  с некоторыми out-операторами в разложении  $A$ . В то же время совершенно очевидно, что второе слагаемое  $\langle 0 | A a_{\text{out}}(p) | n \rangle$  в правой части соотношения (6.56) соответствует несвязному вкладу в наш матричный элемент. При этом оператор действует на состояние  $| n \rangle = | p_1 p_2 \dots p_n \beta \rangle$  как одночастичный оператор уничтожения<sup>1)</sup>. Это автоматически приводит к сумме (6.54), и знаки правильно соответствуют статистике для частиц  $p_i$ .

Отметим, что степень относительной важности двух слагаемых в формуле (6.56) можно выяснить, пользуясь редукционными формулами Лемана — Симанчика — Циммермана [216].

В качестве первого примера равенства (6.56) рассмотрим матричный элемент  $\langle p_2 | A | p_1 \rangle$ .

Связную часть можно просто выделить в виде

$$\langle p_2 | A | p_1 \rangle = \langle p_2 | A | p_1 \rangle_c + \langle p_2 | p_1 \rangle \langle 0 | A | 0 \rangle,$$

где

$$\langle p_2 | A | p_1 \rangle_c = \langle 0 | [a(p_2), A] | p_1 \rangle = \langle 0 | [[a(p_2), A], a^\dagger(p_1)] | 0 \rangle. \quad (6.57)$$

В приложениях алгебры токов полноту системы промежуточных состояний обычно приходится использовать в матричных элементах вида  $\langle p_2 | A_2 A_1 | p_1 \rangle$ . Прежде всего, конечно, нужно выделить полностью несвязную часть и определить

$$M_{21} = \langle p_2 | A_2 A_1 | p_1 \rangle_c = \langle 0 | [[a(p_2), A_2 A_1], a^\dagger(p_1)] | 0 \rangle. \quad (6.58)$$

Разлагая двойной коммутатор в правой части соотношения (6.58), получаем

$$M_{21} = \langle p_2 | A_2 A_1 | p_1 \rangle_c = \langle 0 | [a_2, A_2] [A_1, a_1^\dagger] | 0 \rangle + \langle 0 | A_2 [a_2, [A_1, a_1^\dagger]] | 0 \rangle + \\ + \langle 0 | [[a_2, A_2], a_1^\dagger] A_1 | 0 \rangle \mp \langle 0 | [A_2, a_1^\dagger] [a_2, A_1] | 0 \rangle, \quad (6.59)$$

причем знак  $\mp$  учитывает тип внешних частиц (фермионы или бозоны).

Уравнение (6.59) станет отправной точкой нашего кластерного разложения. Учитывая полноту системы промежуточных состояний, можем написать

$$M_{21} = M_{21}^I + M_{21}^{II}, \quad (6.60)$$

<sup>1)</sup> Поскольку  $| p \rangle$  является одночастичным состоянием, нет необходимости указывать, является ли оно  $| \text{out} \rangle$ - или  $| \text{in} \rangle$ -состоянием.

где мы разбили  $M$  на вклады класса I и класса II (обозначенные через  $M^I$  и  $M^{II}$ ):

$$M_{21}^I = \sum_{\alpha} \langle 0 | [a_2, A_2] | \alpha \rangle \langle \alpha | [A_1, a_1^\dagger] | 0 \rangle \mp \sum_{\beta} \langle 0 | [A_2, a_1^\dagger] | \beta \rangle \langle \beta | [a_2, A_1] | 0 \rangle, \quad (6.61a)$$

$$M_{21}^{II} = \sum_{\gamma_1} \langle 0 | [[a_2, A_2], a_1^\dagger] | \gamma_1 \rangle \langle \gamma_1 | A_1 | 0 \rangle + \sum_{\gamma_2} \langle 0 | A_2 | \gamma_2 \rangle \langle \gamma_2 | [a_2, [A_1, a_1^\dagger]] | 0 \rangle. \quad (6.61b)$$

Для того чтобы четко представить себе смысл различных вкладов в сумму по полному набору промежуточных состояний, рассмотрим подробно случай, когда  $|p_1\rangle$  и  $|p_2\rangle$  — однонуклонные состояния, а  $A_2$  и  $A_1$  — псевдоскалярные операторы с барионным числом, равным нулю (например, аксиальные заряды или дивергенции).

В этом случае мы видим следующее:

1. Для операторов  $[a_2, A_1]$  барионное число равно  $-1$ , а для операторов  $[A_1, a_1^\dagger]$  оно равно  $+1$ . Это означает, что барионное число состояний  $|\alpha\rangle$  будет равно  $1$  (нижнее состояние  $|\alpha\rangle$  будет нуклоном), а барионное число состояний  $|\beta\rangle$  будет равно  $-1$  (нижним состоянием  $|\beta\rangle$  будет антинуклон).

2. Для операторов  $A_i$  или  $[a_i, [A_i, a_i^\dagger]]$  барионное число равно нулю, так что и состояния  $|\gamma_1\rangle$ , и состояния  $|\gamma_2\rangle$ , в свою очередь, будут иметь барионное число, равное нулю (нижним состоянием  $|\gamma_1\rangle$  является пион).

Тем самым получаем, что в класс I включаются вклады промежуточных состояний с барионным числом  $\pm 1$ , а в класс II — состояния с барионным числом, равным нулю.

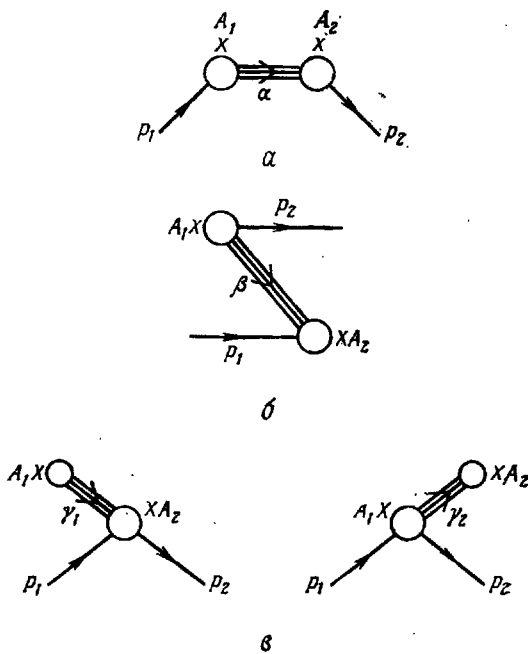
Равенства (6.61) можно переписать в более конкретном виде, вспоминая, что

$$\begin{aligned} \langle 0 | [a_2, A_2] | \alpha \rangle &= \langle p_2 | A_2 | \alpha \rangle_c, \\ \langle 0 | [A_2, a_1^\dagger] | \beta \rangle &= \langle 0 | A_2 | p_1 \beta \rangle, \\ \langle 0 | [[a_2, A_2], a_1^\dagger] | \gamma_1 \rangle &= \langle p_2 | A_2 | p_1 \gamma_1 \rangle_c. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Поэтому

$$M_{21}^I = \sum_{\alpha} \langle p_2 | A_2 | \alpha \rangle_c \langle \alpha | A_1 | p_1 \rangle_c \mp \sum_{\beta} \langle 0 | A_2 | p_1 \beta \rangle \langle p_2 \beta | A_1 | 0 \rangle, \quad (6.63a)$$

$$M_{21}^{II} = \sum_{\gamma_1} \langle p_2 | A_2 | p_1 \gamma_1 \rangle_c \langle \gamma_1 | A_1 | 0 \rangle + \sum_{\gamma_2} \langle 0 | A_2 | \gamma_2 \rangle \langle \gamma_2 | p_2 | A_1 | p_1 \rangle_c. \quad (6.63b)$$



Фиг. 6.3



Выражения (6.63) ясно показывают структуру и физический смысл разных вкладов в  $M_{21}$ .

1. Первый член в формуле (6.63а),  $\sum_{\alpha} \langle p_2 | A_2 | \alpha \rangle_c \langle \alpha | A_1 | p_1 \rangle_c$ , соответствует переходу из нуклонного состояния в промежуточное и из промежуточного в конечное нуклонное состояние. Именно этот вклад прямой диаграммы (фиг. 6.3, а) можно было бы угадать, даже упрощенно рассматривая условие полноты системы промежуточных состояний. Очевидно, что низший вклад такого рода даст однонуклонное состояние.

Все остальные слагаемые в (6.63а) и (6.63б) соответствуют несвязным вкладам, возникающим из-за наличия физического вакуумного состояния.

2. Второе слагаемое в формуле (6.63а),  $\mp \sum_{\beta} \langle 0 | A_2 | p_1 \beta \rangle \langle p_2 \beta | A_1 | 0 \rangle$ , соответствует рождению из вакуума состояния  $|\beta p_2\rangle$ , в котором мы имеем нуклон  $p_2$  и подсистему  $\beta$  с барионным числом  $-1$ , и последующей аннигиляции состояния  $|\beta p_1\rangle$  (фиг. 6.3, б). Простейший процесс такого рода — рождение и уничтожение нуклон-антинуклонной пары.

В § 3, п. 1 было показано, что такой «Z-вклад» необходимо учитывать при насыщении (в модели свободных кварков) одновременного коммутатора  $[Q^+, \bar{Q}^-]$ .

3. Наконец, первый вклад в  $M_{21}^{\Pi}$  в формуле (6.63б) соответствует рождению из вакуума системы  $|\gamma_1\rangle$  с барионным числом, равным нулю, и последующему процессу  $p_1 + \gamma_1 \rightarrow p_2 + A_2$ . Второе слагаемое в выражении (6.63б) имеет аналогичный смысл. Эти слагаемые иллюстрируются на фиг. 6.3, в.

Низший вклад в уравнение (6.63б) соответствует однопионному состоянию. Поскольку масса пиона мала, эти вклады часто будут доминировать. Мы увидим, что в предположении пионной доминантности из коммутационных соотношений, содержащих один или два аксиальных заряда, можно снова получить результаты теории мягких пионов.

## § 4. Насыщение зарядовых коммутаторов

### 1. Операторы заряда и группа Пуанкаре

Главной темой этой и двух последующих глав является насыщение коммутационных соотношений для зарядов. Поэтому очень важно хорошо представлять себе ограничения на матричные элементы зарядов, которые вытекают из общих принципов теории, таких, как лоренц-инвариантность и трансляционная инвариантность. В этой связи мы рассмотрим некоторые свойства зарядов с точки зрения группы Пуанкаре. Основные сведения о самой группе приведены в приложении 1. Генераторами группы трансляций являются операторы энергии и импульса ( $P_0 \equiv H, \mathbf{P}$ ), а через  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{K}$  мы обозначим операторы пространственного вращения и лоренцева поворота.

Поскольку мы исходим из определения

$$Q^{\alpha}(t) = \int d^3x j_0^{\alpha}(x, t), \quad (6.64)$$

мы будем использовать трансформационные свойства 4-вектора  $j_{\mu}^{\alpha}(x)$  относительно трансляций и преобразований Лоренца. Из общего соотношения

$$i[P_{\mu}, j_{\lambda}^{\alpha}(x)] = \partial_{\mu} j_{\lambda}^{\alpha}(x) \quad (6.65)$$

сразу следует, что

$$[P, Q_{\alpha}] = 0, \quad (6.66)$$

$$[H, Q_{\alpha}] = -i \int d^3x \partial_0 j_0^{\alpha}(x) = -i \int d^3x \partial^{\mu} j_{\mu}^{\alpha}(x) \equiv -i \int d^3x D_{\alpha}(x). \quad (6.67)$$

При выводе соотношений (6.66) и (6.67), как это принято, предполагалось, что плотности токов обращаются в нуль на бесконечно удаленной границе. Из этих соотношений сразу же следует, что заряды связывают состояния с одинаковыми 3-импульсами, тогда как энергии (или массы) состояний одинаковы, только если заряды не зависят от времени. Действительно, рассмотрим соотношение (6.66) в применении к собственным состояниям 4-импульса:

$$0 = \langle p_b | [\mathbf{P}, Q_\alpha] | p_a \rangle = (p_b - p_a) \langle p_b | Q_\alpha | p_a \rangle, \quad (6.68)$$

откуда  $\langle p_b | Q_\alpha | p_a \rangle = 0$ , если не выполняется равенство  $p_b = p_a$ . Точно так же из коммутатора с оператором энергии получаем равенство

$$i(E_b - E_a) \langle p_b | Q_\alpha | p_a \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(p_b - p_a) \langle p_b | D_\alpha | p_a \rangle. \quad (6.69)$$

Это равенство показывает, что разность энергий состояний с разной массой пропорциональна матричному элементу дивергенции и, в частности, обращается в нуль в пределе сохраняющихся токов.

Переходя к пространственным вращениям и лоренцевым поворотам, напомним, что

$$[J_i, j_0^\alpha(x)] = -i \epsilon_{imn} x_m \partial_n j_0^\alpha(x), \quad (6.70)$$

$$\begin{aligned} [K_i, j_0^\alpha(x)] &= -i j_i^\alpha(x) + i(x_i \partial_0 - x_0 \partial_i) j_0^\alpha = \\ &= i x_i D_\alpha(x) - i x_0 \partial_i j_0^\alpha - i \partial^k (x_i j_k^\alpha). \end{aligned} \quad (6.71)$$

Следовательно,

$$[J_i, Q_\alpha] = 0, \quad (6.72)$$

$$[K_i, Q_\alpha] = i \int d^3x x_i D_\alpha(x). \quad (6.73)$$

Таким образом, заряд  $Q_\alpha$  инвариантен относительно вращений (результат очевидный) и вызывает переходы только между состояниями с одинаковым полным угловым моментом.

Мы увидим далее, что заряд не является, вообще говоря, лоренц-инвариантным объектом. Это обстоятельство может выражаться по-разному. Проще всего сказать, что матричные элементы заряда в общем случае зависят от системы отсчета, т. е. представляют собой лоренц-неинвариантные функции импульсов внешних частиц. Таким образом, изменение матричного элемента  $\langle p_b | Q_\alpha | p_a \rangle \equiv T(p_b, p_a)$  при бесконечно малом лоренцевом повороте не равно нулю, а имеет порядок  $D_\alpha$ :

$$\begin{aligned} i \frac{\delta T}{\delta \epsilon^i} &= i \left[ E_b \frac{\partial}{\partial p_b^i} - p_{bi} \frac{\partial}{\partial E_b} + (a \leftrightarrow b) \right] T(p_b, p_a) = \\ &= \langle p_b | [K_i, Q_\alpha] | p_a \rangle \propto \langle p_b | D_\alpha | p_a \rangle \end{aligned} \quad (6.74)$$

( $\epsilon$  — параметр лоренцева поворота).

При более формальном подходе можно определить заряд на пространственно-подобной плоскости  $\sigma$ :

$$Q_\alpha(\sigma) = \int d\sigma n_\mu j^\mu, \quad (6.75)$$

причем уравнение плоскости  $\sigma$  имеет вид

$$n x + \tau = 0, \quad (6.76)$$

$n_\mu$  — единичный времениподобный вектор,  $n^2 = 1$ , а  $\tau$  — «временной» параметр. Тогда  $Q_\alpha$  будет зависеть от  $\sigma$ , т. е. от  $n_\mu$  и  $\tau$ , и обе эти зависимости связаны с отличной от нуля дивергенцией,  $D_\alpha \neq 0$ .

Более интересные с практической точки зрения следствия для матричных элементов заряда получаются из соотношений (6.72) и (6.73), если обратиться к другим релятивистским характеристикам (помимо массы и 4-импульса) состояний частиц. К ним относятся собственные значения оператора

$$W_0 = \mathbf{P}\mathbf{J} \quad (6.77)$$

( $W_0 / |\mathbf{P}|$  — оператор спиральности) и собственные значения «инвариантного оператора спина»:

$$W^2 = W_0^2 - \mathbf{W}^2 = -m^2 s(s+1), \quad (6.78)$$

где

$$\mathbf{W} = \mathbf{J}\mathbf{H} + \mathbf{K} \times \mathbf{P}. \quad (6.79)$$

Используя указанные выше определения, находим

$$[W_0, Q_\alpha] = 0, \quad (6.80)$$

$$[\mathbf{W}, Q_\alpha] = i \int d^3x (\mathbf{x} \times \mathbf{P} - \mathbf{J}) D_\alpha. \quad (6.81)$$

Эти соотношения показывают, что отличны от нуля только матричные элементы заряда, соответствующие переходам между состояниями с одинаковыми спиральностями (спины состояний могут быть разными). Таким образом, мы сталкиваемся с тем, что вследствие несохранения тока могут происходить переходы между состояниями с разными значениями спина и массы.

#### а. Операторы заряда и четность

Полученные результаты можно резюмировать следующим образом. Если, кроме внутренних степеней свободы, состояния частицы характеризуются 3-импульсом  $\mathbf{p}$ , спиральностью  $\lambda$ , массой  $m$  и спином  $s$ , то заряд связывает только состояния с одинаковыми  $\mathbf{p}$  и  $\lambda$ , тогда как  $m$  и  $s$ , вообще говоря, неодинаковы:

$$\langle \mathbf{p}_b, \lambda_b, m_b, s_b; b | Q_\alpha | a; s_a, m_a, \lambda_a, \mathbf{p}_a \rangle \propto \delta_{\lambda_a \lambda_b} \delta^3(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b). \quad (6.82)$$

Если заряд сохраняется, то переходы еще более ограничиваются и оказываются возможными только между состояниями с одинаковыми  $m$  и  $s$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_b, \lambda_b, m_b, s_b; b | Q_\alpha | a; s_a, m_a, \lambda_a, \mathbf{p}_a \rangle = \\ = \delta_{\lambda_a \lambda_b} \delta_{s_a s_b} \delta^4(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) N_{ba}^\alpha(s_a, \lambda_a, m_a, \mathbf{p}_a), \end{aligned} \quad (6.83)$$

где  $N$  — нормировочный множитель.

Разумеется, если учитывать внутренние квантовые числа внешних состояний и операторов (заряд, изоспин и т. д.), то могут возникать дополнительные правила отбора. В этом смысле нетривиальную информацию можно получить из закона сохранения четности.

Прежде всего предположим, что рассматриваемые частицы имеют конечную массу, так что можно ввести систему покоя и приписать частице внутреннюю четность. Таким образом, состояния в системе покоя являются собственными состояниями оператора четности

$$\Pi | a \rangle = \xi_a | a \rangle, \quad \xi_a = \pm 1. \quad (6.84)$$

Кроме того, векторный и аксиальный заряды обладают свойством

$$PQ\Pi = Q, \quad \Pi\bar{Q}\Pi = -\bar{Q}, \quad (6.85)$$

так как  $\Pi^2 = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle b | Q | a \rangle &= \langle b | \Pi Q \Pi | a \rangle = \xi_b \xi_a \langle b | Q | a \rangle, \\ \langle b | \bar{Q} | a \rangle &= -\langle b | \Pi \bar{Q} \Pi | a \rangle = -\xi_b \xi_a \langle b | \bar{Q} | a \rangle. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Соотношения (6.86) показывают, что векторный заряд связывает состояния покоящихся частиц с одинаковой, а аксиальный с разной четностью:

$$\xi_a \xi_b = \begin{cases} +1 & \text{для векторных зарядов,} \\ -1 & \text{для аксиальных зарядов.} \end{cases} \quad (6.87)$$

Если заряд сохраняется, то формула (6.87) оказывается абсолютно справедливой, так как тогда заряд лоренц-инвариантен. Следовательно, в этом случае векторный заряд связывает *только* состояния с одинаковой, а аксиальный — *только* с разной четностью, независимо от характера движения частиц.

Все сказанное нами не относится к случаю нулевой массы. Так, например, сохраняющийся аксиальный заряд может иметь не равный нулю матричный элемент перехода между состояниями одной и той же частицы в пределе, когда ее масса стремится к нулю. Пример этого — матричный элемент аксиального заряда для перехода между состояниями нейтрино или безмассовых нуклонов. Рассмотрим этот последний случай: как подробно говорилось в гл. 2, сохранение аксиального тока в *отсутствии безмассовых пионов* означает, что  $m_N = 0$ ,  $G_2 = 0$ , а соответствующий матричный элемент имеет вид

$$\langle p_2 | A_\mu^\alpha | p_1 \rangle = \bar{u}_2 \gamma_\mu \gamma_5 G_1 \frac{1}{2} \tau^\alpha u_1. \quad (6.88)$$

Переходя к спинорам Паули, получаем

$$\langle p_2 | \bar{Q}^\alpha | p_1 \rangle = \frac{1}{2} \tau^\alpha r_A \frac{\sigma_{\mathbf{p}_1}}{|\mathbf{p}_1|} (2\pi)^3 2E \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (6.89)$$

где отдельно выписан множитель, нормирующий состояния. Соотношение (6.89) показывает, что матричный элемент сохраняющегося аксиального заряда между нуклонными состояниями действительно не равен нулю!

Если имеются пионы нулевой массы, обеспечивающие сохранение аксиального тока, то все сказанное выше о частицах с отличной от нуля массой оказывается в силе и нуклонный матричный элемент заряда всегда равен нулю. Полезно посмотреть, как это действительно получается в любой системе отсчета. Нужно точно учесть пионный полюс, присутствующий в  $G_2(t)$ , и для этого удобно приписать малую разность масс внешним нуклонам<sup>1)</sup>. Тогда, используя спиноры Паули, имеем

$$\begin{aligned} \langle p_2 | \bar{Q}_\alpha | p_1 \rangle &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \bar{u}_2 \frac{1}{2} \tau_\alpha [\gamma_0 \gamma_5 G_1(t) + \Delta_0 \gamma_5 G_2(t)] u_1 = \\ &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \frac{1}{2} \tau_\alpha \left[ \frac{\sigma_{\mathbf{p}_1}}{E+m} r_A + \frac{f_{\pi N N}}{E_2 - E_1} \sigma_{\mathbf{p}_1} \left( \frac{1}{E_2 + m_2} - \frac{1}{E_1 - m_1} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.90)$$

откуда в пределе при  $m_1 = m_2 = m$  получаем выражение

$$\langle p_2 | \bar{Q}_\alpha | p_1 \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \frac{1}{2} \tau_\alpha \sigma_{\mathbf{p}_1} \left( r_A - \frac{f_{\pi N N}}{m} \right),$$

которое равно нулю в силу соотношения Голдбергера — Треймана.

## 2. Случай сохраняющихся токов

Прежде чем приступить к намеченному выводу общих правил сумм из одновременных коммутаторов с использованием полноты системы промежуточных состояний, рассмотрим подробнее важный случай сохраняющихся токов. При этом то обстоятельство, что оператор заряда коммутирует со всеми генераторами группы Лоренца, сильно ограничивает возможные вклады

<sup>1)</sup> Это указывает на то, что определение заряда при наличии безмассовых бозонов не свободно от противоречий.

в разложение по полному набору состояний. Из матричных элементов оператора  $Q_\alpha$  в действительности отличны от нуля лишь матричные элементы переходов между состояниями с одинаковыми 4-импульсом, спином и спиральностью. Следовательно, если рассматривать одночастичный матричный элемент коммутатора, в который входит хотя бы один сохраняющийся заряд, то у нас будут лишь следующие вклады:

1. *Класс I.* Вклады одночастичных состояний с той же массой и спином (и, конечно, 3-импульсом и спиральностью), что и у внешних частиц.

2. *Класс II.* Вклад матричного элемента заряда для перехода между вакуумом и безмассовым бозоном с квантовыми числами оператора заряда.

Как мы уже видели, присутствие безмассового бозона приводит к тому, что оператор заряда оказывается математически неопределенным, а поэтому сначала рассмотрим случай частично сохраняющегося тока и ненулевой массы бозона и только в конце вычислений перейдем к пределу нулевой массы. На этом весьма важном случае мы особо остановимся в конце раздела.

Вернемся к случаю, когда имеются только вклады класса I (*мультиплетное насыщение*), и пусть масса частиц в мультиплете не равна нулю. Тогда для того, чтобы матричные элементы  $Q_\alpha$  не обращались в нуль, в них должны входить состояния с одинаковой четностью. В матричных же элементах  $\bar{Q}_\alpha$  состояния должны иметь разную четность. Это означает, что в отсутствие безмассовых бозонов алгебра сохраняющихся векторных и аксиальных зарядов требует существования мультиплетов частиц с одинаковой массой и спином, но с разной четностью. Это, конечно, весьма далеко от физической реальности.

В случае же нулевой массы мультиплетов можно брать матричные элементы зарядов  $\bar{Q}^\alpha$  для переходов между состояниями с одинаковой четностью. В качестве примера в пределе нулевой массы нуклона можно построить представление алгебры сохраняющихся  $SU(3) \otimes SU(3)$ -зарядов с помощью единственного нуклонного октета. Нетрудно сообразить, что теперь насыщение зарядовых правил сумм ведет к полному отсутствию перенормировки ( $r_V = r_A = 1$ ). В то же время коммутационные соотношения между токами и зарядами приводят к нулевым значениям магнитных формфакторов и точному равенству между векторным и аксиальным формфакторами. Но этот привлекательный с математической точки зрения случай тоже далек от реальности, и, как выяснится в следующем разделе, частичное сохранение аксиальных зарядов опирается главным образом на наличие бозона малой массы — пиона.

Поскольку сохранение аксиального заряда без удвоения по четности возможно только в пределе нулевой массы нуклона, интересно более обстоятельно исследовать, как достигается этот предел. Рассмотрим опять правило сумм  $\Sigma + \Sigma_Z = 1$ , которое следует из коммутационного соотношения  $[\bar{Q}^+, \bar{Q}^-] = 2Q^3$  (§ 3, п. 1). При малой массе нуклона вклад дают и прямая и Z-диаграмма. Первый вклад равен

$$G_1^2(0) \frac{E^2 - m^2}{E^2}, \quad (6.91)$$

а второй

$$C_1^2(4m^2) \frac{m^2}{E^2}, \quad (6.92)$$

так что сумма двух членов приводит к правильному результату (при  $m \rightarrow 0$ )

$$r_A^2 = 1. \quad (6.93)$$

Мы видим, что если рассматривать малые значения и импульса  $p$  и массы  $m$ , то каждое слагаемое сильно зависит от того, как берется предел, но их сумма от этого не зависит. Если сначала положить  $m \rightarrow 0$ , а потом  $E \rightarrow m = 0$ ,

то вклад дает только прямая диаграмма. Если же предел берется в обратном порядке, получаем вклад только  $Z$ -диаграммы.

Оба механизма класса  $I$ , о которых здесь говорилось, легко объяснить, исходя из модели свободных полей. В случае ненулевой массы, для того чтобы получить сохраняющийся аксиальный ток, необходимо ввести два поля  $\psi$  и  $\psi'$ , соответствующие частицам одинаковой массы и разной четности. Тогда аксиальный ток

$$A_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi' + \text{в. с.} \quad (6.94)$$

точно сохраняется. В случае нулевой массы можно ограничиться единственным безмассовым спинорным полем  $\psi$ , и тогда, как нетрудно убедиться, аксиальный ток

$$A_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \quad (6.95)$$

действительно сохраняется.

Исследуем теперь подробнее случай, когда существует безмассовый бозон с теми же квантовыми числами, что и у сохраняющегося заряда. Для определенности будем конкретнее иметь в виду изовекторный аксиальный заряд и его «голдстоуновский бозон» — пион.

Уже известно, что при наличии безмассового бозона многие обычные выводы теории токов могут оказаться неверными. Например, в этом случае аксиальная константа связи нуклона может отличаться от нуля даже при конечной массе нуклона. Действительно, рассматривая матричные элементы дивергенции аксиального тока для перехода между нуклонными состояниями

$$[2mG_1(q^2) + q^2 G_2(q^2)] \bar{u}_2 \gamma_5 \frac{1}{2} \tau_{\alpha\beta} u_1 \quad (6.96)$$

в пределе при  $q^2 \rightarrow 0$ , мы видели ранее, что  $2mG_1(0) (\equiv 2m r_A)$  не обращается в нуль, а равно вычету  $2g_{\pi N N} f_\pi$  в пионном полюсе при  $q^2 = 0$ , который имеется у функции  $G_2$  (формула Голдбергера — Треймана).

Это, конечно, отличается от того, что получилось бы при рассмотрении ограничений, налагаемых на матричный элемент  $\langle p | \bar{Q} | p' \rangle$  лоренц-инвариантностью и сохранением заряда. Такое противоречие нетрудно объяснить: дело в том, что при наличии безмассового пиона оператор заряда  $\bar{Q}$  нельзя считать вполне определенным. Данное обстоятельство может поставить под сомнение результаты, полученные из сохранения аксиального тока с использованием пиона нулевой массы.

Поэтому при вычислении коммутаторов, которые содержат один или два аксиальных заряда, будем рассматривать частично сохраняющийся аксиальный заряд с ненулевой массой пиона и только в конце вычисления посмотрим, что получается при переходе к пределу нулевой массы.

Напомним определение

$$\langle 0 | A_\mu^\alpha | \pi^\beta(q) \rangle = i g_{\mu f} \pi \delta^{\alpha\beta}, \quad (6.98)$$

так что

$$\langle 0 | \bar{Q}^\alpha | \pi^\beta(q) \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(q) i \omega_j \pi \delta^{\alpha\beta}. \quad (6.97)$$

Если рассмотреть теперь соотношение типа

$$\langle p_2 | [\bar{Q}^\alpha, A] | p_1 \rangle = \langle p_2 | \bar{A}^\alpha | p_1 \rangle, \quad (6.99)$$

то однопионный вклад в сумму по полному набору состояний имеет вид

$$\Sigma_\pi = \langle 0 | \bar{Q}^\alpha | \pi^\beta \rangle \langle \pi^\beta p_2 | A | p_1 \rangle_c - \langle p_2 | A | p_1 \pi^\beta \rangle_c \langle \pi^\beta | \bar{Q}^\alpha | 0 \rangle. \quad (6.100)$$

Подставив в формулу (6.100) выражение (6.98) и перейдя к пределу нулевой массы пиона, получаем

$$\Sigma_\pi = \frac{1}{2} i f_\pi \lim_{q_\mu \rightarrow 0} [\langle p_2 \pi^\alpha(q) | A | p_1 \rangle_c - \langle p_2 | A | p_1 \pi^\alpha(q) \rangle_c]. \quad (6.101)$$

Допустим на мгновение, что в сумме по полному набору состояний нет никаких других вкладов (т. е. отсутствует вклад мультиплетов). Тогда из равенства (6.101) следует точная низкоэнергетическая теорема

$$\lim_{q_\mu \rightarrow 0} [i \langle p_2 \pi^\alpha(q) | A | p_1 \rangle_c - i \langle p_2 | A | p_1 \pi^\alpha(q) \rangle_c] = \frac{2}{f_\pi} \langle p_2 | \bar{A}^\alpha | p_1 \rangle, \quad (6.102)$$

и мы снова приходим к низкоэнергетическому пределу, о котором говорилось в гл. 3.

Если же имеются и мультиплетный вклад и вклад безмассового бозона, то последний, очевидно, нарушит простоту результатов мультиплетного насыщения. Тогда будут присутствовать как ненулевые эффекты перенормировки, так и отклонения от формул Вигнера — Эккарта для матричных элементов, даже в случае сохраняющихся зарядов. Это называют спонтанным нарушением симметрии.

Разумеется, в реальном физическом случае нет точных мультиплетов, а масса пиона не равна нулю. Общий метод насыщения позволит нам оценивать относительную величину и значение каждого вклада. Поскольку для одновременных коммутаторов, включающих аксиальные заряды, малость массы пиона играет фундаментальную роль, имеет смысл разработать метод, при котором особое внимание уделялось бы пионному вкладу.

### 3. Одновременные коммутаторы и теория низкоэнергетических пионов

В предыдущем разделе было показано, что пионные вклады класса II играют существенную роль в насыщении матричных элементов одновременных коммутаторов, содержащих аксиальные заряды. В такие пионные члены входят амплитуды испускания или поглощения покоящихся физических пионов. В общем случае при рассмотрении коммутатора двух операторов  $\bar{A}_2$  и  $\bar{A}_1$ , имеющих квантовые числа пиона, эти вклады появляются в виде

$$C_\pi = \langle p_2 | \bar{A}_2 | p_1 \pi \rangle_c \langle \pi | \bar{A}_1 | 0 \rangle + \langle 0 | \bar{A}_2 | \pi \rangle \langle \pi p_2 | \bar{A}_1 | p_1 \rangle_c - \langle p_2 | \bar{A}_1 | p_1 \pi \rangle_c \langle \pi | \bar{A}_2 | 0 \rangle - \langle 0 | \bar{A}_1 | \pi \rangle \langle \pi p_2 | \bar{A}_2 | p_1 \rangle_c. \quad (6.103)$$

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, если слагаемые (6.103) дают наибольший вклад в правило сумм и если остальные слагаемые можно как-то оценить, то это позволяет установить прямую связь между одновременными коммутаторами и амплитудами реакций с  $\pi$ -мезонами.

Правда, как видно из соотношения (6.103), использование единственного одновременного коммутатора не дает, вообще говоря, сразу формулу для отдельной пионной амплитуды, а дает лишь соотношение, в которое входят четыре такие амплитуды. Чтобы получить более удобное выражение, можно попытаться подобрать комбинацию различных коммутаторов так, чтобы в получаемом при этом правиле сумм пионный вклад содержал только одну пионную амплитуду. Это выведет нас за пределы классических коммутаторов алгебры токов, но без слишком серьезных последствий.

Хитрость в том, чтобы построить такие новые операторы  $\bar{A}'$ , для которых либо один, либо оба матричных элемента  $\langle 0 | \bar{A}' | \pi \rangle$ ,  $\langle \pi | \bar{A}' | 0 \rangle$  в действительности обращались бы в нуль. Для большей определенности рассмотрим интересный с физической точки зрения случай, когда единственными операторами с квантовыми числами пиона являются аксиальные заряды. Введем операторы

$$\begin{aligned} \bar{Q}_L^\alpha &= \bar{Q}^\alpha + \frac{i}{m_\pi} \frac{d\bar{Q}^\alpha}{dt}, \\ \bar{Q}_R^\alpha &= (\bar{Q}_L^\alpha)^\dagger = \bar{Q}^\alpha - \frac{i}{m_\pi} \frac{d\bar{Q}^\alpha}{dt} \end{aligned} \quad (6.104)$$

и

$$\bar{Q}_0^\alpha = \bar{Q}^\alpha + \frac{1}{m_\pi^2} \frac{d^2 \bar{Q}^\alpha}{dt^2} = \bar{Q}_L^\alpha - \frac{i}{m_\pi} \dot{\bar{Q}}_L^\alpha = \bar{Q}_R^\alpha + \frac{i}{m_\pi} \dot{\bar{Q}}_R^\alpha, \quad (6.105)$$

которые обладают требуемыми свойствами. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \langle \pi | \bar{Q}_L^\alpha | 0 \rangle &= \langle 0 | \bar{Q}_R^\alpha | \pi \rangle = 0, \\ \langle 0 | \bar{Q}_L^\alpha | \pi^\beta \rangle &= 2if_\pi m_\pi \delta^{\beta\alpha} (2\pi)^3 \delta^3(\pi), \end{aligned} \quad (6.106)$$

$$\begin{aligned} \langle \pi^\beta | \bar{Q}_R^\alpha | 0 \rangle &= -2if_\pi m_\pi \delta^{\beta\alpha} (2\pi)^3 \delta^3(\pi), \\ \langle 0 | \bar{Q}_0^\alpha | \pi \rangle &= \langle \pi | \bar{Q}_0^\alpha | 0 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (6.107)$$

Ясно, что после введения  $\bar{Q}_{L,R}^\alpha$  или  $\bar{Q}_{0i}^\alpha$  в коммутатор в равенстве (6.103) остается только один из вакуум- $\pi$ -мезонных матричных элементов оператора  $\bar{Q}_{L,R}$ , тогда как оба вакуум- $\pi$ -мезонных матричных элемента оператора  $\bar{Q}_0^\alpha$  обращаются в нуль.

Выведем теперь несколько тождеств, которые будут полезны в дальнейшем. Вспоминая, что

$$\frac{d\bar{Q}^\alpha}{dt} = \int \bar{D}^\alpha(x, t) d^3x,$$

и вводя оператор  $\chi$ , такой, что

$$(m_\pi^2 + \square) \bar{D}^\alpha(x) = f_\pi m_\pi^2 \chi^\alpha(x), \quad (6.108)$$

легко получить

$$\frac{d\bar{Q}_0^\alpha}{dt} = f_\pi \int \chi^\alpha(x) d^3x, \quad (6.109)$$

и таким же образом [формула (6.105)]

$$\frac{d}{dt} \left( \bar{Q}_L^\alpha - \frac{i}{m_\pi} \dot{\bar{Q}}_L^\alpha \right) = \frac{d}{dt} \left( \bar{Q}_R^\alpha + \frac{i}{m_\pi} \dot{\bar{Q}}_R^\alpha \right) = f_\pi \int \chi^\alpha(x) d^3x. \quad (6.110)$$

Рассматривая уравнения (6.109) и (6.110) между двумя состояниями  $|a\rangle$  и  $|b\rangle$ , получаем

$$i(E_b - E_a) \langle b | \bar{Q}_0^\alpha | a \rangle = f_\pi \langle b | \chi^\alpha | a \rangle (2\pi)^3 \delta^3(p_b - p_a), \quad (6.111)$$

$$\begin{aligned} &\frac{i}{m_\pi} (E_b + m_\pi - E_a) (E_b - E_a) \langle b | \bar{Q}_L^\alpha | a \rangle = \\ &= \frac{i}{m_\pi} (E_a + m_\pi - E_b) (E_b - E_a) \langle b | \bar{Q}_R^\alpha | a \rangle = f_\pi \langle b | \chi^\alpha | a \rangle (2\pi)^3 \delta^3(p_b - p_a). \end{aligned} \quad (6.111')$$

Отметим, наконец, что оператор  $\chi^\alpha$ , который определяется формулой (6.108), обладает следующим свойством:

$$\begin{aligned} \lim_{q_0 \rightarrow (m_\pi^2 + q^2)^{1/2}} \langle b | \chi^\alpha | a \rangle &= \langle b | a \pi^\alpha(q) \rangle, \\ \lim_{q_0 \rightarrow -(m_\pi^2 + q^2)^{1/2}} \langle b | \chi^\alpha | a \rangle &= \langle b \pi^\alpha(q) | a \rangle, \end{aligned} \quad (6.112)$$

где

$$q_\mu = (p_\mu^b - p_\mu^a),$$

а  $\langle b | a \pi^\alpha(q) \rangle$  — физическая вершина, описывающая переход  $a + \pi^\alpha \rightarrow b$ .

Воспользуемся теперь полученными соотношениями для вывода формул, касающихся мягких пионов. Начнем с

$$C \equiv \langle p_2 | [\bar{Q}_L^\alpha, A] | p_1 \rangle = \langle p_2 | [\bar{Q}^\alpha, A] | p_1 \rangle + \frac{i}{m_\pi} \langle p_2 | [\dot{\bar{Q}}^\alpha, A] | p_1 \rangle, \quad (6.113)$$



где  $A$  — оператор (например, векторный ток), матричные элементы которого  $\langle 0 | A | \pi \rangle = \langle \pi | A | 0 \rangle$  обращаются в нуль. Отметим, что, поскольку  $\bar{Q}^\alpha$  — величина порядка  $m_\pi^2$ , второе слагаемое в правой части соотношения (6.113) примерно в  $m_\pi$  раз больше первого. Для определенности будем считать, что  $|p_2\rangle$  и  $|p_1\rangle$  — однопуклонные состояния.

Произведем теперь в коммутаторе (6.113) кластерное разложение и выделим в явном виде вклады нуклона<sup>1)</sup> и пиона, записав

$$C = C_N + C_\pi + C'. \quad (6.114)$$

Нуклонный вклад с учетом соотношения

$$\langle p | (\bar{Q}_L^\alpha - \bar{Q}^\alpha) | p' \rangle = \frac{i}{m_\pi} \langle p | \dot{\bar{Q}}^\alpha | p' \rangle = 0$$

записывается в виде

$$C_N = \langle p_2 | \bar{Q}^\alpha | p' \rangle \langle p' | A | p_1 \rangle - \langle p_2 | A | p' \rangle \langle p' | \bar{Q}^\alpha | p_1 \rangle. \quad (6.115)$$

Пионный член имеет вид

$$C_\pi = if_\pi \langle p_2 \pi^\alpha | A | p_1 \rangle, \quad (6.116)$$

где пион имеет 4-импульс  $(m_\pi, 0)$ . Процесс, представляемый матричным элементом (6.116), таков: лептонная пара (представленная оператором  $A$ ) взаимодействует с нуклоном  $p_1$  и образует нуклон  $p_2$  и покоящийся пион или (в обращенном времени) нуклон  $p_2$  сталкивается с неподвижной пионной мишенью и образует нуклон  $p_1$  и лептонную пару. Конечно, чтобы сформулировать наш результат для более реальной конфигурации, когда нуклон покоится, необходимо произвести преобразование Лоренца. Такое преобразование будет автоматически обеспечено в гл. 7, § 5, где амплитуда (6.116) будет выражена через релятивистски-инвариантные переменные.

Рассмотрим, наконец, слагаемое  $C'$ . Используя соотношение (6.111'), имеем

$$\begin{aligned} C' = & -im_\pi \sum_{n \neq N, \pi} (2\pi)^3 \frac{\delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_n) \langle p_2 | \chi^\alpha | n \rangle \langle n | A | p_1 \rangle}{(E_2 - E_n)(E_2 + m_\pi - E_n + i\epsilon)} + \\ & + im_\pi \sum_{n \neq N, \pi} (2\pi)^3 \frac{\delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_n) \langle p_2 | A | n \rangle \langle n | \chi^\alpha | p_1 \rangle}{(E_1 - E_n)(E_1 - m_\pi - E_n - i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (6.117)$$

(Знак перед  $i\epsilon$  определяется тем, что пион-нуклонное состояние  $|p_2 \pi^\alpha\rangle$  в равенстве (6.116) является состоянием  $|out\rangle$ .) Отметим, что сумма в  $C'$  пропорциональна  $m_\pi$ , так что в пределе при  $m_\pi \rightarrow 0$  остаются только пионное и нуклонное слагаемые.

При анализе пион-нуклонного рассеяния необходимо рассматривать уже два мягких пиона. Сказанное выше относится только к случаю, когда оператор  $A$  не имеет матричных элементов между вакуумом и однопионным состоянием. Поэтому мы начнем с матричного элемента коммутатора, в котором оператор  $A$  равен  $Q_0$ :

$$\begin{aligned} C_0 \equiv \langle p_2 | [\bar{Q}_L^\alpha, \bar{Q}_0^\alpha] | p_1 \rangle = \langle p_2 | \left\{ [\bar{Q}^\beta, \bar{Q}^\alpha] + \frac{i}{m_\pi} [\dot{\bar{Q}}^\beta, \bar{Q}^\alpha] + \right. \\ \left. + \frac{1}{m_\pi^2} [\bar{Q}^\beta, \ddot{\bar{Q}}^\alpha] + \frac{i}{m_\pi^3} [\dot{\bar{Q}}^\beta, \ddot{\bar{Q}}^\alpha] \right\} | p_1 \rangle. \end{aligned} \quad (6.118)$$

Как и ранее, главным слагаемым является коммутатор  $[\bar{Q}^\beta, \bar{Q}^\alpha]$ , а добавочные члены исчезают при  $m_\pi \rightarrow 0$  (напомним, что  $\dot{\bar{Q}}$  — величина порядка  $m_\pi^2$ ).

<sup>1)</sup> В общем случае вклад любого состояния, вырожденного по массе с внешними частицами.

Напишем отдельно нуклонное и пионное слагаемые:

$$C_0 = C_{0N} + C_{0\pi} + C'_0. \quad (6.119)$$

Для  $C_{0N}$  получим просто

$$C_{0N} = \langle p_2 | \bar{Q}^\beta | p' \rangle \langle p' | \bar{Q}^\alpha | p_1 \rangle - \text{перекр. чл.} \quad (6.120)$$

Пионный член с учетом соотношений (6.106) и (6.111) будет иметь вид

$$C_{0\pi} = \sum_{\pi} \langle 0 | \bar{Q}_L^\beta | \pi^\nu \rangle \langle \pi^\nu p_2 | \bar{Q}_0^\alpha | p_1 \rangle_c = \\ = f_\pi^2 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \frac{\langle p_2, \pi^\beta | \chi^\alpha | p_1 \rangle_c}{E_2 + m_\pi - E_1} = \frac{f_\pi^2}{m_\pi} T_{\pi N}^{\beta\alpha} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (6.121)$$

где  $T_{\pi N}^{\beta\alpha} = \langle p_2, \pi^\beta | \chi^\alpha | p_1 \rangle_c$  — пион-нуклонная амплитуда рассеяния.

Наконец, оставшееся слагаемое можно привести к удобному виду

$$C'_0 = \sum_{n \neq N, \pi} (2\pi)^6 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_n) m_\pi f_\pi^2 \times \\ \times \frac{\langle p_2 | \chi^\beta | n \rangle \langle n | \chi^\alpha | p_1 \rangle}{(E - E_n)^2 (E + m_\pi - E_n + i\epsilon)} - \text{перекр. чл.} \quad (6.122)$$

Поправочный член снова имеет порядок  $m_\pi^2$  относительно главного слагаемого (6.121).

Из изложенного явствует, что обычный анализ специально подобранных коммутаторов дает четкие формулы как для пионного рассеяния, так и для рождения пионов [если взять, например, в качестве оператора  $A$  в соотношении (6.113) электромагнитный ток].

Остановимся теперь на некоторых физических следствиях из полученных выше результатов. Мы видели, что, когда мы желаем получить выражение для одной-единственной амплитуды с физическими пионами, нам приходится несколько выходить за пределы алгебры токов и рассматривать новые коммутаторы, которые в большей степени зависят от модели. В случае выражений с одним мягким пионом мы вынуждены были брать соответствующие коммутаторы, содержащие  $\bar{Q}_L^\alpha$  (или  $\bar{Q}_R^\alpha$ ), т. е. не только заряд, а и его дивергенцию. В случае двух мягких пионов нам нужны не только классический коммутатор  $[\bar{Q}, \bar{Q}]$ , но также  $[\bar{Q}, \bar{Q}], [\bar{Q}, \bar{Q}], [\bar{Q}, \bar{Q}], [\bar{Q}, \bar{Q}]$ .

В обоих случаях в пределе при  $m_\pi \rightarrow 0$  остаются только коммутаторы зарядов. Это не удивительно: для физического пиона точная киральная симметрия нарушается за счет не равной нулю массы пиона. Очевидно, что поправка к точному киральному результату должна зависеть от характера нарушения симметрии. Этим объясняется появление в наших выражениях высших коммутаторов, содержащих дивергенции. Имеется тесная аналогия с тем, что происходит в нарушенной симметрии  $SU(3)$ : для того чтобы вывести, например, массовые формулы, необходимо знать, как нарушена симметрия  $SU(3)$ , и это нарушение выражается в виде коммутационных соотношений между зарядами и дивергенциями.

Если стремиться избежать появления дополнительных, зависящих от модели, коммутаторов, то можно, конечно, дополнить выражения для таких комбинаций пионных амплитуд, которые связаны только с коммутаторами зарядов. Например, в гл. 7 мы увидим, что можно непосредственно связать коммутатор  $[\bar{Q}^\beta, \bar{Q}^\alpha]$  с пионной амплитудой на пороге. Правда, в окончательное выражение входит слагаемое (порядка  $m_\pi^2$ ), соответствующее дополнительной физической амплитуде, которую весьма трудно определить экспериментально или теоретически.

## § 5. Рассеяние пионов

### 1. Общие замечания

Данный раздел посвящен применению изложенного выше подхода к некоторым интересным случаям низкоэнергетических пионных процессов [198, 200, 217, 218].

Наиболее изученным процессом, для которого алгебра токов дала самые эффективные результаты, является процесс пион-нуклонного рассеяния. В этом случае нужный нам коммутатор должен быть построен из оператора типа заряда, который выделяет пионный полюс, и другого оператора с квантовыми числами пиона, но без пионного вклада. Поэтому в соответствии с анализом, проведенным в предыдущем разделе, будем рассматривать

$$C^{\beta\alpha} = [\bar{Q}_L^\beta, \bar{Q}_0^\alpha] = [\bar{Q}^\beta, \bar{Q}^\alpha] + \frac{i}{m_\pi} [\dot{\bar{Q}}^\beta, \bar{Q}^\alpha] + \frac{1}{m_\pi^2} [\bar{Q}^\beta, \ddot{\bar{Q}}^\alpha] + \frac{i}{m_\pi^3} [\dot{\bar{Q}}^\beta, \ddot{\bar{Q}}^\alpha]. \quad (6.123)$$

Таким образом, для описания на этой основе пион-нуклонного рассеяния необходимо знать четыре коммутатора, к детальному изучению которых мы и приступим.

#### 1. Первый коммутатор,

$$[\bar{Q}^\beta, \bar{Q}^\alpha] = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} Q_\gamma, \quad (6.124)$$

определяется  $SU(2) \otimes SU(2)$ -алгеброй Гелл-Манна, которую мы согласны использовать. [И наоборот, правильные результаты анализа пион-нуклонного рассеяния вблизи порога можно рассматривать как подтверждение алгебраической структуры (6.124).]

#### 2. Второй коммутатор,

$$[\bar{Q}^\beta, \dot{\bar{Q}}^\alpha] = \int d^3x [\bar{Q}^\beta, \dot{D}^\alpha(\mathbf{x})] = i\sigma^{\beta\alpha}, \quad (6.125)$$

есть так называемый  $\sigma$ -член, который, как это видно после дифференцирования уравнения (6.124) по времени, безусловно, симметричен по  $(\beta, \alpha)$ . Его определение выходит за рамки алгебры токов и предполагает определенное знание свойств нарушения киральной симметрии. Единой схемой для описания алгебраической структуры нарушения симметрии являются, например, коммутационные соотношения Гелл-Манна, Оукса и Реннера [79], вопрос о практическом использовании которых затрагивался в конце § 5, п. 3. Предположение ЧСАТ позволяет сделать только общее заключение, что  $\sigma^{\beta\alpha}$  имеет порядок  $m_\pi^2$ .

#### 3. Наконец, коммутаторы

$$D^{\beta\alpha} = [\bar{Q}^\beta, \ddot{\bar{Q}}^\alpha] \quad (6.126)$$

и

$$E^{\beta\alpha} = [\dot{\bar{Q}}^\beta, \ddot{\bar{Q}}^\alpha] \quad (6.127)$$

существенно зависят от модели, но в любом случае, если предположить ЧСАТ, они имеют порядок  $m_\pi^4$ . Поскольку они всегда рассматриваются между состояниями с одинаковой энергией, имеем

$$\langle p | D^{\beta\alpha} | p \rangle = -\langle p | [\dot{\bar{Q}}^\beta, \ddot{\bar{Q}}^\alpha] | p \rangle = -\int d^3x d^3x' \langle p | [\dot{D}^\beta(\mathbf{x}), \ddot{D}^\alpha(\mathbf{x}')] | p \rangle = O(m_\pi^4) \quad (6.128)$$

и, очевидно,

$$E^{\beta\alpha} = \int d^3x d^3x' [\dot{D}^\beta(\mathbf{x}), \ddot{D}^\alpha(\mathbf{x}')] = O(m_\pi^4). \quad (6.129)$$

Чтобы получить некоторое представление об их свойствах, полезно рассмотреть некоторые теоретико-полевые модели.

Например, в  $\sigma$ -модели ЧСАТ строго выполняется в том смысле, что  $\varphi^\alpha$  в соотношении

$$\bar{D}^\alpha = m_\pi^2 f_\pi \varphi^\alpha \quad (6.130)$$

есть каноническое пионное поле. Поэтому

$$[\bar{D}^\beta, \bar{D}^\alpha] = m_\pi^4 f_\pi^2 [\varphi^\beta, \varphi^\alpha] = 0, \quad (6.131)$$

и, кроме того,  $\sigma$ -член имеет только часть с  $I = 0$ , пропорциональную  $\delta_{\beta\alpha}$ .

Коммутатор

$$[\bar{D}^\beta, \dot{\bar{D}}^\alpha] = m_\pi^4 f_\pi^2 [\varphi^\beta, \dot{\varphi}^\alpha] \quad (6.132)$$

имеет еще более специфические свойства, зависящие от вида лагранжиана взаимодействия. Поскольку в ренормируемой  $\sigma$ -модели величина  $\varphi^\beta$  совпадает с каноническим импульсом  $\pi^\beta$ , коммутатор (6.132) приводит к  $c$ -числовой константе перенормировки:

$$[\bar{D}^\beta(x), \dot{\bar{D}}^\alpha(0)] = m_\pi^4 f_\pi^2 i \delta_{\beta\alpha} \delta^3(x) Z_\pi^{-1}, \quad (6.133)$$

которая не дает вклада в связный матричный элемент.

Очевидно, что приведенные выше коммутаторы расположены в порядке уменьшения общности <sup>1)</sup>, и нам представляется неизбежной необходимость вводить явные свойства дивергенций при работе с физическими пионами ( $m_\pi \neq 0$ ).

Рассмотрим теперь более обстоятельно пионное слагаемое. Взяв соотношение (6.123) между нуклонными состояниями и отделив пионный вклад в сумме по полному набору состояний, находим [формула (6.121)]

$$\int \frac{d^3\pi}{(2\pi)^3 2\omega_\pi} \langle 0 | \bar{Q}_L^\beta | \pi \rangle \langle \pi p_2 | \bar{Q}_0^\alpha | p_1 \rangle_c = \frac{f_\pi^2}{m_\pi} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) T_{\pi N}^{\beta\alpha}(E), \quad (6.134)$$

где

$$T^{\beta\alpha}(E) = \langle \pi^\beta, p | \chi^\alpha | p \rangle_c \quad (6.135)$$

есть амплитуда пион-нуклонного рассеяния вперед для *физических пионов в состоянии покоя* ( $\mathbf{q} = 0$ ,  $\omega = m_\pi$ ). Это не означает, что амплитуда берется вблизи порога, так как имеется еще одна свободная переменная, соответствующая движению нуклона. Другими словами, здесь рассматривается совокупность различных систем отсчета, где пион является покоящейся мишенью, а внешний нуклон — налетающей частицей.

Для перехода к более привычной системе отсчета, скажем лабораторной, нужно просто сравнить значения инвариантной переменной

$$v_0 = E m_\pi = m_N \omega_L, \quad \omega_L = \frac{m_\pi}{m_N} E. \quad (6.136)$$

Поскольку масса пиона очень мала ( $m_\pi/m_N \approx 0,15$ ), на самом деле, чтобы отойти от пороговой области, нужны нуклоны с большой энергией. Кроме того, в задачу этого раздела входит получение простых выражений для амплитуд с физическими пионами путем использования коммутационных соотношений и насыщения их несколькими промежуточными состояниями.

<sup>1)</sup> Например, в кварковых моделях вид дивергенций  $\bar{D}^\alpha \sim \bar{\psi} \gamma_5^{1/2} \tau^\alpha \psi$  воспроизводит, очевидно,  $\delta^{\beta\alpha}$ -характер  $\sigma$ -члена, тогда как высшие коммутаторы оказываются другими. Например,

$$[\bar{D}^\beta, \bar{D}^\alpha] \sim i e^{\beta\alpha\gamma} V_\gamma.$$

На важную роль этого коммутатора в данном вопросе впервые указал Бьеркен [121].

Поэтому ограничимся здесь конфигурацией внешних нуклонов, которая обеспечит простейший вид поправочных членов. Другими словами, мы ищем «наилучшее» правило сумм, т. е. обеспечивающее наименьшие отклонения от предела при  $m_\pi \rightarrow 0$ .

В рассматриваемом примере основное преимущество системы покоя нуклона  $\mathbf{p} = 0$  заключается в наличии строгого правила отбора по угловому моменту и четности. Поскольку с самого начала  $\mathbf{q} = 0$ , выбрав систему покоя  $\mathbf{p} = 0$ , мы получаем также  $\mathbf{p}_n = 0$ , так что допустимы только *s*-волновые возбуждения. Таким образом, только состояния с тем же угловым моментом, что и у мишени, но с противоположной четностью дают вклад в члены, соответствующие прямой и *Z*-диаграммам (барионные состояния  $1/2^-$  в прямую диаграмму и антибарионные состояния  $1/2^+$  в *Z*-диаграмму). Следовательно, в системе покоя спектр сингулярностей в *s*, *s*-каналах оказывается крайне простым, что позволяет выделить однопионный вклад. По этой причине в дальнейшем будем производить насыщение в системе покоя или в системе, близкой к ней. Соответственно этому пионные амплитуды будут вычисляться на пороге или вблизи порога. В нашем частном случае выбор  $\mathbf{p} = 0$  позволяет предсказать пион-нуклонную амплитуду на физическом пороге  $\nu_0 = m_\pi m_N$ .

## 2. Формулы Томозавы — Вейнберга

Перейдем прямо к деталям вычислений. Благодаря правилу отбора нуклон не дает вклада в правило сумм, а высшие вклады с учетом соотношения (6.117) можно выразить через матричные элементы виртуального пионного источника  $\chi$ . Тогда правило сумм принимает законченный вид

$$\frac{f_\pi^2}{2m_\pi m_N} T_{\pi N}^{\beta\alpha} (\text{порог}) + \sum_{n \neq \pi} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_n) \frac{m_\pi f_\pi^2}{2m_N} \times \\ \times \left\{ \frac{\langle p | \chi^\beta | n \rangle \langle n | \chi^\alpha | p \rangle}{(E_n - m_N)^2 (m_N + m_\pi - E_n + i\epsilon)} - \frac{\langle p | \chi^\alpha | n \rangle \langle n | \chi^\beta | p \rangle}{(E_n - m_N)^2 (E_n - m_N + m_\pi + i\epsilon)} \right\} = c^{\beta\alpha}, \quad (6.137)$$

где мы ввели обозначение

$$\langle p_2 | c^{\beta\alpha} | p_1 \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) 2m_N c^{\beta\alpha}. \quad (6.138)$$

Для последующего использования полезно разложить  $T^{\beta\alpha}$  на две части — симметричную и антисимметричную относительно перестановки  $\beta \leftrightarrow \alpha$ :

$$T^{\beta\alpha} = \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^\alpha] T^{(-)} + \delta^{\beta\alpha} T^{(+)}. \quad (6.139)$$

Для величины  $c^{\beta\alpha}$  в правой части вводим определения (выделяя множители  $m_\pi^2$ )

$$i\epsilon_{\beta\alpha\gamma} \langle p_2 | Q^\gamma | p_1 \rangle = \frac{1}{4} [\tau^\beta, \tau^\alpha] 2m_N (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (6.140)$$

$$i \langle p_2 | \sigma^{\beta\alpha} | p_1 \rangle = i\sigma m_\pi^2 \delta_{\beta\alpha} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (6.141)$$

$$\langle p_2 | D^{\beta\alpha} | p_1 \rangle = \frac{1}{4} [\tau^\beta, \tau^\alpha] m_\pi^4 d^{(-)} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (6.142)$$

$$\langle p_2 | E^{\beta\alpha} | p_1 \rangle = \delta^{\beta\alpha} i m_\pi^4 d^{(+)} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1). \quad (6.143)$$

Вводя, наконец, длины пион-нуклонного *s*-волнового рассеяния  $a^{(\pm)}$ ,

$$T^{(\pm)} (\text{порог}) = 8\pi (m_N + m_\pi) a^{(\pm)}, \quad (6.144)$$

и, учитывая перекрестные свойства, получаем [131, 132, 219, 220]

$$\left(1 + \frac{m_\pi}{m_N}\right) a^{(-)} = L(1 + \delta a^{(-)}), \quad (6.145)$$

$$\left(1 + \frac{m_\pi}{m_N}\right) a^{(+)} = L\delta a^{(+)}, \quad (6.146)$$

где  $L$  — «универсальная» длина

$$L = \frac{m_\pi}{8\pi f_\pi^2} \approx 0,09 m_\pi^{-1} \quad (6.147)$$

и

$$\delta a^{(-)} = \frac{m_\pi^2 d^{(-)}}{2m_N} + 2m_\pi^2 \frac{f_\pi^2}{\pi} \int_{m_\pi}^{\infty} \frac{dq_0 t^{(-)}(q_0)}{q_0^2 (q_0^2 - m_\pi^2 - i\epsilon)}, \quad (6.148)$$

$$\delta a^{(+)} = -\frac{m_\pi}{m_N} (\sigma + d^{(+)}) + 2m_\pi \frac{f_\pi^2}{\pi} \int_{m_\pi}^{\infty} \frac{dq_0 t^{(+)}(q_0)}{q_0 (q_0^2 - m_\pi^2 - i\epsilon)}. \quad (6.149)$$

Здесь  $t^{(\pm)}$  определено через величину

$$t^{\beta\alpha}(q_0) = \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^\alpha] t^{(-)} + \delta^{\beta\alpha} t^{(+)} = \frac{1}{2} \int d^4x \exp(iqx) \langle p | [\chi^\beta(x), \chi^\alpha(0)] | p \rangle. \quad (6.150)$$

Уравнения (6.145) и (6.146) позволяют аналитически выразить длины пион-нуклонного рассеяния через «универсальную» (не зависящую от массы мишени) величину  $L$  и поправки. Как уже отмечалось, приведенное выше представление является наиболее близким к пределу алгебры токов с простой структурой поправочных членов. В частности, в пределе при  $m_\pi \rightarrow 0$  снова получаются результаты гл. 3.

### а. Поправки

Выражения (6.148) и (6.149) для  $\delta a^\pm$  по своей структуре совершенно аналогичны дисперсионному соотношению с вычитанием в точке  $q_0 = 0$  (вычисленному в точке  $q_0 = m_\pi$ ), дополненному членами  $d^\pm$ , роль которых станет ясной позднее (гл. 7, § 6).

Важно подчеркнуть основное свойство приведенного выше дисперсионного представления, которое к тому же отличает его от обычного дисперсионного соотношения с фиксированной массой.

В нашем подходе используются объекты теории слабого взаимодействия, такие, как  $\bar{Q}^\alpha$  или  $\bar{D}^\alpha$ ; отделяя главную особенность по  $q^2$ , мы получаем пионную амплитуду в физической точке  $q^2 = m_\pi^2$ ,  $\nu = \nu_0$ . Но этого нельзя сделать для других вкладов. Действительно, и энергия  $\nu$ , и масса  $q^2$  в правиле сумм меняются с изменением  $q_0$ . В частности,  $q^2$  больше не закреплено в точке  $m_\pi^2$ : если  $\nu > m_N m_\pi$ , то  $q^2 > m_\pi^2$  и необходимо рассматривать вершины слабого взаимодействия  $\langle p | \bar{D}^\alpha | n \rangle$  (или вершины сильного взаимодействия  $\langle p | \chi^\alpha | n \rangle$  для пиона вне массовой поверхности) во времениподобной области  $q^2 = (E - E_n)^2$ . Таким образом, проблема экстраполяции по массе не устранена, а перенесена с пионного на последующие вклады, которые, однако, имеют более высокий порядок по  $m_\pi^2$ , и поэтому возможные поправки влияют только на менее существенную часть правила сумм. В действительности, хотя матричные элементы  $\langle p | \bar{D}^\alpha | n \rangle$  можно в принципе получить на основе возможных экспериментов по слабым взаимодействиям [подобных процессу распада (состояние  $n$ )  $\rightarrow$  (мишень) +  $\bar{D}^\alpha \rightarrow$  (мишень) +  $l + \tilde{\nu}_l$ ], изучены они очень плохо и придется вычислять их приближенно, выражая через соответствующие пионные амплитуды.

Существенно, однако, что даже без подробного вычисления этих поправочных членов можно оценить в общих чертах степень их важности. Во-первых, можно выделить в подынтегральном выражении два типа вкладов,  $t_I$  и  $t_{II}$ , в соответствии с кластерным разложением  $t$ , и, следовательно, будут два типа поправок:  $\delta a_I$  и  $\delta a_{II}$ . Во-вторых, исходя из структуры интегралов заключаем, что каждый вклад содержит множитель  $m_\pi^2/\tilde{q}_0^2$  или  $m_\pi/\tilde{q}_0$ , где  $\tilde{q}_0$  — «эффективные» значения  $q_0$  для состояний, дающих вклад. Для предварительной оценки степени важности различных членов можно вычислить этот множитель, зная массу низшей изобары. Итак:

1. Поправка  $\delta a_I$  будет содержать член, соответствующий прямой диаграмме, с весом  $m_\pi^2/(M' - m_N)^2$  [или  $m_\pi/(M' - m_N)$ ], где  $M'$  — масса изобары  $1/2^-$ . Кроме того, в нее будет входить член с весом  $m_\pi^2/(m_N + M'')^2$  [или  $m_\pi/(m_N + M'')$ ], где  $M''$  — масса нуклонной изобары  $1/2^+$ , получающийся из  $Z$ -диаграммы. В частности,  $M'' = m_N$  (антинуклон), и этот вклад пропорционален  $m_\pi^2/4m_N^2$ .

2. Поправка  $\delta a_{II}$  будет содержать член, пропорциональный  $m_\pi^2/\mu^2$  (или  $m_\pi/\mu$ ), где  $\mu$  — масса более высокой пионной изобары.

Поэтому для того, чтобы выполнялись формулы для мягких пионов без поправок <sup>1)</sup>, требуется, чтобы выполнялись условия:

$$1) \frac{m_\pi^2}{(m_N - M')^2} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{m_\pi^2}{m_N^2} \ll 1, \quad (6.151)$$

$$2) \frac{m_\pi^2}{\mu^2} \ll 1. \quad (6.152)$$

Условие 2 хорошо известно, оно необходимо уже для выполнения соотношения Голдбергера — Треймана. Условие же 1 вполне понятно в свете сказанного выше о механизмах приближенной симметрии. Его можно рассматривать как выражение того обстоятельства, что лучший способ реализации киральной симметрии — это не мультиплетный механизм и не механизм обращения в нуль фермионной массы, а механизм с голдстоуновским бозоном.

Практически можно положить  $\mu > 3m_\pi$ , так что  $m_\pi^2/\mu^2 < 10\%$  и неравенство  $m_\pi^2/m_N^2 \ll 1$  будет хорошо выполняться. Это относится ко всем известным мишеням, кроме самого пиона; поэтому пион-пионное рассеяние требует отдельного рассмотрения.

И наконец, можно ожидать больших поправок, когда у мишени имеется близкий по массе партнер с противоположной четностью. Для  $\pi N$  есть изобара  $1/2^-$  с массой 1570 МэВ, и поправка оказывается пренебрежимой ( $M' - m_N \approx 5m_\pi$ ). В то же время в случае  $\pi\Sigma$ -рассеяния, где существует  $\Lambda'$  ( $1/2^-$ ) при 1405 МэВ ( $m_{\Lambda'} - m_\Sigma \approx 1,6 m_\pi$ ), и в случае  $\rho$ -рассеяния, где существует  $A_1$  и  $m_{A_1} - m_\rho \approx 1,4m_\pi$ , должны быть заметные отклонения от результата алгебры токов (конечно, всякое количественное заключение зависит от величин констант связи <sup>2)</sup>).

Чтобы дать какое-то представление о величине поправок к предсказаниям теории мягких пионов для  $\pi N$ -рассеяния, оставим только вклад

<sup>1)</sup> В действительности термин «поправка» имеет точный смысл только в случае (—).

<sup>2)</sup> Нам хотелось бы упомянуть об одном обстоятельстве, которое указывает на особый характер киральной симметрии. Хотя вершины  $\langle b | \bar{D}^\alpha | a \rangle$  в соответствии с гипотезой ЧСАТ имеют порядок  $m_\pi^2$ , это может не относиться к поправке в целом. Действительно, указанные вершины входят в поправки со знаменателями, зависящими от  $m_\pi$ , в виде интегралов, нижний предел которых обращается в нуль вместе с  $m_\pi$ . В этом пределе могут быть инфракрасные расходимости, которые способны изменить эффективный порядок величины поправок, приводя к членам типа  $m_\pi \ln m_\pi$  или даже понижая степень  $m_\pi$ . Это означает, что простой подсчет вершин  $\bar{D}^\alpha$ , заимствованный из теории возмущений, вообще говоря, неправилен. Тот факт, что для коэффициентов отсутствует разложение в ряд по степеням  $m_\pi$ , затрудняет, например, получение общих результатов типа теоремы Адемолло — Гатто для симметрии  $SU(3)$ . Подробнее останавливаться на этом вопросе не входит в наши цели.

прямой диаграммы в  $\delta a_1$ . Тогда мы видим, что кажущаяся сингулярность на нижнем пределе интегрирования  $q_0 = m_\pi$  должна взаимно уничтожаться с нулем функции  $t^{(-)}$  (или  $t^{(+)}$ ), которая в этой точке точно равна мнимой части физической амплитуды  $s$ -волны (обращаясь в нуль на пороге). Поэтому запишем

$$t^{(-)}(q_0) = \sqrt{s} k b^{(-)}(q_0 = m_\pi) + \bar{t}^{(-)}(q_0), \quad (6.153)$$

где  $k$  — 3-импульс в системе центра масс пиона и нуклона,

$$\sqrt{s} k = m_N (q_0^2 - m_\pi^2)^{1/2}, \quad (6.154)$$

а

$$b^{(-)}(q_0 = m_\pi) = \left\{ \frac{\text{Im } T^{(-)}(\omega)}{\sqrt{s} k} \right\}_{\omega=m_\pi}. \quad (6.155)$$

Кроме того, в силу упругой унитарности для парциальных волн имеем

$$b^{(-)}(q_0 = m_\pi) = \frac{8\pi}{3} (a_1^2 - a_3^2), \quad (6.156)$$

где  $a_1$  и  $a_3$  — длины пион-нуклонного рассеяния в  $s$ -волне с  $I = 1/2, 3/2$ .

Подставляя выражение (6.153) в дисперсионный интеграл в уравнении (6.148), легко находим

$$a^{(+)} \approx L + \frac{2m_\pi}{3\pi} (a_1^2 - a_3^2) + R^{(+)} + \frac{m_\pi^2 d^{(+)}}{2m_N}, \quad (6.157)$$

где  $R^{(-)}$  — дисперсионный интеграл от  $\bar{t}^{(-)}$ , в котором доминирует высшая часть спектра и который предполагается менее существенным из-за наличия в нем быстро убывающего множителя.

Если пренебречь членами с  $R^{(-)}$  и  $d^{(-)}$ , то равенство (6.157) можно рассматривать как условие самосогласованности; заметим, что оно представляет собой алгебраический эквивалент нелинейного интегрального уравнения, которое получается из соотношения упругой унитарности<sup>1)</sup>. Во всяком случае, если подставить экспериментальное значение [117] ( $a_1 \approx 0,171/m_\pi$ ,  $a_3 \approx -0,088/m_\pi$ ) величины  $(2m_\pi/3\pi) (a_1^2 - a_3^2)$ , то оказывается, что эта поправка (на непрерывный спектр) к мягко-пионному результату  $L$  очень мала (5–6%).

Подобную же оценку можно произвести для симметричной части, и в результате получим

$$a^{(+)} = -\frac{m_\pi}{M} L (\sigma + d^{(+)} + \frac{1}{3} (a_1^2 + 2a_3^2) m_\pi + R^{(+)}). \quad (6.158)$$

Но из-за сложной формы членов с  $\sigma$  и  $d^{(+)}$  окончательное вычисление  $a^{(+)}$  оказывается гораздо более трудным.

### 3. Мезон-барионное рассеяние

Изложенный выше метод легко обобщить так, чтобы можно было вычислять другие амплитуды пионного рассеяния. В результате мы получим формулу для длин физического рассеяния, которая будет представлять собой формулу (3.87) для мягких пионов

$$a_1 = -L [I(I+1) - I_T(I_T+1) - 2], \quad (6.159)$$

дополненную поправочными членами, вытекающими из коммутационных соотношений для дивергенций и из дисперсионного интеграла.

Можно предложить общий подход в рамках  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии, при котором восемь аксиально-векторных зарядов сохраняются в пределе

<sup>1)</sup> Это — следствие сильной сходимости интеграла, которая позволяет использовать простое приближение длины рассеяния для непрерывного спектра.



исчезающих масс псевдоскалярных мезонов. Тогда можно вывести низкоэнергетические теоремы, которые позволяют выразить амплитуды мезон-барионного рассеяния на физическом пороге через заряды  $SU(3) \otimes SU(3)$ -алгебры,  $\sigma$ -член, выражающий свойства нарушения  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии, и интеграл по непрерывному спектру порядка  $m_{\text{мезон}}^2$  (а также высшие коммутаторы).

Было бы, вероятно, очень интересно тщательно проверить эти теоремы, поскольку в принципе они позволяют сделать некоторые выводы о трансформационных свойствах гамильтониана, нарушающего симметрию  $SU(3) \otimes SU(3)$ . Действительно, если считать, что наша оценка интеграла по непрерывному спектру надежна и что можно пренебречь высшими коммутаторами, то сравнение теоретических выводов с экспериментальными данными позволило бы нам сделать выбор среди различных моделей, касающихся  $\sigma$ -члена.

Мы не будем вдаваться в детали и ограничимся тем, что воспроизведем результаты вышедшей недавно работы фон Хиппеля и Кима [221, 222], посвященной подробному исследованию мезон-барионного рассеяния вблизи порога. В их работе, очень интересной в свете сказанного выше, используется, в частности, теория Гелл-Манна, Оукса и Репнера [79], в которой предполагается, что гамильтониан, нарушающий  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрию, преобразуется как член скалярного нонета  $(3, 3^*) \otimes (3^*, 3)$ . Это позволяет выразить различные « $\sigma$ -члены», появляющиеся в разных процессах, через единственный неизвестный параметр, определяемый экспериментально. При вычислении поправок авторы цитируемой работы пренебрегают высшими коммутаторами  $d^{(\pm)}$ , а  $t^{(\pm)}$  ( $q_0$ ) аппроксимируют мнимой частью физической амплитуды в  $s$ -волне. Результаты их анализа приводятся в табл. 6.1 и 6.2.

Таблица 6.1

Длины рассеяния в  $s$ -волне (в ферми)

	(Процесс) <sub>I</sub>	Экспериментальное значение	Оценка в приближении мягких мезонов	Теоретическое значение
Упругое рассеяние	$(\pi N)_{1/2}$	$0,25 \pm 0,02$	0,22	$0,20 \pm 0,01$
	$(\pi N)_{3/2}$	$-0,15 \pm 0,01$	-0,11	$-0,14 \pm 0,01$
	$(KN)_0$	$0,00 \pm 0,04$	0,00	$-0,01 \pm 0,01$
	$(KN)_1$	$-0,29 \pm 0,02$	-0,35	$-0,28 \pm 0,01$
	$(\pi \Sigma)_1$	$0,39 \pm 0,07$	0,22	$0,36 \pm 0,10$
	$(\pi \Sigma)_0$	$1,09 \pm 0,23$	0,44	$0,86 \pm 0,14$
	$(\bar{K}N)_1$	$-0,12 \pm 0,02$	0,17	$-0,13 \pm 0,04$
	$(\bar{K}N)_0$	$-1,65 \pm 0,04$	0,52	$-2,45 \pm 0,18$
Неупругое рассеяние (вблизи порога)	$(\bar{K}N \rightarrow \pi \Sigma)_1$	$-0,39 \pm 0,01$	0,05	$-0,49 \pm 0,07$
	$(\pi \Sigma \rightarrow \bar{K}N)_1$	$-0,50 \pm 0,07$	0,01	$-0,51 \pm 0,13$
	$(\bar{K}N \rightarrow \pi \Lambda)$	$0,28 \pm 0,01$	0,07	$0,44 \pm 0,11$
	$(\bar{K}N \rightarrow \pi \Sigma)_0$	$0,90 \pm 0,01$	0,07	$1,21 \pm 0,11$
	$(\pi \Sigma \rightarrow \bar{K}N)_0$	$-1,50 \pm 0,38$	0,01	$-1,08 \pm 0,23$

Из табл. 6.1 видно, что во всех случаях, кроме  $\pi N$ -рассеяния (и некоторых других), «поправочные» члены необходимы для удовлетворительного согласования окончательных результатов. Окончательный вывод таков: нам удалось добиться приемлемого, по крайней мере не случайного, согласия (в пределах 20—30 %) между теорией и экспериментом<sup>1)</sup>. Попутно получено

<sup>1)</sup> Результаты Кима и фон Хиппеля были недавно подтверждены, а в некоторых случаях улучшены, при независимом вычислении длин рассеяния упругих мезон-барионных реакций [515] с использованием того же метода.

Таблица 6.2

Различные вклады в «поправки». Члены  $\sigma_3$  и  $\sigma_8$  вычислены в предположении, что  $H_{наруш}$  преобразуется как элемент представлений  $(3, 3^*) \oplus (3^*, 3)$  и  $(1, 8) \oplus (8, 1)$

	(Процесс) <sub>I</sub>	Перерассеяние	$\sigma_3$	$\sigma_8$
Упругое рассеяние	$(\pi N)_{1/2}$	$0,02 \pm 0,01$	$-0,04$	$0,0$
	$(\pi N)_{3/2}$	$0,01 \pm 0,01$	$-0,04$	$0,0$
	$(KN)_0$	$0,02 \pm 0,01$	$-0,03$	$0,05$
	$(KN)_1$	$0,20 \pm 0,01$	$-0,13$	$0,13$
	$(\pi\Sigma)_1$	$0,00 \pm 0,10$	$-0,03$	$0,0$
	$(\pi\Sigma)_0$	$0,45 \pm 0,14$	$-0,03$	$0,0$
	$(\bar{K}N)_1$	$-0,23 \pm 0,04$	$-0,08$	$0,09$
	$(\bar{K}N)_0$	$-2,80 \pm 0,18$	$-0,17$	$0,18$
Неупругое рассеяние (вблизи порога)	$(\bar{K}N \rightarrow \pi\Sigma)_1$	$-0,27 \pm 0,07$	$-0,27$	$-0,24$
	$(\pi\Sigma \rightarrow \bar{K}N)_1$	$-0,32 \pm 0,13$	$-0,20$	$-0,17$
	$(\bar{K}N \rightarrow \pi\Lambda)_1$	$0,58 \pm 0,11$	$-0,21$	$-0,18$
	$(\bar{K}N \rightarrow \pi\Sigma)_0$	$1,48 \pm 0,11$	$-0,34$	$-0,29$
	$(\pi\Sigma \rightarrow \bar{K}N)_0$	$-0,85 \pm 0,23$	$-0,24$	$-0,20$

указание на то, что гамильтониан, нарушающий  $SU(3) \otimes SU(3)$ , по-видимому, принадлежит представлению  $(3, 3^*) \oplus (3^*, 3)$ , а не представлению  $(1, 8) \oplus (8, 1)$ .

#### 4. Пион в качестве мишени

Процесс лл-рассеяния требует отдельного рассмотрения. Большая часть поправок в форме дисперсионного интеграла происходит от состояния  $J^P = 0^+$  ( $\sigma$ -частица), которое в этом случае дает вклад как в прямую, так и в  $Z$ -диаграмму (это — следствие того, что и мишенью и налетающей частицей является пион).

И здесь окончательный результат зависит от многих предположений относительно высших коммутаторов и олл-вершины. Похоже, что при  $m_\sigma > 5m_\pi$  присутствие лл-резонанса с  $J = I = 0$  практически не влияет на формулы Вейнберга для лл-рассеяния, выведенные в гл. 5<sup>1)</sup>, т. е.

$$a_0 = \frac{7L}{4}, \quad a_2 = -\frac{L}{2}. \quad (6.160)$$

#### § 6. Рождение пионов

После общего анализа пион-нуклонного рассеяния, в ходе которого были продемонстрированы основные особенности метода, распространим все сказанное на процессы, в которых один низкоэнергетический пион рождается внешним током. Из доступных экспериментально процессов такого рода наиболее интересны электромагнитное и слабое рождение пионов на нуклонах

$$(V_\mu, A_\mu) + N_1 \rightarrow \pi + N_2$$

и слабые полулептонные распады, такие, как, например, распад  $K_{l3}$ .

В оставшейся части данной главы мы будем рассматривать только рождение пионов, хотя уже разработано много интересных приложений алгебры токов и теории мягких пионов к слабым процессам, подобным  $K_{l3}, K_{l4}$ ,

<sup>1)</sup> См., например, работы [223, 224].

нелептонным распадам гиперонов и т. д. В частности, объектом широкого исследования для теоретиков было соотношение Каллана — Треймана, выведенное в гл. 3, и его обобщение на физические пионы. Однако наблюдается большое расхождение между предсказаниями теории мягких пионов и экспериментальными результатами, что представляет собой одну из проблем алгебр токов (наряду с  $\eta \rightarrow 3\pi$  и  $\pi_0 \rightarrow 2\gamma$ ). Поскольку до сих пор нет полностью удовлетворительного ответа на этот вопрос, мы откладываем его до гл. 10.

### 1. Электророждение пионов

Начнем с электророждения [198]. Первыми теорию мягких пионов применили к электророждению Намбу и Шраунер [110], а более современные варианты предложены многими авторами<sup>1)</sup>. Но всем этим подходам общи трудности, характерные для предсказаний, справедливых в пределе безмассовых пионов. В частности, не всегда ясно, какую точку выбрать для сравнения предсказаний алгебры токов с экспериментами; действительно, в случае пион-нуклонного рассеяния мы видели, что можно достичь разных точек физической области и практически они различаются лишь величиной «поправок». Теперь мы хотим провести аналогичный анализ электророждения.

Необходимо начать с коммутатора

$$[\bar{Q}_L^\beta, V_\mu^\alpha] \equiv E_\mu^{\beta\alpha}, \quad (6.161)$$

где  $V_\mu^\alpha$  — изоспиновый векторный ток. В правой части нам требуется коммутационное соотношение, известное из алгебры токов,

$$[\bar{Q}^\beta, V_\mu^\alpha] = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} A_\mu^\gamma \quad (6.162)$$

и «зависящий от нарушения» коммутатор

$$[\dot{\bar{Q}}^\beta, V_\mu^\alpha] = \int d^3x [\bar{D}^\beta(x), V_\mu^\alpha]. \quad (6.163)$$

Временную компоненту коммутатора (6.163) можно получить из закона сохранения тока:

$$\partial^\mu [\bar{Q}^\beta, V_\mu^\alpha] = [\dot{\bar{Q}}^\beta, V_0^\alpha] = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \partial^\mu A_\mu^\gamma, \quad (6.164)$$

тогда как  $[\dot{\bar{Q}}, V]$  в значительной мере зависит от модели. В качестве упрощающего предположения [91, 184] можно непосредственно взять алгебру полей и ЧСАТ,  $\bar{D}^\alpha \propto \varphi^\alpha$ ,  $V \propto x\rho$ , что приводит к соотношению  $[\dot{\bar{Q}}^\beta, V^\alpha] = 0$ . Во всяком случае потребность в этих высших коммутаторах снова означает, что одной алгебры токов недостаточно для нахождения полной физической амплитуды электророждения, она определяет лишь некоторые из инвариантных функций.

Перейдем теперь к насыщению одновременного коммутатора (6.161), взятого между однонуклонными состояниями. Выделение однопионного члена в левой части дает

$$\sum_\pi \langle 0 | \bar{Q}_L^\beta | \pi \rangle \langle \pi, p_2 | V_\mu^\alpha | p_1 \rangle_c = f_\pi T_\mu^{\beta\alpha}, \quad (6.165)$$

где

$$T_\mu^{\beta\alpha} = i \langle p_2, \pi^\beta | V_\mu^\alpha | p_1 \rangle_c \quad (6.166)$$

— амплитуда электророждения покоящегося физического пиона ( $\mathbf{q} = 0$ ,  $\omega = m_\pi$ ). Положение точки физической области, где оценивается  $T_\mu^{\beta\alpha}$ , зави-

<sup>1)</sup> См. работы [225—228], а также цитируемую в них литературу.

сит от конфигурации импульсов внешних нуклонов. Согласно сказанному в предыдущем разделе, мы предпочитаем насыщение в системе покоя или в близкой к ней системе с тем, чтобы можно было воспользоваться правилами отбора по угловому моменту и четности. Так, выбрав систему  $\mathbf{p}_2 = 0$ , мы оказываемся вблизи порога в системе центра масс:

$$\begin{aligned} v_{\text{порог}} &= (Pq)_{\text{порог}} = m_{\pi} m_N \left[ 1 + \frac{m_{\pi}^2 - k^2}{4m_N (m_N + m_{\pi})} \right], \\ t_{\text{порог}} &= - \frac{(m_{\pi}^2 - k^2)}{1 + m_{\pi}/m_N}, \end{aligned} \quad (6.167)$$

тогда как выбор  $\mathbf{p}_1 = 0$  соответствует лабораторной системе отсчета.

Но мы предпочитаем брейтовскую систему отсчета (нуклона):

$$\mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 = \frac{1}{2} \Delta, \quad E_2 = E_1, \quad \Delta_0 = 0 \quad (6.168)$$

(напомним, что конфигурация, соответствующая рассеянию вперед, не допускается кинематикой).

Основания для нашего выбора таковы. Прежде всего, нетрудно видеть, что если обозначить через  $k$  импульс векторного тока ( $\mathbf{p}_1 + \mathbf{k} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}$ ), то в конфигурации  $\mathbf{q} = 0$  мы получим

$$v = q_0 P_0, \quad q^2 \equiv q_0^2 = \frac{v^2}{P_0^2}, \quad k^2 = q^2 + t + 2v \frac{\Delta_0}{P_0}. \quad (6.169)$$

Таким образом, удобно выбрать систему отсчета, где  $\Delta_0 = 0$ , что обеспечивает одинаковую зависимость величин  $k^2$  и  $q^2$  от  $v$ . Это позволит проще и быстрее оценить другие вклады в правило сумм в том смысле, что слагаемые, отличающиеся друг от друга заменой  $v \rightarrow -v$ , будут связаны перекрестной симметрией (тогда как  $k^2$  должно оставаться тем же).

Далее посмотрим, какие ограничения накладывает сохранение углового момента и четности на промежуточные состояния. Поскольку  $\mathbf{p}_2$  и  $\mathbf{p}_1$  не могут одновременно обращаться в нуль, строгое правило отбора не выполняется; но даже если оставлять  $p$ -волны и более высокие волны, их вклад все же можно контролировать; он, конечно, подавлен в случае малых  $\mathbf{p}_2^2$  и  $\mathbf{p}_1^2$ . В частности, брейтовская система обладает тем свойством, что в ней правило отбора лучше всего аппроксимируется в обоих каналах<sup>1)</sup>.

Итак, наши выводы будут касаться электророждения вблизи «брейтовского порога», что соответствует кинематической конфигурации, в которой покоящийся пион рождается в брейтовской системе нуклона. Инвариантные переменные таковы:

$$\begin{aligned} (v)_{\text{В порог}} &= m_{\pi} E = m_{\pi} \left( m_N^2 - \frac{1}{4} t \right)^{1/2}, \\ t &= -\Delta^2 = -\mathbf{k}^2, \quad (t)_{\text{В порог}} = k^2 - m_{\pi}^2. \end{aligned} \quad (6.170)$$

В частности, брейтовский порог для фоторождения фиксирует значение  $t = -m_{\pi}^2$ .

Нетрудно убедиться, что конфигурация вблизи брейтовского порога соответствует (в системе центра масс) пиону с энергией  $\omega_{\text{п.м}} \approx m_{\pi} (1 - t/8m_N^2)$ , испускаемому вдоль  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{q} = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 v_0 / (2P^2 + v_0)$ . Это показывает, что, пока мы рассматриваем не слишком большие  $|t|$ , скажем  $|t| \leq 20 m_{\pi}^2$ , отклонения от порогового значения малы и логично думать, что наши предсказания выполняются без существенных изменений на действительном пороге.

<sup>1)</sup> Тогда как, например, в случае  $\mathbf{p}_2 = 0$  в прямом канале допускается только  $s$ -волна, а перекрестный канал содержит состояния с любым угловым моментом.

## а. Общий анализ

Перейдем теперь к более подробному вычислению (в брейтовской системе нуклона) различных слагаемых в правиле сумм

$$f_{\pi} T_{\mu}^{\beta\alpha} = \langle p_2 | E_{\mu}^{\beta\alpha} | p_1 \rangle - \sum_{n \neq \pi} \langle p_2 | \bar{Q}_L^{\beta} | m \rangle \langle m | V_{\mu}^{\alpha} | p_1 \rangle - \text{перекр. чл.}, \quad (6.171)$$

которое получено насыщением коммутатора (6.161), взятого между однонуклонными состояниями.

Основные вклады даются матричным элементом одновременно коммутатора и однонуклонным членом, и мы приведем соответствующие выражения. Для аксиально-векторной вершины имеем

$$\begin{aligned} \langle p | A^{\alpha} | -p \rangle &= \frac{1}{2} \tau^{\alpha} \{ 2EG_1(t) [\sigma - n(\sigma n)] + n(\sigma n) G_D(t) \}, \\ \langle p | A_0^{\alpha} | -p \rangle &= 0, \\ \langle p | \bar{D}^{\alpha} | -p \rangle &= \frac{1}{2} \tau^{\alpha} (-i) \sigma \mathbf{k} G_D(t), \end{aligned} \quad (6.172)$$

где  $n = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| = \Delta/|\Delta|$  и

$$G_D(t) = 2m_N G_1(t) + t G_2(t). \quad (6.173)$$

Для векторной вершины

$$\begin{aligned} \langle p | V_0^{\alpha} | -p \rangle &= \frac{1}{2} \tau^{\alpha} 2m_N G_E^{(V)}(t), \\ \langle p | V^{\alpha} | -p \rangle &= \frac{1}{2} \tau^{\alpha} i \sigma \times \mathbf{k} G_M^{(V)}(t), \end{aligned} \quad (6.174)$$

где мы используем формфакторы Сакса, определенные, как обычно, в виде

$$G_M = F_1 + F_2, \quad G_E = F_1 + \frac{t}{4m_N^2} F_2. \quad (6.175)$$

Поскольку мы уже выбрали систему отсчета, проще проводить вычисления нековариантным образом и различать случаи, когда индекс  $\mu = 0$  и  $\mu \neq 0$ . Тогда получаются следующие результаты:

$$\begin{aligned} f_{\pi} T_0^{\beta\alpha} + \frac{m_N}{2E_1} r_A \bar{\delta}_{\beta\alpha} \bar{G}_E^{(V)}(t) \sigma \mathbf{k} + O(m_{\pi}^2) &= \frac{1}{m_{\pi}} G_D(t) \sigma \mathbf{k} \frac{1}{4} [\tau^{\beta}, \tau^{\alpha}], \\ f_{\pi} T_{\mu}^{\beta\alpha} - \frac{t}{2E} r_A G_M^{(V)}(t) [\sigma - n(\sigma n)] \frac{1}{4} [\tau^{\beta}, \tau^{\alpha}] + O(m_{\pi}^2) &= \\ &= \frac{1}{4} [\tau^{\beta}, \tau^{\alpha}] \{ 2EG_1(t) [\sigma - n(\sigma n)] + G_D(t) n(\sigma n) \} + \\ &+ \frac{i}{m_{\pi}} \langle p | [\bar{Q}^{\beta}, V^{\alpha}] | -p \rangle. \end{aligned} \quad (6.176)$$

Разумеется,  $T_0$  и  $T$  не являются независимыми, так как существует калибровочное условие:

$$\mathbf{kT} = [k_0 T_0 \quad (k_0 = m_{\pi})]. \quad (6.178)$$

Это условие автоматически выполняется для части, нечетной относительно замены  $\beta \leftrightarrow \alpha$ , а что касается четной части, то выражение (6.176) для  $T_0$ , возможно, позволит быстрее и проще вычислить  $\mathbf{kT}$ . Заметим, что, поскольку матричный элемент  $\langle p | [\bar{Q}^{\beta}, V^{\alpha}] | -p \rangle$  — нечетная функция величины  $m_{\pi}$ , в силу перекрестной симметрии он будет давать вклад в амплитуду, симметричную относительно перестановки  $\beta \leftrightarrow \alpha$ .

Примем теперь для  $T$  следующее разложение:

$$T_{\mu} = A \sigma_{\mu} + B [\mathbf{k}(\sigma \mathbf{k}) - \mathbf{k}^2 \sigma]_{\mu}, \quad (6.179)$$

где  $A$  и  $B$  — инвариантные функции, взятые, конечно, в точке

$$v_0 = m_\pi E = m_\pi \left( m_N^2 - \frac{1}{4} t \right)^{1/2}, \quad q^2 = m_\pi^2, \quad k^2 = m_\pi^2 + t. \quad (6.180)$$

Кроме того, учитывая электромагнитную природу тока ( $\alpha = 3, 0$ ), имеем обычную изоспиновую структуру

$$T^\beta = \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^3] T^{(-)} + \delta^{\beta 3} T^{(+)} + \tau^\beta T^{(0)}. \quad (6.181)$$

Сравнивая с соотношением (6.177), получаем

$$B^{(-)} = \frac{1}{2f_\pi} \left[ -\frac{G_1(t)}{2(E+m_N)} - G_2(t) + r_A \frac{G_M^{(V)}(t)}{2E} \right] + \delta B^{(-)}, \quad (6.182)$$

а используя калибровочную инвариантность и соотношение (6.176), имеем

$$A^{(-)} = \frac{G_D(t)}{2f_\pi} + \delta A^{(-)}. \quad (6.183)$$

Точно так же для симметричной части имеем

$$A^{(+, 0)} = -\frac{m_\pi m_N}{2E} \frac{r_A G_E^{(V, S)}(t)}{f_\pi} + \delta A^{(+, 0)}, \quad (6.184)$$

тогда как  $B^{(+, 0)}$  зависит от неизвестного члена  $\langle p | [\vec{Q}^\beta, V] | -p \rangle$  и от слагаемых, соответствующих высшим состояниям в правиле сумм:

$$B^{(+, 0)} = \sigma B^{(+, 0)} + (\text{вклад одновр. коммут.}). \quad (6.185)$$

И наконец, нетрудно найти компактные выражения для «поправочных» членов:

$$\delta(A^{(-)}, B^{(-)}) = 2m_\pi^2 \int_{m_\pi}^{\infty} \frac{dq_0 \rho_{A, B}^{(-)}(q_0)}{q_0 (q_0^2 - m_\pi^2 - i\epsilon)}, \quad (6.186)$$

$$\delta A^{(+, 0)} = 2m_\pi^3 \int_{m_\pi}^{\infty} \frac{dq_0 \rho_A^{(+, 0)}(q_0)}{q_0^2 (q_0^2 - m_\pi^2 - i\epsilon)}, \quad (6.187)$$

$$\delta B^{(+, 0)} = 2m_\pi \int_{m_\pi}^{\infty} \frac{dq_0 \rho_B^{(+, 0)}(q_0)}{q_0^2 - m_\pi^2 - i\epsilon}, \quad (6.188)$$

где  $\rho_{A, B}^{(I)}$  — компоненты, соответствующие разложению (6.179) для величины

$$\rho^{\beta\alpha} = i(2\pi)^3 \sum_{n \neq \pi, N} \delta^4(p_2 + q - p_n) \langle p_2 | \chi^\beta | n \rangle \langle n | V^\alpha | p_1 \rangle - \text{перекр. чл.} \quad (6.189)$$

Получив соотношения (6.182) — (6.188), мы достигли своей цели, т. е. нашли простой способ выражения амплитуды электророжения вблизи порога через нуклонные электромагнитные и слабые аксиальные формфакторы плюс члены порядка  $m_\pi$  и выше. Вообще можно сказать, что при таком представлении амплитуды электророжения в нее в явном виде входят два основных вклада: *квазипотенциальная* часть, соответствующая обмену частицами  $A_1$  и  $\pi$  в  $t$ -канале [полюса функций  $G_1(t)$  и  $G_2(t)$ ], и сумма по промежуточным состояниям (в основном порядка  $m_\pi^2$ ), которую можно рассматривать как *резонансную* часть рассеяния плюс диаграммы *векторной доминантности*. Этот последний вклад в поправки возникает из полунесвязных диаграмм  $k^2$ -канала.

Хотя для определения полной амплитуды нужно знать величины  $\delta A$  и  $\delta B$ , ее можно приближенно оценить при малых  $|t|$ . Нетрудно видеть, что продольное и поперечное сечения в системе центра масс вблизи брейтовского

порога (при  $k^2 = -t$ ) даются выражениями

$$\begin{aligned} d\sigma_T &\propto |A + tB|^2 \equiv |2ET_T|^2, \\ d\sigma_L &\propto |A|^2 \equiv |T_L|^2. \end{aligned} \quad (6.190)$$

Таким образом, интерес представляет величина

$$A + tB = 2ET_T, \quad (6.191)$$

для которой имеем

$$T_T^{(-)} = \frac{G_1(t)}{2f_\pi} + \frac{t}{4E^2} \frac{r_A G_M^{(V)}(t)}{2f_\pi} + \frac{\delta A^{(-)} + t\delta B^{(-)}}{2E}, \quad (6.192)$$

$$T_T^{(+, 0)} = -\frac{m_\pi M}{4E^2} \frac{r_A G_E^{(V, S)}(t)}{f_\pi} + \frac{\delta A^{(+, 0)} + t\delta B^{(+, 0)}}{2E} \quad (6.193)$$

Поскольку в этих формулах  $B$  всегда умножается на  $t^1$ , можно пренебречь величиной  $t\delta B^{(+, 0)}$  при малых значениях  $|t|$ , порядка нескольких  $m_\pi^2$ . [Тем самым мы как бы предполагаем, что  $B^{(+, 0)}$  — медленно меняющаяся функция переменной  $t$ , тогда как для  $B^{(-)}$  это неверно из-за наличия  $\pi$ -полюса у функции  $G_2(t)$ .]

### 6. Теоретические результаты

Как указывалось в гл. 3, § 5, п. 1, для того чтобы результаты алгебры токов для фото- и электророжения удовлетворительно согласовались с экспериментом, нужно вычислить поправочные члены  $\delta T_L^{(+, 0)}$ . Вычислить их не всегда легко, а главные вклады в поправку таковы: вклад  $s$ -волны непрерывного спектра, вклад  $N_{33}$ -резонанса (сильно подавленный при малых  $t$ ) и полунесвязные вклады  $\rho$  и  $\omega$ . Мы не будем здесь останавливаться на этих вычислениях. Они требуют различных приближений, но общее заключение состоит в том, что нельзя пренебрегать влиянием членов  $O(m_\pi^2)$ . Например, при не слишком больших  $|t|$  ( $\lesssim 16 m_\pi^2$ ) эти члены более высокого порядка дают 15–20% величины  $T_T^{(-)}$ , но могут дать 50% величины  $T_T^{(-)}$  [поскольку  $G_D(t) \approx 2m_\pi^2 f_\pi g_{\pi N} / (m_\pi^2 - t)$  есть быстро меняющаяся функция переменной  $t$ ]. Мы приведем ниже ряд важных результатов, отсылая читателя, интересующегося более детальным обсуждением, к оригинальной литературе [231–233]. Все вычисления производились с учетом дипольного приближения для нуклонных формфакторов

$$\begin{aligned} \frac{G_{E, M}^{(V, S)}(t)}{G_{E, M}^{(V, S)}(0)} &= \left(1 - \frac{t}{M_V^2}\right)^{-2}, \quad M_V^2 = 0,71 \text{ ГэВ}^2, \\ \frac{G_1(t)}{G_1(0)} &= \left(1 - \frac{t}{M_A^2}\right)^{-2} \end{aligned} \quad (6.194)$$

в предположении, что аксиальный параметр  $M_A$  меняется в пределах от  $6 m_\pi$  до  $9 m_\pi$ . Кроме того, предполагалась пионная доминантность для

$$G_D(t) \approx 2f_\pi g_{\pi N} \frac{m_\pi^2}{m_\pi^2 - t} \quad (6.195)$$

а коммутатором  $[\bar{Q}^\beta, V]$  везде пренебрегали. Это согласуется с обобщенной моделью алгебры полей,  $\bar{D}^\beta \propto \pi^\beta$ ,  $V \propto \rho$ , и указанное предположение влияет только на четные по изоспину амплитуды, существенные главным образом в  $\pi^0$ -рождении. Итак, если ограничиться процессами с заряженными пионами, то получаются теоретические значения; представленные в табл. 6.3 для фото-

<sup>1)</sup> Кроме того, функция  $B$  не сингулярна при  $t = 0$ , в чем можно убедиться, например, воспользовавшись разложением Фубини — Намбу — Ватагина [229, 230] или другим инвариантным разложением.

Таблица 6.3

Предсказания алгебры токов и экспериментальные данные по фоторождению заряженных пионов вблизи порога. Результат «без поправок» получен без введения поправки на пионную массу в амплитуде, но не в кинематических множителях

	$\left[ \frac{ k }{ q } \frac{d\sigma(\pi^+)}{d\Omega} \right]_{\text{порог}},$ мкб·ср <sup>-1</sup>	$R = \frac{d\sigma(\pi^-)}{d\sigma(\pi^+)}$
Эксп.	15,6±0,5	1,265±0,075
Без поправок	14	1
$M_A = 6m_\pi$	15	
$M_A = 7m_\pi$	15,4	
$M_A = 8m_\pi$	15,6	1,34
$M_A = 9m_\pi$	15,8	

рождения ( $t = -m_\pi^2$ ) и в табл. 6.4 для электророждения. В случае процесса электророждения мы включили в таблицу недавно полученный [234] экспериментальный результат, соответствующий  $k^2 = -10,4 m_\pi^2$  при определенных энергиях электрона и углах вылета:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{|q|_{\text{ц. м}}} \frac{d^2\sigma(\pi^+)}{d\Omega'_e{}^L dE'_e{}^L} = (4,9 \pm 0,7) \cdot 10^{-31} \text{ см}^2 \cdot \left( \frac{\text{ГэВ}}{c} \right)^{-2} \cdot \text{ср}^{-1}. \quad (6.196)$$

Кроме того, экспериментальные данные указывают на то, что отношение продольного и поперечного сечений  $r = \sigma_L/\sigma_T < 1$ .

Таблица 6.4

Предсказания алгебры токов и экспериментальные данные по электророждению на пороге.

Через  $(\Omega'_e)_L$  и  $(E'_e)_L$  обозначены угол вылета и энергия вылетающего электрона в лабораторной системе.

	$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{ q _{\text{ц. м}}} \frac{d^2\sigma(\pi^+)}{(d\Omega'_e)_L (dE'_e)_L}, 10^{-31} \text{ см}^2 (\text{ГэВ}/c)^{-2} \cdot \text{ср}^{-1}$	$r = \frac{\sigma_L(\pi^+)}{\sigma_T(\pi^+)}$
Эксп.	4,9±0,7	< 1
$M_A = 6m_\pi$	4,03	0,53
$M_A = 7m_\pi$	5,10	0,40
$M_A = 8m_\pi$	6,00	0,32
$M_A = 9m_\pi$	6,70	0,28

Даже беглый взгляд на таблицы говорит об удовлетворительном согласии между предсказаниями алгебры токов (с учетом поправок на конечную массу пиона) и экспериментом. Кроме того, из измеренных пионных сечений можно попытаться получить некоторую информацию о матричных элементах одновременно коммутатора. В частности, можно получить сведения о поведении аксиального формфактора  $G_1(t)$ : приведенные выше оценки показывают, что  $M_A \approx 7m_\pi$  (в случае дипольной параметризации), но требуются, конечно, дополнительные экспериментальные данные и более надежные теоретические вычисления.



## 2. Рождение пионов в слабых взаимодействиях

Аналогичным образом можно рассмотреть процессы, в которых пион рождается аксиальными токами, подобно рождению нейтрино [235, 236]. В этом случае исходным коммутатором является, конечно,  $[\bar{Q}_L^\beta, A_\mu^\alpha]$ , содержащий, кроме слагаемого из алгебры токов  $[\bar{Q}^\beta, A_\mu^\alpha]$ , также  $\sigma$ -член  $[\bar{Q}^\beta, A_0^\alpha]$  (пропорциональный коммутатору  $-\bar{Q}^\beta, \bar{D}^\alpha$  между состояниями с одинаковой энергией) и слагаемое  $[\bar{Q}^\beta, A^\alpha]$  (обращающееся, вероятно, в нуль в модели алгебры полей).

Очевидно, что этот процесс несколько сложнее простого векторного рождения, так как линия  $A_\mu$  имеет теперь вклад и  $\pi$ -полюса. Если мы хотим четко выделить этот дополнительный пионный вклад, то удобнее вместо  $A_\mu$  рассмотреть поперечный аксиальный ток. Его можно определить следующим образом:

$$B_\mu = A_\mu + \frac{1}{m_\pi^2} \partial_\mu \bar{D}, \quad (6.197)$$

так что

$$\langle 0 | B_\mu | \pi \rangle = \langle \pi | B_\mu | 0 \rangle = 0. \quad (6.198)$$

( $B_0$  — плотность тока, который соответствует оператору заряда  $\bar{Q}_0$ , введенному для описания  $\pi N$ -рассеяния.)

При вычислении  $[\bar{Q}_L^\beta, B_\mu^\alpha]$  оказывается, что в дополнение к перечисленным выше коммутаторам требуются еще члены  $\int [\bar{D}, \bar{D}]$  и  $\int [\bar{D}, \dot{\bar{D}}]$ , позволяющие одинаково подходить к аксиальному рождению пиона и пион-нуклонному рассеянию (с покоящимся пионом в конечном состоянии).

Подробности метода и его приложения можно найти в указанной выше литературе, и мы не будем больше останавливаться на этом вопросе.

### § 7. Обобщение на случай движущихся пионов

Сделаем небольшое отступление и скажем несколько слов о характере наших предсказаний. Они всегда касаются покоящегося пиона-«мишени». В принципе, изменив импульсы внешних частиц, можно получить любую конфигурацию (выбрав, например, в случае электророждения самую общую систему отсчета с произвольными  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ ). Но поскольку мы обычно выбираем симметричную брейтовскую систему, кинематическая конфигурация остается ограниченной.

Таким образом, для более полного описания пионных процессов необходимо обобщить изложенный выше метод на случай движущихся пионов в подходящей конфигурации импульсов внешних частиц (обычно в брейтовской системе).

Легко видеть, что требуемое обобщение достигается [237], если сопоставить пиону не оператор заряда  $\bar{Q}^\alpha$ , а оператор плотности  $A_0^\alpha$ .

Точнее, введем оператор

$$\mathcal{A}_L^\beta(\mathbf{q}) = \int d^3x \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) \left[ A_0^\beta(\mathbf{x}) + \frac{i\omega}{m_\pi^2} \bar{D}^\beta(\mathbf{x}) \right], \quad (6.199)$$

такой, что

$$\begin{aligned} \langle \pi | \mathcal{A}_L^\alpha | 0 \rangle &= 0, \\ \langle 0 | \mathcal{A}_L^\beta | \pi^\alpha \rangle &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{q} - \boldsymbol{\pi}) i f_\pi 2\omega_\pi \delta^{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (6.200)$$

Таким образом (в качестве примера берем случай электророждения), обычное преобразование коммутатора  $[\mathcal{A}_L^\beta, V_\mu^\alpha]$  после выделения однопион-

ного члена приводит к соотношению

$$f_{\pi} T_{\mu}^{\beta\alpha}(\omega) + (\text{один нуклон}) + \dots = \langle p_2 | \text{одновременный коммутатор} | p_1 \rangle,$$

где  $T_{\mu}^{\beta\alpha}(\omega)$  — амплитуда рождения физического пиона с импульсом  $\mathbf{q}$  в брейтовской системе внешних нуклонов.

Конечно, за это приходится платить: во-первых, нам теперь нужны коммутаторы между плотностями (подобные  $A_0, V_{\mu}$ ), в которых могут присутствовать операторные пвингеровские члены; во-вторых, у нас нет правил отбора против более высоких парциальных волн, а при работе с  $A_0$  необходимо также включать  $A_1$ -несвязный вклад.

Мы не будем приводить здесь детали этого метода, хотя читатель легко может представить себе примерный вид результата. Вообще говоря, можно выделить два главных вклада: *квазипотенциальную* часть, обусловленную одновременным коммутатором и соответствующую обмену частицами в  $t$ -канале, и сумму по промежуточным состояниям, которую можно рассматривать как *резонансную* часть. Различие между двумя этими частями будет выражаться наличием коэффициентов  $\omega^2, \mathbf{q}^2, \omega |\mathbf{q}|$  при вкладах промежуточных состояний, которые напоминают, что основой нашего метода является экстраполяция результатов алгебры токов от  $\omega = |\mathbf{q}| = 0$  ко все более и более далеким участкам физической области.

С такой точки зрения можно сказать, что алгебра токов и статическая модель (или изобарные модели) дают два взаимно дополняющих описания пионных амплитуд. Алгебра токов довольно хорошо описывает (при низких энергиях) те парциальные волны, в которых резонансами можно пренебречь, такие, как  $s$ -волна вблизи порога. Одновременный же коммутатор ( $\rho, \sigma$ -обмен в пион-нуклонном рассеянии) не существен для  $p$ -волны, в которой доминирует  $(3, 3)$ -резонанс.

### Приложение I. Простые свойства неоднородной группы Лоренца

В приложении III гл. 1 упоминались некоторые элементарные свойства группы Лоренца. Теперь мы хотим дополнить сказанное рассмотрением сдвигов в пространстве и времени, генерируемых операторами

$$P^{\mu} \equiv (H, \mathbf{P}), \quad (I.1)$$

где  $H$  — гамильтониан, а  $\mathbf{P}$  — полный импульс.

Чтобы проще ввести эти операторы, обратимся к элементарному случаю трехмерного пространства. Генераторами группы вращений являются операторы полного углового момента с алгеброй<sup>1)</sup>

$$[J^k, J^l] = i\epsilon^{klm} J^m. \quad (I.2)$$

Вращение, конечно, оставляет неподвижной одну точку, которую обычно берут за начало координат. Операторы  $\mathbf{J}$  зависят от этой точки, что явствует из коммутационных соотношений между  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{P}$ , генератором бесконечно малой пространственной трансляции  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ . Имеем

$$[J^k, P^l] = i\epsilon^{klm} P^m. \quad (I.3)$$

Из уравнения (I.3) видно, и как сдвигается вектор  $\mathbf{J}$  и как вращается вектор  $\mathbf{P}$ .

Кроме того, группа трансляций коммутативна:

$$[P^i, P^j] = 0. \quad (I.4)$$

Соотношения (I.2)—(I.4) образуют алгебру евклидовой группы.

<sup>1)</sup> Напомним, что  $\epsilon_{123} = +1$ .

Коммутатор оператора  $\mathbf{J}$  со скалярным оператором  $\varphi$  имеет, конечно, вид

$$[\mathbf{J}, \varphi] = 0, \quad (I.5)$$

где  $\mathbf{J}$  генерирует бесконечно малые повороты вокруг начала координат. Для обобщения на случай вращений относительно точки  $\mathbf{x}$  нужно вспомнить, что

$$i [P_k, \varphi(\mathbf{x})] = \partial_k \varphi(\mathbf{x}), \quad (I.6)$$

т. е. что

$$\varphi(\mathbf{x}) = \exp(-i\mathbf{P}\mathbf{x}) \varphi(0) \exp(i\mathbf{P}\mathbf{x}). \quad (I.7)$$

С учетом элементарного соотношения

$$[J_h, \exp(-i\mathbf{P}\mathbf{x})] = \varepsilon_{hlm} x^l P^m \exp(-i\mathbf{P}\mathbf{x})$$

получаем

$$\begin{aligned} [J_h, \varphi(\mathbf{x})] &= [J_h, \exp(-i\mathbf{P}\mathbf{x}) \varphi(0) \exp(i\mathbf{P}\mathbf{x})] = \\ &= \varepsilon_{hlm} x^l [P^m, \varphi(\mathbf{x})] = -i \varepsilon_{hlm} x^l \partial^m \varphi(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (I.8)$$

Аналогичные формулы можно, конечно, написать для высших тензорных операторов. Например, в случае векторного оператора (тока)

$$[J_k, j_l(0)] = i \varepsilon_{klm} j_m(0) \quad (I.9)$$

и

$$[J_k, J_l(\mathbf{x})] = i \varepsilon_{klm} j_m(\mathbf{x}) - i \varepsilon_{kmn} x^m \partial^n j_l(\mathbf{x}). \quad (I.10)$$

Теперь перейдем к полной неоднородной группе преобразований Лоренца

$$x_\mu = L_\mu^\nu x_\nu + a_\mu, \quad L_{\mu\rho} L^{\mu\nu} = \delta_\rho^\nu. \quad (I.11)$$

Кроме операторов  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{P}$ , теперь необходимо ввести генератор лоренцева поворота  $\mathbf{K}$  и полный гамильтониан  $H$ .

Тогда группа Пуанкаре (неоднородная группа Лоренца) определяется следующими коммутационными соотношениями между десятью генераторами  $\mathbf{P}$ ,  $H$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$ :

$$[P_i, P_j] = [P_i, H] = 0, \quad (I.12)$$

$$[J_k, J_l] = i \varepsilon_{klm} J_m,$$

$$[J_k, K_l] = i \varepsilon_{klm} K_m, \quad (I.13)$$

$$[K_k, K_l] = -i \varepsilon_{klm} J_m,$$

$$[J_h, P_l] = i \varepsilon_{hkl} P_m,$$

$$[K_l, P_l] = i g_{hl} H, \quad (I.14)$$

$$[J_k, H] = 0,$$

$$[K_l, H] = -i P_l.$$

Как хорошо известно, унитарные операторы в гильбертовом пространстве, соответствующие преобразованию (I.11), имеют полностью ковариантный вид

$$U(a) = \exp(iPa), \quad (I.15)$$

$$U(L) = \exp\left(\frac{1}{2} i \alpha_{\mu\nu} M^{\mu\nu}\right), \quad \alpha_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}, \quad (I.16)$$

а операторы  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{K}$  связаны с  $M^{\mu\nu}$  соотношениями

$$J_l = -\frac{1}{2} \varepsilon_{lmn} M^{mn} \quad (M_{ij} = -\varepsilon_{ijk} J^k), \quad (I.17)$$

$$K_l = M_{l0}.$$

Набор коммутаторов (I.12)—(I.14) выражается через  $M^{\mu\nu}$  и  $P^\mu$  в компактном виде

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (\text{I.12}')$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(M^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + M^{\nu\sigma}g^{\mu\rho} - M^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} - M^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}), \quad (\text{I.13}')$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\sigma] = -i(P^\mu g^{\nu\sigma} - P^\nu g^{\mu\sigma}). \quad (\text{I.14}')$$

Снова отметим, что всякое однородное преобразование Лоренца связано с вполне определенной точкой пространства-времени, которая остается неподвижной при преобразовании и которую обычно берут за начало координат. Зависимость преобразования от этой точки явно видна из некоммутативности  $M^{\mu\nu}$  и  $P^\sigma$ , а уравнение (I.14') опять можно рассматривать и как источник информации о трансформационных свойствах оператора  $M^{\mu\nu}$  при трансляциях, и как утверждение о том, что оператор  $P^\sigma$  является 4-вектором.

В связи с этим заметим, что оператор  $\mathbf{K}$  не коммутирует с  $H$ . Но он является все же интегралом движения в самом общем смысле (содержит явную зависимость от времени). В самом деле, справедливы следующие представления:

$$M_{\mu\nu} = - \int d^3x (x_\mu T_{\nu 0} - x_\nu T_{\mu 0}), \quad (\text{I.18})$$

$$P_\mu = \int d^3x T_{\mu 0}, \quad (\text{I.19})$$

где  $T_{\mu\nu}$  — тензор энергии — импульса Белинфанте, определяемый при лагранжевом методе обычным образом (гл. 10, § 4, п. 2). В частности,

$$K_l \equiv M_{l0} = x_0 P_l - \int x_l T_{00} d^3x. \quad (\text{I.20})$$

Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = i[H, \mathbf{K}] + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} = -\mathbf{P} + \mathbf{P} = 0. \quad (\text{I.21})$$

Чтобы выяснить, каковы общие трансформационные свойства операторов, зависящих от  $x$ , можно действовать по схеме предыдущего примера.

Если  $\varphi(x)$  — лоренц-скалярный оператор, то

$$[K_l, \varphi(0)] = 0. \quad (\text{I.22})$$

В то же время

$$i[P_\mu, \varphi(x)] = \partial_\mu \varphi(x), \quad \varphi(x) = \exp(iPx) \varphi(0) \exp(-iPx), \quad (\text{I.23})$$

и, используя соотношение

$$[K_l, \exp(iPx)] = (x_0 P_l - x_l H) \exp(iPx), \quad (\text{I.24})$$

находим, что

$$[K_l, \varphi(x)] = i(x_l \partial_0 - x_0 \partial_l) \varphi(x).$$

Если приходится иметь дело с 4-вектором, например с током, то выполняются следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [K_l, j_0(x)] &= -ij_l(x) + i(x_l \partial_0 - x_0 \partial_l) j_0(x), \\ [K_l, j_h(x)] &= ig_{hl} j_0(x) + i(x_l \partial_0 - x_0 \partial_l) j_h(x). \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

Соотношения (I.25), (I.10) и (I.8) можно записать в ковариантном виде <sup>1)</sup>:

$$[M_{\rho\sigma}, j_\mu(x)] = i(g_{\rho\mu} j_\sigma - g_{\sigma\mu} j_\rho) + i(x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho) j_\mu(x). \quad (\text{I.26})$$

<sup>1)</sup> Это соотношение представляет собой инфинитезимальную форму общего закона преобразования  $j^\mu(x') = L^\mu_\nu U(L) j^\nu(x) U^{-1}(L)$ .

Далее необходимо охарактеризовать физические состояния частицы. Эта задача сводится к определению базиса в векторном пространстве, в котором действуют операторы; базис можно определить, как только задан полный набор коммутирующих операторов.

При простейшем выборе этого набора в него, очевидно, будут входить коммутирующие между собой операторы 4-импульса  $P^\mu$ . Кроме того, как нетрудно убедиться, оператор

$$P^2 = P_\mu P^\mu \quad (I.27)$$

коммутирует со всеми генераторами группы Пуанкаре, и поэтому его собственные значения можно использовать для классификации неприводимых представлений группы. Таким образом, операторам  $P_\mu$  можно приписать собственные значения  $p_\mu$  и, исходя из этого, тут же классифицировать состояния в соответствии с тем, является ли  $p_\mu$  времени-подобным, пространственно-подобным, свето-подобным или нулевым вектором. Первый случай относится к физическим системам с вещественной массой. В этом случае отношение  $|p_0|/|p_0|$ , характеризующее знак энергии, определено инвариантным образом, и мы будем выбирать его положительным. Таким образом, сначала классифицируем состояния по инвариантному индексу  $m$  и по  $\mathbf{p}$ , причем  $E = (p^2 + m^2)^{1/2}$ .

Поскольку оператор  $M^{\mu\nu}$  (и, в частности,  $\mathbf{K}$ ) не коммутирует с  $H$  и  $\mathbf{P}$ , действуя на состояния, этот оператор смешивает состояния с разной энергией и импульсом (другими словами,  $\langle p' | \mathbf{K} | p \rangle \neq 0$  при  $p' \neq p$ , хотя, конечно,  $p'^2 = p^2 = m^2$ ). В случае физической частицы множество состояний с произвольным импульсом образует, как уже отмечалось, базис для представления группы Пуанкаре. Одночастичное состояние движущейся частицы можно в действительности построить путем лоренцева поворота состояния покоящейся частицы:

$$| \mathbf{p}, m \rangle = U(L) | \mathbf{0}, m \rangle, \quad (I.28)$$

где  $L$  — преобразование Лоренца, переводящее

$$p^\mu \equiv (m, \mathbf{0}) \text{ в } p^\mu \equiv (E, \mathbf{p}), \text{ т. е. } p_\mu = L_\mu^\nu p_\nu^0.$$

В правильности соотношения (I.28) нетрудно убедиться, поскольку

$$\begin{aligned} P^\mu | \mathbf{p}, m \rangle &= P^\mu U(L) | \mathbf{0}, m \rangle = U(L) L^\mu_\nu P^\nu | \mathbf{0}, m \rangle = \\ &= U(L) L^\mu_\nu p^\nu | \mathbf{0}, m \rangle = p^\mu | \mathbf{p}, m \rangle; \end{aligned} \quad (I.29)$$

мы воспользовались здесь тем, что  $P^\mu$  является 4-векторным оператором, т. е.

$$U^{-1}(L) P^\mu U(L) = L^\mu_\nu P^\nu. \quad (I.30)$$

Далее напомним явный вид лоренцева поворота, например, вдоль третьей оси:

$$\begin{aligned} U(L) &= \exp\left(\frac{1}{2} i\alpha_{\mu\nu} M^{\mu\nu}\right) = \exp(-i\theta \mathbf{K}), \quad \theta = (0, 0, \theta), \\ \text{ch } \theta &= \frac{E}{m}, \quad \text{sh } \theta = \frac{|\mathbf{p}|}{m}. \end{aligned} \quad (I.31)$$

Мы знаем, что одночастичные состояния характеризуются также спином, т. е. угловым моментом частицы в ее системе покоя. Чтобы инвариантно описать спин, нам требуются операторы, которые оставляли бы неизменным импульс частицы и действовали бы только на спиновые переменные. Для частицы в состоянии покоя такими операторами, несомненно, являются

$J_k$ . Действительно,

$$[\mathbf{J}, H] = 0, \quad [\mathbf{J}, \mathbf{P}] | \mathbf{0}, m \rangle = 0, \quad (I.32)$$

поскольку мы работаем в подпространстве собственных состояний  $P^\mu$ .

Для движущейся частицы тот же результат достигается введением оператора

$$\mathbf{J}' = U(L) \mathbf{J} U^{-1}(L). \quad (I.33)$$

В частном случае лоренцева поворота вдоль третьей оси имеем

$$J'_k = \exp(-i\theta \mathbf{K}) J_k \exp(i\theta \mathbf{K}) \quad (I.34)$$

и

$$J'_3 = J_3 \operatorname{ch} \theta, \quad J'_{\pm 1} = J_{\pm 1} \operatorname{ch} \theta \pm K_2 \operatorname{sh} \theta. \quad (I.35)$$

То, что  $\mathbf{J}'$  является оператором спина в системе покоя, следует из определения (I.33), так как  $U(L_p)$  — унитарный оператор, который переводит состояние покоя с импульсом  $p^\mu \equiv (m, 0)$  в состояние с  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ . Тем не менее докажем это утверждение подробно. Во-первых, рассмотрим состояние покоя  $|m, \mathbf{0}, s, \sigma\rangle$ , причем  $s(s+1)$  — собственное значение квадрата углового момента в системе центра масс, а  $\sigma$  — собственное значение его третьей компоненты. Затем определим состояние с импульсом  $p^\mu$  как

$$|m, \mathbf{p}, s, \sigma\rangle = U(L_p) |m, \mathbf{0}, s, \sigma\rangle. \quad (I.36)$$

Тогда

$$\begin{aligned} J'_k |m, \mathbf{p}, s, \sigma\rangle &= J'_k U(L_p) |m, \mathbf{0}, s, \sigma\rangle = U(L_p) J_k |m, \mathbf{0}, s, \sigma\rangle = \\ &= \sum_{\sigma'} C_{\sigma\sigma'}^k U(L_p) |m, \mathbf{0}, s, \sigma'\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma\sigma'}^k |m, \mathbf{p}, s, \sigma'\rangle. \end{aligned} \quad (I.37)$$

Таким образом, единственным результатом действия оператора  $\mathbf{J}'$  был поворот спиновых переменных от  $\sigma$  и  $\sigma'$ , тогда как собственные значения  $P^\mu$  остались неизменными.

Говорят, что преобразования Лоренца  $\tilde{L}^\mu{}_\nu$ , которые не меняют  $p^\mu$ , т. е. такие, что  $p^\mu = \tilde{L}^\mu{}_\nu p^\nu$ , принадлежат «малой группе», связанной с  $p_\mu$ , и тем же выражением пользуются для соответствующих унитарных преобразований  $U(\tilde{L})$ . Генераторами таких преобразований являются  $J'_k$ . Более изящный и более общий способ построения этих операторов основан на введении так называемого вектора Паули — Любанского  $W_\mu$ . Он определяется следующим образом: поскольку

$$p_\mu = \tilde{L}_\mu{}^\nu p_\nu, \quad (I.38)$$

для бесконечно малого преобразования имеем

$$\tilde{\alpha}_{\mu\nu} p_\nu = 0, \quad (I.39)$$

т. е. общий вид  $\tilde{\alpha}_{\mu\nu}$  таков:

$$\tilde{\alpha}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\lambda n^\sigma, \quad (I.40)$$

где  $n_\mu$  — произвольный бесконечно малый 4-вектор. Поэтому можем написать унитарный оператор малой группы:

$$U(\tilde{L}) = \exp\left(\frac{1}{2} i \tilde{\alpha}_{\mu\nu} M^{\mu\nu}\right) = \exp\left(\frac{1}{2} i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\lambda n^\sigma M^{\mu\nu}\right) = \exp(-i n_\sigma W^\sigma), \quad (I.41)$$

где

$$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\nu\lambda} P^\sigma \quad (I.42)$$

и собственное значение  $p_\sigma$  отождествлено с оператором  $P_\sigma$ , так как мы работаем в пространстве собственных состояний импульса.

Для компонент получаем явное выражение

$$\begin{aligned} W_0 &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}, \\ \mathbf{W} &= \mathbf{J} \mathbf{H} + \mathbf{K} \times \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Оператор  $\mathbf{W}$  просто связан с прежним вектором  $\mathbf{J}'$ , а именно  $\mathbf{W} = m\mathbf{J}'$ , но его более удобная нормировка сделает возможным прямое обобщение теории на случай частиц с нулевой массой.

Из определения (1.42) довольно легко извлечь следующие свойства. Прежде всего

$$p^\mu W_\mu = 0, \quad (1.44)$$

так что слова в системе покоя  $\mathbf{p} = 0$  собственное значение  $W_0$  равно нулю. Мы получаем также коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [W_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [M_{\mu\nu}, W_\lambda] &= -i(W_\mu g_{\nu\lambda} - W_\nu g_{\mu\lambda}), \end{aligned} \quad (1.45)$$

из которых следует, что оператор

$$W^2 = W_\mu W^\mu \quad (1.46)$$

коммутирует со всеми генераторами группы Пуанкаре. Итак, в нашем распоряжении еще один параметр для описания неприводимых представлений.

Поскольку  $W^2$  — инвариантный оператор, его собственные значения можно вычислять, переходя в систему покоя, где в соответствии с соотношениями (1.43) и (1.44) имеем

$$\begin{aligned} W_{ц.м} &= m\mathbf{J}, \\ W_{ц.м}^0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Таким образом,  $W_{ц.м}$  фактически является оператором спина и имеет собственные значения

$$W_{ц.м}^2 \equiv -W^2 = m^2 s(s+1), \quad s = 0, \frac{1}{2}, \dots \quad (1.48)$$

В результате получаем, что неприводимое представление группы Пуанкаре с  $p^2 > 0$ ,  $p^0 > 0$  характеризуется двумя индексами  $(m, s)$ , причем  $m$  характеризует массу, а  $s$  — спин системы. Каждое представление является бесконечномерным, и базисные состояния полностью определяются (если забыть о внутренних степенях свободы) значениями импульса  $\mathbf{p}$  и одной из компонент  $W_\mu$ , например компонентой  $W_0$ , которая пропорциональна спиральности  $\lambda$  (компоненте  $\mathbf{J}$  вдоль направления движения), или компонентой вдоль фиксированной оси.

Таким образом, полный набор коммутирующих операторов составляют  $H$ ,  $\mathbf{P}$  и компонента  $W^\mu$ . Поэтому состояние с массой  $m$ , спином  $s$ , импульсом  $\mathbf{p}$ , спиральностью  $\lambda$  записывается в виде  $|m, s; \mathbf{p}, \lambda\rangle$  и нормируется по инвариантному правилу

$$\langle \lambda', \mathbf{p}'; m, s | m, s; \mathbf{p}, \lambda \rangle = (2E)(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Обратимся, наконец, к коммутационным соотношениям для  $W_\mu$ . Они имеют вид

$$[W_\mu, W_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} W^\lambda P^\sigma. \quad (1.49)$$

В частности, если выбрать в качестве третьей оси направление вектора  $\mathbf{p}$ , мы получаем

$$\begin{aligned} [W_1, W_2] &= i \frac{m^2}{E} W_3, \\ [W_1, W_3] &= -iE W_2, \quad [W_2, W_3] = iE W_1 \end{aligned} \quad (1.50)$$

[конечно, в системе покоя коммутаторы (I.50) с точностью до общего множителя  $m$  совпадают с коммутаторами углового момента].

Соотношения (I.50) вполне подходят и для описания особого случая частиц с нулевой массой. В пределе при  $m \rightarrow 0$  имеем

$$[W_1, W_2] = 0, \quad (I.51)$$

а другие коммутаторы не меняются. Этот последний набор коммутаторов образует алгебру эвклидовой группы в двумерном пространстве, причем  $W_{1,2}$  играют роль генераторов сдвига вдоль осей (1, 2), а  $W_3$  — роль генератора вращения вокруг начала координат.

В заключение, исходя из коммутационных соотношений (I.50), покажем, что безмассовая частица имеет только одну поляризацию. При этом удобно ввести операторы

$$W_{\pm} = W_1 \pm iW_2, \quad (I.52)$$

для которых в случае безмассовых частиц имеем

$$\begin{aligned} [W_3, W_{\pm}] &= \pm EW_{\pm}, \\ [W_+, W_-] &= 0. \end{aligned} \quad (I.53)$$

Операторы  $W_{\pm}$  — это, конечно, операторы, понижающие и повышающие собственное значение  $W_3$  на единицу (умноженную на  $E$ ).

Затем мы должны предположить, что спектр собственных значений спина ограничен. Обозначим через  $|\Sigma\rangle$  собственное состояние с наибольшим значением  $W_3$ , для которого выполняется равенство

$$W_+ |\Sigma\rangle = 0. \quad (I.54)$$

Тогда из равенства

$$\langle \Sigma | [W_+, W_-] | \Sigma \rangle = 0 \quad (I.55)$$

следует условие

$$W_- |\Sigma\rangle = 0. \quad (I.56)$$

Таким образом, не существуют собственные состояния, соответствующие меньшим, чем у  $|\Sigma\rangle$ , значениям  $W_3$ , и разрешено только *одно* собственное значение  $W_3$ , т. е. представление является одномерным. Отметим также, что из условия  $p^\mu W_\mu = 0$  следует равенство

$$W^3 = W^0 = \mathbf{pJ} = \lambda |\mathbf{p}|,$$

где  $\lambda$  — спиральность,  $\lambda = \mathbf{Jp}/|\mathbf{p}|$ .

Если в число допустимых преобразований включить также пространственные отражения, то происходит удвоение состояний, а  $|\Sigma\rangle$  и  $|\Sigma'\rangle$  оказываются единственными возможными собственными состояниями безмассовой частицы.



# 7. Роль лоренцевой инвариантности

## § 1. Введение

Важнейшим результатом предыдущей главы явилось выяснение того обстоятельства, что вес различных вкладов в токовые правила сумм зависит от состояния движения частицы-«мишени». Проблема такой зависимости от системы отсчета заслуживает общего анализа, который и будет проведен в настоящей главе.

Сначала мы выясним некоторые формальные свойства одновременных коммутаторов, исходя из лоренц-ковариантности последних. Затем (§ 3) мы рассмотрим вопрос о зависимости правила сумм, выведенного из коммутационного тождества и связанного с упомянутыми формальными свойствами, от системы отсчета. Мы также выведем представление Лоу для фурье-образа матричного элемента хронологического произведения двух скалярных операторов и рассмотрим зависимость такого представления от системы отсчета.

Далее (§ 4) мы инвариантным образом рассмотрим структуру различных вкладов в представление Лоу (или в правило сумм), отражающую разную физическую природу «массовой» и «энергетической» сингулярностей. Такой анализ особенно полезен, поскольку он дает нам ясное представление о спектральных свойствах амплитуд в любой конкретной ситуации. Затем данный метод мы применим к исследованию правил сумм, вытекающих из коммутационных соотношений для аксиального заряда, что позволит (§ 6) в самом общем виде исследовать проблему экстраполяции, впервые затронутую в гл. 3, а именно проблему получения пионных амплитуд сильного взаимодействия на основе низкоэнергетических теорем для амплитуд слабого взаимодействия.

Всем сказанным будут исчерпаны основные вопросы, поставленные нами в связи со скалярными операторами и бесспиновыми внешними состояниями. Операторы, соответствующие высшим представлениям группы Лоренца, чрезвычайно усложняют дело. Типичные трудности, возникающие в физически интересном случае векторного и аксиального токов, представлены в приложении I.

## § 2. Лоренц-инвариантность и одновременные коммутаторы

### 1. Ограничения на высшие коммутаторы

Прежде чем приступить к выполнению намеченной программы, весьма полезно выяснить ряд формальных свойств одновременных коммутаторов, вытекающих из требования ковариантности относительно преобразований Лоренца. Мы увидим, что из одновременного коммутационного соотношения при учете трансформационных свойств обеих его частей относительно преобразований Лоренца обычно следуют некоторые ограничения на другие одновременные коммутационные соотношения (сопутствующие условия).

Для наших целей, разумеется, достаточно инфинитезимальной формы преобразований Лоренца, и мы будем пользоваться методом коммутирования с генератором лоренцева поворота  $K_i$ , определенным в гл. 6, приложении I.

В данном разделе мы остановимся на упомянутых выше формальных свойствах коммутаторов скалярных операторов. Установление сопутствующих условий посредством данной процедуры в случае коммутаторов, содержащих операторы высшей тензорной размерности (нам, разумеется, особенно интересны коммутаторы токов), — задача более сложная, и мы рассмотрим ее в приложении I.

Сопутствующие условия связаны с очень важным вопросом зависимости от выбора системы отсчета правил сумм, получаемых насыщением матричных элементов коммутационных тождеств; кроме того, они связаны с ковариантностью  $T$ -произведений.

Эта фундаментальная связь будет проанализирована в § 3, после того как мы тщательно рассмотрим зависимость от системы отсчета правил сумм и представления Лоу. Хотя на практике чаще употребляется прямое насыщение коммутационных тождеств и использование зависимости правил сумм от выбора системы отсчета, особенно в случае коммутаторов токов, с принципиальной стороны важнее собрать те основные свойства коммутаторов, которые являются источником всех ограничений на всевозможные физические амплитуды.

Для конкретности рассмотрим данный метод в приложении к определенной модели.

В данном разделе мы будем рассматривать операторы скалярного (или псевдоскалярного) поля  $\varphi^\alpha(x)$  ( $\alpha$  — индекс внутренней симметрии) и в качестве отправного пункта возьмем перестановочное соотношение

$$[\varphi^\beta(x, t), \varphi^\alpha(0, t)] = 0. \quad (7.1)$$

Выясним, какие свойства высших коммутаторов, таких, как  $[\dot{\varphi}^\beta, \varphi^\alpha]$ , могут быть получены из соотношения (7.1) при учете лоренц-ковариантности. Для перехода в бесконечно близкую систему отсчета возьмем коммутатор обеих сторон соотношения (7.1), положив для простоты  $t = 0$ , с генератором лоренцева поворота  $K$ :

$$[K, [\varphi^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)]] = 0. \quad (7.2)$$

После применения тождества Якоби получим

$$[\varphi^\alpha(0), [K, \varphi^\beta(x, 0)]] - [\varphi^\beta(x, 0), [K, \varphi^\alpha(0)]] = 0. \quad (7.3)$$

С учетом элементарного соотношения

$$[K, \varphi(x, 0)] = i\mathbf{x}\dot{\varphi}(x, 0) \quad (7.4)$$

окончательно получаем

$$\mathbf{x}[\dot{\varphi}^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)] = 0. \quad (7.5)$$

Как следствие имеем

$$[\dot{\varphi}^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)] = iC^{\beta\alpha}\delta^3(x), \quad (7.6)$$

где  $C^{\beta\alpha}$  — оператор, симметричный относительно перестановки  $\beta \leftrightarrow \alpha$  [в этом можно убедиться, продифференцировав обе части равенства (7.1) по  $t$ ].

Вывод, который мы извлекаем из этого простого примера, заключается в том, что сведения относительно исходного коммутатора  $[\varphi^\beta, \varphi^\alpha]$  в сочетании с лоренц-ковариантностью позволяют получить некоторую информацию о высших коммутаторах, содержащих временные производные. В частности,

мы находим ограничение на число производных от  $\delta^3(x)^1$ , которые могут появиться в таких коммутаторах.

То же самое условие ковариантности можно наложить и на соотношение (7.5):

$$x^k |K^l, [\dot{\varphi}^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)] = 0, \quad (7.7)$$

откуда следует

$$x^k x^l [\ddot{\varphi}^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)] = 0, \quad k, l = 1, 2, 3. \quad (7.8)$$

В общем случае имеем

$$x^{l_1} x^{l_2} \dots x^{l_n} [\varphi^{\beta(n)}(x, 0), \varphi^\alpha(0)] = 0. \quad (7.9)$$

Отсюда видно, что в силу лоренц-ковариантности в коммутаторе  $\varphi$  с  $n$ -й производной от  $\varphi$  по времени содержится самое большее  $(n - 1)$ -кратная производная от  $\delta^3(x)$ -функции:

$$[\varphi^{\beta(n)}(x, 0), \varphi^\alpha(0)] = iC^{\beta\alpha}\delta^3(x) + \\ + C_k^{\beta\alpha}\partial^k\delta^3(x) + \dots + C_{l_1 \dots l_{n-1}}^{\beta\alpha}\partial^{l_1} \dots \partial^{l_{n-1}}\delta^3(x). \quad (7.10)$$

Более определенные предположения относительно исходных коммутаторов ведут, конечно, к более строгим ограничениям. В частности, интересно рассмотреть случай, когда в соотношении

$$[\dot{\varphi}^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)] = iC^{\beta\alpha}\delta^3(x) \quad (7.11)$$

величина  $C^{\beta\alpha}$  — скалярный оператор (данное свойство не следует из общих посылок и должно прямо предполагаться). Тогда, применив к соотношению (7.11) преобразование Лоренца, имеем

$$[K, [\dot{\varphi}^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)]] = \delta^3(x) [K, C^{\beta\alpha}] = 0, \quad (7.12)$$

откуда

$$x [\ddot{\varphi}^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)] = 0. \quad (7.13)$$

Следовательно, коммутатор  $[\ddot{\varphi}^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)]$  содержит не более чем  $\delta^3(x)$ -функцию, а именно

$$[\ddot{\varphi}^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)] = D^{\beta\alpha}\delta^3(x),$$

и т. д.

## 2. Ковариантность хронологического произведения

Полезно было бы исследовать влияние швингеровских членов в коммутаторах на ковариантность  $T$ -произведения двух скалярных операторов [196]. Мы уже касались этого вопроса, когда говорили о тождестве Уорда в гл. 3, § 1. Там было сказано (без доказательства), что нековариантность  $T$ -произведения двух токов связана с наличием швингеровских членов в их одновременных коммутаторах и что учет этого ведет к взаимному уничтожению лишних слагаемых в условии сохранения, которое, таким образом, выполняется в неизменном виде. Случай  $T$ -произведения двух токов мы рассмотрим в приложении I (§ 5), а сейчас займемся  $T$ -произведением двух скалярных операторов

$$T(x) \equiv T(\varphi(x)\varphi(0)) = \theta(x_0)\varphi(x)\varphi(0) + \theta(-x_0)\varphi(0)\varphi(x) = \\ = \theta(x_0)[\varphi(x), \varphi(0)] + \varphi(0)\varphi(x). \quad (7.14)$$

<sup>1)</sup> Относительно градиентных членов (обычно называемых швингеровскими членами) в одновременных коммутаторах см. работу [90] и цитируемую в ней литературу.

(Точно так же можно взять и запаздывающее произведение  $R(x) = = \dot{\theta}(x_0) [\varphi(x), \varphi(0)]$ , поскольку разность этих двух произведений является ковариантным объектом.) Коммутатор  $T(x)$  с генератором  $K^l$  преобразования Лоренца имеет вид

$$\begin{aligned} [K^l, T(x)] &= \theta(x_0) [K^l, \varphi(x)\varphi(0)] + \theta(-x_0) [K^l, \varphi(0)\varphi(x)] = \\ &= T [i(x^l\partial^0 - x^0\partial^l)\varphi(x)\varphi(0)] = i(x^l\partial^0 - x^0\partial^l) T(\varphi(x)\varphi(0)) - \\ &- ix^l\delta(x_0) [\varphi(x), \varphi(0)]. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Данное выражение показывает, что  $T(x)$  не есть скалярный оператор. Это связано с наличием дополнительного слагаемого  $x^l\delta(x_0) [\varphi(x), \varphi(0)]$ , которое не обращается в нуль, если  $\delta(x_0) [\varphi(x), \varphi(0)]$  не является локальным [а именно пропорциональным  $\delta^4(x)$ ] объектом.

Отсюда вытекает одно далеко идущее следствие: если рассмотреть фурье-образ матричного элемента  $T(x)$  между бесспиновыми состояниями, то, вообще говоря, он не будет лоренц-инвариантной функцией скалярных переменных, которые можно построить из имеющихся импульсов.

В самом деле, рассмотрим

$$T(p_2, p_1, Q) = i \int d^4x \exp(iQx) \left\langle p_2 \left| T\left(\varphi\left(\frac{1}{2}x\right)\varphi\left(-\frac{1}{2}x\right)\right) \right| p_1 \right\rangle. \quad (7.16)$$

Производя инфинитезимальное преобразование Лоренца<sup>1)</sup> над оператором  $T$ , получаем ( $E_i = p_i^0$ )

$$\begin{aligned} \delta T &= \delta\epsilon_k \left\{ Q_0 \frac{\partial}{\partial Q_k} - Q^k \frac{\partial}{\partial Q_0} + E_2 \frac{\partial}{\partial p_{2k}} - p_2^k \frac{\partial}{\partial E_2} + \right. \\ &\left. + E_1 \frac{\partial}{\partial p_{1k}} - p_1^k \frac{\partial}{\partial E_1} \right\} T(p_2, p_1, Q). \end{aligned} \quad (7.17)$$

С учетом определения (7.16) имеем

$$\begin{aligned} \left( Q_0 \frac{\partial}{\partial Q_k} - Q^k \frac{\partial}{\partial Q_0} \right) T &= -i \int d^4x \exp(iQx) \left( x^k \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \times \\ &\times \langle p_2 | T(x) | p_1 \rangle = -i \int d^4x \exp(iQx) \langle p_2 | [K^k, T(x)] | p_1 \rangle - \\ &- i \int d^4x \exp(iQx) \delta(x_0) x^k \langle p_2 | \left[ \varphi\left(\frac{1}{2}x\right), \varphi\left(-\frac{1}{2}x\right) \right] | p_1 \rangle. \end{aligned} \quad (7.18)$$

В то же время мы имеем соотношение

$$\begin{aligned} \left( E_2 \frac{\partial}{\partial p_{2k}} - p_2^k \frac{\partial}{\partial E_2} + E_1 \frac{\partial}{\partial p_{1k}} - p_1^k \frac{\partial}{\partial E_1} \right) T &= \\ = \int d^4x \exp(iQx) \langle p_2 | [K^k, T(x)] | p_1 \rangle. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Тогда из соотношения (7.17) явствует, что, вообще говоря,  $\delta T \neq 0$ , и, следовательно,  $T(p_2, p_1, Q)$  не является лоренцевым скаляром.

### § 3. Полнота системы промежуточных состояний и зависимость правил сумм от системы отсчета

#### 1. Представление матричных элементов одновременного коммутатора

С одной стороны, мы видели, что, зная коммутатор  $[\varphi^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)]$ , можно получить некоторую информацию о высших коммутаторах, таких, как  $[\varphi^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)]$  и т. д., если использовать трансформационные свойства коммутатора  $[\varphi^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)]$  относительно преобразований Лоренца.

<sup>1)</sup> Оператор  $\delta\epsilon_k$  — это такой инфинитезимальный параметр, что  $\delta Q^0 = Q\delta\epsilon$ ,  $\delta Q = = Q^0\delta\epsilon$  и т. д.

С другой стороны, нам известно, что перестановочное соотношение при одинаковых временах можно преобразовать в правило сумм для физических амплитуд, если взять соответствующие матричные элементы коммутатора и воспользоваться полнотой системы промежуточных состояний. Такие правила сумм зависят от системы отсчета, поскольку от этого зависит вес различных вкладов.

Два указанных обстоятельства тесно связаны в том смысле, что зависимость правила сумм от системы отсчета есть выражение трансформационных свойств взятого коммутатора. Эту зависимость можно выявить, используя информацию о высших коммутаторах, вытекающую из перестановочных соотношений с генератором лоренцева поворота  $K^l$ , как это делалось в § 2.

Попробуем выяснить эту связь, используя правило сумм и метод насыщения. Начнем, как и прежде, с коммутационного соотношения для пионного поля

$$[\varphi^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)] = 0, \quad (7.20)$$

которое служило нам отправным пунктом в § 2.

Чтобы получить общую форму правила сумм, введем преобразование Фурье матричного элемента коммутатора (7.20), взятого между скалярными одночастичными состояниями с импульсами  $p_1, p_2$ :

$$C^{\beta\alpha} = \int d^3x \exp(-i\mathbf{q}_2\mathbf{x}) \langle p_2 | [\varphi^\beta(x, 0), \varphi^\alpha(0)] | p_1 \rangle. \quad (7.21)$$

Разложение по полной системе промежуточных физических состояний дает для  $C^{\beta\alpha}$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} C^{\beta\alpha} = & \sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_n) \langle p_2 | \varphi^\beta | n \rangle \langle n | \varphi^\alpha | p_1 \rangle - \\ & - \sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_n) \langle p_2 | \varphi^\alpha | n \rangle \langle n | \varphi^\beta | p_1 \rangle, \end{aligned} \quad (7.22)$$

где

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}_2. \quad (7.23)$$

Переходя для удобства к симметричным векторам

$$P = \frac{1}{2}(p_2 + p_1), \quad Q = \frac{1}{2}(q_2 + q_1), \quad (7.24)$$

$$\Delta = q_1 - q_2 = p_2 - p_1,$$

и вводя промежуточную переменную  $Q_0$ , соотношение (7.22) можно привести к виду

$$\tilde{C}^{\beta\alpha} = \int dQ_0 t^{\beta\alpha}(Q_0, Q, P, \Delta), \quad (7.25)$$

где

$$\begin{aligned} t_{\beta\alpha}^{\beta\alpha} = & (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(P + Q - p_n) \langle p_2 | \varphi^\beta | n \rangle \langle n | \varphi^\alpha | p_1 \rangle - \left( \begin{array}{c} Q \rightarrow -Q \\ \beta \leftrightarrow \alpha \end{array} \right) = \\ = & \frac{1}{2\pi} \int d^4x \exp(iQx) \left\langle p_2 \left| \left[ \varphi^\beta \left( \frac{1}{2}x \right), \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2}x \right) \right] \right| p_1 \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Если использовать оператор полного 4-импульса  $\Pi^\mu$ , то выражение (7.26) можно представить также в виде

$$t^{\beta\alpha} = (2\pi)^3 \langle p_2 | \varphi^\beta \delta^4(P + Q - \Pi) \varphi^\alpha | p_1 \rangle - \left( \begin{array}{c} Q \rightarrow -Q \\ \beta \leftrightarrow \alpha \end{array} \right). \quad (7.27)$$

## 2. Зависимость правил сумм от системы отсчета и контур интегрирования

Мы остановимся здесь на двух основных вопросах, связанных с лоренцевой структурой выражения (7.25) для  $C^{\beta\alpha}$ . Поскольку  $t^{\beta\alpha}$  есть лоренц-инвариантная функция, ее зависимость от переменных  $Q, P, \Delta$ , разумеется, должна быть инвариантной. Поэтому удобно ввести скалярные переменные, образованные из этих векторов. Введем величины

$$\begin{aligned} s &= (P + Q)^2, \quad \bar{s} = (P - Q)^2, \quad t = \Delta^2, \quad p_i^2 = m_i^2, \quad q_i^2 = u_i, \\ P^2 \equiv \sigma &= \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2) - \frac{1}{4}t, \quad Q^2 \equiv u = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - \frac{1}{4}t, \\ v &= (QP) = \frac{1}{4}(s - \bar{s}), \quad w = (Q\Delta) = \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2), \end{aligned} \quad (7.28)$$

и, как обычно,  $v, u, w$  и  $t$  выберем в качестве независимых переменных. Поскольку при интегрировании (7.25)  $t$  остается фиксированным, в дальнейшем мы не будем его выписывать.

Для  $t^{\beta\alpha}$  можно написать разложение

$$t^{\beta\alpha}(Q, P, \Delta) = \tau^{\beta\alpha}(Q, P, \Delta) - \tau^{\alpha\beta}(-Q, P, \Delta), \quad (7.29)$$

или в ковариантных переменных

$$t^{\beta\alpha}(v, u, w) = \tau^{\beta\alpha}(v, u, w) - \tau^{\alpha\beta}(-v, u, -w), \quad (7.29')$$

где

$$\begin{aligned} \tau^{\beta\alpha} &= \frac{1}{2\pi} \int d^4x \exp(iQx) \left\langle p_2 \left| \varphi^\beta \left( \frac{1}{2}x \right) \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2}x \right) \right| p_1 \right\rangle = \\ &= (2\pi)^3 \langle p_2 | \varphi^{\beta\delta^4}(P + Q - \Pi) \varphi^\alpha | p_1 \rangle. \end{aligned} \quad (7.30)$$

В действительности, как мы увидим ниже,  $t^{\beta\alpha}$  содержит дополнительную зависимость от  $Q_0$  через ступенчатые функции  $\theta(P_0 \pm Q_0)$ ,  $\theta(-P_0 \pm Q_0)$ . Отметим, что, поскольку при интегрировании значения  $s$  или  $\bar{s}$  фиксируются массами промежуточных состояний  $(P + Q)^2 = M_n^2 > 0$ , ступенчатые функции определены лоренц-инвариантным образом.

Следующий, самый важный шаг заключается в переходе к интегрированию по инвариантным переменным (7.28). Дело в том, что в соотношении (7.25) 3-импульс  $Q$  фиксирован, а по  $Q_0$  проводится интегрирование, и, таким образом,  $v, u$  и  $w$  меняются. Именно, они меняются соответственно кривой, которая задается уравнениями

$$\begin{aligned} v &= Q_0 P_0 - QP, \\ u &= Q_0^2 - Q^2, \\ w &= Q_0 \Delta_0 - Q\Delta, \end{aligned} \quad (7.31)$$

в которых переменные  $Q^2, Q, P, Q\Delta, P_0$  и  $\Delta_0$  фиксированы. Уравнения (7.31) можно рассматривать как параметрическое задание (параметр  $Q_0$ ) пути интегрирования в трехмерном пространстве  $(v, u, w)$ .

Если исключить  $Q_0$ , то можно написать уравнение кривой в явном виде:

$$u = av^2 + bv + c, \quad (7.32)$$

$$w = hv + k,$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{P_0^2}, \quad b = \frac{2PQ}{P_0^2}, \quad c = \frac{(PQ)^2}{P_0^2} - Q^2, \\ h &= \frac{\Delta_0}{P_0}, \quad k = \frac{\Delta_0}{P_0} PQ - \Delta Q, \quad P_0 = (P^2 + \sigma)^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Эти выражения показывают, что дисперсионный контур самого общего вида, получаемый при насыщении одновременного коммутатора, есть парабола в плоскости  $w = hv + k$ . Существенно, что параметры  $a, b, c, h, k$  этой параболы зависят от того, в какой системе отсчета выполняется суммирование по полному набору промежуточных состояний. Каждой системе отсчета соответствует свой дисперсионный контур в переменных  $v, u, w$ .

Выражение (7.25) для  $C^{\beta\alpha}$  мы можем записать, наконец, через скалярные переменные  $v, u, w$ , вводя в явном виде зависимость от контура интегрирования:

$$\begin{aligned} C^{\beta\alpha} &= \frac{1}{P_0} \int dt v t^{\beta\alpha}(v, u(v), w(v)) = \\ &= \frac{1}{P_0} \int dv du dw t^{\beta\alpha}(v, u, w) \delta(u - av^2 - bv - c) \delta(w - hv - k). \end{aligned} \quad (7.34)$$

Поскольку параметры  $a, b, c, h, k$  зависят от состояния движения внешних частиц, каждый коммутатор порождает бесконечную совокупность правил сумм соответственно бесконечному множеству значений  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$ . Разумеется, это связано с тем, что каждому одновременному коммутатору в силу лоренц-ковариантности сопутствует бесконечный набор ограничений на высшие коммутаторы [условия (7.10)].

### 3. Зависимость правил сумм от системы отсчета и высшие коммутаторы

Теперь у нас все готово для вывода сопутствующих правил сумм. Каноническое коммутационное соотношение (7.20), взятое между состояниями с одинаковыми 4-импульсами ( $p_1 = p_2 = p$ ), ведет к правилу сумм

$$\begin{aligned} p_0 C^{\beta\alpha} &\equiv \int dt v t^{\beta\alpha}(v, u(v)) \equiv \int dv du dt^{\beta\alpha}(v, u) \delta(u - av^2 - bv - c) = 0, \\ a &= \frac{1}{p_0^2}, \quad b = \frac{2pq}{p_0^2}, \quad c = \frac{(pq)^2}{p_0^2} - q^2. \end{aligned} \quad (7.35)$$

В частности, в системе покоя  $\mathbf{p} = 0$  имеем

$$\int dv du dt^{\beta\alpha}(v, u) \delta\left(u - \frac{v^2}{m^2} + q^2\right) = 0. \quad (7.36)$$

Правило сумм в «близкой» системе отсчета содержит некоторую новую информацию, которую нетрудно получить дифференцированием соотношения (7.35) по  $p_j$  в точке  $\mathbf{p} = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial p^j} \int dt v t^{\beta\alpha}(v, u(v)) = \int dv \left( \frac{\partial t^{\beta\alpha}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial p^j} \right)_{p=0} = \\ &= \frac{2}{m^2} q^j \int dv v \left( \frac{\partial t^{\beta\alpha}}{\partial u} \right)_{p=0} = \frac{2}{m^2} q^j \int dv du v \left( \frac{\partial t^{\beta\alpha}}{\partial u} \right)_{p=0} \delta\left(u - \frac{v^2}{m^2} + q^2\right), \end{aligned} \quad (7.37)$$

так как

$$\left( \frac{\partial u}{\partial p^j} \right)_{p=0} = \frac{2}{m^2} q^j v.$$

Далее, нетрудно убедиться, что соотношение (7.37) эквивалентно насыщению в системе покоя сопутствующего условия (7.5) из § 2, п. 1:

$$x^j \langle p | [\dot{\Phi}^\beta(\mathbf{x}, 0), \Phi^\alpha(0)] | p \rangle = 0. \quad (7.38)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3x \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) x^j \langle p | [\dot{\Phi}^\beta(\mathbf{x}, 0), \Phi^\alpha(0)] | p \rangle = \\ &= i \frac{\partial}{\partial q^j} \int d^3x \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) \langle p | [\dot{\Phi}^\beta(\mathbf{x}, 0), \Phi^\alpha(0)] | p \rangle, \end{aligned} \quad (7.39)$$

а это есть условие того, что коммутатор  $[\varphi^\beta(\mathbf{x}, 0), \varphi^\alpha(0)]$  не содержит производных от  $\delta^3(\mathbf{x})$ . Разлагая по полной системе промежуточных состояний и переходя к скалярным переменным, преобразуем уравнение (7.39) к виду

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial q^j} \int dq_0 q_0 t^{\beta\alpha}(q, p)|_{p=0} = \frac{\partial}{\partial q^j} \int \frac{dv}{m^2} vt^{\beta\alpha}(v, u(v)) = \\ &= \frac{\partial}{\partial q^j} \int \frac{dv du}{m^2} vt^{\beta\alpha}(v, u) \delta\left(u - \frac{v^2}{m^2} + \mathbf{q}^2\right); \end{aligned} \quad (7.40)$$

выполняя дифференцирование, окончательно получаем выражение

$$q^j \int dv du v \left( \frac{\partial t^{\beta\alpha}}{\partial u} \right)_{p=0} \delta\left(u - \frac{v^2}{m^2} + \mathbf{q}^2\right) = 0, \quad (7.41)$$

совпадающее с соотношением (7.37). Аналогичные соотношения, разумеется, могут быть получены и для высших коммутаторов.

Все изложенное выше проясняет ту фундаментальную роль, которую играет лоренц-инвариантность в изучении одновременных коммутаторов. Что касается правил сумм, то их зависимость от системы отсчета и следствия этой зависимости являются выражением тех ограничений на высшие коммутаторы, которые обусловлены трансформационными свойствами исходных перестановочных соотношений относительно бесконечно малых преобразований Лоренца.

То обстоятельство, что из матричных элементов одного-единственного коммутатора следует бесконечный набор правил сумм, свидетельствует о том, что правила сумм алгебры токов по своей внутренней природе отличаются, например, от перелятивистских правил сумм, с которыми приходится иметь дело в ядерной физике.

Важное значение правильного выбора  $\mathbf{p}$  уже было показано при выводе низкоэнергетических теорем для пиона, когда разложение по полной системе промежуточных состояний производилось в системе покоя. В следующей главе мы покажем, что все правила сумм гл. 4, вытекающие из тождества Уорда и дисперсионных соотношений, могут быть последовательно выведены в системе  $\mathbf{p} = \infty$ .

#### 4. Представление Лоу для запаздывающих амплитуд

Сказанное выше о зависимости правил сумм от системы отсчета относится также и к случаю запаздывающих амплитуд. Мы увидим, что представление Лоу [197] для запаздывающих амплитуд, вообще говоря, зависит от состояния движения внешних частиц.

Итак, рассмотрим величину

$$T^{\beta\alpha}(Q, P, \Delta) = i \int d^4x \exp(iQx) \langle p_2 | R \left( \varphi^\beta \left( \frac{1}{2} x \right) \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2} x \right) \right) | p_1 \rangle, \quad (7.42)$$

где  $|p_1\rangle$  и  $|p_2\rangle$  — скалярные одночастичные состояния, а  $R(\varphi^\beta \varphi^\alpha)$  — запаздывающее произведение

$$R \left( \varphi^\beta \left( \frac{1}{2} x \right) \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2} x \right) \right) = \theta(x_0) \left[ \varphi^\beta \left( \frac{1}{2} x \right), \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2} x \right) \right]. \quad (7.43)$$

Если взять интеграл по  $x$  [определенный благодаря введению обычного множителя  $\exp(-\epsilon x_0)$ , регуляризующего интегрируемую функцию при  $x_0 = \infty$ ] и затем ввести разложение по полной системе промежуточных



состояний, то это даст

$$\begin{aligned}
 T^{\beta\alpha}(Q, P, \Delta) &= -(2\pi)^3 \sum_n \delta^3(\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{p}_n) \frac{\langle p_2 | \varphi^\beta | n \rangle \langle n | \varphi^\alpha | p_1 \rangle}{P_0 + Q_0 - E_n + i\varepsilon} + \\
 &+ (2\pi)^3 \sum_n \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{p}_n) \frac{\langle p_2 | \varphi^\alpha | n \rangle \langle n | \varphi^\beta | p_1 \rangle}{E_n + Q_0 - P_0 + i\varepsilon} = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dQ'_0 \frac{i^{\beta\alpha}(Q', P, \Delta)}{Q'_0 - Q_0 - i\varepsilon}, \quad (7.44)
 \end{aligned}$$

где  $t^{\beta\alpha}$  — то же, что и в соотношении (7.26), а именно

$$\begin{aligned}
 t^{\beta\alpha}(Q', P, \Delta) &= \frac{1}{2\pi} \int d^4x \exp(iQ'x) \left\langle p_2 \left| \left[ \varphi^\beta \left( \frac{1}{2}x \right), \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2}x \right) \right] \right| p_1 \right\rangle = \\
 &= (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(\mathbf{P} + \mathbf{Q}' - \mathbf{p}_n) \langle p_2 | \varphi^\beta | n \rangle \langle n | \varphi^\alpha | p_1 \rangle - \\
 &- \left( \begin{array}{l} Q' \rightarrow -Q' \\ \beta \leftrightarrow \alpha \end{array} \right) \quad (7.45)
 \end{aligned}$$

и

$$Q' = (Q'_0, \mathbf{Q}). \quad (7.46)$$

Равенство (7.44) есть так называемое представление Лоу для амплитуды  $T^{\beta\alpha}$ .

В представлении (7.44) мы можем использовать скалярные переменные, построенные из  $P$ ,  $Q$  и  $\Delta$ , т. е.

$$\begin{aligned}
 v' &= (Q'P) = Q'_0 P_0 - \mathbf{Q}\mathbf{P}, \\
 u' &= Q'^2 = Q_0'^2 - \mathbf{Q}^2, \\
 w' &= (Q'\Delta) = Q'_0 \Delta_0 - \mathbf{Q}\Delta, \quad (7.47)
 \end{aligned}$$

и тогда уравнение (зависящее от системы отсчета) дисперсионного контура таково [198]:

$$u' = av'^2 + bv' + c, \quad (7.48)$$

$$w' = hv' + k,$$

где  $a, b, c, h, k$  — величины, даваемые формулами (7.33). Аналогичные соотношения имеют место и для переменных, построенных из  $P$ ,  $Q$  и  $\Delta$ , для которых имеем

$$u = av^2 + bv + c, \quad (7.49)$$

$$w = hv + k,$$

с теми же самыми  $a, b, c, h, k$  (напомним, что  $Q' = Q$ ).

Теперь мы можем выяснить, является ли  $T^{\beta\alpha}$  инвариантной функцией величины  $Q$ , т. е. зависит ли она только от  $v, u, w$ . Если переписать представление Лоу через инвариантные переменные, то соотношение (7.44) будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}
 T^{\beta\alpha}(Q, P, \Delta) &= \int \frac{dv'}{v' - v} t^{\beta\alpha}(v', u(v'), w(v')) = \\
 &= \int \frac{dv'}{v' - v} du' dw' t^{\beta\alpha}(v', u', w') \delta(u' - av'^2 - bv' - c) \delta(w' - hv' - k). \quad (7.50)
 \end{aligned}$$

Следовательно, инвариантность амплитуды  $T^{\beta\alpha}(Q)$  отнюдь не очевидна и необходимо выполнение некоторых условий, чтобы  $T^{\beta\alpha}(Q)$  была инвариантной, т. е. зависела только от инвариантных переменных  $v, u, w$  [эти три переменные, разумеется, связаны уравнением контура (7.49)].

Чтобы ввести переменные  $u$  и  $w$  в представление для  $T^{\beta\alpha}(Q)$ , мы воспользуемся уравнением (7.49) и исключим из соотношения (7.50) параметры  $c, k$ :

$$\begin{aligned} c &= u - av^2 - bv, \\ k &= w - hv. \end{aligned} \tag{7.51}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} u' - u &= a(v'^2 - v^2) + b(v' - v) = (v' - v)[a(v' + v) + b], \\ w' - w &= h(v' - v), \end{aligned}$$

и соотношение (7.50) примет вид

$$\begin{aligned} T^{\beta\alpha}(Q, P, \Delta) &= \int \frac{dv'}{v' - v} du' dw' t^{\beta\alpha}(v', u', w') \times \\ &\times \delta[u' - u - a(v'^2 - v^2) - b(v' - v)] \delta[w' - w - h(v' - v)]. \end{aligned} \tag{7.52}$$

Чтобы величина  $T^{\beta\alpha}(Q)$  была ковариантной, мы требуем, чтобы она зависела только от  $v, u, w$ , но не от  $a, b, h$ . Исходя из этого требования, мы получаем три уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \int dv' du' dw' t^{\beta\alpha}(v', u', w') \delta(u' - av'^2 - bv' - c) \delta(w' - hv' - k) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} \int dv' du' dw' v' t^{\beta\alpha}(v', u', w') \delta(u' - av'^2 - bv' - c) \delta(w' - hv' - k) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial w} \int dv' du' dw' t^{\beta\alpha}(v', u', w') \delta(u' - av'^2 - bv' - c) \delta(w' - hv' - k) &= 0. \end{aligned} \tag{7.53}$$

Здесь мы снова перешли к  $c = c(v, u), k = k(v, u)$  в соответствии с уравнениями (7.51).

Условия (7.53) обеспечивают лоренц-инвариантность амплитуды  $T^{\beta\alpha}(Q)$ , каковая тесно связана с инвариантностью  $R(\varphi^\beta \varphi^\alpha)$ . Эта связь видна из того, что уравнения (7.53) можно вывести из условий, требуемых для ковариантности  $R(\varphi^\beta \varphi^\alpha)$ .

Наконец, отметим, что для скалярных операторов зависимость представления Люу от системы отсчета исчезает, если рассматриваются вакуумные матричные элементы, поскольку вакуум инвариантен относительно преобразований Лоренца. В самом деле, рассмотрим

$$T_{\text{вак}}^{\beta\alpha} = \delta_{\alpha\beta} T_{\text{вак}} = i \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | R(\varphi^\beta(\frac{1}{2}x) \varphi^\alpha(-\frac{1}{2}x)) | 0 \rangle. \tag{7.54}$$

Преобразования, аналогичные преобразованиям в случае запаздывающей амплитуды (7.42), приводят к представлению

$$T_{\text{вак}} = \int_0^\infty dq_0' \frac{t(q_0', \mathbf{q})}{q_0' - q_0} - \int_{-\infty}^0 dq_0' \frac{t(-q_0', -\mathbf{q})}{q_0' - q_0}, \tag{7.55}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta} t(q) &= (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(q - p_n) \langle 0 | \varphi^\beta | n \rangle \langle n | \varphi^\alpha | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | \varphi^\beta(\frac{1}{2}x) \varphi^\alpha(-\frac{1}{2}x) | 0 \rangle. \end{aligned} \tag{7.56}$$

Из формулы (7.56) явствует, что  $t(q)$  — положительно определенная величина. Далее,  $t(q)$  — скаляр, и мы полагаем ( $u = q^2$ )

$$t(q) = \theta(q_0) t(u). \tag{7.57}$$

Тогда равенство (7.55) дает

$$T_{\text{вак}} = \int_0^{\infty} du' \frac{t(u')}{u' - u}. \quad (7.58)$$

Соотношение (7.58) называется представлением Челлена — Лемана [90]. Мы видим, что  $T_{\text{вак}} = T_{\text{вак}}(g^2)$  есть лоренцев скаляр.

### 5. Высокочастотный предел запаздывающих амплитуд

Посмотрим теперь, каков высокочастотный ( $Q_0 \rightarrow \infty$ ) предел величины  $T^{\beta\alpha}(Q, P, \Delta)$  при перемещении по параболе, введенной в предыдущем разделе. Мы можем поступить следующим образом. Выражение (7.42) запишем в виде

$$T^{\beta\alpha}(Q) = i \int_0^{\infty} dt \exp(iQ_0 t) \hat{T}^{\beta\alpha}(t) = \frac{1}{Q_0} \int_0^{\infty} dt \hat{T}^{\beta\alpha}(t) \frac{d}{dt} \exp(iQ_0 t), \quad (7.59)$$

где

$$\hat{T}^{\beta\alpha}(t) = \int d^3x \exp(-i\mathbf{Q}\mathbf{x}) \langle p_2 | \left[ \varphi^{\beta}\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}\right), \varphi^{\alpha}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}\right) \right] | p_1 \rangle. \quad (7.60)$$

Интегрируя по частям и пренебрегая внеинтегральным членом, имеем

$$T^{\beta\alpha}(Q_0) = -\frac{1}{Q_0} \hat{T}^{\beta\alpha}(0) - \frac{1}{Q_0} \int_0^{\infty} dt \exp(iQ_0 t) \frac{d}{dt} \hat{T}^{\beta\alpha}(t). \quad (7.61)$$

Если предположить, что фурье-образ

$$I^{\beta\alpha}(Q_0) = \int_0^{\infty} dt \exp(iQ_0 t) \frac{d}{dt} \hat{T}^{\beta\alpha}(t) \quad (7.62)$$

стремится к нулю при  $Q_0 \rightarrow \infty$ <sup>1)</sup>, то получим следующее асимптотическое выражение:

$$T^{\beta\alpha}(Q_0) \underset{\substack{Q, P, P_0, \Delta, \Delta_0 \text{ фиксированы} \\ Q_0 \rightarrow \infty}}{\sim} -\frac{1}{Q_0} \int d^3x \exp(-i\mathbf{Q}\mathbf{x}) \times \\ \times \langle p_2 | \left[ \varphi^{\beta}\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}, 0\right), \varphi^{\alpha}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}, 0\right) \right] | p_1 \rangle. \quad (7.63)$$

Разумеется, данная теорема в равной мере применима и к хронологически упорядоченным амплитудам, причем для любой пары тензорных операторов, взятой вместо  $\varphi^{\beta}$  и  $\varphi^{\alpha}$ .

Если требуется получить следующий член асимптотического разложения (7.63), то аналогичная процедура дает

$$T^{\beta\alpha}(Q_0) \sim \frac{1}{Q_0} \int d^3x \exp(-i\mathbf{Q}\mathbf{x}) \langle p_2 | \left[ \varphi^{\beta}\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}, 0\right), \varphi^{\alpha}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}, 0\right) \right] | p_1 \rangle + \\ + \frac{1}{iQ_0^2} \int d^3x \exp(-i\mathbf{Q}\mathbf{x}) \left\{ \frac{d}{dt} \langle p_2 | \left[ \varphi^{\beta}\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}, t\right), \varphi^{\alpha}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}, t\right) \right] | p_1 \rangle \right\}_{t=0}. \quad (7.64)$$

Приведенные результаты могут быть также получены непосредственно из представления (7.44). Разложение (7.64) известно под названием теоремы Бьёркена — Джонсона — Лоу [121, 199].

<sup>1)</sup> Это показывает, что рассматриваемый предел является нетривиальным динамическим предположением. Например, его справедливость опровергается в теории возмущений в том смысле, что по крайней мере в низших порядках каждый член разложения теории возмущений по отдельности не удовлетворяет соотношению (7.63).

#### § 4. Ковариантная форма кластерного разложения

Из всего сказанного уже ясно, какова внутренняя причина того, что наши результаты зависят от системы отсчета, и как эта зависимость проявляется. Чтобы более четко показать роль различных вкладов в правило сумм и то, как влияет выбор системы отсчета на контур интегрирования, введем ковариантную формулировку кластерного разложения, рассмотренного в гл. 6, § 3.

С этой целью обратимся к соотношению (7.34) и к форме (7.50) представления Лоу (7.44):

$$C^{\beta\alpha} = \frac{1}{P_0} \int dv t^{\beta\alpha} [v] dv, \quad (7.65)$$

$$T^{\beta\alpha} (Q, P, \Delta) = \int \frac{dv'}{v' - v} t^{\beta\alpha} [v']. \quad (7.66)$$

Напоминаем, что здесь [соотношения (7.29) и (7.30)]

$$t^{\beta\alpha} (Q, P, \Delta) = \tau^{\beta\alpha} (Q, P, \Delta) - \tau^{\alpha\beta} (-Q, P, \Delta), \quad (7.67)$$

$$\tau^{\beta\alpha} (Q, P, \Delta) = \frac{1}{2\pi} \int d^4x \exp(iQx) \langle p_2 | \varphi^\beta \left( \frac{1}{2} x \right) \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2} x \right) | p_1 \rangle = \quad (7.68)$$

$$= (2\pi)^3 \langle p_2 | \varphi^\beta \delta^4(P + Q - \Pi) \varphi^\alpha | p_1 \rangle \quad (7.69)$$

и, кроме того, в соотношениях (7.65), (7.66) мы символом [v] обозначили набор переменных (v, u, w), связанных уравнениями (7.49), т. е.

$$u = av^2 + bv + c, \quad (7.70)$$

$$w = hv + k,$$

где a, b, c, h, k — зависящие от системы отсчета параметры, даваемые равенствами (7.33).

Введем для матричного элемента обозначение

$$\tau^{\beta\alpha} (x) = \langle p_2 | \varphi^\beta \left( \frac{1}{2} x \right) \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2} x \right) | p_1 \rangle \quad (7.71)$$

и применим кластерное разложение к его связанной части:

$$\begin{aligned} [\tau^{\beta\alpha} (x)]_{\text{связн}} &= \langle p_2 | \varphi^\beta \left( \frac{1}{2} x \right) \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2} x \right) | p_1 \rangle - \\ &- \langle p_2 | p_1 \rangle \langle 0 | \varphi^\beta \left( \frac{1}{2} x \right) \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2} x \right) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \left[ \left[ a(p_2), \varphi^\beta \left( \frac{1}{2} x \right) \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2} x \right) \right], a^+(p_1) \right] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Вычислив двойной коммутатор, имеем <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} [\tau^{\beta\alpha} (x)]_{\text{связн}} &= \langle 0 | \left[ a(p_2), \varphi^\beta \left( \frac{1}{2} x \right) \right] \left[ \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2} x \right), a^+(p_1) \right] | 0 \rangle \pm \\ &\pm \langle 0 | \left[ \varphi^\beta \left( \frac{1}{2} x \right), a^+(p_1) \right] \left[ a(p_2), \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2} x \right) | 0 \right] + \\ &+ \langle 0 | \varphi^\beta \left( \frac{1}{2} x \right) \left[ a(p_2), \left[ \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2} x \right), a^+(p_1) \right] \right] | 0 \rangle + \\ &+ \langle 0 | \left[ \left[ a(p_2), \varphi^\beta \left( \frac{1}{2} x \right) \right], a^+(p_1) \right] \varphi^\alpha \left( -\frac{1}{2} x \right) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (7.73)$$

<sup>1)</sup> Знак второго члена определяется статистикой внешних состояний (плюс для бозонов, минус для фермионов).

Затем воспользуемся трансляционной инвариантностью и применим тождества (через  $\Pi_\mu$  мы обозначаем оператор 4-импульса):

$$\varphi(x) = \exp(i\Pi x) \varphi(0) \exp(-i\Pi x), \quad (7.74)$$

$$\begin{aligned} [a(p), \Pi_\mu] &= p_\mu a(p), \quad [\Pi_\mu, a^+(p)] = p_\mu a^+(p), \\ a(p) \exp(i\Pi x) &= \exp[i(\Pi + p)x] a(p), \\ \exp(i\Pi x) a^+(p) &= a^+(p) \exp[i(\Pi + p)x]. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Производя преобразование Фурье обеих частей равенства (7.73), находим

$$\begin{aligned} [\tau^{\beta\alpha}(Q)]_{\text{связн}} &= \frac{1}{2\pi} \int dx \exp(iQx) [\tau^{\beta\alpha}(x)]_{\text{связн}} = \\ &= (2\pi)^3 \langle 0 | [a(p_2), \varphi^\beta] \delta^4(P+Q-\Pi) [\varphi^\alpha, a^+(p_1)] | 0 \rangle \pm \\ &\pm (2\pi)^3 \langle 0 | [\varphi^\beta, a^+(p_1)] \delta^4(-P+Q+\Pi) [a(p_2), \varphi^\alpha] | 0 \rangle + \\ &+ (2\pi)^3 \langle 0 | \varphi^\beta \delta^4(q_2-\Pi) [a(p_2), [\varphi^\alpha, a^+(p_1)]] | 0 \rangle + \\ &+ (2\pi)^3 \langle 0 | [[a(p_2), \varphi^\beta], a^+(p_1)] \delta^4(q_1-\Pi) \varphi^\alpha | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Каждое из четырех слагаемых в правой части соотношения (7.76) имеет вид

$$(2\pi)^3 \langle 0 | A_2 \delta^4(k-\Pi) A_1 | 0 \rangle. \quad (7.77)$$

Введем полную систему состояний и будем далее обозначать состояния через  $|P, i\rangle$ , где  $P$  — полный 3-импульс, а  $i$  — все остальные «внутренние» (в широком смысле) переменные. Таким образом, «масса» состояния  $M(i)$  есть функция внутренних переменных. Напишем

$$\begin{aligned} (2\pi)^3 \langle 0 | A_2 \delta^4(k-\Pi) A_1 | 0 \rangle &= \sum_i \int \frac{d^3P}{2P_0} \langle 0 | A_2 | P, i \rangle \langle i, P | A_1 | 0 \rangle \delta^4(P-k) = \\ &= \sum_i \langle 0 | A_2 | \mathbf{k}, i \rangle \langle i, \mathbf{k} | A_1 | 0 \rangle \frac{\delta([\mathbf{k}^2 + M^2(i)]^{1/2} - k_0)}{2[\mathbf{k}^2 + M^2(i)]^{1/2}} \end{aligned} \quad (7.78)$$

и приведем это соотношение к более изящному виду

$$\langle 0 | A_2 \delta^4(k-\Pi) A_1 | 0 \rangle = \sum_i \langle 0 | A_2 | \mathbf{k}, i \rangle \langle i, \mathbf{k} | A_1 | 0 \rangle \theta(k_0) \delta[k^2 - M^2(i)]. \quad (7.79)$$

Возвращаясь к равенству (7.76), находим

$$\begin{aligned} [\tau^{\beta\alpha}(Q)]_{\text{связн}} &= \sum_i \langle 0 | [a(p_2), \varphi^\beta] | P+Q, i \rangle \times \\ &\times \langle i, P+Q | [\varphi^\alpha, a^+(p_1)] | 0 \rangle \theta(P_0+Q_0) \delta[(P+Q)^2 - M^2(i)] \pm \\ &\pm \sum_j \langle 0 | [\varphi^\beta, a^+(p_1)] | Q-P, j \rangle \langle j, Q-P | [a(p_2), \varphi^\alpha] | 0 \rangle \times \\ &\times \theta(Q_0-P_0) \delta[(Q-P)^2 - M^2(j)] + \sum_{l_2} \langle 0 | \varphi^\beta | \mathbf{q}_2, l_2 \rangle \times \\ &\times \langle l_2, \mathbf{q}_2 | [a(p_2), [\varphi^\alpha, a^+(p_1)]] | 0 \rangle \theta(q_{20}) \delta[q_2^2 - M^2(l_2)] + \\ &+ \sum_{l_1} \langle 0 | [[a(p_2), \varphi^\beta], a^+(p_1)] | \mathbf{q}_1, l_1 \rangle \langle l_1, \mathbf{q}_1 | \varphi^\alpha | 0 \rangle \theta(q_{10}) \delta[q_1^2 - M^2(l_1)], \end{aligned} \quad (7.80)$$

где через  $i, j, l_1, l_2$  обозначена полная система состояний с барионным числом 1,  $-1$  и 0 (мы считаем, что состояния  $p_1, p_2$  несут барионное число 1).

Для перехода к явному виду кластерного разложения обратимся к правилу подстановки. Последнее означает, что матричные элементы

$$\langle 0 | [a(p_2), \varphi^\beta] | \mathbf{p} + \mathbf{q}, i \rangle = \langle \mathbf{p}_2 | \varphi^\beta | \mathbf{p} + \mathbf{q}, i \rangle_{\text{связн}} \quad (7.81)$$

$$\langle -\mathbf{q} - \mathbf{p}, \bar{i} | [a(p_2), \varphi^\beta] | 0 \rangle = \langle -\mathbf{q} - \mathbf{p}, \bar{i}; \mathbf{p}_2 | \varphi^\beta | 0 \rangle \quad (7.82)$$

интерполируются одной и той же функцией  $F_\beta(p+q, p_2; i)$ . [В равенстве (7.82) через  $i$  обозначено состояние, зарядово-сопряженное состоянию  $i$ .] Другими словами, для времениподобного вектора  $p+q$  из конуса будущего функция  $F_\beta(p+q, p_2; i)$  дает матричный элемент (7.81), соответствующий in-состоянию  $i$  с импульсом  $p+q$  и барионным числом 1 и out-состояниям нуклона  $p_2$  и источника  $\varphi^\beta(q_2)$

$$\langle p_2 | \varphi^\beta | p+q, i \rangle = F_\beta(p+q, p_2; i), \quad p_0+q_0 > 0. \quad (7.83)$$

Точно так же матричный элемент (7.82), соответствующий out-состояниям источника  $\varphi^\beta(q_2)$ , нуклона  $p_2$  и «антинуклона»  $-p-q$ , будет представлен функцией  $F_\beta$  импульса  $p+q$  из конуса прошлого:

$$\langle -q-p, \bar{i}; p_2 | \varphi^\beta | 0 \rangle = F_\beta(p+q, p_2; i), \quad p_0+q_0 < 0. \quad (7.84)$$

На том же основании матричные элементы

$$\langle 0 | [[a(p_2), \varphi^\beta], a^+(p_1)] | q, l \rangle = \langle p_2 | \varphi^\beta | p_1; q, l \rangle_{\text{связн}} \quad (7.85)$$

и

$$\langle -q, l | [[a(p_2), \varphi^\beta], a^+(p_1)] | 0 \rangle = \langle -q, l; p_2 | \varphi^\beta | p_1 \rangle_{\text{связн}} \quad (7.86)$$

представляются одной и той же функцией

$$T_{\beta l}(p_1, q; p_2). \quad (7.87)$$

Наконец,

$$\langle q, l | \varphi^\alpha | 0 \rangle = \phi_{l\alpha}(q), \quad (7.88)$$

$$\langle 0 | \varphi^\alpha | l, -q \rangle = \phi_{l\alpha}(q).$$

В новых обозначениях равенство (7.80) приобретает вид

$$[\tau^{\beta\alpha}(Q)]_{\text{связн}} = \tau_{\text{I}}^{\beta\alpha}(Q) + \tau_{\text{II}}^{\beta\alpha}(Q), \quad (7.89)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{\text{I}}^{\beta\alpha}(Q) &= \sum_i F_\beta(p_2, q_2, i) F_\alpha^*(p_1, q_1, i) \delta((P+Q)^2 - M^2(i)) \theta(P_0+Q_2) + \\ &+ \sum_i F_\beta^*(p_1, -q_2, i) F_\alpha(p_2, -q_1, i) \delta((P-Q)^2 - M^2(i)) \theta(Q_0-P_0), \end{aligned} \quad (7.90)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\text{II}}^{\beta\alpha}(Q) &= \sum_{l_1} T_{\beta l_1}(p_1, q_1; p_2) \phi_{l_1\alpha}(q_1) \delta(q_1^2 - M^2(l_1)) \theta(q_{10}) + \\ &+ \sum_{l_2} T_{\alpha l_2}(p_1, -q_2; p_2) \phi_{l_2\beta}(-q_2) \delta(q_2^2 - M^2(l_2)) \theta(q_{20}). \end{aligned} \quad (7.91)$$

Важная особенность соотношений (7.90) и (7.91) заключается в том, что величина  $\tau^{\alpha\beta}(-Q, P, \Delta)$ , через которую выражается  $t^{\beta\alpha}$  [формула (7.67)], получается из них просто заменой знака в аргументе  $\theta$ -функций. Теперь мы можем привести окончательное выражение для функции  $t^{\beta\alpha}$ , фигурирующей в формуле (7.67):

$$t^{\beta\alpha} = t_{\text{I}}^{\beta\alpha} + t_{\text{II}}^{\beta\alpha},$$

где

$$\begin{aligned} t_{\text{I}}^{\beta\alpha} &= \sum_i F_\beta(p_2, q_2, i) F_\alpha^*(p_1, q_1, i) \Delta(s - M^2(i)) + \\ &+ \sum_i F_\beta^*(p_1, -q_2, i) F_\alpha(p_2, -q_1, i) \Delta(\bar{s} - M^2(i)), \end{aligned} \quad (7.92)$$

$$\begin{aligned} t_{\text{II}}^{\beta\alpha} &= \sum_{l_1} T_{\beta l_1}(p_1, q_1; p_2) \phi_{l_1\alpha}(q_1) \Delta(q_1^2 - M^2(l_1)) + \\ &+ \sum_{l_2} T_{\alpha l_2}(p_1, -q_2; p_2) \phi_{l_2\beta}(-q_2) \Delta(q_2^2 - M^2(l_2)). \end{aligned} \quad (7.93)$$

Здесь мы ввели обозначение

$$\Delta (q^2 - M^2) = \delta (q^2 - M^2) [\theta (q_0) - \theta (-q_0)].$$

Отметим, что в окончательном выражении (7.92) коэффициент, скажем, при  $\Delta (s - M^2)$  содержит: 1) «прямой вклад», соответствующий положительной энергии  $[\theta (Q_0 + P_0)]$ , и 2) «Z-вклад», соответствующий отрицательной энергии  $[\theta (-Q_0 - P_0)]$ .

Данное обстоятельство указывает на ту глубокую взаимосвязь этих вкладов (отчетливо проявляющуюся в диаграммах Фейнмана), которая должна иметь место при инвариантном подходе.

Общая структура и локализация различных вкладов в  $t^{\beta\alpha}$  видны из равенств (7.92) и (7.93). Вклады класса I («прямые» и Z-диаграммы) происходят от пересечения параболического контура интегрирования (7.70) и (7.71) с плоскостями  $s = M^2 (i)$ ,  $\bar{s} = M^2 (i)$  и соответствуют двум парам (зависящих от системы отсчета) решений уравнений

$$\begin{aligned} s = \sigma + u + 2v = m^2 - \frac{1}{4}t + u(v) + 2v = M^2 (i), \\ \bar{s} = \sigma + u - 2v = m^2 - \frac{1}{4}t + u(v) - 2v = M^2 (i). \end{aligned} \quad (7.94)$$

Появляющиеся в равенствах (7.90) и (7.91)  $\theta$ -функции показывают, что «прямому» вкладу соответствуют пересечения

$$\begin{aligned} (v)_d = -P_0^2 + P_0 [(P+Q)^2 + M^2 (i)]^{1/2} - PQ, \\ (v')_d = P_0^2 - P_0 [(P-Q)^2 + M^2 (i)]^{1/2} - PQ, \end{aligned} \quad (7.95)$$

а Z-графам соответствуют пересечения

$$\begin{aligned} (v)_z = -P_0^2 - P_0 [(P+Q)^2 + M^2 (i)]^{1/2} - PQ, \\ (v')_z = P_0^2 + P_0 [(P-Q)^2 + M^2 (i)]^{1/2} - PQ. \end{aligned} \quad (7.96)$$

Поэтому можно считать, что наличие вклада Z-диаграмм является следствием того, что плоскость  $s = \text{const}$  (или  $\bar{s} = \text{const}$ ) 2 раза пересекается с параболическим контуром интегрирования.

Точно так же вклады класса II происходят от пересечения параболы с плоскостями  $u_1 = M^2 (l_1)$ ,  $u_2 = M^2 (l_2)$ . Они соответствуют (зависящим от выбора системы отсчета) решениям уравнений второго порядка для  $v$ :

$$u_{1,2} = u(v) + \frac{1}{4}t \pm w(v) = M^2 (l_{1,2}), \quad (7.97)$$

а именно

$$\begin{aligned} (v)_1 = -\frac{1}{2}P_0\Delta_0 + P_0 \left[ M^2 (l_1) + \left( Q + \frac{1}{2}\Delta \right)^2 \right]^{1/2} - PQ, \\ (v')_1 = -\frac{1}{2}P_0\Delta_0 - P_0 \left[ M^2 (l_1) + \left( Q + \frac{1}{2}\Delta \right)^2 \right]^{1/2} - PQ \end{aligned} \quad (7.98)$$

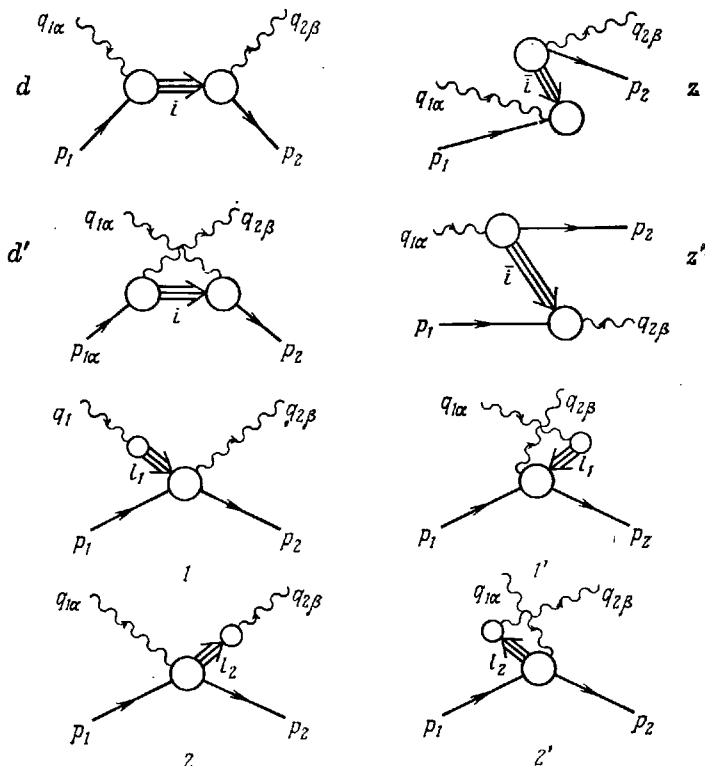
и

$$\begin{aligned} (v)_2 = \frac{1}{2}P_0\Delta_0 + P_0 \left[ M^2 (l_2) + \left( Q - \frac{1}{2}\Delta \right)^2 \right]^{1/2} - PQ, \\ (v')_2 = \frac{1}{2}P_0\Delta_0 - P_0 \left[ M^2 (l_2) + \left( Q - \frac{1}{2}\Delta \right)^2 \right]^{1/2} - PQ. \end{aligned} \quad (7.99)$$

Картина становится совершенно ясной, если обратиться к дисперсионному соотношению (7.66) для  $T^{\beta\alpha}$  по параболическому контуру (7.70). Точками пересечения дисперсионной линии с плоскостями  $s = \text{const}$ ,  $\bar{s} = \text{const}$ ,  $q_{1,2}^2 = \text{const}$  определяется положение различных особенностей. Наличие различных вкладов в правило сумм связано с тем, что амплитуда  $T^{\beta\alpha} (s, \bar{s}, u_1, u_2)$  имеет особенности по переменным  $s, \bar{s}, u_1, u_2$ , отвечающие

возможным значениям масс обмениваемых состояний в соответствующих каналах. На фиг. 7.1 показаны промежуточные состояния, приводящие к вкладам типа  $(v)_d, (v')_d, (v)_z, (v')_z, (v)_1, (v')_1, (v)_2, (v')_2$ .

В силу того что соотношение (7.66) представляет собой дисперсионное соотношение с *переменной массой*, в дисперсионный интеграл вносят вклад как особенности по  $s, \bar{s}$  (класс I), так и особенности по  $q_1^2, q_2^2$  (класс II).



Фиг. 7.1

Подчеркнем, что кластерное разложение можно сразу же распространить на тензорные амплитуды более общего вида, такие, как]

$$t_{\nu\mu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4x \exp(iQx) \langle p_2' | [ j_\nu \left( \frac{1}{2} x \right), j_\mu \left( -\frac{1}{2} x \right) ] | p_1 \rangle,$$

где  $j_\nu$  — произвольный векторный или аксиальный ток. Такое обобщение окажется весьма полезным в дальнейшем, поскольку в случае электромагнитного тока  $j_\nu$  тензор  $t_{\nu\mu}$  играет фундаментальную роль при рассмотрении процессов электророжения на адронных мишенях и  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны (гл. 8, приложение II). В частности, чрезвычайно важное значение имеют: 1) правило подстановки для  $t_{\nu\mu}$ , связывающее в случае электромагнитных токов электророжение с  $e^+e^-$ -аннигиляцией в адроны, и 2) анализ различных вкладов в  $t_{\nu\mu}$ . Мы, например, покажем, как в различных физических процессах с вполне заметным эффектом проявляются вклады  $Z$ -графов.

Огромное преимущество кластерного разложения связано с тем, что все вклады в дисперсионный интеграл можно выписать в явном однозначном виде, не прибегая к сложному анализу общих аналитических свойств функции трех переменных  $\nu, q_1^2, q_2^2$ .

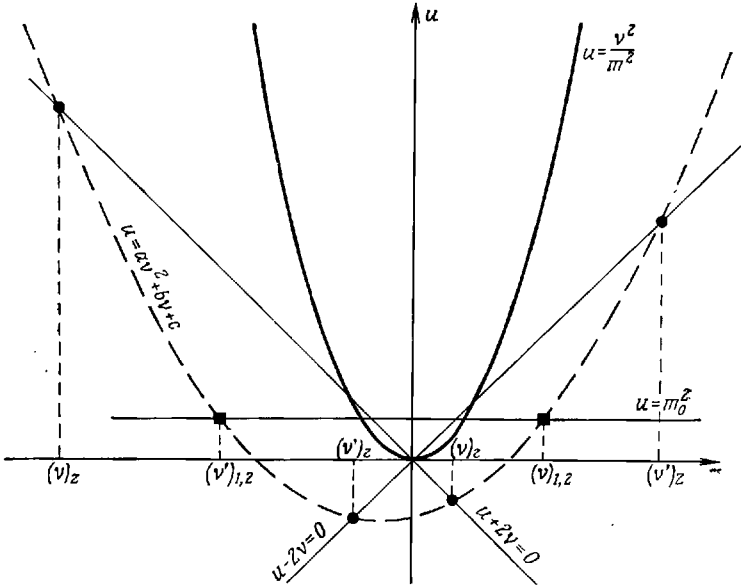
Представление о спектральных свойствах функции  $t(\nu, u)$  в упрощенной кинематической конфигурации  $q_1^2 = q_2^2 \equiv u, t = 0$  дает фиг. 7.2. В указан-



ной конфигурации вклады  $s$ -канала сосредоточены в области, определяемой неравенствами

$$\begin{aligned} s &\geq m^2, \quad \text{т. е. } u + 2v \geq 0, \\ u &\leq \frac{v^2}{m^2}, \end{aligned} \quad (7.100)$$

причем второе неравенство следует из того, что  $u$  достигает максимального значения при  $\mathbf{q} = 0$  и  $\mathbf{p} = 0$ .



Фиг. 7.2

Точно так же вклады  $\bar{s}$ -канала сосредоточены в области

$$\begin{aligned} \bar{s} &\geq m^2, \quad \text{т. е. } u - 2v \geq 0, \\ u &\leq \frac{v^2}{m^2}. \end{aligned} \quad (7.101)$$

Наконец, «массовые» сингулярности сосредоточены в области

$$m_0^2 \leq u \leq \frac{v^2}{m^2}, \quad (7.102)$$

где  $m_0$  — минимальная масса адронного состояния с соответствующими квантовыми числами.

На фиг. 7.2 проведена также парабола

$$u = \frac{v^2}{p_0^2} + 2 \frac{pq}{p_0^2} v + \frac{(pq)^2}{p_0^2} - q^2$$

и обозначены корни уравнений (7.95), (7.96), (7.98) и (7.99), соответствующие  $s = m^2$ ,  $\bar{s} = m^2$ ,  $u = m_0^2$ . Отметим, что парабола, конечно, несимметрична относительно замены  $v \rightarrow -v$ , и, следовательно, два корня (7.95) и аналогичные пары (7.96), (7.98) и (7.99) несимметричны, хотя  $t(-v, u) = -t(v, u)$  при  $q_1^2 = q_2^2$ .

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, мы сталкиваемся с астрономическим количеством правил сумм. С чисто теоретической точки зрения все они представляют одинаковый интерес, поскольку все они относятся

к «наблюдаемым» физическим величинам. Но с практической точки зрения необходимо отличать «наблюдаемые» величины от *измеренных* величин. Таким образом, основные приложения алгебры токов достигаются выбором конкретного дисперсионного контура с целью выделения небольшого числа легко отождествимых ведущих вкладов.

Мы видели, что правила сумм в брейтовской системе отсчета ( $P = 0$ ), соответствующие симметричному контуру с максимально возможным значением параметра  $a$  в уравнении (7.33) (т. е. максимально «крутой» параболе), позволяют выделить пионный вклад класса II и дают простые выражения для амплитуд в пределе мягких пионов.

Другой крайний и очень важный случай, который мы детально рассмотрим в гл. 8, — это случай системы бесконечно большого импульса. Такая система определяется соотношениями <sup>1)</sup>

$$P_0, |P| \rightarrow \infty, \quad P\Delta = PQ = 0, \quad (7.103)$$

т. е.

$$\begin{aligned} a = 0, \quad b = 0, \quad c = -Q^2, \\ h = 0, \quad k = -Q\Delta. \end{aligned} \quad (7.104)$$

Таким образом, дисперсионный контур задается прямыми

$$q_1^2 = \text{const}, \quad q_2^2 = \text{const},$$

что приводит к дисперсионному правилу сумм при фиксированной массе, о котором говорилось в гл. 1 и 4.

Эта упрощенная форма дисперсионного контура облегчит анализ различных вкладов в правило сумм. Действительно, вклады класса II и вклады Z-диаграмм класса I будут иметь место только при бесконечном значении энергии [ $v_{1,2}, v'_{1,2}, v_z, v'_z \rightarrow \infty$ ; см. формулы (7.98), (7.99) и (7.96)]. Разумеется, при этом

$$(v_d, v'_d) \rightarrow \pm \frac{1}{2} [Q^2 + M^2(i)].$$

Возможность пренебрежения этими вкладами, конечно, зависит от динамики. Во многих случаях вполне допустимо принимать их равными нулю. Этот вопрос мы рассмотрим ниже, в гл. 11.

Чтобы проиллюстрировать применение правил сумм, которые можно получить в любой системе отсчета, мы рассмотрим в следующем параграфе важные правила сумм наиболее общего вида, вытекающие из перестановочного соотношения для аксиальных зарядов.

### § 5. Пример коммутатора аксиальных зарядов

Применим изложенный метод к весьма интересному случаю коммутатора двух аксиальных зарядов, взятого между однонуклонными состояниями:

$$\langle p_2 | [\bar{Q}^\beta, \bar{Q}^\alpha] | p_1 \rangle = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \langle p_2 | Q^\gamma | p_1 \rangle. \quad (7.105)$$

Наша задача — вывести из соотношения (7.105) правило сумм наиболее общего вида, с тем чтобы выявить зависимость различных вкладов от системы отсчета.

Как мы уже не раз делали, выразим матричные элементы зарядов через матричные элементы дивергенций, для чего воспользуемся соотно-

<sup>1)</sup> Иной предел бесконечно большого импульса ( $Q = aP + \eta$ ,  $P \rightarrow \infty$ ,  $a$  и  $\eta$  фиксированы) предложен Сегре [567]. В этом пределе уравнение контура (3.29) становится уравнением прямой  $u = 2av + b$  в плоскости  $v$ ,  $u$  при фиксированном  $w$ . См. гл. 11, уравнение (11.133) и далее.

шением

$$[\bar{Q}, H] = i\dot{\bar{Q}} = i \int d^3x \bar{D}(\mathbf{x}), \quad (7.106)$$

из которого следует равенство

$$\langle p | \bar{Q} = \int d^3x \langle p | \bar{D}(\mathbf{x}) \frac{1}{i(E-H)}. \quad (7.107)$$

Конечно, в применении к однонуклонному состоянию последнее равенство приводит к неопределенности (ибо знаменатель обращается в нуль). Поэтому прежде чем использовать равенство (7.107), удобно выделить однонуклонный вклад. Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle p_2 | \bar{Q}^\beta | p' \rangle \langle p' | \bar{Q}^\alpha | p_1 \rangle + \langle p_2 | \int d^3x_1 d^3x_2 \bar{D}^\beta(\mathbf{x}_1) \frac{\mathcal{P}}{(E_2-H)(E_1-H)} \bar{D}^\alpha(\mathbf{x}_2) | p_1 \rangle - \\ - \text{перекр. чл.} = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \frac{1}{2} \tau^\gamma 2E (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad (7.108) \end{aligned}$$

где  $\mathcal{P}$  — оператор проектирования, исключающий однонуклонное состояние.

Выполняя интегрирование по  $\mathbf{x}$  и вспоминая, что однонуклонный матричный элемент заряда есть

$$\langle p | \bar{Q}^\beta | p' \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') r_A 2\sigma \frac{1}{2} \tau^\beta, \quad (7.109)$$

нетрудно получить соотношение

$$\begin{aligned} r_A^2 \frac{\mathbf{p}^2}{E^2} \left[ \frac{1}{2} \tau^\beta, \frac{1}{2} \tau^\alpha \right] + \langle p | \left[ \bar{D}^\beta \frac{\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{P})}{(E-H)^2} \bar{D}^\alpha - (\beta \leftrightarrow \alpha) \right] | p \rangle \frac{(2\pi)^3}{2E} = \\ = \left[ \frac{1}{2} \tau^\beta, \frac{1}{2} \tau^\alpha \right]. \quad (7.110) \end{aligned}$$

[Здесь  $P_\mu = (H, \mathbf{P})$  есть оператор 4-импульса.] Вводя затем фундаментальный тензор

$$w^{\beta\alpha}(q) = (2\pi)^3 \langle p | \bar{D}^\beta \delta^4(p+q-P) \bar{D}^\alpha | p \rangle = \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^\alpha] w^{(-)}(q) + \delta^{\beta\alpha} w^{(+)}(q), \quad (7.111)$$

окончательно получаем

$$r_A^2 \frac{\mathbf{p}^2}{E^2} + 2 \int_{q_{\text{порог}}}^{\infty} \frac{dq_0}{E q_0^2} w^{(-)}(q_0, \mathbf{0}) = 1. \quad (7.112)$$

(Множитель 2 перед интегралом связан с наличием перекрестных членов.)

Поскольку  $w(q)$  фактически есть функция скалярных переменных

$$\begin{aligned} v &= qp = q_0 E, \\ u &= q_0^2 = \frac{v^2}{E^2}, \end{aligned} \quad (7.113)$$

равенство (7.112) можно также переписать в «инвариантной форме»

$$r_A^2 \frac{\mathbf{p}^2}{E^2} + 2 \int_{m_N m_\pi}^{\infty} dv du \frac{w^{(-)}(v, u)}{v^2} \delta\left(u - \frac{v^2}{E^2}\right) = 1. \quad (7.114)$$

Данная форма правила сумм довольно ясно демонстрирует его зависимость от системы отсчета, а именно от  $E$ . В системе покоя ( $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ ) однонуклонный член равен нулю (что и следовало ожидать в силу сохранения четности и углового момента), а в пределе при  $E \rightarrow \infty$  он равен  $r_A^2$ . Дисперсионный интеграл берется по некоторому контуру в плоскости  $(v, u)$ , зависящему от энергии нуклона  $E$ . Если мы изменим значение  $E$ , то точки пересечения

параболы с прямыми  $s$ ,  $\bar{s}$  или  $u = \text{const}$  сдвинутся и веса различных вкладов перераспределятся.

В качестве иллюстрации напомним явный вид вклада в  $w^{\beta\alpha}$  однонуклонной  $Z$ -диаграммы

$$(w^{\beta\alpha})_{N_Z} = - \frac{\langle 0 | \bar{D}^\beta | p, \tilde{p} \rangle \langle \tilde{p}, p | \bar{D}^\alpha | 0 \rangle}{4E^2} \frac{1}{2E}, \quad (7.115)$$

где  $\tilde{p} \equiv (E, -p)$  есть импульс антинуклона. Вклад данного выражения в правило сумм (7.114) равен

$$\frac{m_N^2}{E^2} d^2(4E^2), \quad (7.115')$$

где

$$d(t) = G_1(t) + \frac{i}{2m_N} G_2(t).$$

В случае свободных полей  $d(t) \equiv r_A$  и комбинированием нуклонного «прямого» и  $Z$ -вклада можно получить (не зависящее от системы отсчета) слагаемое  $r_A^2$ .

Выделим теперь однонуклонный вклад. При вычислении этого вклада необходима осторожность, поскольку в рассматриваемой кинематической конфигурации  $u_1 = u_2$  и совпадение вкладов  $u_1$  и  $u_2$  приводит к формальной проблеме их разделения, которая легко решается переходом к конфигурации «почти вперед». Нам придется рассмотреть функцию  $w^{\beta\alpha}(v, u_1, u_2)$  с немного различающимися аргументами  $u_1$  и  $u_2$ , а в конце всех вычислений перейти к пределу при  $u_1 \rightarrow u_2$ .

Однонуклонный вклад в  $w^{\beta\alpha}$  таков:

$$(w^{\beta\alpha})_\pi = m_\pi^2 f_\pi [\langle p_2 | \bar{D}^\beta | p_1, q_1 \alpha \rangle \delta(u_1 - m_\pi^2) \theta(q_{10}) + \langle p_2, q_2 \beta | \bar{D}^\alpha | p_1 \rangle \delta(u_2 - m_\pi^2) \theta(q_{20})]. \quad (7.116)$$

(Напомним, что  $\langle 0 | \bar{D}^\beta | \pi^{\beta'} \rangle = m_\pi^2 f_\pi \delta_{\beta\beta'}$ .) Вводя оператор  $\chi^\beta$ , определяемый равенством

$$(\square + m_\pi^2) D^\beta = m_\pi^2 f_\pi \chi^\beta, \quad (7.117)$$

имеем

$$(w^{\beta\alpha})_\pi = m_\pi^4 f_\pi^2 \left[ \frac{\langle p_2 | \chi^\beta | p_1, q_1 \alpha \rangle}{m_\pi^2 - u_2} \delta(u_1 - m_\pi^2) \theta(q_{10}) + \frac{\langle p_2, q_2 \beta | \chi^\alpha | p_1 \rangle}{m_\pi^2 - u_1} \delta(u_2 - m_\pi^2) \theta(q_{20}) \right]. \quad (7.118)$$

Далее удобно ввести интерполирующую функцию

$$F^{\beta\alpha}(p_1, q_1, p_2, q_2) \equiv F^{\beta\alpha}(v, u_1, u_2) = (m_\pi^2 - u_1)(m_\pi^2 - u_2) \times \\ \times \frac{i}{m_\pi^4 f_\pi^2} \int d^4x \exp(iQx) \langle p_2 | \theta(x_0) \left[ \bar{D}^\beta \left( \frac{1}{2} x \right), \bar{D}^\alpha \left( -\frac{1}{2} x \right) \right] | p_1 \rangle \quad (7.119)$$

со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \langle p_2 | \chi^\beta | p_1, q_1 \alpha \rangle &= F^{\beta\alpha}(v, m_\pi^2, u_2), \\ \langle p_2, q_2 \beta | \chi^\alpha | p_1 \rangle &= F^{\beta\alpha}(v, u_1, m_\pi^2), \\ T_{\pi N}^{\beta\alpha}(v) &= F^{\beta\alpha}(v, m_\pi^2, m_\pi^2), \end{aligned} \quad (7.120)$$

где  $T_{\pi N}^{\beta\alpha}(v)$  есть физическая амплитуда пион-нуклонного рассеяния.

Таким образом,

$$(w^{\beta\alpha})_{\pi} = m_{\pi}^4 f_{\pi}^2 F^{\beta\alpha}(v, u_1, u_2) \left[ \frac{\delta(u_1 - m_{\pi}^2)}{u_1 - u_2} \theta(q_{10}) + \frac{\delta(u_2 - m_{\pi}^2)}{u_2 - u_1} \theta(q_{20}) \right] = \\ = \frac{m_{\pi}^4 f_{\pi}^2}{2m_{\pi}} F^{\beta\alpha}(v, u_1, u_2) \left[ \frac{\delta(q_{10} - m_{\pi}) - \delta(q_{20} - m_{\pi})}{q_{10}^2 - q_{20}^2} \right], \quad (7.121)$$

и в пределе при  $q_1 = q_2 = q$  окончательно получаем

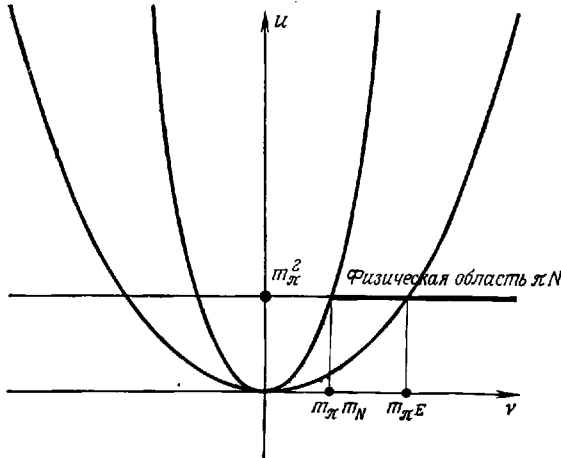
$$(w^{\beta\alpha})_{\pi} = \frac{1}{4} v_0^3 f_{\pi}^2 \frac{F^{\beta\alpha}(v, u)}{v} \frac{d}{dv} \delta(v - v_0),$$

где мы к тому же положили  $v_0 = m_{\pi} E$ .

Итак, однопионный вклад в правило сумм (7.114) оказывается равным

$$\frac{1}{2} v_0^3 f_{\pi}^2 \int \frac{dv}{v^2} \frac{F^{(-)}(v, u(v))}{v} \frac{d}{dv} \delta(v - v_0) = \\ = f_{\pi}^2 \left[ \frac{T_{\pi N}^{(-)}(v_0)}{v_0} - v_0^2 \frac{d}{dv^2} \frac{F^{(-)}(v, u(v))}{v} \Big|_{v=v_0} \right]. \quad (7.122)$$

(Напомним, что  $F^{(-)}/v$  — четная функция аргумента  $v$ .)



Фиг. 7.3

Мы видим, что основной пионный вклад пропорционален амплитуде пион-нуклонного рассеяния вперед, вычисленной при энергии

$$v_0 = E m_{\pi}. \quad (7.123)$$

Графически  $v_0$  определяется пересечением параболы  $u = v^2/E^2$  с пионной линией  $u = m_{\pi}^2$  (фиг. 7.3).

Второе слагаемое в выражении (7.122) (оно порядка  $m_{\pi}^2$ ) зависит от амплитуды  $F(v, u(v))$ , взятой вне массовой поверхности. Таким образом, в основанных на алгебре токов теоретических оценках рассеяния *физических* низкоэнергетических пионов мы сталкиваемся с трудным выбором между плохо известным коммутатором  $[\bar{D}^{\beta}, \bar{D}^{\alpha}]$ , который мы использовали в предыдущей главе, и экспериментально столь же плохо известной амплитудой слабого взаимодействия  $F^{(-)}(v, u(v))$ .

Соберем, наконец, все части нашего правила сумм. Полезно ввести амплитуду

$$f^{\beta\alpha}(v, u) = i \int d^4x \exp(iqx) \left\langle p \left| \chi^{\beta} \left( \frac{1}{2} x \right) \chi^{\alpha} \left( -\frac{1}{2} x \right) \right| p \right\rangle = \\ = (m_{\pi}^2 - u)^2 \frac{1}{m_{\pi}^4 f_{\pi}^2} w^{\beta\alpha}(v, u); \quad (7.124)$$

тогда  $T_{\pi N}^{(-)}(v_0)$  приобретает окончательный вид

$$T_{\pi N}^{(-)}(v_0) = \frac{v_0}{f_{\pi}^2} \left[ 1 + f_{\pi}^2 v_0^2 \frac{d}{dv^2} \frac{F^{(-)}(v, u(v))}{v} \Big|_{v=v_0} \right] - \frac{r_A^2}{f_{\pi}^2} \frac{v_0^2 - m_{\pi}^2 m_N^2}{v_0} - 2v_0^5 \int_{m_N m_{\pi}}^{\infty} \frac{f^{(-)}(v, u(v))}{(v^2 - v_0^2)^2} \frac{dv}{v^2}. \quad (7.125)$$

Соотношение (7.125) в принципе дает определенное выражение для физической амплитуды пион-нуклонного рассеяния вперед при любой энергии. Как уже отмечалось, вблизи порога ( $v_0 = m_{\pi} m_N$ ) нуклонный член обращается в нуль (так же как и вклады всех не вырожденных по четности резонансов), и в результате мы получаем формулу Томозавы — Вейнберга, дополненную поправками порядка  $m_{\pi}^2$  и выше:

$$T_{\pi N}^{(-)}(\text{порог.}) = \frac{m_{\pi} m_N}{f_{\pi}^2} \left[ 1 + f_{\pi}^2 m_{\pi}^2 m_N^2 \frac{d}{dv^2} \frac{F^{(-)}(v, u(v))}{v} \Big|_{v=m_{\pi} m_N} \right] - 2m_{\pi}^5 m_N^5 \int_{m_N m_{\pi}}^{\infty} \frac{dv}{v^2 (v^2 - m_{\pi}^2 m_N^2)^2} f^{(-)}(v, u(v)), \quad u(v) = \frac{v^2}{m_N^2}. \quad (7.126)$$

Сравнивая данный результат с формулой (6.137), мы видим, что в последней вместо  $\{(d/dv^2) [F^{(-)}(v)/v]\}_{v=m_{\pi} m_N}$  фигурирует коммутатор  $[\bar{D}, \bar{D}]$  и иная форма интеграла по непрерывному спектру. В частности, соотношение (7.126) [или (7.125)] показывает, что в данном случае интеграл по непрерывному спектру расходится в точке  $v = m_{\pi} m_N$  (или  $v = v_0$ ). В то же время, поскольку  $F(v)$  имеет корневую точку ветвления при  $v = v_0$ , в слагаемом, содержащем  $(d/dv^2) [F(v)/v]$ , также содержится бесконечность. Разумеется, указанные две бесконечности взаимно уничтожаются [в приложении II показано, как проще сформулировать соотношение (7.126), пользуясь только конечными величинами].

Выражение для  $T^{(-)}(v_0)$  выше порога выглядит вполне разумным, оставаясь, однако, бесполезным. Например, при не очень больших значениях  $v_0$  единственной осозаемой поправкой является нуклонный член.

Наконец, полезно обратиться к теперь уже классической конфигурации  $E \rightarrow \infty$ . Предел  $E \rightarrow \infty$  соответствует пределу  $v_0 \rightarrow \infty$ , и любое заключение зависит от динамических предположений относительно асимптотического поведения физических амплитуд и формфакторов.

Так, используя модель полюсов Редже, имеем

$$\frac{T_{\pi N}^{(-)}(v_0)}{v_0} \underset{v_0 \rightarrow \infty}{\sim} v_0^{\alpha_{\rho}(0) - 1}, \quad (7.127)$$

и  $T^{(-)}(v_0)/v_0$  исчезает в пределе при  $v_0 \rightarrow \infty$ , ибо для  $\rho$ -траектории  $\alpha_{\rho}(0) \approx \approx 1/2$ .

Кроме того, если взглянуть на выражение для вклада нуклонной  $Z$ -диаграммы [формула (7.115')], то мы увидим, что он зависит от предела  $\lim_{E \rightarrow \infty} (1/4E^2) d^2(4E^2)$ ; в частности, обращение его в нуль является следствием «гладкости» оператора аксиальной дивергенции (см. следующую главу).

Если предположить, что в  $f^{(-)}$  можно пренебречь вкладами класса II и  $Z$ -вкладами класса I, то отсюда следует правило сумм Адлера — Вейсбергера:

$$r_A^2 = 1 - 2f_{\pi}^2 \int_{m_N m_{\pi}}^{\infty} \frac{dv}{v^2} f^{(-)}(v, 0). \quad (7.128)$$

Чтобы привести это правило сумм к общепринятому виду

$$r_A^2 = \left( 1 + \frac{2m_N^2}{g_{\pi N}^2} \frac{1}{\pi} \int_{m_N m_\pi}^{\infty} \text{Im } T^{(-)}(\nu, 0) \frac{d\nu}{\nu^2} \right)^{-1}, \quad (7.129)$$

надо использовать соотношение Голдбергера — Треймана  $f_\pi = m_N r_A / g_{\pi N}$  и положить

$$\pi f^{(-)}(\nu, 0) = \text{Im } T^{(-)}(\nu, 0)$$

$[T^{(-)}(\nu, 0)$  — амплитуда для случая безмассовых пионов].

Полезно отметить, что в пределе при  $m_\pi \rightarrow 0$  соотношения (7.126) и (7.128) [или (7.129)] в точности эквивалентны. В самом деле, имеем

$$\lim_{m_\pi \rightarrow 0} \frac{T_{\pi N}^{(-)}(\text{порог.})}{m_\pi m_N} = \frac{1}{f_\pi^2}. \quad (7.130)$$

Написав для  $[T^{(-)}(\nu)/\nu]_{\text{порог}}$  дисперсионное соотношение с фиксированными массами без вычитаний (что оправдано, так как  $T^{(-)}/\nu \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow \infty$ ), получим

$$\lim_{m_\pi \rightarrow 0} \frac{T^{(-)}(\text{порог.})}{m_\pi m_N} = \frac{g_{\pi N}^2}{m_N} + \frac{2}{\pi} \int_{m_N m_\pi}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2} \text{Im } T^{(-)}(\nu). \quad (7.131)$$

Приравнявая выражения (7.130) и (7.131) с учетом соотношений Голдбергера — Треймана и ЧСАТ (при  $m_\pi = 0$  оба соотношения являются точными), снова приходим к соотношению (7.128) или (7.129).

## § 6. Хронологические произведения и низкоэнергетические пределы

Изложенным в настоящей главе методом очень полезно вывести низкоэнергетические теоремы [198, 200], хотя это и не дает принципиально новых результатов. Проблема, которую мы хотим исследовать, вкратце заключается в следующем. Нам часто приходится иметь дело с низкоэнергетическими теоремами для амплитуд, не относящихся непосредственно к экспериментальным данным, как это было, например, в гл. 3, где мы установили результаты такого рода для амплитуд, относящихся к безмассовым пионам. Для извлечения из упомянутых теорем информации о физических амплитудах мы собираемся использовать представление Лоу, т. е. дисперсионное соотношение вдоль параболического контура в  $(\nu, u, w)$ -пространстве [мы рассматриваем случай  $q_1^2 = q_2^2 = u$ ,  $w = 1/2(q_2^2 - q_1^2) = 0$ ].

Сформулируем низкоэнергетическую теорему. Мы исходим (как и в гл. 4, § 1) из ковариантной амплитуды  $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$  (удовлетворяющей тождествам Уорда гл. 4, § 2), соответствующей рассеянию вперед ( $p_1 = p_2 = p$ ,  $q_1 = q_2 = q$ ):

$$T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = i \int d^4x \exp(iqx) \langle p | T(\hat{A}_\nu^\beta(x) A_\mu^\alpha(0)) | p \rangle, \quad (7.132)$$

где  $\alpha, \beta$  —  $SU(2)$ -индексы. Таким образом, дивергенции рассматриваемых токов обладают квантовыми числами пиона, а внешние состояния являются нуклонными состояниями.

Рассмотрим тождество Уорда (4.14) (для рассеяния вперед). В нашем случае оно гласит

$$q^\mu q^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = W^{\beta\alpha}(\nu, u) - i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \tau^\gamma \nu + S^{\beta\alpha}, \quad (7.133)$$

где

$$\begin{aligned} W^{\beta\alpha} &= i \int d^4x \exp(iqx) \langle p | T(\bar{D}^\beta(x) \bar{D}^\alpha(0)) | p \rangle, \\ S^{\beta\alpha} &= i \int d^3x \exp(-iqx) \langle p | [A_0^\beta(x, 0), \bar{D}^\alpha(0)] | p \rangle. \end{aligned} \quad (7.134)$$

Соотношение (7.133) (для физических пионов) является аналогом соотношения (3.63), полученного для безмассовых пионов. Но сейчас его правая часть содержит еще два слагаемых. Во-первых, появляется амплитуда  $W^{\beta\alpha}$ , связанная с  $T$ -произведением двух дивергенций, обладающих квантовыми числами пионов. Во-вторых, присутствует последнее слагаемое  $S^{\beta\alpha}$ , связанное с одновременным коммутатором, обладающим квантовыми числами скалярной частицы, которому можно придать смысл нуклон-нуклон-мезонной вершинной функции. В  $\sigma$ -модели (гл. 5) слагаемое  $S^{\beta\alpha}$  фактически оказывается пропорциональным константе взаимодействия нуклона и  $\sigma$ -мезона.

Низкоэнергетическую ( $q_\mu \rightarrow 0$ ) теорему для  $W^{\beta\alpha}$  проще всего вывести из равенства (7.133). Действительно, нет необходимости заботиться об обращении в нуль  $q^\mu q^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$  в этом пределе, поскольку нуклонный вклад при  $\nu \rightarrow 0$ ,  $\mu \rightarrow 0$  имеет обращающийся в нуль знаменатель — обстоятельство, с которым мы познакомились в гл. 3. Рассмотрим затем вклад класса II в  $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$ , даваемый промежуточным пионным (физическим) состоянием в токовой линии. Данный вклад был весьма существенным в случае безмассовых пионов, который мы рассматривали в гл. 3, а сейчас (в отличие от упомянутого случая) имеет полюс при  $q^2 = m_\pi^2$  и регулярен при  $q_\mu = 0$ . Таким образом, соответствующий член в  $q^\mu q^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$  обращается в нуль в пределе при  $q_\mu \rightarrow 0$  и потому не требует особых забот.

Следовательно, можно написать

$$q^\mu q^\nu \bar{T}_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = (q^\mu q^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha})_N + O(q_\rho) \quad (7.135)$$

Величина  $(q^\mu q^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha})_N$  легко вычисляется (как в гл. 3). Используя матричный элемент

$$\langle p' | A_\mu^\beta | p \rangle = r_A \bar{u}(p') \gamma_\mu \gamma_5 u(p) \frac{1}{2} \tau^\beta + O((p' - p)_\mu), \quad (7.136)$$

получаем

$$(\bar{q}^\mu q^\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha})_N = r_A^2 \frac{v^2 - m_N^2 u}{1/4 u^2 - v^2} \frac{1}{2} \{[\tau^\beta, \tau^\alpha] v - u \delta_{\alpha\beta}\} [1 + O(q_\rho)]. \quad (7.137)$$

Теперь все амплитуды разобьем, как обычно:

$$W^{\beta\alpha} = \delta_{\alpha\beta} W^+ + \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^\alpha] W^-, \quad (7.138)$$

и учтем, что  $S^{\beta\alpha} = S_{\alpha\beta} = S \delta^{\alpha\beta}$ . Тогда из тождества Уорда (7.133) получаем при  $q_\mu \rightarrow 0$

$$W^+(v, u) = -S + O(v^2), \quad (7.139)$$

$$\frac{W^-(v, u)}{v} = 1 + \lim_{q_\mu \rightarrow 0} r_A^2 \frac{v^2 - m_N^2 u}{1/4 u^2 - v^2} + O(v^2). \quad (7.140)$$

(Напомним, что  $W^+$  — четная функция аргумента  $v$ , а  $W^-$  — нечетная.)

Принятые в соотношении (7.140) обозначения неудовлетворительны. В самом деле, асимптотическое разложение  $W^{\beta\alpha}$  в окрестности  $v = 0$ ,  $u = 0$  неопределенно, пока не задан контур в плоскости  $(v, u)$ , вдоль которого имеет силу данное разложение. Это обстоятельство связано с тем, что из-за сингулярности нуклонного вклада на линиях  $v = \pm 1/2 u$  и точка  $v = 0$ ,  $u = 0$  не является регулярной. Разумеется, мы вольны выбирать контур



по своему усмотрению, и асимптотическое разложение соотношения (7.140) зависит от такого выбора. Однако подходящий контур надо выбирать с учетом того, что надлежит делать впоследствии. Итак, положение следующее. Ни для какого контура мы не можем совершить физический (экспериментальный) переход, по крайней мере в настоящее время. Таким образом, мы вынуждены проверять соотношение (7.140), оценивая его левую часть каким-либо косвенным экспериментальным методом, т. е. используя дисперсионный подход. У нас есть представление Лоу для  $T$ -произведений, и это представление — единственный имеющийся в нашем распоряжении инструмент. В данной кинематике представление Лоу есть дисперсионное соотношение при фиксированном  $w = 0$  и при  $u = v^2/E^2$ . Именно этого контура мы и будем придерживаться. Если рассматривать переменную  $q_\mu$ , то мы получим этот контур в плоскости  $(v, u)$ , положив сначала  $q = 0$ , а затем перейдя к пределу при  $q_0 \rightarrow 0$  при фиксированном  $p$ . Вдоль такого параболического контура асимптотические разложения соотношений (7.139) и (7.140) дают

$$W^+(0, 0) = -S \equiv C^+, \quad (7.141)$$

$$\lim_{\substack{v \rightarrow 0, \\ u = v^2/E^2 \\ E \text{ фиксировано}}} \frac{W^-(v, u)}{v} = 1 - r_A^2 \frac{|p|^2}{E^2} \equiv C^- \quad (7.142)$$

(обозначения  $C^+$ ,  $C^-$  окажутся удобными в дальнейшем). Именно эти низкоэнергетические теоремы мы предполагаем использовать.

Как уже говорилось, мы не можем экспериментально совершить переход вдоль параболы (доказать это мы предлагаем в качестве упражнения тем нашим читателям, кто наделен способностями к экспериментальной физике). Остается использование представления Лоу. Мы можем использовать представление Лоу по любой из переменных  $q_0$  или  $v$ , помня, что важно лишь знать, что зафиксировано, т. е. что  $u^2 - v^2/E^2 = 0$ .

Таким образом, мы имеем

$$W^{\beta\alpha}[v] = \int dv' \left\{ \frac{w^{\beta\alpha}[v']}{v' - v} + \frac{w^{\alpha\beta}[v']}{v' + v} \right\}, \quad (7.143)$$

где  $w^{\beta\alpha}[v]$  означает  $w^{\beta\alpha}(v, u(v))$ , а  $w^{\beta\alpha}$  определено соотношением (7.111). Равенство (7.143) есть представление Лоу для  $W^{\beta\alpha}$  вдоль параболы  $u = v^2/E^2$ . Используя данное представление Лоу, низкоэнергетические теоремы (7.141) и (7.142) можно привести к виду

$$C^+ = 2 \int_0^\infty \frac{dv^2}{v^2} w^+[v], \quad (7.144)$$

$$C^- = 2 \int_0^\infty \frac{dv^2}{v^2} \frac{w^-[v]}{v}. \quad (7.145)$$

Условие (7.145) идентично выражению, полученному в предыдущем разделе насыщением одновременного коммутатора  $[\bar{Q}^\beta, \bar{Q}^\alpha]$  [соотношение (7.114)]. В то же время нетрудно убедиться, что равенство (7.144) совпадает с результатом, получаемым насыщением матричного элемента  $\sigma$ -коммутатора  $[\bar{Q}^\beta, \bar{D}^\alpha]$ .

Из сказанного в предыдущем параграфе ясно, что в точке  $u = m_\pi^2$ ,  $v = v_0$  функция  $W^{\beta\alpha}(v, u(v))$  имеет двойной полюс с вычетом, пропорциональным физической пион-нуклонной амплитуде  $T_{\pi N}^{\beta\alpha}(v_0)$ :

$$W^{\beta\alpha} \sim \frac{m_\pi^4 f_\pi^2}{[m_\pi^2 - u(v)]^2} T_{\pi N}^{\beta\alpha}(v_0). \quad (7.146)$$

Поэтому полезно ввести функции

$$\begin{aligned} F^{\beta\alpha} &= (m_{\pi}^4 f_{\pi}^2)^{-1} [m_{\pi}^2 - u(v)]^2 W^{\beta\alpha}, \\ f^{\beta\alpha} &= (m_{\pi}^4 f_{\pi}^2)^{-1} [m_{\pi}^2 - u(v)]^2 w^{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (7.147)$$

так чтобы функция  $F^{\beta\alpha}$  была регулярной при  $v = v_0$  и выполнялось условие

$$\lim_{v \rightarrow v_0} F^{\beta\alpha} [v] = T_{\pi N}^{\beta\alpha} (v_0). \quad (7.148)$$

Теперь очевидно, что результат предыдущего параграфа (или гл. 6, § 5, п. 2) можно получить, написав для  $F^{\beta\alpha}$  дисперсионное соотношение с одним вычитанием, которое связывает предсказание алгебры токов для  $F^{\beta\alpha}$  в точке  $v = u = 0$  непосредственно с экспериментальным значением  $F^{\beta\alpha}$  при  $v = v_0$ ,  $u = m_{\pi}^2$ . По прежде чем писать такое правило сумм, следует обратить внимание на асимптотическое поведение  $F^{\beta\alpha}$  при больших  $v$ . Поскольку асимптотически  $F \sim v^4 W$ , из справедливости дисперсионного соотношения без вычитаний (7.143) следует лишь существование для  $F(v)$  дисперсионного соотношения с двумя вычитаниями<sup>1)</sup>.

Таким образом, нам нужна некоторая дополнительная информация об асимптотическом поведении  $F(v)$ . Такая информация, конечно, содержится в пределе, даваемом соотношениями (7.63) и (7.64).

Используя разложение

$$F^{\beta\alpha} [v] = \delta_{\alpha\beta} F^+ [v] + \frac{1}{2} [\tau^{\beta}, \tau^{\alpha}] v F^- [v], \quad (7.149)$$

имеем

$$\begin{aligned} F^+ &\underset{v \rightarrow \infty}{\sim} v^2 d^+, \\ F^- &\underset{v \rightarrow \infty}{\sim} v^2 d^-, \end{aligned} \quad (7.150)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta} d^+ &= \frac{E^2}{m_{\pi}^4 f_{\pi}^2} \int d^3 x \langle p | [\dot{D}^{\beta} (x), \bar{D}^{\alpha} (0)] | p \rangle, \\ \frac{1}{2} [\tau^{\beta}, \tau^{\alpha}] d^- &= \frac{E}{m_{\pi}^4 f_{\pi}^2} \int d^3 x \langle p | [\bar{D}^{\beta} (x), \bar{D}^{\alpha} (0)] | p \rangle. \end{aligned} \quad (7.151)$$

Таким образом, из соотношений (7.150) видно, что для написания дисперсионного соотношения без вычитаний мы должны использовать вспомогательную функцию

$$\bar{F}^{\pm} [v] = F^{\pm} [v] - (v^2 - v_0^2) d^{\pm}, \quad (7.152)$$

для которой, конечно, выполняется равенство

$$\text{Im } \bar{F}^{\pm} = \text{Im } F^{\pm}. \quad (7.153)$$

В интересующих нас точках  $v = v_0$ ,  $v = 0$  имеем

$$\begin{aligned} \bar{F}^+ [v_0] &= F^+ [v_0] = T_{\pi N}^+ (v_0), \\ \bar{F}^- [v_0] &= F^- [v_0] = \frac{T_{\pi N}^- (v_0)}{v_0}, \\ \bar{F}^{\pm} [0] &= F^{\pm} [0] + v_0^2 d^{\pm} = \frac{C^{\pm}}{f_{\pi}^2} + v_0^2 d^{\pm}. \end{aligned} \quad (7.154)$$

<sup>1)</sup> Мы используем то обстоятельство, что в дисперсионном соотношении для четной и нечетной частей  $W^{\beta\alpha}$  основной переменной является  $v^2$  [формулы (7.144) и (7.145)].

Итак, мы без опасений можем написать дисперсионное соотношение с одним вычитанием

$$\bar{F}^{\pm} [v_0^2] = \bar{F}^{\pm} [0] + \frac{v_0^2}{\pi} \int \frac{dv'^2}{v'^2} \frac{\text{Im } F^{\pm} [v'^2]}{v'^2 - v_0^2}, \quad (7.155)$$

которое окончательно дает

$$T_{\pi N}^+(v_0) = \frac{C^+(v_0)}{f_{\pi}^2} + v_0^2 d^+ + \frac{v_0^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dv^2}{v^2} \frac{\text{Im } F^+ [v^2]}{v^2 - v_0^2}, \quad (7.156)$$

$$\frac{T_{\pi N}^-(v_0)}{v_0} = \frac{C^-(v_0)}{f_{\pi}^2} + v_0^2 d^- + \frac{v_0^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dv^2}{v^2} \frac{\text{Im } F^- [v^2]}{v^2 - v_0^2}. \quad (7.156')$$

В случае максимально крутой параболы ( $v_0 = m_N m_{\pi}$ ) мы имеем  $C^-(v_0 = m_N m_{\pi}) = 1$  и соотношение (7.156') принимает вид

$$T_{\pi N}^-(m_N m_{\pi}) = \frac{m_N m_{\pi}}{f_{\pi}^2} + O(m_{\pi}^2). \quad (7.157)$$

Приведенная формула дает корректную интерпретацию мягкопионной теоремы применительно к физическим пионам. Экстраполяция вдоль параболы свидетельствует, очевидно, о том, что формула, полученная в приближении мягких пионов  $q=0$  при  $q_0 \rightarrow 0$ , справедлива и в применении к физическому  $\pi N$ -рассеянию вблизи порога, так как поправки имеют порядок малости  $m_{\pi}^2$  по отношению к основному члену.

Соотношение (7.156') для случая максимально крутой параболы совпадает, конечно, с выражениями, полученными в гл. 6 насыщением матричного элемента коммутатора  $\bar{Q}_L$  и  $\bar{Q}_0$ .

## Приложение I. Токи и ковариантность

### 1. Введение

Даже в классической физике иметь дело со спином непросто. В данной главе мы рассмотрели требования ковариантности по отношению к матричным элементам коммутаторов скалярных операторов. Столь же полный анализ в случае высших тензорных операторов вряд ли возможен, так как осложнения, вызываемые спином, почти непреодолимы.

Но в принципе физическое содержание требований ковариантности остается тем же, что и в теории со скалярными операторами. Для иллюстрации осложнений, обусловленных наличием спина, мы рассмотрим ряд особо важных случаев.

### 2. Ковариантность вакуумного среднего $R$ -произведения двух токов: представление Челлена — Лемана

Сказанное в § 3, возможно, убедило читателя, что зависимость от системы отсчета, например, представления Лоу [формула (7.44)] обусловлена тем, что матричные элементы берутся между состояниями с определенным импульсом, чем неявно фиксируется система отсчета. Это, безусловно, верно в случае рассмотренных выше скалярных операторов, но в случае высших спинов дополнительной причиной зависимости от системы отсчета является тензорный характер операторов.

Это положение лучше всего можно проиллюстрировать, рассмотрев вакуумное среднее запаздывающего произведения двух токов [196, 121] (по аналогии с проведенным в § 3, п. 4 анализом для скалярных операторов). В данном случае нельзя обвинить вакуумное состояние в предпочтении какой-либо системы отсчета, и любая зависимость вакуумного среднего

от системы отсчета должна быть приписана тензорному характеру рассматриваемых операторов.

Рассмотрим

$$T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = \delta_{\alpha\beta} T_{\nu\mu}(q) = i \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | R(j_{\nu}^{\beta}(x) j_{\mu}^{\alpha}(0)) | 0 \rangle. \quad (I.1)$$

Ряд уже знакомых преобразований приводит к представлению

$$T_{\nu\mu}(q) = \int_0^{\infty} dq'_0 \frac{t_{\nu\mu}(q'_0, \mathbf{q})}{q'_0 - q_0} - \int_{-\infty}^0 dq'_0 \frac{t_{\mu\nu}(-q'_0, -\mathbf{q})}{q'_0 - q_0}, \quad (I.2)$$

где  $t_{\nu\mu}$  определяется так же, как и в гл. 6, § 2, т. е.

$$\delta_{\alpha\beta} t_{\nu\mu}(q) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(q - p_n) \langle 0 | j_{\nu}^{\beta} | n \rangle \langle n | j_{\mu}^{\alpha} | 0 \rangle = \quad (I.3)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | j_{\nu}^{\beta}(x) j_{\mu}^{\alpha}(0) | 0 \rangle. \quad (I.4)$$

Величина  $t_{\nu\mu}(q')$  — это настоящий тензор второго ранга, и мы разлагаем его:

$$t_{\nu\mu}(q') = \theta(q'_0) [a(u') g_{\mu\nu} + b(u') q'_{\mu} q'_{\nu}], \quad (I.5)$$

где  $u' = q'^2 = q_0'^2 - \mathbf{q}^2$ .

Все это, однако, не гарантирует, что  $T_{\nu\mu}$  тоже будет тензором второго ранга. Выбор вакуума в качестве внешнего состояния дает нам право ожидать, что ковариантность не теряется в связи с контуром интегрирования. Тем не менее сделать вывод о ковариантности  $T_{\nu\mu}$  на основании ковариантного выражения (I.5) для  $t_{\nu\mu}$  в общем случае невозможно; будут присутствовать дополнительные нековариантные члены, пропорциональные  $g_{\mu 0} g_{\nu 0}$ . Но в этом нет никакой трудности, поскольку, как мы уже не раз подчеркивали, именно тензор  $t_{\nu\mu}$ , а не  $T_{\nu\mu}$  непосредственно связан с наблюдаемыми величинами [см., например, соотношение между  $b(u)$  и сечением  $e^+e^-$ -аннигиляции, равенство (6.22)].

Чтобы продемонстрировать наличие членов, зависящих от системы отсчета, напишем

$$q'_{\mu} = q_{\mu} + n_{\mu} (q'_0 - q_0), \quad n_{\mu} = g_{\mu 0} \quad (I.6)$$

и, подставив равенство (I.6) в соотношение (I.5), получим] из соотношения (I.2)

$$T_{\nu\mu}(q) = A(u) g_{\mu\nu} + B(u) q_{\mu} q_{\nu} + n_{\mu} n_{\nu} \int_0^{\infty} du' b(u'), \quad (I.7)$$

где

$$(A(u), B(u)) = \int_0^{\infty} \frac{du'}{u' - u} (a(u'), b(u')) \quad (I.8)$$

(смешанные слагаемые, пропорциональные  $n_{\mu} q_{\nu} + n_{\nu} q_{\mu}$ , исчезают вследствие перекрестной симметрии).

Равенство (I.7) показывает, что в разложении  $T_{\nu\mu}$  по инвариантным амплитудам появляется зависящий от системы отсчета член, пропорциональный  $n_{\mu} n_{\nu}$ , и нельзя считать, что

$$\int_0^{\infty} du b(u) = 0.$$

Этот интеграл должен быть отличным от нуля вследствие положительной определенности  $b(u)$  (в гл. 6, § 2 мы пришли к такому заключению в част-

ном случае сохраняющихся токов, но данный результат носит общий характер). Он равен вакуумному среднему  $\langle 0 | c | 0 \rangle$  швингеровского члена, присутствующего в коммутаторе  $[j_0, j_k]$  [формула (6.12)].

В том случае, когда токи сохраняются, тензоры  $t_{\nu\mu}$  и  $T_{\nu\mu}$  принимают вид

$$t_{\nu\mu} = \theta(q_0) b(u) (q_\mu q_\nu - u g_{\mu\nu}), \quad (I.9)$$

$$\begin{aligned} T_{\nu\mu} &= \int_0^\infty \frac{du'}{u' - u} b(u') (q_\mu q_\nu - u' g_{\mu\nu}) + \langle 0 | C | 0 \rangle n_\mu n_\nu = \\ &= (q_\mu q_\nu - u g_{\mu\nu}) \int_0^\infty \frac{du'}{u' - u} b(u') + (n_\mu n_\nu - g_{\mu\nu}) \langle 0 | C | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (I.10)$$

### а. Правила сумм Вейнберга для спектральной функции и расщепление масс пионов

В принципе тема данного раздела не соответствует содержанию настоящего приложения. Но здесь излагается подходящий математический аппарат, и мы пользуемся возможностью применить его, чтобы дать альтернативную интерпретацию правил сумм Вейнберга (гл. 6, § 4, п. 3), а затем сказать несколько слов о впечатляющем вычислении разности масс  $\pi^+$  —  $\pi^0$ -мезонов.

Рассмотрим разность

$$\delta T_{\nu\mu} = T_{\nu\mu}^V - T_{\nu\mu}^A, \quad (I.11)$$

где

$$i \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | T(V_\nu^\beta(x) V_\mu^\alpha(0)) - T(A_\nu^\beta(x) A_\mu^\alpha(0)) | 0 \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta T_{\nu\mu}. \quad (I.11')$$

Из предположения о равенстве векторного и аксиального швингеровских членов (гл. 6, § 2, п. 3) вытекает ковариантность тензора  $\delta T_{\nu\mu}$ :

$$\delta T_{\nu\mu} = \{g_{\mu\nu} \delta A(u) + q_\mu q_\nu \delta B(u)\}, \quad (I.12)$$

где, например,

$$\delta A(u) = \int_0^\infty \frac{du'}{u' - u} [a^V(u') - a^A(u')]. \quad (I.13)$$

Правила сумм Вейнберга для спектральной функции можно рассматривать как требование, чтобы из соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} \delta T_{\nu\mu} &= -\frac{1}{u} q_\mu q_\nu \int_0^\infty du' [b^V(u') - b^A(u')] - \\ &- \frac{1}{u} g_{\mu\nu} \int_0^\infty du' [a^V(u') - a^A(u')] = 0 \end{aligned} \quad (I.14)$$

следовало равенство нулю коэффициентов и при  $g_{\mu\nu}/u$ , и при  $q_\mu q_\nu/u!$  (Первое, очевидно, гораздо сомнительнее второго.)

Сущность условия такова: вообще говоря,  $T_{\nu\mu}^V$  и  $T_{\nu\mu}^A$  неодинаковы (в противном случае  $m_A = m_\rho$ ,  $f_\pi$  или  $m_\pi = 0$ ), но мы требуем, чтобы они совпадали асимптотически при больших  $q$ . Основанием для такого асимптотического требования (с точки зрения теории поля) служит то обстоятельство, что при очень больших энергиях существенны лишь затравочные величины (массы и константы взаимодействия). Но, как мы ранее отмечали, затравочные векторные и аксиальные величины равны. Иначе говоря, даже если симметрия не является точной и массы неодинаковы, в асимптотической обла-

сти этой разницей можно пренебречь. При очень больших импульсах векторный и аксиальный токи обнаруживают одинаковые свойства, что приводит к правилам сумм Вейнберга для спектральной функции.

Получив, таким образом, заново правила сумм для спектральной функции, проведем связанное с ними важное вычисление электромагнитной разности масс пионов [240].

Мы начнем с общей формулы [241, 242]

$$\Delta m_\pi^2 = m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2 = -\frac{1}{2} \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4q d_{\nu\mu}(q) M^{\nu\mu}(q, p), \quad (I.15)$$

где  $d_{\nu\mu}(q)$  — фотонный пропагатор, а  $M_{\nu\mu}(q, p)$  — разность  $\pi^+$ - и  $\pi^0$ -амплитуд виртуального комптоновского рассеяния вперед<sup>1)</sup>:

$$M_{\nu\mu}(q, p) = i \int d^4x \exp(iqx) [\langle \pi^+ | T^*(V_\nu^3(x) V_\mu^3(0)) | \pi^+ \rangle - \langle \pi^+ \rightarrow \pi^0 \rangle]. \quad (I.16)$$

Общая структура  $d_{\mu\nu}$  такова:

$$d_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{q^2} \left( -g_{\mu\nu} + \frac{\lambda q_\mu q_\nu}{q^2} \right), \quad (I.17)$$

причем выбор множителя  $\lambda$ , как хорошо известно, не влияет на результат вследствие калибровочной инвариантности, поскольку мы требуем выполнения условия

$$q^\nu M_{\nu\mu}(q, p) = 0. \quad (I.18)$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\Delta m_\pi^2 = \frac{1}{2} \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{q^2} M_\mu^\mu(q, p). \quad (I.19)$$

Вычисление  $M_\mu^\mu(q, p)$ , вообще говоря, является сложной динамической проблемой, рассмотрение которой мы отложим до гл. 10. Здесь же мы воспользуемся тем обстоятельством, что величину  $M_{\mu\nu}(q, p)$  можно вычислить для случая безмассовых пионов (основание для чего мы увидим в гл. 10, § 3, п. 2), как бы ни казалось странным вычислять расщепление масс для безмассовых пионов!

Перейдем к вычислению предела  $\lim_{p_\mu \rightarrow 0} M_{\nu\mu}(q, p)$ . С этой целью рассмотрим тензор

$$T_{\lambda\rho\nu\mu}(q, p) = i \int d^4x d^4y d^4z \exp(iqz) \exp(ipx) \exp(-ipy) \times \\ \times \langle 0 | T^*(A_\lambda^3(x) A_\rho^3(y) V_\nu^3(z) V_\mu^3(0)) - T^*(A_\lambda^3(x) A_\rho^3(y) V_\nu^3(z) V_\mu^3(0)) | 0 \rangle. \quad (I.20)$$

Обычным путем получаем следующее тождество Уорда:

$$p^\lambda p^\rho T_{\lambda\rho\nu\mu} = -4i \int d^4z \exp(iqz) \langle 0 | T^*(V_\nu^3(z) V_\mu^3(0)) - \\ - \exp(ipz) T^*(A_\nu^3(z) A_\mu^3(0)) | 0 \rangle; \quad (I.21)$$

при выводе мы приняли во внимание, что в случае безмассовых пионов аксиальный ток сохраняется, т. е.  $\partial^\mu A_\mu = 0$ . В пределе мягких пионов

$$\lim_{p_\mu \rightarrow 0} p^\lambda p^\rho T_{\lambda\rho\nu\mu}(q, p) = 2f_\pi^2 M_{\nu\mu}(q, 0). \quad (I.22)$$

Итак, используя тождество (I.21), получаем

$$M_{\nu\mu}(q, 0) = -\frac{2}{f_\pi^2} \delta T_{\nu\mu}(q), \quad (I.23)$$

где  $\delta T_{\nu\mu}(q)$  — введенная в равенстве (I.11) разность токовых пропагаторов.

<sup>1)</sup> Через  $T^*$  обозначен ковариантный оператор, заменяющий хронологическое произведение  $T$  (приложение I, п. 5).

В пределе мягких пионов соотношение (I.19) для  $\Delta m_\pi^2$  дает

$$\Delta m_\pi^2 = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{f_\pi^2} \int \frac{d^4q}{q^2} \delta T_\pi^\mu(q). \quad (\text{I.24})$$

Подставив сюда представление (I.13), получаем

$$\begin{aligned} \Delta m_\pi^2 = & -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{f_\pi^2} \int \frac{d^4q}{u} \int du' \{4[a^V(u') - a^A(u')] + \\ & + u' [b^V(u') - b^A(u')] + (u-u') [b^V(u') - b^A(u')]\} \frac{1}{u'-u}. \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

Используем теперь условие калибровочной инвариантности  $q^\nu M_{\nu\mu} \equiv \equiv -(2/f_\pi^2) q^\nu \delta T_{\nu\mu} = 0$ , которое дает <sup>1)</sup>

$$a^V(u) - a^A(u) + u [b^V(u) - b^A(u)] = 0 \quad (\text{I.26})$$

и

$$\int du [b^V(u) - b^A(u)] = 0. \quad (\text{I.27})$$

Соотношение (I.25) приобретает окончательный вид

$$\Delta m_\pi^2 = -\frac{3ie^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{f_\pi^2} \int \frac{d^4q}{u} \int \frac{du'}{u'-u} [a^V(u') - a^A(u')]. \quad (\text{I.28})$$

Вышеприведенное выражение показывает, что существование конечного значения для  $\Delta m_\pi^2$  существенно зависит от свойства сверхсходимости, выражаемого вторым правилом сумм Вейнберга

$$\int du [a^V(u) - a^A(u)] = 0. \quad (\text{I.29})$$

Для явного вычисления мы используем одночастичное ( $\rho$ ,  $A_1$ ) насыщение <sup>2)</sup>; имеем

$$\int \frac{du'}{u'-u} [a^V(u') - a^A(u')] = f_\rho^2 \left( \frac{1}{m_A^2 - u} - \frac{1}{m_\rho^2 - u} \right), \quad (\text{I.30})$$

где учтен результат, получающийся при насыщении резонансами соотношения (I.29), а именно  $f_\rho^2 = f_A^2$ . Обычные выкладки (задачу облегчает поворот контура интегрирования  $q_0 \rightarrow iq_0$ ) окончательно дают

$$\Delta m_\pi^2 = \frac{3e^2}{16\pi^2} \frac{f_\rho^2}{f_\pi^2} \ln \frac{m_A^2}{m_\rho^2}. \quad (\text{I.31})$$

Кроме того, используя соотношения  $(f_\rho/f_\pi)^2 = (2m_\rho)^2$  и  $m_A^2 = 2m_\rho^2$  (гл. 6, § 3), получаем замечательно простой результат

$$m_{\pi^+} - m_{\pi^0} = 3 \frac{m_\rho^2}{m_\pi} \frac{e^2}{4\pi} \frac{\ln 2}{2\pi} \approx 5 \text{ МэВ}, \quad (\text{I.32})$$

превосходно согласующийся с экспериментальным значением 4,7 МэВ.

Получив великолепную формулу (I.32), естественно спросить себя, нельзя ли обобщить ее на физические значения массы пиона. Поскольку для такого рассмотрения необходимы другие соображения, мы вернемся к данной проблеме в гл. 10.

Аналогичный метод можно попытаться применить к вычислению разности масс  $K^+ - K^0$ -мезонов [243]. Возможность существования конечного значения снова зависит от справедливости «второго правила сумм Вейнберга» [для случая  $SU(3) \otimes SU(3)$ ]. Кроме того, в пределе мягких каонов

<sup>1)</sup> Интересно отметить, что калибровочная инвариантность и дисперсионные соотношения без вычитаний дают первое соотношение Вейнберга (I.27).

<sup>2)</sup> См. примечание на стр. 287.—Прим. ред.

возможны эффекты, которыми нельзя пренебречь. Если несмотря на такое различие все же провести вычисление, то результат оказывается таким:

$$m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2 = m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2,$$

что противоречит эксперименту.

### 3. Представление Лоу для токовых амплитуд

Рассматривая матричные элементы токов, мы познакомились с дополнительной зависимостью от системы отсчета, обусловленной векторным характером наших операторов. Этот новый эффект, равно как и прежняя зависимость, связанная с контуром интегрирования, вообще говоря, имеет место для матричных элементов между лоренц-инвариантными состояниями.

Чтобы пояснить этот более общий случай, исследуем величину

$$T_{\mu}^{\beta\alpha}(Q, P, \Delta) = i \int d^4x \exp(iQx) \langle p_2 | R \left( \varphi^{\beta} \left( \frac{1}{2} x \right) j_{\mu}^{\alpha} \left( -\frac{1}{2} x \right) \right) | p_1 \rangle, \quad (I.33)$$

где внешние состояния по-прежнему бесспиновые,  $\varphi$  — скалярный, а  $j_{\mu}$  — 4-векторный оператор. Обычные преобразования приводят к представлению Лоу

$$T_{\mu}^{\beta\alpha}(Q, P, \Delta) = \int \frac{dQ'_0}{Q'_0 - Q_0} t_{\mu}^{\beta\alpha}(Q', P, \Delta), \quad (I.34)$$

где

$$t_{\mu}^{\beta\alpha}(Q', P, \Delta) = \frac{1}{2\pi} \int d^4x \exp(iQ'x) \langle p_2 | \left[ \varphi^{\beta} \left( \frac{1}{2} x \right), j_{\mu}^{\alpha} \left( -\frac{1}{2} x \right) \right] | p_1 \rangle. \quad (I.35)$$

Поскольку  $t_{\mu}^{\beta\alpha}$  преобразуется как 4-векторная функция, мы можем использовать для нее разложение

$$t_{\mu}^{\beta\alpha}(Q', P, \Delta) = P_{\mu} t_1^{\beta\alpha}(v', u', w') + \Delta_{\mu} t_2^{\beta\alpha}(v', u', w') + Q'_{\mu} t_3^{\beta\alpha}(v', u', w'), \quad (I.36)$$

где  $t_{1,2,3}^{\beta\alpha}$  — скалярные функции [множители  $\theta(\pm P_0 \pm Q'_0)$  подразумеваются]. Дело в том, что представление Лоу (I.34) содержит интеграл по  $Q'_0$ , так что тензорная структура  $t_{\mu}^{\beta\alpha}$ , вообще говоря, не воспроизводится аналогичным разложением  $T_{\mu}^{\beta\alpha}$ . Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, напомним

$$Q'_{\mu} = Q_{\mu} + n_{\mu} (Q'_0 - Q_0), \quad (I.37)$$

где  $n_{\mu} = g_{\mu 0}$ . Комбинируя равенства (I.37), (I.36) и (I.34), получаем для  $T_{\mu}^{\beta\alpha}$  разложение

$$T_{\mu}^{\beta\alpha}(Q', P, \Delta) = P_{\mu} T_1^{\beta\alpha} + \Delta_{\mu} T_2^{\beta\alpha} + Q_{\mu} T_3^{\beta\alpha} + \frac{n_{\mu}}{P_0} \int dv' t_3^{\beta\alpha}(v', u(v'), w(v')), \quad (I.38)$$

где

$$T_i^{\beta\alpha} = \int \frac{dv'}{v' - v} t_i^{\beta\alpha}(v', u(v'), w(v')). \quad (I.39)$$

Таким образом, мы видим, что в дополнение к вопросу о том, будут ли  $T_i^{\beta\alpha}$  истинно скалярными функциями, возникает новая трудность из-за наличия (зависящего от системы отсчета) слагаемого с  $n_{\mu}$ . Другими словами, существование дополнительных векторов в пространстве-времени допускает более сложные нековариантные слагаемые в матричных элементах запаздывающего (или хронологического) произведения.

Отсутствие последнего слагаемого в представлении (I.38) является дополнительным требованием (при конечном  $P_0$ )

$$\int dv' t_3^{\beta\alpha}(v', u(v'), w(v')) = 0, \quad (I.40)$$



и данное правило сумм можно связать с некоторыми ограничениями на одновременные коммутаторы. В частности, соотношение (I.40) выполняется, если одновременной коммутатор  $[Q^\beta(\mathbf{x}, 0), j_\mu^\alpha(0)]$  локализован.

Итак, мы убедились, что справедливость соотношения (I.40) и, следовательно, ковариантность  $T_\mu^{\beta\alpha}$  в равенстве (I.33) зависят от модели. Еще в § 3, п. 3 и 4 мы выяснили, что зависимость  $R$ -произведения от системы отсчета связана с высшими одновременными коммутаторами.

#### 4. Коммутаторы токов и лоренц-ковариантность

Теперь мы постараемся дать представление о тех трудностях, которые возникают при попытке последовательно сформулировать ограничения, налагаемые на коммутаторы токов низшими коммутаторами и лоренцевой инвариантностью [201—203, 239].

Мы начнем со следующего вопроса. Какова та дополнительная информация, которую можно извлечь из требования, чтобы основное коммутационное соотношение алгебры токов

$$[Q^\beta(0), j_0^\alpha(0)] = if^{\beta\alpha\gamma} j_0^\gamma(0) \quad (I.41)$$

было справедливо в любой системе отсчета?

Для ответа на этот вопрос возьмем коммутатор обеих сторон соотношения (I.41) с генератором лоренцева поворота  $K_l$ :

$$[K_l, [Q^\beta(0), j_0^\alpha(0)]] = if^{\beta\alpha\gamma} [K_l, j_0^\gamma(0)]. \quad (I.42)$$

Далее используем тождество Якоби<sup>1)</sup> и перестановочные соотношения заряда и тока с генераторами лоренцевых поворотов [соотношения (6.73) и (I.25) гл. 6]; получим

$$[Q^\beta(0), j_l^\alpha(0)] = if^{\beta\alpha\gamma} j_l^\gamma(0) - \int d^3x x_l [j_0^\alpha(0), D^\beta(\mathbf{x}, 0)]. \quad (I.43)$$

Если предположить, что заряд  $Q^\beta$  сохраняется, то соотношение (I.43) упростится:

$$[Q^\beta, j_l^\alpha(0)] = if^{\beta\alpha\gamma} j_l^\gamma(0). \quad (I.44)$$

Именно такого соотношения мы в конце концов и ожидали. Оно означает, что если  $j_0^\alpha$  преобразуется по закону (I.41), то и пространственные компоненты преобразуются по тому же закону. Данное заключение справедливо при условии, что генерирующие алгебру заряды  $Q^\beta$  сохраняются; в противном случае оно верно лишь при условии, что в коммутационном соотношении

$$[j_0^\alpha(0), D^\beta(\mathbf{x}, 0)] = A^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x}) + B_i^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \partial^i \delta^3(\mathbf{x}) + \dots \quad (I.45)$$

нет производных от  $\delta$ -функций, т. е. что второе слагаемое в правой части соотношения (I.43) равно нулю.

Можно предположить, что вид коммутатора  $[Q^\beta, j_l^\alpha]$  вообще не зависит от того, сохраняется ли заряд, и, следовательно, соотношение (I.44) выполняется в любом случае. Это допущение было принято нами в гл. 2 как обобщение предположений кварковой модели и модели алгебры полей.

Чтобы получить представление о свойствах перестановочных соотношений между различными компонентами векторных токов, применим требование лоренц-ковариантности к коммутатору локальных плотностей зарядов

$$[j_0^\beta(\mathbf{x}, 0), j_0^\alpha(0)] = if^{\beta\alpha\gamma} j_0^\gamma(0) \delta^3(\mathbf{x}). \quad (I.46)$$

<sup>1)</sup> Хотя законность применения тождества Якоби, вообще говоря, сомнительна [199, 204, 238], в частном случае коммутаторов проинтегрированных операторов или временных компонент никаких трудностей не обнаружено.

Как и прежде, рассмотрим коммутатор обеих частей соотношения (I.46) с генератором лоренцева поворота  $K_l$ :

$$[K_l, [j_0^\beta(\mathbf{x}, 0), j_0^\alpha(0)]] = ij^{\beta\alpha\gamma} [K_l, j_0^\gamma(0)] \delta^3(\mathbf{x}). \quad (I.47)$$

Левую часть соотношения (I.47) можно преобразовать, используя тождество Якоби и соотношение (I.25) гл. 6:

$$\begin{aligned} [K_l, [j_0^\beta(\mathbf{x}, 0), j_0^\alpha(0)]] &= -[j_0^\alpha(0), [K_l, j_0^\beta(\mathbf{x}, 0)]] + [j_0^\beta(\mathbf{x}, 0), [K_l, j_0^\alpha(0)]] = \\ &= ix_l [D^\beta(\mathbf{x}, 0), j_0^\alpha(0)] + i\partial_k \{x_l [j_0^\alpha(0), j_k^\beta(\mathbf{x}, 0)] - i [j_0^\beta(\mathbf{x}, 0), j_l^\alpha(0)]\}. \end{aligned} \quad (I.48)$$

Окончательным результатом будет равенство

$$[j_0^\beta(\mathbf{x}, 0), j_l^\alpha(0)] = ij^{\beta\alpha\gamma} j_l^\gamma(0) \delta^3(\mathbf{x}) + \partial_k \{x_l [j_0^\alpha(0), j_k^\beta(\mathbf{x}, 0)] - x_l [j_0^\alpha(0), D^\beta(\mathbf{x}, 0)]\}. \quad (I.49)$$

Таким образом, коммутационные соотношения временных компонент токов с учетом требований лоренц-ковариантности дают представленное выше выражение для коммутатора временной и пространственной компонент.

Соотношения (I.49) недостаточно для того, чтобы найти ограничения, налагаемые на возможные швингеровские члены. Мы заметим лишь, что если коммутатор

$$[j_0^\alpha(0), D^\beta(\mathbf{x}, 0)] \quad (I.50)$$

не содержит швингеровских членов, то отсутствие швингеровских членов (например, в примитивной кварковой модели) или наличие очень простых швингеровских членов (таких, как в модели алгебры полей), разумеется, совместимо с соотношением (I.49)<sup>1)</sup>.

Очевидно, что получаемая таким путем информация о тензорных операторах (в нашем случае о токах) быстро становится сомнительной и мы теряем ясное понимание ситуации.

Более определенные результаты можно получить, исходя из дополнительного предположения о виде перестановочных соотношений токов с компонентой  $T_{00}$  канонического тензора<sup>2)</sup>.

Именно, мы принимаем следующие коммутационные соотношения [202, 203]:

$$\begin{aligned} [T_{00}(\mathbf{x}, t), j_0^\alpha(\mathbf{y}, t)] &= -i \{j_k^\alpha(\mathbf{x}, t) \partial_k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + D^\alpha(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\} = \\ &= -i \{\partial_k (j_k^\alpha(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) + \partial_0 j_0^\alpha(\mathbf{x}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\}, \end{aligned} \quad (I.51)$$

$$[T_{00}(\mathbf{x}, t), j_k^\alpha(\mathbf{y}, t)] = -i \{\partial_0 j_k^\alpha(\mathbf{y}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - j_0^\alpha(\mathbf{y}, t) \partial_k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\}. \quad (I.52)$$

Выписанные локальные коммутационные соотношения гарантируют правильные перестановочные свойства токов с генераторами группы Пуанкаре и могут быть выведены на основе достаточно общих предположений.

При использовании вышеприведенных коммутаторов мы получаем гораздо более точные результаты, которые мы здесь приведем без доказательства, отсылая читателя к цитированным работам. С помощью коммутационных соотношений (I.51) можно показать, что если коммутатор (I.50) не содержит швингеровских членов, то из соотношения (I.46) вытекает существование единственного швингеровского члена в коммутаторах временной и пространственных компонент токов:

$$[j_0^\beta(\mathbf{x}, 0), j_l^\alpha(0)] = ij^{\beta\alpha\gamma} j_l^\gamma(0) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + R_{lm}^{\beta\alpha}(\mathbf{x}) \partial^m \delta^3(\mathbf{x}). \quad (I.53)$$

<sup>1)</sup> Необходимость швингеровских членов в коммутаторе  $[j_0, j_k]$ , отмеченная в гл. 2, § 4, п. 21, не является следствием одной лишь лоренц-ковариантности, а вытекает из требования положительной определенности метрики.

<sup>2)</sup> Относительно определения канонического тензора см. гл. 10, § 4, п. 2.

Точно так же с помощью соотношения (I.52) мы можем показать существование не более чем одного швингеровского члена в коммутаторе пространственных компонент токов между собой:

$$[j_k^\beta(x, 0), j_m^\alpha(0)] = S_{km}^{\beta\alpha}(x) \delta^3(x) + T_{kml}^{\beta\alpha}(x) \partial^l \delta^3(x). \quad (\text{I.54})$$

Величина  $S_{km}^{\beta\alpha}(x)$  произвольна, но этого нельзя сказать о  $T_{kml}^{\beta\alpha}(x)$ : величины  $T_{kml}^{\beta\alpha}(x)$  и  $R_{km}^{\beta\alpha}(x)$  взаимосвязаны. Действительно, если мы возьмем коммутатор обеих частей соотношения (I.53) с генератором лоренцева поворота  $K_l$  и рискнем использовать тождество Якоби, то получим

$$\partial^m \{x_l [j_m^\beta(x, 0), j_k^\alpha(0)]\} = -i [K_l, R_{km}^{\beta\alpha}(x)] \partial^m \delta^3(x), \quad (\text{I.55})$$

где мы, как обычно, предположили, что слагаемое  $x_l [D^\beta(x, 0), j_k^\alpha(0)]$  равно нулю. После подстановки (I.54) соотношение (I.55) принимает вид

$$(\partial^m T_{kml}^{\beta\alpha}(x))_{x=0} = 0, \quad (\text{I.56})$$

$$T_{kml}^{\beta\alpha}(x) = i [K_l, R_{km}^{\beta\alpha}(x)]. \quad (\text{I.57})$$

Равенство (I.57) показывает, что при сделанных нами предположениях швингеровский член в коммутаторе  $[j_m, j_k]$  полностью определяется лоренцевскими трансформационными свойствами швингеровского члена в коммутаторе  $[j_0, j_k]$ . В частности, коммутатор  $[j_m, j_k]$  не может содержать швингеровского члена, если его не содержит коммутатор  $[j_0, j_k]$  или если  $R_{km}^{\beta\alpha}$  — либо не зависящий от  $x$  лоренцев скаляр, либо  $c$ -число. Отметим, что в алгебре полей, где имеет место последний случай, тождество  $[j_k, j_l] = 0$  согласуется с приведенными требованиями.

Исследование этого вопроса можно было бы продолжить. Но мы полагаем, что нам именно здесь следует остановиться. Отметим лишь, что канонический тензор начинает играть заметную роль в физике элементарных частиц. Другие признаки этой тенденции можно обнаружить в последней главе настоящей книги. Еще не время делать предсказания о его роли, и мы воздержимся от дальнейших комментариев.

## 5. Ковариантность хронологического произведения двух токов и швингеровские члены <sup>1)</sup>

Наличие швингеровских членов в коммутаторах (I.53) и (I.54) нарушает ковариантность  $T$ -произведения двух токов

$$T_{\nu\mu}(x) \equiv T(j_\nu(x) j_\mu(0)) = \theta(x_0) j_\nu(x) j_\mu(0) + \theta(-x_0) j_\mu(0) j_\nu(x). \quad (\text{I.58})$$

Действительно, взяв коммутатор  $T_{\nu\mu}(x)$  с генератором лоренцева поворота  $K_l$ , получим

$$\begin{aligned} [K_l, T_{\nu\mu}(x)] &= \theta(x_0) [K_l, j_\nu(x) j_\mu(0)] + \theta(-x_0) [K_l, j_\mu(0) j_\nu(x)] = \\ &= i(x_l \partial_0 - x_0 \partial_l) T_{\nu\mu}(x) + L_l T_{\nu\mu}(x) - i x_l \delta(x_0) [j_\nu(x), j_\mu(0)] \end{aligned} \quad (\text{I.59})$$

Оператор  $L_l$  определяет лоренцевы тензорные свойства  $T_{\nu\mu}(x)$ .

Таким образом, из-за того, что дополнительное слагаемое  $-i x_l \delta(x_0) \times [j_\nu(x), j_\mu(0)]$  отлично от нуля (если коммутатор  $[j_\nu(x, 0), j_\mu(0)]$  содержит швингеровские члены),  $T_{\nu\mu}(x)$  оказывается, вообще говоря, нековариантным объектом. Вследствие этого величина

$$T_{\nu\mu}(p_2, p_1, Q) = i \int d^4x \exp(iQx) \langle p_2 | T \left( j_\nu \left( \frac{1}{2} x \right) j_\mu \left( -\frac{1}{2} x \right) \right) | p_1 \rangle \quad (\text{I.60})$$

<sup>1)</sup> Библиографию по вопросу о взаимном уничтожении контактного члена с градиентным и о ковариантности  $T$ -произведения можно найти в работах [158, 124, 201, 205—211].

не является тензором второго ранга (состояния  $|p_i\rangle$  бесспиновые) и, например, его разложение по инвариантным амплитудам, использованное нами в гл. 4 [формула (4.2)], некорректно.

Следующий шаг таков: добавим к  $T_{\nu\mu}(x)$  формально некоторый оператор с тем, чтобы получить ковариантный тензор второго ранга  $T_{\nu\mu}^*(x)$ . Положим

$$T_{\nu\mu}^*(x) = T_{\nu\mu}(x) + \delta^4(x) \rho_{\nu\mu}, \quad (I.61)$$

где  $\rho_{\nu\mu}$  — оператор (вообще говоря, нековариантный), подлежащий определению. Наше требование ковариантности  $T_{\nu\mu}^*(x)$

$$[K^l, T_{\nu\mu}^*(x)] = i(x^l \partial^0 - x^0 \partial^l) T_{\nu\mu}^*(x) + L_l T_{\nu\mu}^*(x) \quad (I.62)$$

немедленно ведет к условию

$$\delta^4(x) [K^l, \rho_{\nu\mu}] = ix^l \delta(x_0) [j_\nu(x), j_\mu(0)] + \\ + i \{g_\nu^l \rho_\mu^0 + g_\mu^0 \rho_\nu^l - g_\mu^l \rho_\nu^0 - g_\nu^0 \rho_\mu^l\} \delta^4(x). \quad (I.63)$$

Мы ограничимся тем, что найдем решение при условиях, указанных в приложении I, п. 4 и допускающих существование у коммутаторов  $[j_0, j_k]$  и  $[j_m, j_k]$ , связанных соотношением (I.57), не более одного швингеровского члена. Решение можно найти следующим образом. Исходим из равенства  $\rho_{\mu 0} = \rho_{0\mu} = 0$ , которое вместе с (I.63) дает

$$\rho_{km}(x) = -R_{mk}(x), \quad (I.64)$$

где  $R_{mk}$  — оператор, определяющийся соотношением (I.53).

Теперь подставим соотношение (I.64) в равенство (I.63) при  $\nu = k$ ,  $\mu = m$ :

$$\delta^4(x) [K^l, R_{mk}(x)] = ix^l \delta(x_0) [j_k(x, 0), j_m(0)]. \quad (I.65)$$

С учетом представления (I.54) соотношение (I.65) принимает вид равенства

$$[K_l, R_{mk}(x)] = -iT_{kmi}, \quad (I.66)$$

которое бесспорно, поскольку оно тождественно равенству (I.57). Следовательно, оператор  $\rho_{\nu\mu}$  является решением уравнения (I.63).

Посмотрим теперь, как выполняется условие сохранения для найденного ковариантного тензора. Введем сначала фурье-образ  $M_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$  матричного элемента  $\langle p_2 | T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}(x) | p_1 \rangle$  (называемый иногда «корреляционной функцией токов») ( $|p_1\rangle$  и  $|p_2\rangle$  — состояния скалярных частиц):

$$M_{\nu\mu}^{\beta\alpha}(p_2, p_1, q_2) = i \int d^4x \exp(iq_2x) \langle p_2 | \{T(j_\nu^\beta(x) j_\mu^\alpha(0)) + \delta^4(x) \rho_{\nu\mu}^{\beta\alpha}\} | p_1 \rangle. \quad (I.67)$$

Свертка с  $q_2^\nu$  дает

$$q_2^\nu M_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = - \int d^4x \exp(iq_2x) \langle p_2 | T(D^\beta(x) j_\mu^\alpha(0)) | p_1 \rangle - \\ - \int d^4x \exp(iq_2x) \langle p_2 | \{\delta(x_0) [j_0^\beta(x), j_\mu^\alpha(0)] + \rho_{\nu\mu}^{\beta\alpha} \partial^\nu \delta^4(x)\} | p_1 \rangle. \quad (I.68)$$

Но при  $\mu = 0$  мы имеем  $\rho_{\nu\mu} = 0$  и коммутатор  $[j_0, j_0]$  не содержит швингеровских членов, тогда как при  $\mu = k$

$$\delta(x_0) [j_0^\beta(x, 0), j_k^\alpha(0)] + \rho_{\nu k}^{\beta\alpha} \partial^\nu \delta^4(x) = \\ = i f^{\beta\alpha\gamma} j_k^\gamma(0) \delta^4(x) + R_{km}^{\beta\alpha} \partial^m \delta^4(x) + \rho_{\nu k}^{\beta\alpha} \partial^\nu \delta^4(x) = i f^{\beta\alpha\gamma} j_k^\gamma(x) \delta^4(x) \quad (I.69)$$

и условие сохранения для  $M_{\nu\mu}$  оказывается простым и красивым:

$$q_2^\nu M_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = U_\mu^{\beta\alpha} - i f^{\beta\alpha\gamma} \langle p_2 | j_\mu^\gamma | p_1 \rangle. \quad (I.70)$$

Напомним, что, как говорилось в гл. 3, § 1, для описания физических процессов служит  $M_{\nu\mu}$ , а не  $T_{\nu\mu}$ . Нековариантный характер тензора  $T_{\nu\mu}$

связан с тем обстоятельством, что  $T_{\nu\mu}$  не является непосредственно наблюдаемым объектом, как мы это видели на примере гл. 3, § 1, п. 2. Слагаемое  $\rho_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$ , добавляемое к  $T$ -произведению, можно интерпретировать, как некоторый контактный член ( $\Upsilon$ -член), и мы убеждаемся, что в соотношении (I.68)  $\Upsilon$ -член и швингеровские члены взаимно уничтожаются, оставляя условие сохранения для ковариантного тензора неизменным. В то же время абсорбционная часть  $T_{\nu\mu}$  обладает ковариантным характером и совпадает с абсорбционной частью  $M_{\nu\mu}$ .

Резюмируем содержание данного приложения: мы показали, насколько усложняется исследование требований лоренц-ковариантности, если скалярные операторы (с которыми мы имели дело на протяжении данной главы) заменить токами. По-видимому, получаемая информация не очень ценна без привлечения дальнейших теоретических гипотез. Но содержание и точная формулировка таких дополнительных идей — дело дальнейших разработок.

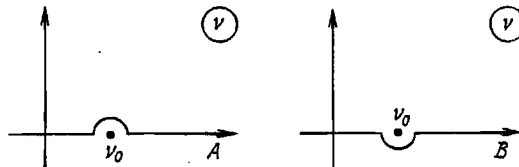
### Приложение II. Компенсация бесконечностей в соотношении (7.126)

Мы хотим так переформулировать соотношение (7.126), чтобы в нем не было бесконечности. Уже отмечалось, что данная бесконечность связана с точкой ветвления  $F(\nu)$  при  $\nu = \nu_0$ . Эту точку ветвления нетрудно выделить, написав

$$F(\nu) = a(\nu) + i(\nu^2 - \nu_0^2)^{1/2} b(\nu), \quad \text{[(II.1)]}$$

где  $a(\nu)$  и  $b(\nu)$  — вещественные функции<sup>1)</sup>, регулярные при  $\nu = \nu_0$ .

Равенство (II.1) показывает, что бесконечность в  $(d/d\nu^2) F(\nu)$  содержится лишь в мнимой части  $F(\nu)$ . От этой бесконечности можно избавиться, пре-



Фиг. II.1

образовав соотношение (7.126) в аналогичное, но содержащее только вещественную часть  $\bar{F}(\nu)$ . С этой целью прибавим к функции (7.126) ее комплексно-сопряженную:

$$T_{\pi N}^-(\text{порог.}) = \frac{m_{\pi} m}{f_{\pi}^2} \left[ 1 + f_{\pi}^2 m_{\pi}^2 m^2 \frac{d}{d\nu^2} \frac{a(\nu, u(\nu))}{\nu} \Big|_{\nu=\nu_0} \right] - m_{\pi}^5 m^5 \left[ \int_A + \int_B \left( \frac{d\nu}{\nu^2} \frac{f(\nu, u(\nu))}{(\nu^2 - \nu_0^2)^2} \right) \right], \quad \text{(II.2)}$$

причем интегралы  $A$  и  $B$  берутся по контуру в комплексной плоскости, показанному на фиг. II.1. Интеграл можно привести к более привычному виду, выделив корневой множитель в  $f(\nu)$ :

$$f(\nu) = |(\nu^2 - \nu_0^2)^{1/2}| b(\nu) = (\nu^2 - \nu_0^2)^{1/2} |_{+} b(\nu) = -(\nu^2 - \nu_0^2)^{1/2} |_{-} b(\nu), \quad \text{(II.3)}$$

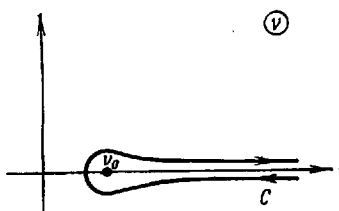
где индексы  $+$  и  $-$  означают, что берутся значения функций на вещественной оси на верхнем и нижнем берегу разреза.

1) То есть вещественные на некотором отрезке вещественной оси  $\nu$ .

Подставив (II.3) в равенство (II.2), для интеграла в правой части получаем

$$I = \int_A + \int_B = \int_C \frac{dv}{v^2} \frac{b(v)}{(v^2 - v_0^2)^{3/2}}, \quad (\text{II.4})$$

где  $C$  — контур интегрирования, показанный на фиг. II.2. Комплексный интеграл  $I$  по контуру  $C$  заведомо конечен. Его можно преобразовать, выпол-



Фиг. II.2

нив интегрирование по частям, к виду

$$I = \int_C \frac{dv}{(v^2 - v_0^2)^{1/2}} \frac{d}{dv} \frac{b(v)}{v^3}, \quad (\text{II.5})$$

который сводится к сходящемуся интегралу Римана:

$$I = 2 \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{|(v^2 - v_0^2)^{1/2}|} \frac{d}{dv} \frac{b(v)}{v^3}. \quad (\text{II.6})$$

# 8. Предел бесконечно большого импульса

## § 1. Система отсчета бесконечно большого импульса

### 1. Введение

В предыдущих главах (гл. 6 и 7) мы путем общих рассуждений показали, что насыщение матричного элемента одновременного коммутатора приводит к бесконечному набору правил сумм. В частности, при конкретном вычислении суммы по полной системе состояний имеется произвол в выборе контура интегрирования, параметры которого зависят от состояния движения внешних частиц. Это, естественно, означает, что следует выбирать систему отсчета в соответствии с тем, какие стороны проблемы требуется подчеркнуть.

В гл. 6 мы показали, что насыщение в брейтовской системе координат дает возможность удовлетворительно выразить низкоэнергетические пионные амплитуды через коммутаторы, связанные с аксиальными зарядами, и через вклады (порядка  $m_\pi^2$ ) высших состояний. Такие правила сумм были ценны тем, что анализ высших вкладов значительно упрощается благодаря правилу отбора, запрещающему состояния с высшими угловыми моментами, и, следовательно, мы были всегда ограничены случаем медленных внешних нуклонов. Таким образом, производя насыщение вблизи системы покоя, мы могли считать, что «однопионные вклады II класса» (гл. 6 и 7) значительно превышают другие члены правила сумм. При увеличении же импульсов внешних частиц вклад высших волн в полную сумму становится все более и более существенным, что нежелательно, так как структура этих членов достаточно сложна. Чтобы лучше вспомнить это, выпишем еще раз в общем правило сумм [формула (7.114)], полученное из коммутационного соотношения  $[Q^\beta, \bar{Q}^\alpha] = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} Q^\gamma$  с нуклонными обкладками, где выделена явная зависимость от системы отсчета:

$$\tau_A^2 \frac{E^2 - M^2}{E^2} + 2 \int_{v_0}^{\infty} w^-(v, u) \delta\left(u - \frac{v^2}{E^2}\right) \frac{1}{v^2} du dv = 1. \quad (8.1)$$

Здесь

$$w^{\beta\alpha} = (2\pi)^3 \langle p | \bar{D}^\beta \delta^4(p+q-P) \bar{D}^\alpha | p \rangle = \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^\alpha] w^{(-)} + \delta^{\beta\alpha} w^{(+)}. \quad (8.2)$$

Для правила сумм (8.1) (и аналогичных ему) характерно, что интеграл берется вдоль параболы, а поэтому переданный импульс  $u$  в вершине  $\langle p | \bar{D} | i \rangle$  зависит от энергии промежуточного состояния  $i$ . Вследствие этого временная компонента импульса  $u$  все возрастает, что, вообще говоря затрудняет вычисление соответствующих вкладов. Действительно, сведения о  $\langle p | \bar{D} | i \rangle$  при  $(p - p_i)^2 > 0$  могут быть получены либо из реакции слабого распада  $i \rightarrow p + (e\tilde{\nu})$ , либо из аннигиляционного процесса  $(i\tilde{p}) \rightarrow (e\tilde{\nu})$ . Следовательно, чтобы правила сумм имели практическую ценность, нужно либо минимизировать эти неизвестные члены, как мы это делали с помощью правила отбора, изучая низкоэнергетические теоремы, либо придумать какой-нибудь трюк (т. е. специальный вид конфигурации), позволяющий перейти к представлению с фиксированной массой.

Чтобы избежать зависимости  $u$  от  $v$ , естественно рассмотреть [83] правило сумм в пределе при  $E \rightarrow \infty$ . Такой предельный переход преобразует параболу  $u = v^2/E^2$  в прямую  $u = 0$ . В результате мы приходим к правилу сумм с «фиксированной массой»:

$$r_A^2 + 2 \int_{v_0}^{\infty} w^{(-)}(v, 0) \frac{dv}{v^2} = 1. \quad (8.3)$$

Анализ этого примера, проведенный в гл. 7, § 5, показал нам, какие предположения позволяют перейти к пределу при  $E \rightarrow \infty$  и получить окончательное выражение (8.3). Основную роль играет предположение о том, что вклады  $Z$ -диаграмм I класса и вклады II класса обращаются в нуль в этом пределе (те и другие соответствуют членам с бесконечной массой). Это — динамическое утверждение, которое надо добавить к исходным одно-временным коммутаторам, чтобы получить простые правила сумм. Как говорилось в гл. 7, имеются солидные указания на правильность выкладок, приводящих от соотношения (8.1) к уравнению (8.3). В частности, при решении вопроса о возможности пренебречь членами второго класса можно руководствоваться моделью полюсов Редже. Как мы уже говорили, особенно важно усвоить, что выбор системы отсчета по-разному влияет на различные вклады и придает им разный вес. Так, при малых  $p$  доминируют «шпионные» члены, а все дополнительные вклады (кроме нуклонного) имеют множитель  $m_\pi^2/[m_\pi^2 - (v^2/E^2)]$ . При увеличении  $p$  вклад «голдстоуновского бозона» в правило сумм становится все менее и менее существенным, пока не исчезает вовсе. В то же время состояния в  $s$ -канале уже нельзя рассматривать как поправочные члены порядка  $O_2(m_\pi^2)$ , так как при  $E \rightarrow \infty$  множитель  $m_\pi^2/[m_\pi^2 - (v^2/E^2)]$  становится порядка единицы. Таким образом, при  $E \rightarrow \infty$  в правилах сумм подчеркиваются свойства, связанные с классификацией частиц по мультиплетам приближенной симметрии. Поэтому данная форма будет идеальной для оценки отклонений ренормировочных констант от их предельных значений при точной симметрии, в частности в случае нарушенных симметрий  $SU(3)$  и  $SU(2)$ .

Преимущества подхода  $E \rightarrow \infty$  особенно очевидны при анализе правил сумм, полученных из коммутаторов зарядовых плотностей  $[j_0, j_0]$ , которые мы рассмотрим в следующем разделе. Действительно, при учете большого числа сингулярностей II класса голдстоуновская симметрия оказывается неприменимой для подавления вкладов в  $s$ -канале: насыщение состояниями с конечным  $p$  становится все более сложной процедурой. При этом возникают сложные соотношения между амплитудами и некоторыми формфакторами в несовпадающих точках времениподобной области <sup>1)</sup>. В системе же  $p \rightarrow \infty$  правила сумм приобретают замечательно простую форму. Общее (дисперсионное) токовое правило сумм уже было выведено в гл. 4.

## 2. Общее правило сумм алгебры токов

Пользуясь методом бесконечно большого импульса, исследуем одно-временные коммутаторы зарядовых плотностей. Предположим, что коммутатор имеет следующую локальную структуру:

$$[j_0^\beta(x), j_0^\alpha(y)]_{t=0} = i f_{\beta\alpha\gamma} j_0^\gamma(x) \delta^3(x-y). \quad (8.4)$$

Как обычно,  $\alpha, \beta, \gamma$  — индексы  $SU(3)$  и  $j_0$  — общие векторные и аксиально-векторные плотности зарядов. Перейдем в пространство импульсов и введем

<sup>1)</sup> Единственное исключение возможно при очень малых значениях  $p$  и  $q$ , при которых еще можно вывести приближенное представление для пионной амплитуды, соответствующее разложению по  $q$  и  $\omega = (q^2 + m_\pi^2)^{1/2}$  (гл. 6).



величину

$$\tilde{j}_0^\alpha(\mathbf{q}) = \int \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) j_0^\alpha(\mathbf{x}) d^3x; \quad (8.5)$$

тогда из соотношения (8.4) получим

$$[\tilde{j}_0^\beta(-\mathbf{q}_2), \tilde{j}_0^\alpha(\mathbf{q}_1)] = if_{\beta\alpha\gamma} \tilde{j}_0^\gamma(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2). \quad (8.6)$$

В обкладках из бесспиновых частиц равенство (8.6) после насыщения дает следующий результат:

$$\sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_n) \langle p_2 | j_0^\beta | n \rangle \langle n | j_0^\alpha | p_2 \rangle - \\ - \left( \begin{array}{c} \alpha \leftrightarrow \beta \\ \mathbf{q}_1 \leftrightarrow -\mathbf{q}_2 \end{array} \right) = if_{\beta\alpha\gamma} \langle p_2 | j_0^\gamma | p_1 \rangle, \quad (8.7)$$

причем в обеих частях равенства мы сократили множитель  $(2\pi)^3 \times \delta^3(\mathbf{p}_2 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1)$ . Следуя общей идее предыдущей главы, воспользуемся переменными, введенными в формулах (7.24) и (7.28):

$$P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad Q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2), \quad \Delta = p_2 - p_1, \\ u_t = q_t^2, \quad v = PQ, \quad w = \Delta Q = \frac{1}{2}(u_1 - u_2), \quad t = \Delta^2, \\ P^2 = \sigma = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2) - \frac{1}{4}t, \quad Q^2 = u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) - \frac{1}{4}t. \quad (8.8)$$

Вводя новую вспомогательную переменную  $Q_0$ , перепишем правило (8.7) в виде

$$\int dQ_0 t_{00}^{\beta\alpha}(Q) = if_{\beta\alpha\gamma} [2P_0 F_1^\gamma(t) + \Delta_0 F_2^\gamma(t)], \quad (8.9)$$

где использованы обозначения

$$\langle p_2 | j_\mu^\gamma | p_1 \rangle = 2P_\mu F_1^\gamma(t) + \Delta_\mu F_2^\gamma(t), \quad (8.10)$$

$$t_{\mu\nu}^{\beta\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int d^4x \exp(iQx) \langle p_2 | \left[ j_\mu^\beta \left( \frac{1}{2}x \right), j_\nu^\alpha \left( -\frac{1}{2}x \right) \right] | p_1 \rangle = \\ = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(P + Q - p_n) \langle p_2 | j_\mu^\beta | n \rangle \langle n | j_\nu^\alpha | p_1 \rangle - \text{перекр. чл.} \quad (8.11)$$

Так как  $t_{\mu\nu}$  — истинный тензор второго ранга, его структуру легко задать, пользуясь соответствующими 4-векторами. Положим

$$\mu\nu = aP_\mu P_\nu + b_1 P_\mu Q_\nu + b_2 P_\mu \Delta_\nu + b_3 P_\nu Q_\mu + b_4 P_\nu \Delta_\mu + c_1 Q_\mu Q_\nu + \\ + c_2 Q_\mu \Delta_\nu + c_3 Q_\nu \Delta_\mu + e_4 \Delta_\mu \Delta_\nu + dg_{\mu\nu}, \quad (8.12)$$

где  $a$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  и  $d$  — инвариантные функции инвариантных переменных  $v$ ,  $t$ ,  $u$  и  $w$ , являющиеся  $SU(3)$ -тензорами  $\{a \equiv a^{\beta\alpha}(v, t, u, w), \dots\}$ .

Далее необходимо перейти от интегрирования по  $Q_0$  при фиксированном  $Q$  к интегрированию по инвариантным переменным. Это приводит к тому же общему пути интегрирования, что и в уравнении (7.32). Итак, соотношение (8.9) принимает вид

$$\int \frac{d^4v}{P_0} \{P_0^2 a^{\beta\alpha}[v, t, u(v), w(v)] + P_0 Q_0 b_1^{\beta\alpha}[v, t, u(v), w(v)] + \dots\} = \\ = if_{\beta\alpha\gamma} [2P_0 F_1^\gamma(t) + \Delta_0 F_2^\gamma(t)]. \quad (8.13)$$

Символы  $a^{\beta\alpha}[v, t, u(v), w(v)]$ , ... должны напомнить читателю, что  $u$  и  $w$  — это функции аргумента  $v$ , определяющиеся выражениями (при

фиксированном  $t$ )

$$\begin{aligned} u &= av^2 + bv + c, \\ w &= hv + k \end{aligned} \tag{8.14}$$

с параметрами, зависящими от системы отсчета,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{P_0^2}, \quad b = 2 \frac{PQ}{P_0^2}, \quad c = \frac{(PQ)^2}{P_0^2} - Q^2, \\ h &= \frac{\Delta_0}{P_0}, \quad k = \frac{\Delta_0}{P_0} PQ - \Delta Q, \quad P_0 = (P^2 + \sigma^2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{8.15}$$

В общем правиле сумм (8.13) выявляются все трудности представления с переменной массой. Во всех вершинах переданный импульс зависит от энергии промежуточного состояния. Общая структура различных вкладов довольно сложна, и то, что  $t_{00}$  есть компонента тензора, отнюдь не облегчает положения. Поэтому мы обращаемся к предельной системе отсчета, где  $u$  и  $w$  становятся не зависящими от  $v$ , так что получаются правила сумм с фиксированной массой. Рецепт таков: нужно перейти к пределу при  $P_0 \rightarrow \infty$  и  $|P| \rightarrow \infty$ , фиксируя  $\Delta$ . Для упрощения вычислений удобно также наложить условия

$$P\Delta = PQ = 0, \tag{8.16}$$

гарантирующие, что в пределе при  $|P| \rightarrow \infty$ <sup>1)</sup> в любой из вершин переданный импульс не будет иметь временной компоненты:

$$\begin{aligned} (q_{1,2})_0 &= E_n - E_{1,2} = [(P+Q)^2 + M_n^2]^{1/2} - \\ &- \left[ \left( P \mp \frac{1}{2} \Delta \right)^2 + m_{1,2}^2 \right]^{1/2} \xrightarrow{|P| \rightarrow \infty} \frac{1}{2|P|} \left( Q^2 - \frac{1}{4} \Delta^2 + M_n^2 - m_{1,2}^2 \right) \xrightarrow{|P| \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \tag{8.17}$$

и, следовательно, «массы»  $u_1$  и  $u_2$  перестают зависеть от энергии промежуточного состояния и принимают фиксированное пространственно-подобное (или нулевое) значение

$$\lim_{|P| \rightarrow \infty} u_{1,2} = -q_{1,2}^2. \tag{8.18}$$

Такая процедура преобразует путь интегрирования к простейшему виду, т. е. к прямой

$$u = -Q^2, \quad w = -Q\Delta, \tag{8.19}$$

причем

$$\begin{aligned} v &= P_0 Q_0, \\ \Delta_0 &= E_2 - E_1 \xrightarrow{|P| \rightarrow \infty} \frac{m_2^2 - m_1^2}{2|P|} \rightarrow 0; \\ t &= -\Delta^2. \end{aligned} \tag{8.19'}$$

Переходя теперь в правиле сумм (8.13) к пределу при  $|P| \rightarrow \infty$  и приравняв коэффициенты старших степеней  $P_0$ , получаем окончательный результат

$$\frac{1}{2} \int d\nu a^{\beta\alpha}(v, t, -q_1^2, -q_2^2) = i f_{\beta\alpha\gamma} F_1^\gamma(t). \tag{8.20}$$

Это и есть общее правило сумм алгебры токов [46, 47], ранее встречавшееся в гл. 4 [формула (4.47)]<sup>2)</sup>. В следующем разделе мы детально рассмотрим его свойства и метод использования.

<sup>1)</sup> Далее в этой главе предельный переход при  $|P| \rightarrow \infty$  будет производиться только при условиях (8.16). Когда мы говорим «предел при  $|P| \rightarrow \infty$ », необходимо иметь в виду также и дополнительные условия  $P\Delta = PQ = 0$ .

<sup>2)</sup> Заметим, что инвариантные функции  $a^{\beta\alpha}$  (так же как  $b^{\beta\alpha}$ ,  $c^{\beta\alpha}$  и т. д.), введенные в этой главе, отличаются от соответствующих функций гл. 4 множителем  $\pi$ .

Остановимся теперь на предельном переходе. Возможность предельного перехода зависит от того, можно ли пренебречь вкладом с бесконечной массой в диаграммах II класса и Z-диаграммах I класса. Это связано с динамическими требованиями, выходящими за рамки чистой алгебры токов, и с асимптотическими свойствами физических амплитуд и факторов. Равенство (8.20) совпадает с равенством (4.47), которое мы вывели в гл. 4, используя дисперсионные соотношения без вычитаний для набора инвариантных амплитуд; мнимые части последних равны (с точностью до множителя  $\pi$ ) функциям  $a$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  и  $d$  в формуле (8.12). Так как модель, изложенная в гл. 4, будучи основана на модифицированной теории Редже, самосогласована, мы можем использовать ее здесь без изменений. Полезно все же попытаться независимо установить необходимые предположения, поскольку благодаря кластерным разложениям проводимый нами анализ дает возможность получить более полное представление о различных вкладах.

### 3. Условия существования правил сумм

В гл. 4 наряду с выводом фундаментального правила сумм (8.20) мы показали, как можно расширить набор правил сумм в рамках дисперсионного подхода, если предположение об отсутствии вычитаний может быть распространено на больший набор инвариантных амплитуд. Тот же результат может быть теперь получен применением указанной процедуры к коммутаторам временных и пространственных компонент плотностей токов.

Прежде чем перейти к детальному анализу задачи, коротко остановимся на проблеме нормировки физических состояний, которая, несмотря на свою тривиальность, может породить неясности. Заметим, что степени величины  $P_0$  в коэффициентах разных членов, выбранных нами для построения правил сумм [например, членов порядка  $P_0$  в формуле (8.13), отобранных для вывода соотношения (8.20)], зависят от условий нормировки физических состояний. Мы пользуемся инвариантной нормировкой

$$\langle p_2 | p_1 \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(p_1 - p_2) 2E \lim_{P_0 \rightarrow \infty} (2\pi)^3 2P_0 \delta^3(p_1 - p_2),$$

и тем самым в пределе при  $|P| \rightarrow \infty$  извне привносится бесконечный множитель  $P_0$ . Отметим, что с такой точки зрения в своеобразном нековариантном формализме  $P \rightarrow \infty$  естественной была бы стандартная нековариантная нормировка

$$\langle p_2 | p_1 \rangle = \delta^3(p_1 - p_2).$$

Но вместо того, чтобы неожиданно изменить нормировку в одной лишь главе, мы предпочитаем сохранить последовательно использовавшуюся в этой книге ковариантную нормировку с одним предостережением. Когда мы выводим правило сумм, приравнявая коэффициенты при степенях  $P_0$  в разложении по  $1/P_0$  выражений типа (8.13), нужно помнить, что «естественная» степень  $P_0$  в действительности на единицу меньше, чем в наших соотношениях. Так, например, приравнивая коэффициенты при нулевой степени  $P_0$ , надо ясно представлять себе, что «естественная» степень равна  $-1$ , и, следовательно, справедливость получаемых правил сумм не очевидна, так как это предполагает своего рода «воскрешение». Таким образом, возможность существования подобных правил сумм будет зависеть от сходимости соответствующих интегралов.

Вернемся теперь к нашей исходной задаче: получить правила сумм для некоторых других (помимо  $a$ ) инвариантных функций в разложении тензора  $t_{\mu\nu}$  (8.12). Как отмечалось выше, этого можно достичь, рассмотрев в пределе при  $|P| \rightarrow \infty$  матричный элемент преобразованного по Фурье коммутатора временной и пространственной компонент токов. С этой целью полезно будет разложить всякий вектор  $\mathbf{v}$  на «продольную»  $\mathbf{v}_L$  (в направле-

нии  $\mathbf{n}$  вектора  $\mathbf{P}$ ) и «поперечную»  $\mathbf{v}_T$  (ортогональную к  $\mathbf{P}$ ) компоненты. При этом 4-вектор  $v_\mu$  будет задаваться в следующих обозначениях:

$$v_\mu = (v_0, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_T).$$

Принимая во внимание условия ортогональности (8.16), находим в пределе при  $P \rightarrow \infty$  для имеющихсся трех независимых 4-векторов

$$\begin{aligned} P_\mu &= (P_0, P\mathbf{n}, 0), \\ \Delta_\mu &\xrightarrow{P \rightarrow \infty} (0, 0, \Delta), \\ Q_\mu &\xrightarrow{P \rightarrow \infty} (0, 0, Q). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Таким образом, ясно, что информация, получаемая из коммутатора  $[j_0, j_L]$ , т. е. правила сумм, которые мы можем вывести с помощью компоненты  $t_{0L}$  тензора  $t_{\mu\nu}$ , в точности совпадает с тем, что уже получено из  $[j_0, j_0]$ , т. е. из  $t_{00}$ .

Интереснее будет рассмотреть коммутатор типа  $[j_0, j_T]$ . Здесь мы столкнемся с проблемой зависящих от модели швингеровских членов. Чтобы можно было говорить о свойствах  $[j_0, j_T]$ , предположим, что нам кое-что известно о свойствах швингеровских членов, по крайней мере в рамках частной модели. Рассмотрим коммутатор

$$\{ [j_0^\beta(\mathbf{x}), j_T^\alpha(0)] = if_{\beta\alpha\gamma} j_T^\gamma(0) \overline{\delta^3(\mathbf{x})} + S_{T1}^{\beta\alpha} \partial^i \delta^3(\mathbf{x}). \quad (8.22)$$

Преобразование Фурье матричного элемента равенства (8.22) между бесспиновыми состояниями приводит (в обычных обозначениях) к правилу сумм

$$\int dv \left[ Q b_1^{\beta\alpha} + \Delta b_2^{\beta\alpha} + O\left(\frac{1}{P_0}\right) \right] = if_{\beta\alpha\gamma} \Delta F_2^\gamma(t) + \text{шв. чл.}, \quad (8.23)$$

где «шв. чл.» обозначает вклад швингеровских членов из уравнения (8.22), которые могут порождать члены, пропорциональные  $Q$  и  $\Delta$  (но не  $P$ )

Если мы согласимся пренебречь швингеровскими членами<sup>1)</sup> и просто приравняем между собой члены, не содержащие  $P_0$ , то получим два дополнительных правила сумм:

$$\begin{aligned} \int dv b_1^{\beta\alpha}(v, t, u_1, u_2) &= 0, \\ \int dv b_2^{\beta\alpha}(v, t, u_1, u_2) &= if_{\beta\alpha\gamma} F_2^\gamma(t). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Справедливость соотношений (8.24) зависит от возможности осуществить то, что мы назвали «воскрешением» правил сумм. Как следует из сказанного ранее, «естественная» нековариантная нормировка физических состояний привела бы к общему множителю  $1/P_0$  в равенстве (8.23), превратив его в тривиальное тождество в пределе при  $P_0 \rightarrow \infty$ . Таким образом, возможность получить правила сумм (8.24) непосредственно связана с их сходимостью. Одним из преимуществ дисперсионного подхода гл. 4 было наличие удовлетворительного критерия сходимости этих правил сумм, основанного на феноменологии траекторий Редже<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Что законно, например, если швингеровские члены суть  $s$ -числа, как в модели алгебры полей.

<sup>2)</sup> В случае уравнений (8.24) сравнение двух подходов несколько затруднительно. Действительно, как при упрощенном использовании тождества Уорда, так и при упрощенном подходе  $P \rightarrow \infty$  в правой части этих правил сумм могут появиться швингеровские члены. В дисперсионной же модели несколько более глубокий анализ (гл. 3 и 4), основанный на «гипотезе Фейнмана», позволяет нам с некоторой уверенностью исключить эти члены. При методе  $P \rightarrow \infty$  вклад швингеровского члена может взаимно уничтожаться с некоторым полунесвязанным членом (о поведении которого, правда, мы знаем очень мало). Но в этом случае у нас нет ничего столь же простого и убедительного, как гипотеза Фейнмана.

Чтобы более полно установить связь между реджевским описанием соответствующих амплитуд и возможностью отбора членов в разложении по  $1/P_0$ , вернемся к выводу правила сумм (8.20) из соотношения (8.13). Посмотрим внимательнее, как действительно ведут себя в пределе при  $P \rightarrow \infty$  те вклады, которыми мы вынуждены были пренебречь, чтобы получить окончательное выражение (8.20).

Сначала рассмотрим вклады II класса. Мы можем получить простой критерий, выбрав, например, в канале одночастичное векторное состояние  $v_\beta(q_2)$ . Оно дает следующий вклад в левую часть равенства (8.9):

$$\int dQ_0 \langle 0 | j_0^\beta | v_\beta(q_2) \rangle \langle v_\beta(q_2), p_2 | j_0^\alpha | p_1 \rangle \delta(q_2^2 - M_v^2) \theta(q_{20}) = \\ = \frac{1}{2\omega_2} f_\beta \sum \varepsilon_0^{(r)} \langle v_\beta^{(r)}(q_2), p_2 | j_0^\alpha | p_1 \rangle, \quad (8.25)$$

где мы положили

$$\langle 0 | j_\mu^\beta | v_\beta^{(r)}(q_2) \rangle = \varepsilon_\mu^{(r)} f_\beta \quad (8.26)$$

и обозначили через  $\langle v_\beta(q_2), p_2 | j_0^\alpha | p_1 \rangle$  амплитуду процесса

$$j_0^\alpha(q_1) + p_1 \rightarrow v_\beta(q_2) + p_2, \quad (8.27)$$

вычисленную в точке

$$q_2^2 = M_v^2, \quad q_{20} \equiv \omega_2 = (M_v^2 + q_2^2)^{1/2}, \\ q_1^2 = \omega_2^2 - q_2^2, \quad v \equiv v_2 = \omega_2 P_0 \quad (8.28)$$

(мы приняли, что  $PQ = 0$ , и учли почти все приближения, соответствующие пределу при  $P_0 \rightarrow \infty$ ). Для этой амплитуды воспользуемся инвариантным разложением, аналогичным разложению (8.12), а именно

$$\langle v_\beta(q_2), p_2 | j_\mu^\alpha | p_1 \rangle = \\ = (P\varepsilon) (A_{(v)}^{\beta\alpha} P_\mu + B_{(v)1}^{\beta\alpha} Q_\mu + B_{(v)2}^{\beta\alpha} \Delta_\mu) + (Q\varepsilon) (B_{(v)3}^{\beta\alpha} P_\mu + \dots) + \dots \quad (8.29)$$

Мы можем тотчас убедиться, что в случае, когда  $\mu = 0$ , в пределе при  $P_0 \rightarrow \infty$  необходимо рассматривать лишь амплитуды  $A_{(v)}$ ,  $B_{(v)1}$ , и  $B_{(v)3}$ . Простые выкладки показывают, что в пределе при  $P \rightarrow \infty$  вклад (8.25) пропорционален величине

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left[ \frac{u_2}{M_v^2 - u_2} v A_{(v)} + u_2 B_{(v)1} + \frac{1}{4} (u_1 - u_2 - t) B_{(v)3} \right],$$

и требование о том, чтобы он был равен нулю, эквивалентно требованию сверхсходимости для амплитуды  $A_{(v)}$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v A_{(v)}^{\beta\alpha}(v, t, u_1, M_v^2) = 0 \quad (8.30)$$

и отсутствия вычитаний в дисперсионных соотношениях для  $B_{(v)1}$  и  $B_{(v)3}$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} B_{(v)1,3}(v, t, u_1, M_v^2) = 0, \quad (8.31)$$

в полной аналогии с тем, что мы имели в рамках ковариантной процедуры гл. 4.

Если написать дисперсионное соотношение без вычитаний для  $A_{(v)}$ , то из уравнения (8.30) мы получим сверхсходящееся правило сумм

$$\int dv \operatorname{Im} A_{(v)}(v, t, u_1, M_v^2) = 0 \quad (8.32)$$

(характерное для амплитуд сильного взаимодействия, подобных  $A$ ). Его можно вывести непосредственно из равенства (8.20), взяв вычет в точке  $u_2 = M_v^2$ . Вывод таков: соотношение сверхсходимости (8.32), которое на пер-

вый взгляд может казаться побочным следствием выражения (8.20), основанного на алгебре токов, в действительности уже предполагалось справедливым, когда правило сумм алгебры токов преобразовывалось к окончательному виду (8.20)<sup>1)</sup>. Таким образом, оно, очевидно, не имеет ничего общего с алгеброй токов, а связано со свойствами сильных взаимодействий. Независимо от этого нам известно, что соотношение (8.32), по всей вероятности, можно доказать, и этим подтверждается правильность наших рассуждений при выводе уравнения (8.20). Аналогичные же условия, необходимые для того, чтобы вывести уравнение (8.24), обоснованы значительно хуже.

Хотя изложенные заключения о вкладах II класса сделаны в результате анализа простого случая одночастичного промежуточного состояния, практически они носят весьма общий характер, поскольку любое состояние континуума можно разложить по состояниям, характеризваемым массой и угловым моментом.

Обратимся теперь к вопросу о вкладах Z-диаграмм. Здесь ситуация менее ясная, и труднее уловить нечто общее, а поэтому мы ограничимся тем, что подробно остановимся лишь на одном очень простом случае. Чтобы одновременно со случаем  $t_{00}$  (или  $t_{0L}$ ) исследовать случай  $T_{0T}$ , рассмотрим вместо правила сумм (8.9) аналогичное соотношение для  $t_{0\mu}$ . Прежде всего выберем простейшую кинематическую конфигурацию  $t = 0$  (т. е. рассмотрим случай бесспиновых внешних частиц с одинаковыми импульсом  $p$  и массой  $m$ ). Далее предположим, что токи сохраняются (т. е. в действительности мы рассматриваем случай изоспиновых векторных токов). Наконец, чтобы получить информацию о роли вкладов Z-диаграмм по сравнению с прямыми диаграммами, выберем в полной сумме промежуточных состояний те же частицы, что и внешние. Тогда в соответствии с общим выражением, полученным путем кластерного разложения<sup>2)</sup>, необходимо рассмотреть следующие вклады в правило сумм:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4v}{p_0} \delta[(p+q)^2 - m^2] \langle p | j_0^\beta | p+q \rangle \langle p+q | j_\mu^\alpha | p \rangle \theta(p_0+q_0) - \\ & - \langle 0 | j_\mu^\alpha | p; -p-q \rangle \langle p; -p-q | j_0^\beta | 0 \rangle \theta(-p_0-q_0) - (\alpha \leftrightarrow \beta, q \leftrightarrow -q) = \\ & = \frac{1}{2(p_0^2 + q^2)^{1/2}} \int d^4v \langle p | j_0^\beta | p+q \rangle \langle p+q | j_\mu^\alpha | p \rangle \delta(v - v_d) - \\ & - \langle 0 | j_\mu^\alpha | p; -p-q \rangle \langle p; -p-q | j_0^\beta | 0 \rangle \delta(v - v_z) - \text{перекр. чл.}, \end{aligned} \quad (8.33)$$

где

$$v_d = -p_0^2 + p_0(p_0^2 + q^2)^{1/2} \underset{p_0 \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} q^2, \quad (8.34)$$

$$v_z = -p_0^2 - p_0(p_0^2 + q^2)^{1/2} \underset{p_0 \rightarrow \infty}{\sim} -2p_0^2,$$

$$u \equiv q^2 = \left(\frac{v}{p_0}\right)^2 - q^2 \underset{p_0 \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} -q^2 & \text{при } v = v_d, \\ 4p_0^2 & \text{при } v = v_z. \end{cases} \quad (8.35)$$

Все выкладки могут быть проведены непосредственно в явном виде, но в дальнейшем изложении удобно будет отделить случай  $t_{00}$  от  $t_{0T}$ . Для их прямого сравнения воспользуемся сохранением тока, что позволит получить

$$\langle p | j_0^\alpha | p+q \rangle = \frac{q}{q_0} \langle p | j^\alpha | p+q \rangle = \frac{q^2}{q_0} F^\alpha(u). \quad (8.36)$$

<sup>1)</sup> Если же условие (8.30) не выполнено, то вклады второго класса остаются отличными от нуля и дают в правиле сумм члены, сингулярные по массам внешних частиц. Эти члены необходимы для компенсации аналогичных сингулярностей во вкладах I класса с тем, чтобы правая часть выражения не имела особенностей по  $u_1$  и  $u_2$ . Данное обстоятельство впервые было отмечено в работе [246].

<sup>2)</sup> См. гл. 6, § 3, п. 2 [в частности, формулы (6.63)] и гл. 7, § 4 [формулы (7.95) и (7.96)].

Таким образом, для  $t_{00}$  (или  $t_{0L}$ ) имеем

$$\frac{(p_0 q^2)^2}{2(p_0^2 + q^2)^{1/2}} \int \frac{dv}{v^2} [F^\beta(u) F^\alpha(u) \delta(v - v_d) - F^\alpha(u) F^\beta(u) \delta(v - v_z)] - \text{перекр. чл.}, \quad \mu = 0, L,$$

а для  $t_{0T}$

$$\frac{(p_0 q^2 q)}{2(p_0^2 + q^2)^{3/2}} \int \frac{dv}{v} [F^\beta(u) F^\alpha(u) \delta(v - v_d) - F^\alpha(u) F^\beta(u) \delta(v - v_z)] - \text{перекр. чл.}, \quad \mu = T.$$

В пределе при  $p \rightarrow \infty$  получаем следующие вклады:

$$\lim_{p_0 \rightarrow \infty} 2p_0 \left[ F^\beta(-q^2) F^\alpha(-q^2) - \left( \frac{q^2}{4p_0^2} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times F^\alpha(4p_0^2) F^\beta(4p_0^2) \right] - \text{перекр. чл.}, \quad \mu = 0, L, \quad (8.37)$$

и

$$\lim_{p_0 \rightarrow \infty} q \left[ F^\beta(-q^2) F^\alpha(-q^2) + \frac{q^2}{4p_0^2} F^\alpha(4p_0^2) F^\beta(4p_0^2) \right] - \text{перекр. чл.}, \quad \mu = T. \quad (8.37')$$

Проведенное вычисление прежде всего показывает, что для коммутатора  $[j_0, j_0]$  пренебрежение вкладом  $Z$ -диаграмм достаточно оправданно благодаря подавляющему множителю  $1/v_z^2 \sim 1/(2p_0)^4$ . Этим обстоятельством наряду с хорошо обоснованным свойством сверхсходимости (8.32) подтверждается правильность результата (8.20). В выражении же, относящемся к коммутатору  $[j_0, j_T]$ , помимо отсутствия общего множителя  $p_0$  (что уже является тревожным сигналом) мы имеем меньший подавляющий множитель  $[1/v_z \sim 1/(2p_0)^3]$  для  $Z$ -диаграмм, а это увеличивает сомнения в справедливости соответствующего правила сумм.

Итак, мы выяснили, что с точки зрения построения правил сумм  $j_0$  и  $j_L$  — «хорошие» операторы, тогда как  $j_T$  — «плохой» оператор<sup>1)</sup>. Рассмотренные выше правила сумм построены из коммутатора хорошего оператора с хорошим и из коммутатора хорошего оператора с плохим. Можно взять и коммутатор плохих операторов, такой, например, как  $[j_T, j_T]$ . Нетрудно видеть, что тогда правило сумм будет содержать амплитуды  $c_i$ , в нем будет неприятный множитель  $q_i q_j / p_0$  и, кроме того, вклад  $Z$ -диаграмм не будет иметь подавляющего множителя (этот вклад может быть и равным нулю в зависимости только от асимптотического поведения формфакторов).

Теперь мы можем сравнить эти результаты с асимптотическими свойствами соответствующих амплитуд. Коммутатор типа [хороший, хороший] дает правило сумм для  $a$  с асимптотикой  $\xrightarrow{v \rightarrow \infty} v^{\alpha-2}$ , типа [хороший, плохой] дает правило сумм для  $b_i \xrightarrow{v \rightarrow \infty} v^{\alpha-1}$ , а типа [плохой, плохой] — для  $c_i \xrightarrow{v \rightarrow \infty} v^\alpha$ . Заметим, что множители сверхсходимости ( $v^{-2}, v^{-1}, v^0$ ) эквивалентны соответствующим подавляющим множителям в  $Z$ -диаграммах. Объясняется это следующим образом.

В гл. 4, чтобы найти множители сверхсходимости для каждого инварианта, мы, основываясь на интуиции, просто рассуждали, исходя из свойств дивергенции (для простоты рассмотрим рассеяние вперед):

$$q_\mu q_\nu t^{\mu\nu} = v^2 a + 2vib + u^2 c + ud \equiv w = \\ = \frac{1}{2\pi} \int d^4 x \exp(iqx) \langle p | [D_\beta(x), D_\alpha(0) | p \rangle. \quad (8.38)$$

<sup>1)</sup> Такая терминология была впервые введена в более общем контексте Фубини, Сегре и Валека [247], а также Дашеном и Гелл-Манном [47].

Отсюда следовало

$$a = \frac{w - 2\sqrt{ub} - u^2c - d}{v^2}, \quad (8.39)$$

и асимптотическое поведение функции  $a$  становилось лучше, чем функции  $w$ . Чтобы получить аналогичные сведения о  $b$ , мы ввели

$$q_\mu t^{\mu\nu} = w^\nu = p^\nu w_1 + q^\nu w_2 \quad (8.40)$$

и получили

$$b = \frac{w_2 - uc - d}{v}. \quad (8.41)$$

Если добавить сюда соотношения  $w \xrightarrow{v \rightarrow \infty} v^\alpha$ ,  $w_2 \xrightarrow{v \rightarrow \infty} v^\alpha$ , ..., то информация, безусловно, станет полной. Возможен иной, эквивалентный ход рассуждений, который мы реализовали при вычислениях в явной форме. В выражениях для  $t_{00}$  и  $t_{0T}$

$$t_{00} = \frac{p_0}{v^2} (w - 2q_j w_j + q_i q_j t_{ij}), \quad (8.42)$$

$$t_{0T} = \frac{1}{v} (w + q_j t_{Tj}) \quad (8.43)$$

фигурируют не только степени  $p_0$ , соответствующие кинематическим множителям перед правилом сумм, но и подавляющие множители  $1/v^2$ ,  $1/v$ , позволяющие устранить соответствующие вклады при бесконечных  $v$ .

#### 4. Хорошие и плохие операторы

Подытожим результаты предыдущего раздела. Прежде всего напомним преимущества насыщения в системе  $P \rightarrow \infty$ . Мы показали, что такая процедура позволяет сформулировать правило сумм в виде дисперсионного соотношения с фиксированной массой. Перечислим важнейшие следствия.

1. Сходимость правил сумм весьма удовлетворительно оценивается с помощью модели полюсов Редже для адронной амплитуды  $t_{\mu\nu}$  с участием слабых и электромагнитных токов.

2. Сложные, как правило, вклады амплитуд II класса и Z-диаграмм I класса отсутствуют.

3. «Массы», связанные с внешними токами, имеют фиксированные пространственноподобные значения. Таким образом, правила сумм включают измеримые (в ближайшем будущем) вершины, описывающие слабые и электромагнитные возбуждения резонансов.

Кроме того, при выводе правил сумм мы обнаружили различие между «хорошими» и «плохими» операторами <sup>1)</sup>. «Хорошие» операторы характеризуются тем, что их матричные элементы между одночастичными состояниями имеют порядок  $P$  при  $P \rightarrow \infty$  <sup>2)</sup> и порождают правила сумм с улучшенными свойствами сходимости; это связано с наличием сильных подавляющих множителей у вкладов Z-диаграмм.

В рамках нашего подхода можно получить систематическую классификацию хороших и плохих операторов, исследуя поведение их матричных элементов в пределе бесконечно большого импульса. Рассмотрим величину

$$(p', \lambda', i' | O_\mu | i, \lambda, p), \quad (8.44)$$

где  $O_\mu \equiv O_\mu(0)$  — произвольный локальный оператор, трансформационные свойства которого по отношению к группе Лоренца (скаляр, вектор, тензор, ...) характеризуются индексом  $\mu$ . Внешними являются адронные состоя-

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 370.

<sup>2)</sup> Напомним, что это зависит от выбора нормировки физических состояний!



ния с полным трехмерным импульсом  $\mathbf{p}$  и спиральностью  $\lambda$ , а всем остальным характеристикам соответствует индекс  $i$ . Наша цель — исследовать свойства матричного элемента (8.44) при  $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \rightarrow \infty$  вдоль третьей оси и при фиксированных поперечных компонентах  $\mathbf{p}_T, \mathbf{p}'_T$  и  $\Delta = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ . Для этого мы выделим явную зависимость состояний от импульса в виде экспоненциальных множителей, в результате чего получаем общую формулу<sup>1)</sup>

$$\lim_{p_3, p'_3 \rightarrow \infty} \langle p'_3, \mathbf{p}'_T; \lambda', i' | O_\mu | p_3, \mathbf{p}_T; \lambda, i \rangle = \lim_{p_3, p'_3 \rightarrow \infty} L_\mu^\nu(\zeta_0) \langle m_0; \lambda', i | \exp\left(i p'_T \frac{\mathbf{E}}{m_0}\right) O_\nu \exp\left(-i p_T \frac{\mathbf{E}}{m_0}\right) | i, \lambda; m_0 \rangle, \quad (8.45)$$

где  $L_\mu(\zeta)$  — преобразование Лоренца оператора  $O_\mu$ , соответствующее гиперболическому углу  $\zeta_0$ ,

$$\zeta_0 = \ln \left[ \frac{p}{m_0} + \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2}\right)^{1/4} \right]$$

( $m_0$  — произвольная средняя масса). Вывод уравнения (8.45) дан в приложении I этой главы.

Здесь самое существенное — это выделение всей зависимости от  $p_3$  во внешний множитель, тогда как оставшийся матричный элемент конечен и не зависит от  $p_3$ . Следовательно, предельное значение можно найти, задав трансформационные свойства оператора  $O_\mu$  по отношению к преобразованиям Лоренца. Например, для скалярного и псевдоскалярного операторов  $O_\mu \equiv S, P$  величина  $L_\mu^\nu = 1$  и соответствующий матричный элемент при  $p_3 \rightarrow \infty$  ведет себя как константа. Таким образом,  $S$  и  $P$  — плохие операторы.

В более интересном случае плотности тока  $j_0$  мы имеем

$$L_0^\nu j_\nu \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \text{ch } \zeta_0 (j_0 + j_3) \quad (8.46)$$

и

$$\langle p'; \lambda', i' | j_0 | i, \lambda; p \rangle \underset{p_3, p'_3 \rightarrow \infty}{\sim} \frac{p}{m_0} \langle m_0; \lambda', i' | \exp\left(i p_T \frac{\mathbf{E}}{m_0}\right) (j_0 + j_3) \times \exp\left(-i p_T \frac{\mathbf{E}}{m_0}\right) | i, \lambda; m_0 \rangle. \quad (8.47)$$

Аналогичный результат справедлив для  $j_3$ , так что  $j_0$  и  $j_3$  — хорошие операторы и в пределе их матричные элементы совпадают. В то же время  $j_T \equiv j_{1,2}$  оказывается плохим оператором, ибо его матричный элемент ведет себя как константа. На основе общей формулы (8.45) можно составить следующую таблицу для скалярных, векторных и тензорных операторов (тех, которые, по-видимому, имеют самое прямое отношение к физике элементарных частиц):

Хорошие операторы

$$V_0, V_L; A_0, A_L; T_{0T}, T_{LT}. \quad (8.48)$$

Плохие операторы

$$S, P; V_T, A_T; T_{00}, T_{LL}, T_{0L}, T_{TT}.$$

Изложенный выше метод обладает большой общностью и не зависит от специфических свойств внешних состояний. Тем не менее интересно проиллюстрировать его на простом примере теории невзаимодействующих полей, где можно написать явные выражения для операторов  $O_\mu$  (времененно пренебрегая внутренними симметриями)

$$O_\mu = \bar{\psi} \Gamma_\mu \psi. \quad (8.49)$$

<sup>1)</sup> Прекрасное изложение этого вопроса можно найти в статье [248]; см. также [249].

Здесь  $\Gamma_\mu$  — одна из 16 матриц Дирака (1,  $\gamma_\mu, \dots$ ). Тогда нам достаточно вычислить матричные элементы

$$\langle \mathbf{p}' | O_\mu | \mathbf{p} \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}') \Gamma_\mu u(\mathbf{p}). \quad (8.50)$$

Мы используем явные выражения для спиноров

$$\frac{u(\mathbf{p})}{(2E)^{1/2}} = \left( \frac{E+m}{2E} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \chi \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \mathbf{n} \end{pmatrix} \chi \equiv \varphi, \quad (8.51)$$

где  $\chi$  — стандартный спинор Паули, а  $\mathbf{n}$  — общее направление, вдоль которого  $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \rightarrow \infty$ . Если принять во внимание тождество <sup>1)</sup>

$$\gamma_5 \sigma \mathbf{n} \varphi = \varphi, \quad (8.52)$$

то из равенства (8.50) вытекает асимптотическое соотношение

$$\langle \mathbf{p}' | O_\mu | \mathbf{p} \rangle \xrightarrow{p \rightarrow \infty} P \varphi^\dagger \{ \gamma_0 \Gamma_\mu, \gamma_5 \sigma \mathbf{n} \} \varphi. \quad (8.53)$$

Аналогично можно рассмотреть соответствующую аннигиляционную вершину, необходимую для оценки вклада  $Z$ -диаграммы:

$$\langle 0 | O_\mu | \mathbf{p}, -\mathbf{p}' \rangle = \bar{v}(-\mathbf{p}') \Gamma_\mu u(\mathbf{p}) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} P \psi^\dagger [ \gamma_0 \Gamma_\mu, \gamma_5 \sigma \mathbf{n} ] \varphi, \quad (8.54)$$

где

$$\psi = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{v(-\mathbf{p})}{(2E)^{1/2}}.$$

Таким образом, мы видим, что в данном контексте можно следующим образом отличить хорошие операторы от плохих:

$$\begin{aligned} \{ \gamma_0 \Gamma_\mu, \gamma_5 \sigma \mathbf{n} \} \neq 0, & \quad \Gamma_\mu \text{ хороший,} \\ \{ \gamma_0 \Gamma_\mu, \gamma_5 \sigma \mathbf{n} \} = 0, & \quad \Gamma_\mu \text{ плохой.} \end{aligned} \quad (8.55)$$

Тотчас становится ясным следующее:

$$\begin{aligned} [ \gamma_0 \Gamma_\mu, \gamma_5 \sigma \mathbf{n} ] = 0, & \quad \Gamma_\mu \text{ хороший,} \\ [ \gamma_0 \Gamma_\mu, \gamma_5 \sigma \mathbf{n} ] \neq 0, & \quad \Gamma_\mu \text{ плохой.} \end{aligned} \quad (8.56)$$

Соотношения (8.55) и (8.56) подтверждают, конечно, указанную выше общую классификацию операторов, а именно:

$$\begin{aligned} \gamma_0, \gamma_0 \gamma_5; \gamma_L, \gamma_L \gamma_5; \gamma_0 \gamma_T, \gamma_L \gamma_T & \text{ хорошие,} \\ 1, \gamma_5; \gamma_T, \gamma_T \gamma_5; \gamma_0 \gamma_L, \gamma_T \gamma_T & \text{ плохие.} \end{aligned} \quad (8.57)$$

В то же время предыдущие соотношения показывают, как именно комбинируются диаграммы рассеяния вперед и  $Z$ -диаграммы в свободной теории поля, чтобы удовлетворялись различные правила сумм. Так, в случае коммутатора хороших операторов существенны только прямые члены, а  $Z$ -диаграммы исчезают, тогда как для коммутатора плохих операторов справедливо обратное. В качестве примера таких противоположных ситуаций мы рассмотрим (используя кварковую модель) коммутатор двух аксиальных зарядов (оба оператора хорошие):

$$\begin{aligned} \bar{Q}^\alpha &= \int \bar{q} \gamma_0 \gamma_5 \frac{1}{2} \tau^\alpha q d^3 x, \\ [\bar{Q}^+, \bar{Q}^-] &= 2Q^3 \end{aligned} \quad (8.58)$$

<sup>1)</sup> В нашем стандартном представлении  $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\sigma \mathbf{n}$  в действительности означает  $\begin{pmatrix} \sigma \mathbf{n} & 0 \\ 0 & \sigma \mathbf{n} \end{pmatrix}$ .

и двух интегралов от скалярных плотностей (оба оператора плохие):

$$S^\alpha = \int \bar{q} \frac{1}{2} \tau^\alpha q d^3x, \quad (8.59)$$

$$[S^+, S^-] = 2Q^3.$$

Насыщение (в обкладках — протоны с равными импульсами) дает соответственно этому (по порядку выписаны вклады прямых и  $Z$ -диаграмм)

$$r_A^2 \frac{E^2 - m_N^2}{E^2} + r_A^2 \frac{m_N^2}{E^2} = 1 \text{ (хороший, хороший)}, \quad (8.60)$$

$$r_S^2 \frac{m_N^2}{E^2} + r_S^2 \frac{E^2 - m_N^2}{E^2} = 1 \text{ (плохой, плохой)}. \quad (8.61)$$

Очевидно, что два вклада поменялись ролями.

В заключение этого параграфа выпишем в явном виде асимптотику матричных элементов некоторых хороших и плохих операторов между состояниями со спином  $1/2$ ; это нам понадобится в дальнейшем. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2) u(p_1) &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} \chi_2^\dagger [m_1 + m_2 + i\sigma n \times \Delta] \chi_1, \\ \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} \chi_2^\dagger [(m_2 - m_1) \sigma n - \sigma \Delta] \chi_1; \\ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} 2P \chi_2^\dagger \chi_1 n_\mu, \\ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu \gamma_5 u(p_1) &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} 2P \chi_2^\dagger \sigma n \chi_1 n_\mu, \\ \bar{u}(p_2) \sigma_{ij} u(p_1) &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} 2P \chi_2^\dagger \varepsilon_{ijk} (\sigma^k - \sigma n^k) \chi_1, \\ \bar{u}(p_2) \sigma_{0k} u(p_1) &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} 2P \chi_2^\dagger \varepsilon_{klm} \sigma^l n^m \chi_1, \\ \bar{u}(p_2) \sigma_{ij} \gamma_5 u(p_1) &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} 2Pi \chi_2^\dagger (n_i \sigma_j - n_j \sigma_i) \chi_1, \\ \bar{u}(p_2) \sigma_{0k} \gamma_5 u(p_1) &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} 2Pi \chi_2^\dagger (\sigma_k - \sigma n^k) \chi_1, \end{aligned} \quad (8.62)$$

$$(8.63)$$

где  $n_\mu = (1, \mathbf{n})$ .

### а. Высшие симметрии [247]

До сих пор мы рассматривали киральную алгебру  $SU(3) \otimes SU(3)$ , генераторами которой являются векторные и аксиально-векторные заряды

$$Q^\alpha = \int d^3x V_0^\alpha, \quad \bar{Q}^\alpha = \int d^3x A_0^\alpha. \quad (8.64)$$

Можно расширить эту алгебру, добавив четыре проинтегрированные компоненты (векторных и аксиальных токов), которые генерируют алгебру  $U(6) \otimes U(6)$ , содержащую 72 генератора ( $\alpha$  принимает теперь значения от 0 до 8):

$$Q_\mu^\alpha = \int d^3x V_\mu^\alpha, \quad \bar{Q}_\mu^\alpha = \int d^3x A_\mu^\alpha. \quad (8.65)$$

Можно пойти еще дальше и ввести все проинтегрированные плотности тока: скалярную, векторную и т. д., которые в рамках модели свободных кварковых полей могут быть представлены как

$$Q_\nu^\alpha = \int d^3x \bar{q} \frac{1}{2} \lambda^\alpha \Gamma_\nu q, \quad (8.66)$$

$\nu = S, P, V, A, T; \quad \alpha = 0, 1, \dots, 8.$

Так строится алгебра  $U$  (12), 144 генератора которой можно получить с помощью 16 матриц Дирака и 9 матриц  $\lambda^\alpha$ .

Коль скоро мы имеем алгебру  $U$  (12), естественно попытаться вывести характерные для нее новые следствия путем насыщения полного набора коммутационных соотношений несколькими промежуточными состояниями. Чтобы правила сумм имели простую структуру и содержали резонансы только в  $s$ -канале, необходимо использовать метод бесконечно большого импульса. Последнее обстоятельство приводит к различиям между хорошими и плохими операторами в том смысле, что коммутаторы плохих операторов чаще всего приводят к расходящимся правилам сумм и, следовательно, не могут быть использованы непосредственно.

Таким образом, мы вынуждены ограничиться 72 хорошими операторами, которые, к сожалению, не составляют подалгебры в алгебре  $U$  (12). Подалгеброй хороших операторов в  $U$  (12) является известная алгебра  $U(3) \otimes U(3)$ <sup>1)</sup>; добавление хороших тензорных операторов приводит к алгебре  $U(6)_w$  с 36 генераторами. Это проще всего установить, рассматривая явный вид матричных элементов (8.62) и (8.63), так как при замене  $V_0 \rightarrow 1, A_0 \rightarrow \sigma_3$  и  $T_{0L} \rightarrow \sigma_{1,2}$  мы получаем алгебру матриц Паули  $U(2)$ . Насыщение матричных элементов полученного набора коммутаторов состояниями неприводимого представления  $U(6)_w$  позволяет воспроизвести некоторые теоретико-групповые результаты этой высшей симметрии.

Мы не собираемся здесь больше останавливаться на этом вопросе, поскольку нас будут прежде всего интересовать коммутаторы векторных и аксиально векторных плотностей токов.

## § 2. Спин $1/2$

В предыдущих разделах мы более или менее подробно рассмотрели общие вопросы, связанные с насыщением матричных элементов коммутаторов зарядовых плотностей в системе бесконечно большого импульса, что привело нас к общему токовому правилу сумм

$$\frac{1}{2} \int d^4v a^{\beta\alpha}(v, t, u_1, u_2) = i f_{\beta\alpha\gamma} F_1^\gamma(t). \quad (8.67)$$

Правило сумм (8.67) было выведено для случая бесспиновых внешних частиц. Поскольку в настоящее время с точки зрения эксперимента единственно возможной мишенью является нуклон, а единственные доступные формфакторы — это формфакторы нуклона и нуклонных резонансов, самые интересные приложения требуют обобщения нашего метода на внешние объекты со спином  $1/2$ .

Прямое применение методов, изложенных в предыдущих разделах, несколько затрудняется тем, что, как показывает простой подсчет<sup>2)</sup>, ковариантная запись тензора второго ранга  $t_{\mu\nu}$  требует введения 32 инвариантных функций. Поэтому выгоднее перейти к нековариантному формализму, где проще получить общие токовые правила сумм для спина  $1/2$ . При таком упрощенном подходе мы будем следить, конечно, лишь за старшими членами при  $P \rightarrow \infty$ , так что заметить случайные «воскрешения» будет невозможно. Но мы должны обратить внимание на простоту вычислений в этой системе; это указывает на возможные преимущества кинематики в системе бесконечно большого импульса для задач со спином.

<sup>1)</sup> В действительности мы имеем две изоморфные алгебры  $U(3) \otimes U(3)$ , порожденные  $(V_0, A_0)$  и  $(V_3, A_3)$ .

<sup>2)</sup> Действительно, реакцию  $(1/2) + j_\mu \rightarrow (1/2) + j_\mu$  можно разбить на более простые:  $1/2 + j_\mu^T \rightarrow (1/2) + j_\mu^T, (1/2) + j_\mu^L \rightarrow (1/2) + j_\mu^L, (1/2) + j_\mu^R \rightarrow (1/2) + j_\mu^R$ , где  $j_\mu^L$  и  $j_\mu^R$  являются компонентами  $j_\mu$  со спином 0 и 1 (в общем случае несохраняющимися). Рассматривая число независимых спиральных амплитуд [254—257], мы видим, что первый процесс выражается через 18 инвариантов, второй (дважды) через 6 и третий через 2.

Прежде всего нам необходимы явные выражения для фундаментальных векторных и аксиальных вершин нуклонного октета в пределе при  $P \rightarrow \infty$ . Рассмотрим матричный элемент  $\langle p_2 | (V_\mu^\alpha, A_\mu^\alpha) | p_1 \rangle$ . Напомним, что в применяемой нами процедуре  $P = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) = Pn \rightarrow \infty$  при фиксированном  $\Delta = p_2 - p_1$  и при  $n\Delta = 0$ . Тогда легко получить <sup>1)</sup> следующее выражение для вершины с векторным током:

$$\langle p_2 | V_\mu^\alpha | p_1 \rangle = \bar{u}_2 [\gamma_\mu F_1^\alpha + i\sigma_{\mu\nu} \Delta^\nu F_2^\alpha + \Delta_\mu F_2^\alpha] u_1 \underset{P \rightarrow \infty}{\sim} 2P\chi_2^\dagger [F_1^\alpha(t) + i\sigma n \times \Delta F_2^\alpha(t)] \chi_1 n_\mu, \quad (8.68)$$

в то время как аксиальную векторную вершину можно представить в виде

$$\langle p_2 | A_\mu^\alpha | p_1 \rangle = \bar{u}_2 \{ \gamma_\mu G_1^\alpha(t) + i\sigma_{\mu\nu} \Delta_\nu G_2^\alpha(t) + \Delta_\mu G_3^\alpha(t) \} \gamma_5 u_1 \underset{P \rightarrow \infty}{\sim} 2P\chi_2^\dagger [G_1^\alpha(t) + i\sigma n \times \Delta G_2^\alpha(t)] (\sigma n) \chi_1 n_\mu, \quad (8.69)$$

где  $n_\mu = (1, \mathbf{n})$ ,  $t = -\Delta^2$ ,  $\chi$  — спиноры Паули. Мы приписали формфакторам  $SU(3)$ -индекс  $\alpha$ , так что должны считать их матрицами  $8 \times 8$ . Чтобы подход был более общим, будем считать симметрию  $SU(3)$  нарушенной и токи несохраняющимися. Например, в случае симметрии  $SU(2)$  [или точной симметрии  $SU(3)$ ]  $F_3 = G_3 = 0$ .

Предыдущие соотношения показывают прежде всего, что в системе  $P \rightarrow \infty$  естественными электромагнитными формфакторами будут  $F_1$  и  $F_2$  (так же как в системе  $P = 0$  ими являются формфакторы Сакса), которые и войдут в правила сумм. Кроме того, индуцированные формфакторы не появляются в главных асимптотических членах, а поэтому прямой переход к пределу при  $P \rightarrow \infty$  не дает никакой информации о  $F_3$  или  $G_3$  (они относятся к плохим операторам).

Так как нуклонные вершины вполне аналогичны друг другу, мы ограничимся детальным рассмотрением коммутатора векторных плотностей зарядов:

$$[V_0^\beta(\mathbf{x}), \overline{V_0^\alpha}(\mathbf{y})] = i f_{\beta\alpha\gamma} V_0^\gamma(\mathbf{x}) \delta_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8.70)$$

Выполнив преобразование Фурье в равенстве (8.70), произведем его насыщение в обкладках из состояний  $|p_1\rangle$  и  $|p_2\rangle$  октета со спином  $\frac{1}{2}$ . Получим стандартный результат:

$$(2\pi)^3 \sum_n \delta^3(p_2 + q_2 - p_n) \langle p_2 | V_0^\beta | n \rangle \langle n | V_0^\alpha | p_1 \rangle - (2\pi)^3 \sum_n \delta^3(p_2 - q_1 - p_n) \langle p_2 | V_0^\alpha | n \rangle \langle n | V_0^\beta | p_1 \rangle = i f_{\beta\alpha\gamma} \langle p_2 | V_0^\gamma | p_1 \rangle, \quad (8.71)$$

где

$$p_2 + q_2 = p_1 + q_1, \quad (8.72)$$

а  $q_2$  и  $q_1$  — импульсы, приписываемые  $V_0^\beta$  и  $V_0^\alpha$ .

Перейдем теперь к пределу при  $P = nP = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \rightarrow \infty$ , <sup>1)</sup> фиксировав  $\Delta$  и положив  $nq_2 = nq_1 = 0$  (или  $n\Delta = nQ = 0$ ). Чтобы получить представление о структуре правил сумм, полезно прежде всего отобразить «одно-нуклонные» вклады. С учетом равенства (8.68) находим <sup>2)</sup>

$$[F_1^\beta(u_2), F_1^\alpha(u_1)] + [F_2^\beta(u_2), F_2^\alpha(u_1)] q_2 q_1 + [F_1^\beta(u_2), F_2^\alpha(u_1)] i\sigma n \times q_1 - [F_2^\beta(u_2), F_1^\alpha(u_1)] i\sigma n \times q_2 + \{F_2^\beta(u_2), F_2^\alpha(u_1)\}^\dagger i(\sigma n) (nq_2 \times q_1) + \text{непр. спектр} = i f_{\beta\alpha\gamma} [F_1^\gamma(t) + F_2^\gamma(t)] i\sigma n \times \Delta. \quad (8.73)$$

<sup>1)</sup> Используя вышеприведенные асимптотические соотношения (8.62) и (8.63).

<sup>2)</sup> Напомним следующее тривиальное соотношение:

$$(\sigma n \times q_2) (\sigma n \times q_1) = i (\sigma n) (nq_2 \times q_1) + q_1 q_2.$$

Соотношение (8.73) получено при рассмотрении коммутатора двух векторных токов  $[V, V] = V$ . Нетрудно вывести аналогичные соотношения для  $[A, A] = V$  и  $[A, V] = A$ . Единственное, на что следует при этом обратить внимание, — изменение коммутаторного или антикоммутаторного вида «опуцлонных» членов.

Простой вид имеет вклад непрерывного спектра состояний

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int dv \frac{t_{00}^{\beta\alpha}}{P_0^2}, \quad v = PQ = P_0 Q_0, \quad (8.74)$$

где

$$t_{\mu\nu}^{\beta\alpha} = (2\pi)^3 \sum_{|n \neq N} \langle p_2 | j_\mu^\beta | n \rangle \langle n | j_\nu^\alpha | p_1 \rangle \delta^4(p_2 + q_2 - p_n) - \left( \begin{matrix} \beta \leftrightarrow \alpha \\ q_2 \leftrightarrow -q_1 \end{matrix} \right). \quad (8.75)$$

Мы предположим (не вникая в подробности), что если пренебречь диаграммами II класса и Z-диаграммами, то можно поменять местами предельный переход и интегрирование.

Из структуры правила сумм (8.73) вытекает следующее асимптотическое разложение для  $t_{00}^{\beta\alpha}$ :

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{t_{00}^{\beta\alpha}}{P_0^2} = t_1^{\beta\alpha} + t_2^{\beta\alpha} i\sigma_n \times q_2 + t_3^{\beta\alpha} i\sigma_n \times q_1 + t_4^{\beta\alpha} i_n (q_2 \times q_1) (\sigma_n). \quad (8.76)$$

Формально равенство (8.76) имеет такой вид в случаях  $[V, V]$  и  $[A, A]$ , а в случае  $[A, V]$  разложение получается простой заменой  $t_i \rightarrow t_i \sigma_n$ . Величины  $t_i$  являются инвариантными функциями переменных  $v, t, q_1^2, q_2^2$ , и при интегрировании  $q_1^2, q_2^2$  и  $t$  фиксированы, причем их значения пространственно-подобны.

Из соотношения (8.73) мы получаем следующие правила сумм:

$$\begin{aligned} [F_1^\beta(u_2), F_1^\alpha(u_1)] + \frac{1}{2} (t - u_1 - u_2) [F_2^\beta(u_2), F_2^\alpha(u_1)] + \\ + \frac{1}{2} \int dv t_1^{\beta\alpha}(v, t_1, u_2, u_1) = i f_{\beta\alpha\gamma} F_1^\gamma(t), \end{aligned} \quad (8.77)$$

$$[F_1^\beta(u_2), F_2^\alpha(u_1)] + \frac{1}{2} \int dv t_2^{\beta\alpha}(v, \dots) = i f_{\beta\alpha\gamma} F_2^\gamma(t), \quad (8.78)$$

$$[F_2^\beta(u_2), F_1^\alpha(u_1)] + \frac{1}{2} \int dv t_3^{\beta\alpha}(v, \dots) = i f_{\beta\alpha\gamma} F_2^\gamma(t). \quad (8.79)$$

$$\{F_2^\beta(u_2), F_2^\alpha(u_1)\} + \frac{1}{2} \int dv t_4^{\beta\alpha}(v, \dots) = 0. \quad (8.80)$$

Все правила сумм имеют особенно простой вид в случае симметрии  $SU(2) \otimes SU(2)$ , когда внешними частицами являются нуклоны и  $G_2 = 0$ . Кроме того,  $F_{1,2}^\alpha = 1/2 \tau^\alpha F_{1,2}^V, G_1^\alpha = 1/2 \tau^\alpha G_1$ , и можно использовать изоспиновое разложение

$$t_i^{\beta\alpha} = \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^\alpha] t_i^{(\beta\alpha)} + \delta^{\beta\alpha} t_i^{(\beta\alpha)}. \quad (8.81)$$

Поскольку эти правила сумм представляют интерес, мы воспроизведем их здесь для следующих трех случаев.

1) Из коммутатора  $[V_0, V_0]$  получаем

$$F_1^V(u_2) F_1^V(u_1) + \frac{1}{2} (t - u_1 - u_2) F_2^V(u_2) F_2^V(u_1) + 2 \int_{v_0}^{\infty} dv t_1^{(-)}(v, t, u_1, u_2) = F_1^V(t), \quad (8.82)$$

$$F_1^V(u_2) F_2^V(u_1) + 2 \int_{v_0}^{\infty} dv t_2^{(-)}(v, \dots) = F_2^V(t), \quad (8.83)$$

$$F_2^V(u_2) F_1^V(u_1) + 2 \int_{v_0}^{\infty} dv t_3^{(-)}(v, \dots) = F_2^V(t), \quad (8.84)$$

$$F_2^V(u_2) F_2^V(u_1) + 2 \int_{v_0}^{\infty} dv t_4^{(+)}(v, \dots) = 0. \quad (8.85)$$

[В действительности соотношения (8.83) и (8.84) эквивалентны и переходят одно в другое при замене  $q_1^2 \leftrightarrow q_2^2$ .]

2) В случае коммутатора  $[A_0, A_0]$  имеем

$$G_1(u_2) G_1(u_1) + 2 \int_{v_0}^{\infty} dv t_1^{(-)}(v, t, \dots) = F_1^V(t), \quad (8.86)$$

$$2 \int_{v_0}^{\infty} dv t_{2,3}^{(-)}(v, \dots) = F_2^V(t), \quad (8.87)$$

$$\int_{v_0}^{\infty} dv t_4^{(+)}(v, \dots) = 0. \quad (8.88)$$

3) Наконец, коммутатор  $[A_0, V_0]$  дает]

$$G_1(u_2) F_1^V(u_1) + 2 \int_{v_0}^{\infty} dv t_1^{(-)}(v, \dots) = G_1(t), \quad (8.89)$$

$$G_1(u_2) F_2^V(u_1) + 2 \int_{v_0}^{\infty} dv t_3^{(+)}(v, \dots) = 0, \quad (8.90)$$

$$\int_{v_0}^{\infty} dv t_{2,4}^{(+)}(v, \dots) = 0. \quad (8.91)$$

Спектральные функции  $t_i$ , конечно, различны во всех трех случаях, и при выводе правил сумм (8.82) — (8.91) мы учли свойство перекрестной симметрии

$$t_{1,2,3,4}^{\beta\alpha}(p_2, q_2, p_1, q_1) = -t^{\beta\alpha*}(p_1, -q_2, p_2, -q_1), \quad (8.92)$$

т. е.

$$\begin{aligned} t_{1,2,3}^{(\mp)}(v) &= \pm t_{1,2,3}^{(\mp)}(-v), \\ t_4^{(\mp)}(v) &= \mp t_4^{(\mp)}(-v) \end{aligned} \quad (8.93)$$

для  $[V, V]$  и  $[A, A]$ ,

$$\begin{aligned} t_1^{(\mp)}(v) &= \pm t_1^{(\mp)}(-v), \\ t_{2,3,4}^{(\mp)}(v) &= (\mp) t_{2,3,4}^{(\mp)}(-v) \end{aligned} \quad (8.94)$$

для  $[A, V]$ . Необходимо, наконец, отметить, что в частном случае, когда  $q_1 = q_2$  (т. е. при  $t = 0$ ), инвариантность по отношению к отражению времени приводит к дополнительным ограничениям для коммутаторов  $[V, V]$  и  $[A, A]$  и некоторые из указанных выше правил сумм становятся тривиальными.

Набором правил сумм (8.82) — (8.91) исчерпываются все прямые следствия из локальной алгебры  $SU(3) \otimes SU(3)$  для мишени со спином  $1/2$ . Далее мы подробно остановимся на приложениях этих правил сумм.

### § 3. О приложениях

Почти все приложения, которые мы будем рассматривать, построены на основе общего токового правила сумм

$$\frac{1}{2} \int d\nu a^{\beta\alpha}(\nu, t, u_1, u_2) = if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(t), \tag{8.95}$$

где предполагается, что «массы»  $u_{1,2}$  токов пространственно-подобны и имеют фиксированные значения  $u_{1,2} = -q_{1,2}^2$ . Величина  $a^{\beta\alpha}$  определяется через тензор  $t_{\mu\nu}$  [формула (8.11)]:

$$a^{\beta\alpha} = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{t_{00}^{\beta\alpha}}{P_0^2}; \tag{8.96}$$

в случае бесспиновых внешних частиц или в особенно простых кинематических ситуациях  $a^{\beta\alpha}$  является однокомпонентной скалярной функцией (и, следовательно, зависит лишь от скалярных переменных  $\nu, t, \dots$ ), тогда как в случае мишеней со спином ее структура усложняется. Так, в общем случае  $a^{\beta\alpha}$  — матрица в спиновом пространстве и равенство (8.95) содержит несколько правил сумм (четыре в случае с нуклонными обкладками, рассмотренном в предыдущем параграфе).

Мы начнем с изучения нескольких специальных вариантов уравнения (8.95)<sup>1)</sup>. Прежде всего, рассматривая его вычеты в точках сингулярностей по переменным  $u_1$  и  $u_2$ , приходим к соотношению «сверхсходимости»

$$\int \text{Im } A^{\beta\alpha}(\nu, t, m_1^2, m_2^2) d\nu = 0, \tag{8.97}$$

которое, как уже отмечалось (§ 1, п. 3), неявно предполагалось при выводе самого токового правила сумм. Соотношение (8.97) исследовалось в гл. 1, поскольку его естественно отнести к задачам сильных взаимодействий.

Чтобы упростить кинематику, мы будем считать, что массы внешних частиц одинаковы. Во всех конкретных приложениях, которые будут рассматриваться, это условие будет выполнено. Пусть  $u_1 = 0$ , тогда  $u_2 = t$ . Так как равенство  $u_1 = 0$  означает в действительности, что  $q_1 = 0$  (и  $q_2 = -\Delta$ ), становится ясно, что такое же правило сумм можно получить с помощью коммутатора заряда с током. Этому правилу сумм

$$\frac{1}{2} \int d\nu a^{\beta\alpha}(\nu, t, 0, t) = if_{\beta\alpha\gamma} F_1^\gamma(t) \tag{8.98}$$

можно придать более ясный вид, введя операторы дивергенции. Последнее не представляет труда, если воспользоваться соотношением

$$\begin{aligned} q_1^\nu t_{\mu\nu}^{\beta\alpha} &\equiv t_\mu^{\beta\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int \exp(iq_2 x) \langle p_2 | [j_\mu^\beta(x), D^\alpha(0)] | p_1 \rangle d^4x = \\ &= P_\mu w_1^{\beta\alpha} + Q_\mu w_2^{\beta\alpha} + \Delta_\mu w_3^{\beta\alpha}. \end{aligned} \tag{8.99}$$

<sup>1)</sup> Чтобы данный параграф был совершенно самостоятельным, в нем приходится частично повторить содержание соответствующего параграфа гл. 4.



Отсюда имеем

$$a^{\beta\alpha} = \lim_{P_0 \rightarrow \infty} \frac{t_{00}^{\beta\alpha}}{P_0^2} = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{t_0^{\beta\alpha}}{q_{10} P_0^2} = \frac{1}{v} \lim_{P_0 \rightarrow \infty} \frac{t_0^{\beta\alpha}}{P_0} \equiv \frac{1}{v} w_1^{\beta\alpha} \quad (8.100)$$

(при переходе к пределу при  $P \rightarrow \infty$  переменная интегрирования  $v$  остается фиксированной).

Соотношение (8.100) может оказаться лишенным смысла для вкладов от состояний с  $v = 0$  (когда промежуточное состояние имеет ту же массу, что и внешняя частица). В этом случае необходимо выделить вклад одночастичного состояния при  $v = 0$  в формуле (8.98), а затем использовать равенство (8.100) для непрерывного спектра. Таким образом, соотношение (8.98) можно переписать в виде

$$\left( \begin{array}{c} \text{Одночастичный} \\ \text{вклад} \end{array} \right) + \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v} w_i^{\beta\alpha}(v, t; \underline{0}, t) = i f_{\beta\alpha\gamma} F_i^\gamma(t). \quad (8.101)$$

То, что мы употребляем оператор заряда, т. е. привносим в задачу элементы нарушенной симметрии, внешне выражается в использовании амплитуды  $w_1$  и в наличии знаменателя  $v$ , выделяющего низколежащие уровни.

Далее, случай  $u_1 = u_2 = t = 0$  ( $q_1 = q_2 = \underline{0}$ ) эквивалентен насыщению коммутаторов двух зарядов. Вводя

$$w^{\beta\alpha} = q^\mu q^\nu t_{\mu\nu}^{\beta\alpha} \equiv \frac{F_1}{2\pi} \int d^4x \exp(iqx) \langle p | [D^\beta(x), D^\alpha(0)] | p \rangle, \quad (8.102)$$

имеем

$$i a^{\beta\alpha} = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{t_{00}^{\beta\alpha}}{P_0^2} = \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{w^{\beta\alpha}}{q_0^2 P_0^2} = \frac{1}{v^2} w^{\beta\alpha}. \quad (8.103)$$

В результате равенство (8.98) принимает вид

$$\left( \begin{array}{c} \text{Одночастичный} \\ \text{вклад} \end{array} \right) + \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2} w^{\beta\alpha}(v, 0) = i f_{\beta\alpha\gamma} F_i^\gamma(0). \quad (8.104)$$

Величины  $w$  и  $w_1$  являются скалярными функциями в случае бесспиновых внешних частиц и приобретают дополнительную структуру в спиновом пространстве в случае мишеней с большими спинами. Но при рассеянии вперед усреднение по спину приводит к значительным упрощениям в указанной структуре.

Мы уже отмечали, что равенства (8.101) и (8.104) в действительности служат для проверки коммутационных соотношений, содержащих по крайней мере один проинтегрированный оператор. Простой же случай  $t = 0$ ,  $u_1 = u_2 = u \neq 0$  не связан с алгеброй зарядов и дает возможность эффективно проверить коммутационные соотношения для локальных плотностей. (Заметим, что это согласуется с отсутствием множителя  $1/v$ .) Поэтому мы уделим много внимания сравнению соотношения

$$\frac{1}{2} \int d^4v a^{\beta\alpha\gamma}(v, u) = i f_{\beta\alpha\gamma} F_i^\gamma(0) \quad (8.105)$$

с экспериментом.

Наконец, мы сможем кое-что сказать о правиле сумм (8.95) в самом общем случае. Поскольку простые эксперименты для его проверки пока невозможны, мы воспользуемся им для анализа интересных и далеко идущих предположений. В основе расчетов лежит насыщение матричных элементов  $[j_0, j_0]$  одночастичными или резонансными состояниями, приводящее к большому числу алгебраических соотношений между формфакторами. Конечной целью должно быть полное феноменологическое описание слабых и электромагнитных вершин адронов.

В соответствии со сказанным выше приложениям будут посвящены четыре параграфа. В двух из них мы рассмотрим зарядовые коммутаторы.

а также проблемы, связанные с нарушением симметрии  $SU(3)$  и с использованием ЧСАТ (т. е. случай алгебры  $SU(3) \otimes SU(3)$ ).

Предпоследний параграф (§ 6) мы посвятим экспериментальной проверке более простого случая  $t = 0$  [равенство (8.105)] главным образом в связи с высокоэнергетическими процессами нейтрино- и электроорождения.

Алгебраическая структура правил сумм и полное решение проблемы их насыщения резонансами будут рассмотрены в § 7.

### § 4. Проблемы ЧСАТ

#### 1. Правило сумм Адлера — Лейсбергера

Начнем с простейшего случая  $u = t = 0$ . Кроме того, поскольку гипотеза ЧСАТ в основном касается пионных процессов, мы пока что ограничимся рассмотрением алгебры  $SU(2) \otimes SU(2)$ . Блестящим примером исследования коммутатора аксиальных зарядов является, безусловно, соотношение Адлера — Вейсбергера [57, 58, 133, 134], которое мы уже вывели почти всеми возможными способами. Здесь мы еще раз, более обстоятельно, рассмотрим его, анализируя практическую задачу насыщения, а также его обобщения на другие мишени. Для этого необходимо воспроизвести несколько полезных формул.

Соответствующий коммутатор, который помещается в обкладки из внешних протонных состояний, имеет вид

$$[\bar{Q}_I^+, \bar{Q}_I^-] = 2Q^3 \tag{8.106}$$

и после обычных, хорошо нам знакомых преобразований получаем

$$r_A^2 + \frac{1}{2} \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv'}{v'^2} w(v, 0) = 1, \tag{8.107}$$

где

$$w_I^j(v, u=0) = (2\pi)^3 \sum_{n \neq N} \delta^4(p+q-p_n) |\langle p | \bar{D}_I^j | n \rangle|^2 - \text{перекр. чл.} \tag{8.108}$$

и  $v_0$  — пороговое значение,

$$v_0 = \frac{1}{2} m_\pi^2 + m_\pi m_N. \tag{8.109}$$

Как это часто подчеркивают, равенство (8.107) есть прежде всего правило сумм для процессов слабых взаимодействий. В частности, интересно отметить, что величина  $w(v, 0)$  может быть непосредственно связана с неупругим процессом рассеяния нейтрино. Действительно, рассмотрим, как было предложено Адлером [258], процесс рождения

$$\nu(k_1) + N(p) \rightarrow n(p_n) + l(k_2) \tag{8.110}$$

с кинематическими условиями

$$\begin{aligned} \bar{k}_{1,2}^{\mu\nu} &= \alpha_{1,2} k^{\mu\nu}, \\ \bar{k}_i^\mu &= k_1^\mu - k_2^\mu. \end{aligned} \tag{8.111}$$

Это соответствует случаю, когда в конечном состоянии лептон испускается вперед по отношению к налетающему нейтрино. Мы пренебрегаем лептонной массой  $k_{1,2}^2 \approx 0$ . Заметим, что  $k^2 = 0$  не означает, что  $k_\mu = 0$ ; например,

$$(k_0)_{\text{лаб}} = \frac{M_n^2 - m_N^2 - k^2}{2m_N} \approx \frac{M_n^2 - m_N^2}{2m_N},$$

и мы должны исключить случай нуклонов в конечных состояниях. Тогда матричный элемент процесса (8.110) имеет вид

$$\mathcal{M} = \bar{u}(k_2) \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) v(k_1) \langle p_n | (V^\lambda - A^\lambda) | p \rangle, \quad (8.112)$$

и, как нетрудно убедиться, с учетом соотношения (8.111) мы получим

$$|\mathcal{M}|^2 \propto \frac{k_1^0 k_2^0}{k_3^2} |\langle p_n | (V_\lambda - A_\lambda) | p \rangle k^\lambda|^2 \propto |\langle p_n | \partial^\lambda A_\lambda | p \rangle|^2,$$

ибо  $\partial^\lambda V_\lambda = 0$  с точностью до электромагнитных поправок.

Таким образом, инвариантную функцию в равенстве (8.108) можно выразить через сечения рассеяния нейтрино и правило сумм (8.107) в принципе дает возможность определить величину  $r_A^2$  из экспериментов по слабым взаимодействиям. Но соотношение (8.107) в своем первоначальном виде мало пригодно для простых вычислений, так как соответствующие экспериментальные данные пока отсутствуют. Поэтому желательно установить с помощью ЧСАТ связь между слабыми и сильными взаимодействиями. В таком случае мы имеем

$$w(\nu, 0) = \frac{2}{\pi} f_\pi^2 [\text{Im } T_{\pi^+p}(\nu, 0) - \text{Im } T_{\pi^-p}(\nu, 0)], \quad (8.113)$$

где  $T_{\pi^\pm p}$  — амплитуды рассеяния безмассовых пионов на протонах (в то время как пионы в промежуточных состояниях физические). Используя оптическую теорему, находим

$$\text{Im} \{T_{\pi^-p}(\nu, 0) - T_{\pi^+p}(\nu, 0)\} = 2m_N k(\nu) [\sigma_{\text{полн}}^{\pi^-p}(\nu) - \sigma_{\text{полн}}^{\pi^+p}(\nu)], \quad (8.114)$$

где

$$k(\nu) = \frac{1}{m_N} (\nu^2 - m_\pi^2 m_N^2)^{1/2} \xrightarrow{m_\pi \rightarrow 0} \frac{\nu}{m_N},$$

и далее, применяя соотношение Голдбергера — Треймана, приходим к правилу сумм в той форме, как оно было первоначально получено Адлером и Вейсбергером:

$$\frac{1}{r_A^2} = 1 + \frac{2m_N^3}{\pi g_{\pi N}^2} \int_{\text{непр}} \frac{d\nu}{\nu^2} k(\nu) [\sigma_{\text{полн}}^{\pi^-p}(\nu) - \sigma_{\text{полн}}^{\pi^+p}(\nu)]. \quad (8.115)$$

Чтобы получить численную оценку, данные для физических пионов необходимо экстраполировать в точку  $m_\pi = 0$ . В оригинальных работах применялись разные способы экстраполяции. Адлер оценивает ошибку, возникающую при экстраполяции, вводя поправки в парциальные амплитуды так, чтобы сохранялись их специфические свойства, например пороговое поведение. В итоге подстановка табличных значений пион-нуклонных сечений рассеяния с учетом таких поправок дает

$$|r_A|_{\text{теор}} = 1,24. \quad (8.116)$$

Оценка же Вейсбергера, который по существу пренебрегает эффектами вне массовой оболочки, такова:

$$|r_A|_{\text{теор}} = 1,15. \quad (8.117)$$

Разница в оценках целиком относится на счет экстраполяции по массе пиона<sup>1)</sup>. Сравнение с экспериментальным значением

$$|r_A|_{\text{эксп}} = 1,22 \quad (8.118)$$

производит впечатление, и успех правил сумм Адлера — Вейсбергера ознаменовал в 1965 г. начало популярности алгебры токов.

<sup>1)</sup> Заметим, что можно было бы экстраполировать сечения рассеяния по массе, используя оценку поправок к формуле Вейсбергера — Томозавы для пороговых значений амплитуды  $\pi N$ -рассеяния, приведенную в гл. 6.

Можно задать вопрос: о чем говорит нам этот успешный расчет  $|r_A|$ ? Мы использовали коммутатор (8.106), предельный переход  $p \rightarrow \infty$  и для окончательной оценки гипотезу ЧСАТ. Если справедливость предельного перехода  $p \rightarrow \infty$  и ЧСАТ не подвергается сомнению, то (с оптимистической точки зрения) выдающийся успех правила сумм Адлера — Вейсбергера считается прямой проверкой киральной алгебры  $SU(2) \otimes SU(2)$ .

Добавим одно замечание, подкрепляющее нашу уверенность в допустимости всех сделанных приближений. Две главные проблемы любого правила сумм — это сходимость и насыщение. Сходимость правила сумм (8.107) была установлена несколькими главами раньше; во всяком случае мы видели, что апостериори простым и достаточно общим основанием может служить теорема Померанчука, согласно которой разность  $\sigma_{\pi^-p} - \sigma_{\pi^+p}$  стремится к нулю при  $\nu \rightarrow \infty$  (как мы надеемся, быстрее, чем  $1/\ln \nu$ ).

Что касается насыщения, то наличие табличных данных для сечений рассеяния  $\pi N$  вплоть до энергии 5 ГэВ вполне обеспечивает надежность оценки. Тем не менее, поскольку ситуация не всегда будет столь благоприятной, полезно иметь хотя бы приблизительные сведения о членах, дающих самый существенный вклад в правило сумм. Ясно, что прежде всего нужно учесть резонанс (3,3); он действительно ответствен за неравенство  $\sigma_{\pi^+p} > \sigma_{\pi^-p}$  и, следовательно, также за неравенство  $|r_A| > 1$ . Вклад одного лишь резонанса (3,3) дает оценку  $|r_A| \approx 1,5$ ; хотя его и недостаточно для насыщения правила сумм, первое приближение по порядку величины мы имеем.

В этом смысле было бы полезно оценить результат насыщения конечным числом промежуточных резонансных состояний. Для этого мы воспользуемся общим методом, изложенным в приложении I гл. 1, чтобы иметь дело с величинами, усредненными по поляризациям частиц с большим спином. После применения гипотезы ЧСАТ величина, которая нам необходима, будет иметь вид

$$w(\nu) = (2\pi)^3 f_{\pi}^2 \sum_{n \neq N} \delta^4(p+q-p_n) | \langle p | \chi^+ | n \rangle |^2 - \text{перекр. чл.} \quad (8.119)$$

В качестве состояния  $|n\rangle$  мы выберем резонанс со спином  $j$ , четностью  $(-1)^{j+1/2}$  и изоспином  $1/2, 3/2$  (эксперимент, по-видимому, свидетельствует об отсутствии резонансов с большим изоспином). Основные вершины, которые нам потребуются, — это

$$\langle p_i | \chi_i^{\beta} | p_j \rangle = \frac{g_j^{(+)}}{[(m_N)^{j-1/2}] \bar{u}(p)} u_{\mu_1} \dots u_{j-1/2} (p+q) q^{\mu_1} \dots q^{\mu_{j-1/2}} \zeta_{1/2}^{\beta} \left\{ \begin{matrix} \tau^{\beta} & \zeta_{1/2} \\ & \zeta_{3/2}^{\beta} \end{matrix} \right\}, \quad (8.120)$$

$$\langle p | \chi^{\beta} | p_j \rangle = \frac{ig_j^{(-)}}{[(m_N)^{j-1/2}] \bar{u}(p)} \gamma_5 u_{\mu_1} \dots u_{j-1/2} (p+q) \bar{q}^{\mu_1} \dots q^{\mu_{j-1/2}} \zeta_{1/2}^{\beta} \left\{ \begin{matrix} \tau^{\beta} & \zeta_{1/2} \\ & \zeta_{3/2}^{\beta} \end{matrix} \right\}, \quad (8.121)$$

где  $\zeta_{1/2}^{\beta}$  и  $\zeta_{3/2}^{\beta}$  — волновые функции резонансов с изоспином  $1/2$  и  $3/2$ . В первом из этих двух равенств промежуточные состояния имеют четность  $(-1)^{j+1/2}$ , во втором — четность  $(-1)^{j-1/2}$ , а константы взаимодействия в обоих безразмерны. Далее

$$q_{\mu}^{\prime} = q_{\mu} - \frac{q(p+q)}{m_j^2} (p+q)_{\mu} \quad (8.122)$$

и в промежуточном состоянии величина  $\nu$  (в приближении бесконечно узких резонансов) принимает значение

$$\nu = \nu_j \equiv \frac{1}{2} (m_j^2 - m_N^2). \quad (8.123)$$

Сокращенный пропагатор оказывается равным

$$P_j(q, q') = 2^{j-1/2} \frac{\left(j + \frac{1}{2}\right)! \left(j - \frac{1}{2}\right)!}{(2j)!} \left(\frac{m_j^2 - m_N^2}{2m_j}\right)^{2j-1} \frac{(\gamma p + \gamma q + m_j)}{2m_j}, \quad (8.124)$$

и правило сумм Адлера — Вейсбергера нетрудно привести к виду

$$\frac{1}{r_A^2} = 1 + \frac{f_\pi^2}{r_A^2} \left(-\frac{1}{3}\right) \sum_j g_j^{(\pm)2} \frac{(m_j^2 - m_N^2)^{2j-3}}{[(m_N m_j)^{2j-4}]} \frac{(m_j \pm m_N)^2}{2^{j-5/2}} \frac{\left[\left(j + \frac{1}{2}\right)!\right]^2}{(2j+1)!}. \quad (8.125)$$

Когда изоспин промежуточного состояния равен  $1/2$ , множитель в скобках принимает значения 1, а изоспину  $3/2$  соответствует значение множителя  $-1/3$ . Знак в  $(m_j \pm m_N)^2$  выбирается в зависимости от четности  $(-1)^{j \pm 1/2}$ . «Константы взаимодействия»  $g_j^{(\pm)}$  нетрудно вычислить, зная экспериментальные времена жизни для процесса  $j \rightarrow N + \pi$  по следующей формуле:

$$\Gamma_j^{(\pm)} = \frac{g_j^{(\pm)2}}{4\pi} \frac{2^{j-1/2}}{(2j)!} \frac{\left[\left(j - \frac{1}{2}\right)!\right]^2}{m_N^{2j-1}} \frac{E \pm m_N}{m_j} (p^2)^j, \quad (8.126)$$

причем  $(E, p)$  — 4-импульс нуклона в системе покоя изобары.

Положим

$$\frac{1}{r_A^2} = 1 + \sum_n C_n. \quad (8.127)$$

В табл. 8.1 мы приводим значения  $C_n$ , соответствующие различным известным резонансам [259].

Таблица 8.1

Резонанс	$C_n$	Резонанс	$C_n$
$\Delta(1236)^{3/2} 3/2^+$	-0,675	$N(1688)^{1/2} 5/2^+$	0,049
$N(1400)^{1/2} 1/2^+$	0,114	$N(1700)^{1/2} 1/2^-$	0,048
$N(1525)^{1/2} 3/2^-$	0,060	$\Delta(1920)^{3/2} 7/2^+$	-0,044
$N(1570)^{1/2} 1/2^-$	0,012	$N(2190)^{1/2} 7/2^-$	0,014
$\Delta(1670)^{3/2} 1/2^-$	-0,016	$\Delta(2420)^{3/2} 11/2^+$	-0,006
$N(1670)^{1/2} 5/2^-$	0,040	$N(2650)^{1/2} 11/2^-$	0,004

В итоге получаем удовлетворительный результат:

$$|r_A|_{\text{теор}} \approx 1,29. \quad (8.128)$$

Последнее замечание будет относиться к вкладу резонанса (3,3). В приближении бесконечно узких резонансов он дает  $|r_A| \approx 1,75$ . В то же время, если использовать не изобарную модель, а экспериментальные фазовые сдвиги в пион-нуклонных процессах, то будем иметь  $|r_A| \approx 1,5$ . Итак, мы видим, что столь простое приближение дает, по крайней мере в рассматриваемом случае, завышенное значение дисперсионного интеграла.

## 2\* Правило сумм Адлера, — Вейсбергера для бозонных мишеней

В тех задачах, где экспериментальные данные о вкладе непрерывного спектра отсутствуют, мы будем пытаться насыщать правила сумм известными резонансами (обычно в приближении нулевой ширины), что во мно-

гих случаях сводится к введению всего лишь нескольких состояний. Примером такого подхода служит правило сумм Адлера — Вейсбергера для внешних пионов [133]. Если вставить лишь надежно установленные пионные резонансы  $\rho^0$  и  $f^0$ , то насыщение окажется неполным, так как

$$1 = (\text{вклад } \rho) + (\text{вклад } f^0) \approx 0,3 + 0,08 = 0,38. \quad (8.129)$$

Следовательно, чтобы удовлетворить правилу сумм, необходим большой добавочный член, по всей вероятности соответствующий  $s$ -волне с  $I = 0$  в пион-пионном рассеянии. Априори здесь возможны некоторые сомнения в надежности экстраполяции по массе, которая применяется в ЧСАГ для пионов. Действительно, как отмечалось в гл. 6, малая масса ( $m_\sigma \approx 3m_\pi$ )  $\pi\pi$ -резонанса  $J^P = 0^+$  может привести к значительным поправкам в формуле Вейсберга для физических пионов. Во всяком случае этот простой пример показывает, как правило сумм может использоваться для предсказания существования добавочных состояний, а возможно, и их параметров.

Правило сумм Адлера — Вейсбергера может быть написано для любой мишени, даже для ядер, где, однако, применение техники мягких пионов — особая статья. Новые особенности появляются и в случае мишеней с большим спином — в заключение этого раздела мы рассмотрим случай внешних  $\rho$ -мезонов [260, 261]. Так как промежуточные состояния с массой  $\rho$ -мезона отсутствуют, правило сумм имеет простой вид

$$\int \frac{dv}{v^2} w^{(r)}(v, 0) = 2(-\varepsilon^{(r)}\varepsilon^{(r)}) = 2, \quad (8.130)$$

где  $\varepsilon_\mu^{(r)}$  — обычный поляризационный вектор внешнего  $\rho$ -мезона и  $w^{(r)}$  определяется так же, как в формуле (8.108), за исключением индекса  $r$ , обозначающего спиральность состояния. Таким образом, коль скоро в рассеянии вперед существуют два независимых по спиральности перехода ( $1 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 0$ ), надо ожидать появления двух независимых правил сумм.

Структура  $w$  определяется из соображений инвариантности:

$$w^{(r)} = -\varepsilon^{(r)}\varepsilon^{(r)}w_1 + (q\varepsilon^{(r)})(q\varepsilon^{(r)})w_2, \quad (8.131)$$

и, так как  $q \equiv (q_0, 0)$ , мы имеем

$$(q\varepsilon^{(r)})(q\varepsilon^{(r)}) = (\varepsilon_0^{(r)})^2 q_0^2 = (\varepsilon_0^{(r)})^2 \frac{v^2}{E^2}. \quad (8.132)$$

Чтобы произвести предельный переход к бесконечно большому импульсу, необходимо выделить явную зависимость волновой функции от  $p$ . Обычные выкладки дают следующие выражения для состояний со спиральностью  $\pm 1, 0$ :

$$\varepsilon_\mu^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ i \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_\mu^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \theta \\ i \\ \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_\mu^{(0)} = \begin{pmatrix} p/m_\rho \\ -(E/m_\rho) \sin \theta \\ 0 \\ -(E/m_\rho) \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (8.133)$$

где  $\theta$  — угол между третьей осью и направлением  $p$  ( $\theta \sim p_T/p_s \rightarrow 0$ ).

В пределе при  $p \rightarrow \infty$  вычисления дают

$$w^{(+)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} w_1, \quad w^{(0)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} w_1 + \frac{v^2}{m_\rho^2} w_2, \quad (8.134)$$

и мы получаем правила сумм

$$\int \frac{dv}{v^2} w_1(v) = 2, \quad (8.135a)$$

$$\int \frac{dv}{v^2} \left[ w_1(v) + \frac{v^2}{m_\rho^2} w_2(v) \right] = 2. \quad (8.135b)$$

Разность между этими двумя правилами сумм дает формулу типа условия сверхсходимости для  $w_2$ :

$$\int dv w_2(v, 0) = 0, \quad (8.136)$$

сходимость которого гарантируется использованием для определения асимптотики модели полюсов Редже; действительно,

$$w_2 \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} v^{\alpha_\rho - 2}, \quad \text{где } \alpha_\rho(0) < 1.$$

Итак, мы видим, что с увеличением спина в правилах сумм используется все больше и больше информации и число самих соотношений все увеличивается.

### 3. Симметрия $SU(3) \otimes SU(3)$

Предыдущий результат нетрудно формально обобщить на алгебру  $SU(3) \otimes SU(3)$  [134, 262—264]. Необходимо рассмотреть систему коммутаторов

$$\begin{aligned} [\bar{Q}_I^+, \bar{Q}_I^-] &= 2Q^3, \\ [\bar{Q}_V^+, \bar{Q}_V^-] &= Q^3 + \frac{3}{2} Q^8 \end{aligned} \quad (8.137)$$

(их нужно выбрать так, чтобы заряд, соответствующий коммутатору, сохранялся) и произвести насыщение в нуклонных обкладках.

Если для слабых вершин принять схему  $SU(3)$ , то аксиальные константы связи  $g_{pn}^A$ ,  $g_{p\Lambda}^A$ ,  $g_{p\Sigma^0}^A$ ,  $g_{n\Sigma^-}^A$ , появляющиеся в правилах сумм, можно выразить через параметры  $F$  и  $D$ . В частности,

$$\begin{aligned} g_{pn}^A &= F + D, \quad g_{p\Lambda}^A = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( F + \frac{1}{3} D \right), \\ g_{p\Sigma^0}^A &= g_{n\Sigma^-}^A = \sqrt{2} F = F - D. \end{aligned} \quad (8.138)$$

Полученные из коммутаторов (8.137) в обкладках из нейтронного и протонного состояний правила сумм имеют вид

$$\begin{aligned} 1 &= (F + D)^2 + (\text{непр. спектр})_p, \\ 2 &= 2 \left( F + \frac{1}{3} D \right)^2 + (\text{непр. спектр})_K, \\ 1 &= (F - D)^2 + (\text{непр. спектр})_K. \end{aligned} \quad (8.139)$$

Применяя гипотезу ЧСАТ ко всем аксиальным токам октета, можно выразить непрерывный спектр промежуточных состояний через интегралы от разности полных сечений рассеяния  $pN$  и  $KN$ . В то время как сходимость правил сумм не вызывает сомнений, применение ЧСАТ к странным токам (или предположение о том, что в дивергенции странного аксиального тока доминирует  $K$ -мезонный полюс) не столь надежно. Действительно, здесь возможны большие ошибки, связанные с тем, что симметрия  $SU(3) \otimes SU(3)$  нарушена сильнее, чем  $SU(2) \otimes SU(2)$  ( $m_K^2 \gg m_\pi^2$ ), и  $K$ -мезонная доминантность не может быть очень хорошим приближением.

В любом случае из формулы (8.139), помимо равенства  $|r_A| = |F + D|$ , мы получаем отношение  $\alpha = D / (F + D)$  и условие согласованности. Численные результаты зависят от способа проведения расчета (что, в частности, связано с наличием нефизической области  $v < 1/2 m_K^2 + m_K m_N$  для  $K$ - $N$ -рассеяния). Окончательный результат для  $\alpha$

$$0,63 \leq \alpha \leq 0,75 \tag{8.140}$$

хорошо согласуется с экспериментальным значением  $\alpha \approx 0,66$  [формула (2.309)]. То, что условия самосогласованности выполняются с точностью до 10%, подтверждает правильность такой оценки.

#### 4. Правило сумм электророждения

Полное использование правил сумм, полученных из коммутаторов зарядов с токами, обычно требует некоторых сведений об электромагнитных и слабых адронных вершинах и сечениях рассеяния. Поскольку полной информации в этом случае мы не имеем, ограничимся рассмотрением коммутатора аксиального заряда и векторного тока в  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии.

Мы можем, следовательно, начать с уравнения (8.73) или непосредственно с уравнений (8.89) и (8.90), полагая в них  $q = 0, k = \Delta$  (мы применяем здесь обычные обозначения  $q_2 \equiv q, q_1 \equiv k$ ). При этом остаются лишь два нуклонных члена [пропорциональные  $(\sigma n)$  и  $(\sigma n)(\sigma n \times k)$ ] и непрерывный спектр состояний записывается в виде

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{t_{00}}{P_0^2} = \frac{1}{v} \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{t_0}{P_0} = \frac{1}{v} [w_1(\sigma n) + w_3 i(\sigma n)(\sigma n \times k)], \tag{8.141}$$

где  $w_{1,3}$  — инвариантные функции переменных  $v$  и  $t = k^2$ . Кроме того,

$$t_\mu = \sum_{n \neq N} i(2\pi)^3 \delta^4(p_2 + q - p_n) \langle p_2 | \bar{D}^\beta | n \rangle \langle n | V_\mu^\alpha | p_1 \rangle - \text{перекр. чл.} \tag{8.142}$$

Иными словами, инвариантные функции  $t_{1,3}$  в формуле (8.76) даются теперь равенствами

$$t_{1,3}(v, t) = \frac{w_{1,3}(v, t)}{v}. \tag{8.143}$$

Подстановка их в соотношения (8.89) и (8.90) приводит, наконец, к правилам сумм

$$r_A F_1^V(t) + 2 \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{v} w_1^{(-)}(v, t, t, 0) = G_1(t), \tag{8.144}$$

$$r_A F_2^V(t) + 2 \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{v} w_3^{(+)}(v, t, t, 0) = 0. \tag{8.145}$$

Соотношения (8.144) и (8.145) устанавливают простую связь между электромагнитными и слабыми формфакторами нуклона и электромагнитными и слабыми возбуждениями высших резонансов.

Поскольку с помощью гипотезы ЧСАТ  $t_\mu$  можно связать с мнимой частью амплитуды электророждения безмассового пиона, на этом этапе будет полезно выразить  $w_{1,3}$  через привычные инварианты дисперсионной теории. Так как для функции  $t_\mu$  справедливо уравнение сохранения тока  $k^\mu t_\mu = 0$ , для нее можно написать разложение

$$t_\mu^{\beta\alpha} = \sum_{i=1}^6 \rho_i^{\beta\alpha}(v, t) O_\mu^{(i)}, \tag{8.146}$$



где  $O_\mu^{(i)}$  — ковариантные величины вида

$$\begin{aligned} O_\mu^{(1)} &= \frac{1}{2} [\gamma, \gamma]_\mu, & O_\mu^{(4)} &= mO_\mu^{(1)} + [P, \gamma]_\mu, \\ O_\mu^{(2)} &= [q, P]_\mu, & O_\mu^{(5)} &= [k, q]_\mu, \\ O_\mu^{(3)} &= [q, \gamma]_\mu, & O_\mu^{(6)} &= [k, \gamma]_\mu, \end{aligned} \quad (8.147)$$

и введено обозначение

$$[a, b]_\mu = \gamma_5 (akb_\mu - a_\mu bk). \quad (8.148)$$

Нетрудно показать, что (при  $q = 0$ )

$$\begin{aligned} O_\mu^{(1)} &\xrightarrow{P \rightarrow \infty} 2P_0 \sigma \Delta n_\mu, \\ O_\mu^{(6)} &\xrightarrow{P \rightarrow \infty} 2P_0 t \sigma \pi n_\mu, \\ O_\mu^{(2 \dots 5)} &\xrightarrow{P \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (8.149)$$

Сравнивая обе части равенства (8.146), находим

$$\begin{aligned} w_1(v, t) &= -2t\rho_6, \\ w_3(v, t) &= -2\rho_1 \end{aligned} \quad (8.150)$$

и, наконец, используя соотношение

$$\rho_{1,6} = \frac{1}{\pi} f_\pi \operatorname{Im} M_{1,6}(v, t, k^2 = t, q^2 = 0), \quad (8.151)$$

преобразуем уравнения (8.144) и (8.145) к виду, характерному для ЧСАТ:

$$r_A F_1^V(t) - \frac{4f_\pi}{\pi} t \int_{v_0}^{\infty} \operatorname{Im} M_6^{(-)}(v \dots) \frac{dv}{v} = G_1(t), \quad (8.152)$$

$$r_A \frac{F_2^{V,S}(t)}{2m_N} - \frac{4f_\pi}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} \operatorname{Im} M_1^{(+,0)}(v \dots) \frac{dv}{v} = 0, \quad (8.153)$$

где  $M_{1,6}$  — амплитуды рождения безмассовых пионов ( $q^2 = 0$ ) при  $k^2 = t$ . В соотношении (8.153) мы добавили правило сумм, которое получается из коммутаторов  $[\bar{Q}^B, V_0^Y] = 0$  при введении изоскалярных токов. Таким образом,  $M^{(0)}$  определяется как коэффициент при  $t^B$  в изотопическом ковариантном разложении. Наконец, в соотношении (8.153) мы заменили  $F_2$  величиной  $F_2/2m_N$ , которая используется во всех других главах этой книги.

Правила сумм (8.152) и (8.153) выводили многие авторы самыми разными способами [55, 225, 265—267]. Эти правила представляют большой интерес как источник информации. Отметим, что окончательный вид полученных выше соотношений подтверждает правильность подхода  $P \rightarrow \infty$  в том смысле, что он дает сходящиеся правила сумм. Действительно, как нам известно,  $M_{1,6}$  свободны от кинематических особенностей. Кроме того, применяя модель полюсов Редже для определения асимптотического поведения  $\operatorname{Im} M_{1,6}$ , находим

$$\operatorname{Im} M_6^{(-)} \sim v^{\alpha_{A_1}-1}, \quad \operatorname{Im} M_1^{(+)} \sim v^{\alpha_\omega-1}, \quad \operatorname{Im} M_1^{(0)} \sim v^{\alpha_p-1}. \quad (8.154)$$

Так как по крайней мере при малых  $t < 0$  все  $\alpha < 1$ , сходимость правил сумм гарантирована.

Как мы уже отмечали, существуют разные пути введения физической информации о безмассовых пионах, и в целом это больше походит на искусство, чем на науку. Можно воспользоваться либо моделью изобар и экстраполировать каждую вершину, применяя пионную доминантность

$\langle p | \bar{D} | n \rangle_{q^2=0} \approx f_\pi \langle p\pi | n \rangle$ , либо мультипольным разложением с определенной процедурой экстраполяции от  $q^2 = 0$  до  $q^2 = m_\pi^2$ . В первом приближении в равенстве (8.153), рассматриваемом при  $t = 0$ , можно ограничиться введением только (3,3)-резонанса. В модели бесконечно узких резонансов, подставляя экспериментальные значения величин  $g_{N^*N\pi}$  и  $g_{N^*N\gamma}$ , получаем [55]

$$\begin{aligned} k^{(V)} &\equiv F_2^{(V)}(0) \approx 4, \\ k^{(S)} &\equiv F_2^{(S)}(0) \approx 0, \end{aligned} \tag{8.155}$$

тогда как

$$k^{(V)}|_{\text{эксп}} = 3,70, \quad k^{(S)}|_{\text{эксп}} = -0,12. \tag{8.156}$$

Такое согласие обнадеживает, и его можно улучшить, добавив еще высшие резонансы.

Более тщательный анализ [225], основанный на данных по фоторождению, дает

$$k^{(V)}|_{\text{теор}} \approx 3,30, \tag{8.157}$$

тоже в хорошем согласии с экспериментом.

Прямую проверку уравнения (8.152) невозможно провести до конца, так как продольные мультиполи, содержащиеся в  $M_0^{(-)}$ , пока неизвестны. Во всяком случае, дифференцируя в точке  $t = 0$ , можно кое-что узнать о наклоне кривой  $G_1(t)$ : делая некоторые упрощающие предположения, получаем [225]

$$\left| \frac{G_1(0)}{r_A} \right| \approx |F^{(V)'}(0)| - \frac{0,013}{m_\pi^2} \approx \frac{0,032}{m_\pi^2}. \tag{8.158}$$

Это численное значение оказывается того же порядка, что и (измеренный) наклон кривой векторного формфактора

$$|F_1^{(V)'}(0)| \approx \frac{0,045}{m_\pi^2}.$$

Кроме того, интересно отметить, что простое предположение о полюсном характере зависимости как  $G_1(t)$  [где доминирует  $A_1$ -мезон <sup>1)</sup>], так и  $F_1^{(V)}(t)$  (где доминирует  $\rho$ -мезон) дает с учетом соотношения (8.158)

$$m_{A_1} \approx 1,3m_\rho$$

в удивительном согласии с экспериментальным значением

$$m_{A_1} \approx 1,41m_\rho.$$

## § 5. Алгебра токов и проблемы симметрии $SU(3)$

### 1. Мультиплетная структура и предел бесконечно большого импульса

Некоторые первые применения алгебры токов касались задач нарушенной симметрии; они позволяли контролировать и оценивать поправки к предсказаниям, которые дает теория групп.

Мы уже видели (см. также гл. 6, § 4, п. 2), что в пределе сохраняющихся зарядов возможны два основных случая:

1) обычный случай, когда операторы зарядов имеют ненулевые матричные элементы только между состояниями частиц одного и того же (вырожденного) мультиплетта;

2) спонтанное нарушение симметрии Голдстоуна — Намбу, когда сохранение заряда сопровождается появлением безмассового бозона.

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 287.— *Прим. ред.*

В первом случае правила сумм, полученные из алгебры зарядов, насыщаются вкладами I класса (состояниями мультиплетов), во втором — вкладами II класса (соответствующими вкладу однобозонного промежуточного состояния).

В случае 1 примером служит симметрия  $SU(3)$  [или  $SU(2)$ ]. Если пренебречь умеренно сильными и электромагнитными взаимодействиями, то  $SU(3)$ -мультиплеты должны стать вырожденными. В то же время в гл. 6, § 5 и 6 мы видели, что киральная симметрия в пределе  $m_\pi \rightarrow 0$  относится к случаю 2. Вместо вырожденных мультиплетов или свойств перенормируемости мы имеем точные низкоэнергетические теоремы для безмассовых мягких пионов.

Несомненно, что в случае точной симметрии лоренцеву систему отсчета можно выбрать произвольно. В случае же нарушенной симметрии в правиле сумм алгебры токов мы отделяем «поправки», обусловленные нарушением симметрии, от основного члена (соответствующего предсказаниям точной симметрии). Систему отсчета, очевидно, нужно выбрать так, чтобы выделить основной вклад и упростить оценку поправок.

В гл. 6 мы видели, что в случае 2 система покоя особенно удобна для получения четких предсказаний о поведении низкоэнергетических амплитуд, так как имеются жесткие правила отбора, ограничивающие число и величину поправочных членов.

В случае же 1 мы заинтересованы в выделении вкладов I класса. Для этого лучше всего подходит система  $p \rightarrow \infty$ , где, как можно надеяться, вклады полунесвязных членов класса II или  $Z$ -членов класса I отсутствуют. Кроме того, в системе  $p \rightarrow \infty$  правила сумм принимают вид обычных дисперсионных соотношений, где формфакторы, которые в большинстве случаев делают вычисления менее надежными, уже не будут нас больше беспокоить.

Таким образом, в случае симметрии  $SU(3)$  алгебра токов будет применяться в пределе бесконечно большого импульса. Конечно, ничто не запрещает нам использовать предел  $p \rightarrow \infty$  также в тех случаях [например, для коммутаторов  $SU(2) \otimes SU(2)$ ], когда в пределе точной симметрии механизм насыщения относится к классу II. В этой ситуации мы получаем правила сумм (типа рассмотренных в первой части этой главы), которые сходятся не слишком быстро и в которых трудно выделить главный вклад. Но для некоторых классов правил сумм можно получить алгебраические соотношения, отбирая некоторые главные члены. Таким путем, например, удастся объяснить некоторые результаты  $SU(6)$ -теории. Этот вопрос будет рассмотрен в § 7.

Теперь мы перейдем к исследованию классических результатов  $SU(3)$ -теории и оценим поправки к ним.

#### *а. Нарушенные симметрии и одновременные коммутаторы*

Рассмотрим гамильтониан, приближенно инвариантный относительно заданной группы, т. е. содержащий как симметричный член  $H_0$ , так и член  $H_B$ , нарушающий симметрию:

$$H = H_0 + fH_B. \quad (8.159)$$

Мы собираемся сейчас кратко изложить метод, основанный на использовании коммутаторов алгебры токов и системы бесконечно большого импульса. Он позволяет получить разнообразные результаты теоретико-группового подхода, справедливые в пределе точной симметрии ( $f = 0$ ), и в то же время найти соответствующие поправки, учитывающие нарушение симметрии.

Мы будем исходить из того, что (как уже говорилось в гл. 2, § 4, п. 1а) в пределе точной симметрии оператор заряда связывает лишь те состояния, которые принадлежат одному и тому же вырожденному мультиплету. Когда

симметрия нарушена, матричные элементы зарядов имеют отличные от нуля значения также между состояниями из разных мультиплетов. Но эти матричные элементы «малы», ибо они того же порядка величины, что и параметр нарушения симметрии  $f$ .

Это говорит о том, что результаты, соответствующие точной симметрии, должны получаться при насыщении матричных элементов одновременных коммутаторов, в которых по крайней мере один из операторов есть оператор заряда. В случае двух (противоположных) зарядов поправочные члены имеют порядок  $f^2$ . Это, как было показано в гл. 2, полностью согласуется с теоремой Адемолло — Гатто, утверждающей, что отклонение «диагональных» матричных элементов от их значений в пределе точной симметрии имеет порядок  $f^2$ .

Рассмотрим теперь коммутационное соотношение общего вида

$$[Q^\beta, M^\alpha] = c_{\beta\alpha\gamma} M^\gamma, \quad (8.160)$$

где  $Q^\beta$  — оператор, принадлежащий набору генераторов алгебры Ли рассматриваемой группы симметрии [в частности, это может быть группа  $SU(3)$ ], а  $M^\alpha$  — тензор-оператор, закон преобразования которого под действием элементов группы задается константами  $c_{\alpha\beta\gamma}$ .

Рассмотрим матричный элемент равенства (8.160) в обкладках из подходящих одночастичных физических состояний  $a_1$  и  $a_2$ , принадлежащих в пределе точной симметрии одному неприводимому представлению. Обычным путем получаем

$$\sum_i \{ \langle a_2 | Q^\beta | a_i \rangle \langle a_i | M^\alpha | a_1 \rangle - \langle a_2 | M^\alpha | a_i \rangle \langle a_i | Q^\beta | a_1 \rangle \} + C = c_{\beta\alpha\gamma} \langle a_2 | M^\gamma | a_1 \rangle, \quad (8.161)$$

где выделены диагональные члены, которые только и остаются в пределе точной симметрии ( $a_i$  принадлежат тому же представлению, что и  $a_1$  и  $a_2$ ), а через  $C$  обозначены все вклады матричных элементов, обращающихся в нуль в пределе точной симметрии:

$$C = -i(2\pi)^3 \sum'_n \frac{\langle a_2 | D^\beta | n \rangle \langle n | M^\alpha | a_1 \rangle}{E_2 - E_n} \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_n) - \text{перекр. чл.} \quad (8.162)$$

В выражении (8.162) символ  $\sum'$  означает суммирование по всем физическим состояниям, которые в пределе точной симметрии не принадлежат тому же неприводимому представлению, что и  $a_i$ . Величина  $D^\beta$  порядка  $O(f)$ ; следовательно, таков же порядок  $C$ .

Если пренебречь членом  $C$  в равенстве (8.161), то мы получим результат, предсказанный теорией групп. Выражение же (8.162) для  $C$  позволяет вычислить соответствующую поправку на нарушение симметрии, явным образом учтенное в  $D^\beta$ . Следовательно, если нас не интересуют поправки еще более высокого порядка по параметру нарушения симметрии, то можно считать, что все другие величины имеют значения, соответствующие пределу точной симметрии. В частности, это означает, что массы частиц  $a_1$  и  $a_2$  можно считать равными и что матричные элементы оператора  $M^\alpha$  в формуле (8.162) можно вычислять в пределе точной симметрии. Такая процедура самосогласована, если нарушение симметрии не слишком велико.

Из сказанного должно стать очевидным, что вычисления нужно проводить в системе бесконечно большого импульса.

Конкретизируя соответствующим образом оператор  $M$  в формуле (8.161), можно воспроизвести любое предсказание теории групп и одновременно оценить его достоверность. Ниже мы остановимся на следующих наиболее интересных случаях.

1.  $M^\alpha$  — оператор заряда; это позволит нам получить соотношения для констант слабого взаимодействия. В частности, можно оценить отклонения [порядка  $O(f^2)$ ] ренормировочных констант от их значений в пределе точной симметрии.

2.  $M^\alpha$  совпадает с  $\dot{Q}^\alpha$  или  $D^\alpha$ . В этом случае  $M^\alpha$  имеет порядок  $O(f)$  и его матричные элементы в фиксированном представлении пропорциональны разности масс. Коммутатор, который должен быть здесь использован, не входит в число стандартных предположений алгебры токов. Но весьма правдоподобная гипотеза позволяет воспроизвести с помощью соответствующих коммутаторов формулу масс вместе с поправками порядка  $O(f^2)$ .

3.  $M^\alpha$  — оператор тока  $f_\mu^\alpha$ ; здесь мы получаем соотношения между слабыми и электромагнитными формфакторами.

## 2. Нарушение симметрии $SU(3)$ и ренормировочные константы

Прежде всего на основе изложенного найдем ренормировочную константу для векторного тока с изменением странности, обусловленную нарушением симметрии  $SU(3)$ . Вначале рассмотрим  $K\pi$ -переходы.

Как и в гл. 2, § 4, п. 1а, начнем с коммутатора противоположных зарядов  $V$ -спина:

$$[Q_V^+, Q_V^-] = Q^3 + \frac{3}{2} Q^Y. \quad (8.163)$$

Рассмотрим равенство (8.163) в обкладках из состояний  $\pi^+$  и воспользуемся следующим определением:

$$\langle \pi^+(p_2) | Q_V^+ | \bar{K}_0(p) \rangle = r_{K\pi}(p) (2\pi)^3 \delta^3(p_2 - p) (4E_K E_\pi)^{1/2}. \quad (8.164)$$

Исходя из явного вида матричного элемента

$$\begin{aligned} \langle \pi^+ | V_\mu^{V^+} | \bar{K}_0 \rangle &= (p_\pi + p_K)_\mu f_+(\Delta^2) + \Delta_\mu f_-(\Delta^2), \\ \Delta_\mu &= (p_K - p_\pi)_\mu, \end{aligned} \quad (8.165)$$

получим

$$r_{K\pi}(p) = \frac{E_K + E_\pi}{(4E_K E_\pi)^{1/2}} \left\{ f_+ [(E_K - E_\pi)^2] + \frac{E_K - E_\pi}{E_K + E_\pi} f_- [(E_K - E_\pi)^2] \right\}. \quad (8.166)$$

Зависимость от  $p$ , даваемая формулой (8.166), очевидно, исчезает в пределе точной симметрии  $SU(3)$ , когда  $m_\pi = m_K$  и  $r_{K\pi} = f_+(0) = 1$ . В системе  $p \rightarrow \infty$  получаем:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} r_{K\pi}(p) = f_+(0) \equiv r_{K\pi}, \quad (8.167)$$

т. е. в системе отсчета, где  $p = \infty$ , величина  $r_{K\pi}(p)$  совпадает с обычной ренормировочной константой. Глядя на формулу (8.167), можно сказать, что определение  $r_{K\pi}(p)$  в этой системе отсчета ближе всего подходит к случаю точной симметрии. Иными словами, если бы мы выбрали противоположную ситуацию ( $p = 0$ ), то получили бы [сохраняя члены второго порядка по параметру нарушения симметрии  $SU(3)$ ] следующий результат:

$$r_{K\pi}(0) = \frac{m_K + m_\pi}{(2m_K m_\pi)^{1/2}} \left[ f_+(0) + (m_K - m_\pi)^2 f_+'(0) + \frac{m_K - m_\pi}{m_K + m_\pi} f_-(0) \right]. \quad (8.168)$$

Выражение (8.168) ясно показывает, что в этом случае свой вклад в поправку к  $f_+(0) \equiv r_{K\pi}$  дают не только матричные элементы, обращающиеся в нуль в пределе точной симметрии, но и кинематические множители.

Возвращаясь к пределу бесконечно большого импульса, получаем следующее основное правило сумм<sup>1)</sup> для  $r_{K\pi}$ :

$$r_{K\pi}^2 = 1 - C. \quad (8.169)$$

<sup>1)</sup> Мы сократили обе части равенства (8.169) на общий множитель  $(2\pi)^3 \delta^3(p_1 - p_2) 2p$  и положили  $p_1 = p_2 = p$ .

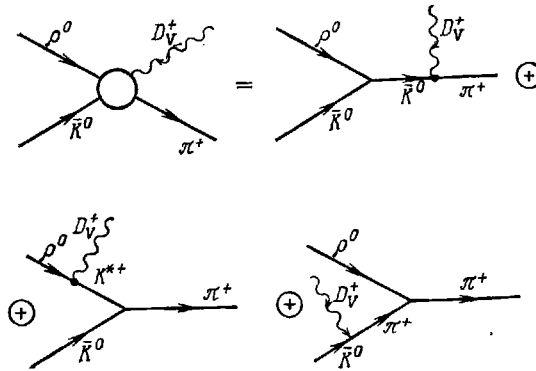
Поправочный член  $C$  таков:

$$C = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2p} (2\pi)^3 \left[ \sum_n' \frac{|\langle \pi^+(p) | D_V^+ | n \rangle|^2}{(E_n - E_\pi)^2} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_n) - \sum_m' \frac{|\langle \pi^+(p) | D_V^- | m \rangle|^2}{(E_m - E_\pi)^2} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_m) \right] = \frac{1}{2} \int_{\text{Непр.}} \frac{d\nu}{\nu^2} w(\nu), \quad (8.170)$$

где мы, как обычно, ввели инвариантную функцию

$$w(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(iqx) \langle \pi^+(p) | [D_V^+(x), D_V^-(0)] | \pi^+(p) \rangle d^4x. \quad (8.171)$$

В формуле (8.170) промежуточные состояния с индексом  $n$  нужно снабдить квантовыми числами мезона  $\bar{K}^0$ , тогда как индекс  $m$  нумерует состояния с зарядом 2 и гиперзарядом 1 (экзотические состояния). Так как по крайней



Фиг. 8.1

мере в диапазоне низких энергий нет экзотических резонансов, первая сумма в формуле (8.170), по всей вероятности, значительно больше второй. Это позволяет утверждать, что  $C$  — положительная величина. Таким образом, перенормировка, вызванная нарушением симметрии  $SU(3)$ , приведет к тому, что величина  $r_{K\pi}$  станет меньше единицы.

Чтобы вычислить поправочный член  $C$  точнее, нужно знать матричные элементы  $\langle \pi^+ | D_V^\pm | n \rangle$ , но здесь мы не располагаем ни экспериментальными данными, ни удачными теоретическими моделями (такими, как ЧСАТ).

Многочастичные вклады можно очень приближенно оценить, учитывая лишь наинизшие двухчастичные состояния, рассматриваемые методом теории возмущений. Наинизшие двухчастичные состояния с допустимыми квантовыми числами состоят из псевдоскалярного и векторного мезонов; только их мы и будем учитывать. Тогда матричные элементы, которые нам нужно рассмотреть, будут иметь, например, такой вид:

$$\langle \pi^+ | D_V^+ | \rho^0 \bar{K}^0 \rangle. \quad (8.172)$$

Мы их описываем в полюсном приближении, как это показывают диаграммы фиг. 8.1. Таким образом, матричные элементы типа (8.172) выражаются через известные величины — матричные элементы операторов  $D$  между одночастичными состояниями и константы сильных взаимодействий. Подобные вычис-

ления дают для вклада непрерывного спектра <sup>1)</sup> значение

$$C \approx 0,067. \quad (8.173)$$

Как мы и ожидали, величина  $C$  оказалась положительной. Итак, для  $r_{\kappa\pi}$  получаем следующее значение:

$$r_{\kappa\pi} \approx 0,966. \quad (8.174)$$

Правда, точность вычислений весьма невелика; мы оцениваем лишь порядок величины и знак ренормировочных эффектов. Эти эффекты малы, как и можно было предположить на основании теоремы Адемолло — Гатто.

Другой возможный способ оценки величины  $C$  — ввести в полную систему состояний наинизший возможный резонанс с  $J^P = 1^+$ . Очевидно, что и такой метод даст положительное значение для величины  $C$ . Численное же значение будет ненадежным из-за недостатка сведений о соответствующих вершинных функциях.

Рассмотренный пример легко обобщить на случай любой слабой ренормировочной константы. Непосредственное применение этого метода к слабым полуплеетонным распадам гиперонов позволяет при разных ренормировочных константах получить отклонения от предела точной симметрии того же порядка, что и для  $r_{\kappa\pi}$ .

Этот метод дает возможность установить связь между разными ренормировочными константами (или константами слабого взаимодействия). Рассмотрим общий вид коммутаторов зарядов группы  $SU(3)$ :

$$[Q^\beta, Q^\alpha] = if_{\beta\alpha\gamma} Q^\gamma \quad (8.175)$$

в обкладках из одночастичных состояний  $a_1$  и  $a_2$ , принадлежащих в пределе точной  $SU(3)$ -симметрии произвольному неприводимому представлению. Определим, как обычно,

$$\langle a_1 | Q^\alpha | a_j \rangle = C_{ij}^\alpha r_{a_i a_j}^\alpha (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) (4E_i E_j)^{1/2}, \quad (8.176)$$

где  $C_{ij}^\alpha$  — соответствующий коэффициент Клебша — Гордана (нормированный так, чтобы в пределе точной симметрии любая константа  $r$  всегда была равна единице). Нетрудно получить следующее соотношение:

$$\sum_i (C_{2i}^\beta C_{i1}^\alpha r_{a_2 a_i}^\beta r_{a_i a_1}^\alpha - C_{2i}^\alpha C_{i1}^\beta r_{a_2 a_i}^\alpha r_{a_i a_1}^\beta) = if_{\beta\alpha\gamma} C_{21}^\gamma r_{a_2 a_1}^\gamma - C_{a_2 a_1}^{\beta\alpha}, \quad (8.177)$$

где суммирование проводится по всем состояниям  $i$  представления, к которому принадлежат  $a_1$  и  $a_2$ . Поправочный член имеет вид

$$C_{a_2 a_1}^{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \int_{\text{Непр.}} \frac{dv}{v^2} w(v), \quad (8.178)$$

где

$$w(v) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int d^4 x \exp(iq_2 x) \langle a_2 | [D^\beta(x), D^\alpha(0)] | a_1 \rangle. \quad (8.178')$$

Формула (8.177) — это самое общее выражение, связывающее векторные константы слабого взаимодействия<sup>1)</sup> (напомним, что  $G_{a_i a_j}^\alpha = G_{a_i a_j}^\alpha$ ). В частности, когда  $\beta$  и  $\alpha$  равны двум противоположным корням (при этом  $\gamma$  соответствует точно сохраняющемуся заряду), эта формула позволяет воспроизвести любое следствие теоремы Адемолло — Гатто.

<sup>1)</sup> Заметим, что в линии векторной частицы квадрат члена, в котором нарушается симметрия, имеет логарифмическую расходимость. Указанный результат был получен с помощью обрезания при  $s = 3$  (масса бариона)<sup>2)</sup>. Но этот вклад умножается на сравнительно малый коэффициент Клебша — Гордана и, во всяком случае, это далеко не главный поправочный член. Подробные вычисления приведены в работе [84].

Точно так же можно получить  $SU(3)$ -ограничения на аксиально-векторную константу слабого взаимодействия. Начав с коммутатора

$$[Q^\beta, \bar{Q}^\alpha] = if_{\beta\alpha\gamma} \bar{Q}^\gamma, \tag{8.179}$$

приходим к следующему соотношению (обозначения очевидны):

$$\sum_i (C_{2i}^\beta C_{i1}^\alpha r_{a_2 a_i}^\beta \bar{r}_{a_i a_1}^\alpha - C_{2i}^\alpha C_{i1}^\beta \bar{r}_{a_2 a_i}^\alpha r_{a_i a_1}^\beta) = if_{\beta\alpha\gamma} C_{21}^\gamma \bar{r}_{a_2 a_1}^\gamma - \bar{C}_{a_2 a_1}^{\beta\alpha}. \tag{8.180}$$

Заметим, что здесь величина  $\bar{C}_{a_2 a_1}^{\beta\alpha}$  имеет порядок  $O(f)$ . Если нас не интересуют поправки высшего порядка, то мы вполне можем пренебречь тем, что векторные ренормировочные константы отличаются от единицы на  $O(f^2)$ , и написать простое выражение

$$\sum_i (C_{2i}^\beta C_{i1}^\alpha \bar{r}_{a_i a_1}^\alpha - C_{2i}^\alpha C_{i1}^\beta \bar{r}_{a_2 a_i}^\alpha) - if_{\beta\alpha\gamma} C_{21}^\gamma \bar{r}_{a_2 a_1}^\gamma = -\bar{C}_{a_2 a_1}^{\beta\alpha}, \tag{8.181}$$

справедливое с точностью до  $O(f^2)$ . Если принять обобщенную гипотезу ЧСАТ

$$\bar{D}^\alpha = f^{(\alpha)} m_\alpha^2 \varphi^\alpha, \tag{8.182}$$

то формулу (8.181) можно преобразовать в соотношение для констант сильного взаимодействия. Действительно, используя равенство (8.182), имеем

$$\begin{aligned} \langle a_i | \bar{Q}^\alpha | a_j \rangle &\equiv C_{ij}^\alpha \bar{r}_{a_i a_j}^\alpha(p) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) (4E_i E_j)^{1/2} = \\ &= -i \frac{\langle a_i | \bar{D}^\alpha | a_j \rangle}{E_i - E_j} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) (4E_i E_j)^{1/2} \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \\ &\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} -i (2p)^2 \frac{\langle a_i | \chi^\alpha | a_j \rangle}{m_i^2 - m_j^2} f^{(\alpha)} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j), \end{aligned}$$

и далее

$$C_{ij}^\alpha \bar{r}_{a_i a_j}^\alpha = \frac{\mathcal{G}_{a_i a_j}^\alpha}{m_i^2 - m_j^2} f^{(\alpha)}, \tag{8.183}$$

где величина

$$\mathcal{G}_{a_i a_j}^\alpha = \lim_{p \rightarrow \infty} (-i) 2p \langle a_i | \chi^\alpha | a_j \rangle \tag{8.184}$$

определяется исключительно сильными взаимодействиями. Подставляя выражение (8.183) в формулу (8.181), получаем

$$\sum_i \left\{ C_{2i}^\beta \frac{\mathcal{G}_{a_i a_1}^\alpha}{m_i^2 - m_1^2} - C_{i1}^\beta \frac{\mathcal{G}_{a_2 a_i}^\alpha}{m_2^2 - m_i^2} \right\} - if_{\beta\alpha\gamma} \frac{f^{(\gamma)}}{f^{(\alpha)}} \frac{\mathcal{G}_{a_2 a_1}^\gamma}{m_2^2 - m_1^2} = -\frac{1}{f^{(\alpha)}} \bar{C}_{a_1 a_2}^{\beta\alpha} = O(f). \tag{8.185}$$

Если пренебречь поправками порядка  $O(f)$ , то мы вновь получим предсказания  $SU(3)$ -симметрии.

### 3. Формулы масс в нарушенной $SU(3)$ -симметрии

Вывод формул масс в нарушенной симметрии  $SU(3)$  является выдающимся результатом теоретико-группового подхода к описанию элементарных частиц. Изложенный выше общий метод правил сумм особенно удобен для вывода этих соотношений.

В пределе точной симметрии массы всех частиц данного мультиплетта должны в точности совпадать. Если же в гамильтониане имеется нарушающий симметрию член порядка  $f$ , то массы компонент мультиплетта будут различаться на величину  $O(f)$ . Но существуют некоторые линейные комбинации разностей масс, которые равны нулю с точностью до величин более высо-



кого порядка по  $f$ . Эти комбинации и есть так называемые формулы масс, и их согласие с экспериментальными данными должно быть особенно хорошим (до тех пор, пока  $f$  не слишком велико), поскольку предполагаемые поправки имеют порядок  $O(f^2)$ . Указанные формулы масс являются следствием простого предположения Гелл-Манна [147] и Окубо [574] о том, что нарушающая симметрию  $SU(3)$  часть гамильтониана сильного взаимодействия преобразуется как компонента октета. Чтобы изоспин и гиперзаряд сохранялись, это должна быть восьмая компонента октета. Рассматривая нарушение симметрии как слабое возмущение, получаем хорошо известные соотношения между массами частиц данного представления:

$$\begin{aligned} 4K - 3\eta - \pi &= 0, \\ 2N + 2\Xi - 3\Lambda - \Sigma &= 0, \\ N^* - Y^* &= Y^* - \Xi^* = \Xi^* - \Omega^*, \\ \dots \end{aligned}$$

причем принято считать, что символ частицы обозначает массу, если это фермион, и квадрат массы, если это бозон. Ясно, однако, что такая условность введена в теорию извне, без какой-либо убедительной теоретической аргументации. Поэтому интересно выяснить, что дает нам в этом случае метод правил сумм.

Вывод массовых формул основан на специальных предположениях о трансформационных свойствах части  $H_B$  гамильтониана (8.159), нарушающей  $SU(3)$ -симметрию. Установлено, что простейший вариант, совместимый с сохранением изоспина и гиперзаряда, — это  $H_B \sim Y$ . Тогда с помощью алгебры  $SU(3)$ , очевидно, имеем

$$\dot{Q}^\alpha = i[H, Q^\alpha] = if[H_B, Q^\alpha] \sim [Y, Q^\alpha] \sim Q^\alpha, \quad (8.186)$$

и, следовательно, вводя операторы сдвига в пространствах  $U$ - и  $V$ -спина, получаем <sup>1)</sup>

$$[Q_{\dot{U}}, \dot{Q}_{\dot{U}}] = 0, \quad (8.187)$$

$$[Q_{\dot{V}}, \dot{Q}_{\dot{V}}] = 0. \quad (8.188)$$

Если произвести насыщение матричного элемента коммутатора (8.187) или (8.188) в обкладках из подходящих одночастичных состояний, принадлежащих (в пределе точной симметрии) фиксированному представлению  $SU(3)$ , и ограничиться лишь одночастичными промежуточными состояниями того же представления, то нетрудно получить соотношения между энергиями элементов различных изотопических мультиплетов в данном представлении  $SU(3)$ . Если принять во внимание только указанные состояния, то каждый отдельный член разложения имеет, очевидно, порядок  $O(f)$ , так как величина  $\dot{Q}$  сама имеет порядок  $O(f)$ . Вклад остальных состояний имеет порядок  $O(f^2)$  и представляет собой поправку (к полученному соотношению), равную нулю в первом приближении по  $f$ .

Ясно, что при вычислении поправок второго порядка по  $f$  можно просто воспользоваться предельными (т. е. соответствующими точной симметрии) значениями матричных элементов зарядов между одночастичными состояниями, поскольку из теоремы Адемолло — Гатто следует, что учет ренормировочных констант может изменить поправки лишь на величину порядка  $O(f^3)$ .

В качестве первого примера рассмотрим случай псевдоскалярных мезонов, скажем матричный элемент коммутатора (8.188) между состояниями

<sup>1)</sup> Формула  $[Y, Q^\alpha] \sim Q^\alpha$  справедлива лишь для генераторов  $Q_{\dot{U}}^\pm$  и  $Q_{\dot{V}}^\pm$ ; остальные генераторы коммутируют с  $Y$ . — *Прим. ред.*

$K^+$  и  $K^-$ . Вводя полный набор физических промежуточных состояний и выделяя вклад одночастичных промежуточных состояний, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \langle K^+(p) | [Q_{\dot{V}}^{\dagger}, \dot{Q}_{\dot{V}}^{\dagger}] | K^-(p') \rangle = \\ &= \langle K^+ | Q_{\dot{V}}^{\dagger} | \pi^0 \rangle \langle \pi^0 | \dot{Q}_{\dot{V}}^{\dagger} | K^- \rangle + \langle K^+ | Q_{\dot{V}}^{\dagger} | \eta \rangle \langle \eta | \dot{Q}_{\dot{V}}^{\dagger} | K^- \rangle - \\ &- \langle K^+ | \dot{Q}_{\dot{V}}^{\dagger} | \pi^0 \rangle \langle \pi^0 | Q_{\dot{V}}^{\dagger} | K^- \rangle - \langle K^+ | \dot{Q}_{\dot{V}}^{\dagger} | \eta \rangle \langle \eta | Q_{\dot{V}}^{\dagger} | K^- \rangle + iC \end{aligned} \quad (8.189)$$

и, наконец,

$$2E_K \{4E_K(p) - 3E_{\eta}(p) - E_{\pi}(p)\} = C, \quad (8.190)$$

где мы сократили общий множитель, который представляет собой  $\delta$ -функцию, фиксирующую  $p' = p$ , так что все энергии частиц должны вычисляться при одном и том же значении трехмерного импульса. Поправочный член  $C$  имеет вид

$$C = 2(2\pi)^3 \sum_n \frac{\langle K^+ | D_{\dot{V}}^{\dagger} | n \rangle \langle n | D_{\dot{V}}^{\dagger} | K^- \rangle}{E_n - E_K} \delta^3(p - p_n) \quad (8.191)$$

и, следовательно, равен  $O(p^2)$ .

Соотношение (8.190), представляющее собой семейство правил сумм, содержит как линейную формулу масс, когда  $p = 0$ ,

$$4m_K - 3m_{\eta} - m_{\pi} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{C}{2m_K}, \quad (8.192)$$

так и квадратичную, когда  $p \rightarrow \infty$ ,

$$4m_K^2 - 3m_{\eta}^2 - m_{\pi}^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} C. \quad (8.193)$$

Этот пример показывает, что, вообще говоря, из симметрии  $SU(3)$  следуют и линейная, и квадратичная формулы масс. При нашем подходе критерием выбора может служить вид поправочного члена. Поскольку структура поправок в случаях  $p = 0$  и  $p = \infty$  совершенно различна и в то же время известно, что в случае симметрии  $SU(3)$  лучше использовать систему  $p \rightarrow \infty$ , мы приходим к выводу, что квадратичная формула более предпочтительна.

Правда, использование системы бесконечно большого импульса в этой задаче имеет свои особенности и требует пояснения. Действительно, при  $p \rightarrow \infty$

$$E_2 - E_1 = (p^2 + m_2^2)^{1/2} - (p^2 + m_1^2)^{1/2} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{m_2^2 - m_1^2}{2p} \quad (8.194)$$

и квадратичная формула масс вместе с поправками оказывается постоянным членом в разложении правила сумм по  $1/p$ . При более детальном рассмотрении<sup>1)</sup> видно, что это является следствием использования «плохого» оператора, такого, как

$$\dot{Q}^{\alpha} = \int d^3x D^{\alpha}(x),$$

и, согласно сказанному в § 1, п. 4, мы могли бы ожидать, что при преобразованиях, связанных с предельным переходом, встретимся с некоторыми трудностями, такими, как отсутствие сходимости правила сумм. Для большей ясности перепишем соотношение (8.193) в ковариантной формулировке:

$$4m_K^2 - 3m_{\eta}^2 - m_{\pi}^2 = \int_{\text{Непр.}} \frac{dv}{v} w(v), \quad (8.195)$$

<sup>1)</sup> Как уже отмечалось, иные нормировки состояний могут привести к появлению множителя  $1/p$ .

где

$$w(v) = (2\pi)^3 2 \sum_n \delta^4(p+q-p_n) \langle K^+(p) | D_{\dagger}^{\dagger} | n \rangle \langle n | D_{\dagger}^{\dagger} | K^-(p) \rangle \quad (8.196)$$

и  $q = 0$ . Модель полюсов Редже дает нам асимптотическое поведение  $w(v)$ :

$$w(v) \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} v^{\alpha_2}, \quad (8.196')$$

где  $\alpha_2$  — траектория, соответствующая обмену состояниями с зарядом 2 и гиперзарядом 2. Для сходимости правила сумм (и обращения в нуль вкладов диаграмм второго класса) требуется, чтобы выполнялось неравенство  $\alpha_2(0) < 0$ . Экспериментальные данные, свидетельствующие об отсутствии экзотических состояний, вполне оправдывают малость амплитуды с  $\Delta I = \Delta S = 2^1$ .

Заканчивая анализ мезонного случая, коротко остановимся на вычислении поправок в правой части равенства (8.195). Чтобы оценить вклад непрерывного спектра, можно попытаться использовать то же приближение, которое применялось при вычислении  $r_{K\pi}$  (§ 5, п. 2). Но поскольку здесь имеется лишь один энергетический знаменатель, соответствующий интеграл линейно расходится. Грубая оценка, основанная на использовании в вершинах для сильных взаимодействий формфактора

$$g_{PPV} = g_{SU(3)} \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + s},$$

даст <sup>2)</sup>

$$\int_{\text{Непр.}} \frac{dv}{v} w(v) = \left\{ \begin{array}{l} 0,55 m_0^2 \\ 0,19 m_B^2 \end{array} \right\} \quad \text{при} \quad \Lambda^2 = \left\{ \begin{array}{l} (2m_B)^2 \\ 2m_B^2 \end{array} \right\}, \quad (8.197)$$

где  $m_0$  и  $m_B$  — средние массы псевдоскалярных мезонов и барионов  $J^P = = 1/2^+$ :

$$m_0^2 \approx (410 \text{ МэВ})^2; \quad m_B^2 \approx (1150 \text{ МэВ})^2. \quad (8.198)$$

Численные значения (8.197) нужно сравнить с экспериментальным значением

$$4m_K^2 - 3m_\eta^2 - m_\pi^2 \approx 0,36 m_0^2. \quad (8.199)$$

Сравнение показывает, что даже такое грубое приближение дает верный знак поправок и правильный порядок их величины.

Рассмотренный пример, мезонная формула масс в нарушенной  $SU(3)$ -симметрии, — очень хорошая иллюстрация двух основных положений этой главы, а именно зависимости результатов от системы отсчета и необходимости привлекать динамическую информацию, чтобы выяснить, возможно ли использование метода бесконечно большого импульса.

В заключение подчеркнем, что правила сумм, полученные из соотношений типа (8.187) и (8.188), и полнота системы промежуточных состояний будут справедливы также и в том случае, когда нарушающая симметрию часть гамильтониана ведет себя не столь просто, как гиперзаряд. Действительно, формулы масс (и метод оценки поправок) остаются теми же для любого нарушающего симметрию гамильтониана при условии, что выполняется хотя бы одно из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} [Q_{\dagger}^{\dagger}, [Q_{\dagger}^{\dagger}, H]] &= 0, \\ [Q_{\ddagger}^{\ddagger}, [Q_{\ddagger}^{\ddagger}, H]] &= 0, \\ [Q_{\ddagger}^{\dagger}, [Q_{\ddagger}^{\dagger}, H]] &= 0. \end{aligned} \quad (8.200)$$

<sup>1)</sup> Прекрасным примером теории, в которой отсутствуют экзотические резонансы и обращаются в нуль коммутаторы  $[\dot{Q}_{\dagger}^{\dagger}, Q_{\dagger}^{\dagger}]$ ,  $[Q_{\ddagger}^{\ddagger}, \dot{Q}_{\ddagger}^{\ddagger}]$ , может служить кварковая модель.

<sup>2)</sup> Подробности вычислений приведены в работе [85].

В частности, легко заметить, что в пространстве  $U$ -спина второе из соотношений (8.200) выполняется для любого нарушающего симметрию гамильтониана типа

$$H_B \sim \sum_n (a_n + b_n Y) Q^n,$$

так как  $Q = Q^3 + 1/2 Q^Y$  — скаляр в пространстве  $U$ -спина. Это указывает на то, что формула масс для частиц с одинаковым зарядом должна быть справедливой и тогда, когда одновременно учитываются нарушение симметрии  $SU(3)$  (как предполагалось,  $\sim Y$ ) и электромагнитное взаимодействие.

*а. Барионы*

До тех пор пока используются коммутаторы зарядов (интегралы по объему) (8.187) или (8.188), мы, очевидно, вынуждены иметь дело с рассеянием вперед  $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ . Отсюда следует, что в случае внешних частиц со спином число независимых правил сумм меньше <sup>1)</sup> числа возможных амплитуд, сохраняющих спиральность в реакции  $D_\alpha + p \rightarrow D_{-\alpha} + p$ , или равно ему. Так что вне зависимости от спина внешних состояний квадратичную формулу масс можно всегда получить, рассматривая, например, амплитуды, усредненные по спину.

Можно, однако, ввести коммутатор заряда и дивергенции (локального оператора), приводящий к несколько менее жестким ограничениям. Рассмотрим, в частности, следующий обобщенный вариант соотношений (8.187) и (8.188):

$$[Q\ddagger, D\ddagger] = [Q\ddagger, D\ddagger] = 0, \tag{8.201}$$

который, как мы уже видели, выполняется в кварковой модели [формула (2.130)]. Здесь существенно то, что, изучая матричные элементы коммутатора (8.201) между состояниями  $|p\rangle, |p'\rangle$  со спином, можно выбрать  $\mathbf{p}' = -\mathbf{p} = \Delta \neq 0$  и написать больше правил сумм. Проиллюстрируем этот метод на примере внешних барионов со спином  $1/2$ . В частности, рассмотрим соотношение

$$\langle p(p_2) | [Q\ddagger, D\ddagger(0)] | \Xi^-(p_1) \rangle = 0. \tag{8.202}$$

Наша цель — исследовать насыщение матричного элемента (8.202) в случае, когда  $\mathbf{P} = 1/2 (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = P\mathbf{n}$  стремится к бесконечности при  $n\Delta = 0$ . Для предварительного анализа выберем типичный диагональный вклад, скажем  $\Sigma^0$ . Необходимо иметь в виду следующие соотношения:

$$\langle p(p_2) | Q\ddagger | \Sigma^0(p_i) \rangle \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_i) (4E_p E_\Sigma)^{1/2} r_{\Sigma p}; \tag{8.203}$$

$$\begin{aligned} & (\Sigma^0(p_i) | D\ddagger | \Xi^-(p_1)) = \\ & = \frac{i}{\sqrt{2}} (m_\Sigma - m_\Xi) \bar{u}_\Sigma u_\Xi D_{\Sigma\Xi}(\Delta^2) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \frac{i}{\sqrt{2}} (m_\Sigma - m_\Xi) [(m_\Sigma + m_\Xi) + i\sigma\mathbf{n} \times \Delta] D_{\Sigma\Xi}(\Delta^2), \end{aligned} \tag{8.204}$$

где  $D_{\Sigma\Xi}(\Delta^2)$  — формфактор

$$D_{\Sigma\Xi}(\Delta^2) = F_1^{\Sigma\Xi}(\Delta^2) + \frac{\Delta^2}{m_\Sigma - m_\Xi} F_{\Sigma\Xi}(\Delta^2) \tag{8.205}$$

с нормировкой

$$D_{\Sigma\Xi}(0) = r_{\Sigma\Xi}. \tag{8.206}$$

<sup>1)</sup> Некоторые независимые амплитуды ( $s+1$  в случае целого,  $s+1/2$  в случае полуцелого спина) могут обратиться в нуль в пределе бесконечно большого импульса, так как обращаются в нуль их кинематические коэффициенты.

Тогда нетрудно получить следующий результат:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ r_{\Sigma p} D_{\Sigma \Xi} (\Delta^2) (m_{\Sigma}^2 - m_{\Xi}^2) + r_{\Sigma \Xi} D_{\Sigma p} (\Delta^2) (m_{\Sigma}^2 - m_N^2) + \\ & + i\sigma n \times \Delta [ r_{\Sigma p} D_{\Sigma \Xi} (\Delta^2) (m_{\Sigma} - m_{\Xi}) + r_{\Sigma \Xi} D_{\Sigma p} (\Delta^2) (m_{\Sigma} - m_N) ] \} + \\ & + \frac{3}{2} \{ \Sigma \rightarrow \Lambda \} = \int_{\text{Непр.}} \frac{dv}{v} w(q, \Delta), \quad (8.207) \end{aligned}$$

где, как обычно,

$$\begin{aligned} w(q, \Delta) = \lim_{P \rightarrow \infty} (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_2 + q - p_n) \langle p(p_2) | D_{\bar{V}}^{\dagger} | n \rangle \langle n | D_{\bar{V}}^{\dagger} | \Xi^-(p_1) \rangle - \\ - \text{перекр. чл.} = w_1(v, \Delta^2) + i\sigma n \times \Delta w_2(v, \Delta^2), \quad (8.208) \end{aligned}$$

и  $q = 0$ . Таким образом, имеется два независимых правила сумм, соответствующих переходам с переворотом спина и без переворота спина. Отделив их, можно положить  $\Delta^2 = 0$ , и, пренебрегая поправками порядка  $O(f^3)$  (т. е. полагая  $r_{\Sigma p} = 1$  и т. д.), получим окончательно следующие соотношения:

$$2m_N^2 + 2m_{\Xi}^2 - 3m_{\Lambda}^2 - m_{\Sigma}^2 = - \int \frac{dv}{v} w_1(v), \quad (8.209)$$

$$2m_N + 2m_{\Xi} - 3m_{\Lambda} - m_{\Sigma} = - \int \frac{dv}{v} w_2(v). \quad (8.210)$$

Итак, если запастись терпением и выполнить все преобразования, то можно вывести и линейную и квадратичную формулы масс вместе с соответствующими поправками. Но, по-видимому, нет критерия, который позволил бы одну из этих формул априори предпочесть другой.

Оказалось, что обе формулы масс очень хорошо согласуются с экспериментом:

$$(2m_N + 2m_{\Xi} - 3m_{\Lambda} - m_{\Sigma})_{\text{эксп}} \approx -0,03m_B, \quad (8.211)$$

$$2m_N^2 + 2m_{\Xi}^2 - 3m_{\Lambda}^2 - m_{\Sigma}^2)_{\text{эксп}} \approx 0,06m_B^2, \quad (8.212)$$

где  $m_B = 1,15$  ГэВ.

Асимптотическое поведение интегралов в правой части равенств (8.209) и (8.210), а также физические причины существования двух правил сумм могут стать яснее, если связать  $w_1$  и  $w_2$  с более привычными инвариантными функциями процесса

$$D_{\bar{V}}^{\dagger} + \Xi \rightarrow D_{\bar{V}} + p. \quad (8.213)$$

Записывая амплитуду перехода в виде

$$W = \bar{u}_p [a + b(\gamma q)] u_{\Sigma^-}, \quad (8.214)$$

получаем

$$w_1 = \frac{1}{\pi} (m_N + m_{\Xi}) \text{Im } a + \frac{1}{\pi} v \text{Im } b, \quad (8.215)$$

$$w_2 = \frac{1}{\pi} \text{Im } a. \quad (8.216)$$

Поскольку асимптотически  $a$  и  $b$  ведут себя следующим образом <sup>1)</sup>:

$$a \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \text{const } v^{\alpha_2}, \quad (8.217)$$

$$b \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \text{const } v^{\alpha_2 - 1}, \quad (8.218)$$

имеем

$$\frac{w_{1,2}}{v} \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \text{const } v^{\alpha_2 - 1}; \quad (8.219)$$

<sup>1)</sup> Здесь реджевское поведение приписывается и действительной и мнимой части амплитуды  $W$ , поскольку она описывает «рассеяние» скалярного оператора  $D$  на частице со спином  $1/2$  (гл. 4, § 4 и 5).

следовательно, если экзотическая траектория  $\alpha_2(0) < 0$ , то оба правила сумм сходятся.

Очень полезно выразить правила сумм (8.209) и (8.210) через инварианты  $a$  и  $b$ :

$$2m_N + 2m_E - 3m_A - m_\Sigma + \frac{1}{\pi} \int_{\text{Непр.}} \frac{dv}{v} \text{Im } a(v) = 0, \quad (8.220)$$

$$3(m_N - m_A)(m_A - m_E) + (m_N - m_\Sigma)(m_\Sigma - m_E) + \frac{1}{\pi} \int_{\text{Непр.}} \text{Im } b(v) dv = 0. \quad (8.221)$$

Нетрудно видеть, что соотношение (8.221), которое представляет собой комбинацию «линейного» и «квадратичного» правил сумм, есть просто условие сверхсходимости. Справедливость этого условия не имеет ничего общего с одновременными коммутаторами и следует лишь из предположения (8.218) о реджевском поведении амплитуды  $W$ .

#### 4. Симметрия $SU(3)$ и электромагнитные взаимодействия

До сих пор мы последовательно пренебрегали электромагнитными эффектами. Но, как показали Коулман и Глэшоу, в рамках симметрии  $SU(3)$  можно получить отличные результаты и в высших порядках по константе электромагнитного взаимодействия. Рассмотрим теперь гамильтониан стандартного вида

$$H = H_0 + fH_B + H_{\text{эл.-м}}, \quad (8.222)$$

где  $H_0$  — скаляр группы  $SU(3)$ ; предполагается, что член  $H_B$  нарушает  $SU(3)$ , но инвариантен по отношению к  $SU(2)$ , а член  $H_{\text{эл.-м}}$  отвечает за расщепление изомультиплетов. Обычное предположение о минимальности электромагнитного взаимодействия приводит к следующему явному выражению для  $H_{\text{эл.-м}}$ :

$$H_{\text{эл.-м}} = e \int d^3x j_\mu^{\text{эл.-м}}(x) \mathcal{A}^\mu(x), \quad (8.223)$$

где  $\mathcal{A}_\mu$  — фотонное поле.

##### а. Электромагнитные разности масс в нарушенной $SU(3)$ -симметрии

Обычно считают, что разность масс частиц данного изоспинового мультиплетта имеет электромагнитное происхождение и есть величина второго порядка малости по электрическому заряду. При совместном рассмотрении изоспиновых мультиплетов, принадлежащих одному представлению  $SU(3)$ , становится ясно, что должны существовать соотношения (связывающие между собой электромагнитные разности масс), которые должны выполняться точно в отсутствие умеренно сильных взаимодействий. Другими словами, должны существовать специальные комбинации электромагнитных разностей масс, равные нулю с точностью до поправок порядка  $e^2 f$ .

Чтобы вывести такого рода соотношения, можно действовать точно так же, как в предыдущем разделе при выводе массовых формул. Поскольку требуется установить связи между электромагнитными разностями масс, мы вынуждены использовать коммутаторы, содержащие дивергенцию изоспинового тока, т. е.  $[Q_V^\dagger, D_I^\dagger]$  или  $[Q_V^\dagger, D_I^\dagger]$ . Возникает искушение по аналогии с тем, что было ранее, приравнять нулю экзотические коммутаторы типа  $[Q_V^\dagger, D_I]$  или  $[Q_V, D_I]$ .

Простой анализ явного выражения для  $D_I^\dagger$  показывает, что это было бы весьма разумно. Пусть гамильтониан электромагнитного взаимодействия

имеет стандартный *локальный* вид (8.223). Воспользовавшись теоремой Нетер в рамках теоретико-полевого описания (т. е. в кварковой модели) или же просто предположив <sup>1)</sup>, что

$$D_I^\dagger(x) = i [\mathcal{A}^{оп.-м}(x), Q_I^\dagger], \quad (8.224)$$

получим явное выражение для  $D_I^\dagger$ :

$$D_I^\dagger(x) = \pm ieV_I^\dagger(x) \mathcal{A}^\mu(x). \quad (8.225)$$

Далее, сделав крайне логичное предположение о равенстве нулю *одновременного* коммутатора между любыми  $SU(3)$ -зарядом и оператором электромагнитного поля, придем, наконец, к желаемому результату:

$$[Q_V^\dagger, D_I^\dagger] = 0, \quad (8.226)$$

$$[Q_V^\dagger, D_I^\dagger] = 0. \quad (8.227)$$

Прежде чем детально анализировать правила сумм, вытекающие из уравнений (8.226) и (8.227) в адронных обкладках, сделаем ряд общих замечаний о порядке величины (по константам  $e$  и  $f$ ) тех матричных элементов, которые нам потребуются. Здесь положение несколько усложняется, поскольку в число промежуточных состояний могут войти состояния с одним физическим фотоном, так что необходимо будет рассматривать матричные элементы как типа  $\langle A | M | B \rangle$ , так и типа  $\langle A | M | B \gamma \rangle$ , где  $A$  и  $B$  — адронные состояния, а  $M$  — любой из операторов, встречающихся в уравнениях (8.226) и (8.227).

Начнем с оператора  $D_I^\dagger$ . Ясно, что  $\langle A | D_I^\dagger | B \rangle$  имеет порядок  $e^2$ . Это видно из следующей формулы:

$$D_I^\dagger(x) = ieV_I^\dagger(x) \mathcal{A}^\mu(x)$$

и динамического уравнения

$$\mathcal{A}_\mu(x) = \mathcal{A}_\mu^{in}(x) + e \int j_\mu^{оп.-м}(x') \mathcal{D}_R(x' - x) d^4x', \quad (8.228)$$

где  $\mathcal{D}_R$  — запаздывающий фотонный пропагатор, так что

$$\langle A | D_I^\dagger | B \rangle = ie^2 \int d^4x \langle A | V_I^\mu(0) j_\mu^{оп.-м}(x) \mathcal{D}_R(x) | B \rangle. \quad (8.229)$$

Матричный же элемент  $\langle A | D_I^\dagger | B \gamma \rangle$ , очевидно, имеет порядок  $e$ .

Обратимся теперь к матричным элементам операторов  $Q_U$  и  $Q_V$ . Прежде всего матричные элементы  $\langle A | Q_{U, \nu} | B \rangle$  будут двух типов в соответствии с тем, принадлежат ли  $A$  и  $B$  одному или разным мультиплетам  $SU(3)$ . Как обычно, матричные элементы между адронными состояниями, обращающиеся в нуль в пределе точной симметрии, будут иметь порядок  $f$ . Наконец,  $\langle A | Q_U | B \gamma \rangle$  и  $\langle A | Q_V | B \gamma \rangle$  будут сильно различаться. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle A | Q_U | B \gamma \rangle &= O(ef), \\ \langle A | Q_V | B \gamma \rangle &= O(e). \end{aligned} \quad (8.230)$$

Это станет очевидным, если написать соотношения

$$\begin{aligned} \langle A | Q_U | B \gamma \rangle &= f \frac{\langle A | [Q_U, H_B] | B \gamma \rangle}{E_B + \omega - E_A}, \\ \langle A | Q_V | B \gamma \rangle &= f \frac{\langle A | [Q_V, H_B] | B \gamma \rangle}{E_B + \omega - E_A} + \\ &+ e \frac{\int d^3x \langle A | [Q_V, j_\mu^{оп.-м}(x) \mathcal{A}^\mu(x)] | B \gamma \rangle}{E_B + \omega - E_A}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Это локальный вариант динамического уравнения  $\dot{Q} = i[H, Q]$ .

которые следуют из предположения о форме гамильтониана взаимодействия [формулы (8.222) и (8.223)] и обычных одновременных коммутаторов зарядов с токами.

Итак, если вычислить соответствующие матричные элементы уравнений (8.226) и (8.227), написав, как обычно,

$$\sum_n \langle A | Q_{U, \nu} | n \rangle \langle n | D_I | B \rangle - \text{перекр. чл.} = 0, \quad (8.231)$$

то лишь в случае  $U$ -заряда фотонные члены дают вклад порядка  $e^2 f$ ; таким образом, они не дают «основного» члена. Это значит, что, не имея никакой возможности оценить фотонные вклады (которые довольно громоздки), мы должны сконцентрировать наше внимание на коммутаторе

$$[Q_U^\dagger, D_I^-] = 0. \quad (8.232)$$

В заключение выберем из одного и того же мультиплета  $SU(3)$  подходящие обкладки для коммутатора (8.232). Тогда вклады всех состояний, принадлежащих одному и тому же представлению  $SU(3)$ , будут иметь порядок  $e^2$ , тогда как все остальное будет порядка  $e^2 f$ .

Единственный действительно интересный с практической точки зрения случай — когда обкладками для коммутатора (8.232) служат состояния барионного октета. Прежде всего рассмотрим матричный элемент уравнения (8.232) между состояниями нейтрона и  $\Sigma^+$ . В данном случае необходимо проделать в точности те же математические операции, что и при выводе формулы масс Гелл-Манна — Окубо; отбирая главные члены по  $e^2$ , получим

$$-(\Sigma_0 - \Sigma^+) + (n - p) + \sqrt{\frac{3}{2}} D_{\Lambda\Sigma^+} + O(e^2 f) = 0. \quad (8.233)$$

Точно так же коммутатор (8.232) в обкладках из состояний  $\Sigma^-$  и  $\Xi^0$  приводит к соотношению

$$(\Xi^- - \Xi^0) - (\Sigma^+ - \Sigma^0) - \sqrt{\frac{3}{2}} D_{\Sigma^-\Lambda} + O(e^2 f) = 0. \quad (8.234)$$

В соотношениях (8.233) и (8.234) символы частиц обозначают их массы или квадраты масс в зависимости от того, какие приравнивались коэффициенты (при  $\sigma n \times \Lambda$  или при единице). Величина  $D_{\Lambda\Sigma^+}$  (и аналогично  $D_{\Sigma^+\Lambda}$ ) — это матричный элемент  $\langle \Lambda | D_I^- | \Sigma^+ \rangle$ , соответствующий переходу  $\Sigma\Lambda$ ; согласно сказанному ранее, он равен  $O(e^2)$ .

Матричные элементы перехода  $D_{\Lambda\Sigma}$  нельзя прямо сравнить с простыми экспериментальными данными. Но их можно исключить, сложив равенства (8.233) и (8.234). Действительно, так как

$$\langle \Sigma^- | D_I^- | \Lambda \rangle = \langle \Lambda | D_I^+ | \Sigma^- \rangle^* = \langle \Lambda | D_I^+ | \Sigma^- \rangle = -\langle \Lambda | D_I^- | \Sigma^+ \rangle$$

(последнее равенство следует из теоремы Вигнера — Эккарта), мы имеем

$$D_{\Lambda\Sigma^+} = -D_{\Sigma^-\Lambda}.$$

Если теперь сложить равенства (8.233) и (8.234) и пренебречь поправками порядка  $O(e^2 f)$ , то получим соотношение

$$(n - p) + (\Xi^- - \Xi^0) = (\Sigma^- - \Sigma^+). \quad (8.235)$$

Таким образом, в случае линейной формулы масс мы имеем теоретическое соотношение

$$(m_n - m_p) + (m_{\Xi^-} - m_{\Xi^0}) = (m_{\Sigma^-} - m_{\Sigma^+}), \quad (8.236)$$

впервые полученное Коулмэном и Глэшоу [312]. Если мы подставим в формулу (8.236) экспериментальные значения масс, то увидим превосходное со-



гласие теории с экспериментом:

$$(7,9 \pm 0,7) \text{ МэВ} = (7,92 \pm 0,13) \text{ МэВ}. \quad (8.236')$$

В случае мезонных октетов соотношения типа (8.233) и (8.234) эквивалентны (следствие зарядового сопряжения); в итоге аналог правила Коулмана и Глэшу становится тривиальным тождеством. Вот единственное соотношение, которое мы имеем для псевдоскалярных мезонов:

$$(m_{K_0}^2 - m_{K^+}^2) - (m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2) + \sqrt{\frac{3}{2}} D_{\pi^+} = O(e^2 f). \quad (8.233')$$

Оно не позволяет сделать каких-либо особых выводов об электромагнитных разностях масс. Наконец, в случае барионного декуплета при непосредственном насыщении не возникают никакие выражения типа  $D_{Y_1, Y_2}$ , так как в представлении 10 все веса простые. Нетрудно получить следующие три соотношения:

$$(Y^{*-} - Y^{*0}) - (N^{*-} - N^{*0}) = O(e^2 f), \quad (8.237)$$

$$(Y^{*0} - Y^{*+}) - (N^{*0} - N^{*+}) = O(e^2 f), \quad (8.238)$$

$$(Y^{*-} - Y^{*0}) - (\Xi^{*-} - \Xi^{*0}) = O(e^2 f). \quad (8.239)$$

К сожалению, имеющиеся в настоящее время скудные экспериментальные данные

$$N^{*-} - N^{*0} = (7,4 \pm 7,6) \text{ МэВ},$$

$$\Xi^{*-} - \Xi^{*0} = (6,2 \pm 2,4) \text{ МэВ}$$

не позволяют произвести надежную проверку выписанных уравнений.

### 6. Магнитные моменты в нарушенной $SU(3)$ -симметрии

В  $U$ -спиновом пространстве электромагнитный ток ведет себя как скаляр:

$$[Q_U^\dagger, j_\mu^{em}] = 0. \quad (8.240)$$

Воспользуемся этим его свойством, чтобы вывести соотношения между электромагнитными параметрами частиц одного и того же мультиплетта. Например, в обкладках из физических состояний протона и  $\Sigma^+$  после насыщения и отбора диагональных членов в системе бесконечно большого импульса получаем

$$r_{\Sigma p}^U \left[ F_1^\Sigma(\Delta^2) + i\sigma n \times \Delta \frac{F_2^\Sigma(\Delta^2)}{2m_\Sigma} \right] - \\ - r_{\Sigma p}^U \left[ F_1^p(\Delta^2) + i\sigma n \times \Delta \frac{F_2^p(\Delta^2)}{2m_p} \right] = C = O(f), \quad (8.241)$$

или

$$F_1^\Sigma(\Delta^2) = F_1^p(\Delta^2) + O(f), \\ \frac{F_2^\Sigma(\Delta^2)}{m_\Sigma} = \frac{F_2^p(\Delta^2)}{m_p} + O(f). \quad (8.242)$$

Тогда для рассеяния вперед имеем

$$k_\Sigma = k_p \frac{m_\Sigma}{m_p} + Q(f) = k_p \left( 1 + \frac{m_\Sigma - m_p}{m_p} \right) + O(f). \quad (8.243)$$

Таким образом, мы обнаруживаем два типа поправок (в обоих случаях порядка  $f$ ) к предельному симметричному соотношению  $k_\Sigma = k_p$ . Поправка первого типа, пропорциональная разности масс  $\Sigma N$ , носит кинематический

характер в том смысле, что она возникает при правильном учете физических масс частиц. Например, в соотношении (8.243) она приводит к поправке ~27%. Второй член связан с существованием матричных элементов оператора  $Q\hat{U}$ , равных нулю в пределе точной симметрии.

К сожалению, обычно не удается получить все соотношения между электромагнитными формфакторами частиц данного представления с помощью матричных элементов одного и того же коммутатора. Для барионного октета мы имеем девять магнитных формфакторов, включая  $\Sigma^0\Lambda$ -переход, и лишь два из них, соответствующие  $F$ - и  $D$ -связям тока, линейно независимы.

Чтобы получить общее выражение, матричные элементы которого давали бы все необходимые соотношения между магнитными моментами, обратим внимание на равенство, следующее из стандартных коммутационных соотношений алгебры токов:

$$[[j_{\mu}^{\text{эл.-м}}(x), Q_{\bar{1}}^{\dagger}], Q_{\bar{1}}] + [[j_{\mu}^{\text{эл.-м}}(x), Q_{\bar{1}}^{\dagger}], Q_{\bar{1}}] = 3j_{\mu}^{\text{эл.-м}}(x). \quad (8.244)$$

Это простейшая формула, из которой можно получить все необходимые соотношения между формфакторами и поправки к ним порядка  $f$ . В системе, где трехмерные импульсы начальной и конечной частиц совпадают, в качестве нулевого приближения (т. е. пренебрегая разностями масс) имеем следующие девять условий для девяти магнитных моментов:

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\mu_{\Sigma\Lambda} + \frac{3}{2}\mu_{\Lambda} + \frac{1}{2}\mu_{\Sigma^0} + \mu_n &= 0, \\ \mu_p + \mu_n + \mu_{\Sigma^-} &= 0, \\ \mu_n + 2\mu_{\Sigma^0} &= 0, \\ \sqrt{3}\mu_{\Sigma\Lambda} + \frac{1}{2}\mu_{\Sigma^0} + \frac{3}{2}\mu_{\Lambda} + \mu_{\Xi^0} &= 0, \\ \mu_{\Xi^0} + \mu_{\Xi^-} + \mu_{\Sigma^+} &= 0, \\ \mu_{\Xi^0} + 2\mu_{\Sigma^0} &= 0, \\ -\sqrt{3}\mu_{\Sigma\Lambda} + 2(\mu_{\Sigma^-} + \mu_{\Sigma^+} - \mu_{\Sigma^0}) + \frac{1}{2}(\mu_{\Xi^-} + \mu_p) &= 0, \\ \frac{3}{2}(\mu_p + \mu_{\Xi^-}) - \sqrt{3}\mu_{\Sigma\Lambda} &= 0, \\ \mu_p + \mu_{\Xi^-} - \mu_{\Lambda} - \mu_{\Sigma^0} - \frac{2}{\sqrt{3}}\mu_{\Sigma\Lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (8.245)$$

Первые восемь соотношений получены из матричных элементов с обкладками из двух состояний  $p, n, \Sigma^-, \Xi^-, \Xi^0, \Sigma^+, \Sigma^0$  и  $\Lambda$ , а в последнем матричный элемент имеет обкладки  $\Sigma^0$  и  $\Lambda$ . Очевидно, что лишь семь из них линейно независимы. Вычисления проведены в низшем порядке по теории возмущений, учитывались только однопарионные промежуточные состояния. Как уже указывалось ранее, нетрудно найти поправки к этим соотношениям.

### § 6. Проверка локальных коммутационных соотношений

Примеры, рассмотренные в предыдущем параграфе, не дают никакой информации о справедливости одновременных локальных коммутационных соотношений для плотностей. Как уже говорилось, для их проверки требуется условие  $u_1, u_2 \neq 0$ . Приложения, допускающие прямое сравнение с экспериментом, практически сводятся к простому случаю  $t = 0$ , когда из процессов электро- и нейтринорождения при высоких энергиях можно получить некоторую информацию. Для получения необходимых данных о втором процессе нужно ждать, пока будут введены в строй более мощные ускорители, а электроорождение уже сейчас становится волнующей областью исследований,

где можно узнать много интересного о структуре адрона, зондируемого электронами. Плодотворным методом исследования может оказаться алгебра токов с ее правилами сумм и общими асимптотическими свойствами, вытекающими из предположений о коммутаторах.

В этой главе мы будем консерваторами в том смысле, что затронем лишь те приложения, которые связаны с общим правилом сумм алгебры токов (8.20), а именно с локальным коммутатором  $[j_0, j_0]$ . Эти приложения в основном касаются поведения амплитуд электророждения при больших энергиях и фиксированном  $q^2$ .

Совсем недавно благодаря все возрастающему количеству экспериментальных данных большое внимание привлекли к себе процессы *глубоко-неупругого* рассеяния, где становятся большими и  $\nu$  и  $q^2$ . Анализ этих явлений с помощью алгебры токов привел к важному с теоретической точки зрения прогрессу в исследовании структуры токов и их коммутаторов. Эти новые и увлекательные проблемы отложим до гл. 10.

### 1. Правило сумм Кабиббо — Радикати

Начнем с простого случая изоспиновых токов и рассмотрим коммутатор

$$[V_0^{I+}(x), V_0^{I-}(y)] = 2V_0^3(x) \delta^3(x-y). \quad (8.246)$$

Уравнение (8.246) в обкладках из протонных состояний, соответствующих рассеянию вперед, приводит после насыщения к следующему правилу сумм [в точности совпадающему с уравнением (8.20) при  $if_{\beta\alpha\gamma} F_1^\gamma(0) \rightarrow 1$ ]:

$$\frac{1}{2} \int d\nu a(\nu, u) = 1, \quad (8.247)$$

где для удобства вычислений введена усредненная амплитуда

$$\begin{aligned} \bar{t}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Sp}(\gamma p + m_N) \sum_n [(2\pi)^3 \delta^4(p+q-p_n) \langle p | V_\mu^{I+} | n \rangle \times \\ \times \langle n | V_\nu^{I-} | p \rangle - \text{перекр. чл.}] = a p_\mu p_\nu + b(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) + c q_\mu q_\nu + d g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (8.248)$$

После выделения нейтронного вклада,

$$(a)_1 \text{ нейтрон} = 2\delta \left( \nu + \frac{1}{2} u \right) \left[ F_1^{(V)2}(u) - \frac{u}{4m_N^2} F_2^{(V)2}(u) \right], \quad (8.249)$$

правило сумм принимает вид

$$F_1^{(V)2}(u) - \frac{u}{4m_N^2} F_2^{(V)2}(u) + \frac{1}{2} \int_{\text{Непр}} d\nu a(\nu, u) = 1. \quad (8.250)$$

Далее, для преобразования вклада непрерывного спектра воспользуемся уравнением сохранения тока  $q^\mu t_{\mu\nu} = 0$ , которое приводит к соотношению  $a = -ub/\nu$ . Окончательно имеем

$$F_1^{(V)2}(u) - \frac{u}{4m_N^2} F_2^{(V)2}(u) - \frac{1}{2} u \int_{\text{Непр}} \frac{d\nu}{\nu} b(\nu, u) = 1, \quad (8.251)$$

так что в явной форме выполняется условие  $F_1^{(V)}(0) = 1$ .

В случае аксиальных изоспиновых плотностей совершенно аналогичные вычисления дают следующий результат:

$$G_1^2(u) + \frac{1}{2} \int_{\text{Непр}} d\nu \bar{a}(\nu, u) = 1. \quad (8.252)$$

При  $u = 0$  это соотношение вновь приводит к правилу сумм Адлера — Вейсбергера.

Несмотря на то что эти правила сумм просты, в настоящий момент они не поддаются непосредственной проверке, так как структурные функции  $a$  и в особенности  $\bar{a}$  определены недостаточно или вовсе неизвестны. Поэтому мы продифференцируем эти правила сумм по  $q^2 = -u$  и положим  $q = 0$ . Тогда из соотношения (8.251) следует

$$2F_1^{(V)'}(0) - \left(\frac{k^{(V)}}{2m_N}\right)^2 - \frac{1}{2} \int_{\text{Непр}} \frac{dv}{v} b(v, 0) = 0, \quad (8.253)$$

где штрих означает производную по  $q^2$ .

Правило сумм можно преобразовать к более удобной форме. В силу калибровочной инвариантности <sup>1)</sup> имеем

$$b(v, 0) - \frac{d(v, 0)}{v} = \frac{\sigma_{\gamma-p}(v, 0) - \sigma_{\gamma+p}(v, 0)}{2\pi^2\alpha}, \quad (8.254)$$

где  $\sigma$  — полное сечение фотопоглощения. Далее путем поворота в изоспиновом пространстве получим

$$\sigma_{\gamma-p} - \sigma_{\gamma+p} = 4\sigma_{1/2}^{(V)} - 2\sigma_{3/2}^{(V)}, \quad (8.255)$$

где  $\sigma_I^{(V)}(v, 0)$  — полное сечение процесса «изовектор  $\gamma$  + протон  $\rightarrow$  «состояние с изоспином  $I$ ». Если написать

$$\frac{1}{6} \langle r_V^2 \rangle = \left[ \frac{d}{dq^2} F_1^{(V)}(q^2) \right]_{q^2=0}, \quad (8.256)$$

то правило сумм принимает форму

$$\frac{1}{3} \langle r_V^2 \rangle = \left(\frac{k^{(V)}}{2m_N}\right)^2 + \frac{1}{2\pi^2\alpha} \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{v} (2\sigma_{1/2}^{(V)} - \sigma_{3/2}^{(V)}), \quad (8.257)$$

в которой оно было впервые получено Кабиббо и Радикати <sup>2)</sup>.

Подставляя экспериментальные данные, получаем

$$\frac{1}{3} \langle r_V^2 \rangle \approx \frac{0,132}{m_\pi^2}, \quad \left(\frac{k^{(V)}}{2m_N}\right)^2 \approx \frac{0,118}{m_\pi^2}, \quad (8.258)$$

что говорит о больших взаимных уничтожениях в интеграле по непрерывному спектру. О нем нам известно следующее. При интегрировании сечения рассеяния фоторождения в области 500 МэВ обнаруживается, что магнитный  $M_{1+}$ -вклад резонанса (3, 3) имеет неверный знак, но он частично компенсируется большим нерезонансным членом  $E_{0+}$  [268]. Вклад области высоких энергий до 1 ГэВ приблизительно равен  $0,032/m_\pi^2$  и спадает очень быстро [268]. Приведем численные оценки

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \langle r_V^2 \rangle &= \{N\} + \{N^*\} + \{s\text{-волна}\} + \{\text{обл. высоких энергий до 1 ГэВ}\} + \\ &+ \dots \approx (0,118 - 0,056 + 0,032 + 0,032) \frac{1}{m_\pi^2} + \dots \end{aligned} \quad (8.259)$$

Величину

$$\frac{1}{3} \langle r_V^2 \rangle \approx \frac{0,126}{m_\pi^2} \quad (8.260)$$

нужно сравнить с экспериментальным значением (8.258).

<sup>1)</sup> См. приложение IV гл. 10 и в частности формулу (IV.9).

<sup>2)</sup> Первоначальный вывод этих авторов [60] был основан на коммутаторе диполей

$$\left[ \int x V_0^{I^*}(x) d^3x, \int y V_0^{I^*}(y) d^3y \right] = 2 \int x^2 V_0^3(x) d^3x.$$

Создается впечатление, что согласие с экспериментом прекрасное и что тем самым локальность коммутатора  $[j_0, j_0]$  и обоснованность процедуры  $p \rightarrow \infty$  достаточно надежно доказаны. Действительно, справедливость правила сумм Кабиббо — Радикати в виде (8.257) основывается на независимости правой части уравнения (8.250) от  $q$ , а член, зависящий от  $q$ , может появиться, если в первоначальном коммутаторе содержится слагаемое, пропорциональное  $\nabla \delta^3(x)$ . Если считать вывод правила сумм абсолютно верным [заметим, кстати, что сходимость уравнения (8.253) гарантируется по-прежнему теоремой Померанчука], то хороший численный результат (8.260) удовлетворительно доказывает простую структуру коммутатора  $[j_0, j_0] \rightarrow j_0^1$ .

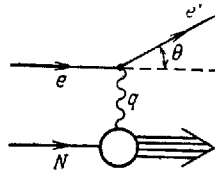
Можно построить аналогичное правило сумм для внешних пионов [60] и с его помощью получить информацию о среднем квадрате радиуса пиона. Выбирая в качестве промежуточных состояний  $\omega$  и  $A_2$ , находим

$$\frac{1}{6} \langle r_\pi^2 \rangle \approx \frac{0,032}{m_\pi^2} \quad (8.261)$$

(ср. с величиной  $1/m_\rho^2 \approx 0,033/m_\pi^2$  и очень грубой экспериментальной оценкой [313]  $(0,052 \pm 0,013)m_\pi^2$ ).

## 2. Предсказания для высокоэнергетического рассеяния электронов и нейтрино

Выясним некоторые свойства высокоэнергетических сечений рассеяния для *инклюзивных* реакций  $e + N \rightarrow e' + \text{все остальное}$ , где регистрируется только конечный электрон. В соответствии с общим результатом приложе-



Фиг. 8.2

ния IV к гл. 10 сечение рассеяния такого процесса (фиг. 8.2) определяется по формуле

$$\frac{d^2\sigma}{dv d|q^2|} = \frac{2\pi\alpha^2}{q^4} \frac{e'}{e} \frac{1}{m_N^2} \left( 2W_1 \sin^2 \frac{1}{2}\theta + W_2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta \right), \quad (8.262)$$

где  $W_1, W_2 \equiv m_N^2 a(v, u)$  — структурные функции. Поскольку у нас есть информация о  $W_2$  из алгебры токов, рассмотрим случай  $(e, e') \rightarrow \infty$  при фиксированных  $v \equiv m_N (e - e')$  и  $q^2 \equiv -4\epsilon\epsilon' \sin^2 \frac{1}{2}\theta$ . Так как  $\sin^2 \frac{1}{2}\theta = O(q^2/\epsilon^2)$ , мы имеем

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{d\sigma}{d|q^2|} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int_{-q^2/2}^{m_N \epsilon} \frac{d^2\sigma}{dv d|q^2|} dv = \frac{2\pi\alpha^2}{q^4} \int_{-q^2/2}^{\infty} a(v, q^2) dv. \quad (8.263)$$

Вводя сечения рассеяния электронов на протонах и нейтронах и сечения рассеяния изовекторных и изоскалярных фотонов на нуклонах,

1) В действительности, поскольку мы брали лишь первую производную по  $u$  при  $u = 0$ , в общем случае нельзя исключить существования аномальных членов  $O(u^2)$  в правой части правила сумм.

получаем

$$\int_{-q^2/2}^{\infty} (a^{ep} + a^{en}) dv = 2 \int_{-q^2/2}^{\infty} (a^{(V)} + a^{(S)}) dv \geq 2 \int_{-q^2/2}^{\infty} a^{(V)} dv \geq$$

$$\geq 2 \int_{-q^2/2}^{\infty} a_{1/2}^{(V)} dv \geq \int_{-q^2/2}^{\infty} (2a_{1/2}^{(V)} - a_{3/2}^{(V)}) dv = \frac{1}{2} \int a(v, q^2) dv = 1, \quad (8.264)$$

где использовано изоспиновое соотношение (8.255) и правило сумм (8.247). В результате приходим к неравенству Бьёркена [269]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left( \frac{d\sigma^{ep}}{d|q^2|} + \frac{d\sigma^{en}}{d|q^2|} \right) \geq \frac{2\pi\alpha^2}{q^4}. \quad (8.265)$$

Интересно, что зависимость правой части неравенства (8.265) от  $q^2$  такая же, как и для нерелятивистского точечного резерфордского сечения  $4\pi\alpha^2/q^4$ .

Почему вместо точного результата мы получили неравенство? Дело в том, что сумма  $(ep) + (en)$  содержит, кроме векторной, еще скалярную часть, о которой из алгебры токов ничего не известно.

Сказанное выше можно непосредственно обобщить на случай полного слабого тока:

$$J_{\mu}^{+} \equiv J_{\mu}^{c\pi} = (V_{\mu} - A_{\mu})^{I^{+}} \cos \theta + (V_{\mu} - A_{\mu})^{V^{+}} \sin \theta. \quad (8.266)$$

Действительно, рассмотрим коммутатор

$$[J_0^{+}(\mathbf{x}), J_0^{-}(0)] = 2 \left[ (V_0^3 - A_0^3)(1 + \cos^2 \theta) - 4 \sin \theta \cos \theta (V_0^3 - A_0^3) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} \sin^2 \theta (V_0^Y - A_0^Y) \right] \delta^3(\mathbf{x}). \quad (8.267)$$

Путем усреднения по спину и насыщения в протонных обкладках легко получить <sup>1)</sup>

$$\frac{1}{2} \int d\nu a^{c\pi}(\nu, u) = 2(1 + \sin^2 \theta), \quad (8.268)$$

где  $a^{c\pi}$  — величина, формально определяемая через полную амплитуду  $t_{\mu\nu}^{c\pi}$  и содержащая как векторную, так и аксиально-векторную части. Уточним зарядовые состояния:

$$a^{c\pi} = \theta(\nu) a^{\tilde{\nu}p} - \theta(-\nu) a^{\nu p}. \quad (8.269)$$

Поскольку в настоящее время мы не в состоянии подробно проанализировать насыщение правила сумм (8.268), ограничимся выводом общего результата. Воспользуемся следующим соотношением из приложения IV к гл. 10:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{d\sigma^{c\pi}}{d|q^2|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{-q^2/2}^{m_N \omega} d\nu \frac{d^2\sigma^{c\pi}}{d\nu d|q^2|} = \frac{G^2}{4\pi m_N^2} \int_{-q^2/2}^{\infty} d\nu W_2^{c\pi}(\nu, q^2). \quad (8.270)$$

Тогда в силу соотношения (8.268) получим

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( \frac{d\sigma^{\tilde{\nu}p}}{d|q^2|} - \frac{d\sigma^{\nu p}}{d|q^2|} \right) = \frac{G^2}{4\pi} \int d\nu a^{c\pi}(\nu, u) = \frac{G^2}{\pi} (1 + \sin^2 \theta). \quad (8.271)$$

Локальность одновременного коммутатора (8.267) приводит к тому, что разность сечений рассеяния  $(\tilde{\nu}p)$  и  $(\nu p)$  асимптотически не зависит от  $q^2$

<sup>1)</sup> См. [270]. Исключительно интересное обсуждение материала этого раздела можно найти в работе [271].

и определяется точечным сечением  $G^2/\pi$ . В этом случае результат лучше согласуется с экспериментом и надежнее обоснован, чем в случае рассеяния электронов (8.265). Возможности прямого его использования зависят, очевидно, от результатов нейтринных экспериментов.

### § 7. Насыщение и алгебраическая структура правил сумм

До сих пор, используя правила сумм, мы придерживались следующей точки зрения. Алгебра токов рассматривалась как некая априорная схема, которая дает конкретные результаты, когда в нее вводится дополнительная информация в виде экспериментальных данных. Отправным пунктом является алгебра коммутаторов, которая используется (и одновременно проверяется) путем неполного насыщения правил сумм. Так, были успешно получены численные оценки для  $T_{\pi N}^{\prime}$  или  $g_A^2$ ,  $(g_V^2)$  и т. п.

В предыдущем параграфе мы более или менее подробно остановились на экспериментальной проверке и конкретном использовании различных правил сумм в системе бесконечно большого импульса. Обычно при насыщении интеграл по непрерывному спектру заменяют его экспериментальным значением. Когда это сделать не удастся, можно попробовать ограничиться несколькими одночастичными промежуточными состояниями и из полученных правил сумм вывести алгебраические соотношения между несколькими параметрами, приводящие к качественным оценкам констант слабого взаимодействия или массы резонанса. Такой подход часто приводит к хорошим результатам. В противном случае следует учесть больше состояний.

Симметрия  $SU(3)$  является здесь в какой-то мере исключением. Действительно, несмотря на нарушенный характер этой симметрии, природа несет на себе ее отчетливый отпечаток [имеется в виду приближенная классификация адронов по неприводимым представлениям группы  $SU(3)$ ]. Если говорить о правилах сумм, то отличные от нуля матричные элементы, равные нулю в пределе точной симметрии (например, между состояниями барионного октета и декуплета), все же малы и дают обычно небольшие поправки к результатам, соответствующим точной  $SU(3)$ -симметрии. Таким образом, мы действительно имеем дело с алгеброй «приближенной симметрии».

Может возникнуть вопрос: появится ли аналогичная структура, если произвести насыщение правил сумм киральной алгебры  $SU(3) \otimes SU(3)$  несколькими одночастичными состояниями? Такую алгебру, безусловно, нельзя считать соответствующей приближенной симметрии, поскольку матричные элементы  $\langle N | \bar{D} | N' \rangle$ , равные нулю в пределе точной симметрии, вообще говоря, не малы. Ниже в качестве примера мы рассмотрим соотношение Адлера — Вейсбергера для внешних нуклонов; включение  $N$  (октета) и  $N^*$  (декуплета) приводит к следующему результату<sup>1)</sup>:  $|G_A/G_V| = 5/3 \approx 1,67$ ; следовательно, чтобы улучшить насыщение, придется вводить более тяжелые барионы. Можно, однако, упорядочить этот метод, приняв новую схему классификации барионов. Мы можем принять, что барионы преобразуются по приводимому представлению, т. е. являются смесью нескольких неприводимых представлений группы  $SU(3) \otimes SU(3)$ , и насыщать правила сумм несколькими барионными состояниями. Тогда мы получим систему алгебраических (в общем случае нелинейных) уравнений для матричных элементов переходов, выраженных через углы смешения.

Мы видим, что возможны поиски более конструктивного и самосогласованного метода, который позволял бы из правил сумм в системе бесконечно большого импульса выводить закономерности адронного мира. Наиболее

<sup>1)</sup> Значение  $|G_A/G_V| = 1,4$ , которое мы приводили раньше, получается, если учесть конечную ширину резонанса.

детально такая программа была разработана Дашеном и Гелл-Манном [47, 48, 248, 272], предложившими использовать произвольное число одночастичных состояний для насыщения правил сумм, полученных из локальных коммутаторов  $[j_0, j_0]$  группы  $SU(3) \otimes SU(3)$ . Расшифруем подробнее эту процедуру. Прежде всего коммутатор  $[j_0, j_0]$  в обкладках из нуклонов насыщается резонансами, рассматриваемыми как стабильные одночастичные состояния. Затем тот же коммутатор насыщается в обкладках из нуклона и резонанса; процесс повторяется для двух резонансов и т. д. Ясно, что в конце концов мы приходим к системе (как оказывается, бесконечной) уравнений для вершин  $\langle N | j_0 | N \rangle$ ,  $\langle N | j_0 | N^* \rangle$ ,  $\langle N^* | j_0 | N^* \rangle$ , ..., решения которой в принципе могут давать основные соотношения для адронных формфакторов и спектр масс.

Этот раздел посвящен анализу успехов и неудач различных этапов указанной процедуры. Мы прежде всего дадим количественную формулировку схемы насыщения.

Исходным является одновременный коммутатор

$$[j_0^\beta(x), j_0^\alpha(y)] = if_{\beta\alpha\gamma} j_0^\gamma(x) \delta^3(x-y),$$

где  $j_0$  — векторный или аксиально-векторный ток. Обычным путем получаем правило сумм:

$$\sum_n \frac{1}{2E_n} \left\langle P + \frac{1}{2} \Delta; \lambda_2, i_2 | j_0^\beta | i_n, \lambda_n; P + Q \right\rangle \left\langle P + Q; \lambda_n, i_n | j_0^\alpha | i_1, \lambda_1, P - \frac{1}{2} \Delta \right\rangle - \left( \begin{matrix} \beta \leftrightarrow \alpha \\ Q \leftrightarrow -Q \end{matrix} \right) = if_{\beta\alpha\gamma} \left\langle P + \frac{1}{2} \Delta; \lambda_2, i_2 | j_0^\gamma | i_1, \lambda_1; P - \frac{1}{2} \Delta \right\rangle, \quad (8.272)$$

где физические состояния задаются трехмерным импульсом, спиральностью  $\lambda$  и индексом  $i$ , объединяющим все прочие степени свободы (в том числе и массу). В приложении I [формула (I.15)] показано, что в пределе бесконечно большого импульса матричные элементы связанных диаграмм можно записать в виде

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1}{2P} \left\langle P + \frac{1}{2} \Delta; \lambda_2, i_2 | j_0^\beta | i_n, \lambda_n; P + Q \right\rangle = \langle \lambda_2, i_2 | F^\beta(-q_2) | i_n, \lambda_n \rangle. \quad (8.273)$$

В выражении (8.273) представлена окончательная форма зависимости матричных элементов от разности  $\frac{1}{2} \Delta - Q = -q_2$ , ( $q_2 P = 0$ ). Если пренебречь всеми вкладками II класса и Z-диаграммами, то правило сумм принимает вид

$$\sum_n \langle \lambda_2, i_2 | F^\beta(-q_2) | i_n, \lambda_n \rangle \langle i_n, \lambda_n | F^\alpha(q_1) | i_1, \lambda_1 \rangle - \left( \begin{matrix} \beta \leftrightarrow \alpha \\ q_2 \leftrightarrow -q_1 \end{matrix} \right) = if_{\beta\alpha\gamma} \langle \lambda_2, i_2 | F^\gamma(q_1 - q_2) | i_1, \lambda_1 \rangle. \quad (8.274)$$

Индексы  $\lambda_n$  и  $i_n$ , вообще говоря, пробегают все значения, соответствующие полной системе промежуточных состояний, охватывающей резонансы и многочастичные состояния. Если предположить, что насыщение достигается одночастичными состояниями, то область изменения индексов  $\lambda_n$  и  $i_n$  ограничивается дискретным набором. Операторы  $F^\alpha(q)$  нужно рассматривать как матрицы в пространстве только «внутренних» квантовых чисел  $i$  и спиральности  $\lambda$ , поскольку зависимость состояний от импульса уже выделена. Имея это в виду, можно переписать уравнение (8.274) в компактной форме

$$[F^\beta(q_2), F^\alpha(q_1)] = if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(q_1 - q_2). \quad (8.275)$$

Это, конечно, не значит, что операторы  $F^\alpha(q)$  и их коммутаторы аналогичны токам  $\tilde{j}_0^\alpha(q)$  и первоначальной алгебре токов; в частности, токи  $\tilde{j}_0^\alpha$  — это



операторы вторичного квантования, рождающие и уничтожающие частицы. Правило сумм принимает вид (8.274) лишь после перехода в систему бесконечно большого импульса, где исчезают многие эффекты вторичного квантования, такие, например, как несвязные матричные элементы  $\langle 0 | j_0 | n \rangle$ . Полученный результат эквивалентен общему правилу сумм алгебры токов [в частности, при  $\lambda = 0$  соотношению (8.20)]. Единственное его преимущество — явно выраженная алгебраическая структура, сильно напоминающая структуру правил сумм нерелятивистской квантовой механики.

Правило сумм Дашена — Фубини — Гелл-Манна (8.20) вытекает из алгебры коммутаторов и предположений об асимптотике амплитуды лептон-адронного процесса

$$j_\mu^\alpha + \text{частица} \rightarrow j_\nu^\beta + \text{частица}.$$

Теперь ясно, что введенное новшество — насыщение правил сумм одними лишь резонансами — является сильным динамическим ограничением. Но мы не собираемся здесь выражать *полную* амплитуду через резонансы, мы лишь требуем, чтобы асимптотическое поведение некоторых построенных из резонансов амплитуд совпадало с асимптотикой истинных амплитуд (охватывающих непрерывный спектр состояний при низких и высоких энергиях). Это подразумевает согласование различных формфакторов с тем, чтобы удовлетворить уравнению (8.274). Мы примем такую модель адронного мира без дальнейшего объяснения; в гл. 9 читатель найдет общий анализ подобных предположений, в том числе и для амплитуд сильных взаимодействий.

Возвращаясь к правилам сумм алгебры токов, заметим, что последним этапом программы Дашена — Гелл-Манна является построение решений для матриц  $\langle \lambda_n, i_n | F^\alpha(\mathbf{q}) | i_1, \lambda_1 \rangle$ , которые, кроме того, удовлетворяют весьма жестким условиям лоренцевой инвариантности. Это требование отнюдь не тривиально, и позже мы рассмотрим все его последствия. Лучше всего начать с исследования тривиальной алгебраической структуры, соответствующей простейшей кинематической ситуации  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = 0$ , связь которой с алгеброй зарядов очевидна.<sup>1</sup>

## 1. Правила сумм коммутаторов $[Q, Q]$ и $[Q, D]$

Прежде чем перейти к изучению особенностей проблемы насыщения в алгебре зарядов, заметим следующее. С помощью системы бесконечно большого импульса мы получаем алгебру формфакторов (8.275) или, что то же, правило сумм (8.20), сходимость которого следует из теории полюсов Редже. Но из рассмотрения формулы масс, соответствующей случаю  $SU(3)$ -симметрии, мы знаем, что дополнительные специальные предположения об асимптотике приводят к полезным правилам сумм, которые нельзя получить, непосредственно применяя процедуру  $p \rightarrow \infty$ . В упомянутом конкретном примере дополнительная динамическая информация заключалась в том, что траектории, соответствующие обмену двумя единицами изоспина или гиперзаряда, отрицательны при малых  $t$ ,  $\alpha_2(0) < 0$ . С алгебраической точки зрения эти правила сумм были выведены из предположения о свойствах экзотических коммутаторов  $[Q, D]$ , которые можно заранее положить равными нулю. Поэтому мы рассмотрим проблему одновременного насыщения алгебры зарядов  $[Q, Q] = Q$  и экзотических коммутаторов  $[Q, D] = 0$ .

Для простоты ограничимся случаем симметрии  $SU(2) \otimes SU(2)$ . Тогда наибольший интерес представляют коммутаторы аксиальных величин, где, кроме всего прочего, гипотеза ЧСАТ позволяет получить сведения о взаимодействии пионов (с нулевой массой) и резонансов<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Это говорит о том, что, как впервые указал Вейнберг [192], такие сведения можно получить, исходя только из свойств сильных взаимодействий безмассовых пионов; мы уже отмечали это в гл. 5, § 3, п. 7.

Вновь начнем с коммутатора  $[\bar{Q}_\beta, \bar{Q}_\alpha] = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} Q_\gamma$  и произведем насыщение в обкладках из одночастичных состояний со спиральностью  $\lambda$ . Обычным путем получаем

$$[\bar{F}^\beta(0), \bar{F}^\alpha(0)] = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(0). \quad (8.276)$$

Полезно переписать уравнение (8.276) в несколько иной форме. Воспользуемся обозначениями формулы (8.273)<sup>1)</sup>. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \lambda_b, b | \bar{F}^\beta(0) | c, \lambda_c \rangle &= \lim_{p \rightarrow \infty} \langle p, \lambda_b, b | A_0^\beta | c, \lambda_c, p \rangle \frac{1}{2E} = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \delta_{\lambda_b \lambda_c} \frac{\langle p, \lambda_b, b | \bar{D}^\beta | c, \lambda_b, p \rangle}{i(E_b - E_c) 2E} = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\delta_{\lambda_b \lambda_c}}{i(E_b - E_c) 2E} \bar{D}_{bc}^\beta [(E_b - E_c)^2] = \\ &= \frac{\delta_{\lambda_b \lambda_c} f_\pi M^\beta(c \rightarrow b\pi^\beta)}{i(m_b^2 - m_c^2)} \equiv \delta_{\lambda_b \lambda_c} X_{bc}^\beta(\lambda_b). \end{aligned} \quad (8.277)$$

На разных ступенях преобразования уравнения (8.277) мы использовали то обстоятельство, что заряды коммутируют с оператором спиральности  $\mathbf{R}_J$ . С помощью гипотезы ЧСАТ фактор  $\bar{D}_\beta(q^2)$  был выражен через матричные элементы перехода  $c(\lambda) \rightarrow b(\lambda) + \pi_\beta$ , сохраняющего спиральность, а именно

$$\bar{D}_{bc}^\beta(0) = f_\pi M^\beta(b, \lambda, p; c, \lambda, p), \quad (8.278)$$

где  $M^\beta$  — амплитуда процесса  $c(\lambda, p) \rightarrow b(\lambda, p) + \pi^\beta(0)$  в любой коллинеарной (сохраняющей спиральность) системе. В частности, вероятность распада (частица  $c$  неполяризована и покоится) дается выражением

$$\Gamma^{(\lambda)}(c \rightarrow b\pi^\beta) = \frac{(m_c^2 - m_b^2)^3}{16\pi^2 m_c^2 (2S_c + 1)} |X_{bc}^\beta(\lambda)|^2, \quad m_\pi^2 = 0, \quad (8.279)$$

где  $S_c$  — спин частицы  $c$ . Используя величины  $X_{ab}^\alpha(\lambda)$ , введенные в уравнении (8.277), перепишем равенство (8.276) в следующей окончательной форме:

$$\sum_c [X_{bc}^\beta(\lambda) X_{ca}^\alpha(\lambda) - (\beta \leftrightarrow \alpha)] = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} I_{ba}^\gamma(\lambda), \quad (8.280)$$

или

$$[X^\beta(\lambda), X^\alpha(\lambda)] = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} I^\gamma(\lambda), \quad (8.281)$$

где

$$I_{ba}^\gamma(\lambda) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2p} \langle p, \lambda, b | V_0^\gamma | a, \lambda, p \rangle. \quad (8.282)$$

Соотношение (8.281) [или (8.276)] или явное разложение (8.280) — это обобщенные правила сумм Адлера — Вейсбергера. Действительно, принимая во внимание четность, мы увидим в дальнейшем, что для фиксированной пары внешних частиц из этих соотношений получается  $j + 1$  (в случае целого  $j$ ) или  $j + 1/2$  (в случае полуцелого  $j$ ) независимых правил сумм Адлера — Вейсбергера, где  $j$  — наименьший из спинов внешних состояний.

Кроме того, поскольку под действием группы  $SU(2)$  оператор  $X^\beta$  преобразуется как  $A_0^\beta$ , т. е. как изовектор, то

$$[I^\beta, X^\alpha] = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} X^\gamma \quad (8.283)$$

и, очевидно,

$$[I^\beta, I^\alpha] = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} I^\gamma. \quad (8.284)$$

<sup>1)</sup> В частности, индексы  $c, b, \dots$  обозначают изоспин, спин, массу, четность и т. д.

Эти соотношения показывают, что при фиксированном  $\lambda$  матрицы  $X^\beta(\lambda)$ ,  $I^\gamma(\lambda)$  преобразуются по представлениям группы  $SU(2) \otimes SU(2)$  [в неявном виде такой закон преобразования содержится уже в формуле (8.276)]. Иными словами, набор одночастичных состояний может составить базис приводимого и неприводимого представлений группы  $SU(2) \otimes SU(2)$ . Если представления неприводимы, то «взаимодействия»  $X^\beta(\lambda)$  будут определены однозначно, а в противном случае они будут зависеть от параметров смешивания между различными представлениями.

Продолжим нашу процедуру. Проинтегрировав  $[\bar{Q}^\beta, \bar{Q}^\alpha] = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} Q^\gamma$  по времени ( $Q^\gamma$  — сохраняющаяся величина), получим

$$[\bar{Q}_\beta, \dot{\bar{Q}}_\alpha] = [\bar{Q}_\alpha, \dot{\bar{Q}}_\beta],$$

т. е. коммутатор  $[Q_\beta, \dot{Q}_\alpha]$  симметричен относительно замены  $\beta \leftrightarrow \alpha$ .

Добавим следующее предположение [55]:

$$[\bar{Q}_\beta, \dot{\bar{Q}}_\alpha] \sim \delta_{\beta\alpha} \quad \text{или} \quad [\bar{Q}_\beta, \dot{\bar{Q}}_\alpha]_{I=2} = 0. \quad (8.285)$$

Если теперь еще учесть отсутствие в  $t$ -канале соответствующих траекторий с  $I = 2$  ( $\alpha_2(0) < 0$ ), то соотношение (8.285) позволит вывести («воскрешенное») правило сумм. Из коммутатора (8.285) обычным путем получаем

$$\sum_c [X_{bc}^\beta X_{ca}^\alpha (m_c^2 - m_a^2) - X_{bc}^\alpha (m_b^2 - m_c^2) X_{ca}^\beta] = [X^\beta(\lambda), [X^\alpha(\lambda), m^2]] \sim \delta_{\beta\alpha}, \quad (8.286)$$

где  $m^2$  — матрица масс,

$$\langle b | m^2 | a \rangle = m_a^2 \delta_{ba}. \quad (8.287)$$

Если считать «воскрешение» законным, то соотношение (8.286) можно записать [192] в виде правила сумм

$$[X^\beta(\lambda), [X^\alpha(\lambda), m^2]]_{I=2} = 0. \quad (8.288)$$

Вновь получаем  $j + 1$  (или  $j + 1/2$ ) правил сумм для фиксированной пары внешних частиц (в том, конечно, случае, если их изоспин допускает переход с  $\Delta I = 2$ ). Для матрицы масс  $m^2$  эти соотношения составляют алгебраические ограничения, дающие полезную информацию о спектре частиц в зависимости от их трансформационных свойств по отношению к группе  $SU(2) \otimes SU(2)$ .

Такой подход можно развить следующим образом. Для удобства введем обозначение

$$[X^\alpha, m^2] = -iY^\alpha \quad (8.289)$$

и перепишем соотношение (8.288) в виде

$$[X^\beta, Y^\alpha] = i\delta_{\beta\alpha} S, \quad (8.290)$$

где  $S$  — изоскалярная величина:

$$[I^\alpha, S] = 0. \quad (8.291)$$

Далее, привлекая формулы (8.281)–(8.291) и тождество Якоби, нетрудно получить равенства

$$\begin{aligned} [I^\beta, Y^\alpha] &= i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} Y^\gamma, \\ i[X^\beta, S] &= Y^\beta \equiv i[X^\beta, m^2]. \end{aligned} \quad (8.292)$$

Эти соотношения показывают, что изоскаляр  $S$  и изовектор  $Y^\alpha$  переходят один в другой при преобразованиях группы  $SU(2) \otimes SU(2)$  и, следовательно, принадлежат представлению  $(1/2, 1/2)$ . Отсюда тотчас следует, что две физические частицы, принадлежащие одному и тому же неприводимому

представлению группы  $SU(2) \otimes SU(2)$ , имеют равные массы. Действительно, квантовые числа оператора  $Y^\beta$  таковы, что его матричные элементы между состояниями одного и того же неприводимого представления равны нулю [ $Y^\beta \in (1/2, 1/2)$ ]. Тогда

$$\langle b | Y^\beta | a \rangle = 0 = i(m_b^2 - m_a^2) \langle b | X^\beta | a \rangle, \quad (8.293)$$

т. е.

$$m_b^2 = m_a^2.$$

Таким образом, одновременное насыщение алгебраических условий (8.281) и (8.288) невырожденными состояниями приводит к тому, что физические состояния должны описываться смесью неприводимых представлений группы  $SU(2) \otimes SU(2)$ . Подчеркнем, что этот вывод вытекает из предположения об отсутствии членов с  $I = 2$  в коммутаторе  $[\bar{Q}, \dot{\bar{Q}}]$  и не требует [273] свойства симметрии  $\dot{\bar{Q}} = 0$ .

Прежде чем перейти к примерам, полезно будет упомянуть о некоторых простых кинематических ограничениях на  $X(\lambda)$ . Прежде всего можно показать, что в силу законов сохранения четности и углового момента мы имеем

$$X_{ba}^\beta(-\lambda) = -\xi_b \xi_a (-1)^{i_b - j_a} X_{ba}^\beta(\lambda), \quad (8.294)$$

где  $\xi$  — внутренняя четность частицы.

Кроме того, рассмотрим матричный элемент оператора  $\bar{Q}_\beta$  в случае, когда массы внешних частиц одинаковы и не равны нулю. Тогда обе частицы можно перевести в состояние покоя одним и тем же преобразованием Лоренца, и соотношение (8.47) принимает вид

$$\lim_{p_3 \rightarrow \infty} \langle p, \lambda, b | A_0 | a, \lambda, p \rangle = \langle 0, \lambda, b | (A_0 + A_3) | a, \lambda, 0 \rangle. \quad (8.295)$$

Итак, в зависимости от того, будут ли четности состояний равны или противоположны, либо величина  $\langle \lambda, b | A_3 | a, \lambda \rangle$ , либо величина  $\langle \lambda, b | A_0 | a, \lambda \rangle$  будет отличной от нуля. Наконец, из закона сохранения углового момента вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \langle \lambda, b | A_0 | a, \lambda \rangle &\propto C_{\lambda 0 \lambda}^{i_a 0 i_b}, \\ \langle \lambda, b | A_3 | a, \lambda \rangle &\propto C_{\lambda 0 \lambda}^{i_a 1 i_b}, \end{aligned} \quad (8.296)$$

где  $C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j}$  — обычные коэффициенты Клебша — Гордана группы вращения.

## 2. Алгебраическая реализация симметрии $SU(2) \otimes SU(2)$

Перейдем теперь к подробному рассмотрению двух типичных примеров: барионов с нулевой странностью и  $\lambda = 1/2$  и легких мезонов. Мы сознаем, что эти примеры не приведут нас к окончательному решению проблемы. Дело в том, что возможность ограничения числа промежуточных состояний зависит от модели. Надежность модели может быть установлена, во-первых, по самосогласованности результата одновременного насыщения правил сумм и, во-вторых, по удовлетворительному согласию с экспериментальными данными. Таким образом, прежде чем выбрать схему насыщения, необходимо иметь подробную экспериментальную информацию о пионных переходах между высшими резонансами <sup>1)</sup>.

Но даже при таком упрощенном рассмотрении удается получить вполне удовлетворительные предсказания для масс и констант взаимодействия.

<sup>1)</sup> Отметим несколько интересных попыток [274, 275] найти общие решения правил сумм (8.288), которые давали бы спектр масс и ширины уровней.

Картина в целом, даже если она и не универсальна, по-видимому, подтверждает наши представления о системах из «малого числа» адронов.

Чтобы можно было прямо пользоваться правилами сумм, нужно уточнить их алгебраическую и изотопическую структуру<sup>1)</sup>. Так как физические частицы обладают изотопическими квантовыми числами, мы воспользуемся теоремой Вигнера — Эккарта и введем не зависящие от  $I_3$  приведенные матричные элементы по формуле

$$\langle b(I_b, M_b) | X^{(M)} | a(I_a, M_a) \rangle = C_{M_a M_b}^{I_a I_b} \langle b \| X \| a \rangle, \quad (8.297)$$

где  $M_b, M_a$  — значения третьих компонент  $I_b, I_a$  и]

$$X^{(\pm 1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (X_1 \pm iX_2), \quad X^0 \equiv X_3 \quad (8.298)$$

(подразумевается также наличие индекса спиральности). Кроме того, будет использовано условие эрмитовости для приведенных матричных элементов

$$\langle b \| X \| a \rangle^* = (-1)^{I_b - I_a} \left( \frac{2I_a + 1}{2I_b + 1} \right)^{1/2} \langle a \| X \| b \rangle. \quad (8.299)$$

Рассмотрим насыщение матричного элемента коммутатора

$$\langle b | [X^{(+1)}, X^{(-1)}] | a \rangle = \langle b | I_3 | a \rangle. \quad (8.300)$$

Поскольку в природе наблюдаются только системы с изотопическим спином 0 и 1 или  $1/2$  и  $3/2$ , нам, очевидно, достаточно рассмотреть переходы с  $|I_b - I_a| = 0, 1$ . Тогда, как нетрудно убедиться, существует два варианта соотношения (8.300):

1) Случай  $I_b = I_a \equiv I$

$$\sum_{c, i} \langle b(I) \| X \| c(i) \rangle \langle c(i) \| X \| a(I) \rangle \left[ -\delta_{i, I-1} \frac{1}{I} \left( \frac{2I-1}{2I+1} \right)^{1/2} + \delta_{i, I} \frac{1}{I(I+1)} + \right. \\ \left. + \delta_{i, I+1} \left( \frac{2I+3}{2I+1} \right)^{1/2} \frac{1}{I+1} \right] = \delta_{ba}. \quad (8.301)$$

2) Случай  $I_b = I_a + 1$  ( $I_a \equiv I$ )

$$\sum_{c, i} \langle b(I+1) \| X \| c(i) \rangle \langle c(i) \| X \| a(I) \rangle [\delta_{i, I} (I)^{1/2} - \delta_{i, I+1} (I+2)^{1/2}] = 0. \quad (8.302)$$

Точно так же, исходя из коммутатора

$$[X^{(+1)}, [X^{(+1)}, m^2]] = 0, \quad (8.303)$$

можно вывести «формулы масс», для которых в свою очередь имеем

1)  $I_b = I_a \equiv I$  ( $M_b = M_a + 2$ )

$$\sum_{c, i} \langle b(I) \| X \| c(i) \rangle \langle c(i) \| X \| a(I) \rangle (m_a^2 + m_b^2 - 2m_c^2) \left[ \delta_{i, I-1} \frac{I+1}{(4I^2-1)^{1/2}} + \delta_{i, I} + \right. \\ \left. + \delta_{i, I+1} \left( \frac{I^2}{(2I+1)(2I+3)} \right)^{1/2} \right] = 0. \quad (8.304)$$

2)  $I_b = I_a + 1$  ( $I_a \equiv I, M_b = M_a + 2$ )

$$\sum_{c, i} \langle b(I+1) \| X \| c(i) \rangle \langle c(i) \| X \| a(I) \rangle \times \\ \times (m_a^2 + m_b^2 - 2m_c^2) \left[ \delta_{i, I} + \delta_{i, I+1} \left( \frac{I}{I+2} \right)^{1/2} \right] = 0. \quad (8.305)$$

Нельзя не отметить замечательную простоту этих правил сумм. Например, отсутствует суммирование по спиам промежуточных состояний, которое могло бы привести к сложной зависимости коэффициентов от масс.

<sup>1)</sup> В этом разделе мы будем близко следовать статье Вейнберга [192].

а. Нестранные барионы с  $\lambda = 1/2$

В качестве первого примера рассмотрим с помощью введенного выше аппарата систему нестранных барионов с  $\lambda = 1/2$ . В тривиальном случае присутствует лишь состояние с  $I = 1/2$  (нуклон) и насыщение единственного правила сумм приводит, очевидно, к равенству  $|G_A/G_V| = 1$ .

Большой интерес представляет случай замкнутой системы, состоящей из нуклона и резонанса  $N^*$  ( $J^P = 3/2^+$ ,  $I = 3/2$ ,  $m_{N^*} = 1236$  МэВ). Однако по опыту насыщения соотношения Адлера — Вейсбергера мы знаем, что важные вклады в правило сумм дают высшие резонансы с изотопическим спином  $1/2$ , такие, как  $P_{11}$  (1400),  $S_{11}$  (1560) и т. п. Следовательно, необходимо будет ввести дополнительные промежуточные состояния. Систематически это можно сделать следующим образом. Поскольку в природе встречаются барионные состояния лишь с  $I = 1/2$  и  $I = 3/2$ , то имеет смысл ввести следующие приведенные величины:

$$\begin{aligned} A_{ba} &= \left\langle b \left( \frac{1}{2} \right) \parallel X \parallel a \left( \frac{1}{2} \right) \right\rangle, \\ B_{ba} &= \left\langle b \left( \frac{3}{2} \right) \parallel X \parallel a \left( \frac{3}{2} \right) \right\rangle, \\ C_{ba} &= \left\langle b \left( \frac{3}{2} \right) \parallel X \parallel a \left( \frac{1}{2} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Тогда в соответствии с числом физических состояний, существование которых мы готовы допустить,  $A$  (и  $B$ ,  $C$ ) будут либо числами, либо матрицами. Если единственным состоянием с изоспином  $1/2$  является нуклон, то  $A_{ba} \equiv A_{NN}$ ; если у нас два состояния  $N$  и  $N'$  имеют  $I = 1/2$ , то  $A_{ba}$  — матрица  $2 \times 2$ . В таком случае мы говорим, что состояние с  $I = 1/2$  смешанное, а именно

$$\left| I = \frac{1}{2} \right\rangle = |N\rangle \cos \theta + |N'\rangle \sin \theta. \quad (8.306)$$

С точки зрения правил сумм мы имеем три соотношения для матриц  $A$ ,  $B$  и  $C$  (объединяющих большое число соотношений для их матричных элементов) и два для матриц масс  $m_3^2$  и  $m_1^2$  состояний (математических) с  $I = 3/2$  и  $I = 1/2$ . В результате имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}A^2 - \frac{4}{3}C^\dagger C &= 1, & I_b &= I_a = \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{15}B^2 + \frac{2}{3}C^\dagger C &= 1, & I_b &= I_a = \frac{3}{2}, \\ CA - \sqrt{5}BC &= 0, & I_b &= \frac{3}{2}, I_a = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (8.307)$$

и

$$\begin{aligned} 2Bm_3^2C - m_3^2BC - BCm_1^2 &= -\sqrt{5}(2Cm_1^2A - m_3^2CA - CA m_1^2), & I_b &= I_a = \frac{3}{2}, \\ 2Bm_3^2B - m_3^2B^2 - B^2m_3^2 &= \frac{5}{4}(2Cm_1^2C^\dagger - m_3^2CC^\dagger - CC^\dagger m_1^2), & I_b &= \frac{3}{2}, I_a = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (8.308)$$

Если принять модель, в которой имеется только одно состояние с  $I = 3/2$  и два с  $I = 1/2$ , то, как нетрудно убедиться, решениями уравнения (8.307) будут <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} A_{ba} &= \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \left( \delta_{ba} + \frac{1}{2} C_{N^*b}^* C_{N^*a} \right), \\ |B| &= \sqrt{\frac{5}{12}}, \\ |C_{N^*N}|^2 + |C_{N^*N'}|^2 &= \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (8.309)$$

<sup>1)</sup> Есть также решение  $C = 0$ , при котором переходы  $N^* \rightarrow N\pi$  были бы запрещены, что, очевидно, противоречит эксперименту.

Введем угол смешивания  $N$  и  $N'$ , положив

$$|C_{N^*N}| = \sqrt{\frac{4}{3}} \cos \theta, \quad |C_{N^*N'}| = \sqrt{\frac{4}{3}} \sin \theta. \quad (8.310)$$

Тогда из уравнений для масс получаем

$$m_N^2 \cos^2 \theta + m_{N'}^2 \sin^2 \theta = m_{N^*}^2. \quad (8.311)$$

Для сравнения с экспериментом здесь удобно будет перейти к более привычным обозначениям, таким, как

$$\begin{aligned} r_A &= \langle p | (X_1 + iX_2) | n \rangle = \sqrt{\frac{4}{3}} A_{NN}, \\ C^* &= \langle N_{++}^* | (X_1 + iX_2) | p \rangle = -\sqrt{2} C_{N^*N}, \\ H^* &= \langle N_{++}^* | (X_1 + iX_2) | N_{++}^* \rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} B \end{aligned} \quad (8.312)$$

и т. п. Тогда решения уравнений (8.309) принимают вид

$$\begin{aligned} |r_A| &= 1 + \frac{2}{3} \cos^2 \theta, \quad |C^*| = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta, \\ |H^*| &= \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (8.313)$$

Если принять экспериментальное значение  $|r_A| \approx 1,25$ , то  $\cos \theta \approx \sqrt{3/8}$ ,  $\Gamma_{N^*} \approx 110$  МэВ и  $m_{N'} \approx 1,6$  ГэВ. Если под  $m_{N'}$  понимать среднюю массу нуклонных резонансов с  $I = 1/2$ , то полученное значение оказывается достаточно близким к экспериментальному, тогда как теоретическая ширина  $N^*$  хорошо согласуется с экспериментальной ( $\Gamma_{N^*})_{\text{экс}} \approx 120$  МэВ. Таким образом, главные результаты такой сверхупрощенной модели обнадёживают.

Очень полезно рассмотреть чистый случай  $\theta = 0$ , когда у нас лишь два промежуточных состояния  $N$  и  $N^*$ . Тогда из уравнений (8.313) и (8.311) следует

$$\begin{aligned} |r_A| &= \frac{5}{3}, \quad |G^*| = 2 \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad |H^*| = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ m_N &= m_{N^*}. \end{aligned} \quad (8.314)$$

Интересно, что соотношения (8.314) в точности воспроизводят результаты, полученные в предположении о симметрии  $SU(6)$  [в данном случае  $SU(4)$ ], когда  $N$  и  $N^*$  принадлежат одному и тому же неприводимому представлению<sup>1)</sup>.

Причины такого совпадения результатов станут ясны, если учесть, что (мы не будем это доказывать) самый близкий к рассматриваемому метод расчета констант взаимодействия в группе  $SU(6)$  [здесь  $SU(4)$ ] [277—279] — это насыщение состояниями  $N$  и  $N^*$  (в системе покоя) подходящих матричных элементов  $SU(6)$ -генераторов

$$\begin{aligned} Q^\alpha &= \int V_0^\alpha(\mathbf{x}) d^3x, \\ \bar{Q}_k^\alpha &= \int A_k^\alpha(\mathbf{x}) d^3x, \end{aligned} \quad (8.315)$$

в частности, когда рассматривается коммутатор

$$[\bar{Q}_k^\beta, \bar{Q}_k^\alpha] = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} Q^\gamma.$$

<sup>1)</sup> Соответствующий обзор см. в работе [276].

Понятно, что такой путь не очень надежен, поскольку нет очевидных причин пренебрегать вкладами II класса ( $Z$ -диаграммы запрещены законами сохранения четности и углового момента). Во всяком случае, это позволяет выяснить, почему тот же результат получается для киральной симметрии  $SU(2) \otimes SU(2)$  в системе бесконечно большого импульса. Ответ содержится в формуле (8.295). Для состояний с одинаковой массой и четностью имеем

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \langle \mathbf{p} | A_0 | \mathbf{p} \rangle &= \langle 0 | A_3 | 0 \rangle, \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \langle \mathbf{p} | V_0 | \mathbf{p} \rangle &= \langle 0 | V_0 | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (8.316)$$

так что коллинеарная подалгебра с образующими элементами  $Q^\alpha$  и  $\bar{Q}_3^\alpha$  в пределе при  $p = 0$  эквивалентна алгебре  $SU(2) \otimes SU(2)$  с образующими элементами  $Q^\alpha$  и  $\bar{Q}^\alpha$  в пределе при  $p \rightarrow \infty$ <sup>1)</sup>.

В заключение данного раздела скажем несколько слов о классификации барионов с  $\lambda = 1/2$  по неприводимым представлениям группы  $SU(2) \otimes SU(2)$ , которые соответствуют различным решениям задачи о насыщении. Если  $N$  и  $N^*$  ( $\lambda = 1/2$ ) принадлежат представлениям  $(1/2, 0)$  и  $(3/2, 0)$ , то переход  $3/2 \rightarrow 1/2$  запрещен и мы получаем  $|r_A| = 1$ . Это соответствует решению  $C = 0$  уравнения (8.307). Если  $N$  и  $N^*$  ( $\lambda = 1/2$ ) принадлежат одному и тому же неприводимому представлению  $(1/2, 1)$ , то смешивание отсутствует,  $\theta = 0$  и решение, описываемое формулой (8.134), совпадает с соответствующим результатом группы  $SU(6)$ . В более общем случае в качестве  $N^*$  выбирается элемент неприводимого представления  $(1/2, 1)$ , тогда как  $N$  является смесью математических состояний  $(1, 1/2)$  и  $(0, 1/2)$ .

$$|N\rangle = \left| 1, \frac{1}{2} \right\rangle \cos \theta - \left| 0, \frac{1}{2} \right\rangle \sin \theta. \quad (8.317)$$

### б. Странные частицы

Сказанное выше нетрудно обобщить на случай симметрии  $SU(3) \otimes SU(3)$  (будем, однако, помнить, что гипотеза ЧСАТ для  $K$ -мезонов значительно менее надежна). Если учесть только октет барионов и декуплет  $N^*$ , то попутно будут воспроизведены результаты симметрии  $SU(6)$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{G_A}{G_V} \right| &= \frac{5}{3}, \quad \alpha = \frac{D}{F+D} = \frac{3}{5}, \\ G^* &= 2 \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad m_8 = m_{10}, \end{aligned} \quad (8.318)$$

причем отношение  $D/F$  ( $\alpha_{\text{врср}} \approx 0,66$ ) определяется с великолепной точностью.

Во многих работах [284—288] рассматривалась возможность увеличения числа промежуточных состояний на основе схем смешивания, в частности добавлялись состояния синглета  $1/2^-$  и октетов  $3/2^-$  и  $5/2^+$ . Предлагались разные варианты отождествления физических состояний с элементами смешанных представлений. Во всяком случае, когда схема смешивания выбрана, углы смешивания определяются экспериментальными значениями ширины высших резонансов.

Недоверчивый читатель мог бы в данном случае возразить, что так мы не получим ничего, кроме новой, хотя, может быть, и самосогласованной, параметризации неизвестных величин. В действительности же такой подход оказывается плодотворным, если обратиться к электромагнитным (и слабым) переходам между барионными изобарами. В частности, он позволяет сделать простые выводы относительно аномальных магнитных моментов барионов и мультипольных переходов между высшими резонансами в виде соот-

<sup>1)</sup> Это было отмечено многими авторами [60, 280—283].



ношений для углов смешивания и универсальных констант. Например, многими авторами получены отношения  $k_n/k_p = -1$  и  $(\mu^*)_{\text{теор}}/(\mu^*)_{\text{эксп}} \approx 1,1$ , а в других случаях сравнение с экспериментом (достаточно сложное само по себе) дает менее ясные результаты<sup>1)</sup>.

### в. Система низколежащих мезонных резонансов

Идею классификации частиц по представлениям группы  $SU(2) \otimes SU(2)$  и ограничения числа промежуточных состояний в правилах сумм алгебры зарядов можно использовать для приближенного описания низколежащих адронных резонансов. Здесь мы хотим остановиться на вопросе о применении такого метода в случае мезонных резонансов. Для этого рассмотрим насыщение правил сумм с  $\lambda = 0$ . Наиболее известное состояние с  $\lambda = 0$  — это, конечно, пион, и нужно подобрать ему несколько других киральных «партнеров» с  $\lambda = 0$ . В гл. 5 мы выяснили, что интересная с точки зрения киральной симметрии модель получается при изучении взаимодействия  $\pi (I^G = 1^-, J^P = 0^-)$ ,  $\rho (I^G = 1^+, J^P = 1^-)$  с объектами противоположной четности  $\sigma (I^G = 0^+, J^P = 0^+)$ ,  $A_1 (I^G = 1^-, J^P = 1^+)$  [тогда как в схеме  $SU(4)$  такими частицами были бы  $\pi$ ,  $\rho$ ,  $\eta$  и  $\omega$ ].

Здесь, как показывает простой подсчет, имеются девять правил сумм с  $\lambda = 0$ : пять правил типа Адлера — Вейсбергера и четыре — типа формул масс. При выводе правил сумм Адлера — Вейсбергера внешними частицами служат  $(\pi, \pi)$ ,  $(\rho, \rho)$ ,  $(A_1, A_1)$ ,  $(\rho, \sigma)$ ,  $(\pi, A_1)$ , а при выводе массовых формул —  $(\pi, \pi)$ ,  $(\rho, \rho)$ ,  $(A_1, A_1)$  и  $(\pi, A_1)$ . Если ввести приведенные матричные элементы (для переходов с  $\lambda = 0$ )

$$\begin{aligned} a &= \langle \pi || X || \sigma \rangle, & b &= \langle \rho || X || \pi \rangle, \\ c &= \langle \rho || X || A_1 \rangle, & d &= \langle A_1 || X || \sigma \rangle, \end{aligned} \quad (8.319)$$

то правила сумм дают систему (нелинейных) уравнений:

$$\begin{aligned} 2a^2 + b^2 &= 2, \\ b^2 + c^2 &= 2, \\ c^2 + 2d^2 &= 2, \\ ab + cd &= 0, \\ bc + 2ad &= 0 \end{aligned} \quad (8.320)$$

$$\begin{aligned} b^2(m_\pi^2 - m_\rho^2) - 2a^2(m_\pi^2 - m_\sigma^2) &= 0, \\ c^2(m_\rho^2 - m_A^2) + b^2(m_\rho^2 - m_\pi^2) &= 0, \\ c^2(m_A^2 - m_\rho^2) - 2d^2(m_A^2 - m_\sigma^2) &= 0, \\ bc(m_A^2 + m_\pi^2 - 2m_\rho^2) - 2ad(m_A^2 + m_\pi^2 - 2m_\sigma^2) &= 0. \end{aligned} \quad (8.321)$$

Если забыть, что матричные элементы могут обратиться в нуль, то решения систем уравнений (8.320) и (8.321) записываются в виде

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{m_\rho^2 - m_\pi^2}{m_\rho^2 + m_\sigma^2 - 2m_\pi^2}, & c^2 &= 2a^2, \\ b^2 &= 2d^2, & d^2 &= \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{m_\rho^2 + m_\sigma^2 - 2m_\pi^2} \end{aligned} \quad (8.322)$$

$$m_A^2 - m_\rho^2 = m_\sigma^2 - m_\pi^2. \quad (8.323)$$

<sup>1)</sup> Здесь  $\mu^*$  — константа дипольного магнитного перехода  $N^* \rightarrow N\gamma$ , соответствующего взаимодействию  $\mathcal{L}' = \frac{\mu^*}{m_\pi} \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \psi F^{\mu\nu} + \text{э. с.}$

Мы видим, что самосогласованное решение можно получить, если в качестве исходных выбрать, например, параметры пиона и массы  $\rho$ - и  $A_1$ -мезонов <sup>1)</sup>. Подставляя экспериментальные значения масс ( $m_\rho^2 = 0,585$ ,  $m_\pi^2 = 0,019$  и  $m_{A_1}^2 = 1,14$  в единицах ГэВ<sup>2</sup>) в равенство (8.323), имеем

$$m_\sigma^2 \approx 0,574 \approx m_\rho^2, \quad (8.324)$$

и равенство (8.323) практически совпадает с соотношением Вейнберга, приведенным в гл. 6 [формула (6.37)]. Если для простоты положить  $m_\rho = m_\sigma$ , то константы взаимодействия будут полностью определены, и, пользуясь общей формулой (8.279), получаем следующие значения ширины <sup>2)</sup>:

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho \rightarrow 2\pi) &\approx 125 \text{ МэВ}, \\ \Gamma(\sigma \rightarrow 2\pi) &\approx 600 \text{ МэВ}, \\ \Gamma(A_1 \rightarrow \sigma\pi) &\approx 5 \text{ МэВ}, \\ \Gamma^{(0)}(A_1 \rightarrow \rho\pi) &\approx 100 \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (8.325)$$

В том единственном случае, в котором имеется экспериментальное значение ( $\rho$ -мезон), согласие с экспериментом превосходное, хотя большая ширина, полученная для  $\sigma$ -мезона, заставляет усомниться в надежности модели узких резонансов. Может быть, здесь полезно напомнить, что, определяя связь между величинами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  и более привычными константами взаимодействия, входящими в лагранжиан взаимодействия, мы должны использовать явный вид волновой функции с  $\lambda = 0$  в пределе при  $p \rightarrow \infty$ . Так, например,

$$g_{\rho\pi\pi}^2 = \frac{m_\rho^2}{f_\pi^2} b^2 \approx \frac{m_\rho^2}{f_\pi^2} \quad (8.326)$$

есть не что иное, как соотношение КСФР, полученное в гл. 3, § 4.

Аналогичную схему можно построить для случая  $\lambda = 1$ . Кроме частиц  $\rho$ ,  $A_1$  и  $\omega$ , должен быть введен изоскалярный партнер частицы  $A_1$  (или киральный партнер  $\omega$ ), роль которого может сыграть « $D$ »-мезон ( $I^G = 0^+$ ,  $J^P = 1^+$ ). Шесть добавочных правил сумм с  $\lambda = 1$  содержат новые параметры — величины  $m_\omega$ ,  $m_D$ ,  $\langle \rho || X(1) || A_1 \rangle$ ,  $\langle \rho || X(1) || \omega \rangle$ ,  $\langle D || X(1) || A_1 \rangle$  и имеют следующие решения:

$$\begin{aligned} m_A &= m_D, \quad m_\omega = m_\rho, \\ \langle \rho || X(1) || A_1 \rangle &= 0, \\ |\langle \rho || X(1) || \omega \rangle| &= |\langle D || X(1) || A_1 \rangle| = 1, \end{aligned}$$

что соответствует

$$|g_{\rho\omega\pi}| = \frac{2}{f_\pi} |\langle \rho || X(1) || \omega \rangle| = \frac{2}{f_\pi} \approx 21 \text{ ГэВ}^{-1}, \quad (8.327)$$

откуда на основе модели Гелл-Манна — Шарпа — Вагнера [34] получаем  $\Gamma(\omega \rightarrow \pi\gamma) \approx 1,4 \text{ МэВ}$ , тогда как  $\Gamma_{\text{экс}} \approx 1,15 \text{ МэВ}$ .

Заметим, наконец, что, ограничиваясь набором частиц  $\omega$ ,  $\rho$ ,  $\pi$ ,  $\phi$ , мы получаем результаты того же типа, что и в случае  $SU(6)$ -симметрии:

$$\begin{aligned} m_\omega &= m_\rho = m_\pi, \quad g_{\rho\phi\pi} \approx 0 \\ g_{\rho\omega\pi}^2 &= \frac{4g_{\rho\pi\pi}^2}{m_\rho^2} = \frac{4}{f_\pi^2}. \end{aligned} \quad (8.328)$$

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 287. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Здесь  $\Gamma^{(0)}$  — ширина распада в  $s$ -волне; чтобы оценить полную ширину распада  $A_1 \rightarrow \rho\pi$ , нужно, очевидно, знать матричные элементы переходов не только с  $\lambda = 0$ , но и с  $\lambda = \pm 1$ . В формулах для времени жизни, оперируя кинематическими величинами (такими, как импульс в системе центра масс), мы использовали физические пионы и полагали  $q^2 = 0$  только в константах взаимодействия.

Причина, безусловно, та же, что и в случае барионов: классификация по представлениям группы  $SU(6)$  при  $p = 0$  совпадает с классификацией по представлениям группы  $SU(3) \otimes SU(3)$  при  $p \rightarrow \infty$ .

### 3. Дополнительные правила сумм

По сути дела, мы показали, особенно в последнем примере, что можно построить достаточно простую модель низколежащих резонансов, удовлетворительно согласующуюся с экспериментом и с нашими представлениями о роли симметрии в классификации элементарных частиц. При введении дополнительных состояний должны, очевидно, меняться и конкретные выводы: одновременно с введением новых параметров налагаются новые связи и, как легко догадаться, одной из главных трудностей в проблеме насыщения будет необходимость решать все увеличивающееся число уравнений с участием все большего числа состояний.

Кроме того, при увеличении спина внешних частиц наряду с уравнениями алгебры токов необходимо учитывать также соотношения типа сверхсходимости и очень важно знать, имеют ли они все еще внутреннюю алгебраическую структуру. Поясним это на примере. Формулы масс, вывод, которых базировался на свойствах выражения  $i[\bar{Q}, \dot{Q}] = [\bar{Q}, [\bar{Q}, H]]$ , получаются из рассмотрения коммутаторов зарядов со *всеми* генераторами группы Пуанкаре. Если взглянуть на полный набор таких коммутационных соотношений

$$[\bar{Q}_\alpha, P] = 0, \quad [\bar{Q}_\alpha, H] = i \int \bar{D}_\alpha d^3x, \quad (8.329)$$

$$[\bar{Q}_\alpha, J] = 0, \quad [\bar{Q}^\alpha, K] = -i \int x \bar{D}_\alpha d^3x, \quad (8.330)$$

то мы заметим интересную аналогию между двумя группами уравнений: здесь из-за несохранения токов появляются матричные элементы между состояниями с разными энергией и спинами, равные нулю в пределе точной симметрии.

Следовательно, тот же путь рассуждений, который позволил из уравнения (8.329) вывести формулу масс, даст, вероятно, возможность, исходя из уравнения (8.330), прийти к формуле спинов. Чтобы выяснить, как это происходит, удобно ввести релятивистский «оператор спина»

$$W = HJ + K \times P. \quad (8.331)$$

(Напомним, что оператор  $W$  не принадлежит к генераторам группы Лоренца, он действует только в пространстве спиральности; см. гл. 6, приложение I.)

Коммутатор обеих частей равенства  $[\bar{Q}_\beta, \dot{Q}_\alpha] = i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} Q_\gamma$  с оператором  $W$  дает (с учетом тождества Якоби и закона сохранения заряда  $Q^\nu$ )

$$[\bar{Q}_\beta, [\bar{Q}_\alpha, W]] = [\bar{Q}_\alpha, [\bar{Q}_\beta, W]] \equiv S_{\beta\alpha}, \quad (8.332)$$

где  $S_{\beta\alpha}$  — оператор, симметричный по индексам  $\alpha$  и  $\beta$ .

Кроме того, можно утверждать, что введенное выше предположение

$$[\bar{Q}_\beta, \bar{D}_\alpha]_{I=2} = 0 \quad (8.333)$$

приводит к соотношению

$$[\bar{Q}_\beta, [\bar{Q}_\alpha, W]]_{I=2} = 0. \quad (8.334)$$

Действительно, достаточно воспользоваться явным выражением для  $W$  и основными коммутационными соотношениями (8.329) и (8.330), чтобы получить уравнение

$$[\bar{Q}_\alpha, W] = i \int \bar{D}_\alpha (J - x \times P) d^3x, \quad (8.335)$$

откуда, принимая во внимание равенство (8.333), окончательно получаем

$$[\bar{Q}_\beta, [\bar{Q}_\alpha, W]]_{I=2} = i \int [\bar{Q}_\beta, \bar{D}_\alpha]_{I=2} (\mathbf{J} - \mathbf{x} \times \mathbf{P}) d^3x = 0. \quad (8.336)$$

Нам осталось представить содержащуюся в этом коммутаторе информацию в виде алгебраического соотношения для матриц  $X^\alpha$ . Это достигается насыщением соотношения (8.334) в обкладках из состояний с разной спиральностью<sup>1)</sup> и переходом к системе  $p \rightarrow \infty$ .

Заметим, что компоненты оператора  $W^\pm$  инвариантны относительно чисто лоренцева преобразования вдоль третьей оси; кроме того, оператор  $W^\pm$  связывает лишь состояния с одинаковыми 4-импульсами ( $[P_\mu, W] = 0$ ). Таким образом, внешние частицы можно перевести в состояние покоя одним и тем же преобразованием Лоренца и вычисление матричных элементов  $W^\pm$  сводится к применению хорошо известных правил подсчета угловых моментов

$$\begin{aligned} & \langle p_c, \lambda_c, c | W^\pm | a, \lambda_a, p_a \rangle = \\ & = 2E_a (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_a) \delta_{\lambda_c, \lambda_a \pm 1} \langle j, \lambda_c | J^\pm | \lambda_a, j \rangle m_a, \\ & \langle j, \lambda_a \pm 1 | J^\pm | \lambda_a, j \rangle = [j(j+1) - \lambda_a(\lambda_a \pm 1)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (8.337)$$

Тогда правило сумм, полученное из соотношения (8.334), принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \langle j, \lambda_b | J^\pm | \lambda_a, j \rangle \sum_c \{ X_{bc}^\beta(\lambda_b) [m_a X_{ca}^\alpha(\lambda_a \pm 1) - \\ & - m_c X_{ca}^\alpha(\lambda_a)] - (\beta \leftrightarrow \alpha) \}_{I=2} = 0. \end{aligned} \quad (8.338)$$

Перепишем это выражение в более компактной форме

$$[X^\beta, [X^\alpha, mJ^\pm]]_{I=2} = 0. \quad (8.339)$$

Равенство (8.339) — это алгебраическая форма связи между представлениями группы  $SU(2) \otimes SU(2)$  с разными спиральностями; действительно, правило сумм нетривиально только тогда, когда спиральности внешних состояний различаются на единицу [289—292].

Информация, которую можно извлечь из правила сумм (8.339), по-видимому, свидетельствует в пользу более сложных вариантов насыщения, чем те, что использовались в предыдущих разделах. В частности, нас не может больше удовлетворить простая классификация частиц по представлениям группы  $SU(2) \otimes SU(2)$ . Во всех правилах сумм для насыщения требуются добавочные состояния.

Независимо от этого практического замечания напомним, что соотношение (8.339) в пределе при  $p \rightarrow \infty$  выводится в предположении о подавленности траектории с  $I = 2$  в  $t$ -канале,  $\alpha_2(0) < 0$ . Чрезвычайно интересно, что тот же результат (8.339) вместе с формулами (8.281) и (8.288) был получен Вейнбергом [289] из требования сверхсходимости для некоторых пионных амплитуд. При нашем подходе эта динамическая характеристика проявляется в пренебрежении несвязными диаграммами (что эквивалентно требованию Вейнберга). То обстоятельство, что некоторые конкретные сверхсходящиеся правила сумм имеют простую алгебраическую структуру, может быть, говорит о том, что это свойственно и более широкому классу подобных соотношений. Исследование данного вопроса явилось бы важным шагом на пути к решению проблемы.

<sup>1)</sup> Нетрудно убедиться, что интересная ситуация возникает только тогда, когда в уравнении (8.334) участвуют компоненты  $W^\pm$ , поскольку практически  $W_3$  приводит вновь к формуле масс (8.288).

## § 8. Заключительные замечания об алгебре плотностей

### 1. Программа Дашена — Гелл-Манна [47, 48, 248, 272]

В предыдущих разделах для самосогласованного определения адронных констант связи и масс мы использовали приближение неполного насыщения матричных элементов алгебры зарядов. Воодушевляющий успех такого метода побуждает нас обратить пристальное внимание на общую программу насыщения одночастичными состояниями, уже упоминавшуюся в § 7.

Напомним ее важнейшие пункты. Исходными служат матричные элементы коммутаторов плотностей токов  $[j_0, j_0] \rightarrow j_0$  в группе  $SU(3) \otimes SU(3)$ . В пределе бесконечно большого импульса мы получаем правила сумм чисто алгебраической структуры, обобщенно записываемые в виде системы коммутационных соотношений

$$[F^\beta(q_2), F^\alpha(q_1)] = if_{\beta\alpha\gamma} F^\gamma(q_1 + q_2) \quad (8.340)$$

для матриц-формфакторов  $F^\alpha(q)$  [определенных соотношением (8.273)].

Дашен и Гелл-Манн называют это алгеброй формфакторов. Предложенная ими программа предусматривает построение такого представления матричных элементов  $F_{bc}^\alpha(q)$ , при котором насыщение обеспечивается одночастичными адронными состояниями (в пренебрежении вкладом непрерывного спектра). Кроме того, для формфакторов существует кинематическое ограничение, являющееся следствием лоренцевой ковариантности, — это так называемое условие углов, о котором мы подробнее скажем ниже.

Чтобы выяснить суть общей проблемы, мы прежде всего рассмотрим небольшие отклонения от «зарядовой» кинематической ситуации  $q = 0$  и получим соотношения для первых производных от формфакторов в точке  $q = 0$ . Для этого запишем в координатном пространстве коммутатор дипольных моментов

$$D_k^\alpha = \int x_k j_0^\alpha(x) d^3x = i \left[ \frac{\partial}{\partial q_k} \int \exp(-iqx) j_0^\alpha(x) d^3x \right]_{q=0}, \quad (8.341)$$

а именно:

$$[D_i^\beta, D_j^\alpha] = if_{\beta\alpha\gamma} \int x_i x_j j_0^\gamma(x) d^3x. \quad (8.342)$$

Может возникнуть вопрос, приведет ли в этом случае, как и в случае зарядов, неполное насыщение матричных элементов уравнения (8.342) конечным набором состояний к простым соотношениям между слабыми и электромагнитными параметрами адронов (радиусами и высшими моментами). Ответ, к сожалению, отрицательный. Простые рассуждения [293] приводят к выводу, что насыщение конечным числом состояний не дает нетривиальных решений. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим простой пример векторных диполей в группе  $SU(2)$ . Пусть в формуле (8.342)  $\alpha = \beta$ ,  $i = 1 + i2 \equiv (+)$ ,  $j = 1 - i2 \equiv (-)$ , т. е. мы имеем коммутатор

$$\left[ \int x_+ j_0^\alpha(x) d^3x, \int x_- j_0^\alpha(x') d^3x' \right] = 0 \quad (8.343)$$

Произведем насыщение его среднего значения в состоянии  $|a, p, \lambda\rangle$ , где  $p$  — импульс, направленный по оси  $z$ ,  $\lambda$  — спиральность, а  $a$  — все остальные квантовые числа. Кроме того, вначале будем считать, что  $\lambda$  — максимальное значение спиральности в рассматриваемом наборе состояний.

Что же касается промежуточных состояний, то, как нетрудно убедиться, их трехмерные импульсы те же, что и у внешних состояний. Операторы

$D_{\pm}^{\alpha}$  осуществляют связь между теми состояниями, для которых  $\Delta\lambda = \pm 1$ <sup>1)</sup>:

$$\langle \lambda | D_{\pm} | \lambda' \rangle \propto \delta_{\lambda', \lambda \pm 1}.$$

Тогда из равенства (8.343) получим

$$\begin{aligned} \sum_c \langle a, p, \lambda | D_+^{\alpha} | \lambda - 1, p, c \rangle \langle c, p, \lambda - 1 | D_-^{\alpha} | \lambda, p, a \rangle &= \\ &= \sum_c |\langle a, p, \lambda | D_+^{\alpha} | \lambda - 1, p, c \rangle|^2 = 0, \end{aligned} \quad (8.344)$$

где вторая часть коммутатора не дает вклада, так как мы считаем  $\lambda$  максимальным значением спиральности. Из соотношения (8.344) следует, что при любых  $a$  и  $c$

$$\langle a, \lambda | D_+^{\alpha} | \lambda - 1, c \rangle = 0. \quad (8.345)$$

Если теперь рассмотреть среднее значение коммутатора (8.343) в состоянии со спиральностью  $\lambda - 1$ , то результат будет таким:

$$\sum_c |\langle a, p, \lambda - 1 | D_+^{\alpha} | \lambda - 2, p, c \rangle|^2 - \sum_c |\langle c, p, \lambda | D_+^{\alpha} | \lambda - 1, p, a \rangle|^2 = 0, \quad (8.346)$$

откуда, принимая во внимание равенство (8.345), вновь получаем

$$\langle a, \lambda - 1 | D_+^{\alpha} | \lambda - 2, c \rangle = 0. \quad (8.347)$$

Таким образом, методом математической индукции можно показать, что все допустимые матричные элементы обращаются в нуль. Очевидно, что это доказательство можно обобщить на высшие векторные и аксиально-векторные мультиполи.

Из приведенных нами простых рассуждений видно, что в общей проблеме самосогласованного насыщения правил сумм для плотностей токов мы сталкиваемся с совершенно новыми условиями, такими, как необходимость введения бесконечного числа состояний. То, что условие положительности не позволяет провести насыщение конечным набором состояний, имеет прямое отношение к релятивистской структуре задачи и может быть, в частности, связано с хорошо известными свойствами группы Лоренца — бесконечной размерностью ее унитарных представлений. В подтверждение такой связи можно привести много других, более общих соображений, но мы не будем здесь на этом останавливаться.

Отметим существенное различие между общей проблемой и рассмотренным ранее упрощенным случаем коммутаторов зарядов. В случае зарядов мы имеем очевидное ограничение: допустимы только переходы с сохранением спиральности

$$\langle \lambda_b, b | F^B(0) | a, \lambda_a \rangle \propto \delta_{\lambda_b \lambda_a}. \quad (8.348)$$

В случае же плотностей это условие ослабляется, но все же какая-то форма ограничения должна существовать. Это очевидно, поскольку в противном случае выражение  $\langle \lambda_b, b | F^B(q) | a, \lambda_a \rangle$  состояло бы из  $(2S_b + 1)(2S_a + 1)$  независимых матричных элементов, а нам известно, что число независимых формфакторов меньше. Обычный метод подсчета числа независимых формфакторов подразумевает переход в брейтовскую систему координат  $p_b + p_a =$

<sup>1)</sup> Действительно, поскольку собственные значения импульсов содержат только  $z$ -компоненту, справедливо следующее соотношение:

$$[W_0, D_{\pm}] = [P_J, D_{\pm}] = P_3 [J_3, D_{\pm}] + [P_3, D_{\pm}] J_3 = \pm P_3 D_{\pm}.$$

Таким образом,

$$\langle p, \lambda | [W_0, D_{\pm}] | p, \lambda' \rangle = \langle p, \lambda | D_{\pm} | p, \lambda' \rangle p(\lambda - \lambda') = \pm p \langle p, \lambda | D_{\pm} | p, \lambda' \rangle,$$

т. е.

$$\lambda - \lambda' = \pm 1.$$

$= 0$ , где спиральность сохраняется и  $\Delta\lambda$  в переходах  $\langle p, \lambda_b | (j_0, j) | \lambda_a, -p \rangle$  имеет значение  $\Delta\lambda = \lambda_b - \lambda_a = 0, \pm 1$ . Следовательно, мы должны «возвратить» матричный элемент из системы бесконечно большого импульса в брейтовскую систему координат, где можно потребовать

$$\Delta\lambda = 0, \pm 1 \quad [\text{т. е. } (\Delta\lambda)^3 = \Delta\lambda].$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \langle \lambda_b, b | F(\mathbf{q}) | a, \lambda_a \rangle &= \lim_{p \rightarrow \infty} \langle p + \mathbf{q}, \lambda_b, b | j_0 | a, \lambda_a, p \rangle = \\ &= \langle \mathbf{k}, \lambda_b, b | \mathcal{Y} | a, \lambda_a, -\mathbf{k} \rangle, \end{aligned} \quad (8.349)$$

где  $\mathcal{Y}$  — комбинация компонент тока  $j_0, j_k$  и операторов лоренцева и трехмерного вращений. Поскольку допустимые переходы должны удовлетворять условию  $(\Delta\lambda)^3 = \Delta\lambda$ , мы имеем

$$[W_0, [W_0, [W_0, \mathcal{Y}]]] = [W_0, \mathcal{Y}]. \quad (8.350)$$

После довольно громоздких выкладок, которые мы здесь не будем воспроизводить, соотношение (8.350) можно переписать в виде условия для  $F(\mathbf{q})$ , в которое входят кратные коммутаторы с  $W_0$  и оператор массы<sup>1)</sup>  $m^2$ . Это так называемое условие углов<sup>2)</sup> и коммутаторы матриц (8.340) являются основными уравнениями алгебры токов в системе бесконечно большого импульса [47, 48, 248, 272].

Что же касается общей программы насыщения, то мы до сих пор не пришли еще к какому-либо определенному выводу. Весьма возможно, что решение этой проблемы потребует существенного прогресса наших знаний. Поэтому в данном разделе мы ограничимся тем, что кратко изложим одну особенно простую модель насыщения и укажем свойства решений. Выяснится, что эти решения неприемлемы, поскольку они приводят к нефизическому спектру масс (существование пространственно-подобных состояний...). Однако трудно сказать, является ли это дефектом модели или общим свойством полного решения.

В этой модели рассматривается алгебра токов  $SU(2) \otimes SU(2)$  и предполагается, что для насыщения достаточно только состояний с  $I = 1/2$  [294, 295]. Тогда можно показать, что общий формфактор будет иметь вид

$$F^\alpha(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \tau^\alpha F(\mathbf{q}) \quad (8.351)$$

и система алгебраических ограничений (8.340) перейдет в систему уравнений

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}_2) F(\mathbf{q}_1) &= F(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1), \\ F(\mathbf{q}_2) F_5(\mathbf{q}_1) &= F_5(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1), \\ F_5(\mathbf{q}_2) F_5(\mathbf{q}_1) &= F(\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1). \end{aligned} \quad (8.352)$$

Уравнения (8.352) имеют следующее общее решение:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}) &= \exp(i\mathbf{q}\mathbf{X}), \quad F_5(\mathbf{q}) = \Sigma \exp(i\mathbf{q}\mathbf{X}), \\ \Sigma^2 &= 1, \quad [\Sigma, \mathbf{X}] = 0, \end{aligned} \quad (8.353)$$

где  $\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2)$  — набор коммутирующих эрмитовых операторов, а  $\Sigma$  — очевидно, псевдоскаляр. Из условия для углов, наложенного на  $F(\mathbf{q})$ , следуют дальнейшие ограничения на  $\mathbf{X}$ .

Окончательно выясняется, что для существования нетривиальных решений ( $\mathbf{X} \neq 0$ ) необходимо, чтобы спектр масс имел хотя бы одно из следу-

<sup>1)</sup> Зависимость от масс появится, если написать явное выражение для углов лоренцева вращений.

<sup>2)</sup> В пределе при  $\mathbf{q} = 0$ , т. е. в алгебре зарядов, условие углов сводится лишь к требованию сохранения спиральности при переходах, осуществляемых оператором заряда.

ющих свойств: 1) все состояния имеют одну и ту же массу; 2) спектр масс непрерывный и бесконечно вырожденный; 3) существуют пространственно-подобные решения, а именно имеются части спектра с  $m^2 < 0$ . Остановимся на последнем случае, где можно представить себе следующий выход из положения. Пусть, несмотря на существование пространственно-подобных решений, их связь с времениподобной частью спектра не может быть осуществлена с помощью операторов тока, так что для насыщения алгебры токов было бы достаточно состояний с  $m^2 > 0$ . Имеются простые модели с такими свойствами, но в них появляются иные трудности.

В физически неинтересном, но любопытном с математической точки зрения случае 1 мы имеем супермультиплет с бесконечным числом частиц равной массы; их можно классифицировать по унитарным бесконечномерным представлениям группы Лоренца. Такая прямая связь между алгеброй токов и группой Лоренца может привести в будущем к плодотворным результатам<sup>1)</sup>. В то же время создается впечатление, что программа насыщения унаследовала не только положительные, но и отрицательные черты бесконечномерных теорий. Действительно, специалистам хорошо известно, что при всякой попытке нарушить нефизическую симметрию, приводящую к вырождению по массе, в уравнениях поля неизбежно появляются пространственно-подобные решения, соответствующие случаю 3.

Как мы уже говорили, вполне может оказаться, что насыщение только состояниями с  $I = 1/2$  — слишком жесткое ограничение. Но все известные барионы с гиперзарядом  $Y = -1$  являются изодублетами и в классификации по  $SU(3)$  принадлежат представлениям 8 или 10. Таким образом, указанные выше неудачи программы насыщения состояниями с  $I = 1/2$  в симметрии  $SU(2) \otimes SU(2)$  свидетельствуют о том, что в случае барионов не удается найти простое решение общей проблемы, которое согласовалось бы с тем, что нам теперь известно о природе. Это, по-видимому, означает, что для выполнения программы, намеченной Дашеном и Гелл-Манном, нужны структуры, более сложные (возможно, включающие непрерывный спектр), нежели те, что рассматривались до сих пор.

## § 9. Система бесконечно большого импульса, дисперсионные соотношения и теория возмущений

### 1. От представлений Лоу к дисперсионным соотношениям с фиксированной массой

Мы показали, что система бесконечно большого импульса очень удобна для вывода особенно простых и удобных форм правил сумм алгебры токов, поскольку в ней исчезают многие из вкладов, доставляющих обычно большие неприятности. Таким образом, выбор системы отсчета может оказаться полезным приемом при решении других, не имеющих явной ковариантности задач, таких, как представление Лоу для хронологических произведений или традиционная теория возмущений. Заманчиво и естественно попытаться использовать опыт, накопленный при изучении алгебры токов, и применить процедуру  $P \rightarrow \infty$  в аналогичных проблемах.

Мы начнем с хронологических произведений. Прежде всего напомним выражение для амплитуды рассеяния, которое в теории поля получается с помощью стандартной редукционной формулы. Для реакции с участием бесспиновых частиц

$$\alpha(q_1) + p_1 \rightarrow \beta(q_2) + p_2 \quad (8.354)$$

<sup>1)</sup> Кроме работ [47, 48, 248, 272, 294, 295], можно указать, например, работы [296—302].



амплитуда рассеяния имеет вид

$$T^{\beta\alpha} = i \int \exp(iq_2 x) d^4 x K_x \langle p_2 | \theta(x_0) [\varphi^\beta(x), \chi^\alpha(0)] | p_1 \rangle, \quad (8.355)$$

где  $\chi^\alpha(x)$  — оператор источника для частиц  $\alpha$  (будем называть их пионами),

$$\chi^\alpha(x) = K_x \varphi^\alpha(x) \equiv (\square_x + m^2) \varphi^\alpha(x), \quad (8.356)$$

Кроме того, мы имеем обычные кинематические соотношения

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2, \quad (8.357)$$

$$p_i^2 = M^2, \quad q_i^2 = m^2. \quad (8.358)$$

Отметим, что, хотя представленное выше выражение для амплитуды содержит запаздывающее произведение, величина  $T^{\beta\alpha}$ , безусловно, является инвариантной благодаря присутствию оператора Клейна — Гордона  $K_x$ . Действительно, как было выяснено в гл. 7, отсутствие релятивистской инвариантности запаздывающего (или хронологического) произведения связано с тем, что члены типа  $x [\varphi(x), \chi(0)] \delta(x_0)$  отличны от нуля. В полном же выражении

$$\int \exp(iq_2 x) d^4 x K_x \langle p_2 | \theta(x_0) [\varphi(x), \chi(0)] | p_1 \rangle$$

добавочный одновременный коммутатор  $x [\varphi(x), \chi(0)] \delta(x_0)$ , появляющийся при лоренцевом преобразовании, исчезает, так как два интегрирования по частям дают множитель  $m^2 - q_2^2$ , а одновременный член не имеет полюса в этой точке [при условии его локальности, т. е. когда число градиентов от  $\delta^3(x)$  в нем конечно].

Хотя полное выражение для  $T^{\beta\alpha}$  не зависит от системы координат, мы уже знаем, что в разных системах представления могут быть разными в зависимости от того, какое значение мы придаем тем или иным членам кластерного разложения. После явного применения оператора Клейна — Гордона в формуле (8.355) получим

$$T^{\beta\alpha} = i \int \exp(iq_2 x) \langle p_2 | \{ \theta(x_0) [\chi^\beta(x), \chi^\alpha(0)] + \delta(x_0) [\dot{\varphi}^\beta(x), \chi^\alpha(0)] - i\omega_2 \delta(x_0) [\varphi^\beta(x), \chi^\alpha(0)] \} | p_1 \rangle d^4 x. \quad (8.359)$$

Вид формулы (8.359) подсказывает нам другой, эквивалентный путь получения того же результата <sup>1)</sup>. Действительно, оператор  $\varphi_L^\alpha = \dot{\varphi}^\alpha - i\omega\varphi^\alpha$  удовлетворяет условию  $\langle \pi | \varphi_L | 0 \rangle = 0$  и, следовательно, для пиона в системе покоя аналогичен «левому» заряду  $\bar{Q}_L^\alpha = \bar{Q}^\alpha + im_\pi^{-1} \dot{Q}^\alpha$ , введенному в гл. 6, § 4, п. 3. Тогда выражение (8.359) нетрудно получить, если вставить полную систему промежуточных состояний в левую часть соотношения

$$\int \langle p_2 | [\varphi_L^\beta(x, 0), \chi^\alpha(0)] | p_1 \rangle \exp(-iq_2 x) d^3 x = C^{\beta\alpha},$$

считая, что правая часть нам известна. После отбора полунесвязных диаграмм мы получим физическую пионную амплитуду.

Одновременные коммутаторы мы должны считать известными, но запаздывающее произведение токов можно исследовать, воспользовавшись полной системы промежуточных состояний. Так мы приходим к представлению Лоу

$$T^{\beta\alpha}(Q, P, \Delta) = (\text{одновр. комм.}) + \int \frac{i^{\beta\alpha}(Q', P, \Delta) dQ'_0}{Q'_0 - Q_0 - i\varepsilon}, \quad (8.360)$$

<sup>1)</sup> См. аналогичный анализ пион-нуклонного рассеяния, проводимый методом алгебры токов, в гл. 6, § 5.

где

$$t^{\beta\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int d^4x \exp(iQx) \langle p_2 | \left[ \chi^\beta \left( \frac{1}{2} x \right), \chi^\alpha \left( -\frac{1}{2} x \right) \right] | p_1 \rangle \quad (8.364)$$

и все кинематические величины имеют те же значения, что и в гл. 7.

Интеграл в выражении (8.360) берется при фиксированном  $Q$  [ $Q' \equiv \equiv (Q_0, Q)$ ], и после перехода к скалярным переменным  $v', u'$  и  $w'$  путь интегрирования становится параболическим:

$$\begin{aligned} u' &= av'^2 + bv' + c, \\ w' &= hv' + k, \end{aligned} \quad (8.362)$$

где  $a, b, c, h, k$  — параметры (зависящие от системы координат), определенные равенствами (7.33). На данном этапе переменные, соответствующие массам внешних частиц, имеют фиксированные значения на массовой оболочке  $w = 0, u = m^2 - \frac{1}{4} t$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} T^{\beta\alpha}(v, t, w=0, u = m^2 - \frac{1}{4} t) &= (\text{одновр. комм.}) + \\ &+ \int \frac{dv'}{v' - v} t^{\beta\alpha}[v', u(v'), w(v'), t]. \end{aligned} \quad (8.363)$$

Чтобы получить полное описание  $t^{\beta\alpha}$ , обратимся к кластерному разложению, включающему прямые и  $Z$ -сингулярности I класса и сингулярности по массе II класса. Мы увидим, что благодаря равенству нулю  $\langle 0 | \chi | \pi \rangle$  пионные полюсы в «каналах»  $u_1$  и  $u_2$  отсутствуют. В общем случае эти вклады имеют достаточно сложную структуру. Например, весьма неприятно появление матричных элементов  $\langle p | \chi | n \rangle$ , взятых вне массовой оболочки. Действительно, переданный импульс в каждой вершине меняется с изменением  $v$  вдоль параболы, т. е. принимает времениподобные значения.

Таким образом, общее представление (8.363) не принесет большой пользы, если только не удастся получить определенных сведений о структуре коммутаторов и подавить вклад непрерывного спектра состояний, который иначе трудно будет оценить. Это оказалось возможным для низкоэнергетических пионных процессов (гл. 6, § 7), где алгебра токов дает необходимую информацию о коммутаторах, а в дисперсионном интеграле имеются подавляющие множители, пропорциональные  $m_\pi^2$  или  $q^2$ .

Существует, однако, простой метод, с помощью которого можно частично преодолеть указанные трудности. В системе бесконечно большого импульса появляется возможность пренебречь как зависимостью вершин  $\langle p | \chi | n \rangle$  от импульса, так и всеми вкладками  $Z$ -диаграмм и диаграмм класса II. Таким образом, при  $P \rightarrow \infty$  и фиксированном  $\Delta$  в том случае, когда  $P\Delta = PQ = 0$ , путь интегрирования преобразуется в прямые линии

$$u' = -Q^2, \quad w' = -\Delta Q. \quad (8.364)$$

Напомним, что при этом внешние переменные подчиняются соотношениям

$$\begin{aligned} v &= P_0 Q_0 - PQ \xrightarrow{P \rightarrow \infty} P_0 (u + Q^2)^{1/2}, \\ w &= \Delta_0 Q_0 - \Delta Q. \end{aligned} \quad (8.365)$$

Если, переходя к пределу при  $P \rightarrow \infty$ , фиксировать переменную  $v$ , то мы не сможем более удерживать внешние пионы на массовой оболочке, так как

$$Q_0 = (u + Q^2)^{1/2} = \frac{v}{P_0} \rightarrow 0,$$

т. е.

$$u \rightarrow -Q^2, \quad w = -\Delta Q. \quad (8.366)$$

Тогда, если можно поменять местами операции интегрирования и предельного перехода, а также пренебречь вкладом  $Z$ -диаграмм и диаграмм класса  $II$ , то представление Лоу преобразуется в дисперсионное соотношение с фиксированными «массами» при пространственно-подобных значениях  $u_{1,2} = -q_{1,2}^2$ . Это обычно выражают следующим образом: «для наблюдателя, движущегося со скоростью, близкой к скорости света, Лоу становится Голдбергером [303]». Заметим, что массы, приписываемые линиям  $\varphi^\beta$  и  $\varphi^\alpha$ , имеют фиксированные пространственно-подобные значения. Следовательно, необходимо продолжение по массе, чтобы дисперсионные соотношения годились для физических процессов. Эта хорошо известная трудность встречается в любом элементарном «доказательстве» дисперсионных соотношений <sup>1)</sup>.

Имея в виду указанные ограничения, выпишем окончательное выражение для  $T^{\beta\alpha}$  в пределе при  $P \rightarrow \infty$ :

$$T^{\beta\alpha}(v, t, u_{1,2} = -q_{1,2}^2) \doteq \int \frac{t^{\beta\alpha}[v', t, u_{1,2} = -q_{1,2}^2]}{v' - v} dv', \quad (8.367)$$

где точка над знаком равенства означает, что могут потребоваться вычитания. Наличие же вычитаний может означать, что процедуру предельного перехода  $P \rightarrow \infty$  следует применять не к  $T(v)$ , а к  $T(v) - T(v_0)$ , или что имеется вклад одновременного коммутатора. В настоящее время для выяснения всех этих вопросов, в том числе и возможности менять порядок интегрирования и предельного перехода, необходима добавочная информация в виде предположения об асимптотическом поведении полной амплитуды (а также о связанных с этим вопросах вычитаний, соответствия полюсов Редже элементарным частицам и других, затронутых в гл. 1).

## 2. Теория возмущений при бесконечной энергии

В данном разделе мы рассмотрим применение метода  $P \rightarrow \infty$  к диаграммам теории возмущений. В частности, мы собираемся остановиться на вопросе о связи между старой теорией возмущений и ковариантной теорией возмущений.

Преимущество современной теории возмущений, основанной на правилах Фейнмана, состоит в явной релятивистской инвариантности  $S$ -матрицы в каждом порядке по параметру разложения. Старая теория возмущений существенно опирается на исследование полноты матричных элементов оператора

$$S = T \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{+\infty} H_I(t') dt' \right] \quad (8.368)$$

(оператор  $H_I$  берется в представлении взаимодействия). Здесь используется понятие физических промежуточных состояний, энергетические множители в знаменателе заменяют функции распространения и т. п. В то же время, хотя сумма по полной системе промежуточных состояний релятивистски инвариантна, обрезание суммы, т. е. выделение различных вкладов, зависит от системы отсчета. Поскольку мы имеем здесь очевидную аналогию с проблемами правил сумм, интересно будет изучить поведение нековариантных диаграмм при  $P \rightarrow \infty$  [305].

Предварительно рассмотрим в низшем порядке амплитуду рассеяния бесспиновых частиц в теории с гамильтонианом взаимодействия

$$H_I(t) = \int d^3x \mathcal{H}_I(x) = \int d^3x g \varphi^3(x).$$

<sup>1)</sup> См., например, классическую монографию Швебера [304].

Тогда

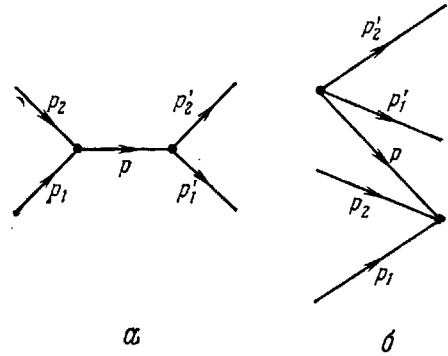
$$\langle p'_2, p'_1 | (S^{(2)} - 1) | p_2, p_1 \rangle = -(2\pi)^4 i \delta^4(p_2 + p_1 - p'_2 - p'_1) \times \\ \times \sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_n) \frac{\langle p'_2 p'_1 | \mathcal{S} \mathcal{C}_I | n \rangle \langle n | \mathcal{S} \mathcal{C}_I | p_2 p_1 \rangle}{E_1 + E_2 - E_n + i\epsilon}. \quad (8.369)$$

К сумме по полной системе состояний мы можем применить кластерный анализ, в результате чего для диаграмм I класса получим как связанные, так и Z-вклады (диаграммы класса II отсутствуют). Интересно рассмотреть в качестве примера вклады, соответствующие прямым и Z-диаграммам, которые изображены на фиг. 8.3:

$$T^{(2)} = \frac{g^2}{2E} \frac{1}{E_1 + E_2 - E + i\epsilon} + \\ + \frac{g^2}{2E} \frac{1}{-E_1 - E_2 - E + i\epsilon}, \quad (8.370)$$

где  $E$  — энергия физической промежуточной частицы  $E = [(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 + m^2]^{1/2}$ . В промежуточных вершинах сохраняется только 3-импульс. Комбинация двух этих вкладов приводит, конечно, к инвариантному результату

$$T^{(2)} = \frac{g^2}{s - m^2}, \quad s = (p_1 + p_2)^2. \quad (8.371)$$



Фиг. 8.3

Теперь посмотрим, что происходит при  $P \rightarrow \infty$ . (Заметим, что здесь  $P$  определяется иначе, чем в правилах сумм алгебры токов.) Пусть

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{P} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{P} - \mathbf{q}, \quad \mathbf{Pq} = 0. \quad (8.372)$$

Перейдем теперь к пределу при  $P \rightarrow \infty$ . Тогда

$$E_1 \underset{P \rightarrow \infty}{\sim} E_2 = \frac{1}{2} P + \frac{m^2 + q^2}{P} + O\left(\frac{1}{P^2}\right), \\ E = P + \frac{m^2}{2P} + O\left(\frac{1}{P^2}\right), \quad (8.373) \\ s \underset{P \rightarrow \infty}{\sim} 4(q^2 + m^2),$$

и, следовательно,

$$T_d^{(2)} \underset{P \rightarrow \infty}{\sim} \frac{g^2}{2P} \frac{2P}{s - m^2} = \frac{g^2}{s - m^2}, \quad (8.374)$$

$$T_Z^{(2)} \underset{P \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{g^2}{2P} \frac{1}{2P} \rightarrow 0. \quad (8.375)$$

Существенно то, что в прямой диаграмме расходящиеся множители  $P$  в числителе и знаменателе сокращаются, а в Z-диаграммах два таких множителя появляются в знаменателе и соответствующий вклад обращается в нуль.

Все сказанное можно обобщить на случай произвольной диаграммы. Назовем  $P$  полным входящим импульсом и с его помощью параметризуем импульс любой частицы (внешней или внутренней):

$$\mathbf{p}^{(i)} = \eta^{(i)} \mathbf{P} + \mathbf{q}^{(i)}, \quad \mathbf{Pq}^{(i)} = 0. \quad (8.376)$$

Закон сохранения трехмерного импульса запишется в виде

$$\sum_i \eta^{(i)} = 1, \quad \sum_i \mathbf{q}^{(i)} = 0, \quad (8.377)$$

где суммирование производится по начальным частицам (или тем, которые существуют в каждый фиксированный момент времени). Из соотношений (8.376) получаем выражение для энергии частицы ( $i$ ) при больших значениях  $P$ :

$$E^{(i)} \underset{P \rightarrow \infty}{\sim} |\eta^{(i)}| P + \frac{m^2 + \mathbf{q}^{(i)2}}{2|\eta^{(i)}| P}, \quad (8.378)$$

и, поскольку для начальных (или конечных) частиц

$$\sum_{l, \text{ начальные}} E^{(l)} = E \underset{P \rightarrow \infty}{\sim} P,$$

мы имеем

$$\sum_{l, \text{ начальные}} |\eta^{(l)}| = 1,$$

так что для внешней частицы любая из величин  $\eta$  будет неотрицательной:

$$0 \leq \eta^{(i)} \leq 1 \text{ для внешних частиц.} \quad (8.379)$$

В то же время, и в дальнейшем это будет весьма существенно, для внутренних частиц некоторые  $\eta$  могут быть отрицательными (напомним, что в вершинах энергия не сохраняется!).

Рассмотрим разность, соответствующую данному энергетическому знаменателю,

$$\sum_{k, \text{ начальные}} E^{(k)} - \sum_{l, \text{ промежуточные}} E^{(l)} \underset{P \rightarrow \infty}{\sim} P \left( 1 - \sum_l |\eta^{(l)}| \right) + \\ + \frac{1}{2P} \left( \sum_k \frac{m^2 + \mathbf{q}^{(k)2}}{\eta^{(k)}} - \sum_l \frac{m^2 + \mathbf{q}^{(l)2}}{|\eta^{(l)}|} \right).$$

Если для всех промежуточных частиц  $\eta^{(l)}$  положительны, то

$$\lambda \equiv \sum_l |\eta^{(l)}| = \sum_l \eta^{(l)} = 1,$$

старшая степень  $P$  исчезает и

$$\frac{1}{\sum_k E^{(k)} - \sum_l E^{(l)}} \underset{P \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2P}{s - s_{\text{внутр}}} \quad (\text{все } \eta^{(l)} > 0). \quad (8.380)$$

Но если некоторые  $\eta^{(l)}$  отрицательны,

$$\lambda \equiv \sum_l |\eta^{(l)}| > \sum_l \eta^{(l)} = 1,$$

то энергетический знаменатель имеет вид

$$\frac{1}{\sum_k E^{(k)} - \sum_l E^{(l)}} \underset{P \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{P(\lambda_{\text{внутр}} - 1)} \quad (\text{некоторые } \eta^{(l)} < 0), \quad (8.381)$$

т. е. теперь мы имеем подавление в  $P^{-2}$  раз.

Подсчитаем теперь все степени  $P$ . Элемент фазового объема для любой промежуточной частицы таков:

$$\frac{d^3 p^{(l)}}{(2\pi)^3 2E^{(l)}} \underset{P \rightarrow \infty}{\sim} \frac{d\eta^{(l)} d^2 q^{(l)}}{(2\pi)^3 2|\eta^{(l)}|}. \quad (8.382)$$

Из закона сохранения 3-импульса для произвольной вершины имеем

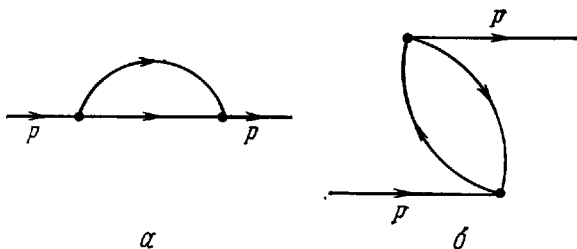
$$(2\pi)^3 \delta^3(\Delta \Sigma \mathbf{p}) = \frac{(2\pi)^3}{P} \delta(\Delta \Sigma \eta) \delta^2(\Delta \Sigma \mathbf{q}), \quad (8.383)$$

где символом  $\Delta \Sigma a$  обозначена разность

$$\sum_{k, \text{ входящие}} a^{(k)} - \sum_{l, \text{ выходящие}} a^{(l)}.$$

Сравним соотношения (8.380) — (8.383). Принимая во внимание, что в  $n$ -м порядке у нас  $(n - 1)$  множителей  $\delta^3$  и  $(n - 1)$  энергетических знаменателей, мы видим, что в пределе при  $P \rightarrow \infty$  остаются лишь те диаграммы, в которых все  $\eta$  (внешние и внутренние) положительны. Все прочие диаграммы имеют порядок не выше  $1/P^2$  и не дают вклада в предельное выражение.

Отсюда, в частности, следует, что можно забыть обо всех тех диаграммах, где хотя бы у одной из вершин все линии входящие. В таких вершинах частица уничтожается (или рождается) вакуумом, в частности это имеет место в  $Z$ -диаграммах (фиг. 8.3). Действительно, сумма всех чисел  $\eta$  должна



Фиг. 8.4

равняться нулю в силу закона сохранения импульса, но тогда  $\eta$  не могут быть все положительными и, следовательно, указанные диаграммы подавлены <sup>1)</sup>.

Теперь можно сформулировать простые правила построения диаграмм теории возмущений для взаимодействия типа  $g\varphi^3$  в пределе при  $P \rightarrow \infty$ . Каждому промежуточному состоянию  $|n\rangle$  нужно сопоставить множитель <sup>2)</sup>  $2/(s - s_n + i\epsilon)$ , каждой вершине, кроме последней, — множитель

$$(2\pi)^3 \delta(\Delta \Sigma \eta) \delta^3(\Delta \Sigma \mathbf{q}),$$

а каждой внутренней линии — множитель  $\theta(\eta^{(l)})/[2(2\pi)^3 \eta^{(l)}]$ , и проинтегрировать по внутренним переменным  $d^2 q^{(l)} d\eta^{(l)}$ .

Результат изящен и прост, но есть еще два вопроса, требующих разъяснения. Во-первых, как связаны предыдущие правила с обычными фейнмановскими? Во-вторых, насколько результат зависит от структуры взаимодействия, которая в данном случае была очень простой —  $g\varphi^3$ ?

Ответом на первый вопрос будет следующий пример. Рассмотрим все в той же теории  $g\varphi^3$  логарифмически расходящийся вклад  $\Sigma(p)$ , который дают в собственную энергию диаграммы второго порядка, изображенные на фиг. 8.4. При  $p \rightarrow \infty$  ( $\eta_{\text{внешн}} = 1$ ,  $\eta_{\text{внутр}} = 0$ ) сохраняется лишь первая диаграмма и в соответствии с нашими правилами

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \frac{g^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{\theta(\eta_1)\theta(\eta_2)}{\eta_1\eta_2} \delta(\eta_1 + \eta_2 - 1) \delta^2(\mathbf{q}^{(1)} + \mathbf{q}^{(2)}) \times \\ &\times \frac{d\eta_1 d\eta_2 d^2 q^{(1)} d^2 q^{(2)}}{s - (m^2 + \mathbf{q}^{(1)2})/\eta_1 - (m^2 + \mathbf{q}^{(2)2})/\eta_2} = \frac{g^2}{2(2\pi)^3} \int_0^1 \frac{d\eta d^2 q}{[s\eta(1-\eta) - q^2 - m^2 + i\epsilon]}. \end{aligned} \quad (8.384)$$

<sup>1)</sup> На самом деле возможны исключения из этого правила: в вакуумных диаграммах без внешних линий вклад дают концы интервала изменения чисел  $\eta$  [307].

<sup>2)</sup> Где  $s_n$  определяется следующим образом:

$$s_n = \sum_{l=1}^n \frac{m^2 + \mathbf{q}^{(l)2}}{|\eta^{(l)}|} \text{ внутр.}$$

Напишем теперь выражение для суммы  $\Sigma(p)$ , полученное по правилам Фейнмана:

$$\Sigma(p) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p'}{(p'^2 - m^2 + i\epsilon) [(p' - p)^2 - m^2 + i\epsilon]}. \quad (8.385)$$

На данном этапе очень важно ввести новые переменные (как для внешних, так и для внутренних импульсов)

$$\begin{aligned} p_0 + p_3 &= m\eta, & p_{1,2} &= q_{1,2}, \\ p_0 - p_3 &= m\xi. \end{aligned} \quad (8.386)$$

Опуская все промежуточные выкладки, сразу же сообщим, что окончательный результат после интегрирования по  $\xi$  совпадает с выражением (8.384). Итак, мы видим, что выражение, которое удается построить в системе  $P \rightarrow \infty$ , может быть получено из диаграмм Фейнмана без какого-либо предельного перехода, простой заменой переменных (8.386). Заметим, что комбинации переменных в (8.386) имеют простые трансформационные свойства при чисто лоренцевых вращениях. Действительно, для  $\eta$  и  $\xi$  чисто лоренцево преобразование вдоль третьей оси с параметром  $\phi$  имеет вид

$$\begin{aligned} \eta &\rightarrow e^{\phi}\eta, \\ \xi &\rightarrow e^{-\phi}\xi. \end{aligned} \quad (8.387)$$

Таким образом, возникает возможность [306, 307] сформулировать теорию возмущений, используя повернутое конфигурационное пространство, где новое «время» и новая «третья пространственная координата» задаются равенствами

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t + z), \\ \xi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t - z). \end{aligned} \quad (8.388)$$

(Отметим, что такой переход не есть лоренцево преобразование.) Петрудно убедиться, что упомянутые выше правила, полученные в старой теории возмущений в пределе при  $P \rightarrow \infty$ , в рамках той же теории возмущений можно получить без предельного перехода, когда упорядочение в диаграммах производится по переменной  $\tau$ .

Что касается второго вопроса, то усложнения возникают при введении спина. Чтобы учесть наличие  $\gamma$ -матриц и фермионных пропагаторов, необходимо ввести изменения в предыдущий анализ.

Рассмотрим, например, пион-нуклонное рассеяние в низшем порядке, когда взаимодействие имеет вид  $\mathcal{H}_I = ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$ . Мы уже знаем, что  $\gamma_5$  — плохой оператор. Это означает, что во втором порядке по  $g$  вклад  $Z$ -диаграммы будет больше вклада соответствующей прямой диаграммы. Действительно,

$$\begin{aligned} T_d^{(2)} &\underset{P \rightarrow \infty}{\sim} \frac{g^2}{2P} \frac{2P}{s - m_N^2 - i\epsilon} \cdot (\text{конечный множитель}), \\ T_Z^{(2)} &\underset{P \rightarrow \infty}{\sim} \frac{g^2}{2P} \frac{1}{P(1 - \lambda_{\text{промеж}})} \cdot P^2 (\text{конечный множитель}), \end{aligned} \quad (8.389)$$

и предыдущие рассуждения об исчезновении диаграмм с  $\lambda \geq 1$  становятся недействительными.

В самом деле, процедура  $P \rightarrow \infty$  должна быть особенно полезной в тех теориях со спином, взаимодействие в которых выражается через хорошие операторы, например в квантовой электродинамике, где соответствующий оператор равен  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ . В этом отношении электродинамике было уделено особое

внимание. Анализ [309], основанный на фейнмановских правилах в повернутой системе координат, приводит к тем же общим выводам, что и в теории с  $\varphi^3$ . Однако наличие спина влечет за собой появление новых членов в гамильтониане, соответствующем бесконечно большому импульсу. Интересным развитием метода явилось построение [309] канонического формализма в электродинамике с прямым использованием повернутой системы координат (8.388), где разложение по теории возмущений дает правило построения  $t$ -упорядоченных диаграмм.

Большой интерес вызвали проведенные недавно исследования высокоэнергетических процессов в электродинамике, где метод бесконечно большого импульса позволяет вычислить главные члены в асимптотике амплитуд при больших энергиях. Содержательные результаты были получены Чангом и Ма [308], Бьёркеном, Когутом, Соцером [361]. Эти результаты интересны также предсказаниями, которые с их помощью можно сделать в физике адронов высоких энергий (эффекты электророждения). К этому вопросу мы вернемся в гл. 10.

### Приложение I. Матричные элементы в пределе бесконечно большого импульса

Данное приложение посвящено систематическому рассмотрению поведения матричных элементов операторов в пределе бесконечно большого импульса.

Нас будет интересовать величина

$$\langle \mathbf{p}' ; \lambda', i' | O_\mu | \mathbf{p} ; \lambda, i \rangle, \quad (I.1)$$

где  $O_\mu$  — локальный оператор, для простоты рассматриваемый в точке  $x_\mu = 0$ . Индекс  $\mu$  включает в себе информацию о трансформационных свойствах  $O_\mu$  по отношению к группе Лоренца (в действительности  $\mu$  заменяет набор индексов, так что  $O_\mu$  может быть скалярной, векторной или тензорной плотностью).

Внешними состояниями служат адроны с полным трехмерным импульсом  $\mathbf{p}$  и спиральностью  $\lambda$ ; все их прочие характеристики обозначены индексом  $i$  (который, в частности, указывает массу, внутренние квантовые числа и спин состояния, причем последнее может быть как отдельной частицей так и системой частиц).

Мы хотим исследовать свойства матричного элемента (I.1) при  $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \rightarrow \infty$  вдоль направления третьей оси, в то время как  $\Delta = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$  и поперечные компоненты  $\mathbf{p}_T$  и  $\mathbf{p}'_T$  фиксированы. Для этого удобно в явном виде выделить из состояний множители, зависящие от импульсов. Запишем векторы состояний в виде

$$| i, \lambda ; \mathbf{p}_T, p_3 \rangle = R(\Omega) | i, \lambda ; \mathbf{0}, p \rangle = R(\Omega) \exp(-i\zeta K_3) | i, \lambda ; \mathbf{0} \rangle, \\ p = (p_3^2 + \mathbf{p}_T^2)^{1/2}, \quad p_0 = (p^2 + m^2)^{1/2}, \quad (I.2)$$

где в соответствии со стандартной процедурой  $R(\Omega) = \exp(-i\mathbf{J}\mathbf{n}\theta)$  — унитарное преобразование, такое, что полный импульс становится параллельным третьей оси, а  $K_3$  — генератор лоренцева поворота. Параметр  $\zeta$  лоренцева поворота определяется следующими равенствами:

$$\text{sh } \zeta = \frac{p}{m}, \quad \text{ch } \zeta = \frac{p_0}{m}, \\ \zeta = \ln \left( \frac{p}{m} + \frac{p_0}{m} \right) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \ln \frac{2p}{m}.$$



Оба состояния в формуле (I.4) должны подвергнуться одному и тому же преобразованию, но массы их, вообще говоря, неодинаковы. Поэтому удобно ввести общий параметр массы  $m_0$  так, чтобы выполнялось соотношение

$$\xi \equiv \xi_0 + \hat{\xi} = \ln \left( \frac{p}{m_0} + \frac{p_0}{m_0} \right) + \ln \frac{m_0}{m}. \quad (\text{I.3})$$

Тогда

$$|i, \lambda; \mathbf{0}, p\rangle = \exp(-i\xi_0 K_3) \exp(-i\hat{\xi} K_3) |i, \lambda; \mathbf{0}\rangle = \exp(-i\xi_0 K_3) |i, \lambda; m_0\rangle, \quad (\text{I.4})$$

где состояние

$$|i, \lambda; m_0\rangle \equiv \exp(-i\hat{\xi} K_3) |i, \lambda; \mathbf{0}\rangle \quad (\text{I.5})$$

имеет энергию и компоненты импульса

$$\hat{p}_0 = \frac{m^2 + m_0^2}{2m_0}, \quad \hat{p}_3 = \frac{m_0^2 - m^2}{2m_0}, \quad \hat{p}_0 + \hat{p}_3 = m_0, \quad (\text{I.6})$$

не зависящие от  $p_3$ ; зависимость от  $p_3$  заключена в  $\xi_0$ .

Далее необходимо поменять местами операторы обычного и лоренцева поворота:

$$R(\Omega) \exp(-i\xi_0 K_3) = \exp(-i\xi_0 K_3) R^{(0)}(\Omega). \quad (\text{I.7})$$

Здесь  $R^{(0)}(\Omega)$  — преобразованный оператор, построенный с помощью оператора

$$\mathbf{J}^{(0)} = \exp(i\xi_0 K_3) \mathbf{J} \exp(-i\xi_0 K_3),$$

основное свойство которого состоит в том, что он действует только на спиновые переменные. В частности,

$$\begin{aligned} J_3^{(0)} &= J_3 \operatorname{ch} \xi_0, \\ J_1^{(0)} &= J_1 \operatorname{ch} \xi_0 - K_2 \operatorname{sh} \xi_0 \underset{p \rightarrow \infty}{\longrightarrow} (J_1 - K_2) \frac{p}{m_0}, \\ J_2^{(0)} &= J_2 \operatorname{ch} \xi_0 + K_1 \operatorname{sh} \xi_0 \underset{p \rightarrow \infty}{\longrightarrow} (J_2 + K_1) \frac{p}{m_0}. \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

Наконец, нетрудно убедиться, что

$$R^{(0)}(\Omega) = \exp[-i\theta (\mathbf{n}_L \times \mathbf{n}_T \mathbf{J}^{(0)})], \quad (\text{I.9})$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_L &= (0, 0, 1), \quad \mathbf{n}_T = \frac{\mathbf{p}_T}{|\mathbf{p}_T|}, \\ \sin \theta &= \frac{p_T}{p} \underset{p \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \frac{p_T}{p_3}. \end{aligned}$$

Далее, в пределе при больших  $p_3$  (при фиксированном  $\mathbf{p}_T$ ) находим

$$R^{(0)}(\Omega) \underset{p \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \exp\left(-i \frac{\mathbf{p}_T \mathbf{E}}{m_0}\right), \quad (\text{I.10})$$

где  $\mathbf{E}$  — двумерный вектор с компонентами

$$\begin{aligned} E_1 &= J_2 + K_1 \\ E_2 &= -J_1 + K_2. \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

После всех этих предварительных преобразований совсем не трудно получить предельное выражение для полного матричного элемента:

$$\begin{aligned} \lim_{p_3, p'_3 \rightarrow \infty} \langle p'_3, \mathbf{p}'_T; \lambda', i' | O_\mu | i, \lambda; \mathbf{p}_T, p_3 \rangle &= \\ &= \lim_{p_3, p'_3 \rightarrow \infty} \langle m_0; \lambda', i' | \exp\left(i \frac{\mathbf{p}'_T \mathbf{E}}{m_0}\right) \exp(i\xi_0 K_3) O_\mu \exp(-i\xi_0 K_3) \times \\ &\quad \times \exp\left(-i \frac{\mathbf{p}_T \mathbf{E}}{m_0}\right) | i, \lambda; m_0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

Воспользуемся трансформационными свойствами оператора  $O_\mu$  по отношению к группе Лоренца и напишем

$$\exp(i\xi_0 K_3) O_\mu(0) \exp(-i\xi_0 K_3) = L_\mu^\nu(\xi_0) O_\nu(0), \quad (I.13)$$

где  $L_\mu^\nu(\xi_0)$  — лоренцево преобразование с параметром  $\xi_0$ , соответствующее оператору  $O_\mu$ . Таким образом, окончательно получаем простой результат

$$\begin{aligned} & \lim_{p_3, p'_3 \rightarrow \infty} \langle p'_3, \mathbf{p}'_T; \lambda', i' | O_\mu | i, \lambda; \mathbf{p}_T, p_3 \rangle = \\ & = \lim_{p_3, p'_3 \rightarrow \infty} L_\mu^\nu(\xi_0) \langle m_0; \lambda', i' | \exp\left(i \frac{\mathbf{p}'_T \mathbf{E}}{m_0}\right) O_\nu \exp\left(-i \frac{\mathbf{p}_T \mathbf{E}}{m_0}\right) | i, \lambda; m_0 \rangle, \quad (I.14) \end{aligned}$$

где вся зависимость от  $p_3$  сосредоточена во внешнем множителе, тогда как матричный элемент конечен и не зависит от  $p_3$ . Следовательно, предел находится сразу, как только мы уточним свойства оператора  $O_\mu$  по отношению к преобразованиям Лоренца.

Рассмотрим особенно интересный пример — случай зарядовых плотностей,  $O_\mu = j_0$ . Тогда, как нетрудно убедиться, операторы  $E_1$  и  $E_2$  коммутируют с  $j_0 + j_3$ , так что равенство (I.14) принимает вид

$$\begin{aligned} & \lim_{p_3, p'_3 \rightarrow \infty} \langle \mathbf{p}'; \lambda', i' | j_0 | i, \lambda; \mathbf{p} \rangle = \\ & = \langle m_0; \lambda', i' | \exp\left[i \frac{(\mathbf{p}'_T - \mathbf{p}_T) \mathbf{E}}{m_0}\right] (j_0 + j_3) | i, \lambda; m_0 \rangle = \\ & \equiv \langle m_0; \lambda', i | F(\mathbf{q}) | i, \lambda; m_0 \rangle, \quad (I.15) \end{aligned}$$

и матричные элементы  $j_0$  в пределе бесконечно большого импульса будут зависеть только от разности  $\mathbf{q} = \mathbf{p}'_T - \mathbf{p}_T$ .

## 9. Новый подход к сильным взаимодействиям: дуальность

### § 1. Введение

В основе новейших теоретических исследований, которые привели к возникновению понятия «дуальности», лежит принцип перестановки, позволяющий связать процессы в перекрестных каналах. Мы уже видели в гл. 1, что одна и та же амплитуда описывает и реакцию

$$A + B \rightarrow C + D \quad (1)$$

и «перекрестные» реакции

$$A + \bar{C} \rightarrow \bar{B} + D, \quad (2)$$

$$A + \bar{D} \rightarrow \bar{B} + C. \quad (3)$$

Точно так же обстоит дело в случае амплитуд с бóльшим числом внешних линий. Число процессов, которые допускают одновременное описание, очень быстро возрастает с увеличением числа внешних частиц.

Подчеркнем, что совместное рассмотрение перекрестных процессов становится мощным источником информации только тогда, когда сделаны дополнительные важные предположения типа аналитичности или «хорошего» асимптотического поведения. Действительно, физические области (т. е. разрешенные области изменения кинематических переменных) процессов (1)–(3) отделены друг от друга. Поэтому мы могли бы ограничиться тремя независимыми способами описания этих процессов. Дополнительные предположения об аналитичности (подобные рассмотренным в гл. 1) позволяют продолжить амплитуду из одной области в другую и тем самым установить тесную связь между всеми тремя способами описания. В самом деле, приближенная амплитуда, которая хорошо описывает реакцию 1, вполне может оказаться совершенно неподходящей для перекрестных каналов 2 и 3. Если же потребовать «хорошего» асимптотического поведения<sup>1)</sup>, то тогда всякое полное описание в одном из трех каналов должно быть полным и в двух других.

Рассмотрим, например, амплитуду  $A(s, t)$ , удовлетворяющую дисперсионному соотношению<sup>2)</sup>

$$A(s, t) \doteq \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } A(s', t)}{s' - s} ds'. \quad (9.1)$$

Мы предполагаем, что интеграл в этом соотношении сходится при отрицательных значениях  $t$ , достаточно больших по абсолютной величине. Равенство (9.1) показывает, что, зная скачок амплитуды  $A(s, t)$  (отвечающий физическим процессам, для которых переменная  $s$  является квадратом энергии), мы в принципе знаем всю функцию  $A(s, t)$  и, в частности, ее аналитические свойства по переменной  $t$ . Например, полюса по переменной  $t$  (отвечающие частицам, которые могут существовать в  $t$ -канале) нельзя добавлять произ-

<sup>1)</sup> Под этим мы понимаем реджевское поведение.

<sup>2)</sup> Проводя последующее качественное рассмотрение, мы для простоты пренебрегаем наличием особенностей по третьей переменной  $s$ .

вольным образом к правой части равенства (9.1). Эти полюса должны появляться сами собой вследствие расходимости дисперсионного интеграла по переменной  $s'$ . Известно, что реджевский асимптотический закон

$$\text{Im } A(s, t) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \beta(t) s^{\alpha(t)}$$

обеспечивает такого рода поведение. Мы видим здесь прямую связь между описанием процесса рассеяния в  $s$ - и  $t$ -каналах.

Более точная и весьма удобная запись этой взаимосвязи достигается с помощью так называемых правил сумм при конечной энергии, имеющих вид

$$\int_0^L s^n \text{Im } A(s, t) ds = \beta(t) \frac{L^{\alpha(t)+n+1}}{\alpha(t)+n+1}. \quad (9.2)$$

Равенство (9.2) прямо связывает характеристики процесса рассеяния в  $s$ -канале (которые содержатся в левой части) с реджевскими полюсами  $t$ -канала, входящими в правую часть. Мы можем, в частности, вычислить левую часть равенства (9.2), подставляя туда только вклад резонансов, существующих в  $s$ -канале. Тогда в этой формуле найдет отражение очень важное свойство дуальности, которое состоит в следующем.

*Описание процесса с помощью реджевских полюсов  $t$ -канала эквивалентно усреднению амплитуды, найденной путем суммирования вкладов, вносимых резонансами  $s$ -канала.*

Подход, основанный на дуальности, имеет важное значение для феноменологического анализа экспериментальных данных: такой подход заставляет нас отказаться от «интерференционной» модели, в рамках которой вклад полюсов Редже складывается когерентным образом с вкладом резонансов.

С теоретической точки зрения соотношение дуальности между резонансами, существующими в  $s$ -канале, и реджевскими полюсами  $t$ -канала указывает, что можно осуществить *бутстрап, основанный на дуальности*. Действительно, реджевский полюс  $t$ -канала отвечает семейству резонансов в  $t$ -канале. Поэтому, если рассматриваемый процесс обладает полной перекрестной симметрией (как, например, реакция  $\omega\pi \rightarrow \pi\pi$ ), то возникает большое число условий самосогласованности, которым должны подчиняться резонансы, появляющиеся в данном процессе. Как показывает предварительный полуфеноменологический анализ, можно прийти к непротворечивой картине, предполагая, что траектории Редже прямолинейны и что существует бесконечное число дочерних траекторий:  $\alpha_n(s) = \alpha(s) - n$ .

Наиболее прямой и явный путь осуществления бутстрапа, основанного на дуальности, ведет в резонансном приближении непосредственно к модели Венециано. Последняя основана на предположении, что полное (хотя и приближенное) описание рассеяния может быть дано с учетом лишь резонансов, существующих в  $s$ -канале. Подставив в дисперсионное соотношение (9.1) вклады резонансов, которые лежат на траектории  $\alpha(s)$  и на ее дочерних траекториях, мы приходим к равенству

$$A(s, t) = \sum_n \frac{c_n(t)}{\alpha(s) - n}, \quad (9.3)$$

где  $c_n(t)$  — многочлен степени  $n$  по  $t$ <sup>1)</sup>.

Суть дела состоит в том, что представление (9.3) является *полным* и должно содержать в себе (неявным образом) полюса по перекрестной переменной  $t$ . Эти полюса могут возникать лишь за счет расходимости суммы,

<sup>1)</sup> Высший спин  $j = n$  возникает за счет того, что главная траектория проходит через точку  $\alpha(s) = n$ . Вклады низших спинов обусловлены наличием дочерних траекторий.

стоящей в правой части равенства (9.3), в определенной области значений переменной  $t$ . Поэтому данная сумма должна содержать бесконечное число слагаемых. Таким образом, только в случае бесконечно растущих траекторий можно надеяться на осуществление бутстрапа в рамках чисто резонансного приближения.

Точным математическим решением уравнения

$$A(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(t)}{\alpha(s) - n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(s)}{\alpha(t) - n}, \quad (9.4)$$

следующего из дуальности, является знаменитая ныне амплитуда Венециано, совпадающая с бета-функцией:

$$A(s, t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s)) \Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))}. \quad (9.5)$$

Легко показать, что такого рода амплитуда удовлетворяет условию бутстрапа (9.4) и, кроме того, обладает реджевским поведением как в  $s$ -, так и в  $t$ -канале. Можно также убедиться, что модель Венециано приемлема с физической точки зрения, если все траектории прямолинейны (что соответствует бесконечно узким резонансам) и *наклон их одинаков*. Если мы сравним этот результат с реджевским асимптотическим поведением, рассмотренным в гл. 1, то увидим, что в рамках простейших предположений связь, существующая между перекрестными каналами, допускает только один тип траекторий, а именно прямолинейные траектории. Отклонения от прямолинейности возникают только одновременно с появлением особенностей более сложного типа, таких, как реджевские разрезы.

Прямолинейные траектории очень далеки от картины, которую можно было ожидать, если упрощенно рассуждать, исходя из моделей теории поля. Действительно, прямолинейные траектории должны были бы иметь место в случае потенциала типа гармонического осциллятора, тогда как теория поля приводит к потенциалам юкавовского типа. В то же время наличие растущих траекторий, по-видимому, подтверждается экспериментом. Введение таких траекторий следует рассматривать как первый шаг к новой теории, а не как еще один шаг в рамках старой.

Взяв за исходную точку амплитуду Венециано, удалось развить общую дуальную модель в резонансном приближении. Эта модель позволяет строить единым самосогласованным способом дуальные амплитуды для любых неупругих процессов. При таком подходе фундаментальную роль играет метод, основанный на применении операторов, встречающихся в теории гармонического осциллятора. Поразительным свойством этой модели является исключительно большое вырождение дочерних уровней. Так, число состояний, отвечающих уровню  $\alpha(s) = n$ , растет при больших  $n$  как  $\exp(c\sqrt{n})$ . Это новое свойство, несомненно, противоречит интуитивным представлениям, основанным на конструкциях, подобных двухчастичной модели в квантовой теории поля. Но оно очень хорошо укладывается в общую картину, отвечающую «новой философии». В конце концов, связи, вытекающие из дуальности, так многочисленны, что им можно удовлетворить только при наличии очень большого числа состояний.

Мы хотим, однако, предостеречь от излишнего оптимизма; дуальная теория элементарных частиц, по-видимому, еще не создана, так как существующие модели все еще неадекватны реальному миру. Пока в этих рамках отсутствует удовлетворительное описание частиц со спином  $1/2$ ; невозможно также описать систему  $n$  физических пионов, не вводя нефизических значений параметра  $\alpha(0)$  траектории Редже.

В то же время дуальные модели являются очень полезным рабочим аппаратом теоретиков. Кроме того, они позволяют получить очень хорошие общие

предсказания вдали от порога путем соответствующего усреднения по большому числу резонансов.

Мы решили охарактеризовать в общих чертах в своей книге нынешние успехи в изучении дуальности, ибо серьезно надеемся, что таким путем в конце концов будет построена новая теория элементарных частиц. Если даже этого не произойдет, то все же весьма вероятно, что будет найдена прямая связь между свойствами резонансных уровней в дуальных моделях и требованиями к этим уровням в рамках теории насыщения алгебраических соотношений, рассмотренной в гл. 8.

В настоящей главе предпринята попытка дать обзор ряда важнейших результатов, полученных в теории дуальности. В § 2 излагается весьма успешный феноменологический подход, основанный на правилах сумм при конечной энергии и на использовании дуальных диаграмм [13, 318, 319, 321]. Это приводит нас к первой удачной попытке исследования процесса  $l\omega \rightarrow l\bar{l}$  методом «дуального бутстрапа», основанного на правилах сумм при конечной энергии. Последнее обстоятельство послужило основой фундаментального открытия, сделанного Венециано. Он построил первую дуальную амплитуду в резонансном приближении, удовлетворяющую требованиям перекрестной симметрии и обладающую реджевским асимптотическим поведением. В § 3 рассматривается модель Венециано и ее важные физические следствия [318, 319, 322, 323, 370]. Наконец, § 4 посвящен в первую очередь обобщенным амплитудам Венециано для неупругих процессов [324—329]. Эти результаты явились стимулом к разработке общего дуального подхода в рамках резонансного приближения. Хотя такой подход не привел еще к полному успеху, он, несомненно, является очень важным шагом в направлении дальнейшего развития теории элементарных частиц.

## § 2. Правила сумм при конечной энергии и дуальность

### 1. Растущие траектории

Теория Редже содержит ряд параметров, которые нужно находить феноменологически. Фундаментальной физической задачей является определение общей формы траектории  $\alpha(t)$ . Существуют два пути исследования свойств функции  $\alpha(t)$ : во-первых, анализ на основе моделей, допускающих явное решение (таких, как потенциальное рассеяние); во-вторых, анализ следствий из аналитичности траекторий.

Посмотрим, к каким результатам ведут существующие модели. В теории рассеяния на короткодействующем потенциале или в теории Бете — Солнитера траектории не растут до бесконечности. Физической причиной этого является центробежный барьер. Если бы траектории возрастали до бесконечности, то должны были бы существовать связанные состояния (или резонансы) со сколь угодно большим угловым моментом. В случае же короткодействующего потенциала центробежный барьер препятствует образованию связанных состояний и резонансов с большим угловым моментом, так что существование траекторий, растущих до бесконечности, исключается.

Методом теории возмущений (лестничные диаграммы) или исходя из уравнения Бете — Солнитера мы получаем в простейшей модели со взаимодействием  $g\varphi^3$  (случай слабой связи) следующую формулу для главного полюса Редже <sup>1)</sup>:

$$\alpha(t) = -1 + g^2 I(t) + O(g^4), \quad (9.6)$$

<sup>1)</sup> Подробные сведения по этим вопросам можно найти в работе [311].

где  $I(t)$  — функция, даваемая выражением

$$I(t) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt'}{t'-t} [t'(t'-4m^2)]^{-1/2}. \quad (9.7)$$

В случае потенциала Юкавы

$$I(k^2) = \int_0^{\infty} \frac{dq^2}{q^2(q^2-k^2)}. \quad (9.8)$$

Если переменная  $t$  возрастает, начиная от  $-\infty$ , то полюс Редже движется от точки  $l = -1$  вправо вдоль действительной оси. В окрестности порога интеграл неограничен и теория возмущений неприменима. За порогом траектория становится комплексной и возвращается в точку  $l = -1$ , когда  $t \rightarrow \infty$ ; при этом  $\text{Im } \alpha > 0$ . Таким образом, траектория ведет себя почти так же, как и в теории потенциального рассеяния. Это не вызывает удивления, поскольку для уравнения Бете — Солпитера или процесса суммирования лестничных диаграмм характерен такой же механизм, как и для теории потенциального рассеяния (с изменениями, обусловленными требованием релятивистской инвариантности).

В случае дальнедействующих потенциалов формула (9.8) становится точной. Действительно, в кулоновском случае формула для главной траектории имеет вид

$$\alpha(t) = -1 + i \frac{me^2}{\hbar^2 k} \quad (t = 4k^2 + 4m^2) \quad (9.9)$$

и является точной. Множеству целых значений  $\alpha(t)$ , лежащих на этой траектории, отвечает серия уровней атома водорода.

Заметим, что соотношения (9.7) и (9.8) не зависят от размеров области действия потенциала. Поэтому они таковы же, как в кулоновском случае. Уже в силу одного этого обстоятельства соотношения (9.7) и (9.8) мало что говорят о реальных траекториях Редже при больших значениях  $t$ . Физической причиной указанного выше поведения траекторий при больших  $t$  является, как уже говорилось, центробежный барьер. Но мы не можем полагаться на это утверждение, поскольку оно основано лишь на модели двух частиц, взаимодействие которых описывается потенциалом.

Вместо этого мы будем полагаться на аналитические свойства траектории. Напишем для траектории дисперсионное соотношение с вычитанием:

$$\alpha(t) = a + \frac{t}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} dt' \frac{\text{Im } \alpha(t')}{t'(t'-t)}. \quad (9.10)$$

При выводе соотношений (9.7) и (9.8) предполагалось, что в промежуточном состоянии преобладает вклад упругого канала и что в этом состоянии отсутствует корреляция между двумя частицами. Соотношения (9.7), (9.8) по существу получаются путем подсчета фазового объема для такого промежуточного состояния. Но можно думать, следуя Мандельштаму [331], что по мере убывания вклада двухчастичного канала с ростом энергии  $\sqrt{t}$  вступают в действие неупругие каналы, отвечающие рождению многих частиц, и что величина  $\text{Im } \alpha(t)$  остается отличной от нуля в области больших  $t$ .

Придерживаясь такой точки зрения, можно пренебречь зависимостью интеграла от  $t$ . Это приводит к линейной формуле для траектории

$$\alpha(t) = a + bt. \quad (9.11)$$

Таким образом, возникает мысль о связи между простым видом траекторий и тем обстоятельством, что элементарные частицы обладают структурой системы многих тел [331].

Поэтому мы думаем, что находимся у истоков новой увлекательной теории, основанной на моделях, в которых первое приближение описывается линейными траекториями (и, возможно, параллельными дочерними траекториями) [332, 333]. В теории существует даже элементарная длина, а именно наклон траекторий. Интересно проследить аналогию с разложением по степеням эффективного радиуса.

В случае прямолинейных траекторий  $\text{Im } \alpha(t) = 0$ . Было предложено новое приближение, в котором малым параметром является ширина резонансов.

Эксперимент указывает на то, что траектории не искривлены, как это имеет место в теории потенциального рассеяния; напротив, создается впечатление, что частицы расположены на прямолинейных траекториях.

Допуская, что траектории растут неограниченно [или делая более узкое предположение об их прямолинейности (9.11)], мы приходим к новым важным представлениям. В этом случае число вычитаний в дисперсионных соотношениях при фиксированном  $t$  возрастает с ростом  $t$ . Отсутствует верхняя граница числа вычитаний, не зависящая от  $t$ . Поэтому представление Мандельстама не может иметь места в строгом смысле из-за асимптотического поведения. Мы должны рассматривать это представление лишь как утверждение об определенных аналитических свойствах амплитуды. Таким же образом нужно понимать те следствия представления Мандельстама, которые связаны с интегрированием по какой-либо мандельстамовской переменной в бесконечных пределах. Это относится, например, к дисперсионным соотношениям при постоянном угле расстояния и к дисперсионным соотношениям для парциальных волн.

Правда, потерянное в одном месте мы восполняем в другом. Это можно проиллюстрировать следующим образом. Предположим, что при некотором значении  $t$  главная траектория  $\alpha(t)$  удовлетворяет неравенству

$$n - 1 < \text{Re } \alpha(t) < n, \tag{9.12}$$

где  $n$  — положительное целое число. Тогда в дисперсионном соотношении нужно сделать  $n$  вычитаний, так как этому соотношению удовлетворяет не сама амплитуда  $T(v, t)$ , а вспомогательная функция

$$B(v, t) = \frac{T(v, t)}{v^n}.$$

Во избежание неприятностей точка  $v = 0$  должна быть регулярной точкой амплитуды  $T(v, t)$ . Мы можем написать дисперсионное соотношение для функции  $B(v, t)$ , учитывая, однако, что  $B(v, t)$  имеет искусственно созданный кратный полюс при  $v = 0$ . Это дисперсионное соотношение имеет вид

$$B(v, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k T(v, t)}{\partial v^k} \right]_{v=0} v^{-n+k} + \frac{1}{\pi} \int \frac{dv'}{v' - v} \text{Im } B(v', t). \tag{9.13}$$

Для амплитуды  $T(v, t)$  мы получаем дисперсионное соотношение с вычитаниями:

$$T(v, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k T(v, t)}{\partial v^k} \right]_{v=0} v^k + \frac{v^n}{\pi} \int \frac{dv'}{v'^n (v' - v)} \text{Im } T(v', t). \tag{9.14}$$

Если  $t$  возрастает, то число вычитаний увеличивается. Напротив, если  $t$  уменьшается, то величина  $\text{Re } \alpha(t)$  убывает и в конце концов становится отрицательной. При условии

$$-n - 1 < \text{Re } \alpha(t) < -n, \tag{9.15}$$

где  $n$  — целое положительное число, не только  $T(v, t)$ , но и  $v^n T(v, t)$  удовлетворяет дисперсионному соотношению без вычитаний. Наряду с дис-



персионным соотношением без вычитаний

$$T(v, t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{dv'}{v' - v} \operatorname{Im} T(v', t) \quad (9.16)$$

возникают также соотношения сверхсходимости

$$\int dv v^k \operatorname{Im} T(v, t) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (9.17)$$

Из сказанного ранее явствует, что уравнения (9.17) выполняются при любом наперед заданном значении  $n$ , если выбрано достаточно большое отрицательное значение переданного импульса.

Обратимся к интерполяционной функции Хури  $a(z, t)$ , введенной в гл. 1, § 6:

$$a(z, t) = \frac{1}{\pi} \int dv \frac{\operatorname{Im} T(v, t)}{v^{1+z}}. \quad (9.18)$$

Из соотношения (9.17) следует, что равенство

$$a(-n, t) = 0 \quad (9.19)$$

справедливо при любом наперед заданном целом положительном  $n$ , если значение  $t$  выбрано отрицательным и достаточно большим по абсолютной величине.

Из аналитичности амплитуды по переменной  $t$  теперь следует, что равенство (9.19) в действительности верно при всех значениях  $t$ . Таким образом, мы видим, что соотношение (9.19), которое играет фундаментальную роль в последующем рассмотрении, в данном случае оказывается простым следствием аналитичности первого рода.

Конечно, аналитичность второго рода содержится неявно в приведенной аргументации, так как мы приняли, что при любом значении  $t$  асимптотика амплитуды по переменной  $v$  определяется главным реджевским членом

$$T(v, t) \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \beta(t) v^{\alpha(t)}. \quad (9.20)$$

При этом амплитуда  $T(v, t)$  не может содержать членов, обладающих степенной асимптотикой с фиксированным показателем, так как в нашем случае  $\alpha(t)$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Это в точности то самое требование, которое фигурировало в гл. 1, § 6 при выводе равенства (9.19) [формула (1.53)].

## 2. Правила сумм при конечной энергии

Правила сумм при конечной энергии [8, 10, 12, 334, 572], вывод которых уже был изложен в гл. 1, § 7, можно получить другим способом, основанным на предположении о бесконечно растущих траекториях. В этом случае при отрицательных  $t$ , достаточно больших по абсолютной величине, справедливо каждое сверхсходящееся правило сумм

$$\int dv v^n \operatorname{Im} T(v, t) = 0 \quad (9.21)$$

(см. предыдущий раздел). Правила сумм при конечной энергии получаются путем надлежащего аналитического продолжения левой части равенства (9.21) на все значения переменной  $t$ .

Коснемся сначала следствий перекрестной симметрии. Если рассматриваемые процессы обладают той или иной перекрестной симметрией по отношению к замене  $v \rightarrow -v$ , то функция  $\operatorname{Im} T(v, t)$  либо нечетна, либо четна по этой переменной:

$$\operatorname{Im} T^\pm(v, t) = \mp \operatorname{Im} T^\pm(-v, t). \quad (9.22)$$

Правила сумм для  $T^+$  при четных  $n$  и для  $T^-$  при нечетных  $n$  выполняются автоматически. Содержательными оказываются лишь следующие пра-

вила сумм <sup>1)</sup>:

$$\int_0^\infty dv v^n \operatorname{Im} T^+(v, t) = 0, \quad \text{нечетные } n, \quad (9.23a)$$

$$\int_0^\infty dv v^n \operatorname{Im} T^-(v, t) = 0, \quad \text{четные } n. \quad (9.23b)$$

Обратимся к выводу правил сумм при конечной энергии. Разобьем область интегрирования на две части:  $(0, L)$  и  $(L, \infty)$ . Выберем  $L$  таким образом, чтобы при  $v > L$  была оправдана приближенная замена функции  $\operatorname{Im} T(v, t)$  реджевским членом

$$\operatorname{Im} T^R(v, t) = \sum_i \beta_i(t) v^{\alpha_i(t)}. \quad (9.24)$$

Выполняя в явном виде интегрирование от  $L$  до  $\infty$  в равенствах (9.23), мы приходим к соотношению

$$\int_0^L dv v^n \operatorname{Im} T^\pm(v, t) = \sum_i \beta_i(t) \frac{L^{\alpha_i(t)+n+1}}{\alpha_i(t)+n+1}. \quad (9.25)$$

Последний шаг состоит в продолжении правила сумм при конечной энергии <sup>2)</sup> (9.25) на любые значения переменной  $t$ .

Обобщим равенство (9.25) на случай, когда амплитуда  $T(v, t)$  не обладает симметрией относительно замены  $v \rightarrow -v$ . Соотношение сверхсходимости для  $T(v, t)$  записывается в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv v^n \operatorname{Im} T(v, t) = 0 \quad (9.26)$$

и справедливо теперь как при четных, так и при нечетных значениях  $n$ . Реджевское асимптотическое поведение функции  $T(v, t)$  определяется формулой

$$T(v, t) \underset{v \rightarrow \infty}{\sim} \sum_i \frac{\beta_i(t)}{\sin \pi \alpha_i(t)} \{ \eta_i + \exp[-i\pi \alpha_i(t)] \} v^{\alpha_i(t)}, \quad (9.27)$$

где  $\eta_i = \pm 1$  — сигнатурный множитель (гл. 1, § 7, п. 8). В соответствии с этим асимптотика мнимой части имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T(v, t) \underset{v \rightarrow +\infty}{\sim} & - \sum_i \beta_i(t) v^{\alpha_i(t)}, \\ \operatorname{Im} T(v, t) \underset{v \rightarrow -\infty}{\sim} & \sum_i \beta_i(t) (-v)^{\alpha_i(t)} \eta_i. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Разобьем область интегрирования на три части:  $(-\infty, -L_1)$ ,  $(-L_1, L_2)$  и  $(L_2, \infty)$ . Выберем параметры  $L_1, L_2$  так, чтобы в пределах первой и последней части были применимы асимптотические формулы (9.28). Выполняя интегрирование, мы получаем ПСКЭ в общем виде

$$\int_{-L_1}^{L_2} dv v^n \operatorname{Im} T(v, t) = \sum_i \frac{\beta_i(t)}{\alpha_i(t)+n+1} \left[ -L_2^{\alpha_i(t)+n+1} + (-1)^n \eta_i L_1^{\alpha_i(t)+n+1} \right]. \quad (9.29)$$

<sup>1)</sup> Можно сформулировать правила сумм, задав в них степени противоположным образом. Например, можно написать равенство (9.23a) при четных  $n$  и равенство (9.23b) при нечетных  $n$ . Такие правила сумм, впервые предложенные Шварцем [335], не имеют ничего общего со сверхсходимостью. Они основаны на весьма специальных предположениях об аналитичности по угловому моменту. Данный вопрос рассматривается, например, в книге Колинза и Сквайрса [23].

<sup>2)</sup> Далее правила сумм при конечной энергии именуется кратко ПСКЭ.

Прежде чем заняться некоторыми важнейшими применениями ПСКЭ к конкретным физическим проблемам, целесообразно разобрать общие идеи, на которых основан весь этот подход. Главную роль играет выбор параметров  $L_i$ . Конечно, ПСКЭ тем надежнее, чем больше значения  $L_i$ . Но возможности получения предсказаний с помощью правил сумм уменьшаются с увеличением этих параметров. Действительно, при любом значении  $L$  можно найти настолько большие  $L_i$ , что интеграл в левой части равенства (9.25) [или равенства (9.29)] будет в основном определяться областью высоких энергий. В таком случае соотношение (9.25) оказывается всего лишь необычной записью асимптотической формулы (9.24). В то же время слишком малое значение  $L$  потребовало бы включения слишком большого количества траекторий Редже в правую часть равенства (9.25).

Основная причина успеха, сопутствующего ПСКЭ, такова: согласно экспериментальным данным, многие ПСКЭ выполняются с хорошей точностью при значениях  $L$  порядка 2—4 ГэВ, если в правую часть равенства (9.25) включен лишь вклад главной траектории Редже. Вплоть до указанных энергий имеющиеся данные часто удается параметризовать путем обобщенного фазового анализа или основываясь на изобарной модели. При этом ПСКЭ устанавливают красивую феноменологическую связь между описанием процесса рассеяния в области низких и высоких энергий.

Эта связь видна особенно ясно, если представить равенство (9.25) в форме

$$\int_0^L dv v^n [\text{Im } T(v, t) - \text{Im } T^R(v, t)] = 0. \quad (9.30)$$

Отсюда следует, что реджевская амплитуда есть результат усреднения экспериментальной амплитуды. Если дополнительно предположить, что в интервале  $(0, L)$  функция  $\text{Im } A(v, t)$  может быть представлена в виде суммы вкладов одних лишь резонансов, то реджевский член можно будет рассматривать как результат усреднения резонансных вкладов.

Такова сущность понятия «дualности», содержание которого подробно исследуется в § 2, п. 4.

### 3. Применения правил сумм при конечной энергии

Мы проиллюстрируем связь ПСКЭ с экспериментом на примере пион-нуклонного рассеяния. В этом случае существующие экспериментальные данные несут надежную информацию, необходимую для подстановки в правила сумм.

Напомним анализ кинематики, проведенный в гл. 1, § 11. Амплитуда пион-нуклонного рассеяния может быть представлена в виде

$$T^{\beta\alpha} = T^+ \delta_{\alpha\beta} + T^- \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^\alpha], \quad (9.31)$$

$$T^\pm = A'^\pm(v, t) + \frac{1}{6} [(\gamma Q)(\gamma P)(\gamma \Delta)]_\Delta B'^\pm(v, t). \quad (9.32)$$

Мы предпочитаем формулу (9.32) разложения амплитуды по инвариантам [гл. 1, § 1, примечание к равенству (1.109)], так как при  $t = 0$  функции  $\text{Im } A'^\pm(v, 0)$  непосредственно связаны с сечениями:

$$\text{Im } A'^\pm(v, 0) = k [\sigma_t(\pi^- p) \pm \sigma_t(\pi^+ p)]. \quad (9.33)$$

Здесь  $k$  — импульс пиона в лабораторной системе отсчета.

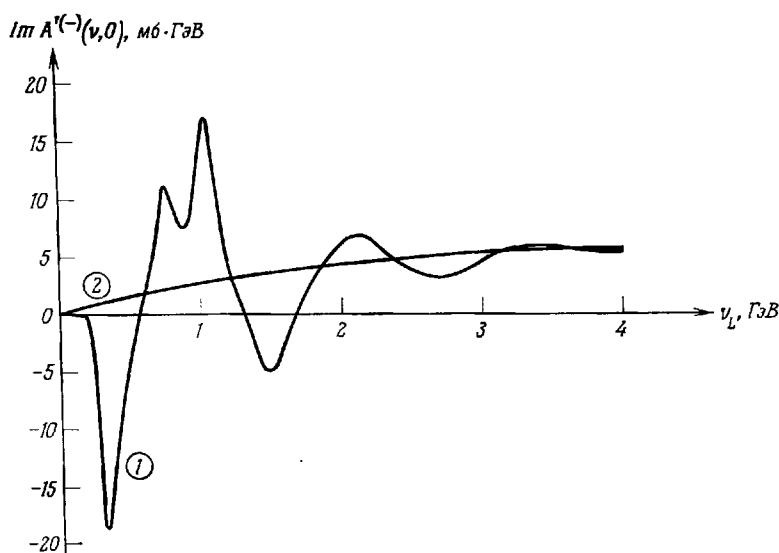
Наиболее плодотворным оказывается применение ПСКЭ к амплитудам, содержащимся в  $T^-$  и описывающим процесс с переворотом изоспина. Причину этого легко понять: анализ экспериментальных данных в области высоких энергий показывает, что основной вклад в  $T^-$  дает главная  $\rho$ -траектория.

В случае же рассеяния без перезарядки приходится, как известно, иметь дело с траекторией Померанчука, роль которой своеобразна и все еще несколько таинственна (см. следующий раздел), а также с  $P'$ -траекторией и, возможно, со сложной системой реджевских разрезов. Поэтому мы ограничимся рассмотрением рассеяния, протекающего с перезарядкой.

Наиболее точно известны из эксперимента полные сечения. Поэтому лучше всего проверено правило сумм для функции  $A'^-(\nu, 0)$ . Оно имеет вид

$$-\pi \frac{g_{\pi N}^2 m_{\pi}^2}{4m_N} + \frac{1}{m_N} \int_{m_N m_{\pi}}^L d\nu (\nu^2 - m_N^2 m_{\pi}^2)^{1/2} [\sigma_i(\pi^- p) - \sigma_i(\pi^+ p)] = \beta_{\rho}(0) \frac{L^{\alpha_{\rho}(0)+1}}{\alpha_{\rho}(0)+1}. \quad (9.34)$$

Подставляя сюда экспериментальные данные, мы получаем согласие между левой и правой частью уже при  $(L/m_N) \approx 3,5$  ГэВ. На фиг. 9.1 показано, как



Фиг. 9.1. График функции  $\text{Im } A'^-(\nu, 0)$ , заимствованный из работы [11]. Кривая 1 отвечает экспериментальным данным, кривая 2 — теории полюсов Редже.

это происходит: в рассматриваемой области энергий результат усреднения экспериментальной кривой хорошо совпадает с графиком реджевской функции.

Для проверки ПСКЭ при  $t \neq 0$  уже нельзя воспользоваться оптической теоремой. В этом случае мнимую часть физической амплитуды приходится заимствовать из данных фазового анализа. К сожалению, существующие данные не охватывают всего интервала энергий, ограниченного величиной порядка 3 ГэВ [такое значение  $L/m_N$  получено выше из сравнения равенства (9.34) с опытом]. Но для амплитуды  $\text{Im } B'^-$ , описывающей рассеяние с переверотом спина, процесс усреднения можно удовлетворительно выполнить уже при энергиях порядка 1 ГэВ. Сказанное объясняется тем, что все резонансы, имеющиеся в этой области, дают вклады одинакового знака в величину  $\text{Im } B'^-$  и в значительной мере перекрываются. Вследствие этого колебания функции  $\text{Im } B'^-$  исчезают очень быстро.

Напишем ПСКЭ для амплитуды  $B'^-$ . Асимптотическая форма функции  $\text{Im } B'^-(\nu, t)$  имеет вид

$$\text{Im } B'^-(\nu, t) \underset{\nu \rightarrow \infty}{\sim} \beta_{\rho}(t) \alpha_{\rho}(t) \nu^{\alpha_{\rho}(t)-1}. \quad (9.35)$$

Дополнительный множитель  $\alpha_p(t)$  (который далее играет очень важную роль) и показатель степени  $\alpha_p(t) - 1$  возникают по той причине, что амплитуда  $B'(v, t)$  описывает процесс, идущий с переворотом спина. В связи с этим ее разложение по парциальным волнам осуществляется с помощью функций  $P_l(\cos \theta)$ . Таким образом, можно написать другое ПСКЭ (справедливое при нечетных  $n$ ):

$$F_n(t) \equiv \frac{1}{L^n} \int_0^L dv v^n \operatorname{Im} B'(v, t) = \beta_p(t) \alpha_p(t) \frac{L^{\alpha_p(t)}}{\alpha_p(t) + n}. \quad (9.36)$$

Подставив в левую часть этого равенства известные данные фазового анализа пион-нуклонного рассеяния, а в правую часть — результат параметризации амплитуды с помощью  $\rho$ -траектории, мы достигаем удовлетворительного согласия даже при  $L$  порядка 1 ГэВ. Отметим лишь два важных обстоятельства.

1. Множитель  $\alpha_p(t)$  в соотношении (9.35) и в правой части равенства (9.36) обращается в нуль при  $t_0 \approx -0,5$  ГэВ<sup>2</sup>. И действительно, эксперимент показывает, что дифференциальное сечение имеет резко выраженный минимум при таком значении переменной  $t$ . Возникает вопрос, как может образоваться минимум интеграла, стоящего в левой части равенства (9.36). Оказывается, что вклады всех резонансов обращаются в нуль при значении  $t$ , лежащем между  $-0,3$  и  $-0,6$  ГэВ<sup>2</sup>. В результате интеграл исчезает при  $t$  порядка  $-0,4$  ГэВ<sup>2</sup>. Важно, что вклад резонансов играет основную роль в образовании нуля, присущего реджевскому выражению для мнимой части амплитуды. Это сильный аргумент в пользу дуальности, т. е. взаимной дополненности между описанием рассеяния элементарных частиц с точки зрения резонансов и реджевским описанием этого рассеяния.

2. Используя одновременно правила сумм при  $n = 1$  и при  $n = 3$ , можно получить формулу

$$\alpha_p(t) = \frac{3F_3(t) - F_1(t)}{F_1(t) - F_3(t)}. \quad (9.37)$$

Как видно из табл. 9.1<sup>1)</sup>, эта формула дает удовлетворительные значения низкоэнергетических параметров для реджевских траекторий.

Таблица 9.1

$t$	$\alpha_p(t)$ по формуле (9.37)	$\alpha_p(t)$ по высокоэнергетическим данным
$m_\rho^2$	$1,0 \pm 0,3$	1
0	$0,4 \pm 0,2$	$0,56 - 0,7$
$-0,2$ ГэВ <sup>2</sup>	$0,3 \pm 0,3$	$0,34 - 0,40$

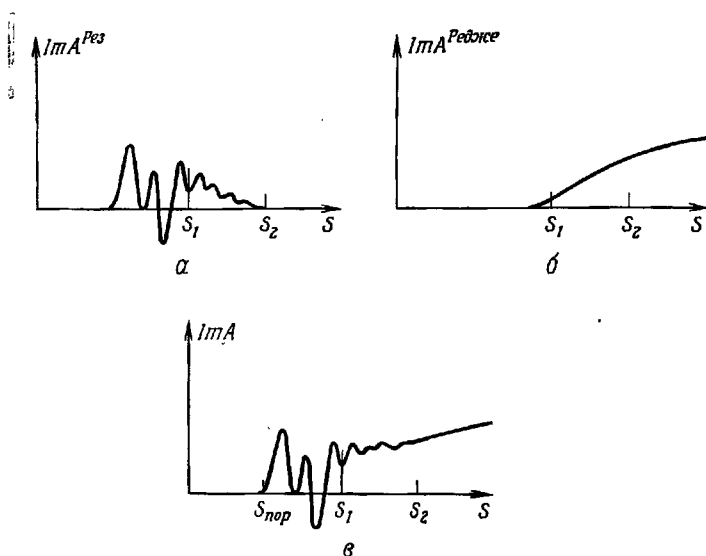
Таким образом, в применении к пион-нуклонному рассеянию с перезарядкой ПСКЭ дают вполне удовлетворительные результаты.

Применяя ПСКЭ к другим процессам, мы располагаем значительно меньшими сведениями об эффективных сечениях или о парциальных амплитудах. В связи с этим приходится полагаться на изобарные модели. Это приводит нас к упомянутому ранее фундаментальному вопросу о связи между описанием рассеяния, основанным на резонансах, и реджевским описанием.

<sup>1)</sup> Таблица взята из работы [14].

## 4. Дуальность

Чтобы разумно определить общие правила насыщения ПСКЭ, мы постараемся извлечь как можно больше указаний из экспериментальных данных. Эти данные показывают, в частности, что в области высоких энергий амплитуда может быть достаточно хорошо параметризована одним или несколькими реджевскими членами. В то же время мы хорошо понимаем также поведение амплитуды в области низких энергий. Согласно общему мнению, это поведение определяется вкладом резонансов. В случае пион-нуклонного рассеяния, который наиболее благоприятен в экспериментальном отношении, найденные из опыта фазы рассеяния удовлетворительно описываются при помощи резонансов вплоть до энергий порядка 2 ГэВ.



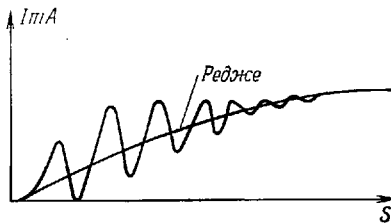
Фиг. 9.2. График амплитуды, образованной путем сложения вклада резонансов (а) и реджевского вклада (б) в соответствии с интерференционной моделью.

Теперь возникает важный вопрос, как параметризовать амплитуду в области промежуточных энергий. Создается впечатление, что в этой области неприменима ни изобарная модель с малым числом резонансов, ни параметризация амплитуды с помощью небольшого числа реджевских членов. В этой промежуточной области экспериментальная кривая представляется слишком плавной, чтобы описывать ее, учитывая только резонансы. В то же время эта кривая выглядит там недостаточно гладкой, чтобы предположить полное отсутствие резонансных эффектов.

В связи с этим напрашивается способ параметризации, основанный на суперпозиции двух эффектов: эффекта резонансов (медленно исчезающего с ростом энергии) и реджевского эффекта (медленно нарастающего). Такая модель, известная под названием «интерференционной», проиллюстрирована на фиг. 9.2. Полная функция  $\text{Im } A$  (в), представленная на фиг. 9.2, получается путем суммирования вклада резонансов а и реджевского вклада б.

Интерференционная модель не встречала никаких возражений до тех пор, пока не начали заниматься насыщением ПСКЭ. В своей фундаментальной работе [11] Долен, Хорн и Шмид подвергли повторному детальному анализу экспериментальные данные о фазовых сдвигах в пион-нуклонном рассеянии. Они установили, что в области промежуточных энергий достаточно учесть вклад всех вновь открытых резонансов, чтобы правильно воспроизведе-

сти экспериментальные данные. Оказалось, что к вкладу резонансов не нужно добавлять сколько-нибудь существенного реджевского фона. Напротив, выяснилось, что «фон», полученный экстраполяцией реджевского члена из области высоких энергий, совпадает с результатом усреднения экспериментальной кривой при промежуточных энергиях. В частности, это имеет место в случае рассеяния с перезарядкой (фиг. 9.1).



Фиг. 9.3. Реджевский член как результат усреднения вклада резонансов.

Все это привело Долену, Хорна и Шмида [11] к гипотезе о *дуальности*, т. е. к предположению, что реджевский член совпадает с усредненным вкладом резонансов (фиг. 9.3). Это предположение можно записать в виде неравенства <sup>1)</sup>

$$\frac{\int_{L_1}^{L_2} d\nu (\text{Im } T^{\text{рез}} - \text{Im } T^R)}{\int_{L_1}^{L_2} d\nu \text{Im } T^R} \ll 1. \quad (9.38)$$

Итак, формулы для амплитуды в области промежуточных энергий имеют следующий вид:

В интерференционной модели

$$\text{Im } T(\nu) = \text{Im } T^{\text{рез}}(\nu) + \text{Im } T^R(\nu). \quad (9.39)$$

В дуальной модели

$$\text{Im } T(\nu) = \text{Im } T^{\text{рез}}(\nu) + \text{Im } T^R(\nu) - [\text{Im } T^{\text{рез}}(\nu)]_{\text{ср}}. \quad (9.40)$$

Позже мы рассмотрим особые случаи, в которых дуальность нарушается.

Следует отметить, что вопрос о выборе между интерференционной и дуальной моделями нелегко решить на основе одних лишь экспериментальных данных. Это объясняется трудностью однозначного определения резонанса, особенно широкого. С точки зрения теоретика, резонанс можно отождествить с полюсом амплитуды (как аналитической функции энергии) на втором листе комплексной плоскости. Но эксперимент дает лишь значения амплитуды на действительной оси. Поэтому возникает практический вопрос, какой фон нужно вычесть, прежде чем искать точное положение, ширину и другие параметры резонанса. В рамках интерференционной модели необходимо вычесть реджевский фон (вообще говоря, большой) и затем провести фазовый анализ, чтобы найти резонансы. Если же применяется дуальная модель, то вычитать ничего не нужно.

Причины, побуждающие отдать предпочтение дуальной модели перед интерференционной, носят в основном теоретический характер. Ясно, что в рамках интерференционной модели в левую часть ПСКЭ нужно подставить выражение (9.39). Реджевский же член сам по себе удовлетворяет ПСКЭ, так как обладает соответствующими аналитическими свойствами и реджев-

<sup>1)</sup> Здесь  $T^{\text{рез}}$  — вклад резонансов,  $T^R$  — реджевский вклад. — *Прим. перев.*

ской асимптотикой. Вследствие этого получается равенство

$$\int_0^L dv v^n T^{\text{res}}(v, t) = 0. \tag{9.41}$$

Таким образом, при каждом значении переменной  $t$  правило сумм (9.41) приходится насыщать резонансами, энергия которых меньше  $L$ . Очень маловероятно, что это можно сделать удовлетворительно. Если же мы воспользуемся дуальной схемой, то придем к правилу сумм

$$\int_0^L dv v^n \text{Im } T^{\text{res}}(v, t) = \sum_i \beta_i(t) \frac{L^{\alpha_i(t)+n+1}}{\alpha_i(t)+n+1}. \tag{9.42}$$

Это правило сумм вполне удовлетворительно связывает резонансы прямого канала с реджевскими параметрами. В § 2, п. 7 мы рассмотрим изящный расчет, который проводится методом бутстрапа, основанного на соотношении (9.42).

Необходимо отметить важное исключение из дуальной схемы. Насыщение ПСКЭ, в которые дает вклад вакуумная траектория (траектория Померанчука), нельзя осуществить одними лишь резонансами. Возможное обобщение дуальной схемы, позволяющее преодолеть эту трудность, предложено Харари [336—338] и Фройндом [339]. Их идея состоит в том, что полюс Померанчука не имеет отношения к усредненному вкладу резонансов, а связан дуальным образом с нерезонансным фоном. С практической точки зрения это значит прежде всего, что простая схема, отвечающая равенству (9.42), применима только в случае рассеяния с перезарядкой. Для процессов, протекающих без перезарядки, следует писать

$$\int_0^L dv v^n \text{Im } T^{\text{res}}(v, t) = \sum_{\substack{\text{без полюса} \\ \text{Померанчука}}} \beta_i(t) \frac{L^{\alpha_i(t)+n+1}}{\alpha_i(t)+n+1}. \tag{9.43}$$

Все это, вероятно, говорит о том, что до полного объяснения «феномена Померанчука» еще очень далеко. Пока не достигнут успех в теоретическом понимании этого вопроса, процедуру, предложенную Харари и Фройндом, следует рассматривать как шаг, позволяющий развивать далее направление дуальности.

В дуальной схеме реджевский член совпадает с усредненным вкладом резонансов, как описано выше. Возникает важный вопрос, связанный с концепцией дуальности: нельзя ли развить эти идеи дальше и предположить, что реджевским членом определяются не только свойства усредненной амплитуды, но и положение отдельных резонансов.

Шмид [340] показал, что при разложении реджевской амплитуды

$$T^{+R}(v, t) = \frac{\beta(t)}{\sin \pi \alpha(t)} \{ \eta + \exp [ -i \pi \alpha(t) ] \} v_{\frac{1}{2}}^{\alpha(t)} \tag{9.44}$$

по парциальным волнам, получают петли на диаграммах Арганда, подобные тем, которые возникают при наличии резонансов. Энергию, отвечающую вершине петли, т. е. переходу фазы через  $90^\circ$ , можно было бы истолковать как массу резонанса. В частности, исследуя таким образом пион-нуклонное рассеяние, Шмид обнаружил примечательное соответствие своих результатов с расположением резонансов, известных из опыта [340, 341]. Ясно, что петли на диаграммах Арганда обусловлены сигнатурным множителем  $\exp [ -i \pi \alpha ]$ . Но специфические свойства петель (например, локализация «резонансов») определяются более частными предположениями, такими, как зависимость вычетов от переменной  $t$ .



В заключение отметим, что эта работа Шмида имела большое историческое значение, хотя часть описанных совпадений явилась, быть может, случайной. Работа Шмида навела на мысль, что в результате развития идей дуальности должна быть построена единая амплитуда, обладающая реджевским поведением и содержащая в то же время информацию о положении резонансов. Иными словами, такая амплитуда должна определять положение резонансов как в  $s$ -, так и в  $t$ -канале.

Более последовательное решение этой задачи получено на основе представления Венециано (§ 3). Венециано подходит к изложенной программе с другого конца, поскольку он строит физическую амплитуду из одних лишь резонансов. Оказывается, что эта амплитуда имеет правильное реджевское поведение во всех каналах. Интересно, что в случае амплитуды Венециано множитель  $\exp(-i\lambda\alpha)$  действительно связан с положением резонансов в  $s$ -канале.

### 5. Отсутствие экзотических резонансов и обменное вырождение

Одно из первых применений изложенных идей связано со следующим важным экспериментальным фактом. В то время как в некоторых процессах (например,  $K^-p$ ,  $K^-n$ ,  $\pi^-p$ ,  $pp$ ,  $\bar{p}n$  и т. д.) обнаруживается большое число резонансов, в других процессах ( $K^+p$ ,  $K^+n$ ,  $\pi^+\pi^+$ ,  $pp$  и т. д.) резонансы отсутствуют. В таблице экспериментально найденных резонансов мы видим только  $SU(3)$ -синглеты или октеты среди бозонов и октеты или декуплеты среди барионов. Исходя из представлений о кварках, можно сказать, что обнаруживаются только бозоны со структурой  $(qq)$  и барионы со структурой  $(qqq)$ . «Экзотические резонансы», для построения которых требуется большее число кварков, не были найдены, они отсутствуют или играют очень незначительную роль в изучаемой нами области энергий.

Как разъяснялось выше, реджевская асимптотика дается усредненным вкладом резонансов. Поэтому реджевский член должен быть малым в экзотических каналах. Имеется, конечно, важное исключение, обусловленное вкладом полюса Померанчука, не зависящим от энергии. Сказанное действительно подтверждается экспериментом. Так, сечения процессов, не содержащих резонансов в прямом канале, становятся постоянными уже при энергиях порядка 10 ГэВ. В то же время сечения процессов, в которых могут возникать неэкзотические резонансы, все еще сильно меняются в этой области и приближаются к асимптотическим значениям при значительно более высоких энергиях.

Рассмотрим подробнее реджевскую структуру в перекрестном канале. Обратимся к простейшему примеру  $\pi^+\pi^-$ -рассеяния. Трем каналам соответствуют процессы

$$\begin{aligned} s\text{-канал: } \pi^+ + \pi^- &\rightarrow \pi^+ + \pi^-, \\ t\text{-канал: } \pi^+ + \pi^- &\rightarrow \pi^+ + \pi^-, \\ \bar{s}\text{-канал: } \pi^+ + \pi^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^+. \end{aligned}$$

Согласно нашим правилам, резонансы должны существовать в  $s$ - и  $t$ -каналах, но не в  $\bar{s}$ -канале.

Напишем теперь ПСКЭ при фиксированном  $t$  [равенство (9.29)] применительно к случаю, когда перекрестная симметрия относительно замены  $s \leftrightarrow \bar{s}$  отсутствует:

$$\begin{aligned} f_n(L_1, L_2) &\equiv \int_{-L_1}^{L_2} dv v^n \operatorname{Im} T(v, t) = \\ &= \sum_i \frac{\beta_i(t)}{\alpha_i(t) + n + 1} \left[ -L_2^{\alpha_i(t) + n + 1} + (-1)^n \eta_i L_1^{\alpha_i(t) + n + 1} \right]. \end{aligned} \quad (9.45)$$

Можно попытаться удовлетворить этому правилу сумм, подставляя в правую часть вклад двух ведущих реджевских траекторий, обладающих противоположной сигнатурой, а именно:

$$\begin{aligned} &\rho_0\text{-траектории, для которой } \eta = -1, \\ &f_0\text{-траектории, для которой } \eta = 1. \end{aligned}$$

Чтобы оценить левую часть равенства (9.45), используем дуальность и факт отсутствия (экзотических) резонансов в  $\bar{s}$ -канале. Прежде всего отметим, что функция  $\text{Im } T(\nu, t)$  оценивается только на основе вклада резонансов. Поэтому (из-за отсутствия экзотических резонансов) величина  $\text{Im } T(\nu, t)$  будет очень малой при отрицательных  $\nu$ . Это значит, что функция  $f_n(L_1, L_2)$  фактически не зависит от  $L_1$ . Отсюда следует, что

$$\frac{\partial f_n}{\partial L_1} = L_1^n (\beta_{\rho_0} L_1^{\alpha_{\rho_0}} - \beta_{f_0} L_1^{\alpha_{f_0}}) = 0, \tag{9.46}$$

т. е.

$$\alpha_{\rho_0} = \alpha_{f_0}, \tag{9.47}$$

$$\beta_{\rho_0} = \beta_{f_0}. \tag{9.48}$$

Из равенства (9.47) вытекает, что  $\rho_0$ - и  $f_0$ -траектории совпадают и имеется лишь одна главная траектория  $\alpha_0(t)$ . В  $t$ -канале должны существовать физические резонансы, отвечающие переходам функции  $\alpha_0(t)$  как через четные, так и через нечетные целые значения:

$$\alpha_0(t) = n; \tag{9.49}$$

это так называемое обменное вырождение [336, 342, 343].

Равенства (9.46)–(9.48) можно получить и без помощи ПСКЭ. Нужно лишь учесть, что при фиксированном  $t$  и отрицательных значениях  $\nu$ , достаточно больших по абсолютной величине, реджевское поведение функции  $\text{Im } T(\nu, t)$  определяется выражением

$$\text{Im } T(\nu, t) \underset{\nu \rightarrow -\infty}{\sim} \beta_{f_0}(t) (-\nu)^{\alpha_{f_0}(t)} - \beta_{\rho_0}(t) (-\nu)^{\alpha_{\rho_0}(t)}. \tag{9.50}$$

Дуальность требует, чтобы правая часть равенства (9.50) совпадала с усредненным вкладом резонансов, которые, однако, не существуют. Таким образом, малый реджевский вклад в функцию  $\text{Im } T(\nu, t)$  является следствием хорошей взаимной компенсации траекторий, обладающих противоположной сигнатурой.

Сказанное выше легко пояснить, пользуясь аналогией с потенциальным рассеянием (гл. 1, § 8). Рассмотрим резонансы в  $t$ -канале. Можно подойти к вопросу следующим образом: путем обмена частицами в  $s$ - и  $\bar{s}$ -каналах создается потенциал, ответственный за существование резонансов в  $t$ -канале. Частицы, присутствующие в  $s$ -канале, порождают «прямой» потенциал  $\nu_d$ , а частицы, имеющиеся в  $\bar{s}$ -канале, — обменный потенциал  $\nu_e$ . Резонансы в  $t$ -канале, обладающие четным (нечетным)  $l$ , обусловлены эффективным потенциалом  $\nu_d \pm \nu_e$ . Если нет частиц в  $\bar{s}$ -канале, то  $\nu_e = 0$ , так что один и тот же потенциал порождает резонансы с четным и нечетным значением  $l$ . Поэтому все они лежат на одной траектории.

## 6. Дуальные диаграммы

Дуальные диаграммы, введенные Харари и Рознером<sup>1)</sup>, позволяют графически представить те ограничения, которые вытекают из дуальности и из отсутствия экзотических резонансов. Основная идея состоит в том,

<sup>1)</sup> Наряду с работами [344, 345] см. также работу [346].

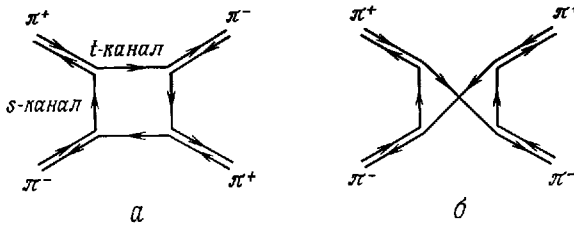
чтобы показать [на диаграмме кварковую структуру барионов и мезонов, а именно:

1) поскольку неэкзотические барионы состоят из трех кварков, они изображаются тремя кварковыми линиями, направленными в одну и ту же сторону;

2) поскольку неэкзотические мезоны состоят из одного кварка и одного антикварка, они изображаются двумя кварковыми линиями, направленными в противоположные стороны.

Рассматривая определенный процесс, нужно изобразить на чертеже все возможные перераспределения линий, ведущие к образованию вылетающих частиц. Таким путем получается множество дуальных диаграмм.

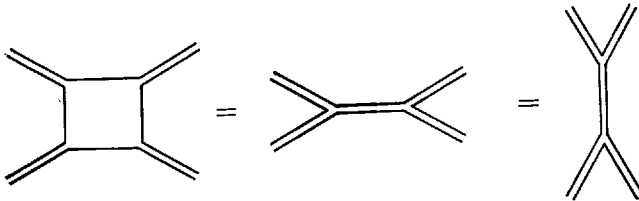
Суть такого представления — в топологической структуре диаграмм. Если картина перераспределения кварковых линий может быть изображена



Фиг. 9.4. Дуальные диаграммы, описывающие  $\pi^+\pi^-$ -рассеяние.

Все частицы рассматриваются как входящие. а — диаграмма  $(s, t)$ , б — диаграмма  $(s, \bar{s})$  или  $(t, \bar{s})$ .

на плоскости так, чтобы эти линии не пересекались, то диаграмма называется *планарной*. В противном случае ее называют *непланарной*. Правило, которое, как мы увидим, совпадает с требованием дуальности и отсутствия экзотических резонансов, состоит в следующем. Только планарные диаграммы дают конечный вклад в мнимую часть амплитуды, а непланарные вклады чисто действительны.



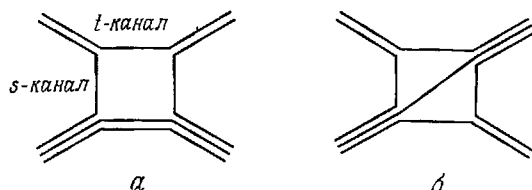
Фиг. 9.5. График, поясняющий дуальную точку зрения на резонансы.

Проиллюстрируем это правило на рассмотренном выше примере рассеяния заряженных пионов. Кинематика остается такой же, как в предыдущем разделе. В частности, существует перекрестная симметрия относительно замены  $s \leftrightarrow t$ . Дуальные диаграммы показаны на фиг. 9.4.

Из фиг. 9.4 видно, что только планарная  $(s, t)$ -диаграмма дает вклад в мнимую часть амплитуды. Непланарные  $(s, \bar{s})$ - и  $(t, \bar{s})$ -диаграммы вклада в мнимую часть амплитуды не вносят. Дуальные диаграммы позволяют также проиллюстрировать эквивалентность резонансов в одном канале и обмена реджевскими полюсами в другом. Это можно сделать, деформируя диаграмму без нарушения картины взаимного пересечения линий. Так, планарной диаграмме, показанной на фиг. 9.4, а, отвечает диаграмма фиг. 9.5. Ясно, что сумма резонансов (или реджевских полюсов) в  $s$ -канале эквивалентна сумме реджевских полюсов (или резонансов) в  $t$ -канале.

Мы увидим в следующем разделе, что дуальные диаграммы приобретают более глубокое и более точное значение в связи с дуальной резонансной моделью, предложенной Венециано.

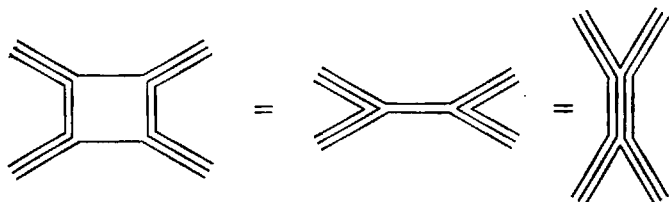
Рассмотрим теперь кратко случай рассеяния бозонов на барионах. В качестве примера выберем пион-нуклонное рассеяние. Планарные диаграммы имеются для всех трех пар переменных  $(s, t)$ ,  $(\bar{s}, t)$  и  $(s, \bar{s})$ , как показано на фиг. 9.6. Этого и следовало ожидать, поскольку ни в одном канале не может быть экзотических резонансов.



Фиг. 9.6. Дуальные диаграммы, описывающие  $\pi N$ -рассеяние.

$a$  — планарная диаграмма  $(s, t)$  или  $(\bar{s}, t)$ ,  $b$  — планарная диаграмма  $(s, \bar{s})$ .

Последний случай, который мы рассмотрим, — это барион-антибарионное рассеяние. В этом случае дуальные диаграммы говорят о несовместимости принципа дуальности с отсутствием экзотических резонансов (в чем можно убедиться также путем тщательного анализа ПСКЭ). Положение вещей проиллюстрировано на фиг. 9.7. Полностью планарная диаграмма изображает, с одной стороны, обмен неэкзотическими объектами в  $s$ -канале, а с другой стороны, обмен экзотическими объектами в  $t$ -канале.



Фиг. 9.7. Дуальные диаграммы, описывающие барион-барионное рассеяние.

Трудность, обнаруженная только что, указывает на несколько условный характер всей схемы. Дуальность (или точнее *планарная дуальность*) говорит нам, что всю совокупность взаимодействий барионов и бозонов нельзя описать вполне непротиворечиво, не вводя экзотических резонансов. Но ограничиваясь рассмотрением одних лишь бозонов, можно полностью избежать экзотических резонансов. Поэтому есть основания полагать, что экзотические резонансы рождаются со значительной вероятностью только в барион-антибарионных столкновениях (это кажется правдоподобным также с экспериментальной точки зрения). Мы надеемся, что будущие исследования дадут вполне удовлетворительное решение этого вопроса.

### 7. Бутстрап, основанный на дуальности и правилах сумм при конечной энергии

Последовательное применение ПСКЭ вместе с предположением о дуальности открывает новые возможности для построения схемы бутстрапа [347—351].

Рассмотрим процесс, симметричный относительно любой перестановки переменных  $s, t, \bar{s}$ . В таком случае бутстрап обычно проводится следующим

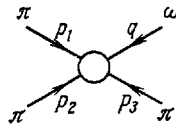
образом. Предположим, что нас интересует спектр резонансов в  $s$ -канале. «Потенциал», порождающий эти резонансы, возникает вследствие обмена частицами в  $t$ - и  $s$ -каналах. Но в последних двух каналах имеются те же частицы, что и в  $s$ -канале. Это обстоятельство приводит к ряду условий самосогласованности, которые могут сильно ограничивать параметры частиц. Таким путем надеются определить эти параметры полностью.

Старые формы бутстрапа основывались на слишком грубых приближениях. К присущим им недостаткам нужно отнести полное пренебрежение неупругими каналами и далеко идущее упрощение интегральных уравнений, выражающих условия самосогласованности. Поэтому, несмотря на привлекательность и логичность принципа бутстрапа, он не привел в свое время к существенным успехам.

Посмотрим теперь, как этот принцип выглядит с точки зрения ПСКЭ. Обратимся снова к задаче, в которой мы имеем дело с симметрией относительно перестановки переменных  $s$ ,  $t$ ,  $s$ , и напомним ПСКЭ в виде

$$\int_0^L dv \operatorname{Im} T(v, t) v^n = \beta(t) \frac{L^{\alpha(t)+n+1}}{\alpha(t)+n+1} + \dots \quad (9.51)$$

Можно попытаться построить непротиворечивую схему, основываясь на единственной траектории, параметры которой  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  входят в правую



Фиг. 9.8. Кинематика процесса  $\pi + \pi \rightarrow \pi + \omega$ .

часть равенства (9.51). В силу предположения о дуальности насыщение левой части этого равенства нужно осуществить одними лишь резонансами. Мы приходим к схеме бутстрапа, подставляя в левую часть только резонансы, лежащие на траектории  $\alpha(t)$ . Параметры этих резонансов опять-таки однозначно определяются функциями  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ . Ограничения, порождаемые бутстрапом, еще более усиливаются, если предположить, что траектории прямолинейны и что функция  $\beta(t)$  имеет достаточно простой вид. Мы увидим, что такая схема, содержащая лишь одну траекторию, оказывается удачной при достаточно малом значении  $L$ . В общем случае нужно дополнительно учитывать вклады дочерних траекторий, чтобы обеспечить непротиворечивость схемы (в силу кинематических ограничений при  $t = 0$  следует ожидать наличия дочерних траекторий; см. гл. 1, § 9).

Весьма удобен для исследования процесс  $\pi + \pi \rightarrow \pi + \omega$ . Он был рассмотрен Адемолло, Рубинштейном, Венециано и Вирасоро [348—351]. Основные преимущества, связанные с выбором этого процесса, таковы:

- 1) амплитуда процесса выражается через одну инвариантную функцию и обладает полной перекрестной симметрией;
- 2) отсутствует траектория Померанчука, так что о ней можно не беспокоиться;
- 3) не могут рождаться экзотические частицы;
- 4) главный эффект создается  $\rho$ -траекторией (и, возможно, ее дочерними траекториями).

Кинематика процесса показана на фиг. 9.8. Все импульсы рассматриваются как направленные внутрь диаграммы. Приняты следующие обозначения:  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  — импульсы трех пионов,  $q$  — импульс  $\omega$ -мезона,  $a_\mu$  — вектор поляризации  $\omega$ -мезона. Зависимость амплитуды от изоспина легко

выделить в отдельный множитель:

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} T. \quad (9.52)$$

Далее, исходя из лоренц-инвариантности и закона сохранения четности можно написать

$$T = A(s, t, \bar{s}) \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_1^\mu p_2^\nu p_3^\rho a^\sigma. \quad (9.53)$$

Таким образом, вся динамика процесса описывается единственной инвариантной функцией  $A(s, t, \bar{s})$ , которая симметрична относительно перестановки любой пары переменных  $s, t, \bar{s}$ . Конечно,

$$s + t + \bar{s} \equiv \sum = 3m_\pi^2 + m_\omega^2 \approx 0,67 \text{ ГэВ}^2. \quad (9.54)$$

Наконец, мы видим, что в каждом из трех одинаковых каналов имеются только промежуточные состояния, обладающие изоспином 1, нечетным спином  $J$ , отрицательной пространственной четностью и отрицательной зарядовой четностью.

Чтобы получить ПСКЭ, нужно прежде всего написать реджевскую формулу, например при фиксированном  $t$ . В  $t$ -канале в соответствии с законами сохранения может существовать только  $\rho$ -траектория (или другие траектории с точно такими же квантовыми числами). В асимптотике амплитуды преобладает  $\rho$ -траектория, так что

$$A(s, t, \bar{s}) \equiv A(\nu, t) \underset{\nu \rightarrow \infty}{\sim} \beta(t) \frac{1 - \exp[-i\pi\alpha_\rho(t)]}{\sin \pi\alpha_\rho(t)} \left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^{\alpha_\rho(t)-1}, \quad (9.55)$$

где  $\nu_1$  — размерная постоянная, определяющая «масштаб энергии» в данном процессе. Очевидно, что форма показателя степени  $\alpha_\rho - 1$  обусловлена единичным спином внешнего  $\omega$ -мезона.

ПСКЭ для величины  $\nu^n \text{Im } A$  можно написать только при нечетном  $n$ , так как функция  $\text{Im } A(\nu, t)$  нечетна по  $\nu$ . При четном  $n$  получилось бы, конечно, тривиальное тождество. Первое нетривиальное правило сумм имеет вид

$$\int_0^L d\nu \nu \text{Im } A(\nu, t) = \frac{L^2 \beta(t)}{\alpha_\rho(t) + 1} \left(\frac{L}{\nu_1}\right)^{\alpha_\rho(t)-1}. \quad (9.56)$$

Как уже разъяснялось, равенство (9.56) можно использовать в качестве условия бутстрапа для функций  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ , если исходить из дуальности. В этом случае нужно осуществить насыщение левой части соотношения (9.56) резонансами, имеющимися в  $s$ -канале. Но те же самые резонансы лежат на реджевской траектории в  $t$ -канале. Поскольку все три канала одинаковы, равенство (9.56) можно превратить в условие самосогласованности для функций  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ . Это ведет к новой форме бутстрапа.

Проследим подробнее, как это происходит. Прежде всего примем, что  $\rho$ -траектория прямолинейна:

$$\alpha_\rho(t) = \alpha'(t - m_\rho^2) + 1. \quad (9.57)$$

Далее, потребуем, чтобы функция  $\beta(t)$  обращалась в нуль во всех точках, в которых  $\alpha_\rho(t)$  принимает отрицательные целые значения [см. гл. 1 § 7 и, в частности, равенства (1.77), (1.78)]. Более того, из-за переворота спина в данном процессе (гл. 1, § 11) функция  $\beta(t)$  должна иметь нуль также при  $\alpha_\rho(t) = 0$ . Поэтому можно написать

$$\beta(t) = \frac{\bar{\beta}(t)}{\Gamma(\alpha(t))}. \quad (9.58)$$

Экспоненциальная зависимость вычета от переменной  $t$  уже учтена неявно при выборе размерного параметра  $\nu_1$ . Поэтому  $\bar{\beta}(t)$  можно считать медленно

меняющейся функцией переменной  $t$  в интересующей нас области. Самосогласованность этого предположения будет подтверждена результатами расчета.

Начнем с выбора «предела обрезания»  $L$ . Расположим этот предел выше первого резонанса, существующего в  $s$ -канале ( $\rho$ -мезона), но ниже следующего резонанса (предполагается, что последний лежит на  $\rho$ -траектории при 1680 МэВ и  $J = 3$ ).

Тогда при  $\nu > L$  можно написать

$$\text{Im } A(\nu, t) = \frac{1}{\alpha'} \bar{\beta}(m_\rho^2) \delta(\nu - \nu_\rho), \quad (9.59)$$

где

$$\nu_\rho = \frac{1}{4}(2m_\rho^2 + t - \Sigma).$$

В предположении, что величина  $\bar{\beta}(t)$  постоянна в интересующей нас области, из равенства (9.56) следует соотношение

$$4\nu_\rho = \frac{\alpha_\rho(t)}{\alpha'} \frac{(2L\alpha')^2}{\Gamma(\alpha_\rho(t)+2)} (kL\alpha')^{\alpha_\rho(t)-1}, \quad (9.60)$$

где мы положили  $\nu_1 = (k\alpha')^{-1}$ . Параметр  $\bar{\beta}$ , определяющий величину вычета, выпал из равенства (9.60). Это равенство связывает две функции переменной  $t$ . Левая часть является полиномом первой степени; правая часть — трансцендентной функцией переменной  $t$ . Конечно, они не могут совпадать при всех значениях  $t$ . Этого и следовало ожидать в силу приближений, принятых при выводе равенства (9.60).

Поэтому мы потребуем лишь грубого согласия в определенной области значений  $t$ . Прежде всего видно, что левая часть равенства (9.60) обращается в нуль при  $t = \Sigma - 2m_\rho^2 \approx -0,5 \text{ ГэВ}^2$ . Подобный же нуль имеет и правая сторона, так как в соответствии с экспериментом функция  $\alpha_\rho(t)$  исчезает примерно при том же значении  $t$ . Предполагая на этом основании, что  $\alpha_\rho(\Sigma - 2m_\rho^2) = 0$ , мы приходим к соотношению

$$4\nu_\rho = \frac{\alpha_\rho(t)}{\alpha'} \quad (9.61)$$

и получаем следующую оценку наклона  $\rho$ -траектории:

$$\nu' = \frac{1}{3m_\rho^2 - \Sigma} \approx 0,92 \text{ ГэВ}^{-2}. \quad (9.62)$$

Это хорошо согласуется с экспериментальным значением  $\sim 1 \text{ ГэВ}^{-2}$ .

Из равенств (9.61) и (9.60) следует, что

$$1 = \frac{(2L\alpha')^2}{\Gamma(\alpha_\rho(t)+2)} (kL\alpha')^{\alpha_\rho(t)-1}. \quad (9.63)$$

Соотношение (9.63) содержит свободный параметр  $k$ , связанный с размерной постоянной  $\nu_1$ , и параметр обрезания  $L$ . Последний должен лежать между величиной  $\nu_\rho$ , отвечающей  $\rho$ -резонансу, и величиной

$$\nu_{\rho'} = \nu_\rho + \frac{1}{\alpha'},$$

которая соответствует  $\rho'$ -резонансу, следующему за  $\rho$ .

Эти ограничения можно записать в виде

$$L = \frac{1}{4\alpha'} (\alpha_\rho + \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 4. \quad (9.64)$$

Соотношение (9.63) окончательно принимает форму

$$1 = \left[ \frac{1}{2} (\alpha_\rho + \varepsilon) \right]^{\alpha_\rho(t)+1} \frac{1}{\Gamma(\alpha_\rho(t)+2)} \left( \frac{1}{2} k \right)^{\alpha_\rho(t)-1}. \quad (9.65)$$

Мы сейчас увидим, что можно добиться выполнения равенства (9.65) при  $-1 < \alpha_\rho < 1$  путем подходящего выбора параметров  $\varepsilon$  и  $k$ . Прежде всего при  $\alpha_\rho = -1$  зависимость от  $\varepsilon$  исчезает и мы получаем

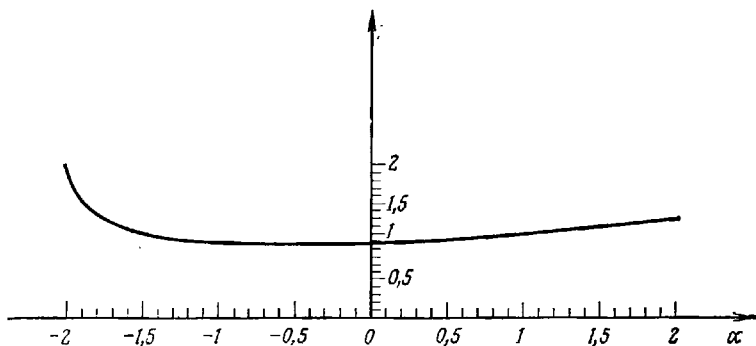
$$k = 2, \tag{9.66}$$

так что размерная постоянная  $\nu_1$  оказывается полностью фиксированной.

Из равенств (9.62) и (9.66) видно, что таким простым применением ПСКЭ полностью определяются все параметры в реджевской формуле (9.55), если масса  $\rho$ -мезона задана. Результат можно записать в очень удобном виде

$$A(s, t, \bar{s}) \underset{\substack{s \rightarrow \infty \\ i \text{ фиксировано}}}{\sim} \bar{\beta} \frac{[-\alpha_\rho(s)]^{\alpha_\rho(t)-1} + [-\alpha_\rho(\bar{s})]^{\alpha_\rho(t)-1}}{\Gamma(\alpha_\rho(t)) \sin \pi \alpha_\rho(t)} \tag{9.67}$$

Данное соотношение является первым шагом на пути к построению представления Венециано (которое будет рассмотрено в § 3).



Фиг. 9.9. График функции  $\Phi(\alpha)$  [формула (9.68)] при  $\varepsilon = 2$ .

Вернемся к равенству (9.65). Используя значение (9.66) параметра  $k$ , это равенство можно привести к виду

$$\Phi(\alpha) \equiv \left[ \frac{1}{2} (\alpha_\rho + \varepsilon) \right]^{-\alpha_\rho+1} \Gamma_{\frac{1}{2}}^{-1}(\alpha_\rho + 2) = 1. \tag{9.68}$$

Полагая в формуле (9.68)  $\alpha_\rho = 0$ , находим, что

$$\varepsilon = 2. \tag{9.69}$$

Из фиг. 9.9 видно, что при этом значении  $\varepsilon$  функция  $\Phi(\alpha)$  почти постоянна и равна единице.

Выбор (9.69) значения  $\varepsilon$  вполне логичен, поскольку он соответствует обрезанию, выполненному как раз посередине между последним резонансом, включенным в левую часть ПСКЭ, и первым резонансом, не включенным в нее <sup>1)</sup>.

В качестве следующего шага можно переместить предел обрезания  $L$  за второй резонанс на  $\rho$ -траектории. Если снова положить  $k = 2$  и разместить  $L$  в «средней точке» между резонансами, то свободных параметров не останется. Было установлено [348], что это новое приближение приводит к очень хорошему совпадению обеих сторон правила сумм для более широкой области значений переменной  $t$ .

Учитывая сказанное, можно было бы надеяться, что с увеличением предела обрезания  $L$  согласие будет все время улучшаться, пока при  $L \rightarrow \infty$  правило сумм не превратится в математическое тождество для всех значе-

<sup>1)</sup> Положив  $\alpha_\rho = 1$  в равенстве (9.63), мы получили бы (независимо от величины  $k$ ) значение  $\varepsilon \approx 1,8$ .



ний  $t$ . Но это не так: если добавить следующий член, то согласие ухудшается. Как легко видеть, резонансная часть оказывается слишком малой, чтобы скомпенсировать постоянно растущий реджевский член. Таким образом, если мы хотим сохранить предположение о дуальности, то должны добавить дополнительные резонансы в левую часть ПСКЭ.

Замечательная возможность открывается в связи с тем, что единственная реджевская траектория не позволяет удовлетворить всем кинематическим условиям. В гл. 1, § 9 было показано, что требуется бесконечное семейство дочерних траекторий. Когда эти траектории проходят через целочисленные точки, могут возникать дополнительные резонансы, необходимые для насыщения ПСКЭ. И действительно, было установлено, что насыщение ПСКЭ при больших значениях  $L$  значительно улучшается, если добавлены дочерние траектории. Более неожиданным оказалось, что для получения хороших результатов эти траектории должны быть прямолинейными и параллельными исходной траектории.

Мы не останавливаемся более подробно на этом усовершенствованном применении ПСКЭ, поскольку решение задачи в более простой и сжатой форме по существу содержится в представлении Венециано.

### § 3. Модель Венециано

#### 1. Дуальная резонансная модель

Концепция дуальности, рассмотренная в предыдущем разделе, — это руководящий физический принцип, а не точное математическое утверждение. Чтобы придать этому принципу точную форму, необходимо сделать ряд упрощающих предположений. Хотя они и уводят нас несколько в сторону от физического мира, зато в конце концов позволяют построить изящную непротиворечивую математическую схему [352].

Напомним прежде всего, что, согласно принципу дуальности, левая часть ПСКЭ

$$\int_0^L dv v^n \operatorname{Im} T(v, t) = \beta \frac{L^{\alpha+n+1}}{\alpha+n+1} + \dots \quad (9.70)$$

допускает насыщение одними лишь резонансами. Возникает вопрос: можно ли сделать такое резонансное приближение пригодным при любых значениях  $L$ ? Конечно, при практическом применении ПСКЭ было бы не очень логично использовать резонансное приближение в области высоких энергий. Но попытка построить (хотя бы теоретическую) общую схему насыщения ПСКЭ резонансами, несомненно, оправдана.

Таким путем мы приходим к дуальной резонансной модели, в которой физическая амплитуда выражается через одни лишь резонансы.

Следующий важный вопрос связан с определением понятия резонанса. В предыдущем параграфе мы видели, что точное определение дуальности затрудняется, в частности, отсутствием критерия, позволяющего в общем случае отделить резонансы от фона. Определение резонанса как полюса на втором листе комплексной плоскости далеко не удовлетворительно, так как в релятивистской теории рассеяния с участием многих частиц структура второго листа сложна и плохо известна.

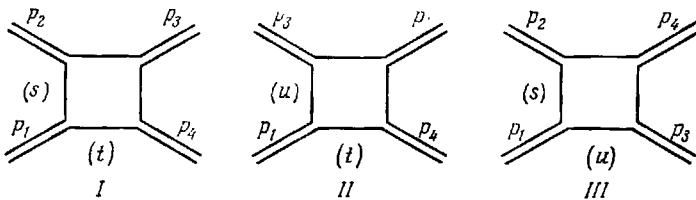
Таким образом, резонанс является точно определенным объектом только тогда, когда он обладает нулевой шириной. Модель, которую мы собираемся описать, основана на предположении, что все резонансы бесконечно узки. Это эквивалентно *строгой прямолинейности реджевских траекторий*. Можно надеяться, что конечную ширину резонансов удастся учесть впоследствии. Таким образом, в рамках дуальной резонансной модели выражение для амплитуды рассеяния обладает следующими свойствами:

- 1) имеются только резонансы (в пределе нулевой ширины резонансов амплитуда мероморфна и единственными сингулярностями являются полюса на действительной оси);
- 2) имеет место строгая перекрестная симметрия;
- 3) имеет место асимптотическое реджевское поведение, причем траектории прямолинейны.

Требования 1—3 накладывают на модель очень сильные ограничения. Действительно, при отрицательных (пространственно-подобных!) значениях  $t$  должны выполняться условия сверхсходимости

$$\int \text{Im } A(v, t) v^n dv = 0, \\ 0 \leq n < -\alpha(t) - 1,$$

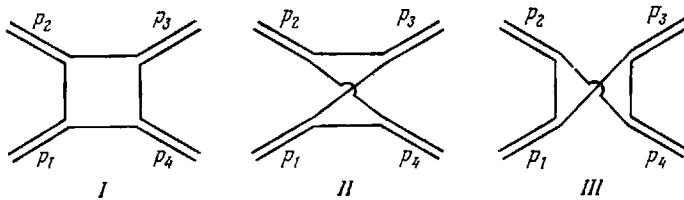
число которых растет по мере увеличения абсолютной величины переменной  $t$ . Нужно осуществить насыщение этих условий одними лишь резонан-



Фиг. 9.10. Три дуальные диаграммы, связывающие четыре частицы.

сами. Изящный вывод формулы Венециано, предложенный Шмидом [421], основан на «алгебраизации» условий сверхсходимости.

Обратимся теперь к формуле Венециано для четырехточечной амплитуды. Различные вклады в амплитуду могут быть классифицированы в соответствии с дуальными диаграммами, введенными в § 2, п. 6. Точнее, полная



Фиг. 9.11.

амплитуда может быть представлена в виде суммы членов; существует взаимнооднозначное соответствие между этими членами и дуальными диаграммами.

Рассмотрим амплитуду рассеяния с четырьмя внешними линиями, которые отвечают скалярным нейтральным частицам одинаковой массы  $m$ . Импульсы частиц обозначим через  $p_1, p_2, p_3, p_4$ <sup>1)</sup>. Имеются три дуальные диаграммы, показанные на фиг. 9.10. Будучи изображены на  $(s, t)$ -,  $(u, t)$ - и  $(s, u)$ -плоскостях, эти диаграммы планарны. Если начертить все три диаграммы на  $(s, t)$ -плоскости, то, согласно фиг. 9.11, диаграммы II и III окажутся непланарными.

Как уже разъяснялось, каждой дуальной диаграмме отвечает отдельная амплитуда. Вид диаграммы указывает, какие резонансы дают вклад в ампли-

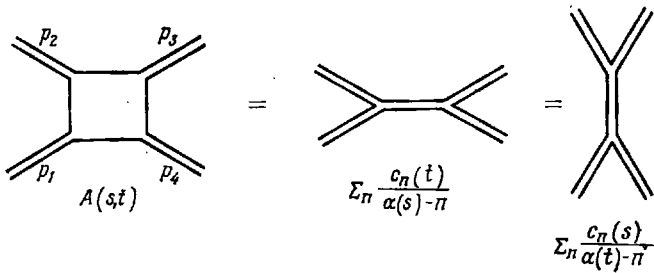
<sup>1)</sup> В данной главе мы будем обозначать через  $u$  третью мандельштамовскую переменную (вместо  $\bar{s}$ ). Такое обозначение чаще применяется в литературе.

туду. Например, в соответствии с фиг. 9.12 амплитуда  $A$ , сопоставляемая диаграмме  $I$ , может быть записана в двух эквивалентных формах:

$$|A(s, t) = \sum_n \frac{c_n(t)}{\alpha(s) - n} = \sum_n \frac{c_n(s)}{\alpha(t) - n}, \quad (9.71)$$

$$\alpha(s) = a + bs.$$

Двум другим дуальным диаграммам, которые получаются из первой путем перестановок  $t \leftrightarrow u$  и  $s \leftrightarrow u$ , соответствуют: первой — амплитуда



Фиг. 9.12.

$A(s, u)$ , а второй — амплитуда  $A(t, u)$ . Конечно,

$$A(s, u) = \sum_n \frac{c_n(u)}{\alpha(s) - n} = \sum_n \frac{c_n(s)}{\alpha(u) - n}, \quad (9.72)$$

$$A'(t, u) = \sum_n \frac{c_n(u)}{\alpha(t) - n} = \sum_n \frac{c_n(t)}{\alpha(u) - n}.$$

Таким образом, полная амплитуда имеет вид

$$T(s, t, u) = A(s, t) + A(s, u) + A(t, u). \quad (9.73)$$

Как мы увидим ниже, эта частная форма дуальности, именуемая *планарной дуальностью*, лежит в основе нового общего подхода к задаче рассеяния.

В рассматриваемом нами случае одинаковых частиц полная амплитуда, конечно, симметрична относительно всех перестановок внешних линий (или, проще, относительно любой замены переменных  $s, t, u$ ). Важно, что в дуальной схеме амплитуда  $A(s, t)$  сама по себе симметрична относительно перестановки  $s \leftrightarrow t$ . Что касается внешних линий, то последнее соответствует симметрии относительно преобразований:

1) циклической перестановки импульсов  $p_1, p_2, p_3, p_4$  (переводящей их, например, в  $p_2, p_3, p_4, p_1$ );

2) изменения порядка следования внешних линий по окружности диаграммы на противоположный (например,  $p_1, p_2, p_3, p_4 \rightarrow p_4, p_3, p_2, p_1$ )<sup>1)</sup>.

Конечно, оба типа преобразований переводят *планарную* диаграмму  $I$  фиг. 9.11 в эквивалентную *планарную* диаграмму. Преобразование же  $p_2 \leftrightarrow p_3$  переводит «планарную» диаграмму  $I$  фиг. 9.11 в существенно отличную от нее «непланарную» диаграмму  $II$ . Таким образом, это преобразование переводит член  $A(s, t)$  в  $A(u, t)$ .

В заключение напомним, что экспериментальные данные, которые говорят в пользу резонансных моделей, основанных на *планарной дуальности*,

<sup>1)</sup> Далее авторы именуют антициклической перестановкой результат последовательного выполнения двух операций: замены порядка следования внешних линий на обратный и циклической перестановки. — *Прим. перев.*

изложены в § 2, п. 4 и 7. Мы увидим, что в рамках этих моделей можно автоматически обеспечить выполнение таких важных условий, как отсутствие экзотических резонансов и обменное вырождение. Теперь мы готовы рассмотреть подход Венециано [352] к построению амплитуды, удовлетворяющей требованию планарной дуальности.

## 2. Амплитуда Венециано

Выведем простую и изящную формулу, обладающую рассмотренными выше дуальными свойствами. Эта формула предложена Венециано [352]. Введем функцию

$$C(x, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) x^n, \tag{9.74}$$

аналитическую в окрестности точки  $x = 0$ , и определим амплитуду  $A(s, t)$  следующим образом:

$$\int_0^1 dx C(x, t) x^{-\alpha(s)-1} = \sum_n \frac{c_n(t)}{\alpha(s)-n} = A(s, t). \tag{9.75}$$

Полюса этой амплитуды при  $\alpha(s) = n$  возникают по той причине, что подынтегральное выражение имеет особенность на границе области интегрирования в точке  $x = 0$ <sup>1)</sup>. Положение полюсов и вычеты в них целиком определяются поведением функции  $C(x, t)$  в окрестности этой точки и не изменяются, если в формуле (9.75) выбрать верхний предел интегрирования отличным от единицы. Существенно, однако, что при интегрировании по всему интервалу  $(0, 1)$  функция  $A(s, t)$  имеет только полюса. В то же время при любом другом выборе верхнего предела интегрирования  $(0, a)$  у этой функции появляются существенные особенности по  $\alpha(s)$ .

Теперь легко определить функцию  $C(x, t)$  таким образом, чтобы амплитуда обладала дуальными свойствами. Действительно, можно так выбрать функцию  $C(x, t)$ , что полюса амплитуды по переменной  $t$  возникнут за счет интегрирования в окрестности точки  $x = 1$ , подобно тому как полюса по  $s$  появились в результате интегрирования в окрестности точки  $x = 0$ . Проще всего этого можно добиться, положив

$$C(x, t) = (1-x)^{-\alpha(t)-1}. \tag{9.76}$$

Это приводит к формуле

$$A(s, t) = \int_0^1 dx x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1} = \int_0^1 dx x^{-\alpha(t)-1} (1-x)^{-\alpha(s)-1}. \tag{9.77}$$

Амплитуда теперь симметрична относительно перестановки  $s \leftrightarrow t$  (поскольку интеграл не меняется при замене  $x \rightarrow 1-x$ ).

Используя два выражения (9.77), можно написать для амплитуды  $A(s, t)$  два эквивалентных разложения

$$A(s, t) = \sum_n \frac{c_n(t)}{\alpha(s)-n} = \sum_n \frac{c_n(s)}{\alpha(t)-n}, \tag{9.78}$$

где вычеты  $c_n(t)$  равны биномиальным коэффициентам:

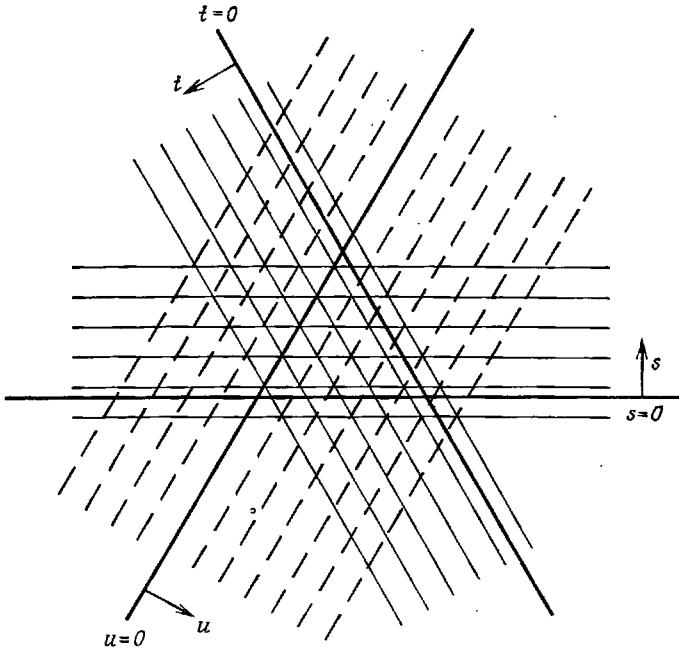
$$c_n(t) = - \binom{\alpha(t)+n}{n}. \tag{9.79}$$

<sup>1)</sup> Конечно, интеграл первоначально определяется при  $\text{Re } \alpha < 0$ , а затем аналитически продолжается на все значения  $\alpha$ .

Простое выражение (9.77) для амплитуды  $A(s, t)$  полностью удовлетворяет всем условиям дуальности. Заметим, что это выражение совпадает с бета-функцией Эйлера

$$A(s, t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))} = B(-\alpha(s), -\alpha(t)). \quad (9.80)$$

Расположение полюсов и нулей амплитуды  $A(s, t)$  легко находится из формулы (9.80). Полюса при  $\alpha(s) = n$  и  $\alpha(t) = n$  (где  $n$  — целое неотрицательное число) возникают за счет  $\Gamma$ -функций в числителе, в то время как  $\Gamma$ -функция в знаменателе порождает нули при целых значениях величины  $\alpha(s) + \alpha(t)$ . Наличие этих нулей играет фундаментальную роль, поскольку



Фиг. 9.13. На сплошных линиях  $\alpha(s) = n$ ,  $\alpha(t) = n$  расположены полюса амплитуды Венециано  $A(s, t)$ . На пунктирных линиях  $\alpha(s) + \alpha(t) = n$  находятся ее нули.

предотвращает одновременное появление полюсов при  $\alpha(s) = n_1$  и  $\alpha(t) = n_2$ <sup>1)</sup>. Действительно, в этой точке  $\Gamma$ -функция, стоящая в знаменателе, создает компенсирующий нуль, отвечающий значению  $[\alpha(s) + \alpha(t) = n_1 + n_2$ .

Иными словами, через каждую точку пересечения линий, на которых амплитуда имеет полюса, должна проходить линия, отвечающая ее нулям. Это обстоятельство было разъяснено Одорико [320, 420] в более общем плане. Отличительная особенность модели Венециано состоит в том, что как линии полюсов, так и линии нулей являются прямыми.

Расположение полюсов и нулей, присущих амплитуде  $A(s, t)$ , показано на фиг. 9.13. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Для прямолинейных траекторий справедливо равенство<sup>2)</sup>

$$\alpha(s) + \alpha(t) + \alpha(u) = 3\alpha(0) + 4m^2 = \text{const.} \quad (9.81)$$

<sup>1)</sup> Авторы говорят об одновременном появлении полюсов, если вычет в полюсе по переменной  $s$  сам имеет полюс по  $t$  и наоборот (§ 4, п. 2). — Прим. перев.

<sup>2)</sup> Далее мы пользуемся такой единицей длины, при которой наклон реджевских траекторий равен единице:

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s.$$

Поэтому линии нулей функции  $A(s, t)$ , отвечающие уравнениям

$$\alpha(s) + \alpha(t) = n,$$

параллельны линиям

$$\alpha(u) = n,$$

на которых амплитуды  $A(s, u)$  и  $A(t, u)$  имеют полюса. Это указывает на наличие более сильной симметрии между тремя вкладками в полную амплитуду  $T(s, t, u)$ . Такую симметрию мы рассмотрим подробнее в § 3, п. 6.

Выражения (9.77) и (9.80) дают лишь простейший пример амплитуды  $A(s, t)$ , удовлетворяющей условиям дуальности. В действительности можно построить обобщенные дуальные амплитуды. Первое обобщение имеет вид

$$A(s, t) = \int_0^1 dx x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1} g(x). \quad (9.82)$$

Функцию  $g(x)$ , входящую в это выражение, нужно подчинить условию  $g(x) = g(1-x)$ , чтобы сохранить  $(s, t)$ -симметрию.

Разложим функцию  $g(x)$  в ряд по степеням  $x(1-x)$ :

$$g(x) = \sum_n g_n [x(1-x)]^n. \quad (9.83)$$

Подставив это разложение в формулу (9.82), мы придем к соотношению

$$A(s, t) = \sum_n g_n B(n - \alpha(s), n - \alpha(t)). \quad (9.84)$$

Амплитуда (9.84) представляет собой суперпозицию членов вида (9.80), отвечающих «эффективным траекториям»  $\alpha(s) - n, \alpha(t) - n$ .

Другое возможное обобщение (которое начинает применяться для описания физического лл-рассеяния) заключается во введении в формулу Венециано дополнительных полиномов по  $s$  и  $t$ , что не меняет аналитической формы амплитуды. Можно написать даже более общее выражение

$$A(s, t) = \int_0^1 dx x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1} g(x, s, t), \quad (9.85)$$

где  $g(x, s, t)$  — полиномиальная функция переменных  $x, s, t$ . Эквивалентное утверждение заключается в том, что наиболее общая форма дуальной резонансной амплитуды является суперпозицией членов вида

$$\frac{\Gamma(n - \alpha(s)) \Gamma(m - \alpha(t))}{\Gamma(n + m - p - \alpha(s) - \alpha(t))}, \quad (9.86)$$

где  $n, m, p$  — неотрицательные целые числа.

Из равенств (9.85) и (9.86) видно, что имеется существенная свобода в выборе дуальной амплитуды. Определяя весовую функцию  $g(x, s, t)$ , можно исходить либо из экспериментальных, либо из теоретических соображений. Как выяснится в § 3, п. 5, для успешного применения модели к описанию физического лл-рассеяния более всего подходит функция

$$1) \quad g(x, s, t) = \frac{1}{2} \lambda [\alpha(s)(1-x) + \alpha(t)x].$$

Теоретические же соображения, изложенные в § 4 (такие, как возможность обобщения на неупругие процессы и наличие простейших свойств факторизуемости), определенно говорят за простой выбор

$$2) \quad g(x, s, t) = \text{const.}$$

что ведет к формулам (9.77) — (9.80).

Задаче согласования «экспериментального» вида 1 функции  $g(x, s, t)$  с «теоретическим» видом 2 было посвящено много работ, но без особого успеха. Эта трудность остается камнем преткновения, который мешает модели Венециано стать последовательной дуальной резонансной теорией элементарных частиц. Для разрешения отмеченной трудности, может быть, потребуется новый крупный успех в области теории.

### 3. Структура резонансов

В рамках модели Венециано каждая амплитуда  $A(s, t)$  является мероморфной функцией переменных  $s$  и  $t$ . Очень важно детально изучить структуру каждого полюса (форму вычета), чтобы определить набор промежуточных резонансных состояний, которые могут возникать в процессе рассеяния.

Запишем амплитуду  $A(s, t)$  в форме (9.78):

$$A(s, t) = \sum_n \frac{c_n(t)}{\alpha(s) - n}, \quad (9.87)$$

где вычет  $c_n(t)$  является полиномом  $n$ -й степени от  $\alpha(t)$  [формула (9.79)]. В случае бесконечно узких резонансов функция  $\alpha(t)$  линейна. Поэтому вычет  $c_n(t)$  является также полиномом  $n$ -й степени от  $t$  и, значит, от  $\cos \theta_s$ . Здесь  $\theta_s$  — угол рассеяния в  $s$ -канале в системе центра масс.

Чтобы найти спины состояний, отвечающих полюсу при  $\alpha(s) = n$ , нужно разложить функцию  $c_n(t)$  по полиномам Лежандра от  $\cos \theta_s$ :

$$c_n(t) = \sum_{j=0}^n c_n(j) P_j(\cos \theta_s). \quad (9.88)$$

Коэффициенты  $c_n(j)$  определяют вес каждого углового момента. В равенстве (9.88) содержатся лишь члены, у которых  $j \leq n$ , так как  $c_n(t)$  — полином степени  $n$  от  $\cos \theta_s$ . Следовательно, вычет в полюсе при  $\alpha(s) = n$  содержит вклад семейства резонансов, спины которых находятся в пределах от 0 до  $n$ . Эти резонансы лежат на параллельных прямолинейных траекториях. Таким образом, число  $n$  соответствует обычному определению высшего углового момента. Меньшие угловые моменты отвечают переходу дочерних траекторий  $\alpha(s) = m$  через целочисленные значения. Эти траектории обладают одинаковым наклоном.

Мы видим, насколько важную роль здесь играет прямолинейность траекторий (или, что эквивалентно, бесконечно малая ширина резонансов). Действительно, при более сложной форме функции  $\alpha(t)$  высший угловой момент уже не равен  $n$ . Более того, если  $\text{Im } \alpha(t) \neq 0$  (резонансы конечной ширины), то значения углового момента  $j$  при фиксированном  $n$  вообще не ограничены сверху. Иными словами, даже в области низких энергий в этом случае возникают резонансы, обладающие сколь угодно большим спином (так называемые предки). Это противоречит как эксперименту, так и физической интуиции. Поэтому далее мы рассматриваем только простой случай прямолинейных траекторий.

Требует обсуждения следующий вопрос: содержит ли каждое состояние, отвечающее определенным значениям пары индексов  $(n, j)$ , лишь один уровень или имеется дополнительное вырождение? В связи с этим напомним (гл. 1, § 9), что в силу требования аналитичности амплитуды при  $s = 0$  должны существовать дочерние траектории, подчиненные условию  $\alpha_0(0) = \alpha_m(0) = m$ . Как отмечалось в гл. 1, § 9, наиболее экономный набор реджевских полюсов, удовлетворяющий этим ограничениям, был предложен Толлером. Этот набор отвечает невырожденным дочерним траекториям. В случае толлеровского набора траекторий вычет в полюсе при  $\alpha(s) = n$  должен быть пропорциональным гармонической функции на трехмерной

сфере. Легко убедиться, что это не имеет места для вычетов  $c_n(j)$ . Поэтому дочерние траектории в свою очередь должны быть вырожденными. Подробное изучение структуры уровней в данной модели покажет (к нашему удивлению), что степень вырождения качественно отличается от той, которую можно было предвидеть на основе простых соображений в рамках реджевской или толлеровской картины.

В заключение остановимся на одном обстоятельстве, вызывающем большие трудности. Оно связано с условием положительности коэффициентов  $c_n(j)$ , входящих в разложение (9.88). В случае упругого процесса эти коэффициенты можно представить в виде

$$c_n(j) = \sum_r |\gamma_{nj}|^2, \tag{9.89}$$

где  $\gamma_{nj}$  — парциальные ширины резонансов в упругом канале. Суммирование в формуле (9.89) ведется по всем резонансам, отвечающим фиксированным значениям числа  $n$  и спина  $j$ . Для того чтобы отсутствовали нефизические состояния, характеризующиеся мнимой шириной (духи), все коэффициенты  $c_n(j)$  должны быть положительными:

$$c_n(j) \geq 0. \tag{9.90}$$

К сожалению, общая форма модели Венециано ни в коей мере не гарантирует выполнения фундаментального требования (9.90). Однако в процессе практических применений было обнаружено [422, 529, 530], что в отсутствие сателлитов коэффициенты  $c_n(j)$  большей частью оказываются положительными [529, 530].

Хотя многие феноменологические применения модели имели определенный успех, ряд общих вопросов (таких, как упомянутый только что) далек от решения. Более подробное обсуждение проблемы духов будет предпринято в § 4, п. 6 в связи с изучением структуры уровней в обобщенной модели.

#### 4. Асимптотические свойства

Важное свойство амплитуды Венециано состоит в том, что ее асимптотическое поведение при фиксированном  $t$  и больших  $|s|$  соответствует реджевской формуле. Этот результат легко получить из равенства (9.80), вспомнив хорошо известные свойства функций Эйлера. Но полезнее вывести его из основного интегрального представления (9.77), которое можно записать в виде

$$A(s, t) = \int_0^1 dy y^{-\alpha(t)-1} \exp\{-[\alpha(s)+1] \ln(1-y)\}. \tag{9.91}$$

Выясним, что происходит, когда  $\alpha(s) \rightarrow -\infty$ . В этом случае доминирующий вклад в интеграл (9.91) вносит область значений  $y$ , близких к нулю. Поэтому можно приближенно написать

$$\begin{aligned} A(s, t) &\underset{\alpha(s) \rightarrow -\infty}{\sim} \int_0^1 dy y^{-\alpha(t)-1} \exp\{y[\alpha(s)+1]\} = \\ &= -[\alpha(s)+1]^{\alpha(t)} \int_0^{-\alpha(s)-1} dz (-z)^{-\alpha(t)-1} e^{-z}, \end{aligned} \tag{9.92}$$

так что в пределе при  $\alpha(s) \rightarrow -\infty$  мы получаем окончательное выражение

$$A(s, t) \underset{\alpha(s) \rightarrow -\infty}{\sim} -[-\alpha(s)]^{\alpha(t)} \frac{\pi}{\sin \pi \alpha(t)} \frac{1}{\Gamma(\alpha(t)+1)}. \tag{9.93}$$



Конечно, вследствие  $(s, t)$ -симметрии асимптотика функции  $A(s, t)$  при  $t \rightarrow -\infty$  и фиксированном  $s$  определяется формулой

$$A(s, t) \underset{\alpha(t) \rightarrow -\infty}{\sim} - [-\alpha(t)]^{\alpha(s)} \frac{\pi}{\sin \pi \alpha(s)} \frac{1}{\Gamma(\alpha(s)+1)}. \quad (9.94)$$

Имеется существенная разница между асимптотическим поведением амплитуды в дуальной резонансной модели и в реджевской теории. Равенство (9.93) было получено в предположении, что  $\alpha(s) \rightarrow -\infty$ . В действительности это равенство справедливо для более общего случая, когда  $|\alpha(s)| \rightarrow \infty$ ,  $\arg \alpha(s) \neq 0$ . Но при  $\alpha(s) \rightarrow +\infty$  вывод формулы (9.93) перестает быть справедливым. Причину этого легко установить. Случай, когда  $\arg \alpha(s) = 0$ , является исключительным, поскольку в данной модели резонансы бесконечно узки. Амплитуда  $A(s, t)$  неограниченно осциллирует в области вещественных положительных значений функции  $\alpha(s)$ . Поэтому асимптотика амплитуды не может быть представлена там плавной функцией. На положительной части действительной оси реджевское поведение (9.93) следует понимать как результат усреднения вклада бесконечного числа резонансов. Именно, определив амплитуду  $(A(s, t))_{\text{cp}}$ , усредненную по всем резонансам, мы получим

$$(A(s, t))_{\text{cp}} \underset{\substack{s \rightarrow \infty \\ t \text{ фиксировано}}}{\sim} - [-\alpha(s)]^{\alpha(t)} \frac{\pi}{\sin \pi \alpha(t)} \frac{1}{\Gamma(\alpha(t)+1)}. \quad (9.95)$$

Теперь легко найти асимптотику полной амплитуды. Функция  $A(u, t)$  имеет, конечно, следующую асимптотическую форму:

$$A(u, t) \underset{\substack{s \rightarrow \infty \\ t \text{ фиксировано}}}{\sim} - [-\alpha(u)]^{\alpha(t)} \frac{\pi}{\sin \pi \alpha(t)} \frac{1}{\Gamma(\alpha(t)+1)} \sim \\ \sim - [\alpha(s)]^{\alpha(t)} \frac{i\pi}{\sin \pi \alpha(t)} \frac{1}{\Gamma(\alpha(t)+1)}. \quad (9.96)$$

В то же время, пользуясь формулой Стирлинга для асимптотики  $\Gamma$ -функций, легко убедиться, что член  $A(s, u)$  стремится к нулю быстрее любой степени  $s$ , когда  $s \rightarrow \infty$ , а  $t$  фиксировано. Таким образом, мы приходим к окончательной асимптотической формуле для полной амплитуды

$$(T(s, t))_{\text{cp}} \underset{\substack{s \rightarrow \infty \\ t \text{ фиксировано}}}{\sim} \frac{\pi |\alpha(s)|^{\alpha(t)}}{\Gamma(\alpha(t)+1)} \frac{1 + \exp[i\pi \alpha(t)]}{\sin \pi \alpha(t)}. \quad (9.97)$$

Следовательно, модель Венециано приводит к реджевской асимптотике во всех трех каналах.

Интересно отметить разницу между множителем  $[\alpha(s)]^{\alpha(t)}$  в венециановском выражении и множителем  $s^{\alpha(t)}$  в теории реджевских полюсов. Функция  $\alpha(s)$  безразмерна, тогда как  $s$  имеет размерность квадрата энергии. Поэтому в модели Венециано масштаб, определяющий наступление реджевской асимптотики, непосредственно связан с наклоном траекторий. Это важное новое свойство, которое было обнаружено ранее в результате бутстрапа, основанного на ПСКЭ (см. § 2, п. 7), является прямым следствием дуальности.

Скажем теперь несколько слов об асимптотике при постоянном угле рассеяния. С помощью формулы Стирлинга из равенства (9.80) можно получить формулу

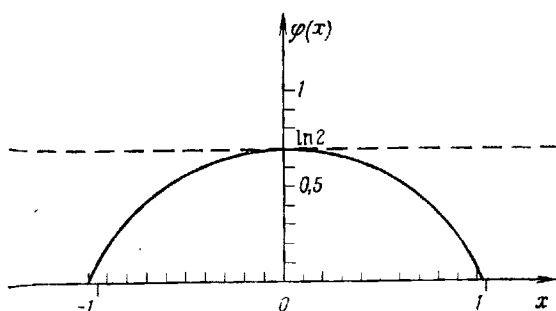
$$A(s, t) \underset{\substack{s \rightarrow \infty \\ \cos \theta_s \text{ фиксирован}}}{\sim} \exp[-\alpha(s) \varphi(\cos \theta_s)], \quad (9.98)$$

где

$$\varphi(\cos \theta) = \frac{1 - \cos \theta}{2} \ln \left( \frac{2}{1 - \cos \theta} \right) + \frac{1 + \cos \theta}{2} \ln \left( \frac{2}{1 + \cos \theta} \right). \quad (9.99)$$

График функции  $\varphi(\cos \theta)$  представлен на фиг. 9.14. При физических значениях  $\cos \theta_s$  амплитуда  $A(s, \cos \theta_s)$  экспоненциально стремится к нулю,

когда  $s \rightarrow \infty$ ; наоборот, эта амплитуда возрастает, если  $s \rightarrow -\infty$ . Такое поведение вполне удовлетворительно с физической точки зрения, хотя существенно отличается от картины, знакомой нам, например, по низшим порядкам теории возмущений. Действительно, для амплитуды Венециано нельзя написать дисперсионного соотношения при фиксированном, отличном от нуля угле рассеяния. Нельзя также написать дисперсионных соотношений для парциальных амплитуд. Это не удивительно: в случае неограниченного роста траекторий представление Мандельстама потребовало бы бесконечного числа вычитаний. Поэтому в рамках дуальной резонансной



Фиг. 9.14. График функции  $\varphi(x)$  [формула (9.99)].

модели часть следствий представления Мандельстама, вероятно, потеряет силу.

Важное обстоятельство, относящееся к асимптотике амплитуды при фиксированном угле рассеяния, заметил Мандельстам [353]. Он установил, что правильное асимптотическое поведение при  $s \rightarrow \infty$  имеет место для всех физических значений  $\cos \theta$ , только в том случае, когда наклоны траекторий в  $s$ -канале и в  $t$ -канале одинаковы [параметры  $\alpha(0)$  траекторий в  $s$ - и  $t$ -каналах, вообще говоря, могут быть разными]. Таким образом, предполагая, что метод Венециано применим ко всем процессам взаимодействия адронов, мы приходим к заключению об универсальности наклона всех траекторий. Этот наклон в известном смысле представляет собой фундаментальную единицу длины, присущую дуальной резонансной модели.

## 5. Применение к пион-пионному рассеянию

В последнее время много работ было посвящено применению модели Венециано к различным процессам рассеяния. Конечно, нужно затратить определенные усилия, чтобы приспособить общую математическую схему к конкретным физическим ситуациям. В частности, нужно:

1) определить, какой частный вид отношения  $\Gamma$ -функций (с сателлитами или без них) более всего подходит для описания каждой инвариантной амплитуды;

2) найти способ перехода от схемы, содержащей бесконечно узкие резонансы, к амплитуде, которая удовлетворяет условиям унитарности хотя бы в области низких энергий.

Такая феноменологическая схема унитаризации отчасти нарушает красоту исходной формулы Венециано.

Отметим, что для тех, кто верит в окончательный успех дуальной резонансной модели, эти полезные феноменологические методы служат лишь временным выходом, на смену которому должна прийти общая теория. В рамках этой теории необходимо:

а) путем введения дополнительных требований (как, например, условия факторизуемости) разработать схему, в которой дуальная амплитуда каждого процесса была бы однозначно определена;

б) найти непротиворечивый способ унитаризации, аналогичный существующему в обычной теории возмущений. Это позволит построить с помощью итерационной процедуры унитарную амплитуду, которая сохранит все дуальные свойства и не будет содержать новых параметров. Хотя в обоих этих направлениях удалось значительно продвинуться вперед (о чем пойдет речь в следующем разделе), мы все еще далеки от полного успеха.

При таком положении вещей полезно подробно рассмотреть случай  $\pi\pi$ -рассеяния. На этом примере можно проиллюстрировать ряд важных свойств венециановской феноменологии и проанализировать некоторые нерешенные вопросы.

Обозначим через  $p_i, \alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) импульсы и изоспиновые индексы четырех пионов. Полная амплитуда  $T$  равна сумме трех членов, отвечающих дуальным диаграммам, показанным на фиг. 9.10. Можно написать

$$T_{\pi\pi} = T(1234) + T(1324) + T(1243), \quad (9.100)$$

где мы обозначили отдельные амплитуды, указав порядок следования внешних линий по окружности дуальных диаграмм. Как разъяснено в § 3, п. 1, каждый член инвариантен по отношению к циклическим и антициклическим перестановкам. В качестве первого шага отделим изоспиновый множитель и напомним

$$T(1234) = f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) A(s, t), \quad (9.101)$$

где  $A(s, t)$  — амплитуда типа Венециано. Коэффициент  $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  нужно подчинить двум требованиям:

- 1) величина  $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  должна быть инвариантной относительно всех циклических и антициклических перестановок индексов;
- 2) если мы хотим избежать экзотических резонансов, то должны запретить существование полюсов, отвечающих промежуточным состояниям с изоспином  $I = 2$  в  $s$ - и  $t$ -каналах.

Этими требованиями функция  $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  определяется однозначно, что было показано Чаном и Патеном [354] в общем случае произвольного числа пионов. В соответствии с результатом этих авторов положим

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \frac{1}{4} \text{Sp}(\tau_{\alpha_1} \tau_{\alpha_2} \tau_{\alpha_3} \tau_{\alpha_4}), \quad (9.102)$$

где  $\tau_{\alpha_i}$  — матрицы Паули, описывающие изоспин  $1/2$ .

Ясно, что в силу математических свойств следа первое требование выполняется. В то же время хорошо известно, что правую часть равенства (9.102) можно представить в следующей «факторизованной» форме:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\tau_{\alpha_1} \tau_{\alpha_2} \tau_{\alpha_3} \tau_{\alpha_4}) &= \frac{1}{2} \text{Sp}(\tau_{\alpha_1} \tau_{\alpha_2}) \text{Sp}(\tau_{\alpha_3} \tau_{\alpha_4}) + \frac{1}{2} \sum_{\mu} \text{Sp}(\tau_{\alpha_1} \tau_{\alpha_2} \tau_{\mu}) \text{Sp}(\tau_{\mu} \tau_{\alpha_3} \tau_{\alpha_4}) = \\ &= 2\delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_3 \alpha_4} + 2(\delta_{\alpha_1 \alpha_4} \delta_{\alpha_2 \alpha_3} - \delta_{\alpha_1 \alpha_3} \delta_{\alpha_2 \alpha_4}). \end{aligned} \quad (9.103)$$

Первый член правой части этого соотношения отвечает изоспину 0, а второй — изоспину 1. Член, несущий изоспин 2, полностью отсутствует. Разлагая полную амплитуду  $\pi\pi$ -рассеяния на части, обладающие определенным изоспином в  $s$ -канале, мы приходим к равенствам

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{3}{2} [A(s, t) + A(s, u)] - \frac{1}{2} A(t, u), \\ T_1 &= A(s, t) - A(s, u), \\ T_2 &= A(t, u). \end{aligned} \quad (9.104)$$

Эти равенства согласуются со сказанным ранее, а именно функция  $T_2$  не имеет мнимой части в  $s$ -канале (см. также § 2, п. 5). В то же время полюса функций  $T_0$  и  $T_1$  в  $s$ -канале расположены одинаково. Это в точности соответствует обменно вырождению  $\rho_0$ - и  $f_0$ -траекторий и объясняется отсутствием во всех каналах резонансов с изоспином  $I = 2$ .

Далее, мы должны определить инвариантную амплитуду  $A(s, t)$ . Забудем, по крайней мере временно, о трудной задаче описания эффектов, связанных с полюсом Померанчука, и попытаемся построить амплитуду Венециано с помощью одной вырожденной  $\rho, f_0$ -траектории. Как известно из эксперимента, эта траектория пересекается с осью  $s = 0$  в точке

$$\alpha_\rho(0) \approx 0,5. \tag{9.105}$$

Такое поведение порождает теоретическую трудность, поскольку функция  $\alpha_\rho(s)$  обращается в нуль при отрицательном (пространственно-подобном) значении  $s$ , а каждому переходу этой функции через целое неотрицательное число (как четное, так и нечетное) отвечает частица. Иными словами, если не вводить корректирующих множителей, то модель будет содержать скалярную частицу с мнимой массой. Такая частица возникает в том случае, когда мы пользуемся исходным венециановским выражением  $B[-\alpha(s), -\alpha(t)]$  (где  $B$  — бета-функция Эйлера). Функция же  $B[1 - \alpha(s), 1 - \alpha(t)]$  устранила бы состояние с отрицательной массой, но дала бы неправильное реджевское поведение  $[\alpha(s)]^{\alpha(t)-1}$ .

Таким образом, бета-функции нам не подходят. Простейший способ удовлетворить всем требованиям — это взять

$$A(s, t) = -\lambda \frac{\Gamma(1 - \alpha_\rho(s)) \Gamma(1 - \alpha_\rho(t))}{\Gamma(1 - \alpha_\rho(s) - \alpha_\rho(t))}. \tag{9.106}$$

Выражение (9.106) соответствует выбору <sup>1)</sup>

$$g(x, s, t) = \frac{1}{2} \lambda [(1 - x) \alpha(s) + x \alpha(t)] \tag{9.107}$$

весовой функции  $g(x, s, t)$ , введенной в формуле (9.85). Нетрудно видеть, что наимизший уровень теперь содержит два состояния с одинаковой массой: частицу  $\rho$  с  $I = 1, J = 1$  и частицу  $\sigma$  с  $I = 0, J = 0$ . Второе предсказание — наличие  $p$ -волнового резонанса с  $I = 1$ , который совпадает по массе с частицей  $f_0$  (1260). Резонансы  $\rho$  и  $\rho'$  имеют примерно одинаковую упругую ширину.

Асимптотическое поведение амплитуды таково:

$$A(s, t) \sim -\lambda \pi [\alpha(s)]^{\alpha(t)} \frac{\alpha(t)}{\Gamma(\alpha(t) + 1)} \frac{\exp[i\pi\alpha(t)]}{\sin \pi\alpha(t)}. \tag{9.108}$$

Отметим наличие дополнительного множителя  $\alpha(t)$ , которым устраняется нефизический полюс при  $\alpha(t) = 0$ .

Очень важный результат, связанный с применением принципа Адлера к  $\pi\pi$ -рассеянию, был получен Лавласом [355]. Примем для простоты, что масса пионов равна нулю. Как мы знаем, в этом случае амплитуда  $\pi\pi$ -рассеяния должна обращаться в нуль в физической точке  $s = u = t = 0$ . В то же время первые нули амплитуды (9.103) лежат на линиях

$$\alpha(s) + \alpha(t) = 1, \tag{9.109a}$$

$$\alpha(s) + \alpha(u) = 1, \tag{9.109б}$$

$$\alpha(t) + \alpha(u) = 1. \tag{9.109в}$$

<sup>1)</sup> Прямой проверкой нетрудно убедиться, что тот же самый результат (9.106) дают функции  $g(x, s, t) = \lambda(1 - x)\alpha(s)$  и  $g(x, s, t) = \lambda x\alpha(t)$ .

Условие Адлера выполняется, если эти три соотношения справедливы в точке  $s = t = u = 0$ . Складывая три равенства (9.109), мы приходим к соотношению

$$\alpha(s) + \alpha(t) + \alpha(u) = \frac{3}{2}. \quad (9.110)$$

Полагая  $s = t = u = 0$ , находим, что

$$\alpha(0) = \frac{1}{2}. \quad (9.111)$$

Учитывая отсутствие массы у пионов, нетрудно убедиться, что каждое из соотношений (9.109) выполняется в отдельности. Мы видим, что принцип Адлера ведет к квантованию траекторий и, следовательно, к соотношению (9.105), которое очень хорошо согласуется с опытом. Равенство (9.111) говорит также, что наклон  $\rho$ -траектории равен

$$\alpha'(0) = \frac{1}{2m_\rho^2} \approx 0,85 \text{ ГэВ}^{-2}. \quad (9.112)$$

В силу сказанного нами ранее таким же должен быть наклон всех других траекторий.

Обратимся к разложению амплитуды в области низких энергий. Первый отличный от нуля член разложения полной амплитуды (9.100) по степеням переменных  $s, t, u$  имеет вид

$$T = \text{const} (p_1 p_2 \delta_{12} \delta_{34} + p_1 p_3 \delta_{13} \delta_{24} + p_1 p_4 \delta_{14} \delta_{23}). \quad (9.113)$$

Это согласуется с результатом, вытекающим из киральной модели [формула (5.62)].

Результат Лавласа, относящийся к  $\pi\pi$ -рассеянию, можно суммировать следующим образом: расстояние между  $\rho$ - и  $\pi$ -траекториями при  $s = 0$  должно равняться  $1/2$ . Этот вывод был обобщен Адемолло, Венециано и Вейнбергом [356]. Они рассмотрели процессы типа

$$\pi + A \rightarrow B + C,$$

предполагая, что выполняется условие Адлера и что имеется единственный венециановский член. Согласно их результату, пары реджевских траекторий различной четности, которые могут переходить друг в друга в результате испускания пиона (такие, как  $\rho$  и  $\pi, f_0$  и  $A_1, \Delta$  и  $N, K^*$  и  $K$ ), в общем случае должны иметь параметры  $\alpha(0)$ , различающиеся на полуцелое число. Если, кроме того, ввести предположение об универсальном наклоне всех траекторий и использовать выражение (9.112), то можно прийти к следующим массовым формулам:

$$\begin{aligned} m_{A_1}^2 - m_\rho^2 &= \frac{1}{2\alpha'} = m_\rho^2, \\ m_\Delta^2 - m_N^2 &= m_\rho^2, \\ m_{K^*}^2 - m_K^2 &= m_\rho^2. \end{aligned} \quad (9.114)$$

Эти формулы хорошо согласуются с экспериментом. Но нужно соблюдать осторожность и не заходить слишком далеко; действительно, рассуждая точно так же в случае пары  $A_2 \eta$ , можно получить равенство

$$\alpha_{A_2}(m_\eta^2) - \alpha_\rho(m_\eta^2) = \frac{1}{2},$$

откуда следует неверный вывод, что

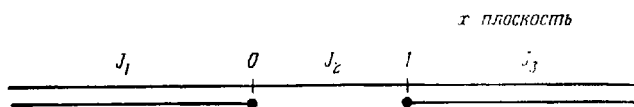
$$m_\eta^2 = m_\pi^2.$$

Это показывает, что в некоторых случаях венециановская формула с одним членом неприменима.

### 6. Свойства симметрии амплитуды с четырьмя внешними линиями

В этом и следующем разделах мы исследуем некоторые общие математические свойства четырехточечных амплитуд. Такое математическое исследование необходимо для понимания структуры дуальных резонансных моделей, описывающих как упругое, так и неупругое рассеяние.

Прежде всего покажем, что три дуальные амплитуды  $A(s, t)$ ,  $A(s, u)$  и  $A(u, t)$  могут быть представлены в виде интегралов по разным путям



Фиг. 9.15. Плоскость  $x$  с разрезами [формулы (9.121)].

от весьма сходных выражений (совпадающих, если  $\alpha(s) + \alpha(t) + \alpha(u) = -1$ ) [357]. Напишем обычное выражение для  $A(u, t)$ :

$$A(u, t) = \int_0^1 dx x^{-\alpha(u)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1}. \quad (9.115)$$

Если мы положим

$$\alpha(s) + \alpha(u) + \alpha(t) = -1 + c$$

и перейдем к переменной

$$z' = \frac{1}{x}, \quad (9.116)$$

то легко получим следующее выражение для  $A(u, t)$ :

$$A(u, t) = \int_1^\infty dz' z'^c z'^{-\alpha(s)-1} (z'-1)^{-\alpha(t)-1} = \int_1^\infty dz' z'^c |z'|^{-\alpha(s)-1} |1-z'|^{-\alpha(t)-1}. \quad (9.117)$$

Точно так же путем замены переменной

$$z'' = \frac{x}{x-1} \quad (9.118)$$

можно перейти к равенству

$$A(s, u) = \int_{-\infty}^0 dz'' (1-z'')^c |z''|^{-\alpha(s)-1} |1-z''|^{-\alpha(t)-1}. \quad (9.119)$$

Мы видим, что три венециановских члена могут быть записаны в виде интегралов по разным путям от выражений, одинаковых в основной своей части. Проще всего, конечно, если

$$c = 0. \quad (9.120)$$

В этом случае модель обладает особенно привлекательными свойствами, причем с помощью теоремы Коши легко получить простые алгебраические соотношения между амплитудами. Действительно, рассмотрим следующие интегралы, взятые вдоль линий, проведенных на комплексной  $x$ -плоскости с разрезами (фиг. 9.15)

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-\infty}^0 dx [x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1}]_+, \\ J_2 &= \int_0^1 dx x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1}, \\ J_3 &= \int_1^\infty dx [x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1}]_+. \end{aligned} \quad (9.121)$$

Можно написать тривиальное равенство

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0. \tag{9.122}$$

В то же время

$$\begin{aligned} J_1 &= A(s, u) \exp\{-i\pi[\alpha(s) + 1]\}, \\ J_2 &= A(s, t), \\ J_3 &= A(u, t) \exp\{i\pi[\alpha(t) + 1]\}. \end{aligned} \tag{9.123}$$

Из равенств (9.122) и (9.123) следует, что

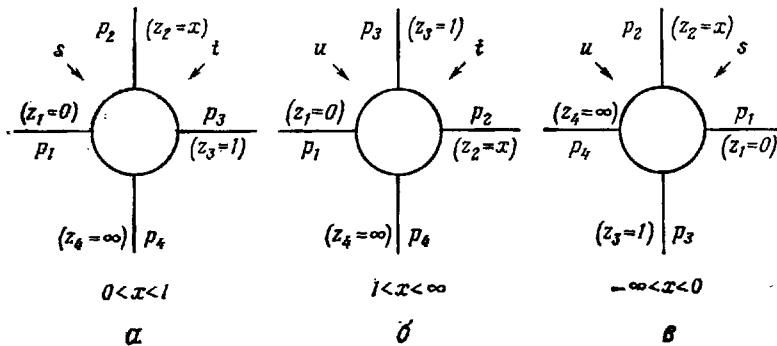
$$\frac{A(u, t)}{\sin \pi \alpha(s)} = \frac{A(s, u)}{\sin \pi \alpha(t)} = \frac{A(s, t)}{\sin \pi \alpha(u)} = \varphi(s, t, u). \tag{9.124}$$

Выражая венециановские амплитуды через  $\Gamma$ -функции, мы получаем отсюда соотношение

$$\varphi(s, t, u) = -\frac{1}{\pi} \Gamma(-\alpha(s)) \Gamma(-\alpha(t)) \Gamma(-\alpha(u)). \tag{9.125}$$

Равенства (9.124) и (9.125) показывают, что (по крайней мере при  $s = 0$ ) существует более высокая симметрия, охватывающая все три переменные  $s, t, u$ . Впоследствии мы увидим, что при  $s = 0$  возникают и другие упрощения.

Проведенный выше анализ позволяет взглянуть на четырехточечную амплитуду с формальной точки зрения, которая оказывается очень удобной



Фиг. 9.16. Планарные диаграммы, соответствующие трем венециановским амплитудам  $A(s, t)$ ,  $A(u, t)$  и  $A(s, u)$ .

при обобщении модели на многочастичные процессы. Рассмотрим снова три амплитуды  $J_1, J_2, J_3$ , заданные формулами (9.121), и сделаем следующее. Сопоставим каждой внешней линии, помимо импульса частицы, скалярный параметр  $z_i$ . Придадим пока параметрам  $z_i$  значения

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \quad z_2 = x, \\ z_3 &= 1, \quad z_4 = \infty, \end{aligned} \tag{9.126}$$

совпадающие с пределами интегрирования и с переменной интегрирования в соотношениях (9.121). На фиг. 9.16 представлены планарные диаграммы, отвечающие амплитудам  $A(s, t)$ ,  $A(u, t)$  и  $A(s, u)$ . На диаграммах указаны приведенные выше параметры. Между этими диаграммами и интегралами (9.121) имеется прямое соответствие, а именно: исходя из порядка следования внешних линий [и, значит <sup>1)</sup>], параметров  $z_i$ , можно сразу же определить

<sup>1)</sup> Конечно, определяя порядок следования параметров  $z_i$ , нужно рассматривать точки  $+\infty$  и  $-\infty$  как одну и ту же точку, что соответствует условию, принятому в проективной геометрии на плоскости.

области интегрирования в интегральных представлениях амплитуд (9.123). Согласно диаграммам, показанным на фиг. 9.16, можно написать следующее:

$$1) \text{ для } A(s, t) \quad z_1 < z_2 < z_3 < z_4, \text{ т. е. } 0 \leq x \leq 1 < \infty, \quad (9.127)$$

$$2) \text{ для } A(u, t) \quad z_1 < z_3 < z_2 < z_4, \text{ т. е. } 0 < 1 \leq x \leq \infty, \quad (9.128)$$

$$3) \text{ для } A(s, u) \quad z_4 < z_2 < z_1 < z_3, \text{ т. е. } -\infty \leq x \leq 0 < 1. \quad (9.129)$$

Таким образом, каждой планарной диаграммой непосредственно определяется область интегрирования по переменной  $x$  в представлениях (9.123) и (9.121) соответствующих амплитуд.

С помощью планарных диаграмм фиг. 9.16 легко также определить, когда в амплитуде Венециано возникают полюса по той или иной переменной: полюс по переменной  $(p_i + p_j)^2$  появляется тогда, когда  $z_j$  (переменная интегрирования) совпадает с  $z_i$  (одним из пределов интегрирования). Например, в случае диаграммы  $a$  выполняются условия  $z_1 = 0 \leq z_2 = x \leq z_3 = 1$ . Поэтому существуют полюса по переменной  $(p_1 + p_2)^2 = s$ , возникающие при  $z_2 \rightarrow z_1$  (т. е. при  $x \rightarrow 0$ ), и полюса по переменной  $(p_2 + p_3)^2 = t$ , которые появляются при  $z_2 \rightarrow z_3$  (т. е. при  $x \rightarrow 1$ ). Все сказанное облегчает понимание математического механизма, обеспечивающего выполнение условий дуальности. Полюса по двум переменным сразу (например, по  $s$  и  $t$ ) не возникают, так как  $z_2$  не может в одно и то же время совпадать с  $z_1$  и  $z_3$ .

В следующем разделе мы увидим, что, пользуясь параметрами  $z_i$ , можно не только просто определить пределы интегрирования, но и представить венециановское подынтегральное выражение в более симметричной форме.

### 7. Четырехточечная амплитуда в форме, инвариантной относительно проективных <sup>1)</sup> преобразований <sup>2)</sup>

Далее мы будем считать, что масса  $m$ , общая для всех внешних частиц, совпадает с массой, соответствующей низшему полюсу дуальной амплитуды. Это условие несколько упрощает все дальнейшее. Именно, мы можем написать

$$\alpha(s) = s - m^2 = 2p_1 p_2 + m^2, \quad (9.130)$$

$$\alpha(0) = -m^2,$$

и тогда амплитуда  $A(s, t) \equiv A(p_1 p_2 p_3 p_4)$  принимает форму

$$A(p_1 p_2 p_3 p_4) = \int_0^1 dx x^{-2p_1 p_2} (1-x)^{-2p_2 p_3} [x(1-x)]_i^{-m^2-1}. \quad (9.131)$$

Этому соотношению удобно придать вид

$$A(p_1 p_2 p_3 p_4) = \int_0^1 f(x, p) \phi(x) d\Omega_x, \quad (9.132)$$

где

$$f(x, p) = x^{-2p_1 p_2} (1-x)^{-2p_2 p_3}, \quad (9.133)$$

$$\phi(x) = [x(1-x)]^{-m^2}, \quad (9.134)$$

$$d\Omega_x = \frac{dx}{x(1-x)}. \quad (9.135)$$

<sup>1)</sup> В соответствии с оригиналом в этой книге применяется термин «проективное преобразование», хотя в литературе на русском языке чаще используется термин «дробнолинейное преобразование». — Прим. перев.

<sup>2)</sup> Использовать проективную инвариантность в дуальных моделях предложили Коба и Нильсен [358] (см. также обзор [359]).



Выражение (9.131), конечно, несимметрично относительно перестановки импульсов  $p_i$  внешних частиц. Но ему можно придать более симметричную форму, вводя соответствующие переменные. С этой целью введем вспомогательные функции

$$F(z, p) = (z_2 - z_1)^{-2p_1 p_2} (z_3 - z_2)^{-2p_2 p_3} (z_3 - z_1)^{-2p_1 p_3} (z_4 - z_3)^{-2p_3 p_4} (z_4 - z_2)^{-2p_2 p_4} \times \\ \times (z_4 - z_1)^{-2p_1 p_4} = \prod_{i < j}^4 (z_j - z_i)^{-2p_i p_j}, \quad (9.136)$$

$$\varphi(z) = [(z_2 - z_1)(z_3 - z_2)(z_4 - z_3)(z_4 - z_1)]^{-m^2} = \prod_{i=1}^4 |z_{i+1} - z_i|^{-m^2} \quad (z_5 \equiv z_1). \quad (9.137)$$

Учитывая тождество

$$p_1 p_4 + p_2 p_4 + p_3 p_4 = -p_4^2 = -m^2, \quad (9.138)$$

можно написать

$$f(x, p) = \lim_{z_i \rightarrow \bar{z}_i} [z_4^{-2m^2} F(z, p)], \quad (9.139)$$

$$\phi(x) = \lim_{z_i \rightarrow \bar{z}_i} [z_4^{2m^2} \varphi(z)], \quad (9.140)$$

где через  $\bar{z}_i$  обозначены параметры, введенные в предыдущем разделе:

$$\bar{z}_{1, 2, 3, 4} = (0, x, 1, \infty).$$

Эти параметры упорядочены (в смысле, принятом в проективной геометрии) таким же образом, как внешние линии дуальной диаграммы.

Из равенств (9.139) и (9.140) следует, что

$$f(x, p) \phi(x) = \lim_{z_i \rightarrow \bar{z}_i} F(z, p) \varphi(z). \quad (9.141)$$

Нужно отметить, что изящная симметрия выражений (9.136) и (9.137) носит пока лишь формальный характер. Используя эти выражения для построения физической четырехточечной амплитуды, мы должны перейти к пределу при  $z_i \rightarrow \bar{z}_i$ , как указано в формуле (9.141). После предельного же перехода положение ухудшается, так как:

1) интегрирование ведется только по переменной  $x \equiv z_2$ , отвечающей внешнему импульсу  $p_2$ ;

2) параметры  $z_1, z_3, z_4$  закреплены в специально выбранных точках  $(0, 1, \infty)$ .

Чтобы показать иллюзорность нарушения симметрии, проделаем следующее:

1) прежде всего используем инвариантность величины  $F\varphi$  относительно трехпараметрической проективной группы и докажем, что наш результат не меняется, если отождествить параметры  $z_1, z_3, z_4$  с любыми тремя фиксированными числами  $(a, b, c)$ ;

2) далее определим (однозначно) элемент объема, входящий в подынтегральное выражение, опираясь опять-таки на проективную инвариантность функции  $F\varphi$ ;

3) наконец, покажем, что все результаты остаются неизменными, если закрепить любые три параметра  $z_i$  (придав им произвольные фиксированные значения), а по оставшемуся параметру  $z$  провести интегрирование.

Начнем с исследования свойств инвариантности произведения  $F\varphi$ . Очевидно, что в силу определений (9.136) и (9.137) функции  $F$  и  $\varphi$  инвариантны относительно трансляций

$$z_i \rightarrow z_i + a. \quad (9.142)$$

Далее, учитывая кинематические условия

$$\sum_{j(j \neq i)} p_i p_j = -p_i^2 = -m^2, \quad (9.143)$$

легко показать, что произведение  $F\phi$  не меняется также при преобразованиях

$$z_i \rightarrow cz_i \quad (9.144)$$

и

$$z_i \rightarrow \frac{1}{z_i}. \quad (9.145)$$

Хорошо известно, что одновременная инвариантность относительно операций (9.142), (9.144) и (9.145) эквивалентна инвариантности относительно всех проективных преобразований общего вида

$$z_i \rightarrow \frac{\alpha z_i + \beta}{\gamma z_i + \delta}, \quad \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0. \quad (9.146)$$

Отметим, что порядок следования набора чисел не меняется при проективных преобразованиях. Вследствие этого новый набор чисел  $(a, x', b, c)$  будет упорядочен так же, как первоначальный набор  $(0, x, 1, \infty)$ , и, значит, так же, как упорядочены внешние линии на соответствующей дуальной диаграмме.

Инвариантность величины  $F\phi$  относительно трехпараметрической группы <sup>1)</sup> (9.146) позволяет преобразовать числа  $(0, 1, \infty)$  в любые наперед заданные числа  $(a, b, c)$ . Так, преобразование

$$z = \frac{z' - a}{z' - c} \frac{b - c}{b - a} \quad (9.147)$$

превращает числа  $\bar{z}_i \equiv (0, x, 1, \infty)$  в  $\bar{z}'_i \equiv (a, x', b, c)$ , где

$$x = \frac{x' - a}{x' - c} \frac{b - c}{b - a}. \quad (9.148)$$

Вследствие проективной инвариантности произведения  $F\phi$  справедливо равенство

$$\lim_{z_i \rightarrow \bar{z}_i} F(z, p) \phi(z) = \lim_{z_i \rightarrow \bar{z}'_i} F(z, p) \phi(z). \quad (9.149)$$

Выразим элемент объема, входящий в подынтегральное выражение, через переменные  $z_i$ . Мы знаем, что, несмотря на наличие четырех переменных  $z_i$ , интегрирование ведется только по одной из них, тогда как остальные переменные нужно закрепить. В то же время мы требуем, чтобы интеграл, записанный в окончательном виде, не зависел от конкретных значений  $a, b$  и  $c$ , которые придаются параметрам  $z_1, z_3$  и  $z_4$ . Поэтому нужно представить элемент объема в форме, инвариантной относительно проективных преобразований. Элемент объема

$$d\Omega = \frac{(z_3 - z_1) dz_2}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_2)} \quad (9.150)$$

инвариантен по отношению к проективным преобразованиям общего вида (9.146). В то же время при  $z_i \rightarrow \bar{z}_i$

$$\lim_{z_i \rightarrow \bar{z}_i} d\Omega = d\Omega_x = \frac{dx}{x(1-x)}. \quad (9.151)$$

<sup>1)</sup> Группа содержит только три (комплексных) параметра, так как преобразование остается прежним при замене  $\alpha \rightarrow \xi\alpha, \beta \rightarrow \xi\beta, \gamma \rightarrow \xi\gamma, \delta \rightarrow \xi\delta$ . Этот произвол обычно устранивают, накладывая условие

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1.$$

Равенства (9.150) и (9.151) позволяют ввести  $d\Omega$  в подынтегральное выражение в качестве элемента объема<sup>1)</sup>. Окончательный результат таков:

$$\int f(x, p) \phi(x) d\Omega_x = \int \lim_{z_i \rightarrow \bar{z}_i} [F(z, p) \varphi(z) d\Omega]. \quad (9.152)$$

В силу проективной инвариантности соотношение (9.152) справедливо как при  $z_i \rightarrow \bar{z}_i$ , так и при  $z'_i \rightarrow \bar{z}_i$ . Здесь, как и ранее,  $\bar{z}_i \equiv (0, x, 1, \infty)$ ,  $\bar{z}'_i \equiv (a, x', b, c)$ . Это значит, например, что четырехточечную функцию можно записать в форме

$$A(p_1 p_2 p_3 p_4) = \int_a^b (x' - a)^{-2p_1 p_2 - m^2} (b - x')^{-2p_2 p_3 - m^2} (c - x')^{-2p_2 p_4} (b - a)^{-2p_1 p_3} \times \\ \times (c - a)^{-2p_1 p_4 - m^2} (c - b)^{-2p_2 p_4 - m^2} \frac{(b - a) dx'}{(x' - a)(b - x')}, \quad (9.153)$$

где  $a < b < c$ . Выражения типа (9.153) знакомы каждому, кто встречался с теорией гипергеометрических функций.

Хотя результат не зависит от выбора чисел  $a, b$  и  $c$ , удобнее всего положить их равными  $0, 1$  и  $\infty$ . Такой выбор чисел  $a, b, c$  применяется в дальнейшем.

Следующий вопрос, требующий обсуждения, связан с особой ролью, которую играют внешняя линия  $p_2$  и соответствующая ей переменная интегрирования  $z_2 \equiv x$ . Нетрудно убедиться, что результат не изменится, если закрыть параметры  $z_1, z_2, z_4$ , а интегрирование вести по  $z_3$ .

Перейдем от конфигурации  $\bar{z}_i \equiv (0, x, 1, \infty)$  к конфигурации  $\bar{z}'_i \equiv (0, 1, x', \infty)$ , где  $x' = 1/x$ . Поскольку  $\bar{z}'_i = (1/x)\bar{z}_i$ , произведение  $\bar{F}\varphi$  не меняется при таком преобразовании, т. е.

$$\lim_{z_i \rightarrow \bar{z}_i} F\varphi = \lim_{z_i \rightarrow \bar{z}'_i} F\varphi. \quad (9.154)$$

Далее, как показывает простая проверка

$$\frac{dx}{x(1-x)} = \lim_{z_i \rightarrow \bar{z}_i} d\Omega = \lim_{z_i \rightarrow \bar{z}'_i} d\Omega = \frac{dx'}{x'(1-x')}. \quad (9.155)$$

Поэтому окончательно можно написать

$$\int \lim_{z_i \rightarrow \bar{z}_i} [F\varphi d\Omega] = \int \lim_{z_i \rightarrow \bar{z}'_i} [F\varphi d\Omega]. \quad (9.156)$$

В правой части равенства (9.156) интегрирование ведется по переменной, которая отвечает внешней линии  $p_3$ .

Теперь ясно, что путем ряда проективных преобразований можно превратить параметр  $z_i$ , соответствующий любой наперед заданной внешней линии, в переменную интегрирования.

<sup>1)</sup> Существует удобный, но не общепринятый способ записи  $d\Omega$ , а именно

$$d\Omega = \frac{dV_{1234}}{dV_{134}},$$

где

$$dV_{1234} = \prod_i \frac{dz_i}{|z_{i+1} - z_i|} = \frac{dz_1 dz_2 dz_3 dz_4}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_2)(z_4 - z_3)(z_4 - z_1)}, \\ dV_{134} = \frac{dz_1 dz_3 dz_4}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_3)(z_4 - z_1)}.$$

Основанный на проективной инвариантности подход, который мы только что применили к элементарному случаю, послужит далее основой для построения  $n$ -точечной амплитуды. В частности, такой подход позволит нам представлять амплитуду в различных эквивалентных формах и тем самым выявлять те или иные группы полюсов.

#### § 4. Дуальные модели: свойства амплитуд и проблемы теории

##### 1. Построение дуальной резонансной теории

Четырехточечная амплитуда Венециано, рассмотренная в предыдущем разделе, обладает простыми аналитическими свойствами, точной перекрестной симметрией и реджевским поведением во всех каналах. Это позволяет думать, что, развивая модель Венециано, можно прийти к более общей схеме, применимой к любому упругому или неупругому процессу. Первым шагом в этом направлении явилось бы обобщение модели на четырехточечные амплитуды, описывающие рассеяние частиц со спином. Наиболее очевидный путь решения такой задачи — выразить амплитуду через инвариантные функции и представить последние в виде отношений  $\Gamma$ -функций, подобранных соответствующим образом (например, на основе анализа известного реджевского поведения). Дело, однако, осложняется тем, что вычеты в полюсах различных амплитуд должны удовлетворять условию факторизуемости, вследствие чего инвариантные амплитуды различных процессов нельзя выбирать независимым образом. По этой причине такая «подгонка» различных четырехточечных функций оказывается целесообразной только в немногих простейших случаях. Она становится слишком сложной, если число одновременно рассматриваемых процессов достаточно велико и если они протекают с участием частиц более высокого спина. Выход из этой трудности был найден в связи с успешным и сравнительно простым обобщением модели Венециано на процессы, в которых участвует любое число бесспиновых частиц.

Дело в том, что были найдены общие правила построения дуальных  $n$ -точечных амплитуд, обладающих всеми положительными качествами модели Венециано, такими, как простые аналитические свойства, соответствие условиям перекрестной симметрии, реджевское (а также мультиреджевское) асимптотическое поведение по надлежащим переменным<sup>1)</sup>. Кроме того, эти амплитуды согласованы между собой, так как факторизация  $(n + 1)$ -точечной функции в нижнем полюсе (по соответствующей переменной) приводит к правильной  $n$ -точечной функции. Поэтому следует уделить особое внимание изучению  $n$ -точечных амплитуд, ибо  $n$ -точечные функции, описывающие взаимодействие бесспиновых частиц, содержат неявную информацию о четырехточечных амплитудах для частиц с любым целым спином. Действительно, можно получить любое значение углового момента  $J$ , объединяя надлежащим образом две бесспиновые частицы. Именно так, например, делают, когда по экспериментальным данным о реакции  $\pi N \rightarrow \pi \pi N$  определяют амплитуду процесса  $\pi N \rightarrow \rho N$ . В этом случае реакция  $\pi N \rightarrow \pi \pi N$  исследуется в области, где инвариантная масса пары вылетающих пионов совпадает с массой  $\rho$ -резонанса.

Из сказанного следует, что ключом к успешному использованию  $n$ -точечных амплитуд является изучение свойств факторизуемости всевозможных вычетов. Число независимых членов позволяет судить о вырождении уровней. Здесь мы встречаемся с одним неожиданным обстоятельством. Уровни, отве-

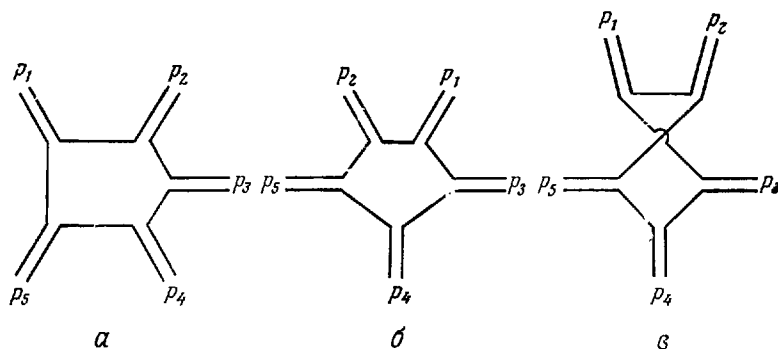
<sup>1)</sup> Понятие мультиреджевского асимптотического поведения определено в конце 4, п. 4. — Прим. перев.

чающие точкам, где  $\alpha(s) = n$ , сильно вырождены. Только низший уровень, соответствующий значению  $n = 0$ , не вырожден. В области больших  $n$  степень вырождения возрастает как  $\exp(a\sqrt{n})$ , т. е. значительно быстрее, чем можно было ожидать на основании примитивных подсчетов с использованием реджевских и толлеровских траекторий. Это важное обстоятельство приводит к ряду интересных следствий, которые будут рассмотрены подробно в § 4, п. 6. В ходе изучения  $n$ -точечных амплитуд был создан компактный математический аппарат, основанный на применении операторов рождения и уничтожения. Этот аппарат позволяет устранить трудности, связанные с большим числом уровней. С математической точки зрения наличие такого метода следует рассматривать, как обнадеживающее обстоятельство.

В заключение отметим, что мы все еще очень далеки от дуальной теории элементарных частиц. В процессе работы над этой проблемой возникло много трудных вопросов, которые еще не решены и могут в конце концов разрушить всю схему. В то же время изящество и симметрия общей картины позволяют надеяться, что существующая схема, дополненная новыми идеями, ляжет в основу физики сильных взаимодействий.

## 2. Дуальность в многочастичных процессах

Рассмотрим общие правила построения дуальных многочастичных амплитуд [358, 360, 362—364, 372]. Воспользуемся правилами планарной дуальности. Этот метод уже использовался в § 3 при выводе выражения для четырехточечной функции. Приступая к построению  $n$ -точечной амплитуды, изобразим сначала все возможные планарные дуальные диаграммы.



Фиг. 9.17. Планарные и непланарные диаграммы в случае пяти внешних частиц.

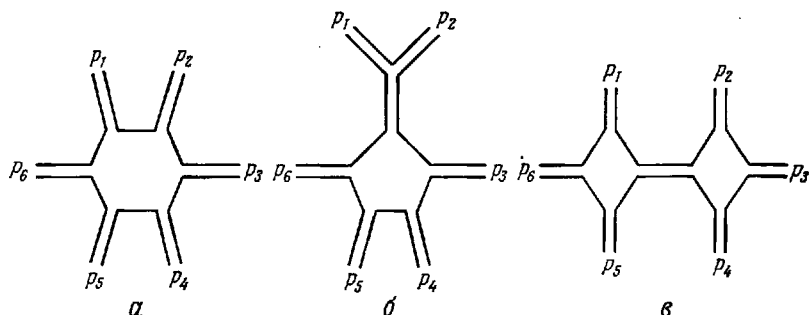
Диаграммы *a* и *б* соответствуют разным амплитудам. Действительно, если деформировать диаграмму *б* таким образом, чтобы порядок следования внешних линий стал таким же, как на диаграмме *a*, т. е. 1, 2, 3, 4, 5, то получится непланарная диаграмма *в*.

Будем считать, что каждая такая диаграмма инвариантна относительно всех «планарных перестановок» внешних линий. Под «планарными перестановками» понимаются циклические перестановки, а также изменение порядка следования внешних линий на обратный (фиг. 9.17). С каждой планарной диаграммой свяжем определенный член в выражении для полюсов амплитуды. Конкретный вид этих членов приведен в следующем разделе.  $n$ -точечная амплитуда содержит  $n!/2n = \frac{1}{2}(n-1)!$  членов<sup>1)</sup>; в частности, существует 3 члена при  $n = 4$  (как показано в § 3) и 12 членов при  $n = 5$ .

Остановимся далее на полюсной структуре каждого члена. Определенный член  $n$ -частичной амплитуды имеет полюс по переменной  $s$ , если, дефор-

<sup>1)</sup> Здесь  $2n$  — число циклических и антициклических перестановок. Под антициклической перестановкой понимается результат двух последовательных операций: замены порядка следования линий на обратный и циклической перестановки.

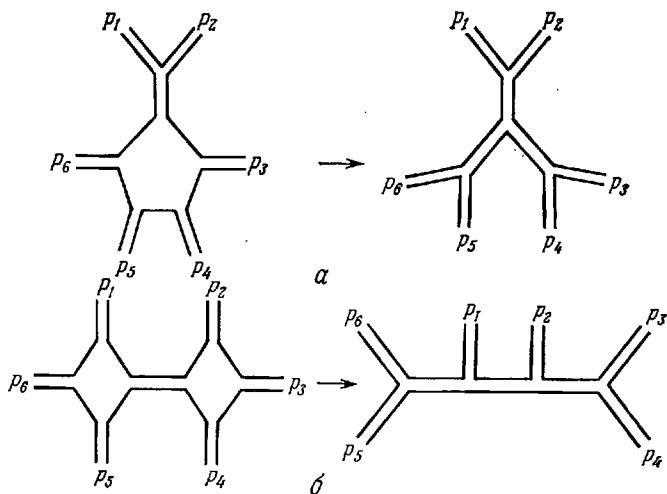
мируя соответствующую планарную дуальную диаграмму, можно обнаружить промежуточную частицу в надлежащем канале. Положение вещей проиллюстрировано на фиг. 9.18. Член, отвечающий последовательности линий (1, 2, 3, 4, 5, 6), может иметь полюс по переменной  $(p_1 + p_2)^2$  или



Фиг. 9.18. Возможные полюса амплитуды.

Амплитуда вида 1, 2, 3, 4, 5, 6 (диаграмма а) может иметь полюс по  $(p_1 + p_2)^2$  (диаграмма б) и полюс по  $(p_1 + p_3 + p_4)^2$  (диаграмма в). Но, не нарушая планарности, невозможно так деформировать диаграмму а, чтобы обнаружился полюс по  $(p_1 + p_3)^2$ .

по переменной  $(p_2 + p_3 + p_4)^2$ , но не может иметь полюса по переменной  $(p_1 + p_3)^2$ . Однако полюс по  $(p_1 + p_3)^2$  присущ, например, амплитуде (1, 3, 2, 4, 5, 6). Дуальную диаграмму можно подвергнуть дальнейшей деформации, чтобы выявить другие возможные одночастичные промежуточные



Фиг. 9.19. Совместные и несовместные полюса.

В соответствии с диаграммами а и б из амплитуды 1, 2, 3, 4, 5, 6 можно выделить член вида

$$[(p_5 + p_6)^2 - M_{56}^2]^{-1} [(p_3 + p_4)^2 - M_{34}^2]^{-1} [(p_1 + p_2)^2 - M_{12}^2]^{-1}$$

или вида

$$[(p_5 + p_6)^2 - M_{56}^2]^{-1} [(p_1 + p_6 + p_3)^2 - M_{156}^2]^{-1} [(p_3 + p_4)^2 - M_{34}^2]^{-1}.$$

Но из диаграммы а следует, что полюса амплитуды по переменным  $(p_1 + p_2)^2$  и  $(p_2 + p_3 + p_4)^2$  несовместны.

состояния. Например, у диаграммы, показанной на фиг. 9.19, обнаруживаются одновременно одночастичные состояния, обладающие массами  $(p_1 + p_2)^2$ ,  $(p_3 + p_4)^2$ ,  $(p_5 + p_6)^2$ . Но у нее не могут в одно и то же время появляться полюса по  $(p_1 + p_2)^2$  и по  $(p_2 + p_3 + p_4)^2$ . Полюса, которые могут обнаруживаться одновременно при деформации дуальной диаграммы, называются

совместными, а те, которые не могут обнаруживаться одновременно, — несовместными.

Легко сформулировать общее правило, позволяющее определить, совместны ли полюса. Полюса, порожденные траекторией

$$\alpha_{ij} = (p_i + \dots + p_j)^2 - m^2 = (p_{j+1} + \dots + p_{i-1})^2 - m^2, \quad (9.157)$$

несовместны со всеми полюсами, лежащими на траектории

$$\alpha_{ab} = (p_a + p_{a+1} + \dots + p_b)^2 - m^2, \quad (9.158)$$

если одновременно <sup>1)</sup>

$$i \leq a \leq j,$$

$$j + 1 \leq b \leq i - 1. \quad (9.159)$$

Представление о несовместности полюсов имеет следующее важное значение: из правильно построенной дуальной амплитуды можно выделить член, содержащий произведение совместных полюсов; в то же время мы требуем, чтобы не возникали произведения несовместных полюсов. Например, в случае диаграммы (1, 2, 3, 4, 5, 6) можно выделить член вида

$$\frac{1}{(p_1 + p_2)^2 - M_{12}^2} \frac{1}{(p_3 + p_4)^2 - M_{34}^2} \frac{1}{(p_5 + p_6)^2 - M_{56}^2}, \quad (9.160)$$

но нельзя выделить произведение полюсов по переменным  $(p_1 + p_2)^2$  и  $(p_2 + p_3 + p_4)^2$ . Простейший пример несовместных полюсов относится к четырехточечной амплитуде, которая не может содержать член вида  $(s - M_s^2)^{-1} (t - M_t^2)^{-1}$ . Полюса по  $t$  возникают в данном случае вследствие расходимости суммы всех полюсов по  $s$ .

Пример четырехточечной амплитуды показывает, каким образом можно получить амплитуду с нужной полюсной структурой. Амплитуду Венециано можно символически записать в виде

$$A_4(s, t) = \int_0^1 (x_s)^{-\alpha(s)-1} (x_t)^{-\alpha(t)-1} d\Omega, \quad (9.161)$$

где переменные  $x_s$  и  $x_t$  не могут меняться независимо друг от друга, а подчинены условию

$$x_t = 1 - x_s, \quad \text{т. е.} \quad d\Omega = dx_s dx_t \delta(1 - x_t - x_s). \quad (9.162)$$

Если  $x_s \rightarrow 0$  [что порождает полюс по  $\alpha(s)$ ], то в силу условия (9.162) мы имеем  $x_t \rightarrow 1$ , так что полюс по  $t$  не может возникнуть.

Обобщим теперь указанный прием на  $n$ -точечные амплитуды. Обозначим через  $s_i$  все инвариантные переменные, отвечающие возможным полюсам, и сопоставим каждому  $s_i$  переменную интегрирования  $x_i$ . Амплитуду можно формально записать в виде

$$\int \prod_m (x_m)^{-\alpha(s_m)-1} d\Omega. \quad (9.163)$$

<sup>1)</sup> Это же правило можно изложить более абстрактным образом: сопоставим полюсу по каждой переменной

$$s = (p_i + \dots + p_j)^2 = (p_{j+1} + \dots + p_{i-1})^2$$

набор  $I$  импульсов  $p_i, \dots, p_j$  и дополнительный набор  $I^*$  импульсов  $p_{j+1}, \dots, p_{i-1}$ . Полюса по двум переменным (например,  $s_1$  и  $s_2$ ) несовместны, если все пары наборов

$$(I_1, I_2), (I_1^*, I_2^*), (I_1, I_2^*), (I_1^*, I_2)$$

имеют непустые пересечения.

Если  $x_m \rightarrow 0$ , то возникает полюс по соответствующей «массе» при  $\alpha(s_m) = n$ . Требование, чтобы несовместные полюса не возникали одновременно, порождает связи между переменными интегрирования. Вследствие этого число независимых переменных интегрирования оказывается равным числу совместных полюсов. Это значит, что в случае  $n$ -точечной амплитуды должно быть  $n - 3$  независимых переменных интегрирования <sup>1)</sup> (при  $n = 4$  остается одно интегрирование). Пусть полюса, отвечающие переменным  $x'_i$ , несовместны с полюсом по  $s_m$ . Тогда условие дуальности требует, чтобы при  $x_m \rightarrow 0$  ни одна из переменных  $x'_i$  не могла обратиться в нуль. Проще всего этого можно добиться, положив

$$x_m = 1 - \prod x'_i, \tag{9.164}$$

где в произведение входят все переменные  $x'_i$ , несовместные с  $x_m$ .

Непосредственное решение этих дуальных уравнений связи не встречает существенных трудностей, но оно очень громоздко и мало что дает. В следующем разделе мы увидим, что распространение метода проективных преобразований, изложенного в § 3, п. 7, на  $n$ -точечные амплитуды позволяет автоматически получить общее решение уравнений (9.164). Кроме того, таким методом можно составить общие правила построения  $n$ -точечных амплитуд.

### 3. Обобщенные амплитуды Венециано

Построим  $n$ -точечную функцию в явном виде. Рассмотрим амплитуду, которая отвечает планарной конфигурации (1, 2, ...,  $n$ ), представленной на фиг. 9.20. Обратимся к случаю бесспиновых частиц, для которых выполнено условие бутстрапа и уравнение траектории имеет вид

$$\alpha(s) = s - m^2,$$

где  $m$  — масса внешних частиц.

Как и в случае четырехточечной функции, сопоставим каждой внешней линии, несущей импульс  $p_i$ , скалярную переменную  $z_i$ . В случае  $n$ -точечной амплитуды естественный порядок переменных  $z_i$  совпадает с порядком следования внешних линий на соответствующей дуальной диаграмме.

Введем теперь основные функции

$$F(z, p) = \prod_{i < j}^n (z_j - z_i)^{-2p_i p_j}, \tag{9.165}$$

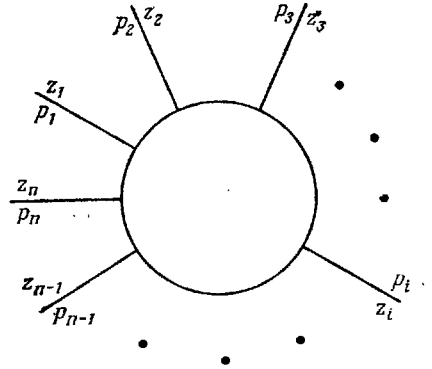
$$\varphi(z) = \prod_{i=1}^n |z_{i+1} - z_i|^{-m^2}, \quad (z_{n+1} \equiv z_1). \tag{9.166}$$

Применяя тождество

$$\sum_{j(j \neq i)} p_i p_j = -p_i^2 = -m^2, \tag{9.167}$$

легко показать, что произведение

$$F(z, p) \varphi(z) \tag{9.168}$$



Фиг. 9.20.  $n$ -точечная амплитуда, отвечающая размещению внешних линий в порядке 1, 2, ...,  $n$ .

<sup>1)</sup> В то же время число независимых кинематических инвариантов, как известно, равно  $3n - 10$ .



инвариантно относительно проективных преобразований общего вида

$$z'_i = \frac{\alpha z_i + \beta}{\gamma z_i + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \quad (9.169)$$

Напомним, что эти преобразования не меняют естественного порядка переменных  $z_i$ . Путем проективного преобразования (оставляющего неизменным произведение  $F\phi$ ) можно придать трем из переменных  $z_i$  любые наперед заданные значения  $a, b, c$ . Как и ранее, очень удобно закрепить эти три переменные в точках  $0, 1$  и  $\infty$ .

Вследствие проективной инвариантности функции (9.168) произведение  $F\phi$  зависит в действительности только от  $(n - 3)$  переменных. Число  $(n - 3)$  совпадает с количеством независимых переменных интегрирования, которое было определено из общих соображений в предыдущем параграфе.

Придав каким-либо трем переменным  $z_i$  фиксированные значения  $a, b, c$ , выберем элемент объема, входящий в подынтегральное выражение, следующим образом:

$$d\Omega = \frac{dV_{1, 2, \dots, n}}{dV_{abc}}, \quad (9.170)$$

где

$$dV_{1, 2, \dots, n} = \frac{dz_1 \dots dz_n}{(z_2 - z_1) \dots (z_n - z_1)},$$

$$dV_{abc} = \frac{dz_a dz_b dz_c}{(z_b - z_a)(z_c - z_a)(z_c - z_b)}. \quad (9.171)$$

Наконец, определим  $n$ -точечную амплитуду, положив

$$A(p_1, p_2, \dots, p_n) = \int \lim_{\substack{z_a \rightarrow a \\ z_b \rightarrow b \\ z_c \rightarrow c \\ \text{упоряд}}} F(z, p) \phi(z) d\Omega, \quad (9.172)$$

где область интегрирования в упорядоченном интеграле задана неравенствами

$$z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1} < z_n.$$

Учитывая вид функций  $F(z, p)$  и  $\phi(z)$ , а также проективную инвариантность всех соотношений, можно показать (приложение I), что амплитуда  $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$  не меняется при планарных перестановках (т. е. при циклических и антициклических перестановках). Эти перестановки, очевидно, образуют группу.

Теперь нужно убедиться, что амплитуда (9.172), построенная по аналогии с четырехточечной функцией, действительно удовлетворяет общим требованиям дуальности, изложенным в § 4, п. 2.

С этой целью мы прежде всего преобразуем интеграл (9.172) к виду, в котором он явно содержал бы функции  $\alpha_{ij}$ , описывающие траектории.

Исходя из тождества

$$2p_i p_j = (k + p_i + p_j)^2 - (k + p_i)^2 - (k + p_j)^2 + k^2,$$

справедливого при любом  $k$ , можно написать (например)

$$2p_1 p_2 = (p_1 + p_2)^2 - p_1^2 - p_2^2,$$

$$2p_1 p_3 = (p_1 + p_2 + p_3)^2 - (p_1 + p_2)^2 - (p_2 + p_3)^2 + p_2^2, \quad (9.173)$$

$$2p_1 p_4 = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)^2 - (p_1 + p_2 + p_3)^2 - (p_2 + p_3 + p_4)^2 + (p_2 + p_3)^2$$

и т. д. С помощью тождеств (9.173) легко представить произведение  $F\phi$  в виде

$$F(z, p) \phi(z) = \prod_{i < j} (x_{ij})^{-\alpha_{ij}-1} \chi, \quad (9.174)$$

где

$$\chi = \frac{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3) \dots (z_n - z_1)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4) \dots (z_n - z_2)} = \prod_{i=1}^n \left| \frac{z_i - z_{i+1}}{z_i - z_{i+2}} \right|.$$

Траектории  $\alpha_{ij}$ , как обычно, задаются равенствами

$$\alpha_{ij} = (p_i + p_{i+1} + \dots + p_j)^2 - m^2, \tag{9.175}$$

а переменные  $x_{ij}$  — это ангармонические отношения <sup>1)</sup>:

$$x_{ij} \equiv [z_{i-1}, z_i, z_j, z_{j+1}] = \frac{(z_i - z_j)(z_{i-1} - z_{j+1})}{(z_{i-1} - z_j)(z_i - z_{j+1})}. \tag{9.176}$$

Поскольку

$$(p_i + \dots + p_j)^2 = (p_{j+1} + \dots + p_{i-1})^2,$$

переменные  $\alpha_{ij}$  и  $x_{ij}$  можно обозначить также через  $\alpha_{j+1, i-1}$ ,  $x_{j+1, i-1}$ . Из равенств (9.174)–(9.176) непосредственно следует проективная инвариантность произведения  $F\phi$ . Действительно, величина  $\chi$  и все ангармонические отношения инвариантны относительно этих преобразований. Покажем теперь, основываясь на предыдущих результатах, что требования дуальности выполнены. Прежде всего заметим, что вследствие естественной упорядоченности переменных  $z_i$  все ангармонические отношения  $x_{ij}$  заключены между нулем и единицей. Кроме того, пользуясь тождествами

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] + [z_2, z_3, z_4, z_1] = 1 \tag{9.177}$$

и

$$\begin{aligned} [z_1, z_2, z_3, x] [z_1, z_2, x, z_4] &= [z_1, z_2, z_3, z_4], \\ [x, z_2, z_3, z_4] [z_1, x, z_3, z_4] &= [z_1, z_2, z_3, z_4], \end{aligned} \tag{9.178}$$

нетрудно убедиться, что переменные  $x_{ij}$  действительно удовлетворяют условиям дуальности (9.164)

$$x_{ij} = 1 - \prod_{a=i+1}^j \prod_{b=j+1}^{i-2} x_{ab}. \tag{9.164'}$$

Здесь в произведение включены все  $x_{ab}$ , несовместные с  $x_{ij}$  <sup>2)</sup>.

Мы видим, что амплитуда (9.172) является естественным обобщением четырехточечной амплитуды. В следующем разделе мы исследуем основные свойства таких  $n$ -точечных амплитуд.

**. Свойства дуальных резонансных амплитуд**

Посмотрим, каковы основные свойства  $n$ -точечных амплитуд. Чтобы упростить исследование, воспользуемся специальным набором переменных  $z_i$ .

Рассмотрим  $(n + 2)$ -точечную амплитуду  $A(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$  и положим

$$z_0 = 0, \quad z_n = 1, \quad z_{n+1} = \infty. \tag{9.179}$$

Вследствие естественной упорядоченности переменных  $z_i$  будут справедливы неравенства

$$0 < z_1 < z_2 \dots < z_{n-1} < z_n = 1 < z_{n+1} = \infty. \tag{9.180}$$

<sup>1)</sup> Мы вводим такое не совсем обычное обозначение для ангармонического отношения, чтобы правила (9.177)–(9.178) было легче запомнить.

<sup>2)</sup> Действительно,

$$\begin{aligned} 1 - \prod_{a=i+1}^j \prod_{b=j+1}^{i-2} [z_{a-1}, z_a, z_b, z_{b+1}] &= 1 - \prod_{a=i+1}^j [z_{a-1}, z_a, z_{j+1}, z_{i-1}] = \\ &= 1 - [z_i, z_j, z_{j+1}, z_{i-1}] = [z_{i-1}, z_i, z_j, z_{j+1}]. \end{aligned}$$

Введем вспомогательные переменные

$$x_1 = \frac{z_1}{z_2}, \quad x_2 = \frac{z_2}{z_3}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{z_n} = z_{n-1}. \quad (9.181)$$

Области изменения переменных  $x_i$  не будут зависеть друг от друга, так как из равенства (9.181) следует, что

$$0 < x_i < 1. \quad (9.182)$$

Далее, введем переменные

$$\xi_{ij} = \frac{z_i}{z_j} = x_i x_{i+1} \dots x_{j-1}, \quad i < j; \quad (9.183)$$

в частности,

$$\xi_{i, i+1} = x_i. \quad (9.184)$$

Пользуясь «системой отсчета» (9.179) и переходя к новым переменным  $x_i$  и  $\xi_{ij}$ , амплитуду  $A$  можно записать в виде

$$A_{n+2}(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) = \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_{n-1} x_1^{-\alpha(s_1)-1} \dots x_{n-1}^{-\alpha(s_{n-1})-1} C(x, p) \gamma(x), \quad (9.185)$$

где  $s_i = (p_0 + p_1 + \dots + p_i)^2$ , а функции  $C(x, p)$  и  $\gamma(x)$  таковы:

$$C(x, p) = \prod_{1 \leq i < j} (1 - \xi_{ij})^{-2p_i p_j}, \quad (9.186)$$

$$\gamma(x) = \left[ \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \xi_{i, i+1}) \right]^{-m^2-1} = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - x_i)^{-m^2-1}.$$

Заметим, что функция  $\gamma(x)$  несколько ухудшает симметрию выражения (9.185), поскольку создает особого рода корреляцию между соседними внешними линиями. В нефизическом случае, который отвечает значению  $m^2 = -1$ , т. е.  $\alpha(0) = 1$ , функция  $\gamma(x)$  обращается в единицу. Мы уже видели в § 3, п. 6, и мы еще увидим ниже, что этот случай отличается особым математическим изяществом и простотой.

В качестве примера выпишем в явном виде планарный интеграл (9.185), отвечающий пятиточечной амплитуде:

$$A_5(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4) = \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1^{-\alpha(s_1)-1} x_2^{-\alpha(s_2)-1} (1 - x_1 x_2)^{-2p_1 p_3} \times \\ \times (1 - x_1)^{-2p_1 p_2 - m^2 - 1} (1 - x_2)^{-2p_2 p_3 - m^2 - 1}, \quad (9.187)$$

$$s_{1,2} = (p_0 + p_{1,2})^2.$$

Первым свойством амплитуды, требующим изучения, является структура полюсов. Исследуем ее. Как и в случае четырехточечной функции, разложим произведение  $C\gamma$  в степенной ряд по переменным  $x_i$ :

$$C(x, p) \gamma(x) = \sum_{l_1 \dots l_{n-1}} \Gamma_{l_1 \dots l_{n-1}}(p) x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_{n-1}^{l_{n-1}}. \quad (9.188)$$

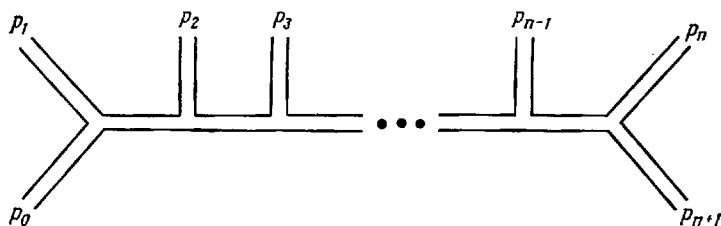
Подставляя этот ряд в формулу (9.185), получаем выражение

$$A_{n+2} = \frac{\Gamma_{l_1 l_2 \dots l_{n-1}}(p)}{[\alpha(s_1) - l_1] [\alpha(s_2) - l_2] \dots [\alpha(s_{n-1}) - l_{n-1}]}. \quad (9.189)$$

Здесь явно обнаруживаются полюса, присущие мультипериферической конфигурации, представленной на фиг. 9.21. Если мы ограничимся грубым

приближением и учетом только члены нулевого порядка в разложении (9.188), то приходим к старой мультипериферической модели.

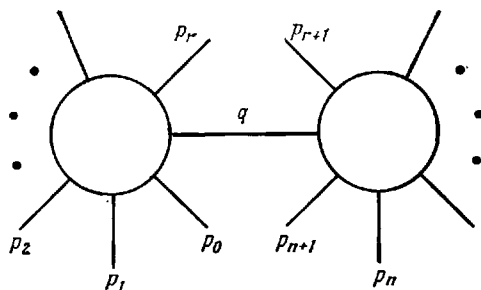
Конечно, как и в случае четырехточечной амплитуды, в выражении (9.189) мы в явной форме усматриваем только один тип полюсов. Полюса же, которые несовместны с полюсами по переменным  $s_1, \dots, s_{n-1}$ , простекают



Фиг. 9.21. Мультипериферическая конфигурация в случае  $(n + 2)$ -точечной амплитуды.

из расходимости ряда (9.189). Пользуясь проективной инвариантностью функции  $A$ , можно записать последнюю во многих эквивалентных формах. Например, новое выражение для  $A$  получается из предыдущего заменой  $p_i \rightarrow p_{i+1}$ , т. е.  $s_i \rightarrow s'_i = (p_1 + \dots + p_{i+1})^2$ . Конечно, в новом выражении, эквивалентном прежнему, в явном виде фигурируют совсем другие полюса.

Внутренняя непротиворечивость развитой схемы связана прежде всего с характером низшего полюса по массовой переменной (фиг. 9.22). Вычет в полюсе, лежащем при  $q^2 = m^2$ ,  $q = p_0 + \dots + p_r = -p_{r+1} - \dots - p_{n+1}$ , должен удовлетворять условию факторизуемости. Иными словами, с точностью до постоянного множителя этот вычет должен совпадать с произведением двух многочастичных амплитуд:  $A(p_0, \dots, p_r, q)$



Фиг. 9.22. Факторизация вычета в низшем полюсе по переменной  $q^2$ .

и  $A(q, p_{r+1}, \dots, p_{n+1})$ . Чтобы проверить это свойство, найдем величины  $\lim_{x_r \rightarrow 0} C(x, p) \gamma(x)$ . Нетрудно убедиться, что в пределе при  $x_r \rightarrow 0$  мы имеем

$$\xi_{ij} = 0, \quad i \leq r < j.$$

Вследствие этого функции  $C$  и  $\gamma$  принимают факторизованную форму:

$$\lim_{x_r \rightarrow 0} C(x, p) = C(x_1 \dots x_{r-1}, p_0 \dots p_{r-1}) C(x_{r+1} \dots x_{n-1}, p_{r+1} \dots p_{n+1}),$$

$$\lim_{x_r \rightarrow 0} \gamma(x) = \gamma(x_1 \dots x_{r-1}) \gamma'_i(x_{r+1} \dots x_{n-1}), \tag{9.190}$$

что позволяет окончательно написать

$$\lim_{s_r \rightarrow m^2} (s_r - m^2) A_{n+2} = A_{r+2} A_{s+2}, \quad (r + s = n). \tag{9.191}$$

Здесь все амплитуды  $A_{n+2}, A_{r+2}, A_{s+2}$  определены равенством (9.185).

Можно, конечно, воспользоваться тем же способом, чтобы подробно исследовать свойства высших полюсов. Но если мы попытаемся сделать это «в лоб», то столкнемся с громоздкими вычислениями, сложность которых возрастает по мере увеличения порядка полюса. Поэтому подробное изучение высших полюсов требует менее прямолинейного подхода. В следующем

разделе будет введен метод операторов рождения и уничтожения, который позволит решить эту задачу.

Закончим этот раздел исследованием асимптотических свойств дуальных амплитуд. Это важный вопрос, так как одно из преимуществ модели Венециано заключается в реджевском поведении четырехточечной амплитуды, совместном с перекрестной симметрией. В частности, нам важно установить реджезуемость  $n$ -точечной амплитуды при переходе к мультиреджевским пределам, т. е. в каждом случае, когда  $p_i p_j \rightarrow \infty$  ( $i < j$ ,  $1 \leq j \leq n$ )<sup>1)</sup>. По аналогии с анализом, проведенным в § 3, п. 4, легко показать, что при переходе к такому пределу в интеграле (9.185) доминирует вклад области, где  $\xi_{ij} \approx 0$ . Поэтому справедливо приближенное равенство

$$(1 - \xi_{ij}) \approx \exp(-\xi_{ij}), \quad (9.192)$$

в силу которого произведение  $C(x, p) \gamma(x)$  принимает в пределе простой вид

$$C(x, p) \gamma(x) \underset{\xi_{ij} \rightarrow 0}{\sim} \exp\left[2 \sum_{i < j} \xi_{ij} p_i p_j + (1 + m^2) \xi_{i, i+1}\right]. \quad (9.193)$$

Вводя переменные

$$\begin{aligned} t_i &= (p_i + p_{i+1})^2 - m^2 + 1, \\ t_{ij} &= 2p_i p_j, \quad j > i + 1, \end{aligned} \quad (9.194)$$

формулу (9.193) можно переписать так:

$$C(x, p) \gamma(x) \underset{\xi_{ij} \rightarrow 0}{\sim} \exp\left(2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i t_i + \sum_{j>i+1} \xi_{ij} t_{ij}\right). \quad (9.195)$$

Подставляя это выражение в формулу (9.185), вводя новые переменные интегрирования

$$y_i = -t_i x_i \quad (9.196)$$

и переходя к пределу при

$$t_i, t_{ij} \rightarrow \infty$$

при фиксированных значениях величин

$$s_i = (p_0 + p_1 + \dots + p_i)^2 \quad \text{и} \quad \tau_{ij} = \frac{t_{ij}}{t_i t_{i+1} \dots t_{j-1}}, \quad (9.197)$$

мы получаем окончательное равенство

$$A_{n+2} \approx (-t_1)^{\alpha(s_1)} \dots (-t_{n-1})^{\alpha(s_{n-1})} G(\tau_{ij}, s_i), \quad (9.198)$$

где  $G(\tau_{ij}, s_i)$  — «корреляционная функция», которая дается выражением

$$\begin{aligned} G(\tau_{ij}, s_i) &= \int_0^\infty dy_1 \dots dy_{n-1} \exp[-(y_1 + y_2 + \dots + y_n) - \eta_{ij} \tau_{ij}] (y_1)^{-\alpha(s_1)-1} \dots \\ &\dots (y_{n-1})^{-\alpha(s_{n-1})-1}, \quad \eta_{ij} = y_i y_{i+1} \dots y_{j-1}. \end{aligned} \quad (9.199)$$

Равенство (9.198) имеет вид типичной мультиреджионной формулы, в которой «корреляционная функция»  $G(\tau_{ij})$  зависит от толлеровских углов  $\tau_{ij}$ , заданных равенством (9.197). Легко видеть также, что функция  $G(\tau_{ij}, s_i)$  обладает нужными полюсами при  $\alpha(s_i) = n_i$ . Это соответствует общим требованиям, предъявляемым к обычным мультиреджионным функциям. В то же время полюса по другим дуальным переменным, неявно присутствующие в точном выражении (9.185), исчезают в рамках приближения, принятого при переходе к асимптотическому пределу.

<sup>1)</sup> См., например, работы [365, 366, 535].

В качестве примера рассмотрим поведение пятиточечной амплитуды (9.187) при переходе к двойному реджевскому пределу, который определяется условиями:  $p_1 p_2, p_2 p_3, p_1 p_3 \rightarrow \infty$ , т. е.  $t_1 = (p_1 + p_2)^2, t_2 = (p_2 + p_3)^2, t_{13} = 2p_1 p_3 \rightarrow \infty$  при фиксированных  $s_1, s_2$  и  $\tau_{13} = t_{13}/t_1 t_2$ . Мы находим, что

$$A_5(p_0 \dots p_4) \approx (-t_1)^{\alpha(s_1)} (-t_2)^{\alpha(s_2)} G(\tau_{13}, s_1, s_2), \quad (9.200)$$

где

$$G(\tau_{13}, s_1, s_2) = \int_0^\infty dy_1 dy_2 (y_1)^{-\alpha(s_1)-1} (y_2)^{-\alpha(s_2)-1} \exp[-(y_1 + y_2 + y_1 y_2 \tau_{13})]. \quad (9.201)$$

Функция  $G$ , даваемая выражением (9.201), зависит от единственного толлеровского угла  $\tau_{13}$ .

Таким образом, мы убедились, что все свойства  $n$ -точечных амплитуд, рассмотренные до сих пор, вполне удовлетворительны и являются обобщением аналогичных свойств четырехточечной функции. Далее нам нужно исследовать свойства факторизуемости различных уровней. Для этого необходим соответствующий подход, который и будет развит в следующем разделе.

### 5. Факторизация и операторный метод <sup>1)</sup>

Рассмотрим один из ключевых вопросов теории дуальных амплитуд, а именно выясним структуру резонансных уровней.

Выберем какую-нибудь одну переменную  $s$ . Как мы уже видели, резонансы существуют при значениях  $s_n$ , удовлетворяющих условиям

$$\alpha(s_n) = n. \quad (9.202)$$

При изучении четырехточечной амплитуды (§ 3, п. 3) было показано, что в полюсе при  $\alpha(s_n) = n$  представлены все спины, удовлетворяющие неравенству  $0 \leq J \leq n$ . Поэтому каждому значению  $s_n$  квадрата массы отвечает несколько состояний.

Теперь нужно выяснить, соответствует ли каждому значению спина  $J$  при фиксированной массе одна или несколько частиц. Чтобы однозначно ответить на этот вопрос, следует рассмотреть все возможные каналы, в которых рождается и распадается интересующее нас состояние. Изобразим рассматриваемый процесс символически следующим образом:

$$I \rightarrow \{\text{полюс при } \alpha(s_n) = n\} \rightarrow II, \quad (9.203)$$

где через  $I$  и  $II$  обозначены все возможные начальные и конечные каналы, соответствующие фиксированному спину  $J$ .

Данный уровень *невыврожден*, если для любой пары состояний  $I$  и  $II$  вычет  $R_n$  в полюсе при  $\alpha(s) = n$  факторизуется в соответствии с формулой

$$R_n = F_{nJ}(I) G_{nJ}(II). \quad (9.204)$$

Здесь функция  $F_{nJ}(I)$  должна зависеть только от переменных, описывающих начальное состояние, а функция  $G_{nJ}(II)$  — от переменных, описывающих конечное состояние.

Если формула (9.204) не имеет места, то можно определить степень вырождения, представив указанные вычеты в виде суммы факторизован-

<sup>1)</sup> Общая форма вырождения уровней была впервые установлена Фубини и Венециано [367] и Бардакчи и Мандельштамом [368]. Очень удобный операторный метод был введен Фубини, Гордоном и Венециано [369], Намбу [401] и Сускиндом [371]. (См. также работу Аматти, Бушия и Жерве [735]. — Прим. перев.)

ных членов:

$$R_n = \sum_{i=1}^N E_n^{(i)}(I) G_n^{(i)}(II). \quad (9.204')$$

Степень вырождения равна числу *независимых* членов в правой части этого равенства.

Полное исследование вырождения уровней нельзя провести, зная одну лишь четырехточечную функцию. Чтобы получить недостающую информацию, необходимо рассмотреть  $n$ -точечные амплитуды, построенные в предыдущем разделе. Действительно, пусть промежуточное состояние, обладающее фиксированной массой и спином, образовано из двух внешних частиц. Тогда начальное состояние однозначно определено и поэтому нельзя обнаружить возможного вырождения. Рассматривая  $n$ -точечные амплитуды, мы уже установили [равенство (9.191)], что вычет в нижнем полкусе, отвечающий обращению величины  $\alpha(s)$  в нуль, действительно равен произведению двух функций, одна из которых зависит только от переменных начального, а другая — от переменных конечного состояния. Отсюда видно, что низший полкус (которому отвечает значение  $J = 0$ ) является *невырожденным* синглетом. Действуя, как указано в предыдущем разделе, можно было бы убедиться, что каждый более высокий полкус соответствует конечному числу уровней, хотя вырождение растет очень быстро по мере увеличения энергии. Правда, такой прямой подход приводит вскоре к очень громоздким выкладкам. Поэтому удобнее ввести операторный метод, который позволяет осуществить общее описание структуры уровней в данной модели.

Проиллюстрируем идею, лежащую в основе такого метода, на примере одного члена  $C_{12} \equiv C(p_1 z_1, p_2 z_2)$ :

$$C_{12} = \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)^{-2p_1 p_2} = \exp \left[ -2p_1 p_2 \ln \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right) \right]. \quad (9.205)$$

Мы намерены «факторизовать» член  $C_{12}(p_1 z_1, p_2 z_2)$ , т. е. представить его в виде

$$C_{12}(p_1 z_1, p_2 z_2) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}(p_1 z_1) \gamma_{\alpha}(p_2 z_2). \quad (9.206)$$

Чтобы выяснить, как это можно сделать, рассмотрим сначала более простое выражение:

$$\exp(p_1 p_2),$$

где импульсы  $p_1$  и  $p_2$  — скалярные величины, а не четырехмерные векторы. Факторизация, очевидно, достигается путем разложения в ряд:

$$\exp(p_1 p_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_1^n}{(n!)^{1/2}} \frac{p_2^n}{(n!)^{1/2}}. \quad (9.207)$$

Мы видим, что даже в этом случае имеется бесконечное число членов. Наши «уровни» обозначены только одним «квантовым числом»  $n = 0, 1, \dots$ , что напоминает спектр гармонического осциллятора.

Это наводит на мысль, что факторизация выражения (9.207) может быть осуществлена в более компактной и удобной форме путем применения операторов  $a$  и  $a^+$ , подчиненных перестановочному соотношению

$$[a, a^+] = 1. \quad (9.208)$$

Основное состояние определяется, как обычно, условием

$$a | 0 \rangle = 0. \quad (9.209)$$

При этом

$$\exp(p_1 p_2) = \langle 0 | \exp(p_1 a) \exp(p_2 a^\dagger) | 0 \rangle, \quad (9.210)$$

что следует из тождества

$$\exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A) \exp([A, B]), \quad (9.211)$$

справедливого для любых операторов  $A$  и  $B$ , коммутатор которых  $[A, B]$  есть число <sup>1)</sup>.

С помощью равенства (9.210) наша функция представлена в виде среднего по основному состоянию от произведения двух операторов, зависящих один лишь от  $p_1$ , а другой — лишь от  $p_2$ . Это равенство — не что иное, как удобная символическая запись факторизованного выражения (9.207). Действительно, определим собственные состояния  $|\lambda\rangle$  оператора  $N = a^\dagger a$ , положив

$$|\lambda\rangle = \frac{(a^\dagger)^\lambda}{\sqrt{\lambda!}} |0\rangle, \quad N |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle. \quad (9.212)$$

Эти состояния отвечают собственным значениям  $\lambda = 0, 1, 2, \dots$  и удовлетворяют условию полноты

$$\sum_\lambda |\lambda\rangle \langle \lambda| = 1. \quad (9.213)$$

Учитывая последнее условие, можно написать равенство (9.210) в виде

$$\exp(p_1 p_2) = \sum_\lambda \langle 0 | \exp(p_1 a) | \lambda \rangle \langle \lambda | \exp(p_2 a^\dagger) | 0 \rangle. \quad (9.214)$$

Поскольку, как нетрудно убедиться,

$$\langle 0 | \exp(p a) | \lambda \rangle = \frac{(p)^\lambda}{\sqrt{\lambda!}}, \quad (9.215)$$

мы снова получаем соотношение (9.207).

Нетрудно обобщить изложенный метод на случай, когда  $p_1$  и  $p_2$  — четырехмерные векторы. С этой целью введем операторы  $a_\mu$  и  $a_\mu^\dagger$ , обладающие свойствами четырехмерных векторов и подчиненные условиям <sup>2)</sup>

$$[a_\mu, a_\nu^\dagger] = -g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} (-1)^{\delta_{\mu 0}}, \quad (9.216)$$

$$a_\mu |0\rangle = 0. \quad (9.217)$$

Как и ранее, легко получить равенство

$$\exp\left(\sum_{\mu=0}^3 p_{1\mu} p_2^\mu\right) = \langle 0 | \exp\left(i \sum_{\mu=0}^3 p_{1\mu} a^\mu\right) \exp\left(i \sum_{\nu=0}^3 p_{2\nu} a^{\nu\dagger}\right) | 0 \rangle. \quad (9.218)$$

Вернемся к факторизации величины  $C_{12}(p_1 z_1, p_2 z_2)$ , которая определена соотношением (9.205). Приведенные ранее примеры подсказывают, что факторизацию можно осуществить, применяя операторы, аналогичные операторам, фигурирующим в теории гармонического осциллятора. Эти операторы должны зависеть от переменной  $z$ . В частности, если мы сможем построить два оператора  $Q_\mu^{(+)}(z)$ ,  $Q_\nu^{(-)}(z)$ , подчиненные условию

$$[Q_\mu^{(+)}(z_1), Q_\nu^{(-)}(z_2)] = g_{\mu\nu} \ln\left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right), \quad (9.219)$$

<sup>1)</sup> Чтобы вывести равенство (2.210), достаточно положить  $A = p_1 a$ ,  $B = p_2 a^\dagger$  и учесть, что, согласно условию (9.209), мы имеем  $\langle 0 | \exp(p_2 a^\dagger) \exp(p_1 a) | 0 \rangle = 1$ .

<sup>2)</sup> В перестановочном соотношении (9.216) введен знак минус, поскольку применяется метрика вида  $g_{00} = 1$ ,  $g_{kl} = -\delta_{kl}$ . При этом пространственные компоненты векторов  $a_\mu$  и  $a_\mu^\dagger$  обладают обычными свойствами операторов уничтожения и рождения, временные компоненты ведут себя противоположным образом. Данное простое обстоятельство имеет далеко идущие последствия, о которых говорится ниже.



и определить основное состояние  $|0\rangle$ , удовлетворяющее соотношению

$$Q_{\mu}^{(+)}(z)|0\rangle = 0, \quad (9.220)$$

то сразу же обнаружим, что

$$\begin{aligned} \exp\left[-2p_1 p_2 \ln\left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)\right] = \\ = \langle 0 | \exp[i\sqrt{2} p_1 Q^{(+)}(z_1)] \exp[i\sqrt{2} p_2 Q^{(-)}(z_2)] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (9.221)$$

где  $pQ^{(\pm)}$  — лоренцево скалярное произведение <sup>1)</sup>

$$\sum_{\mu=0}^3 p_{\mu} Q^{(\pm)\mu}.$$

Нетрудно построить операторы  $Q^{(\pm)}$  в явном виде. С этой целью введем бесконечное множество операторов  $a_{n,\mu}$ ,  $a_{n,\nu}^+$ , подчиненных перестановочным соотношениям

$$[a_{m,\mu}, a_{n,\nu}^+] = -g_{\mu\nu} \delta_{mn}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3, \quad m, n = 1, 2, \dots, \quad (9.222)$$

и определим основное состояние равенством

$$a_{n,\nu}|0\rangle = 0. \quad (9.223)$$

Полагая

$$\begin{aligned} Q_{\mu}^{(+)}(z) &= \sum_{n=1}^{[\infty]} a_{n\mu} \frac{z^n}{\sqrt{n}}, \\ Q_{\mu}^{(-)}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n\mu}^+ \frac{z^{-n}}{\sqrt{n}}, \end{aligned} \quad (9.224)$$

мы приходим к соотношению

$$[Q_{\mu}^{(+)}(z_1), Q_{\nu}^{(-)}(z_2)] = -\sum_n \frac{1}{n} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \ln\left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right), \quad (9.225)$$

совпадающему с формулой (9.219). Заметим, что в нашем случае  $z_1/z_2 < 1$ ; поэтому ряд в соотношении (9.225) сходится.

Теперь мы можем осуществить наше намерение и полностью факторизовать корреляционную функцию  $C(z, p)$  в операторной форме. Эта функция имеет вид

$$C(z, p) = \prod_{i < j} \left(1 - \frac{z_i}{z_j}\right)^{-2p_i p_j}, \quad z_i < z_j. \quad (9.226)$$

Введем новый оператор

$$U_p(z) = \exp[i\sqrt{2} p Q^{(-)}(z)] \exp[i\sqrt{2} p Q^{(+)}(z)] \quad (9.227)$$

и рассмотрим следующее среднее:

$$\langle 0 | U_{p_1}(z_1) U_{p_2}(z_2) \dots U_{p_n}(z_n) | 0 \rangle. \quad (9.228)$$

Этот матричный элемент легко вычислить, применяя тождество (9.211) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \exp[i\sqrt{2} p Q^{(+)}(z)] | 0 \rangle &= | 0 \rangle, \\ \langle 0 | \exp[i\sqrt{2} p Q^{(-)}(z)] &= \langle 0 |. \end{aligned}$$

Нужно лишь нормально упорядочить произведение операторов  $U_p(z)$ , перемещая все множители, содержащие  $Q^{(\pm)}$ , в крайнее правое положение,

<sup>1)</sup> В тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, мы будем опускать векторный индекс у  $Q_{\mu}$ .

а все множители, содержащие  $Q^{(-)}$ , — в крайнее левое положение. Такая операция приводит к равенству

$$U_{p_1}(z_1)U_{p_2}(z_2)\dots U_{p_n}(z_n) = \\ = :U_{p_1}(z_1)\dots U_{p_n}(z_n): \prod_{z_i < z_j} \left(1 - \frac{z_i}{z_j}\right)^{-2p_i p_j}, \quad (9.229)$$

где символом:  $\dots :$  обозначено нормальное произведение, в котором все операторы  $Q^{(+)}$  стоят правее операторов  $Q^{(-)}$ . Среднее по основному состоянию от нормального произведения операторов, которое входит в формулу (2.229), равно единице. Поэтому можно окончательно написать

$$C(z, p) = \langle 0 | U_{p_1}(z_1)U_{p_2}(z_2)\dots U_{p_n}(z_n) | 0 \rangle. \quad (9.230)$$

Это выражение показывает, как операторный метод позволяет полностью распутать сложные связи, заключенные в функции  $C(z, p)$ . Действительно, каждый оператор, входящий в выражение для функции  $C(z, p)$ , зависит только от переменных, сопоставленных одной внешней линии. Теперь легко исследовать структуру уровней в дуальной резонансной модели, что будет сделано в следующем разделе.

## 6. Структура уровней

В качестве следующего шага используем операторную форму записи функции  $C(x, p)$ , чтобы получить полностью факторизованное выражение для дуальной амплитуды. Прежде всего определим зависимость функции  $C(x, p)$  от переменных  $x_i$ . Это позволит нам выполнить интегрирование в формуле (9.185).

Введем оператор «номера»

$$R = - \sum_{n, \mu} n a_{n\mu}^+ a_n^\mu, \quad (9.231)$$

обладающий свойством

$$R | 0 \rangle = 0. \quad (9.232)$$

Нетрудно убедиться, что выполняется следующее перестановочное соотношение:

$$[R, Q^{(\pm)}(z)] = -z \frac{dQ^{(\pm)}}{dz}. \quad (9.233)$$

Учитывая формулу (9.227), отсюда получаем уравнение

$$[R, U_p(z)] = -z \frac{dU_p}{dz}. \quad (9.234)$$

Интегрирование этого уравнения позволяет найти зависимость оператора  $U_p(z)$  от  $z$ :

$$U_p(z) = z^{-R} U_p(1) z^R, \quad (9.235)$$

где

$$U_p(1) = \exp [i \sqrt{2} p Q^{(-)}(1)] \exp [i \sqrt{2} p Q^{(+)}(1)]. \quad (9.236)$$

Применяя равенство (9.235) и вновь вводя переменные  $x_i = z_i/z_{i+1}$ , определенные равенством (9.184), можно записать корреляционную функцию  $C(x, p)$  в виде

$$C(x, p) = \langle 0 | U_{p_1}(1) x_1^R U_{p_2}(1) x_2^R \dots x_{n-1}^R U_{p_{n-1}}(1) | 0 \rangle. \quad (9.237)$$

Подставляя выражение (9.237) в формулу (9.185), мы получаем окончательное выражение для амплитуды  $A_{n+2}$ :

$$A_{n+2}(p_0, \dots, p_{n+1}) = \langle 0 | U_{p_1}(1) D(s_1, R) U_{p_2}(1) \dots D(s_{n-1}, R) U_{p_{n-1}}(1) | 0 \rangle, \quad (9.238)$$

где  $D(s, R)$  — «пропагатор», определяющийся формулами

$$D(s, R) = \int_0^1 x^{-[\alpha(s)-R]-1} (1-x)^{-m^2-1} dx = \\ = B(-\alpha(s)-R, -m^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{R+n-\alpha(s)}, \quad (9.239)$$

$$d_n = \binom{n+m^2}{n}.$$

В случае когда  $m^2 + 1 = 0$ , выполняется условие  $d_n = \delta_{n0}$  и пропагатор  $D(s, R)$  принимает простой вид

$$D(s, R) = \frac{1}{R-\alpha(s)}.$$

Вследствие формулы (9.239) амплитуда оказывается полностью факторизованной. Факторизация становится очевидной, если представить операторы в подходящем базисе. Введем набор коммутирующих операторов

$$R_{n\mu} = -a_{n\mu}^+ a_n^\mu \quad (9.240)$$

(по  $\mu$  и  $n$  нет суммирования), причем

$$R = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{n=1}^{\infty} n R_{n\mu}.$$

Все операторы  $R_{n\mu}$  имеют целые положительные собственные значения  $\lambda_{n\mu} = 0, 1$  и т. д. Этим значениям соответствуют собственные векторы

$$|\lambda_{n\mu}\rangle = \frac{[a_{n\mu}^+]^{\lambda_{n\mu}}}{(\lambda_{n\mu}!)^{1/2}} |0\rangle. \quad (9.241)$$

Положив

$$|\lambda\rangle = \prod_{\mu=0}^3 \prod_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n\mu}\rangle, \quad (9.242)$$

мы видим, что

$$R |\lambda\rangle = N_\lambda |\lambda\rangle, \quad (9.243)$$

где величина

$$N_\lambda = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{n=1}^{\infty} n \lambda_{n\mu} \quad (9.244)$$

может принимать только целые неотрицательные значения. Далее, условие полноты имеет вид

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} |\lambda_{n\mu}\rangle \langle \lambda_{n\nu}| = 1. \quad (9.245)$$

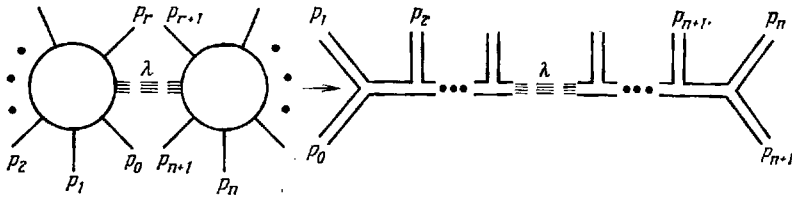
Теперь у нас все готово для исследования структуры полюсов дуальной  $n$ -точечной амплитуды. Для простоты ограничимся случаем <sup>1)</sup>, когда  $m^2 + 1 =$

<sup>1)</sup> Сателлиты, обусловленные дополнительными полюсами  $\beta$ -функции, входящей в равенство (9.239), слегка усложняют анализ, но не меняют общих выводов.

$= 0$  и, следовательно,  $D = [R - \alpha(s)]^{-1}$ . Чтобы выделить полюса по переменной  $s_r = (p_0 + p_1 + \dots + p_r)^2$ , удобно вставить полный набор состояний  $|\lambda\rangle$  между  $U_{p_r} D$  и  $U_{p_{r+1}}$  в равенстве (9.238). Это приводит к соотношению

$$A_{n+2} = \sum_{\lambda} \langle 0 | U_{p_1}(1) D(s_1, R) \dots U_{p_r}(1) |\lambda\rangle \times \\ \times \frac{1}{N_{\lambda} - \alpha(s_r)} \langle \lambda | U_{p_{r+1}}(1) D(s_{r+1}, R) \dots U_{p_{n-1}}(1) | 0 \rangle. \quad (9.246)$$

Это выражение интересно во многих отношениях. Из него видно, что полюса по переменной  $s_r$  возникают тогда, когда  $\alpha(s_r) = N_{\lambda}$ , и что соответствующие вычеты факторизуются. Кроме того, равенство (9.246) позволяет связать



Фиг. 9.23. Вклад «резонансов» в  $(n + 2)$ -точечную функцию.

спектр резонансов со спектром возбуждений введенных нами гармонических осцилляторов. Число членов, на которые распадается вычет при факторизации, равно числу собственных состояний оператора  $R$ , отвечающих данному собственному значению  $N_{\lambda}$ . Иными словами, чтобы определить степень вырождения уровня, нужно подсчитать число разных наборов целых чисел  $\lambda_{n\mu}$ , удовлетворяющих уравнению

$$N_{\lambda} = \lambda_{1,0} + \lambda_{1,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_{1,3} + 2(\lambda_{2,0} + \lambda_{2,1} + \dots) + 3(\lambda_{3,0} + \dots) + \dots \quad (9.247)$$

Это классическая проблема теории чисел [373] (в последней рассматривается случай однокомпонентных  $\lambda_n$ ). Установлено, что при больших  $N$  степень вырождения описывается асимптотическим выражением

$$d(N) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \exp \left[ \frac{2\pi}{\sqrt{6}} (4N)^{1/2} \right]. \quad (9.248)$$

Таким образом, число уровней возрастает экспоненциально с увеличением энергии [ $N = \alpha(s) \sim sb$ , где  $b$  — наклон траектории]. Зависимость типа (9.248), вытекающая из дуальной резонансной модели, была впервые предложена Хагедорном [374]. Руководствуясь своей глубокой физической интуицией, он вывел такую зависимость путем термодинамического анализа данных о высокоэнергетических процессах. Размерная постоянная  $4\pi\sqrt{b/6}$  в экспоненте выражения (9.248) есть величина, обратная температуре Хагедорна. Чрезвычайно интересно, что значение, найденное Хагедорном на основе данных о высокоэнергетических процессах, очень хорошо совпадает с параметром, который фигурирует в дуальных моделях и связан с универсальным наклоном траекторий.

Картина взаимодействия  $n + 2$  скалярных частиц  $p_0, p_1, \dots, p_{n+1}$ , которая отвечает представлению (9.246) функции  $A_{n+2}$ , достаточно проста: «резонансы»  $\lambda$  движутся «свободно» от исходной вершины, где они взаимодействуют с частицами  $p_0, p_1, \dots, p_r$ , к конечной вершине, в которой они распадаются на частицы  $p_{r+1}, \dots, p_{n+1}$  (фиг. 9.23).

Присмотримся теперь более внимательно к структуре вырожденного уровня  $n$ , в частности, выясним возможные значения спина. Каждый резонанс  $|\lambda\rangle$  характеризуется набором целых квантовых чисел  $\lambda_{1,0}, \lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{n,0}, \dots$ , подчиненных условию

$$N_\lambda = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_{n\mu},$$

фиксирующему его массу. Ясно, что все осцилляторы обладают только векторными (в четырехмерном смысле) модами. Независимо от числа  $n$  каждая мода несет спин, не превышающий единицу. Вследствие этого состояние  $|\lambda\rangle$  является лоренцевым тензором ранга

$$J = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n\mu}. \quad (9.249)$$

По отношению к группе трехмерных вращений этот тензор, вообще говоря, приводим и может быть разложен на компоненты, обладающие определенным угловым моментом, который пробегает значения от 1 до  $J$ . В то же время

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_n = N_\lambda, \quad \lambda_n = \sum_{\mu} \lambda_{n\mu},$$

откуда видно, что максимальный спин  $J$  состояния, определяющегося условием  $\alpha(s_r) = N_\lambda$ , равен  $N_\lambda$ . Этот максимальный спин отвечает единственной комбинации чисел  $\lambda_{n\mu}$ , а именно <sup>1)</sup>

$$\sum_{\mu=0}^3 \lambda_{1\mu} \equiv \lambda_1 = N_\lambda, \quad \lambda_{n\mu} = 0, \quad n > 1. \quad (9.250)$$

Интуиция подсказывает нам, что для получения высоких значений спина нужно применить много операторов рождения, а это осуществимо малым числом способов. В частности, состояния, лежащие на главной траектории (для которых  $J = N_\lambda$ ), получаются применением  $N_\lambda$  операторов  $a_{1\mu}$ . Эта траектория, очевидно, невырождена (спин  $J$  содержится лишь 1 раз в разложении тензора ранга  $J$ ). Поэтому обычные факторизационные свойства главного асимптотического реджевского члена сохраняются в рамках дуальной теории. При переходе к нижним траекториям можно использовать все больше и больше высших «гармоник». Это ведет к вырождению, которое возрастает по мере увеличения порядка дочерней траектории.

Важно отметить, что мультiredжионное приближение к дуальной амплитуде, рассмотренное в § 4, п. 4, можно получить, полагая

$$\begin{aligned} Q_\mu^{(+)} &\sim a_{1\mu} z, \\ Q_\mu^{(-)} &\sim a_{1\mu}^\dagger z^{-1}. \end{aligned} \quad (9.251)$$

При этом

$$[Q_\mu^{(+)}(z_1), Q_\nu^{(-)}(z_2)] \sim -g_{\mu\nu} \frac{z_1}{z_2} \quad (9.252)$$

и

$$\left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)^{-2p_1 p_2} \sim \exp\left(2p_1 p_2 \frac{z_1}{z_2}\right), \quad (9.253)$$

что совпадает с приближением, использованным в соотношениях (9.192), (9.193) и т. д.

Предыдущий пример помогает понять, почему дуальная теория должна содержать бесконечное число операторов. Действительно, мультiredжион-

<sup>1)</sup> Точнее, состояние со спином  $J = N_\lambda$  содержится в соответствующем лоренцевом тензоре только тогда, когда выполнено условие (9.250). — *Прим. перев.*

ное приближение (9.198), (9.199), полученное с помощью одного-единственного гармонического осциллятора, имеет правильные полюса по переменным  $\alpha(s_1), \dots, \alpha(s_{n-1})$ , но, как уже отмечалось в § 4, п. 4, все другие полюса отсутствуют. Приближение (9.251) нарушает инвариантность дуальной амплитуды относительно циклических перестановок внешних линий и приводит к упрощенной формуле, которая применима лишь в ограниченной области значений кинематических переменных. Таким образом, высшие операторы <sup>1)</sup> необходимы для того, чтобы построить выражение, обладающее нужным набором полюсов и правильным асимптотическим поведением во всех каналах. Поскольку дуальная резонансная модель подчинена столь сильным физическим требованиям, для их выполнения нужно располагать большим числом членов. И действительно, большая множественность уровней, отраженная в равенстве (9.248), является самым характерным свойством дуальной резонансной модели. В то же время вследствие большого вырождения число уровней, приходящихся на единичный интервал масс, начинает быстро расти, как только мы выходим за пределы области низких энергий. Рост настолько интенсивен, что характерное сглаженное реджевское поведение амплитуды наступает очень быстро. Результат, касающийся богатства адронного спектра, папшел также применение в областях, далеких от обычной теории элементарных частиц. Так, он лег в основу очень интересного нового термодинамического подхода к исследованию начальной стадии расширения Вселенной [375, 376].

Возвращаясь к  $n$ -точечной амплитуде, подчеркнем одно существенное обстоятельство: описанный выше подсчет числа уровней проводился при молчаливом предположении, что все члены в равенстве (9.246), возникшие при факторизации вычета в данном полюсе, *линейно независимы*.

Если имеется линейная зависимость между матричными элементами  $\langle 0 | U_{p_1} D U_{p_2} \dots U_{p_r} | \lambda \rangle$  и  $\langle \lambda | U_{p_{r+1}} \dots U_{p_{n+1}} | 0 \rangle$ , то часть состояний можно представить в виде линейных комбинаций остальных состояний и тем самым исключить. Таким образом, может оказаться, что некоторые комбинации рассмотренных выше уровней на деле не взаимодействуют с внешними частицами. Это значит, что в пространстве всех состояний, которые мы имеем при операторном методе, может существовать подпространство физических состояний, связанных с внешними частицами. Только эти физические состояния способны рождаться в «теоретических» экспериментах.

Более обстоятельное исследование дуальной модели показывает, что вследствие ее проективной инвариантности такие линейные соотношения действительно существуют. Но число их не так велико, чтобы изменить изложенные выше качественные результаты. Напротив, наличие этих соотношений является благоприятным обстоятельством. Оно позволяет надеяться на устранение из модели духовых состояний, имеющих отрицательную норму (или, что эквивалентно, связанных с другими состояниями посредством мнимых констант взаимодействия). Рассмотрим теперь этот тонкий вопрос, с которым связаны большие трудности и который еще не совсем ясен.

Структура уровней дуальной модели определяется собственными векторами (9.242), которые образуются в результате действия различных осцилляторных операторов рождения на «основное состояние». Нетрудно убедиться, что норма таких состояний прямо связана со знаком коммутатора операторов рождения и уничтожения. Рассмотрим, например, состояние

$$|n\mu\rangle = a_{n\mu}^+ |0\rangle, \quad (9.254)$$

<sup>1)</sup> Под высшими операторами авторы понимают операторы  $a_{n\mu}^+$ , у которых  $n > 1$ .—

полученное путем применения единственного оператора рождения. Скалярное произведение двух таких состояний дается выражением

$$\begin{aligned} \langle n' \mu' | n \mu \rangle &= \langle 0 | a_{n' \mu'} a_{n \mu}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | [a_{n' \mu'}, a_{n \mu}^\dagger] | 0 \rangle = -\delta_{nn'} g_{\mu \mu'} = \\ &= \delta_{nn'} \delta_{\mu \mu'} (-1)^{\delta_{\mu 0}}. \end{aligned} \quad (9.255)$$

Отсюда видно, что состояние, порожденное временной компонентой вектора  $a_{n \mu}^\dagger$ , имеет отрицательную норму. Причиной этого является наличие знака минус в лоренцевой метрике. Нетрудно убедиться, что в общем случае норма состояния равна  $(-1)^{N_0}$ , где  $N_0$  — число времениподобных операторов рождения, входящих в его определение.

Можно, конечно, попытаться формально поправить дело, переходя к новым времениподобным операторам рождения

$$b_0 = i a_0, \quad b_0^\dagger = i a_0^\dagger, \quad (9.256)$$

коммутатор которых имеет нужный знак. Но таким путем мы добиваемся положительности нормы за счет появления мнимой константы связи.

Таким образом, мы наталкиваемся на фундаментальную физическую трудность, корни которой кроются в свойствах группы Лоренца. Действительно, появление духовых состояний, обладающих отрицательной нормой, можно было в какой-то мере предвидеть. Как отмечалось в гл. 1, при построении релятивистской теории частиц со спином последние приходится включать в лоренцев мультиплет, содержащий состояния с отрицательной нормой (и меньшим значением спина). Такие состояния можно, конечно, устранить, вводя соответствующие дополнительные условия. Но такая операция не лишена трудностей: «пропагатор», из которого устранен вклад подобных нефизических состояний, не обладает необходимыми аналитическими или асимптотическими свойствами. Поэтому приходится выбирать между нефизическими сингулярностями при нулевой энергии и плохим поведением пропагатора при высоких энергиях (что в случае квантовой теории поля ведет к неперенормируемости).

Единственный пример удовлетворительного разрешения трудностей, порожденных состояниями с отрицательной нормой, дает квантовая электродинамика. Если мы, не задумываясь, применяем стандартную процедуру квантования к четырехмерному электромагнитному потенциалу  $A_\mu$ , то получаем времениподобные операторы рождения и уничтожения, коммутатор которых имеет неверный знак. Наличие таких операторов приводит к появлению времениподобных «фотонов», несущих отрицательную норму. Решение этой проблемы хорошо известно: благодаря градиентной инвариантности *времениподобные фотоны в действительности не существуют*. Вследствие градиентной инвариантности времениподобные, а также продольные фотоны отключаются и поэтому не могут ни поглощаться, ни рождаться в физических процессах. Частицы же, наблюдающиеся в природе, отвечают *подпространству физических состояний*. Оно содержит только поперечные фотоны, обладающие положительной нормой. Нас ободряет то обстоятельство, что подобный механизм действует и в дуальных моделях. Действительно, благодаря проективной инвариантности теории существуют линейные соотношения между состояниями, отвечающими вычетам в полюсах. Вследствие этого большое число состояний эффективно не связано с внешними частицами [367, 368, 377, 378].

В частности, при  $m^2 + 1 = 0$  число линейных соотношений настолько велико, что, по-видимому, исключаются все духовые состояния [379—381]. Хотя в настоящее время это еще не доказано в общем виде, весьма вероятно, что при  $m^2 + 1 = 0$  норма всех состояний в физическом подпространстве

неотрицательна <sup>1)</sup>). Конечно, в этом случае исключение духовых состояний достигается ценой появления одного «тахiona», т. е. нефизической частицы мнимой массы. К этому вопросу мы вернемся в следующем разделе. Нам кажется, что положение, возникшее из-за наличия нефизических частиц в теории, серьезно, но не безнадежно <sup>2)</sup>).

### 7. Выход за рамки приближения бесконечно узких резонансов

С помощью дуальных амплитуд, рассмотренных в предыдущих разделах, в лучшем случае можно дать лишь схематическое описание рассеяния. Эти амплитуды вещественны и имеют полюса на действительной оси, отвечающие бесконечно узким резонансам. Очевидно, что возникает внутреннее противоречие: резонансные состояния взаимодействуют со стабильными частицами и поэтому должны иметь конечное время жизни, т. е. отличную от нуля ширину.

Чтобы принять во внимание конечную ширину резонансов, нужно отказаться от предположения о прямолинейности траекторий <sup>3)</sup>. Но это может нарушить простоту и красоту дуальной модели. В настоящее время развит систематический подход к «унитаризации» дуальной модели, который мы охарактеризуем ниже в данном разделе. В основе такого подхода лежит мысль, что модель бесконечно узких резонансов — это своего рода приближение нулевого порядка в рамках некоторой теории возмущений. Последняя позволяет итеративным путем находить поправки, связанные с учетом унитарности.

Однако, прежде чем приступить к обсуждению этого вопроса, сосредоточим внимание на более «земной» проблеме. Вследствие нулевой ширины резонансов попытка применить  $n$ -точечные амплитуды для расчета полных сечений образования двух и более частиц приводит к расходящимся результатам. Рассмотрим, например, реакцию

$$A + B \rightarrow C + D + E.$$

Амплитуда этого процесса имеет полюса, в частности по переменной  $s_{CD} = (p_C + p_D)^2$ , которые отвечают массам возможных резонансных состояний (фиг. 9.24). Такие полюса находятся на действительной оси в физической области. Суммируя по конечным состояниям (например, при вычислении интегрального сечения), мы сталкиваемся с двойным полжком в области интегрирования. Это приводит к бесконечному результату [аналогичный эффект имеет место в случае упругого рассеяния при вычислении интеграла  $\int \sigma_2(s) ds$ ].

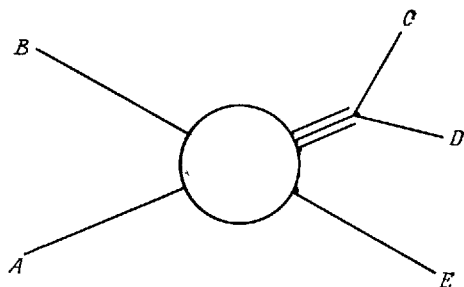
<sup>1)</sup> Ко времени выхода книги из печати это предположение было строго доказано [631—633]. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> В настоящее время известны примеры дуальных резонансных моделей, не содержащих ни духов, ни тахионов (см., например, работы [622—624, 655]). Но спектр резонансов в этих моделях все еще далек от экспериментального. — *Прим. перев.*

<sup>3)</sup> Напомним, что

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \frac{t}{\pi} \int \frac{\text{Im } \alpha(t') dt'}{t'(t' - t)}$$

и поэтому траектория  $\alpha(t)$  обязательно имеет конечную кривизну, если только  $\text{Im } \alpha(t) \neq 0$ .



Фиг. 9.24. Полюса амплитуды  $T(A + B \rightarrow C + D + E)$  в  $(C + D)$ -канале.



Итак, не удастся рассчитать полное сечение, применяя формулу

$$\sigma_T = \sum_n \sigma_n^* \quad (9.257)$$

и определяя сечения  $\sigma_n$  перехода двух частиц в  $n$  непосредственно с помощью  $(n+2)$ -точечных функций, поскольку каждое слагаемое расходится. Но полное сечение можно найти другим путем — используя оптическую теорему

$$\sigma_T^* \propto \text{Im } T_4, \quad (9.258)$$

где  $T_4$  — четырехточечная функция. Конечно, величина  $\text{Im } T_4$  равна сумме  $\delta$ -функций; но в соответствии с идеей дуальности можно усреднить резонансы (как в § 3, п. 4), что ведет к реджевской формуле для полного сечения<sup>1)</sup>:

$$\sigma_T \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} s^{2\alpha_0 - 1}. \quad (9.259)$$

Это соотношение выглядит очень логично и говорит о том, что, хотя теория существенно неунитарна, применение оптической теоремы можно в известном смысле оправдать. Чтобы это сделать, попытаемся найти полное сечение, используя  $n$ -точечные функции и устраняя расходимости в интегралах по конечным состояниям путем соответствующим образом выбранного предельного перехода. Резонансам, фигурирующим в дуальной модели, припишем чисто феноменологически ширину, так что формально все выражения будут конечными<sup>2)</sup>. Легко убедиться, что, последовательно учитывая в ходе всех выкладок эту конечную ширину, можно в конце совершить предельный переход к нулевой ширине и снова прийти к формуле (9.259).

Рассмотрим реакцию общего вида

$$A + B \rightarrow \text{все что угодно.}$$

В модели, содержащей узкие резонансы, доминирующий вклад в сечение дают члены, расходящиеся при предельном переходе к нулевой ширине резонансов. Поэтому главный вклад внесут процессы

$$A + B \rightarrow \text{резонансы} \rightarrow \text{все что угодно.}$$

Следовательно, полагая  $s = (p_A + p_B)^2$ , можно написать

$$T_{AB \rightarrow n} = \sum_R \frac{\gamma_{AB,R} \gamma_{Rn}}{s - s_R + i\Gamma_R}, \quad (9.260)$$

где  $\gamma_{AB,R}$  — амплитуда перехода начального состояния  $AB$  в резонанс  $R$ , а  $\gamma_{Rn}$  — амплитуда распада резонанса  $R$  с образованием конечного состояния  $n$ . Наконец, полная ширина резонанса связана с парциальными ширинами условием полноты

$$\Gamma_R = \sum_n \gamma_{Rn}^2. \quad (9.261)$$

Парциальные ширины  $\gamma_{Rn}^2$  зависят от константы связи, существующей в теории. Из равенства (9.261), которое можно рассматривать как некую остаточную форму условий унитарности, видно, что константа связи входит как в числитель, так и в знаменатель соотношения (9.260).

<sup>1)</sup> Напомним, что данная модель не описывает дифракционного рассеяния. Поэтому равенство (9.259) можно с уверенностью применять только к сечениям реакций, идущих с перезарядкой, или к другим аналогичным сечениям, из которых исключен вклад полюса Померанчука.

<sup>2)</sup> Эвристическое исследование данного вопроса проводится в работе Ди Джакомо, Фубини, Серторио и Венециано [382]. Более общий и более удовлетворительный вывод можно найти в работе [383].

Теперь можно вычислить полное сечение, производя суммирование по промежуточным состояниям. Учтя равенство (9.261), мы находим, что

$$\sigma_T \propto \sum_n \sum_R \frac{\gamma_{AB, R}^2 \gamma_{Rn}^2}{(s-s_R+i\Gamma_R)(s-s_R-i\Gamma_R)} = \sum_R \frac{\gamma_{AB, R}^2 \Gamma_R}{(s-s_R)^2 + \Gamma_R^2}. \quad (9.262)$$

В пределе бесконечно узких резонансов можно написать

$$\frac{\Gamma_R}{(s-s_R)^2 + \Gamma_R^2} \sim \pi \delta(s-s_R). \quad (9.263)$$

Из равенства (9.262) следует, что

$$\sigma_T \propto \sum_R \gamma_{AB, R}^2 \delta(s-s_R). \quad (9.264)$$

Правая часть соотношения (9.264) пропорциональна мнимой части четырехточечной функции. Поэтому соотношение (9.264) эквивалентно результату, полученному ранее с помощью оптической теоремы. Можно было бы, разумеется, принять во внимание конечную ширину резонансов и использовать равенство (9.264) лишь после усреднения. Это привело бы непосредственно к реджевской формуле (9.259).

В основе изложенной предельной процедуры лежат ясные физические соображения. Поскольку время жизни промежуточных «сложных» состояний велико, полное сечение пропорционально общей вероятности рождения этих промежуточных состояний.

Изложенную процедуру можно распространить на «инклюзивные реакции»

I.  $A + B \rightarrow C + \text{все остальное}$ .

Как уже отмечалось в гл. 1, сечение такого процесса можно найти, применяя обобщенную оптическую теорему к формально эквивалентной (в смысле принципа перестановки) реакции

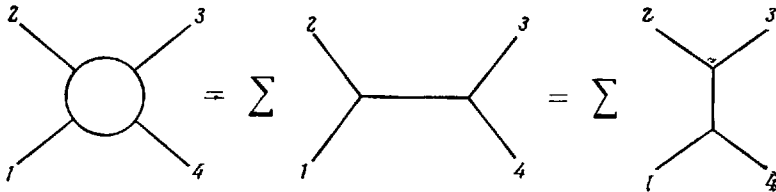
II.  $A + B + \bar{C} \rightarrow \text{все остальное}$ .

Таким путем можно показать, что сечение процесса I пропорционально соответствующему скачку шеститочечной амплитуды  $T(ABC\bar{C} \rightarrow ABC\bar{C})$  на разрезе. Недавно установлено [384—386], что обобщение рассмотренной выше процедуры перехода к пределу  $\Gamma \rightarrow 0$  на инклюзивные процессы приводит к полностью эквивалентным результатам. В этом случае можно, как и ранее, произвести усреднение по резонансам, а затем найти инклюзивное сечение, применяя, в частности, асимптотическое выражение для шеститочечной функции, которое получается способом, описанным в § 4, п. 4.

Рассмотрим подробнее зависимость окончательных результатов от константы связи  $g$ . Мы видим, что полное сечение имеет порядок  $g^2$ , тогда как инклюзивное сечение — порядка  $g^4$ . Как уже отмечалось, константа связи содержится и в числителе, и в знаменателе выражений, полученных в результате изложенной выше предельной процедуры. Поэтому эффективная зависимость вероятности от константы связи определяется не тем, сколько частиц рождается, а тем, сколько частиц наблюдается. Такие простые рассуждения показывают, что дуальная модель, будучи соответствующим образом истолкована, пригодна для феноменологического описания высокоэнергетических реакций. Конечно, строго говоря, такой подход нельзя считать вполне удовлетворительным. Хотелось бы иметь непротиворечивый набор правил, который позволил бы находить вероятности любых процессов, не прибегая к окольным путям вроде предельного перехода.

Поэтому представляет интерес общий подход, основанный на применении диаграмм с петлями. Этому подходу посвящено много исследований. Как мы видели в § 4, п. 5 и 6, расчет «древовидных диаграмм» в дуальной

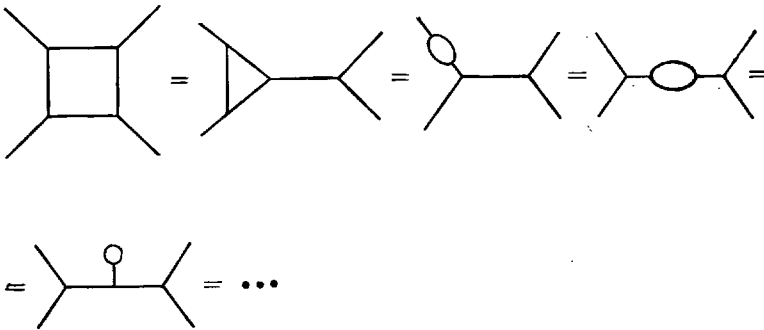
резонансной модели основывается на знании «вершинной функции» и «пропагатора» возбужденных частиц [387, 388]. По аналогии с теорией поля Киккава, Сакита и Вирасоро [389]<sup>1)</sup> предложили воспользоваться теми же вершинами и пропагаторами и образовать диаграммы высших порядков, содержащие петли. Вычисляя выражения, отвечающие таким диаграммам, в принципе можно осуществить унитаризацию модели. Необходимые поправки к исходной амплитуде в данном случае определяются последовательно, шаг за шагом, как это делается в обычной теории возмущений. В конце



Фиг. 9.25. Символическое изображение условий дуальности в случае 4-точечной амплитуды.

процедуры резонансы должны приобрести конечную ширину, а траектории — стать не вполне прямолинейными. Это будет прямо связано с появлением разрезов по различным кинематическим переменным<sup>2)</sup>, что необходимо для выполнения условий унитарности. Далее обычные методы позволяют строго удовлетворить требованиям дуальности на каждом этапе итерирования.

Подробное описание этих захватывающих, но все еще не завершенных исследований выходит за рамки настоящей книги; отметим, однако, что



Фиг. 9.26. Эквивалентные однопетлевые диаграммы.

Каждая диаграмма получается из предыдущей в результате «дуализации» одной из внутренних линий.

«дуальные петлевые диаграммы» обладают своеобразными, ранее не известными свойствами, которые существенно отличаются от свойств «петлевых диаграмм» в обычной квантовой теории поля. Как мы знаем, определение дуальности заключается в равенстве, символически изображенном на фиг. 9.25. В связи с этим диаграмма типа квадрата может быть представлена многими эквивалентными способами, в том числе и показанными на фиг. 9.26.

В обычной полевой теории возмущений все диаграммы, представленные на фиг. 9.26, суммируются когерентным образом; в дуальной теории все эти диаграммы соответствуют *одной и той же амплитуде с петлей*. Особое значение имеет следующее обстоятельство: в дуальной теории вычисление квадратной диаграммы может быть сведено к расчету соответствующих древо-

<sup>1)</sup> См. также работы [390—392].

<sup>2)</sup> В том числе по угловому моменту!

видных диаграмм совместно с диаграммой типа *обобщенного головастика*. В такой диаграмме типа головастика каждая частица со спином нуль непосредственно взаимодействует с вакуумом. Отметим, однако, что вследствие исключительно сильного вырождения, присущего дуальной модели, число параметров, необходимых для полного описания обобщенного головастика, очень велико. Из этого простого примера видно, что программа унитаризации отличается математической красотой и ведет к далеко идущим аналогиям. В частности, применение сложных топологических методов позволило придать всему подходу весьма общую последовательную форму [393—395].

Одна из трудностей, возникающих при вычислении петлевых диаграмм, связана с появлением расходящихся сумм, которые обусловлены очень большим числом промежуточных состояний. Был предложен общий способ перенормировки, который, по-видимому, позволяет преодолеть эту трудность [396, 397].

В настоящее время еще трудно сказать, к каким результатам приведет осуществление этой увлекательной программы. Возможны две точки зрения. С одной стороны, можно думать, что уровень развития дуальных моделей еще слишком низок и что поэтому нет надежды на успех общей программы унитаризации. С другой стороны, можно возразить, что многие недостатки модели бесконечно узких резонансов будут устранены адекватным образом только в рамках схемы, последовательно учитывающей условия унитарности. В пользу последней точки зрения говорит следующее обстоятельство: есть надежда, что учет вклада непланарных петлевых диаграмм поможет выяснить природу особенности Померанчука [397—400, 533]. Эта особенность заведомо не поддается описанию с помощью модели бесконечно узких резонансов. Ранее уже отмечалось, что Фройнд и Харари [336, 339] предложили в рамках феноменологического дуального подхода вычитать вклад особенности Померанчука из амплитуды. Это правило можно обосновать, сказав, что особенность Померанчука допускает успешное описание только в рамках схемы, учитывающей петлевые диаграммы.

Интересная модель, позволяющая с единой точки зрения взглянуть на древовидные и петлевые диаграммы и сулящая новые возможности, основана на тесной аналогии между рассмотренным ранее операторным методом и теорией упругих сред [401—404, 371]. Эту точку зрения подсказывает также сама форма дуальных диаграмм, которые напоминают вибрирующие мембраны. К такого рода объектам можно, в частности, прийти, рассматривая «сетевые» фейнмановские диаграммы [405—407]. Были приведены серьезные аргументы в пользу наличия связи между определенными классами таких диаграмм и дуальными амплитудами.

Можно надеяться, что подобные исследования откроют новые перспективы и позволят получить ответ на многие нерешенные вопросы. Мы ведь знаем, что применение моделей для описания физических явлений сыграло важную роль во многих областях нашей науки.

## 8. Заключение

Дуальная резонансная модель удовлетворяет многим общим требованиям, предъявляемым к разумной теории. С помощью этой модели удалось получить выражения для амплитуды рассеяния, которые последовательно учитывают важную физическую информацию, заключенную в правилах подстановки. В самом деле, результаты, относящиеся ко всем перекрестным каналам, удовлетворительны в равной мере. Поскольку имеется хорошее асимптотическое поведение во всех каналах, модель в принципе может применяться как к высокоэнергетическим, так и к низкоэнергетическим процессам. Окончательная цель дуальной теории — описать единым образом большой класс физических явлений, пользуясь небольшим числом теоре-

тических параметров. К сожалению, как мы видели в предыдущем разделе, в осуществлении этой общей программы полный успех еще не достигнут. Но вполне возможно, что существующая дуальная модель найдет применение в качестве первого приближения в будущих исследованиях, посвященных построению единой теории элементарных частиц.

Одним из наиболее важных свойств дуальной резонансной модели является наличие фундаментальной длины <sup>1)</sup>, которая совпадает с квадратным корнем из параметра наклона траекторий. Фундаментальная длина возникает в дуальной резонансной модели естественным образом, так как общее выражение для амплитуды имеет вид

$$A = \int dV \exp(\phi), \quad (9.265)$$

где

$$\phi = -b \sum 2p_i p_j \ln(z_i - z_j). \quad (9.266)$$

Поскольку векторы  $p_i$  имеют размерность импульса, в выражении (9.266) должна содержаться константа  $b$  с размерностью квадрата длины. Мы видели, что в силу общих условий самосогласованности эта константа является универсальной <sup>2)</sup>. Забыв на время о присущих модели внутренних противоречиях, которые, вероятно, найдут разрешение в будущем, мы обнаруживаем, что многие явления, казавшиеся ранее несвязанными, неожиданным образом зависят от константы  $b$ .

Приведем несколько наиболее поразительных примеров:

1. Значительное число резонансов, обнаруженных на опыте, хорошо укладывается на прямолинейные траектории, обладающие одинаковым наклоном. Этот экспериментальный факт послужил исходной точкой для построения дуальных теорий.

2. Потребовав, чтобы четырехточечная функция удовлетворяла принципу Адлера (§ 3, п. 5), мы получаем соотношение между наклоном траекторий  $b$  и массой  $\rho$ -мезона:

$$2bm_\rho^2 = 1. \quad (9.267)$$

Кроме того, можно получить массовые формулы, связывающие частицы противоположной четности:

$$\begin{aligned} m_{A_1}^2 - m_\rho^2 &= \frac{1}{2b} = m_\rho^2, \\ m_\Delta^2 - m_N^2 &= \frac{1}{2b} = m_\rho^2. \end{aligned} \quad (9.268)$$

3. Дуальная модель естественным образом приводит к реджевской асимптотике

$$A(s, t) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \beta(t) \frac{(-s)^{\alpha(t)}}{\sin \pi \alpha(t) \Gamma(\alpha(t) + 1)}. \quad (9.269)$$

Описывая феноменологически область высоких энергий, хотелось бы ввести простые предположения не только о характере функции  $\alpha(t)$ , определяющей форму траектории, но и о поведении вычета  $\beta(t)$ . Пытаясь это сделать в рамках обычной реджевской теории, мы сталкиваемся с трудностью, поскольку вид функции  $\beta(t)$  зависит от единиц массы, в которых измеряется величина  $s$ . Действительно, при изменении масштаба  $s \rightarrow cs$  вычет преобразуется по правилу  $\beta(t) \rightarrow c^{-\alpha(t)} \beta(t)$ . Это, в частности, означает, что, вводя простейшее предположение о независимости вычета  $\beta$  от  $t$ , мы должны указать, при каком выборе единицы массы такое предположение делается. В рамках

<sup>1)</sup> Иными словами, температуры Хагедорна.

<sup>2)</sup> В ходе всего изложения мы в неявном виде допускали существование этой элементарной длины, выражая массы в единицах  $b^{-1/2}$ .

модели Венециано данный вопрос решается однозначно. А именно, в этой модели величина  $\beta(t)$  постоянна при условии, что переменная  $s$  измеряется в фундаментальных единицах. Действительно, венециановская асимптотика имеет вид

$$A(s, t) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\beta}{\sin \pi \alpha(t) \Gamma(\alpha(t)+1)} [-\alpha(s)]^{\alpha(t)}. \quad (9.270)$$

4. Точно так же мультиреджонная асимптотическая формула (§ 4, п. 4) существенным образом содержит фундаментальную длину. В частности, корреляция между разными вылетающими частицами зависит от отношения

$$\frac{s_1 s_2}{bs},$$

которое безразмерно благодаря присутствию в нем параметра наклона траекторий.

5. Неожиданно быстрый рост числа уровней с увеличением энергии подчиняется закону

$$d(N) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \exp\left(\frac{4\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{N}\right) = \exp\left[\frac{[4\pi}{\sqrt{6}} (bs)^{1/2}\right]. \quad (9.271)$$

Опять-таки число уровней становится большим и *наблюдается переход к асимптотическому поведению*, когда переменная  $s$  начинает существенно превышать величину  $b^{-1}$ .

Итак, общие тенденции, присущие дуальным моделям, очень интересны и позволяют надеяться на успех. В то же время, пытаясь предсказать с помощью этих моделей характеристики конкретных физических явлений, мы сталкиваемся с трудностями, которые до сих пор не удалось преодолеть. Кроме затронутого в нескольких последних разделах вопроса об унитаризации, мы встречаем и другие трудности, как только применяем дуальные модели к реальному миру.

1. До сих пор не найден вполне удовлетворительный способ включения в дуальную модель частиц с полуцелым спином. В настоящее время эту модель удается применить только для описания тех частиц, обладающих спином, которые могут рождаться при столкновениях двух или нескольких «элементарных» скалярных частиц. В известном смысле можно сказать, что дуальная модель успешно описывает орбитальный угловой момент, но не внутренний угловой момент.

2. Даже в случае физических бозонов положение вещей остается неясным. Из эмпирических соображений можно сказать, что  $\rho$ -траектория [ $J = \alpha_\rho(t)$ ] должна пересекать ось  $t = 0$  в точке  $\alpha_\rho(0) = 1/2$ . Поскольку имеет место обменное вырождение, во всех случаях, когда функция  $\alpha_\rho(t)$  проходит через четные или нечетные целые значения, возникают частицы. В частности, вследствие перехода  $\rho$ -траектории через ось  $J = 0$  должен появиться «тахион» (нефизическая частица мнимой массы). В случае четырехточечной функции, описывающей  $\pi\pi$ -рассеяние (§ 3, п. 5), оказалось возможным уничтожить этот нефизический полюс путем включения в амплитуду соответствующего множителя. Но такую процедуру не удается обобщить на  $n$ -точечные функции, не нарушая красоты всей модели. Не исключено, что указанная трудность с пионами имеет какое-то отношение к трудностям описания частиц со спином  $1/2$ . В модели кварков со спином  $1/2$  как пионы, так и  $\rho$ -мезоны являются  $s$ -состояниями  $qq$ -системы, а частица с квантовыми числами  $J^P = 0^+$  отсутствует. Это значит, что в дуальной модели, базирующейся на кварках, нежелательный скалярный «тахион» должен был бы автоматически устраняться. Очень интересная работа по данному вопросу выполнена Мандельштамом, но решительный успех здесь еще не достигнут<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См., однако, работы [408—410].

3. Нежелательный «тахион» возникает в дуальной модели еще и в другом месте, а именно в общей теории  $n$ -точечных амплитуд. Как мы уже разъяснили в § 4, п. 6, на устранение всех духов можно надеяться только в случае, когда  $\alpha(0) = 1$ . Это условие приводит к возникновению «тахиона», обладающего спином  $J = 0$ , и безмассовой частицы со спином  $J = 1$ . Приходится удивляться, что теория приобретает чрезвычайную простоту и изящество только в случае нефизического значения параметра  $\alpha(0)$ . Все попытки заменить условие  $\alpha(0) = 1$  более приемлемым [например, таким, как  $\alpha(0) = 0$ ] пока что терпят неудачу.

До настоящего времени еще неясно, устранима ли трудность, связанная с «тахионом». Ведутся работы, имеющие целью проверить, можно ли избавиться от «тахиона», не разрушая всей дуальной схемы [411]<sup>1)</sup>. Но не исключено, что наличие «тахиона» делает вакуум нестабильным и что соответствующая перестройка схемы (гл. 5) приведет к осмысленной теории со спонтанно-нарушенной симметрией.

4. Дуальная модель, по-видимому, хорошо описывает только процессы, протекающие на массовой поверхности. Сделано несколько интересных попыток распространить эту модель на электромагнитные и слабые процессы [412—416]. Многие предварительные результаты, полученные в этих работах, красивы и кажутся логичными (например, можно привести аргументы в пользу того, что бьёркевский скейлинг должен наступать уже при энергиях порядка 1—2 ГэВ). Однако последовательного описания всех явлений до настоящего времени получить не удалось.

В заключение можно сказать, что дуальная модель является существенным шагом в правильном направлении, но что она нуждается в важных усовершенствованиях. Последние должны коснуться в основном области низких энергий. Действительно, при значениях импульсов, намного превышающих величину  $1/\sqrt{b}$ , различия между бозонной и фермионной мишенью, а также между значениями  $\alpha(0) = 1$  и  $\alpha(0) = 0$ , вероятно, малосущественны. Поэтому при таких импульсах дуальная модель в ее современной форме, по-видимому, применима к реальному миру. В чем мы, пожалуй, сейчас нуждаемся — так это в новой формулировке дуальности, которая совпадала бы с известной в области достаточно больших импульсов, но позволяла бы правильно описывать физические явления при низких энергиях.

### *Приложение I. Проективная инвариантность дуальных амплитуд общего вида*

Рассмотрим подробно свойства инвариантности дуальных амплитуд общего вида относительно проективных преобразований. Запишем  $(n+2)$ -точечную функцию в форме

$$A(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) = \int F \varphi dV, \quad (I.1)$$

где  $F, \varphi$  — функции, определенные равенствами (9.165) и (9.166), а

$$\rho = \left[ \frac{z_a z_b z_c}{(z_b - z_a)(z_c - z_b)(z_c - z_a)} \right]^{-1} \prod_i \frac{z_i}{|z_i - z_{i+1}|}, \quad (I.2)$$

$$dV = \prod_{i \neq a, b, c} \frac{dz_i}{z_i}. \quad (I.3)$$

Покажем, что интеграл (I.1) не зависит: 1) от конкретных значений  $a, b, c$ , которые приписываются переменным  $z_a, z_b, z_c$ ; 2) от того, какие три переменные закрепляются.

<sup>1)</sup> См. примечание переводчика на стр. 499. — *Прим. перев.*

Первое свойство очевидным образом следует из инвариантности выражения  $F\varphi dV$  относительно проективных преобразований. Применяя подходящее (трехпараметрическое) проективное преобразование, мы можем преобразовать три числа  $z_a, z_b, z_c$  в любые другие наперед заданные три числа. Доказательство второго свойства более сложно. Пользуясь тем, что первое свойство доказано, мы можем, не нарушая общности, положить  $z_a = 0, z_b = 1, z_c \rightarrow \infty$ . Покажем сначала, что интеграл (I.1) не изменяется, если фиксированное значение 1 придать другому параметру  $z$  (например,  $z_R$ ), а величину  $z_b$  взять за переменную интегрирования. Закрепив  $z_a$  и  $z_c$  в точках 0 и  $\infty$ , положим

$$\lim_{\substack{z_a \rightarrow 0 \\ z_c \rightarrow \infty}} F\varphi = \mathcal{G}(z'), \tag{I.4}$$

где  $\mathcal{G}$  — функция остальных  $n$  переменных  $z'$ . Теперь  $(n + 2)$ -точечную функцию можно записать в виде

$$A(p) = \int \lim_{z_b \rightarrow 1} \mathcal{G}(z') \prod_{z' \neq z_b} \frac{dz'}{z'}. \tag{I.5}$$

Поскольку  $z_a$  и  $z_c$  закреплены в точках 0 и  $\infty$ , функция  $\mathcal{G}(z')$  инвариантна только относительно подгруппы масштабных преобразований  $z' \rightarrow hz'$ , содержащейся в проективной группе. Произведем следующую замену переменных:

$$z''_i = \frac{z'_i}{z'_R}. \tag{I.6}$$

Очевидно, что величина  $z''_R = 1$  будет теперь постоянной, а величина

$$z''_b = \frac{1}{z'_R}$$

будет изменяться. В силу инвариантности функции  $\mathcal{G}(z')$  относительно масштабных преобразований справедливо равенство

$$\mathcal{G}(z') = \mathcal{G}(z''). \tag{I.7}$$

Легко также показать, что

$$\prod_{z'_i \neq z_b} \frac{dz'_i}{z'_i} = \prod_{z''_i \neq z''_R} \frac{dz''_i}{z''_i}. \tag{I.8}$$

Поэтому можно окончательно написать

$$\int \lim_{z_b \rightarrow 1} \mathcal{G}(z') \prod_{z'_i \neq z_b} \frac{dz'_i}{z'_i} = \int \lim_{z''_R \rightarrow 1} \mathcal{G}(z'') \prod_{z''_i \neq z''_R} \frac{dz''_i}{z''_i}. \tag{I.9}$$

Из этого равенства следует, что двум конфигурациям

$$\begin{aligned} z_a = 0, \quad z_b = 1, \quad z_c = \infty, \\ z_a = 0, \quad z_R = 1, \quad z_c = \infty \end{aligned} \tag{I.10}$$

отвечает одна и та же амплитуда  $A$ . Но теперь ясно, что в силу положения 1 амплитуда  $A$  одинакова в двух конфигурациях более общего вида

$$\begin{aligned} z_a = 0, \quad z_b = b, \quad z_c = c, \\ z_a = a', \quad z_R = b', \quad z_c = c'. \end{aligned} \tag{I.11}$$

В частности, можно снова положить  $a' = 0, b' \rightarrow \infty, c' = 1$  и, повторяя все рассуждения, придать фиксированное значение 1 новой переменной (например,  $z_s$ ). Величина  $z_c$  при этом превращается в переменную интегрирования.



Затем те же рассуждения применяются к третьей переменной, чем и заканчивается доказательство положения 2.

Пользуясь этим результатом, нетрудно показать, что дуальная амплитуда (I.1) инвариантна относительно подгруппы циклических и антициклических перестановок внешних импульсов  $p_i$ . Начнем доказательство с замечания, что произведение  $F\varphi$  инвариантно относительно одновременной циклической перестановки импульсов  $p_i$  и переменных  $z_i$ :

$$[F\varphi]_{\substack{p_i \rightarrow p_{i+1} \\ z_i \rightarrow z_{i+1}}} = F\varphi. \quad (\text{I.12})$$

Это значит, что циклическая перестановка одних лишь импульсов  $p_i$  ( $p_i \rightarrow p_{i+1}$ ) эквивалентна циклической перестановке переменных  $z_i$  ( $z_i \rightarrow z_{i-1}$ ), а именно

$$[F\varphi]_{p_i \rightarrow p_{i+1}} = [F\varphi]_{z_i \rightarrow z_{i-1}}. \quad (\text{I.13})$$

Остается показать, что интеграл (I.1) от функции  $[F\varphi]$  совпадает с подобным же интегралом от функции  $[F\varphi]_{z_i \rightarrow z_{i-1}}$ . Циклическая перестановка  $z_i \rightarrow z_{i-1}$  аргументов функций  $F$  и  $\varphi$  в интеграле (I.1) порождает, во-первых, замену фиксированных величин  $z_a, z_b, z_c$  новыми фиксированными величинами  $z_{a-1}, z_{b-1}, z_{c-1}$ , а, во-вторых, ведет к переобозначению остальных переменных интегрирования. Как было показано, первая операция не меняет интеграла (I.1). Вторая операция, очевидно, также не меняет интеграла.

Таким образом, интеграл (I.1) инвариантен относительно циклической перестановки  $z_i \rightarrow z_{i-1}$  аргументов функций  $F$  и  $\varphi$ , а значит, в силу равенства (I.13) также относительно циклической перестановки импульсов  $p_i$ . Аналогичным путем можно показать, что интеграл (I.1) не меняется, если изменить порядок следования аргументов  $z_i$  функций  $F$  и  $\varphi$  на противоположный. Следовательно, этот интеграл также не меняется, если заменить на противоположный порядок следования импульсов  $p_i$ .

# 10. Нерешенные проблемы и последние достижения в теории токов

## § 1. Введение

В предыдущих главах мы изложили основные результаты, которые дает классическая алгебра токов [ $SU(3) \otimes SU(3)$ -алгебра зарядов и плотности токов]. Настоящая же глава посвящена краткому рассмотрению последних достижений, выходящих за пределы классической алгебры токов и связанных с введением новых фундаментальных операторов и коммутационных соотношений. Хотя здесь пока еще не удалось построить удовлетворительную теорию, совершенно свободную от противоречий, во многих областях уже достигнуты большие успехи.

Исследование, касающееся «расширенной алгебры», будет идти в двух основных направлениях:

1. Мы исследуем алгебраические свойства дивергенций различных токов, чтобы характеризовать единым образом члены, описывающие нарушение симметрии. В частности, мы выясним поведение дивергенции векторных и аксиальных токов при  $SU(3) \otimes SU(3)$ -преобразованиях и рассмотрим модель Гелл-Манна — Оукса — Реннера. Полученная информация поможет нам глубже понять нарушенные симметрии и вывести ряд новых следствий, допускающих опытную проверку, а также точнее вычислить поправки. Кроме того, мы коротко остановимся на таких вопросах, как внешняя запутанная ситуация с описанием  $Kl_3$ -распада и поразительная возможность комбинации слабых и электромагнитных взаимодействий, позволяющая вычислить угол Кабиббо.

2. Мы введем тензор энергии — импульса как новый объект расширенной алгебры. Поскольку этот тензор связан с «очень слабым» гравитационным взаимодействием, естественна мысль рассматривать его совместно со слабыми и электромагнитными токами. Хорошо известно, что «заряды», связанные с этим тензором, есть компоненты оператора энергии — импульса, тогда как некоторые из его первых моментов совпадают с генераторами группы Лоренца. Поэтому, естественно, возникает вопрос о возможной роли в физике элементарных частиц других интегралов от тензора энергии — импульса.

Важным шагом в рассматриваемом направлении было осознание непригодности канонической формы этого тензора. Оказалось необходимым вводить новый тензор (в отношении гравитации практически неотличимый от прежнего). Такой подход позволяет выработать простой и общий метод описания масштабных и конформных преобразований и построить соответствующие им генераторы. Поскольку рассматриваемые операторы связываются с нарушенными симметриями, возникает важный вопрос: наблюдаются ли в природе хоть какие-нибудь проявления группы симметрии, порождаемой этими операторами?

Вопрос осложняется тем, что мы, по-видимому, не можем получить определенного ответа в рамках обычной теории поля. Такие эффекты, как нарушение предела Бьёркена — Джонсона — Лоу, аномальные тождества Уорда и появление нежелательных логарифмических членов в высших поряд-

ках теории возмущений, свидетельствуют о том, что некоторые важные физические стороны вопроса еще не ясны. В такой ситуации возможны разные точки зрения. Мы будем придерживаться «оптимистической» точки зрения, согласно которой указанные трудности могут быть преодолены либо в результате полного решения теоретико-полевых проблем, либо в результате совершенно нового подхода.

Похоже, что природа дает основания для такой надежды. Например, экспериментальные данные весьма определенно указывают на наличие скейлинга для структурных функций процесса глубокоэластичного электроорождения. Именно, в пределе больших значений энергии  $\nu$  и квадрата импульса виртуального фотона  $q^2$  остается зависимость только от  $\nu/q^2$ . В настоящее время это очень удобное для нас обстоятельство можно объяснить, либо вводя физически обоснованное обрезание в обычную теорию поля, либо обращаясь к простой и привлекательной партонной модели, либо прямо постулируя соответствующие коммутационные соотношения на световом конусе (гл. 11).

Если, исходя из теоретических соображений и экспериментальных данных, принять, что имеет место скейлинг, то можно вывести много асимптотических правил сумм, связывающих коммутаторы токов с интегралами от амплитуд электроорождения или нейтринорождения. Встречающиеся при этом коммутаторы, вообще говоря, зависят от модели в том смысле, что, например, алгебра полей и кварковая модель дают разные результаты; поэтому в принципе правила сумм позволяют проверять различные алгебраические предположения.

Мы вполне сознаем, что рассматриваемый вопрос находится в процессе развития. Мы искренне надеемся, что многие нерешенные проблемы будут разрешены в результате новых исследований, причем, может быть, некоторые из наших построений устареют.

## § 2. $SU(2) \otimes SU(2)$ и $SU(3) \otimes SU(3)$ как группы симметрии сильных взаимодействий

### 1. Общие соображения

Анализ, проведенный в гл. 2 и 6, показал, что подход, основанный на представлении о приближенной симметрии, очень удобен для формулировки и интерпретации низкоэнергетических теорем, выводимых с применением гипотезы ЧСАТ. Другими словами, успех применения ЧСАТ и алгебры токов к физике пионов низкой энергии, по-видимому, указывает на плодотворность предположения о приближенной  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии сильных взаимодействий [163, 423, 434]. При этом предел точной симметрии следует понимать как предел, в котором сохранение аксиального тока связано с обращением в нуль массы пионов согласно механизму Намбу — Голдстоуна. Таким образом, вместо коммутаторов токов и условий пионной доминантности можно ввести единое понятие киральной инвариантности; при этом данная в гл. 5 лагранжева формулировка служит простой и красивой иллюстрацией теории, обладающей киральной инвариантностью. Возникающая в результате картина сильных взаимодействий, по-видимому, соответствует полному гамильтониану, состоящему из двух членов:

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \quad (10.1)$$

где  $H_0$  — скаляр относительно группы  $SU(2) \otimes SU(2)$ , а член  $\varepsilon H_1$  таков, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  мы имеем  $m_\pi \rightarrow 0$ . В этих рамках  $SU(2) \otimes SU(2)$ -алгебру, порождаемую зарядами  $Q_\alpha$ ,  $\bar{Q}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), можно рассматривать, как алгебру группы приближенной симметрии; это позволяет говорить о поправках, пропорциональных  $\dot{\bar{Q}} = i\varepsilon [H_1, \bar{Q}]$ .

В то же время примером наиболее успешного применения принципа нарушенной симметрии для описания элементарных частиц является группа  $SU(3)$ . Теория слабых распадов Кабиббо, различные массовые формулы и классификационные схемы служат примером внушительных достижений, изложенных в предыдущих главах. Поэтому интересно и вполне естественно распространить наше рассмотрение на группу  $SU(3) \otimes SU(3)$  и посмотреть, не будет ли эта группа группой приближенной симметрии адронов. Даже если такая симметрия сильно нарушена, можно извлечь много полезного, изучая механизм нарушения в предположении, что оно вызывается сильными взаимодействиями (позже мы рассмотрим возможность нарушения слабыми и электромагнитными взаимодействиями). Данный раздел будет введением в эту проблематику.

## 2. Модель Гелл-Манна, Оукса и Реннера [79, 424]

Рассмотрим вновь векторные и аксиальные заряды  $Q_\alpha, \bar{Q}_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, 8$ ), образующие алгебру  $SU(3) \otimes SU(3)$ . В пределе точной симметрии, когда все шестнадцать векторных и аксиальных токов сохраняются,  $SU(3)$ -мультиплеты вырождены и существует октет безмассовых  $0^-$ -бозонов<sup>1</sup>). Как хорошо известно, это означает, что заряды  $\bar{Q}_\alpha$ <sup>2</sup>) не оставляют вакуум инвариантным, тогда как заряды  $Q_\alpha$ , по предположению, обладают этим свойством:

$$Q_\alpha |0\rangle = 0, \quad \bar{Q}_\alpha |0\rangle \propto | \text{псевдоскалярные мезоны} \rangle.$$

Таким образом, гамильтониан (или плотность лагранжиана в теории поля) симметричен относительно группы  $SU(3) \otimes SU(3)$ , но вакуум инвариантен только относительно подгруппы  $SU(3)$ .

Следующий важный момент — исследование различных стадий и свойств нарушения инвариантности, связанных с видом неинвариантной добавки к гамильтониану. Рассмотрим симметричный тензор энергии-импульса  $\theta_{\mu\nu}$  и предположим, что плотность гамильтониана  $\mathcal{H}(x) = \theta_{00}$  состоит из двух частей: части  $\mathcal{H}_0$ , инвариантной относительно преобразований группы  $SU(3) \otimes SU(3)$ , и нарушающего инвариантность члена очень простой формы

$$\mathcal{H}(x) = \theta_{00}^{(0)} + \varepsilon g_{00} \mathcal{H}_1(x) \equiv \mathcal{H}_0(x) + \varepsilon \mathcal{H}_1(x). \quad (10.2)$$

Предполагается, что  $\mathcal{H}_1(x)$  — лоренцев скаляр; грубо говоря, это означает, что большая часть производных от операторов поля содержится в  $\mathcal{H}_0$ . Именно так обстояло дело в простейшей кварковой модели, рассмотренной в гл. 2: в этой модели симметрия нарушается массовым членом  $\bar{q}Mq = \varepsilon \mathcal{H}_1(x)$ . Кроме того, разбиение на слагаемые в формуле (10.2) не может быть лоренц-инвариантным, поскольку заряды не коммутируют более с генераторами группы Лоренца.

Не все заряды сохраняются. Мы имеем

$$\begin{aligned} \dot{\bar{Q}}_\alpha &= \int d^3x \bar{D}_\alpha(x) = i\varepsilon \left[ \int d^3x \mathcal{H}_1(x), \bar{Q}_\alpha \right], \\ \dot{Q}_\alpha &= \int d^3x D_\alpha(x) = i\varepsilon \left[ \int d^3x \mathcal{H}_1(x), Q_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (10.3)$$

<sup>1</sup>) Как уже подчеркивалось (например, в гл. 2), это значит, что  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрия не влечет за собой появления вырожденных по четности дублетов, или безмассовых фермионов. Кроме того, не нужно вводить изовекторные голдстоуновские  $0^+$ -мезоны с массой, равной нулю.

<sup>2</sup>) В действительности определение заряда  $\bar{Q}_\alpha$  может оказаться чисто формальным при наличии безмассовых частиц.

Ввиду скалярности члена  $\mathcal{H}_1(x)$  соотношения (10.3) можно обобщить, заменив их локальными равенствами

$$\begin{aligned}\partial^\mu A_\mu^\alpha &\equiv \bar{D}_\alpha(x) = i\varepsilon [\mathcal{H}_1(x), \bar{Q}_\alpha], \\ \partial^\mu V_\mu^\alpha &\equiv D_\alpha(x) = i\varepsilon [\mathcal{H}_1(x), Q_\alpha].\end{aligned}\quad (10.4)$$

Таким образом, если известны трансформационные свойства оператора  $\mathcal{H}_1$  относительно группы  $SU(3) \otimes SU(3)$ , то они определены также и для операторов дивергенций; в частности, согласно формуле (10.4), дивергенции принадлежат тому же представлению группы  $SU(3) \otimes SU(3)$ , что и  $\mathcal{H}_1$ . Поскольку имеются достаточные основания считать, что среди дивергенций токов нет «экзотических» операторов, несущих изоспин  $I = 2$  или гиперзаряд  $Y = 2$ , операторы  $D_\alpha$  и  $\bar{D}_\alpha$  следует отнести к представлениям  $(3, 3^*) \oplus (3^*, 3)$  или  $(1, 8) \oplus (8, 1)$ . Это соответствует простейшим трансформационным свойствам оператора  $\varepsilon \mathcal{H}_1$  относительно группы  $SU(3)$ . Поэтому (пренебрегая электромагнитными взаимодействиями) можно написать

$$\varepsilon \mathcal{H}_1 = \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_8 u_8 + \eta_8 \tilde{u}_8 = \varepsilon_0 \left( u_0 + \frac{\varepsilon_8}{\varepsilon_0} u_8 + \frac{\eta_8}{\varepsilon_0} \tilde{u}_8 \right), \quad (10.5)$$

где  $u_0, u_8, \tilde{u}_8$  соответствуют  $SU(3)$ -скаляру и восьмым компонентам двух октетов, причем  $u_0$  и  $u_8$  принадлежат одному и тому же  $(3, 3^*) \oplus (3^*, 3)$ -мультиплету (это основное допущение), тогда как  $u_8$  принадлежит  $(1, 8) \oplus (8, 1)$ -мультиплету. Коммутируя скалярные плотности  $u$  с генераторами  $SU(3) \otimes SU(3)$ , мы получаем полный восемнадцатикомпонентный мультиплет (девять скалярных и девять псевдоскалярных компонент):

$$\begin{aligned}[Q_\alpha, u_\beta] &= if_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma, & [\bar{Q}_\alpha, u_\beta] &= id_{\alpha\beta\gamma} v_\gamma, \\ [Q_\alpha, v_\beta] &= if_{\alpha\beta\gamma} v_\gamma, & [\bar{Q}_\alpha, v_\beta] &= -id_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma\end{aligned}\quad (10.6)$$

(напомним, что в этих соотношениях  $\beta, \gamma = 0, 1, \dots, 8$ , тогда как  $\alpha = 1, \dots, 8$ , причем  $d_{0\alpha\beta} = \sqrt{2/3}\delta_{\alpha\beta}$ ,  $f_{0\alpha\beta} = 0$ ). Представление же  $(1, 8) \oplus (8, 1)$ , к которому принадлежит  $u_8$ , характеризуется перестановочными соотношениями

$$\begin{aligned}[Q_\alpha, \tilde{u}_\beta] &= if_{\alpha\beta\gamma} \tilde{u}_\gamma, & [\bar{Q}_\alpha, \tilde{u}_\beta] &= if_{\alpha\beta\gamma} \tilde{v}_\gamma, \\ [Q_\alpha, \tilde{v}_\beta] &= if_{\alpha\beta\gamma} \tilde{v}_\gamma, & [\bar{Q}_\alpha, \tilde{v}_\beta] &= if_{\alpha\beta\gamma} \tilde{u}_\gamma.\end{aligned}\quad (10.7)$$

В силу равенств (10.4) — (10.7) можно сразу выразить дивергенции  $D_\alpha$  и  $\bar{D}_\alpha$  в общем виде через плотности  $u_\alpha, v_\alpha, \tilde{u}_\alpha$  и  $\tilde{v}_\alpha$ :

$$\begin{aligned}D_\alpha &= \varepsilon_8 f_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma + \eta_8 f_{\alpha\beta\gamma} \tilde{u}_\gamma, \\ \bar{D}_\alpha &= \varepsilon_0 \sqrt{2/3} v_\alpha + \varepsilon_8 d_{\alpha\beta\gamma} v_\gamma + \eta_8 f_{\alpha\beta\gamma} \tilde{v}_\gamma,\end{aligned}\quad (10.8)$$

В частности, мы имеем

$$\begin{aligned}\partial^\mu V_\mu^\alpha &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3, 8), \\ \partial^\mu V_\mu^{(4, 6)} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} (\varepsilon_8 u_{5, 7} + \eta_8 \tilde{u}_{5, 7}), \\ \partial^\mu V_\mu^{(5, 7)} &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\varepsilon_8 u_{4, 6} + \eta_8 \tilde{u}_{4, 6})\end{aligned}\quad (10.9)$$

и

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu A_\mu^\alpha &= (\sqrt{2} \varepsilon_0 + \varepsilon_8) \frac{1}{\sqrt{3}} v_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\
 \partial^\mu A_\mu^{(4, 6)} &= \left( \varepsilon_0 \sqrt{2} - \frac{1}{2} \varepsilon_8 \right) \frac{1}{\sqrt{3}} v_{4, 6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_8 \tilde{v}_{5, 7}, \\
 \partial^\mu A_\mu^{(5, 7)} &= \left( \varepsilon_0 \sqrt{2} - \frac{1}{2} \varepsilon_8 \right) \frac{1}{\sqrt{3}} v_{5, 7} + \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_8 \tilde{v}_{4, 6}, \\
 \partial^\mu A_\mu^{(8)} &= (\varepsilon_0 \sqrt{2} - \varepsilon_8) \frac{1}{\sqrt{3}} v_8 + \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_8 v_0.
 \end{aligned}
 \tag{10.10}$$

Заметим, что плотность гамильтониана (10.5) становится инвариантной относительно  $SU(3) \otimes SU(3)$  в пределе, когда  $\varepsilon_0, \varepsilon_8, \eta_8 \rightarrow 0$ , так что отношения  $\varepsilon_8/\varepsilon_0$  и  $\eta_8/\varepsilon_0$  могут принимать любые значения; при этом интересно проследить различные стадии нарушения симметрии. Один из возможных вариантов состоит в том, чтобы рассматривать промежуточный случай, когда  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрия нарушена, а  $SU(3)$ -симметрия точна. В этом случае массы псевдоскалярных мезонов одинаковы и отличны от нуля ( $\partial^\mu A_\mu^\alpha \neq 0, \partial^\mu V_\mu^\alpha = 0$  при всех  $\alpha$ ), и только на следующем этапе вводится расщепление масс. Такому подходу отвечают условия  $\varepsilon_8/\varepsilon_0 \ll 1, \eta_8/\varepsilon_0 \ll 1$ ; но при таком подходе<sup>1)</sup> трудно объяснить, почему  $(m_K^2 - m_\pi^2)/m_K^2 \approx 1$ , если в качестве меры нарушения симметрии принято отношение разности масс частиц, принадлежащих одному мультиплету, к средней массе мультиплета. Данное обстоятельство (наряду с другими, изложенными ранее), по-видимому, указывает на то, что более пригодной будет другая схема, в которой предел точной  $SU(3)$ -симметрии совпадает с пределом точной  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии. Иными словами, на первой стадии нарушения  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии сохраняется точная  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрия, причем приобретают конечную массу странные псевдоскалярные мезоны и происходит расщепление других мультиплетов, но масса пионов остается равной нулю. Как видно из формул (10.10), такое положение вещей имеет место, если

$$\sqrt{2} \varepsilon_0 + \varepsilon_8 = 0, \tag{10.11}$$

т. е. если мы имеем  $\varepsilon_8/\varepsilon_0 = -\sqrt{2}$ , а не  $\varepsilon_8/\varepsilon_0 \ll 1$ . Гамильтониан теперь обладает  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрией, а вакуум инвариантен относительно группы  $SU(2)$ , которая отождествляется с изоспиновой группой.

Равенство

$$\sqrt{2} \varepsilon_0 + \varepsilon_8 = \rho \varepsilon_0, \quad \rho \ll 1 \tag{10.12}$$

соответствует тогда более реальной ситуации, когда существуют  $SU(2)$ -мультиплеты пионов ненулевой массы, но следы  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии все еще сохраняются.

Сказанное выше подытожено в схеме, представленной на фиг. 10.1. Здесь указаны возможные промежуточные ситуации между случаем точной  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии и реальным случаем (электромагнитные взаимодействия не учитываются).

На данном этапе основная проблема в том, чтобы установить, какая из этих картин правильна, и, в частности, выяснить, совместна ли изложенная выше простая и красивая  $(\mathbf{3}, \mathbf{3}^*) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{3})$ -классификация нарушения

<sup>1)</sup> Указанный подход весьма логичен в кварковой модели (гл. 2), где мы должны рассматривать отношение разности масс кварков к средней массе кварка, что соответствует следующей цепочке нарушений симметрии:

$$SU(3) \otimes SU(3) \rightarrow SU(3) \rightarrow SU(2).$$



имеем:

$$\begin{aligned} m_\pi^2 f_\pi^2 &= -\frac{1}{3} \rho \varepsilon_0 (V\sqrt{2} \langle u_0 \rangle_0 + \langle u_8 \rangle_0), \\ m_K^2 f_K^2 &= -\frac{1}{6} (3V\sqrt{2} - \rho) \varepsilon_0 (V\sqrt{2} \langle u_0 \rangle_0 - \frac{1}{2} \langle u_8 \rangle_0), \\ m_\eta^2 f_\eta^2 &= -\frac{1}{3} (2V\sqrt{2} - \rho) \varepsilon_0 (V\sqrt{2} \langle u_0 \rangle_0 - \langle u_8 \rangle_0), \\ m_s^2 f_s^2 &= -\frac{3}{4} \varepsilon_8 \langle u_8 \rangle_0 \equiv -\frac{3}{4} \varepsilon_0 (\rho - V\sqrt{2}) \langle u_8 \rangle_0, \end{aligned} \quad (10.14)$$

где мы пренебрегаем  $\eta - \eta'$ -смешиванием; параметры  $m_s, f_s$  характеризуют странный  $0^+$ -мезон (так называемый  $\kappa$ -мезон). Из соотношений (10.14) легко получить выражение, аналогичное массовой формуле Гелл-Манна — Окубо,

$$m_\pi^2 f_\pi^2 + 3m_\eta^2 f_\eta^2 - 4m_K^2 f_K^2 = 4m_s^2 f_s^2, \quad (10.15)$$

которое, однако, мало что дает. Заметим лучше, что величина  $\langle u_8 \rangle_0$  сама имеет порядок членов, нарушающих  $SU(3)$ -симметрию [как это прямо видно из четвертого равенства (10.14)]. Поскольку раньше мы пренебрегали величинами второго порядка по нарушению симметрии, отбросим члены с  $\langle u_8 \rangle_0$  и положим  $f_K \approx f_\pi \approx f_\eta$  (но не  $m_K \approx m_\pi$ !). Тогда из равенств (10.14) следует, что массы мезонов находятся в отношении

$$m_\pi^2 : m_K^2 : m_\eta^2 = \rho : \frac{1}{2} (3V\sqrt{2} - \rho) : (2V\sqrt{2} - \rho), \quad (10.16)$$

которое дает для  $\rho$  следующее значение [424]:

$$\rho \approx \frac{3}{V\sqrt{2}} \frac{m_\pi^2}{m_K^2} \approx 0,17, \quad (10.17)$$

или

$$\frac{\varepsilon_8}{\varepsilon_0} = \rho - V\sqrt{2} \approx -1,24. \quad (10.18)$$

Ясно, что формулу (10.18) надо рассматривать только как оценку порядка величины, ибо учет второго порядка по нарушению симметрии видоизменяет равенство (10.17), добавляя в него, например, множитель вида  $(f_K/f_\pi)^n$ . Тем не менее приятно видеть, что полученное значение  $\varepsilon_8/\varepsilon_0$  не очень сильно отличается от значения  $-V\sqrt{2}$ , соответствующего точной  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии. Это можно рассматривать как указание на наличие в природе приближенной  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии сильных взаимодействий.

Перейдем теперь к анализу мезонных низкоэнергетических теорем. Их рассмотрение в рамках группы  $SU(3) \otimes SU(3)$  связано с новыми соотношениями ЧСАТ для  $K$ -мезонов и ведет к теоремам о мягких каонах. Мы уже упоминали в гл. 2 соотношение Голдбергера — Треймана для странных токов; в этом случае интуиция подсказывает нам, что экстраполяция от  $q^2 = 0$  до  $q^2 = m_K^2$  может приводить к заметным ошибкам, но полная проверка этих соотношений еще не проводилась. Изучая мезон-барионное рассеяние вблизи порога, можно прийти к более определенным выводам о предсказаниях  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметричной теории относительно низкоэнергетических  $\pi$ - и  $K$ -мезонных процессов, ибо здесь после надлежащей экстраполяции возможно сравнение с экспериментом. Впервые такая задача была решена Кимом и фон Хиппелем [222]. Подход этих авторов уже рассматривался в гл. 6, так что мы лишь напомним некоторые из их выводов, которые можно лучше оценить в данном контексте.

Модель Гелл-Манна — Оукса — Реннера позволяет единым образом оценивать некоторые высшие коммутаторы, появляющиеся при фактическом расчете мезонных амплитуд вблизи порога. В частности, для так называемых



$\sigma$ -членов можно найти простое выражение

$$\sigma_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} i ([\bar{Q}_\beta, \dot{Q}_\alpha] + [\bar{Q}_\alpha, \dot{Q}_\beta]). \quad (10.19)$$

Принимая  $(3, 3^*) \oplus (3^*, 3)$ -схему нарушения, мы получаем, например, в случае барионов

$$\langle B_f | \sigma_{\beta\alpha} | B_i \rangle = \left[ \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \varepsilon_8 (d_{8\alpha\alpha} + d_{8\beta\beta}) \right] d_{\alpha\beta\gamma} \langle B_f | u_\gamma | B_i \rangle. \quad (10.20)$$

В наимизшем порядке по нарушающему симметрию члену матричные элементы  $\langle B_f | u_\gamma | B_i \rangle$  (где  $\gamma = 1, \dots, 8$ ) можно связать (путем  $SU(3)$ -поворота) с матричными элементами  $\langle B_i | u_8 | B_i \rangle$ , которые фиксированы известным из эксперимента расщеплением масс

$$\Delta M_i = \langle B_i | \varepsilon_8 u_8 | B_i \rangle$$

( $\Delta M_i$  — разность массы  $m_i$  состояния  $B_i$  и средней массы барионного октета  $\bar{m} \approx 1,15$  ГэВ). Таким образом, мы имеем

$$\varepsilon_8 \langle B_f | u_\gamma | B_i \rangle = i f_{f\gamma i} F + d_{f\gamma i} D,$$

где

$$F = \frac{m_N - m_\Xi}{\sqrt{3}}, \quad D = \frac{\sqrt{3}}{2} (m_\Sigma - m_\Lambda).$$

Поскольку отношение  $\varepsilon_8/\varepsilon_0$  найдено независимо [формула (10.18)], единственным свободным параметром в формуле (10.20) является матричный элемент

$$\langle B_f | \varepsilon_0 u_0 | B_i \rangle = m_0 \delta_{B_f B_i}. \quad (10.21)$$

Аналогичные рассуждения, конечно, справедливы и для  $(1, 8) \oplus (8, 1)$ -схемы нарушения симметрий, причем здесь ситуация даже проще, так как никакие свободные параметры в процессе вычисления  $\sigma_{\beta\alpha}$  не появляются.

Сравнивая с экспериментом полученные методы алгебры токов длинны рассеяния (техника расчета которых дана в гл. 6), мы приходим к следующему выводу; гипотеза о том, что нарушающий симметрию гамильтониан преобразуется по представлению  $(3, 3^*) \oplus (3^*, 3)$ , более предпочтительна, чем гипотеза о его принадлежности представлению  $(1, 8) \oplus (8, 1)$ . Кроме того, можно вычислить величину  $m_0$ , которая оказывается равной

$$m_0 \approx 0,215 \text{ ГэВ}. \quad (10.22)$$

Поскольку  $m_0$  дает сдвиг средней массы барионов за счет нарушения  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии, очень приятно, что он получается сравнительно небольшим ( $m_0/\bar{m} \approx 20\%$ ), ибо это согласуется с предположением о том, что симметрия  $SU(3) \otimes SU(3)$ , может быть, является прасимметрией адронов. Заметим, что, как и следовало ожидать, величина (10.22) для  $\langle B | \varepsilon_0 u_0 | B \rangle$  оказывается того же порядка, что и  $\langle B | \varepsilon_8 u_8 | B \rangle$ ; действительно, ведь в данной схеме предполагается, что нарушения симметрий  $SU(3)$  и  $SU(3) \otimes SU(3)$  приблизительно одинаковы по величине.

Результатами (10.18) и (10.22) можно воспользоваться для приближенной оценки  $\sigma$ -члена нуклона, явное выражение для которого таково:

$$\bar{u}_N u_N | \sigma_{NN} | = \frac{1}{3} (\sqrt{2} \varepsilon_0 + \varepsilon_8) \langle N | (\sqrt{2} u_0 + u_8) | N \rangle \approx \bar{u}_N u_N \frac{\rho}{3\sqrt{2}} (2m_0 - \Delta m_N). \quad (10.23)$$

Численное значение величины  $\sigma_{NN}$ , характеризующей нарушение  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии, найденное по формулам (10.17) и (10.22),

$$| \sigma_{NN} | \approx 26 \text{ МэВ},$$

оказывается довольно малым, например, по сравнению с разностью масс  $\Delta m_i$  в  $SU(3)$ -мультиплете.

Следует отметить большое расхождение в численных оценках величины  $\sigma_{NN}$ . Так, например, независимые вычисления  $\sigma_{NN}$ , проводимые путем различного рода экстраполяции экспериментальных данных по  $\pi N$ -рассеянию в нефизическую для алгебры токов точку [425—427], дают для  $\sigma_{NN}$  и, следовательно, для  $\langle B | \varepsilon_0 u_0 | B \rangle$  намного бóльшие значения ( $\sigma_{NN} \approx \approx 100$  МэВ). Таким образом, пока что нет однозначного и единодушного мнения относительно того, что справедлива теоретически привлекательная  $(3, 3^*) \oplus (3^*, 3)$ -схема нарушения симметрии и в то же время  $SU(2) \otimes \otimes SU(2)$ -симметрия лучше, чем  $SU(3)$ -симметрия. Можно предложить и более сложные модели нарушения симметрии. К настоящему моменту проблема структуры гамильтониана, ответственного за нарушение симметрии, остается интересной нерешенной проблемой, требующей от теоретиков выработки четких критериев, которые позволили бы выбрать правильный вариант.

#### 4. $K_{13}$ -распад <sup>1)</sup>

Интересной проблемой, в которой нарушение симметрии и поправки, связанные с непрерывным спектром, играют, по-видимому, решающую роль, является проблема  $K_{13}$ -распада. Его анализ, проведенный обычным методом мягких пионов, дал соотношение Каллана — Трейдмана [139] (гл. 3, § 5, п. 3), которое, как известно, не согласуется с опытом. Это обстоятельство вызывает беспокойство, особенно в связи с гипотезой о приближенной  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии. При исследовании данного вопроса воспользуемся методом, которым в гл. 6 на основе алгебры токов делались предсказания относительно процессов с физическими пионами.

Для описания распада  $K \rightarrow \pi \tilde{\nu}_l$  важно знать вершинную функцию

$$\langle \pi^0(q) | V_\mu^{V^+} | K^-(p) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(p+q)_\mu f_+(k^2) + (p-q)_\mu f_-(k^2)], \quad k = p - q. \quad (10.24)$$

Поэтому необходимо рассмотреть насыщение матричного элемента коммутатора:

$$\langle 0 | [\bar{Q}_L^3, V_\mu^{V^+}] | K^-(p) \rangle = \frac{1}{2} \langle 0 | A_\mu^{V^+} | K^- \rangle + \frac{i}{m_\pi} \langle 0 | [\bar{Q}^3, V_\mu^{V^+}] | K^- \rangle. \quad (10.25)$$

Правая часть равенства, кроме известного вклада, даваемого алгеброй токов, содержит член порядка  $O(m_\pi)$ , происходящий от коммутатора  $[\bar{Q}^3, V_\mu]$ .

Поскольку мы выбираем систему покоя  $K^-$ -мезона  $\mathbf{p} = 0$ , в нашем распоряжении нет других векторов и коммутатор (10.25) следует рассмотреть только при  $\mu = 0$  <sup>2)</sup>. Выделяя однопионную амплитуду, получаем

$$2f_{\pi^0} \langle \pi^0(\mathbf{q} = 0) | V_0^{V^+} | K^-(\mathbf{p} = 0) \rangle = m_K f_K + \delta(m_\pi). \quad (10.26)$$

Точнее, путем уже знакомых преобразований находим:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{m_\pi}{m_K}\right) f_+(k_0^2) + \left(1 - \frac{m_\pi}{m_K}\right) f_-(k_0^2) = \\ & = \frac{f_K}{f_{\pi^+}} + \frac{2}{m_\pi m_K f_{\pi^+}} \langle 0 | [\bar{Q}^3, V_0^{V^+}] | K^- \rangle - \frac{\sqrt{2} m_\pi}{m_K} \int \frac{\rho(q_0) dq_0}{q_0(q_0 - m_\pi)(q_0 - m_K)}, \end{aligned} \quad (10.27)$$

где  $k_0^2 = (m_K - m_\pi)^2$  и

$$\rho(q) = i \int \exp(iqx) d^4x \langle 0 | [\chi^3(x), D^{V^+}(0)] | K^- \rangle. \quad (10.28)$$

<sup>1)</sup> Весьма полный обзор теоретических и экспериментальных данных (на май 1970 г.) по вопросу о  $K_{13}$ -распаде можно найти в работе [141].

<sup>2)</sup> Практически это эквивалентно изучению зарядового коммутатора  $[Q_L^3, Q^{V^+}]$ .

Как видно из формулы (10.27), мы экстраполировали соотношение Каллана — Треймана (в системе покоя  $K$ -мезона) из нефизической точки  $q^2 = 0$ ,  $k_2^2 = m_K^2$  до ближайшей точки физической области  $q^2 = m_\pi^2$ ,  $k^2 = (m_K - m_\pi)^2$ . Введем формфактор «дивергенции»

$$D(k^2) = f_+(k^2) + \frac{k^2 f_-(k^2)}{m_K^2 - m_\pi^2} \quad (10.29)$$

и перепишем формулу (10.27) в виде

$$\left(1 + \frac{m_\pi}{m_K}\right) D[(m_K - m_\pi)^2] = \frac{f_K}{f_{\pi^+}} + \delta(m_\pi). \quad (10.30)$$

Мы видим, что поправки к результату  $D(m_K^2) = f_K/f_{\pi^+}$ , соответствующему приближению мягких пионов, происходит как от кинематических множителей, так и от присутствия высшего коммутатора и дисперсионного интеграла, вклад которых обозначен через  $\delta(m_\pi)$ . Приятно отметить, что кинематические множители улучшают согласие теории мягких пионов с экспериментом.

Напомним, что эксперимент согласуется с предположением о линейном убывании  $D(k^2)$ <sup>1)</sup>:

$$D(k^2) = D(0) \left[1 + \frac{\lambda_0}{m_\pi^2} k^2\right], \quad (\lambda_0)_{\text{эксп}} \approx -0,025, \quad (10.31)$$

$$D(0) = f_+(0), \quad \lambda_0 = \lambda_+ + \xi(0) \frac{m_\pi^2}{m_K^2 - m_\pi^2}.$$

Из формулы (10.30) имеем

$$\frac{D[(m_K - m_\pi)^2]}{D(0)} = \frac{f_K}{f_{\pi^+} f_+(0)} \left(1 + \frac{m_\pi}{m_K}\right)^{-1} + \delta(m_\pi) \approx 1 + \delta(m_\pi),$$

откуда видно, что при учете кинематических поправок формфактор убывает в физической области. [При  $m_\pi = 0$  мы получили бы формфактор, растущий в области  $(0, m_K^2)$ .] Параметризация (10.31) дает соотношение, аналогичное соотношению (3.156), но уже для физических пионов:

$$\xi(0) = \left[ \frac{f_K}{f_{\pi^+} f_+(0)} - \left(1 + \frac{m_\pi}{m_K}\right) \right] \left(1 - \frac{m_\pi}{m_K}\right)^{-1} - \frac{\lambda_+}{m_\pi^2} (m_K^2 - m_\pi^2) + \delta(m_\pi). \quad (10.32)$$

В табл. 10.1 в качестве примера приведены значения величины  $\xi(0)$ , даваемые формулой (10.32) в пренебрежении  $\delta(m_\pi)$ , предельные значения этой величины при  $m_\pi \rightarrow 0$  и ее экспериментальные значения. [Как и в гл. 3, мы учитываем, что экспериментальное значение угла Кабиббо в  $K_{l3}$ -распаде (векторный ток) или, точнее, величины  $f_+(0) \sin \theta$  зависит от значения  $\lambda_+$ : то же относится тогда и к  $f_K/f_{\pi^+} f_+(0)$  и имеет место простое соотношение  $f_K/f_{\pi^+} f_+(0) \approx 1,16(1 + 2\lambda_-)$ .]

Таблица 10.1

$\lambda_+$	$\frac{f_K}{f_{\pi^+} f_+(0)}$	$(\xi)_T, m_\pi \rightarrow 0$	$(\xi)_T$ по формуле (10.32)	$(\xi)_{\text{эксп}}$
0,045	1,27	-0,32	-0,55	-0,85 ± 0,20
0,034	1,24	-0,21	-0,46	-0,65 ± 0,20

Конечно, для окончательного вывода требуется еще оценить добавочные члены  $\delta(m_\pi)$ . Что касается коммутатора заряда с дивергенцией  $[\hat{Q}^3, Q^{V^+}]$ ,

<sup>1)</sup> Из этих соотношений видно, что параметр  $\lambda_-$  не появляется вообще; на самом деле он должен появиться в более высоком приближении, чем  $\lambda_+$  (или  $\lambda_0$ ), так как учитывает эффекты второго порядка по  $k^2$ .

то его явный вид зависит от конкретной модели нарушения  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии. Последняя часть поправок, связанная с быстро сходящимся дисперсионным интегралом, обладает особенно простой структурой. Наряду с возбужденными состояниями пиона вклад в нее могут дать только обладающие нулевой странностью состояния с  $J^P = 0^+, I = 1/2$ , так что, действуя как обычно, можно ввести (более или менее гипотетический)  $\kappa$ -мезон ( $m_\kappa = 1400$  МэВ?). Даваемый им вклад будет содержать общий множитель  $m_\pi/(m_\kappa - m_\pi)$ , но для полного вычисления нужно знать константу связи  $K\kappa\pi$  (в принципе вне массовой поверхности), а также вершину  $\langle 0 | D_{V^+} | \kappa \rangle$ , пропорциональную нарушению  $SU(3)$ -симметрии. Пока мы очень мало знаем об этих параметрах. Простые же оценки, основанные на конкретных моделях, по-видимому, указывают на то, что поправки от дисперсионного интеграла имеют правильный знак [428].

Из сказанного выше явствует, что при таком алгебраическом подходе к нарушенной киральной симметрии удовлетворительное (по-видимому) значение величины  $\xi(0)$  может быть получено только после тщательного учета всех вкладов в правило сумм (10.27). Таким образом, предположение о наличии приближенной  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии едва ли что дает в этом случае, поскольку все равно для окончательного согласования теории с экспериментом необходим учет поправок  $\delta(m_\pi)$ .

В то же время в отличие от того, что мы имели в гл. 6, где рассматривались примеры с нуклонными мишенями, разница между  $K$ -мезоном в качестве частицы-мишени и пионом не так уж велика и, например, их оба можно рассматривать как члены одного и того же  $SU(3)$ -мультиплетта. Это говорит о том, что роль поправок  $\delta(m_\pi)$  лучше можно понять, исходя из симметрии  $SU(3) \otimes SU(3)$ . Так, чтобы вычислить коммутатор  $[\bar{Q}^3, Q^{V^+}]$ , можно принять в качестве модели нарушения симметрии модель Гелл-Манна — Оукса — Реннера. Учитывая обычные выражения для дивергенций и коммутаторов, мы получаем

$$\langle 0 | [\bar{D}^3, Q^{V^+}] | K^- \rangle = \frac{\sqrt{2} + \epsilon_8/\epsilon_0}{2\sqrt{2} - \epsilon_8/\epsilon_0} \langle 0 | D^{V^+} | K^- \rangle = \frac{\sqrt{2} + \epsilon_8/\epsilon_0}{2\sqrt{2} - \epsilon_8/\epsilon_0} m_K^2 f_K. \quad (10.33)$$

Это соотношение дает простую зависимость величины  $\xi(0)$  от параметра  $\epsilon_8/\epsilon_0$ , т. е. от способа нарушения  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии. Если допустить, что нарушение идет через промежуточную  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрию, то интересно подставить в формулу (10.33) приближенное значение (10.17) для  $\rho$ . Но мы должны помнить, что получили выражение

$$\rho \approx \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{m_\pi^2}{m_K^2}, \quad (10.34)$$

пренебрегая всюду членами второго порядка малости по параметру нарушения  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии  $\epsilon$  (например, полагали  $m_\pi f_{K^+}/m_K f_\pi \approx m_\pi/m_K$ ). Если учесть это во всех предыдущих формулах для  $\bar{K}_{13}$  и принять значение (10.17), то получим

$$\xi(0) = \left( \frac{f_K}{f_{\pi^+}} - 1 \right) - \lambda_+ \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{m_\pi^2} + O(\epsilon^2) + \text{непрерывный спектр}, \quad (10.35)$$

т. е. снова результат теории мягких пионов! Отсюда более четко видны пределы применимости простой формулы (10.35), как следствия  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии<sup>1)</sup>, которое, однако, плохо согласуется с опытом.

В связи с этим весьма полезно проанализировать зависимость поправок, связанных с непрерывным спектром, от параметров нарушения  $SU(3) \otimes$

<sup>1)</sup> В предположении о  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии этот результат был получен Дашеном и Вайнштейном [431]. См. также работы [432, 433].

⊗  $SU(3)$ -симметрии. Как показывает выражение (10.27), в общем они зависят от  $m_\pi/m_K \propto \rho^{1/2}$  и от  $\varepsilon_8$  [через  $SU(3)$ -дивергенцию  $D^{V^+}$ ]. Но интеграл имеет особенность при  $m_\pi \rightarrow 0$  ( $\rho \rightarrow 0$ ); он ведет себя как  $\ln(m_\pi)$ . С аналогичными трудностями мы сталкиваемся при наличии низколежащего  $K\pi$ -резонанса ( $m_R - m_K \sim m_\pi$ ), поскольку метод теории возмущений неприменим при малых значениях знаменателей. Это обстоятельство можно рассматривать как указание на то, что, поскольку реализация киральной симметрии через безмассовые бозоны носит весьма своеобразный характер, матричные элементы токов или других наблюдаемых могут, вообще говоря, оказаться нерегулярными функциями параметров нарушения симметрии. Таким образом, теоремы, опирающиеся на теорию возмущений, подобные теореме Адемолло — Гатто для  $SU(3)$ -симметрии, могут, вообще говоря, не выполняться в случае  $SU(3) \otimes SU(3)$ - и  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрий ввиду сильного различия таких симметрий. Соответственно этому мы отчасти теряем возможность даже простой оценки динамических поправок, не говоря уже о явном вычислении.

Наконец, остановимся еще на одном обстоятельстве, характерном для задач с трехточечными функциями (и вообще для задач, в которых отсутствуют простые перекрестные соотношения). Применяя к  $\rho(q_0)$  кластерное разложение, нетрудно убедиться в существовании двух семейств связанных диаграмм (прямые и  $Z$ -диаграммы), а именно:

$$\rho = \rho^I + \rho^{II}, \quad (10.36)$$

$$\begin{aligned} \rho^I &= (2\pi)^3 i \sum_n \delta^4(q - p_n) \langle 0 | \chi^3 | n \rangle \langle n | D^{V^+} | K^- \rangle_c - \\ &\quad - (2\pi)^3 i \sum_n \delta^4(q + p_n) \langle 0 | D^{V^+} | K^- n \rangle \langle n | \chi^3 | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (10.37)$$

$$\begin{aligned} \rho^{II} &= -(2\pi)^3 i \sum_l \delta^4(k - p_l) \langle 0 | D^{V^+} | l \rangle \langle l | \chi^3 | K^- \rangle_c + \\ &\quad + (2\pi)^3 i \sum_l \delta^4(k + p_l) \langle 0 | \chi^3 | K^- l \rangle \langle l | D^{V^+} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Они соответствуют сингулярностям в точках  $q_0 = \pm M_n$ ,  $k_0 = m_K - q_0 = \pm M_l$  (фиг. 10.2). Практически это ведет к появлению пар формфакторов [в точках  $k^2 = (M_n - m_K)^2$  и  $k_z^2 = (M_n + m_K)^2$ ], что весьма усложняет вычисления. (В случае четырехточечных функций эта трудность во многих случаях отпадает благодаря тому, что можно связать с помощью перекрестной симметрии взятые в разных точках сингулярные по массе вклады.)

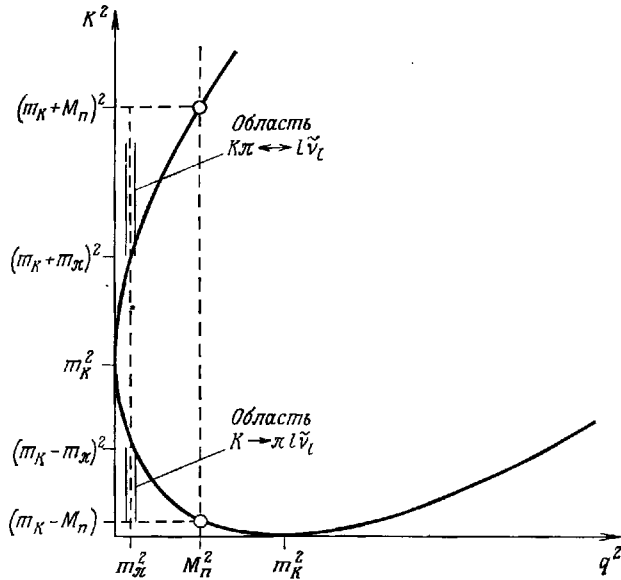
Теперь мы можем четко уяснить роль высших коммутаторов в данной и аналогичных задачах. Начиная с простого коммутатора  $[\bar{Q}, Q]$ , мы будем получать вклады (пионные) и прямой и  $Z$ -диаграммы, так что в правило сумм войдут формфакторы  $f_\pm$ , соответствующие точкам  $(m_K - m_\pi)^2$  и  $(m_K + m_\pi)^2$  (последней точкой определяется порог процесса аннигиляции  $l_\nu^- \rightarrow K\pi$ ). Чтобы исключить нежелательные вклады, отвечающие  $k_z^2 = (m_K + m_\pi)^2$ , можно объединить первоначальное правило сумм с правилом, получающимся из высшего коммутатора  $[\bar{Q}, Q]$ . При нашем подходе это выполняется автоматически.

Можно, конечно, попытаться пойти дальше и, начав с насыщения матричного элемента  $\langle 0 | [\bar{Q}_L^3, V_\mu^{V^+}] | K^- \rangle$  при  $p \neq 0$ , найти формфакторы  $f_\pm(k^2)$ . Однако определенных результатов пока не было получено. На эту тему существует богатая литература<sup>1)</sup>, к которой мы и отсылаем читателей.

Трудности, указанные для  $K_{13}$ -распада, характерны и для других слабых процессов с участием пионов, например для нелептонных распадов

<sup>1)</sup> См., например, работы [144, 429], где имеются ссылки на другие недавние работы.

гиперонов [430]. Поскольку в этом случае нас интересует амплитуда  $\langle N\pi | H_W | Y \rangle$ , мы либо предполагаем известным полный коммутатор  $[\bar{Q}_L, H_W]$ , либо должны дополнительно к этому коммутатору строить модели, позволяющие связать  $\langle N\pi | H_W | Y \rangle$  и  $\langle N | H_W | Y\pi \rangle$ . Еще сложнее описание в случае большего числа включаемых пионов, например в случае



Фиг. 10.2. Кинематика вкладов прямой и Z-диаграмм в функцию  $\rho(q^2, k^2)$ .

распадов  $K_{14}$  или  $K \rightarrow 2\pi, 3\pi$ . Приходится рассматривать многократные коммутаторы, и, хотя для этих случаев нетрудно разработать обобщение вышеизложенного метода, простые оценки эффектов экстраполяции пока еще отсутствуют.

### 5. Заключительные замечания

Рассматривая группу  $SU(3) \otimes SU(3)$  как приближенную симметрию сильных взаимодействий, мы фактически предполагаем, что полный гамильтониан можно записать в форме

$$H = H_0 + \epsilon H_1,$$

где  $H_0$  — скаляр относительно группы  $SU(3) \otimes SU(3)$ , а  $\epsilon$  — параметр нарушения симметрии, причем достаточно малый, чтобы предсказания в пределе точной симметрии представляли физический интерес. Однако некоторые результаты, относящиеся к низшим порядкам по нарушению  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии, оказываются ненадежными. Мы кратко упомянем только одну из трудностей. Она связана с электромагнитным расщеплением масс в октете псевдоскалярных мезонов. Как уже говорилось в гл. 7, метод мягких пионов дает очень хороший результат для  $m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2$ , тогда как в случае  $K$ -мезонов он ведет к неправильной формуле

$$m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2 = m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2. \tag{10.39}$$

Это соотношение можно вывести в совершенно общем виде, исходя из выражений типа (10.14) для мезонных масс, учитывающих нарушение  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии за счет электромагнитного взаимодействия. Вплоть

до членов порядка  $e^2$  мы имеем

$$H = H_0 + e^2 \int d^4x D^{\mu\nu}(x) T(j_\mu^{\text{эл.-м}}(\frac{1}{2}x) j_\nu^{\text{эл.-м}}(-\frac{1}{2}x)), \quad (10.40)$$

так что нетрудно получить [423]

$$(m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2) - (m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2) = O(\varepsilon e^2). \quad (10.41)$$

Отметим разницу между этим результатом и соотношением, полученным в гл. 8, § 5, п. 4.1 в рамках  $SU(3)$ -симметрии (которым, однако, трудно воспользоваться),

$$(m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2) - (m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2) = \langle \pi^+ | D_{I^+} | \eta \rangle + O(e^2 f), \quad (10.42)$$

где  $f$  — параметр нарушения  $SU(3)$ -симметрии. Сравнение показывает, что  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрия дает более определенные предсказания.

Чтобы объяснить столь большое расхождение соотношения (10.41) с опытом, делались попытки видоизменить электромагнитное взаимодействие путем добавления к фотонной части головастика, описываемого членом  $\varepsilon_3 u_3$ ; эту важную, но нерешенную проблему мы рассмотрим в § 3, п. 3.

Взаимосвязь различных симметрий и различные способы их нарушения составляют весьма увлекательные проблемы. Но пока еще трудно сказать, какой конкретный механизм соответствует реальности. Идея приближенной  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии очень привлекательна, не говоря уже о том, что она дает простейший логический способ понимания малых пионных масс. Характерная величина поправок, как показывает соотношение Голдбергера — Треймана, составляет 10—15%, хотя благодаря особому механизму реализации симметрии результаты могут значительно улучшиться или ухудшиться за счет динамических эффектов. Мы имеем в виду роль дублетов по четности (сравните различную приложимость теории мягких пионов к  $\Lambda N$  и  $\Lambda \Sigma$ ), а также ситуацию с  $K_{13}$ . В то же время мы можем отметить впечатляющий успех применения  $SU(3)$ -симметрии к классификации частиц и установлению связей между вершинными функциями. В этом случае характерная величина поправок первого порядка также составляет около 10%, так что последовательность нарушений  $SU(3) \otimes SU(3) \rightarrow SU(3) \rightarrow SU(2)$  остается разумной альтернативой<sup>1)</sup>. Наконец, для полноты картины может потребоваться более подробная проверка гипотезы ЧСАТ для мягких  $K$ - и  $\eta$ -мезонов. Поскольку массы этих мезонов  $m_K$  и  $m_\eta$  существенно больше массы пиона, поправки тоже должны быть больше. Но прежде чем будет сделан какой-либо определенный вывод об относительной роли симметрий  $SU(2) \otimes SU(2)$ ,  $SU(3)$  и  $SU(3) \otimes SU(3)$ , а также о существовании единой схемы для них, понадобятся, очевидно, лучшая экспериментальная информация и немалые усилия со стороны теоретиков.

### § 3. Предел Бьёркена—Джонсона—Лоу и коммутаторы токов

#### 1. Общие соображения

В гл. 7 мы показали, как можно связать одновременные коммутаторы с асимптотическим поведением «токовых» амплитуд при  $q_0 \rightarrow \infty$ , используя предельную процедуру, предложенную Бьёркеном [121] и независимо от него

<sup>1)</sup> Недавно эта точка зрения была вновь высказана Брандтом и Препаратой [435, 436]. В их подходе  $SU(3)$  является хорошей симметрией ( $\varepsilon_8/\varepsilon_0 \ll 1$ ), а малая масса пиона рассматривается как случайный динамический эффект, позволяющий аппроксимировать матричные элементы дивергенции аксиального тока пионным полюсом (слабое условие ЧСАТ). Методом, изложенным в гл. 8 (существенно насыщение при  $p \rightarrow \infty$ ), авторы вновь получают все интересные результаты киральной теории, а также утверждают, что им удастся избежать некоторых трудностей этой теории, например связанных с распадом  $\eta \rightarrow 3\pi$  и  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ .

Джонсоном и Лоу [199] (БДЛ). Поскольку данный раздел будет посвящен обсуждению некоторых важных следствий этого предела, напомним основные этапы рассуждений. Рассмотрим фурье-образ упорядоченного по времени произведения двух токов между адронными состояниями:

$$T_{\mu\nu}^{\beta\alpha}(q) = i \int \exp(iqx) d^4x \langle p_2 | T(j_\mu^\beta(x) j_\nu^\alpha(0)) | p_1 \rangle. \quad (10.43)$$

Следуя процедуре гл. 7, § 3, п. 5, мы получаем в результате интегрирования по частям

$$T_{\mu\nu}^{\beta\alpha}(q) = -\frac{1}{q_0} \int \exp(-iqx) d^3x \langle p_2 | [j_\mu^\beta(x, 0), j_\nu^\alpha(0)] | p_1 \rangle - \\ - \frac{1}{q_0} \int \exp(iqx) d^4x \langle p_2 | T(\partial_0 j_\mu^\beta(x) j_\nu^\alpha(0)) | p_1 \rangle. \quad (10.44)$$

Отсюда можно вывести асимптотическое соотношение

$$T_{\mu\nu}^{\beta\alpha}(q) \underset{\substack{q_0 \rightarrow \infty \\ q \text{ фикс.}}}{\sim} -\frac{1}{q_0} \int \exp(-iqx) d^3x \langle p_2 | [j_\mu^\beta(x, 0), j_\nu^\alpha(0)] | p_1 \rangle + O\left(\frac{1}{q_0^2}\right) \quad (10.45)$$

при условии, что величина

$$T_{\mu\nu}^{\alpha\beta'}(q) = \int \exp(iqx) d^4x \langle p_2 | T(\partial_0 j_\mu^\beta(x) j_\nu^\alpha(0)) | p_1 \rangle \quad (10.46)$$

стремится к нулю при  $q_0 \rightarrow \infty$  (как  $1/q_0$ ) и одновременной коммутатор существует. Эти условия равносильны тому, что матричные элементы  $T(\partial_0 j_\mu^\beta(x) j_\nu^\alpha(0))$ , самое большее, разрывны в точке  $x_0 = 0$ , сингулярности же типа  $\delta(x_0)$  отсутствуют. Повторяя процедуру, мы получаем разложение  $T_{\mu\nu}^{\beta\alpha}(q)$  по обратным степеням  $q_0$  с коэффициентами, зависящими от одновременных коммутаторов  $j_\mu$  и  $\partial_0^{(n)} j_\mu$ :

$$T_{\mu\nu}^{\beta\alpha}(q) \underset{\substack{q_0 \rightarrow \infty \\ q \text{ фикс.}}}{\sim} -\frac{1}{q_0} \int \exp(-iqx) d^3x \langle p_2 | [j_\mu^\beta(x), j_\nu^\alpha(0)] | p_1 \rangle - \\ - \frac{i}{q_0^2} \int \exp(-iqx) d^3x \langle p_2 | [\partial_0 j_\mu^\beta(x), j_\nu^\alpha(0)] | p_1 \rangle + O\left(\frac{1}{q_0^3}\right). \quad (10.47)$$

Однако, чем больше членов мы включаем в разложение, тем сильнее делаемые нами динамические предположения о существовании и поведении высших коммутаторов и  $T$ -произведений. В теории возмущений, например, увеличение числа производных от полей соответствует, как правило, ухудшению свойств перенормируемости. Более того, ряд теории возмущений кроме степеней обычно содержит логарифмические множители, а поэтому вопрос о справедливости теоремы БДЛ в перенормируемых моделях теории поля представляет собой еще одну интересную проблему. Но, предположив справедливость соотношений (10.45) или (10.47), мы получаем возможность выразить асимптотические свойства амплитуд через весьма интересные величины, даже если они не всегда достаточно хорошо определены. Так, важные свойства физических наблюдаемых могут быть выражены через одновременные коммутаторы. Требуя, чтобы наблюдаемые эффекты были конечными, мы можем попытаться найти алгебру, которая отвечает этому условию. И наоборот, мы можем рассматривать соотношение (10.45) как способ определения и вычисления одновременных коммутаторов через динамические величины.

На самом деле в предыдущих рассуждениях мы не учитывали того, что  $T$ -произведение, вообще говоря, не есть ковариантная величина и поэтому не соответствует физической амплитуде. Истинный тензор второго ранга  $T^*(j_\mu^\beta(x) j_\nu^\alpha(0))$  отличается от  $T(j_\mu^\beta(x) j_\nu^\alpha(0))$  швингеровскими членами (контактными  $\Upsilon$ -членами),  $c_i^\alpha$  которыми мы уже встречались в гл. 7 при рассмотрении простых моделей. Если говорить о фурье-образах  $M_{\mu\nu}^{\beta\alpha}(q)$



и  $T_{\mu\nu}^{\beta\alpha}(q)$ , то  $\Upsilon$ -членам соответствует, самое большое, полином по  $q_0$ . Это означает, что если заданы физическая амплитуда и ее асимптотика, то для того, чтобы выделить преобразованное по Фурье  $T$ -произведение и одновременной коммутатор, необходимо вычесть члены, не равные нулю при  $q_0 \rightarrow \infty$ . Кроме того, ковариантная амплитуда и преобразованное по Фурье  $T$ -произведение как аналитические функции переменной  $q_0$  (при фиксированном  $\mathbf{q}$ ) имеют одинаковые абсорбтивные части. Проиллюстрируем сказанное на примере, рассмотренном в гл. 7 (приложение I, § 1). Напишем представление Челлена — Лемана

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(q) &= \int \exp(iqx) d^4x \langle 0 | T(j_\mu(x) j_\nu(0)) | 0 \rangle = \\ &= (q_\mu q_\nu - u g_{\mu\nu}) \int_0^\infty \frac{b(u') du'}{u' - u} + (\eta_\mu \eta_\nu - g_{\mu\nu}) \langle c \rangle_0 = \\ &= M_{\mu\nu}(q) + (\eta_\mu \eta_\nu - g_{\mu\nu}) \langle c \rangle_0, \\ u &= q^2, \quad \eta_\mu \equiv \delta_{\mu 0}, \quad \langle c \rangle_0 = \int_0^\infty b(u) du. \end{aligned} \quad (10.48)$$

Разность между ковариантной амплитудой  $M_{\mu\nu}$  и  $T_{\mu\nu}(q)$  дается полиномиальным членом, и в пределе при  $q_0 \rightarrow \infty$ ,  $q^2 \rightarrow \infty$  мы имеем

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(q) &\sim - \left( \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) \int_0^\infty b(u') du' + (\eta_\mu \eta_\nu - g_{\mu\nu}) \langle c \rangle_0 = \\ &= - \frac{g_{\mu 0} g_{\nu k} q^k}{q_0} \int_0^\infty b(u') du' + O\left(\frac{1}{q_0}\right). \end{aligned} \quad (10.49)$$

С одной стороны, это соотношение демонстрирует ожидаемое поведение фурье-образа  $T$ -произведения, а с другой стороны, позволяет отождествить величину  $\mathbf{q} \int_0^\infty b(u) du$  с фурье-преобразованием вакуумного среднего  $\langle 0 | [j_0, \mathbf{j}] | 0 \rangle$ .

Мы уже поднимали вопрос о справедливости предельной теоремы БДЛ. В заключение раздела мы хотим посмотреть, как этот предел выполняется для коммутаторов, которые мы считаем надежными и уже вычисляли независимо. В частности, мы имеем в виду зарядовые коммутаторы. Положим  $\mathbf{q} = 0$  и воспользуемся тождеством Уорда, которое справедливо во всех случаях<sup>1)</sup>,

$$\begin{aligned} q^\mu M_{\mu\nu} &= W_\nu - \int \exp(iq_0 x_0) d^4x \delta(x_0) \langle p | [j_0^\beta(x), j_\nu^\alpha(0)] | p \rangle, \\ W_\nu &= - \int \exp(ip) \langle qx | T(\partial^\mu j_\mu^\beta(x) j_\nu^\alpha(0)) | p \rangle d^4x. \end{aligned} \quad (10.50)$$

Поскольку  $\mathbf{q} = 0$ , мы находим

$$M_{0\nu} = \frac{W_\nu}{q_0} - \frac{1}{q_0} \langle p | [Q_\beta, j_\nu^\alpha] | p \rangle. \quad (10.51)$$

Далее, так как оператор дивергенции  $\partial^\mu j_\mu$  представляет собой «гладкую» функцию, величина  $W_\nu$  должна стремиться к нулю, когда  $q_0 \rightarrow \infty$  (в случае  $\nu = 0$  этот факт следует из тождества Уорда для  $W_\nu$ ). Таким образом,

<sup>1)</sup> Кроме некоторых аномальных случаев, которые рассматривались в литературе [118, 316, 437, 438].

$M_{0\nu}(q_0, \mathbf{q} = 0)$  имеет порядок  $O(1/q_0)$ , и мы получаем

$$M_{0\nu} \overbrace{\quad}^{q_0 \rightarrow \infty} T_{0\nu} \overbrace{\quad}^{q_0 \rightarrow \infty} = \frac{1}{q_0} \langle p | [Q_\beta, j_\nu^\alpha] | p \rangle. \quad (10.52)$$

Понятно, что для других компонент или для других производных от токов наше предположение о  $\partial^\mu j_\mu$  является гораздо более ограничительным (и соответственно этому менее надежным). В последующих приложениях мы будем считать, что асимптотическая теорема БДЛ верна, и только в заключительной части вернемся к ее анализу в рамках теории возмущений.

Начиная с этого момента мы будем иметь дело со связанной частью амплитуды, определенной как

$$M_{\mu\nu}^{\beta\alpha}(p_2, p_1, q) = i \int \exp(iqx) d^4x \{ \langle p_2 | T^*(j_\mu^\beta(x) j_\nu^\alpha(0)) | p_1 \rangle - \langle p_2 | p_1 \rangle \langle 0 | T^*(j_\mu^\beta(x) j_\nu^\alpha(0)) | 0 \rangle \}, \quad (10.53)$$

так что пвингеровские члены, являющиеся  $s$ -числами, автоматически исключаются. Таким образом, если операторные пвингеровские члены отсутствуют, то амплитуда  $M_{\mu\nu}^{\beta\alpha}$ , определенная формулой (10.53), совпадает с фурье-образом упорядоченного во времени произведения минус его вакуумное среднее.

## 2. Электромагнитное расщепление масс

Одно из самых прямых и самых интересных применений результатов (10.45) и (10.47) — исследование электромагнитного расщепления масс во втором порядке теории возмущений [439]. Мы увидим, что результат получается конечным при условии обращения в нуль некоторой совокупности коммутаторов, вид которых зависит от выбора модели. В качестве следствия мы получаем простое объяснение конечного значения разности масс  $\pi^+$  и  $\pi^0$ , которую мы вычисляли в гл. 7 (приложение I, § 2) в пределе мягких пионов.

Начнем с общего выражения для собственной электромагнитной массы частицы:

$$\delta m^2 = \frac{ie^2}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{q^2 + ie} M_\mu^\mu(q, p), \quad (10.54)$$

причем  $M_{\mu\nu}(q, p)$  — амплитуда виртуального комптоновского рассеяния вперед, удовлетворяющая калибровочному условию  $q^\mu M_{\mu\nu} = 0$ . Соответственно этому мы напишем такое ее разложение, которое автоматически калибровочно-инвариантно:

$$M_{\mu\nu}(q, p) = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) T_1(\nu, q^2) + [v(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) - v^2 g_{\mu\nu} - q^2 p_\mu p_\nu] \frac{T_2(\nu, q^2)}{m^2}. \quad (10.55)$$

Скалярные функции  $T_1$  и  $T_2$  не имеют кинематических сингулярностей. Теперь выражение (10.54) можно преобразовать к виду

$$\delta m^2 = \frac{-3ie^2}{2(2\pi)^4} \int d^4q \left\{ T_1(\nu, q^2) + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2\nu^2}{m^2 q^2} \right) T_2(\nu, q^2) \right\}. \quad (10.56)$$

Чтобы выяснить, является ли  $\delta m^2$  конечной величиной, необходимо иметь сведения об асимптотическом поведении  $T_1, T_2$ . Мы будем предполагать, что при больших  $q^2$

$$T_{1,2} \overbrace{\quad}^{q^2 \rightarrow \infty} \sim \frac{c_{1,2}}{q^2}, \quad (10.57)$$

где  $c_{1,2}$  — коэффициенты при квадратично-расходящейся части, которые могут быть выражены через коммутаторы токов с помощью теоремы Бьёркена. Применение асимптотического предела БДЛ сталкивается с той трудностью, что он относится к поведению при больших  $q_0$  и фиксированных  $\mathbf{q}$ , тогда как в выражении (10.56) требуется асимптотическое поведение при  $q_\mu \rightarrow \infty$  по всем направлениям. Однако сравнение с результатами вычисления фейнмановских диаграмм в простых случаях показывает, что асимптотика при  $q_\mu \rightarrow \infty$  совпадает с асимптотикой в пределе БДЛ, если в последнем  $q_0$  заменить на  $\nu$ , а  $q_0^2$  — на  $q^2$ . Если говорить о представлении Лоу для  $M_{\mu\nu}$ , то это означает, что мы фиксируем асимптотическое поведение на параболе  $q^2 = a\nu^2 + b\nu + c$  и, когда  $\mathbf{q}$  пробегает все возможные значения, берем сумму по всем параболом.

Изложенный подход нужно сравнить с подходом, основанным на использовании для  $T_{1,2}$  дисперсионных соотношений по  $\nu$  при фиксированных  $q^2$ . Эти подходы различаются тем, что в первом (предел БДЛ) амплитуда рассматривается вне массовой поверхности, а во втором (предел Редже) — на массовой поверхности. Очевидно, что механизмы, действующие в каждом случае, также различны. Мы переносим анализ второго подхода к проблеме разности масс в приложение I (так как она все-таки выходит за рамки настоящей главы, хотя и представляет значительный интерес для нас).

Возвратимся к пределу БДЛ. Прежде всего рассмотрим предел больших  $q_0$  для  $M_{\mu\nu}$  в выражении (10.55). Полагая

$$q_\mu = q_0 \eta_\mu + \xi_\mu, \quad \xi_\eta = 0, \quad \eta^2 = 1, \quad \xi^2 = -q^2 \quad (10.58)$$

и подставляя в (10.55) выражения (10.58) и (10.57), находим

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} \underset{q_0 \rightarrow \infty}{\sim} & (\eta_\mu \eta_\nu - g_{\mu\nu}) c_1 + [p_\eta (p_\mu \eta_\nu + p_\nu \eta_\mu) - g_{\mu\nu} (p_\eta)^2 - p_\mu p_\nu] \frac{c_2}{m^2} + \\ & + \frac{1}{q_0} \left\{ c_1 (\eta_\mu \xi_\nu + \eta_\nu \xi_\mu) + \right. \\ & \left. + \frac{c_2}{m^2} [p_\eta (p_\mu \xi_\nu + p_\nu \xi_\mu) + p_\xi (p_\mu \eta_\nu + p_\nu \eta_\mu - 2g_{\mu\nu} p_\eta)] \right\}. \quad (10.59) \end{aligned}$$

Согласно нашей формуле, мы можем сразу же связать коэффициент при  $1/q_0$  с

$$- \int \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) d^3x \langle p | [V_\mu^\beta(\mathbf{x}), V_\nu^\alpha(0)] | p \rangle, \quad (10.60)$$

тогда как оставшиеся слагаемые можно отождествить с  $\Upsilon$ -членами<sup>1)</sup>. Кроме того, мы получаем, что  $c_1$  определяется коммутатором с компонентами  $(0, k)$ , а  $c_2$  — коммутаторами с компонентами  $(0, k)$  и  $(k, l)$ . Например, при  $\mu = 0$  и  $\nu = k$  мы имеем

$$\langle p | [V_0(\mathbf{x}), V_k(0)] | p \rangle = \left[ c_1 \delta_{kl} + \frac{c_2}{m^2} (p_0^2 \delta_{kl} - p_k p_l) \right] i \partial^l \delta^3(\mathbf{x}). \quad (10.61)$$

В той теории, где швингеровские члены могут быть только  $s$ -числами (как, например, в алгебре полей), числа  $c_1, c_2$  равны нулю и квадратичная расходимость отсутствует. Как бы то ни было, простые выкладки<sup>2)</sup> дают обычную формулу для квадратичной расходимости:

$$(\delta m^2)_{\text{квадр. расх}} = \frac{3\alpha}{8\pi} \left( c_1 + \frac{1}{2} c_2 \right) \int_0^\infty dq^2. \quad (10.62)$$

<sup>1)</sup> Это означает, что наш анализ не проливает света на возможные расходимости четвертого порядка.

<sup>2)</sup> С использованием обычного приема — поворота контура интегрирования в комплексной плоскости  $q_0$  (приложение I).

Продолжим анализ расходимостей, положив на время  $c_1 = c_2 = 0$ , и рассмотрим случай, когда

$$T_{1,2} \underset{q^2 \rightarrow \infty}{\sim} \frac{d_{1,2}}{q^4}. \quad (10.63)$$

(Другие степени несущественны, если мы предполагаем «симметричное интегрирование».) Чтобы связать  $d_{1,2}$  с одновременными коммутаторами, удобно ввести величины

$$R_{\lambda\mu} = \partial_\lambda V_\mu - \partial_\mu V_\lambda \quad (10.64)$$

и

$$M_{\lambda\mu\nu} = i \int \exp(iqx) d^4x \langle p | T^* (R_{\lambda\mu}(x) V_\nu(0)) | p \rangle = (q_\lambda M_{\mu\nu} - q_\mu M_{\lambda\nu}). \quad (10.65)$$

Тогда, подставляя сюда выражения (10.63) и (10.58), мы обнаруживаем, что  $\Gamma$ -члены отсутствуют, а величины  $d_{1,2}$  могут быть выражены через

$$- \int \exp(-iqx) d^3x \langle p | [\partial^\lambda V_\mu(x) - \partial_\mu V^\lambda(x), V_\nu(0)] | p \rangle. \quad (10.66)$$

Простые выкладки показывают, что существенны только компоненты с  $\mu = \nu = 0$ ,  $\lambda = 1, 2, 3$  (и  $\mu \leftrightarrow \lambda$ ), так что

$$\langle p | [\partial_k V_0(x) - \partial_0 V_k(x), V_l(0)] | p \rangle = \left[ \delta_{kl} d_1 + (p_k \delta_{rl} - p_l p_r) \frac{d_2}{m^2} \right] \delta^3(x). \quad (10.67)$$

Формулы (10.64) и (10.67) дают требуемый результат, определяя квадратичную и логарифмическую расходимости в расщеплении масс. Следующий шаг — исследовать возможность того, что в некоторых моделях расщепления масс конечны из-за обращения в нуль  $c_{1,2}$ ,  $d_{1,2}$ . Такое исследование можно найти в литературе [440, 441], а потому мы ограничимся здесь коротким резюме.

Что касается квадратичной расходимости, то достаточно потребовать, чтобы не было операторных швингеровских членов. Билинейные токи, по-видимому, дают неравный нулю коммутатор, так что алгебра полей является простейшей возможностью. В самом деле,

$$\langle p | [j_\mu^{\text{эл.-м}}(x) j_\nu^{\text{эл.-м}}(0)] | p' \rangle - \langle p | p' \rangle \langle 0 | [j_\mu^{\text{эл.-м}}(x), j_\nu^{\text{эл.-м}}(0)] | 0 \rangle = 0, \quad (10.68)$$

что дает  $c_1, c_2 = 0$ , тогда как для коммутатора (10.67), по-видимому, не существует никакого четкого результата. Напомним общее соотношение из гл. 5 [формула (5.207)], следующее из алгебры полей:

$$[\partial_k V_0^\beta(x) - \partial_0 V_k^\beta(x), V_l^\alpha(0)] = -i \frac{m_0^4}{\gamma_0^2} \delta_{\alpha\beta} \delta_{kl} \delta^3(x) - i \epsilon_{\beta\alpha\gamma} V_k^\gamma \partial_l \delta^3(x) - i \frac{\gamma_0^2}{m_0^2} \epsilon_{\beta\sigma\tau} \epsilon_{\alpha\sigma\gamma} (V_k^\tau V_l^\gamma + A_k^\tau A_l^\gamma) \delta^3(x). \quad (10.69)$$

Пренебрегая  $c$ -числами и полагая  $\alpha = \beta = 3$ , мы получаем вклад только третьего члена:

$$[\partial_k V_0^{\text{эл.-м}}(x) - \partial_0 V_k^{\text{эл.-м}}(x), V_l^{\text{эл.-м}}(0)] = -i \frac{\gamma_0^2}{m_0^2} \left[ \sum_{\alpha=1,2} (V_k^\alpha V_l^\alpha + A_k^\alpha A_l^\alpha) \right] \delta^3(x), \quad (10.70)$$

причем нет видимых (простых) причин, которые позволили бы избавиться от него. С этой точки зрения интересно рассмотреть связь между общим подходом, развитым выше, и впечатляющим результатом гл. 7 (приложение I, § 2), где конечная разность масс пионов

$$m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2 \approx \frac{3\alpha}{2\pi} m_\rho^2 \ln 2 \quad (10.71)$$

была получена как следствие равенства  $m_\pi^2 = 0$  в правой части.

Чтобы пояснить это обстоятельство, возьмем для определенности алгебру полей (т. е.  $c_1 = c_2 = 0$ ) и рассмотрим пионный матричный элемент коммутатора (10.70), ответственный за возможную логарифмическую расходимость. В пределе мягких пионов мы имеем

$$\begin{aligned} i \frac{c_0^2}{m_0^2} \delta^3(\mathbf{x}) \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{\alpha=1, 2} \langle \pi^\beta(p) | (V_k^\alpha V_l^\alpha + A_k^\alpha A_l^\alpha) | \pi^\gamma \rangle = \\ = \text{const} \langle 0 | [\bar{Q}^\beta, \left[ \sum_{\alpha} (V_k^\alpha V_l^\alpha + A_k^\alpha A_l^\alpha), \bar{Q}^\gamma \right]] | 0 \rangle \delta^3(\mathbf{x}) = \\ = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \delta_{kl} d_1 + (p_0 \delta_{kl} - p_k p_l) \frac{d_2}{m^2} \right] \delta^3(\mathbf{x}) = \delta_{kl} d_1 \delta^3(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (10.72)$$

Полагая  $k = l$  и используя обычные перестановочные соотношения, получаем

$$\begin{aligned} d_1 \propto \sum_{\alpha} \langle 0 | [\bar{Q}^\beta, \varepsilon_{\alpha\gamma\sigma} (V_k^\alpha A_k^\sigma + V_k^\sigma A_k^\alpha)] | 0 \rangle = \\ = i \varepsilon_{\alpha\gamma\sigma} \langle 0 | [\varepsilon_{\beta\alpha\tau} (V_k^\tau V_k^\sigma + A_k^\tau A_k^\sigma) + \varepsilon_{\beta\sigma\tau} (V_k^\tau V_k^\alpha + A_k^\tau A_k^\alpha)] | 0 \rangle \equiv 0. \end{aligned} \quad (10.73)$$

Это подтверждает, что для пионов ненулевой массы ответ конечен, и в то же время показывает, что результат связан не с алгеброй токов, а с алгеброй полей [442, 443].

### 3. Высшие порядки по слабым взаимодействиям и угол Кабиббо

Рассмотрим теперь очень интересный вопрос о вычислении «радиационных поправок», связанных со слабыми взаимодействиями. При этом наша цель состоит не в том, чтобы дать еще один пример применения предела Бьёркена — Джонсона — Лоу, а в том, чтобы обратить внимание читателя на ряд любопытных предположений о взаимосвязи между сильными, электромагнитными и слабыми взаимодействиями.

Очевидно, что выводы, вытекающие из изучения эффектов второго (или более высокого) порядка по слабому взаимодействию, надо рассматривать как эвристические. В отличие от предыдущих примеров, в основе которых был такой непревзойденный образец теории вторичного квантования, как квантовая электродинамика, в случае лагранжиана слабых взаимодействий теория, выходящая за рамки низшего борновского приближения, практически отсутствует. Возможно, что решение проблемы будет связано с улучшением метода суммирования ряда теории возмущений<sup>1)</sup>, но возможность построить respectable теорию, используя другие взаимодействия, представляет собой весьма увлекательную проблему, и к ее предварительному обсуждению мы перейдем<sup>2)</sup>.

Рассмотрим простейшую форму лагранжиана слабых взаимодействий, соответствующую взаимодействию одного заряженного промежуточного бозона  $W_\mu$  с кабиббовским током  $J_\mu$ , и исследуем эффект перенормировки, связанной с диаграммой фиг. 10.3. Матричный элемент, соответствующий адронным состояниям  $b$ ,  $a$  с одинаковыми импульсами, таков:

$$\begin{aligned} \langle b | M | a \rangle = ig^2 \int \frac{d^4 q}{q^2 - M^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M^2} \right) \times \\ \times \int \exp(iqx) d^4 x \langle b | T^* (J_\mu(x) J_\nu^+(0) + J_\mu^+(x) J_\nu(0)) | a \rangle, \end{aligned} \quad (10.74)$$

<sup>1)</sup> Из последних работ в данном направлении можно указать статью [444], где цитируются и предыдущие работы.

<sup>2)</sup> Идеи и соображения, излагаемые в данном разделе, высказывались независимо и в разных планах в работах Кабиббо и Майани [445] и в работах Гатто, Сартори и Тонина [446—448]. Мы придерживаемся в основном подхода последних авторов.

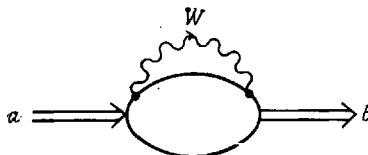
где  $J_\mu$  — слабый ток, определяющийся выражением

$$J_\mu = \cos \theta (V_\mu - A_\mu)^{I+} + \sin \theta (V_\mu - A_\mu)^{V+}, \quad (10.75)$$

причем подразумевается, что несвязные части исключены;  $g$  — постоянная слабого взаимодействия и

$$\frac{g^2}{M^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}, \quad (10.76)$$

где  $M$  — масса промежуточного бозона.



Фиг. 10.3. Перенормировка амплитуды сильного взаимодействия, обусловленная слабыми взаимодействиями низшего порядка.

Матричный элемент (10.74) содержит расходимости, которые мы постараемся выделить. Главные расходимости определяются выражением

$$\begin{aligned} \langle b | M | a \rangle_{\text{расх}} &= -i \frac{g^2}{M^2} \int \frac{d^4 q}{q^2} q^\mu q^\nu \int \exp(iqx) d^4 x \times \\ &\times \langle b | T^* (J_\mu(x) J_\nu^+(0) + J_\mu^+(x) J_\nu(0)) | a \rangle = -\frac{G}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4 q}{q^2} q^\mu q^\nu M_{\mu\nu}(q). \end{aligned} \quad (10.77)$$

Полагая

$$Q = \int J_0(x) d^3 x, \quad \partial^\mu J_\mu(x) = \mathcal{D}(x),$$

применяя к  $T$ -произведениям тождества Уорда и переходя к пределу Бёркена — Джонсона — Лоу, получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle b | M | a \rangle_{\text{расх}} &\sim -\frac{G}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4 q}{q^2} \left\{ \langle b | ([\mathcal{D}, Q^+] + [\mathcal{D}^+, Q]) | a \rangle - \right. \\ &\left. - \frac{1}{q_0^2} \int \exp(iqx) d^4 x \delta(x_0) \langle b | ([\mathcal{D}, \dot{\mathcal{D}}^+] + [\mathcal{D}^+, \dot{\mathcal{D}}]) | a \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (10.78)$$

содержащее квадратичную и логарифмическую расходимости (член с  $1/q_0$  не дает вклада в силу симметрии). Мы видим, что квадратичная расходимость определяется коммутатором

$$[\mathcal{D}, Q^+] + [\mathcal{D}^+, Q] = \mathcal{C}, \quad (10.79)$$

для вычисления которого нам потребуется специальное предположение, связанное с трансформационными свойствами дивергенций векторных и аксиальных токов. С этой целью обратимся к модели Гелл-Манна — Оукса — Реннера (§ 2, п. 2):

$$H = H_0 + \sum_l \varepsilon_l \int u_l(x) d^3 x, \quad l = 0, 3, 8, \quad (10.80)$$

где соответствующая нарушению изоспина часть была введена по причинам, которые станут более понятными позже (через  $H_0$  обозначена  $SU(3) \otimes \otimes SU(3)$ -инвариантная часть гамильтониана). Предполагается, что величины  $u_0, u_3, u_8$  принадлежат одному и тому же представлению  $(3, 3^*) \otimes$

⊕ (3\*, 3) и

$$\begin{aligned} \partial^\mu V_\mu^\alpha &= \varepsilon_3 f_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma + \varepsilon_8 f_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma, \\ \partial^\mu A_\mu^\alpha &= \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2}{3}} v_\alpha + \varepsilon_3 d_{\alpha\beta\gamma} v_\gamma + \varepsilon_8 d_{\alpha\beta\gamma} v_\gamma. \end{aligned} \quad (10.81)$$

Выражения (10.75) и (10.81) и перестановочные соотношения (10.6) для  $u_\alpha$ ,  $v_\alpha$  позволяют записать  $\mathcal{E}$  в форме <sup>1)</sup>

$$\mathcal{E} = b_0 u_0 + b_3 u_3 + b_8 u_8 + b_6 u_6 + b_7 v_7, \quad (10.82)$$

где, в частности,

$$b_3 = (\sqrt{2} \varepsilon_0 + \varepsilon_8) \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{3}} + \varepsilon_3 (1 + \cos^2 \theta), \quad (10.83)$$

$$b_8 = \frac{1}{3} (\sqrt{2} \varepsilon_0 + \varepsilon_8) (2 - 3 \sin^2 \theta) + 2\varepsilon_8 \sin^2 \theta + \frac{\varepsilon_3 \sin^2 \theta}{\sqrt{3}}.$$

Члены, содержащие  $u_6$  и  $v_7$ , пропорциональны операторам дивергенций  $\partial^\mu V_\mu^\alpha$  и  $\partial^\mu A_\mu^\alpha$  [формулы (10.9) и (10.10)] и поэтому не дают вклада в матричный элемент с одинаковыми 4-импульсами состояний в обкладках;  $SU(3)$ -инвариантный член  $b_0 u_0$  связан с бесконечным сдвигом по массе, одинаковым для всех частиц  $SU(3)$ -мультиплетта, так что мы не будем исследовать его. Таким образом, получаем, что устранение квадратичной расходимости во втором порядке по слабым взаимодействиям достигается требованием  $b_3 = b_8 = 0$ . Эти условия можно использовать для вычисления угла Кабиббо  $\theta$  и параметра  $\varepsilon_3$  через  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_8$ . Вводя для удобства новые параметры

$$\alpha = -\left(1 + \frac{\sqrt{2} \varepsilon_0}{\varepsilon_8}\right), \quad \beta = \sqrt{3} \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_8}, \quad (10.84)$$

получаем (из условий  $b_3 = b_8 = 0$ ) следующие соотношения:

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{2\alpha}{6 + \alpha + \beta} \approx \frac{1}{3} \alpha \left(1 - \frac{1}{6} \alpha\right), \quad \beta \approx \frac{1}{6} \alpha^2. \quad (10.85)$$

Экспериментальную оценку для  $\alpha$  ( $= -\rho \varepsilon_0 / \varepsilon_8$ ) можно получить из равенств (10.17) и (10.18):

$$\alpha \approx 0,13, \quad (10.86)$$

так что с помощью (10.85) находим

$$\operatorname{tg} \theta \approx 0,21, \quad \beta \approx 0,3 \cdot 10^{-2}. \quad (10.87)$$

Согласие с экспериментом найденного угла Кабиббо впечатляющее, и в то же время  $\beta$  имеет порядок величины, характерной для электромагнитных взаимодействий:  $e^2/4\pi \approx 0,7 \cdot 10^{-2}$ .

Таким образом, как следствие динамического условия мы получили соотношение (10.85) между некоторыми малыми константами физики элементарных частиц: параметром нарушения симметрии  $SU(2) \otimes SU(2)$ , пропорциональным  $m_\pi^2$ , углом Кабиббо и параметром нарушения изоспина. Мы не раз получали соотношения между константами слабого и сильного взаимодействия (например, формула Голдбергера — Треймана), но данное соотношение носит, по-видимому, более глубокий характер. Действительно, заметим, что если нет члена с  $u_3$ , то  $\sqrt{2} \varepsilon_0 + \varepsilon_8 = 0$  и либо  $\theta = 0$ , либо  $\varepsilon_8 = 0$  [согласно формулам (10.83)]. Это показывает (если отбросить второй вариант), что в пределе  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии  $\theta = 0$ , т. е. мы имеем сохранение странности в слабых взаимодействиях. Другими словами, эти

<sup>1)</sup> Заметим, что (10.82) — это самая общая формула для величины  $\mathcal{E}$ , выраженной через  $u_\alpha$  и  $v_\alpha$  при условии сохранения заряда и  $CP$ -инвариантности (напомним, что  $\mathcal{E} u_6 \mathcal{E}^{-1} = u_8$ ,  $\mathcal{E} v_7 \mathcal{E}^{-1} = -v_7$ ).

уравнения означают, что как нарушение  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии вследствие ненулевой массы пиона, так и существование нарушающих странность слабых переходов обусловлены одним и тем же механизмом, связанным с нарушением  $SU(2)$ -симметрии<sup>1)</sup>.

Отметим, что если с самого начала предположить, что нарушение  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии и несохранение странности в слабых взаимодействиях имеют общую природу, то можно определить угол Кабиббо независимым и эквивалентным способом [450]. В самом деле, пусть у нас есть  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметричная плотность гамильтониана

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon_0 (u_0 - \sqrt{2} u_8). \quad (10.88)$$

Применим к ней кабиббовский поворот, соответствующий переходу от изовекторного тока к полному слабому току. Тогда для части, сохраняющей странность, мы находим

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon_0 u_0 - \sqrt{2} \varepsilon_0 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right) u_8 - \sqrt{\frac{3}{2}} \sin^2 \theta u_3. \quad (10.89)$$

Отождествляя коэффициент при  $u_8$  с  $\varepsilon_8$  и подставляя значение (10.18), получаем

$$\sin^2 \theta = \frac{\sqrt{2}}{3} \rho \approx \frac{m_\pi^2}{m_K^2}, \quad \text{т. е. } \sin \theta \approx 0,28, \quad (10.90)$$

что вполне удовлетворительно.

Характерной чертой такого подхода является, по-видимому, наличие нарушающего изоспин члена  $u_3$ , отличного от членов прямого электромагнитного взаимодействия и аналогичного, скорее, головастикам, введенным Коулманом и Глэшоу [451]. Роль этого (необычного) нарушения изотопической симметрии особенно подчеркивали Кабиббо и Майани [452, 453] в своем тщательном исследовании, посвященном природе угла Кабиббо. Суть их предложения сводится к равноправному рассмотрению нарушений  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии за счет электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий и к использованию условия их согласованности для получения определенного угла  $\theta$ . Таким образом, гамильтониан должен включать эффекты слабого и электромагнитного взаимодействий:

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \delta H_{\text{эл.-м}} + \delta H_W. \quad (10.91)$$

Электромагнитные поправки могут быть далее подразделены на части:  $\delta H_{\text{эл.-м}} = \delta t + \delta h_{\text{эл.-м}}$ , где первое слагаемое соответствует головастiku. Условие совместности в его наиболее грубой форме сводится к тому, чтобы слабые и электромагнитные эффекты, связанные с головастиками, взаимно погасались при взаимодействии адронов, т. е. к равенству

$$\delta t + \delta H_W = 0. \quad (10.92)$$

В низшем порядке теории возмущений это условие напоминает исходное предположение Гатто — Сартори — Тонина. Однако в окончательной формулировке, представленной в работах [452, 453], содержатся более глубокие усовершенствования. Например, нарушающие изоспин головастики оказываются зависящими непосредственно от параметра  $\xi$ , который в принципе можно было бы вычислить на основе теории слабых взаимодействий. Во всяком случае вклад этих головастиков должен проявляться в других явлениях, подобных электромагнитному расщеплению масс. В частности, он мог бы дать объяснение сильному расхождению с опытом результата нарушения.

<sup>1)</sup> Более полно данный вопрос рассматривается в публикациях [424, 449], где цитируются также другие работы.



$SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии в первом порядке:  $m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2 = m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2$ . Точно так же он мог бы разрешить загадку распада  $\eta \rightarrow 3\pi$ , который запрещен в пределе мягких пионов, если рассматривается только обычное электромагнитное взаимодействие.

#### 4. Предел Бьёркена — Джонсона — Лоу и теория возмущений

В предыдущих примерах были рассмотрены некоторые применения асимптотического предела БДЛ. В частности, связь между высокоэнергетическим поведением матричного элемента от  $T$ -упорядоченного произведения и одновременными коммутаторами применялась следующим образом. В рамках модельных выражений для токов совместно с уравнениями движения и каноническими перестановочными соотношениями для неренормированных полей мы вычисляли коммутаторы и, исходя из результата вычислений, исследовали возможность устранения расходимостей в высших порядках по электромагнитному взаимодействию путем учета адронной структуры. Слабые места такой процедуры заключаются как в упрощенной оценке одновременных коммутаторов, так и в пренебрежении членами, содержащими  $T$ -произведение производных по времени от токов. Джонсон и Лоу [199] впервые указали, основываясь на простых примерах теории возмущений, что теорема нарушается в связи с появлением добавочных членов. Как нетрудно понять, причина этого лежит в использовании неренормированных величин, которые, вообще говоря, нельзя применять в рамках ренормированной теории возмущений. Детальный анализ этих проблем был проведен недавно Адлером и Тунгом [454—456], а также Джакивом и Препаратой [457, 458]. Их работы<sup>1)</sup> касаются тонкостей, связанных с трактовкой бесконечных величин в теории поля, а поэтому мы укажем лишь основные результаты.

Рассмотрим следующую модель ренормируемой теории поля:  $SU(3)$ -триплет  $\psi$  частиц со спином  $1/2$  взаимодействует с глюонным  $SU(3)$ -синглетом  $G$  через посредство векторной или скалярной связи:

$$\mathcal{L}_{\text{взаим}} = g\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi G^{\mu} \quad \text{или} \quad \mathcal{L}_{\text{взаим}} = f\bar{\psi}\psi G. \quad (10.93)$$

В этой модели токи имеют вид

$$V_{\mu}^{\alpha} = \bar{\psi}\gamma_{\mu} \frac{1}{2} \lambda^{\alpha} \psi, \quad A_{\mu}^{\alpha} = \bar{\psi}\gamma_{\mu}\gamma_5 \frac{1}{2} \lambda^{\alpha} \psi, \quad (10.94)$$

$a$ -одновременные коммутаторы вычисляются согласно канонической процедуре, например:

$$\begin{aligned} [V_{\mu}^{\beta}(x), V_{\nu}^{\alpha}(y)] &= \bar{\psi}(x) \Gamma_{\mu\nu}^{\beta\alpha} \psi(x) \delta^3(x-y), \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\beta\alpha} &= \frac{1}{2} (\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_5 - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu}\gamma_5) \left\{ \frac{1}{2} \lambda^{\beta}, \frac{1}{2} \lambda^{\alpha} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} (\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_5 + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu}\gamma_5) \left[ \frac{1}{2} \lambda^{\beta}, \frac{1}{2} \lambda^{\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (10.95)$$

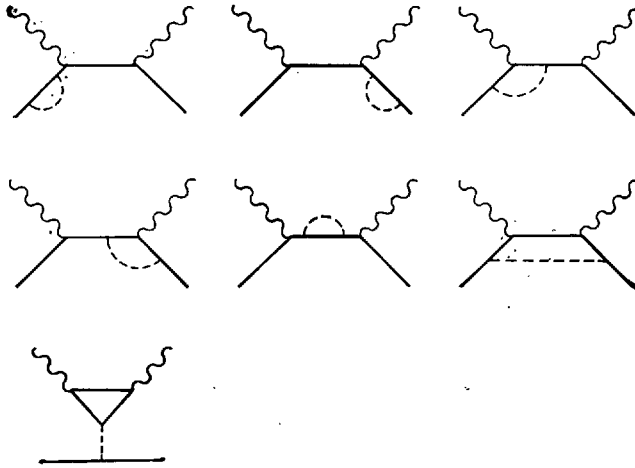
Рассмотрим процесс рассеяния  $V_{\nu}^{\alpha} + p_1 \rightarrow V_{\mu}^{\beta} + p_2$ .

Чтобы проверить справедливость асимптотической теоремы вплоть до второго порядка по фермион-глюонной константе связи  $g$  (или  $f$ ), мы должны вычислить перенормированную амплитуду рассеяния  $M_{\mu\nu}^{\beta\alpha}(p_2, p_1; q)$ , выделить член, убывающий как  $1/q_0$  при  $q_0 \rightarrow \infty$ , и сравнить его с ренормированным матричным элементом одновременного коммутатора

$$\langle p_2 | \bar{\psi} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta\alpha} \psi | p_1 \rangle = \Gamma_{\mu\nu}^{\beta\alpha}(p_2, p_1). \quad (10.96)$$

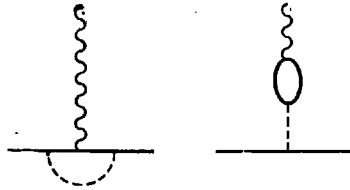
<sup>1)</sup> См. также [199]. Впервые же данное обстоятельство было отмечено Вайнштейном и Иоффе [459].

Фактически при вычислении мы учитываем диаграммы второго порядка, показанные на фиг. 10.4 для  $M_{\mu\nu}^{\beta\alpha}$  и фиг. 10.5 для  $\Gamma_{\mu\nu}^{\beta\alpha}$  (последняя треуголь-



Фиг. 10.4. Диаграммы, соответствующие вкладам низшего порядка в амплитуду  $M_{\mu\nu}$ .

ная диаграмма на фиг. 10.4 дает вклад в этой модели только в синглетную часть коммутатора, как и вторая диаграмма для  $\Gamma_{\mu\nu}$ .



Фиг. 10.5. Диаграммы, соответствующие вкладам низшего порядка в вершину  $\Gamma_{\mu\nu}$ .

Результат оказывается следующим <sup>1)</sup>:

$$M_{\mu\nu}^{\beta\alpha}(p_2, p_1; q) \underset{q, p_2, p_1 \text{ фикс.}}{\underset{q_0 \rightarrow \infty}{\sim}} - \frac{1}{q_0} (\Gamma_{\mu\nu}^{\beta\alpha} + \Delta) + O\left(\frac{\ln q_0}{q_0^2}\right), \quad (10.97)$$

где в случае глюона со спином 1

$$\Delta = \frac{g^2}{16\pi^2} \left\{ 2 (g_{\mu\nu} - g_{\mu 0} g_{\nu 0}) \gamma_0 \left[ \frac{1}{2} \lambda^\beta, \frac{1}{2} \lambda^\alpha \right] + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (\gamma_\nu \gamma_0 \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_\nu) \left\{ \frac{1}{2} \lambda^\beta, \frac{1}{2} \lambda^\alpha \right\} \right\}, \quad (10.98)$$

тогда как в случае скалярного глюона находим

$$\Delta = \frac{f^2}{16\pi^2} \left\{ (g_{\mu\nu} - g_{\mu 0} g_{\nu 0}) \left[ \frac{1}{2} \lambda^\beta, \frac{1}{2} \lambda^\alpha \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\gamma_\nu \gamma_0 \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_\nu) \left\{ \frac{1}{2} \lambda^\beta, \frac{1}{2} \lambda^\alpha \right\} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{q_0^2} - 1 \right) \right\} \quad (10.99)$$

( $\Lambda$  — параметр обрезания).

Таким образом, коммутатор, определенный с помощью асимптотического предела БДЛ, и «наивный» канонический коммутатор отличаются

<sup>1)</sup> Модель предполагает отсутствие операторных спингеровских членов, так что  $M_{\mu\nu}$  и  $T_{\mu\nu}$  практически равны.

на величину  $\Delta$ , даваемую выражениями (10.98) и (10.99); заметим, однако, что в случае  $\mu = 0$  или  $\nu = 0$  величина  $\Delta$  обращается в нуль; этим подтверждается, что процедура Бьёркена хорошо определена для коммутаторов, содержащих по крайней мере одну временную компоненту, когда существуют связи, следующие из тождеств Уорда (§ 3, п. 1). Нарушения асимптотической формулы, имеющие место для коммутаторов с пространственными компонентами, можно отнести за счет несостоятельности вычислений с помощью канонических коммутаторов. Аналогичные рассуждения применимы и для других токов. В случае членов, убывающих как  $1/q_0^2$ , ситуация, очевидно, еще хуже, так как появляются производные по времени от полей и приходится еще более усложнять уравнения движения. Если взять, например,  $\alpha = \beta = 3$ ,  $p_2 = p_1$ , то часть с  $1/q_0$  исчезает в силу перекрестной симметрии; при этом матричный элемент канонического коммутатора имеет некомпенсированную зависимость от обрезания, тогда как

$$M_{ij} \propto \frac{g^2}{q_0^2} \ln q_0^2,$$

так что наличие расходящегося члена в правой части выражения (10.97) соответствует появлению  $\ln q_0^2$  в левой части.

Наконец, отметим, что полученные выше результаты затрагивают некоторые из результатов предыдущих разделов. Например, в случае  $\beta$ -распада (приложение II) формула (II.23) должна быть изменена, при этом  $a_0 \rightarrow a_0 (1 - 3g^2/16\pi^2)$  (для глюона со спином 1).

Причину трудностей, присущих соотношениям типа (10.45), можно понять с самого начала, если обратиться к формулировке *ренормированной* теории возмущений. Дело в том, что при этом вводятся величины, зависящие от обрезания, а поэтому соотношение (10.45) может быть верным только в случае взаимного уничтожения членов, зависящих от обрезания. Полученные выше результаты свидетельствуют о том, что такое уничтожение происходит не всегда и что даже если оно имеет место, т. е. предел БДЛ существует при бесконечном увеличении параметра ультрафиолетового обрезания  $\Lambda \rightarrow \infty$ , то предельный результат не соответствует каноническим коммутаторам. Легко сообразить, что все дело в порядке перехода к пределам. Обычно при перенормировке сначала полагают  $\Lambda \rightarrow \infty$ , а потом  $q_0 \rightarrow \infty$ ; но если считать, что главную роль играют неренормированные величины, то следует переходить к пределу при  $q_0 \rightarrow \infty$ , сохраняя  $\Lambda$  конечным, хотя и большим. При таком подходе [460] теорема Бьёркена сохраняет свою первоначальную форму (10.45), без добавочных членов (и соответствует неренормированным, зависящим от  $\Lambda$  величинам).

Мы намеренно не рассматривали проблему во всей полноте, хотя и продемонстрировали характер и размеры трудностей, возникающих при анализе теоремы БДЛ или аналогичных соотношений в рамках теории возмущений. Остается, конечно, неясным вопрос, связаны ли трудности только с теоретико-полевым подходом, так что неверные результаты есть следствие неверного метода, или они в действительности указывают на несостоятельность формулы (10.45) и связаны с нашим способом ее применения. Оптимистический взгляд состоит в том, чтобы рассматривать результат теории возмущений как указание, хотя и интересное, но ограниченное рамками теоретико-полевого подхода. Другими словами, можно надеяться, что предел БДЛ существует и имеет каноническую форму при учете всех порядков по  $g$ .

Некоторые результаты, учитывающие то обстоятельство, что  $M_{\mu\nu}(q)$  имеет некоторые вклады класса I и класса II (гл. 7), причем не зависящие от конкретной модели, а основанные только на аналитичности, унитарности и сохранении тока, были получены недавно Хури и Битаром [461]. Суть их теории сводится к следующему. Рассмотрим связную часть амплитуды  $M_{\mu\nu}$  процесса  $p + V_{\frac{1}{2}}^+ \rightarrow p + V_{\frac{1}{2}}^+$  и предположим, что мы можем дать оценку

снизу для асимптотического поведения  $M_{00}$  при  $q_0 \rightarrow \infty$ :

$$\left| M_{00} + \frac{p_0}{q_0} \right| > \frac{c}{(q_0)^n}, \quad c > 0. \quad (10.100)$$

Тогда, согласно тождеству Уорда  $q^\mu M_{\mu\nu} = -p_\nu$ , находим]

$$|M_{30}| > \frac{c}{q_3 |q_0|^{n-1}}, \quad |M_{33}| > \frac{fc}{q_3^2 |q_0|^{n-2}}. \quad (10.101)$$

Хури и Битар показали, что в отсутствие операторных швингеровских членов условия положительности и аналитичности ведут к следующему неравенству для вклада класса I:

$$\left| M_{00}^I + \frac{p_0}{q_0} \right| > \frac{c}{q_0^2}, \quad c > 0, \quad (10.102)$$

где  $q_0 \rightarrow \infty$  в любом направлении комплексной плоскости. Поэтому, если главные члены в асимптотике для  $M_{00}^I$  не уничтожаются с членами в асимптотике для  $M_{00}^{II}$ , мы можем применить соотношение (10.100) при  $n = 2$  и получить

$$|M_{30}| > \frac{c}{|q_3 q_0|}, \quad |M_{33}| > \frac{c'}{q_3^2}, \quad c' > 0. \quad (10.103)$$

Отсюда прямо следует, что если нет случайного взаимного уничтожения, то мы либо имеем операторные швингеровские члены, либо не существует определения БДЛ коммутатора  $[V_3^-, V_3^+]$ . Таким образом, нет особых оснований для оптимизма в отношении простых свойств предела Бьёркена — Джонсона — Лоу.

#### § 4. Тензор энергии-импульса, масштабные преобразования и масштабная инвариантность<sup>1)</sup>

Согласно общей концепции алгебры токов, естественно думать, что более совершенное описание свойств симметрии адронов будет включать и тензор энергии-импульса  $\theta_{\mu\nu}$ . Подобно тому как токи, описывающие слабые и электромагнитные взаимодействия адронов, используются для построения генераторов группы  $SU(3) \otimes SU(3)$ , тензором энергии-импульса, т. е. источником гравитационного поля, определяются генераторы группы Пуанкаре. Эти генераторы получаются как интегралы компонент тензора энергии-импульса, или как его первые моменты. Рассмотрение других моментов тензора энергии-импульса ведет к генераторам масштабных и конформных преобразований. Эту часть главы мы хотим посвятить как общему анализу определения тензора энергии-импульса в рамках лагранжева подхода, так и возможности применения данного метода к некоторым задачам физики элементарных частиц.

##### 1. Масштабные преобразования

Нас будут интересовать свойства теории поля относительно масштабных преобразований

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \frac{x_\mu}{\rho}. \quad (10.104)$$

Плотность лагранжиана будет зависеть от набора полей  $\varphi_\alpha(x)$ . Она также будет содержать некоторые постоянные, такие, как массы и константы

<sup>1)</sup> Возможная связь масштабных и конформных преобразований (приложение III) с приближенными симметриями часто рассматривалась в литературе. Из последних работ на эту тему укажем [462, 463]. Прекрасное изложение этих проблем можно найти также в работах [424, 464].

связи, размерности которых зависят от формы взаимодействия. Взяв за единицу измерения массу, мы получаем для плотности лагранжиана размерность 4, для бозонного поля  $\varphi$  размерность 1 и для фермионного поля  $\psi$  размерность  $3/2$ ; для констант связи в зависимости от формы плотности взаимодействия  $g\varphi^3$ ,  $\lambda\varphi^4$  и  $h\varphi^5$  мы получаем размерности 1, 0 и  $-1$ . (Как хорошо известно [465], это находит свое отражение в том, что соответствующие теории сверхренормируемы, ренормируемы или неренормируемы.) Это обычная размерность. Чтобы охарактеризовать свойства полей относительно масштабных преобразований, введем так называемую масштабную размерность  $l$  в соответствии с законом <sup>1)</sup>

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \rho^l \varphi(x). \quad (10.105)$$

Требование, чтобы для бозонов канонический коммутатор теории свободных полей

$$[\varphi(x), \dot{\varphi}(y)] = i\delta^3(x-y)$$

не менялся в преобразованиях (10.105), означает, что снова  $l = 1$  (аналогично  $l = 3/2$  для спиноров). Однако в случае более сложных операторных выражений масштабная размерность может не совпадать с обычной. Например, величина  $m^2\varphi^2$  имеет обычную размерность 4, но масштабную размерность 2 (так как постоянные величины имеют масштабную размерность 0!). Фактически определение масштабных размерностей, как мы вскоре убедимся, представляет собой весьма деликатную проблему, причем здесь, помимо прочего, существует характер нарушения масштабной симметрии <sup>2)</sup>.

В рамках квантовой теории координатному преобразованию (10.104) соответствует унитарный оператор  $U(\rho)$  в гильбертовом пространстве, такой, что

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\rightarrow U(\rho) |\psi\rangle, \\ \varphi(x) &\rightarrow \varphi'(x) = U(\rho) \varphi(x) U^{-1}(\rho) = \rho^l \varphi(\rho x). \end{aligned} \quad (10.106)$$

Полагая

$$U(\rho) = \exp(i \ln \rho D), \quad U(1) = 1, \quad (10.107)$$

где  $D$  — генератор масштабных преобразований (матрица в случае нескольких полей), и рассматривая бесконечно малое преобразование  $\rho \approx 1 + \varepsilon$ , мы получаем из соотношений (10.106) (при одинаковых временах, если  $D$  зависит от времени)

$$\begin{aligned} i[D, \varphi(x)] &= d\varphi(x), \\ d &= l + x\partial. \end{aligned} \quad (10.108)$$

Уже отсюда видно, что определение масштабных размерностей операторов может оказаться далеко не простым. Дифференцируя соотношение (10.108), получаем равенство

$$i[D, \partial_\mu \varphi(x)] + i\delta_{\mu 0} [\dot{D}, \varphi(x)] = (l + 1 + x\partial) \partial_\mu \varphi(x), \quad (10.109)$$

показывающее, что оператор  $\partial_\mu \varphi(x)$  имеет ожидаемую масштабную размерность  $l + 1$  только в пределе точной масштабной инвариантности ( $\dot{D} = 0$ ) или по крайней мере для специальных моделей, где  $[\dot{D}, \varphi] = 0$ . Таким образом, при определении масштабных размерностей существенной оказывается динамика.

<sup>1)</sup> В пользу трансформационного закона (10.105) говорит то обстоятельство, что преобразованное поле в точке  $x = 0$  выражается через исходное поле в этой же точке, поскольку точка  $x = 0$  инвариантна относительно преобразования (10.104).

<sup>2)</sup> Мы использовали, по-видимому, правильное утверждение, что если  $\dim \varphi = l$ , то  $\dim \dot{\varphi} = l + 1$ . К общему случаю это утверждение неприменимо.

В пределе точной симметрии ( $\dot{D} = 0$ ), применяя к уравнению (10.109) знакомое правило  $\partial_\mu \varphi(x) = i [P_\mu, \varphi(x)]$ , находим

$$[P_\mu, D] = iP_\mu. \quad (10.110)$$

Аналогично в этом же пределе

$$[D, M_{\mu\nu}] = 0, \quad (10.111)$$

т. е. масштабные размерности имеют лоренц-инвариантный смысл <sup>1)</sup>. Кроме того, очевидно, что

$$[D, D] = 0 \quad (10.112)$$

независимо от свойств сохранения  $D$ .

Из коммутационного соотношения (10.110) вытекает одно простое следствие. Действительно, согласно (10.110), мы имеем

$$[P^2, D] = 2iP^2, \quad (10.113)$$

так что для матричного элемента между физическими состояниями получаем

$$(m_b^2 - m_a^2) \langle b | D | a \rangle = 2im_a^2 \delta_{ba}. \quad (10.114)$$

Таким образом, форма спектра, согласующаяся с соотношением (10.110), т. е. с условием  $\dot{D} = 0$ , оказывается весьма своеобразной: либо  $m_a^2 = m_b^2 = 0$ , либо спектр непрерывен. Оба случая имеют мало общего с экспериментальным спектром. Независимый возможный вариант, который мы рассмотрим позже, — предположить существование безмассового гольдстоуновского бозона с теми же квантовыми числами, что и у  $D$  ( $J^P = 0^+$ ). Если это имеет место, то матричный элемент  $D$  становится сингулярным вблизи нулевых значений переданного импульса (подобно аксиальному заряду в присутствии безмассовых пионов); поэтому необходимо найти предельную процедуру, учитывающую нарушение симметрии с самого начала.

Вообще же симметрия относительно масштабных преобразований есть нарушенная симметрия, так что, например, вместо соотношений (10.110) и (10.111) мы должны иметь более сложные выражения. Чтобы исследовать этот вопрос более детально, удобно представить  $D$  в виде интеграла от плотности тока и, быть может, рассмотреть свойства частичного сохранения соответствующего тока. Как мы увидим, такая процедура потребует введения тензора энергии-импульса. Чтобы лучше понять суть дела, полезно коротко остановиться на этом вопросе.

## 2. Лагранжев метод и тензор энергии-импульса

Сначала отметим некоторые особенности лагранжева метода, связанные с определением тензора энергии-импульса, а также генераторов группы Пуанкаре и масштабных преобразований. Напомним общий вид вариации действия  $W$  при бесконечно малых преобразованиях <sup>2)</sup>:

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x) + \Delta\varphi(x). \quad (10.115)$$

Согласно теореме Нётер <sup>3)</sup>, мы имеем

$$\delta W = \delta \int \mathcal{L}(x) d^4x = - \int j_\mu d\sigma^\mu = - \int \partial^\mu j_\mu d^4x, \quad (10.116)$$

<sup>1)</sup> Алгебраические соотношения между генераторами группы Пуанкаре и генератором масштабных преобразований следуют непосредственно из представления  $P_\mu \rightarrow i\partial_\mu$ ,  $D \rightarrow ix\partial$ ,  $M_{\mu\nu} \rightarrow i(x_\nu\partial_\mu - x_\mu\partial_\nu)$ , но это, конечно, не означает, что такие коммутаторы реализуются в природе.

<sup>2)</sup>  $\Delta\varphi(x) = \varphi'(x') - \varphi(x)$  представляет собой полную вариацию, связанную с локальной вариацией  $\delta\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x)$  равенством  $\delta\varphi(x) = \Delta\varphi(x) - \partial^\mu\varphi(x)\delta x_\mu$ .

<sup>3)</sup> Это доказывается во многих учебниках (см., например, [466]).

где

$$j_\mu = -\mathcal{L}\delta x_\mu + \Pi_\mu^\alpha (\partial^\nu \varphi_\alpha) \delta x_\nu - \Pi_\mu^\alpha \Delta \varphi_\alpha, \quad (10.117)$$

$$\Pi_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \varphi_\alpha},$$

а  $\varphi_\alpha$  — набор полей с различными квантовыми числами (причем, как всегда, подразумевается суммирование по  $\alpha$ ). Поскольку мы остались в долгу у читателя, приведя в гл. 6 (приложение I) без вывода выражения для генераторов группы Пуанкаре, рассмотрим сначала случай трансляций и преобразований Лоренца:

$$\delta x_\mu = \varepsilon_\mu, \quad \Delta \varphi_\alpha = 0, \quad (10.118a)$$

$$\delta x_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} x^\nu, \quad \Delta \varphi_\alpha = \varepsilon_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \varphi_\alpha, \quad (10.118b)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu},$$

где  $\Sigma_{\mu\nu}$  — матричный тензор, действующий на спинорные индексы<sup>1)</sup>. В частности, для скалярного, спинорного и векторного полей тензор  $\Sigma_{\mu\nu}$  имеет вид

$$\Sigma_{\mu\nu} = 0, \quad \Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad (\Sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta}.$$

Если ввести канонический тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu}^c = -\mathcal{L}g_{\mu\nu} + \Pi_\mu^\alpha \partial_\nu \varphi_\alpha, \quad (10.119)$$

то инвариантность теории относительно группы Пуанкаре приведет к уравнениям непрерывности

$$\partial^\mu T_{\mu\nu}^c = 0, \quad \partial^\mu M_{\mu\nu\lambda}^c = 0, \quad (10.120)$$

$$M_{\mu\nu\lambda}^c = x_\mu T_{\lambda\nu}^c - x_\nu T_{\lambda\mu}^c + \Pi_\lambda^\alpha \Sigma_{\mu\nu} \varphi_\alpha \quad (10.121)$$

и к законам сохранения для генераторов

$$P_\mu = \int T_{0\mu}^c d^3x, \quad (10.122)$$

$$M_{\mu\nu} = - \int (x_\mu T_{0\nu}^c - x_\nu T_{0\mu}^c + \Pi_0^\alpha \Sigma_{\mu\nu} \varphi_\alpha) d^3x. \quad (10.123)$$

Хорошо известно, что плотность лагранжиана определена неоднозначно (всегда можно добавить четырехмерную дивергенцию, не меняя интеграла действия), а поэтому локальные величины типа тока или тензора энергии-импульса, которые зависят от формы лагранжиана, можно модифицировать, сохраняя физическое содержание теории, например свойства сохранения и выражения для генераторов. В частности, имеется свобода в выборе тензора  $T_{\mu\nu}$ , которая ограничивается только выбором плотности лагранжиана. В соответствии с этим можно ввести для тензора энергии-импульса удобную форму Белинфанте [467]:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^c + \frac{1}{2} \partial^\lambda (\Pi_\lambda^\alpha \Sigma_{\mu\nu} \varphi_\alpha - \Pi_\mu^\alpha \Sigma_{\lambda\nu} \varphi_\alpha - \Pi_\nu^\alpha \Sigma_{\mu\lambda} \varphi_\alpha) \equiv T_{\mu\nu}^c + \partial^\lambda \alpha_{\lambda\mu\nu}. \quad (10.124)$$

Этот тензор отличается от канонического на дивергенцию антисимметричного относительно перестановки  $\mu \leftrightarrow \lambda$  тензора, которая удовлетворяет условию  $\partial^\mu \partial^\lambda \alpha_{\lambda\mu\nu} = 0$  и не меняет ни уравнения непрерывности  $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ , ни выражения для оператора импульса  $P_\mu$ :

$$P_\mu = \int T_{0\mu}^c d^3x = \int T_{0\mu} d^3x.$$

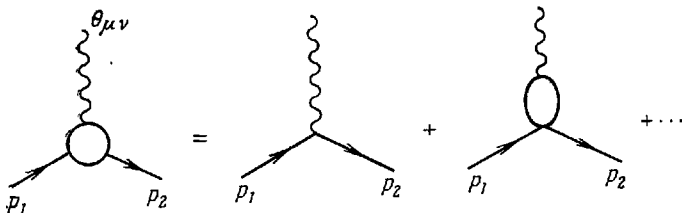
<sup>1)</sup> А именно:

$$i[M_{\mu\nu}, \varphi_\alpha(0)] = (\Sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \varphi_\beta(0).$$

Это прямое следствие антисимметричности тензора  $\alpha_{\lambda\mu\nu}$ <sup>1)</sup>. Далее, легко убедиться, что генераторы группы Лоренца  $M_{\mu\nu}$  просто выражаются через компоненты  $T_{\mu\nu}$ :

$$M_{\mu\nu} = - \int (x_\mu T_{0\nu} - x_\nu T_{0\mu}) d^3x. \quad (10.125)$$

Наконец, новый тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  обладает свойством симметрии. В самом деле, применяя уравнение непрерывности  $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$  и усло-



Фиг. 10.6. Матричные элементы тензора энергии-импульса в низшем по  $\lambda\phi^4$  порядке теории возмущений.

вие сохранения  $\dot{M}_{\mu\nu} = 0$ , получаем, согласно формуле (10.125),

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}. \quad (10.126)$$

Недавно было показано [468], что удобнее (и это имеет глубокий смысл) ввести новый тензор энергии-импульса

$$\theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{6} \sum_{\alpha} (\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \square) \phi_\alpha^2. \quad (10.127)$$

Сумма в формуле (10.127) распространяется на все бесспиновые поля. Написанное выражение применимо к классу перенормируемых взаимодействий<sup>2)</sup>:

$$\mathcal{L}_I = \alpha\phi + g\phi^3 + \lambda\phi^4 + G\bar{\psi}\psi\phi + iH\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi + f\bar{\psi}\gamma_\mu\psi B^\mu + h(\phi\partial_\mu\phi)B^\mu + \rho\phi^2 B_\mu^2 \quad (10.128)$$

( $\phi$  — скалярное или псевдоскалярное поле).

Основная причина такого выбора тензора энергии-импульса связана с тем, что его след  $\theta_\mu^\mu$  будет, по-видимому, несингулярным оператором (в том же смысле, в каком  $\partial^\mu A_\mu$  считается несингулярным в подходе с ЧСАТ, т. е. матричные элементы с его участием будут лучше сходиться). Отсюда вытекают два важных следствия. Прежде всего, как мы увидим в следующем разделе, новый тензор оказывается очень удобным и естественным для определения генераторов масштабных и конформных преобразований. Кроме того, оказывается возможным дополнить обычные тождества Уорда новыми «условиями следов», которые связывают следы упорядоченных по времени произведений операторов с конечными операторными величинами. Это позволяет, как подчеркнуто Калланом, Коулманом и Джакивом [468], поднять вопрос о конечной величине матричных элементов  $\theta_{\mu\nu}$ . Основным результатом их работы была демонстрация того, что именно тензор  $\theta_{\mu\nu}$ , а не  $T_{\mu\nu}$ , конечен в теории возмущений для класса взаимодействий (10.128). Например, во втором порядке по взаимодействию  $\lambda\phi^4$  матричный элемент тензора энергии-импульса между одночастичными состояниями со спином нуль дается диаграммами, представленными на фиг. 10.6 и, как нетрудно

1) В самом деле,  $\int \partial^\lambda \alpha_{\lambda 0\nu} d^3x = \int \partial^h \alpha_{h 0\nu} d^3x = 0$ .

2) Мы предполагаем, что кинетический член имеет обычную форму. В частности, в случае векторных частиц он должен иметь вид  $1/4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  ( $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ ).



проверить, расходится для оператора  $T_{\mu\nu}$ , тогда как для переопределенного тензора (10.127) получается конечный результат. Не вполне ясно, можно ли обобщить приведенное рассуждение на все порядки теории возмущений, хотя и существуют формальные доказательства этого [468]. Во всяком случае такое предположение очень заманчиво. Нет сомнений, что только усовершенствованный тензор  $\theta_{\mu\nu}$  может претендовать на роль оператора, матричные элементы которого могут оказаться конечными.

Наконец, мы должны рассмотреть не менее важный вопрос о наблюдаемых гравитационных эффектах, связанных с переходом от  $T_{\mu\nu}$  к  $\theta_{\mu\nu}$ . Хорошо известно, что тензор энергии-импульса описывает гравитационное взаимодействие как источник гравитонов с нулевой массой и спином 2 (с волновой функцией  $\varepsilon_{\mu\nu}$ ). Поскольку добавочные члены в  $\theta_{\mu\nu}$  имеют общую форму

$$A \partial_\mu \partial_\nu + B g_{\mu\nu} \square,$$

вершинная функция взаимодействия с физическим гравитоном, очевидно, не претерпевает никаких изменений, так как  $k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = 0$ ,  $k^2 = 0$ . Что касается взаимодействия путем обмена виртуальными гравитонами между массивными объектами, то нетрудно видеть, что новый тензор добавляет только конечное гравитационное взаимодействие, обнаружить которое, разумеется, не так-то просто. Все классические эксперименты, подтверждающие теорию относительности, не противоречат указанным изменениям.

### 3. Генератор масштабных преобразований [468]

Масштабные преобразования можно рассматривать в рамках лагранжева метода по аналогии с тем, что говорилось в предыдущем разделе.

Используя соотношение  $\delta\varphi = U\varphi U^{-1} - \varphi$ , формулу (10.108) можно записать в виде

$$\delta\varphi(x) = i\varepsilon [D(t), \varphi(x)] = \varepsilon(l + x\partial)\varphi(x),$$

и, принимая во внимание соотношения

$$\Delta\varphi(x) = \delta\varphi(x) + \partial^\mu\varphi(x)\delta x_\mu, \quad \delta x_\mu = -\varepsilon x_\mu,$$

имеем

$$\Delta\varphi(x) = \varepsilon l\varphi(x). \quad (10.129)$$

Теперь, пользуясь определением (10.117), мы (опуская, конечно, параметр  $\varepsilon$ ) получаем следующее выражение для дилатационного тока<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} j_\mu^D &= T_{\mu\nu}^C x^\nu + l_\alpha \Pi_\mu^\alpha \varphi_\alpha = \\ &= T_{\mu\nu}^C x^\nu + l_\alpha \Pi_\mu^\alpha \varphi_\alpha - \frac{1}{2} x^\nu \partial^\lambda (\Pi_\lambda^\alpha \Sigma_{\mu\nu} - \Pi_\mu^\alpha \Sigma_{\lambda\nu} - \Pi_\nu^\alpha \Sigma_{\lambda\mu}) \varphi_\alpha = \\ &= T_{\mu\nu}^C x^\nu + l_\alpha \Pi_\mu^\alpha \varphi_\alpha + \Pi_\alpha^\lambda \Sigma_{\mu\lambda} \varphi_\alpha - \frac{1}{2} \partial^\lambda [x^\nu (\Pi_\lambda^\alpha \Sigma_{\mu\nu} - \Pi_\mu^\alpha \Sigma_{\lambda\nu} - \Pi_\nu^\alpha \Sigma_{\lambda\mu}) \varphi_\alpha]. \end{aligned} \quad (10.130)$$

Далее, используя уравнения движения, находим

$$\partial^\mu j_\mu^D = T_\mu^{C\mu} + l_\alpha \Pi_\alpha^\mu \partial_\mu \varphi_\alpha + l_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} \varphi_\alpha = -4\mathcal{L} + (l_\alpha + 1) \Pi_\alpha^\mu \partial_\mu \varphi_\alpha + l_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} \varphi_\alpha.$$

Отсюда нетрудно заключить, что в случае свободных безмассовых полей масштабнo-инвариантная теория ( $\partial^\mu j_\mu^D = 0$ ) требует значения  $l = 1$  для бозонного и значения  $l = 3/2$  для фермионного полей.

Теперь покажем, что выражение (10.130) для  $j_\mu^D$  можно записать в форме

$$j_\mu^D = x^\lambda \theta_{\mu\lambda}, \quad (10.131)$$

<sup>1)</sup> Имеется в виду ток, соответствующий масштабным преобразованиям. — Прим. перев.

где  $\theta_{\mu\lambda}$  — новый тензор энергии-импульса, введенный в предыдущем разделе. Согласно формуле (10.131), генератор

$$D = \int j_0^D(\mathbf{x}) d^3x$$

записывается как

$$D = \int x^\lambda \theta_{0\lambda} d^3x, \quad (10.132)$$

а дивергенция  $\partial^\mu j_\mu^D$  есть

$$\partial^\mu j_\mu^D = \theta_\mu^\mu \equiv \theta. \quad (10.133)$$

На самом деле мы хотим получить простое выражение для оператора дивергенции, не содержащее явно производных от полей, чтобы можно было с большей уверенностью применять теорию возмущений при вычислении матричных элементов  $\partial^\mu j_\mu^D$ . Конечно, это верно, если сам оператор  $\theta_\mu^\mu$  обладает требуемым свойством, как уже подчеркивалось ранее.

Чтобы вывести соотношение (10.132), прежде всего заметим, что в формуле (10.130) можно пренебречь последним членом, поскольку он равен дивергенции антисимметричного тензора и не сказывается ни на уравнении непрерывности, ни на определении генератора. Далее предположим, что можно написать

$$l_\alpha \Pi_\mu^\alpha \varphi_\alpha + \Pi_\alpha^\lambda \Sigma_{\mu\lambda} \varphi_\alpha = \partial^\lambda \sigma_{\mu\lambda}, \quad (10.134)$$

где  $\sigma_{\mu\lambda}$  — некоторый тензор. Учитывая только его симметричную часть  $\sigma_{\mu\lambda}^{(+)}$ , получаем

$$j_\mu^D = T_{\mu\nu} x^\nu + \partial^\nu \sigma_{\mu\nu}^{(+)}. \quad (10.135)$$

И наконец, определим тензор энергии-импульса:

$$\theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\lambda \partial_\rho X_{\mu\nu}^{\lambda\rho} \quad (10.136)$$

[он обозначен через  $\theta_{\mu\nu}$ , так как вскоре будет видно, что он совпадает с определением (10.127)]; здесь

$$\begin{aligned} X_{\lambda\rho\mu\nu} &= g_{\lambda\rho} \sigma_{\mu\nu}^{(+)} - g_{\lambda\mu} \sigma_{\rho\nu}^{(+)} - g_{\lambda\nu} \sigma_{\rho\mu}^{(+)} + g_{\mu\nu} \sigma_{\lambda\rho}^{(+)} - \\ &- \frac{1}{3} g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu} \sigma_\tau^{(+)\tau} + \frac{1}{3} g_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} \sigma_\tau^{(+)\tau}. \end{aligned} \quad (10.137)$$

Дивергенция нового члена в выражении (10.136) равна нулю, он симметричен по  $(\mu, \nu)$  и не влияет на предыдущие определения  $P_\mu$  и  $M_{\mu\nu}$  (как нетрудно убедиться проверкой). Таким образом, тензор  $\theta_{\mu\nu}$  обладает всеми свойствами тензора энергии-импульса. Подставив выражение (10.136) в формулу (10.135), получаем

$$j_\mu^D = \theta_{\mu\nu} x^\nu + \nu \partial^\nu \sigma_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} \partial^\lambda \partial^\rho (x^\nu X_{\lambda\rho\mu\nu}) + \frac{1}{2} (g^{\lambda\nu} \partial^\rho + g^{\rho\nu} \partial^\lambda) X_{\lambda\rho\mu\nu}. \quad (10.138)$$

Второй и третий члены взаимно уничтожаются, а последнее слагаемое может быть опущено, так что мы приходим к требуемому результату. Остается нерешенным вопрос о справедливости предположения (10.134); в конечном счете это предположение вынуждает нас ограничиться рассмотрением специального класса лагранжианов. Этот класс содержит все ренормируемые взаимодействия, а именно

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= \alpha \varphi + g \varphi^3 + \lambda \varphi^4 + G \bar{\psi} \psi \varphi + i H \bar{\psi} \gamma_3 \psi \varphi + \bar{\psi} \gamma_\mu \psi B^\mu + \\ &+ \hbar (\varphi \partial_\mu \varphi) B^\mu + \rho \varphi^2 B_\mu^2, \end{aligned} \quad (10.139)$$

где для краткости опущены индексы, связанные с внутренними степенями свободы. Величины  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $B_\mu$  соответствуют бесспиновым, спинорным и массивным векторным полям, причем последние должны взаимодействовать с сохраняющимися токами. В этом случае формулу (10.134) можно проверить, предполагая канонические размерности для полей и выбирая

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}^2.$$

Тогда, согласно определению (10.136), мы получаем для  $\theta_{\mu\nu}$  выражение

$$\theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{6} \sum_{\alpha} (\partial_{\mu}\partial_{\nu} - g_{\mu\nu}\square) \varphi_{\alpha}^2, \quad (10.140)$$

показывающее выделенную роль бесспиновых полей.

Выражение (10.140) совпадает с выражением для усовершенствованного тензора энергии-импульса, введенным в предыдущем разделе. Главным оправданием для его введения было то, что конечны матричные элементы  $\theta_{\mu\nu}$  в теории возмущений. То обстоятельство, что явно разные соображения, а именно простая теория масштабных преобразований и условие конечности тензора энергии-импульса, ведут к одинаковым результатам, можно объяснить теперь следующим образом. След  $\theta_{\mu}^{\mu}$  нового тензора  $\theta_{\mu\nu}$  оказывается настолько несингулярным, насколько это возможно, т. е. он не содержит производных от полей или слишком высоких степеней поля. Поскольку тензор  $\theta_{\mu}^{\mu}$  имеет обычную размерность 4, малые степени полей могут присутствовать только в сочетании с размерными постоянными множителями, например,

$$\theta_{\mu}^{\mu} \propto m_{\alpha}^2 \phi_{\alpha}^2,$$

но это выражение обращается в нуль в пределе масштабной инвариантности  $\partial^{\mu} j_{\mu}^D = 0$ , а поэтому можно предположить, что

$$\theta_{\mu}^{\mu} \propto \partial^{\mu} j_{\mu}^D.$$

Проиллюстрируем сказанное на простой модели мезонного самодействующего поля, описываемого плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_{\mu}\varphi)^2 - m^2\varphi^2] + g\varphi^3 + \lambda\varphi^4. \quad (10.141)$$

Уравнение движения таково:

$$(\square + m^2)\varphi = 3g\varphi^2 + 4\lambda\varphi^3. \quad (10.142)$$

Если принять для  $\varphi$  каноническую размерность 1 (и 2 для  $\partial_{\mu}\varphi$ ), то первый и четвертый члены в формуле (10.141) будут иметь масштабную размерность 4, а второй и третий члены будут иметь размерности 2 и 3 и нарушат масштабную инвариантность.

В соответствии с первоначальным определением (10.130) дилатационный ток имеет вид

$$j_{\mu}^D = \theta_{\mu\nu}x^{\nu} + (\partial_{\mu}\varphi)\varphi + x^{\nu}\frac{1}{6}(\partial_{\mu}\partial_{\nu} - g_{\mu\nu}\square)\varphi^2, \quad (10.143)$$

где мы воспользовались новым тензором энергии-импульса

$$\theta_{\mu\nu} = -\mathcal{L}g_{\mu\nu} + (\partial_{\mu}\varphi)(\partial_{\nu}\varphi) - \frac{1}{6}(\partial_{\mu}\partial_{\nu} - g_{\mu\nu}\square)\varphi^2. \quad (10.144)$$

Правую часть выражения (10.143) можно преобразовать к виду

$$j_{\mu}^D = \theta_{\mu\nu}x^{\nu} + \frac{1}{6}\partial_{\nu}(x^{\nu}\partial_{\mu} - x_{\mu}\partial^{\nu})\varphi^2, \quad (10.145)$$

где последнему слагаемому придана форма дивергенции антисимметричного тензора, которая не дает вклада ни в  $\partial^\mu j_\mu^D$ , ни в трехмерный интеграл (по всему пространству) от четвертой компоненты. Как следствие мы получаем подтверждение равенств (4.132) и (4.133); кроме того, мы находим

$$\partial^\mu j_\mu^D = \theta_\mu^\mu = m^2 \varphi^2 - g \varphi^3, \quad (10.146)$$

что свидетельствует о масштабной инвариантности в пределе при  $m \rightarrow 0$  и  $g \rightarrow 0$ . Мы можем вычислить также след тензора Белинфанте  $T_{\mu\nu}$ :

$$T_\mu^\mu = -(\partial_\mu \varphi)^2 + 2m^2 \varphi^2 - 4g \varphi^3 - 4\lambda \varphi^4. \quad (10.147)$$

В это выражение входят высокие степени полей и производных от полей, причем нет прямой связи с масштабной инвариантностью.

Фактически, поскольку мы пользуемся моделью с лагранжианом, величины  $m^2$  и  $g$  соответствуют затравочным величинам, так что после включения контрчленов формула (10.146) примет иной вид. Поэтому все результаты, полученные из этой или аналогичных формул, вообще говоря, должны быть пересмотрены после перенормировки. То же самое можно сказать и относительно операторов поля. Если перенормировка конечна, то переход от перенормированных к ренормированным операторам поля не изменяет размерностей полей и они могут быть определены (в пределе точной масштабной симметрии) с помощью канонического коммутатора

$$[\varphi_R(x), \dot{\varphi}_R(y)] = iZ^{-1} \delta^3(x - y). \quad [$$

К сожалению, единственным способом оценки ренормировочных констант является теория возмущений, в рамках которой  $Z$  расходится в любом порядке. Вследствие этого канонический подход становится непригодным, и мы фактически не имеем возможности определения размерностей ренормированных полей простым и привычным способом теории возмущений. Подробнее этот вопрос мы рассмотрим в § 4, п. 5.

Наконец, простые выражения (10.132) и (10.133) позволяют написать общий вид коммутаторов оператора  $D$  с генераторами группы Пуанкаре. Прежде всего

$$\dot{D} = \int d^3x \partial^\mu j_\mu^D = \int d^3x \theta_\mu^\mu. \quad (10.148)$$

В то же время

$$[D, H] = i \frac{dD}{dt} - i \frac{\partial D}{\partial t} = i \int \theta_\mu^\mu d^3x - i \int \theta_{00} d^3x,$$

и мы получаем общую формулу

$$[H, D] = iH - i \int \theta_\mu^\mu d^3x. \quad (10.149)$$

Кроме того, в силу определения (10.131)

$$[K_l, D] = i \int x_l d^3x \theta_\mu^\mu, \quad (10.150)$$

тогда как другие коммутаторы не изменяются:

$$[P, D] = iP, \quad (10.151)$$

$$[J, D] = 0. \quad (10.152)$$

Формулы (10.149) — (10.152), очевидно, аналогичны формулам, соответствующим знакомому случаю частично сохраняющегося заряда, причем мы видим, что неоднородная группа Лоренца и группа масштабных преобразований не образуют замкнутой алгебры. Кроме того, эти формулы показывают, что операторам  $J$  и  $P$  мы еще можем приписать масштабные размерности

0 и 1, тогда как для операторов  $H$  и  $K$  эта размерность в случае нарушенной масштабной симметрии не определена. Таким образом, для компонент  $\theta_{0k}$  масштабная размерность всегда существует и равняется 4, что же касается  $\theta_{00}$  и  $\theta_{kl}$ , то они могут не иметь определенных размерностей (в пределе точной симметрии все компоненты  $\theta_{\mu\nu}$  имеют, конечно, одну и ту же размерность 4).

#### 4. Масштабная инвариантность и скалярные мезоны

Итак, мы рассмотрели простую схему описания масштабных преобразований в рамках канонических теорий. Теперь нам нужно вывести конкретные следствия из предположения о масштабной инвариантности (или свойств частичной инвариантности) теории и сравнить их с экспериментом. При этом естественно попытаться подойти к масштабным преобразованиям так, как мы подходили к другим нарушенным симметриям, например  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии.

Прежде всего надо исследовать возможные способы реализации симметрии. Разумеется, возможна симметричная теория, в которой все массы частиц (и размерные константы связи) равны нулю, причем механизм Голдстоуна отсутствует. В то же время мы имеем весьма привлекательную возможность рассматривать безмассовые скалярные бозоны голдстоуновского типа. Это также заслуживает обсуждения.

В качестве простой иллюстрации двух возможных способов реализации масштабной инвариантности рассмотрим матричный элемент тензора энергии-импульса между состояниями бесспиновых частиц массы  $m$ . Мы можем написать

$$\langle p_2 | \theta_{\mu\nu} | p_1 \rangle = 2P_\mu P_\nu F(q^2) + (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) G(q^2), \quad (10.153)$$

$$P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad q = p_2 - p_1.$$

Чтобы нормировать формфакторы, можно воспользоваться равенством

$$\int \langle p_2 | \theta_{00} | p_1 \rangle d^3x = \langle p_2 | H | p_1 \rangle = E \langle p_2 | p_1 \rangle, \quad (10.154)$$

откуда получаем

$$F(0) = 1. \quad (10.155)$$

Вычислив теперь след, имеем

$$\langle p_2 | \theta_\mu^\mu | p_1 \rangle = \langle p_2 | \partial^\mu j_\mu^D | p_1 \rangle = 2m^2 F(q^2) + q^2 \left[ 3G(q^2) - \frac{1}{2} F(q^2) \right], \quad (10.156)$$

Условие масштабной инвариантности  $\partial^\mu j_\mu^D = 0$  при  $q^2 = 0$  дает

$$m^2 = - \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{3}{2} q^2 G(q^2), \quad (10.157)$$

так что мы приходим к уже знакомой альтернативе:

1)  $m^2 = 0$ , и величина  $G(0)$  конечна;

2)  $m^2 \neq 0$ , и функция  $G(q^2)$  имеет полюс в  $q^2 = 0$  из-за наличия безмассовой частицы  $0^+$ , для которой было придумано название «дилатон».

Первый вариант более согласуется с нашей интуицией (масштабная инвариантность реализуется при отсутствии размерных величин), а второй чрезвычайно привлекателен тем, что совместим с такими простыми феноменологическими соотношениями, как соотношение Голдбергера — Треймана. Мы можем убедиться в этом, действуя в полной аналогии с гл. 2, где оно выводится на основе дисперсионного соотношения без вычитания.

Напишем дисперсионное соотношение без вычитания для матричного элемента  $\langle p_2 | \partial^\mu j_\mu^D | p_1 \rangle$  и выделим вклад состояния  $0^+$  (которое предпола-

гается единственным и обозначается через  $\sigma$ ). Определяя

$$\langle 0 | \theta_{\mu\nu} | \sigma \rangle = -\frac{1}{3} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} \mu_\sigma^2) f_\sigma, \quad (10.158)$$

$$\langle 0 | \theta_\mu^\mu | \sigma \rangle \equiv \langle 0 | \partial^\mu j_\mu^D | \sigma \rangle = \mu_\sigma^2 f_\sigma \quad (10.159)$$

и

$$\langle p' | p, \sigma \rangle = mg \quad (10.160)$$

( $g$  — безразмерная величина), получаем

$$\left( 2m^2 - \frac{1}{2} q^2 \right) F(q^2) + 3q^2 G(q^2) = \frac{\mu_\sigma^2 f_\sigma}{\mu_\sigma^2 - q^2} mg + \text{непр. спектр.}$$

В пределе  $q^2 \rightarrow 0$  ( $G$  — регулярная функция) имеем

$$2m = f_\sigma g + \text{непр. спектр.} \quad (10.161)$$

Поскольку член, соответствующий непрерывному спектру, определяется матричными элементами дивергенции  $\partial^\mu j_\mu^D$ , он должен обращаться в нуль в пределе точной масштабной инвариантности, а поэтому можем написать

$$2m = f_\sigma g + O(\mu_\sigma^2) \quad (10.162)$$

[формула (10.159), очевидно, указывает на то, что нарушение масштабной инвариантности пропорционально  $\mu_\sigma^2$ ].

Таким же образом<sup>1)</sup> для барионов со спином  $1/2$  находим

$$m_B = f_\sigma g_{\sigma B} + O(\mu_\sigma^2). \quad (10.163)$$

Чтобы связать это с экспериментом, можно попытаться отождествить [469, 470] «дилатон» со скалярным ( $I = 0$ ) мезоном  $\varepsilon$  ( $m_\varepsilon \approx 700$  МэВ). Тогда прямое применение формул (10.162) и (10.163), по-видимому, сталкивается с трудностями, поскольку мы имеем

$$\frac{g_{\varepsilon\pi}}{g_{\varepsilon N}} \approx \frac{2m_\pi}{m_N} \approx \frac{2}{7}, \quad (10.164)$$

тогда как, согласно эксперименту, требуется, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{g_{\varepsilon\pi}}{g_{\varepsilon N}} \sim 3.$$

Проще всего объяснить это наличием других скалярных мезонов. Но более интересен другой вариант, а именно что в случае пионов [соотношение (10.162)] нельзя пренебрегать эффектами нарушения симметрии, поскольку мы имеем дело одновременно с эффектом нарушения  $SU(2) \otimes \otimes SU(2)$ -симметрии, пропорциональным  $m_\pi^2$ , и эффектом нарушения масштабной инвариантности, пропорциональным  $\mu_\sigma^2$ . Это сводится к требованию совместного рассмотрения нарушенных киральной и масштабной симметрий. Здесь мы вновь сталкиваемся с важной проблемой установления возможной иерархии симметрий адронов.

Сказанное позволяет сделать еще одно заключение. Подобно тому как свойства векторных и аксиальных токов использовались для определения многих свойств частиц  $\rho$ ,  $\pi$  и  $A_1$ , изучая тензор  $\theta_{\mu\nu}$  и его след  $\theta_\mu^\mu$ , мы можем лучше понять свойства тензорных ( $J^P = 2^+$ ) и скалярных частиц. Однако экспериментальные данные о скалярных мезонах чрезвычайно скудны

<sup>1)</sup> Интересно напомнить, что использовать дисперсионное соотношение для следа тензора энергии-импульса и условие доминантности скалярной частицы предложил Гелл-Манн в 1962 г. [77]. Новый аспект, который мы пытаемся продемонстрировать здесь, заключается в том, что в силу равенства  $\theta_\mu^\mu = \partial^\mu j_\mu^D$  условие доминантности оказывается не динамическим требованием, а проявлением имеющейся симметрии.

и противоречивы, так что все наши рассуждения носят предварительный характер.

Поскольку мы на правильном пути, продолжим дальше аналогию с киральной симметрией и рассмотрим особенности нарушения симметрии. Как и в случае нарушения  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии, сделаем упрощающее предположение, что

$$\begin{aligned}\theta_{00}(x) &= \bar{\theta}_{00}(x) + w(x), \\ \bar{H} &= H + \int d^3x w(x),\end{aligned}\quad (10.165)$$

где  $\bar{\theta}_{00}$  — масштабно-инвариантная часть тензора энергии-импульса, а  $w(x)$  — скаляр относительно группы Лоренца. Напоминаем, что разделение гамильтониана на инвариантную часть и на часть, описывающую нарушение симметрии, не является, вообще говоря, лоренц-ковариантным, поскольку масштабная инвариантность нарушена.

Часть  $\bar{\theta}_{00}$  имеет масштабную размерность 4, тогда как часть  $w(x)$  предполагается разложимой на слагаемые с разными размерностями:

$$w(x) = \sum_k w_k(x), \quad (10.166)$$

где

$$i[D, w_k] = (l_k + x\partial) w_k.$$

Рассмотрим теперь одновременной коммутатор

$$\begin{aligned}[H, D] &= \int d^3x [\theta_{00}(x), D] = \int d^3x [\bar{\theta}_{00}, D] + \sum_k l_k \int d^3x [w_k(x), D] = \\ &= i\bar{H} + i \sum_k (l_k - 3) \int w_k(x) d^3x.\end{aligned}$$

Но мы имеем также [формула (10.149)]

$$[H, D] = iH - i \int \theta_{\mu}^{\mu} d^3x = iH + i \sum_k \int w_k(x) d^3x - i \int \theta_{\mu}^{\mu} d^3x.$$

Сравнивая эти равенства, получаем

$$\int d^3x \left[ \theta_{\mu}^{\mu}(x) + \sum_k w_k(x) (l_k - 4) \right] = 0. \quad (10.167)$$

Ввиду того что все операторы в равенстве (10.167) являются лоренцевыми скалярами, это равенство может быть записано в локальной форме:

$$\theta_{\mu}^{\mu} = \sum_k (4 - l_k) w_k. \quad (10.168)$$

Выражение (10.165) можно обобщить на весь тензор  $\theta_{\mu\nu}$ , положив, что

$$\theta_{\mu\nu} = \bar{\theta}_{\mu\nu} + a g_{\mu\nu} + b g_{\mu 0} g_{\nu 0}, \quad (10.169)$$

где  $a$  и  $b$  — лоренцевы скаляры. Тогда сравнение с формулами (10.165) и (10.168) дает

$$\theta_{\mu\nu} = \bar{\theta}_{\mu\nu} + \sum_k \frac{1}{3} w_k [(3 - l_k) g_{\mu\nu} + l_k g_{\mu 0} g_{\nu 0}]. \quad (10.170)$$

При этом вследствие нарушения симметрии различные компоненты тензора  $\theta_{\mu\nu}$  имеют разные масштабные размерности. Этот результат содержался уже в общих коммутационных соотношениях (10.149) — (10.152). Указанные соотношения показывают, что, в то время как **J** и **P** имеют масштабные

размерности 0 и 1, эти размерности не определены для  $K$  и  $H$ , если только масштабная инвариантность нарушена. Таким образом,  $\theta_{0k}$  имеет масштабную размерность 4, но ничего определенного нельзя сказать о масштабных размерностях  $\theta_{00}$  и  $\theta_{kl}$  при  $k = l$  (а следовательно, и о  $\theta_{\mu}^{\mu}$ ) в случае нарушения масштабной инвариантности.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, обратимся к простому примеру из § 4, п. 3 [формула (10.146)], где  $\theta_{\mu}^{\mu} = m^2\varphi^2 - g\varphi^3$ , т. е.  $w_2 = \frac{1}{2} m^2\varphi^2$ ,  $w_3 = -g\varphi^3$ , так что мы можем написать

$$\theta_{\mu\nu} = \bar{\theta}_{\mu\nu} + \frac{1}{6} m^2\varphi^2 (g_{\mu\nu} + 2g_{\mu 0}g_{\nu 0}) - g\varphi^3 g_{\mu 0}g_{\nu 0}, \quad (10.171)$$

где  $\bar{\theta}_{\mu}^{\mu} = 0$ . В частности, используя лагранжеву плотность (10.141), мы имеем

$$\bar{\theta}_{00} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)(\nabla\varphi) - \frac{1}{6} \Delta\varphi^2. \quad (10.172)$$

Отметим, что, хотя  $\bar{\theta}_{00}$  не содержит в явном виде параметров нарушения  $m$  и  $g$ , они могут быть введены в неявном виде через уравнения движения, которым удовлетворяет поле  $\varphi$ . С этой точки зрения данный случай отличается от случая  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии, где мы брали  $H = H_0 + \epsilon H_1$  и рассматривали  $\epsilon$  как малый параметр теории возмущений.

### 5. Масштабные преобразования и группа $SU(3) \otimes SU(3)$

Как уже упоминалось в одном из предыдущих разделов, ввиду отсутствия удовлетворительного аппарата теории поля *априорное* установление масштабной размерности ренормированного поля наталкивается на трудности. В то же время, начиная с гл. 2, мы подчеркивали, что фундаментальные величины теории связаны не с операторами поля, а с операторами тензора энергии-импульса, с операторами токов слабых и электромагнитных взаимодействий, с их дивергенциями и т. д. В соответствии с этим мы рассмотрим конкретный и весьма интересный вопрос о свойствах  $SU(3) \otimes SU(3)$ -зарядов и токов относительно масштабных преобразований.

Предположим, что  $SU(3) \otimes SU(3)$ -алгебра зарядов не изменяется в результате масштабных преобразований (независимо от того, насколько точна масштабная инвариантность). Тогда в силу соотношения

$$[Q_{\alpha}, Q_{\beta}] = if_{\alpha\beta\gamma} Q_{\gamma} \quad (10.173)$$

и его локального варианта

$$[j_0^{\alpha}(x), j_0^{\beta}(y)] = if_{\alpha\beta\gamma} j_0^{\gamma}(x) \delta^3(x-y) \quad (10.174)$$

мы получаем, что заряд  $Q$  имеет масштабную размерность 0, а соответствующая плотность заряда — масштабную размерность 3. Это означает наличие перестановочных соотношений

$$i [D(t), Q_{\alpha}(t)] = t\dot{Q}_{\alpha}(t) \quad (10.175)$$

и

$$i [D, j_0^{\alpha}(x)] = (3 + x\nabla) j_0^{\alpha}(x). \quad (10.176)$$

Если заряд сохраняется ( $\dot{Q} = 0$ ), то в силу равенства (10.175) мы имеем

$$[Q_{\alpha}, D] = 0.$$

Теперь возникает естественный вопрос о масштабных размерностях других компонент 4-вектора  $j_{\mu}^{\alpha}$ . Этот вопрос не тривиален в случае нарушенной масштабной инвариантности [471]. Начнем с коммутатора (10.176) для  $j_0$ .



Чтобы включить в рассмотрение компоненты  $\mathbf{j}$ , нужно произвести преобразование Лоренца. Так, коммутируя оба слагаемых в (10.176) с генераторами лоренцевых поворотов  $K_l$ , используя соотношение (10.150) и применяя тождество Якоби, получаем

$$i [D, j_l^\alpha(0)] = 3j_l^\alpha(0) + i \left[ j_0^\alpha(0), \int x_l \theta_\mu^\alpha(x) d^3x \right] \quad (10.177)$$

(где для простоты положено  $x = 0$ ).

Следовательно, для того чтобы вектор  $j_l^\alpha$  имел размерность 3, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\left[ j_0^\alpha(0), \int x^l \theta_\mu^\alpha(x) d^3x \right] = 0. \quad (10.178)$$

Желая исследовать с точки зрения масштабных преобразований вопрос о швингеровских членах, мы можем повторить изложенную выше процедуру. Рассмотрим коммутатор

$$[j_0^\alpha(x), j_k^\beta(0)] = i f_{\alpha\beta\gamma} j_k^\gamma \delta^3(x) + S_{kl}^{\alpha\beta} \partial^l \delta^3(x) \quad (10.179)$$

и прокоммутируем его с генератором масштабных преобразований  $D$  (не уточняя пока масштабную размерность  $l$  тока  $j_k^\alpha$ ). Результатом выкладок будет

$$(l + 3 + x^j \partial_j) S_{kl}^{\beta\alpha} \partial^l \delta^3(x) = i [D, S_{kl}^{\beta\alpha}] \partial^l \delta^3(x),$$

т. е.

$$i [D, S_{kl}^{\beta\alpha}] = (l - 1) S_{kl}^{\beta\alpha}. \quad (10.180)$$

Наличие производных более высокого порядка от  $\delta^3(x)$  в выражении (10.179) ведет к дополнительным слагаемым в правой части равенства (10.180) с коэффициентами  $l - 2, l - 3, \dots$ . Соотношение (10.180) показывает, что размерность тока  $l = 3$  несовместима со случаем, когда швингеровские члены являются конечными  $c$ -числами.

В качестве упражнения сопоставим эти результаты с информацией, получаемой из теоретико-полевых моделей, в которых выражения для токов заданы явно. В кварковой модели

$$j_\mu^\alpha = \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{1}{2} \lambda_\alpha \psi, \quad (10.181)$$

и простая оценка, основанная на каноническом значении  $l_\psi = l_{\psi^+} = 3/2$ , дает для масштабной размерности тока величину  $l_j = 3$ .

В алгебре полей мы имеем

$$j_\mu^\alpha = c_\alpha \varphi_\mu^\alpha. \quad (10.182)$$

Каноническая размерность поля  $\varphi_\alpha$  равна 1, так что требуется эффективное изменение канонической размерности поля с тем, чтобы пространственные компоненты тока имели размерность 3. Отметим, что для временной компоненты тока проблемы не возникает, поскольку поле  $\varphi_0^\alpha$  не является независимой канонической переменной [формула (5.193)] и может иметь размерность 3. Это говорит о том, что в алгебре полей вопрос оказывается более тонким. В частности, мы видели, что швингеровские члены, являющиеся конечными  $c$ -числами, несовместимы со значением  $l_j = 3$ . Возможно, что швингеровские члены представляют собой бесконечные  $c$ -числа; интересно отметить, что это допускают как раз те специальные модели алгебры полей, которые ведут к конечному электромагнитному расщеплению масс [448].

В заключение раздела мы коротко остановимся на интересном и все еще не решенном вопросе о взаимосвязи нарушений масштабной и киральной инвариантности. Обобщая сказанное в § 2, п. 2 и в § 4, п. 4, мы должны пользоваться разложением плотности тензора энергии-импульса на слагае-

мы, одна часть которых инвариантна относительно масштабных и  $SU(3) \otimes SU(3)$ -преобразований, а другая нарушает соответствующие симметрии. Заметим прежде всего, что  $[Q, D] = 0$  (при  $t = 0$ ), так что в разложении (10.165)

$$\theta_{00} = \bar{\theta}_{00} + \sum_k w_k \tag{10.183}$$

члены с разной размерностью не перемешиваются при преобразованиях из группы  $SU(3) \otimes SU(3)$ . Вполне естественно записать разложение в форме

$$\theta_{00} = \bar{\theta}_{00} + w + u, \tag{10.184}$$

где  $\bar{\theta}_{00}$  — инвариант относительно киральных и масштабных преобразований,  $w$  — инвариант относительно киральных преобразований, нарушающий масштабную инвариантность, и, наконец,  $u$  предполагается принадлежащим представлению  $(3, 3^*) \oplus (3^*, 3)$  группы  $SU(3) \otimes SU(3)$ ,  $u = \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_8 u_8$ , т. е. нарушает сразу и масштабную и киральную симметрии. Тогда, согласно формуле (10.168),

$$\theta_{\mu}^{\mu} = w(4 - l_w) + u(4 - l_u) \tag{10.185}$$

(в принципе  $u$  может содержать несколько слагаемых с неодинаковыми размерностями).

Интересно задать вопрос, допустима ли весьма упрощенная гипотеза о том, что  $w = 0$ , при которой нарушения масштабной и  $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрий обусловлены только  $u$ . Это маловероятно, и вот почему. Если  $w = 0$ , то, рассматривая матричный элемент между состояниями барионов, мы получаем <sup>1)</sup>

$$\langle B | \theta_{\mu}^{\mu} | B \rangle = (4 - l_u) \langle B | u | B \rangle = m_B \bar{u}^B u_B. \tag{10.186}$$

Отсюда следует, например, соотношение

$$\frac{\langle N | u | N \rangle}{\langle \Xi | u | \Xi \rangle} = \left( \frac{m_N}{m_{\Xi}} \right)^2, \tag{10.187}$$

которое, по-видимому, противоречит результатам анализа, проведенного Кимом и фон Хипцелем для низкоэнергетического мезон-барионного рассеяния (гл. 6, § 5, п. 3) и давшего для отношения

$$\frac{\langle N | u | N \rangle}{\langle \Xi | u | \Xi \rangle}$$

значительно меньшую величину. Независимые исследования [472], по-видимому, указывают на существование скалярной относительно группы  $SU(3) \otimes SU(3)$  части, ответственной за нарушение масштабной инвариантности; правда, мы не должны забывать, что нам все еще не ясно, каково фактическое значение величины  $\langle B | u | B \rangle$ .

Конечно, остается еще много невыясненных вопросов. Прежде всего нам нужно лучше разобраться в том, каким образом достигается предел, в котором мы одновременно имеем масштабную и киральную симметрию. В частности, мы должны выбрать либо случай, в котором все частицы становятся безмассовыми, либо случай, в котором только октет псевдоскалярных мезонов и некоторый скалярный мезон безмассовые, а остальные частицы могут иметь конечную массу. Существенны также вопросы о размерности и свойствах функций  $w$  и  $u$ , а также вопросы конкретного выведения из этих свойств теоретических соотношений, которые можно было бы сопоставить с экспериментом.

<sup>1)</sup> В качестве простого обобщения можно допустить, что  $w$  есть  $c$ -число ( $l_w = 0$ ). Если вычислить среднее обеих частей равенства (10.185), то получим  $w = \langle u \rangle_0 (1/4 l_u - 1)$ .

## 6. Масштабная инвариантность и асимптотическое поведение в теории поля [473, 474]

Интуиция подсказывает, что масштабная инвариантность может обеспечить понимание некоторых качественных закономерностей асимптотических явлений. Кроме того, предположение о масштабной инвариантности, связанное с существованием дилатона малой массы, может быть, приведет к некоей разновидности низкоэнергетических теорем. Чтобы побыстрее войти в круг этих вопросов, воспользуемся тождеством Уорда, закрыв глаза на возможные неопределенности. Для простоты рассмотрим ренормированный пропагатор, соответствующий бесспиновому полю  $\phi$ . Введем амплитуды

$$W_\mu(q, p) = i \int d^4x d^4y \exp(iqx) \exp(ipy) \langle 0 | T(\phi(y) \phi(0) j_\mu^D(x)) | 0 \rangle, \quad (10.188)$$

$$W(q, p) = - \int d^4x d^4y \exp(iqx) \exp(ipy) \langle 0 | T(\phi(y) \phi(0) \partial^\mu j_\mu^D(x)) | 0 \rangle, \quad (10.189)$$

$$F(p) = \int d^4y \exp(ipy) \langle 0 | T(\phi(y) \phi(0)) | 0 \rangle. \quad (10.190)$$

Принимая, что ренормированное поле  $\phi$  преобразуется по закону (10.108)

$$i [D, \phi(x)] = (l + x\partial) \phi(x)$$

(и его локальному варианту), в результате прямого применения тождества Уорда получаем

$$q^\mu W_\mu = W + i \int d^4y \exp[i(p+q)y] \left( l + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \langle 0 | T(\phi(y) \phi(0)) | 0 \rangle + \\ + i \int d^4y \exp(ipy) l \langle 0 | T(\phi(y) \phi(0)) | 0 \rangle. \quad (10.191)$$

В пределе при  $q_\mu \rightarrow 0$  равенство (10.191) может быть преобразовано к виду

$$iW(0, p) = \left( 2l - 4 - p \frac{\partial}{\partial p} \right) F(p) \equiv SF(p). \quad (10.192)$$

Это соотношение связывает ренормированный пропагатор  $F(p)$  с вершинной функцией  $W$ , в которую вставлена добавочная линия  $\theta_\mu^D \equiv \partial^\mu j_\mu^D$  с нулевым 4-импульсом.

При наличии скалярного мезона малой массы, дающего основной вклад в дивергенцию дилатационного тока, мы можем написать

$$W(0, p) \approx f_\sigma T_\sigma(p), \quad (10.193)$$

т. е. мы получаем низкоэнергетическую теорему для амплитуды  $T_\sigma$ , описывающей вершину  $(\phi\phi\sigma)$ :

$$if_\sigma T_\sigma \approx SF(p). \quad (10.194)$$

Если данная частица отсутствует, то соотношение (10.192) представляет собой ограничение, накладываемое на  $F(p)$  как функцию переменной  $p$ . Для простоты ограничимся рамками теории с безразмерными константами связи, в которой нарушение масштабной инвариантности обусловлено массой частиц; конкретно, рассмотрим теорию  $g\phi^4$ . Тогда масштабную инвариантность можно мыслить как приближенную симметрию, которая, как мы предполагаем, в рассматриваемом примере справедлива в асимптотической области, где все массы малы ( $m^2/p^2 \rightarrow 0$ ). Учитывая это, можно пренебречь амплитудой  $W$  в левой части равенства (10.192), так как оператор  $\theta = \partial^\mu j_\mu^D$  обращается в нуль в пределе точной масштабной инвариантности или предполагается настолько малым, что имеет место быстрое убывание

при больших  $p^2$ . Тогда асимптотическая форма уравнения принимает вид

$$\left( l - 2 - p^2 \frac{d}{dp^2} \right) F(p) = 0 \quad (p^2 \rightarrow \infty). \quad (10.195)$$

Решение этого уравнения таково:

$$F(p) = \frac{f_0(g)}{p^2} (p^2)^{l-1}. \quad (10.196)$$

Далее, если предположить, что способ рассуждений, принятый в § 4, п. 1, может быть применен и здесь для получения размерности ренормированного поля в пределе масштабной инвариантности ( $l = 1$ ), то имеем окончательно

$$F(p) \underset{p^2 \rightarrow \infty}{\sim} \frac{f_0(g)}{p^2}. \quad (10.197)$$

Таким образом, ренормированный пропагатор, инвариантный относительно масштабных преобразований, асимптотически ведет себя как свободный<sup>1)</sup>, что, мы знаем, не имеет места в теории возмущений, где появляются логарифмические члены<sup>2)</sup>, а именно

$$F(p) \sim \frac{1}{p^2} \left[ 1 + a_1 g^2 \ln \left( \frac{p^2}{m^2} \right) + \dots \right] \quad (10.198)$$

( $a_1$  — численная постоянная). Этот результат можно интерпретировать как наличие у полей, трактуемых по теории возмущений, масштабной размерности, отличной от канонического значения  $l = 1$  и равной  $l = 1 + a_1 g^2 + \dots$ . Действительно, в этом случае из равенства (10.198) мы получаем

$$F(p) = \frac{f_0(g)}{p^2} \left( \frac{p^2}{m^2} \right)^{a_1 g^2} = \frac{f_0(g)}{p^2} \exp \left[ a_1 g^2 \ln \left( \frac{p^2}{m^2} \right) \right] \underset{g \rightarrow 0}{\sim} \frac{f_0}{p^2} \times \left[ 1 + a_1 g^2 \ln \left( \frac{p^2}{m^2} \right) + \dots \right]. \quad (10.199)$$

Этот результат имеет простое объяснение в рамках ренормировочной процедуры. Именно, начав с неренормированного пропагатора, мы обнаружили бы зависимость от обрезания:

$$F_0(p) \approx \frac{1}{p^2} \left( 1 + a_1 g^2 \ln \frac{p^2}{\Lambda^2} + \dots \right), \quad (10.200)$$

и при переходе к ренормированной величине вся зависимость от обрезания сосредоточится в ренормировочной константе<sup>3)</sup>, т. е.

$$F_0(p) \approx Z(\Lambda) F(p), \quad Z(\Lambda) \approx 1 + a_1 g^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \dots \quad (10.201)$$

Таким образом, в любом конечном порядке теории возмущений масштабная инвариантность должна нарушаться из-за наличия логарифмических членов. При этом основной вопрос таков: получим ли мы в результате суммирования ряда логарифмических членов снова степенную зависимость (10.196), но с другой размерностью поля, отличной от канонической. Это имеет место в некоторых специальных моделях теории поля [476] типа модели Тирринга. Если бы это имело место в обычных теориях поля, то масштабная размерность была бы динамической величиной<sup>4)</sup> («аномальной» размерностью)

<sup>1)</sup> Такой же результат можно, конечно, получить и из простых соображений размерности, на основе выражений (10.188) и (10.189).

<sup>2)</sup> См., например, книгу Боголюбова и Ширкова [475].

<sup>3)</sup> Аналогично с точки зрения тождества Уорда такая «аномалия» объясняется тем, что применение одновременных коммутаторов, ведущее к формуле (10.185), в теории возмущений связано с введением большого параметра обрезания, что неизбежно нарушает масштабную инвариантность. Это весьма напоминает то, что мы обнаруживаем при переходе к пределу Бьёркена — Джонсона — Лоу в теории возмущений.

<sup>4)</sup> Тогда возможное динамическое определение размерности  $l$  задается асимптотикой (10.196).

$l = l_c + a(g)$ , которую вследствие несостоятельности канонического подхода [477] невозможно фиксировать априори даже в пределе точной масштабной инвариантности.

Недавние работы Каллана [526], Симанчика [527] и Вильсона дают возможность внести некоторый порядок в проблему скейлинга в ренормированной теории возмущений [477, 478]. Отправным моментом является отказ от тождества Уорда, которое несправедливо в ренормированной теории возмущений — лучшим доказательством этого служит его несостоятельность даже в области *малых импульсов*. Основная физическая причина заключается, как уже говорилось, в том, что в теории возмущений масштабную инвариантность нельзя рассматривать независимо от перенормировки. Каллан и Симанчик вывели правильное уравнение, учитывающее эту особенность. В случае одного скалярного поля с самодействием  $g\phi^4$  уравнение имеет вид <sup>1)</sup>

$$iW(0, p) = \left[ \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \alpha(g) \frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma(g) \right] F(\mu^2, p^2), \quad (10.202)$$

где  $\mu$  — ренормированная масса, а  $\alpha(g)$  и  $\gamma(g)$  — неизвестные функции переменной  $g$ , не зависящие от обрезания и определяющиеся соотношениями

$$Z \frac{\partial g}{\partial \mu_0^2} = \alpha(g), \quad (10.203)$$

$$Z \frac{\partial \ln Z_3}{\partial \mu_0^2} = \gamma(g), \quad (10.204)$$

в которых  $\mu_0$  — неренормированная масса,  $Z_3$  — константа перенормировки поля, а  $Z$  — константа перенормировки вершины в левой части равенства (10.202).

Мы видим, что здесь появляется член, содержащий производную по константе связи и неизвестную функцию  $\alpha(g)$ . Все аномалии суммируются в две неизвестные функции константы связи. Заметим, что данное обстоятельство делает уравнение (10.202) непригодным для установления низкоэнергетических теорем.

Таким образом, положение дел со скейлингом и аномальными размерностями остается неясным. Интересно рассмотреть случай «глубоко эвклидовой области», где любая временная компонента стремится к  $i\infty$  и мы оказываемся вдали от возможных сингулярностей. Как и в случае уравнения (10.195), мы имеем <sup>2)</sup>

$$\left[ \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \alpha(g) \frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma(g) \right] F(p) = 0. \quad (10.205)$$

Полагая из соображений размерности

$$F(\mu^2, p^2) = p^2 F_0 \left( \frac{p^2}{\mu^2} \right) = p^2 F_0(t), \quad (10.206)$$

$$t = \ln \frac{p^2}{\mu^2},$$

данное уравнение можно записать так:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \alpha(g) \frac{\partial}{\partial g} - 2\gamma(g) \right] F_0(t) = 0. \quad (10.207)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$F_0(t, \bar{g}(g, t)) = F_0(0, g) \exp \left[ 2 \int_0^t \gamma(\bar{g}(g, t')) dt' \right], \quad (10.208)$$

<sup>1)</sup> Точно такие же уравнения можно вывести и для функций Грина с любым числом внешних частиц.

<sup>2)</sup> Асимптотически членом  $W(0, p)$  можно пренебречь (в эвклидовой области) в силу ограничения Вейнберга [528], доказанного в теории возмущений для любого конечного порядка.

где  $\bar{g}(g, t)$  — решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = -\alpha(\bar{g}) \quad (10.209)$$

с граничным условием

$$\bar{g}(g, 0) = g. \quad (10.210)$$

Поведение решения при больших  $t$  определяется поведением функции  $\bar{g}(t)$ , которую мы не знаем. Например, если  $\alpha(g) = 0$  при некотором критическом значении  $g_c$ , то  $\bar{g}$  может стремиться к  $g_c$ , когда  $t \rightarrow \infty$  (если  $g$  находится в окрестности  $g_c$ ), и интеграл может вести себя как

$$\exp 2\gamma(g_c) \ln \frac{p^2}{\mu^2},$$

т. е. функция обладает определенной (и, вообще говоря, аномальной) масштабной размерностью. Ничего более конкретного установить нельзя. В той области, которая наиболее интересна с физической точки зрения, т. е. в области глубокоэластического рассеяния, ситуация еще менее определена.

### 7. Масштабная инвариантность и поведение на малых расстояниях

Самый простой способ наложить требование масштабной инвариантности на теоретико-полевые функции Грина сопряжен с трудностями, о которых мы упоминали в предыдущем разделе. Но мысль о том, что при больших импульсах, т. е. на малых расстояниях, теория становится масштабной инвариантной, чрезвычайно привлекательна, и данный раздел будет посвящен обсуждению другого подхода к проблеме нарушенной масштабной инвариантности, предложенного Вильсоном [479]. Не собираясь утверждать, что теория потенциального рассеяния является хорошей моделью для выяснения данной ситуации, мы в качестве введения напомним о формальной аналогии рассматриваемых проблем с хорошо известными результатами релятивистской теории.

Напишем уравнение Шредингера для парциальных волн:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{G(r)}{r^n} \right] \psi_l(r) = 0, \quad (10.211)$$

где  $\psi_l(r)$  — волновая функция, которую можно рассматривать как аналог вершинной функции с угловым моментом, описывающей взаимодействие между частицами и внешним полем. В уравнении (10.211) можно выделить свободный кинетический член  $d^2/dr^2 - l(l+1)/r^2$ , «массовый» член  $k^2$  и часть, связанную с взаимодействием  $G(r)/r^n$ . Допустим далее, что на малых расстояниях потенциал является чисто степенным и носит характер отталкивания, т. е.

$$\lim_{r \rightarrow 0} G(r) = G^2. \quad (10.212)$$

[Этим требованиям отвечает, например,  $G(r) = G^2 e^{-\mu r}$ , но не  $G(r) = G^2 \ln(\lambda r)$ .] В этом случае, рассматривая область малых расстояний, когда значением  $k^2$  можно пренебречь, мы получаем возможность сделать некоторые выводы из соображений размерности.

В зависимости от  $\eta$  возможны три разных варианта.

1. При  $\eta < 2$  (случай сверхнормируемости) свободный кинетический член на малых расстояниях оказывается главным (при  $\eta = 1$  величина  $G^2$  имеет размерность массы). Тогда мы имеем регулярное решение «масштабной размерности»  $l+1$ , т. е.

$$\psi_l(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} ar^{l+1}, \quad (10.213)$$

причем масштабная размерность определяется как собственное значение оператора  $D = rd/dr$ . Дело в том, что размерность определяется здесь свободной частью гамильтониана, и в теории поля мы назвали бы ее «канонической». Полное решение не является, конечно, собственной функцией оператора  $D$ , и нарушение «масштабной инвариантности» связано с учетом зависимости от  $k^2$  и  $G^2$ .

2. При  $\eta = 2$  (*ренормируемый случай*) величина  $G^2$  безразмерна; за поведение решения на малых расстояниях ответственна теперь как свободная часть гамильтониана, так и часть, связанная с взаимодействием. Асимптотика решения имеет вид

$$\psi_l(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} ar^{\bar{l}+1}, \quad (10.214)$$

где

$$\bar{l} + \frac{1}{2} = \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 + G^2 \right]^{1/2}. \quad (10.215)$$

Таким образом, мы еще можем говорить о решениях с определенной размерностью, но оказывается, что в данном случае она зависит от силы взаимодействия, и в этом смысле мы могли бы назвать ее «динамической». Если бы для нахождения решения была применена теория возмущений, то в любом ее порядке мы нашли бы логарифмические члены, которые, однако, в этом частном случае суммируются так, что приводят к перенормировке «канонической» размерности  $l \rightarrow \bar{l}$ .

3. Наконец, при  $\eta > 2$  (*неренормируемый случай*) поведение решения на малых расстояниях не является более степенным и, следовательно, понятие размерности теряет свой смысл.

Такую классификацию можно частично обобщить и на теоретико-полевой случай при использовании *лестничного приближения* для уравнения Бете — Солпитера [480]. Как было показано, подобная ситуация возникает в действительности при рассмотрении теорий с взаимодействием  $g\phi^3$  (сверхренормируемых) и  $g\phi^4$  (ренормируемых), т. е. на малых расстояниях выявляется либо степенное поведение, определяемое свободной частью гамильтониана, либо степенное поведение с ренормированным показателем. Ясно, однако, что релятивистская проблема в своем полном объеме обладает многими новыми и более сложными специфическими особенностями. Например, учет петель пропагаторов приводит к модификации простого потенциала степенного типа — появляются логарифмические члены  $\sim [\ln(\lambda r)]^n$ , и опять возникает вопрос: сохраняет ли получившийся «потенциал» на малых расстояниях степенной характер. Поэтому трудно сказать, в какой мере этот результат может быть применим к теориям более сложного типа.

Недавно Вильсон предпринял интересную попытку [479] построения явных выражений для произведения операторов в близко расположенных точках. Такое выражение можно рассматривать как прямое обобщение формулы для одновременных коммутаторов двух локальных операторов. С учетом требования микропричинности эта величина может быть записана в следующей форме:

$$[A(x, 0), B(y, 0)] = \sum_n O_n(x) \nabla^n \delta^3(x-y), \quad (10.216)$$

где  $O_n(x)$  — операторы, образующие конечный набор локальных операторов. Предложенное обобщение произведения двух локальных операторов (в «слабом» смысле, т. е. в обкладках между состояниями) имеет вид

$$A(x) B(y) \underset{x \rightarrow y}{\sim} \sum_n C_n(x-y) O_n(x), \quad (10.217)$$

где  $C_n(x-y)$  — функции с сингулярностями при  $x=y$ , а  $O_n(x)$  — операторы, образующие множество локальных операторов, в которое входит

единичный оператор. Такое определение дает ряд формальных преимуществ: например, поскольку  $O(x)$  — локальные операторы, неопределенность, возникающая при работе с операторами в одной и той же точке, оказывается выделенной в коэффициентные функции. С помощью выражения (10.217) можно построить соответствующий коммутатор:

$$[A(x), B(y)] = \sum_n E_n(x-y) O_n(x), \tag{10.218}$$

$$E_n(x-y) = C_n(x-y) - C_n(y-x).$$

Откуда, в частности, сразу же находим выражение для одновременного коммутатора <sup>1)</sup>. Конечно, выражения (10.217) и (10.218) не будут обладать эвристическим содержанием до тех пор, пока мы не фиксируем как характер сингулярностей, так и класс операторов. Чтобы получить информацию о типе сингулярностей, представим себе, что мы работаем в пределе точной масштабной инвариантности («скелетная» теория Вильсона). В таком случае первоначальные поля и преобразованные поля

$$U(\rho) A(x) U^{-1}(\rho) = \rho^{l_A} A(\rho x) \tag{10.219}$$

совершенно равноправны. Учитывая это обстоятельство и предполагая взаимную независимость полей  $O_n(x)$ , находим с помощью формулы (10.217) следующее соотношение:

$$C_n(\rho x) = \rho^{l_n - l_A - l_B} C_n(x). \tag{10.220}$$

Таким образом,  $C_n(x)$  суть однородные функции  $x_\mu$  порядка  $l_n - l_A - l_B$ , и если мы считаем допустимой скелетную теорию при описании асимптотической области малых расстояний, то этой степенью определяется ведущий член асимптотики  $C_n$  при  $x_\mu \sim 0$  в виде  $(x^2)^{l_n - l_A - l_B/2}$ . С возрастанием  $l_A + l_B$  относительно  $l_n$  базисные функции становятся все более сингулярными, и наоборот, при возрастании  $l_n$  мы имеем дело с менее сингулярными  $C_n$ .

При нарушении масштабной инвариантности изложенное выше частично перестает быть верным. Но Вильсон высказал предположение, что масштабным преобразованиям можно придать смысл некой прасимметрии, потребовав, чтобы ведущие сингулярности при  $x_\mu = 0$  определялись соотношениями размерности. Это сильное динамическое предположение, основанное на том, что нарушающая часть гамильтониана [формула (10.165)] должна вести себя аналогично массовому члену и относиться к взаимодействиям сверхнормируемого типа. Конечным шагом тогда было бы установление природы и размерности операторов  $O_n$ . Хотя в этом направлении появилось несколько интересных предложений [481, 482], простая операторная схема еще не построена.

Как будет видно из того, что говорится в следующем разделе и в гл. 11, эксперименты по электроорождению при высоких энергиях и больших переданных импульсах позволяют проследить поведение токовых коммутаторов не на малых расстояниях, а в окрестности светового конуса  $(x-y)^2 = 0$ . Таким образом, возникает вопрос об обобщении выражения для операторного произведения на светоподобные интервалы. Такое обобщение было предложено Брандтом и Препаратой [546, 547, 553, 554] (см. также статью Фришмана [548]).

<sup>1)</sup> Простейшими сингулярностями функций  $C_n(x)$  являются выражения вида  $(x^2 - i\epsilon x_0)^{-p}$ , где  $p$  — любое вещественное число. Это значит, что функции  $E_n(x)$  пропорциональны величине

$$[(x^2 - i\epsilon x_0)^{-p} - (x^2 + i\epsilon x_0)^{-p}],$$

чем обеспечивается равенство нулю коммутатора для пространственно-подобных  $x^2$ .



Предложение заключается в том, чтобы представить произведение двух локальных операторов в окрестности светового конуса в виде

$$A(x)B(y) \underset{(x-y)^2 \rightarrow 0}{\sim} \sum_n F_n [(x-y)^2] (x-y)^{\mu_1} \dots (x-y)^{\mu_{J_n}} O_{\mu_1 \dots \mu_{J_n}}^{(n)}(x+y), \quad (10.221)$$

где  $O_{\mu_1 \dots \mu_{J_n}}^{(n)}(x)$  — локальный тензорный оператор ранга  $J_n$ , а  $F_n(x^2)$  — функции, сингулярные на световом конусе<sup>1)</sup>. Последуем идее Вильсона и предположим, что степень главной сингулярности в точке  $x^2 = 0$  определяется из соображений размерности. Таким образом, если  $l_n$  — размерность оператора  $O^{(n)}$ , то оказывается, что  $F(x^2)$  — однородная функция по  $x^2$  порядка  $d_n = 1/2(l_n - J_n - l_A - l_B)$ , т. е.

$$F_n(x^2) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} (x^2 - i\epsilon x_0)^{d_n}. \quad (10.222)$$

Отметим, что все члены разложения (10.221) с одними и теми же значениями  $(l_n - J_n)$  в окрестности светового конуса ведут себя одинаково, а член с фиксированными значениями  $l_n$  и  $J_n$  при  $x_\mu \rightarrow 0$  пропорционален  $|x|^{l_n - l_A - l_B}$ . Мы видим, что при  $x_\mu \rightarrow 0$  имеется лишь несколько операторов с сингулярными коэффициентами, тогда как для каждого типа сингулярностей на световом конусе существует бесконечное число тензоров  $O^{(n)}$ . Причину этого понять нетрудно: когда мы находимся на световом конусе, т. е.  $x^2 = 0$ , необходимо еще фиксировать координаты точки, лежащей на конусе. Поэтому, выделив, как и ранее, определенный тип сингулярности при  $x^2 = 0$ , мы находим, что операторный коэффициент должен быть функцией расстояния между рассматриваемой и начальной точками на световом конусе; поэтому его разложение в степенной ряд содержит бесконечное число локальных операторов.

Но так как наиболее сингулярные вклады соответствуют операторам с  $l_n - J_n \leq l_A + l_B$ , операторы теперь классифицируются по их «твистам» [550]

$$\tau = l_n - J_n, \quad (10.223)$$

т. е. одинаковым твистом могут обладать операторы различных размерностей. (Например, если придерживаться канонических размерностей, то оператор  $\bar{\psi}\psi$  имеет размерность 3 и твист 3, а операторы  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ ,  $\bar{\psi}\gamma_\nu\gamma_\mu(\gamma\partial)^2\psi$ , ... имеют тот же самый твист, но размерности 4, 5, ...)

Данное обстоятельство наводит на мысль, что следует группировать вместе все локальные операторы с одинаковым твистом. Если ввести обозначения  $\xi = x - y$ ,  $\eta = (x + y)$ , то мы можем написать

$$\sum_n \xi^{\mu_1} \dots \xi^{\mu_{J_n}} O_{\mu_1 \dots \mu_{J_n}, \tau}^{(n)}(\eta) = O_\tau(\xi, \eta), \quad (10.224)$$

и тем самым вводится новое<sup>1)</sup> понятие — *бислокальный оператор*  $O_\tau(x, y)$ . Это позволяет нам переписать разложение на световом конусе в виде суммы бислокальных операторов с разными твистами, т. е.

$$A(x)B(y) \underset{(x-y)^2 \rightarrow 0}{\sim} \sum_\tau F_\tau [(x-y)^2] O_\tau(x, y). \quad (10.225)$$

Поскольку

$$F_\tau(x^2) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} (x^2 - i\epsilon x_0)^{(\tau - l_A - l_B)/2}, \quad (10.226)$$

только бислокальные операторы с наименьшим твистом дают вклад в ведущие сингулярности на световом конусе.

<sup>1)</sup> Здесь  $J_n$  соответствует максимальному спину  $O^{(n)}$  (поскольку, вообще говоря,  $O^{(n)}$  принадлежит приводимому представлению группы Лоренца).

Посмотрим, как ведет себя матричный элемент  $A(x)B(0)$  на световом конусе. Пусть  $|p\rangle$  соответствует скалярному одночастичному состоянию. Тогда имеем (для простоты положим  $y=0$ )

$$\langle p | A(x)B(0) | p \rangle \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} F_{\tau_0}(x^2) \langle p | O_{\tau_0}(x, 0) | p \rangle = \\ = F_{\tau_0}(x^2) G_{\tau_0}(px, x^2) \underset{x^2 \rightarrow 0}{\sim} F_{\tau_0}(x^2) G_{\tau_0}(px, 0) = F_{\tau_0}(x^2) g_{\tau_0}(px). \quad (10.227)$$

В соотношении (10.227) оставлена лишь ведущая сингулярность наименьшего твиста, а при определении зависимости матричного элемента от  $x$  и  $p$  использовано требование лоренц-инвариантности:

$$\langle p | O_{\tau_0}(x, 0) | p \rangle = G_{\tau_0}(px, x^2).$$

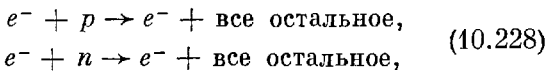
Итак, поведение рассматриваемого матричного элемента при  $x^2 \rightarrow 0$  определяется в основном регулярной функцией  $g(px)$ , тогда как сингулярность содержится только в функции  $F(x^2)$ .

Интерес к обсуждавшимся здесь проблемам вызван тем, что «физика светового конуса» уже при энергиях, достижимых на современных ускорителях, по-видимому, доступна для прямой экспериментальной проверки в опытах по электронному и нейтринному глубоконеупругому рассеянию. Более полный анализ вопросов, связанных с коммутаторами токов на световом конусе, будет отложен до гл. 11, а в следующих параграфах данной главы мы рассмотрим вопросы, относящиеся к глубоконеупругому лептон-адронному рассеянию. О применении представленного выше метода при изучении асимптотического поведения сечения реакции «протон + протон  $\rightarrow$   $\rightarrow$  мюонная пара + все остальное» и других реакций см. работы [555, 556].

## § 5. Глубоконеупругое лептон-нуклонное рассеяние

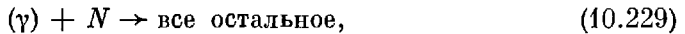
### 1. Введение

Неупругое рассеяние электронов высоких энергий стало в последнее время предметом интенсивного теоретического и экспериментального исследования<sup>1)</sup>. Поскольку эксперименты, основанные на методе совпадений, не всегда еще практически выполнимы, было проведено детальное изучение так называемых *инклюзивных* реакций

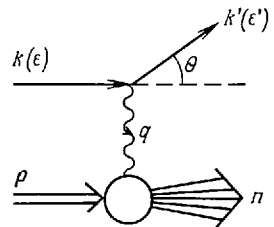


в которых детектируется только рассеянный электрон. Как недавно установлено, эффективное сечение инклюзивных реакций, в котором проведено суммирование по всем конечным адронным состояниям, отличается особенной простотой.

Реакция (10.228) описывается диаграммой фиг. 10.7. Таким образом, ее можно рассматривать как процесс, в котором виртуальный фотон ( $\gamma$ ) с импульсом  $q = k - k'$  сталкивается с нуклонной мишенью:



т. е. оказывается, что сечения инклюзивных процессов пропорциональны полным сечениям реакции (10.229). Виртуальное фотонное состояние определяется:



Фиг. 10.7. Кинематика инклюзивного процесса «лептон + нуклон  $\rightarrow$  лептон + все остальное».

<sup>1)</sup> Этому вопросу посвящено много превосходных обзоров (например, [483, 484])  
 Подробнее экспериментальные данные излагаются в приложении V.

- 1) своей массой  $q^2 = u$ ;
- 2) своей энергией в лабораторной системе

$$q_0 = v/m, \quad v = qr$$

[или же энергией в системе центра масс  $\sqrt{s}$ , где

$$s = (p + q)^2 = m^2 + q^2 + 2v];$$

3) поляризацией; в случае неполяризованных мишеней мы можем различать продольно и поперечно поляризованные виртуальные фотоны.

Это значит, что инклюзивные реакции можно характеризовать двумя сечениями  $\sigma_T(v, u)$  и  $\sigma_S(v, u)$ , соответствующими поперечным и продольным (скалярным!) фотонам. В приложении IV показано, как эти сечения выражаются через структурные функции  $W_1$  и  $W_2$ , которые и используются чаще всего для описания соответствующих явлений.

Пропорциональность между инклюзивными и полными сечениями говорит о том, что для автоматического суммирования по конечным состояниям можно использовать некую разновидность обобщенной оптической теоремы, основанной на свойстве полноты. В самом деле, мы увидим, что путем преобразования Фурье структурные функции выражаются через среднее значение произведения (или коммутатора) двух токов, измеренных при различных временах. Отсюда видно, что исследование неупругого рассеяния электронов может служить хорошим методом при проверке новых свойств токов, не укладывающихся в рамки «классической» алгебры токов. Эксперименты по неупругому электронному рассеянию позволяют сделать следующие общие выводы (приложение V):

1. Зависимость структурных функций от  $v$  (или  $s$ ) при фиксированном  $u$  такова: сначала наблюдается упругий пик при  $s = m_N^2$ , а затем пики, соответствующие образованию более тяжелых резонансов. После этого сечение выравнивается, стремясь к довольно большому значению примерно того же порядка, что и сечение рассеяния на точечной частице.

2. Исследуя же зависимость от  $u$ , мы видим, что с ростом  $u$  сечение сильно убывает соответственно упругому и низколежащим резонансным пикам. (За этот спад ответственны, конечно, соответствующие формфакторы.) Но при достаточно больших значениях  $v$  зависимость от  $u$  становится очень слабой, т. е. появляется некий новый механизм. Это обстоятельство и привлекло внимание к глубоконеупругой области, характеризующейся большими значениями как  $v$ , так и  $u$ .

Основываясь, по существу, на соображениях размерности, Бьёркен [485] предположил, что в том случае, когда все характерные массы данной реакции малы по сравнению с  $v$  и  $u$ , структурные функции можно выразить через амплитуды  $F_i(\omega)$ , которые зависят только от отношения

$$\omega = -\frac{2v}{u} \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{\omega} = -\frac{u}{2v}. \quad (10.230)$$

Конкретные формы амплитуд  $F_i(\omega)$  модельно-зависимы, и это позволяет произвести выбор между различными теоретическими подходами.

Вызывает удовлетворение то обстоятельство, что эксперименты, по-видимому, подтверждают формулу Бьёркена. Поэтому были предприняты серьезные теоретические попытки, во-первых, дать более глубокое обоснование гипотезы «скейлинга» и, во-вторых, получить конкретные предсказания для функций  $F_i(\omega)$ . Особенно простая, но хорошая модель [486—488] основана на идее, что глубоконеупругое рассеяние можно представить в виде некогерентной суммы элементарных процессов рассеяния на точечных объектах, составляющих нуклон (*партонах*). Такая модель позволяет получить определенные предсказания о форме фундаментальных функций  $F_i(\omega)$ . В частности, обнаруживается, что отношение  $\sigma_S/\sigma_T$  [или, точнее,  $F_S(\omega)/F_T(\omega)$ ]

зависит от спина партона. Замечательно, что эксперимент с большой определенностью указывает на значение  $\sigma_S/\sigma_T \approx 0$ , соответствующее фундаментальным составляющим нуклона со спином  $1/2$ .

Если взглянуть с более общей точки зрения, то можно сделать вывод, что теоретическое исследование глубоконеупругого рассеяния привело к серьезному прогрессу в нашем понимании токов и их алгебраических свойств. В частности, были установлены асимптотические правила сумм, которые непосредственно соотносят экспериментально измеримые величины с высшими коммутаторами, содержащими и плохие операторы, а также была построена изящная теория, основанная на изучении свойств произведений токовых операторов вблизи светового конуса.

## 2. Скейлинг Бьёркена

Анализ кинематической структуры амплитуды неупругого рассеяния электронов проведен в приложении IV. Фундаментальной амплитудой является

$$t_{\mu\nu} = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p + q - p_n) \langle p | j_\mu^{\text{эл.-м}} | n \rangle \langle n | j_\nu^{\text{эл.-м}} | p \rangle, \quad (10.231)$$

где проведено усреднение по спину нуклона-мишени;  $p$  — импульс нуклона, а  $q$  — импульс виртуального фотона. Поскольку сейчас речь идет о неупругом электронном рассеянии,  $q$  — пространственно-подобный 4-вектор. Это значит, что матричный элемент

$$\langle p | j_\mu^{\text{эл.-м}} | n \rangle$$

можно отождествить с его связной частью (гл. 6 и 7). При переходе к исследованию процессов, соответствующих времениподобным  $q$ , такое отождествление не будет законным, и мы получим отсюда нетривиальные следствия. Амплитуду  $t_{\mu\nu}$  [определенную выражением (10.231)] удобнее переписать в виде фурье-преобразования коммутатора:

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int \exp(iqx) d^4x \langle p | [j_\mu^{\text{эл.-м}}(x), j_\nu^{\text{эл.-м}}(0)] | p \rangle, \quad (10.232)$$

поскольку при  $q_0 > 0$  (что соответствует рассматриваемому физическому процессу) член, содержащий токи в последовательности  $j_\nu(0) j_\mu(x)$ , не дает вклада в правую часть соотношения (10.232). Выражение (10.232) обладает свойством перекрестной симметрии:

$$t_{\mu\nu}(q, p) = -t_{\mu\nu}(-q, p). \quad (10.233)$$

В силу общих принципов инвариантности величину  $t_{\mu\nu}$  можно представить в стандартной форме<sup>1)</sup>

$$t_{\mu\nu} = W_1 I_{\mu\nu}^{(1)} + W_2 I_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (10.234)$$

где

$$I_{\mu\nu}^{(1)} = -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}, \quad (10.235)$$

$$I_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{m_N^2} \left( p_\mu - q_\mu \frac{v}{q^2} \right) \left( p_\nu - q_\nu \frac{v}{q^2} \right).$$

Вещественные функции  $W_1$  и  $W_2$  зависят от двух релятивистских инвариантов

$$\begin{aligned} v &= qp, \\ u &= q^2, \end{aligned} \quad (10.236)$$

<sup>1)</sup> Общепринятые функции  $W_{1,2}$  вдвое меньше функций, даваемых формулами (10.232) и (10.234).— *Прим. ред.*

и, используя соотношения (10.233), получаем свойства перекрестной симметрии для  $W_i$ :

$$W_{1,2}(v, q^2) = -W_{1,2}(-v, q^2). \quad (10.237)$$

Теперь обратим внимание на глубоконеупругую область, т. е. перейдем к значениям  $v$  и  $u$ , намного превышающим все характерные массы. Проще всего этого добиться, выбрав 4-векторы  $p$  и  $q$  очень большими. Это говорит о том, что, может быть, имело бы смысл перейти к системе бесконечно большого импульса (гл. 8), скомбинировав такой переход с переходом к асимптотическому пределу при  $q_0 \rightarrow \infty$  (§ 3).

Сейчас мы будем исходить просто из эвристического положения Бьёркена, что если  $p_\mu$  и  $q_\mu$  велики по сравнению со всеми размерными величинами, относящимися к рассматриваемому процессу, то амплитуда  $t_{\mu\nu}$  должна быть инвариантом масштабного преобразования

$$p_\mu \rightarrow \alpha p_\mu, \quad q_\mu \rightarrow \alpha q_\mu. \quad (10.238)$$

При таком преобразовании мы имеем

$$v \rightarrow \alpha^2 v, \quad u \rightarrow \alpha^2 u; \quad (10.239)$$

$$I_{\mu\nu}^{(1)} \rightarrow I_{\mu\nu}^{(1)}, \quad I_{\mu\nu}^{(2)} \rightarrow \alpha^2 I_{\mu\nu}^{(2)}. \quad (10.240)$$

Производя такие замены в выражении (10.234), получаем

$$W_1(\alpha^2 v, \alpha^2 u) = W_1(v, u), \quad (10.241a)$$

$$\alpha^2 W_2(\alpha^2 v, \alpha^2 u) = W_2(v, u). \quad (10.241b)$$

Из равенств (10.241) <sup>1)</sup> следует, что  $W_1$  и  $W_2$  зависят только от отношения

$$\omega = -\frac{2v}{u} \quad (10.242)$$

или

$$x = \frac{1}{\omega} = -\frac{u}{2v}. \quad (10.243)$$

Поэтому можно написать

$$\begin{aligned} \lim_{\text{Бьёрк}} W_1(v, q^2) &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \tilde{W}_1(\omega, u) = F_1(\omega), \\ \lim_{\text{Бьёрк}} \frac{v}{m_N^2} W_2(v, q^2) &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{v}{m_N^2} \tilde{W}_2(\omega, u) = F_2(\omega), \end{aligned} \quad (10.244)$$

где

$$\lim_{\text{Бьёрк}} \equiv \lim_{v, u \rightarrow \infty (\omega \text{ фиксировано})}$$

Это значит, что в глубоконеупругой области неупругие сечения рассеяния электронов можно выразить через  $F_1$  и  $F_2$ , т. е. через финитные функции только одной переменной. Последние эксперименты (приложение V), по-видимому, подтверждают этот теоретический вывод.

Для дальнейшего будет полезно ввести «продольную» структурную функцию  $F_S$  (связанную простым соотношением с «продольным сечением»  $\sigma_S$ ):

$$F_S = -F_1 + \frac{1}{2} \omega F_2 = -F_1 + \frac{F_2}{2x}, \quad (10.245)$$

тогда как  $F_1$  можно рассматривать как «поперечную» амплитуду  $F_1 \equiv F_T$ .

Найдем теперь область физически допустимых значений переменной  $\omega$ . Для этого напомним, что мы имеем дело с пространственно-подобными  $q_\mu$ ,

<sup>1)</sup> Равенство (10.241b) может быть представлено в виде

$$\alpha^2 v W_2(\alpha^2 v, \alpha^2 u) = v W_2(v, u).$$

т. е.  $u < 0$ . Подставляя в правую часть равенства (10.232) полную систему состояний, видим, что вклад прямых членов [т. е. членов типа  $j_\mu(x) j_\nu(0)$ ] отличен от нуля при следующих значениях:

$$s - m_N^2 = 2\nu + u \geq 0, \quad (10.246)$$

и, разделив на  $-u$  (положительная величина!), получаем  $\omega > 1$ . Точно так же вклад перекрестных членов  $j_\nu(0) j_\mu(x)$  отличен от нуля при

$$\bar{s} - m_N^2 = -2\nu + u \geq 0,$$

откуда

$$\omega < -1. \quad (10.247)$$

Таким образом, физическая область изменения  $\omega$  состоит из интервалов  $(1, +\infty)$  и  $(-\infty, -1)$ . Тогда для переменной  $x$  получаем

$$-1 \leq x \leq 1. \quad (10.247')$$

Теперь исследуем скейлинг в нейтринном рассеянии. Соответствующая амплитуда имеет вид

$$t_{\mu\nu}^{(\nu)} = \frac{1}{2\pi} \int e^{iqx} d^4x \langle p | [J_\mu^+(x), J_\nu^-(0)] | p \rangle, \quad (10.248)$$

где

$$\begin{aligned} J_\mu^+ &\equiv J_\mu^{I^+} \cos \theta + J_\mu^{V^+} \sin \theta, \\ J &= V - A. \end{aligned} \quad (10.249)$$

Выразим амплитуду  $t_{\mu\nu}^{(\nu)}$  через инварианты. Нетрудно показать, что в глубоководупругой области можно действовать так, как если бы векторные и аксиальные токи сохранялись. Действительно, если симметрия  $SU(3) \otimes SU(3)$  нарушается только массовыми членами, то эффекты, связанные с нарушением закона сохранения токов, становятся пренебрежимыми, когда  $\nu$  и  $u$  велики. При этом можно просто написать

$$t_{\mu\nu}^{(\nu)} = W_1^{(\nu)} I_{\mu\nu}^{(1)} + W_2^{(\nu)} I_{\mu\nu}^{(2)} + W_3^{(\nu)} I_{\mu\nu}^{(3)}, \quad (10.250)$$

где  $I_{\mu\nu}^{(1)}$  и  $I_{\mu\nu}^{(2)}$  те же самые, что и в формуле (10.235), а дополнительный член  $I_{\mu\nu}^{(3)}$  возникает из-за не сохраняющей четность  $VA$ -интерференции и определяется выражением

$$I_{\mu\nu}^{(3)} = i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \frac{p^\lambda q^\sigma}{m_N^2}. \quad (10.251)$$

При перекрестном преобразовании нейтринная амплитуда  $t_{\mu\nu}^{(\nu)}$  переходит в антинейтринную амплитуду  $t_{\mu\nu}^{(\bar{\nu})}$ :

$$t_{\mu\nu}^{(\nu)*}(q, p) = -t_{\mu\nu}^{(\bar{\nu})}(-q, p), \quad (10.252)$$

а вещественные функции  $W(\nu, u)$  подчиняются соотношениям

$$W_i^{(\nu)}(\nu, u) = -W_i^{(\bar{\nu})}(-\nu, u). \quad (10.253)$$

В упрощенном варианте, когда  $\theta = 0$ , амплитуды для протонной и нейтронной мишеней связаны просто преобразованием зарядовой симметрии<sup>1)</sup>:

$$W_i^{\nu p} = W_i^{\bar{\nu} n}, \quad W_i^{\bar{\nu} p} = W_i^{\nu n}. \quad (10.254)$$

Теперь мы подготовлены к применению масштабного преобразования  $p_\mu \rightarrow \alpha p_\mu$ ,  $q_\mu \rightarrow \alpha q_\mu$  для амплитуды (10.250). Новый ковариант  $I_{\mu\nu}^{(3)}$ , появляю-

<sup>1)</sup> Далее мы будем полагать угол Кабиббо равным нулю, ибо при анализе имеющихся в настоящее время экспериментальных данных это очень хорошее приближение.

щийся в выражении (10.250), преобразуется по закону

$$I_{\mu\nu}^{(3)} \rightarrow \alpha^2 I_{\mu\nu}^{(3)}, \quad (10.255)$$

так что мы получим условия

$$\begin{aligned} W_1^{(v)}(\alpha^2 v, \alpha^2 u) &= W_1^{(v)}(v, u), \\ \alpha^2 W_2^{(v)}(\alpha^2 v, \alpha^2 u) &= W_2^{(v)}(v, u), \\ \alpha^2 W_3^{(v)}(\alpha^2 v, \alpha^2 u) &= W_3^{(v)}(v, u), \end{aligned} \quad (10.256)$$

и асимптотические пределы

$$\begin{aligned} \lim_{\text{Бьёрк}} W_1^{(v)}(v, u) &= F_1^{(v)}(\omega), \\ \lim_{\text{Бьёрк}} \frac{v}{m_N^2} W_2^{(v)}(v, u) &= F_2^{(v)}(\omega), \\ \lim_{\text{Бьёрк}} \frac{v}{m_N^2} W_3^{(v)}(v, u) &= F_3^{(v)}(\omega), \end{aligned} \quad (10.257)$$

что приводит к скейлингу для нейтринной и антинейтринной реакций. Предварительные результаты экспериментального исследования, по-видимому, не противоречат этому теоретическому выводу.

Полезно также ввести левую и правую скалярные амплитуды, определяющиеся формулами

$$\begin{aligned} F_s^{(v)} &= -F_1^{(v)} + \frac{1}{2} \omega F_2^{(v)}, \\ F_{L,R}^{(v)} &= F_1^{(v)} \mp F_3^{(v)}. \end{aligned} \quad (10.258)$$

Наконец, приведем сводку формул, выражающих перекрестные свойства структурных функций:

$$F_1^{(e)}(\omega) = -F_1^{(e)}(-\omega), \quad (10.259)$$

$$F_2^{(e)}(\omega) = F_2^{(e)}(-\omega);$$

$$F_1^{(v)}(\omega) = -F_1^{(\bar{v})}(-\omega), \quad (10.260)$$

$$F_{2,3}^{(v)}(\omega) = F_{2,3}^{(\bar{v})}(-\omega).$$

### 3. Скейлинг: теоретические соображения

Основное предположение, приводящее к бьёркеновскому скейлингу, состоит в том, что, когда  $v$  и  $u$  становятся большими, не остается никаких других величин с размерностью квадрата массы, которые могли бы конкурировать с ними. Таким образом, теоретико-полевые модели, приводящие к скейлингу, должны каким-то образом учитывать это условие.

Простейшей моделью такого рода является упругое рассеяние на точечном заряде. Легко видеть, что при больших  $v$  и  $u$  масса мишени не играет более никакой роли. Поскольку в равенстве (10.231) в сумму по полной системе состояний вклад, отличный от нуля, дает только одночастичное состояние, амплитуда  $t_{\mu\nu}$  содержит множитель  $\delta(s - m_N^2) = \delta(2v + u)$ . Структурные функции для рассеяния электрона на точечной частице спина  $J$  и заряда  $Q$  (в единицах  $e$ ) даются выражениями

$$\begin{aligned} W_1(v, u) &= 2\alpha_J Q^2 v \delta(2v + u), \\ \frac{1}{m_N^2} W_2(v, u) &= 4Q^2 \delta(2v + u), \end{aligned} \quad (10.261)$$

где  $\alpha_J$  зависит от спина  $J$  мишени; в частности, мы имеем

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, \\ \alpha_{1/2} &= 1, \end{aligned} \quad (10.262)$$

а для спинов более высоких порядков величина  $\alpha_J$  изменяется в интервале  $(0, 1)$ .

То обстоятельство, что  $W_2$  не зависит от спина мишени, является замечательным следствием сохранения электромагнитного тока. Действительно, для матричного элемента от оператора тока имеем

$$\langle p | j_{\mu}^{\text{эл.-м}} | p + q \rangle = Q2p_{\mu} + \text{члены, содержащие } q_{\mu}.$$

Структура первого члена универсальна и зависит только от заряда мишени  $Q$ .

Из равенств (10.261) сразу же следует наличие скейлинга, поскольку можно написать

$$\begin{aligned} F_1 &= \alpha_J Q^2 \delta(1-x), \\ F_2 &= 2Q^2 \delta(1-x), \end{aligned} \quad (10.263)$$

$$F_S = Q^2 (1 - \alpha_J) \delta(1-x). \quad (10.264)$$

Из выражений (10.263) и (10.264) видно, что  $F_S$  обращается в нуль в случае мишени со спином  $1/2$ , а  $F_1 \equiv F_T = 0$  в случае бесспиновой мишени.

На первый взгляд пример со свободной частицей не имеет никакого отношения к проблеме глубоконеупругого рассеяния. Но партонная модель, которая предполагает, что рассматриваемый процесс можно представить в виде некогерентной суммы рассеяний квазисвободными компонентами нуклона (партонами), позволяет нам использовать этот вроде бы чисто абстрактный пример и сделать ценные выводы относительно *физического* электронного и нейтринного неупругого рассеяния.

Подробно партонная модель будет рассмотрена в § 5, п. 6. Сейчас же отметим лишь самую важную особенность модели: при очень больших  $p_{\mu}$  каждый партон получает часть  $x p_{\mu}$  импульса мишени. Полное сечение находится путем некогерентного суммирования по всем возможным партонным конфигурациям, причем множитель  $\delta(1-x)$ , фигурирующий в выражениях (10.263) и (10.264), заменяется партонной функцией распределения  $\phi(x)$ . Таким образом мы получаем выражения (справедливые в простейшем случае, когда имеются партоны только одного типа)

$$\begin{aligned} F_1 &= \alpha_J Q^2 \phi(x), \\ F_S &= Q^2 (1 - \alpha_J) \phi(x), \end{aligned} \quad (10.265)$$

где  $\alpha_J$  относится теперь к партонам со спином  $J$ , а

$$F_2 = 2Q^2 x \phi(x). \quad (10.266)$$

Мы снова видим, что в случае партонов со спином  $1/2$  обращается в нуль структурная функция  $F_S$ , а функции  $F_1 \equiv F_T$  равны нулю в случае бесспиновых партонов. Эксперимент, по-видимому, подтверждает, что выбор для спина партонов значения  $1/2$  вполне правилен.

Более общая основа для понимания партонной модели и ее связи со структурой произведения токов может быть выявлена с помощью приближения светового конуса (гл. 11). В самом деле, поведение  $t_{\mu\nu}$  [формула (10.232)] в глубоконеупругой области ( $\nu, u \rightarrow \infty$ ,  $\omega$  фиксировано) определяется свойствами коммутатора  $[j_{\mu}(x), j_{\nu}(0)]$  в окрестности  $x^2 \sim 0$ . Фундаментальное предположение, которое равносильно предположениям, лежащим в основе партонной модели, состоит в том, что сингулярности такого коммутатора и его алгебраическую структуру можно установить, если исходить из теории свободных кварков (гл. 11).



Мы уже видели, что рассеяние на точечной частице можно рассматривать как фундаментальный ингредиент партонной модели. Но мы можем интерпретировать его и как член второго порядка разложения теории возмущений, написанного в рамках теории поля. Итак, возникает вопрос: будут ли и члены более высоких порядков ряда теории возмущений также удовлетворять масштабной инвариантности? Ответ на этот вопрос зависит от того, можно ли (в дополнение к массам) без особого ущерба пренебречь импульсами виртуальных частиц, появляющихся во внутренних петлях, если сравнивать их с внешними импульсами  $p_\mu$  и  $q_\mu$ .

Другими словами, справедливость скейлинга Бьёркена зависит от того, насколько сильно подавлены большие виртуальные импульсы. Действительно, в сверхренормируемой теории (типа  $\mathcal{L}' = g\phi^3$ ) скейлинг имеет место. Поскольку  $g$  имеет размерность массы, взаимодействие  $\mathcal{L}'$  можно рассматривать как некий «обобщенный массовый член». Если же ряд теории возмущений был бы просуммирован полностью, то скейлинг должен был бы наблюдаться при больших значениях  $v$  и  $u$ , намного превышающих как  $m^2$ , так и  $g^2$ .

В то же время в ренормируемых теориях поля (где константа связи безразмерна) не обеспечивается достаточный эффект подавления, т. е. скейлинг в этом случае отсутствует. Действительно, ренормируемые теории становятся математически осмысленными только после введения обрезания при больших импульсах. Анализ показывает, что в ренормируемых теориях большая часть физически интересных величин на самом деле остается конечной при  $k_{\text{макс}} \rightarrow \infty$ . Появление же дополнительной массы  $k_{\text{макс}}$  усложняет ситуацию со скейлингом. При значениях  $v$  и  $u$ , намного превышающих  $k_{\text{макс}}$ , мы еще, несомненно, находимся в области скейлинга. Но если (как в локальной теории) потребовать предельного перехода  $k_{\text{макс}} \rightarrow \infty$ , то появляются логарифмические члены, нарушающие скейлинг. Проблема таких членов пока еще не нашла сколько-нибудь удовлетворительного решения.

Более феноменологический характер носит подход Дрелла, Леви и Яна [489—492], введших в теорию эффективное обрезание. Это приводит к реалистической теории, в которой имеется скейлинг и которая позволяет сделать определенные предсказания о виде структурных функций и о механизме неупругого процесса. Названные авторы приходят к очень важному выводу: неупругое рассеяние можно фактически рассматривать как некогерентную сумму рассеяний на точечных источниках. Это сильный довод в пользу партонной модели — «партоны» отождествляются здесь с голыми фундаментальными частицами, фигурирующими в теории.

Еще один интересный вывод теории Дрелла, Леви и Яна состоит в том, что скейлинг должен иметь место и для рассеяния

$$e^- + p \rightarrow e^- + \text{все остальное (пространственно-подобные } q^2),$$

и для аннигиляции

$$e^- + e^+ \rightarrow \bar{p} + \text{все остальное (временноподобные } q^2).$$

Другой моделью, в которой имеет место скейлинг, является соответствующим образом обобщенная мультипериферическая модель. Большие переданные импульсы также подавляются здесь путем обрезания. Такая модель приводит к скейлингу в силу тех же самых соображений размерности, что и модель Дрелла, Леви и Яна. Но сам механизм рассеяния совершенно другой. Независимые теоретико-полевые исследования неупругих процессов проведены Ландсхофом, Полкинхорном и Шортом [575, 576].

В заключение отметим, что, хотя пока еще нет удовлетворительной дуальной теории электромагнитных взаимодействий, можно сконструировать частные дуальные модели, в которых обеспечивается скейлинг [417, 493]. В этом случае роль фундаментального параметра обрезания играет

величина, обратная универсальному наклону реджевской траектории. Как удалось установить в более общем контексте Домокошу и др. [494, 534], скейлинг появляется после надлежащего усреднения по энергиям резонансов, возникающих в рассматриваемом процессе.

#### 4. Обобщенный скейлинг

Чтобы можно было исследовать так называемые асимптотические правила сумм, в данном разделе мы проведем анализ ряда свойств запаздывающей функции

$$T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = i \int d^4x e^{iqx} \theta(x_0) \langle p | [j_\mu^\alpha(x), j_\nu^\beta(0)] | p \rangle. \quad (10.267)$$

Эта величина, непосредственно связанная с тензором  $t_{\mu\nu}$  [формула (10.231)], будет служить вспомогательной амплитудой при выводе правил сумм, содержащих только наблюдаемые инвариантные функции тензора  $t_{\mu\nu}$ . Поскольку конечный результат очень прост, а более корректное вычисление будет проведено позже, мы временно забудем о тех трудностях, с которыми сопряжено использование запаздывающих амплитуд. Приводимый здесь вывод следует рассматривать лишь как формальную процедуру, позволяющую быстро получить нужные правила сумм.

Перечислим предположения, на которых основывается наш упрощенный вывод. Прежде всего мы отождествляем  $T_{\mu\nu}$  с физической амплитудой  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  для процесса  $p + j_\mu^\alpha \rightarrow p + j_\nu^\beta$ . Часто ссылаются на то, что фактически эти две величины могут различаться  $\Upsilon$ -членами<sup>1)</sup>. Присутствие таких членов (вообще говоря, в форме полинома по  $q_\mu$ ) может повлиять на асимптотические свойства  $\tilde{T}_{\mu\nu}$ , тогда как в соответствии с асимптотическим пределом БДЛ  $T_{\mu\nu} \sim 1/q_0$ . Поскольку при выводе правил сумм мы будем пользоваться дисперсионными соотношениями, учет таких членов, очевидно, так или иначе будет связан с проблемой возможных вычитательных констант. Более корректное вычисление фактически подтверждает это и дает более «строгое» обоснование окончательных результатов. Итак, отождествим величину  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  с  $T_{\mu\nu}$  и выразим ее в ковариантном базисе следующим образом:

$$T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \sum_i I_{\mu\nu}^{(i)} T_i^{\alpha\beta}(v, u) + i f_{\alpha\beta\gamma} \frac{F^\gamma}{q^2} (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - v g_{\mu\nu}); \quad (10.268)$$

в электромагнитном случае  $i = 1, 2$ , а в случае нейтринного и антинейтринного рассеяния  $i = 1, 2, 3$  и  $I_{\mu\nu}^{(i)}$  определяется выражениями (10.235) и (10.251). Здесь явным образом введен вещественный член, который удовлетворяет тождеству Уорда

$$q^\mu T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = i f_{\alpha\beta\gamma} \langle p | V_\nu^\gamma | p \rangle \equiv i f_{\alpha\beta\gamma} F^\gamma p_\nu. \quad (10.269)$$

Мы рассматриваем только сохраняющиеся токи и, кроме того, полагаем, что по спиновым координатам произведено усреднение, так что в одновременном коммутаторе появляется только векторная часть тока. Но поскольку нас интересует вопрос о поведении  $T_{\mu\nu}$  при  $q^2 \rightarrow \infty$  ( $\omega = -2\nu/q^2 \rightarrow 0$ ), где этот член роли не играет, в дальнейшем мы не будем его учитывать.

Итак, амплитуды связаны с первоначально введенными структурными функциями [формулы (10.234) и (10.250)] соотношением

$$\text{Im } T_i(v, u) = \pi W_i(v, u) \quad (10.270)$$

Предположим теперь (исходя из тех же соотношений размерности, что и ранее) справедливость масштабной инвариантности для  $T_{\mu\nu}$ , т. е. напи-

<sup>1)</sup> Например, при упрощенном подходе гл. 7, приложение I, § 5 оказывается, что  $\Upsilon$ -член имеется только у пространственных компонент  $\tilde{T}_{kl}$  амплитуды  $\tilde{T}_{\mu\nu}$ .

шем (как для электро-, так и для нейтринорождения)

$$\begin{aligned} \lim_{\text{Бьерк}} T_1(\nu, u) &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \tilde{T}_1(\omega, u) = \Phi_1(\omega), \\ \lim_{\text{Бьерк}} \frac{\nu}{m_N^2} T_2(\nu, u) &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\nu}{m_N^2} \tilde{T}_2(\omega, u) = \Phi_2(\omega), \\ \lim_{\text{Бьерк}} \frac{\nu}{m_N^2} T_3(\nu, u) &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\nu}{m_N^2} \tilde{T}_3(\omega, u) = \Phi_3(\omega). \end{aligned} \quad (10.271)$$

Тогда, как легко показать, функции  $\Phi_i(\omega)$  подчиняются дисперсионным соотношениям по переменной  $\omega$ , причем мнимые части этих функций определяются структурными функциями  $F_i(\omega)$ , рассмотренными ранее. Для определенности рассмотрим амплитуду  $T_2^{\text{эл.-м}}(\nu, u)$ , относящуюся к случаю электророждения. Из соотношения между  $T_{\mu\nu}$  и  $t_{\mu\nu}$  следует вывод о существовании дисперсионного соотношения при фиксированном  $u$

$$T_2^{\text{эл.-м}}(\nu, u) \doteq \left( \int_{|u|/2}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-|u|/2} \right) d\nu' \frac{W_2^{\text{эл.-м}}(\nu', u)}{\nu' - \nu}. \quad (10.272)$$

Символ  $\doteq$  должен напоминать о том, что соотношение (10.272) справедливо с точностью до возможных вычитаний, о которых будет сказано немного ниже.

Рассмотрим большие значения  $\nu$  и  $u$ , при которых, по предположению, мы находимся в области скейлинга. Вводя переменную  $\omega = -2\nu/q^2$ , можно переписать соотношение (10.272) в виде

$$\nu \tilde{T}_2(\omega, u) \doteq \omega \left( \int_1^{\infty} + \int_{-\infty}^{-1} \right) \frac{d\omega'}{\omega'(\omega' - \omega)} [\nu' \tilde{W}_2(\omega', u)]. \quad (10.273)$$

Предполагая затем, что скейлинг справедлив при больших отрицательных  $u$ , мы приходим к асимптотическому представлению

$$\Phi_2^{\text{эл.-м}}(\omega) \doteq 2\omega \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} F_2^{\text{эл.-м}}(\omega'), \quad (10.274)$$

при выводе которого принято во внимание свойство перекрестной симметрии:  $F_2^{\text{эл.-м}}(-\omega) = F_2^{\text{эл.-м}}(\omega)$ . Дисперсионные соотношения подобного типа могут быть легко выведены и для всех других амплитуд, но прежде чем это делать, попытаемся определить возможное число вычитаний.

Поскольку мы имеем дело с представлением, в котором внешние массы фиксированы, для описания асимптотического поведения  $W_i(\nu, u)$  логично было бы использовать модель полюсов Редже. Кроме того, предел  $\omega \rightarrow \infty$  можно рассматривать как следующую предельную процедуру:  $\nu \rightarrow \infty$ ,  $u$  — очень большое ( $u < 0$ ), но фиксированное. В этом смысле можно также считать, что и асимптотическое поведение  $F_i(\omega)$  определяется в соответствии с предписанием модели Редже. Обычным путем находим тогда

$$\begin{aligned} W_1(\nu, u) &\sim \nu^{\alpha(0)}, & W_2 &\sim \nu^{\alpha(0)-2}, & W_3 &\sim \nu^{\alpha(0)-1}, \\ F_1(\omega) &\sim \omega^{\alpha(0)}, & F_2(\omega) &\sim \omega^{\alpha(0)-1}, & F_3(\omega) &\sim \omega^{\alpha(0)}. \end{aligned} \quad (10.275)$$

Конкретно, рассматривая отдельно случай электромагнитных и случай слабых взаимодействий, мы находим следующее.

1. Для  $W_{1,2}^{\text{эл.-м}}$  (и  $F_{1,2}^{\text{эл.-м}}$ ) ведущими являются траектория Померанчука [ $\alpha_P(0) \approx 1$ ] и тензорная [ $\alpha_T(0) \approx 1/2$ ] траектория. Фактически, применяя метод разложения по инвариантным амплитудам, указанный в гл. 1, можно показать, что  $W_2$  содержит в явном виде множитель  $\alpha(\alpha - 1)$ .

Поскольку  $\alpha_p(0) = 1$ , траектория Померанчука не дает вклада в  $W_2$  и, следовательно, при  $\nu \rightarrow \infty$  величина  $W_2$  быстро убывает. Наличие стоячих полюсов может изменить эту ситуацию.

2. В случае слабых взаимодействий в  $W_{1,2}$  (и  $F_{1,2}$ ) дают вклад только  $G$ -четные траектории. Это связано с тем, что рассматривается рассеяние двух векторных или двух аксиальных токов. Таким образом, в качестве ведущих траекторий мы снова имеем траекторию Померанчука и  $\rho$ -траекторию [ $\alpha_p(0) \approx 1/2$ ]. Они дают вклад в симметричную и антисимметричную относительно замены  $\alpha \leftrightarrow \beta$  амплитуду (будучи ответственны за обмен с  $I = 0$  и  $I = 1$  в  $t$ -канале), т. е. первая в комбинацию  $F_{1,2}^{(\nu)} + F_{1,2}^{(\bar{\nu})}$ , а вторая в комбинацию  $F_{1,2}^{(\nu)} - F_{1,2}^{(\bar{\nu})}$ . Структурная функция  $F_3$ , возникающая в результате интерференции векторных и аксиальных токов, описывается обменом траекторий с  $G = -1$ , т. е.  $\omega, \varphi, A_1, \dots$  [ $\alpha_\omega(0) \approx \alpha_\varphi(0) \approx 1/2$ ].

Окончательный вывод таков, что дисперсионные соотношения для  $T_2$  и  $T_3$  не требуют вычитаний, а для  $T_1$  необходимо одно вычитание. Введем теперь соотношение для  $T_1^{\text{эл.-м}}$ , аналогичное соотношению (10.274). Исходить будем из дисперсионного соотношения с одним вычитанием

$$T_1^{\text{эл.-м}}(\nu, u) = T_1^{\text{эл.-м}}(0, u) + \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu'}{\nu'(\nu' - \nu)} W_1^{\text{эл.-м}}(\nu', u), \quad (10.276)$$

которое после учета перекрестной симметрии и перехода к скейлинговому пределу принимает вид

$$\varphi_1^{\text{эл.-м}}(\omega) = \lim_{u \rightarrow -\infty} T_1(0, u) + 2\omega^2 \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)} F_1^{\text{эл.-м}}(\omega'). \quad (10.277)$$

Наличие вычитательной константы не вызывает каких-либо трудностей. Как легко показать, вычитательная константа, не обращающаяся в нуль при  $u \rightarrow -\infty$ , должна давать такой же эффект, как и  $\Upsilon$ -члены (полином по  $q_\mu$ ), которыми с самого начала мы пренебрегали. При этом условии получаем окончательно следующее выражение:

$$\varphi_1^{\text{эл.-м}}(\omega) = 2\omega^2 \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)} F_1^{\text{эл.-м}}(\omega'). \quad (10.277')$$

Аналогичные выражения в нейтринном случае таковы:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(\nu)}(\omega) &= \omega \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} \left[ \frac{F_1^{(\nu)}(\omega')}{\omega' - \omega} - \frac{F_1^{(\bar{\nu})}(\omega')}{\omega' + \omega} \right], \\ \varphi_{2,3}^{(\nu)}(\omega) &= \omega \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} \left[ \frac{F_{2,3}^{(\nu)}(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{F_{2,3}^{(\bar{\nu})}(\omega')}{\omega' + \omega} \right]. \end{aligned} \quad (10.278)$$

Соотношения (10.278), (10.277') и (10.274) могут быть использованы, в частности, для изучения разложения  $\varphi_i(\omega)$  в ряд по степеням  $\omega$ . Например, получаем

$$\varphi_i^{(\nu)}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_i^{(\nu)}(n) \omega^n, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10.279)$$

где

$$\phi_i^{(\nu)}(n) = \int_1^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^{n+1}} [F_i^{(\nu)}(\omega) + e^{i\pi n} F_i^{(\bar{\nu})}(\omega)]. \quad (10.280)$$

Соответствующие выражения для  $\phi_i^{\text{эл.-м}}(n)$  можно получить путем подстановки  $F_{1,2}^{(\nu)} \rightarrow F_{1,2}^{\text{эл.-м}}$ ,  $F_{1,2}^{(\bar{\nu})} \rightarrow \mp F_{1,2}^{\text{эл.-м}}$ .

## 5. Асимптотические правила сумм

Теперь мы можем, скомбинировав свойства масштабной инвариантности, которые были установлены ранее, с предельным переходом БДЛ, вывести полный набор правил сумм для структурных функций  $F_i$ . В эти асимптотические правила сумм будут входить одновременные коммутаторы плохих операторов и даже их производные по времени. Применение таких коммутаторов в рамках стандартной схемы бесконечно большого импульса (гл. 8) в какой-то мере проблематично. Полученные при этом правила сумм очень сильно зависят от модели, и их вывод основан на предположениях, которые не всегда вполне надежны. Поэтому мы подробно рассмотрим несколько специально выбранных правил сумм и возьмем их за основу при дальнейшем исследовании коммутаторов, вычисленных в рамках *кварковой модели*.

В качестве первой иллюстрации рассмотрим амплитуду  $T_{\mu\nu}$  для случая, когда  $\mathbf{q} = 0$ , а  $\mu, \nu$  отвечают пространственным компонентам ( $k, l$ ), ортогональным вектору  $\mathbf{p}$  [тогда в ковариантном выражении (10.268) можно прямо положить  $p_\mu = p_\nu = 0$ ]. Амплитуда  $T_{kl}$  в этом случае такова:

$$T_{kl}^{(\nu)}(p, q_0) = \delta_{kl} T_1^{(\nu)} - i \varepsilon_{kli} p^i q_0 \frac{T_3^{(\nu)}}{m_N^2}. \quad (10.281)$$

Переходя к пределу БДЛ, получаем, что при больших  $q_0$  (и фиксированном  $p$ )  $T_{kl}^{(\nu)}$  дается выражением

$$T_{kl}^{(\nu)} = \frac{C_{kl}^{(\nu)}(p)}{q_0} + O\left(\frac{1}{q_0^2}\right), \quad (10.282)$$

где

$$C_{kl}^{(\nu)}(p) = - \int d^3x \langle p | [J_{\bar{k}}(x), J_l^{\dagger}(0)] | p \rangle. \quad (10.283)$$

Одновременной коммутатор, фигурирующий в формуле (10.283), будет вычислен на основе кварковой модели. Пренебрегая членами, которые обращаются в нуль после усреднения по спинам их нуклонных матричных элементов, в результате простейших преобразований с операторами <sup>1)</sup> находим

$$[J_{\bar{k}}(x), J_l^{\dagger}(0)] = -\delta^3(x) \left[ 4\delta_{kl} V_0^3 + 2i\varepsilon_{kli} \left( \frac{2}{3} V_m^0 + \frac{2}{\sqrt{3}} V_m^3 \right) \right] + \text{члены, исчезающие после усреднения}. \quad (10.284)$$

Величина  $V_\mu^0$  — синглетная компонента векторного тока ( $V_\mu^0 = \bar{q}\gamma_\mu q$ ). Итак <sup>2)</sup>,

$$C_{kl}^{(\nu)} = 4p_0 \delta_{kl} + 12i\varepsilon_{klm} p^m. \quad (10.285)$$

Подставим выражение (10.285) в формулу (10.282) и перейдем к пределу при  $q_0 \rightarrow \infty$ ,  $p_0 \rightarrow \infty$  и фиксированном  $\omega = -2p_0/q_0 = -2\nu/q^2$ . Вспоминая, что в этом пределе для функций  $T_1$  и  $T_3$  имеет место скейлинг, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\text{БДЛ}} T_1^{(\nu)} &= \varphi_1^{(\nu)}(\omega) = -2\omega + O(\omega^2), \\ \lim_{\text{БДЛ}} \frac{\nu T_3^{(\nu)}}{m_N^2} &= \varphi_3^{(\nu)}(\omega) = 6\omega + O(\omega^2). \end{aligned} \quad (10.286)$$

<sup>1)</sup> Напомним, что мы используем упрощающее предположение  $\theta_c = 0$ .

<sup>2)</sup> Мы используем соотношение  $\langle p | V_\mu^0 | p \rangle = 3 \cdot 2p_\mu$ , где множитель 3 учитывает то обстоятельство, что в нуклоне 3 кварка.

Отсюда находим пределы при малых значениях  $\omega$ :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d\varphi_1^{(v)}(\omega)}{d\omega} = -2, \quad (10.287)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d\varphi_3^{(v)}(\omega)}{d\omega} = 6. \quad (10.288)$$

Наконец, комбинируя эти результаты с дисперсионными соотношениями (10.278), приходим к асимптотическим правилам сумм<sup>1)</sup>:

$$\int_1^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} [F_1^{(v)}(\omega) - F_1^{(\bar{v})}(\omega)] = -2, \quad (10.289)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} [F_3^{(v)}(\omega) + F_3^{(\bar{v})}(\omega)] = 6. \quad (10.290)$$

В силу сказанного в предыдущем разделе интегралы, фигурирующие в формулах (10.289) и (10.290), должны быть конечными.

Соотношение (10.289) — это правило сумм Бьёркена для рассеяния назад [495], а соотношение (10.290) — правило сумм Гросса — Льюэллин-Смита [496]. Полезно объединить их с правилом сумм Адлера [формула (8.268) при  $\theta = 0$ ] в пределе при  $u \rightarrow -\infty$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \int dv [W_2^{(v)}(v, u) - W_2^{(\bar{v})}(v, u)] = -4m^2. \quad (10.291)$$

Если допустить, что интеграл определяется в основном областью больших  $v$  (в которой, мы считаем, имеется скейлинг), то правило сумм Адлера принимает асимптотический вид

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} [F_2^{(v)}(\omega) - F_2^{(\bar{v})}(\omega)] = -4. \quad (10.291')$$

Комбинируя уравнения (10.291) и (10.289), получаем правило сумм для продольной функции  $F_S = -F_1 + \frac{1}{4} \omega F_2$ :

$$\int_1^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} [F_S^{(v)} - F_S^{(\bar{v})}] = 0. \quad (10.292)$$

В том, что правая часть равенства (10.292) равна нулю, нет ничего неожиданного, поскольку коммутатор, который дает правило сумм (10.291), был выведен на основе лагранжева метода для кварков со спином  $1/2$ . Напомним, что партонная модель в случае спина  $1/2$  приводит к гораздо более сильным условиям:

$$F_S^{\text{эл.-м}} = F_S^{(v)} = F_S^{(\bar{v})} = 0.$$

Набросаем вкратце общую схему получения всех возможных правил сумм. Рассмотрим снова  $T_{kl}$  при  $q = 0$ , но без дополнительного требования  $p_k = p_l = 0$ ; тогда

$$T_{kl} = \delta_{kl} T_1 + p_k p_l \frac{T_2}{m_N^2} - i \varepsilon_{klm} p^m q_0 \frac{T_3}{m_N^2}. \quad (10.293)$$

<sup>1)</sup> Отметим аналогию между этим выводом и выводом правил сумм на основе алгебры токов (гл. 4). В самом деле, наша асимптотическая переменная  $\omega$  является аналогом переменной  $v$  в том выводе: 1) при  $\omega \rightarrow \infty$  мы использовали реджевское поведение; 2) из одно-временных коммутаторов имеем информацию для  $\omega \rightarrow 0$ . Если скомбинировать дисперсионное соотношение с информацией 1 и 2, то могут быть получены соответствующие правила сумм.

Обычное разложение БДЛ дает

$$T_{kl} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{kl}^{(n)}(p)}{q_0^{n+1}}, \quad (10.294)$$

где

$$C_{kl}^{(n)}(p) = -(i)^n \int d^3x \left\langle p \left| \left[ \frac{\partial^n}{\partial x_0^n} J_k(\mathbf{x}, x_0) \Big|_{x_0=0} J_l^{(0)}(0) \right] \right| p \right\rangle. \quad (10.295)$$

Из общих соображений ведущий член в  $C_{kl}^{(n)}$  при  $p_0 \rightarrow \infty$  можно записать в виде

$$C_{kl}^{(n)} \underset{p_0 \rightarrow \infty}{\sim} p_0^{1+n} \left[ \gamma_1^{(n)} \delta_{kl} + \gamma_2^{(n)} \frac{pkpl}{p_c^2} + \gamma_3^{(n)} \frac{i\epsilon_{kli} p^i}{p_0} \right]. \quad (10.296)$$

Подставляя выражение (10.296) в разложение (10.294) и сравнивая результат с выражением (10.293), получаем в пределе Бьёркена следующие асимптотические выражения в окрестности  $\omega = 0$ :

$$\begin{aligned} \Phi_1(\omega) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{2} \omega \right)^{n+1} \gamma_1^{(n)}, \\ \Phi_2(\omega) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{2} \omega \right)^n \gamma_2^{(n)}, \\ \Phi_3(\omega) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{2} \omega \right)^{n+1} \gamma_3^{(n)}. \end{aligned} \quad (10.297)$$

Комбинируя формулу (10.297) с формулами (10.279) и (10.280), в принципе можно было бы получить общий набор формул, связывающих дисперсионные интегралы вида

$$\int_1^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^{n+1}} [F_i^{(\nu)}(\omega) \pm F_i^{(\bar{\nu})}(\omega)]$$

с величинами  $\gamma_i^{(n)}$ . К сожалению, мы плохо знаем высшие коммутаторы (которые при  $n \geq 1$  существенным образом связаны с уравнениями движения), и это не позволяет многого добиться, исследуя такие правила сумм.

Взяв первый член ( $n = 0$ ) разложения (10.297) для нейтринной амплитуды, мы, конечно, приходим к полученным уже результатам<sup>1)</sup> (10.287) и (10.288). Другой интересный случай исследован в работе Каллана и Гросса [497], которые рассмотрели член с  $n = 1$  в разложении, подобном (10.297), для электромагнитных структурных функций. Этот член зависит от комму-

<sup>1)</sup> Дополнительная информация, а именно равенство  $\gamma_2^0 = 0$  [формула (10.285)] в действительности носит кинематический характер и доказывается тривиально [формула (10.278)]. В данном контексте, может быть, полезно отметить, что правило сумм Адлера покоится на иных посылках и отражает поведение амплитуды  $T_2$  при  $\nu \rightarrow \infty$  (с большим, но фиксированным  $u$ ):  $\nu T_2/m_N^2 \rightarrow 4$ . В случае глубокоэластичного рассеяния это можно рассматривать как  $\omega \rightarrow \infty$  и, выполнив предельный переход в представлении (10.278) для  $\Phi_2^{(\nu)}(\omega)$ , мы получим соотношение

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi_2(\omega) = 4 = - \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} [F_2^{(\nu)}(\omega') - F_2^{(\bar{\nu})}(\omega')],$$

т. е. формулу (10.291').

татора электромагнитных токов

$$\left\langle p \left| \left[ \frac{\partial j_k^{\text{эл.-м}}(x)}{\partial x_0} \Big|_{x_0=0}, j_l^{\text{эл.-м}}(0) \right] p \right\rangle = p_0^2 \left( c_1 \delta_{kl} + c_2 p_k \frac{p_l}{p_0^2} \right) \quad (10.298)$$

и окончательно мы имеем правила сумм Каллана — Гросса

$$\begin{aligned} 8 \int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega^3} F_1^{\text{эл.-м}}(\omega) &= c_1, \\ 4 \int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} F_2^{\text{эл.-м}}(\omega) &= -c_2. \end{aligned} \quad (10.299)$$

Отсюда для комбинации  $F_S = -F_1 + 1/2 \omega F_2$  получаем правило сумм

$$8 \int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega^3} F_S^{\text{эл.-м}}(\omega) = c_S \equiv -(c_1 + c_2). \quad (10.300)$$

Константы  $c_1$  и  $c_2$  в сильнейшей степени модельно зависимы. Оказывается, что в кварковой модели с векторным или скалярным (или псевдоскалярным) взаимодействием мы имеем  $c_1 + c_2 \equiv -c_S = 0$ . В то же время  $F_S$  — положительно-определенная величина, и мы заключаем, что  $F_S^{\text{эл.-м}} = 0$ . Это согласуется с предсказанием партонной модели для спина  $1/2$ . Конечно, правила сумм (10.299) можно распространить и на случай нейтринного рассеяния путем подстановки

$$F_i^{\text{эл.-м}} \rightarrow \frac{1}{2} (F_i^{(\nu)} + F_i^{(\bar{\nu})}).$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что в кварковой модели в случае спина  $1/2$  величины  $F_S^{(\nu)}$  и  $F_S^{(\bar{\nu})}$  также равны нулю. Если на мгновение обратиться к алгебре полей, то получим  $c_1 = 0$ , т. е. по соображениям положительности  $F_1^{\text{эл.-м}} = F_T^{\text{эл.-м}} = 0$ , откуда следует, что все сечения для поперечных фотонов должны равняться нулю (это не подтверждается экспериментом). Подобный результат дает и партонная модель для спина 0.

Исходя из коммутационных соотношений для пространственных и временных компонент, тем же методом можно получить и другие правила сумм. Например, учитывая отсутствие  $q$ -операторных швингеровских членов, можно доказать [498, 499], что

$$\int_1^\infty d\omega F_S^{\text{эл.-м}}(\omega) = 0, \quad (10.301)$$

т. е. снова  $F_S^{\text{эл.-м}} = 0$ . (Заметим, что, судя по предсказаниям теории Редже, нам, видимо, следует позаботиться о сходимости интеграла при  $\omega \rightarrow \infty$ .) И наоборот, поскольку экспериментальные данные [см. текст после формулы (10.300)] указывают на равенство  $F_S^{\text{эл.-м}} \approx 0$ , соотношение (10.301) можно рассматривать как указание на отсутствие  $q$ -операторных швингеровских членов.

## 6. Партонная модель [486—488]

Мы уже говорили, что самая простая и ясная модель, обеспечивающая скейлинг, — это модель, основанная на предположении, что сечение глубоко неупругих процессов равно сумме сечений рассеяния на квазисвободных «партонах» (некогерентное рассеяние). Теперь мы более обстоятельно



рассмотрим эту модель и покажем, как на ее основе можно просто объяснить некоторые из наиболее важных асимптотических правил сумм, а также выявить интересные связи между процессами большого класса.

По своей структуре партонная модель очень напоминает импульсное приближение, применяемое в нерелятивистской атомной физике, а также в ядерной физике. Как хорошо известно, импульсное приближение соответствует простейшему описанию рассеяния на связанной системе, когда от налетающей частицы (или тока) передается большая энергия. Если можно пренебречь корреляционными эффектами и эффектами связи, то составные части системы могут рассматриваться как почти свободные, и поэтому следует просто учесть столкновения между налетающей частицей и каждой составной частью системы. Обобщение такого приближения на случай элементарных частиц далеко не столь очевидно. Условие слабой связи не имеет теперь прямого аналога, а мы не подготовлены к тому, чтобы связать с «партонами» какую-либо реальную сущность: мы будем интерпретировать их как точечноподобные составляющие виртуальных адронных состояний. В теоретико-полевых реализациях партонной модели они в точности соответствуют «голым» частицам. В то же время интуиция подсказывает нам, что в области скейлинга, где и переданная энергия  $q_0 = \nu/m_N$  и переданный импульс велики, импульсное приближение при описании рассеяния виртуального фотона на нуклоне вполне приемлемо.

Ключевым для понимания партонной модели можно считать то обстоятельство, что конфигурация свободных партонов в системе отсчета, в которой нуклон-мишень движется с очень большим (бесконечным) импульсом  $p$ , оказывается «долгоживущей». Другими словами, как мы докажем ниже, энергия системы свободных партонов пренебрежимо мало (на члены порядка  $1/p$ ) отличается от энергии физического нуклона.

Итак, пусть  $i$ -й партон движется с импульсом  $p_i$ :

$$p_i = x_i p + k_i, \quad (10.302)$$

где  $p$  — импульс нуклона, а  $k_i$  — компонента вектора  $p_i$ , ортогональная вектору  $p$  ( $p k_i = 0$ ). Фундаментальное значение имеет предположение, что  $k_i$  остается конечным при  $p \rightarrow \infty$ , тогда как каждый партон несет конечную долю нуклонного импульса <sup>1)</sup>,  $0 < x_i < 1$ . Кроме того, будем считать, что область малых значений  $x_i$  [«крошечные» (*wee*) партоны] не играет существенной роли.

Энергия системы свободных партонов дается выражением

$$E_{\text{партон}} = \sum_i [(x_i p + k_i)^2 + M_i^2]^{1/2}. \quad (10.303)$$

Основываясь на указанных выше предположениях, можно разложить  $E_{\text{партон}}$  в ряд по степеням обратной величины импульса  $p$ :

$$E_{\text{партон}} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} p + \frac{1}{p} \sum_i \frac{M_i^2 + k_i^2}{2x_i}, \quad (10.304)$$

где учтен закон сохранения трехмерного импульса

$$\sum_i x_i = 1. \quad (10.305)$$

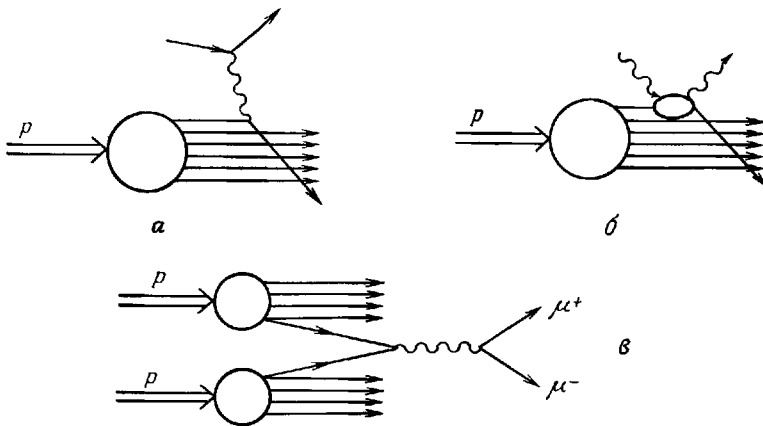
<sup>1)</sup> В системе покоя нуклона данное условие равносильно предположению, что имеется конечная верхняя граница для импульса партонов. Это соответствует теоретико-полевой процедуре обрезания (§ 5, п. 3), которая требуется, чтобы воспроизвести скейлинг Бьёркена в ренормируемых теориях. Косвенным образом данное условие можно было бы оправдать тем хорошо известным обстоятельством, что поперечные импульсы вторичных частиц в процессах адрон-протонного рождения малы.

Окончательно имеем

$$\Delta E = E_{\text{партон}} - E_{\text{нуклон}} \sim \frac{1}{2p} \left( \sum_i \frac{k_i^2 + M_i^2}{x_i} - m^2 \right) = \frac{\overline{M^2}}{p}, \quad (10.306)$$

т. е. разность стремится к нулю при больших  $p$ . Таким образом, «время жизни партонного состояния»  $\tau \approx 1/\Delta E$  становится очень большим в результате релятивистского замедления времени ( $\sim p/\overline{M^2}$ ). Далее, чтобы было допустимо импульсное приближение, это время жизни  $\tau$  должно быть большим по сравнению с временем столкновения  $\tau_c$ , т. е. переданный импульс  $|q^2|$  должен быть большим по сравнению с импульсом обрезания  $\overline{M^2}$ . В глубоконеупругой области это условие выполняется <sup>1)</sup>.

Итак, краткое резюме: можно построить простую теорию глубоконеупругих явлений, рассматривая протон как газ почти свободных, некоррелированных партонов, вклады которых следует суммировать некогерентно



Фиг. 10.8. Процессы, демонстрирующие роль партонной структуры адронов. а — процесс «лептон + адрон → лептон + все остальное», б — процесс « $\gamma$  + адрон →  $\gamma$  + все остальное», в — процесс «адрон + адрон →  $\mu^- + \mu^+ +$  все остальное».

(фиг. 10.8, а). Подчеркнем, что структура нуклона оказывается особенно простой в привилегированной системе отсчета, связанной с бесконечно большим импульсом. Подобная ситуация уже неоднократно встречалась нам в предыдущих разделах книги — задача насыщения одновременных коммутаторов и другие задачи в системе координат с бесконечно большим импульсом решаются очень просто.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы вычислить структурные функции электро- и нейтринорождения в рамках партонной модели. Для определенности рассмотрим интересный с физической точки зрения случай партонов со спином  $1/2$ .

Амплитуда  $t_{\mu\nu}$  упругого рассеяния электронов на точечной частице со спином  $1/2$ , с импульсом  $xp$  (мы пренебрегаем поперечной компонентой, которая по предположению конечна,  $k_i/p \rightarrow 0$ ) и с зарядом  $Q$  дается выра-

<sup>1)</sup> Например, можно перейти в область скейлинга ( $\nu \rightarrow \infty$ ,  $q^2 \rightarrow -\infty$ ,  $\omega = -2\nu/q^2$  фиксировано), выбрав  $q_3 \approx -p_3/\omega$ ,  $q_0 \sim \nu/p_0 - p_0/\omega$ ,  $q^2 = q_0^2 - q_3^2 \sim -2\nu/\omega$ , т. е.  $q_0 \sim p_0 \gg \Delta E \approx \overline{M^2}/p$ . Конечно, можно указать и другие системы отсчета, в которых эти условия выполняются.

жением

$$\begin{aligned}
 t_{\mu\nu}^{\text{партон}} &= (2\pi)^3 \bar{\Sigma} \delta^4(xp + q - p') \langle px | j_{\mu}^{\text{эл.-м}} | p' \rangle \langle p' | j_{\nu}^{\text{эл.-м}} | xp \rangle = \\
 &= 2Q^2 \delta(q^2 + 2xpq) \left[ xpq \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{q^2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2x^2 \left( p_{\mu} - \frac{q_{\mu}qp}{q^2} \right) \left( p_{\nu} - \frac{q_{\nu}qp}{q^2} \right) \right]. \quad (10.307)
 \end{aligned}$$

Чтобы вычислить вклад одного партона в нуклонные структурные функции, следует принять во внимание изменение нормировки состояний, т. е. соотношение

$$t_{\mu\nu}^{\text{нуклон}} = \frac{E_{\text{нуклон}}}{E_{\text{партон}}} t_{\mu\nu}^{\text{партон}} = \frac{1}{x} t_{\mu\nu}^{\text{партон}}. \quad (10.308)$$

Итак, мы получаем, что вклад нашего партона в структурные функции нуклона таков:

$$\begin{aligned}
 W_1(x) &= 2\nu Q^2 \delta(q^2 + 2\nu x), \\
 W_2(x) &= 4m^2 Q^2 x \delta(q^2 + 2\nu x). \quad (10.309)
 \end{aligned}$$

Последний шаг — некогерентное суммирование по всем партонным конфигурациям. Для этого введем соответствующую функцию распределения  $f_{\alpha}(x)$ , которая дает вероятность того, что партоны типа  $\alpha$  имеют продольную составляющую импульса, равную  $x$ :

$$0 \leq f_{\alpha}(x) \leq 1, \quad \int_0^1 dx f_{\alpha}(x) = 1.$$

Тогда полные структурные функции будут получены путем интегрирования:

$$\begin{aligned}
 W_1(\nu, u) &= 2\nu \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2 \int_0^1 dx f_{\alpha}(x) \delta(2\nu x + u), \\
 W_2(\nu, u) &= 4m^2 \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2 \int_0^1 x dx f_{\alpha}(x) \delta(2\nu x + u). \quad (10.310)
 \end{aligned}$$

Интегрирование по  $x$ , конечно, воспроизводит скейлинг Бьёркена и дает для  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  выражения

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2 f_{\alpha}(x), \\
 F_2(x) &= 2x \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2 f_{\alpha}(x) = 2xF_1(x), \\
 F_3 &\equiv -F_1 + \frac{1}{2x} F_2 = 0, \quad (10.311)
 \end{aligned}$$

где  $x$  — параметр (характеризующий долю полного импульса, которая приходится на рассматриваемый партон), снова соответствующий известному выражению

$$x = -\frac{u}{2\nu} \equiv \frac{1}{\omega}. \quad (10.312)$$

Отсюда видно, что кинематическая область  $x \rightarrow 0$  (область очень медленных партонов) связана с пределом Редже ( $\nu \rightarrow \infty$ ,  $u$  фиксировано), и допустимость импульсного приближения в данной области проблематична. Следовательно, имея дело с такими правилами сумм, в которых область  $x \rightarrow 0$  ( $\omega \rightarrow \infty$ ) сильно подчеркнута, нужно быть осторожным. Например, из выра-

жения (10.311) явствует, что при  $x \rightarrow 0$  мы имеем  $F_2(x) \rightarrow 0$  при условии, что функция  $F_1(x)$  в точке  $x = 0$  регулярна. Этот результат, по-видимому, согласуется с тем, что траектория Померанчука не дает вклада в  $F_2$ , а в общем также и с недифракционным характером глубокоэластичных процессов (на который указывает эксперимент).

Попробуем теперь повысить информативность партонной схемы, конкретизируя типы частиц, которые могут быть составными частями нуклона. Наиболее распространенная модель такого сорта основана на предположении, что партоны, ответственные за процессы, индуцируемые электронами и нейтрино, представляют собой триплеты кварков с дробным зарядом и гиперзарядом<sup>1)</sup>. Введем функции распределения различных сортов кварков и антикварков внутри протона согласно схеме

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \bar{q}_1 & \bar{q}_2 & \bar{q}_3 \\ a(x) & b(x) & c(x) & \bar{a}(x) & \bar{b}(x) & \bar{c}(x) \end{pmatrix}. \quad (10.313)$$

В нейтронном случае соответствующие функции получаются путем подстановок

$$a \rightleftharpoons b, \quad \bar{a} \rightleftharpoons \bar{b}$$

Из законов сохранения заряда, барионного числа и гиперзаряда вытекают следующие условия «нормировки»:

$$\begin{aligned} \text{Протонный заряд} &\equiv \frac{2}{3}(N_{q_1} - N_{\bar{q}_1}) - \frac{1}{3}(N_{q_2} - N_{\bar{q}_2}) = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 dx [a(x) - \bar{a}(x)] - \frac{1}{3} \int_0^1 dx [b(x) - \bar{b}(x)] = 1, \end{aligned} \quad (10.314a)$$

$$\text{Протонное барионное число} = \frac{1}{3} \int_0^1 (a - \bar{a} + b - \bar{b}) dx = 1, \quad (10.314b)$$

$$\text{Странность протона} = \int_0^1 (c - \bar{c}) dx = 0. \quad (10.314в)$$

Комбинируя первые два соотношения, получаем

$$\int_0^1 [a(x) - \bar{a}(x)] dx = 2, \quad \int_0^1 [b(x) - \bar{b}(x)] dx = 1. \quad (10.315)$$

Эти соотношения, конечно, тривиальны и отражают хорошо известную структуру кварковой модели. Нетривиальны же простые формулы, в которых структурные функции для протонных и нейтронных мишеней выражаются через кварковые распределения. Как показано в приложении VI,

$$F_1^{ep} = \frac{4}{9}(a + \bar{a}) + \frac{1}{9}(b + \bar{b}) + \frac{1}{9}(c + \bar{c}), \quad (10.316a)$$

$$F_1^{en} = \frac{1}{9}(a + \bar{a}) + \frac{4}{9}(b + \bar{b}) + \frac{1}{9}(c + \bar{c}). \quad (10.316b)$$

<sup>1)</sup> Обычно предполагается также существование скалярных относительно группы  $SU(3)$  бесспиновых глюонов, которые не взаимодействуют с электромагнитным или слабым током, но которые могут нести значительную часть нуклонного импульса.

Кварк-партонную модель, конечно, можно обобщить и на нейтринное рассеяние, и тогда получаем следующие выражения:

$$F_1^{vp} = \bar{F}_1^{vn} = 2(\bar{a} + b), \quad (10.317a)$$

$$F_1^{vn} = \bar{F}_1^{vp} = 2(a + \bar{b}), \quad (10.317б)$$

$$F_3^{vp} = \bar{F}_3^{vn} = 2(\bar{a} - b). \quad (10.317в)$$

$$F_3^{vn} = \bar{F}_3^{vp} = 2(\bar{b} - a). \quad (10.317г)$$

Комбинируя выражения (10.316) и (10.317), мы получим простое соотношение общего характера между структурными функциями электро- и нейтриноруждения:

$$F_1^{ep} - F_1^{en} = \frac{1}{3}(a + \bar{a} - b - \bar{b}) = \frac{1}{6}(F_3^{vp} - F_3^{vn}). \quad (10.318)$$

Ценные результаты можно получить, сочетая соотношения (10.317) с условиями нормировки (10.314). Сразу же видим, что из соотношений (10.314а) и (10.317) вытекает правило сумм Бёркена для рассеяния назад

$$\int_0^1 (F_1^{vp} - \bar{F}_1^{vp}) dx = -2, \quad (10.319)$$

тогда как соотношение (10.314б), связанное с нуклонным барионным числом, совпадает с правилом сумм Гросса — Льюэллин-Смита

$$\int_0^1 (F_3^{vp} + \bar{F}_3^{vp}) dx = 6. \quad (10.320)$$

Между партонными моделями и правилами сумм можно установить более тесную связь. Исходя из коммутаторов кварковой модели [ $j_k^\alpha(x)$ ,  $j_l^\beta(0)$ ], Льюэллин-Смит [500] получил правило сумм

$$\int_0^1 x dx [6(F_1^{ep} - F_1^{en}) - (F_3^{vp} - F_3^{vn})] = 0, \quad (10.321)$$

которое безусловно выполняется в кварк-партонной модели [формула (10.318)].

Мы видим, что партонная модель позволяет просто и изящно интерпретировать скейлинг в глубоконеупругом рассеянии и некоторые из наиболее важных асимптотических правил сумм. В принципе можно пойти дальше этой довольно общей схемы и сделать определенные предположения относительно функций распределения. Это дает много интересных результатов, которые, правда, носят менее общий характер и которые выходят за рамки нашей книги. Добавим лишь, что из выражения

$$\frac{F_1^{en}}{F_1^{ep}} = \frac{a + \bar{a} + 4(b + \bar{b}) + c + \bar{c}}{4(a + \bar{a}) + b + \bar{b} + c + \bar{c}}, \quad (10.322)$$

которое дается формулами (10.316а) и (10.316б), и из положительности функций распределения  $a$ ,  $\bar{a}$ , ... сразу же выводятся неравенства

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_1^{en}}{F_1^{ep}} \leq 4. \quad (10.323)$$

Эти неравенства обеспечивают простую, но весьма критическую проверку кварк-партонной модели.

Наконец, отметим то большое преимущество партонной модели, что она дает возможность (фиг. 10.8) делать определенные выводы о других глубоко-неупругих процессах, основываясь на тех же самых функциях распределения. Например, Бёркен и Пэшос [488] исследовали процесс глубоко-неупругого фотонного рассеяния

$$\gamma + p \rightarrow \gamma + \text{все остальное.}$$

Они рассматривали его как некогерентную сумму элементарных актов комптоновского рассеяния на партонах (фиг. 10.8, б):

$$\gamma + \text{партон} \rightarrow \gamma + \text{партон,}$$

для которых применима формула Клейна — Нишины. Точно так же Дрелл и Ян [501, 502] (в рамках своей теоретико-полевой партонной модели) интерпретировали процесс

$$p + p \rightarrow \mu + \bar{\mu} + \text{все остальное}$$

как суперпозицию элементарных процессов (фиг. 10.8, в)

$$\text{партон} + \text{партон} \rightarrow \mu + \bar{\mu}.$$

Несомненно, что весьма желателен более тщательный анализ всех этих и подобных им процессов как в экспериментальном, так и в теоретическом плане.

### Приложение I. Электромагнитное расщепление масс

В данном приложении мы познакомим читателя с одним интересным подходом к проблеме электромагнитной разности масс в изомультиплете. Этот подход, основанный главным образом на дисперсионных соотношениях при фиксированной массе, реджевском асимптотическом поведении и ПСКЭ для амплитуд виртуального комптоновского рассеяния, существенно отличается от представленного в основном тексте главы. Очень интересно то обстоятельство, что весь анализ проводится методами, характерными для физики сильных взаимодействий: вычисления сводятся к проблеме определения зависимости резонансных формфакторов и реджевских полюсных вычетов от  $q^2$ . При этом исходят из физической картины, подсказываемой нашей интуицией: вычисляют электромагнитную энергию, обусловленную распределением токов и зарядов возможных виртуальных состояний. Значение состояний с большой массой можно исследовать, пользуясь выведенным Харари [503] фундаментальным соотношением между различными комбинациями разностей масс внутри изомультиплета и  $t$ -канальным изоспином комптоновской амплитуды. Оно выведено из того обстоятельства, что с точностью до  $e^2$  некоторые разности масс пропорциональны изотензорам с  $I = 1$  или  $I = 2$ . Поэтому, как будет ясно из дальнейшего, при разности масс, соответствующей  $I = 2$ , конфигурациями с большими массами можно пренебречь. Именно этим и объясняется, почему для таких комбинаций оказались успешными наиболее ранние из полученных результатов (например, вычисление разности масс  $\pi^+\pi^0$ ). В то же время в случае  $I = 1$  необходимо учитывать состояния с большими массами, т. е. разности масс при  $I = 1$  связаны со структурой на меньших расстояниях. Правда, все это станет более или менее ясным лишь после того, как мы перейдем к непосредственному изложению. Читателю же, сталкивающемуся с данным вопросом впервые, может быть, следует прочитать эти вводные строки уже после того, как он познакомится с приведенным ниже выводом, который основан на работах Элитцура и Харари [509], а также Бучеллы и др. [504].

Отправной точкой любого вычисления такого рода служит выражение (1.19) из гл. 7 (приложение I, § 2) для собственной электромагнитной

энергии адрона, взятой с точностью до  $e^2$ :

$$\Delta m^2 = -\frac{ie^2}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{q^2 + i\varepsilon} M_\mu^\mu(q, p), \quad (I.1)$$

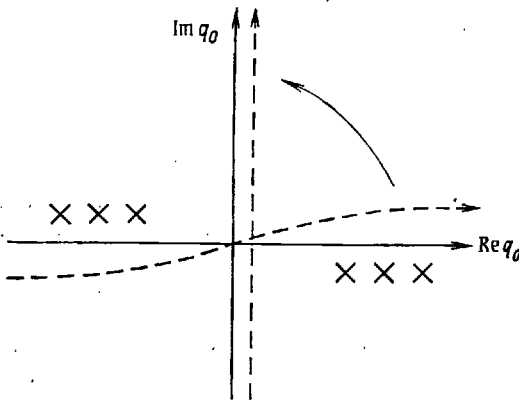
где  $M_{\mu\nu}(q, p)$  — ковариантная амплитуда для виртуального комптоновского рассеяния вперед на адронной мишени:

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}(q, p) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle p | T^* (j_\mu^{\text{ап.-м}}(x) j_\nu^{\text{ап.-м}}(0)) | p \rangle = \\ &= (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) T_1(\nu, q^2) + [\nu(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) - \\ &\quad - \nu^2 g_{\mu\nu} - q^2 p_\mu p_\nu] \frac{T_2(\nu, q^2)}{m^2}. \end{aligned} \quad (I.2)$$

Тогда выражение (I.1) принимает следующий вид:

$$\Delta m^2 = \frac{3ie^2}{2(2\pi)^4} \int d^4q \left[ T_1(\nu, q^2) + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2\nu^2}{m^2 q^2} \right) T_2(\nu, q^2) \right]. \quad (I.3)$$

Мы видим, что в принципе для вычисления  $\Delta m^2$  нужно знать амплитуду комптоновского рассеяния виртуальных фотонов как при пространственно-подобных, так и при времениподобных  $q^2$ . Но Коттингэм [505] заметил, что



Фиг. I.1. Поворот контура интегрирования в плоскости  $q_0$ .

интеграл (I.3) можно вычислить на основе лишь информации об электророждении, т. е. при отрицательных значениях  $q^2$ . Идея состоит в следующем. Предположим, что мы проводим интегрирование по  $q_0$  в выражении (I.3) при фиксированных  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$ . Аналитические свойства функции  $T_i(q_0, \mathbf{q}, \mathbf{p})$  по переменной  $q_0$  определяются представлением Лоу (гл. 7), которое показывает, что сингулярности амплитуды лежат выше оси  $q_0$  при  $\text{Re } q_0 < 0$  и ниже оси  $q_0$  при  $\text{Re } q_0 > 0$  (фиг. I.1).

Путь интегрирования в комплексной плоскости  $q_0$  можно развернуть так, чтобы он совпадал

с мнимой осью (фиг. I.1), при условии, что интегрирование по окружностям бесконечно большого радиуса не дает вклада [506]. Если мы предположим, что это условие выполняется, то можно получить следующее выражение для собственной электромагнитной массы, взятой с точностью до  $e^2$ :

$$\Delta m^2 = \frac{3e^2}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty dq^2 \int_{-q}^q dq_0 (q^2 - q_0^2)^{1/2} \left[ T_1(-q^2, iq_0) + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2q_0^2}{q^2} \right) T_2(-q^2, iq_0) \right]. \quad (I.4)$$

Этой формулой вычисление  $\Delta m^2$  сводится в принципе к вычислению амплитуды комптоновского рассеяния пространственно-подобных виртуальных фотонов. Поскольку экспериментальная информация, которая необходима для вычисления правой части (I.4), отсутствует, в рамках данного приближения мы вынуждены прибегнуть к дисперсионным соотношениям по переменной  $\nu = q\mathbf{p} = m q_0$  (в системе покоя мишени) при фиксированном  $q^2$ , т. е. к обычной технике полюсов Редже и резонансного насыщения.

Как было подчеркнуто в работе Харари [503], в данной ситуации фундаментальным является следующее обстоятельство, отмеченное Вейнбергом и Трейманом [507]. Из правила  $|\Delta I| \leq 1$ , справедливого в однофотонном приближении, следует, что для данного изомультиплета с точностью до  $e^2$  масса равна сумме изоскалярной, изовекторной и изотензорной ( $I = 2$ )

частей. Если написать

$$m(I, I_3) = \alpha_I I_3^2 + \beta_I I_3 + \gamma_I, \quad (I.5)$$

то  $\alpha_I$  описывает вклад с  $I = 2$ , а  $\beta_I$  — вклад с  $I = 1$ . Следовательно, некоторые разности масс в изомультиплете будут преобразовываться просто как изовекторный или изотензорный оператор. Выпишем наиболее интересные из таких комбинаций:

$$\begin{aligned} I = 1 \quad & m(K^+) - m(K^0), \quad m(p) - m(n), \\ & m(\Sigma^+) - m(\Sigma^-), \quad m(\Xi^0) - m(\Xi^-); \\ I = 2 \quad & m(\pi^+) - m(\pi^0), \quad m(\Sigma^+) + m(\Sigma^-) - 2m(\Sigma^0). \end{aligned}$$

Отсюда Харари заключил, что, если при вычислении разностей масс (I.4), соответствующих определенному  $I$ -спину, мы хотим воспользоваться дисперсионными соотношениями для  $T_i(\nu, q^2)$ , то для решения вопроса об асимптотическом поведении  $t_i(q, \nu^2) = \text{Im } T_i(\nu, q^2)$  при большом  $\nu$  и фиксированном  $q^2$  можно использовать полюсную теорию Редже. Введем чистые изоспиновые амплитуды  $t_i^{(I)}(\nu, q^2)$ , которые являются абсорбтивными частями виртуального комптоновского рассеяния, соответствующего изоспину  $I$  в  $t$ -канале. Предполагаемое реджеподобное асимптотическое поведение таково:

$$t_1^{(I)}(\nu, q^2) \underset{q^2 \text{ фиксировано}}{\underset{\nu \rightarrow \infty}{\sim}} \beta_1^{(I)}(q^2) \nu^{\alpha_I}, \quad (I.6)$$

$$t_2^{(I)}(\nu, q^2) \underset{q^2 \text{ фиксировано}}{\underset{\nu \rightarrow \infty}{\sim}} \beta_2^{(I)}(q^2) \nu^{\alpha_I - 2}, \quad (I.7)$$

где  $\alpha_I = \alpha_I(0)$  — траектория Редже при  $t = 0$  (мы рассматриваем комптоновскую амплитуду для рассеяния вперед). Более быстрое убывание  $t_2^{(I)}$  связано с векторным характером токов. Это можно показать, например, методами, изложенными в гл. 1 (приложение II).

Квантовые числа траекторий, дающих вклад в амплитуду  $M_\mu^\mu$ , таковы:

$$I = 1, \quad P = (-1)^J, \quad C = +1, \quad G = -1,$$

$$I = 2, \quad P = (-1)^J, \quad C = +1, \quad G = +1.$$

Тогда в случае  $I = 1$  имеем  $A_2$ -траекторию, для которой [23, стр. 233]  $\alpha_{A_2}(0) \sim 1/3$ , а при  $I = 2$  в отсутствие более конкретной информации предположим, как обычно, что  $\alpha_{I=2}(0) < 0$ . Тогда из вида выражений (I.6) и (I.7) следует, что дисперсионные соотношения для  $T_2^{(2)}(\nu, q^2)$  и  $T_2^{(1)}(\nu, q^2)$  не требуют никаких вычитаний, а в соотношении для  $T_1^{(1)}(\nu, q^2)$  необходимо одно вычитание. Таким образом, в выражение (I.4) для  $(\Delta m^2)_I$  необходимо подставить следующие выражения<sup>1)</sup>:

$$I = 1, \quad P = (-1)^J, \quad C = +1, \quad G = -1,$$

$$I = 2, \quad P = (-1)^J, \quad C = +1, \quad G = +1.$$

$$T_2^{(I)}(\nu, q^2) = \frac{16m^2}{4\nu^2 - q^4} [F^2(q)]_I + \frac{2}{\pi} \int_{\nu_{\text{порог}}}^{\infty} \frac{\nu' d\nu'}{\nu'^2 - \nu^2} t_2^{(I)}(\nu', q^2), \quad (I.8a)$$

$$T_1^{(2)}(\nu, q^2) = \frac{4q^2}{4\nu^2 - q^4} [F^2(q^2)]_{I=2} + \frac{2}{\pi} \int_{\text{порог}}^{\infty} \frac{\nu' d\nu'}{\nu'^2 - \nu^2} t_1^{(2)}(\nu', q^2), \quad (I.8b)$$

$$T_1^{(1)}(\nu, q^2) = T_1^{(1)}(0, q^2) + \frac{16\nu^2 [F^2(q^2)]_{I=1}}{q^2(4\nu^2 - q^4)} + \frac{2\nu^2}{\pi} \int_{\nu_{\text{порог}}}^{\infty} \frac{d\nu' t_1^{(1)}(\nu', q^2)}{(\nu'^2 - \nu^2) \nu'}. \quad (I.8b)$$

<sup>1)</sup> Другая возможная гипотеза: у функции  $T_i^{(I)}$  нет стоячих полюсов [508].



В соотношениях (1.8) мы использовали свойство перекрестной симметрии  $t_i(v, q^2) = -t_i(-v, q^2)$ , а также выделили член, связанный с промежуточным состоянием частица-мишень (борновский член). Символом  $[F^2(q^2)]_I$  обозначена соответствующая комбинация квадратов формфакторов; например, для пионов  $[F^2(q^2)]_{I=2}$  равно

$$[F^2(q^2)]_{\pi^+} - [F^2(q^2)]_{\pi^0} \equiv [F^2(q^2)]_{\pi^+},$$

где  $F(q^2)$  — пионный зарядовый формфактор:

$$\langle p_2 | j_{\mu}^{\text{сп.-м}} | p_1 \rangle = (p_1 + p_2)_{\mu} F_{\pi}(q^2). \tag{I.9}$$

Проведем классификацию различных вкладов в  $(\Delta m^2)_I$ , полученных в результате подстановки выражений (I.8) в выражение (I.4).

В простом случае  $I = 2$  имеем:

- 1) борновский член  $(\Delta m^2)_{I=2}^{\text{Борн}}$ ;
- 2) вклад наиболее легких неупругих резонансов  $(\Delta m^2)_{I=2}^{\text{рез}}$ ;
- 3) высокоэнергетический реджевский вклад  $(\Delta m^2)_{I=2}^{\text{Редже}}$ .

Таким образом,

$$(\Delta m^2)_{I=2} = (\Delta m^2)_{I=2}^{\text{Борн}} + (\Delta m^2)_{I=2}^{\text{рез}} + (\Delta m^2)_{I=2}^{\text{Редже}}. \tag{I.10}$$

В случае  $I = 1$  ситуация усложняется — наличие в (I.8б) вычитательного члена приводит к дополнительному вкладу в  $\Delta m^2$ .

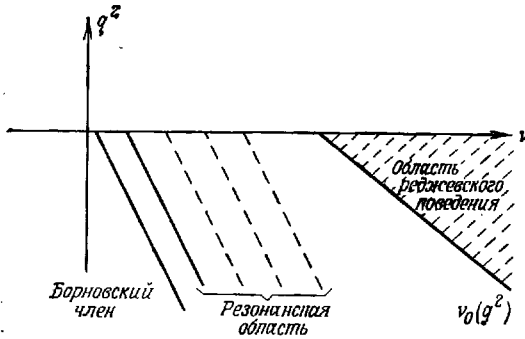
Итак,

$$(\Delta m^2)_{I=1} = (\Delta m^2)_{I=1}^{\text{вычат}} + (\Delta m^2)_{I=1}^{\text{Борн}} + (\Delta m^2)_{I=1}^{\text{рез}} + (\Delta m^2)_{I=1}^{\text{Редже}}. \tag{I.11}$$

Случай  $I = 2$  проще, так как вычитательный член отсутствует и предполагается, что реджевским вкладом можно пренебречь. Действительно,

переход от области наиболее легких резонансов к области полюсов Редже совершается так, чтобы иметь  $v = v_0(q^2)$ , и единственным деликатным вопросом остается зависимость  $v_0$  от  $q^2$ , которая, по предположению, линейна. В соответствии с этой точкой зрения полагаем, что в заштрихованной области фиг. I.2 величина  $t_i(v, q^2)$  определяется формулой Редже.

Допустим, что реджевским вкладом можно пренебречь, а неупругие вклады в основном определяются резонансами. Тогда заметный вклад в интеграл по  $q^2$  в (I.4) дают лишь несколько наиболее легких резонансов, и, так как,



Фиг. I.2. Область определения функций  $t_i(v, q^2)$  в плоскости  $(v, q^2)$ . Заштрихованная область соответствует предполагаемому реджевскому поведению.

по нашему предположению, при больших пространственно-подобных  $q^2$  соответствующие формфакторы быстро сходятся, мы получаем конечный результат. В частности, в случае разности масс  $\pi^+\pi^0$ , предполагая  $F_{\pi}(q^2) = (1 - q^2/m_{\rho}^2)^{-1}$ , мы находим, что  $(\Delta m)_{\pi^+\pi^0}^{\text{Борн}} = 4,3$  МэВ, тогда как учет  $\omega$ -резонанса дает  $\sim 0,15$  МэВ, а вклад  $\phi$ -резонанса пренебрежимо мал [509, 510]. Экспериментальное же значение таково:

$$m_{\pi^+} - m_{\pi^0} = 4,6 \text{ МэВ.}$$

Кроме того, была давно уже объяснена другая известная разность масс с  $I = 2$  (см., например, [511])

$$m_{\Sigma^+} + m_{\Sigma^-} - 2m_{\Sigma^0}.$$

Соответствующие вычисления дают  $(\delta m)_{\text{теор}} \approx 1,7 \text{ МэВ}$ , тогда как  $(\delta m)_{\text{эксп}} = 1,79 \text{ МэВ}$ .

Для разностей масс с  $I = 2$  согласие оказывается весьма удовлетворительным. Этим подтверждается то хорошо известное обстоятельство, что распределение масс в случае  $I = 2$  определяется в основном статической зарядовой структурой пионов и  $\Sigma$ -гиперонов. Действительно, довольно близкие к экспериментальным значения получаются уже при учете чисто упругих вкладов<sup>1)</sup>.

В случае  $I = 1$  положение с разностью масс совсем иное, как это уже давно известно из попыток объяснения разности масс протона и нейтрона. Действительно, результаты первых вычислений, в которых учитывались только нуклонные статические распределения заряда и магнитного момента, не согласовались с экспериментом не только по величине, но и по знаку. Даже приняв во внимание вклад в протонное состояние более тяжелых масс, мы не сможем существенно изменить этот вывод, если ограничимся учетом только статических электрических и магнитных распределений [242]. Это указывает на то, что при  $I = 1$  требуется более углубленное изучение неупругих вкладов, т. е. проблема разности масс в данном случае существенно связана с высокоэнергетической областью. При более современном подходе, которого мы и будем придерживаться, это проявляется в необходимости учитывать траекторию  $\alpha_{A_2}(0)$ , лежащую выше траектории для  $I = 2$ , и, следовательно, в появлении вычитательного члена в соотношениях (I.8a) и (I.11).

В связи с этим оказывается, что для численных расчетов наиболее приемлем сравнительно недавно введенный аппарат ПСКЭ, связывающий область легких резонансов с высокоэнергетическим поведением. Грубо говоря, практически мы сталкиваемся с вопросами двоякого рода: 1) вычисление «вычитательного вклада» и 2) вычисление высокоэнергетического реджевского вклада. И та и другая проблема обнаруживают свою высокоэнергетическую природу.

Чтобы разобраться с пунктом 1, можно выразить  $T_1^{(1)}(0, q^2)$ , написав для  $T_1^{(1)}(v, q^2) - [T_1^{(1)}(v, q^2)]_{\text{Редже}}$  дисперсионное соотношение без вычитания, где

$$[T_1^{(1)}(v, q^2)]_{\text{Редже}} = \beta_1^{(1)}(q^2) v^{\alpha_{A_2}} \frac{1 + e^{-i\pi\alpha_{A_2}}}{\sin \pi\alpha_{A_2}}. \quad (\text{I.12})$$

Итак,

$$[T_1^{(1)}(v, q^2) - [T_1^{(1)}(v, q^2)]_{\text{Редже}}] = \frac{4q^2}{4v^2 - q^4} [F^2(q^2)]_{I=1} + \frac{2}{\pi} \int_{v_{\text{порог}}}^{\infty} \frac{v' dv' t_1^{(1)}(v', q^2)}{v'^2 - v^2} + \frac{2}{\pi} \beta_1^{(1)}(q^2) \int_0^{v_0(q^2)} dv' \frac{(v')^{\alpha_{A_2} + 1}}{v'^2 - v^2}. \quad (\text{I.13})$$

Согласно данному представлению, амплитуда  $T_1^{(1)}(0, q^2)$  будет выражена через параметры нескольких наиболее легких резонансов и параметры Редже [в формулах (I.12) и (I.13) учитывается только ведущий  $A_2$ -член]. Итак, решение вопроса 1 становится таким же, как и вопроса 2, и все упирается в  $A_2$ -вычет  $\beta_1^{(1)}(q^2)$ , который можно вычислить [512] методом ПСКЭ:

$$\int_0^{v_0(q^2)} v t_1^{(1)}(v, q^2) dv = \beta_1^{(1)}(q^2) \frac{v_0^{\alpha_{A_2} + 2}}{\alpha_{A_2} + 2}. \quad (\text{I.14})$$

<sup>1)</sup> Отметим, что при таких вычислениях мы пренебрегаем вкладом  $A_1$ -резонанса, а при вычислении  $\pi^+\pi^0$ -разности масс (гл. 7) методами алгебры токов учет  $A_1$ -резонанса имеет решающее значение. (См. примечание редактора на стр. 287.)

Если все принятые нами гипотезы и приближения допустимы, то после этих манипуляций проблему разностей масс при  $I = 1$  можно свести к вычислениям на основе только низкоэнергетических данных.

Вычисление разности масс  $m_{K^+} - m_{K^0}$ , для которой эксперимент дает  $-3,94$  МэВ, сразу же вознаграждает наши усилия. Вклад же борновского члена равен  $+2,17$  МэВ (неверен знак). Вклад резонанса, если учитывать только  $K^*$ , равен  $0,38$  МэВ. Реджевский вклад незначителен:  $-0,10$  МэВ. Поворотной точкой оказывается учет вычитательного вклада, который оценивается величиной  $-6,30$  МэВ. Окончательный результат таков <sup>1)</sup>:

$$m_{K^+} - m_{K^0} = -3,8 \text{ МэВ,}$$

что удивительно хорошо согласуется с экспериментом. Вычисление другой очень важной разности масс с  $I = 1$ , а именно  $m_p - m_n$ , не сводится столь же простым способом к учету низкоэнергетических вкладов. Та же схема вычислений, что и в каонном случае, оказывается здесь неэффективной [504, 509]. Бучелла и др. [504] высказали мнение, что для точной оценки вычета  $\beta(q^2)$  в данном случае требуется детальная информация о резонансах, относящихся к большим энергиям. Чтобы устранить эту трудность, они предложили использовать корректное определение  $\beta(q^2)$  для каонного случая.

Соотношение между вычетами в обоих случаях может быть получено на основе гипотезы об «универсальной» связи  $A_2$ -траектории с мезонами и гиперонами, предложенной Кабиббо, Горовицем и Нееманом [513]. Бучелле и др. [504] удалось вычислить ряд разностей масс, получив впечатляющее согласие с экспериментальными данными. Результаты их работы суммированы в приведенных ниже таблицах.

Таблица 1.1

	$K+K^0$	$pn$	$\Sigma+\Sigma^-$	$\Xi^0\Xi^-$	$N^*2+N^*0$	$N^*2+N^*-$
$\Delta m_{\text{теор}}$	$-3,80$	$-1,7$	$-9,6$	$-7,9$	$-6$	$-11,3$
$\Delta m_{\text{эксп}}$	$-3,93 \pm 0,13$	$-1,29$	$-8,0 \pm 0,11$	$-6,5 \pm 1,0$	$-0,45 \pm 0,84$	$-7,9 \pm 6,8$

Таблица 2

	$Y_1^{*+} Y_1^{*-}$	$\Xi^*0\Xi^{*-}$	$K^{*+}K^{*0}$
$\Delta m_{\text{теор}}$	$-9,0$	$-5,1$	$-4$
$\Delta m_{\text{эксп}}$	$-5,8 \pm 3,8$	$-4,9 \pm 3$	$-6,3 \pm 4,1$

## Приложение II. Радиационные поправки к $\beta$ -распаду

В данном приложении мы рассмотрим типичную теоретико-полевую проблему — вычисление электромагнитных поправок к  $\beta$ -распаду методом токовых коммутаторов и асимптотического предела Бьёркена — Джонсона — Лоу. Особенно трудный и интересный момент здесь — попытка выделить те стороны проблемы, для которых несущественны детали динамики сильных взаимодействий, а важны лишь самые общие свойства адронных токов.

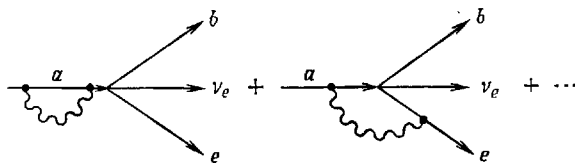
Напомним, что ясность в данном вопросе, а также численная оценка электромагнитных эффектов необходимы для окончательной проверки гипо-

<sup>1)</sup> Цитированные выше значения взяты из работы [504].

тезы универсальности, которая представляет собой утверждение о *голых* константах связи. Поскольку электромагнитные взаимодействия нарушают изоспиновую симметрию, векторная константа связи в адронном матричном элементе  $\langle b | V_{\mu}^I | a \rangle$  будет ренормирована:  $r_{ba}^{(I)} = 1 + O(e^2)$  и метод алгебры токов должен быть пригодным для решения поставленной проблемы. Градиентная инвариантность фактически несколько усложняет вопрос в том смысле, что необходимо учитывать взаимодействие фотона со всеми заряженными частицами. В качестве введения к проблеме <sup>1)</sup> рассмотрим процесс распада

$$a \rightarrow b + e^{-} + \nu_e, \tag{II.1}$$

где  $a$  и  $b$  — точечные частицы со спином  $1/2$ . Радиационные поправки в этом приближении обусловлены собственно-энергетическими и вершинными вкладами (фиг. II.1). Если слабую вершину  $\langle b | I_{\lambda} | a \rangle$  запишем в виде



Фиг. II.1. Радиационные поправки к  $\beta$ -распаду в низшем по  $e^2$  порядке теории возмущений.

$\bar{u}_b \gamma_{\lambda} (1 - \rho \gamma_5) u_a$ , то в представленных на фиг. II.1 диаграммах легко выделить наиболее расходящуюся часть, равную

$$(\delta m)_{\text{расх}} = \text{const} \alpha \int \frac{d^4 q}{q^2} \{ \bar{u}_b \gamma_{\lambda} [Q_b^{\dagger}(1 + \rho)(1 - \gamma_5) - Q_a^{\dagger}(1 - \rho)(1 - \gamma_5)] u_a \bar{u}_e \gamma_{\lambda} (1 - \gamma_5) u_{\nu} \}. \tag{II.2}$$

Итак, расходимость исчезает, если одновременно выполняются условия

$$\begin{aligned} Q_b (1 + \rho) &= 0, \\ Q_a (1 - \rho) &= 0. \end{aligned} \tag{II.3}$$

Это означает, что

$$Q_b = 0, \rho = 1, \tag{II.3'}$$

или

$$Q_a = 0, \rho = -1. \tag{II.3''}$$

Таким образом, мы получаем окончательный результат для  $\mu$ -распада ( $Q_b = 0, \rho = 1$ ), но не для нейтронного  $\beta$ -распада, где  $Q_a^{\dagger} = 0$ , но  $\rho \neq -1$ . Однако можно надеяться, что в реальном случае, когда учитываются сильные взаимодействия, это приведет к появлению естественных формфакторов, что и будет гарантировать конечный результат в целом. Как будет видно из дальнейшего, конечный результат можно получить только в рамках весьма специфических моделей.

### 1. Случай нейтронного $\beta$ -распада<sup>1)</sup>

Представим

$$m = m_0 + \delta m,$$

где  $m_0$  — матричный элемент рассматриваемого процесса в нулевом порядке по  $e$ , который дается выражением]

$$m_0 = \frac{G_0 \cos \theta}{\sqrt{2}} \bar{u}_e(l') \gamma_{\lambda} (1 - \gamma_5) u_{\nu}(l) \langle p(p_2) | J_{\lambda}^{\dagger} | n(p_1) \rangle, \tag{II.4}$$

<sup>1)</sup> См. работу [514] и литературу, цитируемую в ней. Превосходный краткий обзор по данному вопросу можно найти в работах [406, 516].

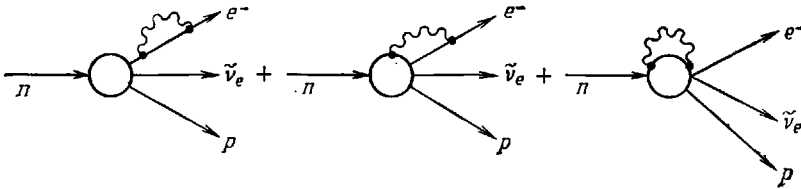
причем  $p_1 = p_2 + l' + l$ , а  $J_\mu^+ = V_\mu^{I^+} - A_\mu^{I^+}$ . Поправки  $\delta m$ , имеющие порядок  $e^2$ , соответствуют диаграммам фиг. II.2, каждая из которых будет рассмотрена отдельно.

а. Собственная энергия электрона. Если нас интересует только наиболее расходящаяся часть, то путем обычных выкладок получаем (мы работаем в фейнмановской калибровке)

$$(\delta m_a)_{\text{расх}} \sim -\frac{\alpha}{8\pi} m_0 \ln \frac{\Lambda}{\lambda^2}, \quad (\text{II.5})$$

где  $\Lambda$  — параметр ультрафиолетового, а  $\lambda$  — инфракрасного обрезания. Как хорошо известно, зависимость от  $\lambda$  исчезает, если принять во внимание тормозное излучение мягких фотонов.

б. Для упрощения вычислений будем пренебрегать лептонными импульсами и примем  $p_2 \approx p_1$  (для четвертых компонент это допустимо в данном



Фиг. II.2. Радиационные поправки к нейтронному  $\beta$ -распаду в низшем по  $e^2$  порядке теории возмущений.

порядке по электромагнитным взаимодействиям). Тогда находим

$$\delta m_b = C \int \frac{d^4 q}{q^2 - \lambda^2} \frac{\bar{u} \gamma_\mu \gamma \alpha \gamma_\nu (1 - \gamma_5) u}{q^2} M^{\mu\nu}(p, q), \quad (\text{II.6})$$

где  $M_{\mu\nu}$  — амплитуда рассеяния, так как процесс

$$p_1 + J_\nu^+ \rightarrow p_2 + J_\mu^{\text{эл.-м}}$$

формально описывается амплитудой

$$M_{\mu\nu}(p, q) = i \int e^{iqx} d^4 x \langle p | T^* (J_\mu^{\text{эл.-м}}(x) J_\nu^+(0) | p \rangle, \quad (\text{II.7})$$

а

$$C = \frac{ie^2 G_0 \cos \theta}{\sqrt{2} (2\pi)^4}.$$

Вычислив лептонную часть <sup>1)</sup>, выражение (II.6) можно представить в виде

$$\delta m_b = C \int \frac{d^4 q}{q^2 (q^2 - \lambda^2)} \bar{u} \gamma_\rho (1 - \gamma_5) u L^{\mu\nu\rho} M_{\mu\nu}(p, q), \quad (\text{II.8})$$

причем

$$L_{\mu\nu\rho} = -i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda - g_{\mu\nu} q_\rho + g_{\nu\rho} q_\mu + g_{\mu\rho} q_\nu. \quad (\text{II.9})$$

Выражение (II.8) упростим, пользуясь тождеством Уорда:

$$q^\mu M_{\mu\nu} = -\langle p | J_\nu^+ | p \rangle + M_\nu.$$

Вид члена  $M_\nu$ , содержащего  $\partial^\mu J_\mu = -\partial^\mu A_\mu$ , сильно зависит от динамических предположений, а непосредственно сказать о нем что-либо определенное очень трудно. Поэтому вводится дальнейшее упрощение, и мы ограничимся вычислением поправок к векторному переходу (как это имеет место в случае  $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N} + e^+ + \nu_e$ ). Итак,

$$q^\mu M_{\mu\nu} \equiv q^\mu M_{\mu\nu}^{(V)} = -\langle p | V_\nu^{I^0} | n \rangle. \quad (\text{II.10})$$

<sup>1)</sup> С использованием общего тождества

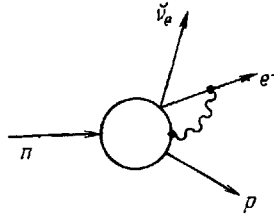
$$\frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu - \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu) + g_{\mu\nu} \gamma_\lambda - g_{\nu\lambda} \gamma_\mu = i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \gamma^\rho \gamma_5.$$

Но, как видно из выражения (II.8), аксиальная часть слабого тока в  $M_{\mu\nu}$  может образовать векторный член еще и за счет свертывания с тензором  $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ . Соответствующая диаграмма, изображающая обмен изовекторным фотоном, приведена на фиг. II.3. Таким образом, находим окончательно

$$\delta m_b = C \int \frac{d^4q}{q^2(q^2-\lambda^2)} \bar{u}\gamma_0(1-\gamma_5)u(-2\langle p|V^{I\rho}|n\rangle - q^\rho M_\mu^{(V)\mu} - i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}q_\lambda M_{\mu\nu}^{(A)}) \equiv \delta m_b^{(V)} - \delta m_b^{(A)}. \quad (II.11)$$

Отложим на некоторое время подробный анализ величины  $\delta m_b^{(A)}$  и перейдем к рассмотрению  $\delta m_c$ .

в. В этом случае имеем (напомним, что мы рассматриваем только век-



Фиг. II.3. Поправки к нейтронному  $\beta$ -распаду, связанные с аксиальной частью слабого тока.

торную часть слабого тока)

$$\delta m_c = \frac{1}{2} C \int \frac{d^4q}{q^2-\lambda^2} \bar{u}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)u M^{\mu\nu\lambda} g_{\mu\nu}, \quad (II.12)$$

причем  $M_{\mu\nu\lambda}$  — амплитуда процесса рассеяния

$$p_1 + V_\lambda(q) \rightarrow p_2 + j_\mu^{\text{эл.-м}}(k) + j_\nu^{\text{эл.-м}},$$

т. е.

$$M_{\mu\nu\lambda} = \int e^{iqx} e^{-iky} d^4x d^4y \langle p_2 | T^* (j_\mu^{\text{эл.-м}}(x) j_\nu^{\text{эл.-м}}(0) V_\lambda^{I+}(y) | p_1 \rangle, \\ k = p_2 - p_1.$$

Применение тождества Уорда дает

$$k^\lambda M_{\mu\nu\lambda}(p_1, q, k) = M_{\mu\nu}^{(V)}(p_1, q, -k) - M_{\mu\nu}^{(V)}(p_1, q), \quad (II.13)$$

и, полагая  $k \approx 0$  ( $p_2 \approx p_1 = p$ ), получаем

$$M_{\mu\nu\lambda}(p, q, 0) = \frac{\partial}{\partial q_\lambda} M_{\mu\nu}^{(V)}(p, q). \quad (II.14)$$

Тогда, преобразуя правую часть соотношения (II.12) методом интегрирования по частям, приходим к простому результату

$$\delta m_c = C \int \frac{d^4q}{(q^2-\lambda^2)^2} \bar{u}\gamma q(1-\gamma_5)u M_\mu^{(V)\mu}(p, q). \quad (II.15)$$

Теперь скомбинируем  $\delta m_c$  и  $\delta m_b^{(V)}$ :

$$\delta m_b^{(V)} + \delta m_c = C \left[ -2 \int \frac{d^4q}{q^2(q^2-\lambda^2)} \bar{u}\gamma^0(1-\gamma_5)u \langle p|V_\rho^I|n\rangle + \lambda^2 \int \frac{d^4q}{q^2(q^2-\lambda^2)^2} \bar{u}\gamma q(1-\gamma_5)u M_\mu^{(V)\mu}(p, q) \right]. \quad (II.16)$$

Второй член сходится по теореме Бьёркена  $M_{\mu}^{\mu} \propto 1/q_0$ , а первый член содержит «структурно-независимую» логарифмическую расходимость<sup>1)</sup>

$$\delta m_{\text{расх}}^{(V)} = -\frac{i\alpha}{4\pi^3} m_0 \int \frac{d^4q}{q^2(q^2-\lambda^2)} = \frac{\alpha}{2\pi} m_0 \ln \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}. \quad (\text{II.17})$$

Сделаем ряд замечаний методического характера. Во-первых, возможность получения модельно-независимого результата связана с тем, что мы пренебрегаем лептонными импульсами: это приводит к простому соотношению (II.14) и позволяет вычислить конечную часть выражения (II.16), учитывая только борновские члены. Во-вторых, здесь были использованы обычные методы, такие, как тождество Уорда, и нигде не были использованы высшие коммутаторы. Но в случае  $\delta m_b^{(A)}$  ситуация иная.

Итак, рассмотрим наконец величину

$$\delta m_b^{(A)} = C \int \frac{d^4q}{q^2(q^2-\lambda^2)} i e^{\mu\nu\lambda\rho} q_{\lambda} \bar{u} \gamma_{\rho} (1-\gamma_5) u M_{\mu\nu}^{(A)}. \quad (\text{II.18})$$

Основной вклад дают члены  $i e_{\mu\nu\lambda\rho} q^{\lambda} \rightarrow i e_{k10j} q_0$ , тогда как для  $M_{\mu\nu}^{(A)}$  имеем

$$M_{ki}^{(A)} \sim -\frac{1}{q_0} \int e^{-iqx} d^3x \langle p | [j_k^{\text{эл.-м}}(x), A_i^{I+}(0) | p \rangle. \quad (\text{II.19})$$

Алгебра полей дает нуль для этого одновременного коммутатора, но интересно рассмотреть модель, подобную кварковой, когда токи имеют вид

$$j_{\mu}^{\text{эл.-м}} = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \left( a_0 + \frac{1}{2} \tau_3 \right) \psi, \quad A_{\nu}^{I+} = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \tau^+ \psi. \quad (\text{II.20})$$

Тогда после простых выкладок получаем

$$[\bar{j}_k^{\text{эл.-м}}(x), A_i^{I+}(0)] = -2a_0 \varepsilon_{kim} V_k^{I+} \delta^3(x). \quad (\text{II.21})$$

С учетом соотношения (II.21) из выражения (II.18) после соответствующих выкладок приходим к следующему выражению для расходящейся части:

$$(\delta m_b^{(A)})_{\text{расх}} \approx -2a_0 m_0 \frac{3\alpha}{8\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m_N^2}. \quad (\text{II.22})$$

(Мы не фиксируем точно поведение  $M_{\mu\nu}$  при малых  $q$  и используем в качестве параметра обрезания снизу нуклонную массу.)

Наконец, объединяя равенства (II.5), (II.17) и (II.22), мы находим, что радиационные поправки могут быть приведены к такому виду:

$$\delta m = m_0 \frac{3\alpha}{8\pi} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{\lambda^2} + 2a_0 \ln \frac{\Lambda^2}{m_N^2} \right) + \text{конечные члены} + \text{часть, связанная с мягкими фотонами.} \quad (\text{II.23})$$

В выражении (II.23) мы видим универсальную, структурно-независимую расходящуюся часть и член с  $a_0$ , который несет в себе всю зависимость от адронной структуры; другие члены можно вычислить, используя нуклонные борновские члены, и результаты оказываются практически структурно-независимыми.

Отметим, что конечный результат можно получить [519—521] при  $a_0 = -1/2$ . Поскольку в модели (II.20) мы имеем  $Q = a_0 + 1/2 \tau_3$ , это соответствует фундаментальному дублету<sup>2)</sup> с зарядами  $-1, 0$  (подобному  $\Xi^-, \Xi^0$ , что согласуется с простейшим условием (II.3). Другими словами, при пере-

1) Логарифмически расходящиеся интегралы вычисляются обычным методом поворота контура.

2) Анализ одного только нейтронного  $\beta$ -распада не дает никакой информации о «странном» члене фундаментального триплета. Во всяком случае ни кварковая модель, ни модель Сакага не относятся к такому классу.

ходе от «Голых» нуклонов к «одетым» оказывается, что условие, которое гарантирует конечную величину радиационных поправок (для векторной части), должно налагаться не на сами физические частицы, а на их фундаментальные составляющие. Трудно, однако, сказать, нужно ли это требование принимать серьезно. Возможно, что из данного примера, так же как и из проведенного ранее анализа электромагнитного расщепления масс, нужно сделать вывод, что учет сильных взаимодействий не может выправить недостатков, присущих нынешним теоретико-полевым методам, и что требуется, по-видимому, новый подход к проблеме вычисления членов высшего порядка по слабым и электромагнитным взаимодействиям <sup>1)</sup>.

## 2. Численные результаты

Чтобы получить значение затравочной векторной константы связи в данной ситуации, можно временно воспользоваться предыдущей формулой (несмотря на наличие в ней параметров обрезания). После подстановки в (II.23) хорошо известных формул для конечных членов и члена, соответствующего вкладу мягких фотонов, находим для чисто векторного перехода

$$G_0 \cos \theta = G_V^\beta \left\{ 1 - \frac{\alpha}{4\pi} \left[ 3(1 + 2a_0) \ln \frac{\Lambda}{m_N} + \frac{3}{2} \ln \frac{m_p}{E_m} - 6 \right] \right\}, \quad (\text{II.24})$$

где  $E_m$  — максимальная энергия электрона.

Применим формулу (II.24) к распаду  $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N} + e^+ + \nu_e$ , для которого  $E_m = 2,3$  МэВ и

$$G_V^\beta = (1,4173 \pm 0,0034) 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3. \quad (\text{II.25})$$

При  $a_0 = -1/2$  получаем  $G_0 \cos \theta / G_V^\beta \approx 0,981$ , тогда как, приняв кварковую модель, т. е.  $a_0 = 1/6$ , приходим к результату, который будет зависеть от обрезания. Варьируя  $\Lambda$  от  $m_N$  до 300 ГэВ (предполагаемый параметр обрезания для слабых взаимодействий) и подставив для  $G_0$  значение, вычисленное из  $\mu$ -распада,<sup>2)</sup>

$$G_0 = (1,4350 \pm 0,004) 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3, \quad (\text{II.26})$$

получаем с помощью формулы (II.24)

$$0,968 < \cos \theta < 0,98 \quad (\text{II.27})$$

т. е.

$$0,20 < \theta < 0,25.$$

Согласие со значениями, найденным по  $K_{13}$ -распаду [при этом, однако, не учитывались поправки второго порядка по нарушающим  $SU(3)$ -симметрию членам],

$$\theta \approx 0,22 \quad (\text{II.28})$$

вполне удовлетворительное.

## Приложение III. Конформные преобразования <sup>2)</sup>

Масштабные преобразования обычно рассматривают формально как часть конформного преобразования. Часто выдвигается гипотеза, что скрытой симметрией элементарных частиц является конформная инвариантность. И, хотя в природе нет неоспоримых подтверждений этой гипотезы, мы считаем, что небесполезно кратко остановиться на данном вопросе.

Конформная инвариантность впервые была введена в физику, когда было замечено, что уравнения Максвелла ковариантны не только относи-

<sup>1)</sup> О роли промежуточного бозона см. работы [522, 523].

<sup>2)</sup> См., например, работы [524, 525].



тельно преобразований группы Пуанкаре, но и относительно более широкой 15-параметрической группы Ли, в которую кроме неоднородных преобразований Лоренца входят растяжения ( $x_\mu \rightarrow x_\mu/\rho$ ) и инверсии ( $x_\mu \rightarrow cx_\mu/x^2$ ).  
Условие

$$ds'^2 = ds^2 \quad (ds^2 \equiv dx_\mu dx^\mu) \quad (\text{III.1})$$

при таких преобразованиях, вообще говоря, не сохраняется, а заменяется более общим условием

$$\sigma(x) ds'^2 = ds^2, \quad (\text{III.2})$$

так что инвариантность имеет место только для уравнений на световом конусе. Итак, конформные преобразования естественным образом связаны с такими общими преобразованиями пространства-времени

$$x'_\mu = f_\mu(x), \quad (\text{III.3})$$

при которых метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  инвариантен, если не считать появления общего скалярного множителя  $\sigma(x)$ :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dx'^\alpha} \frac{dx^\nu}{dx'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = \\ &= g'_{\alpha\beta}(x) dx'^\alpha dx'^\beta = \sigma(x) g_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = \sigma(x) ds'^2. \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Из (III.4) следует соотношение

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} = g_{\lambda\sigma} \sigma(x). \quad (\text{III.5})$$

Тогда, как нетрудно убедиться, самым общим инфинитезимальным преобразованием  $x_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$ , удовлетворяющим уравнению (III.5), оказывается <sup>1)</sup>

$$\delta x_\mu = \varepsilon_\mu + \omega_{\mu\nu} x^\nu + \varepsilon x_\mu + c_\mu x^2 - 2x_\mu c x, \quad (\text{III.6})$$

причем

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu},$$

а  $\varepsilon_\mu$ ,  $\omega_{\mu\nu}$  и  $\varepsilon$  — параметры трансляций, лоренцевых вращений и растяжений, тогда как  $c_\mu$  — четыре параметра, связанных с так называемым специальным конформным преобразованием. Отметим, что конечное специальное конформное преобразование получается в результате последовательного применения инверсии <sup>2)</sup>  $x'_\mu = x_\mu/x^2$ , трансляции и заключительной инверсии:

$$x'_\mu = \left( \frac{x_\mu}{x^2} + c_\mu \right)^{-1} = \frac{x_\mu + c_\mu x^2}{1 + 2cx + x^2 c^2} \quad (\text{III.7})$$

т. е.

$$\delta x_\mu = c_\mu x^2 - 2cx x_\mu. \quad (\text{III.8})$$

Из формулы (III.7) следует соотношение

$$x'^2 = \frac{x^2}{1 + 2cx + x^2 c^2}, \quad (\text{III.9})$$

и мы видим, что в то время как световой конус  $x^2 = 0$  остается инвариантным, обращение в нуль знаменателя делает возможным переход от времени-

<sup>1)</sup> Действительно, с учетом равенств  $x = x' - \delta x$ ,  $\sigma \rightarrow \sigma - \delta\sigma$  приводим уравнение (III.5) к виду

$$\partial_\mu \delta x_\nu + \partial_\nu \delta x_\mu = g_{\mu\nu} \delta\sigma, \quad (\text{III.5}')$$

откуда после ряда выкладок находим, что  $\partial_\mu \partial_\nu \delta\sigma = 0$ , т. е. что функция  $\delta\sigma$  линейна по  $x_\mu$ ; затем уравнение (III.5') можно проинтегрировать, в результате чего приходим к равенству (III.6).

<sup>2)</sup> Отметим, что операция инверсии не связана с единичным оператором непрерывным преобразованием.

подобных к пространственно-подобным интервалам (и наоборот). Таким образом, конформно-инвариантная теория не обязательно причинна.

Теперь перейдем к алгебре полной конформной группы. Для этого установим сперва простые представления конформных генераторов, которые связаны с преобразованиями, изменяющими только аргумент, т. е.

$$\varphi'(x) = e^{iNc}\varphi(x), \quad \varphi'(x') = \varphi(x). \quad (\text{III.10})$$

Для инфинитезимального преобразования (III.8) имеем

$$N_\mu \rightarrow i(2x_\mu x_\nu - g_{\mu\nu}x^2)\partial^\nu \quad (\text{III.11})$$

и, используя аналогичные представления для генераторов, соответствующих группе Пуанкаре и операции растяжения  $P_\mu \rightarrow i\partial_\mu$ ,  $M_{\mu\nu} \rightarrow -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ ,  $D \rightarrow ix\partial$ , определяем

$$\begin{aligned} [P_\mu, D] &= iP_\mu, \quad [M_{\mu\nu}, D] = 0, \quad [D, D] = 0, \\ [P_\mu, N_\nu] &= 2i(g_{\mu\nu}D + M_{\mu\nu}), \quad [N_\mu, N_\nu] = 0, \\ [M_{\mu\nu}, N_\lambda] &= i(g_{\mu\lambda}N_\nu - g_{\nu\lambda}N_\mu), \quad [D, N_\mu] = iN_\mu \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

плюс известные соотношения алгебры Пуанкаре. Из приведенных выше соотношений видно, что при  $\dot{N}_\mu = 0$  мы имеем и  $\dot{D} = 0$  (конечно же и  $\dot{P}_\mu = \dot{M}_\mu = 0$ ), т. е. инвариантность относительно специального конформного преобразования означает масштабную инвариантность. (В то же время ничто не гарантирует нам, что эти соотношения будут существовать и в том случае, когда конформная инвариантность нарушена.)

Приведенные коммутаторы могут быть использованы для установления закона преобразования полевых операторов. Поскольку поля, соответствующие началу координат, преобразуются в поля, отнесенные к той же точке, мы начнем с

$$i[N_\nu, \varphi_\alpha(0)] = n_\nu\varphi_\alpha(0). \quad (\text{III.13})$$

Переход к точке  $x$  дает <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \delta_\mu\varphi &= i[N_\mu, \varphi_\alpha(x)] = i[N_\mu, e^{iPx}\varphi_\alpha(0)e^{-iPx}] = \\ &= [2x_\mu l_\alpha + 2x^\nu\Sigma_{\mu\nu} + 2(x_\mu x_\nu - g_{\mu\nu}x^2) + n_\mu]\varphi_\alpha(0), \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

где был использован следующий коммутатор:

$$i[N_\mu, e^{iPx}] = e^{iPx}[2x^\nu(g_{\mu\nu}D + M_{\mu\nu}) + 2x_\mu Px - x^2 P_\mu].$$

Теперь мы имеем все, чтобы построить лагранжев формализм для генератора  $N_\mu$  и соответствующего тока  $\mathcal{N}_{\mu\nu}$ . Используя общее определение (10.117) и предполагая, что  $n_\mu = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mu\nu} &= \mathcal{L}\delta_\nu x_\mu + \Pi_\mu^\alpha \delta_\nu \varphi_\alpha = \\ &= T_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} (2x^\lambda x_\nu - g_{\nu}^\lambda x^2) + \Pi_\mu^\alpha 2x^\lambda (g_{\nu\lambda} l_\alpha + \Sigma_{\nu\lambda}) \varphi_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Тем же самым путем и с учетом того же условия (10.134), что и в основном тексте книги [при выводе простой формулы (10.132), в которой ток, связанный с операцией растяжения, выражен через модифицированный тензор энергии — импульса  $\theta_{\mu\nu}$ ], можно получить для  $\mathcal{N}_{\mu\nu}$  выражение следующего вида:

$$\mathcal{N}_{\mu\nu} = (2x_\mu x_\lambda - g_{\mu\lambda}x^2)\theta_\nu^\lambda. \quad (\text{III.16})$$

Соответственно этому

$$N_\mu = \int d^3x (2x_\mu x_\lambda - g_{\mu\lambda}x^2)\theta_0^\lambda, \quad (\text{III.17})$$

что согласуется с простым обобщением выражения (III.11).

<sup>1)</sup> Операторы  $\Sigma_{\mu\nu}$  и  $l_\alpha$  определяются коммутаторами типа (III.13), в которых вместо  $N_\nu$  фигурируют  $M_{\mu\nu}$  и  $D$ . — Прим. перев.

Кроме того, мы имеем

$$\partial^\nu \mathcal{N}_{\mu\nu} = 2x_\mu \theta_\nu^\nu \equiv 2x_\mu \partial^\nu j_\nu^D, \quad (\text{III.18})$$

откуда видно [по крайней мере для класса теорий вида (10.139)], что нарушения конформной и масштабной инвариантности связаны между собой очень просто. В частности, в пределе, когда имеет место масштабная инвариантность, конформная инвариантность также имеет место.

Наконец, ясно, что при нарушении конформной симметрии остается неизменной только алгебра трехмерной конформной группы, тогда как на другие коммутационные соотношения будет влиять наличие членов, нарушающих симметрию.

### Приложение IV. Кинематика лептон-нуклонного рассеяния

Мы выведем здесь ряд полезных кинематических соотношений, имеющих отношение к лептон-нуклонному рассеянию. Большинство формул, которые мы рассмотрим, широко используются в данной главе при анализе процессов высокоэнергетического электро- и нейтринорождения.

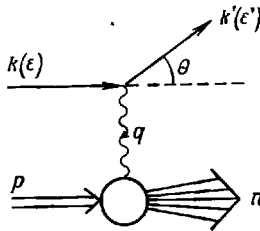
Процесс, к описанию которого мы приступаем, состоит в рассеянии лептона на нуклоне, причем в конечном состоянии появляются лептон и многочастичное адронное состояние  $|n\rangle$ , но детектируется только лептон. В дальнейшем мы будем пренебрегать лептонными массами, ибо, как можно показать, поправки на лептонные массы практически не влияют на результаты в асимптотической области, которую мы будем здесь рассматривать. Начнем с электромагнитного случая.

#### 1. Неупругое рассеяние электронов

В низшем порядке по константе электромагнитного взаимодействия процесс

$$e(k) + N(p) \rightarrow e(k') + n(p_n) \quad (\text{IV.1})$$

представляется фейнмановской диаграммой с однофотонным обменом, изображенной на фиг. IV.1, где  $\varepsilon$  ( $\varepsilon'$ ) — лабораторная энергия электрона в началь-



Фиг. IV.1. Кинематика неупругого рассеяния электронов на ядрах в [однофотонном приближении.

ном (конечном) состоянии,  $\theta$  — угол рассеяния в лабораторной системе координат, а  $k$  и  $k'$ ,  $p$ ,  $q$  и  $p_n$  — 4-импульсы начального и конечного электрона, нуклона-мишени, фотона и рожденных адронов. Амплитуда процесса дается выражением

$$T = \frac{e^2}{q^2} \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \langle p_n | j_\mu^{\text{эл.-м}} | p \rangle, \quad (\text{IV.2})$$

$$p_n = p + k - k' = p + q,$$

и сечение может быть представлено в виде

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\varepsilon'} = \frac{\alpha^2}{2m_N q^4} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} l_{\mu\nu} t^{\mu\nu}. \quad (IV.3)$$

Здесь  $l_{\mu\nu}$  — член, возникающий от лептонной вершины после суммирования по поляризациям:

$$l_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Sp} (\gamma k' \gamma_\mu \gamma k \gamma_\nu) = 2 (k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu - g_{\mu\nu} k k'), \quad (IV.4)$$

тогда как  $t^{\mu\nu}$  — адронная часть, определяющаяся формулой (по спину нуклона проведено усреднение)

$$t_{\mu\nu} = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p + q - p_n) \langle p | j_\mu^{\text{оп.м}} | p_n \rangle \langle p_n | j_\nu^{\text{оп.м}} | p \rangle. \quad (IV.5)$$

Фактически структура  $t_{\mu\nu}$  довольно проста: если принять во внимание условие сохранения тока,  $q^\mu t_{\mu\nu} = 0$ , то приходим к обычному разбиению

$$t_{\mu\nu} = \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1 + \frac{1}{m_N^2} \left( p_\mu - q_\mu \frac{v}{q^2} \right) \left( p_\nu - q_\nu \frac{v}{q^2} \right) W_2, \quad (IV.6)$$

где  $W_{1,2}$  — инвариантные функции, зависящие от скалярных переменных<sup>1)</sup>

$$v = qp = m_N (\varepsilon - \varepsilon') \text{ и } q^2 \approx -4\varepsilon\varepsilon' \sin^2 \frac{1}{2} \theta.$$

Физическая область процесса соответствует тогда значениям

$$q^2 \leq 0, \quad -\frac{1}{2} q^2 \leq v \leq m_N \varepsilon \left( 1 + \frac{q^2}{4\varepsilon} \right).$$

Заметим, что  $W_{1,2}$  должны содержать кинематические нули при  $q^2 = 0$ , чтобы компенсировать сингулярные множители в ковариантах. В частности,

$$W_2 \xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} 0, \quad W_1 + \frac{v^2}{m_N^2 q^2} W_2 \xrightarrow{q^2=0} 0. \quad (IV.7)$$

Комбинируя формулы (IV.4) и (IV.6), можно привести сечение к виду

$$\frac{\pi}{m_N \varepsilon \varepsilon'} \frac{d^2\sigma}{d\Omega' d\varepsilon'} \equiv \frac{d^2\sigma}{d\Omega d|q^2|} = \frac{2\pi\alpha^2}{m_N^2 q^4} \left( \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) \left( 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (VI.8)$$

Удобно связать  $W_{1,2}$  с полными сечениями фоторождения для продольных и поперечных (виртуальных) фотонов. В случае  $q^2 = 0$  (реальные фотоны), используя разбиение (IV.6), находим

$$\sigma_\nu(v, q^2 = 0) = \frac{2\pi^2\alpha}{v} W_1(v, q^2 = 0) = \frac{2\pi^2\alpha}{m_N |q|} W_1(v, 0), \quad (IV.9)$$

где  $|q| = v/m$  — импульс фотона в лабораторной системе координат. В общем случае  $q^2 \neq 0$  и можно разложить пространственные компоненты  $t_{kl}$  ( $t_{0\mu}$  связано с  $t_{kl}$  условием сохранения электромагнитного тока) на продольную и поперечную части:

$$t_{kl} = \left( \delta_{kl} - \frac{q_k q_l}{q^2} \right) W_1 + \frac{q_k q_l}{|q^2|} \frac{q_0^2}{q^2} \left[ -W_1 + W_2 \left( 1 - \frac{v^2}{m_N^2 q^2} \right) \right].$$

Это приводит к соответствующим сечениям

$$\sigma_T(v, q^2) = \frac{2\pi^2\alpha}{m_N |q|} W_1(v, q^2), \quad (IV.10)$$

$$\sigma_S(v, q^2) = \frac{2\pi^2\alpha}{m_N |q|} \left[ -W_1 + W_2 \left( 1 - \frac{v^2}{m_N^2 q^2} \right) \right], \quad (IV.11)$$

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 559. — *Прим. ред.*

где  $|\mathbf{q}|$  — импульс виртуального фотона в лабораторной системе координат:

$$m_N |\mathbf{q}| = (v^2 - m_N^2)^{1/2}.$$

[Отметим, что «пороговое» условие (IV.7) гарантирует равенство нулю продольной части при переходе к реальным фотонам.]

Из формул (IV.10) и (IV.11) следует соотношение

$$W_1 = W_2 \frac{v^2 - m_N^2 q^2}{m_N^2 |q^2|} \left(1 + \frac{\sigma_S}{\sigma_T}\right)^{-1}, \quad (\text{IV.12})$$

так что сечение можно представить параметрически, пользуясь переменными  $W_2$  и  $\sigma_S/\sigma_T = R$ .

Напомним также известные нам результаты для упругого рассеяния релятивистского электрона на точечной частице:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{2\varepsilon}{m_N \sin^2 \frac{\theta}{2}}}, \quad \left(\frac{d\sigma}{d|q^2|}\right)_{\text{точечн}} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

В гл. 8, § 6, п. 2 был рассмотрен предельный случай, когда  $\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow \infty$  при фиксированных  $v, q^2$ . Поскольку  $\theta^2 \sim O(q^2/\varepsilon^2)$ , из формулы (IV.8) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{d^2\sigma}{dvd|q^2|} = \frac{2\pi\alpha^2}{q^4} \frac{W_2}{m_N^2}, \quad (\text{IV.13})$$

т. е. асимптотические свойства сечения в основном определяются функцией  $W_2$ , тогда как более тонкие детали будут зависеть от отношения сечений  $R$ . Имеем также

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{d\sigma}{d|q^2|} = \frac{2\pi\alpha^2}{q^4} \int_{-q^2/2}^{\infty} dv \frac{W_0(v, q^2)}{m_N^2} = \left(\frac{d\sigma}{d|q^2|}\right)_{\text{точечн}} \int_{-q^2/2}^{\infty} dv \frac{W_2(v, q^2)}{m_N^2}. \quad (\text{IV.14})$$

В заключение выпишем ряд общих соотношений для  $t_{\mu\nu}$  (и  $W_1, W_2$ ). Во-первых, поскольку мы рассматриваем только случай  $q_0 \geq 0$ , добавляя в правую часть равенства (IV.5) член, вклад которого равен нулю, можно представить  $t_{\mu\nu}$  в виде коммутатора:

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int e^{iqx} d^4x \langle p | [j_{\mu}^{\text{эл.м}}(x), j_{\nu}^{\text{эл.м}}(0)] | p \rangle. \quad (\text{IV.15})$$

Затем, используя операцию обращения времени

$$t_{\mu\nu}(q, p) = t_{\mu\nu}^*(\tilde{p}, \tilde{q}), \quad \tilde{q} = (q_0, -\mathbf{q}),$$

можно показать, что функции  $W_{1,2}$  вещественны:

$$W_{1,2}^*(v, q^2) = W_{1,2}(v, q^2). \quad (\text{IV.16})$$

Свойство перекрестной симметрии

$$t_{\mu\nu}^*(q, p) = -t_{\mu\nu}(-q, p)$$

приводит к соотношениям симметрии

$$W_{1,2}(v, q^2) = -W_{1,2}(-v, q^2). \quad (\text{IV.17})$$

Наконец, имеются некоторые ограничения, вытекающие из условия положительности. Из основного определения (IV.5) ясно, что для произвольного 4-вектора

$$n^\mu n^\nu t_{\mu\nu} \geq 0.$$

Если разложить  $n_\mu$  по независимым 4-векторам:

$$n_\mu = p_\mu + \alpha q_\mu + \beta r_\mu + \gamma s_\mu$$

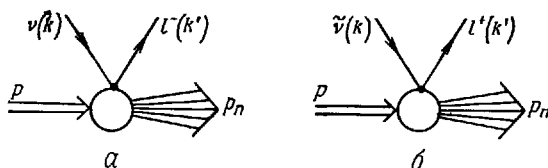
( $p_\mu$  — времениподобный,  $q_\mu$ ,  $r_\mu$ ,  $s_\mu$  — пространственно-подобные векторы), то выписанное условие легко приводится к следующим неравенствам (для физической области процесса электророждения):

$$W_1 \geq 0, \quad -W_2 \left[ 1 - \frac{T_V^2}{m_N^2 q^2} \right] \geq W_1. \quad (IV.18)$$

Соотношения (IV.18) гарантируют нам, что величины  $\sigma_T$  и  $\sigma_S$ , определенные выражениями (IV.10) и (IV.11), положительны, чем и подтверждается их физический смысл сечений.

## 2. Неупругое нейтринное рассеяние

Кинематически этот процесс аналогичен предыдущему, причем в соответствии с диаграммами фиг. IV.2 нейтрино (или антинейтрино) играет роль



Фиг. IV.2. Реакция « $\nu$  (или  $\bar{\nu}$ ) + адрон  $\rightarrow$  лептон + все остальное».

налетающего электрона (а мюон, который может возникнуть в конечном состоянии, является аналогом рассеянного электрона).

Матричный элемент для процесса с участием нейтрино дается выражением

$$T^{(\nu)} = \frac{G}{2} \bar{u}(k'), \quad \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(k) \langle n | J_\mu^+ | p \rangle, \quad (IV.19)$$

где  $J_\mu^+$  — полный слабый адронный ток,

$$J_\mu^+ = J_\mu^{T+} \cos \theta_c + J_\mu^{V+} \sin \theta_c, \quad J \equiv V - A, \quad (IV.20)$$

приводящий в данном случае к состоянию с зарядом 2. Лептонными массами (и даже массой мюона) будем всюду пренебрегать; это хорошее приближение для области больших энергий и больших переданных импульсов. Тогда сечение можно представить в виде

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\varepsilon'} = \frac{G^2}{64\pi^2 m_N} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} l_{\mu\nu} t^{\mu\nu*} \quad (IV.21)$$

Лептонный тензор  $l_{\mu\nu}$  имеет вид <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} l_{\mu\nu} &= \text{Sp} [\gamma k' \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \gamma k \gamma_\nu (1 - \gamma_5)] = \\ &= 8(k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - g_{\mu\nu} k k' - i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} k'^\lambda k^\rho), \end{aligned} \quad (IV.22)$$

тогда как

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}^{(\nu)} &= (2\pi)^3 \sum_n \sum_q \delta^4(p + q - p_n) \langle p | J_\mu^- | n \rangle \langle n | J_\nu^+ | p \rangle \equiv \\ &\equiv t_{\mu\nu}^{VV} + t_{\mu\nu}^{AA} - t_{\mu\nu}^{VA} - t_{\mu\nu}^{AV}. \end{aligned} \quad (IV.23)$$

Таким образом, благодаря присутствию не сохраняющего четность члена, имеется интерференция между аксиальной и векторной частью, и наибо-

<sup>1)</sup> Используется элементарное соотношение

$$\text{Sp} \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu = -4i\varepsilon_{\lambda\mu\rho\nu}.$$

лее общее разложение: по инвариантам таково ( $J_\mu$  и даже  $V_\mu$  не сохраняются):

$$t_{\mu\nu}^{(\nu)} = \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1^{(\nu)} + \left( p_\mu - q_\mu \frac{\nu}{q^2} \right) \left( p_\nu - q_\nu \frac{\nu}{q^2} \right) \frac{W_2^{(\nu)}}{m_N^2} + \\ + i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\lambda q^\sigma \frac{W_3^{(\nu)}}{m_N^2} + q_\mu q_\nu W_4^{(\nu)} + (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) W_5^{(\nu)}. \quad (\text{IV.24})$$

В действительности, поскольку  $q^\mu l_{\mu\nu} \approx 0$ , существенный вклад дают только  $W_{1, 2, 3}$ , и мы находим окончательно

$$\frac{\pi}{m_N \varepsilon \varepsilon'} \frac{d^2\sigma^{(\nu, \bar{\nu})}}{d\Omega d\varepsilon'} = \frac{d^2\sigma^{(\nu, \bar{\nu})}}{d\nu d|q^2|} = \\ = \frac{G^2}{4\pi m_N^2} \left( \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) \left[ 2W_1^{(\nu, \bar{\nu})} \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2^{(\nu, \bar{\nu})} \cos^2 \frac{\theta}{2} \mp 2W_3^{(\nu, \bar{\nu})} \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{m_N} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (\text{IV.25})$$

Амплитуду процесса с участием антинейтрино можно получить, если в определении  $t_{\mu\nu}$  произвести замену  $J_\mu^+ \leftrightarrow J_\mu^-$ ; оказывается, что в этом случае интерференционный член должен иметь противоположный знак (чтобы удовлетворить условиям зарядового сопряжения).

Как и в электромагнитном случае, можно далее связать  $W_1, W_2, W_3$  с полными сечениями поглощения векторных мезонов. Мы находим

$$\sigma_S = \frac{\pi}{2m_N |q|} \left[ -W_1 + W_2 \left( 1 - \frac{\nu^2}{m_N^2 q^2} \right) \right], \quad (\text{IV.26})$$

$$\sigma_{R, L} = \frac{\pi}{2m_N |q|} \left[ W_1 \mp \frac{|q|}{m_N} W_3 \right], \quad (\text{IV.27})$$

причем  $\sigma_S$  — по-прежнему сечение поглощения продольных мезонов, тогда как  $\sigma_{R, L}$  относятся к сечениям поглощения векторных мезонов с правой и левой поляризациями (они различны из-за наличия члена, нарушающего четность).

Из предыдущих соотношений следует

$$W_1 = W_2 \frac{\nu^2 - m^2 q^2}{m^2 |q^2|} \frac{\sigma_R + \sigma_L}{2\sigma_S + \sigma_R + \sigma_L}, \\ W_3 = W_2 \frac{(\nu^2 - m^2 q^2)^{1/2}}{|q^2|} \frac{-\sigma_R + \sigma_L}{2\sigma_S + \sigma_R + \sigma_L}.$$

В случае асимптотической конфигурации, когда  $\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow \infty$ , а  $q^2, \nu$  фиксированы, имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{d^2\sigma^{(\nu, \bar{\nu})}}{d\nu d|q^2|} = \frac{G^2}{4\pi} \frac{W_2^{(\nu, \bar{\nu})}}{m^2}, \quad (\text{IV.28})$$

или

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{d\sigma^{(\nu, \bar{\nu})}}{d|q^2|} = \frac{G^2}{4\pi m_N^2} \int_{-q^2/2}^{\infty} d\nu W_2^{(\nu, \bar{\nu})}(\nu, q^2) = \left( \frac{d\sigma}{d|q^2|} \right)_{\text{точечн}} \frac{1}{4m_N^2} \int_{-q^2/2}^{\infty} d\nu W_2^{(\nu, \bar{\nu})}. \quad (\text{IV.29})$$

В этом пределе сечения в основном опять воспроизводятся функцией  $W_2$ . Перечислим, наконец, общие свойства функции

$$t_{\mu\nu}^{(\nu, \bar{\nu})} = \frac{1}{2\pi} \int e^{iqx} d^4x \langle p | [J_\mu^\mp(x), J_\nu^\pm(0)] | p \rangle. \quad (\text{IV.30})$$

Операция обращения времени гарантирует вещественность  $W_{1, 2, \dots, 5}$ , тогда как свойство перекрестной симметрии

$$t_{\mu\nu}^{(\nu)*}(q, p) = -t_{\mu\nu}^{(\bar{\nu})}(-q, p) \quad (\text{IV.31})$$

означает, что

$$W_i^{(v)}(v, q^2) = -W_i^{(v)}(-v, q^2). \quad (IV.32)$$

Кроме того, элементарные рассуждения, основанные на изотопической симметрии, показывают, что при  $\theta_c = 0$ , т. е. при  $J_\mu^+ \equiv J_\mu^{I+}$  мы имеем

$$\langle p | [J_\mu^+, J_\nu^-] | p \rangle = \langle n | [J_\mu^-, J_\nu^+] | n \rangle, \quad (IV.33)$$

откуда приходим к следующему результату:

$$W_i^{vp} = W_i^{\bar{v}p}, \quad W_i^{\bar{v}n} = W_i^{vp}. \quad (IV.34)$$

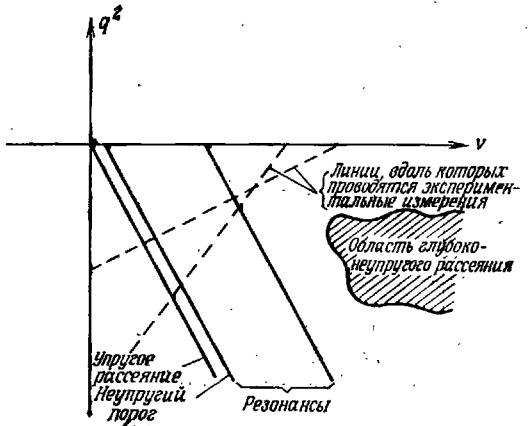
Условие, которое следует из требования положительности, выражается более сложным образом, чем это было в электромагнитном случае, и мы не будем здесь его касаться.

### Приложение V. Краткая сводка экспериментальных данных о лептон-нуклонном рассеянии

В этом приложении мы довольно кратко изложим имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные <sup>1)</sup> о высокоэнергетических лептон-нуклонных столкновениях для случая, когда в конечном состоянии детектируется только лептон. Все обозначения и кинематические величины уже встречались в предыдущем приложении.

Экспериментальные результаты для электромагнитного случая в однофотонном приближении описываются двумя инвариантными функциями  $W_1$  и  $W_2$  (или же  $\sigma_S$  и  $\sigma_T$ ) кинематических переменных  $v$ ,  $q^2$ . Для первого ознакомления на фиг. V.1 приведен кинематический график в  $(v, q^2)$ -плоскости. Для удобства введем инвариантную массу (или недостающую массу) конечного адронного состояния.

$$W^2 = (p + q)^2 = m_N^2 + q^2 + 2v. \quad (V.1)$$



Фиг. V.1. Плоскость  $(q^2, v)$  для лептон-нуклонного рассеяния.

Тогда физическая область лептон-нуклонного рассеяния будет ограничена значениями  $W^2 > m_N^2, q^2 \leq 0$ . Линия  $W^2 = m_N^2$  соответствует упругому столкновению, а  $q^2 = 0$  соответствует фотопоглощению. Прямая  $W = m_N + m_\pi$  представляет наинизший неупругий порог образования пиона, а линии  $W = M^* > m_N + m_\pi$ , вообще говоря, соответствуют рождению резонансов, для которых в настоящее время имеются данные вплоть до  $W \approx 2$  ГэВ. Наконец, кроме упругих и резонансных возбуждений имеется обширная область континуума, т. е. глубоко неупругая область, являющаяся в настоящее время объектом интенсивного экспериментального исследования на Стэнфордском линейном ускорителе (СЛАК), в Массачусетском технологическом институте (МИТ) и на немецком электронном синхротроне (ДЭЗИ).

<sup>1)</sup> Данные, приводимые в этом приложении, взяты главным образом из доклада Фридмана [568], а также из доклада Блума [569]. Обзор давних по нейтринным экспериментам можно найти в статье Льюэллин-Смита [570]. Эти статьи содержат исчерпывающую библиографию экспериментальных работ.



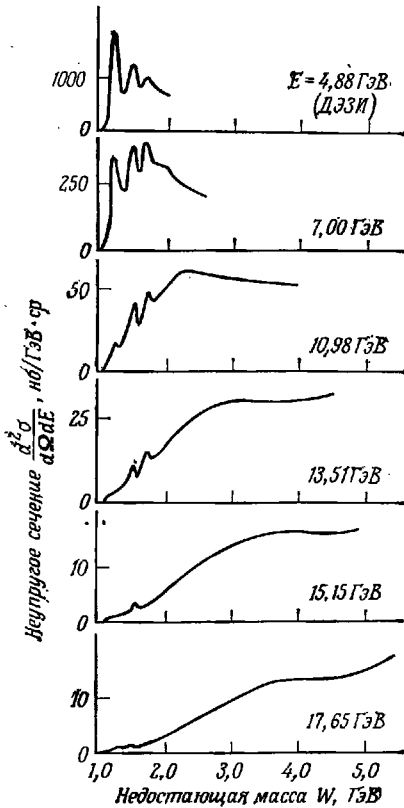
Эксперименты проводятся при близких значениях  $\varepsilon'$  энергии рассеянного электрона, при фиксированной энергии налетающего электрона  $\varepsilon$  и при фиксированном угле рассеяния  $\theta$ , т. е.

$$-q^2 = 4\varepsilon \left( \varepsilon - \frac{v}{m_N} \right) \sin^2 \frac{1}{2} \theta, \quad (V.2)$$

две из которых показаны на фиг. V.1. Наконец, область кинематических переменных, где в настоящее время имеются экспериментальные данные, лежит в пределах

$$m_N < W < 5,5 \text{ ГэВ}, \quad (V.3)$$

$$0,3 \left( \frac{\text{ГэВ}}{c} \right)^2 < q^2 < 20 \left( \frac{\text{ГэВ}}{c} \right)^2,$$



Фиг. V.2. Схематические графики сечения неупругого электрон-протонного рассеяния при разных значениях энергии налетающего электрона и при фиксированном угле  $\theta = 10^\circ$ .

что для отдельного определения  $W_1$  и  $W_2$ , эквивалентного определению  $R = \sigma_s / \sigma_T$  [формула (IV.12)], нужно проводить измерения при разных углах и фиксированных значениях  $v$  и  $q^2$ . Этого можно достичь при соответствующем изменении  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$ , и в настоящее время такие измерения проведены лишь для ограниченного числа наборов  $q^2$  и  $v$ . Имеющиеся данные позволяют сделать о структурных функциях следующие выводы:

<sup>1)</sup> Ситуация оказывается полностью аналогичной случаю атомных и ядерных электронных столкновений, когда процесс может быть упругим, а может и приводить к возбуждению дискретных уровней или к разрушению мишени, с которым связан континуум неупругих процессов.

<sup>2)</sup> Точнее говоря, сечение, полученное интегрированием  $d^2\sigma/d\Omega d\nu |q^2|$  по  $\nu$  при фиксированном  $q^2$ , того же самого порядка величины, что и моттовское сечение для точечной частицы [например, для последней диаграммы фиг. V.2 мы имеем  $(d\sigma/d\Omega)_{\text{точечн}} \approx 0,3 \cdot 10^{-30} \text{ см}^2/\text{ср}$ ].

что соответствует лабораторным значениям  $\varepsilon$  и  $\theta$ , заключенным в интервалах  $4,5 \text{ ГэВ} < \varepsilon < 19,5 \text{ ГэВ}$  и  $6^\circ < \theta < 34^\circ$ .

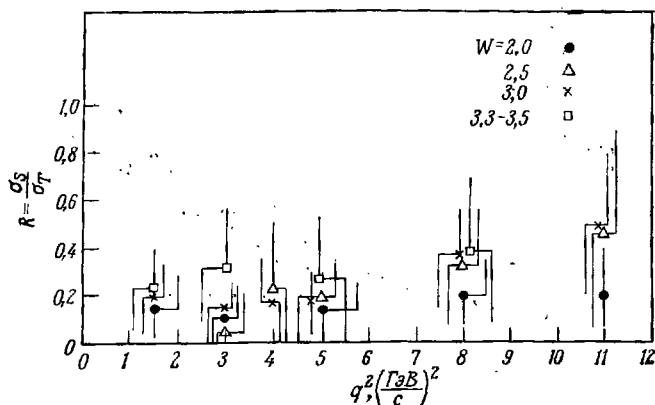
Ряд типичных спектров для неупругого электрон-протонного рассеяния представлен на фиг. V.2, где мы можем также проследить зависимость неупругого сечения от  $\varepsilon$  при фиксированном угле  $\theta = 10^\circ$  (такая же зависимость наблюдается, когда  $\theta$  растет, а  $\varepsilon \geq 10 \text{ ГэВ}$  — фиксировано). На первом графике ясно видны резонансные пики (здесь вычтен вклад упругого пика), а также область континуума<sup>1)</sup>. В области малых углов и энергий наблюдается преимущественно возбуждение дискретных уровней, но при больших значениях этих переменных, т. е. при возрастающих  $|q^2|$  в рассеянии доминируют каналы континуума. Следовательно, эксперименты указывают на быстрое подавление резонансных пиков при возрастании  $|q^2|$ , так что в конце концов остается лишь гладкий спектр, по порядку величины совпадающий с тем, что дает рассеяние на точечных частицах<sup>2)</sup>.

Кроме выяснения этих общих закономерностей, главной целью экспериментов является определение неупругих структурных функций  $W_1$  и  $W_2$ . Очевидно,

1. Значения  $R = \sigma_S/\sigma_T$  лежат в пределах 0—0,5, и не наблюдается каких-либо сильных кинематических вариаций этой величины. В предположении, что для экспериментально исследованной кинематической области величина  $R$  постоянна, получаем среднее значение

$$R = 0,18 \pm 0,10. \quad (V.4)$$

Хотя другие простые зависимости  $R$  от  $q^2$  также не противоречат этим данным, малое значение  $R$  не позволяет заключить с полной определенностью, что сечение  $\sigma_S$  существенно отличается от нуля (фиг. V.3).

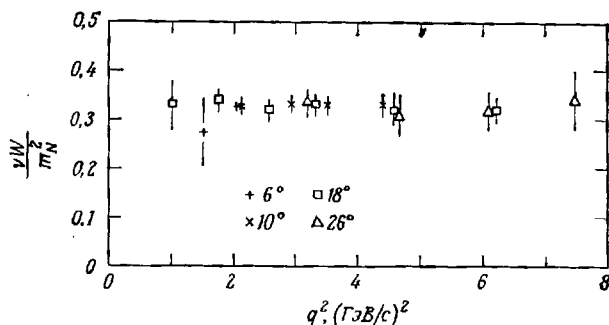


Фиг. V.3. Измеренные значения  $R = \sigma_S/\sigma_T$  в зависимости от  $q^2$  при равных значениях  $W$ .

2. Функции  $\nu W_2$  и  $W_1$  масштабно-инвариантны (обладают свойством «скейлинга»), т. е. они зависят не от  $\nu$  и  $q^2$  по-отдельности, а только от отношения

$$\omega = \frac{2\nu}{q^2} = 1 - \frac{W^2 - m_N^2}{q^2}$$

в довольно широкой экспериментальной области (исключение — резонансная область  $W$  и область не слишком малых значений  $|q^2|$  :  $|q^2| >$



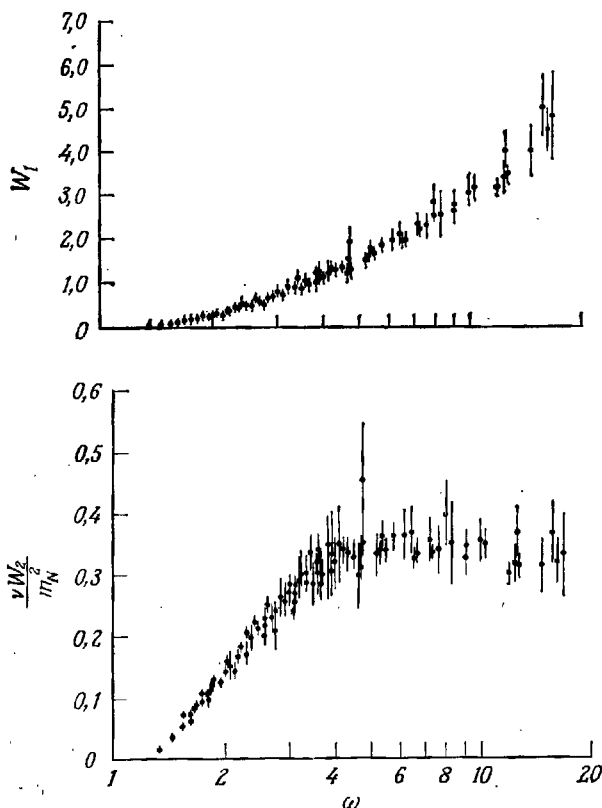
Фиг. V.4. Зависимость величины  $\nu W_2/m_N^2$  от  $q^2$  при  $\omega = 4$  и  $W > 2$  Гэв.

$> 1$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>). В наличии скейлинга мы сразу же убедимся, построив график зависимости  $\nu W_2$  от  $q^2$  при фиксированном  $\omega$ . Такой график представлен на фиг. V.4 при  $\omega = 4$ , причем для отношения  $R$  взято постоянное значение (V.4)<sup>1</sup>).

Что же касается зависимости от  $\omega$ , то, вообще говоря, скейлинг имеет место в интервале  $4 \leq \omega \leq 12$ , когда  $W > 2$  ГэВ [ $|q^2| > 1$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>]; при

<sup>1</sup>) На фиг. V.4 (и V.5) представлена обще принятая функция  $\nu W_2/m_N^2$  (см. примечание на стр. 559). — *Прим. ред.*

$\omega < 4$  мы будем в области скейлинга, если  $W > 2,6$  ГэВ [ $|q^2| > 2$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>], тогда как при  $\omega > 12$  надежная проверка скейлинга еще невозможна из-за неопределенности в значениях  $R$ . На фиг. V.5 представлена зависимость величин  $\nu W_2/m_N^2$  и  $2W_1$  от  $\omega$  при  $W > 2,6$  ГэВ [ $|q^2| > 1$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>,  $R \approx \text{const} = 0,18$ ]. Мы видим, что скейлинг проявляется весьма недвусмысленно, т. е. экспериментальные данные можно аппроксимировать универсальными функциями только переменной  $\omega$ . В этой связи напомним, что, как говорилось в основном тексте главы, точный смысл скейлинга



Фиг. V.5. Зависимость величин  $\nu W_2/m_N^2$  и  $2W_1$  от  $\omega$  при  $R = 0,18$ ,  $W > 2,6$  ГэВ и  $|q^2| > 1$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>.

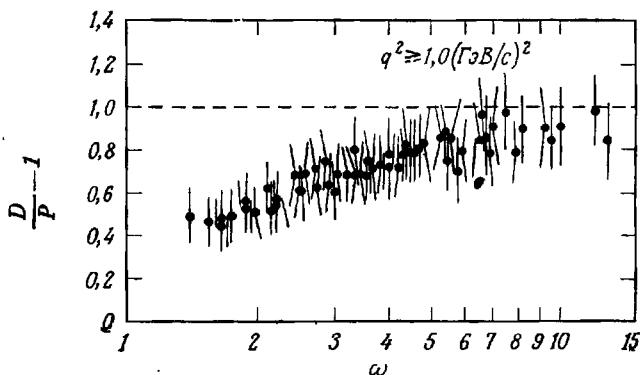
Бьёркена таков: при  $\nu$ ,  $|q^2| \rightarrow \infty$  величины  $\nu W_2$  и  $W_1$  становятся негравитационными функциями переменной  $\omega$ , которая при таком предельном переходе считается фиксированной. Поэтому представляется удивительным и не совсем ясным то обстоятельство, что скейлинговое поведение наблюдается уже при тех сравнительно малых значениях  $\nu$  и  $|q^2|$ , которые исследованы в настоящее время<sup>1)</sup>.

3. Наблюдаются различия в рассеянии электронов на протонах и нейтронах. Соответствующие данные были получены в результате серии измерений неупругого рассеяния на дейтроне. Если пренебречь поправками, связанными с внутренним движением и подобными эффектами, то нейтронное сечение ( $N$ ) можно определить как разность дейтронного ( $D$ ) и протонного

<sup>1)</sup> Отметим, что для аппроксимации экспериментальных данных пригодна также любая другая величина, которая сходится к  $\omega$  в бьёркеновском пределе, например функция  $\omega' = \omega - (m_N^2/q^2)$ .

( $P$ ) сечений. На фиг. V.6 представлены значения величины  $(D/P) - 1$ , которая при указанных условиях должна давать зависимость отношения нейтронного сечения к протонному от переменной  $\omega$ .

Экспериментальные данные снова аппроксимируются универсальной функцией переменной  $\omega$  (что указывает на наличие скейлинга), но одновременно обнаруживается и отчетливое различие между протонным и нейтронным сечениями. Это говорит о наличии зависящей от изоспина компоненты, которая оказывает влияние на процесс рассеяния. С точки зрения теории Редже это равносильно утверждению, что асимптотическое поведение функций  $\nu W_2$  и  $W_1$  при больших  $\nu$  (т. е. при больших  $\omega$ ) носит недифракционный



Фиг. V.6. Зависимость величины  $(D/P - 1)$  от  $\omega$ .

характер, т. е. обмен траекторией Померанчука в данном случае отсутствует. Поскольку  $\nu W_2 \sim s\omega^{\alpha-1}$ , при больших  $\omega$  эта величина должна убывать. Имеющиеся экспериментальные данные не исключают такой возможности. Таким образом, можно говорить о замечательном соотношении между резонансной областью и областью скейлинга, и тем самым открывается новое, чрезвычайно интересное направление исследований.

В заключение скажем несколько слов о процессах с участием нейтрино. Имеющиеся экспериментальные данные еще слишком скудны, чтобы можно было определить по отдельности вклады трех ядерных структурных функций  $W_1, W_2, W_3$ . Но гипотеза скейлинга может найти подтверждение в энергетической зависимости полного нейтринного сечения. Действительно, можно показать, что в пределе при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  и при условии, что справедливо предположение о скейлинговых пределах (10.257), полное сечение дается формулой

$$\sigma^{\nu, \bar{\nu}}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow \infty}{\sim} \frac{G^2 m_N \varepsilon}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\omega}{2\omega^2} \left\{ F_2^{\nu, \bar{\nu}}(\omega) + \frac{2}{3\omega} [F_1^{\nu, \bar{\nu}}(\omega) \mp F_3^{\nu, \bar{\nu}}(\omega)] \right\} \propto G^2 m_N \varepsilon. \quad (V.5)$$

Такую линейную энергетическую зависимость просто объяснить, исходя из соотношений размерности: поскольку в асимптотической области массы уже не являются существенной характеристикой процесса, в низшем порядке по  $G^2$  единственно возможное выражение для сечения имеет вид

$$\sigma \propto G^2 p k = G^2 m_N \varepsilon.$$

Возрастание  $\sigma$  при увеличении  $\varepsilon$  подтверждается результатами экспериментов, проведенных в ЦЕРНе, на пузырьковой камере. В интервале  $2 \text{ ГэВ} < \varepsilon < 14 \text{ ГэВ}$  эти результаты могут быть аналитически представлены формулой

$$\sigma^{\nu} = (0,52 \pm 0,13) \frac{G^2 m_N \varepsilon}{\pi}. \quad (V.6)$$

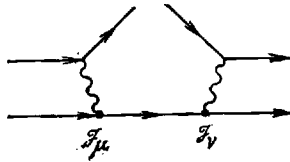
Важно также то, что новейшие данные не противоречат обращению в нуль продольного сечения  $\sigma_S$  (т. е. равенству  $F_1 = 1/2 \omega F_2$ ). Мы уже говорили о соответствующих теоретических выводах и еще остановимся на этом вопросе в гл. 11.

### Приложение VI. Вычисления, основанные на партонной модели

В данном приложении мы набросаем схему вывода результатов, приведенных в § 5, п. 6 для случая кварк-антикварковой партонной модели. Одночастичный вклад в сечение лептонного рассеяния на кварках соответствует диаграмме, представленной на фиг. VI.1. В зависимости от рассматриваемого процесса вершина  $\mathcal{Y}_\mu$  такова:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_\mu &= \gamma_\mu \frac{1}{2} \left( \tau_3 + \frac{1}{3} \right) \text{ для электронного рассеяния,} \\ \mathcal{Y}_\mu &= \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \tau_+ \text{ для нейтринного рассеяния,} \\ \mathcal{Y}_\mu &= \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \tau_- \text{ для антинейтринного рассеяния.} \end{aligned} \quad (\text{VI.1})$$

Пренебрегая массами и обозначая символом  $|a\rangle$  изоспиновое состояние мише-



Фиг. VI.1.

ни, находим, что матричный элемент, соответствующий фиг. VI.1, имеет вид

$$i t_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Sp} \{ \bar{a} | \gamma_P \mathcal{Y}_\mu (\gamma_P + \gamma_Q) \mathcal{Y}_\nu | a \} \delta(2\nu + u). \quad (\text{VI.2})$$

Изоспиновую и пространственно-временную зависимости можно исследовать отдельно. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tau_{\mu\nu}^\pm &= \text{Sp} [ \gamma_P \gamma_\mu (\gamma_P + \gamma_Q) \gamma_\nu (1 \pm \gamma_5) ], \\ \tau_{\mu\nu}^{(0)} &= \frac{1}{2} \text{Sp}_1 [ \gamma_P \gamma_\mu (\gamma_P + \gamma_Q) \gamma_\nu ] = \frac{1}{4} (\tau_{\mu\nu}^+ + \tau_{\mu\nu}^-). \end{aligned} \quad (\text{VI.3})$$

Используя условие  $2\nu + u = 0$ , связанное с наличием в выражении (VI.2)  $\delta$ -функции, нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \tau_{\mu\nu}^\pm &= 4\nu I_{\mu\nu}^{(1)} + 8m^2 I_{\mu\nu}^{(2)} \pm 4m^2 I_{\mu\nu}^{(3)}, \\ \tau_{\mu\nu}^{(0)} &= 2\nu I_{\mu\nu}^{(1)} + 4m^2 I_{\mu\nu}^{(2)}, \end{aligned} \quad (\text{VI.4})$$

причем  $I_{\mu\nu}^{(i)}$  — тензоры, определенные так же, как и в основном тексте [формулы (10.235) и (10.251)].

Это дает нам, во-первых, общее соотношение (как следствие того, что спин кварка равен  $1/2$ )

$$W_2^\alpha = \frac{2m^2}{\nu} W_1^\alpha. \quad (\text{VI.5})$$

Во-вторых, мы имеем

$$W_1^\alpha = 4\nu \sigma_1^\alpha \delta(2\nu + u), \quad W_3^\alpha = 4m^2 \sigma_3^\alpha \delta(2\nu + u). \quad (\text{VI.6})$$

Здесь  $\sigma_1^\alpha, \sigma_3^\alpha$  — константы, учитывающие разный изоспиновый характер мишени и токов (их значения для любого процесса приведены в табл. VI.1, где  $q_1, q_2, q_3$  — соответствующие кварки).

Таблица VI.1

Реакция	$\frac{eq_1}{\bar{e}q_1}$	$\frac{eq_2}{\bar{e}q_2}$	$\frac{eq_3}{\bar{e}q_3}$	$\frac{\nu q_1}{\bar{\nu}q_1}$	$\frac{\bar{\nu}q_1}{\nu q_1}$	$\frac{\nu q_2}{\bar{\nu}q_2}$	$\frac{\bar{\nu}q_2}{\nu q_2}$
$\sigma_1$	$2/9$	$1/18$	$1/18$	0	1	1	0
$\sigma_3$				0	1	-1	0

И наконец, в скейлинговом пределе находим

$$\begin{aligned}
 F_1^\alpha &= \sigma_1 2m\delta(1-x), & F_2^\alpha &= 2xF_1^\alpha, \\
 F_3^\alpha &= \sigma_3^\alpha 2m\delta(1-x), & x &= -\frac{u}{2\nu}.
 \end{aligned}
 \tag{VI.7}$$

Подставляя вместо  $\delta(1-x)$  функции распределения кварков [ $a(x), b(x), c(x)$ ] и антикварков [ $\bar{a}(x), \bar{b}(x), \bar{c}(x)$ ], сразу же получаем формулы для рассеяния на физических протонных и нейтронных мишенях (10.316) — (10.318), цитированные в § 5, п. 6.

# II Коммутаторы токов на световом конусе

## § 1. Введение

Цель этой заключительной главы — дать единое представление о ряде уже затрагивавшихся проблем и о некоторых новейших исследованиях, общей чертой которых является то, что большое внимание в них уделяется поведению коммутаторов на световом конусе. Во введении мы кратко охарактеризуем все эти проблемы.

Насколько нам известно, важное значение поведения коммутаторов на световом конусе обнаружилось при использовании метода бесконечно большого импульса, который был предложен как метод применения абстрактной одновременной алгебры токов в правилах сумм при фиксированной массе. Наличие связи между предельным переходом к бесконечно большому импульсу и световым конусом было, несомненно, замечено сразу же (но прошло некоторое время, прежде чем эта связь была в какой-то мере исследована [47, 250—253, 536, 537, 557]). Было установлено, что общие правила сумм алгебры токов (гл. 8, § 1, п. 2) можно получить путем введения алгебры новых «зарядов», образованных интегрированием величин  $n^\mu j_\mu^\alpha(x)$ , компонент токов, в плоскости  $nx = \text{const}$ , где  $n^2 = 0$ , т. е. в светоподобной плоскости. Точнее говоря, было показано, что если ввести оператор

$$\tilde{j}_\alpha(k) = \int d^4x e^{ikx} \delta(nx - \tau) n^\mu j_\mu^\alpha(x), \quad (11.1)$$

то основой для вывода общего правила сумм алгебры токов может служить «алгебра на световом конусе»<sup>1)</sup>:

$$[\tilde{j}_\alpha(k_1), \tilde{j}_\beta(k_2)] = i f_{\alpha\beta\gamma} \tilde{j}_\gamma(k_1 + k_2). \quad (11.2)$$

Чтобы получить нужное правило сумм, следует вычислить матричные элементы обеих частей соотношения (11.2) между состояниями с конечным импульсом и использовать условие полноты.

Иной путь исследований, основанный на методе бесконечно большого импульса, привел к тому же самому принципу светового конуса. Мы уже сталкивались (при изложении результатов Вейнберга [305], гл. 8, § 9, п. 2) с интересным анализом предела бесконечно большого импульса для упорядоченного по времени ряда теории возмущений. В этом случае результаты, полученные в базисе, движущемся со скоростью света по отношению к центру масс системы, были представлены в форме набора правил для построения графиков и получения соответствующих амплитуд. Это направление исследований привело и к другим важным работам, в которых изучается роль более сложных теорий — теорий взаимодействия полей, обладающих спином, причем основное внимание, естественно, уделяется электродинамике.

<sup>1)</sup> Как отмечено выше, уравнение  $nx = \text{const}$  при  $n^2 = 0$  представляет собой уравнение светоподобной плоскости. Следует, однако, помнить, что на светоподобной плоскости все расстояния пространственно-подобны (поэтому любой коммутатор локальных операторов равен нулю в силу принципа причинности), кроме расстояний между точками на прямой, общей со световым конусом. Поэтому можно говорить об алгебре на световом конусе.

Есть основания надеяться, что такие исследования приведут к созданию ультрарелятивистского приближения [308, 538—541]. Методом бесконечно большого импульса исследовалось высокоэнергетическое поведение класса фермионовских функций в электродинамике. Результатом явилась интересная картина: при рассеянии двух высокоэнергетических электромагнитно-взаимодействующих частиц с конечной передачей импульса процесс рассеяния можно рассматривать так, как будто происходит рассеяние «голых» квантов, соответствующих начальному и конечному состояниям.

Весьма оригинальный метод, значение которого выходит за рамки квантовой электродинамики при бесконечно большом импульсе, был предложен в работах [309, 361, 542, 559—561]. Идея метода <sup>1)</sup> состоит в непосредственном проведении теоретико-полевого канонического квантования на светоподобной плоскости.

Для удобства введем переменные

$$x^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^3), \quad (11.3)$$

$$x_{\perp} = (x^1, x^2).$$

Правила канонического квантования задаются на поверхности  $x^+ = \text{const}$ , точнее  $x^+ = 0$ . Замечая, что

$$x^2 = 2x^+x^- - x_{\perp}^2, \quad (11.4)$$

получаем, что  $x^2 = -x_{\perp}^2$  при  $x^+ = 0$  и вследствие принципа причинности любой коммутатор может быть отличным от нуля на плоскости  $x^+ = 0$  лишь при  $x_{\perp} = 0$ . Следовательно, коммутатор представляет собой функцию только «расстояния»  $x^-$  между аргументами используемых локальных операторов. Авторы развивают эту изящную теорию и показывают, что она воспроизводит прежние результаты электродинамики при высоких энергиях и в то же время позволяет глубже проникнуть в суть дела. Например, ряд теории возмущений, упорядоченный по  $x^+$ , дает правила сумм Вейнберга при бесконечном импульсе. Таким образом, мы видим, что квантование на световом конусе является ключом к пониманию применения методов предельного перехода  $p \rightarrow \infty$  в теории возмущений.

Интересно, что физическая картина рассеяния при бесконечно большом импульсе, вырисовывающаяся в итоге работ данного направления, очень похожа на ту, которую мы получили в предыдущей главе на основе партонной модели. Действительно, теоретико-полевая реализация партонной модели становится более понятной после исследования, проведенного в работах Дрелла — Леви — Яна [489—492]. Ясна связь квантования на световом конусе с партонной моделью. В самом деле, метод светового конуса должен наилучшим образом соответствовать описанию групп частиц, движущихся со скоростью света, а партоны именно так и движутся по отношению к лептонам в глубоко неупругих инклюзивных реакциях. Причины этого указаны в предыдущей главе.

Напомним, что партонная модель приобрела свою «популярность» в основном потому, что она позволяет элементарно объяснить скейлинг в экспериментах по глубоконеупругому рассеянию. В первоначальном же выводе скейлинга Бьёркеном [485] масштабно-инвариантные функции были связаны с фурье-образами определенных пределов коммутаторов при  $p \rightarrow \infty$ . Асимптотические правила сумм, как это следует из результатов предыдущей главы, также связывают моменты масштабно-инвариантных функций с пределами матричных элементов одновременных коммутаторов при  $p \rightarrow \infty$ . Это заставляет задуматься о том, нет ли более тесной связи между коммутаторами на световом конусе, пределом матричных элементов при  $p \rightarrow \infty$ , масштабно-инвариантными функциями и партонной моделью.

<sup>1)</sup> Впервые выдвинутая Дираком [558] в 1949 г.



Действительно, масштабно-инвариантные функции в неупругой области прямо связаны с поведением матричных элементов соответствующих коммутаторов токов на световом конусе [498, 499, 543—545, 557, 558, 562, 563]. Эту связь очень легко установить путем столь же простых преобразований, как и при исследовании предела Бьеркена — Джонсона — Лоу (гл. 7, § 3, п. 5; гл. 10, § 3). Мы отмечали, что при  $x^+ = 0$  матричный элемент коммутатора токов представляет собой по существу функцию одной переменной  $x^-$ , а из этого сразу же следует, что его фурье-образ есть масштабно-инвариантная функция.

Асимптотические правила сумм, связанные с коммутаторами на световом конусе, оказываются при этом прямым следствием: моменты масштабно-инвариантных функций определяются соответствующими членами разложения матричных элементов коммутаторов на световом конусе по степеням  $x^-$ , т. е. соответствующими производными коммутаторов вдоль светового конуса, взятых в начале координат.

Чтобы покончить с вопросом о связи с методом бесконечно большого импульса, отметим следующее важное обстоятельство. В тех теориях, в которых асимптотическое поведение коммутаторов на световом конусе совпадает с поведением коммутаторов свободных полей, предел одновременных коммутационных соотношений при  $p \rightarrow \infty$  существует и связан с коммутатором тех же операторов на световом конусе при  $x^- = 0$ ; предел бесконечно большого импульса для производных по времени от матричных элементов одновременных коммутаторов связан с соответствующими производными по  $x^-$  от матричных элементов коммутаторов на световом конусе, взятыми при  $x^- = 0$ . Другими словами, информация о зависимости коммутатора на световом конусе от  $x^-$  соответствует информации об одновременных коммутационных соотношениях для операторов и всех их производных по времени в пределе бесконечно большого импульса. Эту связь можно объяснить, указав, что в то время, как коммутационные соотношения на световом конусе являются функцией переменной  $x^-$ , каждый одновременный коммутатор существенно локализован, ибо равенство  $x^0 = 0$  в силу условия причинности означает, что и  $x^u = 0$ .

Теперь ясно, почему асимптотические правила сумм и масштабно-инвариантные функции связаны с пределом матричных элементов коммутаторов при  $p \rightarrow \infty$ . Суть дела в том, что переход к пределу при  $p \rightarrow \infty$  выделяет из одновременного коммутатора часть информации о коммутаторе на световом конусе.

Если оставить на время в стороне вопрос о прямой связи алгебры на световом конусе с партонной моделью, то в концептуальном плане самым важным будет возрастание роли коммутаторов на световом конусе в физике высоких энергий. Как следует из той части предыдущей главы, где речь шла об экспериментах в глубоконеупругой области, теоретический порядок в данном вопросе навести очень трудно. Поскольку мы не имеем законченной теории, приходится прибегать к самым абстрактным и сложным теоретическим методам.

Мы были свидетелями применения группы масштабных преобразований в сочетании с понятием динамических размерностей как основного способа описания поведения на малых расстояниях в теории, о которой мы ничего не знаем. Наличие канонических размерностей означает, что на малых расстояниях коммутаторы ведут себя так же, как свободные поля; аномальные же размерности означают, что взаимодействие изменяет коммутаторы и что, может быть, вообще нельзя дать никакой классификации по размерностям.

Простые примеры того и другого случая встречались нам в потенциальной теории, где все определялось тем, как потенциал ведет себя на малых расстояниях (гл. 10, § 4, п. 7). Там мы тоже могли бы исходить из представ-

ления о растяжении, но в этом нет необходимости, ибо мы имеем в своем распоряжении дифференциальное уравнение!

Мощный метод исследования поведения коммутаторов на малых расстояниях был предложен Вильсоном [479] (гл. 10, § 4, п. 7). Он основан на операторном разложении произведения локальных операторов в окрестности точки  $x^\mu = 0$ . Этот метод позволяет исследовать асимптотическое поведение произведения операторов, делая общие предположения об их асимптотической размерности и об их существовании (гл. 10, § 4, п. 7). Брандт и Препарата [546, 547, 553], а также Фришман [548] обобщили этот метод так, чтобы можно было исследовать поведение в окрестности светового конуса.

Подводя итог, можно сказать, что самое важное в поведении коммутаторов на световом конусе — это масштабная инвариантность структурных функций глубококонепругих процессов, которой требуют элементарные представления о размерности. Такую масштабную инвариантность можно обеспечить, если поведение коммутаторов на световом конусе соответствует теории токов, построенных на свободных полях, или модели теоретико-полевого взаимодействия с обрезанием типа модели Дрелла — Леви — Яна. Успех партонной модели свидетельствует в пользу простых результатов теории свободных полей.

Исходя из вышеизложенного, Фрич и Гелл-Манн [549] высказали предположение, что требуемые коммутаторы токов на световом конусе следует искать, отталкиваясь от простой модели свободных  $SU(3) \otimes SU(3)$ -кварков со спином  $1/2$ . Алгебра коммутаторов токов

$$f_\mu^\alpha = \bar{q}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda^\alpha q(x)$$

на световом конусе приводит к введению<sup>1</sup> так называемых бислокальных обобщенных токов, а именно

$$y_\mu^\alpha(x, y) = \bar{q}(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda^\alpha q(y).$$

Естественным следствием введения таких операторов оказывается простая масштабная инвариантность структурных функций глубококонепругих процессов и прямая связь этих функций с матричными элементами бислокальных операторов, зависящими от расстояния на световом конусе.

Алгебра коммутаторов бислокальных операторов на световом конусе является замкнутой, и еще не все следствия данного обстоятельства полностью установлены.

Предположение о том, что токовые коммутаторы на световом конусе можно построить на основе свободных полей, несомненно, относится к сильным динамическим допущениям, и важно выяснить, какие выводы и в какой мере останутся в силе при наличии взаимодействия. Этот вопрос рассматривали Гросс и Трейман [550] и Корнуэлл и Джакив [551], применившие при изучении коммутаторов токов очень изящный метод квантования на световом конусе.

После того как было выяснено значение коммутаторов на световом конусе в вопросе о скейлинге, становится понятной связь между партонной моделью и алгеброй на световом конусе. Если предположить, что коммутаторы на световом конусе ведут себя, как в теории свободных полей, то структурные функции будут иметь в скейлинговом пределе вид суперпозиции амплитуд рассеяния на элементарных составляющих, точно так же, как в партонной модели (взяв, кроме алгебры свободных кварков, и матричные элементы из теории свободных кварков, мы получили бы для адронов структурные функции элементарных кварков). Те предсказания модели партонов, которые подтверждаются анализом алгебры токов на световом конусе, наиболее надежны, т. е. они не связаны с менее очевидными частностями модели.

Отметим, что даже если представление о свободных полях получит дальнейшее подтверждение, останется нерешенным очень важный вопрос: а в чем причина этого? Чем обусловлен скейлинг или чем объясняется обрезание, благодаря которому асимптотическое поведение коммутаторов токов оказывается таким же, как и в теории свободных полей?

Все излагаемое в данной главе, весьма вероятно, будет началом нового необычайно интересного развития физики высоких энергий.

Материал главы расположен следующим образом. В § 2 все проблемы рассматриваются в рамках не очень правдоподобной, но любопытной модели скалярных токов, образованных из свободных скалярных «кварков». Преимущество данной модели в том, что становится очевидной физическая подоплека теории. Рассматривается вопрос о связи коммутаторов на световом конусе с одновременными коммутаторами, затем устанавливается связь с масштабно-инвариантными функциями, причем выводится «скалярный» аналог асимптотических правил сумм.

Уяснив себе, таким образом, физическое содержание, мы переходим в § 3 к выводу коммутаторов токов в рамках модели свободных  $SU(3) \otimes \otimes SU(3)$ -кварков со спином  $1/2$ , а затем в § 4 исследуем вопрос о скейлинге и в § 5 — вопрос о связи с партонной моделью.

Наконец, в § 6 из коммутационных соотношений на световом конусе выводятся правила сумм при фиксированной массе. Метод коммутаторов на световом конусе дает, пожалуй, самый прямой способ получения правил сумм при фиксированной массе, как уже отмечалось в работе Дикуса, Джаквива и Теплица [552]. В этом параграфе на основе общих соотношений между матричными элементами одновременных коммутаторов в пределе при  $p \rightarrow \infty$  и матричными элементами коммутаторов на световом конусе анализируется вопрос о том, как правила сумм, полученные из коммутаторов на световом конусе, связаны со старыми правилами сумм.

В приложении I подробно вычисляются коммутаторы на световом конусе в кварковой модели, а в приложении II кратко излагается метод канонического квантования на световом конусе.

## § 2. Скалярная теория

Исследование коммутаторов на световом конусе мы начнем с того, что рассмотрим нейтральное скалярное поле  $\phi(x)$  и билинейный оператор <sup>1)</sup>

$$j_{\mu}^{\dagger}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi^{\dagger}(x) \partial_{\mu} \phi(x), \quad (11.5)$$

который будет у нас играть роль оператора тока. Наша задача [состоит в изучении поведения коммутатора  $[j_{\mu}(x), j_{\nu}(y)]$  на световом конусе. Самый изящный способ решения этой задачи — применить метод канонического квантования на световом конусе [551]. Этот метод изложен в приложении II, откуда мы узнаем, что в частном случае (11.5) вид коммутатора не зависит от модели. (В более сложных случаях, таких, как  $j_{\mu} = \phi^{\dagger} \partial_{\mu} \phi$ , результаты модельно-зависимы, причем степень зависимости от модели определяется тем, какую компоненту тока  $j_{\mu}$  мы берем.) Таким образом, вычисление коммутаторов на световом конусе в этом простейшем возможном случае оправданно: мы вычислим эти коммутаторы, основываясь на теории безмассового свободного мезонного поля.

<sup>1)</sup> Строго говоря, следовало бы взять произведение операторов в нормальном порядке [548], т. е. :  $\phi^{\dagger} \phi = \phi^{\dagger} \phi - (0 | \phi^{\dagger} \phi | 0)$ . Вместо этого мы будем в дальнейшем иметь дело только со связанными матричными элементами, что эквивалентно.

Конечно, в случае свободных безмассовых полей коммутаторы известны во всех точках. Они имеют вид

$$i [\varphi(x), \varphi(y)] = D(x - y), \quad (11.6)$$

где

$$D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx} \varepsilon(k^0) \delta(k^2) d^4k = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(x^2). \quad (11.7)$$

При этом коммутатор двух токов имеет вид

$$i [j(x), j(y)] = 2J(x, y) D(x - y), \quad (11.8)$$

где  $J(x, y)$  — *белокальный оператор* (т. е. оператор, зависящий и от  $x$  и от  $y$ ), определяющийся простым выражением

$$J(x, y) = \frac{1}{2} [\varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)\varphi(x)]. \quad (11.9)$$

В нашем упрощенном примере оператор  $J(x, y)$  обладает свойством симметрии

$$J(x, y) = J(y, x). \quad (11.10)$$

В более же общем случае, когда речь будет идти о полях кварков с внутренними квантовыми числами, такими, как изоспин и странность, соотношения типа (11.10) не будут иметь места.

Прежде чем переходить к пределу светового конуса в соотношении (11.8), напомним, что в силу трансляционной инвариантности теории одну из двух точек (например,  $y$ ) можно без потери общности поместить в начало координат и тогда соотношение (11.8) примет вид

$$i [j(x), j(0)] = 2I(x) D(x), \quad (11.8')$$

где

$$I(x) \equiv J(x, 0). \quad (11.9')$$

Теперь нам нужно перейти на световой конус, выполнив предельный переход  $x^+ \rightarrow 0$ . Заметим, что в этом пределе обобщенная функция  $D(x)$  претерпевает разрыв<sup>1)</sup>:

$$\lim_{x^+ \rightarrow 0 \pm} D(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \theta(x^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp) & \text{при } x^+ \rightarrow 0+, \\ -\frac{1}{2} \theta(-x^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp) & \text{при } 0 x^+ \rightarrow 0-. \end{cases} \quad (11.7')$$

Следовательно, мы имеем

$$i [j(x), j(0)]_{x^+ \rightarrow 0} = \begin{cases} I(x^-) \theta(x^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp) & \text{при } x^+ \rightarrow 0+, \\ -I(x^-) \theta(-x^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp) & \text{при } x^+ \rightarrow 0-, \end{cases} \quad (11.11)$$

где введено обозначение

$$I(x^-) = \lim_{\substack{x^+ \rightarrow 0 \\ \mathbf{x}_\perp \rightarrow 0}} I(x). \quad (11.12)$$

Разрыв непрерывности этого коммутатора в пределе при  $x^+ \rightarrow 0$ , обусловленный требованием причинности, ведет, как мы увидим, к масштабной инвариантности амплитуды, связанной с глубококонепругим рассеянием.

<sup>1)</sup> Соотношение (11.7') следует, конечно, понимать в смысле обобщенных функций, т. е. при выполнении интегрирования по  $x^-$ ,  $\mathbf{x}_\perp$  с пробной функцией  $f$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_f(x^+) &= \int dx^- \int d^2\mathbf{x}_\perp D(x) f(x^+, x^-, \mathbf{x}_\perp) = \frac{1}{2} \theta(x^+) \int_0^\infty dx^- f(x^+, x^-, 0) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \theta(-x^+) \int_{-\infty}^0 dx^- f(x^+, x^-, 0). \end{aligned}$$

Для удобства введем «коммутатор на световом конусе»  $[j(x), j(0)]_{x^+=0}$ , равный среднему значению предыдущего оператора:

$$i [j(x), j(0)]_{x^+=0} = \frac{1}{2} I(x^-) \varepsilon(x^-) \delta^2(x_\perp). \quad (11.11')$$

Теперь можно найти соотношение между матричными элементами одновременных коммутаторов в пределе бесконечно большого импульса и коммутаторами на световом конусе. Рассмотрим одночастичный матричный элемент билокального оператора

$$\langle p_- | J(0, x) | p \rangle \equiv \langle p | I(x) | p \rangle = G(p, x). \quad (11.13)$$

В силу трансляционной инвариантности имеем

$$\langle p | I(x) | p \rangle = \langle p | I(-x) | p \rangle,$$

так что  $G(p, x)$  есть четная функция переменной  $x^\mu$ . Вследствие релятивистской инвариантности величина  $G$  зависит только от двух инвариантных переменных:

$$\sigma = px, \quad \tau = x^2, \quad (11.14)$$

и мы окончательно получаем

$$i \langle p | [j(x), j(0)] | p \rangle = 2G(\sigma, \tau) D(x). \quad (11.15)$$

На световом конусе ( $x^+ \rightarrow 0, x_\perp \rightarrow 0$ ) имеем

$$\begin{aligned} \sigma = px \rightarrow p^+ x^-, \quad \tau = 2x^+ x^- - x_\perp^2 \rightarrow 0, \\ \langle p | [I_+(x^-)] | p \rangle = g_+^i(p^+ x^-), \end{aligned} \quad (11.16)$$

где

$$g_+^i(\sigma) \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0} G(\sigma, \tau). \quad (11.17)$$

Разложим  $I(x^-)$  в ряд по степеням  $x^-$ :

$$I(x^-) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \frac{(x^-)^n}{n!}. \quad (11.18)$$

Раскладывая  $g(\sigma)$  в ряд, из равенства (11.16) получим

$$\langle p | [I_n] | p \rangle = g_n (p^+)^n, \quad (11.19)$$

где

$$g_n = \left. \frac{\partial^n g(\sigma)}{\partial \sigma^n} \right|_{\sigma=0} = \frac{1}{(p^+)^n} \langle p | I_n | p \rangle. \quad (11.20)$$

Теперь можно найти соотношения между коммутаторами на световом конусе и одновременными коммутаторами, связав фундаментальные постоянные  $g_n$  из равенств (11.19) и (11.20) с  $n$ -ми производными по времени от  $G(p, x)$ , взятыми в соответствующем пределе бесконечно большого импульса. Исходное выражение имеет вид

$$i \langle p | \left[ \frac{\partial^{nj}(x, t)}{\partial t^n}, j(0) \right]_{t=0} | p \rangle = 2 \frac{\partial^n}{\partial t^n} G_+(p, x) D(x) \Big|_{t=0}. \quad (11.21)$$

И  $G$  и  $D$  зависят от времени, так что в правой части равенства (11.21) будет, вообще говоря, сложное выражение, в которое войдут все производные функции  $G$ . Но из этого сложного выражения можно выделить производные одной лишь функции  $G$ , если перейти к системе бесконечно большого импульса. Посмотрим, в частности, каков вид ведущего члена в пределе при  $p \rightarrow \infty$ ; очевидно, что главный вклад будет соответствовать первому исчезающему члену, содержащему высшие производные  $G(px, x^2)$  по  $x^0$  и  $x$ , так как импульс

$p$  появляется только в функции  $G(px, x^2)$ . Учитывая тождество

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial x_0^k} D(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ четном,} \\ (\nabla^2)^{(k-1)/2} \delta^3(x) & \text{при } k \text{ нечетном} \end{cases} \quad (11.22)$$

и интегрируя по  $d^3x$ , находим

$$\begin{aligned} i \int d^3x \langle p | \left[ \frac{\partial^n j(x)}{\partial x_0^n}, j(0) \right]_{x_0=0} | p \rangle &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int d^3x \left[ \frac{\partial^{n-k} G}{\partial x_0^{n-k}} \frac{\partial^k D}{\partial x_0^k} \right]_{x_0=0} = \\ &= 2 \sum_{k=1, 3, \dots}^n \binom{n}{k} \left[ (\nabla^2)^{(k-1)/2} \frac{\partial^{n-k}}{\partial x_0^{n-k}} G(px, x^2) \right]_{\substack{x_0=0 \\ x=0}}. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Кроме того, из равенств (11.17) и (11.18) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p_0^n} \frac{\partial^n G}{\partial x_0^n} \Big|_{\substack{x_0=0 \\ x=0}} &= \frac{d^n g(\sigma)}{d\sigma^n} \Big|_{\sigma=0} \equiv g_n, \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p_0^n} (\nabla^2)^{n/2} G \Big|_{\substack{x_0=0 \\ x=0}} &= g_n \quad (n \text{ четное}). \end{aligned} \quad (11.24)$$

И наконец, принимая во внимание соотношение

$$\sum_{k=1, 3, \dots}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0, 2, \dots}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1} \quad (n \geq 1), \quad (11.25)$$

получаем важный результат

$$g_n = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{i}{2^{n+1} p_0^n} \int d^3x \langle p | \left[ \frac{\partial^{n+1} j(x)}{\partial x_0^{n+1}}, j(0) \right]_{x_0=0} | p \rangle. \quad (11.26)$$

Как и следовало ожидать, в силу свойств симметрии функции  $G(px, x^2)$  постоянная  $g_n$  обращается в нуль при нечетном  $n$ .

Равенство (11.26) показывает, что постоянные  $g_n$  связаны простым соотношением с матричными элементами коммутаторов, фигурирующими в асимптотических правилах сумм (гл. 10, § 5, п. 5), взятыми в пределе бесконечно большого импульса. Это, конечно, говорит о тесной связи между коммутаторами на световом конусе и бьёркеновским скейлингом.

Для удобства при исследовании этого важного вопроса введем фурье-образ матричного элемента (11.15):

$$t(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle p | [j(x), j(0)] | p \rangle = \frac{1}{i\pi} \int d^4x e^{iqx} G(p, x) D(x), \quad (11.27)$$

который в данной упрощенной модели будет аналогом рассматривавшихся ранее (гл. 10) структурных функций глубоконеупругого лептон-нуклонного рассеяния<sup>1)</sup>.

В силу релятивистской инвариантности  $t(q, p)$  в действительности представляет собой функцию переменных

$$v = qp, \quad u = q^2. \quad (11.28)$$

Положив для простоты  $\mathbf{p}_T = 0$  и  $\mathbf{q}_T = 0$ , получаем

$$v = p^+ q^- + p^- q^+, \quad u = 2q^+ q^-. \quad (11.29)$$

В глубоконеупругую область (где  $v$  и  $u$  стремятся к бесконечности при постоянном отношении  $v/u$ ) можно перейти, фиксировав  $p^\mu$  и  $q^+$  и устремив  $q^-$  к бесконечности так, что

$$\frac{v}{p^+} \sim \frac{u}{2q^+} \sim q^-, \quad q^- \rightarrow \infty. \quad (11.30)$$

<sup>1)</sup> Соответственно этому будем считать  $q^\mu$  пространственно-подобным вектором.

При этом <sup>1)</sup>

$$\xi \equiv -\frac{u}{2v} \rightarrow -\frac{q^+}{p^+} \quad (11.31)$$

и, как в гл. 10, § 5, величина  $\xi$  изменяется в интервале  $-1 \leq \xi \leq 1$ .

Теперь, чтобы вычислить  $t(v, u)$  в асимптотическом пределе (11.30), воспользуемся методом светового конуса. Введем функцию <sup>2)</sup>

$$\psi(x^+, x^-) = \int d^2x_{\perp} G(x^+, x^-, \mathbf{x}_{\perp}) D(x^+, x^-, \mathbf{x}_{\perp}). \quad (11.32)$$

В силу требования причинности функция  $\psi(x^+, x^-)$  отлична от нуля только в областях

$$\begin{aligned} x^+ > 0, \quad x^- > 0, \\ x^+ < 0, \quad x^- < 0. \end{aligned}$$

Далее, введем функцию

$$\Psi(x^+) = \int_{-\infty}^{-\infty} dx^- \exp(iq^+x^-) \psi(x^+x^-). \quad (11.33)$$

Она будет играть центральную роль в дальнейших рассуждениях. Отметим наличие разрыва у этой функции при  $x^+ = 0$ :

$$\Psi(0+) - \Psi(0-) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx^- \exp(iq^+x^-) g(p^+x^-). \quad (11.34)$$

В соответствии с соотношениями (11.27) и (11.33) получаем

$$t(q^+, q^-) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx^+ \exp(iq^-x^+) \Psi(x^+). \quad (11.35)$$

Теперь можно приступить к изучению асимптотического поведения  $t(q^+, q^-)$  при  $q^- \rightarrow \infty$  и фиксированных значениях  $q^+$  и  $p$ . Это можно легко сделать, применив обычный способ интегрирования по частям. Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} \int dx^+ \exp(iq^-x^+) \Psi(x^+) &= \frac{i}{q^-} [\Psi(0+) - \Psi(0-)] + \\ &+ \frac{i}{q^-} \int dx^+ \exp(iq^-x^+) \frac{\partial}{\partial x^+} \Psi(x^+). \end{aligned} \quad (11.36)$$

О пределе при  $q^- \rightarrow \infty$  можно сказать точно то же самое, что и о пределе Бьёркена — Джонсона — Лоу (гл. 7, § 3, п. 5): ведущим при  $q^- \rightarrow 0$  будет первое слагаемое в правой части тождества (11.36), содержащее информацию о коммутаторе токов при  $x^+ = 0$ . Таким образом, используя равенство (11.34), получаем соотношение

$$\lim_{q^- \rightarrow \infty} q^- t(q^+, q^-) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(iq^+x^-) g(p^+x^-) dx^-. \quad (11.37)$$

Перепишем это соотношение в более привычной форме, вспоминая, что  $v \sim p^+q^-$ , и возвращаясь к инвариантной амплитуде. Если положить

$$\sigma = p^+x^-, \quad (11.38)$$

<sup>1)</sup> Во избежание недоразумений величину, которую в гл. 10 мы обозначали через  $x$ , здесь обозначаем через  $\xi$ .

<sup>2)</sup> Явное выражение для функции  $\psi(x^+, x^-)$  таково:

$$\psi(x^+, x^-) = \frac{1}{2} g(p^+x^- + p^-x^+) [\theta(x^+) \theta(x^-) - \theta(-x^+) \theta(-x^-)].$$

то соотношение (11.37) примет вид

$$\lim_{\substack{v \rightarrow \infty \\ \xi = \text{const}}} vt(v, u) = F(\xi), \quad (11.39)$$

где

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\sigma\xi} g(\sigma) d\sigma. \quad (11.40)$$

Из изложенного выше мы можем сделать важный вывод: поведение структурных функций (11.27) в глубоконеупругой области тесно связано с поведением коммутатора токов на световом конусе. Типом сингулярности коммутатора при  $x^+ = 0$  определяется точная форма скейлинга, причем структурную функцию можно представить в виде фурье-образа функции  $g(\sigma)$ , которая в свою очередь связана с матричным элементом бислокального оператора.

Равенство (11.40) можно, конечно, обратить:

$$g(\sigma) = \int e^{i\sigma\xi} F(\xi) d\xi. \quad (11.41)$$

Тогда, разлагая  $g(\sigma)$  в ряд

$$g(\sigma) = \sum_n \frac{g_n}{n!} \sigma^n, \quad (11.42)$$

получаем правила сумм

$$g_n = i^n \int \xi^n F(\xi) d\xi. \quad (11.43)$$

Сравнивая это выражение с формулой (11.26), в которой  $g_n$  выражается через предел бесконечно большого импульса, мы сразу же видим, что соотношение (11.43) представляет собой скалярный аналог асимптотических правил сумм, полученных в гл. 10, § 5, п. 5.

В заключение параграфа покажем, как можно быстрее вывести беркеновский скейлинг другим способом, при котором становится очевидной аналогия с партонной моделью. Опять начнем с выражения (11.27) для  $t(q, p)$  и учтем, что, как показано выше, асимптотическая форма  $t$  при  $q^- \rightarrow \infty$  и при фиксированных значениях  $q^+$ ,  $p$  зависит от значения  $G(p, x)$  при  $x^+ = 0$ ,  $x_\perp = 0$  и, следовательно, при  $x^2 = 0$ . Таким образом, мы можем просто положить  $G(p, x) \approx G(p, x^2 = 0) \equiv g(px)$  непосредственно в интеграле (11.27):

$$t(q, p) \sim \frac{1}{i\pi} \int d^4x e^{iqx} g(px) D(x). \quad (11.44)$$

Чтобы взять этот интеграл, произведем фурье-преобразование функции  $g(px)$ :

$$g(px) = \int e^{i\alpha px} F(\alpha) d\alpha. \quad (11.45)$$

Подставив выражение (11.45) в формулу (11.44) и вспоминая определение (11.7) функции  $D(x)$ , получаем

$$\begin{aligned} t(q, p) &\sim 2 \int d\alpha F(\alpha) \varepsilon(q_0 + \alpha p_0) \delta^4[(q + \alpha p)^2] = \\ &= \frac{1}{v} \int d\alpha F(\alpha) \varepsilon(q_0 + \alpha p_0) \delta\left[\alpha + \frac{u}{2v}\right] = \frac{1}{v} F(\xi), \end{aligned} \quad (11.46)$$

что полностью согласуется с прежним результатом (11.39).

Теперь вполне очевидна аналогия с партонной моделью. Если бы состояние  $|p\rangle$  было свободным, структурная функция определялась бы просто



как <sup>1)</sup>

$$g(px) = e^{ipx}. \quad (11.47)$$

Поэтому, опираясь лишь на интуицию, можно считать, что в соотношении (11.45) состояние  $|p\rangle$  представлено в виде коллинеарной суперпозиции партонов с функцией распределения  $F(\alpha)$ . Тогда соотношение (11.46) дает асимптотическое сечение рассеяния в виде некогерентной суммы по элементарным процессам рассеяния на свободных партонах, содержащихся в мишени.

### § 3. Коммутаторы токов в модели свободных кварков

В предыдущем параграфе разъяснены основные положения метода светового конуса. Теперь мы хотим применить этот метод в случае векторных и аксиальных слабых токов, более близком к реальности. Все определяется поведением коммутаторов токов на световом конусе, а чтобы получить информацию об их поведении, нужно обратиться к какой-либо модели. Поскольку кварковая модель дает правильную алгебраическую структуру  $SU(3) \otimes SU(3)$ -зарядов и плотностей (а возможно, и дивергенций) токов, можно попытаться построить токи из триплетов кварков со спином  $1/2$ , а именно:

$$\begin{aligned} j_{\mu,\alpha}^L &= V_{\mu}^{\alpha} - A_{\mu}^{\alpha} = \bar{q}\gamma_{\mu}(1 - \gamma_5)\frac{1}{2}\lambda_{\alpha}q, \\ j_{\mu,\alpha}^R &= V_{\mu}^{\alpha} + A_{\mu}^{\alpha} = \bar{q}\gamma_{\mu}(1 + \gamma_5)\frac{1}{2}\lambda_{\alpha}q. \end{aligned} \quad (11.48)$$

Мы опять будем строить коммутаторы токов на световом конусе, взяв за основу модель свободных кварков. Идея состоит в том, чтобы выявить основные характеристики модели, такие, как тензорная и  $SU(3) \otimes SU(3)$ -структура, и постулировать их для реального мира [549]. Мы будем исходить из представления о свободных полях, но отметим, что алгебра токов на световом конусе в основном остается такой же и при наличии взаимодействия кварков, осуществляемого за счет обмена синглетом группы  $SU(3) \otimes SU(3)$  векторных или бесспиновых мезонов [550]. Точнее говоря, методом канонического квантования на световом конусе, который излагается в приложении II, можно показать [551], что интересующие нас коммутаторы остаются формально неизменными и в присутствии глюонного поля <sup>2)</sup>.

Антикоммутационные соотношения полей свободных кварков (мы рассматриваем безмассовые кварки, поскольку массовые члены не должны повлиять на ведущую особенность в окрестности светового конуса) имеют вид

$$\begin{aligned} \{q(x), \bar{q}(y)\} &= S(x-y), \\ \{q(x), q(y)\} &= \{\bar{q}(x), \bar{q}(y)\} = 0, \end{aligned} \quad (11.49)$$

где

$$S(x) = \gamma \partial D(x) \quad (11.50)$$

и (в случае нулевой массы)

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(x^2). \quad (11.51)$$

Используя соотношения (11.48) — (11.51), нетрудно получить выражения для общих коммутационных соотношений токов. Подробный вывод приведен в приложении I, а здесь мы дадим лишь окончательный результат.

<sup>1)</sup> В действительности прямые выкладки с использованием определения (11.9) дают  $g(px) = e^{ipx} + e^{-ipx}$ , но слагаемое  $e^{-ipx}$  появляется вследствие того, что у нас слишком упрощенная модель без внутренних квантовых чисел.

<sup>2)</sup> Подробный анализ, подтверждающий этот вывод, приведен в работе [550].

Полагая  $z = x - y$ , имеем

$$[j_{\alpha}^{L, \mu}(x), j_{\beta}^{L, \nu}(y)] = \{2if_{\alpha\beta\gamma}[s^{\mu\nu\sigma\tau}\mathcal{Y}_{\sigma, \gamma}^L(x, y; S) + \\ + i\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\mathcal{Y}_{\sigma, \gamma}^L(x, y; A)] + d_{\alpha\beta\gamma}[S \leftrightarrow A]\} \frac{\partial}{\partial z^{\rho}} D(z). \quad (11.52)$$

Здесь введены следующие величины: биллокальные операторы

$$\mathcal{Y}_{\mu\alpha}^L(x, y) = \bar{q}(x) \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda_{\alpha q}(y), \quad (11.53)$$

их симметричные и антисимметричные относительно перестановки  $x \leftrightarrow y$  комбинации]

$$\mathcal{Y}_{\mu, \alpha}^L(x, y; \begin{matrix} S \\ A \end{matrix}) = \frac{1}{2} [\mathcal{Y}_{\mu, \alpha}^L(x, y) \pm \mathcal{Y}_{\mu, \alpha}^L(y, x)] \quad (11.54)$$

и симметричный тензор

$$s_{\mu\nu\sigma\tau} = g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau} - g_{\mu\nu}g_{\sigma\tau} + g_{\nu\sigma}g_{\mu\tau}. \quad (11.55)$$

Отметим, что при заданном явном виде токов (11.48) предположение о нулевой массе кварков гарантирует нам сохранение векторных и аксиальных токов. Таким образом, если предположить, что симметрия  $SU(3) \otimes SU(3)$  нарушается массовыми членами в кварковом гамильтониане, то эти члены не окажут влияния на поведение ведущих особенностей на световом конусе и в данном отношении токи будут вести себя как сохраняющиеся.

Для удобства перепишем коммутационные соотношения (11.52) в другой, совершенно эквивалентной форме

$$[j_{\alpha}^{L, \mu}(x), j_{\beta}^{L, \nu}(y)] = \left[ t_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\sigma\tau} \tau_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{Y}_{\sigma, \gamma}^L(x, y) - \begin{pmatrix} x \leftrightarrow y \\ \alpha \leftrightarrow \beta \\ \mu \leftrightarrow \nu \end{pmatrix} \right] \frac{\partial}{\partial z^{\rho}} D(z), \quad (11.56)$$

где

$$\begin{aligned} t_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\sigma\tau} &= s^{\mu\nu\sigma\tau} - i\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \equiv \frac{1}{4} \text{Sp} [\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\tau} (1 + \gamma_5)], \\ \tau_{\alpha\beta\gamma} &= if_{\alpha\beta\gamma} + d_{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2} \text{Sp} (\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}\lambda^{\gamma}). \end{aligned} \quad (11.57)$$

Кроме того, имеет место равенство

$$[j_{\mu, \alpha}^L(x), j_{\nu, \beta}^{R}(y)] = 0, \quad (11.58)$$

тогда как коммутационные соотношения для «правых» токов получаются из соотношений (11.56) простой подстановкой

$$(L \rightarrow R), \quad (\gamma_5 \rightarrow -\gamma_5).$$

В дальнейшем, когда это особо не оговорено, мы будем подразумевать «левые» токи  $j_{\mu\alpha}^L$  и для простоты будем опускать индекс  $L$ .

Теперь, исходя из соотношения (11.52) [или (11.56)], найдем структуру коммутаторов токов на световом конусе и припишем ее реальному миру. Это означает, что мы считаем кварковую модель способной правильно воспроизвести лоренцеву (т. е.  $t_{\mu\nu\sigma\delta}$ ) и  $SU(3) \otimes SU(3)$  (т. е.  $\tau_{\alpha\beta\gamma}$ ) тензорные структуры<sup>1)</sup>, а также доминирующую на световом конусе сингулярность [т. е.  $(\partial/\partial z) D(z)$ ] — все, что обеспечивает универсальное поведение коммутаторов токов на световом конусе. После этого можно будет одинаково подходить

<sup>1)</sup> В частности, как это обычно подчеркивается, наличие антисимметричной  $SU(3)$ -структуры носит весьма общий характер, а наличие тензора  $d_{\alpha\beta\gamma}$  характерно лишь для того представления группы  $SU(3)$ , с которым мы имеем дело, т. е. для модели триплета кварков.

ко всем электромагнитным и слабым явлениям, для которых существенны коммутаторы на световом конусе.

Переходя к пределу светового конуса в коммутаторах (11.52) [или (11.56)], удобнее разложить токи на их компоненты в «метрике светового конуса»

$$j^\pm = \frac{j^0 \pm j^3}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{j} \equiv (j^1, j^2). \quad (11.59)$$

В явном виде мы выведем лишь коммутаторы  $[j^+, j^+]$  и  $[j^+, j^-]$ , что объясняется мотивами двойного рода. Во-первых, как будет видно из следующего параграфа, только эти коммутаторы потребуются для получения бёркеновского скейлинга. Во-вторых, эти коммутаторы можно считать модельно-независимыми (или менее зависящими от модели), ибо в кварковой теории с нейтральным глюонным взаимодействием их можно выразить через одни лишь биллокальные операторы, безотносительно к взаимодействию, т. е. к глюонному полю (подробности см. в приложении II).

Приняв обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\mu, \alpha}(x, 0) &\equiv I_{\mu, \alpha}(x), \\ \mathcal{Y}_{\mu, \alpha}(0, x) &\equiv \bar{I}_{\mu, \alpha}(x), \end{aligned} \quad (11.60)$$

получаем следующий результат <sup>1)</sup>:

$$[j_\alpha^+(x), j_\beta^+(0)]_{x^+=0} = 2i f_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma^+(0) \delta(x^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp), \quad (11.61)$$

$$\begin{aligned} [j_\alpha^+(x), j_\beta^-(0)]_{x^+=0} = & -\frac{1}{4} \tau_{\alpha\beta\gamma} \alpha^{ij} I_{j, \gamma}(x) \varepsilon(x^-) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^2(\mathbf{x}_\perp) - \\ & - \begin{pmatrix} I \rightarrow \bar{I} \\ \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha_{ij} \rightarrow \alpha_{ji} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11.62)$$

где индексы  $i, j$  принимают только значения 1 и 2 и

$$\alpha^{ij} = g^{ij} - i\varepsilon^{ij}, \quad \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1, \quad \varepsilon^{i2} = 0. \quad (11.63)$$

Разумеется, ток  $j_\mu^\alpha$  можно разложить на векторную и аксиально-векторную части, так что соотношение (11.61) будет обладать знакомой нам  $SU(3) \otimes \otimes SU(3)$ -структурой.

Нетрудно видеть, что коммутатор  $[j_\alpha^+, j_\beta^+]_{x^+=0}$  не содержит биллокальных операторов, — обстоятельство, которое окажется очень важным в дальнейшем. Это, по-видимому, следствие упрощенного обращения с полевыми операторами, так же как в случае одновременных коммутаторов, где канонические теории не дают швингеровского члена для  $[j_0, j]$ . Таким образом, в правой части соотношения (11.61) должны бы быть дополнительные биллокальные слагаемые градиентного типа. Ниже мы вернемся к этому вопросу. Во всяком случае, в отношении бёркеновского скейлинга мы предполагаем (начиная со следующего параграфа), что он обусловлен только наиболее сингулярной частью  $[\sim \partial^i \delta^2(\mathbf{x}_\perp)]$  коммутатора на световом конусе, а именно величиной

$$\begin{aligned} [j_\alpha^+(x), j_\beta^-(0)]_{x^+=0} \sim & -\frac{1}{4} \varepsilon(x^-) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^2(\mathbf{x}_\perp) \times \\ & \times [\tau_{\alpha\beta\gamma} \alpha^{ij} I_{j, \gamma}(x^-) - \tau_{\beta\alpha\gamma} \alpha^{ij} \bar{I}_{j, \gamma}(x^-)]. \end{aligned} \quad (11.64)$$

Теперь исследуем одночастичные матричные элементы наших коммутаторов. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \langle p | I_\mu^\alpha(x) | p \rangle &= F_\mu^\alpha(p, x), \\ \langle p | \bar{I}_\mu^\alpha(x) | p \rangle &= \bar{F}_\mu^\alpha(p, x). \end{aligned} \quad (11.65)$$

<sup>1)</sup> Напомним, что коммутаторы на световом конусе следует понимать так, как это говорилось в связи с соотношениями (11.11) и (11.11').

В силу релятивистской инвариантности величину  $F_{\mu}^{\alpha}$  (и точно так же  $\bar{F}_{\mu}^{\alpha}$ ) можно представить в виде <sup>1)</sup>

$$F_{\mu}^{\alpha}(p, x) = p_{\mu}G_{\alpha}(\sigma, \tau) + x_{\mu}H_{\alpha}(\sigma, \tau), \quad (11.66)$$

где снова

$$\sigma = px \sim p^+x^-, \quad \tau = x^2 \sim 0. \quad (11.67)$$

Отметим, что ввиду трансляционной инвариантности

$$\langle p | \tilde{I}_{\mu}^{\alpha}(x) | p \rangle = \langle p | I_{\mu}^{\alpha}(-x) | p \rangle, \quad (11.68)$$

т. е.

$$\bar{G}^{\alpha}(\sigma, \tau) = G^{\alpha}(-\sigma, \tau), \quad \bar{H}^{\alpha}(\sigma, \tau) = -\bar{H}^{\alpha}(-\sigma, \tau).$$

Тогда матричный элемент коммутатора (11.65) (точнее, его главная часть) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle p | [j_{\alpha}^i(x), j_{\beta}^k(0)]_{x^+=0} | p \rangle \sim -\frac{1}{4} \varepsilon(x^-) p_j \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^2(x_{\perp}) \times \\ \times [\tau_{\alpha\beta\gamma} \alpha^{ij} g_{\gamma}^l(p^+x^-) - \tau_{\beta\alpha\gamma} \alpha^{ji} \bar{g}_{\gamma}^l(p^+x^-)]. \end{aligned} \quad (11.69)$$

По аналогии с обозначениями § 2 здесь введены обозначения

$$g_{\alpha}(\sigma) = \lim_{\tau \rightarrow 0} G_{\alpha}(\sigma, \tau), \quad \sigma = px. \quad (11.70)$$

Этими структурными функциями определяется главная часть матричного элемента коммутатора  $[j^+, j^-]$  на световом конусе  $x^+ = 0$ ,  $x_{\perp} = 0$ . Полезно разложить функции  $\bar{g}_{\alpha}(\sigma)$  и  $\overline{g_{\alpha}(\sigma)}$  в ряд:

$$g_{\alpha}(\sigma) = \sum_n g_{\alpha}^{(n)} \frac{\sigma^n}{n!}, \quad g_{\alpha}^{(n)} = \frac{d^n}{d\sigma^n} g_{\alpha}(\sigma) |_{\sigma=0}. \quad (11.71)$$

Из соотношения (11.70) следует также, что

$$\bar{g}_{\alpha}^{(n)} = (-1)^n g_{\alpha}^{(n)}. \quad (11.72)$$

В этих разложениях особенно существенны члены нулевого порядка, так как они связаны с матричными элементами локального тока:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \langle p | I_{\mu}^{\alpha}(x) | p \rangle = p_{\mu} g_{\alpha}^{(0)} = \langle p | j_{\mu}^{\alpha}(0) | p \rangle = p_{\mu} c_{\alpha}. \quad (11.73)$$

Отсюда получаем

$$g_{\alpha}^{(0)} = c_{\alpha} = \bar{g}_{\alpha}^{(0)}.$$

В частности, матричные элементы векторных частей токов  $I_{\mu}^{\alpha}(x=0)$  при  $\alpha = 3, 8, 0$  связаны с зарядом, гиперзарядом и барионным числом частицы <sup>2)</sup>.

Мы можем также установить прямую связь между функциями  $g_{\alpha}(\sigma)$ ,  $\bar{g}_{\alpha}(\sigma)$  и некоторыми соответствующими пределами матричных элементов одновременного коммутатора при бесконечно большом импульсе. Подробный вывод представлен в приложении I, где получен следующий результат:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p_0^{n+1}} \int d^3x \langle p | \left[ \frac{\partial^n}{\partial t^n} j_{\alpha}^i(x), j_{\beta}^k(0) \right]_{t=0} | p \rangle = \\ = 2^n \tau_{\alpha\beta\gamma} g_{\gamma}^{(n)} (\delta^{ik} + i\varepsilon^{ikh} u_l + u_k u_l) - 2^n \tau_{\beta\alpha\gamma} \bar{g}_{\gamma}^{(n)} (\delta^{ik} - i\varepsilon^{ikh} u_l + u_k u_l). \end{aligned} \quad (11.74)$$

<sup>1)</sup> В соотношении (11.66) нет других слагаемых, так как подразумевается усреднение по спину. Кроме того, присутствует только векторная часть бислокального оператора.

<sup>2)</sup> Например, для внешних протонов  $c_3 = 1$ ,  $c_8 = \sqrt{3}$ ,  $c_0 = \sqrt{2/3}$ .

где  $i, k, l$  — пространственные индексы, а  $u = \lim_{p \rightarrow \infty} (p/p_0)$ . Соотношением

(11.74) определяется  $g_\nu^{(n)} [\bar{g}_\nu^{(n)} = (-1)^n g_\nu^n]$  при любом  $n$ . Отсюда следует очевидное заключение о том, что задание коммутаторов на световом конусе ( $x^+ = 0$ ) эквивалентно заданию бесконечного набора одновременных коммутаторов. Соотношение (11.74) является также ключом к пониманию того, что в вопросе о скейлинге метод светового конуса эквивалентен методу (гл. 10), основанному на одновременных коммутационных соотношениях и пределе бесконечно большого импульса.

#### § 4. Масштабная инвариантность

Цель данного параграфа — изложить в основных чертах вывод соотношений масштабной инвариантности для слабых и электромагнитных глубоко-неупругих процессов, основанный на методе светового конуса.

Введем усредненную по спине величину

$$\bar{t}_{\mu\nu}^{\alpha\beta H} = \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle p | [j_\mu^{\alpha, H}(x), j_\nu^{\beta, H}(0)] | p \rangle, \quad (11.75)$$

где  $H = L, R$ . Структурные функции нейтринных процессов вследствие аксиально-векторной структуры слабого тока непосредственно связаны с величиной  $t_{\mu\nu}^L$ . Процессы же рассеяния электронов будут просто описываться величиной  $1/4 (t_{\mu\nu}^L + t_{\mu\nu}^R)$ , так как член, обусловленный интерференцией амплитуд с  $H = L$  и  $H = R$ , обращается в нуль в пределе светового конуса и не дает вклада в глубоконеупругой области. Для простоты мы будем рассматривать только случай  $H = L$  и этот индекс будем опускать.

Величина  $t_{\mu\nu}$  имеет вид <sup>1)</sup>

$$t_{\mu\nu} = \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_S + i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p_\lambda^A q^\sigma \frac{W_3}{m_N^2} + \frac{p_\mu p_\nu q^2 - (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) \nu + g_{\mu\nu} \nu^2}{q^2} \frac{W_2}{m_N^2}, \quad (11.76)$$

$$W_S = W_1 + W_2 \left( \frac{\nu^2}{m_N^2 q^2} - 1 \right) \sim W_1 + W_2 \frac{\nu^2}{m_N^2 q^2}. \quad (11.77)$$

В бьёркеновском пределе структурные функции имеют вид (гл. 10, § 5, п. 2)

$$\lim_{\text{Бьёрк}} W_1(\nu, u) = F_1(\xi), \quad \lim_{\text{Бьёрк}} W_S(\nu, u) = F_S(\xi), \quad (11.78)$$

$$\lim_{\text{Бьёрк}} \frac{\nu W_{2,3}(\nu, u)}{m_N^2} = F_{2,3}(\xi), \quad \xi = -\frac{q^2}{2\nu}.$$

В дальнейшем мы покажем, что если существуют коммутаторы токов на световом конусе, то существует и предел (11.78), и найдем функции  $F_i(\xi)$  в явном виде

Рассмотрим кинематику на световом конусе. Будем считать, что

$$q_- \rightarrow \infty, \quad q_+ = \text{const}, \quad \mathbf{q}_\perp \text{ мало}. \quad (11.79)$$

Имея в виду дальнейшие приложения, удобнее не полагать сразу  $q_\perp = 0$ , как в § 2, а считать  $q_\perp$  малым по сравнению с остальными величинами и работать в первом порядке по  $q_\perp$ .

<sup>1)</sup> В действительности самое общее разложение функции  $t_{\mu\nu}$  содержит также слагаемые  $(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) W_4$  и  $q_\mu q_\nu W_5$ , учитывающие то обстоятельство, что в общем случае токи не сохраняются ( $q^\mu t_{\mu\nu} \neq 0$ ). Поэтому возможные свойства масштабной инвариантности функций  $W_4$  и  $W_5$  будут определяться поведением коммутаторов с дивергенциями  $[j_\mu^\alpha, \partial^\nu j_\nu^\beta]$  и  $[\partial^\mu j_\mu^\alpha, \partial^\nu j_\nu^\beta]$  на световом конусе. Отметим также, что  $W_4$  и  $W_5$  можно найти, измерив поляризацию в нейтринных и антинейтринных процессах, и, следовательно, для полного выяснения всех структурных функций слабых процессов требуются эксперименты, невозможные в настоящее время.

Имеют место асимптотические равенства

$$v = pq \sim p^+q^-, \quad q^2 = 2q^+q^- - \mathbf{q}_\perp^2 \sim 2q^+q^-, \quad \xi = -\frac{q^+}{p^+}. \quad (11.80)$$

По мотивам, которые станут ясны позже, исследуем сначала коммутатор  $[j^+, j^-]$ . В первом порядке по  $\mathbf{q}_\perp$  можно написать

$$t_{\alpha\beta}^+ = U + \sum_{i=1,2} q^i V^i, \quad (11.81)$$

где

$$U = \int dx^+ dx^- \exp [i(q^+x^- + q^-x^+)] \psi(x^+, x^-), \quad (11.82)$$

$$V^i = (-i) \int dx^+ dx^- \exp [i(q^+x^- + q^-x^+)] \varphi^i(x^+, x^-)$$

и функции

$$\begin{aligned} \psi(x^+, x^-) &= \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{x}_\perp \langle p | [j^+(x), j^-(0)] | p \rangle, \\ \varphi^i(x^+, x^-) &= \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{x}_\perp x^i \langle p | [j^+(x), j^-(0)] | p \rangle \end{aligned} \quad (11.83)$$

являются аналогами функции  $\psi(x^+, x^-)$  в соотношении (11.32). Исходя из формулы (11.76), мы можем выразить  $U$  и  $V$  через функции  $W_i$ :

$$U = \frac{1}{2} \left( 2p^+p^- \frac{W_2}{m^2} - W_S \right), \quad (11.84)$$

$$V^i = -p^i \frac{p^+}{2q^+} \frac{W_2}{m^2} + i\varepsilon^{ij} p_j \frac{W_3}{m^2}. \quad (11.84')$$

Теперь можно перейти к исследованию поведения структурных функций в глубоконеупругом пределе (11.79). Прежде всего заметим, что вследствие принципа причинности

$$\left. \begin{aligned} \psi_1^i(x^+, x^-) \neq 0 \\ \varphi_1^i(x^+, x^-) \neq 0 \end{aligned} \right\} \text{ только при } \begin{cases} x^+ > 0, & x^- > 0, \\ x^+ < 0, & x^- < 0. \end{cases} \quad (11.85)$$

Поэтому, обобщив рассуждения § 2 на наш случай, получим

$$U_i(q^+, q^-) \underset{q^- \rightarrow \infty}{\sim} \frac{i}{q^-} \int dx^- \exp(iq^+x^-) [\psi(0+, x^-) - \psi(0-, x^-)], \quad (11.86)$$

$$V_i^j(q^+, q^-) \underset{q^- \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{q^-} \int dx^- \exp(iq^+x^-) [\varphi^j(0+, x^-) - \varphi^j(0-, x^-)], \quad (11.86')$$

где  $\psi(x^+, x^-)$ ,  $\varphi^i(x^+, x^-)$  — функции, аналогичные функциям  $\psi(x^+, x^-)$  в соотношении (11.33). Вид скачка функции при  $x^+ = 0$  связан с коммутатором токов на световом конусе и будет рассмотрен ниже.

Первое очевидное следствие соотношения (11.86) таково:

$$\lim_{q^- \rightarrow \infty} U(q^+, q^-) = 0, \quad (11.87)$$

$$\lim_{q^- \rightarrow \infty} V^i(q^+, q^-) = 0. \quad (11.87')$$

Сравнивая выражения (11.87') и (11.84'), получаем

$$\lim_{q^- \rightarrow \infty} W_{2,3} = 0, \quad (11.88)$$

тогда как из соотношений (11.84), (11.87) и (11.88) следует, что

$$\lim_{q^- \rightarrow \infty} W_S = 0, \quad (11.89)$$

и, значит, из равенств (11.78) следует, что

$$F_S(\xi) = 0. \quad (11.90)$$

Таким образом, мы приходим к совершенно общему выводу: продольная структурная функция должна быть равной нулю, как и предсказывает модель, в которой спин частиц равен  $1/2$ .

Следующая наша задача — выяснить поведение функций  $W_2$  и  $W_3$  в бёркеновском пределе. Для этого нам нужно более полно использовать информацию, содержащуюся в коммутаторах на световом конусе. Правда, нам достаточно знать только асимптотический вид функции  $V^i$ , который зависит от разности  $\varphi^i(0^+, x^-) - \varphi^i(0^-, x^-)$ . При этом мы можем воспользоваться тем обстоятельством, что указанная разность фактически определяется лишь частью коммутатора, содержащей  $(\partial/\partial x^i) \delta^2(\mathbf{x}_\perp)$  [формула (11.64)], т. е. наиболее сингулярной частью. Это является следствием того, что в определении величины  $V^i$  фигурирует множитель  $x^i$ . Таким образом, при исследовании поведения функций  $q^-W_2$  и  $q^-W_3$  можно совершенно забыть об амплитуде  $\psi$  и прямо использовать соотношение (11.69) для определения скачка функции  $\varphi^i(x^+, x^-)$ . Получаем

$$\lim_{q^- \rightarrow \infty} q^- V^i(q^+, q^-) = \frac{1}{4\pi} \int dx^- \exp(iq^+ x^-) p_j \times \\ \times [\tau_{\alpha\beta\gamma} \alpha^{ij} g_\gamma(p^+ x^-) - \tau_{\beta\alpha\gamma} \alpha^{ji} \bar{g}_\gamma(p^+ x^-)]. \quad (11.91)$$

Последний этап состоит в сравнении выражений (11.91) и (11.84'). Взяв в качестве переменных величины

$$\xi = -\frac{q^+}{p^+}, \quad \sigma = p^+ x^-,$$

после соответствующих выкладок без особого труда получим

$$\frac{F_2^{\alpha\beta i}}{2\xi} = \frac{1}{2} [\tau_{\alpha\beta\gamma} \varphi_\gamma(\xi) - \tau_{\beta\alpha\gamma} \bar{\varphi}_\gamma(\xi)] = i f_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma(\xi) + d_{\alpha\beta\gamma} A_\gamma(\xi), \quad (11.92)$$

$$F_3^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} [\tau_{\alpha\beta\gamma} \varphi_\gamma(\xi) + \tau_{\beta\alpha\gamma} \bar{\varphi}_\gamma(\xi)] = -i f_{\alpha\beta\gamma} A_\gamma(\xi) - d_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma(\xi). \quad (11.93)$$

В этих выражениях введены фундаментальные структурные функции

$$\varphi_\gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\sigma\xi} g_\gamma(\sigma) d\sigma, \\ \bar{\varphi}_\gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\sigma\xi} \bar{g}_\gamma(\sigma) d\sigma = \varphi_\gamma(-\xi), \quad (11.94)$$

а также их симметричные и антисимметричные комбинации

$$S_\gamma(\xi) = \frac{1}{2} [\varphi_\gamma(\xi) + \bar{\varphi}_\gamma(\xi)], \quad A_\gamma(\xi) = \frac{1}{2} [\varphi_\gamma(\xi) - \bar{\varphi}_\gamma(\xi)]. \quad (11.95)$$

Прежде чем на основе полученных результатов делать, как мы собираемся, конкретные выводы о лептон-адронном рассеянии, заметим следующее. Во-первых, для того чтобы выяснить масштабную инвариантность функций  $W_2$ ,  $W_3$ ,  $W_S$ , а также установить соотношение между функциями  $F_2$ ,  $F_3$  и матричными элементами билокальных операторов, нам оказалось достаточно наиболее сингулярной части коммутатора  $[j^+, j^-]_{x^+ \rightarrow 0}$ . На практике, используя лишь наиболее сингулярную часть, мы как бы принимаем, что в разложении (11.66)

$$\langle p | I_\mu^\alpha(x) | p \rangle = p_\mu G^{\alpha i}(\sigma, \tau) + x_\mu H^{\alpha i}(\sigma, \tau)$$

существен только формфактор  $G^\alpha$ . Если же мы взяли бы для определения  $\lim_{q^- \rightarrow \infty} q^- U$  полный вид коммутатора  $[j^+, j^-]$ , то появился бы формфактор  $H^\alpha$ .

Нетрудно видеть, что тогда мы могли бы найти точное соотношение между величинами  $\lim_{q \rightarrow \infty} \nu W_S \equiv G_S(\xi)$  и  $H^\alpha$ , аналогичное равенствам (11.92) и (11.93).

Во-вторых, можно поставить вопрос о том, какую информацию даст при том же подходе коммутатор  $[j^+, j^+]$ . Совершенно аналогичные вычисления в первом порядке по  $q_\perp$  показывают, что из простой локальной структуры коммутатора

$$[j_\alpha^+(x), j_\beta^+(0)]_{x^+=0} = i f_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma^+(0) \delta(x^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp)$$

сразу же следуют приведенные выше равенства

$$\lim_{q \rightarrow \infty} W_2 = 0, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} W_S = 0.$$

Нулевое значение предела  $\lim_{q \rightarrow \infty} W_2$  связано с отсутствием слагаемых, содержащих поперечные градиентные операторы, например, вида

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\perp} \varepsilon(x^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp) T_{\alpha\beta}(x, 0), \dot{\mathbf{j}}$$

а величина  $\lim_{q \rightarrow \infty} W_S$  оказывается равной нулю из-за отсутствия и других операторных выражений, например, типа

$$\frac{\partial}{\partial x^-} \varepsilon(x^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp) S_{\alpha\beta}(x, 0).$$

Таким образом, исходя из экспериментальных данных о масштабной инвариантности величины  $\nu W_2$  и о близком к нулю значении продольного сечения<sup>1)</sup>, можно сделать вывод, что возможные бислокальные градиентные выражения в коммутаторе  $[j^+, j^+]$  являются самое большее  $s$ -числами. К этому выводу мы еще раз вернемся, когда речь будет идти о правилах сумм при фиксированной массе.

Соотношения (11.92) и (11.93) нетрудно переписать в явном виде для случаев рассеяния электронов и нейтрино. Используя соответствующие значения коэффициентов  $f_{\alpha\beta\gamma}$  и  $d_{\alpha\beta\nu}$ , получаем

$$\frac{F_2^{eP}}{2\xi} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} A_0 + \frac{1}{3} A_3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} A_8, \quad (11.96a)$$

$$\frac{F_3^{\nu P}}{2\xi} = 2 \left( \sqrt{\frac{2}{3}} A_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_8 - S_3 \right), \quad (11.96b)$$

$$F_3^{\nu P} = 2 \left( A_3 - \sqrt{\frac{2}{3}} S_0 - \frac{1}{\sqrt{3}} S_8 \right). \quad (11.96b)$$

Соответствующие амплитуды для нейтрона получаются из равенств (11.96) простой заменой  $A_3, S_3 \rightarrow -A_3, -S_3$ .

Сравнение различных амплитуд немедленно приводит к равенству

$$\frac{1}{2\xi} (F_2^{eP} - F_2^{eN}) = \frac{2}{3} A_3 = \frac{1}{3} (F_3^{\nu P} - F_3^{\nu N}),$$

которое, поскольку продольная амплитуда  $F_S(\xi) = F_1(\xi) - F_2(\xi)/2\xi$  равна нулю, принимает вид равенства (10.318), т. е.

$$6 (F_1^{eP} - F_1^{eN}) = F_3^{\nu P} - F_3^{\nu N}. \quad (11.97)$$

<sup>1)</sup> Мы уже отмечали, что с учетом общей алгебраической  $SU(3)$ -структуры коммутаторов на световом конусе электромагнитные и слабые процессы рассматриваются в этой главе на равных основаниях. Многочисленные замечательные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что для процессов рассеяния электронов  $R = \sigma_S/\sigma_T \ll 1$ , а в нейтринном случае имеющимся (правда, скудным) экспериментальным данным [565, 566] не противоречит малая величина соответствующего отношения  $\sigma_3/(\sigma_L + \sigma_R)$ .



И наконец, выведем вновь некоторые из асимптотических правил сумм (гл. 10). Это можно сделать, выполнив преобразование Фурье соотношений (11.92) и (11.93):

$$\begin{aligned} \int e^{i\sigma\xi} \frac{F_2^{\alpha\beta}(\xi)}{2\xi} d\xi &= \frac{1}{2} [\tau_{\alpha\beta\gamma} g_\gamma(\sigma) - \tau_{\beta\alpha\gamma} \bar{g}_\gamma(\sigma)], \\ \int e^{i\sigma\xi} F_3^{\alpha\beta}(\xi) d\xi &= -\frac{1}{2} [\tau_{\alpha\beta\gamma} g_\gamma(\sigma) + \tau_{\beta\alpha\gamma} \bar{g}_\gamma(\sigma)]. \end{aligned} \quad (11.98)$$

Разлагая обе части этих равенств в ряд по  $\sigma$ , получаем искомые правила сумм:

$$\begin{aligned} i^n \int \frac{F_2^{\alpha\beta}(\xi)}{2\xi} d\xi &= \frac{1}{2} [\tau_{\alpha\beta\gamma} g_\gamma^{(n)} - \tau_{\beta\alpha\gamma} \bar{g}_\gamma^{(n)}], \\ i^n \int F_3^{\alpha\beta}(\xi) d\xi &= -\frac{1}{2} [\tau_{\alpha\beta\gamma} g_\gamma^{(n)} + \tau_{\beta\alpha\gamma} \bar{g}_\gamma^{(n)}]. \end{aligned} \quad (11.99)$$

Простейший случай соответствует значению  $n = 0$ ; в этом случае величина  $g_\gamma^{(0)} = \bar{g}_\gamma^{(0)} = c_\gamma$  связана с матричным элементом локального тока соотношением (11.73).

$$\langle p | j_\mu^\alpha | p \rangle = p_\mu c_\alpha.$$

В частности, имеют место равенства

$$\int F_2^{\alpha\beta}(\xi) \frac{d\xi}{\xi} = 2if_{\alpha\beta\gamma} c_\gamma, \quad (11.100)$$

$$\int F_3^{\alpha\beta}(\xi) d\xi = -2d_{\alpha\beta\gamma} c_\gamma. \quad (11.101)$$

Легко видеть, что при соответствующем выборе индексов соотношение (11.100) приводит к правилу сумм Адлера [формула (10.291')], которое в силу условия  $F_S = 0$  эквивалентно правилу сумм Бьёркена (10.289), а соотношение (11.101) дает правило сумм Гросса — Льюэллин-Смита [формула (10.290)].

## § 5. Связь с партонной моделью

Рассмотрим общее выражение для амплитуды слабого взаимодействия, в котором представлен в явном виде коммутатор токов [объединены формулы (11.75), (11.56) и (11.57)]:

$$\begin{aligned} i t_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(q, p) &= \int d^4x e^{iqx} \left\{ \frac{1}{8\pi} \text{Sp}_i[\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma (1 + \gamma_5)] \times \right. \\ &\quad \left. \left[ \times \tau_{\alpha\beta\gamma} \langle p | I_\sigma^\gamma(x) | p \rangle - \begin{pmatrix} \alpha \leftrightarrow \beta \\ \mu \leftrightarrow \nu \\ I \leftrightarrow \bar{I} \end{pmatrix} \right] \frac{\partial}{\partial x_\rho} D(x) \right\}. \end{aligned} \quad (11.102)$$

Ранее мы установили, что доминирующей на световом конусе частью величины  $\langle p | I_\sigma^\gamma(x) | p \rangle$ ,

$$\langle \bar{p} | I_\sigma^\gamma(x) | p \rangle \sim p_\sigma g_\alpha'(px), \quad (11.103)$$

определяется асимптотическая форма амплитуды  $t_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$  в скейлинговом пределе. Возьмем фурье-образы функций  $g_\gamma(px)$  и  $\bar{g}_\gamma(px)$

$$\begin{aligned} i g_\gamma'(px) &= \int e^{i\xi px} m_\gamma(\xi) d\xi, \\ i \bar{g}_\gamma(px) &= \int e^{i\xi px} \bar{\varphi}_\gamma(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (11.104)$$

и введем дополнительную величину (матрицу  $3 \times 3$  в пространстве унитарного спина)

$$\varphi(\xi) = \sum_{\gamma} \frac{1}{2} \lambda_{\gamma} \Phi_{\gamma}(\xi). \quad (11.105)$$

Подставим теперь выражения (11.103) — (11.105) в формулу (11.102). После несложных выкладок <sup>1)</sup> находим, что величина  $\tau_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$  может быть записана в виде

$$\tau_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \int d\xi \text{Sp} [\tau_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(\xi p, q) \varphi(\xi) - \bar{\tau}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(\xi p, q) \bar{\varphi}(\xi)], \quad (11.106)$$

где

$$\tau_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(p', q) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \lambda^{\alpha} \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \gamma_{\nu} (p' + q) \frac{1}{2} \lambda^{\beta} \gamma_{\nu} (1 - \gamma_5) \gamma_{\rho} \right] i \delta [(p' + q)^2], \quad (11.107)$$

а след берется в спиновом и унитарном пространствах.

Выражения (11.106) и (11.107) просто интерпретируются в рамках партно-кварковой модели. Величина  $\tau_{\mu\nu}(p', q)$ , фигурирующая в формуле (11.107), представляет собой амплитуду упругого рассеяния тока на кварковой мишени со спином  $\frac{1}{2}$  и импульсом  $p'$ . Точно так же величина  $\bar{\tau}_{\mu\nu}(p', q)$  соответствует амплитуде рассеяния на антикварке <sup>2)</sup>. Таким образом, в выражении (11.106) процесс глубоконеупругого рассеяния представлен в виде суперпозиции элементарных актов взаимодействия с точечными «партонами», содержащимися в нуклоне. Величины же  $\varphi(\xi)$  и  $\bar{\varphi}(\xi)$  — это функции распределения кварков и антикварков с импульсами  $\xi p$  внутри нуклона <sup>3)</sup>.

Такая интерпретация структурных функций прямо следует из самого определения билокальных операторов. Рассмотрим матричный элемент билокального оператора  $I_{\mu}^{\alpha}(x) = \bar{q}(x) \Gamma_{\mu} \frac{1}{2} \lambda^{\alpha} q(0)$  между состояниями свободных кварков. Легко видеть, что

$$\langle p' | I_{\mu}^{\gamma}(x) | p' \rangle = \frac{1}{2} \lambda^{\gamma} 2p'_{\mu} \exp(ip'x), \quad (11.108)$$

$$\langle p' | \bar{I}_{\mu}^{\gamma}(x) | p' \rangle = 2p'_{\mu} \frac{1}{2} \lambda^{\gamma} \exp(-ip'x). \quad (11.108')$$

Соотношения (11.108) и (11.108') взаимосвязаны, так как в силу трансляционной инвариантности имеет место равенство  $\langle A | I_{\mu}(x) | A \rangle = \langle A | \bar{I}_{\mu}(-x) | A \rangle$ . Точно так же в случае антикварковой мишени

$$\langle p' | I_{\mu}^{\gamma}(x) | \bar{p}' \rangle = -2p'_{\mu} \frac{1}{2} \lambda^{\gamma} \exp(-ip'x), \quad (11.109)$$

$$\langle p' | \bar{I}_{\mu}^{\gamma}(x) | \bar{p}' \rangle = -2p'_{\mu} \frac{1}{2} \lambda^{\gamma} \exp(ip'x). \quad (11.109')$$

Предположим теперь, что нуклонное состояние есть суперпозиция кварков и антикварков с импульсами  $p' = \xi p$ , где  $0 \leq \xi \leq 1$  и рассмотрим фурье-преобразование *однонуклонных* матричных элементов операторов  $I_{\mu}(x)$

<sup>1)</sup> С учетом соотношения

$$\int d^4x e^{ikx} D(x) = 2\pi i \epsilon(k_0) \delta(k^2).$$

<sup>2)</sup> Величины  $\tau_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$  и  $\bar{\tau}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$  уже были вычислены в гл. 10, приложение VI.

<sup>3)</sup> Точнее, это матрицы в пространствах кварков и мишени, причем матрица  $\varphi_{aa}^{ii}$  (при более детальной индексации) есть функция распределения кварков типа  $i$  в мишени  $a$ .

и  $\bar{T}_\mu(x)$ , как в выражении (11.104). Тогда из равенств (11.108) и (11.109) следует, что при *положительных* значениях  $\xi$  величины  $\varphi(\xi)$  и  $-\bar{\varphi}(\xi)$  действительно представляют собой функции распределения кварков и антикварков. Основываясь на такой интерпретации и формуле (11.96), можно выразить структурные функции  $F_2$  и  $F_3$  через кварковые и антикварковые функции распределения, как это сделано в гл. 10 [формулы (10.316) и (10.317)].

Из сказанного выше явствует, что партонная модель допускает простую и широкую интерпретацию с точки зрения алгебры на световом конусе. Те результаты партонно-кварковой модели, которые не основаны на каких-либо конкретных предположениях о распределении партонов, во всех отношениях эквивалентны результатам, полученным здесь методом светового конуса и (гл. 10) методом бесконечно большого импульса (если основные коммутационные соотношения взяты из кварковой модели). Следующим шагом должен быть, конечно, выход за пределы такого «почти кинематического» уровня, т. е. построение более конкретных теорий структурных функций либо на основе определенных предположений о функциях распределения партонов, либо, наоборот, на основе более детального анализа матричных элементов бислокальных операторов. Надеемся, что это будет хорошей темой для следующего издания нашей книги.

## § 6. Правила сумм при фиксированной массе

### 1. Скалярная теория

Алгебра токов на световом конусе, о которой говорилось в предыдущем параграфе, дала нам единый базис, естественным образом охватывающий и бёркеновский скейлинг и все асимптотические правила сумм. Кроме того, стала очевидной связь между матричными элементами коммутаторов на световом конусе и матричными элементами одновременных коммутаторов в пределе бесконечно большого импульса. Теперь мы хотим показать, каким образом алгебра на световом конусе прямо приводит к правилам сумм при фиксированной массе, которые подробно исследовались в гл. 4 и 8. Такой новый подход позволит нам глубже понять рассматриваемый вопрос. Действительно, мы не только воспроизведем все известные результаты, но и сможем придать определенный смысл более широкому классу новых правил сумм.

Для простоты начнем со случая двух скалярных токов <sup>1)</sup>  $j_\alpha(x)$  и  $j_\beta(y)$  и введем обобщенную структурную функцию для бесспиновых мишеней

$$t_{\alpha\beta}(Q^+, Q^-, Q_\perp) = \frac{1}{2\pi} \int d^4x \exp[i(Q^+x^- + Q^-x^+ - Q_\perp x_\perp)] \times \\ \times \langle p_2 | [j_\alpha\left(\frac{1}{2}x\right), j_\beta\left(-\frac{1}{2}x\right)] | p_1 \rangle. \quad (11.110)$$

Данный вопрос имеет смысл рассматривать с самых общих позиций. Поэтому мы возьмем произвольную кинематическую конфигурацию (а не только случай рассеяния вперед) и определим, как обычно,

$$P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad Q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2), \quad \Delta = p_2 - p_1 = q_1 - q_2, \quad (11.111)^\dagger$$

$$v = PQ, \quad u = Q^2, \quad w = \Delta \cdot Q, \quad q_i^2 = u_i. \quad (11.112)$$

<sup>1)</sup> Читатель должен иметь в виду, что в реальном случае рассеяния скалярных «токов» многие свойства сходимости правил сумм весьма сомнительны (например, в правилах сумм при фиксированной массе асимптотическое поведение при больших  $v$  не обеспечивает сходимости интеграла), так что последующее изложение носит лишь иллюстративный характер.

При этом будет удобнее пользоваться брейтовой системой координат для внешних частиц (имеющих равные массы):

$$P = 0, \text{ т. е. } P^+ = P^- = \frac{P_0}{\sqrt{2}}, \quad (11.113)$$

и, кроме того, будем считать, что переданный импульс  $\Delta$  имеет только поперечные компоненты:

$$\Delta^+ = -\Delta^- = 0, \quad \Delta_{\perp} \neq 0. \quad (11.114)$$

Отсюда следует полезное соотношение

$$(q_1)^+ = (q_2)^+ \equiv Q^+. \quad (11.115)$$

Интегрируя обе части равенства (11.110) по  $Q^-$  при фиксированных значениях  $Q^+$  и  $Q_{\perp}$ , получаем

$$\int dQ^- t_{\alpha\beta}(Q^+, Q^-, Q_{\perp}) = \int dx^- dx_{\perp} \exp[i(Q^+ x^- - q_{2\perp} x_{\perp})] \langle p_2 | [j_{\alpha}(x), j_{\beta}(0)]_{x^+=0} | p_1 \rangle. \quad (11.116)$$

Нетрудно видеть, что правая часть равенства (11.116) просто связана с коммутатором на световом конусе, структура которого предполагается такой же, как и структура коммутатора (11.11'), а именно <sup>1)</sup>

$$[j_{\alpha}(x), j_{\beta}(0)]_{x^+=0} = \frac{1}{2i} I_{\alpha\beta}(x^-) \varepsilon(x^-) \delta^2(x_{\perp}). \quad (11.117)$$

При этом равенство (11.116) можно записать в виде

$$\int dQ^- t_{\alpha\beta}(Q^+, Q^-, Q_{\perp}) = C_{\alpha\beta}(Q^+), \quad (11.118)$$

где

$$C_{\alpha\beta}(Q^+) = \frac{1}{2i} \int dx^- \exp(iQ^+ x^-) \varepsilon(x^-) \langle p_2 | I_{\alpha\beta}(x^-) | p_1 \rangle. \quad (11.119)$$

(Зависимость от  $P$  и  $\Delta$  всегда подразумевается.) Таким образом, конечный результат (11.118) связывает дисперсионный интеграл от  $t_{\alpha\beta}(Q^-)$  с пространственным интегралом от одночастичного матричного элемента бислокального оператора  $I_{\alpha\beta}(x^-)$ . [То же самое можно, конечно, получить прямым насыщением соотношения (11.117).]

Чтобы лучше понять полученные правила сумм, проанализируем левую часть соотношения (11.118) привычным для нас способом. Поскольку в общем правиле сумм проводится интегрирование по  $Q^-$  при фиксированных значениях  $Q^+$ ,  $Q_{\perp}$  и  $P$ ,  $\Delta$ , инварианты  $v$ ,  $u$ ,  $w$  меняются вдоль линии, уравнение

<sup>1)</sup> Мы не принимаем здесь непосредственно простую скалярную модель из § 2, в которой  $I_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} I$ , потому что это привело бы к тривиальному (в силу перекрестной симметрии) правилу сумм (11.125). Простой вариант выражения (11.117) можно получить, рассматривая мезоны с изоспином  $1/2$  и вводя

$$j_{\alpha} = \varphi^+ \tau_{\alpha} \varphi.$$

Тогда легко показать, что

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta}(x) &= \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{2} [\varphi^{\dagger}(x) \varphi(0) + \varphi^{\dagger}(0) \varphi(x)] + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{2} [\varphi^{\dagger}(x) \tau_{\gamma} \varphi(0) - \varphi^{\dagger}(0) \tau_{\gamma} \varphi(x)] = \\ &= \delta_{\alpha\beta} I(x) + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} I_{\gamma}(x), \end{aligned}$$

где  $\langle p_2 | I(x) | p_1 \rangle$  — четная функция переменной  $x$ , а  $\langle p_2 | I_{\gamma}(x) | p_1 \rangle$  — нечетная, так что только это последнее выражение будет в действительности давать вклад в соотношение (11.125) (см. ниже).

которой можно легко найти, исключив  $Q^-$ :

$$\begin{aligned} v &= P^+ Q^- + P^- Q^+, \\ u &= 2Q^+ Q^- - Q_{\perp}^2 = \frac{2Q^+}{P^+} v - Q_{\perp}^2 - 2(Q^+)^2 \equiv 2av + b, \\ w &= \Delta Q = -\Delta_{\perp} Q_{\perp} = \text{const.} \end{aligned} \quad (11.120)$$

Таким образом, получаем *линейный* контур интегрирования в плоскости  $(v, u)$ . Ясно, что будет только одно пересечение контура (11.120) с линиями сингулярностей  $\bar{s} = M_i^2$ ,  $\bar{s} = \bar{M}_i^2$ ,  $q_1^2 = M_{i1}^2$ ,  $q_2^2 = M_{i2}^2$ . Это указывает на то, что вклад будет давать только часть кластерного разложения.

Посмотрим, например, как обстоит дело с вкладом класса I, соответствующим  $s = M^2$ . Условие  $(P + Q)^2 = M^2$  в обычных переменных имеет вид

$$P^0 + Q^0 = \pm_{\frac{1}{2}} [(P + Q)^2 + M^2]^{1/2}, \quad (11.121)$$

и два решения для  $Q_0$  соответствуют связному члену (в прямом канале)  $P^0 + Q^0 > 0$  и Z-диаграмме ( $P^0 + Q^0 < 0$ ).

В переменных светового конуса существует одно решение для  $Q^-$  (новая переменная интегрирования):

$$P^- + Q^- = \frac{Q_{\perp}^2 + M^2}{2(P^- + Q^+)}, \quad (11.122)$$

и, как нетрудно убедиться, это приводит к появлению связного или Z-вклада в зависимости от знака суммы  $P^+ + Q^+$ , а именно:

$$\begin{aligned} P^+ + Q^+ > 0 & \text{ связный вклад,} \\ P^+ + Q^+ < 0 & \text{ Z-вклад.} \end{aligned}$$

Все эти рассуждения, но с заменой  $Q \rightarrow -Q$  можно повторить при  $\bar{s} = M^2$ . В случае сингулярности по массе  $q_1^2 = M_i^2$  при обычном подходе мы имеем и прямой и перекрестный члены, соответствующие значениям  $q_{10} > 0$  и  $q_{10} < 0$ . В новых переменных массовая сингулярность задается выражением

$$Q^- = \frac{Q_{\perp}^2 + M_i^2}{2Q^+}, \quad (11.123)$$

и опять, выбирая  $Q^+ > 0$  или  $Q^+ < 0$ , мы воспроизводим вклад прямого или перекрестного членов. Заметим, что, поскольку  $P^+$  и  $Q^+$  — *внешние параметры*, в дальнейшем можно выбирать определенное семейство линий интегрирования, фиксируя  $P^+ > Q^+ > 0$  [т. е.  $1 > a > 0$ , формула (11.120)]. При этом нужно принимать во внимание только связные члены I класса и массовые сингулярности прямого канала ( $v > 0$ ). На фиг 11.1 показана прямая линия на плоскости  $(v, u)$  при  $w = 0$  и типичные линии сингулярностей.

В силу сказанного выше мы можем переписать соотношение (11.118) в более определенной форме [499, 552, 564]:

$$\int dt v_{\alpha\beta} [v, t, u(v), w] = P^+ C_{\alpha\beta}(Q^+). \quad (11.124)$$

Возможности применения правил сумм такого типа для извлечения информации, содержащейся в коммутационных соотношениях на световом конусе, пока еще не уделялось большого внимания, а поэтому мы лучше обратимся к простейшей конфигурации, совместимой, конечно, с правилами сумм при фиксированной массе. Такую конфигурацию можно получить, полагая  $Q^+ \rightarrow 0$ , т. е.  $Q^2 \rightarrow -Q_{\perp}^2$  (а именно  $u_{1,2} \rightarrow -q_{1,2}^2$ ). Если допустима перестановка предела при  $Q^+ \rightarrow 0$  и дисперсионного интеграла, то правило сумм прини-

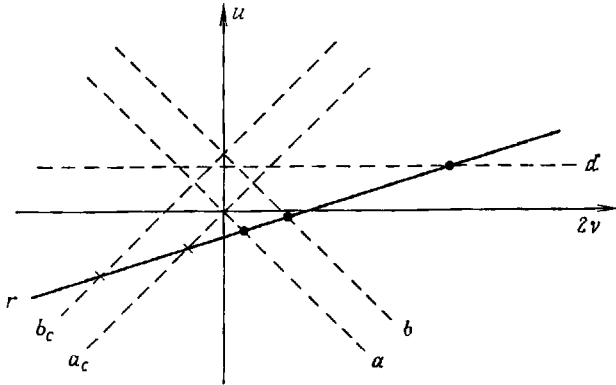
мает вид

$$\int dt v_{\alpha\beta} [v, t, u_1 = -q_{1\perp}^2, u_2 = -q_{2\perp}^2] = P^+ C_{\alpha\beta}(0) = \frac{P^+}{2i} \int dx^- \varepsilon(x^-) \langle p_2 | I_{\alpha\beta}(x^-) | p_1 \rangle. \quad (11.125)$$

Правым частям равенств (11.124) и (11.125) можно придать особенно интересную форму, рассматривая рассеяние вперед:

$$\int dt v_{\alpha\beta} [v, u = -q_{\perp}^2] = p^+ C_{\alpha\beta}(0). \quad (11.125')$$

Напомним, что в этом случае  $C_{\alpha\beta}(q^+)$  можно связать со структурной



Фиг. 11.1. Прямая линия  $r$  на плоскости  $(u, 2v)$  при  $w = 0$  (ее уравнение имеет вид  $u = 2av + b, 0 < a < 1$ ).

Показаны точки ее пересечения с линиями типичных сингулярностей, соответствующими уравнениям

- a)  $s = m_N^2; \quad a_c) \quad \bar{s} = m_N^2;$
- b)  $s = M^2; \quad b_c) \quad \bar{s} = M^2;$
- d)  $u = m_1^2.$

Точки пересечения, отмеченные кружком, соответствуют прямым членам, а точки пересечения, отмеченные крестиком, соответствуют перекрестным членам. Все они относятся к связанному типу, так как  $0 < a < 1$ .

функцией Бьёркена, определенной следующим образом:

$$\langle p | I_{\alpha\beta}(x^-) | p \rangle = g_{\alpha\beta}(\sigma) = \int d\xi \exp [i\xi(p^+ x^-)] F_{\alpha\beta}(\xi). \quad (11.126)$$

По теореме о свертке <sup>1)</sup>

$$C_{\alpha\beta}(q^+) = \frac{1}{p^+} \int \frac{d\xi F_{\alpha\beta}(\xi)}{\xi + q^+/p^+} \quad (11.127)$$

и

$$p^+ C_{\alpha\beta}(0) = \int \frac{d\xi F_{\alpha\beta}(\xi)}{\xi}. \quad (11.128)$$

Результаты (11.125) и (11.125') можно следующим образом выразить словесно: закон коммутации на световом конусе (11.114) гарантирует независимость правой части правила сумм от  $Q_{\perp}(q_{\perp})$ ; иначе говоря, в исходном коммутаторе имеется только множитель  $\delta^2(x_{\perp})$ . В математической же форме

<sup>1)</sup> А также в силу равенства

$$\varepsilon(x^0) = P \frac{i}{\pi} \int \frac{d\alpha}{\alpha} \exp(-i\alpha x_0).$$

это можно выразить соотношением (для случая  $u < 0$ )

$$\int dt v_{\alpha\beta}(v, u) = \int dt v_{\alpha\beta}(v, u'). \quad (11.129)$$

Устремляя  $u'$  к бесконечности и принимая, что интеграл в правой части определяется в основном областью скейлинга, получаем

$$\int dt v_{\alpha\beta}(v, u) = \lim_{u' \rightarrow \infty} \int \frac{d\xi}{\xi} \tilde{F}_{\alpha\beta}(\xi, u') = \int \frac{d\xi}{\xi} F_{\alpha\beta}(\xi). \quad (11.130)$$

Это эквивалентно равенству (11.125'), дополненному соотношением (11.128).

Форма правой части правила сумм при фиксированной массе (11.125) может показаться довольно удивительной читателю, знакомому с гл. 4 и 8 нашей книги. В самом деле, все представленные там правила сумм связаны с матричными элементами *локальных операторов*. Дисперсионный же интеграл с фиксированной массой в формуле (11.125) имеет вид интеграла от *белокального оператора*, который, грубо говоря, связан с бесконечным числом локальных операторов. Нетрудно догадаться о причинах такого различия: ни методы гл. 4, ни методы гл. 8 не могут, по-видимому, дать правила сумм, сходного с (11.125).

Что касается гл. 4, то здесь дело в отсутствии исходного тождества Уорда, так как  $j_\alpha(x)$  — скалярный ток, а не временная компонента векторного тока. При методе же бесконечно большого импульса (гл. 8) нам пришлось бы рассматривать коммутатор плохих компонент с плохими. Тогда  $Z$ -диаграммы и несвязные сингулярности дадут основной вклад в сумму по полному набору состояний также и при  $p \rightarrow \infty$  и мы не сможем вывести правила сумм. Все это говорит о том, что левая часть равенства (11.125) вряд ли может быть связана только с одним локальным оператором. Метод светового конуса, по-видимому, подтверждает этот вывод и указывает на то, что в данном случае дисперсионную сумму можно связать с чем-то иным, а именно с белокальным оператором.

В следующем разделе затронутые здесь вопросы будут рассмотрены подробнее: мы проанализируем условия справедливости правил сумм, выведенных методом светового конуса, и посмотрим, какова здесь связь с методом одновременных коммутаторов в пределе при  $p \rightarrow \infty$ .

## 2. Условия справедливости правил сумм

В простой форме дисперсионного интеграла, взятого только по области сингулярностей связанных диаграмм, правила сумм (11.125) были получены после некоторых преобразований, справедливость которых мы хотим теперь исследовать. В частности, перестановка предела при  $Q^+ \rightarrow 0$  и дисперсионного интеграла, приводящая от (11.124) к (11.125), допустима лишь в том случае, если можно пренебречь вкладом сингулярностей по массам. Чтобы было яснее, рассмотрим вклад II класса, соответствующий взаимодействию скалярной частицы массы  $M_2^2$  с током, и исследуем его поведение в пределе при  $Q^+ \rightarrow 0$ . Находим

$$\begin{aligned} \lim_{Q^+ \rightarrow 0} \int dt v_{\alpha\beta}[v, t, u(v), w] \Big|_{u_2=M_2^2}^{\text{II}} &= \\ &= \lim_{Q^+ \rightarrow 0} \frac{f}{2Q^+} T_{\alpha\beta}[v(Q^+), t, u_1 = M_2^2 + \mathbf{q}_{2\perp}^2 - \mathbf{q}_{1\perp}^2] = \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{fvT_{\alpha\beta}[v, t, u_1 = M_2^2 + \mathbf{q}_{2\perp}^2 - \mathbf{q}_{1\perp}^2]}{P^+ [M_2^2 + \mathbf{q}_{2\perp}^2]}, \quad (11.131) \end{aligned}$$

где  $\langle 0 | j_\alpha | q_2, \sigma \rangle = f\delta_{\alpha\sigma}$ , а  $T(v, t, u_1)$  — амплитуда процесса смешанного типа  $p_1 + j_\beta \rightarrow p_2 + q_2$ . (Такое же выражение, но с заменой  $1 \leftrightarrow 2$  возникает при учете вклада  $u_1$ -канала.) Таким образом, и при методе светового конуса правилу сумм можно придать простую форму *только тогда*,

когда  $\lim_{v \rightarrow \infty} vT = 0$ , т. е. когда для класса амплитуд сильного и смешанного <sup>1)</sup> типа сверхсходимость имеет место. В противном же случае либо правило сумм расходится ( $vT \rightarrow \infty$ ), либо появляются дополнительные члены ( $vT \rightarrow R$ ) <sup>2)</sup>. Эти члены представляют собой неполиномиальные по  $q_{2\perp}$  выражения типа  $R/(M_2^2 + q_{2\perp}^2)$ ; но особенность при  $q_{2\perp}^2 = -M_2^2$  отсутствует, как того требует локальность по  $x_\perp$  правой части коммутационного соотношения. Дело в том, что происходит точное взаимное уничтожение, и соответствующий интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} & \lim_{q_{2\perp}^2 \rightarrow -M_2^2} (q_{2\perp}^2 + M_2^2) \int dv t_{\alpha\beta} [v, t, u_1 = -q_{1\perp}^2, u_2 = -q_{2\perp}^2] = \\ & = \int dv \text{Im } T_{\alpha\beta} [v, t, u_1 = -q_{1\perp}^2] = -\lim_{v \rightarrow \infty} vT_{\alpha\beta} [v, t, u_1 = -q_{1\perp}^2] = -R. \end{aligned} \quad (11.132)$$

Казалось бы, что динамические дополнительные условия можно устранить, если *сначала* перейти к пределу при  $Q^+ \rightarrow 0$  и тем самым автоматически исключить сингулярности II класса с линии интегрирования, а затем уже интегрировать по  $Q^-$ . Но тогда у нас в левой части будет величина

$$\lim_{x^+ \rightarrow 0} \left[ \int \exp(-iQ_\perp x_\perp) dx_\perp dx^- [j_\alpha(x), j_\beta(0)], \right.$$

а не коммутатор на световом конусе

$$\int \exp(-iQ_\perp x_\perp) dx_\perp dx^- [j_\alpha(x), j_\beta(0)]_{x^+ = 0}.$$

Снова встает вопрос о перестановке предела  $x^+ \rightarrow 0$  и интеграла по  $x^-$ , возможность которой зависит от гладкости оператора  $\int dx^- j_\alpha(x)$ . Можно показать, что перестановка возможна только при условии сверхсходимости.

Условия сверхсходимости, необходимые для вывода правил сумм из коммутационных соотношений на световом конусе, совершенно аналогичны условиям, необходимым для устранения вкладов II класса при выводе этих правил методом предела  $P \rightarrow \infty$  из одновременных коммутаторов. С этими условиями мы встречались в гл. 8. Таким образом, возникает вопрос, чем же действительно различаются эти два подхода. Сначала заметим, что линейный контур интегрирования (11.120) на плоскости  $(v, u)$  можно получить как вырожденную параболу из гл. 7, рассматривая особый случай предела бесконечно большого импульса <sup>3)</sup>. Именно: возьмем конфигурацию

$$Q = aP + \eta, \quad P\eta = P\Delta = 0 \quad (11.133)$$

и перейдем в систему бесконечно большого импульса. Тогда простые выкладки показывают, что

$$\begin{aligned} u &= \frac{(v + PQ)^2}{P_0^2} - Q^2 \rightarrow 2av - \bar{\eta}^2 - P^2 a^2, \\ w &\rightarrow -\Delta\eta, \end{aligned} \quad (11.134)$$

и можно сразу же написать  $a = Q^+/p^+$ ,  $\eta = Q_\perp$ . Кроме того, исходя из общего выражения для  $v$  в точках пересечения параболы с линиями сингулярностей [формулы (7.94) — (7.99)], можно показать, что при  $a > 1$  или  $a < 1$  тот или иной тип вкладов I класса связан с уходом на бесконечность. Точно так же при  $a > 0$  или  $a < 0$  прямые или перекрестные массовые сингулярности

<sup>1)</sup> См. примечание редактора на стр. 229. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> В теории Редже такое поведение с фиксированным показателем степени соответствует неподвижному полюсу при  $j = -1$ .

<sup>3)</sup> Этот особый случай предела бесконечно большого импульса предложил Сегре [567].



принимают предельные значения. Конфигурация же с фиксированными массами достигается в пределе при  $a \rightarrow 0$ .

Обратимся теперь к выводу правил сумм в рассматриваемом скалярном случае. Мы видели, что при использовании переменных и коммутаторов на световом конусе автоматически получается правило сумм с интегрированием по прямолинейному контуру [формула (11.124)]:

$$\int dt_{\alpha\beta} [v, t, u(v), w] = P^+ C_{\alpha\beta} (Q^+),$$

причем новую информацию о теории содержит матричный элемент бислокального оператора в правой части равенства. Если же начинать с одновременных коммутаторов  $[j_\alpha(x), j_\beta(0)] = 0$  и насыщать их матричные элементы в особой системе бесконечно большого импульса (11.133), то полученное правило сумм в общем случае будет кроме дисперсионного интеграла, уже имеющегося в формуле (11.124), содержать асимптотические вклады  $Z$ -диаграмм и некоторых массовых сингулярностей:

$$\int dt_{\alpha\beta} [v, t, u(v), w] + (Z\text{-диаграммы})_{u \rightarrow \infty} + (\text{перекрестн. масс. синг.})_{v \rightarrow \infty} = 0. \quad (11.124')$$

По-видимому, это говорит о том, что метод светового конуса должен каким-то образом автоматически учитывать  $Z$ -диаграммы и некоторые другие асимптотические члены<sup>1)</sup>, придавая им компактную и полностью определенную форму фурье-образа бислокального оператора. И наконец, если выполняется условие сверхсходимости, можно получить правило сумм при фиксированной массе (1.125).

Окончательный вывод таков: при методе светового конуса достигается двоякая цель: в конечном счете учитывается вклад  $Z$ -диаграмм и придается определенность правилам сумм, которые нельзя было получить старыми методами. Это не удивительно: коммутатор на световом конусе эквивалентен бесконечному числу одновременных коммутаторов [формула (11.26)] и поэтому содержит гораздо больше информации (при гораздо большей зависимости от модели!), что позволяет устранить некоторые трудно вычисляемые вклады.

В рассматриваемом случае модифицированное правило сумм подтверждает, что мы работаем с коммутатором плохих компонент, считая при этом неизменным общее правило сумм алгебры токов [соотношение (8.20)], основанное на хороших операторах  $j_\alpha^a$  и  $j_\beta^b$ . На данном вопросе мы остановимся в следующем разделе.

### 3. Общее правило сумм, следующее из алгебры токов

Из сказанного выше следует, что было бы интересно пересмотреть с точки зрения алгебры токов на световом конусе вывод тех дисперсионных правил сумм, которые могут быть получены или были получены из одновременных коммутаторов токов. Для простоты перепишем определение структурной функции  $t_{\mu\nu}$  в случае двух сохраняющихся векторных токов и бесспиновых мишеней:

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(Q, P, \Delta) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{iQx} d^4x \left\langle P_2 \left[ V_\mu^\alpha \left( \frac{1}{2} x \right), V_\nu^\beta \left( -\frac{1}{2} x \right) \right] \middle| P_1 \right\rangle = \\ &= a^{\alpha\beta} P_\mu P_\nu + b_1^{\alpha\beta} P_\mu Q_\nu + \dots + d^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (11.135)$$

<sup>1)</sup> Мы не приводим здесь анализа асимптотических условий и соотношений, с которыми сталкиваются при изучении различных вкладов в особой системе (11.133), т. е. когда сначала полагают  $P \rightarrow \infty$  при фиксированном  $a$ , а затем принимают  $a = 0$ .

Как мы помним, в гл. 8 было показано, что, исходя из одновременного коммутационного соотношения

$$[V_0^\alpha(x), V_0^\beta(0)] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_0^\gamma \delta(x), \quad (11.136)$$

путем перехода к системе бесконечно большого импульса <sup>1)</sup> можно вывести следующее правило сумм:

$$\frac{1}{2} \int d\nu a_\beta^\alpha[\nu, t, u_1, u_2] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} F_\gamma(t), \quad u_i = -q_i^2. \quad (11.137)$$

Разумеется, вид правой части равенства (11.137) определяется матричным элементом локального тока  $V_\mu^\gamma$ . Теперь мы хотим показать, что равенство (11.137) можно получить как прямое следствие структуры коммутаторов токов на световом конусе, о которой говорилось в § 3. Для этого рассмотрим амплитуду

$$t_{\alpha\beta}^{++}(Q, P, \Delta) = \frac{1}{2\pi} \int e^{iQx} d^4x \langle p_2 | [V_\alpha^+ \left(\frac{1}{2}x\right), V_\beta^+ \left(-\frac{1}{2}x\right)] | p_1 \rangle. \quad (11.138)$$

Применяя к  $t_{\alpha\beta}^{++}$  тот же прием, что и в скалярном случае (в частности, переходя к пределу при  $Q^+ \rightarrow 0$ ), получаем

$$\begin{aligned} \int dQ^- t_{\alpha\beta}^{++}(Q^+ = 0, Q^-, Q_\perp) = \\ = \int dx^- dx_\perp \exp(-i\mathbf{q}_{2\perp} \mathbf{x}_\perp) \langle p_2 | [V_\alpha^+(x), V_\beta^+(0)]_{x^+=0} | p_1 \rangle. \end{aligned} \quad (11.139)$$

Кроме того, пользуясь соотношением

$$\lim_{Q^+ \rightarrow 0} t_{\alpha\beta}^{++}(Q, P, \Delta) = (P^+)^2 a(\nu, t, u = -Q_\perp^2, w = -Q_\perp \Delta_\perp), \quad (11.140)$$

следующим из определения (11.135) (с учетом того, что  $\Delta^+ = g^{++} = 0$ ), левую часть соотношения (11.137) можно представить в виде дисперсионного интеграла, фигурирующего в обычных правилах сумм алгебры токов:

$$\begin{aligned} \int d\nu a(\nu, t, -\mathbf{q}_{1\perp}^2, -\mathbf{q}_{2\perp}^2) = \\ = \frac{1}{P^+} \int dx^- dx_\perp \exp(-i\mathbf{q}_{2\perp} \mathbf{x}_\perp) \langle p_2 | [V_\alpha^+(x), V_\beta^+(0)]_{x^+=0} | p_1 \rangle. \end{aligned} \quad (11.141)$$

Чтобы убедиться в том, что соотношение (11.141) действительно совпадает с (11.137), достаточно подставить в него выражение для коммутатора на световом конусе в кварковой модели

$$[V_\alpha^+(x), V_\beta^+(0)]_{x^+=0} = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_\gamma^+(0) \delta(x^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp), \quad (11.142)$$

В правой части этого коммутационного соотношения содержится локальный оператор  $V_\gamma^+$ , и в данном случае по своей структуре оно вполне аналогично одновременному коммутатору (11.136).

При более тщательном сравнении соотношений (11.136) и (11.142) выявляются дополнительные сходства и различия в отношении утверждений о их справедливости. Так, обычно предполагают, что одновременный коммутатор компонент (0, 0) токов почти не зависит от модели: в правой части соотношения (11.136) не требуется никаких добавок градиентов от  $\delta(x)$  (хотя в принципе они могли бы там быть), в отличие, например, от случая компонент (0,  $k$ ), в котором заведомо появляются зависящие от модели швингеровские члены. В то же время, хотя простая локальная структура коммутатора  $[V_\alpha^+, V_\beta^+]_{x^+=0}$  воспроизводится во всех обычно рассматриваемых теоретических моделях, как мы уже упоминали, в случае бесспиновых «кварков» здесь

<sup>1)</sup> Или, что эквивалентно, методом, основанным на тождествах Уорда (гл. 4).

имеются дополнительные бислокальные операторы <sup>1)</sup>. Для этой конкретной модели имеем

$$[V_{\alpha}^{+}(x), V_{\beta}^{+}(0)]_{x^{+}=0} = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_{\gamma}^{+}(0) \delta(x^{-}) \delta^2(\mathbf{x}_{\perp}) + \frac{\partial}{\partial x^{-}} S_{\alpha\beta}(x, 0) |_{x^{+}=0}, \quad (11.143)$$

$$S_{\alpha\beta}(x, 0) = \frac{\partial}{\partial y^{-}} \left\langle \varepsilon(x^{-} - y^{-}) \delta(\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{y}_{\perp}) \frac{1}{2} [\Phi_{\alpha}(x) \Phi_{\beta}(y) + \Phi_{\alpha}(y) \Phi_{\beta}(x)] \right\rangle_{y=0}, \quad (11.144)$$

где  $\Phi_{\alpha}$  — оператор поля бесспиновой частицы. (Поскольку  $x^{+} = 0$ , эти выражения должны быть локальными лишь по  $\mathbf{x}_{\perp}$ , но не по  $x^{-}$ .)

Очевидно, однако, что коммутационное соотношение (11.143) также даст правило сумм (11.141), ибо вклад добавочных градиентных членов в правой части этого соотношения оказывается равным нулю после интегрирования по  $x^{-}$ .

В случае сохраняющихся токов есть одно простое не зависящее от модели соображение, позволяющее ограничить возможный вид этих добавочных членов. Вспомним общее определение заряда на четырехмерной гиперплоскости:

$$Q_{\alpha}(n) = \int d^4x \delta(nx) n^{\mu} j_{\mu}^{\alpha}(x), \quad (11.145)$$

где  $n^{\mu}$  — единичный вектор, характеризующий плоскость  $nx = 0$  (для простоты мы положили  $\tau = 0$  в уравнении  $nx = \tau$ ). Обычно выбирают пространственно-подобные плоскости  $n^2 = 1$ ; в частности, в системе координат, где  $n_{\mu} \equiv (1, 0)$ , получаем знакомое нам определение ( $x^0 = 0$ )

$$Q_{\alpha} = \int d^3x j_0^{\alpha}(x).$$

Но поскольку заряд сохраняется, его определение не зависит от поверхности интегрирования, и можно определить заряд на светоподобной плоскости  $n^2 = 0$ ,  $nx = 0$  (т. е.  $x^2 \leq 0$ ). Выбирая  $n^{\mu} \equiv (1, 0, 0, -1)$ , находим, что оператор  $Q_{\alpha}$  может быть записан в полностью эквивалентном виде

$$Q_{\alpha} = \int dx^{-} d\mathbf{x}_{\perp} j_{\alpha}^{+}(x^{+}=0, x^{-}, \mathbf{x}_{\perp}). \quad (11.146)$$

Коль скоро предполагается справедливость алгебры зарядов:

$$[Q_{\alpha}, Q_{\beta}] = i f_{\alpha\beta\gamma} Q_{\gamma}, \quad (11.147)$$

нужно наложить некоторые ограничения на коммутатор  $[j_{\alpha}^{+}, j_{\beta}^{+}]$ , чтобы не нарушить соотношение (11.147). Как нетрудно убедиться, наиболее общая форма такого коммутатора, совместная с (11.147), дается выражением

$$[j_{\alpha}^{+}(x), j_{\beta}^{+}(0)]_{x^{+}=0} = i f_{\alpha\beta\gamma} j_{\gamma}^{+}(0) \delta(x^{-}) \delta\mathbf{x}_{\perp} + \text{градиентные члены}. \quad (11.148)$$

Дополнительные градиентные члены содержат лишь производные типа  $\partial/\partial x^{-}$ ,  $\partial/\partial x^i$  и, разумеется, не дают вклада в коммутатор зарядов. Отмеченное ограничение носит точно такой же характер, как и в случае коммутатора  $[j_{\alpha}^{\beta}(x), j_{\beta}^{\alpha}(0)]$ , когда единственное требование справедливости алгебры зарядов не могло устранить в правой части (11.136) добавочных градиентных членов вида  $\partial^k [s_k(\bar{\mathbf{x}}) \delta(\bar{\mathbf{x}})]$ .

Итак, если мы обратимся к общей форме правила сумм (11.141), то становится ясно, что производные  $\partial/\partial x^{-}$  не дают вклада в правую часть. Таким образом, видоизменения в общем правиле сумм алгебры токов, установленном в гл. 8, могут здесь возникнуть лишь за счет поперечных компонент

<sup>1)</sup> Можно показать, что эти дополнительные члены должны присутствовать в силу тех же самых требований положительности, что и обычные швингеровские члены в  $[j^0, j^k]_{\text{одновр.}}$

градиентов  $(\partial/\partial x^i) \delta(x_\perp)$ . Но, как нам кажется, наличие добавочных поперечных градиентных членов в коммутаторе  $[j_\alpha^+(x), j_\beta^+(0)]_{x^+=0}$  говорило бы о том, что рассматриваемая теория очень сильно отличается от обычной. В частности, такие градиенты вряд ли могут существовать в моделях, где наиболее сингулярный член в одновременном коммутаторе компонент  $(0, 0)$  пропорционален  $\delta(x)$ .

Независимо от этого вывод об отсутствии операторных градиентных членов  $\partial/\partial x^-, \partial/\partial x_\perp$  был сделан в § 4 в результате анализа соотношения между скейлингом и поведением на световом конусе.

Коснемся, наконец, вопроса о динамических предположениях, таких, как законность предела  $Q^+ \rightarrow 0$ , лежащих в основе вывода общего правила сумм алгебры токов. Как в гл. 8, так и в предыдущем разделе мы уже подробно останавливались на том обстоятельстве, что асимптотические условия для смешанных амплитуд и формфакторов, позволяющие исключить  $Z$ -диаграммы и массовые сингулярности, должны, по-видимому, выполняться и здесь. Поэтому неудивительно, что оба метода дают одинаковые результаты.

Все это можно сформулировать и иначе. Дело в том, что в рассматриваемом примере в правой части правила сумм фигурирует лишь матричный элемент локального тока  $j^+$ , а это эквивалентно информации, содержащейся в одновременном коммутаторе  $[j_0, j_0]$ . Как явствует из соотношения (I.41), это равносильно тому, что в пределе бесконечного импульса все выражения типа

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p_0^{n+1}} \int d^3x \langle p | \left[ \frac{\partial^n j_0^\alpha(x)}{\partial x_0^n}, j_0^\beta(0) \right]_{x_0=0} | p \rangle, \quad \text{где } n \geq 1,$$

равны нулю. Данное условие может служить новой характеристикой коммутаторов хороших компонент. Было бы полезно пересмотреть в таком плане те правила сумм, которые выглядели довольно подозрительно при выводе их старыми методами с использованием коммутаторов хороших компонент с плохими и коммутаторов плохих компонент. С этой целью рассмотрим коммутатор  $[V_\alpha^+(x), V_\beta^-(0)]_{x^+=0}$ , в который билокальный оператор входит нетривиальным образом. Если для простоты ограничиться случаем рассеяния вперед, то можно взять знакомое нам разложение (11.76). Тогда, исходя из коммутатора  $[V_\alpha^+(x), V_\beta^-(0)]_{x^+=0}$  в развернутом виде [формула (11.64) или (11.21)], нетрудно получить правило сумм

$$\int_0^\infty dv \frac{vW_2^{\alpha\beta}}{-q^2 m_N^2} = \frac{i}{8} d_{\alpha\beta\gamma} p^+ \int_{-\infty}^{+\infty} dx^- [g(p^+x^-) - \bar{g}(p^+x^-)] = \int_0^1 \frac{d\xi}{2\xi^2} F_2^{\alpha\beta}(\xi). \quad (11.149)$$

К сожалению, все дело портится тем, что соответствующие требования сходимости, по-видимому, не выполняются. Заметим, однако, что при таком выводе, основанном на алгебре токов на световом конусе, результат несколько отличается от упрощенного результата, следующего из одновременного коммутатора  $[V_0^\alpha, V_k^\beta]$ , а именно от равенства

$$\int dv v W_2 = 0$$

в случае  $s$ -числовых швингеровских членов.

Кроме того, форма правила сумм (11.149) оказывается такой, что появляется возможность придать определенный смысл правилу сумм при конечной энергии. В самом деле, если рассматривать электромагнитные взаимодействия и предположить, что асимптотическое поведение параметризуется согласно теории Редже, то обе части равенства (11.149) можно переписать

в форме

$$\begin{aligned} & \frac{2}{-q^2 m_N^2} \int_0^{v_M} dv \left[ v W_2 - \sum_i b_i (-q^2) \omega^{\alpha_i(0)-1} \right] = \\ & = \int_1^{\omega_M} d\omega \left[ F_2(\omega) - \sum_i b_i (\infty) \omega^{\alpha_i(0)-1} \right] \end{aligned} \quad (11.150)$$

[соотношение (9.25)].

Далее, учитывая эмпирический вывод о том, что разницей между асимптотиками можно пренебречь, получаем наконец соотношение Блума — Джилмана [571]

$$\frac{2}{-q^2 m_N^2} \int_0^{v_M} dv v W_2(v, q^2) = \int_1^{\omega_M} d\omega F_2(\omega). \quad (11.151)$$

## § 7. Выводы

В данной главе мы увидели, что в физику элементарных частиц вошло новое понятие — понятие *бислокального оператора*. На этом следует, по нашему мнению, остановиться особо. В последнем параграфе нам хочется подчеркнуть некоторые свойства бислокальных операторов и в то же время наметить некоторые новые возможные пути дальнейшего развития.

Для простоты вернемся к скалярной модели из § 2. В этой модели соответствующий бислокальный оператор имел простой вид

$$J(x, y) = \frac{1}{2} [\varphi(x) \varphi(y) + \varphi(y) \varphi(x)], \quad (11.9)$$

где  $\varphi(x)$  — поле скалярного «кварка».

Мы уже отмечали (при введении понятия бислокального оператора в гл. 10, § 4, п. 7), что бислокальный оператор объединяет в себе локальные операторы с разными максимальными значениями спина  $J$ . Точнее говоря, бислокальный оператор  $I(x, 0)$  можно представить в виде [формула (10.224)]

$$I(x, 0) = \sum_n x^{\mu_1} \dots x^{\mu_J} O_{\mu_1 \dots \mu_J}^{(J)}(0), \quad (11.152)$$

где  $O_{\mu_1 \dots \mu_J}^{(J)}$  — локальный тензорный оператор ранга  $J$  и размерности  $l_J$ , так что для всех операторов в сумме (11.152) фиксирован твист  $l_J = J$ . Выражение (11.152) означает, что бислокальный оператор, связанный с определенной особенностью коммутатора на световом конусе, складывается из бесконечного числа локальных операторов разного ранга относительно группы Лоренца, имеющих одинаковый твист.

На световом конусе  $x^+ = 0, x_{\perp} = 0$  имеем

$$I(x^+ = 0, x^-, x_{\perp} = 0) \equiv I(x^-) = \sum I_n \frac{(x^-)^n}{n!} \quad (11.153)$$

и, сравнивая это выражение с разложением (11.152), получаем

$$I_n = O_{(-), \dots, (-)}^{(n)}. \quad (11.154)$$

Теперь вспомним определение матричного элемента на световом конусе  $g(\sigma)$ :

$$\langle p | I(x, 0) | p \rangle_{x^+ = 0, x_{\perp} = 0} = g(p^+ x^-). \quad (11.155)$$

При этом из равенств (11.153) и (11.154) получаем

$$g_n = \frac{1}{(p^+)^n} \langle p | I_n | p \rangle = \frac{1}{(p^+)^n} \langle p | O_{(-), \dots, (-)}^{(n)} | p \rangle, \quad (11.156)$$

где

$$g(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\sigma^n}{n!}. \tag{11.157}$$

Индекс  $n$  функции  $g_n$  или  $I_n$  указывает на максимальное значение углового момента оператора  $O^n$ . То обстоятельство, что индекс  $n$  связан с угловым моментом, говорит о прямой связи матричного элемента  $g_n$  с теорией полюсов Редже. Рассмотрим выражение (11.157). По аналогии с эвристическим методом, изложенным в гл. 1, § 6, можно ввести интерполирующую функцию  $\gamma(z)$ , удовлетворяющую условиям теоремы Карлсона, такую, что  $\gamma(n) = g_n$  при  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и написать

$$g(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\sigma^n}{n!} = \frac{i}{2} \int dz \frac{\gamma(z)}{\sin \pi z} \frac{(-\sigma)^z}{\Gamma(z+1)}. \tag{11.158}$$

Контур интегрирования показан на фиг. 1.4. Посмотрим, что дает полюс функции  $\gamma(z)$  в точке  $z = \alpha_0$ , расположенный правее остальных особенностей в комплексной  $z$ -плоскости. Имеем

$$\gamma(z) = \frac{\beta}{z - \alpha_0} + \text{остальные члены}, \tag{11.159}$$

и, следовательно,

$$g(\sigma) \underset{\sigma \rightarrow \infty}{\sim} -\beta \Gamma(-\alpha_0) (-\sigma)^{\alpha_0}. \tag{11.160}$$

Мы видим, что

1. На больших расстояниях вдоль светового конуса матричный элемент  $g(\sigma)$  асимптотически ведет себя как степенная функция  $\sigma^{\alpha_0}$ .

2. Функция  $g(\sigma)$  имеет полюса в точках  $\alpha_0 = n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , с вычетами, пропорциональными  $\sigma^n$ . Согласно сказанному ранее, это полюса в плоскости углового момента.

Таким образом, мы получили те же свойства, что и в теории Редже, так что точку  $\alpha_0$  можно отождествить с точкой пересечения траектории Редже при  $t = 0$ .

Эта связь станет яснее, если обратиться к бёркеновскому скейлингу. Мы видели, что существование коммутаторов на световом конусе в форме (11.15) имеет следствием масштабную инвариантность (11.39):

$$\lim_{\substack{v \rightarrow \infty \\ \xi = \text{const}}} v t(v, q^2) = F(\xi). \tag{11.161}$$

Из соотношения (11.161) вытекает степенное поведение функции  $F(\xi)$  при малых  $\xi = -q^2/2v$  (т. е. в реджевской области). В самом деле, выражение [формула (11.40)]

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma e^{-i\sigma\xi} g(\sigma) \tag{11.162}$$

означает, что

$$F(\xi) \underset{\xi \rightarrow 0}{\sim} A \xi^{-\alpha_0-1}, \tag{11.163}$$

или

$$F\left(-\frac{q^2}{2v}\right) \sim A \left(-\frac{2v}{q^2}\right)^{\alpha_0+1} \tag{11.164}$$

при больших  $v/q^2$ . Но это — реджевское поведение структурных функций, о которых говорилось в гл. 10. Поэтому мы заключаем, что бислокальные операторы действительно могут быть прямо связаны с реджестикой.

Не исключено, что эта важная связь позволит дать более строгое теоретико-полевое обоснование асимптотик Редже.

Отметим также еще раз как важный момент, что правила сумм при фиксированной массе простым и естественным образом описываются при методе светового конуса и билокальных операторов. Это позволяет охватить те случаи, в которых непригодны прежние методы.

Напомним, наконец, одну очень важную идею, высказанную Фричем и Гелл-Манном [549]. Принимая за основу новую алгебру коммутаторов на световом конусе, а не алгебру одновременных коммутаторов, мы видим, что алгебра локальных операторов не замкнута, ибо коммутатор двух локальных токов на световом конусе не обязательно локален. Тогда встает вопрос: образует ли набор билокальных операторов замкнутую алгебру? Модель свободных кварков говорит, что это так, и не исключено, что ответ будет таким же даже при наличии взаимодействия с некоторым глюонным полем [550]. Поэтому, такая замкнутая билокальная алгебра заслуживает большого внимания.

Коммутационные соотношения между левыми билокальными операторами имеют вид [549]

$$[\mathcal{Y}_\mu^{\alpha L}(x, u), \mathcal{Y}_\nu^{\beta L}(y, v)] = \tau_{\alpha\beta\gamma} [s_{\mu\nu\sigma} \mathcal{Y}^{\sigma\gamma L}(x, v) + i\varepsilon_{\mu\nu\sigma} \mathcal{Y}^{\sigma\gamma L}(v, x)] \times \\ \times \partial^\rho D(u-y) - \begin{pmatrix} u \leftrightarrow v \\ x \leftrightarrow y \\ \alpha \leftrightarrow \beta \end{pmatrix}. \quad (11.165)$$

Согласно изложенной в данной главе теории, алгебра билокальных операторов (11.165) должна использоваться для точек  $x, u$  и  $y, v$ , лежащих на одном и том же световом луче.

Пока еще рано говорить о том, что даст нам такой интересный подход. С одной стороны, может быть, удастся вывести алгебраические соотношения между структурными функциями, необходимые для того, чтобы продвинуться дальше простой констатации бёркеновского скейлинга. С другой стороны, представляется возможным получить некоторые (к сожалению, не очень-то простые) экспериментальные подтверждения билокальной алгебры.

Еще не пришло время для подведения итогов тем многочисленным возможностям, которые открылись с введением билокальных операторов. Сейчас можно с уверенностью лишь утверждать, что это новое направление исследования привело к более глубокому и единому пониманию старых положений и к замечательным перспективам дальнейшего развития.

### **Приложение I. Коммутаторы токов в модели свободных кварков**

Самым прямым способом коммутационные соотношения на световом конусе выводят, исходя из коммутаторов свободных полей. Затем абстрагируются от модели и полученные выражения считают справедливыми даже при наличии взаимодействия. Другой возможный метод — это метод канонического квантования основных полей на светоподобных поверхностях. Преимущество второго метода в том, что он дает более полное представление о различной степени общности тех или иных коммутационных соотношений. Другими словами, при таком методе обнаруживается, что форма одних коммутаторов не зависит от уравнений движения для полей, а форма других зависит.

Тот и другой вывод коммутационных соотношений на световом конусе мы изложим в двух приложениях. В данном приложении приводятся некоторые подробности вычислений в модели свободных кварков, а в приложении II излагаются некоторые результаты метода канонического квантования на светоподобных поверхностях.

1. Коммутаторы токов в кварковой модели

Нашей задачей является построение общих коммутационных соотношений  $[j_{\mu, \alpha}^{L, R}(x), j_{\nu, \beta}^{L, R}(y)]$  между токами

$$j_{\mu, \alpha}^{L, R}(x) = \bar{q}(x) \gamma_{\mu} (1 \mp \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda^{\alpha} q(x), \quad \alpha = 0, 1, \dots, 8, \quad (1.1)$$

выраженными через свободные безмассовые кварковые поля  $q(x)$ . Принимая во внимание то обстоятельство, что единственный отличный от нуля антикоммутатор имеет вид

$$\{q(x), \bar{q}(y)\} = S(x-y) = \gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial z^{\mu}} D(z), \quad z = x-y, \quad (1.2)$$

получаем

$$[j_{\mu, \alpha}^H(x), j_{\nu, \beta}^{H'}(y)] = \bar{q}(x) \left[ \gamma_{\mu} (1 - \eta_H \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda^{\alpha} \gamma_{\rho} \gamma_{\nu} (1 - \eta_{H'} \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda^{\beta} \right] q(y) \frac{\partial}{\partial z^{\rho}} D(z) - \bar{q}(y) \left[ \gamma_{\nu} (1 - \eta_{H'} \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda^{\beta} \gamma_{\rho} \gamma_{\mu} (1 - \eta_H \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda^{\alpha} \right] q(x) \frac{\partial}{\partial z^{\rho}} D(z). \quad (1.3)$$

Здесь  $\eta_H = 1$  при  $H = L$  и  $\eta_H = -1$  при  $H = R$ .

Очевидно, второе слагаемое в коммутаторе отличается от первого заменой  $\alpha \leftrightarrow \beta, \mu \leftrightarrow \nu, x \leftrightarrow y, H \leftrightarrow H'$ .

Теперь воспользуемся элементарными соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda^{\alpha} \frac{1}{2} \lambda^{\beta} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \lambda^{\alpha}, \frac{1}{2} \lambda^{\beta} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \lambda^{\alpha}, \frac{1}{2} \lambda^{\beta} \right\} = \frac{1}{2} i f_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{2} \lambda^{\gamma} + \frac{1}{2} d_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{2} \lambda^{\gamma} = \\ &= \frac{1}{2} (i f_{\alpha\beta\gamma} + d_{\alpha\beta\gamma}) \frac{1}{2} \lambda^{\gamma} = \frac{1}{2} \text{Sp} \left( \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \frac{1}{2} \lambda^{\gamma} \right) \frac{1}{2} \lambda^{\gamma} = \frac{1}{2} \tau_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{2} \lambda^{\gamma}. \quad (1.4) \\ \gamma^{\mu} (1 - \eta_H \gamma_5) \gamma^{\rho} \gamma^{\nu} (1 - \eta_{H'} \gamma_5) &= 2\delta_{HH'} \gamma^{\mu} \gamma^{\rho} \gamma^{\nu} (1 - \eta_H \gamma_5) = \\ &= 2\delta_{HH'} \left( \frac{1}{2} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\rho}] \gamma^{\nu} + \frac{1}{2} \{ \gamma^{\mu}, \gamma^{\rho} \} \gamma^{\nu} \right) (1 - \eta_H \gamma_5) = \\ &= 2\delta_{HH'} (i \epsilon^{\mu\rho\nu\sigma} \gamma_{\sigma} \gamma_5 + \gamma^{\mu} g^{\rho\nu} - \gamma^{\rho} g^{\mu\nu} + \gamma^{\nu} g^{\mu\rho}) (1 - \eta_H \gamma_5) = \\ &= 2\delta_{HH'} (s^{\mu\rho\nu\sigma} - i \eta_H \epsilon^{\mu\rho\nu\sigma}) \gamma_{\sigma} (1 - \eta_H \gamma_5) \equiv 2\delta_{HH'} t_H^{\mu\rho\nu\sigma} \gamma_{\sigma} (1 - \eta_H \gamma_5), \\ s^{\mu\rho\nu\sigma} &= g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}. \quad (1.5) \end{aligned}$$

Кроме того, заметим, что

$$t_H^{\mu\rho\nu\sigma} = s^{\mu\rho\nu\sigma} - i \eta_H \epsilon^{\mu\rho\nu\sigma} = \frac{1}{4} \text{Sp} [\gamma^{\mu} \gamma^{\rho} \gamma^{\nu} \gamma^{\sigma} (1 + \eta_H \gamma_5)].$$

И наконец, вводя билокальный оператор

$$\mathcal{Y}_{\sigma, \nu}^H = \bar{q}(x) \gamma_{\sigma} (1 - \eta_H \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda_{\nu} q(y), \quad (1.6)$$

мы можем переписать равенство (1.3) в компактной форме

$$[j_{\mu, \alpha}^H(x), j_{\nu, \beta}^{H'}(y)] = 0, \quad H \neq H', \quad (1.7)$$

$$[j_{\alpha}^{\mu H}(x), j_{\beta}^{\nu H}(y)] = \left[ t_H^{\mu\rho\nu\sigma} \tau_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{Y}_{\sigma, \nu}^H(x, y) - \begin{pmatrix} \alpha \leftrightarrow \beta \\ \mu \leftrightarrow \nu \\ x \leftrightarrow y \end{pmatrix} \right] \times \times \frac{\partial}{\partial z^{\rho}} D(z), \quad z = x-y. \quad (1.8)$$

Чтобы выделить в явном виде симметричную и антисимметричную по индексам  $SU(3)$  части, введем симметричный и антисимметричный било-



кальные операторы:

$$\mathcal{Y}_{\sigma, \gamma} \left( x, y; \begin{matrix} S \\ A \end{matrix} \right) = \frac{1}{2} [\mathcal{Y}_{\sigma, \gamma}(x, y) \pm \mathcal{Y}_{\sigma, \gamma}(y, x)]. \quad (\text{I.9})$$

Тогда получаем

$$[j_{\alpha}^{\mu, H}(x), j_{\beta}^{\nu, H}(y)] = \left\{ 2if_{\alpha\beta\gamma} [s^{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{Y}_{\sigma, \gamma}^H(x, y; S) + i\eta_{H\epsilon} \mu\nu\rho\sigma \mathcal{Y}_{\sigma, \gamma}^H(x, y; A)] + \right. \\ \left. + d_{\alpha\beta\gamma} [S \leftrightarrow A] \right\} \frac{\partial}{\partial x^0} D(x). \quad (\text{I.10})$$

## 2. Коммутаторы на световом конусе

По причинам, упомянутым в тексте, и для сравнения с методом канонического квантования на световом конусе, который излагается в приложении II, рассмотрим в явном виде коммутационные соотношения между компонентами  $j^{\pm} = (1/\sqrt{2})(j^0 \pm j^3)$ . Мы будем иметь дело в дальнейшем только с левыми токами ( $\eta_L = +1$ ) и для простоты положим  $y = 0$ . Кроме того, предел светового конуса будем понимать как предел при  $x^+ \rightarrow 0$ .

Начнем с основных величин и соотношений, характерных для метода светового конуса. Определим «координаты на световом конусе» следующим образом:

$$x^{\pm} = \frac{x^0 \pm x^3}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{x}_{\perp} = (x^1, x^2), \\ x^{\mu} = (x^+, x^-, \mathbf{x}_{\perp}), \quad x^{\pm} = x_{\mp}. \quad (\text{I.11})$$

Эти координаты обладают простыми трансформационными свойствами при лоренцевом вращении в плоскости (0, 3), а именно:

$$x^{\pm} \rightarrow e^{\pm\theta} x^{\pm}, \quad \text{ch } \theta = \frac{E}{m}. \quad (\text{I.12})$$

Метрический тензор имеет вид

$$g^{\mu\nu} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (+) & (-) & (1) & (2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (+) \\ (-) \\ (1) \\ (2) \end{matrix} & \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right. \end{matrix} \quad (\text{I.13})$$

Единственные ненулевые компоненты тензора Ритчи — Леви — Чивиты таковы:

$$\epsilon^{+ij} = -\epsilon^{-ij} = \epsilon^{ij}, \quad \epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1, \quad \epsilon^{ii} = 0, \quad (\text{I.14})$$

Те же обозначения введены для любого 4-вектора. В частности, напомним, что

$$\partial^+ = \partial_- \equiv \frac{\partial}{\partial x^-}, \quad \partial^- = \partial_+ \equiv \frac{\partial}{\partial x^+}. \quad (\text{I.15})$$

В этом базисе скалярное произведение двух векторов имеет вид

$$ab = a^+b^- + a^-b^+ - \mathbf{a}_{\perp}\mathbf{b}_{\perp}, \quad (\text{I.16})$$

и, в частности,

$$a^2 = 2a^+a^- - \mathbf{a}_{\perp}^2. \quad (\text{I.17})$$

И наконец, для работы со спинорными полями введем величины

$$\gamma^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^0 \pm \gamma^3), \quad \boldsymbol{\gamma}_{\perp} = (\gamma^1, \gamma^2), \quad (\text{I.18})$$

обладающие следующими свойствами:

$$(\gamma^{\pm})^2 = 0, \quad \{\gamma^+, \gamma^-\} = 2g^{+-} = 2, \quad \{\gamma^{\pm}, \boldsymbol{\gamma}_{\perp}\} = 0. \quad (\text{I.19})$$

Начнем с того, что исследуем поведение коммутатора  $[j_{\alpha}^{+}(x), j_{\beta}^{+}(0)]$  при  $x^{+} = 0$ . Принимая во внимание приведенные выше свойства метрического тензора, имеем

$$t^{+\rho+\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} = 2g^{+\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{-}} = 2 \frac{\partial}{\partial x^{-}}.$$

Таким образом, дифференцирование по  $x^{+}$  не требуется и можно использовать соотношение [формула (II.7')]

$$D(x)|_{x^{+}=0} = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x_0) \delta(x^2)|_{x^{+}=0} = \frac{1}{4} \varepsilon(x^{-}) \delta^2(\mathbf{x}_{\perp}). \quad (I.20)$$

При этом

$$[j_{\alpha}^{+}(x) j_{\beta}^{+}(0)]|_{x^{+}=0} = if_{\alpha\beta\gamma} j_{-}^{\gamma}(0) \frac{\partial}{\partial x^{-}} \varepsilon(x^{-}) \delta^2(\mathbf{x}_{\perp}) = 2if_{\alpha\beta\gamma} j_{-}^{\gamma}(0) \delta(x^{-}) \delta^2(\mathbf{x}_{\perp}). \quad (I.21)$$

Множитель 2 в правой части учитывает то обстоятельство, что

$$j_{\mu} = V_{\mu} - A_{\mu}.$$

При выводе окончательного выражения (I.21) были произведены предельные переходы

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{Y}_{\sigma, \gamma}(x, 0; S) &= j_{\sigma}^{\gamma}(0), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{Y}_{\sigma, \gamma}(x, 0; A) &= 0, \end{aligned} \quad (I.22)$$

которые в принципе могут привести потом к неприятностям. Здесь мы сталкиваемся с теми же самыми трудностями, которые приводят к появлению швингеровских членов в одновременных коммутаторах временных и пространственных компонент (гл. 2, § 4, п. 2а). Поэтому не следует удивляться, если в правой части равенства (I.21) появятся дополнительные члены, являющиеся аналогами швингеровских членов на световом конусе. (Следует также помнить, что коммутатор типа  $[+, +]$  содержит кроме коммутаторов  $[0, 0]$  и  $[3, 3]$  также коммутатор  $[0, 3]$ , в котором из общих соображений должны быть швингеровские члены.) В самом деле, в бозонной модели векторных токов появляется градиентное слагаемое вида

$$\frac{\partial}{\partial x^{-}} [\varepsilon(x^{-}) \delta(\mathbf{x}_{\perp}) S_{\alpha\beta}(x, 0)],$$

где  $S_{\alpha\beta}(x, y)$  — билокальный оператор. В более общем случае в силу требования положительности, аналогичного рассмотренному в гл. 2, вакуумное среднее оператора  $S_{\alpha\beta}(x, 0)$  должно быть отличным от нуля. В дальнейшем будем предполагать, что величина  $S_{\alpha\beta}(x, 0)$  есть  $c$ -число. Как показано в тексте, такое предположение, по-видимому, согласуется с тем, что сечение рассеяния продольных фотонов равно нулю<sup>1)</sup>.

Перейдем теперь к коммутатору  $[j^{+}, j^{-}]|_{x^{+}=0}$ . Имеем

$$t^{+\rho-\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} = -(g^{ij} - i\varepsilon^{ij}) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^{i\sigma} \equiv -\alpha^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^{i\sigma}, \quad (I.23)$$

$$\begin{aligned} [j_{\alpha}^{+}(x), j_{\beta}^{-}(0)]|_{x^{+}=0} &= -[\tau_{\alpha\beta\gamma} \alpha^{ij} \mathcal{Y}_{j, \gamma}(x, 0)]|_{x^{+}=0} - \\ &= -\tau_{\beta\alpha\gamma} \alpha^{ji} \mathcal{Y}_{j, \gamma}(0, x)|_{x^{+}=0} \left[ \frac{1}{4} \varepsilon(x^{-}) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^2(\mathbf{x}_{\perp}) \right]. \end{aligned} \quad (I.24)$$

Используя уравнение движения свободных полей

$$\partial_{\mu} \bar{q}(x) \gamma^{\mu} = \bar{q}(x) \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^{+}}} \gamma^{+} + \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^{-}}} \gamma^{-} + \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^i}} \gamma^i \right) = 0,$$

<sup>1)</sup> Другие, менее строгие ограничения на характер швингеровских членов на световом конусе можно вывести из токовых правил сумм при фиксированной массе.

можно переписать коммутатор  $[j^+, j^-]$  в более удобной форме. Будем опять исходить из выражения для токов:

$$[j_\alpha^+(x), j_\beta^-(0)]_{x^+=0} = \bar{q}(x) \frac{1}{2} \lambda^\alpha \frac{1}{2} \lambda^\beta \gamma^+ (1 - \gamma_5) \gamma^0 \gamma^- (1 - \gamma_5) q(0) \frac{\partial}{\partial x^0} D(x) -$$

$$- \text{перекр. чл.} = 2\bar{q}(x) \frac{1}{2} \lambda^\alpha \frac{1}{2} \lambda^\beta \gamma^+ \gamma^i \gamma^- (1 - \gamma_5) q(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{4} \varepsilon(x^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp) -$$

— перекр. чл.

Пользуясь уравнением движения, можно перенести операцию дифференцирования на биллокальный оператор. Поскольку  $\gamma^+$  ( $\partial/\partial x^+$ ) опять не дает вклада, после простых выкладок получаем окончательный результат

$$[j_\alpha^+(x), j_\beta^-(0)]_{x^+=0} = i f_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma^-(0) \delta(x^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp) - \tau_{\alpha\beta\gamma} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^-} [\varepsilon(x^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp) I_\gamma^-(x^-)] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \alpha^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} [\varepsilon(x^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp) I_{j,\gamma}(x^-)] \right\} - \begin{pmatrix} \alpha \leftrightarrow \beta \\ I \leftrightarrow \bar{I} \\ \alpha_{ij} \leftrightarrow \alpha_{ji} \end{pmatrix}, \quad (I.25)$$

где

$$I_{\mu,\gamma}(x^-) = \lim_{x^+, \mathbf{x}_\perp \rightarrow 0} \mathcal{Y}_{\mu,\gamma}(x, 0),$$

$$\tilde{I}_{\mu,\gamma}(x^-) = \lim_{x^+, \mathbf{x}_\perp \rightarrow 0} \mathcal{Y}_{\mu,\gamma}(0, x). \quad (I.26)$$

### 3. Предел бесконечно большого импульса и связь одновременных коммутаторов с коммутаторами на световом конусе

В последнем разделе данного приложения мы рассмотрим связь, существующую между коммутационными соотношениями на световом конусе и пределом матричных элементов одновременных коммутаторов при бесконечно большом импульсе.

Рассмотрим одночастичный матричный элемент выражения (I.8)

$$\langle p | [j_\alpha^\mu(x), j_\beta^\nu(0)] | p \rangle = t^{\mu\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\beta\gamma} I_\sigma^\gamma(x, p) \frac{\partial}{\partial x^\rho} D(x) - \text{перекр. чл.}, \quad (I.27)$$

где

$$I_\sigma^\gamma(x, p) = \langle p | \mathcal{Y}_\sigma^\gamma(x, 0) | p \rangle. \quad (I.28)$$

Теперь продифференцируем  $n$  раз по времени и положим  $x^0 = 0$ . Действуя так же, как в § 2, и учитывая соотношение

$$\lim_{x^0 \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial x^{0k}} D(x) = \begin{cases} 0 & \text{при четном } k, \\ (\nabla^2)^{(k-1)/2} \delta^3(\mathbf{x}) & \text{при нечетном } k, \end{cases} \quad (I.29)$$

выясняем, что в правой части равенства (I.27) следует выделить два типа членов в зависимости от пространственных или временных значений индекса суммирования  $\rho$ . Интегрируя по пространству, находим

$$\int d^3x \langle p | \left[ \frac{\partial^n j_\alpha^\mu(x)}{\partial x_0^n}, j_\beta^\nu(0) \right]_{x_0=0} | p \rangle =$$

$$= \tau_{\alpha\beta\gamma} \int d^3x \left\{ t^{\mu 0\nu\sigma} \sum_{r=0, 2, \dots}^n \binom{n}{r} \frac{\partial^{n-r}}{\partial x_0^{n-r}} I_\sigma^\gamma(x, p) (\nabla^2)^{r/2} \delta^3(\mathbf{x}) + \right.$$

$$\left. + t^{\mu k\nu\sigma} \sum_{r=1, 3, \dots}^n \binom{n}{r} \frac{\partial^{n-r}}{\partial x_0^{n-r}} I_\sigma^\gamma(x, p) \partial_k (\nabla^2)^{(r-1)/2} \delta^3(\mathbf{x}) \right\}_{x_0=0} - \text{перекр. чл.} =$$

$$= \tau_{\alpha\beta\gamma} \left\{ t^{\mu 0\nu\sigma} \sum_{r=0, 2, \dots}^n \binom{n}{r} \frac{\partial^{n-r}}{\partial x_0^{n-r}} (\nabla^2)^{r/2} I_\sigma^\nu(x, p) - \right. \\ \left. - t^{\mu k\nu\sigma} \sum_{r=1, 3, \dots}^n \binom{n}{r} \frac{\partial^{n-r}}{\partial x_0^{n-r}} (\nabla^2)^{(r-1)/2} \partial_k I_\sigma^\nu(x, p) \right\}_{x_0=0}^{x=0} - \text{перекр. чл.} \quad (I.30)$$

Поскольку в силу лоренц-инвариантности можно положить

$$I_\sigma^\nu(x, p) = p_\sigma G^\nu(\sigma, \tau) + x_\sigma H^\nu(\sigma, \tau), \quad \sigma = px, \quad \tau = x^2, \quad (I.31)$$

нетрудно показать, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p_0^{n+1}} \frac{\partial^n}{\partial x_0^n} I_\sigma^\nu(x, p) \Big|_{x_0=0} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p_\sigma}{p_0^{n+1}} \frac{\partial^n}{\partial x_0^n} G^\nu(\sigma, \tau) \Big|_{x_0=0} = u_\sigma g_\nu^{(n)}, \quad (I.32)$$

$$38 \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p_0^{n+1}} (\nabla^2)^{n/2} I_\sigma^\nu(x, p) \Big|_{x_0=0} = u_\sigma g_\nu^{(n)} \quad (I.33)$$

где

$$g_\nu^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial \sigma^n} G_\nu(\sigma, \tau) \Big|_{\sigma=0} = \frac{d^n g_\nu(\sigma)}{d\sigma^n} \Big|_{\sigma=0} \quad (I.34)$$

и

$$u^\sigma = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^\sigma}{p_0} = (1, \mathbf{u}). \quad (I.35)$$

Таким образом, при  $n \geq 1$  окончательная формула имеет следующий вид:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p_0^{n+1}} \int d^3x \langle p | \left[ \frac{\partial^{n_j \mu}}{\partial x_0^n}, j_\beta^\nu(0) \right]_{x_0=0} | p \rangle = \\ = \tau_{\alpha\beta\gamma} g_\gamma^{(n)} 2^{n-1} (t^{\mu 0\nu\sigma} u_\sigma - t^{\mu k\nu\sigma} u_k u_\sigma) - \tau_{\beta\alpha\gamma} \bar{g}_\gamma^{(n)} 2^{n-1} (t^{\nu 0\mu\sigma} u_\sigma - t^{\nu k\mu\sigma} u_k u_\sigma), \quad (I.36)$$

где

$$\bar{g}_\gamma^{(n)} = (-1)^n g_\gamma^{(n)};$$

при  $n = 0$  мы снова получаем одновременной коммутатор элементарной кварковой модели (величина  $g_\gamma^{(0)}$  связана с матричным элементом локального тока), а именно

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p_0} \int d^3x \langle p | [j_\alpha^\mu(\mathbf{x}), j_\beta^\nu(0)]_{x_0=0} | p \rangle = \\ = 2i f_{\alpha\beta\gamma} g_\gamma^{(0)} [g^{\mu 0} u^\nu + g^{\nu 0} u^\mu - g^{\mu\nu}] + 2i d_{\alpha\beta\gamma} g_\gamma^{(0)} g^{\mu k} g^{\nu l} \varepsilon^{kl i} u_i. \quad (I.37)$$

Отметим, что швингеровские члены, которые в принципе можно выявить интегрированием по  $d^3x$  с множителем  $\exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x})$ , отсутствуют в силу нашего упрощенного вывода коммутационных соотношений. Во всяком случае их матричные элементы должны быть более высокого порядка по  $1/p_0$ .

Полезно остановиться на разных вариантах выбора индексов  $\mu, \nu$ . Сначала рассмотрим случай, когда индексы  $\mu, \nu$  принимают пространственные значения  $i, l$ . Поскольку

$$t^{i 0 l \sigma} u_\sigma = -g^{il} + i\varepsilon^{ilh} u_h, \\ t^{i k l \sigma} u_k u_\sigma = 2u^i u^l + g^{il} - i\varepsilon^{ilh} u_h, \quad (I.38)$$

имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p_0^{n+1}} \int d^3x \langle p | \left[ \frac{\partial^{n_j i}}{\partial x_0^n}, j_\beta^l(0) \right] | p \rangle = \\ = \tau_{\alpha\beta\gamma} g_\gamma^{(n)} 2^n [\delta^{il} + i\varepsilon^{ilh} u_h + u^i u^l] - \tau_{\beta\alpha\gamma} \bar{g}_\gamma^{(n)} 2^n [\delta^{il} - i\varepsilon^{ilh} u_h + u^i u^l], \quad n \geq 1. \quad (I.39)$$

Теперь положим  $\mu = \nu = 0$ . Так как

$$t^{000\sigma} u_\sigma = u_0 = 1, \quad t^{0k0\sigma} u_k u_\sigma = \mathbf{u}^2 = 1, \quad (I.40)$$

получаем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p_0^{n+1}} \int d^3 x \langle p | \left[ \frac{\partial^n j_\alpha^0(x)}{\partial x_0^n}, j_\beta^0(0) \right]_{x_0=0} | p \rangle = 0, \quad n \geq 1. \quad (I.41)$$

Соотношение (I.41) говорит о том, что информации, содержащейся в

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p_0} \int d^3 x \langle p | [j_\alpha^0(x), j_\beta^0(0)]_{x_0=0} | p \rangle,$$

достаточно для полной реконструкции выражения

$$\int dx^- d^2 x_\perp \langle p | [j^+(x), j^+(0)]_{x^+=0} | p \rangle,$$

и это, конечно, подтверждается видом выражения (I.21).

### Приложение II. Каноническое квантование на световом конусе

Интересно, что первые соображения относительно теории, в которой физические условия для динамических переменных задаются на светоподобной плоскости  $nx = \text{const}$ ,  $n^2 = 0$ , были высказаны Дираком в начале 1949 г. [558]. В этой статье Дирак рассматривает каноническое квантование при равных временах (т. е. на пространственно-подобной плоскости  $x^0 = \text{const}$ ) и каноническое квантование при равных  $x^+$  (т. е. на светоподобной плоскости  $x^+ = \text{const}$ ) как альтернативные, но одинаково справедливые, не зависящие от взаимодействия постулаты. Обе теории должны быть эквивалентными в том смысле, что, будучи полностью развиты, они должны следовать одна из другой<sup>1)</sup>. Наглядный пример такой связи между двумя схемами нам дает квантовая электродинамика в теории возмущений. Действительно, как было показано [309], предел обычных диаграмм Фейнмана при бесконечно большом импульсе дает те же результаты, что и  $S$ -матричные вычисления в канонической теории квантования на световом конусе. (В этом нет ничего удивительного, если учесть, что семейства плоскостей  $x^0 = \text{const}$  и  $x^+ = \text{const}$  связаны между собой преобразованием Лоренца с бесконечным значением параметра  $\text{ch } \theta$ .)

В данном приложении мы кратко остановимся на двух конкретных примерах процедуры канонического квантования на световом конусе — бозонной теории и спинорной теории и соответствующих их применениях к выводу коммутационных соотношений для токов<sup>2)</sup>.

Начнем со случая заряженного бозонного поля  $\phi$ . Лагранжева плотность и уравнение движения имеют вид

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi + \mathcal{L}_{\text{вз}}(\phi, \phi^\dagger), \quad (II.1)$$

$$(\square + m^2) \phi = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{вз}}}{\partial \phi^\dagger}. \quad (II.2)$$

В метрике светового конуса  $x^\mu \equiv (x^+, x^-, x_\perp)$  уравнение движения имеет вид

$$(2\partial_+ \partial_- - \Delta_\perp + m^2) \phi = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{вз}}}{\partial \phi^\dagger}. \quad (II.3)$$

<sup>1)</sup> На практике может оказаться, что в некоторых случаях один подход дает больше информации и более удобен, чем другой.

<sup>2)</sup> Данное приложение следует рассматривать как перечень полезных конечных результатов, а не как строгое введение в теорию. Для знакомства с теорией можно использовать ряд статей и курсов лекций [309, 361, 559, 561].

Обратим внимание на предельный случай свободных полей  $\mathcal{L}_{вз} = 0$ . Заметим, что линейное уравнение для функции  $\varphi$  представляет собой уравнение первого порядка<sup>1)</sup> относительно  $(\partial/\partial x^+)$   $\varphi$  и в качестве начального условия можно задавать значение  $\varphi(x)$  в некоторой точке  $x^+$ . В обычном виде уравнение (II.2) содержит вторые производные по времени, и можно одновременно задавать значения  $\varphi, \dot{\varphi}$  в некоторый момент времени. Отсюда следует, что, например, коммутатор

$$[\varphi(x), \pi(y)]_{x^+=y^+} \equiv [\varphi(x), \partial^+ \varphi(y)]_{x^+=y^+},$$

рассматриваемый при равных  $x^+$ , не обязательно должен иметь каноническое значение  $i\delta(x^- - y^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}_\perp)$ .

В случае свободных полей можно хорошо известным нам способом представить  $\varphi(x)$  в виде интеграла Фурье. Результат таков:

$$\varphi(x) = \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \hat{\varphi}(k) e^{ikx} = \int_0^\infty \frac{dk^+}{2k^+} \int d^2k_\perp [e^{ikx} b^\dagger(k) + e^{-ikx} a(k)]. \quad (II.4)$$

В последнем интеграле величины  $k^+$  и  $k^- = (\mathbf{k}_\perp^2 + m^2)/2k^+$  всегда положительны и

$$b^\dagger(k) = \hat{\varphi}(k) \equiv \hat{\varphi}\left(k^+, k^- = \frac{\mathbf{k}_\perp^2 + m^2}{2k^+}, \mathbf{k}_\perp\right), \quad a(k) = \hat{\varphi}(-k). \quad (II.5)$$

Величины  $a, a^\dagger, b, b^\dagger$  интерпретируются, конечно, как операторы рождения и уничтожения с известными перестановочными соотношениями. Все это довольно тривиально. Фундаментальные предположения появляются при обобщении сказанного выше на случай взаимодействующих полей. Для полей  $\varphi(x)$  в представлении Гейзенберга используем выражение

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \frac{dk^+}{2k^+} \int d^2k_\perp [e^{ikx} b^\dagger(k, x^+) + e^{-ikx} a(k, x^+)] \quad (II.6)$$

и постулируем коммутационные соотношения при равных  $x^+$

$$\begin{aligned} [a(k, x^+), a^\dagger(k', x^+)] &= 2k^+ \delta^2(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \delta(k^+ - k'^+), \\ [a(k, x^+), a(k', x^+)] &= [a^\dagger(k, x^+), a^\dagger(k', x^+)] = 0 \end{aligned} \quad (II.7)$$

и аналогично для  $b$ . Простые выкладки с учетом соотношения (II.6) приводят к равенствам

$$\begin{aligned} [\varphi^\dagger(x), \varphi(y)]_{x^+=y^+} &= -\frac{1}{4} i \varepsilon(x^- - y^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}_\perp), \\ [\varphi(x), \varphi(y)]_{x^+=y^+} &= [\varphi^\dagger(x), \varphi^\dagger(y)]_{x^+=y^+} = 0. \end{aligned} \quad (II.8)$$

Выражения (II.8) для коммутаторов полей аналогичны тем, которые можно получить, прямо выделив доминирующую на световом конусе часть из выражения для свободных полей

$$[\varphi^\dagger(x), \varphi(y)] = -i\Delta(x - y, m^2).$$

<sup>1)</sup> Отметим, что такое уравнение напоминает по структуре нерелятивистское уравнение. Если ввести величину

$$\varphi(x^+; k^+, \mathbf{k}_\perp) = \int dx^- d^2x_\perp e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp - ik^+ x^-} \varphi(x),$$

то можно переписать уравнение для свободных полей в виде

$$i \frac{\partial}{\partial x^+} \varphi(x^+; k^+, \mathbf{k}_\perp) = \left( \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{2k^+} + \frac{m^2}{2k^+} \right) \varphi(x^+; k^+, \mathbf{k}_\perp).$$

Здесь уже видна аналогия с движением частицы в двумерном поперечном пространстве с потенциальной энергией  $m^2/2k^+$ . На самом же деле аналогия более глубокая и основана на теории групп [557].

Правда, теперь мы считаем эти выражения справедливыми в совершенно общем случае, независимо от взаимодействия. Как показывает проверка, сделанные выше предположения приводят к теории, самосогласованной в том смысле, что генераторы группы Пуанкаре, построенные из полей  $\varphi$  и  $\varphi^\dagger$ , удовлетворяют фундаментальным перестановочным соотношениям.

Заметим, что в случае свободных полей, т. е. при наличии взаимодействия без производных, можно ввести сопряженный импульс

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \partial^+ \varphi^\dagger$$

Тогда «канонический» коммутатор имеет вид

$$[\varphi(x), \pi(y)]_{x^+ = y^+} = \frac{1}{2} i \delta(x^- - y^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}_\perp)$$

и отличается от канонического значения, как и следовало ожидать на основании сказанного ранее.

Полезно вычислить коммутаторы компонент электромагнитного тока [552] на световом конусе (обобщение на изоспиновые токи тривиально). Электромагнитный ток определяется следующим образом:

$$V^\mu = i\varphi^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \varphi. \quad (\text{II.9})$$

Соответственно этому операторы

$$V^+ = i\varphi^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{x^-} \varphi, \quad \mathbf{V}_\perp = i\varphi^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mathbf{x}_\perp} \varphi$$

содержат только производные полей по  $x^-$  и  $\mathbf{x}_\perp$ , и поэтому коммутаторы при равных  $x^+$  могут быть немедленно получены из фундаментальных соотношений (II.8). Но мы имеем также

$$V^- = i\varphi^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{x^+} \varphi,$$

и поэтому, прежде чем использовать канонические коммутационные соотношения (II.8), потребуются уравнения движения, чтобы найти зависимость оператора  $\partial_+ \varphi^\dagger$  от полей  $\varphi$ ,  $\varphi^\dagger$ . Таким образом,  $V^-$  и соответствующие коммутаторы будут в явном виде содержать зависимость от взаимодействия, тогда как этого нет в случае компонент  $V^+$  и  $\mathbf{V}_\perp$ . Легко получить [552] следующее выражение:

$$[V^+(x), \overset{\leftrightarrow}{V}^+(y)] = -\frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial x^-} \frac{\partial}{\partial y^-} \varepsilon(x^- - y^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}_\perp) [\varphi^\dagger(x) \varphi(y) + \varphi^\dagger(y) \varphi(x)], \quad (\text{II.10})$$

где появляется бислокальный оператор

$$B(x, y) = \varphi^\dagger(x) \varphi(y) + \varphi^\dagger(y) \varphi(x).$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} [V^+(x), V^i(y)]_{x^+ = y^+} = & -\frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial x^-} \partial_{x^i} \varepsilon(x^- - y^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}_\perp) B(x, y) - \\ & -\frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial x^-} \varepsilon(x^- - y^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}_\perp) \partial_{y^i} B(x, y) + \\ & + iB(x, x) \delta(x^- - y^-) \delta^i \delta^2(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}_\perp). \quad (\text{II.11}) \end{aligned}$$

К сожалению, упомянутое выше различие между зависящими и не зависящими от динамики коммутационными соотношениями связано с рассматриваемой моделью. В дальнейшем это будет проиллюстрировано на примере спинорной теории. Отметим только, что использование соотношений (II.10)

и (II.11) приводит к ожидаемому результату — величина  $W_1$  (но не  $W_S$ ) обращается в нуль в бьёркеновском пределе. Этим, по-видимому, исключается какая бы то ни было аффективность данной модели.

Обратимся теперь к теории полей со спином  $1/2$  и для начала рассмотрим случай свободных полей. Уравнение движения имеет вид

$$(\gamma\partial + im)\psi(x) \equiv (\gamma^+\partial_+ + \gamma^-\partial_- + \gamma^i\partial_i + im)\psi(x) = 0. \quad (II.12)$$

Простые выкладки показывают, что если ввести операторы поля <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \psi_{\pm} &= p_{\pm}\psi, \quad p_{\pm} = \frac{1}{2}\gamma^{\mp}\gamma^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^0\gamma^3), \\ p_{\pm}^2 &= p_{\pm}, \quad p_+p_- = 0, \quad p_+ + p_- = 1, \end{aligned} \quad (II.13)$$

то уравнение (II.12) можно переписать в эквивалентной форме [с учетом равенства  $(\gamma_{\pm})^2 = 0$ ]

$$2\partial_-\psi_- = (\gamma^i\partial_i - im)\gamma^+\psi_+, \quad (II.14)$$

$$2\partial_+\psi_+ = (\gamma^i\partial_i - im)\gamma^-\psi_-. \quad (II.15)$$

Как нетрудно убедиться, определение (II.13) гарантирует нам, что поля  $\psi_+$  будут спинорными аналогами компонент  $A^{\pm}$  4-вектора, т. е. при преобразовании Лоренца вдоль третьей оси они преобразуются следующим образом:

$$\psi_{\pm}(x^+, x^-, \mathbf{x}_{\perp}) \rightarrow e^{\pm\theta/2}\psi_{\pm}(x^+e^{-\theta}, x^-e^{\theta}, \mathbf{x}_{\perp}).$$

Можно также показать, что при нашем специальном выборе  $\gamma$ -матриц поле  $\psi_+$  имеет только компоненты 1, 4, а поле  $\psi_-$  — только компоненты 2, 3. Из соотношений (II.14) и (II.15) следует, что поля  $\psi_+$  и  $\psi_-$  не являются канонически-независимыми. Примем за основную «большую» компоненту  $\psi_+$ . Тогда  $\psi_-$  определяется интегрированием уравнения связи (II.14). Решение имеет вид

$$\psi_-(x^+, x^-, \mathbf{x}_{\perp}) = \frac{1}{4} \int d\xi \varepsilon(x^- - \xi) (\gamma^i\partial_i - im) \gamma^+\psi_+(x^+, \xi, \mathbf{x}_{\perp}). \quad (II.16)$$

И наконец,  $\psi_+$  удовлетворяет уравнению «шредингеровского вида»

$$(2\partial_+\partial_- - \Delta_{\perp} + m^2)\psi_+(x) = 0. \quad (II.17)$$

Теперь очевидно, что в общем случае для  $\psi_+(x)$  можно проводить построения, полностью аналогичные скалярному случаю. В частности, можно написать обобщенное разложение по плоским волнам и постулировать антикоммутационные соотношения при равных  $x^+$  для фурье-компонент операторов. Легко увидеть, что из этих постулатов могут быть получены фундаментальные, не зависящие от взаимодействия соотношения

$$\begin{aligned} \{\psi_+(x), \psi_+^{\dagger}(y)\}_{x^+=y^+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} p_+ \delta(x^- - y^-) \delta^2(\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{y}_{\perp}), \\ \{\psi_+(x), \psi_+(y)\}_{x^+=y^+} &= \{\psi_+^{\dagger}(x), \psi_+^{\dagger}(y)\}_{x^+=y^+} = 0. \end{aligned} \quad (II.18)$$

Аналогичные антикоммутационные соотношения с полями  $\psi_-$  требуют явного использования уравнения (II.16), так что неизбежно вводится зависимость от уравнения движения для  $\psi_+$ . Например, в случае свободных полей получаем

$$\{\psi_+(x), \psi_-^{\dagger}(y)\}_{x^+=y^+} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \gamma_+ (\gamma^i\partial_i + im) \varepsilon(x^- - y^-) \delta^2(\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{y}_{\perp}). \quad (II.19)$$

При наличии взаимодействия с безмассовым глюонным полем спина 1 ( $\partial_i \rightarrow \partial_i - igB_i$ ) антикоммутатор на световом конусе  $\{\psi_+, \psi_-^{\dagger}\}_{x^+=y^+}$  будет содержать явную зависимость от динамики, т. е. от  $g$  и  $B_i$ .

<sup>1)</sup> Асимметрия между  $\psi_+$  и  $\psi_-$  обусловлена выделенной ролью плоскости  $x^+ = 0$ .



Чтобы выяснить, что вытекает из этого в отношении коммутаторов токов, введем, как обычно,

$$j_{\mu}^{\alpha}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda^{\alpha} \psi(x).$$

Учитывая данные выше определения полей  $\psi_{+}$  и  $\psi_{-}$ , получаем

$$\begin{aligned} j_{\alpha}^{\pm} &= \sqrt{2} \psi_{\pm}^{\dagger} (1 - \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda_{\alpha} \psi_{\pm}, \\ j_{\alpha}^i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \psi_{+}^{\dagger} \gamma^{-i} (1 - \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda_{\alpha} \psi_{-} + \psi_{-}^{\dagger} \gamma^{+i} (1 - \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda_{\alpha} \psi_{+} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

На основании вышеизложенного можно сразу сказать, что коммутатор  $[j_{\alpha}^{\pm}(x), j_{\beta}^{\pm}(y)]_{x^{+}=y^{+}}$  можно найти как прямое следствие соотношения (II.18) и при этом он будет носить довольно общий характер (к коммутационным соотношениям между другими компонентами токов это не относится). Прямое вычисление воспроизводит результат (I.24) для  $[j_{\alpha}^{\pm}, j_{\beta}^{\pm}]$  и в случае безмассовых кварков результат (I.25) для  $[j_{\alpha}^{\pm}, j_{\beta}^{\pm}]$ . Интересно выяснить, как учет массовых членов и взаимодействия с безмассовым векторным полем  $B_{\mu}$  влияет на  $[j_{\alpha}^{\pm}, j_{\beta}^{\pm}]$ .

Что касается массовых членов, то они, очевидно, дают вклад в менее сингулярную часть коммутатора на световом конусе и, как нетрудно убедиться, их наличие связано с несохранением изучаемых токов. Так, в случае двух векторных токов находим

$$\begin{aligned} [V_{\alpha}^{+}(x), V_{\beta}^{-}(0)]_{x^{+}=0} &= i f_{\alpha\beta\gamma} V_{\gamma}^{-}(0) \delta(x^{-}) \delta^2(x_{\perp}) - \\ &- \tau^{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{4} \partial_i \left[ \bar{\psi}(x) (\gamma^i + i \varepsilon^{ij} \gamma_j \gamma_5) \frac{1}{2} \lambda^{\gamma} \psi(0) \varepsilon(x^{-}) \delta^2(x_{\perp}) \right] - \\ &- \tau^{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{4} \partial_{-} \left[ \bar{\psi}(x) \gamma^{-} \frac{1}{2} \lambda^{\gamma} \psi(0) \varepsilon(x^{-}) \delta^2(x_{\perp}) \right] + \\ &+ \frac{i}{16} \varepsilon(x^{-}) \delta^2(x_{\perp}) \bar{\psi}(x) \gamma^{+} \gamma^{-} [M, \lambda^{\alpha}] \lambda^{\beta} \psi(0) - \text{перекр. чл.}, \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

где  $M$  — матрица кварковых масс  $M_{\alpha\beta} = m_{\alpha} \delta_{\alpha\beta}$ , а последнее слагаемое равно нулю в случае сохраняющихся векторных токов. В случае аксиальных токов, как и следовало ожидать, дают свой вклад и коммутатор  $[M, \lambda_{\alpha}]$  и антикоммутатор  $\{M, \lambda_{\alpha}\}$ . И наконец, присутствие векторного глюона можно свести к подстановке  $\partial_i \rightarrow \partial_i - igB_i$  в формуле (I.24). Но если повторить вывод соотношения (I.25), то, используя уравнение движения и калибровку  $B^{+} = B_{-} = 0$ , нетрудно показать, что в окончательном выражении (I.25) или (II.24) зависимость от  $gB_{\perp}$  исчезает.

# Литература

0. Phys. Lett., 33B, № 1 (1970).
1. *Mandelstam S.*, Phys. Rev., 112, 1344 (1958) (имеется перевод в сборнике «Новый метод в теории сильных взаимодействий», ИЛ, 1960).
2. *Khuri N.*, Phys. Rev., 132, 914 (1963).
3. *Fubini S.*, Nuovo Cim., 52, 244 (1967).
4. *Igi K.*, Phys. Rev. Lett., 9, 76 (1962).
5. *Boas R. P.*, Entire Functions, New York, 1954, p. 23.
6. *Begge T.*, Nuovo Cim., 14, 951 (1959).
7. *Bottino A., Longoni A. M., Regge T.*, Nuovo Cim., 23, 954 (1962) (имеется перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963).
8. *Лозунов А. А., Соловьев Л. Д., Тасхелидзе А. Н.*, Phys. Lett., 24B, 181 (1967).
9. *Dolen R., Horn D., Schmid C.*, Phys. Rev. Lett., 19, 402 (1967).
10. *Igi K., Matsuda S.*, Phys. Rev. Lett., 18, 625 (1967).
11. *Dolen R., Horn D., Schmid C.*, Phys. Rev., 166, 1768 (1968).
12. *Gatto R.*, Phys. Rev. Lett., 18, 803 (1967).
13. *Horn D.*, Acta Physica Austriaca, Suppl., VI, 124 (1969).
14. *Froissart M.*, Invited paper at the La Jolla Conference on Weak and Strong Interactions (1961).
15. *Грибов В. Н.*, ЖЭТФ, 42, 1260 (1962).
16. *Frautschi S., Gell-Mann M., Zachariasen F.*, Phys. Rev., 126, 2204 (1962) (имеется перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963).
17. *Freedman D. Z., Wang J. M.*, Phys. Rev. Lett., 17, 569 (1966).
18. *Domokos G.*, Phys. Rev., 159, 1387 (1967).
19. *Toller M.*, Nuovo Cim., 37, 631 (1965).
20. *Leader E.*, Phys. Rev., 166, 1599 (1968).
21. *Toller M.*, в книге Proceedings of the Eight Nobel Symposium on Elementary Particle Theory, New York, 1968, p. 15.
22. *Domokos G.*, в книге Proceedings of the Eight Nobel Symposium on Elementary Particle Theory, New York, 1968, p. 33.
23. *Collins P. D. B., Squires E. J.*, Regge Poles in Particle Physics, Springer Tracts in Modern Physics, № 45, Berlin, 1968 (имеется перевод: И. Коллинз, Ю. Скэйрс, Полюса Редже в физике частиц, изд-во «Мир», 1971).
24. *de Alfaro V., Kuo P. K., Rebbi C., Rossetti C.*, Nuovo Cim., 58A, 87 (1968).
25. *Bronzan J. B., Jones C. E., Kuo P. K.*, Phys. Rev., 175, 2200 (1968).
26. *Froissart M.*, Phys. Rev., 123, 1053 (1961) (имеется перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963).
27. *Greenberg O. W., Low F. E.*, Phys. Rev., 124, 2047 (1961).
28. *Martin A.*, Phys. Rev., 129, 1432 (1963).
29. *Amati D., Fubini S., Stanghellini A.*, Phys. Lett., 1, 29 (1962).
30. *Mandelstam S.*, Nuovo Cim., 30, 1148 (1963).
31. *Jacob M., Wick G. C.*, Ann. of Phys., 7, 404 (1959).
32. *de Alfaro V., Fubini S., Furlan G., Rossetti C.*, Phys. Lett., 21, 576 (1966) (имеется перевод в книге С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов и их применение в физике частиц, изд-во «Мир», 1970).
33. *Соловьев Л. Д.*, Ядерная физика, 3, 188 (1966).
34. *Gell-Mann M., Sharp D., Wagner W. G.*, Phys. Rev. Lett., 8, 261 (1962).
35. *Goldberger M. L., Grisaru M. T., MacDowell S. W., Wong D. Y.*, Phys. Rev., 120, 2250 (1960).
36. *Грибов В. Н., Окунь Л. Б., Померанчук И. Я.*, ЖЭТФ, 45, 1114 (1963).
37. *Волков Д. В., Грибов В. Н.*, ЖЭТФ, 44, 1068 (1963).
38. *MacDowell S. W.*, Phys. Rev., 116, 774 (1959).
39. *Weinberg S.*, Phys. Rev., 133B, 1318 (1964).
40. *Furlan G.*, в книге Elementary Particle Physics and Scattering Theory, Vol. 1, New York, 1970, p. 9.

41. *Scadron M. D.*, Phys. Rev. **165**, 1640 (1968).
42. *Rebbi C.*, Cal. Tech. Preprint, не опубликовано (цитируется в Nucl. Sci. Abstracts, № 14944, 1969).
43. *Munczek H.*, Nuovo Cim., **29**, 1175 (1963).
44. *de Alfaro V., Fubini S., Furlan G., Rossetti C.*, Ann. of Phys., **44**, 165 (1967).
45. *Rebbi C.*, Ann. of Phys., **49**, 106 (1968).
46. *Fubini S.*, Nuovo Cim., **43A**, 475 (1966).
47. *Dashen R., Gell-Mann M.*, в книге Proceedings of the 3rd Coral Gables Conference on Symmetry Principles at High Energy, 1966.
48. *Dashen R., Gell-Mann M.*, Phys. Rev. Lett., **17**, 340 (1966).
49. *de Alfaro V.*, Acta Physica Austriaca, Suppl. IV, 39 (1967).
50. *Fubini S., Segré G.*, Nuovo Cim., **45**, 641 (1966).
51. *Bronzan J. B., Gerstein I. S., Lee B. W., Low F. E.*, Phys. Rev., Lett., **18**, 32 (1967).
52. *Singh V.*, Phys. Rev. Lett., **18**, 36 (1967).
53. *Bronzan J. B., Gerstein I. S., Lee B. W., Low F. E.*, Phys. Rev., **157**, 1448 (1967).
54. *Low F. E.*, в книге Elementary Particle Physics and Scattering Theory, Vol. 1, New York, 1970, p. 137.
55. *Fubini S., Furlan G., Rossetti C.*, Nuovo Cim., **40A**, 1171 (1965) (имеется перевод в книге С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов и их применение в физике частиц, изд-во «Мир», 1970).
56. *Ademollo M., Gatto R.*, Phys. Rev. Lett., **13**, 264 (1964).
57. *Adler S. L.*, Phys. Rev. Lett., **14**, 1051 (1965).
58. *Weisberger W. I.*, Phys. Rev. Lett., **14**, 1047 (1965).
59. *Adler S. L.*, Phys. Rev., **143**, 1144 (1966) (имеется перевод в книге С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов и их применение в физике частиц, изд-во «Мир», 1970).
60. *Cabibbo N., Radicati L. A.*, Phys. Lett. **19**, 697 (1966).
61. *Fubini S.*, Nuovo Cim., **52**, 224 (1967).
62. *Amati D., Jengo R.*, Phys. Lett., **24B**, 108 (1967).
63. *Freedman D. Z., Wang J. M.*, Phys. Rev., **153**, 1596 (1967).
64. *Toller M.*, Nuovo Cim., **54A**, 295 (1968).
65. *Sakurai J. J.*, Currents and Mesons, Chicago, 1969 (имеется перевод: Дж. Сакураи, Токи и мезоны, М., 1972).
66. *Lee T. D., Wu C. S.*, в книге Annual Review of Nuclear Science, Vol. 15, New York, 1965, p. 381 (имеется перевод: Ц. Ли, Ц. Ву, Слабые взаимодействия, изд-во «Мир», 1968).
67. *Di Capua E., et al.*, Phys. Rev., **133B**, 1333 (1964).
68. *Kinoshita T., Sirlin A.*, Phys. Rev., **113**, 1652 (1959).
69. *Marshak R. E., Riazuddin, Ryan C. P.*, Theory of Weak Interactions in Particle Physics, New York, 1969.
70. *Gell-Mann M.*, Phys. Lett., **8**, 214 (1964) (имеется перевод в книге Я. Коккеде, Теория кварков, изд-во «Мир», 1971).
71. *Zweig G.*, в книге Symmetries in Elementary Particle Physics, New York, 1965, p. 192; CERN preprints 8182 Th 401 (1964), 8419 Th 412 (1964).
72. *Dalitz R. H.*, в книге High Energy Physics, New York, 1966, p. 251.
73. *Lipkin H. J.*, в книге Proceedings of the 1967 Heidelberg Conference on Elementary Particles, Amsterdam, 1968.
74. *Gell-Mann M., Ne'eman Y.*, The Eightfold Way, New York, 1964.
75. *Sakata S.*, Progr. Theor. Phys., **16**, 636 (1956).
76. *Morpurgo G.*, в книге Theory and Phenomenology in Particle Physics, New York, 1969, p. 84.
77. *Gell-Mann M.*, Phys. Rev., **125**, 1067 (1962).
78. *Gell-Mann M.*, Physics, **1**, 63 (1964).
79. *Gell-Mann M., Oakes R. J., Renner B.*, Phys. Rev., **175**, 2195 (1968).
80. *Conforto G.*, Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae **22**, 15 (1967).
81. *Gell-Mann M., Levy M.*, Nuovo Cim., **16**, 705 (1958).
82. *Cabibbo N.*, Phys. Rev. Lett., **10**, 531 (1963).
83. *Fubini S., Furlan G.*, Physics, **1**, 229 (1965).
84. *Furlan G., Lannoy F. G., Rossetti G., Segré G.*, Nuovo Cim., **38**, 1747 (1965).
85. *Furlan G., Lannoy F. G., Rossetti G., Segré G.*, Nuovo Cim., **40A**, 597 (1965).
86. *Gell-Mann M.*, в книге Proceedings of the 1960 Rochester Conference on High Energy Physics, New York, 1960, p. 508.
87. *Gell-Mann M., Ne'eman Y.*, Ann. of Phys., **30**, 360 (1964).
88. *Schwinger J.*, Phys. Rev. Lett., **3**, 296 (1959).
89. *Gatto R.*, в книге Proceedings of the 4th International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies, Liverpool, 1969, p. 235.
90. *Källen G.*, Acta Physica Austriaca, Suppl. V, 236 (1969).
91. *Lee T. D., Weinberg S., Zumino B.*, Phys. Rev. Lett., **18**, 1029 (1967).
92. *Weinberg S.*, Phys. Rev. Lett., **18**, 507 (1967).
93. *Kroll N. M., Ruderman M. A.*, Phys. Rev., **93**, 233 (1954).
94. *Dombey N.*, Nuovo Cim., **32**, 1696 (1964).

95. Герштейн С. С., Зельдович Я. Б., ЖЭТФ, 29, 698 (1955).
96. Feynman R. P., Gell-Mann M., Phys. Rev., 109, 193 (1958).
97. Sudarshan E. C. G., Marshak R. E., Phys. Rev., 109, 1860 (1958).
98. Glashow S., Weinberg S., Phys. Rev. Lett., 20, 224 (1968).
99. Brene N., Roos M., Sirlin A., Nucl. Phys., B6, 255 (1968).
100. Martin A., Nuovo Cim., 42A, 930 (1966).
101. Mahoux G., Martin A., Phys. Rev., 174, 2140 (1968).
102. Bell J. S., Nuovo Cim., 61A, 541 (1969).
103. Trueman T. L., Phys. Rev. Lett., 17, 1198 (1966).
104. Odorico R., Nuovo Cim., 51A, 1021 (1967).
105. Cohen-Tannoudji G., Morel A., Navelet H., Ann. of Phys., 46, 239 (1968).
106. Riazuddin в книге Weak Interactions, Tracts in Modern Physics, Vol. 52, Berlin, 1970, p. 126.
107. Nambu Y., Phys. Rev. Lett., 4, 380 (1960).
108. Nambu Y., Jona Lasinio G., Phys. Rev., 122, 345 (1961).
109. Nambu Y., Lurié D., Phys. Rev., 125, 1429 (1962).
110. Nambu Y., Shrauner E., Phys. Rev., 128, 862 (1962).
111. Gell-Mann M., Phys. Rev., 111, 362 (1958).
112. Goldberger M. L., Treiman S. B., Phys. Rev., 110, 1178 (1958).
113. Bernstein J., Fubini S., Gell-Mann M., Thirring W., Nuovo Cim., 17, 797 (1960).
114. Чжоу Гуан-Чжао, ЖЭТФ, 39, 703 (1960).
115. Adler S., Phys. Rev., 139B, 1638 (1965) (имеется перевод в книге С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов и их применение в физике частиц, изд-во «Мир», 1970).
116. Adler S., Phys. Rev., 137B, 1022 (1965).
117. Hamilton J., Woolcock W. S., Rev. Mod. Phys., 35, 737 (1963).
118. Adler S., Phys. Rev., 177, 2426 (1969).
119. Sakurai J. J., в книге Proceedings of the 1969 Liverpool Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies, London, 1969, p. 91 (имеется перевод в книге Дж. Сакураи, Токи и мезоны, М., 1972).
120. Bell J. S., Nuovo Cim., 50A, 129 (1967).
121. Bjorken J. D., Phys. Rev., 148, 1467 (1966) (имеется перевод в книге С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов и их применение в физике частиц, изд-во «Мир», 1970).
122. Ward J. C., Phys. Rev., 78, 182 (1950).
123. Thirring W., Phil. Mag., 41, 1193 (1950).
124. Low F. E., Phys. Rev., 96, 1428 (1954).
125. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Phys. Rev., 96, 1433 (1954).
126. Saito S., Phys. Rev., 184, 1894 (1969).
127. Lin K. Y., Nuovo Cim., 64A, 188 (1970).
128. Drell S. D., Hearn A. C., Phys. Rev. Lett., 16, 908 (1966) (имеется перевод в книге С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов и их применение в физике частиц, изд-во «Мир», 1970).
129. Герасимов С. Б., ЯФ, 2, 598 (1965).
130. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Thirring W. E., Phys. Rev., 95, 1612 (1954).
131. Tomozawa Y., Nuovo Cim., 46A, 707 (1966).
132. Weinberg S., Phys. Rev. Lett., 17, 616 (1966) (имеется перевод в книге С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов и их применение в физике частиц, изд-во «Мир», 1970).
133. Adler S., Phys. Rev., 140B, 736 (1965) (имеется перевод в книге С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов и их применение в физике частиц, изд-во «Мир», 1970).
134. Weisberger W. I., Phys. Rev., 143, 1302 (1966).
135. Kawarabayashi K., Suzuki M., Phys. Rev. Lett., 16, 255 (1966).
136. Riazuddin, Fayazuddin, Phys. Rev., 147, 1071 (1966).
137. Chew G. F., Goldberger M., Low F., Nambu Y., Phys. Rev., 106, 1345 (1957).
138. Fubini S., Furlan G., Rossetti C., Nuovo Cim., 43, 161 (1966) (имеется перевод в книге С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов и их применение в физике частиц, изд-во «Мир», 1970).
139. Callan C. G., Treiman S. B., Phys. Rev. Lett., 16, 153 (1966) (имеется перевод в книге С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов и их применение в физике частиц, изд-во «Мир», 1970).
140. Mathur V., Okubo S., Pandit L., Phys. Rev. Lett., 16, 371, 601 (errata) (1966).
141. Gaillard M. K., Chounet L. M., CERN Report: CERN 70-14, Geneva (1970).
142. Weinberg S., Phys. Rev. Lett., 17, 336 (1966).
143. Bludman S. A., в книге Cargese Lectures in Physics, Vol. 1, New York, 1967, p. 203.
144. Renner B., Current Algebras and Their Applications, Oxford, 1968.
145. Bouchtat C., Meyer Ph., Phys. Lett., 22, 198 (1966).
146. Phys. Rev., 149, 1044 (1966).
147. Gell-Mann M., Report CTSL-20 (опубликовано в [74]).
148. Racah G., Group Theory and Spectroscopy, 1951.
149. Behrends R. E., Dreitlein J., Fronsdal C., Lee B. W., Rev. Mod. Phys., 34, 1 (1962).
150. Gasirowicz S., Argonne National Laboratory Report ANL-6729 (1963).
151. Lipkin H. J., Lie Groups for Pedestrians, Amsterdam, 1965.

152. *Condon E. U., Shortley G. H.*, The Theory of Atomic Spectra, Cambridge, 1935 (имеется перевод: *Е. Кондон, Г. Шортли*, Теория атомных спектров, ИЛ, 1949).
153. *Rose M. E.*, Theory of Angular Momentum, New York, 1957.
154. *de Swart J. J.*, Rev. Mod. Phys., 35, 916 (1963) [имеется перевод: *Дж. де Сварт*, УФН, 84, 651 (1965)].
155. *Sakurai J. J.*, Invariance Principles and Elementary Particles, Princeton, 1964, p. 183.
156. *Watson G. N.*, Proc. Roy. Soc., A, 95 (1918).
157. *Sommerfeld A.*, Partial Differential Equations in Physics, New York, 1949, p. 282 (имеется перевод: *А. Зоммерфельд*, Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, 1950).
158. *Feynman R. P.*, в книге Proceeding of the 1967 International Conference on Particles and Fields, New York, 1967, p. 111.
159. *Gasiorowicz S., Geffen D. A.*, Rev. Mod. Phys., 41, 331 (1969).
160. *Gürsey F.*, в книге Proceedings of the VII Internationale Universitätswochen für Kernphysik, Schladming, 1968; Acta Physica Austriaca, Suppl. V, 185 (1968).
161. *Weinberg S.*, в книге Proceedings of the 14th International Conference on High Energy Physics, Geneva, 1968, p. 253.
162. *Zumino B.*, в книге Hadrons and Their Interactions, New York, 1968, p. 51.
163. *Dashen R., Weinstein M.*, Phys. Rev., 183, 1261 (1969).
164. *Gursey F.*, Nuovo Cim., 16, 230 (1960).
165. *Gursey F.*, Ann. of Phys., 12, 91 (1961).
166. *Goldstone J.*, Nuovo Cim., 19, 154 (1961).
167. *Goldstone J., Salam A., Weinberg S.*, Phys. Rev., 127, 965 (1962).
168. *Nambu Y., Jona Lasinio G.*, Phys. Rev., 124, 246 (1961).
169. *Kibble T. W.*, в книге Proceedings of the 1967 International Conference on Particles and Fields, New York, 1967, p. 277.
170. *Brout R.*, Phase Transitions, New York, 1965 (имеется перевод: *Р. Браут*, Фазовые переходы, изд-во «Мир», 1967).
171. *Weinberg S.*, Phys. Rev. Lett., 18, 188 (1967).
172. *Wess J., Zumino B.*, Phys. Rev., 163, 1727 (1967).
173. *Schwinger J.*, Phys. Lett., 24B, 473 (1967).
174. *Schwinger J.*, Phys. Rev., 167, 1432 (1968).
175. *Chang P., Gürsey F.*, Phys. Rev., 164, 1752 (1967).
176. *Chang P., Gürsey F.*, Phys. Rev., 169, 1397 (1968).
177. *Lee B. W., Nieh H. T.*, Phys. Rev., 166, 1507 (1968).
178. *Lee B. W.*, Phys. Rev., 170, 1359 (1968).
179. *Sakurai J. J.*, Ann. of Phys., 11, 1 (1960).
180. *Sakurai J. J.*, Phys. Rev., 132, 434 (1963).
181. *Sakurai J. J.*, Phys. Rev. Lett., 17, 552 (1966).
182. *Yang C. N., Mills R. L.*, Phys. Rev., 96, 191 (1954).
183. *Kroll N., Lee T. D., Zumino B.*, Phys. Rev., 157, 1376 (1967).
184. *Lee T. D., Zumino B.*, Phys. Rev., 163, 1667 (1967).
185. *Weinberg S.*, Phys. Rev., 2D, 674 (1970).
186. *Schnitzer H. J., Weinberg S.*, Phys. Rev., 164, 1828 (1967).
187. *Schnitzer H. J.*, в книге Subnuclear Phenomena, New York, 1970, p. 144.
188. *Arnoult R., Nath P.*, в книге Lectures in Theoretical Physics, Vol. 11, New York, 1969.
189. *Callan C. G., Coleman S., Wess J., Zumino B.*, Phys. Rev., 177, 2247 (1969).
190. *Nambu Y.*, Phys. Lett., 26B, 626 (1968).
191. *Boulware D. G., Brown L. S.*, Phys. Rev., 172, 1628 (1968).
192. *Weinberg S.*, Phys. Rev., 177, 2604 (1969).
193. *Zumino B.*, в книге Theory and Phenomenology in Particle Physics, New York, 1969, p. 42.
194. *Isham C. J.*, Nuovo Cim., 59A, 356 (1969).
195. *Bardeen W. A., Lee B. W.*, Phys. Rev., 177, 2389 (1969).
196. *Johnson K.*, Nucl. Phys., 25, 431 (1961).
197. *Low F. E.*, Phys. Rev., 97, 1392 (1955).
198. *Fubini S., Furlan G.*, Ann. of Phys., 48, 322 (1968).
199. *Johnson K., Low F. E.*, Progr. Theor. Phys., Suppl. 37—38, 74 (1966).
200. *de Alfaro V., Rossetti C.*, Nuovo Cim., Suppl. 6, 575 (1968).
201. *Tonin M.*, Nuovo Cim. 47A, 919 (1967).
202. *Gross D. J., Jackiw R.*, Phys. Rev., 163, 1688 (1967).
203. *Jackiw R.*, Phys. Rev., 175, 2058 (1968).
204. *Bucella F., Okubo S., Gatto R., Veneziano G.*, Phys. Rev., 149, 1268 (1966).
205. *Umezawa H.*, Quantum Field Theory, Amsterdam, 1956, p. 192 (имеется перевод: *Х. Умэдзавэ*, Квантовая теория поля, ИЛ, 1958).
206. *Nauenberg M.*, Phys. Rev., 154, 1455 (1967).
207. *Boulware D. G., Brown L. S.*, Phys. Rev., 156, 1724 (1967).
208. *Brown S. G.*, Phys. Rev., 158, 1444 (1967).

209. *Jackiw R.*, Phys. Rev., **168**, 1622 (1968).  
 210. *Gross D. J., Jackiw R.*, Nucl. Phys., **B14**, 269 (1969).  
 211. *Dashen R., Lee S. Y.*, Phys. Rev., **187**, 2017 (1969).  
 212. *De Forest T., Walecka J. D.*, Adv. Phys., **15**, 1 (1966).  
 213. *Källen G.*, Helv. Phys. Acta, **25**, 417 (1952).  
 214. *Lehmann H.*, Nuovo Cim., **11**, 342 (1954).  
 215. *Gell-Mann M., Low F.*, Phys. Rev., **95**, 1300 (1954).  
 216. *Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W.*, Nuovo Cim., **1**, 205 (1955).  
 217. *Fubini S.*, в книге Theory and Phenomenology in Particle Physics, New York, 1969, p. 18.  
 218. *Furlan G., Rossetti C.*, в книге Proceedings of the International Seminar on Elementary Particles (Varna, 1968), p. 312.  
 219. *Raman K., Sudarshan C. G.*, Phys. Lett., **21**, 450 (1966).  
 220. *Balachandran A. P., Gundzic M. G., Nicodemi F.*, Nuovo Cim., **44A**, 1257 (1966).  
 221. *von Hippel F., Kim J. K.*, Phys. Rev. Lett., **20**, 1303 (1968).  
 222. *von Hippel F., Kim J. K.*, Phys. Rev., **D1**, 151 (1970).  
 223. *Carbone G., Donini E., Furlan G., Sciuto S.*, Nuovo Cim., **58A**, 668 (1968).  
 224. *Dahmen H. D., Rothe K. D.*, Nucl. Phys., **15B**, 45 (1970).  
 225. *Adler S., Gilman F. J.*, Phys. Rev., **152**, 1460 (1966).  
 226. *Balachandran A. P., Gundzic M. G., Narayanaswami P., Nicodemi F.*, Ann. of Phys., **45**, 339 (1967).  
 227. *Bhatia M. S., Narayanaswami P.*, Phys. Rev., **172**, 1742 (1968).  
 228. *Goffney G. W.*, Phys. Rev., **161**, 1599 (1967).  
 229. *Fubini S., Nambu G., Wataghin V.*, Phys. Rev., **111**, 329 (1958).  
 230. *Denner Ph.*, Phys. Rev., **124**, 2000 (1960).  
 231. *Furlan G., Paver N., Verzegnassi C.*, Nuovo Cim., **62A**, 519 (1969).  
 232. *Furlan G., Paver N., Verzegnassi C.*, Nuovo Cim., **70A**, 247 (1970).  
 233. *Nambu Y., Yoshimura M.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 25 (1970).  
 234. *Amaldi E., et al.*, Nuovo Cim., **65A**, 377 (1970).  
 235. *Paver N., Verzegnassi C.*, Nuovo Cim., **67**, 776 (1969).  
 236. *Paver N., Radescu E. E., Verzegnassi C.*, Nuovo Cim., **56A**, 261 (1970).  
 237. *de Alfaro V., Fubini S., Furlan G., Rossetti C.*, Nuovo Cim., **62A**, 519 (1969).  
 238. *Konishi G., Yamamoto K.*, Progr. Theor. Phys., **37**, 1314 (1967).  
 239. *Okubo S.*, Preprint 875-314, University of Rochester.  
 240. *Das T., Guralnik G. S., Mathur V. S., Low F. E., Young J. E.*, Phys. Rev. Lett., **18**, 759 (1967).  
 241. *Riazuddin*, Phys. Rev., **114**, 1184 (1959).  
 242. *Cini M. E., Ferrari E., Gatto R.*, Phys. Rev. Lett., **2**, 7 (1959).  
 243. *Tanaka K.*, Nuovo Cim., **56A**, 764 (1968).  
 244. *Charap J.*, Phys. Rev., **D2**, 1554 (1970).  
 245. *Gerstein I. S., Jackiw R., Lee B. W., Weinberg S.*, Phys. Rev., **D3**, 2486 (1971).  
 246. *Amati D., Jengo R., Remiddi E.*, Nuovo Cim., **51A**, 999 (1967).  
 247. *Fubini S., Segré G., Walecka D.*, Ann. of Phys., **39**, 381 (1966).  
 248. *Gell-Mann M.*, в книге Strong and Weak Interactions, New York, 1966, p. 173.  
 249. *Coester F., Roepstorff G.*, Phys. Rev., **155**, 1583 (1967).  
 250. *Calucci G.*, Nucl. Phys., **87**, 326 (1966).  
 251. *Bardacki K., Halpern M. B.*, Phys. Rev., **176**, 1686 (1968).  
 252. *Jersak J., Stern J.*, Nuovo Cim., **59A**, 315 (1969).  
 253. *Leutwyler H.*, Acta Physica Austriaca, Suppl. V, 320 (1968).  
 254. *Gerstein I. S.*, Phys. Rev., **161**, 1631 (1967).  
 255. *Gourdin M.*, Nuovo Cim., **47A**, 145 (1967).  
 256. *Gourdin M.*, в книге Cargese Lectures in Physics, Vol. 1, New York, 1967, p. 153.  
 257. *Meyer J. W.*, Phys. Rev., **153**, 1653 (1967).  
 258. *Adler S. L.*, Phys. Rev., **135B**, 963 (1964).  
 259. *Della Selva A., Masperi A.*, Nuovo Cim., **50**, 997 (1967).  
 260. *Gastorowicz S., Geffen D. A.*, Phys. Lett., **22**, 344 (1966).  
 261. *Mathur V. S., Pandit L. K.*, Phys. Lett., **19**, 523 (1963).  
 262. *Amati D., Bouchiat C., Nuyts J.*, Phys. Lett., **19**, 59 (1965).  
 263. *Levinson C. A., Muzinich I. J.*, Phys. Rev. Lett., **15**, 715 (1965).  
 264. *Pandit L., Schechter J.*, Phys. Lett., **19**, 56 (1965).  
 265. *Adler S. L.*, в книге Proceedings of the International Conference on Weak Interactions (Argonne, 1965).  
 266. *Furlan G., Jengo R., Remiddi E.*, Nuovo Cim., **44A**, 427 (1966).  
 267. *Riazuddin, Lee B. W.*, Phys. Rev., **146B**, 1202 (1966).  
 268. *Gilman F., Schnitzer H.*, Phys. Rev., **150**, 1362 (1966).  
 269. *Vjorken J. D.*, Phys. Rev. Lett., **16**, 408 (1966) (имеется перевод в книге С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов и их применения в физике частиц, М., 1970, стр. 304).  
 270. *Adler S. L.*, Phys. Rev., **143**, 1144 (1966) (имеется перевод в книге С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов и их применения в физике частиц, М., 1970, стр. 274).

271. Bjorken J. D., в книге Proceedings of the International School «E. Fermi», Course 41, New York, 1968, p. 55.
272. Gell-Mann M., в книге Hadrons and Their Interactions, New York, 1968, p. 169.
273. Gilman F., Harari H., Phys. Rev., 165, 1803 (1968).
274. Crönstrom C., Naga M., Nucl. Phys., B15, 61 (1970).
275. Crönstrom C., Naga M., Phys. Rev., D1, 2414 (1970).
276. Dyson F., Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics, New York, 1966.
277. Lee B. W., Phys. Rev. Lett., 14, 271 (1965).
278. Dashen R., Gell-Mann M., Phys. Lett., 17, 145 (1965).
279. Dashen R., Gell-Mann M., Phys. Lett., 17, 142 (1965).
280. Amati D., Bergia S., Nuovo Cim., 45, 15 (1966).
281. Oehme R., Phys. Rev., 143, 1138 (1966).
282. Ryan C., Phys. Rev., 147, 1139 (1966).
283. Gerstein I. S., Phys. Rev. Lett., 16, 114 (1965).
284. Gerstein I. S., Lee B. W., Phys. Rev., 152, 1418 (1966).
285. Gatto R., Maiani L., Preparata G., Phys. Rev. Lett., 16, 377 (1965).
286. Gatto R., Maiani L., Preparata G., Phys. Rev., 140B, 1579 (1965).
287. Lipkin H. J., Rubinstein H., Meshkov S., Phys. Rev., 148, 1405 (1966).
288. Harari H., Phys. Rev. Lett., 16, 964 (1966).
289. Weinberg S., Phys. Rev. Lett., 22, 1023 (1969).
290. Fubini S., Furlan G., Lett. Nuovo Cim., 3, 168 (1970).
291. Shei S. S., Phys. Rev., 188, 2275 (1969).
292. Klost W. M., Zimmerman A. H., Lett. Nuovo Cim., 3, 619 (1970).
293. Veneziano G., Nuovo Gim., 44A, 295 (1966).
294. Chang S. J., Dashen R., O'Ratfertaigh L., Phys. Rev., 182, 1805 (1969).
295. Chang S. J., Dashen R., O'Ratfertaigh L., Phys. Rev., 182, 1819 (1969).
296. Fubini S., в книге Proceedings of the Fourth Coral Gables Conference on Symmetry Principles of High Energy, New York, 1967, p. 106.
297. Gell-Mann M., Horn D., Weyers J., в книге Proceedings of the Heidelberg International Conference on Elementary Particles (1967), Amsterdam, 1968, p. 479.
298. Fronsdal C., Phys. Rev., 182, 1564 (1969).
299. Fronsdal C., Phys. Rev., 185, 1786 (1969).
300. Bebié H., Leutwyler H., Phys. Rev. Lett., 19, 618 (1968).
301. Barut A. O., Kleinert H., Phys. Rev., 156, 1546 (1967).
302. Abers E., Grodsky I. T., Norton R. E., Phys. Rev., 159, 1222 (1967).
303. Gell-Mann M., в книге Proceedings of the 13th International Berkeley Conference on High Energy Physics, University of California Press, 1966.
304. Schweber S. S., An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, New York, 1962 (имеется перевод: С. Шебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963).
305. Weinberg S., Phys. Rev., 150, 1313 (1966).
306. Chang S., Ma S., Phys. Rev. Lett., 22, 1334 (1969).
307. Chang S., Ma S., Phys. Rev., 180, 1506 (1969).
308. Chang S., Ma S., Phys. Rev., 188, 2385 (1969).
309. Kogut J. B., Soper D. E., Phys. Rev., D1, 2901 (1970).
310. Müller A. H., Phys. Rev., D2, 2963 (1970).
311. Eden R. J., Landshoff P. V., Olive D. I., Polkinghorne J. C., The Analytic S Matrix, Cambridge, 1966.
312. Coleman S., Glashow S. L., Phys. Rev. Lett., 6, 423 (1961).
313. Akerlof C. W., et al., Phys. Rev., 163, 1482 (1967).
314. Sutherland D. G., Nucl. Phys., B2, 433 (1967).
315. Veltman M., Proc. Roy. Soc., A301, 107 (1967).
316. Bell J. S., Jackiw R., Nuovo Cim., 60A, 47 (1969).
317. Jackiw R., Lectures delivered at the Brookhaven Summer School 1970, MIT Preprint 183.
318. Jacob M., в книге Proceedings of the Lund International Conference on Elementary Particles, Lund, 1969, p. 125.
319. Jackson J. D., в книге Proceedings of the Lund International Conference on Elementary Particles, Lund, 1969, p. 61.
320. Odorico R., Phys. Lett., 33B, 489 (1970).
321. Harari H., Lectures at the Brookhaven Summer School, 1969.
322. Veneziano G., в книге Proceedings of the Coral Gables Conference on Fundamental Interactions at High Energy, New York, 1969.
323. Lovelace C., Veneziano Theory, CERN Preprint TH 1123, 1969.
324. Veneziano G., в книге Elementary Processes at High Energy, New York, 1971, p. 94.
325. Alessandrini V., Amati D., le Bellac M., Olive D., Phys. Reports, 1C, 270 (1971).
326. Amati D., Lectures given at the 1970 Latin American School of Physics, 1970.
327. Nambu Y., Lectures given at the 1970 Copenhagen Summer Symposium, 1970.
328. Mandelstam S., Lectures given at the 1970 Brandeis Summer Institute, 1970.
329. Chan Hong-Mo, The Generalized Veneziano Model, CERN preprint TH-1057.

330. *Plahte E.*, Nuovo Cim., A66, 713 (1970).  
331. *Mandelstam S.*, в книге Proceedings of the Tokyo Summer Lectures on Theoretical Physics, New York, 1966.  
332. *van Hove L.*, Phys. Lett., 24B, 183 (1967).  
333. *Durand III, L.*, Phys. Rev., 161, 1610 (1967).  
334. *Horn D.*, *Schmid C.*, не опубликовано.  
335. *Schwarz J. H.*, Phys. Rev., 159, 1269 (1967).  
336. *Harari H.*, Phys. Rev. Lett., 20, 1395 (1968).  
337. *Harari H.*, *Zarmi Y.*, Phys. Rev., 185, 244 (1969).  
338. *Gilman F.*, *Harari H.*, *Zarmi Y.*, Phys. Rev. Lett., 21, 323 (1968).  
339. *Freund P. G. O.*, Phys. Rev. Lett., 20, 235 (1968).  
340. *Schmid C.*, Phys. Rev. Lett., 20, 689 (1968).  
341. *Arnold R. C.*, Phys. Rev. Lett., 14, 657 (1965).  
342. *Chiu C. B.*, *Finkelstein J.*, Phys. Lett., 27B, 510 (1968).  
343. *Henzi R.*, Nuovo Cim., 52A, 772 (1967).  
344. *Harari H.*, Phys. Rev. Lett., 22, 562 (1969).  
345. *Rosner J. L.*, Phys. Rev. Lett., 22, 689 (1969).  
346. *Matsuoka T.*, *Ninomiga K.*, *Savada S.*, Nagoya preprint, 1969.  
347. *Mandelstam S.*, Phys. Rev., 166, 1539 (1968).  
348. *Ademollo M.*, *Rubinstein H.*, *Veneziano G.*, *Virasoro M. A.*, Phys. Rev., 176, 1904 (1968).  
349. *Ademollo M.*, *Rubinstein H.*, *Veneziano G.*, *Virasoro M. A.*, Phys. Rev. Lett., 19, 1402 (1967).  
350. *Ademollo M.*, *Rubinstein H.*, *Veneziano G.*, *Virasoro M. A.*, Phys. Lett., 27B, 99 (1968).  
351. *Bishari M.*, *Rubinstein H. R.*, *Schwimmer A.*, *Veneziano G.*, Phys. Rev., 176, 1926 (1968).  
352. *Veneziano G.*, Nuovo Cim., 57A, 190 (1968).  
353. *Mandelstam S.*, частное сообщение.  
354. *Chan Hong-Mo*, *Paton J.*, Nucl. Phys., B10, 519 (1969).  
355. *Lovelace C.*, Phys. Lett., 23B, 264 (1968).  
356. *Ademollo M.*, *Veneziano G.*, *Weinberg S.*, Phys. Rev. Lett., 22, 83 (1969).  
357. *Fairlie D. B.*, *Jones K.*, Nucl. Phys., B15, 323 (1970).  
358. *Koba Z.*, *Nielsen H. B.*, Nucl. Phys., B10, 633 (1969).  
359. *Donini E.*, *Sciuto S.*, Ann. of Phys., 58, 388 (1970).  
360. *Bardakci K.*, *Ruegg H.*, Phys. Lett., 28B, 242 (1968).  
361. *Bjorken J. D.*, *Kogut J. B.*, *Soper D. E.*, Phys. Rev., D3, 1382 (1971).  
362. *Chan Hong-Mo*, Phys. Lett., 28B, 425 (1969).  
363. *Chan Hong-Mo*, *Tsou Sheang Tsun*, Phys. Rev. Lett., 22, 259 (1969).  
364. *Goebel C. L.*, *Sakita B.*, Phys. Rev. Lett., 22, 257 (1969).  
365. *Chew G. F.*, *Pignotti A.*, Phys. Rev., 176, 2112 (1968).  
366. *Chew G. F.*, *Low F. E.*, *Goldberger M. L.*, Phys. Rev. Lett., 22, 208 (1969).  
367. *Fubini S.*, *Veneziano G.*, Nuovo Cim., A64, 811 (1969).  
368. *Bardakci K.*, *Mandelstam S.*, Phys. Rev., 184, 1640 (1969).  
369. *Fubini S.*, *Gordon D.*, *Veneziano G.*, Phys. Lett., 29B, 679 (1969).  
370. *Lovelace C.*, в книге Proceedings of the Conference on  $\pi\pi$  and  $\pi K$  Interactions, Argonne, 1969.  
371. *Susskind L.*, Nuovo Cim., 69A, 457 (1970).  
372. *Virasoro M. A.*, Phys. Rev. Lett., 22, 37 (1969).  
373. *Hardy G. H.*, *Ramanujan S.*, Proc. Math. Soc., 17, 75 (1917).  
374. *Hagedorn R.*, Nuovo Cim., 56A, 1027 (1968).  
375. *Huang K.*, *Weinberg S.*, Phys. Rev. Lett., 25, 895 (1970).  
376. *Hagedorn R.*, Astr. Astrophys. Journ., 5, 184 (1970).  
377. *Gliozzi F.*, Lett. Nuovo Cim., 2, 846 (1969).  
378. *Chiu C. B.*, *Matsuda S.*, *Rebbi C.*, Phys. Rev. Lett., 23, 1526 (1969).  
379. *Virasoro M. A.*, Phys. Rev., 1D, 2933 (1970).  
380. *Fubini S.*, *Veneziano G.*, Ann. of Phys., 63, 12 (1971).  
381. *Del Giudice E.*, *Di Vecchia P.*, Nuovo Cim., 70A, 579 (1970).  
382. *De Giacomo A.*, *Fubini S.*, *Sertorio L.*, *Veneziano G.*, Phys. Lett., 33B, 171 (1970).  
383. *Veneziano G.*, Proceedings of the International Conference on Duality and Symmetry in Hadron Physics, Israel, 1971.  
384. *Gordon D.*, *Veneziano G.*, IAS Preprint, 1970.  
385. *Virasoro M. A.*, UCB preprint, 1970.  
386. *De Tar C. E.*, *Kang Chug I*, *Tan K.*, *Weis J. H.*, Phys. Rev., D4, 425 (1971).  
387. *Sciuto S.*, Lett. Nuovo Cim., 2, 411 (1969).  
388. *Caneschi L.*, *Schwimmer A.*, *Veneziano G.*, Phys. Lett., 30B, 351 (1969).  
389. *Kikkawa K.*, *Sakita B.*, *Virasoro M. A.*, Phys. Rev., 1D, 3258 (1970).  
390. *Kikkawa K.*, *Klein S.*, *Sakita B.*, *Virasoro M. A.*, Phys. Rev., 1D, 3238 (1970).  
391. *Amati D.*, *Bouchiat C.*, *Gervais J. L.*, Lett. Nuovo Cim., 2, 399 (1969).  
392. *Bardakci K.*, *Halpern M. B.*, *Shapiro J. A.*, Phys. Rev., 185, 1910 (1969).  
393. *Lovelace C.*, Phys. Rev. Lett., 32B, 703 (1970).



394. *Alessandrini V. A.*, CERN Preprint 1245 (1970).  
 395. *Kaku M., Yu L.*, Phys. Lett., **33B**, 166 (1970).  
 396. *Neveu A., Scherk J.*, Phys. Rev., **D1**, 2353 (1970).  
 397. *Frye G., Susskind L.*, Phys. Lett., **31B**, 537 (1970).  
 398. *Freund P. G. O., Rivers R. J.*, Phys. Lett., **28B**, 510 (1969).  
 399. *Lovelace C.*, частное сообщение.  
 400. *Gross D. J., Neveu A., Scherk J., Schwarz J. H.*, Phys. Rev., **D2**, 697 (1970).  
 401. *Nambu Y.*, в книге Proceedings of the International Conference at Wayne University (June, 1969), New York, 1970, p. 269.  
 402. *Nambu Y.*, Dual Model of Hadrons, University of Chicago Preprint EFI 70-07, не опубликовано.  
 403. *Susskind L.*, Phys. Rev., **D1**, 1182 (1970).  
 404. *Nielsen H. B.*, An Almost Physical Interpretation of the  $n$ -point Veneziano Model, Nordita Preprint, 1969.  
 405. *Hsue C. S., Sakita B., Virasoro M. A.*, Phys. Rev. **D2**, 2857 (1970).  
 406. *Sakita B., Virasoro M. A.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 1146 (1970).  
 407. *Nielsen H. B., Olesen P.*, Phys. Lett., **32B**, 203 (1970).  
 408. *Mandelstam S.*, Phys. Rev., **184**, 1625 (1969).  
 409. *Mandelstam S.*, Phys. Rev., **D1**, 1734 (1970).  
 410. *Bardakci K., Halpern M. B.*, Phys. Rev., **183**, 1456 (1969).  
 411. *Neveu A., Schwarz J. H.*, Phys. Lett., **34B**, 317 (1971).  
 412. *Ademollo M., Del Giudice E.*, Nuovo Cim., **63A**, 639 (1969).  
 413. *Brower R. C., Rabi A., Weis J. H.*, Nuovo Cim., **65A**, 654 (1970).  
 414. *Bouchiat C., Gervais J.-L., Sourlas N.*, Lett. Nuovo Cim., **3**, 767 (1970).  
 415. *Weis J. H.*, Preprint UCRL 19780 (1970).  
 416. *Ademollo M.*, в книге Symposium on Meson Photo- and Electroproduction at Low and Intermediate Energies, Tracts in Modern Physics, Vol. 59, Berlin, 1971, p. 135.  
 417. *Landshoff P. V., Polkinghorne J. C.*, Nucl. Phys., **B19**, 432 (1970).  
 418. *Nambu Y., Hacinliyan A.*, University of Chicago Preprint EFI 70-67, 1970.  
 419. *Manassah J. T., Matsuda S.*, Phys. Rev., **D4**, 882 (1971).  
 420. *Odorico R.*, Phys. Lett., **34B**, 65 (1971).  
 421. *Schmid C.*, Phys. Lett., **22**, 348 (1968).  
 422. *Shapiro J.*, Phys. Rev., **179**, 1345 (1969).  
 423. *Dashen R.*, Phys. Rev., **183**, 1245 (1969).  
 424. *Gell-Mann M.*, в книге Particle Physics, eds. W. A. Simmons, S. T. Tuan, Los Angeles, 1970.  
 425. *Cheng T. P., Dashen R.*, Phys. Rev. Lett., **26**, 594 (1971).  
 426. *Höhler G., Jacob H. P., Strauss R.*, Phys. Lett., **35B**, 445 (1971).  
 427. *Gensini P.*, University of Lecce preprint, 1970.  
 428. *Banerjee H.*, Phys. Lett., **32B**, 691 (1970).  
 429. *Komen G. J.*, Nucl. Phys., **B24**, 305 (1970).  
 430. *Stech B.*, в книге Current Algebra and Phenomenological Lagrange Functions, 1969, Tracts in Modern Physics, Vol. 50, Berlin, 1969, p. 84.  
 431. *Dashen R., Weinstein M.*, Phys. Rev. Lett., **22**, 1337 (1969).  
 432. *Denardo G.*, Lett. Nuovo Cim., **3**, 349 (1970).  
 433. *Korthals Altes C. P.*, Phys. Rev., **D2**, 1181 (1970).  
 434. *Weinstein M.*, Phys. Rev., **188**, 2330 (1969).  
 435. *Brandt R., Preparata G.*, Lett. Nuovo Cim., **4**, 80 (1970).  
 436. *Brandt R., Preparata G.*, Ann. of Phys., **61**, 119 (1970).  
 437. *Jackiw R., Johnson K.*, Phys. Rev., **182**, 1459 (1969).  
 438. *Adler S. L., Bardeen W. A.*, Phys. Rev., **182**, 1517 (1969).  
 439. *Boulware D. G., Deser S.*, Phys. Rev., **175**, 1912 (1968).  
 440. *Bjorken J. D., Brandt R.*, Phys. Rev. **177**, 2331 (1969).  
 441. *Ciccariello S., Sartori G., Tonin M.*, Nuovo Cim., **A55**, 847 (1968).  
 442. *Halpern M., Segré G.*, Phys. Rev. Lett., **19**, 611 (1967).  
 443. *Wick G. C., Zumino B.*, Phys. Lett., **25**, 479 (1967).  
 444. *Delbourgo R., Salam A., Srirathdee J.*, Phys. Rev., **187**, 1999 (1969).  
 445. *Cabibbo N., Maiani L.*, Phys. Lett., **28B**, 131 (1968).  
 446. *Gatto R., Sartori G., Tonin M.*, Phys. Lett., **28B**, 128 (1968).  
 447. *Gatto R., Sartori G., Tonin M.*, Lett. Nuovo Cim., **1**, 1 (1969).  
 448. *Gatto R.*, Riv. Nuovo Cim., **1**, 514 (1969).  
 449. *Ne'eman Y.*, Lectures at the V Finnish Summer School, 1969.  
 450. *Oakes R. J.*, Phys. Lett., **29B**, 683 (1969).  
 451. *Coleman S., Glashow S. L.*, Phys. Rev., **134B**, 671 (1964).  
 452. *Cabibbo N.*, в книге Proceedings of the Coral Gables Conference on Fundamental Interactions at High Energy, New York, 1969, p. 392.  
 453. *Cabibbo N., Maiani L.*, Phys. Rev., **D1**, 707 (1970).  
 454. *Adler S. L., Tung W. K.*, Phys. Rev. Lett., **22**, 978 (1969).  
 455. *Adler S. L., Tung W. K.*, Phys. Rev., **D1**, 2846 (1970).  
 456. *Tung W. K.*, Phys. Rev., **188**, 2404 (1969).

457. Jackiw R., Preparata G., Phys. Rev. Lett., **22**, 975 (1969).  
 458. Jackiw R., Preparata G., Phys. Rev., **185**, 1929 (1969).  
 459. Вайнштейн А. И., Иоффе Б. Л., Письма ЖЭТФ, **6**, 917 (1967).  
 460. Hagen C. R., Phys. Rev., **188**, 2416 (1969).  
 461. Khuri N., Bitar K., Phys. Rev., **D3**, 462 (1971).  
 462. Mack G., Salam A., Ann. of Phys., **53**, 174 (1969).  
 463. Gross D. J., Wess J., Phys. Rev., **D1**, 753 (1970).  
 464. Carruthers P., Phys. Rep., **1C**, 1 (1971).  
 465. Sakata S., Umezawa H., Kamefuchi S., Progr. Theor. Phys., **7**, 377 (1952).  
 466. Gourdin M., Formalisme lagrangien et lois de symétrie, New York, 1967.  
 467. Belinfante F. J., Physica, **7**, 449 (1940).  
 468. Callan C. G., Jr., Coleman S., Jackiw R., Ann. of Phys., **59**, 42 (1970).  
 469. Carruthers P., Phys. Rev., **D2**, 2265 (1970).  
 470. Carruthers P., Phys. Rev., **D3**, 959 (1971).  
 471. Beg M. A. B., Bernstein J., Gross D. J., Jackiw R., Sirlin A., Phys. Rev. Lett., **25**, 1231 (1970).  
 472. Jackiw R., Phys. Rev., **D3**, 1347, 1356 (1971).  
 473. Callan C. G., Jr., Broken Scale Invariance and Scaling Laws in Elementary Particle Physics, Cal. Tech. Preprint 68-259, 1970.  
 474. Jackiw R., Field Theory Investigations in Current Algebra, Lectures on Current Algebra and its Applications, eds. S. Treiman, R. Jackiw, D. Gross, Princeton University Press, 1972.  
 475. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957.  
 476. Wilson K., Phys. Rev., **D2**, 1473 (1970).  
 477. Coleman S., Jackiw R., Ann. of Phys., **67**, 552 (1971).  
 478. Coleman S., Lectures given at the «Ettore Majorana» Summer School, 1971.  
 479. Wilson K., Phys. Rev., **179**, 1499 (1969).  
 480. Bastai A., Bertocchi L., Fubini S., Furlan G., Tonin M., Nuovo Cim., **30**, 1512 (1963).  
 481. Ciccariello S., Gatto R., Sartori G., Tonin M., Phys. Lett., **30B**, 546 (1969).  
 482. Ciccariello S., Gatto R., Sartori G., Tonin M., Ann. of Phys., **65**, 265 (1971).  
 483. Llewellyn-Smith C. H., CERN Preprint TH. 1188 (1970).  
 484. Gilman F., в книге Proc. Intern. Conference on Duality and Symmetry in Hadron Physics, Israel, 1971, p. 116.  
 485. Bjorken J. D., Phys. Rev., **179**, 1547 (1969).  
 486. Feynman R. P., Phys. Rev. Lett., **23**, 1415 (1969).  
 487. Feynman R. P., в книге Proceedings of the Third High Energy Collision Conference at Stony Brook, 1970.  
 488. Bjorken J. D., Paschos E. A., Phys. Rev., **185**, 1975 (1969).  
 489. Drell S. D., Levy D. J., Yan T. M., Phys. Rev. Lett., **22**, 744 (1969).  
 490. Drell S. D., Levy D. J., Yan T. M., Phys. Rev., **187**, 2159 (1969).  
 491. Drell S. D., Levy D. J., Yan T. M., Phys. Rev., **D1**, 1035 (1970).  
 492. Drell S. D., Levy D. J., Yan T. M., Phys. Rev., **D1**, 1617 (1970).  
 493. Landshoff P. V., Phys. Lett., **32B**, 57 (1970).  
 494. Domokos G., Kovesi-Domokos S., Schonberg E., Phys. Rev., **D3**, 1184 (1971).  
 495. Bjorken J. D., Phys. Rev., **163**, 1767 (1967).  
 496. Gross D. J., Llewellyn-Smith C. H., Nuclear Phys., **B14**, 337 (1969).  
 497. Callan C. G., Jr., Gross D. J., Phys. Rev. Lett., **22**, 156 (1969).  
 498. Jackiw R., van Royen R., West C. B., Phys. Rev., **D2**, 2473 (1970).  
 499. Leutwyler H., Stern J., Nucl. Phys., **B20**, 77 (1970).  
 500. Llewellyn-Smith C. H., Nucl. Phys., **B17**, 277 (1970).  
 501. Drell S. D., Yan T. M., Preprint SLAC-PUB 808 (1970).  
 502. Drell S. D., Yan T. M., Phys. Rev. Lett., **25**, 316 (1970).  
 503. Harari H., Phys. Rev. Lett., **17**, 1303 (1966).  
 504. Buccella F., Cini M., De Maria M., Tirozzi B., Nuovo Cim., **64**, 927 (1969).  
 505. Cottingham W. N., Ann. of Phys., **25**, 424 (1963).  
 506. Rabl A., Phys. Rev., **176**, 2034 (1968).  
 507. Weinberg S., Treiman S. B., Phys. Rev., **116**, 465 (1959).  
 508. Gross D. J., Pagels H., Phys. Rev., **172**, 1381 (1968).  
 509. Elitzur M., Harari H., Ann. of Phys., **56**, 81 (1970).  
 510. Sokolow R., Phys. Rev., **137B**, 1221 (1965).  
 511. Coleman S., Schnitzer H. J., Phys. Rev., **136B**, 223 (1964).  
 512. Srivastava Y., Phys. Rev. Lett., **20**, 232 (1968).  
 513. Cabibbo N., Horowitz L., Ne'eman Y., Phys. Lett., **22**, 336 (1966).  
 514. Berman S. M., Sirlin A., Ann. of Phys., **20**, 20 (1962).  
 515. Hakim S. J., Physical Meson-Baryon Scattering in Canonical and  $SU(3) \otimes SU(3)$  Algebras, Randall Lab. (University of Michigan, Ann. Arbor) Preprint UM-HE 71-21 (1971).  
 516. Sirlin A., Acta Physica Austriaca, Suppl. V, 353 (1968).  
 517. Abers E. S., Norton R. E., Dicus D. A., Phys. Rev. Lett., **18**, 676 (1967).

518. *Abers E. S., Norton R. E., Dicus D. A., Quinn H.*, Phys. Rev., **167**, 1461 (1968).  
 519. *Cabibbo N., Maiani L., Preparata G.*, Phys. Lett., **25B**, 31 (1967).  
 520. *Cabibbo N., Maiani L., Preparata G.*, Phys. Lett., **25B**, 132 (1967).  
 521. *Johnson K., Low F. E., Suura H.*, Phys. Rev. Lett., **18**, 1224 (1967).  
 522. *Sirlin A.*, Phys. Rev. Lett., **19**, 877 (1967).  
 523. *Preparata G., Weisberger W. I.*, Phys. Rev., **175**, 1965 (1968).  
 524. *Fulton T., Rohrlich F., Witten L.*, Rev. Mod. Phys., **34**, 442 (1962).  
 525. *Boulware D. G., Brown L. S., Peccci R. D.*, Phys. Rev., **D2**, 293 (1970).  
 526. *Callan C. G., Jr.*, Phys. Rev., **D2**, 1541 (1970).  
 527. *Symanzyk K.*, Comm. Math. Phys., **18**, 227 (1970).  
 528. *Weinberg S.*, Phys. Rev., **118**, 838 (1960).  
 529. *Wagner F.*, Nuovo Cim., **63A**, 393 (1969).  
 530. *Frampton P. H., Nambu Y.*, в книге Essays in Theoretical Physics Dedicated to Gregor Wentzel, University of Chicago Press, 1970.  
 531. *Lin K. Y.*, CERN Preprint TH 1229.  
 532. *Герасимов С. Б.*, Ядерная физика, **5**, 1263 (1967).  
 533. *Gross D. J., Neveu A., Scherk J., Schwartz J. H.*, Phys. Lett., **31B**, 592 (1970).  
 534. *Domokos G., Kovesi-Domokos S., Schonberg E.*, Phys. Rev., **D3**, 1191 (1971).  
 535. *Chew G. F., Pignotti A.*, Phys. Rev. Lett., **20**, 1078 (1968).  
 536. *Stern J.*, Препринт № E2-3469, ОИЯИ, Дубна, 1967.  
 537. *Sartori G., Tonin M.*, Nuovo Cim., **54A**, 55 (1968).  
 538. *Cheng H., Wu T. T.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 1456 (1970).  
 539. *Abarbanel H., Itzykson C.*, Phys. Rev. Lett., **23**, 53 (1969).  
 540. *Yao Y. P.*, Phys. Rev., **D1**, 2316 (1970).  
 541. *Lee B. W.*, Phys. Rev., **D1**, 2361 (1970).  
 542. *Bjorken J. D.*, в книге Proceedings of the International Conference on Duality and Symmetry in Hadron Physics, Israel, 1974, p. 98.  
 543. *Brandt R. A.*, Phys. Rev. Lett., **22**, 1149 (1969).  
 544. *Brandt R. A.*, Phys. Rev. Lett., **23**, 1260 (1969).  
 545. *Brandt R. A.*, Phys. Rev., **D1**, 2808 (1970).  
 546. *Brandt R. A., Preparata G.*, Nucl. Phys., **B27**, 541 (1971).  
 547. *Brandt R. A.*, в книге Elementary Processes at High Energy, New York, 1971, p. 473.  
 548. *Friszman Y.*, Phys. Rev. Lett., **25**, 966 (1970).  
 549. *Fritzsch H., Gell-Mann M.*, Scale Invariance and the Light Cone, Talk given at the Conference on Fundamental Interactions at High Energy, Coral Gables, January 1971, Cal. Tech. Preprint 68-297 (1971).  
 550. *Gross D. J., Treiman S. B.*, Phys. Rev., **D4**, 1059 (1971).  
 551. *Cornwall J. M., Jackiw R.*, Phys. Rev., **D4**, 367 (1971).  
 552. *Dicus D. A., Jackiw R., Teplitz V. L.*, Phys. Rev., **D4**, 1733 (1971).  
 553. *Brandt R. A., Preparata G.*, New York University Preprint 1/71 (1971) (будет опубликовано в книге Proceedings of the 1971 Coral Gables Conference).  
 554. *Brown L. S.*, в книге Lectures in Theoretical Physics, eds. W. E. Brittin, B. W. Downs, S. Down, New York, 1969.  
 555. *Altarelli G., Brandt R. A., Preparata G.*, Phys. Rev. Lett., **26**, 42 (1971).  
 556. *Brandt R. A., Preparata G.*, Phys. Rev. Lett., **25**, 1530 (1970).  
 557. *Susskind L.*, Phys. Rev., **165**, 1535 (1968).  
 558. *Ditrac P. A. M.*, Rev. Mod. Phys., **21**, 392 (1949).  
 559. *Leutwyler H.*, в книге Invited Papers at the 1st International Summer School for Theoretical Physics (University of Karlsruhe, 1968), Tracts in Modern Physics, Vol. 50, Berlin, 1968, p. 29.  
 560. *Klauder J. K., Leutwyler H., Strait L.*, Nuovo Cim., **66A**, 536 (1970).  
 561. *Neville R. A., Rohrlich F.*, Nuovo Cim., **1A**, 625 (1971).  
 562. *Иоффе Б. Л.*, Письма ЖЭТФ, **9**, 163 (1969).  
 563. *Иоффе Б. Л.*, Phys. Lett., **30B**, 123 (1969).  
 564. *Leutwyler H., Stern J.*, Phys. Lett., **31B**, 458 (1970).  
 565. *Budagov I. et al.*, Phys. Lett., **30B**, 364 (1969).  
 566. *Myatt G., Perkins D. H.*, Phys. Lett., **34B**, 542 (1971).  
 567. *Segré G.*, Phys. Rev. Lett., **26**, 796 (1971).  
 568. *Friedman J. I.*, Deep Inelastic Electron Scattering: Experimental, Topical Seminar on Electromagnetic Interactions, ICTP Triest, June 1971, pub. IC/71/136 (1971).  
 569. *Bloom E. D.*, в книге Proceedings of the XV International Conference on High Energy Physics, Kiev, 1970.  
 570. *Llewellyn-Smith C. H.*, в печати (см. [593]).  
 571. *Bloom E. D., Gilman F. J.*, Phys. Rev. Lett., **25**, 1140 (1970).  
 572. *Resignoli M., Sertorio L., Toller M.*, Phys. Rev., **150**, 1389 (1966).  
 573. *X2 Collaboration*, Phys. Rev., **D3**, 10 (1971).  
 574. *Okubo S.*, Progr. Theor. Phys., **27**, 949 (1962).  
 575. *Landshoff P. V., Polkinghorne J. C., Short R. D.*, Nucl. Phys., **B28**, 225 (1971).  
 576. *Landshoff P. V., Polkinghorne J. C.*, Nucl. Phys., **B33**, 221 (1971); erratum **B36**, 642 (1971).

**Дополнительная литература к гл. 1 и 2<sup>1)</sup>**

- 577\*. *Новожилов Ю. В.*, Введение в теорию элементарных частиц, М., 1972.  
 578\*. *Мэтьюс П.*, Релятивистская квантовая теория взаимодействия элементарных частиц, ИЛ, 1959.  
 579\*. *Окунь Л. Б.*, Слабое взаимодействие элементарных частиц, М., 1963.  
 580\*. *Желобенко Д. П.*, Компактные группы Ли и их представления, М., 1970.  
 581\*. *Коккедэ Я.*, Теория кварков, изд-во «Мир», 1971.  
 582\*. *Газиорович С.*, Физика элементарных частиц, М., 1969.  
 583\*. *Челлен Г.*, Физика элементарных частиц, М., 1966.  
 584\*. *Верле Ю.*, Релятивистская теория реакций, М., 1969.  
 585\*. *Ли Ц., Ву Ц.*, Слабые взаимодействия, изд-во «Мир», 1968.  
 586\*. *Нелипа Н. Ф.*, Введение в теорию сильновзаимодействующих частиц, М., 1970.  
 587\*. *Балдин А. М., Гольданский В. И., Максименко В. М., Розенталь И. Л.*, Кинематика ядерных реакций, М., 1969.  
 588\*. *Адлер С., Дашен Р.*, Алгебры токов и их применение в физике частиц, изд-во «Мир», 1970.  
 589\*. *Вайнштейн А. И., Захаров В. И.*, УФН, 100, 225 (1970).  
 590\*. *Lipkin H. J.*, Physics Reports, 8С, № 3 (1973).  
 591\*. Электромагнитные взаимодействия и структура элементарных частиц, сборник статей под ред. А. М. Балдина, изд-во «Мир», 1969.  
 592\*. *Берестейн Дж.*, Элементарные частицы и их токи, изд-во «Мир», 1970.  
 593\*. *Llewellyn-Smith C. H.*, Physics Reports, 3С, № 5 (1972).

**Дополнительная литература к гл. 5**

- 594\*. *Боголюбов Н. Н.*, препринт ОИЯИ, Д-781, Дубна (1961).  
 595\*. *Волков Д. В.*, Физика элементарных частиц и атомного ядра, 4, вып. I, стр. 3—41 (1973).  
 596\*. *Prokhorov L. V.*, Phys. Rev., 183, 1515 (1969).  
 597\*. *Dashen R., Weinstein M.*, Phys. Rev., 183, 1261 (1969).  
 598\*. *Prokhorov L. V.*, Nuovo Cim., 57A, 245 (1968).  
 599\*. *Ильичев Н. А., Прохоров Л. В.*, ТМФ, 6, 305 (1971).  
 600\*. *Lee B. W.*, Comments on Nuclear and Particle Physics, 4, № 6, 198 (1970).  
 601\*. Элементарные частицы и компенсирующие поля, сборник статей под ред. Д. Д. Иваненко, изд-во «Мир», 1964.  
 602\*. *Копонлева Н. П., Попов В. Н.*, Калибровочные поля, М., 1972.  
 603\*. *Вайнштейн А. И., Хрипович И. Б.*, УФН, 112, 685 (1974).  
 604\*. *Гриб А. А., Дамаскинский Е. В., Максимов В. М.*, УФН, 102, 587 (1970).  
 605\*. *Берестецкий В. Б.*, в книге Элементарные частицы. 1-я школа физики ИТЭФ, вып. 1, М., 1973, стр. 3.  
 606\*. *Окунь Л. Б.*, в книге Элементарные частицы. 1-я школа физики ИТЭФ, вып. 1, М., 1973, стр. 26.  
 607\*. *Weinberg S.*, Phys. Rev. Lett., 19, 1264 (1967).  
 608\*. *Salam A.*, в книге Proceedings 8th Nobel Symposium, Stockholm, 1968, p. 367.  
 609\*. *Higgs P. W.*, Phys. Lett., 12, 132 (1964).  
 610\*. *Kibble T. W. B.*, Phys. Rev., 155, 1554 (1967).  
 611\*. *Weinberg S.*, Phys. Rev., D8, 605, 4482 (1973).  
 612\*. *Abers E. S., Lee B. W.*, Physics Reports, 9С, № 1 (1973).

**Дополнительная литература к гл. 6 и 7**

- 613\*. *Широков Ю. М.*, ЭЧАЯ, 4, вып. 1 (1973).  
 614\*. *Bjorken J. D.*, SLAC preprint, 1973.  
 615\*. *Llewellyn Smith C. H.*, CERN preprint, 1974.  
 616\*. *Ascoli G., et al.*, Phys. Rev., D7, 669 (1973).  
 617\*. *Antipov Yu. M., et al.*, Nucl. Phys., B63, 153 (1973).

**Дополнительная литература к гл. 8**

- 618\*. *Kogut J., Susskind L.*, Physics Reports, 8С, 75 (1973).  
 619\*. *Chang C. J., Root R. G., Yan T. M.*, Phys. Rev., D7, 1133, 1147, 1760, 1780 (1973).  
 620\*. *Dicus D. A., Palmer D. R.*, Ann. of Phys., 81, 88 (1973).

<sup>1)</sup> Дополнительная литература добавлена при переводе.—Прим. ред.

## Дополнительная литература к гл. 9

- 621\*. Neveu A., Schwarz J. H., Thorn C. B., Phys. Lett., 35B, 528 (1971)  
 622\*. Halpern M. B., Thorn C. B., Phys. Lett., 35B, 441 (1971).  
 623\*. Halpern M. B., Thourn C. B., Phys. Rev., D4, 3085 (1971).  
 624\*. Bardakci K., Nucl. Phys., B33, 464 (1971).  
 625\*. Ramond P., Phys. Rev., D3, 2415 (1971).  
 626\*. Neveu A., Schwarz J. H., Phys. Rev., D4, 1109 (1971).  
 627\*. Thorn C. B., Phys. Rev., D4, 1112 (1971).  
 628\*. Schwarz J. H., Phys. Lett., 37B, 315 (1971).  
 629\*. Yoshimura M., Phys. Lett., 34B, 79 (1971).  
 630\*. Jen C. L., Kung K., Shen P., Tan C. I., Ann. of Phys., 72, 548 (1972).  
 631\*. Brower R. C., Phys. Rev., D6, 1655 (1972).  
 632\*. Goddard P., Thorn C. B., Phys. Lett., 40B, 235 (1972).  
 633\*. Goddard P., Rebbi C., Thorn C. B., Nuovo Cim., 12, 425 (1972).  
 634\*. Schwarz J. H., Nucl. Phys., B46, 61 (1972).  
 635\*. Schwarz J. H., Phys. Rev., D5, 886 (1972).  
 636\*. Corrigan E., Olive D., Nuovo Cim., 11A, 749 (1972).  
 637\*. Cremmer E., Scherk J., Nucl. Phys., B50, 222 (1972).  
 638\*. Mansouri F., Nambu Y., Phys. Lett., 39B, 375 (1972).  
 639\*. Гедалин Э. В., Вербицкий Ю. Г., ЯФ, 13, 645 (1971).  
 640\*. Лаперашвили Л. В., Сафро М. Г., ЯФ, 13, 867 (1971).  
 641\*. Чикор Ф., ЯФ, 14, 232 (1971).  
 642\*. Гедалин Э. Ф., ЯФ, 15, 143 (1972).  
 643\*. Ансельм А. А., Данилов Г. С., Дятлов И. Т., ЯФ, 15, 150 (1972).  
 644\*. Лаперашвили Л. В., ЯФ, 15, 572 (1972).  
 645\*. Лаперашвили Л. В., Сафро М. Г., ЯФ, 15, 1020 (1972).  
 646\*. Бугрий А. И., Енковский Л. Л., Кобылинский Н. А., ЯФ, 15, 1266 (1972).  
 647\*. Маида С. Н., Франке В. А., ЯФ, 16, 769 (1972).  
 648\*. Демченко Г. П., Кухтин В. В., Струминский Б. В., ЯФ, 16, 926 (1972).  
 649\*. Кудряцев В. А., Левин Е. М., ЖЭТФ, 63, 1978 (1972).  
 650\*. Левин Е. М., УФН, 111, 29 (1973).  
 651\*. Енковский Л. Л., Шелест В. П., УФН, 111, 87 (1973).  
 652\*. Лаперашвили Л. В., Сафро М. Г., ЯФ, 17, 423 (1973).  
 653\*. Бугрий А. И., Енковский Л. Л., Кобылинский Н. А., ЯФ, 17, 614 (1973).  
 654\*. Дятлов И. Т., ЯФ, 17, 1079 (1973).  
 655\*. Локтионов М. В., Нестеров М. М., ЯФ, 17, 1450 (1973).  
 656\*. Маида С. Н., Франке В. А., ЯФ, 18, 623 (1973).  
 657\*. Волков Д. В., Желтухин А. А., Пашнев А. И., ЯФ, 18, 909 (1973).  
 658\*. Енковский Л. Л., Кобылинский Н. А., Мартынов Е. С., ЯФ, 18, 1114 (1973).  
 659\*. Миранский В. А., Струминский Б. В., Шелест В. П., ЯФ, 18, 1122 (1973).  
 660\*. Schwarz J. H., Physics Reports, 8C, № 4 (1973).  
 661\*. Olive D., Scherk J., Phys. Lett., 44B, 296 (1973).  
 662\*. Bugrij A. I., Jenkovsky L. L., Kobylinsky N. A., Lett. Nuovo Chim., 5, 393 (1973).  
 663\*. Brink L., Olive D., Nucl. Phys., B56, 253 (1973).  
 664\*. Goddard P., Goldstone J., Rebbi C., Thorn C. B., Nucl. Phys., B56, 109 (1973).  
 665\*. Corrigan E., Goddard P., Smith, Olive D., Nucl. Phys., B67, 477 (1973).  
 666\*. Brower R. C., Frieman K. A., Phys. Rev., D7, 535 (1973).  
 667\*. Veneziano G., Physics Reports, 9C, № 4 (1974).  
 668\*. Corrigan E., Goddard P., Nucl. Phys., B68, 189 (1974).  
 669\*. Schwarz J., Nucl. Phys., B68, 221 (1974).

## Дополнительная литература к гл. 10

- 670\*. Иоффе Б. Л., УФН, 110, 357 (1973).  
 671\*. Джэкив Р., УФН, 109, 743 (1973).  
 672\*. Дубовик В. М., УФН, 109, 756 (1973).  
 673\*. Зупник Б. М., Иванов Е. А., ЯФ, 17, 586 (1973).  
 674\*. Дао Вонг Дык, ЯФ, 18, 190 (1973).  
 675\*. Волков Д. В., ТМФ, 11, 173 (1972).  
 676\*. Тао Вонг Тук, ТМФ, 13, 75 (1972).  
 677\*. Поляков А. М., Письма ЖЭТФ, 12, 538 (1970).  
 678\*. Ширков Д. В., Nuclear Phys., B62, 194 (1973).  
 679\*. Овсянников Л. В., ДАН СССР, 109, 112 (1956).  
 680\*. Мигдал А. А., Phys. Lett., 37B, 98, 386 (1971).  
 681\*. Wilson K., Phys. Rev., D3, 1818 (1971).  
 682\*. Parisi G., Peliti L., Lett. Nuovo Cim., 2, 627 (1971).  
 683\*. Furlan G., Paver N., Verzegnassi C., Springer Tracts in Modern Phys., 62, 118 (1972).  
 684\*. Lee B. W., Chiral Dynamics, New York, 1972.

- 685\*. Chakrabarti A., Darzens C., Ann. of Phys., **69**, 193 (1972).  
 686\*. Cornwall D. T., Genz H., Fort. Phys., **10**, 559 (1973).  
 687\*. Chounet L. M., Gaillard J. M., Gaillard M. K., Phys. Reports, **4C**, 199 (1973).  
 688\*. Chanowitz M. S., Ellis J., Phys. Rev., **D7**, 2490 (1973).  
 689\*. Uchida T., Suzuki T., Progr. Theor. Phys., **49**, 1298 (1973).  
 690\*. Noga M., Phys. Rev., **D7**, 3050 (1973).  
 691\*. Sun-Sheng Shei, Zee A., Phys. Rev., **D8**, 597 (1973).  
 692\*. Yang T. C., Nuovo Cim., **17A**, 311 (1973).  
 693\*. Грибов В. Н., Лунатов Л. Н., ЯФ, **15**, 781, 1218 (1972).  
 694\*. Боголюбов Н. Н., Владимиров В. С., Тавхелидзе А. Н., ТМФ, **3**, 305 (1972).  
 695\*. Поляков А. М., ЖЭТФ, **61**, 2192 (1971).  
 696\*. Поляков А. М., ЖЭТФ, **59**, 543 (1970).  
 697\*. Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н., ТМФ, **15**, 332 (1973).  
 698\*. Иоффе Б. Л., Письма ЖЭТФ, **18**, 668 (1973).  
 699\*. Ефремов А. В., ЯФ, **19**, 196 (1974).  
 700\*. Биленккая С. И., Биленкий С. М., Казаринов Ю. М., Липидус Л. И., ЖЭТФ, **65**, 1745 (1973).  
 701\*. Miller G., Bloom E. D., et al., Phys. Rev., **D5**, 528 (1972).  
 702\*. Feynman R. P., Photon-Hadron Interactions, 1972.  
 703\*. Carruthers P., Physics Reports, **1C**, № 1 (1971).  
 704\*. Kogut J., Susskind L., Physics Reports, **8C**, № 2 (1973).  
 705\*. Brandt R. A., Wing-Chiu Ng, Phys. Lett., **45B**, 145 (1973).  
 706\*. Kinsley R. L., Nucl. Phys., **B58**, 195 (1973).  
 707\*. Gatto R., Menotti P., Vendramin I., Ann. of Phys., **79**, 1 (1973).  
 708\*. Ellis J., Frishman Y., Phys. Rev. Lett., **31**, 135 (1973).  
 709\*. Cornwall J. M., Tiktopoulos, Phys. Rev., **D8**, 2675, 2687 (1973).  
 710\*. Mc Elhaney R., Tuan S. F., Phys. Rev., **D8**, 2267 (1973).  
 711\*. Gatto R., Journ. Phys., Suppl., **34**, 11 (1973).  
 712\*. Horn D., Journ. Phys., Suppl., **34**, 11 (1973).  
 713\*. Preparata G., Phys. Rev., **D7**, 2973 (1973).  
 714\*. Kogut J., Sinclair D. K., Susskind L., Phys. Rev., **D7**, 3637 (1973).  
 715\*. Broadhurst D. J., Gunion J. F., Jaffe R. L., Phys. Rev., **D8**, 566 (1973).  
 716\*. Litke A., et al., Phys. Rev., Lett., **30**, 1189 (1973).  
 717\*. Bouchiat C., Fayet P., Meyer Ph., Sourlas N., Nucl. Phys., **B51**, 109 (1973).  
 718\*. Altarelli G., Maiani L., Nucl. Phys., **B51**, 509 (1973).  
 719\*. Landshoff P. V., Polkinghorne J. C., Nucl. Phys., **B53**, 473 (1973).  
 720\*. Gourdin M., Nucl. Phys., **B53**, 509 (1973).  
 721\*. Anisovich V. V., Shekhter V. M., Nucl. Phys., **B55**, 455 (1973).  
 722\*. Altarelli G., Maiani L., Nucl. Phys., **B56**, 477 (1973).  
 723\*. Chaichian M., Kitakado S., Zarni Y., Nucl. Phys., **B61**, 77 (1973).  
 724\*. Cleymans J., Sehgal L. M., Nucl. Phys., **B61**, 479 (1973).  
 725\*. Greco M., Nucl. Phys., **B63**, 398 (1973).  
 726\*. Kingsley R. L., Landshoff P. V., Nash C., Polkinghorne J. C., Nucl. Phys., **B65**, 397 (1973).  
 727\*. Грибов В. Н., в книге Элементарные частицы, 1-я школа физики ИТЭФ, вып. 1, М., 1973, стр. 65.

### Дополнительная литература к гл. 11

- 728\*. Furlan G., Paver N., ICTP preprint, 1973.  
 729\*. Gatto R., Summary report at the II. Aix-en-Provence International Conference on Elementary Particles (1973).  
 730\*. Fritzsche H., CERN preprint, 1972.  
 731\*. Ng W.-C., CERN preprint, 1973.  
 732\*. Dicus D. A., Teplitz V. L., Univ. of Rochester preprint, 1973.  
 733\*. Eichten E., Feinberg F., Willemssen S. F., Phys. Rev., **D8**, 1204 (1973).  
 734\*. Brayshaw D. D., Phys. Rev. Lett., **36**, 73 (1976).  
 735\*. Amati D., Bouchiat C., Gervais J. L., Lett. Nuovo Cim., **2**, 399 (1969).

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адемолло 118, 119, 123, 138, 233, 306, 391, 394, 396, 456, 472, 520  
Адлер 140, 144, 146, 149, 150, 151, 188, 191, 192, 198, 233, 258, 273, 345, 381, 382 — 385, 406, 410, 413, 417, 420, 471, 532, 569, 570, 620
- Бардакчи 489  
Белинфанте 319, 538, 543  
Белл 151  
Бете 58, 441, 442, 554  
Бёркен 303, 334, 409, 435, 509, 522, 528, 532, 534, 535, 551, 559, 569, 572, 577, 582, 603, 604, 610, 620, 625  
Битар 534, 535  
Бладман 210  
Блум 595, 632  
Боголюбов Н. Н. 551  
Брандт 522, 555, 605  
Брейт 287  
Бронзан 58  
Бучелла 577, 582  
Вушия 218
- Вагнер 68, 421  
Валека 370  
Вайнштейн 519  
Вайнштейн А. И. 532  
Ватагин 314  
Ватсон 47, 70  
Вейнберг 72, 130, 131, 188, 190, 204, 206, 207, 260, 282, 285, 286, 287, 304, 345, 352 — 354, 382, 385, 412, 416, 421, 423, 472, 552, 578, 602  
Вейсбергер 140, 191, 192, 198, 233, 273, 345, 381, 382 — 385, 410, 413, 417, 420  
Венециано 42, 59, 439, 440, 441, 452, 455, 456, 459, 460, 461, 463, 464, 466 — 468, 472, 475, 479, 482, 483, 488, 489, 500  
Вентцель 93  
Весс 271  
Вигнер 171, 174, 287, 298, 403, 416, 640  
Вик 62, 72  
Вилларс 129  
Вильсон 552 — 555, 605  
Вирасоро 456, 502  
Волков Д. В. 68
- Гатто 118, 119, 123, 138, 233, 306, 391, 394, 396, 520, 528, 531
- Гелл-Манн 15, 22, 68, 102, 104, 107, 118, 125, 135, 136, 148, 149, 152, 157, 166, 172, 182, 184, 226, 278, 302, 308, 370, 396, 403, 411, 412, 421, 424, 427, 509, 511, 515, 519, 529, 545, 605  
Герасимов С. Б. 184, 185  
Глэшоу 401, 403, 404, 531  
Голдбергер 68, 142 — 145, 148 — 150, 153, 156, 182, 184, 190 — 192, 196, 198, 215, 255, 256, 258, 268, 275, 295, 297, 306, 346, 382, 430, 515, 522, 544  
Голдстоун 254, 255, 389  
Гордон 489  
Горовиц 582  
Грибов В. Н. 51, 68  
Грисару 68  
Гросс 569 — 571, 605, 620
- Дашен 226, 370, 411, 412, 424, 427, 519  
Де Сварт 169, 173  
Джакив 141, 532, 539, 605, 606  
Ди Джиакомо 500  
Джилман 632  
Джонс 58  
Джонсон 334, 509, 522, 528, 532, 535, 551, 582, 604, 610  
Дикус 606  
Дирак 603, 640  
Долен 449, 450  
Домби 132  
Домокош 54, 57, 58, 70, 565  
Дрелл 184, 185, 564, 577, 603, 605
- Зоммерфельд 47, 70  
Зумино 130, 271
- Иги 44  
Иден 42  
Иоффе 532
- Кабиббо 118, 135, 137 — 140, 234, 406 — 408, 518, 528, 530, 582  
Каварабаяши 193  
Казимир 57, 72  
Каллан 199 — 204, 271, 310, 517, 518, 539, 552, 570, 571

- Карлсон 45, 46, 52  
 Киккава 502  
 Ким 308, 515, 549  
 Коба 475  
 Когут 435  
 Коллинз 54, 68, 445  
 Кондон 168  
 Корнуэлл 605  
 Коттингем 578  
 Коулмен 371, 401, 403, 404, 531, 539  
 Кролл 132, 134, 195, 197  
 Кун 16, 281  
 Куо 58
- Ландсхоф 42, 564  
 Леви 118, 148, 149, 152, 564, 603, 605  
 Леман 39, 282 — 284, 290, 334, 350, 524  
 Ли 130  
 Линкин 167  
 Лавлас 471, 472  
 Лоу 182, 198, 324, 325, 331, 332 — 334, 346, 348, 355, 427, 430, 509, 522, 528, 532, 535, 551, 578, 582, 604, 610  
 Льюэллин-Смит 569, 576, 595, 620  
 Любанский 321
- Ма 435  
 Майани 528  
 Мак-Дауэлл 68 — 70  
 Мандельстам 31 — 35, 37, 40 — 42, 50, 55, 62, 442, 443, 469, 489  
 Матур 199, 201  
 Мейерт 218  
 Миллс 13, 154, 246, 274  
 Мюллер 35
- Намбу 141, 142, 198, 310, 314, 389, 489  
 Нееман 87, 582  
 Нётер 90, 91  
 Нильсен 475
- Окубо 199, 201, 396, 403, 515  
 Окунь Л. Б. 68, 96  
 Олив 42  
 Оукс 302, 308, 509, 511, 515, 519, 529
- Пандит 199, 201  
 Патон 470  
 Паули 93, 95, 129, 321  
 Подкинхорн 42, 564  
 Померанчук И. Я. 60, 68, 190, 383, 408, 447, 451, 452, 456, 471, 503, 566, 567  
 Препарата 522, 532, 555, 605  
 Пэшоэ 577
- Радикати 234, 406 — 408  
 Рака 166  
 Ребби 80
- Редже 38, 42, 47, 49 — 58, 60, 62 — 65, 68, 71, 76, 100, 190, 231, 237, 240, 345, 363, 367, 386, 388, 398, 439, 440 — 442, 526, 566, 571, 574, 579, 599, 631, 633  
 Рейхе 16, 281  
 Реннер 302, 308, 509, 511, 515, 519, 529  
 Риазуддин 193  
 Рознер 453  
 Рубинштейн 456  
 Рудерман 132, 134, 195, 197
- Саито 183  
 Саката 102  
 Сакита 502  
 Сакураи 93, 153  
 Сартори 528, 531  
 Сегре 341, 370  
 Серторио 500  
 Симанчик 290, 552  
 Сквайрс 54, 68, 445  
 Соллитер 58, 441, 442, 554  
 Сопер 435  
 Сузуки 193  
 Сускинд 489
- Такахашаи 115, 176  
 Теплиц 606  
 Тирринг 181, 182, 184, 551  
 Толлер 54, 57, 58, 72, 466  
 Томозава 188, 304, 345, 382  
 Тонин 528, 531  
 Томас 16, 281  
 Трейман 142, 143 — 145, 148, 150, 153, 156, 190, 191, 192, 196, 198 — 204, 215, 255, 256, 258, 268, 275, 295, 297, 306, 310, 346, 382, 515, 517, 518, 522, 544, 578, 605  
 Тунг 532
- Уорд 13, 18, 115, 151, 175, 176, 177, 179 — 181, 185, 186, 189, 220 — 222, 225, 229, 234, 236, 240, 242, 271, 281, 282, 346, 353, 509, 534, 550, 585, 586, 626, 629
- Фаязуддин 193  
 Фейнман 61, 179, 246, 271, 367, 430, 434, 640  
 Фридман 595  
 Фрич 605, 634  
 Фришман 555, 605  
 Фройнд 451, 503  
 Фруассар 51, 60, 61, 65  
 Фубини 123, 226, 314, 370, 412, 489, 500  
 Фурлан 123
- Хагедорн 495, 504  
 Харари 451, 453, 503, 577, 578, 579  
 фон Хиппель 308, 515, 549  
 Хирн 184, 185  
 Хорн 449, 450  
 Хури 42, 50, 52, 54, 57, 58, 64, 65, 67, 231, 234, 235, 236, 238, 240, 242, 534, 535



Цвейг 102  
Циммерман 290

Шорт 564  
Шорли 168  
Шраувер 310

Чан 470  
Чанг 435  
Челлен 282 — 284, 350, 524  
Чу 198

Эккарт 171, 174, 298, 403, 41  
Элитцур 577

Шарп 68, 421  
Шварц 445  
Швебер 430  
Швингер 128, 284  
Ширков Д. В. 551  
Шмид 449 — 452, 461

Юнг 160, 161

Якоб 61  
Ян 564, 577, 603, 605  
Янг 13, 154, 246, 274

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адемолло — Гатто теорема 118, 119, 122, 123, 138, 233, 391, 394, 396, 520
- Адлера условие согласованности 144, 146, 189, 258, 471
- Алгебра зарядов и токов 119
- на световом конусе 602, 622, 634
  - полей 129, 131, 179, 246, 277, 278, 285, 358
  - $SU(2)$  99, 125
  - $SU(2) \otimes SU(2)$  88, 100, 125, 383
  - $SU(3)$  156
  - $SU(3) \otimes SU(3)$  106, 125, 511
  - $I$ -спиновая 167
  - $V$ -спиновая 167
  - $U$ -спиновая 167
  - $U(2)$  375
  - $U(3) \otimes U(3)$  375
  - $U(6) \otimes U(6)$  374
  - $U(12)$  375
- Амплитуда рассеяния 27, 32
- — аналитические свойства 30, 35, 38, 41, 42
  - — асимптотическое поведение 40, 42, 47, 65, 226, 227, 240
  - — пион — нуклон 62, 68, 86, 446
  - —  $\rho$ -мезон — пион 66, 81, 83
  - — скаляр — вектор 81
  - — частиц со спином 61, см. также Производные амплитуды
- Аналитичность второго рода 42, 48, 49, 234, 241, 444
- Асимптотические правила сумм 559, 565, 569, 604, 611
- Бесконечно большого импульса система (предел) 341, 363, 375, 391, 397, 412, 427, 430, 435, 573, 603, 604, 608, 622, 626, 631, 640
- Бете — Солпитера уравнение 58, 441, 554
- Беспетлевые диаграммы, см. Диаграммы типа деревьев
- Билокальный оператор 556, 607, 621, 626, 628, 632, 642
- Брейта порог 311
- система отсчета 182, 195, 311, 341
- Бутстрап дуальный 439, 441, 455
- Бьёркена — Джонсона — Лоу (БДЛ) теорема (предел) 334, 523, 533, 565, 568, 604
- Бьёркена неравенство 409
- Ватсона — Зоммерфельда преобразование 47, 70
- Венециано амплитуда 440, 452, 463, 467
- — обобщенная 483
  - модель 439, 440, 460, 464, 488, см. также Дуальная резонансная модель
- Вейнберга соотношение 287, 421
- Вигнера — Экарта теорема 171, 174, 403, 416
- Воскрешение правил сумм 366, 367, 375, 414
- Вырождение уровней 51, 490, 495
- — обменное 453
- Гелл-Манна — Леви соотношение пропорциональности 148, 152, Гелл-Манна матрицы 22, 157
- Гипотеза о сохранении векторного тока (СВТ) 135 — 137
- о частичном сохранении аксиального тока (ЧСАТ) 116, 141, 147, 149, 155, 209, 249, 258, 275, 302, 310, 346, 381, 395
  - о частичном сохранении векторных токов (ЧСВТ) 109
- Глубокоупругое рассеяние 406, 558, 560, 563, 573, 575, 576, 595
- Глюоны 105, 107, 575, 643, 644
- Голдбергера — Треймана соотношение 143, 144, 148, 150, 153, 156, 190, 191, 196, 255, 268, 275, 295, 306, 346, 382
- Голдстоуна бозон 256, 297, 306, 363, 544
- теорема 254
- Головастиковый процесс 250, см. также Диаграмма типа головастика
- Градиентные члены 128, 129, 177, 630, см. также Швингеровские члены
- Грибова — Фруассара формула 51
- Группа  $O(3)$  55, 86
- $O(4)$  57, 87, 246
  - $SU(2)$  101, 122
  - $SU(3)$  101, 122, 156
  - $SU(3) \otimes SU(3)$  122, 126, 511
- Дашена — Гелл-Манна программа 411, 412, 424
- Де Сварта фазовое соотношение 169, 173
- Диаграмма типа головастика 250, 522, 531
- — — обобщенная 503
- Диаграммы типа деревьев 245, 250, 271, 272, 273

- Z-диаграммы** 289, 296, 297, 304, 306, 309, 338, 341, 343, 345, 363, 369, 370, 624, 628  
**Дилатационный ток** 540, 542, 550  
**Дилатон** 545, 550  
**Дирака уравнение** 24  
**Дисперсионные соотношения** 39 — 43, 443, 430  
**Длины рассеяния**  
 — — мезонов на барионах 308  
 — — пионов на нуклонах 146, 189, 307  
 — — пионов на пионах 206, 260, 309  
 — — пионов на произвольной мишени 189  
**Доминантность векторных мезонов** 129, 246, 275, 287, 313  
 **$\rho$ -доминантность** 154, 155, 193, см. также **Пионная доминантность**  
**Домокоша формулы** 58, 70  
**Дочерние траектории** 56 — 58, 62, 65, 70, 439, 443, 456, 460, 466  
**Дуальная резонансная модель** 440, 450, 460  
 — — — амплитуды 461, 465, 479  
 — — — операторный метод 490  
 — — — структура уровней 493  
 — — — унитаризация 499, 502  
 — — — факторизация 489  
**Дуальность** 438, 439, 446, 450  
 — — — планарная 455, 462  
**Дуальные диаграммы** 441, 453  
 — — — петлевые 502  
 — — — планарные 454, 462, 475  
**Духовые состояния** 58, 59, 467, 497, 498  
  
**Заряд аксиальный** 105  
 — в лагранжевом формализме 90  
 — и группа Пуанкаре 292  
 — и четность 294  
 — киральный 106  
  
**Инклюзивные реакции** 35, 408, 501, 557  
**Интерполирующие функции** 45, 51, 64, 228, 234, 240, 242  
**Интерференционная модель** 439, 449  
  
**Каварабаяши — Сузуки — Фаязуддина — Рязуддина (КСФР) соотношение** 193, 421  
**Калибровочная инвариантность** 178, 180, 182, 183, 197  
**Калибровочные преобразования второго рода** 274, 275  
 — поля 277, 279  
**Каллана — Греймана — Матура — Окубо — Пандита (КТМОП) соотношение** 199, 201, 205, 310, 517  
**Канал** 30  
**Карлсона теорема** 45  
**Квантование на световом конусе** 603, 640  
**Кварки** 102  
**Кварковая модель** 101, 108, 109, 140, 278, 285, 568, 612, 634  
**Кварк-партоновая модель** 576, 621  
  
**Кинематические сингулярности** 35, 38  
**Киральная симметрия (инвариантность)** 99, 245 — 247, 253, 255, 273, 279, 510, 520, 548  
 — — — нелинейная реализация 268  
 — — — спонтанное нарушение 245, 252, 253, 255, 256, 259  
**Кирально-инвариантный лагранжиан** 245, 247, 252, 263, 266, 269, 279  
**Киральные преобразования** 106, 245, 247, 261  
**Кластерное разложение** 290, 300, 306, 339, 369  
 — — — ковариантная форма 335  
**Клейна — Гордона уравнение** 24  
**Ковариантная производная** 262, 263, 269, 274, 279  
**Комптоновское рассеяние** 180, 182  
**Конспирация** 71  
**Контактные члены, см.  $\Gamma$ -члены**  
**Конформные преобразования** 535, 587  
**Коулмена — Глэшоу соотношение** 403  
  
**Левый заряд** 99, 124, 428  
**Лоренца группа** 57, 71, 86  
**Лоренцев поворот** 86, 318  
 — — — киральный 261  
**Лоу представление** 324, 325, 331, 332, 346, 348, 350, 355, 427  
  
**Магнитные моменты барионов** 405  
**Мак-Дауэлла симметрия** 69  
**Мандельштама переменные** 31  
 — плоскость 32  
 — представление 40, 443, 469  
**Массовые формулы**  
 — — в нарушенной  $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии 416  
 — — в нарушенной  $SU(3)$ -симметрии 395  
 — — Гелл-Манна — Окубо 396, 515  
 — — для барионов 400  
 — — для псевдоскалярных мезонов 397  
 — — обобщенные 420, см. также **Электромагнитное расщепление масс**  
**Масштабная инвариантность** 536, 544, 564, 605, 616  
 — — — нарушение 545, 548  
 — — — и поведение на малых расстояниях 533  
 — — — размерность 536  
**Масштабные преобразования** 535, 540, 587  
**Матрица  $S$**  29, 32, 175, 263, 272, 430  
 **$\sigma$ -мезон** 253, 254, 258, 347,  
**Метод жестких пионов** 246  
**Модель Гелл-Манна, Окса и Реннера** 302, 308, 511, 519, 529  
 — Гелл-Манна, Шарпа и Вагнера 68, 421  
 — полюсов Редже 184, 345, 363, 386, 388, см. также **Полюса Редже**  
 — Сакаты 102  
 **$\sigma$ -модель** 149, 151, 245, 249, 258, 347, 514  
 — — — великая 259, 270  
**Мультипериферическая модель** 564  
**Мюновое число** 95

- Нарушенная симметрия 389, 511, 537, 546, 548
- Насыщение одновременных коммутаторов 281, 282
- — вклады класса I 291, 296, 338, 339
- — вклады класса II 291, 296, 338, 339, 341, 345, 347, 368
- — — несвязный вклад 288 — 290
- — — связный вклад 290
- — — Z-вклад, 292, 338, см. также Z-диаграммы, Кластерное разложение
- Нелептонные слабые распады 209
- — — гиперонов 209, 521
- — — каонов 211
- Низкоэнергетические теоремы (пределы) 181, 186, 197, 237, 308, 346, 515, 550, см. также Теоремы о мягких пионах
- Общие правила сумм алгебры токов 226, 237, 365, 379, 406, 412, 628
- Оператор спина 422
- Оптическая теорема 27, 34
- — обобщенная 35
- Партоновая модель 563, 564, 571, 603, 611, 622
- Партоны 558
- Паули — Любанского вектор 321
- Паули матрицы 21
- Перекрестная симметрия 33
- Пионная доминантность 149, 155, 275, 292
- Плохие операторы 370 — 372, 626, 628
- Полулептонные слабые взаимодействия 112
- — распады 116, 135, 138, 140, 309, 394
- Полюса Редже 49, 52, 65, 190, 237, 240, см. также Модель полюсов Редже
- Толлера 57, 58, 72, 466
- Хури 52, 57, 58, 64, 65
- σ-поля 247, 250, 252
- Померанчука полюс 60, 184, 190, 451, 452
- Померанчука теорема 383, 408
- Померанчука траектория 60, 447, 456
- Правила сумм
- — Адлера 569, 620
- — Адлера — Вейсбергера 191, 198, 233, 345, 381, 384, 406, 413
- — Блума — Джилмана 632
- — Бьёркена 569, 620
- — Вейнберга 286, 352
- — Гросса — Льюэллина-Смита 569, 620
- — Дашеца — Фубини — Гелл-Манна 226, 412
- — для фоторождения 198
- — для электророждения 387
- — Дрелла — Хирна — Герасимова 185
- — и алгебра на световом конусе 622
- — Кабиббо — Радикати 234, 407
- — Каллана — Гросса 571
- — Льюэллина-Смита 576
- Правила сумм при конечной энергии (ПСКЭ) 44, 49, 439, 444 — 449, 455 — 457, 459, 460
- — Томаса — Райхе — Куна 281
- — Челлена — Лемана 283, см. также Асимптотические правила сумм, Общие правила сумм алгебры токов, Сверхсходящиеся правила сумм
- Правый заряд 99
- Предел БДЛ, см. Бьёркена — Джонсона — Лоу теорема — мягких пионов, см. Теоремы о мягких пионах
- Предки 466
- Представление Челлена — Лемана 434, 524
- Принцип максимальной аналитичности 30, 35, 40
- — — второго рода 44, 46, 48
- — минимального электромагнитного взаимодействия 111, 113, 154, 274
- — перестановки 30, 32, 438
- Проективная инвариантность 477, 497, 498, 506
- Проективные преобразования 475
- Проектирующий оператор 72
- Производные амплитуды 63, 66, 79, 227, 238
- Пуанкаре группа 292, 318, 538
- — малая 55, 57, 321
- — представления 320, 322
- Редже метод 51
- Сателлиты 52, 65
- Сверхсильные взаимодействия 101
- Сверхсходимости соотношения (условия) 40, 229, 243, 354, 379, 401, 444, 445, 627
- Сверхсходящиеся правила сумм (СПС) 62, 67, 228, 231, 368, 423
- Сигнатура 53, 58, 445
- Симметрия  $SU(2)$  390
- $SU(2) \otimes SU(2)$  111, 142, 412, 510
- $SU(3)$  140, 390, нарушение 119, 122, 138, 140, 390
- $SU(3) \otimes SU(3)$  110, 511
- $SU(6)$  418
- Скалярноподобные амплитуды, см. Производные амплитуды
- Скейлинг 510, 552, 558, 576, 597, 603, 611, 614, 616
- Слабый магнетизм 136
- Спиральность 322
- Спиральные амплитуды 62
- Спонтанное нарушение симметрии 254, 258, 259, 298, 389, см. также Киральная симметрия, спонтанное нарушение
- Статическая модель 317
- Структурные функции 407, 408, 558, 568, 574, 596, 605, 633
- Тахион 499, 505, 506
- Твист оператора 556, 632
- Тензор энергии — импульса 537, 538
- — Белинфанте 319, 538
- — новый 539

- Теорема Кролла — Рудермана 132, 134, 197  
 — Нётер 90  
 — о конечном состоянии 36  
 — Фруассара 60  
 Теоремы о мягких пионах 155, 186, 187, 189, 190, 245, 350, 353  
 Тирринга предел 181 — 183  
 Ток адронный 100  
 — — слабый 124  
 — аксиальный 105  
 — в лагранжевом формализме 90  
 — кварковый 109  
 — киральный 106  
 — слабый лептонный 95  
 — слабый нейтральный 99  
 — сохраняющийся 91  
 — частично сохраняющийся 98  
 — электромагнитный 93  
 Томозавы — Вейнберга формула 189, 304, 345  
 Траектории Редже 53, 54, 56, 58, 64, 367, 442  
 — — наклон 443
- Угол Кабиббо 118, 121, 137, 138, 530  
 Уклонение 38, 56, 57, 71  
 Умеренно сильные взаимодействия 101, 131, 390, 401  
 Универсальность 132, 137, 139, 140  
 —  $\rho$ -взаимодействия 154, 155, 193, 194, 246, 274  
 — мюон-электронная 96  
 — слабых взаимодействий 115, 120, 124  
 — электромагнитных взаимодействий 113  
 Унитарность 27, 33, 35, 53  
 — упругая 34, 239, 307  
 Уорда тождества 151, 176, 177, 179, 180, 185, 220, 222, 229, 234, 240, 272, 281, 346, 353  
 Уорда — Такахаши тождество 115, 176  
 Условие углов 426
- Феноменологические лагранжианы 271 — 273  
 Формфактор пиона 133, 232  
 Формфакторы нуклона 133, 136, 313, 314  
 Фундаментальная длина, см. Хагедорна температура  
 Фундаментальное представление [группы  $SU(3)$ ] 157
- Хагедорна температура 495, 504  
 Хорошие операторы 370, 371, 372, 631  
 Хури метод 42  
 Хури траектории 64  
 $\sigma$ -член 302, 303, 308, 316, 516  
 $\Upsilon$ -члены 179, 272, 360, 523, 565
- Чу — Голдбергера — Лоу — Намбу инварианты 198
- Швингеровские члены 130, 131, 179, 222, 277, 284, 285, 287, 317, 326, 352, 357, 358, 358, 367, 535, 629, 637
- Эвклидова группа 317, 323  
 Экзотические состояния 393, 398, 452  
 Электромагнитное расщепление масс 353, 401, 521, 525, 577  
 Электронное число 95
- Юнга схемы 160, 165
- Янга — Миллса поля 154  
 Янга — Миллса теория 246

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редакторов перевода . . . . .	5
Предисловие авторов . . . . .	9
Введение . . . . .	11
Обозначения и определения . . . . .	20
<b>Глава 1. Введение в теорию сильных взаимодействий . . . . .</b>	<b>29</b>
§ 1. Введение . . . . .	29
§ 2. Двухчастичная задача, общие замечания . . . . .	31
§ 3. Унитарность . . . . .	33
1. Теорема о конечном состоянии (36).	
§ 4. Некоторые свойства разложения по парциальным волнам . . . . .	36
§ 5. Аналитические свойства амплитуды рассеяния . . . . .	38
§ 6. Аналитичность второго рода . . . . .	42
§ 7. Полюса и асимптотическое поведение . . . . .	46
§ 8. Полюса Редже . . . . .	50
§ 9. Дочерние траектории . . . . .	54
§ 10. Сингулярности в плоскости углового момента . . . . .	59
§ 11. Частицы со спином . . . . .	61
1. Пион-нуклонное рассеяние и сверхсходимость (62). 2. $\rho$ -рассеяние и сверхсходимость (65). 3. Конспирация в пион-нуклонном рассеянии и траектории Редже в случае полуцелого спина (68).	
Приложение I. Проектирующий оператор в случае частиц с любым спином . . . . .	72
Приложение II. Метод определения инвариантных амплитуд для процесса рассеяния $2 \rightarrow 2$ в случае частиц с любым спином . . . . .	76
1. Скалярно-векторное рассеяние (вне массовой поверхности) (81).	
2. Скалярно-векторное рассеяние (на массовой поверхности) (83).	
3. Два скаляра — в два вектора (84). 4. Пион-нуклонное рассеяние (85) . . . . .	
Приложение III. Однородная группа Лоренца . . . . .	86
<b>Глава 2. Слабые и электромагнитные токи . . . . .</b>	<b>89</b>
§ 1. Введение . . . . .	89
1. Токи и заряды при лагранжевом методе (89).	
§ 2. Лептонные токи . . . . .	92
1. Электромагнитный лагранжиан и свойства инвариантности (93). 2. Полный лептонный лагранжиан (94). 3. Слабые лептонные токи (97).	
§ 3. Адронные токи и кварковая модель . . . . .	100

	1. Взаимодействие адронов и лептонов (100). 2. Кварковая модель (201). 3. Электромагнитные и слабые взаимодействия в рамках кварковой модели (114).	
§ 4.	Алгебра зарядов и токов . . . . .	119
	1. Зарядовые коммутаторы и универсальность (120). 2. Коммутаторы токов и зарядов (125).	
§ 5.	Сохраняющиеся и частично сохраняющиеся векторные токи . . . . .	131
	1. Электромагнитные токи (131). 2. Слабые векторные токи (135)	
§ 6.	Аксиальные токи . . . . .	140
	1. Идеализированный случай пиона нулевой массы (142). 2. Обобщение на случай физических пионов: гипотеза ЧСАТ (147). 3. Обобщение на случай странных аксиальных токов (152).	
§ 7.	Доминантность векторных мезонов . . . . .	153
	Приложение I. Некоторые сведения о группе $SU(3)$ . . . . .	156
	1. Группа $SU(3)$ и ее алгебра Ли (156). 2. Представления группы $SU(3)$ (158). 3. Произведение представлений (164). 4. Модифицированная форма алгебры $SU(3)$ (166). 5. Классификация базисных состояний (168). 6. Матричные элементы операторов сдвига между собственными состояниями $I$ -спина (169). 7. Коэффициенты Клебша — Гордана группы $SU(3)$ (171). 8. Регулярное представление, соотношение между «физическими» и «нейтральными» базисными состояниями (172).	
Глава 3.	Тождества Уорда и низкоэнергетические пределы . . . . .	175
§ 1.	Введение . . . . .	175
	1. Тождество Уорда (176). 2. Калибровочная инвариантность и швингеровские члены (пример) (177).	
§ 2.	Низкоэнергетические пределы в электродинамике . . . . .	180
	1. Комптоновское рассеяние на бесспиновых частицах (180) 2. Комптоновское рассеяние при низких энергиях на мишенях с произвольным спином (182). 3. Правило сумм Дрелла — Хирна — Герасимова (184).	
§ 3.	Пион-нуклонное рассеяние при низких энергиях . . . . .	185
	1. Сравнение с экспериментом (188). 2. Рассеяние мягких пионов на произвольной мишени (189). 3. Теоремы о мягких пионах и правила сумм (190).	
§ 4.	Теорема о мягких пионах для распада $\rho \rightarrow 2\pi$ . . . . .	192
§ 5.	Общий случай процессов с одним мягким пионом во внешнем поле . . . . .	194
	1. Фоторождение одного пиона на нуклонах (195). 2. Низкоэнергетические теоремы и правила сумм для фоторождения (198). 3. $K_{13}$ -распад (199). 4. $K_{14}$ -распад (200).	
§ 6.	Два мягких пиона во внешнем поле . . . . .	207
§ 7.	Нелептонные распады гиперонов . . . . .	208
	1. Нелептонные распады гиперонов (209). 2. Нелептонные распады $K$ -мезонов (211).	
§ 8.	Проблема $\eta \rightarrow 3\pi$ . . . . .	218
Глава 4.	Алгебра токов и дисперсионные правила сумм . . . . .	220
§ 1.	Введение . . . . .	220
§ 2.	Тождества Уорда . . . . .	221
§ 3.	Правила сумм . . . . .	223
§ 4.	Асимптотическое поведение амплитуд слабого взаимодействия . . . . .	227
§ 5.	Сверхсходимость и правила сумм, следующие из алгебры токов . . . . .	228
§ 6.	Особенности формфакторов и расходимость правил сумм . . . . .	231
§ 7.	Частные кинематические конфигурации импульсов; предел точной симметрии и поправки к нему . . . . .	232

§ 8. Функции, интерполирующие парциальные волны, и тождества алгебры токов . . . . .	234
1. Особенности интерполирующих функций (237).	
§ 9. Роль возможных переджизванных адронов . . . . .	241
<b>Глава 5. Феноменологические лагранжианы и киральная симметрия . . . . .</b>	<b>245</b>
§ 1. Введение . . . . .	245
§ 2. Линейная реализация киральной симметрии . . . . .	246
1. $\sigma$ -модель (247). 2. Условие частичного сохранения аксиального тока (ЧСАТ) (249). 3. Головастиковый механизм (250). 4. «Спонтанное» нарушение киральной симметрии (252). 5. Соотношение Голдбергера — Треймана (255). 6. Другие свойства $\sigma$ -модели (256).	
3. Нелинейная реализация киральной симметрии . . . . .	259
1. Нелинейная $\sigma$ -модель (259). 2. Киральный лоренцев поворот (261). 3. Ковариантная производная и определение пионного поля (262). 4. Обобщение на другие поля (264). 5. Кирально-инвариантные лагранжианы (266). 6. Нелинейные реализации киральной симметрии (268). 7. Древовидные диаграммы и асимптотика (271).	
§ 4. Векторные поля и токи . . . . .	273
1. Векторные калибровочные поля (273). 2. Алгебра полей (276). 3. Аксиальные токи и мезоны (277).	
Приложение I . . . . .	279
<b>Глава 6. Правила сумм, следующие из одновременных коммутаторов . . . . .</b>	<b>281</b>
§ 1. Введение . . . . .	281
§ 2. Вакуумные средние значения . . . . .	282
1. Правило сумм Челлена — Лемана (282). 2. Коммутаторы токов и швингеровские члены (283). 3. Правила сумм Вейнберга (285).	
§ 3. Общая структура суммы по полной системе промежуточных состояний . . . . .	287
1. Существование несвязных вкладов в сумму по полной системе промежуточных состояний (287). 2. Кластерное разложение (289).	
§ 4. Насыщение зарядовых коммутаторов . . . . .	292
1. Операторы заряда и группа Пуанкаре (292). 2. Случай сохраняющихся токов (295). 3. Одновременные коммутаторы и теория низкоэнергетических пионов (298).	
§ 5. Рассеяние пионов . . . . .	302
1. Общие замечания (302). 2. Формулы Томозавы — Вейнберга (304). 3. Мезон-барионное рассеяние (307). 4. Пион в качестве мишени (309).	
§ 6. Рождение пионов . . . . .	309
1. Электророждение пионов (310). 2. Рождение пионов в слабых взаимодействиях (316).	
§ 7. Обобщение на случай движущихся пионов . . . . .	316
Приложение I. Простые свойства неоднородной группы Лоренца . . . . .	317
<b>Глава 7. Роль лоренцевой инвариантности . . . . .</b>	<b>324</b>
§ 1. Введение . . . . .	324
§ 2. Лоренц-инвариантность и одновременные коммутаторы . . . . .	324
1. Ограничения на высшие коммутаторы (324). 2. Ковариантность хронологического произведения (326).	
§ 3. Полнота системы промежуточных состояний и зависимость правил сумм от системы отсчета . . . . .	327



1. Представление матричных элементов одновременного коммутатора (327). 2. Зависимость правил сумм от системы отсчета и контур интегрирования (329). 3. Зависимость правил сумм от системы отсчета и высшие коммутаторы (330). 4. Представление Лоу для запаздывающих амплитуд (331). 5. Высокочастотный предел для запаздывающих амплитуд (334)	
§ 4. Ковариантная форма кластерного разложения . . . . .	335
§ 5. Пример коммутатора аксиальных зарядов . . . . .	341
§ 6. Хронологические произведения и низкоэнергетические пределы	346
 Приложение I. Токи и ковариантность . . . . .	 350
1. Введение (350). 2. Ковариантность вакуумного среднего $R$ -произведения двух токов: представление Челлена — Лемана (350). 3. Представление Лоу для токовых амплитуд (355). 4. Коммутаторы токов и лоренц-ковариантность (356). 5. Ковариантность хронологического произведения двух токов и пвингеровские члены (357).	
 Приложение II. Компенсация бесконечностей в соотношении (7.126)	 360
 Глава 8. Предел бесконечно большого импульса . . . . .	 362
§ 1. Система отсчета бесконечно большого импульса . . . . .	362
1. Введение (362). 2. Общее правило сумм алгебры токов (363). 3. Условия существования правил сумм (366). 4. Хорошие и плохие операторы (371).	
§ 2. Спин $1/2$ . . . . .	375
§ 3. О приложениях . . . . .	379
§ 4. Проблемы ЧСАТ . . . . .	381
1. Правило сумм Адлера — Вейсбергера (381). 2. Правило сумм Адлера — Вейсбергера для бозонных мишеней (384). 3. Симметрия $SU(3) \otimes SU(3)$ (386). 4. Правила сумм для электророждения (387).	
§ 5. Алгебра токов и проблемы симметрии $SU(3)$ . . . . .	389
1. Мультиплетная структура и предел бесконечно большого импульса (389). 2. Нарушение симметрии $SU(3)$ и ренормировочные константы (392). 3. Формулы масс в нарушенной $SU(3)$ -симметрии (395). 4. Симметрия $SU(3)$ и электромагнитные взаимодействия (401).	
§ 6. Проверка локальных коммутационных соотношений . . . . .	405
1. Правило сумм Кабиббо — Радикати (406). 2. Предсказания для высокоэнергетического рассеяния электронов и нейтрино (408).	
§ 7. Насыщение и алгебраическая структура правил сумм . . . . .	410
1. Правила сумм для коммутаторов $[Q, Q]$ и $[Q, D]$ (412). 2. Алгебраическая реализация симметрии $SU(2) \otimes SU(2)$ (415). 3. Дополнительные правила сумм (422).	
§ 8. Заключительные замечания об алгебре плотностей . . . . .	424
1. Программа Дашена — Гелл-Манна (424).	
§ 9. Система бесконечно большого импульса, дисперсионные соотношения и теория возмущений . . . . .	427
1. От представлений Лоу к дисперсионным соотношениям с фиксированной массой (427). 2. Теория возмущений при бесконечной энергии (430).	
 Приложение I. Матричные элементы в пределе бесконечно большого импульса . . . . .	 435

Глава 9. Новый подход к сильным взаимодействиям: дуальность . . . . .	438
§ 1. Введение . . . . .	438
§ 2. Правила сумм при конечной энергии и дуальность . . . . .	441
1. Растущие траектории (441). 2. Правила сумм при конечной энергии (444). 3. Применения правил сумм при конечной энергии (446). 4. Дуальность (449). 5. Отсутствие экзотических резонансов и обменное вырождение (452). 6. Дуальные диаграммы (453). 7. Бутстрап, основанный на дуальности и правилах сумм при конечной энергии (455).	
§ 3. Модель Венециано . . . . .	460
1. Дуальная резонансная модель (460). 2. Амплитуда Венециано (463). 3. Структура резонансов (466). 4. Асимптотические свойства (467). 5. Применение к псевдо-пионному рассеянию (469). 6. Свойства симметрии амплитуды с четырьмя внешними линиями (473). 7. Четырехточечная амплитуда в $\omega$ форме, инвариантной относительно проективных преобразований (475).	
§ 4. Дуальные модели: свойства амплитуд и проблемы теории . . . . .	479
1. Построение дуальной резонансной теории (479). 2. Дуальность в многочастичных процессах (480). 3. Обобщенные амплитуды Венециано (483). 4. Свойства дуальных резонансных амплитуд (485). 5. Факторизация и операторный метод (489). 6. Структура уровней (493). 7. Выход за рамки приближения бесконечно узких резонансов (499). 8. Заключение (503).	
Приложение I. Проективная инвариантность дуальных амплитуд общего вида . . . . .	506
Глава 10. Нерешенные проблемы и последние достижения в теории токов . . . . .	509
§ 1. Введение . . . . .	509
§ 2. $SU(2) \otimes SU(2)$ и $SU(3) \otimes SU(3)$ как группы симметрии сильных взаимодействий . . . . .	510
1. Общие соображения (510). 2. Модель Гелл-Манна, Оукса и Реннера (511). 3. Проверка модели (514). 4. $K_{13}$ -распад (517). 5. Заключительные замечания (521).	
§ 3. Предел Бьёркена — Джонсона — Лоу и коммутаторы токов . . . . .	522
1. Общие соображения (522). 2. Электромагнитное расщепление масс (525). 3. Высшие порядки по слабым взаимодействиям и угол Кабиббо (528). 4. Предел Бьёркена — Джонсона — Лоу и теория возмущений (532).	
§ 4. Тензор энергии-импульса, масштабные преобразования и масштабная инвариантность . . . . .	535
1. Масштабные преобразования (535). 2. Лагранжев метод и тензор энергии-импульса (537). 3. Генератор масштабных преобразований (540). 4. Масштабная инвариантность и скалярные мезоны (544). 5. Масштабные преобразования и группа $SU(3) \otimes SU(3)$ (547). 6. Масштабная инвариантность и асимптотическое поведение в теории поля (550). 7. Масштабная инвариантность и поведение на малых расстояниях (553).	
§ 5. Глубоконеупругое лептон-нуклонное рассеяние . . . . .	557
1. Введение (557). 2. Скейлинг Бьёркена (559). 3. Скейлинг: теоретические соображения (562). 4. Обобщенный скейлинг (565). 5. Асимптотические правила сумм (568). 6. Партоновая модель (571).	
Приложение I. Электромагнитное расщепление масс . . . . .	577
Приложение II. Радиационные поправки к $\beta$ -распаду . . . . .	582

Приложение III. Конформные преобразования . . . . .	587
Приложение IV. Кинематика лептон-нуклонного рассеяния . . . . .	590
Приложение V. Краткая сводка экспериментальных данных о лептон- нуклонном рассеянии . . . . .	595
Приложение VI. Вычисления, основанные на партонной модели . . . . .	600
<b>Глава 11. Коммутаторы токов на световом конусе . . . . .</b>	<b>602</b>
§ 1. Введение . . . . .	602
§ 2. Скалярная теория . . . . .	606
§ 3. Коммутаторы токов в модели свободных кварков . . . . .	612
§ 4. Масштабная инвариантность . . . . .	616
§ 5. Связь с партонной моделью . . . . .	620
§ 6. Правила сумм при фиксированной массе . . . . .	622
1. Скалярная теория (622). 2. Условия справедливости правил сумм (626). 3. Общее правило сумм, следующее из алгебры токов (628).	
§ 7. Выводы . . . . .	632
Приложение I. Коммутаторы токов в модели свободных кварков . . . . .	634
Приложение II. Каноническое квантование на световом конусе . . . . .	640
<b>Литература . . . . .</b>	<b>645</b>
<b>Именной указатель . . . . .</b>	<b>658</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>661</b>

## ТОКИ В ФИЗИКЕ АДРОНОВ

Редактор Е. С. Куранский  
Художник А. И. Гольдман  
Художественный редактор Е. К. Самойлов  
Технический редактор Э. И. Резник  
Корректор К. Л. Водяницкая

Сдано в набор 25/III 1976 г.

Подписано к печати 18/VIII 1976 г.

Бумага №2 70×108/16=21 бум. л.

58,8 печ. л. Уч.-изд. л. 51,88 Изд. № 2/7325.

Цена 5 р. 43 к. Зак. 01263

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени  
Московская типография № 7 «Искра революции»  
Союзполиграфпрома при Государственном  
комитете Совета Министров СССР по делам  
издательств, полиграфии и книжной торговли  
Москва, К-1, Трехпрудный пер. 9