

А. И. АХИЕЗЕР  
С. В. ПЕЛЕТМИНСКИЙ

---

ПОЛЯ  
И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

---

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР  
ХАРЬКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

А. И. АХИЕЗЕР  
С. В. ПЕЛЕТМИНСКИЙ

---

ПОЛЯ  
И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

---

КИЕВ  
НАУКОВА ДУМКА  
1986

**Поля и фундаментальные взаимодействия** / Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. — Киев : Наук. думка, 1986. — 552 с.

В монографии систематически изложено современное состояние теории фундаментальных взаимодействий и связанной с ними теории элементарных частиц. Приведены общие методы квантования полей, используемые далее для исследования электромагнитного, сильного и слабого взаимодействий. Большое внимание уделяется квантованию калибровочных полей. Рассматриваются квантовая теория суперполей и основы квантовой хромодинамики. Подробно изложена единая теория электрослабого взаимодействия. Приведены физические основы теории перенормировок калибровочных полей и суперполей. Рассмотрены методы промежуточной регуляризации, включая градиентно-инвариантный метод размерной регуляризации.

Для специалистов в области физики высоких энергий и элементарных частиц, а также преподавателей и студентов вузов.

Ил. 60. Табл. 2. Библиогр.: с. 542—548.

Ответственный редактор *В. А. Миранский*

Рецензенты *Д. В. Волков, А. Г. Ситенко*

Редакция физико-математической литературы

**АЛЕКСАНДР ИЛЬИЧ АХИЕЗЕР**  
**СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ПЕЛЕТМИНСКИЙ**

## **ПОЛЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

*Утверждено к печати ученым советом  
Харьковского физико-технического института АН УССР*

Редактор *Н. С. Кулаковская*  
Художественный редактор *И. П. Антонюк*  
Технический редактор *И. А. Ратнер*  
Корректоры *Э. М. Қиянская, Е. А. Михалец, Л. М. Тищенко*

ИБ № 7520

Сдано в набор 23.01.86. Подп. в печ. 26.06.86. БФ 00241.  
Формат 60×90/16. Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 34,5.  
Усл. кр.-отт. 35,06. Уч.-изд. л. 33,18. Тираж 2150 экз.  
Заказ 6-278, Цена 5 р. 40 к.

Издательство «Наукова думка», 252601 Киев 4, ул. Репина, 3.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига», 252057, Киев, ул. Довженко, 3 на книжной фабрике «Коммунист», 310012, Харьков, Энгельса, 11.

Предлагаемая вниманию читателя монография посвящена современному состоянию квантовой теории фундаментальных взаимодействий. Книга начинается с изложения теории классических полей, в основу которой положен лагранжев формализм. Рассматриваются электромагнитное поле и дираковские поля с внутренними симметриями. Приводятся алгебра релятивистских спиноров, тензорный анализ калибровочных полей, теория суперсимметрии.

В основу квантовой теории поля положен динамический принцип Швингера. Излагается квантовая теория полей, рассмотренных ранее в классической теории. В частности, подробно рассматривается квантование неабелевых калибровочных полей и суперполя.

Большое внимание уделено в книге теории перенормировок и различных методов регуляризации, в частности размерной регуляризации. Построена матрица рассеяния самодействующего суперполя и исследована проблема расходимостей в этой теории. Изложен метод стохастического квантования обычных и неабелевых калибровочных полей.

Отдельные главы посвящены реальным фундаментальным взаимодействиям — сильному и электрослабому.

Подробно излагается квантовая хромодинамика — современная теория сильного взаимодействия. Эта теория строится на основе явления асимптотической свободы, причем главным методом исследования является метод ренормализационной группы, широко применяемый нами также при исследовании электромагнитного взаимодействия. В квантовой хромодинамике изучаются такие процессы, как глубоко неупругое рассеяние лептонов адронами и превращения электронно-позитронной пары в адроны.

Монография завершается построением единой теории электрослабого взаимодействия. При изложении используется обобщенная калибровка Лоренца, в которой пропэгаторы векторных частиц убывают в области больших импульсов. Исследуется взаимодействие  $\omega$ - и  $z$ -бозонов как с лептонами, так и с кварками. Рассмотрены конкретные эффекты взаимодействия лептонов и  $\omega$ -,  $z$ -бозонов. Кроме того, формулируются главные идеи, лежащие в основе так называемого великого объединения, т. е. в основе единой теории всех фундаментальных взаимодействий.

Отличительной чертой данной работы является то, что в ней с единой точки зрения излагается теория всех фундаментальных взаимодействий, причем используемый математический аппарат всегда соответствует рассматриваемой физической проблеме. В книге приведены конкретные физические приложения.

Авторы выражают глубокую благодарность Ю. В. Кулишу, Н. П. Меренкову, Н. В. Ласкину, А. П. Рекало за помощь при подготовке и написании некоторых параграфов книги, а также В. А. Миранскому за ряд ценных замечаний.

**А в т о р ы**

## КЛАССИЧЕСКИЕ ПОЛЯ

## § 1.1. ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ

**1.1.1. Вариационный принцип.** В настоящее время известен целый ряд волновых полей, связанных с различными элементарными частицами. Простейшим примером является электромагнитное поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла. Другие поля существенно отличаются по своим свойствам от электромагнитного поля, а эволюция их происходит по иным, свойственным им законам. Несмотря на различия в свойствах полей, законы их движения можно сформулировать на общей основе исходя из единого вариационного принципа, аналогичного вариационному принципу классической механики [1].

Мы отвлечемся вначале от квантовых свойств полей, т. е. будем рассматривать их как классические величины и сформулируем для них вариационный принцип. Выяснив общие следствия, вытекающие из вариационного принципа, изучим наиболее важные классические поля — скалярное, векторное, электромагнитное, дираковское, калибровочные, а также суперполя.

Волновое поле описывается совокупностью функций  $\psi_i(x) \equiv \psi(x)$ , где  $x^\mu \equiv (t, x^k)$  — пространственные координаты и время, а  $i$  — индекс, нумерующий компоненты поля. Примем, что поле как некоторая динамическая система характеризуется определенной локальной плотностью функции Лагранжа или лагранжианом  $\mathcal{L}$ , зависящим от координат и времени только через посредство компонент поля  $\psi_i(x)$  и их производных по координатам и времени  $\frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \psi_i(x)$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). Такое предположение о зависимости  $\mathcal{L}$  от  $x$  связано с тем, что мы рассматриваем поле  $\psi_i(x)$  в однородном пространстве — времени и не учитываем внешних по отношению к  $\psi_i(x)$  полей. Считаем, что  $\mathcal{L}$  не зависит от высших производных  $\psi_i(x)$ , так как низшие производные можно отнести к числу компонент поля, после чего  $\mathcal{L}$  будет зависеть только от функций поля и их первых производных.

Интеграл от лагранжиана  $\mathcal{L}$  по 4-объему  $\Omega$ , ограниченному пространственно-подобными гиперповерхностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , называется действием

$$W \equiv \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi), \quad d^4x = d^3x dt. \quad (1.1.1)$$

Действие  $W$  является функционалом  $\psi_i$  и поверхностей  $\sigma_1, \sigma_2$ :  $W \equiv W(\psi; \sigma_1, \sigma_2)$ .

— Определим вариацию действия  $W$ , связанную с варьированием как компонент поля, так и границы области интегрирования. Найдем вначале вариацию  $W$ , связанную с варьированием только  $\psi_i$ :

$$\delta_\psi W = \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} \delta \psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_i} \delta \partial_\mu \psi_i \right).$$

Замечая, что  $\delta \partial_\mu \psi_i = \partial_\mu \delta \psi_i$  и, следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_i} \delta \partial_\mu \psi_i = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_i} \delta \psi_i \right) - \delta \psi_i \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_i}$$

и используя теорему Гаусса

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_\mu G^\mu = \int_{\sigma_2} d\sigma_\mu G^\mu(x) - \int_{\sigma_1} d\sigma_\mu G^\mu(x) \quad (1.1.2)$$

( $d\sigma_\mu$  — элемент гиперповерхности, ограничивающей объем  $\Omega$ ;  $G^\mu$  — произвольные функции  $x$ ), получаем

$$\begin{aligned} \delta_\psi W = \int_{\Omega} d^4x \delta \psi_i(x) \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_i} \right\} + \int_{\sigma_2} d\sigma_\mu \delta \psi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_i} - \\ - \int_{\sigma_1} d\sigma_\mu \delta \psi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_i}. \end{aligned}$$

Если 4-объем  $\Omega$  ограничен плоскими гиперповерхностями, ортогональными оси времени, то согласно (1.1.2)  $d\sigma_\mu = \delta_\mu^0 d^3x$  ( $\delta_\mu^\nu$  — символ Кронекера). В общем случае произвольной гиперповерхности  $\sigma$  и  $n_\mu$  — геометрический элемент площади гиперповерхности  $\sigma$  и  $n_\mu$  — единичный времениподобный вектор, нормальный к поверхности  $\sigma$  в точке  $x$  и лежащий в верхней части светового конуса с вершиной в точке  $x$ .

Найдем вариацию действия  $W$ , связанную с вариацией гиперповерхностей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . В результате вариации поверхности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  переходят в близкие поверхности  $\sigma'_1$  и  $\sigma'_2$  и вариация  $\delta_\sigma W$  действия  $W$  будет равна, очевидно, интегралу от  $\mathcal{L}$  по 4-объемам, заключенным между  $\sigma'_1$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma'_2$ ,  $\sigma_2$ . Элементы этих объемов равны  $d\sigma_\mu \delta x^\mu(x)$ , где  $\delta x^\mu(x)$  — вариация координат границы объема  $\Omega$ . Поэтому

$$\delta_\sigma W = \int_{\sigma_1} d\sigma_\mu \delta x^\mu \mathcal{L} - \int_{\sigma_2} d\sigma_\mu \delta x^\mu \mathcal{L}.$$

Таким образом, общая вариация действия

$$\delta W = \int d^4x \delta \psi_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_i} \right) + G(\sigma_2) - G(\sigma_1), \quad (1.1.3)$$

где

$$G(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_i} \delta \psi_i + \mathcal{L} \delta x^\mu \right). \quad (1.1.4)$$

Сформулируем принцип стационарного действия: для реального движения динамической системы действие должно быть экстремаль-

ным, т. е.  $\delta W = 0$ , при условии, что границы области  $\Omega$  не варьируются ( $\delta x^\mu = 0$ ) и вариации функций поля на границах  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  равны нулю,  $\delta\psi_{\sigma_1, \sigma_2} = 0$ . Отсюда согласно (1.1.3) следуют уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_i} = 0, \quad (1.1.5)$$

представляющие собой уравнения движения поля.

Конкретный вид эти уравнения приобретают, естественно, после того, как установлена структура лагранжиана  $\mathcal{L}$ . Далее мы вернемся к этой проблеме, но предварительно исследуем общие свойства инвариантности лагранжиана и действия, связанные с существованием различных преобразований симметрии полей.

**1.1.2. Группа пространственно-временных преобразований.** Начнем с преобразований, связанных с симметрией пространства — времени

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu + d^\mu, \quad (1.1.6)$$

оставляющих инвариантной квадратичную форму (интервал)  $g_{\mu\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu = g_{\mu\nu} \delta x'^\mu \delta x'^\nu$ , где  $g_{\mu\nu}$  — метрический тензор Минковского и  $\delta x^\mu$ ,  $\delta x'^\mu$  — разности координат двух событий в инерциальных системах  $K$  и  $K'$  ( $g_{00} = -g_{kk} = 1$ ,  $g_{\mu\nu} = 0$  при  $\mu \neq \nu$ ). В формуле (1.1.6)  $x^\mu$  и  $x'^\mu$  — пространственно-временные координаты одного и того же события в двух инерциальных системах  $K$  и  $K'$ .

С помощью метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  и обратного ему тензора  $g^{\rho\lambda}$ ,  $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$ , у любой величины можно поднимать и опускать индексы. Например,

$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} a^{\lambda\nu}, \quad a^{\mu\nu} = a^\mu{}_\lambda g^{\lambda\nu}, \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu.$$

Неоднородные преобразования (1.1.6) образуют группу, которая называется группой Пуанкаре. Однородные преобразования ( $d^\mu = 0$ ) образуют подгруппу группы Пуанкаре, которая называется полной группой Лоренца. Из условия инвариантности интервала следует, что величины  $a^\mu{}_\nu$  удовлетворяют соотношениям

$$a_{\rho\mu} a^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu, \quad a_{\mu\rho} a^{\nu\rho} = \delta_\mu^\nu. \quad (1.1.7)$$

Преобразование (1.1.6) соответствует переходу от  $K$  к  $K'$ . Производя далее переход от  $K'$  к  $K''$ ,  $x'^\rho = a'^\rho{}_\mu x'^\mu + d'^\rho$ , и используя (1.1.6), находим  $x'^\rho = a'^\rho{}_\mu a^\mu{}_\nu x^\nu + a'^\rho{}_\mu d^\mu + d'^\rho$ . Вместе с тем можно непосредственно совершить переход от  $K$  к  $K''$ ,  $x''^\rho = a''^\rho{}_\nu x^\nu + d''^\rho$ . Поэтому

$$a''^\rho{}_\nu = a'^\rho{}_\mu a^\mu{}_\nu, \quad d''^\rho = a'^\rho{}_\mu d^\mu + d'^\rho. \quad (1.1.8)$$

Легко видеть, что если коэффициенты  $a^\mu{}_\nu$ , и  $a'^\rho{}_\mu$  удовлетворяют соотношениям (1.1.7), то им будут удовлетворять и коэффициенты  $a''^\rho{}_\nu$ . Это свидетельствует о групповом характере преобразований Пуанкаре и Лоренца. Соотношения (1.1.8) представляют собой закон умножения элементов группы.

Преобразования Пуанкаре объединяют два преобразования — преобразования 4-смещения, определяемые параметрами  $d^\mu$ ; и преобразования 4-вращения, определяемые параметрами  $a^\mu{}_\nu$ .



Из (1.1.7) следует, что

$$\det a = \pm 1. \quad (1.1.9)$$

Кроме того, так как согласно (1.1.7)  $(a_0^0)^2 = 1 + a^0_k a^0_k$ , то

$$|a^0_0| \geq 1. \quad (1.1.10)$$

Преобразования, для которых  $a^0_0 \geq 1$ , также образуют группу, которая называется ортохронной группой Лоренца.

Бесконечно малые преобразования группы Пуанкаре распадаются на преобразования бесконечно малых трансляций:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu,$$

где  $\varepsilon^\mu$  — 4-вектор бесконечно малого смещения и преобразования бесконечно малых 4-вращений

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu_\nu x^\nu.$$

Здесь  $\varepsilon_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} \varepsilon^\lambda_\nu$  — бесконечно малая антисимметричная матрица,  $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$ .

Из полной группы Лоренца можно выделить подгруппу, называемую собственной группой Лоренца, любое преобразование которой можно получить из тождественного преобразования путем непрерывного изменения элементов матрицы  $a_{\mu\nu}$ , т. е. путем последовательного применения бесконечно малых преобразований Лоренца. Так как  $\det a$  принимает согласно (1.1.9) только два дискретных значения, то для любого преобразования собственной группы Лоренца

$$\det a = 1, \quad a^0_0 \geq 1. \quad (1.1.11)$$

Возвратимся к функциям поля. При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой они испытывают некоторое изменение. Если  $\psi_i(x)$  — функция поля в системе  $K$ , то функции  $\psi'_i(x')$  того же поля в другой системе  $K'$  связаны с  $\psi_i(x)$  соотношением  $\psi'_i(x') = S_i^j(a) \psi_j(x)$ , или сокращенно

$$\psi'(x') = S(a) \psi(x), \quad (1.1.12)$$

где  $S(a)$  — некоторая матрица, определяемая коэффициентами  $a^\mu_\nu$  преобразования Лоренца, связывающего координаты одной и той же мировой точки в системах отсчета  $K$  и  $K'$ ,  $x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu + d^\mu$ . Подчеркнем, что  $\psi_i(x)$  и  $\psi'_i(x')$  представляют собой компоненты одного и того же поля, но в разных системах отсчета. (Мы предполагаем при этом, что связь между  $\psi$  и  $\psi'$  является линейной и однородной.)

Преобразования (1.1.12) должны образовывать группу. Действительно при переходе от системы  $K'$  к системе  $K''$  ( $x'' = a'x' + d'$ ) согласно (1.1.12) функции поля преобразуются по закону

$$\psi''(x'') = S(a') \psi'(x'). \quad (1.1.12')$$

Кроме того, переход от  $K$  к  $K''$  можно рассматривать как преобразование Пуанкаре  $x'' = a''x + d''$  с коэффициентами  $a''^\mu_\nu = a'^\mu_\lambda a^\lambda_\nu$ . Поэтому

$$\psi''(x'') = S(a'') \psi(x). \quad (1.1.12'')$$

Из сравнения формул (1.1.12), (1.1.12'), (1.1.12'') следует, что

$$S(a'') = S(a') S(a), \quad a'' = a'a. \quad (1.1.13)$$

Группа преобразований (1.1.12), определяемых матрицей  $S(a)$ , называется представлением группы Лоренца. Таким образом, волновое поле преобразуется при переходе от одной системы отсчета к другой по некоторому представлению группы Лоренца. Различным представлениям соответствуют различные физические поля. Поэтому возникает возможность классифицировать поля по соответствующим им представлениям группы Лоренца.

Для бесконечно малых преобразований собственной группы Лоренца матрицу  $S(a)$  можно разложить в ряд по степеням  $\epsilon_{\mu\nu}$  и ограничиться линейными членами

$$S(a) = 1 - \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}, \quad (1.1.14)$$

где  $\Sigma_{\mu\nu} = -\Sigma_{\nu\mu}$  — некоторые не зависящие от  $\epsilon_{\mu\nu}$  матрицы, называемые инфинитезимальными операторами. Они определяют представление собственной группы Лоренца.

Лагранжиан  $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$  зависит от  $x$ , как мы уже говорили, только через посредство функций поля  $\psi_i(x)$  и их первых производных. Поскольку все инерциальные системы эквивалентны, то естественно потребовать, чтобы функция Лагранжа была инвариантной относительно преобразований группы Пуанкаре:

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)) = \mathcal{L}(\psi'(x'), \partial'_\mu \psi'(x')), \quad (1.1.15)$$

где  $\psi'(x') = S(a)\psi(x)$  и  $x' = ax + d$ .

Из инвариантности функции Лагранжа следует инвариантность интеграла действия:

$$W(\psi(x); \sigma_1, \sigma_2) = W(\psi'(x'); \sigma'_1, \sigma'_2), \quad (1.1.16)$$

где  $\psi'(x') = S(a)\psi(a^{-1}x - a^{-1}d)$  и гиперповерхности  $\sigma'_1$  и  $\sigma'_2$  получаются из  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в результате преобразований Пуанкаре. Действительно, интегрируя соотношение (1.1.15) по 4-объему, заключенному между  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , согласно (1.1.1) получаем

$$W(\psi(x); \sigma_1, \sigma_2) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \mathcal{L}(\psi'(x'), \partial'_\mu \psi'(x')).$$

Переходя в последнем интеграле от переменных интегрирования  $x$  к переменным  $x' = ax + d$  и замечая, что  $|\det a| = 1$ , получаем

$$W(\psi(x); \sigma_1, \sigma_2) = \int_{\sigma'_1}^{\sigma'_2} d^4x' \mathcal{L}(\psi'(x'), \partial'_\mu \psi'(x')) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \mathcal{L}(\psi'(x), \partial_\mu \psi'(x)),$$

откуда следует инвариантность действия.

Из инвариантности действия вытекает, что вариация (1.1.3) обращается в нуль, если

$$\delta\psi(x) = \psi'(x) - \psi(x) = -\varepsilon^\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \{ \Sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \} \psi(x),$$

$$\delta x^\mu(x) = \varepsilon^\mu + \varepsilon^\mu_\nu x^\nu. \quad (1.1.17)$$

При этом не предполагается, что функции поля удовлетворяют уравнениям Лагранжа.

Так как лагранжиан полей представляет собой релятивистский скаляр, то уравнения поля для  $\psi(x)$  и  $\psi'(x')$  будут иметь одинаковый вид, иными словами, уравнения поля будут инвариантны относительно преобразований Пуанкаре.

**1.1.3. Группы внутренних симметрий.** Лагранжиан и действие могут быть инвариантны и по отношению к некоторым преобразованиям функций поля, не связанным с преобразованием пространства — времени. В этом случае говорят о внутренних симметриях поля. Мы ограничимся здесь рассмотрением только линейных преобразований

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U\psi(x), \quad (1.1.18)$$

где матрица  $U$  действует на индекс компоненты поля. Инвариантность лагранжиана относительно преобразований внутренней симметрии означает, что

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)) = \mathcal{L}(\psi'(x), \partial_\mu \psi'(x)).$$

Отсюда следует инвариантность действия

$$W(\psi(x); \sigma_1, \sigma_2) = W(\psi'(x); \sigma_1, \sigma_2). \quad (1.1.19)$$

Матрица  $U$  может зависеть от ряда непрерывных параметров  $\lambda^a$ ,  $U \equiv U(\lambda)$ . Так как лагранжиан инвариантен по отношению к преобразованиям (1.1.18) с матрицами  $U(\lambda_1)$  и  $U(\lambda_2)$ , то он будет инвариантен также и по отношению к преобразованию с матрицей  $U(\lambda_2)U(\lambda_1)$ . Поэтому естественно считать, что найдутся такие значения параметров  $\lambda_3^a$ , для которых

$$U(\lambda_2)U(\lambda_1) = U(\lambda_3), \quad (1.1.20)$$

причем значения параметров  $\lambda_3^a$  определяются значениями параметров  $\lambda_1^a$  и  $\lambda_2^a$ :

$$\lambda_3 = \lambda(\lambda_2, \lambda_1). \quad (1.1.21)$$

Это значит, что преобразования (1.1.18) образуют некоторую непрерывную группу внутренней симметрии, которую мы будем обозначать  $\mathcal{G}$ . При этом предполагается, что тождественному преобразованию  $U = I$  соответствуют нулевые значения параметров  $\lambda$  ( $\lambda = 0$ ), а обратному преобразованию  $U^{-1}(\lambda)$  — некоторые значения параметров  $\lambda$ , которые мы обозначим через  $\lambda^{-1}$ :

$$U(0) = 1, \quad U^{-1}(\lambda) = U(\lambda^{-1}). \quad (1.1.22)$$

Из (1.1.21), (1.1.22) следует, что

$$\lambda(\lambda, \lambda^{-1}) = 0, \quad \lambda(\lambda, 0) = \lambda(0, \lambda) = \lambda. \quad (1.1.23)$$

Кроме того, ассоциативность закона умножения требует, чтобы

$$\lambda(\lambda_1, \lambda(\lambda_2, \lambda_3)) = \lambda(\lambda(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_3). \quad (1.1.24)$$

Формула (1.1.21) определяет закон умножения параметров группы. Группы, элементы которых зависят от некоторых непрерывных параметров, носят общее название групп Ли.

Рассмотрим преобразования группы  $\mathcal{G}$ , бесконечно близкие к тождественному преобразованию, соответствующие бесконечно малым значениям  $\delta\lambda^a \equiv \varepsilon^a$  параметров  $\lambda^a$ . Тогда

$$U(\delta\lambda) = 1 - i \sum_{a=1}^N \varepsilon^a T_a, \quad (1.1.25)$$

где  $N$  — число параметров группы. Входящие сюда матрицы  $T_a$  называются генераторами группы  $\mathcal{G}$  (очевидно, матрицы  $T_a$  должны быть линейно независимыми). Так как согласно (1.1.20), (1.1.21)

$$U(\lambda_2)U(\lambda_1)U^{-1}(\lambda_2) = U(\lambda(\lambda_2, \lambda(\lambda_1, \lambda_2^{-1}))),$$

то при  $\lambda_1^a = \varepsilon^a$  параметры  $\lambda(\lambda_2, \lambda(\lambda_1, \lambda_2^{-1}))$  согласно (1.1.23) будут близки к нулю. Поэтому

$$U(\lambda_2)T_bU^{-1}(\lambda_2) = \sum_c u_b^c(\lambda_2)T_c,$$

где величины

$$u_b^c(\lambda_2) = \left. \frac{\partial \lambda^c(\lambda_2, \lambda(\lambda_1, \lambda_2^{-1}))}{\partial \lambda_1^b} \right|_{\lambda_1=0} \quad (1.1.26)$$

определяются только законом умножения параметров  $\lambda$  в группе  $\mathcal{G}$ . Отсюда, используя (1.1.25), легко заключить, что

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c, \quad (1.1.27)$$

где

$$f_{ab}^c = \left. \frac{\partial u_b^c(\lambda_2)}{\partial \lambda_2^a} \right|_{\lambda_2=0} \quad (1.1.28)$$

и  $[T_a, T_b] \equiv T_a T_b - T_b T_a$  — коммутатор матриц  $T_a$  и  $T_b$ . Величины  $f_{ab}^c$  называются структурными постоянными группы  $\mathcal{G}$ . Как видно из сказанного выше, они определяются только групповым законом умножения.

Из (1.1.27) следует, что структурные постоянные  $f_{ab}^c$  антисимметричны по индексам  $a$  и  $b$ :

$$f_{ab}^c = -f_{ba}^c. \quad (1.1.29)$$

Кроме того, они удовлетворяют соотношению

$$f_{ab}^c f_{cd}^e + f_{bd}^c f_{ca}^e + f_{da}^c f_{cb}^e = 0. \quad (1.1.30)$$

Действительно, для произвольных матриц  $A, B, C$  выполняется соотношение

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

(оно называется тождеством Якоби). Полагая в этом соотношении  $A = T_a$ ,  $B = T_b$ ,  $C = T_c$  и используя (1.1.25), получаем

$$\{f_{ab}{}^c f_{cd}{}^e + f_{bd}{}^c f_{ca}{}^e + f_{da}{}^c f_{cb}{}^e\} T_e = 0,$$

откуда вследствие линейной независимости матриц  $T_a$  следует соотношение (1.1.30).

Для бесконечно малых преобразований внутренней симметрии вариация  $\delta\psi$ , входящая в (1.1.3), определяется согласно (1.1.25) формулой

$$\delta\psi(x) = -i\varepsilon^a T_a \psi(x). \quad (1.1.31)$$

В качестве примера рассмотрим группу Лоренца. Матрицы  $S(a)$ , определяющие преобразования функций поля при преобразованиях Лоренца, образуют, как мы видели, непрерывную группу Ли с законом умножения (1.1.8). Поэтому, используя формулы (1.1.27), мы можем установить перестановочные соотношения для генераторов  $\Sigma_{\mu\nu}$  этой группы. Общие перестановочные соотношения для генераторов  $T_a$  определяются формулой (1.1.27). В нашем случае роль операторов  $T_a$  играют матрицы  $\Sigma_{\mu\nu}$  (индексу  $a$  соответствуют индексы  $\mu\nu$ ,  $\mu < \nu$ ). Поэтому задача заключается в вычислении структурных коэффициентов  $f_{ab}{}^c = f_{\varepsilon\lambda,\rho\sigma}{}^{\mu\nu}$  для группы Лоренца. Эти коэффициенты определяются согласно (1.1.26), (1.1.28) формулой

$$f_{ab}{}^c = \frac{\partial^2 \lambda^c(\lambda_2, \lambda(\lambda_1, \lambda_2^{-1}))}{\partial \lambda_1^b \partial \lambda_2^a} \Big|_{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}, \quad (1.1.32)$$

где величины  $\lambda$ , нумерующие элементы группы непрерывных преобразований (1.1.6), в рассматриваемом случае совпадают с величинами  $a^{\mu\nu}$ ,  $\lambda^a = a^{\mu\nu}$ . Функция  $\lambda(\lambda_1, \lambda_2)$ , определяющая групповой закон умножения, в данном случае имеет вид  $a^{\mu\nu}(a_1, a_2) = (a_1 a_2)^{\mu\nu} \equiv \equiv a_1^\mu g_{\lambda\rho} a_2^{\rho\nu}$ . Поэтому

$$a(a_2, a(a_1, a_2^{-1})) = a_2 a_1 a_2^{-1}.$$

Для нахождения структурных констант достаточно знать функцию  $a(a_2, a(a_1, a_2^{-1}))$  для преобразований  $a_1$  и  $a_2$ , близких к единичному:

$$a_1^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \varepsilon_1^{\mu\nu}, \quad a_2^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \varepsilon_2^{\mu\nu}.$$

В этом случае

$$a^{\mu\nu}(a_2, a(a_1, a_2^{-1})) = g^{\mu\nu} + \varepsilon_1^{\mu\nu} + \varepsilon_2^{\mu\lambda} \varepsilon_1^{\rho\nu} g_{\lambda\rho} - \varepsilon_1^{\mu\lambda} \varepsilon_2^{\rho\nu} g_{\lambda\rho} + O(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2).$$

Для того чтобы выполнить в соответствии с формулой (1.1.32) дифференцирование  $a^{\mu\nu}$  по  $\varepsilon^1$  и  $\varepsilon^2$ , удобно предварительно представить последнюю формулу в виде

$$a^{\mu\nu}(a_2, a(a_1, a_2^{-1})) = g^{\mu\nu} + \varepsilon_1^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \varepsilon_2^{\rho\sigma} \varepsilon_1^{\xi\lambda} \{ \delta_\sigma^\nu (\delta_\xi^\mu g_{\lambda\rho} - \delta_\lambda^\mu g_{\xi\rho}) - \\ - \delta_\rho^\nu (\delta_\xi^\mu g_{\lambda\sigma} - \delta_\lambda^\mu g_{\xi\sigma}) - \delta_\rho^\mu (g_{\xi\sigma} \delta_\lambda^\nu - g_{\lambda\sigma} \delta_\xi^\nu) + \delta_\sigma^\mu (g_{\xi\rho} \delta_\lambda^\nu - g_{\lambda\rho} \delta_\xi^\nu) \},$$

где выражение в фигурных скобках антисимметризовано по индексам

$\rho\sigma, \xi\lambda$ . Отсюда следует, что

$$f_{\xi\lambda,\rho\sigma}^{\mu\nu} = \delta_{\sigma}^{\nu} (\delta_{\xi}^{\mu} g_{\lambda\rho} - \delta_{\lambda}^{\mu} g_{\xi\rho}) - \delta_{\rho}^{\nu} (\delta_{\xi}^{\mu} g_{\lambda\sigma} - \delta_{\lambda}^{\mu} g_{\xi\sigma}) - \\ - \delta_{\rho}^{\mu} (g_{\xi\sigma} \delta_{\lambda}^{\nu} - g_{\lambda\sigma} \delta_{\xi}^{\nu}) + \delta_{\sigma}^{\mu} (g_{\xi\rho} \delta_{\lambda}^{\nu} - g_{\lambda\rho} \delta_{\xi}^{\nu}).$$

Подставляя это выражение в формулу (см. (1.1.27))

$$i [\Sigma_{\xi\lambda}, \Sigma_{\rho\sigma}] = -\frac{1}{2} f_{\xi\lambda,\rho\sigma}^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu},$$

окончательно получаем

$$i [\Sigma_{\xi\lambda}, \Sigma_{\rho\sigma}] = -\Sigma_{\xi\sigma} g_{\lambda\rho} + \Sigma_{\lambda\sigma} g_{\xi\rho} - \Sigma_{\lambda\rho} g_{\xi\sigma} + \Sigma_{\xi\rho} g_{\lambda\sigma}. \quad (1.1.33)$$

Эти соотношения могут использоваться для построения неприводимых представлений собственной группы Лоренца. Именно неприводимые матрицы, удовлетворяющие этим соотношениям, будут инфинитезимальными операторами соответствующих неприводимых представлений.

Матрицы  $\Sigma_{\mu\nu}$  определяют матрицы спина  $\Sigma_i$  частиц, связанных с рассматриваемым полем:

$$\Sigma^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} \Sigma_{kl}, \quad (1.1.34)$$

где  $\varepsilon^{ikl}$  — полностью антисимметричный единичный тензор ( $\varepsilon^{123} = 1$ ). Действительно, согласно (1.1.33) матрицы  $\Sigma_i$  удовлетворяют перестановочным соотношениям для момента импульса:

$$[\Sigma^i, \Sigma^k] = -i \varepsilon^{ikl} \Sigma_l, \quad \Sigma_i = -\Sigma^i. \quad (1.1.35)$$

## § 1.2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

**1.2.1. Симметрии и законы сохранения.** С каждой группой преобразований симметрии связан определенный закон сохранения (теорема Э. Неттер). Действительно, из формул (1.1.16), (1.1.19) следует, что для бесконечно малых преобразований симметрии (1.1.17), (1.1.31) вариация действия равна нулю. Иными словами, согласно (1.1.3)

$$\int_{\Omega} d^4x \delta\psi_i(x) \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \psi_i} \right) + G(\sigma_2) - G(\sigma_1) = 0,$$

где  $\delta\psi_i(x)$  — вариация поля, соответствующая бесконечно малому преобразованию симметрии. Пусть теперь эта вариация происходит около функций поля, которые удовлетворяют уравнениям движения (1.1.5). Тогда из последней формулы следует

$$G(\sigma_2) = G(\sigma_1), \quad (1.2.1)$$

где  $G(\sigma)$  согласно (1.1.4) имеет вид

$$G(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \psi_i} \delta\psi_i + \mathcal{L} \delta x^{\mu} \right).$$

Подчеркнем, что соотношение (1.2.1) выполняется, если  $\delta\psi$  — вариация поля, связанная с рассматриваемой группой симметрии, а

$\psi(x)$  удовлетворяют уравнениям Лагранжа. В этом случае величина  $G(\sigma)$  не зависит от  $\sigma$ . Поэтому если в качестве  $\sigma$  выбрать гиперплоскость, ортогональную к оси времени и пересекающую ось времени в момент времени  $t$ , то величина  $G(\sigma) \equiv G(t)$  не будет зависеть от времени, т. е. будет интегралом движения.

**1.2.2. Тензоры энергии — импульса и моментов количества движения.** Вначале рассмотрим законы сохранения, связанные с инвариантностью лагранжиана относительно 4-смещений и 4-поворотов. Для бесконечно малых преобразований группы Пуанкаре,  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu$ , вариация поля определяется формулой (1.1.17). Величина  $G(\sigma)$ , соответствующая этим пространственно-временным преобразованиям, согласно (1.1.4) имеет вид

$$G(\sigma) = -\varepsilon_\mu P^\mu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \quad (1.2.2)$$

где

$$P^\mu = \int T^{\mu\nu} d\sigma_\nu, \quad M^{\mu\nu} = \int M^{\mu\nu;\rho} d\sigma_\rho \quad (1.2.3)$$

и

$$T^{\mu\nu} = -\mathcal{L}g^{\mu\nu} + \partial^\mu \psi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \psi_i},$$

$$M^{\mu\nu;\rho} = x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho} - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho \psi_i} (\Sigma^{\mu\nu})_{ij} \psi_j. \quad (1.2.4)$$

Так как  $\mathcal{L}$  — инвариант группы Пуанкаре, то величины  $T^{\mu\nu}$  образуют тензор 2-го ранга, а величины  $M^{\mu\nu;\rho}$  — тензор 3-го ранга.

Вследствие инвариантности действия  $W$  относительно преобразований (1.1.6) величина  $G(\sigma)$  не зависит от вида поверхности  $\sigma$ . Поэтому величины

$$P^\mu = \int d^3x T^{\mu 0}, \quad M^{\mu\nu} = \int d^3x M^{\mu\nu;0}$$

не зависят от времени (интегрирование производится по всему объему поля).

Поскольку  $T^{\mu\nu}$  — тензор 2-го ранга, а  $d\sigma_\nu$  — вектор и интеграл по  $d\sigma$  не зависит от поверхности  $\sigma$ , то  $P^\mu$  представляет собой 4-вектор. Он называется 4-вектором энергии — импульса поля. Величина  $T^{\mu\nu}$  называется каноническим тензором энергии — импульса. Аналогично величины  $M^{\mu\nu}$  образуют антисимметричный тензор 2-го ранга, который называется тензором моментов количества движения поля. Величины  $M^{\mu\nu;\rho}$  называются каноническим тензором плотностей моментов количества движения.

Величина  $\int_\sigma T^{\mu\nu} d\sigma_\nu$  не зависит от вида поверхности  $\sigma$ , поэтому  $\int_\Sigma T^{\mu\nu} d\sigma_\nu = 0$ , где  $\Sigma$  — замкнутая гиперповерхность, образованная двумя близкими гиперповерхностями, отличающимися друг от друга только в окрестности некоторой точки  $x$ . Используя теорему Гаусса (1.1.2), получим отсюда  $\int_{\delta\Omega} d^4x \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ , где  $\delta\Omega$  — 4-объем внутри замк-

нутой гиперповерхности  $\Sigma$ , содержащей точку  $x$ . Таким образом, 4-дивергенция  $T^{\mu\nu}$  равна нулю.

$$\partial_\nu T^{\mu\nu}(x) = 0. \quad (1.2.5)$$

Аналогичным образом легко убедиться, что

$$\partial_\rho M^{\mu\nu;\rho}(x) = 0. \quad (1.2.6)$$

Эти соотношения выражают в дифференциальной форме законы сохранения энергии — импульса и моментов количества движения поля.

Обратим внимание на то, что если к  $T^{\mu\nu}$  прибавить величину вида  $\partial_\lambda \chi^{\mu\nu\lambda}$ , где  $\chi^{\mu\nu\lambda}$  — произвольный тензор 3-го ранга, антисимметричный относительно индексов  $\nu$  и  $\lambda$ , то 4-дивергенция тензора

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda \chi^{\mu\nu\lambda}, \quad (1.2.7)$$

так же, как и тензора  $T^{\mu\nu}$ , будет равна нулю,  $\partial_\nu T'^{\mu\nu} = 0$ . Кроме того, 4-векторы энергии — импульса, вычисленные с помощью тензоров  $T^{\mu\nu}$  и  $T'^{\mu\nu}$ , будут совпадать, так как

$$\int d^3x \partial_\lambda \chi^{\mu 0\lambda} = \int d^3x \partial_i \chi^{\mu 0i} = 0.$$

Ясно, что величины  $M'^{\mu\nu;\rho}$ ,

$$M'^{\mu\nu;\rho} = M^{\mu\nu;\rho} + \partial_\lambda (x^\mu \chi^{\nu\rho\lambda} - x^\nu \chi^{\mu\rho\lambda}),$$

также будут удовлетворять закону сохранения (1.2.6) и приводить к тем же значениям 4-момента количества движения  $M'^{\mu\nu}$ , что и величины  $M^{\mu\nu;\rho}$ ,  $M'^{\mu\nu} = M^{\mu\nu}$ .

Согласно (1.2.7)  $M'^{\mu\nu;\rho}$  можно представить в виде

$$M'^{\mu\nu;\rho} = x^\mu T'^{\nu\rho} - x^\nu T'^{\mu\rho} + \chi^{\nu\rho\mu} - \chi^{\mu\rho\nu} - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \psi} \Sigma^{\mu\nu} \psi.$$

Выберем тензор  $\chi^{\nu\rho\mu}$  так, чтобы сумма последних трех слагаемых обращалась в нуль:

$$\chi^{\nu\rho\mu} - \chi^{\mu\rho\nu} = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \psi} \Sigma^{\mu\nu} \psi. \quad (1.2.8)$$

В этом случае

$$M'^{\mu\nu;\rho} = x^\mu T'^{\nu\rho} - x^\nu T'^{\mu\rho}. \quad (1.2.9)$$

Из (1.2.8) и условия антисимметрии  $\chi^{\nu\rho\mu}$  по индексам  $\rho$  и  $\mu$  следует, что

$$\chi^{\nu\rho\mu} = -\frac{i}{2} \left( -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \psi} \Sigma^{\mu\nu} \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \Sigma^{\rho\nu} \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \psi} \Sigma^{\rho\mu} \psi \right). \quad (1.2.10)$$

Так как величины  $M'^{\mu\nu;\rho}$  и  $T'^{\mu\rho}$  удовлетворяют законам сохранения (1.2.5), (1.2.6), то из (1.2.9) следует, что величины  $T'^{\mu\nu}$  образуют симметричный тензор. Он называется симметричным тензором энергии — импульса и обозначается  $\theta^{\mu\nu}$ . Таким образом,  $\theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda \chi^{\mu\nu\lambda}$ .

Сохраняющиеся величины  $P^k$  ( $k = 1, 2, 3$ )  $p^0 \equiv \mathcal{E}$  представляющей собой импульс и энергию поля. Соответственно этому величины  $\theta^{k0}$  и  $\theta^{00}$  представляют собой плотности импульса и энергии.



## Сохраняющиеся величины

$$M^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} M_{kl} \quad (1.2.11)$$

образуют псевдовектор трехмерного момента количества движения поля.

Величины  $M^{0k} = -M^{k0}$  в терминах симметричного тензора энергии — импульса имеют вид

$$M^{0k} = t \int d^3x \theta^{k0} - \int d^3x x^k \theta^{00} = tP^k - \int d^3x x^k \theta^{00}.$$

Так как величины  $M^{0k}$ ,  $P^k$  и  $P^0 = \mathcal{E}$  не зависят от времени, то закон сохранения  $M^{0k}$  означает, что центр инерции поля, координаты которого определяются формулой

$$X^k = \mathcal{E}^{-1} \int d^3x x^k \theta^{00},$$

движется с постоянной скоростью  $V^k = P^k/\mathcal{E}$ .

**1.2.3. Законы сохранения, связанные с внутренними симметриями.** Рассмотрим законы сохранения, связанные с инвариантностью лагранжиана относительно преобразований внутренней симметрии. В этом случае согласно (1.1.31) вариации координат и поля определяются так:

$$\delta x^\mu = 0, \quad \delta \psi = -i \varepsilon^a T_a \psi.$$

Величина  $G(\sigma)$ , соответствующая преобразованиям внутренней симметрии, определяется формулой

$$G(\sigma) = \varepsilon^a \int_\sigma d\sigma_\mu \mathcal{T}_a^\mu, \quad \mathcal{T}_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} T_a \psi. \quad (1.2.12)$$

Так как  $\mathcal{L}$  — инвариант группы Пуанкаре, то величины  $\mathcal{T}_a^\mu$  образуют 4-вектор (по индексу  $\mu$ ).

Величина  $G(\sigma)$ , как мы видели, не зависит от вида поверхности  $\sigma$ . Поэтому величины

$$Q_a = \int_\sigma d\sigma_\mu \mathcal{T}_a^\mu = \int d^3x \mathcal{T}_a^0 \quad (1.2.13)$$

не зависят от времени и представляют собой инварианты группы Пуанкаре. Они называются обобщенными зарядами, связанными с группой внутренней симметрии. Число зарядов совпадает с числом параметров группы.

Величины  $\mathcal{T}_a^\mu$  удовлетворяют законам сохранения в дифференциальной форме

$$\partial_\mu \mathcal{T}_a^\mu = 0 \quad (1.2.14)$$

и называются обобщенными 4-токами, связанными с внутренней симметрией.

### § 1.3. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**1.3.1. Лагранжиан и уравнения поля.** В предыдущих параграфах мы не конкретизировали зависимости лагранжиана от производных  $\partial_\mu \psi_i$ . При этом уравнения поля будут, вообще говоря, уравнениями второго порядка. Однако эти уравнения всегда можно свести к уравнениям первого порядка. Такое сведение соответствует переходу к гамильтонову формализму в теории поля. При этом можно воспользоваться методом, применяемым в классической механике при переходе от уравнений Лагранжа к уравнениям Гамильтона, т. е. кроме компонентов поля  $\psi_i(x)$  ввести соответствующие им обобщенные импульсы

$$\pi^i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \psi_i(x)}.$$

Однако такая процедура не является релятивистски инвариантной и мы не будем ее здесь рассматривать.

Релятивистски инвариантный формализм можно получить, если кроме компонентов поля  $\psi_i$  рассматривать ковариантные переменные  $\psi_{i,\mu} \equiv \partial_\mu \psi_i$ . Компоненты поля  $\psi_i, \psi_{i,\mu}$ , удовлетворяющие уравнениям первого порядка, далее будем обозначать  $\chi_i$ . При этом можно с самого начала предполагать, что лагранжиан имеет такую структуру, которая сразу приводит к уравнениям поля первого порядка, т. е. считать, что в  $\mathcal{L}$  величины  $\partial_\mu \chi$  входят линейно:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi) - U(\chi), \quad \mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi) = \frac{i}{2} \chi B^\mu \partial_\mu \chi, \quad (1.3.1)$$

где  $U(\chi)$  — некоторая локальная функция  $\chi(x)$  и  $B^\mu$  — матрицы, действующие на индекс поля и не зависящие от  $\chi$ . (При таком определении  $\mathcal{L}_0$  коэффициенты в уравнениях поля при  $\partial_\mu \chi$  будут постоянными.) Поле для определенности будем считать вещественным (комплексное поле можно всегда свести к вещественному, удвоив число компонент поля). Вследствие вещественности лагранжиана матрицы  $B^\mu$  будут чисто мнимыми, т. е.

$$B^{\mu*} = -B^\mu.$$

Так как симметричная часть матриц  $B^\mu$  дает вклад в  $\mathcal{L}$ , равный дивергенции некоторого вектора, то матрицы  $B^\mu$  можно считать антисимметричными:

$$\tilde{B}^\mu = -B^\mu$$

(здесь  $\sim$  — знак транспонирования). Из последних двух формул следует, что матрицы  $B^\mu$  являются эрмитовыми,  $B^{\mu+} = B^\mu$ .

Согласно (1.1.5) лагранжиану (1.3.1) соответствуют уравнения движения

$$iB^\mu \partial_\mu \chi - \frac{\partial U}{\partial \chi} = 0. \quad (1.3.2)$$

Лагранжиан  $\mathcal{L}$  при отсутствии внешних полей, а также величина  $\mathcal{L}_0$  должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца  $x \rightarrow x' = ax$ , при которых функции поля испытывают преобразование

(1.1.12):

$$\chi(x) \rightarrow \chi'(x') = S(a)\chi(x), \quad S^*(a) = S(a) \quad (1.3.3)$$

(звездочкой обозначено комплексное сопряжение). Инвариантность  $\mathcal{L}_0$  означает, что

$$\chi'(x') B^\mu \partial'_\mu \chi'(x') = \chi(x) B^\mu \partial_\mu \chi(x).$$

Замечая, что  $\partial'_\mu \chi'(x') = (\partial'_\mu x^\lambda) S(a) \partial_\lambda \chi(x)$  и  $\partial_\lambda x'^\mu = a^\mu_\lambda$ , получаем

$$\tilde{S}(a) B^\mu S(a) = a^\mu_\lambda B^\lambda. \quad (1.3.4)$$

В случае бесконечного малого преобразования Лоренца  $a^\mu_\lambda = \delta^\mu_\lambda + \epsilon^\mu_\lambda$ ,  $S(a) = 1 - \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}$  (см. (1.1.14)) и, следовательно,

$$B^\mu \Sigma_{\lambda\rho} + \tilde{\Sigma}_{\lambda\rho} B^\mu = i(\delta^\mu_\lambda B_\rho - \delta^\mu_\rho B_\lambda). \quad (1.3.5)$$

Отсюда видно, что матрицы  $B^\mu$  нельзя выбрать произвольно. Действительно, полагая  $\rho = k$ ,  $\mu = \lambda = 0$ , находим

$$B_k = -i(B^0 \Sigma_{0k} + \tilde{\Sigma}_{0k} B^0). \quad (1.3.6)$$

Таким образом, пространственные компоненты матриц  $B_\mu$  полностью определяются временной компонентой  $B^0$  (неприводимые представления матриц  $\Sigma_{\mu\nu}$  находятся из (1.1.33)).

Отметим также соотношение

$$B^0 \Sigma_{ik} + \tilde{\Sigma}_{ik} B^0 = 0, \quad (1.3.7)$$

которое вытекает из (1.3.5), если положить  $\mu = 0$ ,  $\lambda = i$ ,  $\rho = k$ .

В случае свободных полей величина  $U$  квадратична относительно функций поля:

$$U(\chi) = \frac{1}{2} \chi \mathfrak{E} \chi, \quad \mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} = \mathfrak{E}^+, \quad (1.3.8)$$

где  $\mathfrak{E}$  — матрица, действующая на индекс поля. Из требования инвариантности  $U(\chi)$  относительно преобразований Лоренца

$$U(\chi(x)) = U(\chi'(x'))$$

следует, что матрица  $\mathfrak{E}$  должна удовлетворять соотношению

$$\tilde{S}(a) \mathfrak{E} S(a) = \mathfrak{E} \quad (1.3.9)$$

или

$$\tilde{\Sigma}_{\mu\nu} \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \Sigma_{\mu\nu} = 0.$$

Считая, что матрица  $\mathfrak{E}$  несингулярна, можно ввести матрицы

$$\Gamma^\mu = \mathfrak{E}^{-1} B^\mu \quad (1.3.10)$$

и представить лагранжиан свободного поля в виде

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\chi} \Gamma^\mu \partial_\mu \chi - \frac{1}{2} \bar{\chi} \chi, \quad \bar{\chi} = \chi \mathfrak{E}. \quad (1.3.11)$$

Заметим, что вследствие (1.3.9), (1.3.10) соотношение (1.3.4) можно представить в виде

$$S^{-1}(a) \Gamma^\mu S(a) = a^\mu \vphantom{\Gamma^\mu} \Gamma^\nu. \quad (1.3.12)$$

Отсюда и из (1.1.14) следует, что

$$[\Gamma^\mu, \Sigma_{\lambda\rho}] = i(\delta_\lambda^\mu \Gamma_\rho - \delta_\rho^\mu \Gamma_\lambda).$$

Обратимся к уравнениям поля (1.3.2). Чтобы изучить эволюцию поля, необходимо из уравнений (1.3.2) найти  $\partial_0 \chi$ . Однако матрица  $B^0$  может не иметь обратной (т. е.  $\det B^0 = 0$ ), в этом случае величины  $\partial_0 \chi$ , вообще говоря, нельзя выразить через  $\chi$  и  $\partial_k \chi$ . Физический смысл этой ситуации в том, что не все компоненты поля являются динамически независимыми. Для того чтобы выделить динамически независимые компоненты, отметим, что матрица  $B^0$  антисимметрична. Поэтому с помощью некоторого ортогонального преобразования  $V$ ,  $V\tilde{V} = 1$  ее можно привести к виду

$$\tilde{V}B^0V = \bar{B}^0, \quad \bar{B}^0 = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & & & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & & & & & & \\ & & & & a_p & & & & & & & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.3.13)$$

где  $a_k$  — двухрядные матрицы

$$a_k = \lambda_k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, p.$$

(Это связано с тем, что матрица в вещественном евклидовом пространстве имеет только одномерные и двумерные инвариантные подпространства; одномерные подпространства антисимметричной матрицы могут принадлежать только собственному значению нуль.)

Введем далее вместо поля  $\chi$  поле  $\varphi = V^{-1}\chi$ . Тогда лагранжиан (1.3.1) в новых переменных примет вид

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \varphi \bar{B}^\mu \partial_\mu \varphi - U(V\varphi), \quad \bar{B}^\mu = \tilde{V}B^\mu V, \quad (1.3.14)$$

а уравнения поля (1.3.2) вид

$$i\bar{B}^0 \partial_0 \varphi = -i\bar{B}^k \partial_k \varphi + \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

(мы учли, что  $\tilde{V} \frac{\partial U}{\partial \chi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}$ ). Учитывая далее (1.3.13), перепишем последние уравнения в виде

$$i(\bar{B}^0)_{\alpha\beta} \partial_0 \varphi_\beta = -i(\bar{B}^k \partial_k \varphi)_\alpha + \frac{\partial U}{\partial \varphi_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, m = 2p, \quad (1.3.15)$$

$$-i(\bar{B}^k \partial_k \varphi)_s + \frac{\partial U}{\partial \varphi_s} = 0, \quad s = m+1, \dots, n, \quad (1.3.16)$$

где индексами  $\alpha$  и  $\beta$  пронумерованы первые  $m$  строк и столбцов матрицы  $B^0$ , а индексом  $s$  остальные строки и столбцы.

Так как матрица  $\bar{B}_{\alpha\beta}^0$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, m$ ) имеет обратную, то уравнения (1.3.15), определяющие изменение со временем величин  $\varphi_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ), представляют собой собственно уравнения поля; величины  $\varphi_\alpha$ , являющиеся динамически независимыми (их можно задавать произвольно в начальный момент времени), называются в этой связи динамически независимыми компонентами поля. Видим, что число динамически независимых компонент всегда четное.

Уравнения (1.3.16) представляют собой уравнения связи, с помощью которых компоненты поля  $\varphi_s$  ( $s = m + 1, \dots, n$ ) можно выразить через динамически независимые переменные  $\varphi_\alpha$  и их пространственные производные.

Преобразуем уравнения связей. Используя (1.3.6), находим

$$B^l = -ig^{ls} (B^0 \Sigma_{0s} + \tilde{\Sigma}_{0s} B^0).$$

Поэтому согласно (1.3.13)

$$(\bar{B}^l)_{aj} = -ig^{ls} (\tilde{\Sigma}_{0s} \bar{B}^0)_{aj}, \quad a = m + 1, \dots, n,$$

где  $\bar{\Sigma}_{\mu\nu} = \tilde{V} \Sigma_{\mu\nu} V$ . Подставляя полученное выражение для  $(\bar{B}^l)_{aj}$  в уравнения связи (1.3.16), находим

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_a} = -g^{ls} \partial_l \varphi_\alpha (\bar{B}^0 \bar{\Sigma}_{0s})_{\alpha a}, \quad a = m + 1, \dots, n. \quad (1.3.17)$$

Эти уравнения являются алгебраическими (а не дифференциальными) относительно  $\varphi_a$  и с их помощью компоненты поля  $\varphi_a$  можно выразить через динамически независимые переменные  $\varphi_\alpha$  и их пространственные производные  $\partial_k \varphi_\alpha$ .

Возможны, однако, такие ситуации, когда не все уравнения связей являются независимыми (это наблюдается при наличии калибровочной инвариантности, см. § 1.9). При этом некоторые из компонент  $\varphi_a$  нельзя выразить через  $\varphi_\alpha$ .

**1.3.2. Уравнения поля в форме скобок Пуассона.** Уравнениям движения динамически независимых компонент поля (1.3.15) можно придать форму скобок Пуассона аналогично тому, как это делается в аналитической механике. С этой целью найдем функциональную производную от энергии поля  $\mathcal{H}$  по  $\varphi_\alpha(x)$  ( $x^0$  — фиксировано). Энергия поля определяется формулой (1.2.3)

$$\mathcal{H} \equiv P^0 = \int d^3x T^{00}(x),$$

где плотность энергии  $T^{00}$  согласно (1.2.4) имеет вид

$$T^{00}(x) = U(\varphi) - \frac{i}{2} \varphi \bar{B}^k \partial_k \varphi. \quad (1.3.18)$$

Последняя величина зависит как от динамически независимых переменных поля  $\varphi_\alpha(x)$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ), так и от остальных компонент поля  $\varphi_a(x)$  ( $a = m + 1, \dots, n$ ). С помощью уравнений связи  $\varphi_a(x)$

можно выразить через  $\varphi_\alpha(x)$ :

$$\varphi_a(x) \equiv \varphi_a(x; \varphi_\alpha(x', t)).$$

В результате  $U(\varphi)$  станет функционалом  $\varphi_\alpha(x)$ :

$$U(\varphi_\alpha(x), \varphi_a(x; \varphi_\alpha(x', t))) \equiv U'(\varphi_\alpha(x', t)).$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\delta U'(\varphi_\alpha(x', t))}{\delta \varphi_\alpha(x)} &= \frac{\partial U}{\partial \varphi_\alpha(x)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{\partial U}{\partial \varphi_a(x')} \frac{\delta \varphi_a(x', t)}{\delta \varphi_\alpha(x)}, \\ \frac{\delta \varphi(x', t) \bar{B}^k \partial'_k \varphi(x', t)}{\delta \varphi_\alpha(x)} &= \left\{ \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \varphi_\alpha(x)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{\partial \varphi(x')}{\partial \varphi_a(x')} \frac{\delta \varphi_a(x')}{\delta \varphi_\alpha(x)} \right\} \times \\ &\times \bar{B}^k \partial'_k \varphi(x') + (\varphi \bar{B}^k)_\alpha \partial'_k \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + (\varphi \bar{B}^k)_a \partial'_k \frac{\delta \varphi_a(x')}{\delta \varphi_\alpha(x)}, \end{aligned}$$

где предполагается, что  $t' = t$ . Поэтому, учитывая уравнения связей (1.3.16) и антисимметрию матриц  $\bar{B}^k$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta T^{00}(x')}{\delta \varphi_\alpha(x)} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi_\alpha} - i(\bar{B}^k \partial_k \varphi(x))_\alpha \right) + \\ &+ \frac{i}{2} \partial'_k \left\{ \frac{\delta \varphi(x')}{\delta \varphi_\alpha(x)} \bar{B}^k \varphi(x') \right\}, \quad t' = t. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi_\alpha(x)} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_\alpha(x)} - i(\bar{B}^k \partial_k \varphi(x))_\alpha.$$

Таким образом, согласно (1.3.15) уравнения поля для динамически независимых компонент имеют вид

$$i(\bar{B}^0)_{\alpha\beta} \partial_0 \varphi_\beta(x) = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi_\alpha(x)}$$

или

$$\partial_0 \varphi_\alpha(x) = -i(\bar{B}^{0-1})_{\alpha\beta} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi_\beta(x)} \quad (1.3.19)$$

$((\bar{B}^{0-1})_{\alpha\beta})$  — матрица, обратная  $\bar{B}^0$  в подпространстве динамически независимых переменных,  $(\bar{B}^{0-1})_{\alpha\delta} (\bar{B}^0)_{\delta\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ . Отсюда следует, что если  $\mathcal{F}$  представляет собой некоторый функционал динамически независимых переменных  $\varphi_\alpha(x, t)$  ( $t$  — фиксировано), то

$$\partial_0 \mathcal{F} = -i \int d^3x \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi_\alpha(x)} (\bar{B}^{0-1})_{\alpha\beta} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi_\beta(x)}.$$

Определим скобку Пуассона

$$[A; B] = -i \int d^3x \frac{\delta A}{\delta \varphi_\alpha(x)} (\bar{B}^{0-1})_{\alpha\beta} \frac{\delta B}{\delta \varphi_\beta(x)}. \quad (1.3.20)$$

Тогда  $\partial_0 \mathcal{F} = [\mathcal{F}; \mathcal{H}]$  и, следовательно, уравнения движения для компонент поля  $\chi_i$  имеют вид

$$\partial_0 \chi_i(x) = [\chi_i(x); \mathcal{H}]. \quad (1.3.21)$$

Для динамически независимых компонент поля скобка Пуассона

$$[\varphi_\alpha(x); \varphi_\beta(x')]_{t=t'} = -i(\bar{B}^{0-1})_{\alpha\beta} \delta(x - x').$$

Отсюда и из (1.3.13) следует

$$[(B^{0\lambda}(x))_i; (B^{0\lambda}(x'))_j]_{t=t'} = -iB_{ij}^0 \delta(x - x') \quad (1.3.22)$$

(эта формула справедлива для всех компонент поля).

Отметим, наконец, что для скобок Пуассона справедливо соотношение

$$[A; BC] = B[A; C] + [A; B]C. \quad (1.3.23)$$

**1.3.3. Канонические преобразования и их генераторы в классической механике.** Выше мы рассматривали вариации поля, связанные с пространственно-временными преобразованиями и преобразованиями внутренней симметрии, причем эти вариации определялись не только бесконечно малыми параметрами, характеризующими преобразование, но были также функционалами самого поля. Покажем, что вариации, связанные с преобразованиями внутренней симметрии и преобразованиями пространственных координат, можно рассматривать как канонические преобразования поля в смысле аналитической механики.

В аналитической механике бесконечно малое преобразование обобщенных координат и импульсов  $q_i, p_i$

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \delta q_i(q, p), \quad p_i \rightarrow p'_i = p_i + \delta p_i(q, p) \quad (1.3.24)$$

(будем предполагать, что  $\delta q$  и  $\delta p$  не зависят явно от  $t$ ) называется каноническим, если

$$\delta q_i = [q_i; G]; \quad \delta p_i = [p_i; G], \quad (1.3.25)$$

где  $[A; B]$  — скобка Пуассона,

$$[A; B] = \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \quad (1.3.26)$$

и  $G \equiv G(q, p)$  — произвольная бесконечно малая функция  $q$  и  $p$ , которая называется генератором бесконечно малого канонического преобразования. Из (1.3.25), (1.3.26) следует, что

$$\delta q_i = \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad \delta p_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}. \quad (1.3.27)$$

В классической механике функция Лагранжа  $\mathcal{L}$  определяется формулой

$$\mathcal{L} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(q, p), \quad (1.3.28)$$

где  $\mathcal{H}$  — гамильтониан системы. Вариация действия

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}$$

( $t_1$ ,  $t_2$  не варьируются), очевидно, определяется так:

$$\delta W = G_1(t_2) - G_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{F}(t),$$

$$G_1(t) = p_i \delta q_i, \quad \mathcal{F}(t) = \delta p_i \left( \dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left( \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right). \quad (1.3.29)$$

Из принципа стационарного действия

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{F}(t) = 0$$

следуют уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}.$$

Канонические преобразования обладают тем свойством, что для них вариация кинематической части функции Лагранжа  $\mathcal{L}_K \equiv p_i \dot{q}_i$  сводится к полной производной по времени от некоторой функции  $q$  и  $p$ :

$$\delta \mathcal{L}_K = - \frac{d}{dt} G_2(q, p), \quad (1.3.30)$$

причем генератором этих канонических преобразований будет функция

$$G(q, p) \equiv G_1(t) + G_2(t), \quad G_2(t) \equiv G_2(q, p). \quad (1.3.31)$$

Действительно, пусть преобразования (1.3.24) являются каноническими. Тогда согласно (1.3.27)

$$\delta \mathcal{L}_K = - \dot{q}_i \frac{\partial G}{\partial q_i} + p_i \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial p_i} \equiv - \frac{d}{dt} \left( G - p_i \frac{\partial G}{\partial p_i} \right).$$

Таким образом, справедлива формула (1.3.30), в которой

$$G_2 = G - p_i \frac{\partial G}{\partial p_i} = G - p_i \delta q_i = G - G_1.$$

Справедливо и обратное утверждение: если преобразования (1.3.24) удовлетворяют соотношению (1.3.30), то они являются каноническими, причем генератор этих преобразований определяется формулой

$$G = G_1 + G_2, \quad G_1 = p_i \delta q_i.$$

Действительно, из (1.3.30) следует

$$\delta p_i \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + p_i \frac{\partial \delta q_i}{\partial p_j} \dot{p}_j = - \frac{\partial G_2}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial G_2}{\partial p_i} \dot{p}_i,$$

поэтому

$$\delta p_i + p_i \frac{\partial \delta q_i}{\partial p_i} = - \frac{\partial G_2}{\partial q_i}, \quad p_i \frac{\partial \delta q_i}{\partial p_i} = - \frac{\partial G_2}{\partial p_i}.$$

Эти формулы можно переписать в виде

$$\delta p_i = - \frac{\partial}{\partial q_i} (G_2 + p_i \delta q_i), \quad \delta q_i = \frac{\partial}{\partial p_i} (G_2 + p_i \delta q_i),$$

откуда следует сделанное утверждение.



Отметим, что вариацию кинематической части действия

$$W_K = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}_K$$

для канонических преобразований согласно (1.3.30) можно представить в виде

$$\delta W_K = G_2(t_1) - G_2(t_2).$$

Таким образом можно сказать, что канонические преобразования оставляют инвариантной кинематическую часть лагранжиана (и соответствующую ей часть действия), так как при таких преобразованиях к  $\mathcal{L}_K$  добавляется полная производная по времени от функции  $G_2$ , что не изменяет уравнений движения системы.

**1.3.4. Канонические преобразования и их генераторы для классических полей.** Возвратимся к вариациям поля. Рассмотрим бесконечно малые преобразования динамически независимых компонент поля  $\varphi_\alpha$ :

$$\varphi_\alpha(x) \rightarrow \varphi'_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x) + \delta\varphi_\alpha(x), \quad \delta\varphi_\alpha(x) = F_\alpha(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}', t)), \quad (1.3.32)$$

где  $F_\alpha$  — некоторый функционал функций  $\varphi_\alpha(\mathbf{x}', t)$ , не зависящий явно от времени. Бесконечно малые преобразования (1.3.32) будем называть каноническими, если выполняется соотношение

$$\delta\varphi_\alpha(x) = [\varphi_\alpha(x); G(t)], \quad (1.3.33)$$

где  $G(t)$  — произвольный функционал компонент поля  $\varphi_\alpha(x)$ , относящихся к моменту времени  $t$  (он называется генератором канонических преобразований (1.3.32)) и скобки Пуассона определяются формулой (1.3.20).

Если вариации  $\delta\varphi_a$  ( $a = m + 1, \dots, n$ ) определяются через  $\delta\varphi_\alpha$  с помощью уравнений связи (1.3.17), то формула (1.3.33) будет справедлива для всех компонент поля

$$\delta\varphi(x) = [\varphi(x); G(t)] \quad (1.3.33')$$

(это следует из того, что уравнения связи не содержат временных производных от  $\varphi_\alpha$ ).

Из (1.3.33) и (1.3.20) следует, что бесконечно малые канонические преобразования определяются формулой

$$\delta\varphi_\alpha(x) = -i((\bar{B}^0)^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\delta G(t)}{\delta\varphi_\beta(x)}. \quad (1.3.34)$$

Определим теперь кинематическую часть лагранжиана

$$\mathcal{L}_K = \frac{i}{2} \chi B^0 \partial_0 \chi = \frac{i}{2} \varphi \bar{B}^0 \partial_0 \varphi \quad (1.3.35)$$

и соответствующую ей кинематическую часть действия

$$W_K = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}_K \quad (1.3.36)$$

(мы считаем здесь, что гиперповерхности, ограничивающие область интегрирования, представляют собой гиперплоскости, ортогональные оси времени).

Так же как в классической механике, преобразования (1.3.32) будут каноническими в том и только том случае, если они оставляют инвариантной кинематическую часть действия, т. е. если будет справедливо соотношение

$$\delta W_K = G_2(t_1) - G_2(t_2), \quad (1.3.37)$$

где  $G_2(t)$  — некоторый функционал  $\varphi_\alpha(x)$  ( $t$  — фиксировано), зависящий от времени только через  $\varphi_\alpha(x)$ . (Инвариантность кинематической части действия в смысле (1.3.37) означает, что при варьировании функции Лагранжа к ней добавляется полная производная по времени от функционала  $G_2(t)$ .) Генератором этих канонических преобразований является функционал

$$\begin{aligned} G(t) &= G_1(t) + G_2(t), \\ G_1(t) &= \frac{i}{2} \int d^3x \varphi(x) \bar{B}^0 \delta \varphi(x) \equiv \frac{i}{2} \int d^3x \chi B^0 \delta \chi. \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

Действительно, пусть преобразования (1.3.32) — канонические. Тогда согласно (1.3.35), (1.3.34)

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_K &= \frac{i}{2} \delta \varphi \bar{B}^0 \partial_0 \varphi + \frac{i}{2} \varphi B^0 \partial_0 \delta \varphi = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\delta G}{\delta \varphi} \partial_0 \varphi + \frac{1}{2} \varphi \partial_0 \frac{\delta G}{\delta \varphi} = \frac{1}{2} \partial_0 \left( \varphi_\alpha \frac{\delta G}{\delta \varphi_\alpha} \right) - \frac{\partial G}{\delta \varphi_\alpha} \partial_0 \varphi_\alpha \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\delta W_K = G_2(t_1) - G_2(t_2),$$

где

$$G_2(t) = G(t) - \frac{1}{2} \int d^3x \varphi_\alpha(x) \frac{\delta G}{\delta \varphi_\alpha(x)}.$$

Пусть теперь преобразования (1.3.32) удовлетворяют соотношению (1.3.37). Покажем, что в данном случае эти преобразования являются каноническими, причем генератор этих канонических преобразований связан с функционалом  $G_2$  соотношением (1.3.38). Отметим с этой целью, что согласно (1.3.35)

$$\delta \mathcal{L}_K = \frac{i}{2} \delta \varphi \bar{B}^0 \partial_0 \varphi + \frac{i}{2} \varphi \bar{B}^0 \int_{t'=t} d^3x' \frac{\delta \delta \varphi(x)}{\delta \varphi(x')} \partial_0 \varphi(x')$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \delta W_K &= \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left\{ \frac{i}{2} \delta \varphi(x) \bar{B}^0 \partial_0 \varphi(x) + \right. \\ &\left. + \frac{i}{2} \int_{t'=t} d^3x' \varphi(x') \bar{B}^0 \frac{\delta \delta \varphi(x')}{\delta \varphi(x)} \partial_0 \varphi(x) \right\}. \end{aligned}$$

Кроме того, согласно (1.3.37)

$$\delta W_K = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial G_2(t)}{\partial t} = - \int_{t_1}^{t_2} d^4x \frac{\delta G_2(t)}{\delta \varphi_\alpha(x)} \partial_0 \varphi_\alpha(x).$$

Из сравнения этих формул следует

$$\frac{i}{2} \delta \varphi(x) \bar{B}^0 + \frac{i}{2} \int_{t'=t} a^3 x' \varphi(x') \bar{B}^0 \frac{\delta \delta \varphi(x')}{\delta \varphi(x)} = - \frac{\delta G_2(t)}{\delta \varphi(x)},$$

или

$$i \delta \varphi_\beta(x) \bar{B}_{\beta\alpha}^0 = - \frac{\delta}{\delta \varphi_\alpha(x)} \left( G_2(t) + \frac{i}{2} \int_{t'=t} d^3x' \varphi(x') \bar{B}^0 \delta \varphi(x') \right),$$

что согласно (1.3.34), (1.3.38) доказывает наше утверждение.

Рассмотрим несколько примеров построения генераторов вариаций, оставляющих инвариантной кинематическую часть действия.

Если  $\delta \varphi_\alpha(x)$  — произвольные функции  $x$ , не зависящие от функций поля, то они оставляют инвариантной кинематическую часть действия, причем

$$G_2(t) = - \frac{i}{2} \int d^3x \delta \varphi \bar{B}^0 \varphi.$$

Поэтому согласно (1.3.38) соответствующий этим вариациям генератор имеет вид

$$G(t) = -i \int d^3x \delta \varphi \bar{B}^0 \varphi, \quad (1.3.39)$$

причем соотношение

$$\delta \varphi(x) = [\varphi(x), G(t)], \quad (1.3.40)$$

очевидно, выполняется вследствие определения скобок Пуассона (1.3.20).

Пусть далее вариации  $\delta \chi(x)$  связаны с пространственными смещениями и поворотами

$$\delta \chi(x) = - \varepsilon^k \partial_k \chi(x) + \frac{i}{2} \varepsilon^{kl} \{ - \Sigma_{kl} + i(x_l \partial_k - x_k \partial_l) \} \chi(x).$$

Эти вариации согласно (1.3.4) оставляют, очевидно, инвариантной кинематическую часть действия, причем  $G_2(t) = 0$ . Соответствующий им генератор определяется формулой (см. (1.3.38))

$$G = - \varepsilon_k P^k + \frac{1}{2} \varepsilon_{kl} M^{kl}, \quad (1.3.41)$$

$$P^k = \frac{i}{2} \int d^3x \chi(x) B^0 \partial^k \chi(x),$$

$$M^{kl} = \frac{1}{2} \int d^3x \chi(x) B^0 \{ \Sigma^{kl} - i(x^l \partial^k - x^k \partial^l) \} \chi(x).$$

Видим (см. (1.2.2)), что величины  $P^k$  и  $M^{kl}$  представляют собой компоненты импульса и момента импульса. Так как для вариаций,

оставляющих инвариантной кинематическую часть действия, справедлива формула (1.3.33), то согласно (1.3.41) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \partial^k \chi(x) &= [\chi(x); P^k], \\ -i \{ \Sigma^{kl} - i(x^l \partial^k - x^k \partial^l) \} \chi(x) &= [\chi(x); M^{kl}]. \end{aligned} \quad (1.3.42)$$

Первую из этих формул вместе с формулой (1.3.21) можно записать в виде

$$\partial^\mu \chi(x) = [\chi(x); P^\mu]. \quad (1.3.43)$$

Вычисляя скобку Пуассона для  $\chi(x)$  и  $M^{0k}$ , можно убедиться, что формула (1.3.42) справедлива не только для пространственных, но и для пространственно-временных индексов:

$$-i \{ \Sigma^{\mu\nu} - i(x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu) \} \chi(x) = [\chi(x); M^{\mu\nu}]. \quad (1.3.44)$$

Рассмотрим вариации поля, связанные с внутренними симметриями:

$$\delta \chi(x) = -i \varepsilon^a T_a \chi(x).$$

Эти вариации оставляют инвариантным полный интеграл действия, а следовательно, и его кинематическую часть, причем  $G_2(t) = 0$ . Поэтому генератором этих вариаций будет функционал

$$G(t) = \varepsilon^a Q_a, \quad Q_a = \frac{1}{2} \int d^3x \chi(x) B^0 T_a \chi(x).$$

Мы видим, что величины  $Q_a$  представляют собой обобщенные заряды, связанные с внутренними симметриями (см. (1.2.13)). Поэтому согласно (1.3.33) справедливо соотношение

$$-iT_a \chi(x) = [\chi(x); Q_a]. \quad (1.3.45)$$

## § 1.4. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

**1.4.1. Скалярное поле.** Перейдем к изучению конкретных физических полей. Начнем со скалярного поля, описываемого одной комплексной функцией  $\varphi(x)$ , преобразующейся при собственных преобразованиях Лоренца  $x \rightarrow x' = ax$  по закону

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x). \quad (1.4.1)$$

Комплексное скалярное поле описывает частицы со спином нуль, обладающие зарядом. Лагранжиан этого поля, инвариантный относительно преобразования (1.4.1), имеет вид

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m^2 \varphi \varphi^*.$$

Согласно (1.1.5) этот лагранжиан приводит к уравнениям поля второго порядка

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \varphi = 0, \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \varphi^* = 0, \quad (1.4.2)$$

где  $m$  — масса частиц, связанных с полем. Это видно из того, что решение уравнений (1.4.2) в виде плоских волн

$$\varphi(x) = \varphi_0 \exp(-ipx), \quad px = p_0 t - \mathbf{p} \mathbf{x}$$

приводит к дисперсионному соотношению

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + m^2.$$

Уравнение (1.4.2) называется уравнением Клейна — Гордона. Ему можно придать вид уравнений первого порядка, если кроме  $\varphi$ ,  $\varphi^*$  ввести 4-векторы  $\varphi_\mu$ ,  $\varphi_\mu^*$ :

$$\varphi_\mu = \partial_\mu \varphi, \quad \varphi_\mu^* = \partial_\mu \varphi^*.$$

В результате уравнение  $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi = 0$  заменяется системой уравнений

$$\partial^\mu \varphi_\mu + m^2 \varphi = 0, \quad \partial_\mu \varphi - \varphi_\mu = 0. \quad (1.4.3)$$

Этим уравнениям соответствует лагранжиан

$$\mathcal{L} = \varphi_\mu \partial^\mu \varphi^* + \varphi_\mu^* \partial^\mu \varphi - \varphi_\mu^* \varphi^\mu - m^2 \varphi \varphi^*, \quad (1.4.4)$$

инвариантный относительно преобразований Лоренца

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x), \quad \varphi_\mu(x) \rightarrow \varphi'_\mu(x') = a_\mu{}^\nu \varphi_\nu(x)$$

и фазовых преобразований

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{i\alpha} \varphi(x).$$

Второе из уравнений (1.4.3) при  $\mu = 1, 2, 3$  представляет собой уравнение связи (см. § 1.3). Мы могли бы, как и в § 1.3, пользоваться только вещественными полями. Для этого достаточно положить  $\varphi = \varphi^1 + i\varphi^2$ ,  $\varphi_\mu = \varphi_\mu^1 + i\varphi_\mu^2$  и считать поля  $\varphi^1$ ,  $\varphi^2$  вещественными.

Тензор энергии импульса и вектор тока, соответствующие лагранжиану (1.4.4), определяются формулами

$$T^{\mu\nu} = (m^2 \varphi \varphi^* - \varphi_\lambda \varphi^{\lambda*}) g^{\mu\nu} + \partial^\mu \varphi^* \varphi^{\nu*} + \partial^\mu \varphi \varphi^{\nu*} \\ \mathcal{J}^\mu = i(\partial^\mu \varphi^* \varphi - \varphi^* \partial^\mu \varphi) \quad (1.4.5)$$

(отметим, что для вещественного скалярного поля ток обращается в нуль).

Легко найти общее решение волнового уравнения (1.4.2) в виде суперпозиции плоских монохроматических волн. Волновое уравнение (1.4.2) имеет, очевидно, решения  $\varphi(x) \sim \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x} \pm ip_0 t)$ , где  $\mathbf{p}$  — волновой вектор и  $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  — частота волны. Поэтому общее решение можно представить в виде суперпозиции волн  $\exp(i\mathbf{p}\mathbf{x} + ip_0 t)$ ,  $\exp(i\mathbf{p}\mathbf{x} - ip_0 t)$  или волн  $\exp(i\mathbf{p}\mathbf{x})$ ,  $\exp(-i\mathbf{p}\mathbf{x})$ , где  $p_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ .

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \{a_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} + b_{\mathbf{p}}^* e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}\}. \quad (1.4.6)$$

Здесь  $a_{\mathbf{p}}$ ,  $b_{\mathbf{p}}^*$  — комплексные коэффициенты разложения, зависящие от  $\mathbf{p}$  ( $V = L_1 L_2 L_3$  — нормировочный объем, вводимый для того, чтобы сделать волновые векторы  $\mathbf{p}$  дискретными,  $p_i = \frac{2\pi n_i}{L_i}$ ,  $n_i$  — целые числа; выделение множителя  $1/\sqrt{2p_0}$  важно в квантовой теории).

Уравнение (1.4.3) можно записать в виде

$$(\beta_\mu \partial^\mu + m) \Phi(x) = 0, \quad (1.4.7)$$

где  $\Phi(x)$  — пятикомпонентная функция поля:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{m} \varphi(x) \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \varphi_\mu(x) \end{pmatrix}$$

и  $\beta_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) — четыре пятирядные матрицы (явный вид матриц мы здесь не приводим), удовлетворяющие соотношениям

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho + \beta_\rho \beta_\nu \beta_\mu = g_{\mu\nu} \beta_\rho + g_{\rho\nu} \beta_\mu. \quad (1.4.8)$$

**1.4.2. Векторное поле.** Следующим по сложности является векторное комплексное поле, описываемое 4-вектором  $\varphi_\mu(x)$ , преобразующимся при собственных преобразованиях Лоренца по закону

$$\varphi_\mu(x) \rightarrow \varphi'_\mu(x') = a_\mu^\nu \varphi_\nu(x).$$

Поля  $\varphi_\mu(x)$ ,  $\varphi_\mu^*(x)$  удовлетворяют уравнениям

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi_\nu = 0, \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi_\nu^* = 0, \quad (1.4.9)$$

где  $m$  — масса частиц, связанных с полем. Такому же уравнению удовлетворяет скалярное поле  $\varphi(x) = \partial^\mu \varphi_\mu(x)$ , поэтому, чтобы исключить возможность существования такого поля, нужно наложить на  $\varphi_\mu(x)$  добавочное условие

$$\partial^\mu \varphi_\mu(x) = 0. \quad (1.4.10)$$

Поле  $\varphi_\mu(x)$  с учетом этого добавочного условия описывает частицы со спином единица.

От уравнений поля второго порядка можно перейти к уравнениям поля первого порядка. Для этого введем антисимметричный тензор

$$\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu. \quad (1.4.11)$$

Тогда уравнения (1.4.9) примут вид

$$\partial^\nu \varphi_{\mu\nu} - m^2 \varphi_\mu = 0, \quad \partial_\nu \varphi_\mu - \partial_\mu \varphi_\nu + \varphi_{\mu\nu} = 0 \quad (1.4.12)$$

(первое уравнение при  $\mu = 0$  и второе уравнение при  $\mu, \nu = 1, 2, 3$  являются уравнениями связей). Этим уравнениям соответствует лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu*} (\partial_\nu \varphi_\mu - \partial_\mu \varphi_\nu) + \frac{1}{2} (\partial_\nu \varphi_\mu^* - \partial_\mu \varphi_\nu^*) \varphi^{\mu\nu} + \\ & + \frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu}^* \varphi^{\mu\nu} + m^2 \varphi_\mu^* \varphi^\mu, \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

инвариантный относительно преобразований Лоренца

$$\varphi_\mu(x) \rightarrow \varphi'_\mu(x') = a_\mu^\nu \varphi_\nu(x),$$

$$\varphi_{\mu\nu}(x) \rightarrow \varphi'_{\mu\nu}(x') = a_\mu^\lambda a_\nu^\rho \varphi_{\lambda\rho}(x)$$

и фазовых преобразований

$$\begin{aligned}\varphi_{\mu}(x) &\rightarrow \varphi'_{\mu}(x) = e^{i\alpha}\varphi_{\mu}(x), \\ \varphi_{\mu\nu}(x) &\rightarrow \varphi'_{\mu\nu}(x) = e^{i\alpha}\varphi_{\mu\nu}(x).\end{aligned}$$

Тензоры энергии — импульса и вектор тока, соответствующие лагранжиану (1.4.13), определяются формулами

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu} &= -\left(m^2\varphi_{\lambda}^*\varphi^{\lambda} - \frac{1}{2}\varphi_{\lambda\rho}^*\varphi^{\lambda\rho}\right)g^{\mu\nu} + \partial^{\mu}\varphi^{\rho}\varphi_{\rho}^{*\nu} + \partial^{\mu}\varphi^{\rho*}\varphi_{\rho}^{\nu}, \quad (1.4.14) \\ \mathcal{J}^{\mu} &= -i(\varphi^{\rho*}\varphi_{\rho}^{\mu} - \varphi^{\rho}\varphi_{\rho}^{\mu*}).\end{aligned}$$

Векторное поле  $\varphi_{\mu}(x)$ , как и скалярное, можно разложить на плоские волны

$$\varphi_{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\rho, \lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \{a_{\rho\lambda} e_{\rho\mu}^{(\lambda)} e^{-i\rho x} + b_{\rho\lambda}^* e_{\rho\mu}^{(\lambda)*} e^{i\rho x}\}, \quad (1.4.15)$$

где  $\rho x = \rho_0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ ,  $\rho_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  и  $e_{\rho\mu}^{(\lambda)}$  — единичные векторы поляризации, удовлетворяющие вследствие (1.4.10) условию поперечности

$$e_{\rho\mu}^{(\lambda)} p^{\mu} = 0, \quad \lambda = 1, 2, 3. \quad (1.4.16)$$

Так как векторы поляризации  $e_{\rho\mu}^{(\lambda)}$  являются пространственно-подобными (они ортогональны временноподобному вектору  $p^{\mu}$ ), то условие ортонормировки для них можно записать в виде

$$e_{\rho\mu}^{(\lambda)} e_{\rho}^{(\lambda')\mu*} = -\delta_{\lambda\lambda'}. \quad (1.4.17)$$

Дополним векторы  $e_{\rho\mu}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ) вектором  $e_{\rho\mu}^{(0)} \equiv p_{\mu}/m$  до полной системы векторов в 4-пространстве. Очевидно, векторы  $e_{\rho\mu}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 0, 1, 2, 3$ ) согласно (1.4.16), (1.4.17) удовлетворяют условиям ортонормировки

$$e_{\rho\mu}^{(\lambda)} e_{\rho}^{(\lambda')\mu*} = \zeta_{\lambda} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \zeta_{\lambda} = \begin{cases} 1, & \lambda = 0, \\ -1, & \lambda = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (1.4.18)$$

Так как произвольный вектор  $f_{\mu}$  можно разложить по векторам  $e_{\rho\mu}^{(\lambda)}$ :

$$f_{\mu} = \sum_{\lambda=0}^3 c_{\lambda} e_{\rho\mu}^{(\lambda)}, \quad c_{\lambda} = f_{\mu} e_{\rho}^{(\lambda)\mu*} \zeta_{\lambda},$$

то

$$f_{\mu} = f_{\nu} \sum_{\lambda=0}^3 e_{\rho\mu}^{(\lambda)} e_{\rho}^{(\lambda)\nu*} \zeta_{\lambda}.$$

Поэтому условие полноты системы  $e_{\rho\mu}^{(\lambda)}$  имеет вид

$$\sum_{\lambda=0}^3 e_{\rho\mu}^{(\lambda)} e_{\rho}^{(\lambda)\nu*} \zeta_{\lambda} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad (1.4.19)$$

и, следовательно,

$$\sum_{\lambda=1}^3 e_{\rho\mu}^{(\lambda)} e_{\rho\nu}^{(\lambda)*} = -g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{m^2}.$$

Условия (1.4.16), (1.4.17) не определяют однозначно векторы  $e_{\rho\rho}^{(\lambda)}$ . Чтобы однозначно фиксировать векторы  $e_{\rho\mu}^{(\lambda)}$  (они называются векторами поляризации) введем матрицы спина векторного поля. Рассмотрим с этой целью закон преобразования  $\varphi_{\mu}(x)$  при бесконечно малых преобразованиях Лоренца. Закон преобразования 4-вектора

$$\varphi_{\mu}(x) \rightarrow \varphi'_{\mu}(x') = a_{\mu}^{\nu} \varphi_{\nu}(x)$$

в случае бесконечно малых преобразований Лоренца  $x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$  имеет вид (см. (1.1.14))

$$\varphi_{\mu}(x) \rightarrow \varphi'_{\mu}(x') = \varphi_{\mu}(x) - \frac{i}{2} \varepsilon^{\lambda\nu} (\Sigma_{\lambda\nu})_{\mu}^{\rho} \varphi_{\rho}(x),$$

где шесть четырехрядных матриц  $\Sigma_{\lambda\nu} = -\Sigma_{\nu\lambda}$  имеют следующие матричные элементы:

$$(\Sigma_{\lambda\nu})_{\mu}^{\rho} = i(g_{\lambda\mu} \delta_{\nu}^{\rho} - g_{\nu\mu} \delta_{\lambda}^{\rho}). \quad (1.4.20)$$

Матрицы спина векторного поля  $\Sigma^i$  связаны с матрицами  $\Sigma_{\lambda\nu}$  соотношением (см. (1.1.34))

$$\Sigma^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} \Sigma_{kl}.$$

Из (1.4.20) видно, что

$$\Sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.21)$$

Отсюда следует, что

$$\Sigma^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(матрицы  $\Sigma^i$  удовлетворяют соотношениям коммутации для операторов моментов (1.1.35)). Из последней формулы видно, что спин частиц, связанных с полем, равен 1 и 0. Однако нулевой спин исключается условием (1.4.16). Действительно, вектор поляризации, соответствующий нулевому спину, согласно (1.4.21) должен иметь только временную составляющую, что противоречит условию (1.4.16).



Определим векторы  $e_{p\mu}^{(\lambda)}$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned}(\Sigma \mathbf{n}) e_p^{(1)} &= e_p^{(1)}, & (\Sigma \mathbf{n}) e_p^{(2)} &= -e_p^{(2)}, \\ (\Sigma \mathbf{n}) e_p^{(3)} &= 0,\end{aligned}\tag{1.4.22}$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ . Так как  $(\Sigma)_{\alpha 0} = (\Sigma)_{0\alpha} = 0$ , то эти соотношения не определяют временной составляющей векторов  $e_{p\mu}^{(\lambda)}$ . Последняя определяется формулой (1.4.16).

Уравнения (1.4.12) можно записать в виде

$$(\beta_\mu \partial^\mu + m) \Phi(x) = 0,\tag{1.4.23}$$

где  $\Phi(x)$  — 10-компонентная функция поля, состоящая из 4-компонентной функции  $\varphi_\mu(x)$  и 6-компонентной функции  $\varphi_{\mu\nu}(x)$ :

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{m} \varphi_\mu(x) \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \varphi_{\mu\nu}(x) \end{pmatrix}$$

и  $\beta_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) — четыре десятирядные матрицы, удовлетворяющие тем же соотношениям (1.4.8), что и матрица  $\beta_\mu$ , входящие в уравнения для частиц со спином нуль. Уравнения поля в форме (1.4.12) называются уравнениями Прока, а уравнения (1.4.23) — уравнениями Даффина — Каммера.

**1.4.3. Максвелловское поле.** Вещественное векторное поле, масса частиц которого равна нулю, называется электромагнитным или максвелловским. Оно описывается 4-вектором  $\varphi_\mu(x) \equiv A_\mu(x)$  и антисимметричным тензором 2-го ранга  $\varphi_{\mu\nu}(x) \equiv F_{\mu\nu}(x)$ . Эти поля, согласно (1.4.12), удовлетворяют уравнениям

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}.\tag{1.4.24}$$

Отметим, что при  $m \neq 0$  из уравнений (1.4.12) вытекает условие  $\partial^\mu \varphi_\mu = 0$ . Если же  $m = 0$ , то это условие не обязательно должно выполняться.

Непосредственный физический смысл имеет не 4-вектор  $A_\mu$  (он называется 4-потенциалом), а антисимметричный тензор  $F_{\mu\nu}$ , который называется тензором электромагнитного поля. Не изменяя  $F_{\mu\nu}$ , можно, очевидно, подвергнуть  $A_\mu$  преобразованию

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda,\tag{1.4.25}$$

где  $\Lambda(x)$  — произвольная скалярная функция  $x$ . Это преобразование называется калибровочным. В частности, функцию  $\Lambda(x)$  можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\partial^\mu A_\mu = 0.\tag{1.4.26}$$

Такая калибровка потенциала  $A_\mu(x)$  называется лоренцевой. В этой калибровке потенциал  $A_\mu(x)$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\partial_\rho \partial^\rho A_\mu(x) = 0.\tag{1.4.27}$$

Второе из уравнений (1.4.24) эквивалентно уравнению

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \quad (1.4.28)$$

Тензор  $F_{\mu\nu}$  объединяет электрическое  $E_i$  и магнитное  $H_k$  поля:

$$F_{ijk} = \varepsilon_{jkl} H_l, \quad F_{0k} = E_k.$$

Уравнениям (1.4.24) соответствует лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (1.4.29)$$

Варьируя действие с таким лагранжианом по  $A_\mu$ , получим первое из уравнений (1.4.24), а варьируя действие по  $F_{\mu\nu}$  — второе из уравнений (1.4.24).

Используя общее выражение для канонического тензора энергии импульса (1.2.4), находим тензор энергии — импульса электромагнитного поля

$$T^{\mu\nu}(x) = \Theta^{\mu\nu}(x) + \partial_\rho \chi^{\nu\rho\mu}, \quad (1.4.30)$$

где

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} g^{\mu\nu} + F^{\rho\nu} F_\rho^\mu, \quad \chi^{\nu\rho\mu} = -F^{\nu\rho} A^\mu.$$

Второе слагаемое в выражении для  $T^{\mu\nu}$  не является калибровочно-инвариантным и поэтому не имеет физического смысла. Это слагаемое не вносит вклада в суммарный 4-импульс поля. Первое слагаемое представляет собой симметричный калибровочно-инвариантный тензор энергии — импульса (см. п. 1.2.2).

Согласно (1.2.9) тензор моментов количества движения электромагнитного поля

$$M^{\mu\nu;\rho} = x^\mu \Theta^{\nu\rho} - x^\nu \Theta^{\mu\rho}. \quad (1.4.31)$$

Общее решение волнового уравнения (1.4.27) можно представить в виде суперпозиции плоских волн  $\exp(ikx + i\omega t)$ ,  $\exp(ikx - i\omega t)$  или волн  $\exp(ikx)$ ,  $\exp(-ikx)$ , где  $kx = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{x}$ ,  $\omega = |\mathbf{k}|$ :

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{c_\mu(\mathbf{k}) e^{-ikx} + d_\mu(\mathbf{k}) e^{ikx}\}.$$

Здесь  $V$  — объем поля.

Любой вектор  $a_\mu$  можно разложить по полной системе векторов  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 0, 1, 2, 3$ ), удовлетворяющих условиям ортонормировки (см. (1.4.18); отметим, что векторы  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  не ортогональны  $k_\mu$ ):

$$g^{\mu\nu} e_{k\mu}^{(\lambda)} e_{k\nu}^{(\lambda')*} = \delta_{\lambda\lambda'} \zeta_\lambda, \quad \zeta_\lambda = \begin{cases} 1, & \lambda = 0, \\ -1, & \lambda = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.4.32)$$

и полноты

$$\sum_{\lambda=0}^3 e_{k\mu}^{(\lambda)} e_{k\nu}^{(\lambda)*} \zeta_\lambda = g_{\mu\nu}. \quad (1.4.33)$$

Поэтому

$$c_{\mu}(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=0}^3 c_{\mathbf{k}\lambda} e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)},$$

$$d_{\mu}(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=0}^3 d_{\mathbf{k}\lambda} e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)*},$$

где  $c_{\mathbf{k}\lambda}$ ,  $d_{\mathbf{k}\lambda}$  — некоторые коэффициенты. Таким образом,

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}\lambda=0}^3 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{c_{\mathbf{k}\lambda} e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)} e^{-ikx} + d_{\mathbf{k}\lambda} e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)*} e^{ikx}\}. \quad (1.4.34)$$

Условия (1.4.32), (1.4.33) не определяют однозначно векторы  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)}$ . Для того чтобы однозначно фиксировать векторы  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)}$  (они называются векторами поляризации), введем матрицы спина электромагнитного поля. Так как электромагнитное поле  $A_{\mu}(x)$  является векторным, то матрицы спина  $\Sigma^i$  определяются, очевидно, формулами (1.4.21). Определим векторы  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)}$  как собственные векторы матриц  $\Sigma^2$  и  $\Sigma_n$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ ). Вектор  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(0)}$  определим соотношениями

$$\Sigma^2 e_{\mathbf{k}}^{(0)} = 0, \quad \Sigma_n e_{\mathbf{k}}^{(0)} = 0, \quad (1.4.35)$$

откуда и из условия нормировки следует, что

$$e_{\mathbf{k}\mu}^{(0)} = (1, 0, 0, 0).$$

Вектор  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(3)}$  определим соотношениями

$$\Sigma^2 e_{\mathbf{k}}^{(3)} = 2e_{\mathbf{k}}^{(3)}, \quad \Sigma_n e_{\mathbf{k}}^{(3)} = 0, \quad (1.4.36)$$

откуда и из условия нормировки следует, что

$$e_{\mathbf{k}\mu}^{(3)} = \left(0, \frac{\mathbf{k}}{\omega}\right).$$

Наконец, векторы  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)}$  для  $\lambda = 1, 2$  определим соотношениями

$$\Sigma^2 e_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} = 2e_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}, \quad \lambda = 1, 2, \quad (1.4.37)$$

$$\Sigma_n e_{\mathbf{k}}^{(1)} = e_{\mathbf{k}}^{(1)}, \quad \Sigma_n e_{\mathbf{k}}^{(2)} = -e_{\mathbf{k}}^{(2)},$$

откуда и из условий нормировки следует, что

$$e_{\mathbf{k}\mu}^{(1)} = (0, \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)}), \quad e_{\mathbf{k}\mu}^{(2)} = (0, \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(2)}),$$

где единичные пространственные векторы  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)}$ ,  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(2)}$  ортогональны друг к другу и к вектору  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)} \mathbf{k} = \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(2)} \mathbf{k} = \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(1)} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(2)*} = 0.$$

Векторы  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(1)}$ ,  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(2)}$  будем называть векторами поперечной поляризации со спиральностью  $+1$  и  $-1$  (см. формулы (1.4.37), а также § 1.5); вектор  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(3)}$ , пространственная часть которого параллельна вектору  $\mathbf{k}$ , будем называть вектором продольной поляризации; наконец, вектор  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(0)}$ , не имеющий пространственных составляющих, будем называть вектором скалярной поляризации.

Вернемся к разложению (1.4.34). Чтобы величины  $A_\mu$  были вещественными, нужно (при сделанном выборе векторов поляризации) считать, что  $d_{\kappa\lambda} = c_{\kappa\lambda}$ .

Таким образом,

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\kappa\lambda=0}^3 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{c_{\kappa\lambda} e_{\kappa\mu}^{(\lambda)} e^{-ikx} + c_{\kappa\lambda}^* e_{\kappa\mu}^{(\lambda)*} e^{ikx}\}. \quad (1.4.38)$$

Отметим, что это разложение не предполагает выполненным условие Лоренца  $\partial^\mu A_\mu = 0$ . Так как

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\kappa} V \sqrt{\frac{\omega}{2}} \{(c_{\kappa 3} - c_{\kappa 0}) e^{-ikx} - (c_{\kappa 3}^* - c_{\kappa 0}^*) e^{ikx}\}, \quad (1.4.39)$$

то условие Лоренца будет выполняться, если  $c_{\kappa 3} - c_{\kappa 0} = 0$ . Если между  $c_{\kappa 3}$  и  $c_{\kappa 0}$  существует такая связь, то разложение  $A_\mu(x)$  на плоские волны будет иметь вид

$$A_\mu(x) = A_\mu^{tr}(x) + \partial_\mu \Lambda(x),$$

где  $A_\mu^{tr}(x)$  — поперечная часть потенциала  $A_\mu(x)$ :

$$A_\mu^{tr}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\kappa\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{c_{\kappa\lambda} e_{\kappa\mu}^{(\lambda)} e^{-ikx} + c_{\kappa\lambda}^* e_{\kappa\mu}^{(\lambda)*} e^{ikx}\},$$

и  $\Lambda(x)$  — скалярная функция, имеющая вид

$$\Lambda(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\kappa} \frac{1}{\omega \sqrt{2\omega}} (c_{\kappa 3} e^{-ikx} - c_{\kappa 3}^* e^{ikx}).$$

Отметим, что величина  $\partial_\mu \Lambda(x)$  не дает вклада в тензор электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}(x)$  и поэтому может быть устранена с помощью калибровочного преобразования (1.4.25).

Соотношение (1.4.35) вместе с соотношениями (1.4.36), (1.4.37) показывает, что частицы, связанные с электромагнитным полем, — фотоны, обладают спином, равным единице, причем состояние с проекцией спина, равной нулю, не является физическим, так как может быть исключено калибровочным преобразованием (1.4.25).

## § 1.5. ДИРАКОВСКОЕ ПОЛЕ

**1.5.1. Уравнение Дирака.** Изучив скалярное и векторные поля, описывающие частицы со спином 0 и 1, перейдем к изучению полей, описывающих частицы со спином  $1/2$ . Такие поля называются дираковскими. Важнейшим примером такого поля является электронно-позитронное поле, частицы которого — электроны и позитроны — обладают спином  $1/2$ .

Прежде всего рассмотрим, как из уравнения Клейна — Гордона путем понижения его порядка можно получить уравнение для дираковского поля.

Обозначим функции поля частицы со спином  $1/2$  через  $\chi_\rho(x)$ , где индекс  $\rho$  принимает два значения ( $\rho = 1, 2$ ) в соответствии с тем, что

спин частицы предполагается равным  $1/2$ . Функции  $\chi_\rho(x)$  должны удовлетворять волновому уравнению Клейна — Гордона

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \chi_\rho(x) = 0 \quad (1.5.1)$$

или уравнению

$$p^\mu p_\mu \chi(x) = m^2 \chi(x),$$

где  $m$  — масса частицы и  $p_\mu = i\partial_\mu$ .

Введем далее матрицы Паули

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.5.2)$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\sigma^i \sigma^k = \delta_{ik} + i\epsilon^{ikl} \sigma^l, \quad \{\sigma^i, \sigma^k\} = 2\delta_{ik}. \quad (1.5.3)$$

Тогда, вводя матрицы  $\bar{\sigma}^\mu \equiv g_{\mu\nu} \sigma^\nu \equiv (\sigma^0, -\sigma^k)$  и учитывая, что  $(\bar{\sigma}^\mu \rho_\mu) (\sigma^\nu \rho_\nu) = \rho_\mu \rho^\mu$ , уравнение (1.5.1) можно переписать в виде

$$(\bar{\sigma}^\mu \rho_\mu) (\sigma^\nu \rho_\nu) \chi = m^2 \chi. \quad (1.5.4)$$

Чтобы понизить порядок этого уравнения как по временной, так и по пространственным производным, введем новые компоненты поля  $\varphi_\lambda(x)$  ( $\lambda = 1, 2$ ):

$$\sigma^\nu \rho_\nu \chi = m\varphi,$$

после чего уравнение (1.5.4) примет вид

$$(\bar{\sigma}^\mu \rho_\mu) \varphi = m\chi.$$

Таким образом, вместо уравнения второго порядка для двух функций  $\chi_\rho(x)$  мы получили четыре уравнения первого порядка для двух функций  $\varphi_\rho(x)$  и двух функций  $\chi_\rho(x)$ :

$$\begin{aligned} i\sigma^\mu \partial_\mu \varphi - m\chi &= 0, \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - m\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Будем рассматривать функции  $\varphi$  и  $\chi$  как компоненты единой 4-компонентной функции  $\psi_\rho(x)$  ( $\rho = 1, 2, 3, 4$ ):

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

которую назовем биспинором. Тогда если построить с помощью матриц  $\sigma^\mu$ ,  $\bar{\sigma}^\mu$  четыре четырехрядные матрицы

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.5.6)$$

то оба уравнения (1.5.5) могут быть объединены в единое уравнение для  $\psi$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0. \quad (1.5.7)$$

Это уравнение носит название уравнения Дирака [2].

Отметим, что согласно (1.5.3) матрицы  $\sigma^\mu$ ,  $\bar{\sigma}^\mu$  удовлетворяют соотношениям

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu = g^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \bar{\sigma}_\lambda \sigma_\rho, \quad (1.5.8)$$

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu = g^{\mu\nu} - \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \sigma_\lambda \bar{\sigma}_\rho,$$

где  $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$  — полностью антисимметричный тензор 4-го ранга ( $\varepsilon^{0123} = 1$ ). Отсюда следует, что

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (1.5.9)$$

Из этих формул следует, что матрицы  $\gamma^\mu$  удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \equiv \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (1.5.10)$$

Можно показать [3], что эти соотношения определяют матрицы  $\gamma^\mu$  с точностью до преобразования подобия. Это значит, что если матрицы  $\gamma^\mu$  и  $\gamma^{\mu'}$  удовлетворяют соотношениям

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \{\gamma^{\mu'}, \gamma^{\nu'}\} = 2g^{\mu\nu},$$

то существует такая несингулярная матрица  $S$ , что

$$\gamma^{\mu'} = S \gamma^\mu S^{-1}.$$

Заметим, что если перейти от функций  $\psi(x)$  к функциям  $\psi'(x) = S\psi(x)$ , то функции  $\psi'(x)$  будут удовлетворять уравнению

$$(i\gamma^{\mu'} \partial_\mu - m) \psi'(x) = 0.$$

Матрицы  $\gamma^\mu$ , определяемые формулой (1.5.6), удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^{\mu+} = \gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu} \gamma^\nu \quad (1.5.11)$$

и, следовательно,  $\gamma^0$  — эрмитова матрица, а  $\gamma^k$  — антиэрмитова матрица ( $k = 1, 2, 3$ ). Отсюда и из (1.5.10) следует, что матрицы  $\gamma^\mu$  унитарны. Мы далее будем пользоваться таким представлением матриц  $\gamma^\mu$ , в котором справедлива формула (1.5.11).

**1.5.2. Алгебра дираковских матриц.** Как мы видели, дираковские матрицы  $\gamma^\mu$  определяются соотношениями (1.5.10) с точностью до преобразования подобия. Между тем ясно, что физические результаты, получаемые с помощью уравнения Дирака, не должны зависеть от этого преобразования. Поэтому они должны выражаться через величины, которые не зависят от преобразования подобия. Такими величинами являются шпуры (или следы) произведений матриц  $\gamma^\mu$ . Покажем, как вычисляются шпуры произведений дираковских матриц. Введем предварительно матрицу  $\gamma^5$ :

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (1.5.12)$$

Из соотношений (1.5.10) легко видеть, что

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad \gamma^{5+} = \gamma^5. \quad (1.5.13)$$

В представлении (1.5.6)

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (1.5.14)$$

Используя матрицу  $\gamma^5$ , легко показать, что шпур произведения нечетного числа матриц  $\gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) равен нулю, т. е.

$$\text{Sp } \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} = 0. \quad (1.5.15)$$

Действительно, так как  $\text{Sp } ab = \text{Sp } ba$ , то согласно (1.5.13)

$$\begin{aligned} \text{Sp } \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} &= \text{Sp } (\gamma^5)^2 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} = \text{Sp } \gamma^5 \gamma^{\mu_1} \dots, \\ \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma^5 &= -\text{Sp } (\gamma^5)^2 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} = -\text{Sp } \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}, \end{aligned}$$

откуда следует (1.5.15).

Для вычисления шпуров произведений четного числа матриц  $\gamma^\mu$  отметим, что согласно (1.5.10) справедлива формула

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}} &= -\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}} \gamma^{\mu_1} + \\ + 2 \sum_{i=2}^{2n} (-1)^i g^{\mu_1 \mu_i} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{i-1}} \gamma^{\mu_{i+1}} \dots \gamma^{\mu_{2n}}, \end{aligned}$$

откуда, учитывая, что  $\text{Sp } ab = \text{Sp } ba$ , получаем

$$\text{Sp } \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}} = \sum_{i=2}^{2n} (-1)^i g^{\mu_1 \mu_i} \text{Sp } \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{i-1}} \gamma^{\mu_{i+1}} \dots \gamma^{\mu_{2n}}. \quad (1.5.16)$$

Таким образом, вычисление шпура от произведения  $2n$  матриц  $\gamma^\mu$  сводится к вычислению шпура от произведения  $2n - 2$  матриц  $\gamma^\mu$ . Учитывая, что  $\text{Sp } I = 4$  ( $I$  — единичная 4-рядная матрица), согласно формуле (1.5.16) находим, например,

$$\frac{1}{4} \text{Sp } \gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu}, \quad (1.5.16')$$

$$\frac{1}{4} \text{Sp } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho = g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho}.$$

Введем полную систему 4-рядных матриц, т. е. систему матриц, по которой можно разложить любую 4-рядную матрицу. В случае двухрядных матриц в качестве полной системы можно выбрать матрицы  $\sigma^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . В случае 4-рядных матриц в качестве полной системы можно выбрать 16 унитарных матриц  $\Gamma_a$  ( $a = 1, \dots, 16$ )

$$\Gamma_a = 1, \gamma^\mu, \gamma^5, \gamma^\mu \gamma^5, \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \equiv \sigma^{\mu\nu} \quad (\mu < \nu). \quad (1.5.17)$$

Поскольку полная система должна состоять из 16 матриц, то нам достаточно доказать линейную независимость матриц  $\Gamma_a$ . Определим с этой целью в пространстве 4-рядных матриц скалярное произведение

$$(A, B) = \frac{1}{4} \text{Sp } A^+ B. \quad (1.5.18)$$

Учитывая, что

$$\Gamma_a^+ = 1, \quad \gamma_\mu, \gamma^5, \quad -\gamma_\mu \gamma^5, \quad -\frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu],$$

и используя формулы (1.5.15), (1.5.16), легко видеть, что

$$(\Gamma_a, \Gamma_b) = \delta_{ab}. \quad (1.5.19)$$

Это значит, что матрицы  $\Gamma_a$  при таком определении скалярного произведения являются ортонормированными и, следовательно, они линейно независимы.

Таким образом, если  $A$  — произвольная 4-рядная матрица, то ее можно представить в виде

$$A = \sum_{a=1}^{16} c_a \Gamma_a, \quad (1.5.20)$$

где коэффициенты разложения

$$c_a = (\Gamma_a, A) = \frac{1}{4} \text{Sp} \Gamma_a^+ A.$$

Отсюда следует, что если некоторая матрица  $B$  коммутирует со всеми матрицами  $\gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ),  $[\gamma^\mu, B] = 0$ , то она кратна единичной,  $B = \lambda I$ . Действительно, из  $[\gamma^\mu, B] = 0$  следует, что  $[\Gamma_a, B] = 0$  ( $a = 1, \dots, 16$ ). Поэтому согласно (1.5.20) матрица  $B$  коммутирует с произвольной матрицей  $A$  и, следовательно, матрица  $B$  кратна единичной.

Часто приходится встречаться с матрицами вида  $\gamma_\mu Q \gamma^\mu$ , где  $Q$  — произведение некоторого числа матриц  $\gamma^\nu$ . Используя (1.5.10), такие суммы легко преобразовать к виду  $\gamma_\mu Q \gamma^\mu = \gamma_\mu \gamma^\mu Q' + \gamma_\lambda Q''$ , где  $Q'$ ,  $Q''$  — некоторые матрицы. Например,

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu &= -2\gamma^\nu, & \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu &= 4g^{\nu\lambda}, \\ \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\mu &= -2\gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

Если

$$Q = \gamma^{\nu_1} \dots \gamma^{\nu_{2n+1}},$$

то

$$\gamma_\mu Q \gamma^\mu = -2Q_R, \quad \gamma_\mu Q \gamma^\lambda \gamma^\mu = 2(\gamma^\lambda Q + Q_R \gamma^\lambda), \quad (1.5.22)$$

где  $Q_R = \gamma^{\nu_{2n+1}} \dots \gamma^{\nu_1}$ . Эти формулы справедливы также в том случае, когда  $Q$ , кроме нечетного числа матриц  $\gamma^\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2, 3$ ), содержит в виде множителей произвольное число матриц  $\gamma^5$  (при этом  $\gamma_R^5 = \gamma^5$ ).

**1.5.3. Релятивистская инвариантность уравнения Дирака и лагранжиан дираковского поля.** Уравнение Дирака (1.5.7) инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца (см. § 1.1)

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = a^\mu_{\nu} x^\nu, \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(a) \psi(x), \quad (1.5.23)$$

где 4-рядная матрица  $S(a)$  удовлетворяет соотношениям

$$S^{-1}(a) \gamma^\mu S(a) = a^\mu_{\nu} \gamma^\nu. \quad (1.5.24)$$



Это значит, что если биспинор  $\psi(x)$  удовлетворяет уравнению Дирака (1.5.7), то биспинор  $\psi'(x')$  будет удовлетворять такому же уравнению

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0.$$

Действительно,

$$S^{-1}(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = (iS^{-1}\gamma^\mu S \partial'_\mu - m)\psi(x),$$

а так как  $\partial'_\mu = a_\mu^\lambda \partial_\lambda$ , то отсюда и из (1.5.24) следует инвариантность уравнения Дирака.

Так как матрицы  $\gamma^\mu = a^\mu_\nu \gamma^\nu$  вследствие (1.1.7) удовлетворяют соотношениям  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ , то отсюда вытекает существование матрицы  $S(a)$ .

Соотношение (1.5.24) определяет матрицу  $S$  с точностью до произвольного числового множителя (если  $S_1$  и  $S_2$  — матрицы, удовлетворяющие соотношениям (1.5.24), то матрица  $S_1 S_2^{-1}$  согласно этим соотношениям будет коммутировать со всеми матрицами  $\gamma^\mu$ , т. е. будет кратна единичной). Этот множитель мы будем фиксировать условием

$$\det S = 1, \quad (1.5.25)$$

после чего матрица  $S$  будет определена однозначно с точностью до одного из множителей  $-1, i, -i$ . Для бесконечно малых преобразований Лоренца  $a_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + \varepsilon_\mu^\nu$  матрицу  $S(a)$  можно представить в виде (см. (1.1.14))

$$S(a) = 1 - \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}, \quad \Sigma^{\mu\nu} = -\Sigma^{\nu\mu}, \quad (1.5.26)$$

где матрицы  $\Sigma^{\mu\nu}$  согласно (1.5.24) удовлетворяют соотношениям

$$i[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\lambda] = g^{\mu\lambda} \gamma^\nu - g^{\nu\lambda} \gamma^\mu.$$

Отсюда и из условия  $\text{Sp } \Sigma^{\mu\nu} = 0$  (оно вытекает из (1.5.25)) следует

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (1.5.26')$$

Кроме биспинора  $\psi(x)$  введем биспинор  $\bar{\psi}(x)$ , причем

$$\bar{\psi}(x) = \psi^*(x) \gamma^0. \quad (1.5.27)$$

При этом имеется в виду, что 4-рядная матрица  $A$  может действовать на биспинор, находясь как слева, так и справа от него:

$$(A\psi)_\rho = A_{\rho\sigma} \psi_\sigma, \quad (\psi A)_\rho = \psi_\sigma A_{\sigma\rho}.$$

Отсюда следует, что  $A\psi = \psi \tilde{A}$  ( $\tilde{A}$  — матрица, транспонированная по отношению к матрице  $A$ ).

Легко видеть, что биспинор  $\bar{\psi}$  удовлетворяет уравнению

$$(i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu + m)\bar{\psi}(x) = 0$$

или

$$\bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu + m) = 0 \quad (1.5.28)$$

(здесь производная от  $\vec{\partial}_\mu$  действует на функцию, стоящую слева от  $\vec{\partial}_\mu$ ). Биспинор  $\bar{\psi}(x)$  будем называть сопряженным.

Покажем, что сопряженный биспинор  $\bar{\psi}(x)$  преобразуется при преобразованиях Лоренца согласно закону

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}(a) \text{Sgn } a^0_0, \quad \text{Sgn } a^0_0 = a^0_0 / |a^0_0|. \quad (1.5.29)$$

При этом мы исходим из того, что биспиноры  $\bar{\psi}'(x')$  и  $\bar{\psi}(x)$  связаны между собой тем же соотношением (1.5.27), что и биспиноры  $\psi(x)$  и  $\psi'(x')$ . Для доказательства перепишем (1.5.24) в виде

$$S^{-1} \gamma^k S = a^k_l \gamma^l + a^k_0 \gamma^0, \quad S^{-1} \gamma^0 S = a^0_k \gamma^k + a^0_0 \gamma^0 \quad (1.5.30)$$

( $k, l = 1, 2, 3$ ). Учитывая, что  $\gamma^{\mu+} = \gamma_\mu$  и что величины  $a^{\mu\nu}$  вещественны, имеем

$$S^+ \gamma^k S^{+1} = a^k_l \gamma^l - a^k_0 \gamma^0, \quad S^+ \gamma^0 S^{+1} = -a^0_k \gamma^k + a^0_0 \gamma^0.$$

Умножая эти соотношения справа на  $\gamma^0$  и снова используя (1.5.30), получаем

$$S \gamma^0 S^+ \gamma^k = -\gamma^k S \gamma^0 S^+, \quad S \gamma^0 S^+ \gamma^0 = \gamma^0 S \gamma^0 S^+.$$

Отсюда следует, что  $[S \gamma^0 S^+ \gamma^0, \gamma^\mu] = 0$ . Поэтому согласно изложенному выше матрица  $S \gamma^0 S^+ \gamma^0$  кратна единичной:  $S \gamma^0 S^+ \gamma^0 = \lambda \cdot I$  или  $S \gamma^0 S^+ = \lambda \gamma^0$ . Так как матрицы  $S \gamma^0 S^+$  и  $\gamma^0$  эрмитовы, то число  $\lambda$  должно быть вещественным. Учитывая, что  $\det S = 1$ , получаем  $\lambda^4 = 1$ . Поэтому  $\lambda = \pm 1$ . Для собственной группы Лоренца и для пространственных отражений ( $a^k_l = -\delta^k_l$ ,  $a^k_0 = a^0_k = 0$ ,  $a^0_0 = 1$ , когда  $S = \gamma^0$ )  $\lambda = 1$ . Для преобразований обращения времени ( $a^0_0 = -1$ )  $S = \gamma^0 \gamma^5$ , поэтому  $\lambda = -1$ . Таким образом,

$$S \gamma^0 S^+ = \gamma^0 \text{Sgn } a^0_0. \quad (1.5.31)$$

Учитывая, что  $\bar{\psi}'(x') = \psi'(x')^* \gamma^0$ , согласно (1.5.23) получаем

$$\bar{\psi}'(x') = \psi^*(x) S^+ \gamma^0 = \bar{\psi}(x) \gamma^0 S^+ \gamma^0.$$

Отсюда согласно (1.5.31) следует закон преобразования (1.5.29) сопряженного биспинора.

С помощью билинейных комбинаций биспиноров  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  можно просто строить 4-тензоры различных рангов.

Согласно (1.5.23), (1.5.29) величина

$$S(x) = \bar{\psi}(x) \psi(x) \equiv \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\alpha(x)$$

будет релятивистским скаляром, т. е.  $\bar{\psi}'(x') \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \psi(x)$ .

Используя (1.5.23), (1.5.29), легко видеть, что величины

$$T^{\mu_1 \dots \mu_n}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} \psi(x) \equiv \bar{\psi}_\alpha(x) (\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n})_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \quad (1.5.32)$$

образуют тензор  $n$ -го ранга, т. е.

$$\begin{aligned} T^{\mu_1 \dots \mu_n}(x') &\equiv \bar{\psi}'(x') \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} \psi'(x') = \\ &= a^{\mu_1}_{\nu_1} \dots a^{\mu_n}_{\nu_n} T^{\nu_1 \dots \nu_n}(x), \end{aligned} \quad (1.5.33)$$

а величины

$$A^{\mu_1 \dots \mu_n}(x) \equiv \bar{\psi}(x) \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n} \psi(x)$$

образуют псевдотензор  $n$ -го ранга, т. е.

$$\begin{aligned} A^{\mu_1 \dots \mu_n}(x) &\equiv \bar{\psi}'(x') \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n} \psi'(x') = \\ &= \det a a^{\mu_1}_{\nu_1} \dots a^{\mu_n}_{\nu_n} A^{\nu_1 \dots \nu_n}(x) \end{aligned}$$

(предполагается, что  $\text{Sgn } a^0_0 = 1$ ). Эти формулы непосредственно следуют из (1.5.24), если учесть, что

$$S^{-1}(a) \gamma^{\mu} S(a) = \gamma^{\nu} a^{\mu}_{\nu}.$$

Последняя формула является следствием (1.5.24), если отметить, что

$$\begin{aligned} S^{-1}(a) \gamma^{\mu} S(a) &= -i a^0_{\nu_0} a^1_{\nu_1} a^2_{\nu_2} a^3_{\nu_3} \gamma^{\nu_0} \gamma^{\nu_1} \gamma^{\nu_2} \gamma^{\nu_3} = \\ &= -i a^0_{\nu_0} a^1_{\nu_1} a^2_{\nu_2} a^3_{\nu_3} \frac{1}{4} \sum_a \Gamma_a \text{Sp } \Gamma_a^+ \gamma^{\nu_0} \gamma^{\nu_1} \gamma^{\nu_2} \gamma^{\nu_3}, \end{aligned}$$

и учесть, что вследствие соотношения  $a^{\lambda}_{\nu} a^{\rho}_{\mu} g^{\nu\mu} = 0$  (для  $\lambda \neq \rho$ ) в правую часть данного равенства дает вклад только матрица  $\gamma^{\mu}$ . При этом использованы очевидные формулы

$$-i \text{Sp } \gamma^{\nu_0} \gamma^{\nu_1} \gamma^{\nu_2} \gamma^{\nu_3} = 4 \varepsilon^{\nu_0 \nu_1 \nu_2 \nu_3}, \quad \varepsilon^{\nu_0 \nu_1 \nu_2 \nu_3} a^0_{\nu_0} a^1_{\nu_1} a^2_{\nu_2} a^3_{\nu_3} \equiv \det a.$$

Раскладывая матрицы  $\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}$ ,  $\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}$  по полной системе матриц  $\Gamma_a$  и вычисляя шпуры по формулам (1.5.16), легко убедиться, что тензоры (1.5.32), (1.5.33) сводятся к сумме произведений универсальных тензоров  $\delta^{\mu_i}_{\nu_i}$ ,  $\varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$  и пяти неприводимых тензоров

$$\begin{aligned} S &= \bar{\psi} \psi, \quad P = \bar{\psi} \gamma^5 \psi, \quad V^{\mu} = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi, \quad A^{\mu} = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \gamma^5 \psi, \quad T^{\mu\nu} = \\ &= \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi, \end{aligned} \quad (1.5.34)$$

которые представляют собой соответственно скаляр, псевдоскаляр, вектор, псевдовектор и антисимметричный тензор второго ранга.

Построим лагранжиан дираковского поля, который приводит к уравнению Дирака. Согласно (1.5.34), (1.1.6) величины  $\bar{\psi} \psi$ ,  $\bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi$ ,  $\bar{\psi} \gamma^{\mu} \overleftarrow{\partial}_{\mu} \psi$  являются релятивистскими инвариантами, т. е.

$$\bar{\psi}'(x') \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \psi(x), \quad \bar{\psi}'(x') \gamma^{\mu} \partial'_{\mu} \psi'(x') = \bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi(x).$$

Поэтому лагранжиан дираковского поля, который также должен быть релятивистским инвариантом, имеет следующую структуру:

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i \gamma^{\mu} \overleftarrow{\partial}_{\mu} + m) \psi. \quad (1.5.35)$$

Этот лагранжиан является вещественным и при независимом варьировании  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , как легко видеть, приводит к линейным уравнениям поля первого порядка — уравнениям Дирака. Отметим, что лагранжиан имеет структуру общего лагранжиана (1.3.11), причем роль матриц  $\Gamma_{\mu}$  играют дираковские матрицы  $\gamma_{\mu}$ , а роль матрицы  $\mathcal{E}$ , определяющей  $\bar{\psi}$ , — матрица  $\gamma^0$ .

В соответствии с общими результатами пп. 1.2.2, 1.2.3 мы можем теперь определить канонический тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\nu \partial^\mu \psi - \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\nu \overleftarrow{\partial}^\mu \psi, \quad (1.5.36)$$

связанный с инвариантностью лагранжиана относительно 4-смещений; канонический тензор моментов количества движения

$$M^{\mu\nu;\rho} = x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho} + \frac{1}{2} \bar{\psi} \{ \gamma^\rho, \Sigma^{\mu\nu} \} \psi, \quad (1.5.37)$$

связанный с инвариантностью лагранжиана относительно 4-поворотов, и вектор тока

$$\mathcal{J}^\mu(x) = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (1.5.38)$$

связанный с инвариантностью лагранжиана относительно фазовых преобразований.

В приложениях встречается задача о выражении величины  $(\bar{\psi}_1 \Gamma_a \psi_2) (\bar{\psi}_3 \Gamma_b^\dagger \psi_4)$ , где  $\Gamma_a, \Gamma_b$  — матрицы (1.5.17) и  $\bar{\psi}_1, \dots, \psi_4$  — некоторые биспиноры, через величины  $(\bar{\psi}_1 \Gamma_c \psi_4) (\bar{\psi}_3 \Gamma_d^\dagger \psi_2)$ :

$$(\bar{\psi}_1 \Gamma_a \psi_2) (\bar{\psi}_3 \Gamma_b^\dagger \psi_4) = \sum_{cd} C_{abcd} (\bar{\psi}_1 \Gamma_c \psi_4) (\bar{\psi}_3 \Gamma_d^\dagger \psi_2). \quad (1.5.39)$$

Входящие сюда коэффициенты  $C_{abcd}$  представляют собой, очевидно, коэффициенты разложения прямого произведения матриц  $\Gamma_a \times \Gamma_b^\dagger$  по прямым произведениям матриц этого же типа, только с переставленными индексами

$$(\Gamma_a)_{\alpha\beta} (\Gamma_b^\dagger)_{\rho\sigma} = \sum_{cd} C_{abcd} (\Gamma_c)_{\alpha\sigma} (\Gamma_d^\dagger)_{\rho\beta}. \quad (1.5.40)$$

Коэффициенты  $C_{abcd}$  можно найти из условия полноты системы матриц  $\Gamma_a$ :

$$\frac{1}{4} \sum_d (\Gamma_d)_{\eta\lambda} (\Gamma_d^\dagger)_{\rho\beta} = \delta_{\eta\beta} \delta_{\lambda\rho}. \quad (1.5.41)$$

Для доказательства (1.5.40) рассмотрим разложение произвольной матрицы  $Q$  по матрицам  $\Gamma_d$

$$Q = \frac{1}{4} \sum_d \Gamma_d \text{Sp} \Gamma_d^\dagger Q,$$

или

$$Q_{\eta\lambda} = \frac{1}{4} \sum_d (\Gamma_d)_{\eta\lambda} (\Gamma_d^\dagger)_{\rho\beta} Q_{\rho\beta},$$

откуда следует формула (1.5.41). Чтобы получить коэффициенты  $C_{abcd}$ , достаточно представить левую часть (1.5.40) в виде

$$(\Gamma_a)_{\alpha\beta} (\Gamma_b^\dagger)_{\rho\sigma} = (\Gamma_a)_{\alpha\eta} \delta_{\eta\beta} \delta_{\lambda\rho} (\Gamma_b^\dagger)_{\lambda\sigma}$$

и использовать (1.5.41), после чего получим

$$(\Gamma_a)_{\alpha\beta} (\Gamma_b^\dagger)_{\rho\sigma} = \frac{1}{4} \sum_d (\Gamma_a \Gamma_d \Gamma_b^\dagger)_{\alpha\sigma} (\Gamma_d^\dagger)_{\rho\beta}.$$

Разложив матрицу  $\Gamma_a \Gamma_d \Gamma_b^+$  по матрицам  $\Gamma_c$ , получим

$$C_{abcd} = \frac{1}{16} \text{Sp } \Gamma_b^+ \Gamma_c^+ \Gamma_a \Gamma_d. \quad (1.5.42)$$

Соотношения (1.5.39) (или (1.5.40)) вместе с (1.5.42) называются тождествами Фирца [4].

Полагая в (1.5.40)  $\Gamma_a = \gamma^\mu$ ,  $\Gamma_b = \gamma^\mu$  и производя суммирование по индексу  $\mu$ , получаем

$$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma_\mu)_{\rho\sigma} = \sum_{cd} (\Gamma_c)_{\alpha\sigma} (\Gamma_d^+)_{\rho\beta} \frac{1}{16} \text{Sp } \gamma_\mu \Gamma_c^+ \gamma^\mu \Gamma_d.$$

Используя формулы (1.5.17), (1.5.16), находим

$$\gamma^\mu \times \gamma_\mu = I \times I - \gamma^5 \times \gamma^5 - \frac{1}{2} \gamma^\nu \times \gamma_\nu - \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^5 \times \gamma_\nu \gamma^5. \quad (1.5.43)$$

Здесь в левой части равенства множитель перед знаком прямого произведения подразумевается с индексами  $\alpha\beta$ , второй множитель — с индексами  $\rho\sigma$ , а в правой части равенства первый множитель имеет индексы  $\alpha\sigma$ , второй —  $\rho\beta$ . Аналогичным образом легко получить соотношения

$$I \times I = \frac{1}{4} \left\{ I \times I + \gamma^\mu \times \gamma_\mu + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \times \sigma_{\mu\nu} - \gamma^5 \gamma^\mu \times \gamma^5 \gamma_\mu + \gamma^5 \times \gamma^5 \right\},$$

$$\sigma^{\mu\nu} \times \sigma_{\mu\nu} = 3I \times I - \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \times \sigma_{\mu\nu} + 3\gamma^5 \times \gamma^5,$$

$$\gamma^5 \gamma^\mu \times \gamma^5 \gamma_\mu = -I \times I - \frac{1}{2} \gamma^\mu \times \gamma_\mu - \frac{1}{2} \gamma^5 \gamma^\mu \times \gamma^5 \gamma_\mu + \gamma^5 \times \gamma^5, \quad (1.5.44)$$

$$\gamma^5 \times \gamma^5 = \frac{1}{4} \left\{ I \times I - \gamma^\mu \times \gamma_\mu + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \times \sigma_{\mu\nu} + \gamma^5 \gamma^\mu \times \gamma^5 \gamma_\mu + \gamma^5 \times \gamma^5 \right\}.$$

Из (1.5.43) следует

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}_3 \gamma_\mu \psi_4) &= (\bar{\psi}_1 \psi_4) (\bar{\psi}_3 \psi_2) - (\bar{\psi}_1 \gamma^5 \psi_4) (\bar{\psi}_3 \gamma^5 \psi_2) - \\ &- \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \gamma^\nu \psi_4) (\bar{\psi}_3 \gamma_\nu \psi_2) - \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \gamma^\nu \gamma^5 \psi_4) (\bar{\psi}_3 \gamma_\nu \gamma^5 \psi_2). \end{aligned}$$

Делая в этой формуле замены

$\bar{\psi}_1 \rightarrow \bar{\psi}_1 (1 \mp \gamma^5)$ ,  $\psi_2 \rightarrow (1 \pm \gamma^5) \psi_2$ ,  $\bar{\psi}_3 \rightarrow \bar{\psi}_3 (1 \mp \gamma^5)$ ,  $\psi_4 \rightarrow (1 \pm \gamma^5) \psi_4$  и замечая, что  $(1 \pm \gamma^5)^2 = 2(1 \pm \gamma^5)$ ,  $(1 \pm \gamma^5)(1 \mp \gamma^5) = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_1 \gamma^\mu (1 \pm \gamma^5) \psi_2) (\bar{\psi}_3 \gamma_\mu (1 \pm \gamma^5) \psi_4) &= \\ = -(\bar{\psi}_1 \gamma^\mu (1 \pm \gamma^5) \psi_4) (\bar{\psi}_3 \gamma_\mu (1 \pm \gamma^5) \psi_2). \end{aligned} \quad (1.5.45)$$

Это соотношение используется нами далее.

**1.5.4. Плоские волны.** Уравнение Дирака допускает решения в виде плоских волн

$$\psi(x) = u \exp(-ipx), \quad px = p_0 t - \mathbf{p}x,$$

где биспинор  $u$  удовлетворяет уравнению

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u = 0.$$

Приравняв детерминант этой системы нулю, найдем, что уравнение имеет нетривиальное решение в том случае, если

$$p^\mu p_\mu - m^2 = 0$$

или

$$p_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Таким образом, мы получили два типа решений, одно из которых зависит от времени как  $e^{-i p_0 t}$  (положительные частоты), а другое как  $e^{i p_0 t}$  (отрицательные частоты), где  $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ .

Далее под скалярным произведением  $p x$  будем понимать величину

$$p x = p_0 t - \mathbf{p} x, \quad p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

и в соответствии с этим решения уравнения Дирака запишем в виде

$$\psi(x) = u^q(p) e^{-i q p x}, \quad q = \pm 1, \quad (1.5.46)$$

где биспинор  $u^q(p)$  удовлетворяет уравнению

$$(\hat{q} p - m) u^q(p) = 0, \quad \hat{p} = p_\mu \gamma^\mu.$$

Видно, что биспинор  $u^q(p)$  является собственным вектором матрицы  $\hat{p}$ , принадлежащим собственному значению  $q m$ . Так как собственных значений только два, а полная система собственных векторов должна содержать четыре вектора, то собственное значение  $q m$  двукратно вырождено, т. е. ему принадлежат два линейно независимых биспинора  $u^q(p)$ , которые можно считать собственными векторами некоторой четырехрядной матрицы, коммутирующей с  $\hat{p}$ . В качестве такой матрицы мы выбираем  $\Sigma \mathbf{n}$ , где

$$\Sigma^i = \frac{1}{2} \epsilon^{i k l} \Sigma_{k l}, \quad \Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

и  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$ . Эта матрица, как легко проверить, коммутирует с  $\hat{p}$ ,

$[\hat{p}, \Sigma \mathbf{n}] = 0$  (коммутатор равен нулю только в том случае, если  $\mathbf{n}/|\mathbf{p}|$ ).

Таким образом, биспинор  $u$ , который мы будем обозначать через  $u^{q\mu}(p)$ , удовлетворяет уравнениям

$$(\hat{q} p - m) u^{q\mu}(p) = 0, \quad \Sigma \mathbf{n} u^{q\mu}(p) = \mu u^{q\mu}(p), \quad (1.5.47)$$

где  $\mu$  — собственные числа матрицы  $\Sigma \mathbf{n}$ . Так как  $(\Sigma \mathbf{n})^2 = \frac{1}{4}$ , то  $\mu = \pm \frac{1}{2}$ .

Матрица  $\Sigma^i$  представляет собой инфинитезимальный оператор группы пространственных вращений. Поэтому матрицу  $\Sigma \mathbf{n}$  можно интерпретировать как оператор проекции спина частиц, связанных с полем  $\psi$ , на направление импульса  $\mathbf{p}$ . Собственные значения этой матрицы называются спиральностью частицы.

Величина  $q$ , определяющая собственные значения матрицы  $\hat{p}$ , может быть связана, как мы увидим в квантовой теории (см. далее § 2.5), со знаком заряда частицы, описываемой полем  $\psi$ .

Итак, задав импульс частицы  $p$ , получим четыре состояния, соответствующие двум значениям квантового числа  $q$  и двум значениям квантового числа  $\mu$ . В связи с этим поле  $\psi$  пригодно для описания как электронов, так и позитронов и его называют в этом случае электронно-позитронным. Однако следует помнить, что дираковское поле может служить для описания и других частиц, обладающих спином  $1/2$ . Более подробная корпускулярная интерпретация поля  $\psi(x)$  приведена в гл. 2, посвященной квантовой теории, в которой  $\psi(x)$  будет рассматриваться как некоторый оператор, действующий в гильбертовом пространстве чисел частиц.

Уравнения (1.5.47) определяют биспинор  $u^{q\mu}$  с точностью до произвольного множителя, который может зависеть от квантовых чисел  $q$ ,  $\mu$ . Чтобы сформулировать условие нормировки  $u^{q\mu}$ , покажем вначале, что величина  $\bar{u}^{q\mu}(p) u^{q\mu}(p)$  вещественна, причем знак ее совпадает со знаком  $q$ . Для этого рассмотрим преобразование Лоренца с коэффициентами  $a^\mu_0 = p^\mu/m$  (так как  $a^\mu_0 a_\mu^0 = 1$ , то такое преобразование существует). Ему соответствует некоторая матрица преобразования биспиноров  $S(a)$ :

$$u^{q\mu} = S(a) \hat{u}^{q\mu}, \quad \hat{u}^{q\mu} = S^{-1}(a) u^{q\mu},$$

причем согласно (1.5.29)  $\bar{u}^{q\mu} u^{q\mu} = \hat{u}^{q\mu} \hat{u}^{q\mu}$ . Биспинор  $\hat{u}^{q\mu}$  удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$(qS^{-1}\hat{p}S - m)\hat{u}^{q\mu} = 0.$$

Так как  $a_\mu^0 = p_\mu/m$ , то согласно (1.5.24)

$$S\gamma^0 S^{-1} = \gamma^\mu a_\mu^0 = \frac{1}{m} \hat{p}.$$

Поэтому биспинор  $\hat{u}^{q\mu}$  удовлетворяет уравнению

$$(mq\gamma^0 - m)\hat{u}^{q\mu} = 0.$$

Это уравнение показывает, что рассматриваемое преобразование Лоренца соответствует переходу в систему покоя частицы.

Умножая последнее уравнение слева на  $\hat{u}^{q\mu*}$ , получаем

$$\hat{u}^{q\mu*} \gamma^0 \hat{u}^{q\mu} \equiv \hat{u}^{q\mu} \hat{u}^{q\mu} = q \hat{u}^{q\mu*} \hat{u}^{q\mu}.$$

Таким образом,  $\bar{u}^{q\mu} u^{q\mu} = q \hat{u}^{q\mu*} \hat{u}^{q\mu}$ , что доказывает наше утверждение.

Пронормируем биспинор  $\hat{u}^{q\mu}$  так, чтобы  $\hat{u}^{q\mu*} \hat{u}^{q\mu} = 2m$ . Тогда биспинор  $u^{q\mu}$  будет нормирован согласно условию

$$\bar{u}^{q\mu} u^{q\mu} = 2mq. \quad (1.5.48)$$

Сопряженный биспинор  $\bar{u}^{q'\mu'}$  удовлетворяет уравнениям

$$\bar{u}^{q'\mu'} (q'\hat{p} - m) = 0, \quad \bar{u}^{q'\mu'} \Sigma \mathbf{n} = \mu' \bar{u}^{q'\mu'}. \quad (1.5.49)$$

Из (1.5.47) и (1.5.49) следует, что

$$\left(\frac{m}{q} - \frac{m}{q'}\right) \bar{u}^{q'\mu'} u^{q\mu} = 0, \quad (\mu' - \mu) \bar{u}^{q'\mu'} u^{q\mu} = 0.$$

Эти уравнения вместе с (1.5.48) приводят к следующим условиям ортонормировки биспиноров  $u^{q\mu}$ :

$$\bar{u}^{q'\mu'}(p) u^{q\mu}(p) = 2mq \delta_{qq'} \delta_{\mu\mu'}. \quad (1.5.50)$$

Выведем условие полноты системы биспиноров  $u_{\alpha}^{q\mu}(p)$  в пространстве функций  $f_{\alpha}$ , зависящих от спинорного индекса  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ):

$$\frac{1}{2m} \sum_{q\mu} q u_{\alpha}^{q\mu}(p) u_{\beta}^{q\mu}(p) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (1.5.51)$$

Так как четыре биспинора  $u^{q\mu}(p)$  ( $q = \pm 1, \mu = \pm \frac{1}{2}$ ) согласно (1.5.50) линейно независимы, то они образуют полную систему в пространстве функций  $f_{\alpha}$ :

$$f_{\alpha} = \sum_{q\mu} C_{q\mu} u_{\alpha}^{q\mu}(p), \quad (1.5.52)$$

где согласно (1.5.50) коэффициенты разложения

$$C_{q\mu} = \frac{q}{2m} \bar{u}^{q\mu}(p) f.$$

Подставляя это выражение в (1.5.52), находим

$$f_{\alpha} = \sum_{q\mu} u_{\alpha}^{q\mu}(p) \frac{q}{2m} (\bar{u}^{q\mu}(p) f).$$

Полагая  $f_{\alpha} = \delta_{\alpha\beta}$  ( $\beta$  — фиксировано), получаем условие полноты (1.5.51).

В конкретных расчетах, связанных с уравнением Дирака, придется вычислять матричные элементы четырехрядной матрицы  $A$  между состояниями  $u^{q'\mu'}(p')$  и  $\bar{u}^{q\mu}(p)$ :

$$\bar{u}^{q\mu}(p) A u^{q'\mu'}(p') \equiv \bar{u}_{\alpha}^{q\mu}(p) A_{\alpha\beta} u_{\beta}^{q'\mu'}(p').$$

Для нахождения этих величин удобно ввести матрицу проектирования  $\Lambda^{q\mu}(p)$ :

$$\Lambda^{q\mu}(p) u^{q'\mu'}(p) = \delta_{\mu\mu'} \delta_{qq'} u^{q\mu}(p). \quad (1.5.53)$$

Используя уравнения (1.5.47), легко получить, что

$$\Lambda^{q\mu}(p) = \frac{(m + q\hat{p})(\Sigma p + \mu)}{4m\mu}. \quad (1.5.54)$$

Покажем, что справедлива формула

$$u_{\alpha}^{q\mu}(p) \bar{u}_{\beta}^{q\mu}(p) = 2mq \Lambda_{\alpha\beta}^{q\mu}(p). \quad (1.5.55)$$

Из определения матрицы проектирования (1.5.53) находим

$$u_{\alpha}^{q\mu}(p) \bar{u}_{\beta}^{q\mu}(p) = 2mq \sum_{q'\mu'} \frac{q'}{2m} \bar{u}_{\beta}^{q'\mu'}(p) \Lambda_{\alpha\sigma}^{q\mu}(p) u_{\sigma}^{q'\mu'}(p),$$

откуда, учитывая условие полноты (1.5.51), получим формулу (1.5.55).



Из (1.5.55) следует, в частности, соотношение

$$\bar{u}^{q\mu}(p) A u^{q\mu}(p) = 2mq \text{Sp} \Lambda^{q\mu}(p) A. \quad (1.5.56)$$

Вычислим далее величину  $|\bar{u}^{q'\mu'}(p') A u^{q\mu}(p)|^2$  (так как биспинор  $u^{q\mu}$  определен с точностью до фазового множителя  $\exp i\varphi_{q\mu}$ , то фазу матричного элемента  $\bar{u}^{q'\mu'} A u^{q\mu}$  полностью определить нельзя). Легко видеть, что

$$(\bar{u}^{q\mu} A u^{q'\mu'})^* = \bar{u}^{q'\mu'} \bar{A} u^{q\mu}, \quad \bar{A} \equiv \gamma^0 A^+ \gamma^0$$

и, следовательно,

$$|\bar{u}^{q\mu} A u^{q'\mu'}|^2 = \bar{u}_\alpha^{q\mu} A_{\alpha\beta} u_\beta^{q'\mu'} \bar{u}_\rho^{q'\mu'} \bar{A}_{\rho\sigma} u_\sigma^{q\mu}.$$

Используя (1.5.55), находим окончательно

$$|\bar{u}^{q\mu}(p) A u^{q'\mu'}(p')|^2 = 4m^2 q q' \text{Sp} A \Lambda^{q'\mu'}(p') \bar{A} \Lambda^{q\mu}(p). \quad (1.5.57)$$

Отметим, что так как

$$\sum_\mu \Lambda^{q\mu}(p) = \frac{m + \hat{q}p}{2m},$$

то

$$\sum_{\mu\mu'} |\bar{u}^{q\mu} A u^{q'\mu'}|^2 = q q' \text{Sp} A (m + q'\hat{p}') \bar{A} (m + q\hat{p}). \quad (1.5.58)$$

**1.5.5. Преобразование зарядового сопряжения и майорановский биспинор.** Если дираковская частица обладает электрическим зарядом, то она взаимодействует с электромагнитным полем. Подробно это взаимодействие изучено в гл. 3. Здесь же мы используем только тот факт, что уравнение дираковской частицы с зарядом  $e$  в электромагнитном поле  $A_\mu(x)$  имеет следующий вид:

$$\{i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu(x)) - m\} \psi(x) = 0. \quad (1.5.59)$$

Включение взаимодействия заряженного поля  $\psi(x)$  с электромагнитным полем происходит путем замены производных  $\partial_\mu$  на  $\hat{\partial}_\mu - ieA_\mu$  (принцип минимального электромагнитного взаимодействия; общий вопрос о включении взаимодействия частиц с калибровочными полями рассмотрен далее в § 1.9).

Легко видеть, что сопряженный биспинор  $\bar{\psi}(x) \equiv \psi^*(x) \gamma^0$  удовлетворяет уравнению

$$\{i\tilde{\gamma}^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu(x)) + m\} \bar{\psi}(x) = 0. \quad (1.5.60)$$

Уравнения (1.5.59), (1.5.60) описывают одновременно электроны и позитроны, отличающиеся только знаком заряда. Поэтому уравнение Дирака (1.5.59) должно быть инвариантно по отношению к изменению знака заряда  $e \rightarrow -e$ , или, что то же, по отношению к преобразованию

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^c(x) = -A_\mu(x). \quad (1.5.61)$$

При этом должно производиться также преобразование дираковского биспинора

$$\psi(x) \rightarrow \psi^c(x), \quad (1.5.62)$$

где биспинор  $\psi^c(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\{i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu^c(x)) - m\}\psi^c(x) = 0. \quad (1.5.63)$$

Покажем, что биспинор  $\psi^c(x)$  связан с  $\psi(x)$  соотношением

$$\psi^c(x) = C\bar{\psi}(x), \quad (1.5.64)$$

где  $C$  — некоторая матрица.

Учитывая (1.5.64), перепишем уравнение (1.5.59) в виде

$$\{i\tilde{C}\gamma^\mu C^{-1}(\partial_\mu - ieA_\mu^c(x)) + m\}\psi^c(x) = 0.$$

Для совпадения этого уравнения с (1.5.63) необходимо, чтобы матрица  $C$  удовлетворяла уравнениям

$$C\tilde{\gamma}^\mu C^{-1} = -\gamma^\mu. \quad (1.5.65)$$

Такая матрица, очевидно, существует, так как матрицы  $\gamma^\mu$  и  $\gamma'^\mu \equiv -\tilde{\gamma}^\mu$  удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям (1.5.10) (см. п. 1.5.2).

Покажем, что матрица  $C$  антисимметрична, т. е.  $\tilde{C} = -C$ . Из (1.5.65) следует, что  $\tilde{\gamma}^\mu = -\tilde{C}^{-1}\gamma^\mu\tilde{C}$ . Используя снова (1.5.65), получаем отсюда  $\gamma^\mu C\tilde{C}^{-1} = C\tilde{C}^{-1}\gamma^\mu$ . Поэтому  $C\tilde{C}^{-1} = \lambda I$ , где  $\lambda$  — некоторое число. Так как  $C = \lambda\tilde{C}$ , то  $\tilde{C} = \lambda C$  и, следовательно,  $\lambda = \pm 1$ . Покажем, что  $\lambda = -1$ . Для этого отметим, что для 16 линейно независимых матриц  $\Gamma_a C$  (см. п. 1.5.2) согласно (1.5.65) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} I \cdot C &= \lambda I \cdot C, & \tilde{\gamma}^\mu C &= -\lambda \gamma^\mu C, & \tilde{\gamma}^5 C &= \lambda \gamma^5 C, \\ \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^5 C &= \lambda \gamma^\mu \gamma^5 C, & \frac{1}{2} [\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu] C &= -\lambda \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] C. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что из 16 линейно независимых матриц  $\Gamma_a C$  в случае  $\lambda = +1$  антисимметричных будет 10, а симметричных 6; в случае же  $\lambda = -1$  симметричных матриц будет 10, а антисимметричных 6. Но 10 антисимметричных линейно независимых матриц не существует, поэтому  $\lambda = -1$ .

Покажем, наконец, что матрицу  $C$  можно считать унитарной. Действительно, из (1.5.65) следует, что  $C^{+1}\tilde{\gamma}^\mu C^+ = -\gamma^\mu$ . Отсюда, снова используя (1.5.65), находим  $CC^{+\gamma^\mu} = \gamma^\mu CC^+$ . Поэтому  $CC^+ = \xi I$ , где  $\xi > 0$ . Так как формулой (1.5.65) матрица  $C$  определяется с точностью до произвольного численного множителя, то мы можем его выбрать так, чтобы  $CC^+ = I$ .

Итак, матрица  $C$  удовлетворяет следующим соотношениям:

$$C\tilde{\gamma}^\mu C^{-1} = -\gamma^\mu, \quad \tilde{C} = -C, \quad CC^+ = I. \quad (1.5.66)$$

Преобразование (1.5.62) называется преобразованием зарядового сопряжения, а величина  $\psi^c(x)$  — зарядово сопряженным биспинором.

Отметим, что при преобразовании зарядового сопряжения биспинор  $\bar{\psi}(x)$  преобразуется согласно формуле

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}^c(x) = C^{-1}\psi(x). \quad (1.5.67)$$

Действительно,  $\bar{\psi}^c(x) = \psi^{c*}\gamma^0 = \psi^*C^{-1}\gamma^0$ . Так как  $\bar{\psi}^* = \tilde{\psi}\gamma^0$ , то, используя формулу (1.5.65), приходим к (1.5.67).

Покажем, наконец, что при преобразованиях Лоренца  $x \rightarrow x' = ax$  зарядово-сопряженные биспиноры  $\psi^c$ ,  $\bar{\psi}^c$  преобразуются согласно формулам

$$\begin{aligned} \psi^c(x) \rightarrow \psi^{c'}(x') &= S\psi^c(x) \text{Sgn } a_0^0, \quad \bar{\psi}^c(x) \rightarrow \bar{\psi}^{c'}(x') = \\ &= \bar{\psi}^c(x) S^{-1}. \end{aligned} \quad (1.5.68)$$

С этой целью заметим предварительно, что матрица  $S(a)$  удовлетворяет соотношению

$$SC\tilde{S}C^{-1} = 1. \quad (1.5.69)$$

Действительно, из формулы (1.5.24) следует, что

$$\tilde{S}\gamma^\mu\tilde{S}^{-1} = a^\mu_\nu\gamma^\nu.$$

Поэтому, учитывая (1.5.65), находим, что  $SC\tilde{S}C^{-1}\gamma^\mu = \gamma^\mu SC\tilde{S}C^{-1}$  и, следовательно,  $SC\tilde{S}C^{-1} = \lambda$  ( $\lambda$  — некоторое число). Так как  $\det S = 1$ , то  $\lambda = \pm 1, \pm i$ . Ясно, что для собственных преобразований Лоренца  $\lambda = 1$ , а для пространственного отражения  $\lambda = -1$ , если  $S = i\gamma^0$ , и  $\lambda = -1$ , если  $S = \gamma^0$ . Для пространственно-временного отражения  $\lambda = 1$  для  $S = \gamma^5$  и  $\lambda = -1$  для  $S = i\gamma^5$ . Доопределив матрицу  $S$  (которая ранее определялась с точностью до множителей  $\pm 1, \pm i$ ) условием  $\lambda = 1$ , получим соотношение (1.5.69); при этом для пространственного отражения  $S = i\gamma^0$ , а для пространственно-временного  $S = \gamma^5$ .

Так как связь биспиноров  $\psi^{c'}(x')$ ,  $\bar{\psi}^{c'}(x')$  с биспинорами  $\bar{\psi}'(x')$ ,  $\psi'(x')$  должна быть такой же, как и связь биспиноров  $\psi^c(x)$ ,  $\bar{\psi}^c(x)$  с биспинорами  $\bar{\psi}(x)$ ,  $\psi(x)$ , то, используя закон преобразования биспиноров  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  при преобразованиях Лоренца (см. (1.5.23), (1.5.29), а также соотношение (1.5.69), мы приходим к формулам (1.5.68).

Если заряд частицы равен нулю, то согласно (1.5.59), (1.5.63) уравнение Дирака допускает решения, для которых биспинор  $\psi(x)$  совпадает с зарядово-сопряженным биспинором

$$\psi(x) = \psi^c(x). \quad (1.5.70)$$

Такой биспинор называется майорановским [5]. Он может служить для описания нейтрино в том случае, если масса нейтрино отлична от нуля.

Дираковский биспинор всегда можно представить в виде

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad (1.5.71)$$

где

$$\psi_L = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi, \quad \psi_R = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi$$

(такое разбиение  $\psi$  играет важную роль в теории электрослабого взаимодействия). Для майорановского биспинора

$$\psi_R = \frac{1 - \gamma^5}{2} C \psi.$$

Учитывая, что  $C^{-1} \gamma^5 C = \tilde{\gamma}^5$ , получаем

$$\psi_R = C \tilde{\gamma}^0 \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi \right)^* = C \tilde{\gamma}^0 \psi_L^* = C \bar{\psi}_L,$$

или

$$\psi_R = \psi_L^c.$$

Таким образом, майорановский биспинор можно представить в виде

$$\psi = \psi_L + \psi_L^c. \quad (1.5.72)$$

Если использовать вейлевское представление матриц

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

то легко проверить, что матрица  $C$  будет иметь вид

$$C = i \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix},$$

$$i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5.73)$$

Поэтому если записать майорановский биспинор  $\psi$  в виде  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ , то условие  $\psi^c = \psi$  приведет к соотношению  $\varphi = -i\sigma^2 \chi^*$ , так что

$$\psi = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \chi^* \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (1.5.74)$$

Из этой формулы следует

$$\psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \chi^* \\ 0 \end{pmatrix},$$

причем спинор  $\chi$  удовлетворяет согласно (1.5.59) уравнению

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + m \sigma^2 \chi^* = 0. \quad (1.5.75)$$

## § 1.6. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СПИНОРЫ

**1.6.1. Структура матрицы преобразования дираковского поля.** При преобразовании Лоренца биспинор  $\psi$  преобразуется согласно формуле (1.5.23). Покажем, что для собственной группы Лоренца представление этой группы, реализуемое 4-рядными матрицами  $S(a)$ , является приводимым, т. е. в некотором базисе матрица  $S(a)$  имеет структуру

$$S(a) = \begin{pmatrix} T(a) & 0 \\ 0 & T'(a) \end{pmatrix}, \quad (1.6.1)$$

где  $T(a)$  и  $T'(a)$  — двухрядные матрицы. В связи со сказанным отметим, что справедливо соотношение (см. п. 1.5.3)

$$S^{-1}\gamma^5 S = \gamma^5 \det a. \quad (1.6.2)$$

Для собственных преобразований Лоренца  $\det a = 1$  и, следовательно, все матрицы  $S(a)$  коммутируют с  $\gamma^5$ , а так как  $\gamma^5$  не единичная матрица, то это означает, что представление, осуществляемое матрицами  $S(a)$ , приводимо.

Рассмотрим базис, в котором матрицы  $\gamma^\mu$  имеют вид (1.5.6) (это представление матриц  $\gamma^\mu$  называется представлением Вейля). В этом базисе

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (1.6.3)$$

где  $I$  — двухрядная единичная матрица. Отсюда следует, что четырехрядная матрица  $S(a)$ , коммутирующая с  $\gamma^5$ , должна иметь структуру (1.6.1).

Так как для собственной группы Лоренца  $S\gamma^0 S^+ = \gamma^0$  (см. (1.5.31)), то, используя формулу (1.5.6), находим

$$T' = T^{+-1}$$

и, следовательно,

$$S(a) = \begin{pmatrix} T(a) & 0 \\ 0 & T^+(a)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.6.4)$$

В вейлевском представлении матриц  $\gamma^\mu$  биспинор  $\psi$  мы записываем в виде  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$  (см. (1.5.5)). Поэтому при собственных преобразованиях Лоренца двухкомпонентные функции  $\varphi$  и  $\chi$  преобразуются независимо согласно формулам

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi' = T\varphi, \\ \chi &\rightarrow \chi' = T^{+-1}\chi. \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

Величины, преобразующиеся по этим формулам, называются спинорами (подробнее см. п. 1.6.3).

Уравнение, которому удовлетворяет матрица  $T(a)$ , получается из уравнения (1.5.24) в результате подстановки в (1.5.24) выражений (1.6.4), (1.5.6) для матриц  $S(a)$  и  $\gamma^\mu$ :

$$T^+ \sigma^\mu T = a^\mu{}_\nu \sigma^\nu, \quad (1.6.6)$$

$$T^{-1} \bar{\sigma}^\mu T^{+1} = a^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu. \quad (1.6.7)$$

Покажем, что уравнение (1.6.7) является следствием (1.6.6). Для этого докажем, что

$$(a^\mu{}_\nu \sigma^\nu)^{-1} = a_{\mu\nu} \bar{\sigma}^\nu. \quad (1.6.8)$$

Согласно (1.5.9), (1.1.7) находим

$$a_{\mu\nu} \bar{\sigma}^\nu a^\mu{}_\lambda \sigma^\lambda = \frac{1}{2} a_{\mu\nu} a^\mu{}_\lambda (\bar{\sigma}^\nu \sigma^\lambda + \bar{\sigma}^\lambda \sigma^\nu) = a_{\mu\nu} a^{\mu\nu} = 1$$

(по  $\mu$  суммирование не производится). Написав далее уравнение (1.6.6) для обратных матриц и используя (1.6.8), придем к (1.6.7).

Уравнение (1.6.6) определяет матрицу  $T(a)$  с точностью до фазового множителя, который может быть сведен к  $\pm 1$ , если наложить на  $T(a)$  условие

$$\det T(a) = 1. \quad (1.6.9)$$

Действительно из определения матриц  $\sigma^\mu$  следует, что

$$\det a^\mu{}_\nu \sigma^\nu = g^{\mu\mu}.$$

Поэтому  $|\det T|^2 = 1$  и, следовательно, фазовый множитель можно выбрать так, чтобы выполнялось соотношение (1.6.9).

Итак, каждому собственному преобразованию Лоренца  $a^\mu{}_\nu$  соответствуют две двухрядные матрицы  $\pm T(a)$  с  $\det T(a) = 1$  (если коэффициенты  $a^\mu{}_\nu$  соответствуют пространственному отражению или обращению времени, то уравнение (1.6.6) для  $T$  не имеет решений).

Покажем, что справедливо и обратное утверждение: если  $T$  — произвольная двухрядная матрица с  $\det T = 1$ , то коэффициенты  $a^\mu{}_\nu$ , определяемые формулой (1.6.6), соответствуют некоторому собственному преобразованию Лоренца. Так как  $\sigma^{\mu+} = \sigma^\mu$ , то из формулы (1.6.6) следует, что  $a^\mu{}_\nu \sigma^\nu = a^\mu{}_\nu \sigma^\nu$ . Поэтому коэффициенты  $a^\mu{}_\nu$  вещественны.

Убедимся, что выполняется условие ортогональности  $a^\mu{}_\lambda g^{\lambda\rho} a^\nu{}_\rho = g^{\mu\nu}$ . Так как  $\det T = 1$ , то  $\det T^+ \sigma^\mu T = g^{\mu\mu}$  и, следовательно, согласно (1.6.6)  $\det a^\mu{}_\nu \sigma^\nu = g^{\mu\mu}$ . Используя явный вид матриц Паули, получим отсюда  $a^\mu{}_\nu a^\mu{}_\rho g^{\nu\rho} = g^{\mu\mu}$ . Из этого соотношения и из (1.5.9) следует

$$a^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu a^\mu{}_\lambda \sigma^\lambda = \frac{1}{2} a^\mu{}_\nu a^\mu{}_\lambda (\bar{\sigma}^\nu \sigma^\lambda + \bar{\sigma}^\lambda \sigma^\nu) = a^\mu{}_\nu a^\mu{}_\lambda g^{\nu\lambda} = g^{\mu\mu}.$$

Поэтому  $(a_{\mu\lambda}\sigma^\lambda)^{-1} = a^\mu_{\nu}\bar{\sigma}^\nu$  (см. (1.6.8)) и, следовательно, согласно (1.6.6) справедливы соотношения

$$T^{-1}\bar{\sigma}^\mu T^{+-1} = a^\mu_{\nu}\bar{\sigma}^\nu,$$

$$T^{-1}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu T = a^\mu_{\rho}a^\nu_{\lambda}\bar{\sigma}^\rho\sigma^\lambda.$$

Замечая, что  $\frac{1}{2}\text{Sp}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu = g^{\mu\nu}$ , из последнего уравнения получаем  $a^\mu_{\rho}g^{\rho\lambda}a^\nu_{\lambda} = g^{\mu\nu}$ .

Таким образом, каждой двухрядной матрице  $T$  с  $\det T = 1$  соответствует некоторое преобразование Лоренца и каждому преобразованию Лоренца соответствуют две матрицы  $T$  (с детерминантом, равным единице), отличающиеся только знаком. Отметим, что двухрядные матрицы  $T$  с  $\det T = 1$  определяются шестью вещественными параметрами ( $2 \cdot 4 - 2 = 6$ ) и таким же количеством параметров определяются произвольные преобразования Лоренца.

Двухрядные матрицы  $T(a)$  с  $\det T = 1$  осуществляют неприводимое представление собственной группы Лоренца. Действительно, пусть  $T(a)$  и  $T(a')$  — две матрицы, удовлетворяющие соотношениям (1.6.6) с коэффициентами преобразований Лоренца  $a$  и  $a'$ . Тогда из (1.6.6) следует

$$(T(a')T(a))^+ \sigma^\mu (T(a')T(a)) = a'^\mu_{\lambda}a^\lambda_{\nu}\sigma^\nu,$$

поэтому  $T(a')T(a) = T(a')$ .

**1.6.2. Матрицы преобразования спиноров при бесконечно малых преобразованиях Лоренца.** Рассмотрим бесконечно малое преобразование Лоренца  $a^\mu_{\nu} = \delta^\mu_{\nu} + \varepsilon^\mu_{\nu}$ . Соответствующую ему матрицу  $T(a)$  можно записать в виде

$$T(a) = 1 - \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \quad (1.6.10)$$

где  $\sigma^{\mu\nu}$  — некоторые двухрядные матрицы, антисимметричные по индексам  $\mu$  и  $\nu$ . Подставляя (1.6.10) в (1.6.6), получаем

$$-i\varepsilon^{\mu\nu}(\sigma^\lambda_{\mu\nu} - \sigma^\lambda_{\nu\mu}) = \varepsilon^{\mu\nu}(\delta^\lambda_{\mu}\sigma_\nu - \delta^\lambda_{\nu}\sigma_\mu),$$

откуда следует соотношение

$$\sigma^\lambda_{\mu\nu} - \sigma^\lambda_{\nu\mu} = i(-\delta^\lambda_{\nu}\sigma_\mu + \delta^\lambda_{\mu}\sigma_\nu).$$

Учитывая, что  $\text{Sp}\sigma_{\mu\nu} = 0$  (так как  $\det T = 1$ ), получаем

$$\sigma^{ik} = \sigma_{ik} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ikl}\sigma_l, \quad \sigma_{0k} = -\frac{i}{2} \sigma^k = \sigma^{k0}. \quad (1.6.11)$$

Эти формулы можно записать в 4-мерном виде

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} (\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu). \quad (1.6.11')$$

Из (1.6.10), (1.6.11') следует, что матрица  $T^{+-1}$  (с помощью которой преобразуются величины  $\chi$  (см. 1.6.4)) для бесконечно малых преобразований Лоренца имеет вид

$$T^{+-1} = 1 - \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \bar{\sigma}^{\mu\nu}, \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu). \quad (1.6.12)$$

Учитывая (1.1.14), (1.6.10), (1.6.12), матрицу  $\Sigma^{\mu\nu}$  (осуществляющую собственное преобразование Лоренца биспиноров  $\psi$ ) можно представить в виде

$$\Sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \quad (1.6.13)$$

Рассмотрим подгруппу собственной группы Лоренца, соответствующую пространственным поворотам. Для нее  $a^0_0 = 1$ ,  $a^k_0 = a^0_k = 0$ , поэтому уравнения (1.6.6) принимают вид

$$T^+ \sigma^k T = a^k_i \sigma^i, \quad T^+ T = 1. \quad (1.6.14)$$

Таким образом, пространственным вращениям соответствует двухрядная унитарная матрица  $T$  с  $\det T = 1$ .

Двухрядные унитарные матрицы  $T$  с  $\det T = 1$  образуют группу,  $SU(2)$ . Эти матрицы осуществляют неприводимое представление группы пространственных вращений, причем коэффициентам преобразований поворота  $a^k_i$  соответствует матрица  $T(a)$ , определяемая формулой (1.6.14).

Рассмотрим, в частности, вращение на угол  $\varphi$  вокруг оси  $3 \equiv z$ :

$$x'^1 = x^1 \cos \varphi - x^2 \sin \varphi, \quad x'^2 = x^1 \sin \varphi + x^2 \cos \varphi, \quad x'^3 = x^3, \quad (1.6.15)$$

которому соответствует матрица  $T(\varphi)$ . Из группового закона умножения (см. (1.1.13)) следует

$$T(\varphi + \delta\varphi) T(-\varphi) = T(\delta\varphi).$$

Учитывая, что  $T(-\varphi) = T^{-1}(\varphi)$ ,  $T(0) = 1$ , находим

$$\frac{dT(\varphi)}{d\varphi} = \frac{T(\delta\varphi) - 1}{\delta\varphi} T(\varphi).$$

Согласно (1.6.15)  $\varepsilon^1_2 = -\delta\varphi$ ,  $\varepsilon^2_1 = \delta\varphi$  и, следовательно, (см. (1.6.10))

$$T(\delta\varphi) - 1 = i\sigma^{12}\delta\varphi = \frac{i}{2} \sigma^3 \delta\varphi.$$

Поэтому

$$\frac{dT(\varphi)}{d\varphi} = \frac{i}{2} \sigma^3 T(\varphi)$$

и, следовательно,

$$T(\varphi) = e^{\frac{i}{2} \sigma^3 \varphi},$$

или

$$T(\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} + i\sigma^3 \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (1.6.16)$$



Видно, что  $T(2\pi) = -1$ . Таким образом, тождественному преобразованию ( $\varphi = 0, 2\pi$ ) соответствуют две матрицы  $T = \pm 1$ . Это находится в согласии с тем, что каждому преобразованию  $a_{\mu\nu}$  соответствуют две матрицы, отличающиеся знаком.

**1.6.3. Спинорная алгебра.** Вернемся к закону преобразования двухкомпонентных величин  $\varphi$ :

$$\varphi_\alpha \rightarrow \varphi'_\alpha = T_{\alpha\beta}(a) \varphi_\beta.$$

Если двухкомпонентные величины  $\varphi^\rho$  ( $\rho = 1, 2$ ) преобразуются по закону

$$\varphi^\rho \rightarrow \varphi'^\rho = T^\rho_\sigma \varphi^\sigma, \quad (1.6.17)$$

где  $T^\rho_\sigma$  — произвольная двухрядная матрица с  $\det T = 1$ ,

$$\det T \equiv T^1_1 T^2_2 - T^1_2 T^2_1 = 1, \quad (1.6.18)$$

то такие величины называются контравариантными спинорами первого ранга. Преобразования (1.6.17) образуют, очевидно, группу, так как два последовательных преобразования с матрицами  $T$  и  $T'$  ( $\det T = \det T' = 1$ ) эквивалентны одному преобразованию с матрицей  $T'' = T'T$ , детерминант которой также равен единице. Эта группа называется группой  $SL(2)$ .

Таким образом, величины  $\varphi_\alpha$  в уравнении Дирака образуют контравариантный спинор 1-го ранга  $\varphi^\alpha$ , причем  $T^\alpha_\beta \equiv T_{\alpha\beta}$ .

Введем далее ковариантный спинор первого ранга  $\chi_\rho$  с законом преобразования

$$\chi_\rho \rightarrow \chi'_\rho = \chi_\lambda (T^{-1})^\lambda_\rho, \quad (1.6.19)$$

где  $(T^{-1})^\lambda_\rho \equiv (T^{-1})_{\lambda\rho}$  — матрица, обратная по отношению к матрице  $T^\lambda_\rho$ :

$$(T^{-1})^\lambda_\rho T^\rho_\sigma = \delta^{\lambda\sigma}$$

( $\delta^\lambda_\sigma \equiv \delta_{\lambda\sigma}$ ). Легко видеть, что

$$\varphi'^\rho \chi'_\rho = \varphi^\rho \chi_\rho. \quad (1.6.20)$$

Эта формула разъясняет целесообразность введения кроме контравариантных еще ковариантных спиноров, так как вследствие этого достигается возможность просто строить инварианты преобразований (1.6.17), (1.6.19).

Рассмотрим двухкомпонентные величины, преобразующиеся с помощью комплексно сопряженной матрицы  $T^*$ , которые будем называть пунктирными спинорами и обозначать  $\varphi^\mu$  и  $\chi_\mu$ . По определению эти величины преобразуются как  $\varphi^{\mu*}$  и  $\chi_{\mu*}$ :

$$\varphi^\mu \rightarrow \varphi'^\mu = T^\mu_\sigma \varphi^\sigma, \quad T^\mu_\sigma \equiv T^{\mu\sigma*}, \quad (1.6.21)$$

$$\chi_\mu \rightarrow \chi'_\mu = \chi_\sigma (T^{-1})^\sigma_\mu, \quad (T^{-1})^\sigma_\mu \equiv (T^{-1})^{\sigma\mu*}$$

и называются соответственно контравариантным и ковариантным пунктирными спинорами первого ранга.

Введем далее спиноры высших рангов  $\varphi_{\sigma \dots \lambda \xi \dots \dot{\zeta}}^{\lambda \dots \rho \dot{\mu} \dots \dot{\nu}}$ , которые преобразуются как произведения соответствующих спиноров первого ранга  $\varphi^{\lambda} \cdot \dots \cdot \chi_{\dot{\zeta}}$ . Например,

$$\begin{aligned} \varphi^{\lambda \dot{\rho}} &\rightarrow \varphi'^{\lambda \dot{\rho}} = T^{\lambda}_{\alpha} T^{\dot{\rho}}_{\dot{\beta}} \varphi^{\alpha \dot{\beta}}, \\ \varphi^{\lambda}_{\rho} &= \varphi'^{\lambda}_{\rho} = T^{\lambda}_{\alpha} \varphi^{\alpha}_{\beta} (T^{-1})^{\dot{\beta}}_{\dot{\rho}}. \end{aligned} \quad (1.6.22)$$

Для спиноров высших рангов можно ввести операцию свертки, при которой ранг спинора уменьшается на две единицы. Свертка производится по верхнему и нижнему индексам одинаковой природы. Например, из спинора третьего ранга  $\varphi_{\rho}^{\alpha \dot{\beta}}$  можно построить спинор первого ранга  $\varphi^{\alpha} \equiv \varphi_{\dot{\beta}}^{\alpha \dot{\beta}}$  (по дважды встречающемуся индексу производится суммирование). Путем перемножения спиноров можно образовывать спиноры высших рангов, например  $\varphi_{\beta}^{\alpha} = \varphi^{\alpha} \chi_{\beta}$  (путем свертки по  $\alpha$  и  $\dot{\beta}$  мы получаем инвариант (1.6.20)).

Рассмотрим величины  $\epsilon^{\alpha \dot{\beta}} = -\epsilon^{\dot{\beta} \alpha}$ , где  $\epsilon^{12} = 1$  ( $\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$ ,  $\epsilon^{21} = -1$ ). Если считать их компонентами некоторого контравариантного спинора, то он не будет изменяться при спинорном преобразовании. Действительно,

$$\epsilon^{\alpha \dot{\beta}} \rightarrow \epsilon'^{\alpha \dot{\beta}} = T^{\alpha}_{\rho} T^{\dot{\beta}}_{\lambda} \epsilon^{\rho \lambda},$$

а так как  $\det T = 1$ , то  $\epsilon'^{\alpha \dot{\beta}} = \epsilon^{\alpha \dot{\beta}}$ . Поэтому спинор  $\epsilon^{\alpha \dot{\beta}}$  можно назвать универсальным спинором.

С помощью спинора  $\epsilon^{\alpha \dot{\beta}}$  можно от ковариантных компонент спиноров переходить к контравариантным. Например, если  $\varphi_{\rho}$  — ковариантный спинор первого ранга, то  $\epsilon^{\alpha \dot{\beta}} \varphi_{\rho}$  будет спинором третьего ранга, а  $\varphi^{\alpha} \equiv \epsilon^{\alpha \dot{\beta}} \varphi_{\dot{\beta}}$  — контравариантным спинором первого ранга.

Аналогично можно ввести универсальный контравариантный пунктирный спинор  $\epsilon^{\dot{\alpha} \dot{\beta}} \equiv \epsilon^{\alpha \dot{\beta}}$ , с помощью которого можно связать ковариантные и контравариантные компоненты пунктирных спиноров.

Универсальный ковариантный спинор  $\epsilon_{\alpha \dot{\beta}}$  ( $\epsilon_{\dot{\alpha} \dot{\beta}}$ ) определяется с помощью соотношения  $\epsilon_{\alpha \dot{\beta}} \epsilon^{\beta \dot{\rho}} = \delta_{\alpha}^{\dot{\rho}}$  ( $\epsilon_{\dot{\alpha} \dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\beta} \dot{\rho}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\rho}}$ ). При этом, очевидно,  $\epsilon_{12} = \epsilon_{\dot{2}\dot{1}} = -1$ . С помощью спиноров  $\epsilon_{\alpha \dot{\beta}}$ ,  $\epsilon_{\dot{\alpha} \dot{\beta}}$  можно опускать спинорные индексы.

Как мы видели, величины  $\chi_{\alpha}$  преобразуются по закону

$$\chi_{\alpha} \rightarrow \chi'_{\alpha} = \chi_{\dot{\beta}} (T^{-1})^{\dot{\beta}}_{\alpha},$$

который без учета спинорных обозначений можно записать в виде

$$\chi_{\alpha} \rightarrow \chi'_{\alpha} = (T^{-1})_{\alpha \dot{\beta}}^{-1} \chi_{\dot{\beta}}.$$

Так как по такому же закону преобразуется (см. (1.6.4)) двухкомпонентная функция  $\chi_{\alpha}$ , образующая вместе с  $\varphi$  четырехкомпонентный биспинор  $\psi$ , то можно считать, что четырехкомпонентная функция  $\psi$  объединяет контравариантный спинор  $\varphi^{\rho}$  и ковариантный пункт-

тирный спинор  $\chi_{\dot{\lambda}}$ :

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi^{\rho} \\ \chi_{\dot{\lambda}} \end{pmatrix}. \quad (1.6.23)$$

Покажем, что с помощью спиноров можно строить 4-векторы и 4-тензоры. Для этого введем величины  $(\sigma^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha}$ , преобразующиеся по индексу  $\mu$  как 4-вектор и по индексам  $\dot{\beta}, \alpha$  как ковариантный спинор:

$$(\sigma^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha} \rightarrow (\sigma'^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha} = a^{\mu}_{\nu} (\sigma^{\nu})_{\dot{\lambda}\rho} (T^{-1})^{\dot{\lambda}}_{\dot{\beta}} (T^{-1})^{\rho}_{\alpha}. \quad (1.6.24)$$

Ясно, что величины

$$v^{\mu} = \xi^{\alpha\dot{\beta}} (\sigma^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha}, \quad (1.6.25)$$

где  $\xi^{\alpha\dot{\beta}}$  — контравариантный спинор второго ранга, образуют вектор, так как

$$v^{\mu} \rightarrow v'^{\mu} = \xi'^{\rho\dot{\lambda}} (\sigma'^{\mu})_{\dot{\lambda}\rho} = a^{\mu}_{\nu} T^{\rho}_{\alpha} T^{\dot{\lambda}}_{\dot{\beta}} \xi^{\alpha\dot{\beta}} (\sigma^{\nu})_{\dot{\gamma}\delta} (T^{-1})^{\gamma}_{\lambda} (T^{-1})^{\delta}_{\rho}$$

или

$$v'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} \xi^{\alpha\dot{\beta}} (\sigma^{\nu})_{\dot{\beta}\alpha} = a^{\mu}_{\nu} v^{\nu}.$$

Мы хотим, чтобы входящий сюда спин-вектор  $(\sigma^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha}$  был универсальным, т. е. чтобы выполнялось условие

$$(\sigma'^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha} = (\sigma^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha}.$$

Для этого согласно (1.6.24) матрицу спинорных преобразований нужно связать с лоренцевым преобразованием  $a_{\mu\nu}$ :

$$(\sigma^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha} = a^{\mu}_{\nu} (\sigma^{\nu})_{\dot{\lambda}\rho} (T^{-1})^{\dot{\lambda}}_{\dot{\beta}} (T^{-1})^{\rho}_{\alpha}.$$

Без учета спинорных обозначений это соотношение можно переписать в виде

$$\sigma^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} T^{+-1} \sigma^{\nu} T^{-1}$$

или

$$T^{+} \sigma^{\mu} T = a^{\mu}_{\nu} \sigma^{\nu}.$$

Из сравнения этой формулы с (1.6.6) видно, что матрицы Паули  $\sigma^{\mu}$  можно рассматривать как универсальный спин-вектор, не изменяющийся при одновременном лоренцевом и спинорном преобразованиях, если только эти преобразования связаны между собой соотношением (1.6.6).

Формула (1.6.7) показывает, что матричные элементы  $(\bar{\sigma}_{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}$  можно также рассматривать как универсальный спин-вектор  $(\bar{\sigma}^{\mu})^{\alpha\dot{\beta}} ((\sigma^{\mu})^{\alpha\dot{\beta}} \equiv (\bar{\sigma}^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}})$ ; отметим, что  $(\bar{\sigma}^{\mu})^{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha}$ , где  $(\sigma^{\mu})^{\dot{\beta}\alpha} = \varepsilon^{\dot{\beta}\lambda} \varepsilon^{\alpha\rho} (\sigma^{\mu})_{\dot{\lambda}\rho}$ .

Таким образом, формулу (1.6.25) можно переписать в виде

$$v^{\mu} = \xi_{\alpha\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^{\mu})^{\alpha\dot{\beta}}.$$

С помощью универсального спин-вектора  $(\sigma^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha}$  можно строить 4-тензоры любого ранга. Например,

$$v^{\mu\nu} = \xi^{\alpha\dot{\beta}\rho\dot{\lambda}} (\sigma^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha} (\sigma^{\nu})_{\dot{\lambda}\rho},$$

где  $\xi^{\alpha\beta\gamma\lambda}$  — контравариантный спинор 4-го ранга, будет тензором второго ранга.

Пусть  $\varphi^\alpha$  — контравариантное спинорное поле  $\varphi^\alpha(x)$ . Тогда ясно, что  $(\sigma^\mu)_{\dot{\beta}\alpha}\partial_\mu\varphi^\alpha$  будет ковариантным спинорным полем. Если поэтому  $\chi_{\dot{\beta}}(x)$  также ковариантное спинорное поле, то возможно уравнение вида

$$(\sigma^\mu)_{\dot{\beta}\alpha}\partial_\mu\varphi^\alpha + im\chi_{\dot{\beta}} = 0, \quad (1.6.26)$$

где  $m$  — константа. Поскольку далее  $(\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\chi_{\dot{\beta}}$  — контравариантный спинор, то выполняется уравнение

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\chi_{\dot{\beta}} + im\varphi^\alpha = 0, \quad (1.6.27)$$

где  $\varphi^\alpha$  — поле, входящее в (1.6.26). Таким образом, мы приходим к уравнению Дирака (1.5.5).

Для получения релятивистски инвариантного уравнения только для одного поля  $\varphi^\alpha$  (в которое не входит комплексно-сопряженный спинор  $\varphi_\alpha^*$ ) необходимо лишь одно — чтобы выполнялось равенство

$$(\sigma^\mu)_{\dot{\beta}\alpha}\partial_\mu\varphi^\alpha = 0, \quad (1.6.28)$$

или без использования спинорных обозначений

$$\sigma^\mu\partial_\mu\varphi = 0. \quad (1.6.28')$$

Это уравнение согласно (1.5.5) соответствует уравнению Дирака для частиц с массой, равной нулю. Оно описывает нейтрино и называется уравнением Вейля [6].

Если допустить, что в уравнение для спинора  $\varphi^\alpha$  может входить комплексно-сопряженный спинор  $\varphi_{\dot{\beta}}^*$ , то величину  $(\sigma^\mu)_{\dot{\beta}\alpha}\partial_\mu\varphi^\alpha$  можно приравнять величине  $im\varphi_{\dot{\beta}} \equiv im\varphi_{\dot{\beta}}^*$ :

$$(\sigma^\mu)_{\dot{\beta}\alpha}\partial_\mu\varphi^\alpha - im\varphi_{\dot{\beta}}^* = 0. \quad (1.6.29)$$

Легко видеть, что если величину  $\chi_{\dot{\alpha}}$  в уравнениях (1.6.26), (1.6.27) отождествить с  $-\varphi_{\dot{\alpha}}^*$ , то оба уравнения будут удовлетворяться вследствие уравнения (1.6.29), причем дираковский биспинор

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi^\alpha \\ -\varphi_{\dot{\alpha}}^* \end{pmatrix}, \quad \varphi_{\dot{\alpha}}^* = \varepsilon_{\alpha\dot{\beta}}\varphi^{\beta*} \quad (1.6.30)$$

будет совпадать с майорановским биспинором, введенным в п. 1.5.5.

До сих пор мы рассматривали собственные преобразования Лоренца. Для пространственного отражения ( $a^k_l = -\delta^k_l$ ,  $a^0_0 = 1$ ,  $a^0_k = a^k_0 = 0$ ) согласно (1.5.31) матрица  $S$  будет совпадать с  $\gamma^0$ ,  $S = \gamma^0$ .

Поэтому в вейлевском представлении матриц  $\gamma^\mu$  биспинор  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$  будет преобразовываться по закону

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \chi, \quad \chi \rightarrow \chi' = \varphi. \quad (1.6.31)$$

Отсюда следует, что четырехмерное представление  $S(a)$  является неприводимым по отношению к полной группе Лоренца, хотя оно и приводимо по отношению к собственной группе Лоренца. Этим объясняется тот факт, что только уравнение Дирака, а не уравнение Вейля, инвариантно по отношению к пространственным отражениям.

## § 1.7. СУПЕРПОЛЯ

**1.7.1. Алгебра генераторов суперпреобразований.** Скалярное, векторное и дираковское поля, которые мы до сих пор рассматривали, связаны с определенными представлениями группы Пуанкаре. При преобразованиях группы Пуанкаре или внутренней симметрии тензорные (бозонные) и спинорные (фермионные) поля преобразовывались независимо друг от друга. Однако можно ввести более общую группу преобразований<sup>1</sup>, которая объединит бозонные и фермионные поля так, что при преобразованиях этой группы бозонные и фермионные поля будут преобразовываться не независимо, а «перемешаются» между собой. Для того чтобы преобразования имели физический смысл, необходимо потребовать, чтобы лагранжиан полей был инвариантен по отношению к преобразованиям этой группы.

Поля, которые мы до сих пор изучали, преобразовывались при бесконечно малых преобразованиях группы Пуанкаре согласно формуле

$$\chi(x) \rightarrow \chi'(x'), \quad x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu + \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu, \quad (1.7.1)$$

где

$$\chi'(x) = G\chi(x), \quad G = i\varepsilon_\mu \mathcal{P}^\mu - \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} L^{\mu\nu}$$

и  $\mathcal{P}^\mu$ ,  $L^{\mu\nu}$  — генераторы преобразований:

$$\mathcal{P}_\mu = i\partial_\mu, \quad L_{\mu\nu} = \Sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu). \quad (1.7.2)$$

Согласно (1.7.2) эти генераторы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\nu] &= 0, & [\mathcal{P}_\mu, L_{\nu\rho}] &= i(g_{\mu\nu}\mathcal{P}_\rho - g_{\mu\rho}\mathcal{P}_\nu), \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\lambda}] &= i(g_{\mu\lambda}L_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}L_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}L_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}L_{\mu\rho}). \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

Теперь мы расширим группу Пуанкаре, введя дополнительные генераторы, которые будем считать, в отличие от  $\mathcal{P}_\mu$ ,  $L_{\nu\rho}$ , не тензорными, а спинорными величинами. Будем обозначать их  $Q_\alpha$ ,  $Q_{\dot{\alpha}}$  ( $\alpha$  и  $\dot{\alpha}$  — спинорные индексы,  $\alpha = 1, 2$ ,  $\dot{\alpha} = 1, 2$  см. § 1.6) и в соответствии с требованием релятивистской инвариантности предполагать, что генераторы  $\mathcal{P}_\mu$ ,  $L_{\nu\rho}$ ,  $Q_\alpha$ ,  $Q_{\dot{\alpha}}$  удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям<sup>2</sup>:

$$[Q_\alpha, \mathcal{P}_\mu] = [Q_{\dot{\alpha}}, \mathcal{P}_\mu] = 0, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{Q_{\dot{\alpha}}, Q_{\dot{\beta}}\} = 0,$$

<sup>1</sup> Эти преобразования называются преобразованиями суперсимметрии. Впервые они были введены в работах Ю. А. Гальфанда, Е. П. Лихтмана [7, 11], Д. В. Волкова, В. П. Акулова [8, 9], Д. В. Волкова, В. А. Сороки [10] и Весса, Зумино [13].

<sup>2</sup> При изложении теории суперсимметрии мы использовали обзор [12] (см. также [19]).

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2\sigma_{\beta\alpha}^\mu \mathcal{P}_\mu, \quad [Q_\alpha, L_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta, \quad (1.7.4)$$

$$[Q_{\dot{\alpha}}, L_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} Q_{\dot{\beta}}$$

(кроме того, остаются справедливыми соотношения (1.73)).

Отметим, что численный коэффициент в выражении для антикоммутатора  $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$  всегда можно выбрать равным двум путем соответствующей нормировки генераторов  $Q_\alpha, Q_\beta$ . Отметим также, что первые из соотношений (1.7.4) с точки зрения релятивистской инвариантности могли бы иметь вид

$$\begin{aligned} [Q_\alpha, \mathcal{P}_\mu] &= C_1(\sigma_\mu)_\alpha{}^\beta Q_\beta, & \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= C_2(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} L^{\mu\nu}, \\ [Q_{\dot{\alpha}}, \mathcal{P}_\mu] &= -C_1^*(\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} Q_{\dot{\beta}}, & \{Q_{\dot{\alpha}}, Q_{\dot{\beta}}\} &= C_2^*(\sigma_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} L^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Но коммутируя первое из этих соотношений с оператором  $\mathcal{P}_\nu$  и учитывая тождество Якоби

$$[a, [b, c]] = -[b, [c, a]] - [c, [a, b]],$$

из которого следует, что

$$[\mathcal{P}_\nu, [Q_\alpha, \mathcal{P}_\mu]] = [\mathcal{P}_\mu, [Q_\alpha, \mathcal{P}_\nu]],$$

согласно (1.7.5) получаем

$$|C_1|^2(\sigma_{\beta\alpha}^\nu \sigma_\lambda^{\mu\dot{\beta}} + \sigma_{\beta\alpha}^\mu \sigma_\lambda^{\nu\dot{\beta}}) Q^\lambda = 0.$$

Это возможно только при  $C_1 = 0$ . Коммутируя второе из соотношений (1.7.5) с  $P_\nu$  и учитывая, что  $[Q_\alpha, P_\nu] = 0$ , согласно (1.7.3) получаем  $C_2 = 0$ . Перестановочные соотношения для  $Q$  и  $L_{\mu\nu}$  выбирались таким образом, чтобы при преобразованиях Лоренца величины  $Q_\alpha, Q_\beta$  преобразовывались как спиноры.

Обратим внимание на то, что для спинорных генераторов пишутся не коммутаторы, а антикоммутаторы. Это связано с тем, что спинорные поля описывают фермионы, удовлетворяющие принципу Паули.

На первый взгляд кажется, что введение антикоммутаторов для генераторов групп несовместимо с теорией непрерывных групп (см. формулы (1.1.27), в которые входят коммутаторы). Однако в действительности, как мы сейчас покажем, противоречие не возникает, если кроме обычных  $c$ -числовых параметров, определяющих элементы непрерывной группы, ввести в число этих элементов еще так называемые грассмановые спинорные переменные  $\zeta_\alpha, \zeta_{\dot{\alpha}}$ , антикоммутирующие между собой и с генераторами  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}$  и коммутирующие с остальными генераторами:

$$\{\zeta_\alpha, \zeta_\beta\} = \{\zeta_{\dot{\alpha}}, \zeta_{\dot{\beta}}\} = \{\zeta_\alpha, \zeta_\beta\} = \{\zeta_\beta, Q_\alpha\} = \{\zeta_{\dot{\beta}}, Q_\alpha\} = \{\zeta_\beta, Q_{\dot{\alpha}}\} = 0.$$

Для простоты рассмотрим замкнутую алгебру, характеризуемую величинами  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}, \mathcal{P}_\mu$ , и покажем, что величины

$$\mathcal{G}(\zeta, a) = \exp G(\zeta, a), \quad G(\zeta, a) = i(Q_\alpha \zeta^\alpha + \zeta_{\dot{\alpha}} Q_{\dot{\alpha}} + a^\mu \mathcal{P}_\mu), \quad (1.7.6)$$

где  $a^\mu$  —  $c$ -числовые переменные и  $\zeta^\alpha, \zeta^{\dot{\alpha}} \equiv \bar{\zeta}^\alpha$  — грассманы переменные, образуют группу, т. е.

$$\mathcal{G}(\zeta, a) \mathcal{G}(\zeta', a') = \mathcal{G}(\zeta'', a''), \quad (1.7.7)$$

с законом умножения

$$\begin{aligned} \zeta'' &= \zeta + \zeta', & \bar{\zeta}'' &= \bar{\zeta} + \bar{\zeta}', \\ a''^\mu &= a^\mu + a'^\mu + i(\bar{\zeta}^\mu \zeta' - \bar{\zeta}'^\mu \zeta). \end{aligned} \quad (1.7.8)$$

Отметим, что соотношения (1.7.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} [Q\zeta, Q\zeta'] &= [\bar{\zeta}\bar{Q}, \bar{\zeta}'\bar{Q}] = 0, \\ [\bar{\zeta}\bar{Q}, Q\zeta'] &= 2\bar{\zeta}^\mu \zeta' \mathcal{P}_\mu, \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

где  $Q\zeta = Q_\alpha \zeta^\alpha$ ,  $\bar{\zeta}\bar{Q} = \zeta^{\dot{\alpha}} Q_{\dot{\alpha}}$  ( $Q_\alpha \equiv \bar{Q}_\alpha$ ).

Используя далее формулу

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \cdot e^{-\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (1.7.10)$$

справедливую, если оператор  $[A, B]$  коммутирует с  $A, B$ , и учитывая, что согласно (1.7.9)

$$-\frac{1}{2}[Q\zeta + \bar{\zeta}\bar{Q}, Q\zeta' + \bar{\zeta}'\bar{Q}] = \bar{\zeta}'^\mu \zeta \mathcal{P}_\mu - \bar{\zeta}^\mu \zeta' \mathcal{P}_\mu,$$

приходим к формуле (1.7.8).

Выясним, как найти конкретный вид генераторов  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}$ . Как мы видели, генераторы группы Пуанкаре  $\mathcal{P}_\mu$  и  $L_{\mu\nu}$  могут быть реализованы с помощью операций дифференцирования по  $x^\mu$  (см. (1.7.2)). Аналогично могут быть реализованы генераторы  $Q_\alpha$  и  $Q_{\dot{\alpha}}$ , но не с помощью операции пространственно-временного дифференцирования  $\partial_\mu$ , а с помощью операций дифференцирования  $\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{\alpha}}}$  по некоторым спинор-

ным переменным  $\theta^\alpha, \theta^{\dot{\alpha}}$ . При этом спинорные переменные  $\theta^\alpha, \theta^{\dot{\alpha}}$  должны являться грассмановыми переменными, антикоммутирующими между собой и со всеми другими спинорными переменными (например,  $\zeta^\alpha, \zeta^{\dot{\alpha}}$ ). В соответствии с этим под производными  $\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{\alpha}}}$  следует понимать грассмановы производные, которые определяются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta^\nu} \theta^\alpha \theta^\beta \theta^{\dot{\alpha}} \dots &= \frac{\partial\theta^\alpha}{\partial\theta^\nu} \theta^\beta \theta^{\dot{\alpha}} \dots - \theta^\alpha \frac{\partial\theta^\beta}{\partial\theta^\nu} \theta^{\dot{\alpha}} \dots \\ &\dots + \theta^\alpha \theta^\beta \frac{\partial\theta^{\dot{\alpha}}}{\partial\theta^\nu} \dots - \dots, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\theta^\alpha}{\partial\theta^\nu} = \delta_\nu^\alpha, \quad \frac{\partial\theta^{\dot{\alpha}}}{\partial\theta^\nu} = 0$$

(аналогичные формулы справедливы и для производной  $\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{\alpha}}}$ ).

Вследствие грассманова характера переменных  $\theta^\alpha$ ,  $\bar{\theta}^\alpha$  и того, что  $\alpha$  и  $\dot{\alpha}$  пробегает два значения, отличными от нуля будут только следующие произведения переменных  $\theta^\alpha$ ,  $\bar{\theta}^\alpha \equiv \theta^{\dot{\alpha}}$ :

$$\theta^\alpha \theta^\beta, \bar{\theta}^\alpha \bar{\theta}^\beta, \theta^\alpha \bar{\theta}^\beta, \theta^\alpha \theta^\beta \bar{\theta}^\gamma, \bar{\theta}^\alpha \bar{\theta}^\beta \theta^\gamma, \theta^\alpha \theta^\beta \bar{\theta}^\lambda \bar{\theta}^\rho.$$

Отметим, что среди произведений  $\theta^\alpha \theta^\beta$  отличны от нуля только  $\theta^1 \theta^2$  и  $\theta^2 \theta^1 = -\theta^1 \theta^2$ . Поэтому

$$\theta^\alpha \theta^\beta = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} (\theta\theta), \quad (1.7.11)$$

где  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  — полностью антисимметричный спинор 2-го ранга (см. п. 1.6.3), и

$$(\theta\theta) = \theta^\alpha \theta_\alpha \equiv \theta^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} \theta^\beta. \quad (1.7.11')$$

Аналогично

$$\bar{\theta}^\alpha \bar{\theta}^\beta = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\dot{\beta}} (\bar{\theta}\bar{\theta}), \quad (\bar{\theta}\bar{\theta}) = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \varepsilon_{\dot{\alpha}\beta} \theta^\beta. \quad (1.7.12)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \theta^\alpha \theta^\beta \theta^{\dot{\rho}} &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} (\theta\theta) \theta^{\dot{\rho}}, & \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \theta^\rho &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{\dot{\alpha}\beta} (\bar{\theta}\bar{\theta}) \theta^\rho, \\ \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \theta^\alpha \theta^\beta &= \frac{1}{4} \varepsilon^{\alpha\dot{\beta}} \varepsilon^{\alpha\beta} (\bar{\theta}\bar{\theta}) (\theta\theta). \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

Таким образом, единичный элемент, спиноры  $\theta$ ,  $\bar{\theta}$  и комбинации грассмановых спиноров  $\theta^\alpha$ ,  $\bar{\theta}^\beta$

$$(\theta\theta), (\bar{\theta}\bar{\theta}), \theta^\alpha \bar{\theta}^\beta, (\theta\theta) \bar{\theta}^\alpha, (\bar{\theta}\bar{\theta}) \theta^\alpha, (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) \quad (1.7.14)$$

могут быть приняты в качестве базиса некоторого 16-мерного линейного пространства, в котором реализуется грассманова алгебра, определяемая законом умножения  $\theta^\alpha$ ,  $\bar{\theta}^\alpha$ . Переменные  $\theta^\alpha$ ,  $\bar{\theta}^\alpha$  называются образующими грассмановой алгебры (грассманова алгебра с  $n$  образующими реализуется в пространстве  $2^n$  измерений).

В пространстве переменных  $\theta$ ,  $\zeta$  можно ввести операцию инволюции, обозначаемую звездочкой, которая соответствует операции комплексного сопряжения для обычных чисел и определяется формулами

$$\begin{aligned} \theta \rightarrow \theta^* &\equiv \bar{\theta}, & \bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta}^* &= \theta, & \zeta \rightarrow \zeta^* &= \bar{\zeta}, & \bar{\zeta} \rightarrow \bar{\zeta}^* &= \zeta, \\ (c\theta) \rightarrow (c\theta)^* &= c^* \theta^*, & (c\zeta) \rightarrow (c\zeta)^* &= c^* \zeta^*, \end{aligned}$$

где  $c$  — комплексное число. Кроме того, при инволюции произведения грассмановых переменных необходимо изменять порядок сомножителей (т. е. изменять знак). Например,  $(\theta^\alpha \theta^\beta)^* = \bar{\theta}^\beta \bar{\theta}^\alpha = -\bar{\theta}^\alpha \bar{\theta}^\beta$ . Отсюда, в частности, следует, что оператор  $G$ , определяемый формулой (1.7.6), при операции инволюции не изменяется, т. е.

$$G^* = G. \quad (1.7.15)$$



Мы удовлетворим перестановочным соотношениям (1.7.4), если положим

$$\mathcal{P}_\mu = i\partial_\mu, \quad Q_\alpha = -i \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \theta^\beta \sigma_{\beta\alpha}^\mu \partial_\mu, \quad Q_{\dot{\alpha}} = i \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \theta^\beta \partial_\mu. \quad (1.7.16)$$

Действительно, так как

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \theta^\beta \right\} = \delta_\alpha^\beta, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \theta^\beta \right\} = 0,$$

то

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{Q_{\dot{\alpha}}, Q_{\dot{\beta}}\} = 0, \\ \{Q_\alpha, Q_{\dot{\beta}}\} = i\sigma_{\beta\alpha}^\mu \partial_\mu + i\sigma_{\beta\alpha}^\mu \partial_\mu = 2i\sigma_{\beta\alpha}^\mu \partial_\mu.$$

Легко проверить, что, для того чтобы выполнялись остальные соотношения (1.7.4), генератор  $L_{\mu\nu}$  должен быть модифицирован и определяться следующим образом:

$$L_{\mu\nu} = \Sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + \frac{1}{2} \left( \theta^\alpha (\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial\theta^\beta} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}} \right). \quad (1.7.17)$$

Вследствие такой модификации переменные  $\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}$  будут преобразовываться при преобразованиях Лоренца как релятивистские спиноры

$$\theta^\alpha \rightarrow \theta'^\alpha = \theta^\alpha + \delta\theta^\alpha, \quad \delta\theta^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \theta^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} (\sigma_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \theta^\beta.$$

В заключение отметим, что согласно (1.7.16), (1.7.6) генераторы  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}$  имеют размерность  $L^{-1/2}$ , а переменные  $\zeta, \theta$  —  $L^{+1/2}$  ( $L$  — длина).

**1.7.2. Суперполя и закон их преобразования.** Рассмотренные нами в предыдущих параграфах поля  $\chi(x)$  зависели только от пространственно-временных координат (без учета «внешних» индексов — спинорных и тензорных).

Суперполя, в отличие от обычных полей  $\chi(x)$ , зависят не только от пространственно-временных координат  $x^\mu$ , но и от грассмановых спинорных переменных  $\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$  (если также не учитывать индексы суперполя). Будем обозначать эти поля  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$ . Так как для грассмановых переменных  $\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$  отличны от нуля только произведения (1.7.14), то суперполе  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  можно, очевидно, представить в виде

$$\chi(x, \theta, \bar{\theta}) = A(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) + \bar{\varphi}_{\dot{\alpha}}(x) \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + (\theta\theta) F(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta}) G(x) + \\ + \bar{\sigma}^{\mu\dot{\theta}} B_\mu(x) + (\theta\theta) \bar{\kappa}_\alpha(x) \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + (\bar{\theta}\bar{\theta}) \theta^\alpha \lambda_\alpha(x) + (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) \mathcal{D}(x), \quad (1.7.18)$$

где  $A, F, G, \mathcal{D}$  — скалярные поля;  $B_\mu(x)$  — векторное поле;  $\psi, \bar{\varphi}, \bar{\kappa}, \lambda$  — спинорные поля. Таким образом, видим, что суперполе объединяет четыре скалярных поля ( $A, F, G, \mathcal{D}$ ), четыре спинорных поля ( $\psi, \bar{\varphi}, \bar{\kappa}, \lambda$ ) и одно векторное поле ( $B_\mu$ ).

Для простоты считаем (и будем далее считать), что суперполе  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  не «несет» внешних индексов (спинорных и тензорных; в этом случае в генераторе  $L_{\mu\nu}$  (1.7.17) можно отбросить слагаемое  $\Sigma_{\mu\nu}$ ; в общем случае девять полей  $A, \dots, \psi, \dots, B_\mu$  будут представлять собой поля, преобразующиеся как спиноры и тензоры высших рангов).

В отличие от обычных полей, которые зависят только от пространственно-временных координат  $x^\mu$ , суперполя зависят как от  $x^\mu$ , так и от грассмановых спинорных переменных  $\theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha$ . Поэтому мы будем говорить, что суперполе определено в суперпространстве [9], образуемом восемью переменными  $x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha$ .

Перейдем к выяснению законов преобразования суперполя при преобразованиях, связанных с генераторами  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}, \mathcal{P}_\mu, L_{\mu\nu}$ . Так как генераторы  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}, \mathcal{P}_\mu$  образуют замкнутую алгебру, то мы рассмотрим преобразования суперполей, связанные именно с этими генераторами. Генераторы  $\mathcal{P}_\mu$  также образуют замкнутую алгебру, и с этой алгеброй связан закон преобразования полей (суперполей)

$$\chi(x) \rightarrow \chi'(x'), \quad x \rightarrow x' = x + a,$$

где

$$\chi'(x) = \mathcal{G}(a)\chi(x) \equiv \chi(x - a), \quad \mathcal{G}(a) = \exp i\mathcal{P}_\mu a^\mu,$$

который показывает, что при трансляциях пространства — времени поле (суперполе) преобразуется как скаляр.

Найдем закон преобразования суперполей, связанный с алгеброй (1.7.4) генераторов  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}, \mathcal{P}_\mu$ . Для этого рассмотрим суперполе

$$\chi'(x, \theta, \bar{\theta}) = \mathcal{G}(\zeta, a)\chi(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (1.7.19)$$

получающееся из суперполя  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  в результате действия элемента группы  $\mathcal{G}(\zeta, a)$ , связанного с генераторами  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}, \mathcal{P}_\mu$  (см. (1.7.6)). Формулу (1.7.19), очевидно, можно переписать в виде

$$\chi'(x, \theta, \bar{\theta}) = \mathcal{G}(\zeta, a)\chi(x, \theta, \bar{\theta})\mathcal{G}^{-1}(\zeta, a),$$

где теперь оператор  $\mathcal{G}(\zeta, a)$  действует на переменные, входящие как в  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$ , так и в  $\mathcal{G}^{-1}(\zeta, a)$ .

Используя формулу

$$e^G A e^{-G} = A + [G, A] + \frac{1}{2}[G, [G, A]] + \dots, \quad (1.7.20)$$

легко видеть, что

$$\mathcal{G}x\mathcal{G}^{-1} = x + [G, x] + \frac{1}{2}[G, [G, x]],$$

$$\mathcal{G}\theta\mathcal{G}^{-1} = \theta + [G, \theta], \quad \mathcal{G}\bar{\theta}\mathcal{G}^{-1} = \bar{\theta} + [G, \bar{\theta}],$$

где согласно (1.7.16)

$$[G, x^\mu] = -a^\mu + i\bar{\theta}\sigma^\mu\zeta - i\bar{\zeta}\sigma^\mu\theta,$$

$$[G, [G, x^\mu]] = i\bar{\zeta}\sigma^\mu\zeta - i\bar{\zeta}\sigma^\mu\zeta = 0,$$

$$[G, \theta] = -\zeta, \quad [G, \bar{\theta}] = -\bar{\zeta}$$

(высшие коммутаторы в формуле для  $e^a A e^{-a}$ , очевидно, обращаются в нуль). Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{G} x^\mu \mathcal{G}^{-1} &= x^\mu - a^\mu + i(\bar{\theta} \sigma^\mu \zeta - \bar{\zeta} \sigma^\mu \theta), \\ \mathcal{G} \theta \mathcal{G}^{-1} &= \theta - \zeta, \quad \mathcal{G} \bar{\theta} \mathcal{G}^{-1} = \bar{\theta} - \bar{\zeta} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\zeta, a) \chi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \chi(x - a + i(\bar{\theta} \sigma \zeta - \bar{\zeta} \sigma \theta), \quad \theta - \zeta, \quad \bar{\theta} - \bar{\zeta}) \equiv \\ &\equiv \chi'(x, \theta, \bar{\theta}). \end{aligned}$$

Из этой формулы следует, что суперполе  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  можно рассматривать как суперскаляр

$$\chi(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \chi'(x', \theta', \bar{\theta}') = \chi(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (1.7.21)$$

если считать, что при суперпреобразованиях величины  $x, \theta, \bar{\theta}$  преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} x \rightarrow x' &= x + a - i(\bar{\theta} \sigma \zeta - \bar{\zeta} \sigma \theta), \\ \theta \rightarrow \theta' &= \theta + \zeta, \quad \bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (1.7.22)$$

Из этих формул следует, что суперпреобразования переменных  $x, \theta, \bar{\theta}$  представляют собой согласованные преобразования смещения этих переменных.

Используя закон преобразования суперполя (1.7.21) и разложение (1.7.18), можно найти закон преобразования спинорных, скалярных и векторных полей, входящих в разложение (1.7.18). Мы вернемся к этому вопросу после нахождения неприводимого скалярного (по отношению к преобразованиям Лоренца) суперполя.

**1.7.3. Неприводимое скалярное суперполе.** В общем случае, как мы видели, суперполе содержит девять независимых полей, которые преобразуются друг через друга. Однако мы покажем, что можно построить суперполе с меньшим числом независимых компонент, которые также преобразуются друг через друга. С этой целью введем операции ковариантного дифференцирования  $\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}$  по спинорным переменным, которые не изменяют характер преобразования суперполя при суперпреобразованиях.

Операторы  $\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}$  определяются следующим образом:

$$\mathcal{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i \theta^\beta \sigma_{\beta\alpha}^\mu \partial_\mu, \quad \mathcal{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \theta^\beta \partial_\mu. \quad (1.7.23)$$

Из определений (1.7.16) спинорных генераторов  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}$  следует, что

$$\{\mathcal{D}_\alpha, Q_\beta\} = \{\mathcal{D}_\alpha, Q_{\dot{\beta}}\} = \{\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, Q_{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (1.7.24)$$

Так как кроме этого операторы  $\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}$  антикоммутируют с параметрами  $\zeta^\alpha, \zeta^{\dot{\alpha}}$ , то согласно определению (1.7.6) оператора  $\mathcal{G}$

$$[\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{G}] = [\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{G}] = 0. \quad (1.7.25)$$

Отсюда следует, что если  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  представляет собой суперполе, т. е. преобразуется по закону (1.7.21), то по такому же закону будут преобразовываться и величины  $\mathcal{D}_\alpha \chi(x, \theta, \bar{\theta})$ ,  $\mathcal{D}_{\dot{\alpha}} \chi(x, \theta, \bar{\theta})$ , т. е. они будут суперполями. Если  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  — скалярное (по отношению к преобразованиям Лоренца) суперполе, то поля  $\mathcal{D}_\alpha \chi(x, \theta, \bar{\theta})$ ,  $\mathcal{D}_{\dot{\alpha}} \chi(x, \theta, \bar{\theta})$  будут спинорными (по отношению к преобразованиям Лоренца) суперполями. Так как  $[\partial_\mu, \mathcal{G}] = 0$ , то поле  $\partial_\mu \chi(x, \theta, \bar{\theta})$  также будет суперполем (векторным по отношению к преобразованиям Лоренца).

Отметим, что операции ковариантного спинорного дифференцирования удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям, как и генераторы  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}$ :

$$\{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\} = \{\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{D}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad \{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\beta\alpha}^\mu \mathcal{P}_\mu. \quad (1.7.26)$$

Для того чтобы суперполе  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  было неприводимым, необходимо потребовать, чтобы выполнялось соотношение

$$\mathcal{D}_\alpha \chi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \quad (1.7.27)$$

либо

$$\mathcal{D}_{\dot{\alpha}} \chi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0. \quad (1.7.28)$$

Так как из (1.7.27) следует, что  $\mathcal{D}_\alpha \chi'(x, \theta, \bar{\theta}) = 0$ , а из (1.7.28) — что  $\mathcal{D}_{\dot{\alpha}} \chi'(x, \theta, \bar{\theta}) = 0$ , то соотношения (1.7.27), (1.7.28) выделяют из пространства суперполей, содержащих девять независимых полей (см. (1.7.18)), инвариантные подпространства, содержащие меньшее число независимых суперполей (как мы увидим число их равно трем).

Для исследования уравнений (1.7.27), (1.7.28) удобно перейти к новому представлению суперполей

$$\chi_\pm(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{\mp i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu} \chi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (1.7.29)$$

(эти представления мы будем называть плюс- и минус-представлениями). Операторы  $A_+$  и  $A_-$  в плюс- и минус-представлениях связаны с оператором  $A$  в исходном представлении формулой

$$A_\pm = e^{\mp i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu} A e^{\pm i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu}. \quad (1.7.29')$$

Найдем операторы  $\mathcal{D}_\alpha^\pm$ ,  $\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}^\pm$ ,  $Q_\alpha^\pm$ ,  $Q_{\dot{\alpha}}^\pm$ . Для этого отметим, что

$$[\mathcal{D}_\alpha, \theta\bar{\sigma}^\mu\theta\partial_\mu] = i[Q_\alpha, \theta\bar{\sigma}^\mu\theta\partial_\mu] = -(\theta\sigma^\mu)_\alpha \partial_\mu,$$

$$[\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu] = i[Q_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu] = -(\sigma^\mu\bar{\theta})_{\dot{\alpha}} \partial_\mu.$$

Поэтому, используя формулу (1.7.20), получим следующие выражения для операторов  $\mathcal{D}$  и  $Q$  в плюс-представлении:

$$\mathcal{D}_\alpha^+ = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - 2i(\bar{\theta}\sigma^\mu)_\alpha \partial_\mu, \quad D_\alpha^+ = -\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \quad (1.7.30)$$

$$Q_\alpha^+ = -i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \quad Q_{\dot{\alpha}}^+ = i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - 2(\sigma^\mu\bar{\theta})_{\dot{\alpha}} \partial_\mu,$$

и выражения

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha^- &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \quad \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}^- = -\frac{\partial}{\partial \theta^{\dot{\alpha}}} + 2i(\sigma^{\mu\theta})_{\dot{\alpha}} \partial_\mu, \\ Q_\alpha^- &= -i\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + 2(\bar{\theta}\sigma^\mu)_\alpha \partial_\mu, \quad Q_{\dot{\alpha}}^- = i\frac{\partial}{\partial \theta^{\dot{\alpha}}}. \end{aligned} \quad (1.7.31)$$

для операторов  $\mathcal{D}$  и  $Q$  в минус-представлении.

Согласно формулам (1.7.29), (1.7.19) суперполя  $\chi_+$  и  $\chi_-$  в плюс- и минус-представлениях преобразуются по формулам

$$\chi'_\pm = \mathcal{G}_\pm \chi_\pm, \quad \mathcal{G}_\pm = \exp G_\pm, \quad (1.7.32)$$

где

$$G_\pm = i(Q^\pm \zeta + \bar{\zeta} \bar{Q}^\pm + a^\mu \mathcal{P}_\mu).$$

Так же как, при выводе формулы (1.7.21), легко показать, что этот закон преобразования можно представить в виде

$$\chi_+(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \chi'_+(x', \theta', \bar{\theta}') = \chi_+(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (1.7.33)$$

где

$$x' = x + a + 2i\bar{\zeta}\sigma\theta + i\bar{\zeta}\sigma\zeta, \quad \theta' = \theta + \zeta, \quad \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\zeta},$$

и

$$\chi_-(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \chi'_-(x', \theta', \bar{\theta}') = \chi_-(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (1.7.34)$$

где

$$x' = x + a - 2i\bar{\theta}\sigma\zeta - i\bar{\zeta}\sigma\zeta, \quad \theta' = \theta + \zeta, \quad \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\zeta}.$$

Уравнение (1.7.27) согласно (1.7.31) приобретает простой вид в минус-представлении

$$\mathcal{D}_\alpha^- \chi_- = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \chi_- = 0,$$

откуда следует, что  $\chi_-$  не зависит от  $\theta$ , т. е. имеет следующую структуру:

$$\chi_-(x, \bar{\theta}) = A_-(x) + \psi_{-\dot{\alpha}}(x) \theta^{\dot{\alpha}} + (\theta^{\dot{\alpha}} \theta_\alpha) F_-(x). \quad (1.7.35)$$

Мы видим, что суперполе  $\chi_-(x, \bar{\theta})$ , соответствующее условию (1.7.27), определяется тремя независимыми полями  $A_-$ ,  $F_-$ ,  $\psi_-$  — двумя скалярными и одним спинорным. В исходном представлении полю  $\chi_-(x, \bar{\theta})$  соответствует поле

$$\begin{aligned} \chi(x, \theta, \bar{\theta}) &= e^{-i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu} \chi_-(x, \bar{\theta}) = A_-(x) + \bar{\psi}_-(x) \bar{\theta} + (\bar{\theta}\bar{\theta}) F_-(x) - \\ &- i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu A_-(x) + \frac{i}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu \bar{\psi}_-(x) \sigma^\mu\theta + \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu\partial^\mu A_-(x) \end{aligned} \quad (1.7.35')$$

(мы учли, что согласно (1.7.13)  $(\bar{\theta}\sigma^\nu\theta)\bar{\theta}^\rho = -\frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\sigma^\nu\theta)^\rho$ ). Суперполе  $\chi_-(x, \bar{\theta})$  в минус-представлении (или соответствующее ему су-

перполе  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  в исходном представлении) является неприводимым.

Аналогично уравнение (1.7.28) согласно (1.7.30) приобретает простой вид в плюс-представлении:

$$\mathcal{D}_\alpha^+ \chi_+ = -\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \chi_+ = 0,$$

откуда следует, что суперполе  $\chi_+$  не зависит от  $\bar{\theta}$ , т. е. имеет структуру

$$\chi_+(x, \theta) = A_+(x) + \theta^\alpha \psi_{+\alpha}(x) + (\theta^\alpha \theta_\alpha) F_+(x). \quad (1.7.36)$$

В исходном представлении полю  $\chi_+(x, \theta)$  соответствует поле

$$\begin{aligned} \chi(x, \theta, \bar{\theta}) = & A_+(x) + \theta^\alpha \psi_{+\alpha}(x) + (\theta^\alpha \theta_\alpha) F_+(x) - i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu A_+(x) - \\ & - \frac{i}{2}(\theta\theta)\bar{\theta}\sigma^\mu\partial_\mu\psi_+(x) + \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu\partial^\mu A_+(x). \end{aligned} \quad (1.7.36')$$

Это суперполе также является неприводимым.

Суперполя  $\chi_+(x, \theta)$  (зависящее только от  $\theta$ ) и  $\chi_-(x, \theta)$  (зависящее только от  $\bar{\theta}$ ) называются киральными скалярными (по отношению к преобразованиям Лоренца) суперполями.

Найдем закон преобразования полей  $A, \psi, F$  при суперпреобразованиях.

Вариация суперполя  $\chi_+(x, \theta)$ , связанная с бесконечно малыми суперпреобразованиями, определяется согласно (1.7.32) формулой

$$\delta\chi_+(x, \theta) = i(Q^+\zeta + \bar{\zeta}\bar{Q}^+)\chi(x, \theta),$$

где  $\zeta, \bar{\zeta}$  — бесконечно малые грассмановы параметры (мы положили  $a^\mu = 0$ ). Используя выражения (1.7.30) для генераторов  $Q^+, \bar{Q}^+$ , отсюда получаем

$$\begin{aligned} \delta\chi_+(x, \theta) = & -\zeta^\alpha\psi_\alpha - \zeta^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta\theta)F - 2i\bar{\zeta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu A - \\ & - 2i\bar{\zeta}\sigma^\mu\theta\theta^\alpha\partial_\mu\psi_\alpha \end{aligned}$$

(мы опустили индекс «+» у полей  $A, \psi, F$ ). Учитывая далее, что

$$\zeta^\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta\theta) = -2\theta_\alpha\zeta^\alpha, \quad \bar{\zeta}\sigma^\mu\theta\theta^\alpha\partial_\mu\psi_\alpha = \frac{1}{2}(\theta\theta)\bar{\zeta}\sigma^\mu\partial_\mu\psi,$$

находим

$$\delta\chi_+(x, \theta) = -\zeta^\alpha\psi_\alpha - 2\zeta^\alpha\theta_\alpha F - 2i\bar{\zeta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu A - i\bar{\zeta}\sigma^\mu\partial_\mu\psi(\theta\theta).$$

Так как согласно (1.7.36)

$$\delta\chi_+(x, \theta) = \delta A(x) + \theta^\alpha\delta\psi_\alpha(x) + (\theta\theta)\delta F(x),$$

то для вариаций полей

$$\begin{aligned} \delta A(x) = & A'(x) - A(x), \quad \delta\psi(x) = \psi'(x) - \psi(x), \quad \delta F(x) = \\ & = F'(x) - F(x) \end{aligned}$$

получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \delta A(x) &= -\zeta^\alpha \psi_\alpha(x), \quad \delta F(x) = -i\bar{\zeta}\sigma^\mu \partial_\mu \psi(x), \\ \delta\psi_\alpha(x) &= 2i(\bar{\zeta}\sigma^\mu)_\alpha \partial_\mu A(x) - 2\zeta_\alpha F(x). \end{aligned} \quad (1.7.37)$$

Аналогичные формулы справедливы и для вариаций полей  $A_-$ ,  $\psi_-$ ,  $F_-$  (мы их здесь не приводим).

В заключение отметим, что так как  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^*$ , то согласно (1.7.19) величина  $\chi^*(x, \theta, \bar{\theta})$  будет при суперпреобразованиях преобразовываться так же, как  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$ , т. е. будет представлять собой суперполе. Иная ситуация возникает в плюс- и минус-представлениях. Действительно, так как согласно (1.7.30), (1.7.31)

$$\mathcal{G}_+^* = \mathcal{G}_-,$$

то из (1.7.32) следует, что величина  $\chi_+^*(x, \theta, \bar{\theta})$  будет преобразовываться как суперполе в минус-представлении, а величина  $\chi_-^*(x, \theta, \bar{\theta})$  как суперполе в плюс-представлении. Согласно (1.7.29')

$$\mathcal{G}_- = e^{2i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu} \mathcal{G}_+ e^{-2i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu}.$$

Поэтому величины

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_+ &= e^{-2i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu} \chi_+^*, \\ \bar{\chi}_- &= e^{2i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu} \chi_-^* \end{aligned} \quad (1.7.38)$$

будут преобразовываться как суперполя в плюс- и минус-представлениях, т. е.

$$\bar{\chi}'_+ = \mathcal{G}_+ \bar{\chi}_+, \quad \bar{\chi}'_- = \mathcal{G}_- \bar{\chi}_-. \quad (1.7.39)$$

Отметим, наконец, что произведение суперполей в одном и том же представлении является суперполем в том же представлении.

**1.7.4. Лагранжиан и уравнения движения суперполя.** Наша дальнейшая задача будет заключаться в установлении уравнений движения для неприводимого кирального суперполя  $\chi_+(x, \theta)$ . С этой целью мы построим лагранжиан суперполя, который должен зависеть от «реальных» полей  $A$ ,  $\psi$ ,  $F$ , причем он должен содержать только первые производные этих полей по координатам  $x^\mu$ . Мы потребуем, чтобы уравнение поля для  $\psi$  было первого порядка. Поэтому в лагранжиан производные  $\partial_\mu \psi$  должны входить линейно.

Чтобы установить структуру лагранжиана  $\mathcal{L}(A, \psi, F)$ , инвариантного по отношению к суперпреобразованиям (1.7.19), отметим предварительно, что для любого суперполя  $\Phi_+(x, \theta, \bar{\theta})$  в плюс-представлении слагаемое, содержащее максимальное число грассмановых переменных  $\theta, \bar{\theta}$ , т. е. слагаемое  $(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\theta)D(x)$ , преобразуется при суперпреобразовании как

$$\delta\mathcal{D}(x) = \partial_\mu \mathcal{P}_\theta^{(4)}(-2i\bar{\zeta}\sigma^\mu\theta)\Phi_+(x, \theta, \bar{\theta}),$$

где

$$P_{\bar{\theta}}^{(4)} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\beta}. \quad (1.7.40)$$

Таким образом,  $\delta \mathcal{D}(x)$  представляет собой дивергенцию некоторого векторного поля. Эта формула вытекает из закона преобразования суперполя  $\Phi_+(x, \theta, \bar{\theta})$

$$\begin{aligned} \delta \Phi_+(x, \theta, \bar{\theta}) = G_+ \Phi_+(x, \theta, \bar{\theta}) = i \left( -i \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \zeta^\alpha + i \bar{\zeta}^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} - \right. \\ \left. - 2 \bar{\zeta}^\alpha \sigma^{\mu\alpha} \partial_\mu \right) \Phi_+(x, \theta, \bar{\theta}) \end{aligned}$$

и того, что

$$\mathcal{D}(x) = P_{\bar{\theta}}^{(4)} \Phi_+(x, \theta, \bar{\theta}).$$

В случае кирального суперполя  $\Phi_+(x, \theta)$  слагаемое  $(\theta\theta) \mathcal{F}(x)$ , содержащее максимальное число переменных  $\theta$ , преобразуется при суперпреобразованиях по формуле

$$\delta \mathcal{F}(x) = \partial_\mu P_{\bar{\theta}}^{(2)} (-2i \bar{\zeta}^\alpha \sigma^{\mu\alpha}) \Phi_+(x, \theta),$$

где

$$P_{\bar{\theta}}^{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}, \quad (1.7.41)$$

т. е.  $\delta \mathcal{F}(x)$  также представляет собой дивергенцию некоторого векторного поля.

Исходя из этого при построении суперинвариантного лагранжиана  $\mathcal{L}(\psi, A, F)$  мы должны образовать различные комбинации (билинейные и более высокого порядка) суперполей  $\chi_+(x, \theta)$ ,  $\bar{\chi}_+(x, \theta, \bar{\theta})$  (см. определение (1.7.38) суперполя  $\bar{\chi}_+(x, \theta, \bar{\theta})$ ) и выделить в них члены, содержащие максимальное число переменных  $\theta$ ,  $\bar{\theta}$ . Сумму таких комбинаций можно принять в качестве лагранжиана  $\mathcal{L}(\psi, A, F)$  суперполя  $\chi_+(x, \theta)$ , так как при суперпреобразованиях лагранжиан  $\mathcal{L}$  будет преобразовываться по формуле

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu B^\mu$$

( $B^\mu$  — некоторый 4-вектор) и, следовательно, он будет приводить к суперинвариантным уравнениям движения.

В качестве билинейных комбинаций, из которых должен строиться лагранжиан, выберем следующие комбинации:

$$\begin{aligned} P_{\bar{\theta}}^{(2)} \chi_+^2(x, \theta), \quad P_{\bar{\theta}}^{(4)} \chi_+(x, \theta) \bar{\chi}_+(x, \theta, \bar{\theta}) = \\ = P_{\bar{\theta}}^{(4)} \chi_+(x, \theta) e^{-2i \bar{\theta}^\alpha \sigma^{\mu\alpha} \partial_\mu} \chi_+^*(x, \theta). \end{aligned} \quad (1.7.42)$$

Отметим, что в качестве билинейных комбинаций мы могли бы выбрать также комбинации

$$P_{\bar{\theta}}^{(2)} \partial_\mu \chi_+(x, \theta) \partial^\mu \chi_+(x, \theta), \quad P_{\bar{\theta}}^{(4)} \chi_+(x, \theta) \mathcal{D}^{(+)} \mathcal{D}^{(+)*} \chi_+(x, \theta).$$



Однако, так как согласно (1.7.30)

$$\mathcal{D}_\alpha^{(+)} \mathcal{D}^{(+)\alpha} = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\alpha} + 4 (\bar{\theta} \bar{\theta}) \partial^\mu \partial_\mu,$$

эти комбинации, в отличие от комбинации (1.7.42), приводили бы к уравнениям второго, а не первого порядка для поля  $\psi$ .

Если образовать комбинации суперполей (не содержащие пространственно-временных производных) третьего и более высоких порядков, то они будут приводить в уравнениях движения к взаимодействию между полями. Простейшей комбинацией является комбинация третьего порядка

$$P_\theta^{(2)} \chi_+^3(x, \theta).$$

В терминах суперполей  $\chi_+(x, \theta)$  лагранжиан  $\mathcal{L}$  можно, очевидно, записать в виде <sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} P_\theta^{(4)} \chi_+(x, \theta) e^{-2i\bar{\theta}\sigma^{\mu\nu}\bar{\theta}} \chi_+^*(x, \theta) + \frac{m}{2} P_\theta^{(2)} \chi_+^2(x, \theta) + \\ & + \frac{m}{2} P_\theta^{(2)} \chi_+^{*2}(x, \theta) + \frac{2}{3} g P_\theta^{(2)} \chi_+^3(x, \theta) - \frac{2}{3} g P_\theta^{(2)} \chi_+^{*3}(x, \theta), \end{aligned}$$

где  $g$  — безразмерная константа, играющая роль константы взаимодействия, и  $m$  — произвольная постоянная, имеющая размерность массы. Отметим, что комбинации более высокого порядка, чем третья, будут связаны с размерными константами взаимодействия. В это выражение входят дифференциальные операции по грассмановым переменным  $P_\theta^{(2)}$  и  $P_\theta^{(4)}$ . Но их можно заменить интегралами по грассмановым переменным, если пользоваться следующим формальным определением:

$$\int g \theta_\alpha f(\theta, \bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} f(\theta, \bar{\theta}), \quad \int d\bar{\theta}_\alpha f(\theta, \bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} f(\theta, \bar{\theta}),$$

которое означает, что интегрирование по грассмановым переменным эквивалентно дифференцированию. В частности,

$$\int d\theta_\alpha = 0, \quad \int d\theta_\beta \theta^\alpha = \delta_\beta^\alpha.$$

Так как произведение двух и большего числа грассмановых переменных  $\theta^\alpha$  ( $\bar{\theta}^\alpha$ ) с одним и тем же индексом равно нулю, то последние две формулы могут также служить для общего определения интеграла. Кратные интегралы по  $\theta$  понимаются как повторные интегралы

$$\int d\theta_1 d\theta_2 f(\theta, \bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2} f(\theta, \bar{\theta}) = P_\theta^{(2)} f(\theta, \bar{\theta}),$$

$$\int d\theta_1 d\theta_2 d\bar{\theta}_1 d\bar{\theta}_2 f(\theta, \bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^1} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^2} f(\theta, \bar{\theta}) = P_\theta^{(4)} f(\theta, \bar{\theta}),$$

<sup>3</sup> Модель, основанная на этом лагранжиане, называется моделью Весса — Зу-минно [13].

где  $d\theta_\alpha$ ,  $d\bar{\theta}_\alpha$  — антикоммутирующие между собой грасмановы дифференциалы, вследствие чего

$$d\theta_1 d\theta_2 = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} d\theta_\alpha d\theta_\beta \equiv d^2\theta,$$

$$d\bar{\theta}_1 d\bar{\theta}_2 = \frac{1}{2} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \equiv d^2\bar{\theta}.$$

Мы будем использовать также обозначение  $d^4\theta \equiv d^2\theta d^2\bar{\theta}$ . Используя эти формулы, можно лагранжиан представить в виде интеграла по грасмановым переменным

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \int d^4\vartheta \left\{ \frac{m}{4} (\bar{\theta}\bar{\theta}) \chi_+^2(x, \theta) - \frac{m}{4} (\theta\theta) \chi_+^{*2}(x, \theta) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \chi_+(x, \theta) e^{-2i\bar{\theta}\sigma^{\mu\theta\bar{\theta}}\mu} \chi_+^*(x, \theta) + \frac{g}{3} ((\bar{\theta}\bar{\theta}) \chi_+^3(x, \theta) - (\theta\theta) \chi_+^{*3}(x, \theta)) \right\}. \end{aligned} \quad (1.7.43)$$

Поэтому действие  $W$  для суперполя  $\chi_\pm(x, \theta)$  можно записать в виде интеграла по суперпространству  $x, \theta, \bar{\theta}$ :

$$W = W_m + W_K + W_{\text{int}}, \quad (1.7.44)$$

$$W_m = \frac{m}{4} \int d^4x d^4\vartheta \{ (\bar{\theta}\bar{\theta}) \chi_+^2(x, \theta) - (\theta\theta) \chi_+^{*2}(x, \theta) \},$$

$$W_K = - \frac{1}{2} \int d^4x d^4\vartheta \chi_+(x, \theta) e^{-2i\bar{\theta}\sigma^{\mu\theta\bar{\theta}}\mu} \chi_+^*(x, \theta),$$

$$W_{\text{int}} = \frac{g}{3} \int d^4x d^4\vartheta \{ (\bar{\theta}\bar{\theta}) \chi_+^3(x, \theta) - (\theta\theta) \chi_+^{*3}(x, \theta) \}.$$

Первые два слагаемых определяют действие для свободного суперполя, а третье описывает взаимодействие между полями  $A, \psi, F$ .

Чтобы найти уравнения движения суперполя, определим вариацию действия  $W$  по супер полю  $\chi_+$  (вариация по  $\chi_+$  приводит к сопряженным уравнениям поля):

$$\begin{aligned} \delta W = \int d^4x d^4\vartheta \delta \chi_+(x, \theta) \left\{ \frac{m}{2} (\bar{\theta}\bar{\theta}) \chi_+(x, \theta) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} e^{-2i\bar{\theta}\sigma^{\mu\theta\bar{\theta}}\mu} \chi_+^*(x, \theta) + g (\bar{\theta}\bar{\theta}) \chi_+^2(x, \theta) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Так как  $\delta \chi_+(x, \theta)$  — произвольная функция  $x$  и  $\theta$ , то уравнения движения имеют вид

$$\int d^2\bar{\theta} \left\{ \frac{m}{2} (\bar{\theta}\bar{\theta}) \chi_+(x, \theta) - \frac{1}{2} e^{-2i\bar{\theta}\sigma^{\mu\theta\bar{\theta}}\mu} \chi_+^*(x, \theta) + g (\bar{\theta}\bar{\theta}) \chi_+^2(x, \theta) \right\} = 0.$$

Выполнив интегрирование по  $\bar{\theta}$ , получим

$$\frac{1}{4} \mathcal{D}_\alpha^- \mathcal{D}^{-\dot{\alpha}} \bar{\chi}_+(x, \bar{\theta}) = m \chi_+(x, \theta) + 2g \chi_+^2(x, \theta). \quad (1.7.45)$$

Мы учли при этом, что согласно (1.7.31)  $\frac{\partial}{\partial \theta^i} \frac{\partial}{\partial \theta^{\bar{i}}} = -\frac{1}{2} \mathcal{D}_{\bar{\alpha}}^- \mathcal{D}^{-\bar{\alpha}}$ , и использовали определение (1.7.38) суперполя  $\bar{\chi}_+(x, \theta, \bar{\theta})$ . В это уравнение входят ковариантные производные от суперполя  $\bar{\chi}_+$ , и поэтому уравнения движения имеют явно ковариантный вид.

Получим уравнения движения для полей  $A, \psi, F$ , входящих в суперполе  $\chi_+(x, \theta)$ . Используя (1.7.38), (1.7.36), из (1.7.45) получаем уравнения

$$\begin{aligned} i\partial_{\mu}\bar{\psi}\sigma^{\mu} - m\psi &= 4gA\psi, \\ \partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{*} &= mF + 4gAF - g(\psi\psi), \\ F^{*} &= -mA - 2gA^2 \end{aligned} \quad (1.7.46)$$

и комплексно сопряженные им уравнения

$$\begin{aligned} -i\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi} &= 4gA^{*}\bar{\psi}, \\ \partial_{\mu}\partial^{\mu}A &= mF^{*} + 4gA^{*}F^{*} + g(\bar{\psi}\bar{\psi}), \\ F &= -mA^{*} - 2gA^{*2}. \end{aligned} \quad (1.7.46')$$

Последние уравнения в (1.7.46), (1.7.46') представляют собой уравнения связи. Для свободного поля ( $g = 0$ ) уравнения (1.7.46) приобретают вид

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}\sigma^{\mu} - m\psi = 0, \quad \partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{*} = mF, \quad F^{*} = mA. \quad (1.7.47)$$

Первое уравнение представляет собой уравнение движения для майорановского спинора  $\psi$  ( $\bar{\psi}$ ) (см. (1.6.29)), а второе и третье уравнения приводят к уравнению Клейна — Гордона (1.4.2) для скалярного комплексного поля  $A$ .

Уравнения (1.7.46) можно непосредственно получить из лагранжиана (1.7.43), если в последнем выполнить интегрирование по  $\theta, \bar{\theta}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & 2\partial_{\mu}A\partial^{\mu}A^{*} + 2m(AF + A^{*}F^{*}) + 2FF^{*} - \frac{i}{2}\partial_{\mu}\bar{\psi}\sigma^{\mu}\psi + \\ & + \frac{i}{2}\bar{\psi}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \frac{m}{2}(\psi\psi) + \frac{m}{2}(\bar{\psi}\bar{\psi}) + 2g(2A^2F + 2A^{*2}F^{*} - \\ & - A(\psi\psi) + A^{*}(\bar{\psi}\bar{\psi})). \end{aligned} \quad (1.7.48)$$

Рассмотренный пример лагранжиана скалярного кирального суперполя  $\chi_+(x, \theta)$  показывает, что требование суперинвариантности приводит не только к объединению спинорного и скалярного полей в единое суперполе, но и к тому, что самодействие скалярного поля и его взаимодействие со спинорным полем описываются одной и той же безразмерной константой взаимодействия, причем массы частиц скалярных и фермионных полей совпадают.

В заключение отметим, что спинорные генераторы  $Q_{\alpha}, Q_{\bar{\alpha}}$  расширенной группы Пуанкаре могут также зависеть от некоторого индекса  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), так что коммутационные соотношения (1.7.4) заме-

няются соотношениями

$$[Q_\alpha^i, \mathcal{P}_\mu] = [Q_\alpha^i, \mathcal{P}_\mu] = 0, \quad \{Q_\alpha^i, Q_\alpha^j\} = i\delta_{ij}\sigma_{\alpha\alpha}^\mu \mathcal{P}_\mu.$$

Эти соотношения инвариантны по отношению к преобразованиям группы  $SU(N)$ :

$$Q_\alpha^i \rightarrow Q_\alpha^{i'} = U_i^i Q_\alpha^i, \quad Q_\alpha^i \rightarrow Q_\alpha^{i'} = U_i^{i*} Q_\alpha^i.$$

Поэтому координатами суперпреобразования будут переменные  $x_\mu$  и грассмановы параметры  $\theta_\alpha^i, \theta_\alpha^i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Соответственно этому компоненты суперполя будут содержать индексы  $i$  и преобразовываться по представлению группы  $SU(N)$ . Таким образом, расширение суперпространства позволяет ввести внутренние симметрии, связанные с этим суперпространством. Если потребовать, чтобы спин частиц не превосходил двух (спин два соответствует гравитону), то должно выполняться  $N \leq 8$ .

В классической (квантовой) теории вектор  $\mathcal{P}_\mu$  можно выразить через функции поля (операторы поля). Подобно этому спинорные генераторы  $Q_\alpha^i, Q_\alpha^i$  (которые мы связывали с грассмановым дифференцированием по  $\theta_\alpha^i, \theta_\alpha^i$ ) также могут быть реализованы через полевые операторы. При этом согласно соотношениям коммутации величины  $Q_\alpha^i, Q_\alpha^i$  сохраняются. Они называются спинорными зарядами и с ними могут быть связаны сохраняющиеся спинорные токи  $j_{\alpha,\mu}^i(x)$ :

$$Q_\alpha^i = \int d^3x j_{\alpha,0}^i(x), \quad \partial^\mu j_{\alpha,\mu}^i(x) = 0,$$

которые называются супертоками.

Наконец, из соотношений коммутаций для  $Q_\alpha^i$  и  $Q_\alpha^i$  следует, что гамильтониан системы автоматически является положительно определенным оператором.

## § 1.8. ДИРАКОВСКИЕ ПОЛЯ С ВНУТРЕННИМИ СИММЕТРИЯМИ

**1.8.1. Нуклонные и кварковые поля.** Уравнением Дирака описывается электронно-позитронное поле. Но это не единственный пример дираковского поля: все поля, связанные с частицами, обладающими спином  $1/2$ , являются дираковскими. В частности, нейтронное и протонное поля представляют собой дираковские поля.

Нейтрон и протон, рассматриваемые как структурные элементы ядер, обладают сходными свойствами. Если поэтому не учитывать небольшое различие в их массе, то их можно рассматривать как два состояния единой частицы — нуклона. При этом можно объединить два дираковских поля — протонное ( $\psi_p \equiv \psi_1$ ) и нейтронное ( $\psi_n \equiv \psi_2$ ) — в единое нуклонное поле, описываемое двукратным биспинором

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

и удовлетворяющее уравнению Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.8.1)$$

где  $M$  — масса нуклона. Этим уравнениям соответствует лагранжиан

$$\mathcal{L}_N = \frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi_i - \frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + M) \psi_i, \quad (1.8.2)$$

который инвариантен относительно фазовых преобразований

$$\psi_i \rightarrow \psi'_i = e^{i\alpha} \psi_i, \quad \bar{\psi}_i \rightarrow \bar{\psi}'_i = e^{-i\alpha} \bar{\psi}_i.$$

С инвариантностью по отношению к фазовым преобразованиям связан закон сохранения барионного заряда, который аналогичен электрическому заряду в случае электронно-позитронного поля.

Кроме того, лагранжиан (1.8.2) инвариантен относительно преобразований, оставляющих инвариантной квадратичную форму двух комплексных переменных:

$$\bar{\psi}_i \psi_i \equiv \bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2.$$

Эти преобразования связаны с внутренней симметрией нуклонного поля, которая называется изотопической<sup>4</sup>.

Еще одним примером обобщенного дираковского поля, обладающего внутренней симметрией, является кварковое поле. Кварками называются структурные элементы сильно взаимодействующих частиц — адронов, в структуре которых они играют такую же роль, как протоны и нейтроны в структуре ядра. Если не учитывать существование так называемых очарованных и других более сложных адронов, то можно считать, что имеется три сорта кварков — протонные ( $u$ ), нейтронные ( $d$ ) и странные ( $s$ ) кварки и столько же сортов антикварков, причем каждый из кварков  $u$ ,  $d$ ,  $s$  может находиться в трех состояниях, которые называются цветовыми состояниями. Кварки обладают спином  $1/2$ , поэтому в простейшем случае (кварки  $u$ ,  $d$ ,  $s$ ) кварковое поле должно описываться  $3 \times 3$ -кратным биспинором  $q_{Ai}(x)$ , где  $A$  служит для обозначения сорта, а  $i$  — цвета кварка. Если учитывать очарованные кварки, то нужно различать четыре сорта кварков:  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварки и очарованный кварк  $c$ , причем каждый из этих кварков по-прежнему может находиться в одном из трех цветовых состояний. В этом случае кварковое поле описывается  $4 \times 3$ -кратным биспинором  $q_{Ai}(x)$  ( $A = 1, 2, 3, 4$ ;  $i = 1, 2, 3$ ), удовлетворяющим уравнению Дирака типа (1.8.1) с массой  $m_A$ , зависящей от сорта кварка и не зависящей от его цвета (в действительности различие в массах  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварков невелико, масса же очарованного кварка  $c$  значительно отличается от масс первых трех кварков). Кварковому полю соответствует лагранжиан

$$\mathcal{L}_q = \frac{1}{2} \sum_{Ai} \{ \bar{q}_{Ai} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_A) q_{Ai} - \bar{q}_{Ai} (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m_A) q_{Ai} \}. \quad (1.8.3)$$

<sup>4</sup> Понятие изотопической инвариантности было введено В. Гейзенбергом [15].

Данный лагранжиан инвариантен относительно преобразований, оставляющих неизменной квадратичную форму трех комплексных величин  $\sum_i \bar{q}_{Ai} q_{Ai}$  (в ней остается фиксированным сорт кварков). Эта инвариантность называется цветовой симметрией. Если не учитывать различия в массах кварков, то лагранжиан  $\mathcal{L}_q$  будет инвариантен также относительно преобразований, оставляющих неизменной квадратичную форму трех (или четырех с учетом  $c$ -кварка, или еще большего числа кварков) комплексных величин  $\sum_A \bar{q}_{Ai} q_{Ai}$  (в ней остается фиксированным цвет кварков) <sup>5</sup>.

**1.8.2. Унитарные симметрии.** Таким образом, в обоих рассмотренных случаях — нуклонного и кваркового поля — речь идет об обобщенном дираковском поле, описываемом  $n$ -кратным биспинором  $\psi_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), удовлетворяющим уравнению Дирака типа (1.8.1), которому соответствует лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_i - \frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) \psi_i. \quad (1.8.4)$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно преобразований

$$\psi_i \rightarrow \psi'_i = \bar{U}_{ij} \psi_j, \quad \bar{\psi}_i \rightarrow \bar{\psi}'_i = \bar{U}_{ij}^* \bar{\psi}_j, \quad (1.8.5)$$

оставляющих неизменной квадратичную форму  $n$  комплексных переменных  $\psi_i$ :

$$\bar{\psi}_i \psi_i \equiv \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i \psi_i.$$

Отсюда следует, что матрица  $\bar{U}$  должна быть унитарной,  $\bar{U}^+ \bar{U} = 1$ , и поэтому должна иметь следующую структуру:

$$\bar{U} = e^{i\alpha U}, \quad (1.8.6)$$

где  $\alpha$  — произвольное вещественное число, а  $U$  — унитарная матрица с  $\det U = 1$ . Ее можно записать в виде

$$U = \exp iH, \quad (1.8.7)$$

где  $H$  — эрмитова матрица со шпуром, равным нулю,  $\text{Sp } H = 0$ . Матрицы  $U$  образуют группу, которая называется группой  $SU(n)$ . Инвариантность лагранжиана относительно преобразований группы  $SU(n)$  называется унитарной симметрией.

Таким образом, лагранжиан (1.8.4) инвариантен относительно группы преобразований  $SU(n)$  и группы фазовых преобразований. Так как эрмитова матрица  $n$ -го порядка определяется  $n^2$  вещественными параметрами, то элементы группы  $SU(n)$  определяются  $n^2 - 1$  вещественными параметрами (мы учли условие  $\text{Sp } H = 0$ ). Для бесконечно малых преобразований матрицу  $U$  можно представить в виде

$$U = 1 - i\varepsilon^a T_a, \quad (1.8.8)$$

<sup>5</sup> Гипотеза кварков принадлежит Гелл-Манну [16] и Цвейгу [17]. Цвет кварков был введен в работах Гринберга [18], Боголюбова, Струминского, Тавхелидзе [19] и Хана, Намбу [20].

где  $\varepsilon^a$  — вещественные бесконечно малые параметры ( $a = 1, 2, \dots, n^2 - 1$ ) и  $T_a$  — эрмитовы матрицы  $n$ -го порядка со шпуром, равным нулю (так как  $\det U = 1$ ):

$$T_a^\dagger = T_a, \quad \text{Sp } T_a = 0 \quad (1.8.9)$$

(по индексу  $a$  производится суммирование). Матрицы  $T_a$  представляют собой генераторы группы  $SU(n)$  и удовлетворяют, очевидно, перестановочным соотношениям

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c, \quad (1.8.10)$$

где  $f_{ab}^c$  — структурные постоянные группы  $SU(n)$ .

Рассмотренные нами унитарные матрицы  $n$ -го порядка с детерминантом, равным единице, реализуют так называемое фундаментальное представление группы  $SU(n)$ , а матрицы  $T_a$  являются генераторами этого представления. Существуют также представления группы  $SU(n)$  более высокой размерности. Одним из таких представлений является присоединенное представление размерности  $N = n^2 - 1$ . Генераторами этого представления являются сами структурные постоянные  $f_{ab}^c$ , рассматриваемые как матрицы с матричными элементами  $(T'_c)_{ab} = if_{ab}^c$ . Действительно, эти матрицы согласно (1.1.30) удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[T'_a, T'_b] = if_{ab}^c T'_c,$$

связанным с алгеброй Ли группы  $SU(n)$ .

Величины  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  при бесконечно малых преобразованиях группы  $SU(n)$  преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow \psi' &= \psi + \delta\psi, & \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' &= \bar{\psi} + \delta\bar{\psi}, \\ \delta\psi &= -i\varepsilon^a T_a \psi, & \delta\bar{\psi} &= i\varepsilon^a T_a^* \bar{\psi} \end{aligned} \quad (1.8.11)$$

и могут быть названы  $SU(n)$ -спинорами.

Согласно общим результатам п. 1.2.3 с инвариантностью лагранжиана относительно преобразований группы  $SU(n)$  связано существование  $n$  сохраняющихся 4-токов

$$\mathcal{J}_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi, \quad \partial_\mu \mathcal{J}_a^\mu = 0, \quad (1.8.12)$$

подобно тому как с инвариантностью лагранжиана по отношению к фазовым преобразованиям связано существование сохраняющегося тока

$$\mathcal{J}^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad \partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0.$$

При преобразованиях (1.8.11) токи (1.8.12) преобразуются согласно (1.8.11), (1.8.12) по закону

$$\delta \mathcal{J}_a^\mu = -\varepsilon^b f_{ba}^c \mathcal{J}_c^\mu. \quad (1.8.13)$$

Вернемся к нуклонному и кварковому полям. В случае нуклонного поля лагранжиан (1.8.4) инвариантен по отношению к группе преобразований  $SU(2)$ . Генераторы этой группы, представляющие собой

эрмитовы матрицы второго порядка со шпуром, равным нулю, могут быть выбраны в виде

$$T_a = \frac{1}{2} \tau_a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (1.8.14)$$

где  $\tau_a$  — матрица Паули (см. (1.5.2)), действующая на индекс  $i$  в функции  $\psi_i$  ( $i = 1, 2$ ; этот индекс называется изотопическим). Согласно (1.8.10), (1.8.14) структурные постоянные этой группы  $f_{ab}^c = \varepsilon_{abc}$ .

В случае кваркового поля лагранжиан строго инвариантен по отношению к цветовой группе преобразований  $SU(3)_c$ . Генераторы этой группы, представляющие собой эрмитовы матрицы третьего порядка со шпуром, равным нулю, можно выбрать в виде

$$T_a = \frac{1}{2} \lambda_a, \quad a = 1, 2, \dots, 8, \quad (1.8.15)$$

где  $\lambda_a$  — восемь эрмитовых матриц со шпуром, равным нулю:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.8.16)$$

Эти матрицы аналогичны матрицам  $\tau_a$  в группе  $SU(2)$  и называются матрицами Гелл-Манна.

Нетрудно убедиться, что

$$\text{Sp } \lambda_a \lambda_b = 2\delta_{ab}. \quad (1.8.17)$$

Структурные постоянные группы  $SU(3)$ , определяемые с помощью формул

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c$$

или

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{ab}^c \lambda_c,$$

имеют согласно (1.8.17) следующий вид:

$$f_{ab}^c = -\frac{i}{4} \text{Sp } \lambda_c [\lambda_a, \lambda_b]. \quad (1.8.18)$$



При сделанном выборе матриц  $\lambda_a$  отличны от нуля следующие компоненты  $f_{ab}^c$ :

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2},$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1.8.18')$$

(в нормировке (1.8.17) нет различия между ковариантными и контравариантными индексами; см. далее п. 1.8.3).

Антикоммутатор матриц  $\lambda_a$ , как и коммутатор, линеен по  $\lambda_b$ :

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{4}{3} \delta_{ab} + 2d_{abc}\lambda_c \quad (1.8.19)$$

(коэффициент при  $\delta_{ab}$  определяется на основе того, что  $\text{Sp} \{\lambda_a, \lambda_b\} = 4\delta_{ab}$  и  $\text{Sp} \lambda_c = 0$ ). Коэффициенты  $d_{abc}$  определяются, очевидно, формулой

$$d_{abc} = \frac{1}{4} \text{Sp} \lambda_c \{\lambda_a, \lambda_b\} \quad (1.8.20)$$

и поэтому симметричны по индексам  $a, b, c$ . Отличны от нуля следующие значения  $d_{abc}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d_{118} &= \frac{1}{2} d_{228} = \frac{1}{2} d_{338} = -d_{448} = -d_{558} = -d_{668} = -d_{778} = \\ &= -\frac{1}{2} d_{888} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = \\ &= d_{355} = -d_{356} = -d_{377} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (1.8.20')$$

**1.8.3. Унитарные тензоры.** Если при бесконечно малых преобразованиях внутренней симметрии  $SU(n)$  некоторые величины  $H_a$  преобразуются согласно закону

$$\delta H_a = -\varepsilon^b f_{ba}^c H_c, \quad (1.8.21)$$

то эти величины мы будем называть компонентами ковариантного  $SU(n)$ -вектора. Таким образом, токи  $\mathcal{F}_a^\mu$  образуют ковариантный  $SU(n)$ -вектор.

Величины  $Q^a$  будем называть компонентами контравариантного  $SU(n)$ -вектора, если при преобразованиях внутренней симметрии (1.8.7) они преобразуются по закону

$$\delta Q^a = \varepsilon^b f_{bc}^a Q^c. \quad (1.8.22)$$

Кроме векторов можно ввести  $SU(n)$ -тензоры второго и более высоких рангов. Например, величины  $Q_a^b$  будут представлять собой компоненты смешанного  $SU(n)$ -тензора второго ранга, если при преобразовании внутренней симметрии они преобразуются по закону

$$\delta Q_b^a = -\varepsilon^c f_{cb}^d Q_d^a + \varepsilon^c f_{cd}^a Q_b^d. \quad (1.8.23)$$

Отсюда ясно, что величины  $Q^a H_b$  образуют смешанный тензор второго ранга. Легко видеть, что если в смешанном тензоре производить суммирование по верхнему и нижнему индексам (сокращенно по индексам), то мы будем получать тензоры более низкого ранга. Например, величина  $Q_a^a$  согласно (1.8.23) при преобразованиях внутренней симметрии будет оставаться инвариантной,  $\delta Q_a^a = 0$ , т. е.  $SU(n)$  будет скаляром. В частности, скаляром будет величина  $Q^a H_a$ .

Легко видеть, что структурные постоянные  $f_{ab}^c$  можно рассматривать как универсальный  $SU(n)$ -тензор 3-го ранга. Действительно, предположив, что величины  $f_{ab}^c$  образуют  $SU(n)$ -тензор 3-го ранга, мы получим для него согласно (1.8.21), (1.8.22) следующий закон преобразования:

$$\delta f_{ab}^c = \varepsilon^d (f_{d1}^c f_{ab}^1 - f_{da}^1 f_{1b}^c - f_{ab}^1 f_{1d}^c),$$

откуда, учитывая (1.1.30), находим  $\delta f_{ab}^c = 0$ , что и доказывает наше утверждение.

Так как  $f_{ab}^c$  является  $SU(n)$ -тензором, то величины

$$g_{ab} = \frac{1}{n} f_{ac}^d f_{db}^c \quad (1.8.24)$$

образуют ковариантный  $SU(n)$ -тензор 2-го ранга. Вследствие антисимметрии  $f_{ab}^c$  по индексам  $a$  и  $b$  тензор  $g_{ab}$  будет симметричным,  $g_{ab} = g_{ba}$ . С помощью универсального тензора  $g_{ab}$  и обратного ему тензора  $g^{ab}$ :

$$g^{ab} g_{bd} = \delta_a^d$$

можно поднимать и опускать индексы у  $SU(n)$ -тензоров.

Покажем теперь, что величины

$$T_{a_1 \dots a_k} = \bar{\psi} T_{a_1} \dots T_{a_k} A \psi \equiv \bar{\psi}_i (T_{a_1} \dots T_{a_k})_{ij} A \psi_j, \quad (1.8.25)$$

построенные из билинейных комбинаций  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , образуют ковариантный  $SU(n)$ -тензор  $k$ -го ранга ( $A$  — произвольная матрица, действующая на спинорный индекс). Действительно, учитывая, что величины  $\bar{\psi}$  и  $\psi$  при бесконечно малых  $SU(n)$ -преобразованиях преобразуются по формулам (1.8.11), находим

$$\delta T_{a_1 \dots a_k} = -i \varepsilon^a \bar{\psi} [T_{a_1} \dots T_{a_k}, T_a] A \psi.$$

Так как  $[T_{a_1} \dots T_{a_k}, T_a] = \sum_{i=1}^k T_{a_1} \dots [T_{a_i}, T_a] \dots T_{a_k}$  и  $[T_{a_i}, T_a] = i f_{a_i a}^b T_b$ , то

$$\begin{aligned} \delta T_{a_1 \dots a_k} &= \sum_{i=1}^k \varepsilon^a f_{a_i a}^b \bar{\psi} T_{a_1} \dots T_{a_{i-1}} T_b T_{a_{i+1}} \dots T_{a_k} A \psi = \\ &= \sum_{i=1}^k \varepsilon^a f_{a_i a}^b T_{a_1 \dots a_{i-1} b a_{i+1} \dots a_k}. \end{aligned}$$

Из этого соотношения следует, что  $T_{a_1 \dots a_k}$  действительно представляет собой ковариантный  $SU(n)$ -тензор  $k$ -го ранга.

**1.8.4. Свойства генераторов унитарной группы.** До сих пор мы предполагали, что законы преобразования ковариантных и контравариантных  $SU(n)$ -тензоров различны. Покажем, что метрический тензор  $g_{ab}$  для группы  $SU(n)$  можно считать равным  $\delta_{ab}$  и, следовательно, не делать различия между ковариантными и контравариантными величинами. Отметим, что генераторы группы  $SU(n)$  всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось соотношение

$$\text{Sp } T_a T_b = \frac{1}{2} \delta_{ab}, \quad a, b = 1, \dots, n^2 - 1. \quad (1.8.26)$$

Используя формулу

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c,$$

получаем

$$f_{ab}^c = -2i \text{Sp } [T_a, T_b] T_c.$$

Отсюда вытекает свойство антисимметрии структурных постоянных:

$$f_{ab}^c = -f_{ba}^c = f_{bc}^a. \quad (1.8.27)$$

Произвольную безшпуровую  $(n \times n)$ -матрицу можно, очевидно, представить в виде

$$F = C_a T_a,$$

где согласно (1.8.26)

$$C_a = 2 \text{Sp } F T_a$$

и, следовательно,

$$F = 2 T_a \text{Sp } F T_a.$$

Выбирая в качестве  $F$  безшпуровую матрицу  $F_{lm}$  ( $l, m$  фиксированы) с элементами

$$(F_{lm})_{ik} = \delta_{im} \delta_{lk} - \frac{1}{n} \delta_{ik} \delta_{lm},$$

получаем отсюда

$$\delta_{im} \delta_{lk} - \frac{1}{n} \delta_{ik} \delta_{lm} = 2 (T_a)_{ik} (T_a)_{rs} \left( \delta_{sm} \delta_{rl} - \frac{1}{n} \delta_{is} \delta_{ml} \right)$$

или, учитывая, что  $\text{Sp } T_a = 0$ ,

$$(T_a)_{ik} (T_a)_{lm} = \frac{1}{2} \delta_{im} \delta_{lk} - \frac{1}{2n} \delta_{ik} \delta_{lm}. \quad (1.8.28)$$

Полагая здесь  $m = i$  и производя суммирование по  $i$ , находим

$$T_a T_a = \frac{n^2 - 1}{2n} I. \quad (1.8.29)$$

Из соотношения (1.8.28) следует, что

$$\text{Sp } T_a T_b T_a T_c = -\frac{1}{4n} \delta_{bc} \quad (1.8.30)$$

(мы учли, что  $\text{Sp } T_c = 0$ ). Вместе с тем  $\text{Sp } T_a T_b T_a T_c$  можно представить в виде

$$\text{Sp } T_a T_b T_a T_c = \text{Sp } T_a T_a T_b T_c + \text{Sp } T_c T_a [T_b, T_a],$$

откуда согласно (1.8.29), (1.8.10)

$$\text{Sp } T_a T_b T_a T_c = \frac{n^2 - 1}{4n} \delta_{bc} + i f_{ba}^l \text{Sp } T_c T_a T_l,$$

а используя антисимметрию  $f_{ba}^l$  по индексам  $a, l$  и формулу (1.8.10), находим

$$\begin{aligned} \text{Sp } T_a T_b T_a T_c &= \frac{n^2 - 1}{4n} \delta_{bc} - \frac{1}{2} f_{ba}^l f_{al}^d \text{Sp } T_c T_d = \\ &= \frac{n^2 - 1}{4n} \delta_{bc} - \frac{1}{4} f_{ba}^l f_{al}^c. \end{aligned}$$

Сравнивая эту формулу с (1.8.30), получаем

$$f_{ba}^l f_{al}^c = f_{ba}^l f_{lc}^a = n \delta_{bc} \quad (1.8.31)$$

и, следовательно, согласно определению (1.8.24) метрического тензора

$$g_{ab} = \delta_{ab}. \quad (1.8.32)$$

Соотношение (1.8.31) позволяет доказать справедливость формулы

$$f^{adg} f^{bdl} f^{cgl} = \frac{n}{2} f^{abc} \quad (1.8.33)$$

(в силу (1.8.32) мы уже не различаем верхние и нижние индексы). Действительно, используя свойство антисимметрии  $f^{abc}$ , получаем

$$f^{adg} f^{bdl} f^{cgl} = \frac{1}{2} f^{adg} (f^{bdl} f^{cgl} - f^{bgl} f^{cdl}),$$

или, согласно (1.1.30):

$$f^{adg} f^{bdl} f^{cgl} = \frac{1}{2} f^{adg} f^{bcl} f^{dgl} = \frac{n}{2} f^{abc}$$

(мы использовали формулу (1.8.31); формула (1.8.33) понадобится нам далее).

Рассматривая структурные постоянные  $f_{abc}$  как матричные элементы матрицы  $f^a$ ,  $(f^a)_{bc} = f_{abc}$ , формулы (1.8.31), (1.8.33) можем переписать в виде

$$\text{Sp } f^a f^b = n \delta_{ab}, \quad \text{Sp } f^a f^b f^c = \frac{n}{2} f^{abc}. \quad (1.8.34)$$

## § 1.9. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

**1.9.1. Введение калибровочного поля.** Лагранжиан свободного электронно-позитронного поля инвариантен относительно фазового преобразования

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\varepsilon} \psi(x), \quad \psi^*(x) \rightarrow \psi'^*(x) = e^{i\varepsilon} \psi^*(x), \quad (1.9.1)$$

где  $\varepsilon$  — вещественная постоянная. В случае бесконечно малых преобразований

$$\delta\psi \equiv \psi'(x) - \psi(x) = -i\varepsilon\psi(x), \quad \delta\psi^* = i\varepsilon\psi^*(x). \quad (1.9.1')$$

Так как  $\psi(x)$  является функцией координат и времени, то представляется естественным потребовать, чтобы лагранжиан был инвариантен относительно более общего преобразования, а именно преобразования (1.9.1), в котором  $\varepsilon$  представляет собой не константу, а функцию координат и времени. Однако если ограничиться только полем  $\psi(x)$  самим по себе, то добиться этого невозможно. Такую инвариантность можно получить, если кроме электронно-позитронного поля  $\psi(x)$  ввести электромагнитное поле  $A_\mu(x)$  и потребовать, чтобы оно при преобразовании (1.9.1) поля  $\psi(x)$  само испытывало преобразование

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\omega(x), \quad \varepsilon = -e\omega. \quad (1.9.2)$$

При таком преобразовании, которое называется калибровочным, инвариантность лагранжиана электронно-позитронного и электромагнитного полей достигается вследствие замены в лагранжиане (1.5.35) обычных производных  $\partial_\mu\psi(x)$  ковариантными производными

$$\begin{aligned} D_\mu\psi(x) &\equiv (\partial_\mu - ieA_\mu(x))\psi(x), \\ \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, A) &= \frac{1}{2}\bar{\psi}\{i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m\}\psi - \\ &- \frac{1}{2}\bar{\psi}\{i\gamma^\mu(\overleftarrow{\partial}_\mu + ieA_\mu) + m\}\psi. \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

Происходит это в связи с тем, что величины  $D_\mu\psi(x)$  при преобразованиях (1.9.1), (1.9.2) с зависящей от  $x$  фазой  $\varepsilon(x)$  преобразуются так же, как и поле  $\psi(x)$ .

Покажем, что идею использования электромагнитного поля для построения инвариантного лагранжиана поля  $\psi(x)$  относительно фазовых преобразований с переменной фазой  $\varepsilon(x)$  можно обобщить на случай произвольных полей  $\psi(x)$ , обладающих некоторой внутренней симметрией. Для этого рассмотрим бесконечно малые преобразования (1.8.8) поля  $\psi(x)$ , связанные с внутренними симметриями:

$$\delta\psi(x) = -i\varepsilon^a T_a\psi(x), \quad \varepsilon^a = -g\omega^a, \quad (1.9.4)$$

где  $\varepsilon^a$  ( $\omega^a$ ) — бесконечно малые величины и матрицы  $T_a$  удовлетворяют соотношению (1.8.10) (величина  $g$  далее играет роль константы взаимодействия). Не ограничивая общности будем считать, что компоненты поля  $\psi(x)$  вещественные. В этом случае матрицы  $T_a$  чисто мнимые.

Условие инвариантности лагранжиана  $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi)$  относительно преобразования (1.9.4) имеет вид

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} T_a\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi} T_a\partial_\mu\psi = 0, \quad (1.9.5)$$

откуда в силу уравнений Лагранжа (1.15) следует условие сохранения

обобщенных токов

$$\partial_\mu \mathcal{G}_a^\mu = 0, \quad \mathcal{G}_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} T_a \psi. \quad (1.9.6)$$

Пусть теперь величины  $\varepsilon^a$  являются функциями координат и времени. Тогда

$$\delta \psi = -i \varepsilon^a(x) T_a \psi(x), \quad \delta \partial_\mu \psi = -i \varepsilon^a(x) T_a \partial_\mu \psi - i \partial_\mu \varepsilon^a(x) T_a \psi, \quad (1.9.7)$$

и поэтому вариация лагранжиана (инвариантного относительно преобразований внутренней симметрии с постоянными  $\varepsilon^a$ ) будет теперь определяться равенством

$$\delta \mathcal{L} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} T_a \psi \partial_\mu \varepsilon^a(x) = \mathcal{G}_a^\mu \partial_\mu \varepsilon^a(x). \quad (1.9.8)$$

Видно, что потеря инвариантности лагранжиана при переменном  $\varepsilon^a$  связана с тем, что производные  $\partial_\mu \psi$  при преобразованиях внутренней симметрии с зависящими от  $x$  параметрами  $\varepsilon^a(x)$  преобразуются иначе, чем само поле  $\psi(x)$ . Однако, как и в случае электронно-позитронного поля, можно добиться инвариантности лагранжиана относительно преобразований (1.9.7), если ввести добавочные векторные поля  $A_\mu^a(x)$ , число которых равно числу генераторов  $T_a$ , и определить с помощью них ковариантные производные поля  $\psi(x)$ :

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) - ig A_\mu^a(x) T_a \psi(x), \quad (1.9.9)$$

закон преобразования которых совпадает с законом преобразования поля  $\psi(x)$ :

$$\delta D_\mu \psi(x) = -i \varepsilon^a(x) T_a D_\mu \psi(x). \quad (1.9.10)$$

Поля  $A_\mu^a(x)$  называются калибровочными.

Для того чтобы соотношение (1.9.10) имело место, калибровочное поле  $A_\mu^a$  при преобразовании (1.9.7) само должно преобразовываться по закону <sup>7</sup>

$$\delta A_\mu^a(x) = \varepsilon^c(x) f_{cb}^a A_\mu^b(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon^a(x). \quad (1.9.11)$$

Действительно, из определения (1.9.9) и закона преобразования поля  $\psi(x)$  (1.9.7) следует, что

$$\begin{aligned} \delta D_\mu \psi(x) &= \partial_\mu \delta \psi(x) - ig \delta A_\mu^a(x) T_a \psi(x) - ig A_\mu^a(x) T_a \delta \psi(x) = \\ &= -i \varepsilon^a T_a \partial_\mu \psi - i \partial_\mu \varepsilon^a T_a \psi - ig \delta A_\mu^a T_a \psi - g \varepsilon^a A_\mu^b [T_b, T_a] \psi - \\ &\quad - g \varepsilon^a A_\mu^b T_a T_b \psi, \end{aligned}$$

или согласно (1.9.9), (1.8.10)

$$\delta D_\mu \psi = -i \varepsilon^a T_a D_\mu \psi - ig \left\{ \delta A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon^a + \varepsilon^c A_\mu^b f_{bc}^a \right\} T_a \psi,$$

откуда получаем закон преобразования (1.9.10) калибровочного поля.

<sup>6</sup> Неабелевы калибровочные поля были введены в работе Янга, Миллса [21].

<sup>7</sup> В изложении мы следуем в основном обзору [22].

Преобразования (1.9.7), (1.9.11) будем называть калибровочными.

Обратим внимание на то, что  $\delta A_\mu^a$  кроме слагаемого  $-\frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon^a$ , аналогичного слагаемому  $-\frac{1}{e} \partial_\mu \varepsilon$  в преобразовании электромагнитного поля  $A_\mu(x)$ , имеет добавочное слагаемое  $\varepsilon^c f_{cb}^a A_\mu^b$ , содержащее структурные константы  $f_{cb}^a$ , характерные для неабелевой группы симметрии с генераторами  $T_a$ .

Инвариантность лагранжиана поля  $\psi$ , взаимодействующего с полями  $A_\mu^a$ , достигается так же, как в случае электронно-позитронного и электромагнитного полей, путем замены в лагранжиане  $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$  обычных производных  $\partial_\mu \psi$  на ковариантные производные  $D_\mu \psi$ . Это значит, что лагранжиан поля  $\psi$ , взаимодействующего с калибровочными полями  $A_\mu^a$ , определяется формулой

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, A_\mu^a) = \mathcal{L}(\psi, D_\mu \psi), \quad (1.9.12)$$

где  $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$  — лагранжиан поля  $\psi(x)$ . Действительно, так как соотношение (1.9.5) справедливо при любом  $\partial_\mu \psi$ , то справедлива формула

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu \psi} T_a D_\mu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial \psi} T_a \psi = 0,$$

откуда, используя (1.9.10), (1.9.7), находим

$$\delta \mathcal{L} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu \psi} \delta D_\mu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial \psi} \delta \psi = 0.$$

Это соотношение доказывает инвариантность лагранжиана  $\mathcal{L}(\psi, D\psi)$  относительно преобразований (1.9.7), (1.9.11).

Определим плотность обобщенных токов  $\tilde{\mathcal{J}}_a^\mu$  при наличии калибровочных полей согласно формуле

$$\tilde{\mathcal{J}}_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu \psi} T_a \psi. \quad (1.9.13)$$

Учитывая (1.9.9), получаем

$$\tilde{\mathcal{J}}_a^\mu = \frac{1}{g} \frac{\partial \mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial A_\mu^a}. \quad (1.9.13')$$

Покажем, что при преобразованиях внутренней симметрии (1.9.7), (1.9.11) с зависящими от  $x$  параметрами  $\varepsilon^a$  обобщенные токи преобразуются по закону

$$\delta \tilde{\mathcal{J}}_a^\mu = -\varepsilon^b f_{ba}^c \tilde{\mathcal{J}}_c^\mu. \quad (1.9.14)$$

Для этого отметим, что вследствие инвариантности лагранжиана относительно преобразований (1.9.7), (1.9.11)

$$\mathcal{L}(\psi', D'\psi') = \mathcal{L}(\psi, D\psi),$$

где

$$D'_\mu \psi' \equiv \partial_\mu \psi' - ig A_\mu^{a'} T_a \psi'$$

( $\psi'$ ,  $A'$  — преобразованные поля  $\psi$ ,  $A$ ). Поэтому

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\psi', D'\psi')}{\partial D'_\mu \psi'} = \frac{\partial \mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\nu \psi_j} \frac{\partial D_\nu \psi_j}{\partial D'_\mu \psi'}.$$

Для бесконечно малых преобразований согласно (1.9.10)

$$D'_\mu \psi' = (1 - i\varepsilon^a T_a) D_\mu \psi, \quad D_\mu \psi = (1 + i\varepsilon^a T_a) D'_\mu \psi'$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\psi', D'\psi')}{\partial D'_\mu \psi'} = \frac{\partial \mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu \psi} (1 + i\varepsilon^a T_a).$$

Таким образом,

$$\delta \frac{\partial \mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu \psi} = i\varepsilon^a \frac{\partial \mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu \psi} T_a.$$

Из этой формулы и формулы (1.9.13) вытекает следующее выражение для вариации  $\delta \tilde{\mathcal{J}}_\mu^a$ :

$$\delta \tilde{\mathcal{J}}_\mu^a = \varepsilon^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \psi} T_b T_a \psi - \varepsilon^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \psi} T_a T_b \psi = \varepsilon^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \psi} [T_b, T_a] \psi.$$

Используя выражение (1.8.10) для  $[T_b, T_a]$ , получим закон преобразования (1.9.14) обобщенных токов.

До сих пор мы считали поле  $\psi(x)$  вещественным, что по существу не является ограничением. Так, в случае дираковского комплексного поля  $\psi(x)$  вместо него можно ввести два вещественных поля  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ :

$$\psi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x),$$

причем фазовому преобразованию (1.9.1) будет соответствовать следующее преобразование двухкомпонентного поля  $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$ :

$$\delta \varphi(x) = -i\varepsilon T \varphi(x),$$

где  $\delta \varphi(x) = \begin{pmatrix} \delta \varphi_1 \\ \delta \varphi_2 \end{pmatrix}$  и двухкомпонентная матрица  $T$  определяется формулой

$$T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9.15)$$

Это преобразование вещественного поля  $\varphi(x)$  соответствует общей формуле (1.9.4).

Однако часто удобнее пользоваться лагранжианом, выраженным через комплексные поля. В этом случае также справедливы все приведенные формулы, если под  $\psi$  понимать удвоенное количество полей  $\psi$ ,  $\psi^*$ , закон преобразования которых имеет вид

$$\delta \psi(x) = -i\varepsilon^a T_a \psi(x), \quad \delta \psi^*(x) = i\varepsilon^a T_a^* \psi^*(x). \quad (1.9.16)$$

При этом следует считать, что во всех приведенных здесь формулах суммирование выполняется как по компонентам поля  $\psi(x)$ , так и по



компонентам поля  $\psi^*(x)$ , причем полю  $\psi^*(x)$  соответствует матрица  $-T_a^*$ . Например, выражение для тока  $\mathcal{J}_a^\mu$  в случае комплексного поля следует записать в виде

$$\mathcal{J}_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} T_a \psi + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^*} T_a^* \psi^*.$$

Так как в случае комплексного поля группой внутренней симметрии обычно является группа  $SU(n)$ , то генераторы этой группы будут эрмитовыми матрицами и, следовательно, последнюю формулу можно записать в виде

$$\mathcal{J}_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} T_a \psi + i \psi^* T_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^*}. \quad (1.9.17)$$

Далее мы будем считать поля  $\psi \equiv (\psi, \psi^*)$  комплексными, а в качестве группы внутренней симметрии использовать группу  $SU(n)$ .

**1.9.2. Тензорный анализ калибровочных полей.** Нашей следующей задачей является построение лагранжиана самих калибровочных полей, зависящего как от полей  $A_\mu^a$ , так и от их производных  $\partial_\nu A_\mu^a$ . Этот лагранжиан должен быть инвариантен относительно преобразований (1.9.11). Поэтому возникает вопрос о нахождении инвариантов преобразования (1.9.11). Для решения этого вопроса подробно рассмотрим тензорный анализ, связанный с преобразованиями (1.9.11), причем в качестве группы внутренней симметрии используем группу  $SU(n)$ .

Как и в п. 1.8.3, величины  $H_a$  и  $G^a$  будем называть компонентами ковариантного и контравариантного  $SU(n)$ -векторов, а величины  $Q_a^b$  — компонентами смешанного  $SU(n)$ -тензора второго ранга, если они преобразуются согласно формулам (1.8.21), (1.8.22), (1.8.23). Теперь бесконечно малые параметры  $\varepsilon^a$  будем считать функциями  $x$  (аналогичные определения можно дать и для тензоров высших рангов). Поскольку величины  $\varepsilon^a$  являются функциями  $x$ , то производные  $\partial_\mu H_a$ ,  $\partial_\mu G^a$ ,  $\partial_\mu Q_a^b$  уже не будут  $SU(n)$ -тензорами. Наша задача заключается в том, чтобы ввести ковариантное дифференцирование  $SU(n)$ -тензоров, при котором не меняется закон преобразования тензоров (аналогично тому, как ковариантное дифференцирование величин  $\psi$  по формуле (1.9.9) не меняет закона преобразования (1.9.4)).

Легко видеть, что компоненты обобщенного тока  $\tilde{\mathcal{J}}_a^\mu$  ( $\mu$  — фиксировано) согласно (1.9.14) образуют ковариантный вектор, компоненты же калибровочного поля  $A_\mu^a$  контравариантного  $SU(n)$ -вектора не образуют, так как в формулу (1.9.11) входит слагаемое  $\partial_\mu \varepsilon^a$ . Ясно также, что и при переменном  $\varepsilon^a$  величины  $f_{ab}^c$ ,  $g_{ab}$ , определяемые формулами (1.8.10), (1.8.24), образуют универсальные  $SU(n)$ -тензоры третьего и второго рангов. Кроме того, по повторяющимся нижним и верхним индексам можно производить суммирование (свертку), в результате которого понижается ранг тензоров.

При переменных  $\varepsilon^a$  производные от векторов  $\partial_\mu H_a$ ,  $\partial_\mu G^a$  преобра-

зуются согласно (1.8.21), (1.8.22) по формулам

$$\begin{aligned}\delta\partial_\mu H_a &= -\varepsilon^b f_{ba}{}^c \partial_\mu H_c - \partial_\mu \varepsilon^b f_{ba}{}^c H_c, \\ \delta\partial_\mu G^a &= \varepsilon^b f_{bc}{}^a \partial_\mu G^c + \partial_\mu \varepsilon^b f_{bc}{}^a G^c.\end{aligned}\quad (1.9.18)$$

Введем ковариантные производные  $\mathcal{D}_\mu$  от  $SU(n)$ -векторов:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu H_a &= \partial_\mu H_a + g f_{ab}{}^c A_\mu^b H_c, \\ \mathcal{D}_\mu G^a &= \partial_\mu G^a + g f_{bc}{}^a A_\mu^b G^c\end{aligned}\quad (1.9.19)$$

и покажем, что величины  $\mathcal{D}_\mu H_a$  и  $\mathcal{D}_\mu G^a$  преобразуются как  $SU(n)$ -векторы:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{D}_\mu H_a &= -\varepsilon^b f_{ba}{}^c \mathcal{D}_\mu H_c, \\ \delta\mathcal{D}_\mu G^a &= \varepsilon^b f_{bc}{}^a \mathcal{D}_\mu G^c.\end{aligned}\quad (1.9.20)$$

Используя (1.9.18), (1.9.11), (1.8.21), (1.8.22), находим

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{D}_\mu H_a &= -\partial_\mu \varepsilon^b f_{ba}{}^c H_c - \varepsilon^b f_{ba}{}^c \partial_\mu H_c - \partial_\mu \varepsilon^b f_{ab}{}^c H_c + \\ &+ g f_{dt}{}^b A_\mu^t \varepsilon^d f_{ab}{}^c H_c - g f_{ab}{}^c A_\mu^b \varepsilon^d f_{dc}{}^t H_t = -\varepsilon^b f_{ba}{}^c \partial_\mu H_c - \\ &- g \varepsilon^d A_\mu^t H_c \{f_{dt}{}^b f_{ba}{}^c + f_{ta}{}^b f_{bd}{}^c\},\end{aligned}$$

откуда согласно (1.1.30)

$$\delta\mathcal{D}_\mu H_a = -\varepsilon^b f_{ba}{}^c (\partial_\mu H_c + g f_{cl}{}^d A_\mu^l H_d),$$

что и доказывает первую из формул (1.9.19). (Аналогично можно доказать вторую из формул (1.9.19).)

Нетрудно ввести ковариантные производные  $SU(n)$ -тензоров высшего ранга. Например, ковариантная производная смешанного  $SU(n)$ -тензора 2-го ранга  $Q_a^b$  определяется формулой

$$\mathcal{D}_\mu Q_a^b = \partial_\mu Q_a^b + g f_{ac}{}^d A_\mu^c Q_d^b + g f_{cd}{}^b A_\mu^c Q_a^d.\quad (1.9.21)$$

Легко видеть, что ковариантное дифференцирование производится по обычным правилам:

$$\mathcal{D}_\mu Q_a^b \dots R_c^d \dots = Q_a^b \dots \mathcal{D}_\mu R_c^d \dots + R_c^d \dots \mathcal{D}_\mu Q_a^b \dots$$

Ковариантная производная универсального  $SU(n)$ -тензора  $f_{ab}{}^c$  равна нулю, т. е.

$$\mathcal{D}_\mu f_{ab}{}^c = 0.\quad (1.9.22)$$

Действительно, согласно (1.9.21)

$$\mathcal{D}_\mu f_{ab}{}^c = -g A_\mu^d \{f_{ad}{}^l f_{bl}{}^c + f_{ab}{}^l f_{al}{}^c + f_{ba}{}^l f_{dl}{}^c\},$$

откуда, используя (1.1.30), получаем соотношение (1.9.22). Используя далее формулы (1.8.24), (1.9.22), находим

$$\mathcal{D}_\mu g_{ab} = 0.\quad (1.9.23)$$

Покажем, как с помощью калибровочного поля  $A_\mu^a$  (которое при переменном  $\varepsilon$  не является  $SU(n)$ -вектором) и операций дифференцирова-

ния построить  $SU(n)$ -вектор. Вычислим с этой целью величину  $(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu) Q^a(x)$ , где  $Q^a$  — некоторый контравариантный  $SU(n)$ -вектор. Согласно (1.9.19)

$$\mathcal{D}_\nu(\mathcal{D}_\mu Q^a) = \partial_\nu \mathcal{D}_\mu Q^a + gf_{d1}^a A_\nu^d \mathcal{D}_\mu Q^l.$$

Подставляя сюда выражение (1.9.19), для  $\mathcal{D}_\mu Q^a$  получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu Q^a &= \partial_\nu \partial_\mu Q^a + gf_{bc}^a \partial_\nu A_\mu^b Q^c + gf_{bc}^a A_\mu^b \partial_\nu Q^c + \\ &+ gf_{d1}^a A_\nu^d \partial_\mu Q^l + g^2 f_{d1}^a A_\nu^d f_{bc}^l A_\mu^b Q^c, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu - \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu) Q^a &= gf_{bc}^a Q^c (\partial_\nu A_\mu^b - \partial_\mu A_\nu^b) + \\ &+ g^2 (f_{bc}^l f_{d1}^a + f_{cd}^l f_{b1}^a) A_\nu^d A_\mu^b Q^c, \end{aligned}$$

или, используя (1.1.30):

$$(\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu - \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu) Q^a = -g F_{\mu\nu}^b f_{bc}^a Q^c, \quad (1.9.24)$$

где

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.9.25)$$

Так как левая часть этого равенства —  $SU(n)$ -вектор, а величина  $f_{bc}^a Q^c$  есть смешанный  $SU(n)$ -тензор 2-го ранга, то  $F_{\mu\nu}^b$  представляет собой контравариантный  $SU(n)$ -вектор.

Таким образом, если  $F_{\mu\nu}^b \neq 0$ , то ковариантные дифференцирования некоммутативны.

Отметим, что ковариантные производные от  $F_{\mu\nu}^a$  удовлетворяют тождеству

$$\mathcal{D}_\rho F_{\mu\nu}^a + \mathcal{D}_\mu F_{\nu\rho}^a + \mathcal{D}_\nu F_{\rho\mu}^a = 0, \quad (1.9.26)$$

справедливость которого следует из формул (1.9.25), (1.9.19).

Покажем, что разность вторых ковариантных производных от поля  $\psi$  задается формулой

$$(D_\nu D_\mu - D_\mu D_\nu) \psi = ig F_{\mu\nu}^a T_a \psi, \quad (1.9.27)$$

где  $F_{\mu\nu}^a$  —  $SU(n)$ -вектор, определяемый формулой (1.9.25). Для этого отметим, что согласно (1.9.9)

$$D_\nu D_\mu \psi = \partial_\nu D_\mu \psi - ig A_\nu^b T_b D_\mu \psi,$$

откуда с использованием (1.9.9) получаем

$$D_\nu D_\mu \psi = \partial_\nu \partial_\mu \psi - ig \partial_\nu (A_\mu^a T_a \psi) - ig A_\nu^b T_b \partial_\mu \psi - g^2 A_\nu^b T_b A_\mu^a T_a \psi.$$

Поэтому

$$(D_\nu D_\mu - D_\mu D_\nu) \psi = -ig (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a) T_a \psi - g^2 (A_\nu^b A_\mu^a) [T_b, T_a] \psi,$$

следовательно, согласно (1.8.10) мы приходим к формуле (1.9.27).

**1.9.3. Лагранжиан калибровочного поля и полный лагранжиан.** Построим лагранжиан калибровочного поля. При этом будем исхо-

дить из того, что этот лагранжиан, который мы будем обозначать  $\mathcal{L}_0$ , должен содержать только калибровочные поля  $A_\mu^a(x)$  и их пространственно-временные производные не выше первого порядка.

Из условий инвариантности лагранжиана  $\mathcal{L}_0$  по отношению к калибровочным преобразованиям и преобразованиям Лоренца следует, что он должен быть некоторой функцией от величины  $-\frac{1}{4}g_{ab}F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \equiv \equiv -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ , которая согласно описанным выше результатам является как  $SU(n)$ -инвариантом, так и лоренц-инвариантом. Если потребовать, чтобы уравнения поля обладали минимальной нелинейностью, то величину  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$  следует выбрать в качестве лагранжиана свободного калибровочного поля:

$$\mathcal{L}_0(A^a, \partial_\mu A^a) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (1.9.28)$$

Согласно (1.9.12) полный лагранжиан поля  $\psi$  и калибровочного поля

$$L = \mathcal{L}(\psi, D_\mu\psi) + \mathcal{L}_0(A, \partial_\mu A), \quad (1.9.29)$$

где  $\mathcal{L}(\psi, D_\mu\psi)$  — лагранжиан свободного поля  $\psi$  и  $D_\mu\psi$  — ковариантная производная поля  $\psi$  (см. (1.9.9)).

Запишем уравнения движения полей  $\psi$  и  $A_\mu^a$ . Учитывая, что согласно (1.9.9)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\right)_{\partial\psi} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - ig \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_\mu\psi} A_\mu^a T_a, \\ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi}\right)_\psi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_\mu\psi}, \end{aligned}$$

где  $\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi}\right)_\psi$ ,  $\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\right)_{\partial\psi}$  — производные от  $\mathcal{L}(\psi, D\psi)$  по  $\partial_\mu\psi$  и  $\psi$  при постоянных  $\psi$  и  $\partial_\mu\psi$  соответственно, находим (см. (1.1.5))

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu\psi} - \frac{\partial\mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial\psi} = -ig \frac{\partial\mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu\psi} A_\mu^a T_a. \quad (1.9.30)$$

Согласно (1.9.29), (1.9.13') уравнение движения поля  $A_\mu^a$  имеет вид

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}_0(A, \partial A)}{\partial\partial_\mu A_\nu^a} - \frac{\partial\mathcal{L}_0(A, \partial A)}{\partial A_\nu^a} = g\tilde{g}_a^\nu.$$

Так как вариации лагранжиана  $\mathcal{L}_0$ , связанные с вариациями  $\partial_\mu A$  и  $A$ , определяются формулами

$$\begin{aligned} \delta_{\partial A}\mathcal{L}_0 &= -F_a^{\mu\nu}\delta\partial_\mu A_\nu^a, \\ \delta_A\mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{2}gF_a^{\mu\nu}f_{bc}^a(\delta A_\mu^b A_\nu^c + A_\mu^b \delta A_\nu^c) = -gF_a^{\mu\nu}f_{bc}^a A_\nu^c \delta A_\mu^b, \end{aligned}$$

то

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0(A, \partial A)}{\partial\partial_\mu A_\nu^a} = F_a^{\nu\mu}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_0(A, \partial A)}{\partial A_\nu^a} = -gF_b^{\mu\nu}f_{ac}^b A_\mu^c.$$

Поэтому

$$\partial_\mu F_a^{\nu\mu} = gI_a^\nu, \quad (1.9.31)$$

где

$$I_a^\nu = \tilde{\mathcal{G}}_a^\nu - f_{ac}{}^b A_\mu^c F_b^{\nu\mu}. \quad (1.9.32)$$

Эта величина, очевидно, определяется так:

$$I_a^\nu = \frac{1}{g} \frac{\partial L}{\partial A_a^\nu}. \quad (1.9.33)$$

Так как тензор  $F_a^{\nu\mu}$  антисимметричен по индексам  $\nu$  и  $\mu$ , то справедливо соотношение

$$\partial_\nu I_a^\nu = 0, \quad (1.9.34)$$

которое выражает закон сохранения обобщенного тока  $I_a^\nu$  и соответствующего ему заряда

$$Q_a = \int d^3x I_a^0(x). \quad (1.9.35)$$

Уравнения поля (1.9.31) можно переписать также в виде

$$\partial_\mu F_a^{\nu\mu} + g f_{ac}{}^b A_\mu^c F_b^{\nu\mu} = g \tilde{\mathcal{G}}_a^\nu$$

или согласно определению ковариантной производной в виде

$$\mathcal{D}_\mu F_a^{\nu\mu} = g \tilde{\mathcal{G}}_a^\nu. \quad (1.9.36)$$

Обе части этого уравнения представляют собой  $SU(n)$ -векторы, так что оно явно инвариантно по отношению к калибровочным преобразованиям.

Величины  $F_a^{\nu\mu}$  удовлетворяют тождеству

$$\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu F_a^{\nu\mu} = 0. \quad (1.9.37)$$

Действительно, согласно (1.9.24)

$$\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu F_a^{\nu\mu} = \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu - \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu) F_a^{\nu\mu} = -\frac{1}{2} g F_{\nu\mu}^b f_{cb}{}^a F^{c\nu\mu},$$

откуда вследствие антисимметрии  $f_{cb}{}^a$  по индексам  $b$  и  $c$  следует (1.9.37).

Согласно (1.9.36), (1.9.37)  $SU(n)$ -вектор  $\tilde{\mathcal{G}}_a^\mu$  удовлетворяет следующему ковариантному «закону сохранения»:

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{\mathcal{G}}_a^\mu = 0. \quad (1.9.38)$$

Отметим, что этот закон следует из уравнения движения поля  $\psi$  (см. (1.9.30)). Действительно, согласно определению ковариантной производной (1.9.19) и определению (1.9.13)  $SU(n)$ -вектора  $\tilde{\mathcal{G}}_a^\mu$

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{\mathcal{G}}_a^\mu = -i \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \psi} T_a \psi \right) + g f_{ab}{}^c A_\mu^b \tilde{\mathcal{G}}_c^\mu.$$

Используя далее уравнения движения (1.9.30) для поля  $\psi$ , получаем

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{\mathcal{J}}_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} T_a \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \psi} \{ -iT_a \partial_\mu \psi - g T_a T_b \psi A_\mu^b - \\ - g A_\mu^b [T_b, T_a] \psi \} + g f_{ab}{}^c A_\mu^b \tilde{\mathcal{J}}_c^\mu,$$

откуда, учитывая, что  $[T_a, T_b] = i f_{ab}{}^c T_c$  и используя определение (1.9.13) тока  $\tilde{\mathcal{J}}_c^\mu$ , находим

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{\mathcal{J}}_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} T_a \psi - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \psi} T_a D_\mu \psi.$$

Правая часть этого равенства согласно формуле (1.9.5), выражающей инвариантность лагранжиана  $\mathcal{L}(\psi, \partial\psi)$  относительно  $SU(n)$ -преобразований с постоянными  $\epsilon^a$ , равна нулю. Это и доказывает соотношение (1.9.38).

В заключение отметим аналогию между тензорным анализом калибровочных полей и тензорным анализом общей теории относительности. Неоднородный закон преобразования калибровочных полей  $A_\mu^a(x)$  аналогичен неоднородному закону преобразования символов Кристоффеля  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ , а операция ковариантного дифференцирования (1.9.19), определенная с помощью калибровочных полей  $A_\mu^a$ , аналогична ковариантному дифференцированию в общей теории относительности, определенной с помощью символов Кристоффеля  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ . Величины  $F_{\mu\nu}^a$  аналогичны компонентам тензора кривизны  $R_{\mu\nu;\lambda\rho}$ , а соотношения типа (1.9.25) лежат в основе определения тензора  $R_{\mu\nu;\lambda\rho}$ . Наконец, формулы (1.9.26) аналогичны тождествам Бианки в общей теории относительности.

Эти аналогии являются отражением глубокой связи между гравитационными и калибровочными полями. Именно гравитационное поле можно трактовать как калибровочное, если в качестве преобразований внутренней симметрии рассматривать преобразование Лоренца  $x \rightarrow x' = x + \epsilon x$ . Это значит, что в такой трактовке величины  $\epsilon_{\mu\nu}$  должны считаться функциями координат и времени.

**1.9.4. Калибровочные поля, связанные с дираковскими полями, обладающими внутренней симметрией.** Рассмотрим калибровочные поля, связанные с дираковскими полями, обладающими внутренней симметрией (см. п. 1.8.2), связанной с группой  $SU(n)$ . Полный лагранжиан дираковских и калибровочных полей согласно (1.8.4), (1.9.29) имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \tilde{D}_\mu + m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (1.9.39)$$

где

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - ig A_\mu^a T_a \psi; \quad (1.9.40)$$

$$\bar{\psi} \tilde{D}_\mu \equiv D_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + ig A_\mu^a T_a^* \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + ig \bar{\psi} T_a A_\mu^a.$$

Отметим, что в часть лагранжиана, описывающего взаимодействие дираковского и калибровочного полей, поле  $A_\mu^a$  входит линейно. Поэтому согласно (1.9.13), (1.9.6)

$$\tilde{\mathcal{J}}_a^\mu = \mathcal{J}_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi.$$

Лагранжиан (1.9.39) можно переписать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + g \mathcal{J}_a^\mu A_\mu^a. \quad (1.9.41)$$

Лагранжиан (1.9.41) полностью аналогичен лагранжиану (1.9.3) электронно-позитронного и электромагнитного полей, причем  $F_{\mu\nu}^a(x)$  играет роль электромагнитного поля, а  $g$  — роль электрического заряда. Можно сказать также, что константа  $g$  играет роль константы взаимодействия между полями  $\psi$  и  $A_\mu^a$ .

Согласно (1.1.5), (1.9.36) уравнения движения для полей  $\psi$  и  $A_\mu^a$  имеют следующий вид:

$$\mathcal{D}_\mu F_a^{\nu\mu} = g \mathcal{J}_a^\nu, \quad (1.9.42)$$

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi = 0, \quad \bar{\psi} (i\gamma^\mu \overleftarrow{D}_\mu + m) = 0,$$

где  $\mathcal{D}_\mu F_a^{\nu\mu}$  и  $D_\mu \psi$  определяются формулами (1.9.40), (1.9.19). Поэтому эти уравнения движения можно записать также в виде

$$\partial_\mu F_a^{\nu\mu} = g I_a^\nu, \quad (1.9.43)$$

$$\{i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig A_\mu^a T_a) - m\} \psi = 0,$$

где

$$I_a^\nu = \mathcal{J}_a^\nu - f_{ac}{}^b A_\mu^c F_b^{\nu\mu} = \bar{\psi} \gamma^\nu T_a \psi - f_{ac}{}^b A_\mu^c F_b^{\nu\mu}. \quad (1.9.44)$$

Величины  $I_a^\mu$  согласно этим уравнениям являются сохраняющимися токами:

$$\partial_\mu I_a^\mu = 0. \quad (1.9.45)$$

Обратим внимание на то, что в выражение для сохраняющегося тока входят два слагаемых, одно из которых ( $\mathcal{J}_a^\nu$ ) связано с дираковским полем  $\psi$ , а другое ( $-f_{ac}{}^b A_\mu^c F_b^{\nu\mu}$ ) с калибровочным полем  $A_\mu^a$ . В этом состоит различие между абелевым электромагнитным полем и неабелевым калибровочным полем: в случае электромагнитного поля слагаемое тока  $I_a^\nu$ , связанное с самим электромагнитным полем, отсутствует. Поэтому уравнения движения «свободного» калибровочного поля (т. е. поля при отсутствии поля  $\psi$ ) имеют вид

$$\partial_\mu F_a^{\nu\mu} = -g f_{ac}{}^b A_\mu^c F_b^{\nu\mu}. \quad (1.9.46)$$

Из этого уравнения следует, что неабелево калибровочное поле взаимодействует само с собой подобно гравитационному полю, причем та же константа  $g$  характеризует самодействие поля (поэтому слово «свободное» берется в кавычки).

В п. 1.8.1 мы рассматривали два типа дираковских полей, обладающих внутренними симметриями — нуклонное, свободный лагранжиан которого  $SU(2)$  инвариантен, и кварковое, свободный лагранжиан которого  $SU(3)$  инвариантен (речь идет о цветовой  $SU(3)_c$ -инвариантности).

Три калибровочных поля  $A_\mu^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ), обеспечивающих калибровочную инвариантность лагранжиана нуклонного поля, называются полями Янга — Миллса. Для этих полей генераторы  $T_a$  определяются матрицами Паули,  $T_a = \frac{1}{2} \tau_a$  (см. (1.8.14)).

Восемь калибровочных полей  $A_\mu^a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ), обеспечивающих калибровочную инвариантность лагранжиана кварковых полей, называются глюонными полями. Соответствующие им генераторы определяются восемью матрицами Гелл-Манна  $T_a = \frac{1}{2} \lambda_a$  (см. (1.8.15)).

Отметим, что в выражение для  $D_\mu \psi$  входит матрица  $A_\mu^a T_a \equiv \hat{A}_\mu$  со шпуром, равным нулю:  $\text{tr} \hat{A}_\mu = 0$ . Если генераторы  $T_a$  выбраны так, чтобы выполнялось соотношение (см. п. 1.8.4)

$$\text{tr} T_a T_b = \frac{1}{2} \delta_{ab},$$

то  $g_{ab} = \delta_{ab}$  (в этом случае отсутствует различие между ковариантными и контравариантными  $SU(n)$ -тензорами). При таком выборе генераторов  $T_a$  лагранжиан (1.9.39) можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \hat{D}_\mu + m) \psi - \frac{1}{2} \text{tr} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu}, \quad (1.9.47)$$

где  $D_\mu = \partial_\mu - ig\hat{A}_\mu$  и  $\hat{F}^{\mu\nu} = T_a F^{a\mu\nu}$  (шпур берется в пространстве, в котором действуют матрицы  $T_a$ ). Матрицу  $\hat{F}_{\mu\nu}$  согласно (1.9.25), (1.8.10) можно выразить через  $\hat{A}_\mu$ :

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ig [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]. \quad (1.9.48)$$

Используя формулы (1.9.11), (1.9.48), легко заключить, что матрицы  $\hat{A}_\mu$  и  $\hat{F}_{\mu\nu}$  при бесконечно малых калибровочных преобразованиях преобразуются по формулам

$$\hat{A}_\mu \rightarrow \hat{A}'_\mu = \hat{A}_\mu + \delta \hat{A}_\mu, \quad \hat{F}_{\mu\nu} \rightarrow \hat{F}'_{\mu\nu} = \hat{F}_{\mu\nu} + \delta \hat{F}_{\mu\nu},$$

где

$$\delta \hat{A}_\mu = -i [\hat{\epsilon}, \hat{A}_\mu] - \frac{1}{g} \partial_\mu \hat{\epsilon}; \quad (1.9.49)$$

$$\delta \hat{F}_{\mu\nu} = -i [\hat{\epsilon}, \hat{F}_{\mu\nu}];$$

$\hat{\epsilon}(x) = \epsilon^c(x) T_c$  — произвольная бесконечно малая матрица со шпуром, равным нулю.



Отметим, что если поля  $F_{\mu\nu}^a$ ,  $A_\mu^a$  рассматривать как независимые, то лагранжиан (1.9.39) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \overleftarrow{D}_\mu + m) \psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \\ & - \frac{1}{2} F_a^{\mu\nu} \{ \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{bc}{}^a A_\mu^b A_\nu^c \}. \end{aligned} \quad (1.9.50)$$

Этот лагранжиан приводит к уравнениям поля первого порядка для величин  $F_{\mu\nu}^a$ ,  $A_\mu^a$  (эквивалентным уравнениям поля для лагранжиана (1.9.39)), причем варьирование по  $F_{\mu\nu}^a$  приводит к уравнению (1.9.25), которое в формализме уравнений поля второго порядка являлось определением  $F_{\mu\nu}^a$ .

§ 2.1. ДИНАМИКА КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ

**2.1.1. Квантовомеханическое описание состояний.** Согласно квантовой механике каждой физической величине (наблюдаемой) сопоставляется некоторый оператор в гильбертовом пространстве, представляющем собой совокупность векторов  $\Phi$  (называемых векторами состояния), для которых определено скалярное произведение  $(\Phi_1, \Phi_2)$ , обладающее следующими свойствами [1, 2]:

$$(\Phi_1, \Phi_2)^* = (\Phi_2, \Phi_1), \quad (\Phi, a\Phi_1 + b\Phi_2) = a(\Phi, \Phi_1) + b(\Phi, \Phi_2), \quad (\Phi, \Phi) > 0$$

( $a$  и  $b$  — произвольные комплексные числа).

Любой оператор  $R$  в гильбертовом пространстве переводит каждый вектор  $\Phi$  этого пространства в некоторый другой вектор  $\Phi'$  этого же пространства:

$$\Phi \xrightarrow{R} \Phi' \equiv R\Phi.$$

Оператор  $R^+$  называется эрмитово сопряженным по отношению к оператору  $R$ , если для любых двух векторов  $\Phi_1, \Phi_2$  справедливо равенство

$$(\Phi_2, R\Phi_1) = (R^+\Phi_2, \Phi_1).$$

Оператор  $R$  называется эрмитовым или самосопряженным, если  $R^+ = R$ .

Собственные значения любого самосопряженного оператора вещественны, а его собственные векторы образуют полную ортонормированную систему векторов и поэтому могут использоваться в качестве базиса гильбертова пространства. В связи со сказанным физическим величинам всегда сопоставляются эрмитовы операторы.

Для векторов состояний, скалярных произведений и матричных элементов операторов мы будем использовать также следующие дираковские обозначения:

$$\Phi \equiv |\Phi\rangle, \quad (\Phi_1, \Phi_2) \equiv \langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle, \quad (\Phi_1, R\Phi_2) \equiv \langle \Phi_1 | R | \Phi_2 \rangle.$$

Векторы состояний системы изменяются со временем по вполне определенному закону. Именно, если  $\mathcal{H}$  — гамильтониан системы, то вектор состояния  $\Phi(t)$  изменяется со временем согласно уравнению

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \mathcal{H} \Phi(t) \quad (2.1.1)$$

(здесь и далее считается, что квантовая постоянная  $\hbar$  равна единице). Решение этого уравнения можно формально записать в виде

$$\Phi(t) = e^{-i\mathcal{H}t} \Phi(0).$$

В квантовой механике мы можем подвергать операторы  $R$  некоторому унитарному преобразованию  $U$ :

$$R \rightarrow R' = URU^+, \quad (2.1.2)$$

подвергая одновременно этому же унитарному преобразованию и вектор состояний

$$\Phi \rightarrow \Phi' = U\Phi.$$

При этом будут оставаться неизменными матричные элементы  $R$ :

$$(\Phi'_1, R'\Phi'_2) = (\Phi_1, R\Phi_2).$$

В качестве примеров таких преобразований рассмотрим переход от шредингеровского представления к гейзенберговскому и дираковскому представлениям.

В шредингеровском представлении операторы не зависят от времени, а векторы состояний изменяются со временем согласно уравнению (2.1.1).

В гейзенберговском представлении эволюция системы описывается изменением со временем операторов, векторы же состояния от времени не зависят. Операторы  $R(t)$  и векторы состояния  $\Psi$  в этом представлении связаны с соответствующими величинами в шредингеровском представлении унитарным преобразованием (2.1.2) с  $U = \exp i\mathcal{H}t$ :

$$R(t) = e^{i\mathcal{H}t} R e^{-i\mathcal{H}t}, \quad \Psi = e^{i\mathcal{H}t} \Phi(t) \quad (2.1.3)$$

(вектор  $\Psi$  согласно (2.1.1) не зависит от времени  $t$ ; предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  оба представления совпадают). Оператор  $R(t)$  изменяется со временем по закону

$$\frac{\partial R(t)}{\partial t} = i[\mathcal{H}, R(t)], \quad (2.1.4)$$

где  $[a, b] = ab - ba$  — коммутатор операторов  $a$  и  $b$ .

В дираковском представлении (или представлении взаимодействия) изменяются со временем и векторы состояния, и операторы, причем это изменение связывается с разбиением гамильтониана  $\mathcal{H}$  на два слагаемых  $\mathcal{H}_0$  и  $V$ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V,$$

где обычно под  $\mathcal{H}_0$  понимают гамильтониан невзаимодействующих частиц, а под  $V$  — гамильтониан их взаимодействия. Операторы  $R(t)$  и векторы состояния  $\Phi(t)$  в этом представлении связаны с соответствующими величинами в шредингеровском представлении унитарным

преобразованием (2.1.2) с  $U = \exp i\mathcal{H}_0 t$ :

$$\tilde{R}(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} R e^{-i\mathcal{H}_0 t}, \quad \tilde{\Phi}(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} \Phi(t) \quad (2.1.5)$$

(предполагается, что оба представления совпадают при  $t = 0$ ).

Легко видеть, что вектор состояния в представлении взаимодействия изменяется со временем по закону<sup>8</sup>

$$\tilde{\Phi}(t) = S(t, 0) \tilde{\Phi}(0), \quad S(t, 0) = e^{i\mathcal{H}_0 t} e^{-i\mathcal{H} t}. \quad (2.1.6)$$

Оператор  $S(t, 0)$ , называемый оператором преобразования, удовлетворяет уравнениям

$$i \frac{\partial S(t, 0)}{\partial t} = \tilde{V}(t) S(t, 0), \quad S(0, 0) = 1, \quad (2.1.7)$$

где

$$\tilde{V}(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} V e^{-i\mathcal{H}_0 t}.$$

Оператор преобразования  $S(t, 0)$  может использоваться для описания процесса рассеяния частиц. Задача о рассеянии ставится следующим образом: задан вектор состояния системы частиц  $\tilde{\Phi}(t)$  в момент времени  $t = -\infty$ , когда частицы могут считаться невзаимодействующими; требуется определить вектор состояния  $\tilde{\Phi}(t)$  в момент времени  $t = +\infty$ , когда частицы после взаимодействия снова становятся свободными.

Из формулы (2.1.6) следует

$$\tilde{\Phi}(t) = S(t, t_0) \tilde{\Phi}(t_0), \quad (2.1.6')$$

где

$$S(t, t_0) = S(t, 0) S^+(t_0, 0).$$

Полагая  $t_0 = -\infty$ ,  $t = +\infty$  и считая, что в эти моменты взаимодействие выключено, находим матрицу рассеяния

$$S = S(\infty, -\infty) = S(\infty, 0) S^+(-\infty, 0), \quad (2.1.8)$$

связывающую состояния  $\Phi(-\infty)$  и  $\Phi(+\infty)$ .

Согласно (2.1.6') оператор  $S(t, t_0)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$i \frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} = \tilde{V}(t) S(t, t_0) \quad (2.1.7')$$

<sup>8</sup> В квантовой теории поля представление взаимодействия в релятивистски инвариантном виде было введено Томонага [3] и Швингером [4].

и начальному условию  $S(t_0, t_0) = 1$ . Отсюда следует, что разложение  $S(t, t_0)$  по степеням  $V$  имеет вид

$$S(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t, t_0), \quad (2.1.9)$$

$$S_n(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n V(\tau_1) \dots V(\tau_n).$$

Оператор  $S_n(t, t_0)$  можно записать также в виде

$$S_n(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n T \{ V(\tau_1) \dots V(\tau_n) \}, \quad (2.1.10)$$

где буквой  $T$  обозначена операция хронологического упорядочения:  $T \{ V(\tau_1) \dots V(\tau_n) \} = V(\tau_{i_1}) \dots V(\tau_{i_n})$ ,  $\tau_{i_1} \geq \tau_{i_2} \geq \dots \geq \tau_{i_n}$  (2.1.11)

(в правой части этого соотношения записаны те же операторы, что и в левой, но расположенные в хронологическом порядке).

Действительно, легко видеть, что при  $t > t_0$  согласно определению  $T$ -произведения имеет место формула

$$i \frac{\partial S_n(t, t_0)}{\partial t} = \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!} V(t) \int_{t_0}^t d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_n T \{ V(\tau_2) \dots V(\tau_n) \} = \\ = V(t) S_{n-1}(t, t_0).$$

К такому же уравнению приводит формула (2.1.9). Отсюда следует эквивалентность выражений (2.1.10), (2.1.9).

Используя (2.1.8), (2.1.10) и предполагая, что взаимодействие  $V(t)$  при  $t \rightarrow \pm \infty$  выключается, матрицу рассеяния можно представить в виде<sup>9</sup>

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n, \quad (2.1.12)$$

$$S_n = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n e^{-\varepsilon(|\tau_1| + \dots + |\tau_n|)} T \{ V(\tau_1) \dots V(\tau_n) \}$$

( $\varepsilon \rightarrow +0$ ), или символически в виде

$$S = T \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau V(\tau) \right). \quad (2.1.13)$$

Далее, используя эту формулу, мы построим матрицу рассеяния для взаимодействующих между собой полей.

В этой главе мы используем гейзенберговское представление квантовой механики.

<sup>9</sup> Этот результат был получен Дайсоном [5].

Рассмотрим снова унитарные преобразования  $U$ , зависящие от некоторых параметров  $\lambda_a$ ,  $U = U(\lambda_a)$ . Для бесконечно малых значений параметров  $\lambda_a$ ,  $\lambda_a = \delta\lambda_a$ , оператор  $U$  можно представить в виде

$$U(\lambda) = 1 + iG, \quad (2.1.14)$$

где  $G$  — эрмитов оператор:

$$G = \sum_a \delta\lambda_a G_a, \quad G_a = -i \left. \frac{\partial U}{\partial \lambda_a} \right|_{\lambda=0}$$

(предполагается, что  $U(0) = 1$ ). Вариация произвольного оператора  $R$  согласно (2.1.2) определяется формулой

$$\delta R \equiv R' - R = i[G, R]. \quad (2.1.15)$$

Если предположить, что преобразования  $U(\lambda)$  образуют некоторую непрерывную группу  $\mathcal{G}$ , т. е.

$$U(\lambda^2)U(\lambda^1) = U(\lambda^3),$$

где  $\lambda^3$  — некоторая функция параметров  $\lambda^2, \lambda^1$ ,

$$\lambda^3 = \lambda(\lambda^2, \lambda^1),$$

то операторы  $G_a$  будут удовлетворять перестановочным соотношениям

$$[G_a, G_b] = i \sum_c f_{ab}{}^c G_c, \quad (2.1.16)$$

где  $f_{ab}{}^c$  — некоторые постоянные, называемые структурными постоянными группы  $\mathcal{G}$  (доказательство см. в п. 1.1.3). Операторы  $G_a$  называются генераторами группы преобразований  $\mathcal{G}$ , а оператор  $G = \sum_a \delta\lambda_a G_a$  — генератором вариаций  $\delta R$ .

**2.1.2. Квантовый интеграл действия и уравнения поля.** В гл. 1 мы изучали классические поля. Переходя теперь к описанию квантованных полей, будем предполагать, что для них так же, как для классических полей, справедлив вариационный принцип, в основе которого лежит операторный интеграл действия <sup>10</sup>

$$W = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\chi, \partial_\mu \chi), \quad (2.1.17)$$

где  $\mathcal{L}$  — лагранжиан, который строится с помощью квантованных полей  $\chi(x)$ . Последние представляют собой операторы, действующие на векторы состояний физической системы. Операторы  $\chi(x)$  можно считать эрмитовыми (этого всегда можно достигнуть путем удвоения числа компонент поля).

Уравнения движения для квантованных полей  $\chi(x)$  можно получить так же, как в классической теории, в результате варьирования интеграла действия. При этом, однако, необходимо иметь в виду, что  $\chi(x)$  представляют собой операторы, и поэтому должны быть сформу-

<sup>10</sup> Идея использования квантового интеграла действия для установления уравнений движения и перестановочных соотношений квантованных полей принадлежит Ю. Швингеру [6]. Он же установил связь между генераторами различных преобразований и вариацией оператора действия для реального движения поля.

лированы перестановочные соотношения между вариациями операторов  $\delta\chi(x)$  и самими операторами  $\chi(x)$ .

Мы будем рассматривать случай, когда величины  $\delta\chi(x)$  и  $\chi(x')$  коммутируют:

$$[\chi(x'), \delta\chi(x)]_- = 0 \quad (2.1.18)$$

и когда они антикоммутируют:

$$[\chi(x'), \delta\chi(x)]_+ = 0, \quad (2.1.19)$$

где  $[a, b]_- \equiv [a, b] = ab - ba$ ;  $[a, b]_+ \equiv \{a, b\} = ab + ba$ . В первом случае поле  $\chi(x)$  называется бозевским, а во втором — фермиевским. Вариации  $\delta\chi(x)$ , удовлетворяющие соотношениям (2.1.18), (2.1.19), будем называть элементарными вариациями.

В случае бозе-полей вариация действия находится так же, как и для классических полей:

$$\delta W = \int_{\Omega} d^4x \delta\chi(x) W(x),$$

где  $W(x) = \delta W / \delta\chi(x)$  (предполагается, что внеинтегральные члены на границах области  $\Omega$  обращаются в нуль). Отсюда вытекают уравнения Лагранжа

$$W(x) = 0.$$

Для Ферми-полей, учитывая (2.1.19), вариации  $W$  можно представить в двух формах:

$$\delta W = \int_{\Omega} d^4x \delta\chi(x) W_l(x),$$

или

$$\delta W = \int_{\Omega} d^4x W_r(x) \delta\chi(x),$$

где  $W_l = \delta_l W / \delta\chi(x)$ ;  $W_r = \delta_r W / \delta\chi(x)$  — левая и правая вариационные производные  $W$ . Отсюда вытекают уравнения Лагранжа

$$W_l(x) = 0, \quad W_r(x) = 0.$$

Чтобы эти уравнения совпадали, нужно наложить на лагранжиан ферми-полей условие симметрии

$$\mathcal{L}(\chi, \partial_\mu \chi) = \mathcal{L}(-\chi, -\partial_\mu \chi) \quad (2.1.20)$$

(лагранжиан ферми-полей всегда содержит  $\chi(x)$  в четных степенях, см. (2.1.20)).

Будем предполагать, что уравнения поля — уравнения 1-го порядка (это всегда может быть достигнуто путем введения новых компонент поля) с постоянными коэффициентами перед производными. В этом случае лагранжиан  $\mathcal{L}(\chi, \partial_\mu \chi)$  должен иметь следующую структуру:

$$\mathcal{L}(\chi, \partial_\mu \chi) = L_0(\chi, \partial_\mu \chi) - U(\chi), \quad (2.1.21)$$

где  $U(\chi)$  — некоторая локальная функция операторов  $\chi(x)$  и

$$\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi) = \frac{i}{4} (\chi B^\mu \partial_\mu \chi - \partial_\mu \chi B^{\mu+} \chi), \quad (2.1.22)$$

где  $B^\mu$  — числовые матрицы, действующие на индекс поля ( $B^{\mu+}$  — матрица, эрмитово сопряженная  $B^\mu$ ; мы учли эрмитовость  $\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi)$ ).

К лагранжиану (2.1.21), не нарушая уравнений движения и условия эрмитовости  $\mathcal{L}$ , можно добавить эрмитов оператор  $\frac{i}{4} \partial_\mu (\chi C^\mu \chi)$ , где числовые матрицы  $C^\mu$  удовлетворяют условию  $C^{\mu+} = -C^\mu$ . При этом матрицы  $B^\mu$  испытывают преобразование  $B^\mu \rightarrow B'^\mu = B^\mu + C^\mu$ . Матрицы  $C^\mu$  можно выбрать так, чтобы матрицы  $B^\mu$  были эрмитовы,  $B^{\mu+} = B^\mu$ .

Разобьем эрмитову матрицу  $B^\mu$  на симметричную  $B_s^\mu$  и антисимметричную  $B_a^\mu$  части:

$$B^\mu = B_s^\mu + B_a^\mu, \quad B_s^{\mu+} = B_s^\mu, \quad B_a^{\mu+} = -B_a^\mu. \quad (2.1.23)$$

Тогда оператор  $\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi)$  можно представить в виде

$$\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi) = -\frac{i}{4} ([\partial_\mu \chi, B_s^\mu \chi] + \{\partial_\mu \chi, B_a^\mu \chi\}).$$

В классическом случае входящий сюда коммутатор обращается в нуль и величина  $\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi)$  приобретает вид

$$\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi) = \frac{i}{2} \chi B_a^\mu \partial_\mu \chi.$$

В квантовом случае коммутатор отличен от нуля. Однако легко видеть, что вследствие (2.1.18) для бозе-полей коммутатор не дает вклада в уравнения движения, а согласно (2.1.19) для ферми-полей не дает вклада в уравнения движения антикоммутатор.

Далее компоненты бозе-поля будем обозначать через  $\varphi(x)$ , а компоненты ферми-поля через  $\psi(x)$ . Тогда согласно сказанному оператор  $\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi)$  можно представить в виде

$$\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi) = \mathcal{L}_0^-(\varphi, \partial_\mu \varphi) + \mathcal{L}_0^+(\psi, \partial_\mu \psi), \quad (2.1.24)$$

где  $\mathcal{L}_0^-$  — оператор  $\mathcal{L}_0$  для бозе-поля:

$$\mathcal{L}_0^-(\varphi, \partial_\mu \varphi) = -\frac{i}{4} \{\partial_\mu \varphi, B_a^\mu \varphi\}, \quad (2.1.25)$$

а  $\mathcal{L}_0^+$  — оператор  $\mathcal{L}_0$  для ферми-поля:

$$\mathcal{L}_0^+(\psi, \partial_\mu \psi) = -\frac{i}{4} [\partial_\mu \psi, B_s^\mu \psi]. \quad (2.1.26)$$

Последние формулы показывают, что если поля  $\varphi$  и  $\psi$  рассматривать как некоторое единое поле  $\chi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ , то оператор  $\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi)$  для него можно представить в виде

$$\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi) = \frac{i}{4} (\chi B^\mu \partial_\mu \chi - \partial_\mu \chi B^{\mu+} \chi), \quad (2.1.27)$$



где матрицы  $B^\mu$  имеют следующую блочную структуру:

$$B^\mu = \begin{pmatrix} B_a^\mu & 0 \\ 0 & B_s^\mu \end{pmatrix}. \quad (2.1.28)$$

Получим уравнения поля для лагранжиана (2.1.21). Согласно (2.1.18), (2.1.19) вариации  $\delta\varphi$  коммутируют с  $\varphi$  и  $\psi$ , а вариации  $\delta\psi$  коммутируют с  $\varphi$  и антикоммутируют с  $\psi$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu\chi) &= i\delta\varphi B_a^\mu \partial_\mu\varphi + i\delta\psi B_s^\mu \partial_\mu\psi - \\ &- \frac{i}{4} \partial_\mu (\{\delta\varphi, B_a^\mu\varphi\} + [\delta\psi, B_s^\mu\psi]) \end{aligned}$$

и, следовательно, уравнения движения для бозе-полей имеют вид

$$iB_a^\mu \partial_\mu\varphi = \frac{\partial U(\varphi, \psi)}{\partial\varphi}, \quad (2.1.29)$$

а для ферми-полей

$$iB_s^\mu \partial_\mu\psi = \frac{\partial U(\varphi, \psi)}{\partial\psi}, \quad (2.1.30)$$

если вариации  $\delta\psi$  смещаются налево, или

$$-i\partial_\mu\psi B_s^\mu = \frac{\partial U(\varphi, \psi)}{\partial\psi}, \quad (2.1.30')$$

если вариации  $\delta\psi$  смещаются направо. В последних двух формулах левая  $\partial_i U/\partial\psi$  и правая  $\partial_r U/\partial\psi$  производные определяются согласно формуле

$$\delta U = \delta\psi \frac{\partial U}{\partial\psi} = \frac{\partial_r U}{\partial\psi} \delta\psi. \quad (2.1.31)$$

Так как  $B_s^\mu \partial_\mu\psi = \partial_\mu\psi B_s^\mu$  (для ферми-полей  $\tilde{B}_s^\mu = B_s^\mu$ , а тильдой обозначено транспонирование матрицы), то условием тождественности уравнений (2.1.30), (2.1.30') является равенство  $\partial_r U/\partial\psi = -\partial_i U/\partial\psi$ . Отсюда следует, что оператор  $U$  должен содержать четное число ферми-полей (см. (2.1.20)).

До сих пор мы не оговаривали вид оператора  $U(\chi)$ . Теперь отметим, что в случае свободных полей уравнения движения являются линейными. Поэтому оператор  $U(\chi)$  должен быть квадратичным по операторам  $\chi$ .

В случае свободного бозе-поля оператор  $U(\chi) \equiv U^-(\varphi)$  имеет вид

$$U^-(\varphi) = \frac{1}{4} \{\varphi, \mathfrak{E}_s\varphi\}, \quad (2.1.32)$$

где  $\mathfrak{E}_s$  — некоторая матрица, которую, очевидно, можно считать симметричной (член  $[\varphi, \mathfrak{E}_a\varphi]$ , где  $\mathfrak{E}_a$  — антисимметричная матрица, не дает вклада в уравнения движения). Из эрмитовости оператора  $U^-$  следует, что матрица  $\mathfrak{E}_s$  эрмитова. Таким образом,

$$\mathfrak{E}_s^\dagger = \mathfrak{E}_s = \tilde{\mathfrak{E}}_s = \mathfrak{E}_s^*. \quad (2.1.33)$$

В случае свободного ферми-поля оператор  $U(\chi) \equiv U^+(\psi)$  имеет вид

$$U^+(\psi) = \frac{1}{4} [\psi, \mathfrak{E}_a \psi], \quad (2.1.34)$$

где  $\mathfrak{E}_a$  — некоторая матрица, которую, очевидно, можно считать антисимметричной (член  $\{\psi, \mathfrak{E}_s \psi\}$ , где  $\mathfrak{E}_s$  — симметричная матрица, не дает вклада в уравнения движения). Из эрмитовости  $U^+$  следует, что матрица  $\mathfrak{E}_a$  эрмитова. Таким образом,

$$\mathfrak{E}_a^+ = \mathfrak{E}_a = -\bar{\mathfrak{E}}_a = -\mathfrak{E}_a^*. \quad (2.1.35)$$

Объединяя поля  $\varphi$  и  $\psi$  в единое поле  $\chi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ , в случае свободных полей согласно (2.1.32), (2.1.34) получаем следующее выражение для  $U(\chi)$ :

$$U(\chi) = \frac{1}{2} \chi \mathfrak{E} \chi, \quad (2.1.36)$$

где

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_s & 0 \\ 0 & \mathfrak{E}_a \end{pmatrix}.$$

Уравнения Лагранжа свободных бозе- и ферми-полей согласно (2.1.29), (2.1.30), (2.1.32), (2.1.34) имеют вид

$$iB_a^\mu \partial_\mu \varphi - \mathfrak{E}_s \varphi = 0, \quad iB_s^\mu \partial_\mu \psi - \mathfrak{E}_a \psi = 0,$$

или

$$iB^\mu \partial_\mu \chi - \mathfrak{E} \chi = 0. \quad (2.1.37)$$

Как мы уже отмечали в связи с формулой (2.1.22), при переходе от квантовой теории к классической член в лагранжиане (2.1.27), содержащий ферми-поля, исчезает. Если мы хотим, чтобы при переходе к классической теории ферми-поля сохраняли смысл, мы должны считать в классической теории поля  $\psi$  не обычными  $c$ -числовыми, а антикоммутирующими функциями. В этом случае говорят, что поля  $\psi$  образуют грассманову алгебру (с бесконечным числом образующих [7]). При таком подходе величину  $\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi)$  в классической теории поля можно записать в виде

$$\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi) = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \varphi B_a^\mu \varphi + \partial_\mu \psi B_s^\mu \psi).$$

Отметим, что весь формализм классической теории легко обобщается на тот случай, когда наряду с обычными  $c$ -числовыми полями содержатся также антикоммутирующие грассмановы поля.

**2.1.3. Динамически независимые переменные поля и уравнения связи.** Для уравнений поля (2.1.29), (2.1.30) можно поставить задачу о нахождении решений этих уравнений по заданным операторам поля в некоторый начальный момент времени (задача Коши). Однако не

все компоненты поля можно задавать произвольно в начальный момент времени. Те из них, которые можно произвольно задавать при  $t = t_0$  и задание которых однозначно определяет решение уравнений поля, мы будем называть динамически независимыми компонентами.

Для нахождения структуры динамически независимых компонент в случае бозе-полей перейдем так же, как и в классическом случае, к новым эрмитовым полевым переменным  $\bar{\varphi} = \tilde{V}_- \varphi$ , где  $V_-$  — ортогональная матрица,  $V_- \tilde{V}_- = 1$ , переводящая матрицу  $B_a^0$  в матрицу  $\bar{B}_a^0 = \tilde{V}_- B_a^0 V_-$ , имеющую блочную структуру

$$\bar{B}_a^0 = \left[ \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{array}{ccc} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_p \end{array}}^{\alpha} & \overbrace{\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & & \\ & & 0 \end{array}}^a \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & 0 \end{array} \end{array} \right] \equiv \tilde{V}_- B_a^0 V_-, \quad (2.1.38)$$

где  $a_k$  — двухрядные матрицы

$$a_k = \lambda_k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, p$$

(см. п. 1.3.1). В переменных  $\bar{\varphi}$  уравнения (2.1.29) принимают вид

$$i \bar{B}_a^0 \partial_0 \bar{\varphi} = -i (\bar{B}_a^l \partial_l \bar{\varphi}) + \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}}, \quad \bar{B}_a^\mu = \tilde{V}_- B_a^\mu V_-.$$

При получении этих уравнений мы учли, что  $\tilde{V}_- \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}}$ .

Из структуры матрицы  $\bar{B}_a^0$  видно, что уравнения

$$i (\bar{B}_a^0 \partial_0 \bar{\varphi})_\alpha = -i (\bar{B}_a^l \partial_l \bar{\varphi})_\alpha + \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, m = 2p \quad (2.1.39)$$

представляют собой собственно уравнения поля, а уравнения

$$-i (\bar{B}_a^l \partial_l \bar{\varphi})_s + \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}_s} = 0, \quad s = m + 1, \dots, n, \quad (2.1.40)$$

являются уравнениями связи. Операторы  $\bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, m = 2p$ , представляют собой динамически независимые переменные бозе-поля.

В случае ферми-полей симметричную вещественную матрицу  $B_s^0$  можно диагонализировать с помощью ортогонального преобразования.

$$V_+ = \tilde{V}_+^{-1};$$

$$\tilde{V}_+ B_s^0 V_+ = \bar{B}_s^0 = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} \overbrace{\lambda_1}^{\alpha} & \overbrace{0}^a \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_m & 0 \\ 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{array}} \right\} \alpha \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}} \right\} a \end{array} \end{array} \quad (2.1.41)$$

Поэтому в результате перехода к новым переменным  $\bar{\psi} = \tilde{V}_+ \psi$  уравнения (2.1.30) делятся на собственно уравнения поля

$$i (\bar{B}_s^0 \partial_0 \bar{\psi})_{\alpha} = -i (\bar{B}_s^l \partial_l \bar{\psi})_{\alpha} + \frac{\partial_l U}{\partial \bar{\psi}_{\alpha}}, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (2.1.42)$$

где  $\bar{B}_s^{\mu} = \tilde{V}_+ B_s^{\mu} V_+$ , и уравнения связи

$$-i (\bar{B}_s^l \partial_l \bar{\psi})_a + \frac{\partial_l U}{\partial \bar{\psi}_a} = 0, \quad a = m+1, \dots, n. \quad (2.1.43)$$

Операторы  $\bar{\psi}_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ , представляют собой динамически независимые переменные ферми-поля.

До сих пор мы не использовали требования релятивистской инвариантности лагранжиана. Теперь покажем, что в релятивистски инвариантной теории уравнения связи будут не дифференциальными, а алгебраическими относительно переменных  $\psi_s$ ,  $\psi_a$ ,  $s$ ,  $a = m+1, \dots, n$  (если  $U(\chi)$  представляет собой полином по  $\chi$ ). С этой целью заметим, что формулировка инвариантности лагранжиана квантованных полей относительно преобразований группы Пуанкаре аналогична формулировке инвариантности относительно этой группы лагранжиана классических полей.

Именно при преобразовании полей

$$\chi(x) \rightarrow \chi'(x') = S(a) \chi(x), \quad S^*(a) = S(a), \quad (2.1.44)$$

связанном с пространственно-временным преобразованием

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

(мы учли эрмитовость полей  $\chi(x)$ ), лагранжиан полей  $\mathcal{L}(\chi, \partial_{\mu} \chi)$  не должен изменяться, т. е.

$$\mathcal{L}(\chi(x), \partial_{\mu} \chi(x)) = \mathcal{L}(\chi'(x'), \partial'_{\mu} \chi'(x')). \quad (2.1.44')$$

Из инвариантности части лагранжиана  $\mathcal{L}_0(\chi, \partial_{\mu} \chi)$  (2.1.27) относительно преобразования (2.1.44) так же, как и в классической теории, вытекает, что матрицы  $B^{\mu}$  должны удовлетворять соотношениям

$$\tilde{S}(a) B^{\mu} S(a) = a^{\mu}_{\nu} B^{\nu}. \quad (2.1.45)$$

Инвариантность полного лагранжиана требует, чтобы выполнялось равенство

$$U(\chi(x)) = U(\chi'(x')).$$

В случае свободного поля оператор  $U$  имеет вид (2.1.36). Поэтому матрица  $\mathfrak{E}$  в формуле (2.1.36) должна удовлетворять соотношению

$$\tilde{S}\mathfrak{E}S = \mathfrak{E}. \quad (2.1.46)$$

Так как матрица  $B^\mu$  имеет блочную структуру (2.1.28), то такую же структуру будет иметь и матрица  $S(a)$ :

$$S(a) = \begin{pmatrix} S_-(a) & 0 \\ 0 & S_+(a) \end{pmatrix}.$$

Это значит, что при преобразованиях полной группы Лоренца бозе- и ферми-поля преобразуются независимо друг от друга.

Для бесконечно малых преобразований Лоренца

$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}, \quad S(a) = 1 - \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \quad (2.1.47)$$

и согласно (2.1.45), (2.1.47)

$$B^\mu \Sigma_{\lambda\rho} + \tilde{\Sigma}_{\lambda\rho} B^\mu = i(\delta_\lambda^\mu B_\rho - \delta_\rho^\mu B_\lambda). \quad (2.1.48)$$

Преобразуем уравнения связи (2.1.40), (2.1.43). Из (2.1.48) следует

$$B_k = -i\tilde{\Sigma}_{0k} B^0 - iB^0 \Sigma_{0k}.$$

Поэтому, учитывая структуру матрицы  $\bar{B} = \tilde{V}BV$  (см. (2.1.38), (2.1.41)), находим

$$(\bar{B}_k)_{aj} = -i(\tilde{\Sigma}_{0k} \bar{B}^0)_{aj}, \quad a = m+1, \dots, n,$$

где  $\tilde{\Sigma}_{\lambda\rho} = \tilde{V}\tilde{\Sigma}_{\lambda\rho}V$  и  $V = \begin{pmatrix} V_- & 0 \\ 0 & V_+ \end{pmatrix}$ . Отсюда вытекает, что уравнения связи (2.1.40), (2.1.43) можно представить в виде

$$(\tilde{\Sigma}_{0k}^- \bar{B}^0)_{s\alpha} \partial^k \bar{\varphi}_\alpha = \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}_s}, \quad (2.1.49)$$

$$(\tilde{\Sigma}_{0k}^+ \bar{B}^0)_{a\alpha} \partial^k \bar{\psi}_\alpha = \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}_a}, \quad a = m+1, \dots, n,$$

где  $\Sigma_{\lambda\rho}^-$  и  $\Sigma_{\lambda\rho}^+$  — матрицы  $\Sigma_{\lambda\rho}$  для бозе- и ферми-полей соответственно. Из последних уравнений следует, что уравнения связи не содержат производных от компонент поля  $\varphi_a, \bar{\psi}_a$  ( $a = m+1, \dots, n$ ).

Далее будем считать, что уравнения связи (2.1.49) однозначно определяют все переменные  $\bar{\varphi}_a, \bar{\psi}_a$  через динамически независимые переменные  $\bar{\varphi}_\alpha, \bar{\psi}_\alpha$ . Отметим, однако, что такая ситуация не имеет места для лагранжианов, обладающих калибровочной инвариантностью (см. пп. 1.9.4, 2.4.1). Чтобы в этом случае все переменные поля можно было

выразить через динамически независимые, необходимо нарушить калибровочную инвариантность специальным выбором калибровки.

**2.1.4. Генераторы вариаций поля и принцип стационарного действия.** В классической теории поля мы изучали вариации полей, которые строились с помощью функций поля, и определяли канонические преобразования полей. Теперь мы будем изучать вариации квантованных полей, которые также будут строиться из операторов поля, но не будут, вообще говоря, элементарными вариациями, удовлетворяющими соотношениям (2.1.18), (2.1.19).

Изучение таких более сложных вариаций позволит нам распространить принцип стационарного действия на более широкий класс вариаций и установить перестановочные соотношения для операторов полей.

Переходя к изучению этих вопросов, найдем вначале вариацию действия для произвольных вариаций  $\delta\chi(x)$ , т. е. для вариаций, которые не обязательно удовлетворяют соотношениям (2.1.18), (2.1.19). Операторный интеграл действия будем записывать в виде

$$W = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}(x) \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(x),$$

где  $\mathcal{L}$  определяется формулой (2.1.21).

Учитывая линейность  $\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\xi \chi)$  по второму аргументу, представим  $\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\xi \chi)$  в виде

$$\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\mu \chi) = \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\mu^0 \partial_0 \chi) + \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\mu^k \partial_k \chi).$$

Оператор  $\mathcal{L}_0(\chi, \delta_\mu^0 \partial_0 \chi)$  будем называть кинематической частью лагранжиана  $\mathcal{L}(\chi, \partial_\mu \chi)$ . Учитывая (2.1.21) оператор полного действия  $W$  можно представить в виде

$$W = W_K - \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{H}, \quad (2.1.50)$$

где

$$W_K = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\mu^0 \partial_0 \chi);$$

$$\mathcal{H} = \int d^3x (-\mathcal{L}_0(\chi, \delta_\mu^k \partial_k \chi) + U(\chi)).$$

Оператор  $W_K$  будем называть кинематической частью, а величину  $-\int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{H}$  — динамической частью действия. Оператор  $\mathcal{H}$  будем называть гамильтонианом системы полей (ср. с выражением для гамильтониана в классической теории поля (1.3.18)).

Используя теорему Гаусса (1.1.2), вариацию полного действия (2.1.50) можно записать в виде

$$\delta W = G_1(t_2) - G_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{F}(x), \quad (2.1.51)$$

где

$$\mathcal{F}(x) = \delta \mathcal{L}_0(x, \partial_{\xi} x) - \partial_{\nu} \mathcal{L}_0(x, \delta_{\xi}^{\nu} \delta x) - \delta U;$$

$$G_1(t) = \int d^3x \mathcal{L}_0(x, \delta_{\xi}^0 \delta x)$$

(оператор  $\mathcal{L}_0(x, \delta_{\xi}^{\nu} \delta x)$  получается из  $\mathcal{L}_0(x, \partial_{\xi} x)$  путем замены  $\partial_{\xi} x \rightarrow \delta_{\xi}^{\nu} \delta x$ ). Отметим, что по определению оператор  $\mathcal{F}(x)$  не зависит от производных вариаций поля  $\partial_{\mu} \delta x$ .

Мы будем предполагать, что вариации динамически независимых компонент поля  $\bar{\chi}_{\alpha}(x) \equiv (\bar{\varphi}_{\alpha}, \bar{\psi}_{\alpha})$  являются функционалами динамически независимых компонент поля, относящихся к моменту времени  $t$ :

$$\delta \bar{\chi}_{\alpha}(x, t) = \bar{F}_{\alpha}(x; \bar{\chi}_{\alpha}(x', t)) \quad (2.1.52)$$

(для простоты считаем, что вариации  $\delta \bar{\chi}_{\alpha}$  зависят от переменной  $t$  не явно, а только через посредство операторов поля). Так как классические ферми-поля представляют собой антикоммутирующие «функции», то в качестве основных элементов, из которых строятся вариации (2.1.52), кроме операторов поля и  $c$ -числовых функций будем допускать «функции», антикоммутирующие с ферми-полями и коммутирующие с бозе-полями. При этом вариации ферми-полей должны содержать нечетное число антикоммутирующих элементов, т. е. антикоммутирующих функций и операторов ферми-полей, а вариации бозе-полей — четное число антикоммутирующих элементов.

Вариации компонент поля  $\delta \bar{\chi}_{\alpha}$  ( $\alpha = m + 1, \dots, n$ ) можно найти с помощью (2.1.52) и уравнений связи (2.1.49). При этом вариации всех компонент поля будут некоторыми функционалами  $\bar{\chi}_{\alpha}$  и функциями  $x_k$ :

$$\delta \chi(x) = F(x; \bar{\chi}_{\alpha}(x', t)). \quad (2.1.52')$$

Так как в квантовой теории вариации  $\delta \chi(x)$  уже не обладают перестановочными свойствами (2.1.18), (2.1.19) элементарных вариаций, то в отличие от классической теории поля принцип стационарного действия

$$\int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{F}(x) = 0 \quad (2.1.53)$$

не будет выполняться автоматически лишь вследствие уравнений поля (2.1.37).

Покажем, что класс вариаций (2.1.52), к которому относится принцип стационарного действия, определяется требованием инвариантности кинематической части лагранжиана [8]

$$\delta \mathcal{L}_0(x, \delta_{\xi}^0 \partial_0 x) = \partial_{\mu} f^{\mu}(x, \delta x), \quad (2.1.54)$$

где  $f^{\mu}(x, \delta x)$  — некоторый оператор, зависящий от операторов поля и их вариаций. Отметим, что наличие в (2.1.54) оператора  $f^{\mu}$  связано с тем, что лагранжиан в квантовой теории так же, как и в классической, определяется с точностью до дивергенции произвольного вектора, и поэтому требование инвариантности кинематической

части лагранжиана (в котором оператор  $\mathcal{L}_0$  фиксирован формулой (2.1.27)) должно формулироваться соотношением (2.1.54).

Согласно (2.1.50) вариация кинематической части действия определяется формулой

$$\begin{aligned} \delta W_K &= G_2(t_1) - G_2(t_2), \\ G_2(t) &= - \int d^3x f^0(x). \end{aligned} \quad (2.1.55)$$

Вариации (2.1.52), удовлетворяющие соотношению (2.1.54) (либо (2.1.55)), будем называть допустимыми (ср. с § 1.3).

Вариация действия, задаваемая формулой (2.1.51), справедлива для произвольных вариаций  $\delta\chi$ . Вычислим  $\delta W$  на классе допустимых вариаций.

Согласно (2.1.50) вариацию действия  $W$  на классе допустимых вариаций можно представить в виде

$$\delta W = G_2(t_1) - G_2(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \mathcal{H}. \quad (2.1.56)$$

Поэтому, используя общее выражение (2.1.51) для вариации действия  $W$ , получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{F}(x) = G(t_1) - G(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \mathcal{H},$$

где

$$G(t) = G_1(t) + G_2(t). \quad (2.1.57)$$

Отсюда видно, что принцип стационарного действия на классе допустимых вариаций будет выполняться в том и только в том случае, если

$$\frac{\partial G(t)}{\partial t} + \delta \mathcal{H} = 0. \quad (2.1.58)$$

Вспомним, что в квантовой теории уравнения движения должны иметь форму

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = i [\mathcal{H}, A(t)]. \quad (2.1.59)$$

Так как  $G(t)$  согласно (2.1.57), (2.1.52) зависит от  $t$  только через посредство операторов  $\bar{\chi}_\alpha(x)$ , то из условия совместности (2.1.58) с (2.1.59) следует

$$\delta \mathcal{H} = i [G(t), \mathcal{H}].$$

Поэтому если мы будем считать  $G(t)$  генератором допустимых вариаций, т. е. считать, что

$$\delta \bar{\chi}_\alpha(x) = i [G(t), \bar{\chi}_\alpha(x)], \quad (2.1.60)$$

то принцип стационарного действия (2.1.53) будет выполняться, если уравнения поля (2.1.39), (2.1.42) в форме Лагранжа можно представить в форме коммутаторов (2.1.59)

$$\partial_0 \chi(x) = i [\mathcal{H}, \chi(x)]. \quad (2.1.61)$$



Таким образом, мы видим, что принцип стационарного действия должен относиться к классу допустимых вариаций (2.1.52), (2.1.55) и что оператор  $G(t)$  должен трактоваться как генератор допустимых вариаций (ср. с § 1.3 для классической теории).

Далее покажем, что элементарные вариации (в смысле (2.1.18), (2.1.19)) являются допустимыми и построим для этих вариаций оператор  $G(t)$ . Рассматривая этот оператор как генератор элементарных допустимых вариаций, найдем перестановочные соотношения для операторов полей. После этого докажем совместность полученных перестановочных соотношений с трактовкой  $G(t)$  как генераторов не только элементарных вариаций, но и всех допустимых вариаций, а также убедимся в совместности уравнений поля в форме (2.1.61) и в форме (2.1.39), (2.1.42).

**2.1.5. Генераторы элементарных вариаций и перестановочные соотношения.** Пусть вариации  $\delta\bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\delta\bar{\psi}_\alpha$  динамически независимых компонент поля являются элементарными, т. е. не зависят от операторов поля  $\varphi$  и  $\psi$ , и кроме того вариация  $\delta\bar{\varphi}_\alpha$  коммутирует с полями  $\varphi$ ,  $\psi$ , а вариация  $\delta\bar{\psi}_\alpha$  коммутирует с полем  $\varphi$  и антикоммутирует с полем  $\psi$ .

Легко видеть, что в этом случае вариации динамически независимых компонент поля являются допустимыми, т. е. оставляют инвариантной кинематическую часть действия  $W_K$ . Действительно, согласно (2.1.25), (2.1.26) оператор  $W_K$  можно представить в виде

$$W_K = -\frac{i}{4} \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \{(\partial_0\bar{\varphi}, \bar{B}_a^0\bar{\varphi}) + |\partial_0\bar{\psi}, \bar{B}_s^0\bar{\psi}|\} \quad (2.1.62)$$

(в силу структуры (2.1.38), (2.1.41) матриц  $\bar{B}_a^0$ ,  $\bar{B}_s^0$  в оператор  $W_K$  входят только динамически независимые компоненты поля). Поэтому для элементарных вариаций  $\delta\bar{\chi}_\alpha(x)$  вариация  $\delta W_K$  определяется формулой

$$\delta W_K = G_2(t_1) - G_2(t_2),$$

$$G_2(t) = \frac{i}{2} \int d^3x (\bar{\varphi}\bar{B}_a^0\delta\bar{\varphi} + \bar{\psi}\bar{B}_s^0\delta\bar{\psi})$$

(мы учли, что согласно (2.1.52) величины  $\delta\bar{\varphi}$ ,  $\delta\bar{\psi}$  не зависят от  $t$ ). Отсюда следует, что вариации  $\delta\bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\delta\bar{\psi}_\alpha$  являются допустимыми, если  $\delta\bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\delta\bar{\psi}_\alpha$  — элементарные вариации, не зависящие от времени  $t$ .

Вместе с тем согласно (2.1.51) оператор  $G_1(t)$  определяется формулой

$$G_1(t) = -\frac{i}{2} \int d^3x (\delta\bar{\varphi}\bar{B}_a^0\bar{\varphi} + \delta\bar{\psi}\bar{B}_s^0\bar{\psi}).$$

Поэтому генератор  $G(t)$  рассматриваемых вариаций  $\delta\bar{\varphi}$ ,  $\delta\bar{\psi}$  можно представить в виде (см. (2.1.57))

$$G(t) = i \int d^3x (\bar{\varphi}\bar{B}_a^0\delta\bar{\varphi} + \bar{\psi}\bar{B}_s^0\delta\bar{\psi}), \quad (2.1.63)$$

причем в соответствии с (2.1.60)

$$\delta\bar{\varphi}_\alpha(x) = i[G(t), \bar{\varphi}_\alpha(x)], \quad \delta\bar{\psi}_\alpha(x) = i[G(t), \bar{\psi}_\alpha(x)].$$

Так как элементарные вариации  $\delta\bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\delta\bar{\psi}_\alpha$  являются произвольными функциями  $x$ , то из этих формул немедленно следуют перестановочные соотношения для динамически независимых компонент полей  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\psi}$ :

$$\begin{aligned} [(\bar{B}_a^0\bar{\varphi}(x'))_B, \bar{\varphi}_\alpha(x)]_{t=t'} &= \delta_{\alpha B}\delta(x-x'), \\ \{(\bar{B}_s^0\bar{\psi}(x'))_B, \bar{\psi}_\alpha(x)\}_{t=t'} &= \delta_{\alpha B}\delta(x-x'), \\ [(\bar{B}_s^0\bar{\psi}(x'))_B, \bar{\varphi}_\alpha(x)]_{t=t'} &= [(\bar{B}_a^0\bar{\varphi}(x'))_B, \bar{\psi}_\alpha(x)]_{t=t'} = 0, \end{aligned}$$

где  $\delta(x-x')$  — 3-мерная  $\delta$ -функция. Эти формулы можно переписать в виде

$$\begin{aligned} [(\bar{B}_a^0\bar{\varphi}(x'))_i, (\bar{B}_a^0\bar{\varphi}(x))_j]_{t=t'} &= -(\bar{B}_a^0)_{ij}\delta(x-x'), \\ \{(\bar{B}_s^0\bar{\psi}(x'))_i, (\bar{B}_s^0\bar{\psi}(x))_j\}_{t=t'} &= (\bar{B}_s^0)_{ij}\delta(x-x'), \\ [(\bar{B}_s^0\bar{\psi}(x'))_i, (\bar{B}_a^0\bar{\varphi}(x))_j]_{t=t'} &= 0. \end{aligned}$$

В таком виде согласно (2.1.38), (2.1.42) они справедливы не только для динамически независимых компонент, но и для всех компонент поля. Замечая, что  $\bar{\chi} = \tilde{V}\chi$ ,  $\bar{B} = \tilde{V}BV$ , можем записать перестановочные соотношения для исходных операторов поля  $\chi = (\varphi, \psi)$ :

$$\begin{aligned} [(B_a^0\varphi(x'))_i, (B_a^0\varphi(x))_j]_{t=t'} &= -(B_a^0)_{ij}\delta(x-x'), \\ \{(B_s^0\psi(x'))_i, (B_s^0\psi(x))_j\}_{t=t'} &= (B_s^0)_{ij}\delta(x-x'), \\ [(B_s^0\psi(x'))_i, (B_a^0\varphi(x))_j]_{t=t'} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.64)$$

Данные соотношения можно записать в более компактной форме, которая будет содержать коммутаторы как для ферми-, так и для бозе-полей. Для этого, вводя параметр  $\xi$ , который антикоммутирует с ферми-полями  $\{\xi, \psi\} = \neq 0$  и коммутирует с бозе-полями  $[\xi, \varphi] = 0$ , найдем

$$[(B^0\chi(x))_i, (\mathcal{D}B^0\chi(x'))_j]_{t=t'} = -(B^0\mathcal{D})_{ij}\delta(x-x'), \quad (2.1.65)$$

где  $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$  — матрица, действующая на компоненты  $\varphi$  и  $\psi$  суммарного поля  $\chi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ , а матрица  $B^0$  определяется формулой (2.1.28).

Из формулы  $\{(B_s^0\psi(x), B_s^0\psi(x'))\}_{t=t'} = B_s^0\delta(x-x')$  видно, что матрица  $B_s^0$  должна быть положительно определенной, если метрика в пространстве ферми-полей является дефинитной (это значит, что для любых векторов состояний справедливо неравенство  $(\Phi, \Phi) > 0$ ). Перестановочные соотношения (2.1.64) называются одновременными перестановочными соотношениями.

Основываясь на соотношениях (2.1.65), покажем, что формула (2.1.60) справедлива для всех допустимых вариаций, оставляющих инвариантной кинематическую часть действия (а не только для

элементарных вариаций, для которых формула (2.1.60) служила основой построения перестановочных соотношений).

Для этого преобразуем условие инвариантности кинематической части действия.

Из определения (2.1.51) оператора  $G_1(t)$  следует, что вариацию кинематической части действия можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta W_K &= G_1(t_2) - G_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{F}_K(x), \\ \mathcal{F}_K(x) &= \delta \mathcal{L}_0(x, \delta_\xi^0 \partial_0 \chi) - \partial_0 \mathcal{L}_0(x, \delta_\xi^0 \delta \chi) = \\ &= \frac{i}{2} (\delta \chi B^0 \partial_0 \chi - \partial_0 \chi B^0 \delta \chi) \end{aligned} \quad (2.1.66)$$

(мы учли при этом выражение (2.1.27) для  $\mathcal{L}_0$ ). На классе допустимых вариаций формула (2.1.66) согласно (2.1.55), (2.1.57) принимает вид

$$G(t_2) - G(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{F}_K(x) = 0.$$

Это соотношение будет выполняться в том и только в том случае, если

$$\frac{\partial G(t)}{\partial t} + \int d^3x \mathcal{F}_K(x) = 0. \quad (2.1.67)$$

Так как  $\delta \chi(x) \equiv F(x; \bar{\chi}(x', t))$  представляет собой функционал динамически независимых переменных поля  $\bar{\chi}_\alpha(x)$ , то  $G(t)$  также будет функционалом  $\bar{\chi}_\alpha(x)$ . Поэтому  $\partial G(t)/\partial t$  так же, как и  $\int d^3x \mathcal{F}_K(x)$ , представляет собой линейный функционал  $\bar{\chi}_\alpha \equiv \partial_0 \bar{\chi}_\alpha(x)$ . Подчеркнем, что допустимые вариации  $\delta \bar{\chi}_\alpha$  должны быть такими, чтобы условие инвариантности кинематической части действия, или, что эквивалентно, соотношение (2.1.67) выполнялось при произвольной зависимости  $\bar{\chi}_\alpha$  от времени  $t$  (так как кинематическая часть действия не зависит от структуры гамильтониана  $\mathcal{H}$ ).

Выберем в качестве  $\bar{\chi}_\alpha$  величины

$$\bar{\chi}_\alpha(x) = i [H(t), \bar{\chi}_\alpha(x)],$$

где  $H(t)$  — эрмитов оператор,

$$H(t) = \int d^3x h(x) g(x), \quad h(x) = i \delta^* \bar{\chi}(x) \bar{B}^0 \bar{\chi}(x), \quad (2.1.68)$$

и  $g(x)$  — произвольная функция  $x$  ( $\delta^*$  служит для обозначения элементарных вариаций  $\delta^* \bar{\chi}$ ). Согласно перестановочным соотношениям (2.1.65)  $\bar{B}^0 \bar{\mathcal{D}} \bar{\chi}(x) = -\bar{B} \bar{\mathcal{D}} \delta^* \bar{\chi}(x) g(x)$  и, следовательно,

$$\bar{\chi}_\alpha(x) = -g(x) \delta^* \bar{\chi}_\alpha(x).$$

При таком выборе  $\bar{\chi}_\mu$  оператор  $\frac{\partial G}{\partial t}$  можно представить в виде

$$\frac{\partial G}{\partial t} = i [H(t), G(t)].$$

Найдем интеграл  $\int d^3x \mathcal{F}_K(x)$ , входящий в (2.1.67). Согласно (2.1.66) при сделанном выборе  $\bar{\chi}_\alpha$  находим

$$\int d^3x \mathcal{F}_K(x) = i \int d^3x g(x) \varepsilon^* \bar{\chi}(x, t) \bar{B}^0 \delta \bar{\chi}(x, t),$$

и, следовательно, соотношение (2.1.67), вытекающее из требования инвариантности кинематической части действия, можно представить в виде

$$i [G(t), h(x)] = i \delta^* \bar{\chi}(x) \bar{B}^0 \delta \bar{\chi}(x)$$

(мы учли произвол в выборе функции  $g(x)$ ). Подставляя в эту формулу выражение (2.1.68) для оператора  $h(x)$  и замечая, что элементарные вариации  $\delta^* \bar{\varphi}$  коммутируют с  $\delta \bar{\psi}$ ,  $G(t)$ , а вариации  $\delta^* \bar{\psi}$  коммутируют с  $\delta \bar{\varphi}$ ,  $G(t)$  и антикоммутируют с  $\delta \bar{\psi}$ , получаем

$$\delta^* \bar{\chi}_\alpha(x) [G(t), \bar{B}_{\alpha\beta}^0 \bar{\chi}_\beta(x)] = \delta^* \bar{\chi}_\beta(x) \bar{B}_{\alpha\beta}^0 \delta \bar{\chi}_\beta(x),$$

откуда вследствие произвольности  $\delta^* \bar{\chi}_\alpha$  вытекает формула (2.1.60) для динамически независимых компонент поля. Учтывая далее, что вариации  $\delta \bar{\chi}_\alpha(x)$  ( $\alpha = m+1, \dots, n$ ) выражаются из уравнений связи (2.1.49) через динамически независимые переменные  $\bar{\chi}_\alpha$  и их пространственные производные  $\partial_k \bar{\chi}_\alpha$ , получаем формулу (2.1.60) для исходных компонент поля  $\chi$ :

$$\delta \chi(x) = i [G(t), \chi(x)] \quad (2.1.69)$$

(операция варьирования  $\delta \dots$  и операция коммутирования  $i [G, \dots]$  алгебраически эквивалентны).

Покажем, наконец, что уравнения поля в форме Лагранжа (2.1.39), (2.1.42) можно представить в форме коммутаторов (2.1.61). Найдем с этой целью коммутатор гамильтониана  $\mathcal{H}$  с динамически независимыми переменными  $\bar{\chi}_\alpha(x) \equiv (\bar{\varphi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\alpha(x))$ .

Так как коммутатор динамически независимых компонент бозе-полей и антикоммутатор динамически независимых компонент ферми-полей представляют собой  $c$ -числа, то справедлива формула

$$i [\mathcal{H}, \bar{B}^0 \bar{\chi}(x)] = \int d^3x' \left( i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \bar{\varphi}_\alpha(x')} [\bar{\varphi}_\alpha(x'), \bar{B}^0 \bar{\chi}(x)]_{t'=t} + \right. \\ \left. + i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \bar{\psi}_\alpha(x')} [\bar{\psi}_\alpha(x'), \bar{B}^0 \bar{\chi}(x)]_{t'=t} \right).$$

Поэтому из перестановочных соотношений (2.1.64) следует

$$i[\mathcal{H}, (\bar{B}_a^0 \bar{\varphi}(x))_\alpha] = -i \frac{\alpha \mathcal{H}}{\delta \bar{\varphi}_\alpha(x)},$$

$$i[\mathcal{H}, (\bar{B}_s^0 \bar{\psi}(x))_\alpha] = i \frac{\delta_r \mathcal{H}}{\delta \bar{\psi}_\alpha(x)}.$$
(2.1.70)

Отметим, что гамильтониан системы (2.1.50) зависит как от динамически независимых переменных  $\bar{\chi}_\alpha$ , так и от переменных  $\bar{\chi}_a$  ( $a = m + 1, \dots, n$ ). Переменные  $\bar{\chi}_a$  можно выразить с помощью уравнений связи (2.1.49) через переменные  $\bar{\chi}_\alpha$ ,  $\bar{\chi}_a = \bar{\chi}_a(\bar{\chi}_\alpha)$ . Ясно, что в формулах (2.1.70) под функциональными производными по динамически независимым компонентам поля должны пониматься полные функциональные производные, связанные с зависимостью гамильтониана  $\mathcal{H}$  от переменных  $\bar{\chi}_\alpha$  как непосредственно, так и через посредство  $\bar{\chi}_a$ .

Гамильтониан  $\mathcal{H}$  согласно (2.1.25), (2.1.26) можно представить в терминах операторов  $\bar{\chi} = \bar{V}\chi$ :

$$\mathcal{H}^* = \int d^3x \left( \frac{i}{4} |\partial_k \bar{\psi}, \bar{B}_s^k \bar{\psi}| + \frac{i}{4} \{ \partial_k \bar{\varphi}, \bar{B}_a^k \bar{\varphi} \} + U(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) \right).$$

Считая здесь все компоненты поля независимыми, получаем

$$\frac{\delta' \mathcal{H}}{\delta \bar{\varphi}(x)} = -i (\bar{B}_a^k \partial_k \bar{\varphi}) + \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}},$$

$$\frac{\delta_r \mathcal{H}}{\delta \bar{\psi}(x)} = i (\bar{B}_s^k \partial_k \bar{\psi}) + \frac{\partial_r U}{\partial \bar{\psi}}.$$
(2.1.71)

Из этих формул видно, что уравнения связи (2.1.40), (2.1.43) можно переписать в виде

$$\frac{\delta' \mathcal{H}}{\delta \bar{\varphi}_a(x)} = 0, \quad \frac{\delta_r \mathcal{H}}{\delta \bar{\psi}_a(x)} = 0, \quad a = m + 1, \dots, n.$$
(2.1.72)

Поэтому полные функциональные производные

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \bar{\varphi}_\alpha(x)} = \frac{\delta' \mathcal{H}}{\delta \bar{\varphi}_\alpha(x)} + \int d^3x' \frac{\delta' \mathcal{H}}{\delta \bar{\chi}_a(x')} \frac{\delta \bar{\chi}_a(x')}{\delta \bar{\varphi}_\alpha(x)},$$

$$\frac{\delta_r \mathcal{H}}{\delta \bar{\psi}_\alpha(x)} = \frac{\delta_r \mathcal{H}}{\delta \bar{\psi}_\alpha(x)} + \int d^3x' \frac{\delta_r \mathcal{H}}{\delta \bar{\chi}_a(x')} \frac{\delta \bar{\chi}_a(x')}{\delta \bar{\psi}_\alpha(x)}$$

вследствие уравнений связи будут совпадать с частными производными:

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \bar{\varphi}_\alpha(x)} = \frac{\delta' \mathcal{H}}{\delta \bar{\varphi}_\alpha(x)}, \quad \frac{\delta_r \mathcal{H}}{\delta \bar{\psi}_\alpha(x)} = \frac{\delta_r \mathcal{H}}{\delta \bar{\psi}_\alpha(x)}.$$
(2.1.73)

Отметим, что формулы (2.1.72) справедливы, если величины  $\partial \bar{\chi}_a / \partial \bar{\chi}_\alpha$  коммутируют со всеми операторами, содержащимися в  $\mathcal{H}$ ; это обязательно выполняется, если операторы  $\bar{\chi}_a$  связаны с  $\bar{\chi}_\alpha$  линейными соот-

ношениями. Такая ситуация обычно возникает, когда уравнения связи получаются в результате понижения порядка уравнений поля, т. е. в результате перехода от уравнений второго порядка к уравнениям первого порядка, а также в теории свободных полей.

Таким образом, видим, что согласно (2.1.71), (2.1.73) уравнения (2.1.70) благодаря уравнениям связи (2.1.72) можно переписать в виде

$$i[\mathcal{H}, (\bar{B}_a^0 \bar{\varphi})_\alpha] = -(\bar{B}_a^k \partial_k \bar{\varphi})_\alpha + \frac{\partial U}{\partial \varphi_\alpha},$$

$$i[\mathcal{H}, (\bar{B}_s^0 \bar{\psi})_\alpha] = -(\bar{B}_s^k \partial_k \bar{\psi})_\alpha + \frac{\partial U}{\partial \psi_\alpha}.$$

Поэтому уравнения (2.1.61) для динамически независимых компонент поля  $\bar{\chi}_\alpha$  эквивалентны уравнениям (2.1.39), (2.1.42). Так как операторы  $\bar{\chi}_a = \bar{\chi}_a(\bar{\chi}_\alpha)$  не зависят явно от  $t$ , то из справедливости (2.1.61) для динамически независимых компонент следует справедливость уравнений (2.1.61) для всех компонент поля. Подчеркнем, что эквивалентность уравнений поля в формах (2.1.39) и (2.1.42), (2.1.61) связана с тем, что элементарные вариации динамически независимых компонент поля являются допустимыми, причем при линейной связи между компонентами  $\bar{\chi}_a$  и  $\bar{\chi}_\alpha$  соответствующие вариации  $\delta \chi$  всех компонент поля  $\chi$  будут удовлетворять соотношениям (2.1.18), (2.1.19), которые являлись основой получения уравнений поля в п. 2.1.2.

**2.1.6. Квантование уравнений поля второго порядка.** Выше изложена теория квантования уравнений поля первого порядка, когда лагранжиан поля линейен по первым производным. Уравнениями первого порядка описываются все фермионы. Бозоны могут описываться, как мы видели в классической теории, уравнениями как первого, так и второго порядка. Поэтому представляет интерес рассмотреть вопрос о квантовании непосредственно уравнений поля второго порядка. Эти вопросы мы здесь и рассмотрим.

Классический лагранжиан, приводящий к уравнениям поля второго порядка, должен быть квадратичен относительно производных, т. е.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} \{ \varphi, A^\mu \partial_\mu \varphi \} - W(\varphi), \quad (2.1.74)$$

где  $\varphi$  — вещественное (в принципе многокомпонентное) поле;  $A^\mu$  — постоянные вещественные антисимметричные матрицы (симметричные матрицы  $A^\mu$  приводили бы к появлению члена, имеющего вид 4-дивергенции), действующие на индекс поля;  $W(\varphi)$  — некоторая локальная функция  $\varphi$ . Эта функция Лагранжа приводит к уравнениям поля второго порядка

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + A^\mu \partial_\mu \varphi + \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi} = 0.$$

Если мы введем дополнительные компоненты поля  $\varphi_\mu \equiv \partial_\mu \varphi$ , то получим уравнения поля первого порядка

$$\partial^\mu \varphi_\mu + A^\mu \varphi_\mu + \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi} = 0, \quad \partial_\mu \varphi = \varphi_\mu.$$

Эти уравнения можно получить исходя из лагранжиана, линейного по первым производным поля:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} \{ \varphi^\mu, \partial_\mu \varphi \} + \frac{1}{2} \{ \varphi, A^\mu \partial_\mu \varphi \} - U(\varphi, \varphi_\mu), \\ W(\varphi, \varphi_\mu) &= \frac{1}{2} \varphi^\mu \varphi_\mu + W(\varphi). \end{aligned} \quad (2.1.75)$$

Данный лагранжиан при  $\varphi_\mu = \partial_\mu \varphi$  переходит в лагранжиан (2.1.74).

Используя (2.1.75), мы можем на основе изложенного выше метода произвести квантование полей  $\varphi, \varphi_\mu$ . Кинематическая часть лагранжиана  $\mathcal{L}'$  определяется, очевидно, формулой

$$\mathcal{L}'_K = \frac{1}{2} \{ \varphi^0, \partial_0 \varphi \} + \frac{1}{2} \{ \varphi, A^0 \partial_0 \varphi \},$$

и поэтому согласно общей схеме (см. (2.1.51), (2.1.55)) генератор элементарных вариаций динамически независимых компонент поля  $\delta\varphi, \delta\varphi_0$  будет определяться формулой

$$G = G_1 + G_2,$$

$$G_1 = \int d^3x (\delta\varphi(x) \varphi_0(x) + \varphi(x) A^0 \delta\varphi(x)),$$

$$G_2 = \int d^3x (\delta\varphi_0(x) \varphi(x) + \delta\varphi(x) A^0 \varphi(x)).$$

Имея выражение для генератора элементарных вариаций

$$G = \int d^3x (-\delta\varphi_0(x) \varphi(x) + \delta\varphi(x) [\varphi_0(x) - 2A^0 \varphi(x)])$$

исходя из формул

$$i[G, \varphi_0(x)] = \delta\varphi_0(x), \quad i[G, \varphi(x)] = \delta\varphi(x)$$

находим перестановочные соотношения для компонент поля

$$i[\varphi_\alpha(x'), \varphi_\beta(x)]_{t=t'} = i[\varphi_\alpha^0(x') - 2A_{\alpha\beta}^0 \varphi_\beta(x'), \varphi_\lambda^0(x)]_{t=t'} = 0,$$

$$i[\varphi_\alpha(x'), \varphi_\beta^0(x)]_{t=t'} = -\delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

$$i[(\varphi^0 - 2A^0 \varphi)_\alpha(x'), \varphi_\beta(x)]_{t=t'} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

которые можно переписать в виде

$$[\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')]_{t=t'} = 0, \quad [\varphi_\alpha(x'), \varphi_\beta^0(x)]_{t=t'} = i\delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

$$[\varphi_\alpha^0(x'), \varphi_\beta^0(x)]_{t=t'} = 2iA_{\alpha\beta}^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.1.76)$$

Этим соотношениям можно придать иную форму, если ввести импульс  $\pi_\alpha(x)$ , сопряженный с полем  $\varphi_\alpha(x)$  для исходного лагранжиана  $\mathcal{L}$ :

$$\pi_\alpha(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi_\alpha(x)} = \partial_0 \varphi_\alpha(x) - A_{\alpha\beta}^0 \varphi_\beta(x).$$

Тогда перестановочные соотношения (2.1.76) можно представить в виде

$$\begin{aligned} [\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')]_{t=t'} &= [\pi_\alpha(x), \pi_\beta(x')]_{t=t'} = 0, \\ [\pi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')]_{t=t'} &= -i\delta_{\alpha\beta}\delta(x-x'). \end{aligned} \quad (2.1.77)$$

Эта форма перестановочных соотношений называется канонической, так как она соответствует обобщению на непрерывный случай известных условий квантования в квантовой механике

$$\begin{aligned} [q_i(t), q_j(t')]_{t=t'} &= [p_i(t), p_j(t')]_{t=t'} = 0, \\ [q_i(t), p_j(t')]_{t=t'} &= i\delta_{ij}, \end{aligned}$$

где  $q_i$  — обобщенные координаты и  $p_i \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$  — соответствующие им обобщенные импульсы. Подчеркнем, что каноническая форма квантования справедлива только для бозонных, а не фермионных полей, так как перестановочные соотношения для полей  $\varphi$  содержали коммутаторы (это ограничение, однако, легко снять, рассматривая квантовую механику частиц, описываемую не переменными  $p, q$ , а грассмановыми переменными  $\chi$ ).

Кроме того, при использовании линейного по производным лагранжиана следует проявлять осторожность при нахождении обобщенного импульса. Так, классический лагранжиан  $\mathcal{L}(p, \dot{q}) = p\dot{q} - \mathcal{H}(p, q)$  приводит к правильному выражению для обобщенного импульса, а эквивалентный лагранжиан  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(p\dot{q} - \dot{q}p) - \mathcal{H}(p, q)$  — к неправильному. Это связано с тем, что при определении обобщенного импульса необходимо пользоваться такой формой лагранжиана, для которой внеинтегральные члены, появляющиеся в результате варьирования действия, можно отбросить (величины  $\delta q(t)$  могут обращаться в нуль одновременно при  $t = t_1$  и  $t = t_2$ ; пара же величин  $\delta q(t), \delta p(t)$  при этих условиях не может быть одновременно обращена в нуль).

## § 2.2. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ ПОЛЕЙ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

**2.2.1. Внутренние и пространственные симметрии и связанные с ними законы сохранения.** В классической теории мы видели, что с инвариантностью действия относительно различных преобразований функций поля связаны определенные законы сохранения. Аналогичная ситуация имеет место и в квантовой теории.

Действительно, рассмотрим вариации полей (2.1.52), которые оставляют инвариантной не только кинематическую часть действия, но и полное действие

$$\delta W = G_2(t_1) - G_2(t_2)$$

( $G_2(t)$  — функционал полей  $\chi(x', t)$ ;  $t$  — фиксировано; напомним, что  $G_2 \neq 0$  в том случае, если при преобразованиях симметрии лагранжиан получает добавку, равную 4-дивергенции некоторого векто-



ра). Тогда согласно (2.1.50), (2.1.55) будет справедливо соотношение

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \delta \mathcal{H} = 0. \quad (2.2.1)$$

Вместе с тем, так как оператор  $G(t) = G_1(t) + G_2(t)$  является генератором допустимых вариаций, то  $\delta \mathcal{H} = [G(t), \mathcal{H}]$ . Поэтому формула (2.2.1) эквивалентна соотношению

$$[G(t), \mathcal{H}] = 0. \quad (2.2.2)$$

Мы видим, что если вариации  $\delta \mathcal{X}(x)$  оставляют инвариантным полный интеграл действия, то генератор этих вариаций  $G(t) = G_1(t) + G_2(t)$  не зависит от времени  $t$ , т. е. оператор  $G$  представляет собой интеграл движения. В классической теории мы рассматривали преобразования внутренней симметрии (1.1.18), оставляющие инвариантным полный интеграл действия. Переходя к рассмотрению преобразований внутренней симметрии в квантовом случае, отметим, что вариации

$$\delta \mathcal{X}(x) = -i \varepsilon^a(\mathbf{x}) T_a \mathcal{X}(x) \quad (2.2.3)$$

(ср. с формулой (1.1.31)) являются допустимыми вариациями, если матрицы  $T_a$  удовлетворяют соотношениям

$$B^0 T_a + \tilde{T}_a B^0 = 0, \quad T_a = -T_a^*. \quad (2.2.4)$$

Эти допустимые вариации характеризуются тем, что для них  $\delta W_K = 0$ ,  $G_2 = 0$  (см. (2.1.27)). Бесконечно малые вещественные параметры  $\varepsilon^a(\mathbf{x})$  могут быть произвольными функциями «пространственных» координат.

Генераторами преобразований (2.2.3) согласно (2.1.51) являются операторы

$$G(t) = \int d^3x \mathcal{L}_0(\mathcal{X}, \delta_{\xi}^0 \mathcal{X}).$$

Поэтому, используя явный вид вариаций  $\delta \mathcal{X}(x)$ , получаем

$$G(t) = \int d^3x \varepsilon^a(\mathbf{x}) \mathcal{J}_a^0(x), \quad (2.2.5)$$

$$\mathcal{J}_a^\mu(x) = -i \mathcal{L}_0(\mathcal{X}, \delta_{\xi}^\mu T_a \mathcal{X}).$$

Из формулы (2.1.69) для вариаций (2.2.3)

$$i [G(t), \mathcal{X}(x)] = -i \varepsilon^a(\mathbf{x}) T_a \mathcal{X}(x)$$

следуют перестановочные соотношения между  $\mathcal{J}_a^0(x')$  и  $\mathcal{X}(x)$ :

$$[\mathcal{J}_a^0(x'), \mathcal{X}(x)]_{t=t'} = -T_a \mathcal{X}(x) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.2.6)$$

Пусть теперь при  $\varepsilon^a = \text{const}$  преобразования (2.2.3) являются преобразованиями внутренней симметрии, т. е. они оставляют инвариантным лагранжиан  $\mathcal{L}$  и, следовательно, полное действие  $W$ . Это означает, что должны быть справедливы равенства

$$\mathcal{L}_0(T_a \mathcal{X}, \delta_{\xi}^{\nu} \mathcal{X}) + \mathcal{L}_0(\mathcal{X}, \delta_{\xi}^{\nu} \partial_{\nu} T_a \mathcal{X}) = 0, \quad \delta U = 0. \quad (2.2.7)$$

Из первого уравнения следует, что матрицы  $T_a$  должны теперь удовлетворять более общим, чем (2.2.4), соотношениям

$$B^\mu T_a + \tilde{T}_a B^\mu = 0. \quad (2.2.4')$$

В этом случае согласно (2.2.2) операторы

$$Q_a = \int d^3x \mathcal{F}_a^0(x)$$

(они называются обобщенными зарядами, соответствующими обобщенным токам  $\mathcal{F}_a^\mu$ ) будут интегралами движения.

Покажем, что операторы (2.2.5)  $\mathcal{F}_a^\mu$  удовлетворяют дифференциальным законам сохранения

$$\partial_\mu \mathcal{F}_a^\mu = 0. \quad (2.2.8)$$

С этой целью снова вернемся к преобразованиям (2.2.3), в которых  $\varepsilon^a$  являются произвольными функциями  $x$ , а матрицы  $T_a$  соответствуют преобразованиям внутренней симметрии. Так как  $U$  является локальной функцией полевых операторов, не содержащей производных  $\partial_\mu \chi$ , то и для преобразований (2.2.3) (с зависящими от  $x$  функциями  $\varepsilon^a$ ) будет справедливо соотношение  $\delta U = 0$ .

Отметим далее, что для допустимых вариаций справедлив принцип стационарного действия

$$\int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{F}(x) = 0, \quad (2.2.9)$$

где согласно (2.1.51)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= \delta \mathcal{L}_0(\chi, \partial_\xi \chi) - \partial_\nu \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^\nu \delta \chi) - \delta U = \\ &= -i\varepsilon^a(x) \{ \mathcal{L}_0(T_a \chi, \delta_\xi^\nu \partial_\nu \chi) - \mathcal{L}_0(\partial_\nu \chi, \delta_\xi^\nu T_a \chi) \}, \end{aligned}$$

или с использованием (2.2.7) и определения тока  $\mathcal{F}_a^\nu$  (см. (2.2.5))

$$\mathcal{F}(x) = -\varepsilon^a(x) \partial_\nu \mathcal{F}_a^\nu(x).$$

Поэтому вследствие произвольности функций  $\varepsilon^a(x)$  и пределов интегрирования  $t_1$  и  $t_2$  в (2.2.9) из принципа стационарного действия (2.2.9) мы получим дифференциальный закон сохранения (2.2.8).

Рассмотрим преобразования полей, связанные с пространственными локальными поворотами и смещениями координат.

Легко видеть, что кинематическая часть действия согласно (2.1.50) инвариантна по отношению к вариациям, соответствующим локальным пространственным поворотам и смещениям:

$$\delta \chi(x) = \chi'(x) - \chi(x), \quad (2.2.10)$$

где  $\chi'(x)$  в случае конечных преобразований определяется формулой

$$\chi'(x') = \left| \frac{\partial x'_k}{\partial x_l} \right|^{-1/2} S(a(x)) \chi(x) \quad (2.2.11)$$

$$x'^k = a^k_l(x) x^l + a^k(x), \quad k, l = 1, 2, 3$$

и матрица  $S(a(x))$  удовлетворяет соотношениям

$$\tilde{S}B^0S = B^0, \quad \tilde{S}(a(x))B^kS(a(x)) = a^k_l(x)B^l. \quad (2.2.12)$$

(Отметим, что кинематическая часть действия инвариантна при выполнении только первого из этих условий.) Для вариации (2.2.10)  $\delta W_K = 0$ ,  $G_2 = 0$ .

В случае бесконечно малых преобразований  $a^k_l(x) = \delta^k_l + \varepsilon^k_l(x)$ ,  $a^k(x) = \varepsilon^k(x)$ , где бесконечно малые функции  $\varepsilon_{kl}(x)$  антисимметричны по индексам  $k, l$ ,  $\varepsilon_{kl} = -\varepsilon_{lk}$ . Матрица  $S(a)$  при этом определяется формулой (2.1.47)

$$S(a) = 1 - \frac{i}{2} \varepsilon^k_l(x) \Sigma_k^l, \quad (2.2.13)$$

а якобиан преобразования

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = 1 + \partial_k(\varepsilon^k_l(x)x^l + \varepsilon^k(x)) = 1 + \partial_k \varepsilon^k + x^l \partial_k \varepsilon^k_l.$$

Из формул (2.2.11), (2.2.13) следует, что рассматриваемые нами допустимые вариации  $\delta \chi = \chi'(x) - \chi(x)$  можно представить в виде

$$\delta \chi(x) = -\frac{1}{2} (\partial_k \varepsilon^k + x^l \partial_k \varepsilon^k_l) \chi(x) - (\varepsilon^k + \varepsilon^k_l x^l) \partial_k \chi(x) - \frac{i}{2} \varepsilon^k_l \Sigma_k^l \chi(x). \quad (2.2.14)$$

С учетом того, что согласно (2.1.25), (2.1.26)

$$\mathcal{L}_0(\chi_1, \delta_{\xi}^0 \chi_2) = -\mathcal{L}_0(\chi_2, \delta_{\xi}^0 \chi_1), \quad (2.2.15)$$

легко видеть, что генератор

$$G(t) = \int d^3x \mathcal{L}_0(\chi, \delta_{\xi}^0 \delta \chi)$$

для допустимых вариаций (2.2.14) можно представить в виде

$$G(t) = \int d^3x \left\{ -(\varepsilon^k + \varepsilon^k_l x^l) \mathcal{L}_0(\chi, \delta_{\xi}^0 \partial_k \chi) - \frac{i}{2} \varepsilon^k_l \mathcal{L}_0(\chi, \delta_{\xi}^0 \Sigma_k^l \chi) \right\}. \quad (2.2.16)$$

Вводя операторы

$$\begin{aligned} T_{\nu}^{\mu} &= -\mathcal{L} \delta_{\nu}^{\mu} + \mathcal{L}_0(\chi, \delta_{\xi}^{\mu} \partial_{\nu} \chi), \\ M_{\lambda}^{\nu;\mu} &= -x^{\nu} T_{\lambda}^{\mu} + x_{\lambda} T^{\nu\mu} - i \mathcal{L}_0(\chi, \delta_{\xi}^{\mu} \Sigma_{\lambda}^{\nu} \chi), \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

приведем генератор  $G(t)$  к форме

$$G(t) = \int d^3x \left( -\varepsilon^k(x) T_k^0(x) + \frac{1}{2} \varepsilon^l_k(x) M_l^{k;0}(x) \right). \quad (2.2.18)$$

Член  $\mathcal{L} \delta_{\nu}^{\mu}$  в выражении для  $T_{\nu}^{\mu}$  не дает вклада в  $G(t)$  и введен для того, чтобы оператор  $T_{\nu}^{\mu}$ , так же как и в классической теории, представлял собой тензор энергии — импульса (см. далее). Тензор третьего ранга  $M_{\lambda}^{\nu;\mu}$  представляет собой оператор плотности моментов количества движения.

Из формулы (2.1.69) для вариаций (2.2.14) вытекают перестановочные соотношения для операторов  $T_k^0(x')$  и  $M_l^{k;0}(x')$  с оператора

ми  $\chi(x)$ :

$$\begin{aligned}
 i [T_k^0(x'), \chi(x)]_{t=t'} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_k \chi(x) + \frac{1}{2} \chi(x) \partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\
 i [M_k^{l;0}(x'), \chi(x)]_{t=t'} &= -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') i \Sigma_k^l \chi(x) - \\
 -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (x^l \partial_k - x_k \partial^l) \chi(x) - \frac{1}{2} \chi(x) (x^l \partial_k - x_k \partial^l) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').
 \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Пусть преобразования (2.2.14) являются преобразованиями пространственных поворотов и смещений с  $\varepsilon^k_l = \varepsilon^k = \text{const}$ . Такие преобразования оставляют инвариантным лагранжиан  $\mathcal{L}$  и, следовательно, полное действие  $W$ . В этом случае согласно (2.2.18)

$$G = -\varepsilon_k P^k + \frac{1}{2} \varepsilon_{lk} M^{lk}, \tag{2.2.20}$$

$$P^k = \int d^3x T^{k0}(x), \quad M^{lk} = \int d^3x M^{lk;0}(x).$$

Операторы  $P^k$ ,  $M^{kl}$  представляют собой сохраняющиеся величины, которые определяют импульс и момент количества движения поля.

Из формул (2.2.19), (2.2.20) вытекают перестановочные соотношения

$$\begin{aligned}
 \partial^k \chi(x) &= i [P^k, \chi(x)], \\
 (x^k \partial^l - x^l \partial^k - i \Sigma^{kl}) \chi(x) &= i [M^{kl}, \chi(x)].
 \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Покажем, что операторы  $T^{k\lambda}$  и  $M^{kl;\lambda}$  удовлетворяют следующим дифференциальным законам сохранения:

$$\partial_\lambda T^{k\lambda} = 0, \quad \partial_\lambda M^{kl;\lambda} = 0. \tag{2.2.22}$$

С этой целью снова вернемся к преобразованиям (2.2.14), в которых  $\varepsilon^k$ ,  $\varepsilon^k_l$  — произвольные функциями  $x$ . Так как вариации (2.2.14) являются допустимыми, то для них выполняется принцип стационарного действия (2.2.9). Для нахождения оператора  $\mathcal{F}(x)$ , входящего в (2.2.9), отметим, что вариация  $\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\xi \chi)$  согласно (2.2.14), (2.1.44) определяется формулой

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{L}_0(\chi, \partial_\xi \chi) &= -(\varepsilon^k + \varepsilon^k_l x^l) \partial_k \mathcal{L}_0 - (\partial_k \varepsilon^k + x^l \partial_k \varepsilon^k_l) \mathcal{L}_0 - \\
 - \mathcal{L}_0 \left( \chi, \partial_\xi \varepsilon^k \partial_k \chi + x^l \partial_\xi \varepsilon^k_l \partial_k \chi + \frac{i}{2} \partial_\xi \varepsilon^k_l \Sigma_k^l \chi \right).
 \end{aligned}$$

Поэтому оператор  $\mathcal{F}(x)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(x) &= \varepsilon^k \partial_\mu \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^\mu \partial_k \chi) + \\
 + \varepsilon^k_s \partial_\mu \mathcal{L}_0 \left( \chi, \delta_\xi^\mu \left( x^s \partial_k \chi + \frac{i}{2} \Sigma_k^s \chi \right) \right) - \delta U - \partial_k ((\varepsilon^k + \varepsilon^k_l x^l) \mathcal{L}_0),
 \end{aligned}$$

или с учетом формул (2.2.17) в виде

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(x) &= \varepsilon^k \partial_\nu T_k^\nu - \frac{1}{2} \varepsilon^k_l \partial_\nu M_k^{l;\nu} + (\varepsilon^k + \varepsilon^k_l x^l) \partial_k \mathcal{L} - \delta U - \\
 - \partial_k ((\varepsilon^k + \varepsilon^k_l x^l) \mathcal{L}_0).
 \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Согласно (2.1.27) и уравнениям поля (2.1.25), (2.1.26), лагранжиан  $\mathcal{L}$  для реального движения системы имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \left\{ \varphi, \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right\} + \frac{1}{4} \left[ \psi, \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] - U. \quad (2.2.24)$$

Далее в силу того, что  $U$  представляет собой инвариант преобразований (2.2.11) при  $\varepsilon^k = \varepsilon^k_l = \text{const}$  (это значит, что  $U(\chi'(x')) = U(\chi(x))$ ), получаем

$$\delta U = -(\varepsilon^k + \varepsilon^k_l x^l) \partial_k U - \frac{1}{2} (\partial_k \varepsilon^k + x^l \partial_k \varepsilon^k_l) \frac{\partial U(\lambda \chi)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1}.$$

Поэтому

$$(\varepsilon^k + \varepsilon^k_l x^l) \partial_k \mathcal{L} - \delta U = \frac{1}{2} \partial_l \left[ (\varepsilon^l + \varepsilon^l_k x^k) \frac{\partial U(\lambda \chi)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} \right]. \quad (2.2.25)$$

Мы предположили при этом, что

$$C \equiv \frac{1}{4} \left\{ \varphi, \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right\} + \frac{1}{4} \left[ \psi, \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial U(\lambda \varphi, \lambda \psi)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = 0.$$

Таким образом, согласно (2.2.23), (2.2.25)

$$\int_{t_1}^{t_2} d^4 x \mathcal{F}(x) = \int_{t_1}^{t_2} d^4 x \left( \varepsilon^k \partial_\nu T_k^\nu - \frac{1}{2} \varepsilon^k_l \partial_\nu M_k^{l;\nu} \right). \quad (2.2.26)$$

Легко видеть, что соотношение  $C = 0$  справедливо для свободного поля, когда оператор  $U$  квадратичен по функциям поля, и для классического поля. Это соотношение может выполняться и в других случаях, когда операторы, входящие в  $U$ , могут быть надлежащим образом упорядочены. В этих случаях вследствие принципа стационарности действия и произвольности функций  $\varepsilon^k$ ,  $\varepsilon^k_l$  и пределов интегрирования  $t_1$ ,  $t_2$  из (2.2.26) следуют дифференциальные законы сохранения (2.2.22).

**2.2.2. Лоренцева инвариантность теории и законы сохранения 4-импульса и 4-момента.** В п. 2.2.1 мы рассмотрели законы сохранения импульса и момента количества движения, которые были связаны с инвариантностью лагранжиана поля по отношению к пространственным смещениям и поворотам. Здесь мы рассмотрим вариации операторов поля, связанные с бесконечно малыми преобразованиями группы Пуанкаре (см. (1.1.17)):

$$\delta \chi(x) = -\varepsilon^\mu \partial_\mu \chi(x) + \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu} (-\Sigma_\mu^\nu + i(x^\nu \partial_\mu - x_\mu \partial^\nu)) \chi(x) \quad (2.2.27)$$

и покажем, что генератором  $G(t)$  этих вариаций

$$\delta \chi(x) = i[G(t), \chi(x)] \quad (2.2.28)$$

является оператор

$$G(t) = -\varepsilon_\nu P^\nu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \quad (2.2.29)$$

где

$$P^\nu = \int d^3 x T^{\nu 0}(x), \quad M^{\mu\nu} = \int d^3 x M^{\mu\nu; 0}(x) \quad (2.2.29')$$

и величины  $T^{\mu\nu}(x)$  и  $M^{\mu\nu;\lambda}(x)$  определены формулами (2.2.17). Кроме того, покажем, что справедливы дифференциальные законы сохранения

$$\partial_\mu T^{\nu\mu} = 0, \quad \partial_\lambda M^{\mu\nu;\lambda} = 0, \quad (2.2.30)$$

из которых следует, что величины  $P^\nu$ ,  $M^{\mu\nu}$  не зависят от  $t$ . Величины  $P^\nu$  и  $M^{\mu\nu}$  называются соответственно 4-вектором энергии — импульса и 4-тензором момента.

Доказательство соотношения (2.2.28), очевидно, вследствие (2.2.27), (2.2.29) эквивалентно доказательству соотношений

$$\partial_\mu \chi(x) = i [P_\mu, \chi(x)], \quad (2.2.31)$$

$$(-\Sigma_{\mu\nu} + i(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu)) \chi(x) = [M_{\mu\nu}, \chi(x)]. \quad (2.2.32)$$

Так как оператор  $P^0 = \mathcal{H}$  (см. (2.1.50), (2.2.17)), а  $P^k$  определяется формулой (2.2.20), то формулы (2.1.59), (2.2.21) эквивалентны (2.2.31).

Для доказательства формулы (2.2.32) отметим, что вследствие (2.2.21) формула (2.2.32) справедлива для пространственных индексов  $\mu$  и  $\nu$ ,  $\mu, \nu = i, k$ . Поэтому нам достаточно доказать соотношение

$$[M_{0k}, \chi(x)] = (-\Sigma_{0k} + i(x_k \partial_0 - t \partial_k)) \chi(x).$$

Доказательство этого соотношения вследствие (2.1.52) эквивалентно, очевидно, доказательству соотношения

$$[M_{0k}, \mathcal{D}B^0\chi(x)] = (-\Sigma_{0k} + i(x_k \partial_0 - t \partial_k)) \mathcal{D}B^0\chi(x) \quad (2.2.33)$$

(для величин  $B^0\chi(x)$  формулируются одновременные перестановочные соотношения (см. (2.1.65)); матрица  $\mathcal{D}$  определена в п. 2.1.5).

Согласно (2.2.17), (2.2.20), (2.2.29) оператор  $M_{0k}$  можно представить в виде

$$M_{0k} = tP_k - x_k \mathcal{H} - \int d^3x' ((x'_k - x_k) T_0^0(x') + i\mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^0 \Sigma_{0k}\chi)).$$

Поэтому, замечая, что согласно (2.2.31)

$$[tP_k - x_k \mathcal{H}, \mathcal{D}B^0\chi] = i(x_k \partial_0 - t \partial_k) \mathcal{D}B^0\chi,$$

представим доказываемое соотношение (2.2.33) в виде

$$[R_k, \mathcal{D}B^0\chi] = -\Sigma_{0k} \mathcal{D}B^0\chi, \quad (2.2.34)$$

$$R_k = - \int_{t'=t} d^3x' ((x'_k - x_k) T_0^0(x') + i\mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^0 \Sigma_{0k}\chi)).$$

Из определения оператора  $\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\xi \chi)$  следует, что

$$\mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^0 \Sigma_{0k}\chi) = \frac{i}{4} (\chi B^0 \Sigma_{0k} \chi - \chi \tilde{\Sigma}_{0k} B^0 \chi). \quad (2.2.35)$$

Кроме того, так как согласно (2.1.48)

$$B_k = -i(\tilde{\Sigma}_{0k} B^0 + B^0 \Sigma_{0k}),$$

то, учитывая (2.2.17), находим

$$T_0^0 = U + \frac{1}{4} \{ \partial_i \chi (\tilde{\Sigma}^{0i} B^0 + B^0 \Sigma^{0i}) \chi - \chi (\tilde{\Sigma}^{0i} B^0 + B^0 \Sigma^{0i}) \partial_i \chi \}. \quad (2.2.36)$$

Поэтому из (2.2.35), (2.2.36), выполняя интегрирование по частям, получаем

$$R_k = - \int_{t'=t} d^3x' \left\{ U(x') (x'_k - x_k) + (x_k - x_k) \left[ \frac{1}{2} \partial_i \chi(x') B^0 \Sigma^{0i} \chi(x') - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \chi(x') \tilde{\Sigma}^{0i} B^0 \partial_i \chi(x') \right] \right\}.$$

Используя перестановочные соотношения (2.1.65) и замечая, что

$$(x'_k - x_k) \partial_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -g_{ki} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

находим

$$- \int_{t'=t} d^3x' (x'_k - x_k) \frac{1}{2} \{ [\partial_i \chi(x') B^0, \mathcal{D} B^0 \chi(x)] \Sigma^{0i} \chi(x') - \\ - \chi(x') \tilde{\Sigma}^{0i} [B^0 \partial_i \chi(x'), \mathcal{D} B^0 \chi(x)] \} = - \Sigma_{0k} B^0 \mathcal{D} \chi(x).$$

Поэтому соотношение (2.2.34) принимает вид

$$\int_{t'=t} d^3x' (x'_k - x_k) \left\{ [U(x'), \mathcal{D} B^0 \chi(x)] + \frac{1}{2} \partial_i \chi(x') B^0 \Sigma^{0i} [\chi(x'), \mathcal{D} B^0 \chi(x)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} [\chi(x'), \mathcal{D} B^0 \chi(x)] \tilde{\Sigma}^{0i} B^0 \partial_i \chi(x') \right\} = 0.$$

Замечая, что  $(x'_k - x_k) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0$ , это соотношение можно переписать в виде

$$\int_{t'=t} d^3x'' \int_{t'=t} d^3x' \frac{\delta \chi_a(x')}{\delta (B^0 \chi(x''))_\alpha} (x'_k - x_k) \left\{ [(B^0 \chi(x''))_\alpha, \mathcal{D} B^0 \chi(x)] \times \right. \\ \times \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_i U(x')}{\partial \chi_a(x')} - (\tilde{\Sigma}^{0i} B^0 \partial_i \chi(x'))_\alpha \right) + \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_i U(x')}{\partial \chi_a(x')} + (\partial_i \chi(x') B^0 \Sigma^{0i})_\alpha [(B^0 \chi(x''))_\alpha, \mathcal{D} B^0 \chi(x)] \right) \right\} = 0, \quad (2.2.37)$$

причем, так же как и в п. 2.1.5, мы предполагали, что производные  $\frac{\delta \chi_a(x')}{\delta (B^0 \chi(x''))_\alpha}$  коммутируют со всеми операторами, встречающимися в  $U$  (если  $U$  не квадратично по операторам поля). Такая ситуация наверняка справедлива для свободных полей (когда  $U \sim \chi \chi$ ) и для того случая, когда уравнения связи приводят к линейным соотношениям между  $\chi_a$  и  $\chi_\alpha$ . Вследствие уравнений связи (2.1.49) соотношение (2.2.37), а следовательно, и (2.2.33) действительно справедливы.

Перейдем к доказательству дифференциальных законов сохранения (2.2.30).

Используя определение тензора  $T_{\mu\nu}$  (см. (2.2.17)) и учитывая, что  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - U$  (см. (2.1.21)), находим

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = \partial_\nu U - \partial_\nu \mathcal{L}_0(\chi, \partial_\xi \chi) + \partial_\mu \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^\mu \partial_\nu \chi).$$

Так как

$$\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\xi \chi) = \frac{i}{4} (\chi B^\mu \partial_\mu \chi - \partial_\mu \chi B^\mu \chi),$$

то

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = \partial_\nu U + \frac{i}{2} (\partial_\mu \chi B^\mu \partial_\nu \chi - \partial_\nu \chi B^\mu \partial_\mu \chi),$$

откуда, используя уравнения поля (2.1.29), (2.1.30)

$$iB^\mu \partial_\mu \chi = \frac{\partial_l U}{\partial \chi}, \quad i\partial_\mu \chi B^\mu = -\frac{\partial_r U}{\partial \chi}, \quad (2.2.38)$$

получаем

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = \partial_\nu U(\chi) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_r U}{\partial \chi} \partial_\nu \chi + \partial_\nu \chi \frac{\partial_l U}{\partial \chi} \right). \quad (2.2.39)$$

Легко видеть, что правая часть этого равенства обращается в нуль для свободного поля, когда оператор  $U$  квадратичен по функциям поля. Обращение правой части (2.2.39) в нуль может происходить и в других случаях, когда операторы, входящие в  $U$ , могут быть надлежащим образом упорядочены. В этих случаях имеет место дифференциальный закон сохранения  $\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$ . Далее будем считать, что именно такую ситуацию мы имеем.

Покажем, что справедливо соотношение  $\partial_\mu M_{\lambda\nu}^\mu = 0$ . Согласно определению (2.2.17) оператора  $M_{\lambda\nu}^\mu$

$$\partial_\mu M_{\lambda\nu}^\mu = -T_{\lambda\nu} + T_{\nu\lambda} - i\partial_\mu \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^\mu \Sigma_{\lambda\nu} \chi)$$

(мы при этом учли, что  $\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$ ). Подставляя сюда выражение для  $T_{\lambda\nu}$ , получаем

$$\partial_\mu M_{\lambda\nu}^\mu = \mathcal{L}_0(\chi, g_{\xi\lambda} \partial_\nu \chi) - \mathcal{L}_0(\chi, g_{\xi\nu} \partial_\lambda \chi) - i\partial_\mu \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^\mu \Sigma_{\lambda\nu} \chi),$$

или, используя определение оператора  $\mathcal{L}_0(\chi, \partial_\xi \chi)$ :

$$\begin{aligned} \partial_\mu M_{\lambda\nu}^\mu = \frac{i}{4} \{ \chi B_\lambda \partial_\nu \chi - \partial_\nu \chi B_\lambda \chi - \chi B_\nu \partial_\lambda \chi + \partial_\lambda \chi B_\nu \chi - \\ - i\partial_\mu (\chi (B^\mu \Sigma_{\lambda\nu} - \tilde{\Sigma}_{\lambda\nu} B^\mu) \chi) \}. \end{aligned}$$

Из лоренц-инвариантности лагранжиана следует, что (см. формулу (2.1.48))

$$B^\mu \Sigma_{\lambda\nu} + \tilde{\Sigma}_{\lambda\nu} B^\mu = i\delta_\lambda^\mu B_\nu - i\delta_\nu^\mu B_\lambda,$$

поэтому

$$\partial_\mu M_{\lambda\nu}^\mu = \frac{i}{2} \{ \chi \tilde{\Sigma}_{\lambda\nu} (iB^\mu \partial_\mu \chi) - (i\partial_\mu \chi B^\mu) \Sigma_{\lambda\nu} \chi \}.$$

Используя далее уравнения поля (2.2.38), получаем

$$\partial_\mu M_{\lambda\nu}^\mu = \frac{i}{2} \left\{ (\Sigma_{\lambda\nu} \chi) \frac{\partial_l U}{\partial \chi} + \frac{\partial_r U}{\partial \chi} (\Sigma_{\lambda\nu} \chi) \right\}.$$



Так как оператор  $U(X)$  представляет собой релятивистский инвариант, то

$$U(X) = U(SX),$$

где в случае бесконечно малых преобразований Лоренца  $S = 1 - \frac{i}{2} \varepsilon^{\lambda\nu} \Sigma_{\lambda\nu}$ . Поэтому так же, как и в случае доказательства закона сохранения  $\partial_\nu T_{\mu}{}^\nu = 0$ , следует считать, что правая сторона рассматриваемого равенства обращается в нуль. Таким образом, будем считать, что для релятивистски инвариантной теории должны иметь место дифференциальные законы сохранения (2.2.30).

**2.2.3. Коммутаторы интегралов движения.** Вычислим коммутаторы интегралов движения  $P^\mu$ ,  $M^{\mu\nu}$ ,  $Q_a$ . Вычисление удобно проводить, используя тот факт, что величины  $P^\mu$ ,  $M^{\mu\nu}$ ,  $Q_a$  являются генераторами преобразований (2.2.27), (2.2.3).

Определим прежде всего вариации тензоров энергии — импульса  $T_{\mu\nu}$  и моментов  $M_{\mu\nu;\lambda}$  при вариациях полей (2.2.27), соответствующих преобразованиям Пуанкаре. Тензор  $T_{\mu\nu}(x)$  согласно (2.2.17) зависит от  $x$  только через посредство  $\partial_\mu \chi$  и  $\chi$ ,  $T_{\mu\nu}(x) \equiv T_{\mu\nu}(\chi(x))$ . Тензор  $M_{\mu\nu;\lambda}$  зависит от  $x$  также через посредство  $\chi$ ,  $\partial_\mu \chi$ , но, кроме того, он содержит и явную зависимость от  $x$  (см. (2.2.17)),  $M_{\mu\nu;\lambda}(x) \equiv M_{\mu\nu;\lambda}(\chi(x), x)$ .

Так как для преобразований группы Пуанкаре генератор  $G = -\varepsilon^\mu P_\mu + \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} M_{\mu\nu}$  не зависит от времени (величины  $P_\mu$ ,  $M_{\mu\nu}$  — интегралы движения), то кроме формулы

$$\delta\chi = i[G, \chi]$$

будут справедливы формулы

$$\partial_\mu \delta\chi = i[G, \partial_\mu \chi].$$

Поэтому вариации тензоров  $T_{\mu\nu}$  и  $M_{\mu\nu;\lambda}$

$$\delta T_{\mu\nu}(x) \equiv T_{\mu\nu}(\chi'(x)) - T_{\mu\nu}(\chi(x)),$$

$$\delta M_{\mu\nu;\lambda}(x) \equiv M_{\mu\nu;\lambda}(\chi'(x), x) - M_{\mu\nu;\lambda}(\chi(x), x)$$

можно найти по формулам

$$\delta T_{\mu\nu}(x) = i[G, T_{\mu\nu}(x)], \quad \delta M_{\mu\nu;\lambda}(x) = i[G, M_{\mu\nu;\lambda}(x)]. \quad (2.2.40)$$

Кроме того, вариации тензоров  $T_{\mu\nu}$  и  $M_{\mu\nu;\lambda}$  можно найти иным способом, исходя из трансформационных свойств этих величин. Так как лагранжиан  $\mathcal{L}$  инвариантен относительно преобразований (2.2.27), то, как мы уже говорили, тензор энергии — импульса преобразуется по закону

$$T_{\mu\nu}(x) \rightarrow T'_{\mu\nu}(x') \equiv T_{\mu\nu}(\chi'(x')) = a_\mu{}^\lambda a_\nu{}^\rho T_{\lambda\rho}(\chi(x)), \quad (2.2.41)$$

где  $x'_\mu = a_\mu{}^\lambda x_\lambda + a_\mu$ .

Величина  $\mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^\mu \Sigma_{\nu\lambda} \chi)$ , входящая в  $M_{\mu\nu;\lambda}^\mu$ , вследствие инвариантности  $\mathcal{L}_0$  относительно преобразований (2.2.27) и вследствие соотношения (1.1.33) преобразуется как тензор 3-го ранга. Поэтому в силу

закона преобразования для  $T_{\mu\nu}$  находим

$$M_{\mu\nu;\lambda}(x) \rightarrow M'_{\mu\nu;\lambda}(x') \equiv M_{\mu\nu;\lambda}(X'(x'), x') = a_{\mu}^{\xi} a_{\nu}^{\rho} a_{\lambda}^{\sigma} M_{\xi\rho;\sigma}(X(x), x) + a_{\mu} T_{\nu\lambda}(X'(x')) - a_{\nu} T_{\mu\rho}(X'(x')). \quad (2.2.42)$$

Для бесконечно малых преобразований Лоренца — Пуанкаре формула (2.2.41) приводит к следующему выражению для вариации  $\delta T_{\mu\nu}(x)$ :

$$\delta T_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(X'(x')) - T_{\mu\nu}(X(x)) - (T_{\mu\nu}(X'(x')) - T_{\mu\nu}(X'(x))) = \varepsilon_{\mu}^{\lambda} T_{\lambda\nu}(x) + \varepsilon_{\nu}^{\lambda} T_{\mu\lambda}(x) - (\varepsilon^{\rho}{}_{\lambda} x^{\lambda} + \varepsilon^{\rho}) \partial_{\rho} T_{\mu\nu}(x). \quad (2.2.43)$$

Аналогично вариацию  $\delta M_{\mu\nu;\lambda}(x)$  можно представить в виде

$$\delta M_{\mu\nu;\lambda}(x) = \varepsilon_{\mu}^{\rho} M_{\rho\nu;\lambda}(x) + \varepsilon_{\nu}^{\rho} M_{\mu\rho;\lambda}(x) + \varepsilon_{\lambda}^{\rho} M_{\mu\nu;\rho}(x) - (\varepsilon^{\rho}{}_{\sigma} x^{\sigma} + \varepsilon^{\rho}) \partial_{\rho} M_{\mu\nu;\lambda}(x) + \varepsilon_{\mu} T_{\nu\lambda}(x) - \varepsilon_{\nu} T_{\mu\lambda}(x). \quad (2.2.44)$$

Поэтому из (2.2.43), (2.2.44), (2.2.40) и определения (2.2.29) генератора  $G$  находим

$$\begin{aligned} i[P_{\rho}, T_{\mu\lambda}(x)] &= \partial_{\rho} T_{\mu\lambda}(x), \\ i[P_{\rho}, M_{\mu\nu;\lambda}(x)] &= -g_{\mu\rho} T_{\nu\lambda}(x) + g_{\nu\rho} T_{\mu\lambda}(x) + \partial_{\rho} M_{\mu\nu;\lambda}(x), \\ i[M_{\rho\nu}, T_{\mu\lambda}(x)] &= -g_{\mu\nu} T_{\rho\lambda}(x) + g_{\mu\rho} T_{\nu\lambda}(x) - g_{\nu\lambda} T_{\mu\rho}(x) + \\ &+ g_{\rho\lambda} T_{\mu\nu}(x) - (x^{\nu} \partial_{\rho} - x_{\rho} \partial_{\nu}) T_{\mu\lambda}(x), \\ i[M_{\rho\xi}, M_{\mu\nu;\lambda}(x)] &= -g_{\mu\xi} M_{\rho\nu;\lambda}(x) + g_{\mu\rho} M_{\xi\nu;\lambda}(x) - \\ &- g_{\nu\xi} M_{\mu\rho;\lambda}(x) + g_{\nu\rho} M_{\mu\xi;\lambda}(x) - g_{\lambda\xi} M_{\mu\nu;\rho}(x) + \\ &+ g_{\lambda\rho} M_{\mu\nu;\xi}(x) - (x_{\xi} \partial_{\rho} - x_{\rho} \partial_{\xi}) M_{\mu\nu;\lambda}(x). \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

Полагая в первых двух соотношениях  $\lambda = 0$ , интегрируя их по  $d^3x$  и используя законы сохранения (2.2.30) и определения (2.2.29') величин  $P_{\mu}$  и  $M_{\mu\nu}$ , получаем

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0, \quad i[P_{\rho}, M_{\mu\nu}] = -g_{\mu\rho} P_{\nu} + g_{\nu\rho} P_{\mu}. \quad (2.2.46)$$

Аналогично интегрирование по  $d^3x$  последней пары соотношений (2.2.45) при  $\lambda = 0$  приводит к уравнению

$$i[M_{\rho\xi}, M_{\mu\nu}] = -g_{\mu\xi} M_{\rho\nu} + g_{\mu\rho} M_{\xi\nu} - g_{\nu\xi} M_{\mu\rho} + g_{\nu\rho} M_{\mu\xi} \quad (2.2.47)$$

и соотношению, совпадающему со вторым из уравнений (2.2.46) (при получении этой формулы мы использовали дифференциальный закон сохранения (2.2.30) и выполнили интегрирование по частям). Из этих формул, в частности, следуют соотношения коммутации для момента количества движения

$$[M^i, M^k] = -i \varepsilon^{ikl} M_l, \quad (2.2.48)$$

где  $M^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} M_{kl}$ .

Найдем коммутаторы обобщенных зарядов, связанных с внутренними симметриями. Вариации обобщенных токов  $\mathcal{J}_a^\mu(x)$

$$\delta\mathcal{J}_a^\mu(x) \equiv \mathcal{J}_a^\mu(\chi'(x)) - \mathcal{J}_a^\mu(\chi(x)),$$

$$\delta\chi(x) \equiv \chi'(x) - \chi(x) = -i\varepsilon^a T_a \chi(x)$$

можно найти по формуле

$$\delta\mathcal{J}_a^\mu(x) = i[G, \mathcal{J}_a^\mu(x)], \quad (2.2.49)$$

где  $G$  — генератор преобразований внутренней симметрии,  $G = \varepsilon^a Q_a$  и  $Q_a$  — обобщенные заряды поля (см. (1.2.13)). Кроме того, вследствие инвариантности лагранжиана относительно преобразований внутренней симметрии

$$\delta\mathcal{J}_a^\mu(x) = \varepsilon^b f_{ab}{}^c \mathcal{J}_c^\mu(x) \quad (2.2.50)$$

(см. п. 1.8.2).

Из сравнения формул (2.2.49), (2.2.50) следует

$$i[Q_b, \mathcal{J}_a^\mu(x)] = f_{ab}{}^c \mathcal{J}_c^\mu(x). \quad (2.2.51)$$

Отсюда, полагая  $\mu = 0$ , интегрируя данное выражение по  $d^3x$  и используя определение (1.2.13) обобщенных зарядов  $Q_a$ , находим

$$i[Q_b, Q_a] = f_{ab}{}^c Q_c. \quad (2.2.52)$$

Отметим, что так как преобразования внутренней симметрии независимы от преобразований Пуанкаре, то

$$[Q_a, P_\mu] = [Q_a, M_{\mu\nu}] = 0.$$

**2.2.4. Инвариантность теории по отношению к обращению времени и связь спина со статистикой.** Выше мы получили законы сохранения 4-импульса и 4-момента поля исходя из требования инвариантности лагранжиана относительно преобразований собственной группы Лоренца. Здесь мы рассмотрим преобразования полей, связанные с инверсией пространства и времени [12], и покажем, что требование инвариантности лагранжиана относительно обращения времени приводит к однозначной связи между спином частиц и способом квантования соответствующих полей: частицы, связанные с фермионными полями, должны обладать полуцелым спином, а частицы, связанные с бозонными полями, — целым спином (это утверждение называется теоремой Паули [9—11]).

Как мы видели, лагранжиан (2.1.21) инвариантен по отношению к преобразованиям группы Лоренца

$$\chi(x) \rightarrow \chi'(x') = S(a)\chi(x), \quad x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu,$$

если выполняются соотношения

$$\tilde{S}B^\mu S = a^\mu{}_\nu B^\nu,$$

причем вследствие эрмитовости полей  $\chi(x)$  матрица  $S$  должна быть вещественной.

Преобразованию пространственного отражения  $x'_1 = -x_1$ ,  $x'_2 = x_2$ ,  $x'_3 = x_3$ ,  $x'_0 = x_0$  соответствует матрица  $S \equiv \mathcal{P}$ , удовлетворяющая соотношениям

$$\tilde{\mathcal{P}}B^1\mathcal{P} = -B^1, \quad \tilde{\mathcal{P}}B^i\mathcal{P} = B^i, \quad i = 2, 3, 0. \quad (2.2.53)$$

Преобразованию обращения времени  $x'_k = x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ),  $x'_0 = -x_0$  соответствует матрица  $S = \tilde{T}$ , удовлетворяющая соотношениям

$$\tilde{T}B^0T = -B^0, \quad \tilde{T}B^iT = B^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2.53')$$

Матрицы  $B^\mu$  имеют блочную структуру (см. (2.1.28)), причем блок  $B_a^\mu$  связан с бозе-полем  $\varphi$ , а блок  $B_s^\mu$  — с ферми-полем  $\psi$ . В соответствии с этим матрицу  $T$  также можно представить в виде

$$T = \begin{pmatrix} T_- & 0 \\ 0 & T_+ \end{pmatrix},$$

где матрица  $T_-$  определяет преобразование обращения времени бозе-поля, а матрица  $T_+$  — ферми-поля. Эти матрицы, очевидно, удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\pm B_\pm^0 T_\pm &= -B_\pm^0, & \tilde{T}_\pm B_\pm^k T_\pm &= B_\pm^k \quad (k = 1, 2, 3), \\ B_a^\mu &\equiv B_a^\mu, & B_s^\mu &\equiv B_s^\mu. \end{aligned} \quad (2.2.54)$$

В п. (2.1.5) показано, что матрица  $B_+^0$  является положительно определенной, т. е.  $a_i^* (B_+^0)_{ij} a_j \geq 0$  для любых комплексных чисел  $a_i$ . Из первого уравнения (2.2.54) следует, что

$$(T_+^* a)_i^* (B_+^0)_{ij} (T_+ a)_j = -a_i^* (B_+^0)_{ij} a_j. \quad (2.2.55)$$

Поэтому вследствие положительной определенности матрицы  $B_+^0$  уравнение (2.2.55) не может удовлетворяться, если матрица  $T_+$  вещественна. Однако, как следует из формулы (2.2.55), чисто мнимая матрица  $T_+$  может удовлетворять соотношениям (2.2.55). Однако поля  $\chi'$  ( $x'$ ) для такой матрицы  $T_+$  согласно (2.1.44) будут не эрмитовы, а антиэрмитовы. Поэтому, казалось бы, преобразование обращения времени нельзя включить в число элементов симметрии лагранжиана (2.1.21). Однако эрмитовость поля  $\chi'$  ( $x'$ ) можно сохранить, если потребовать, чтобы поля  $\varphi$  и  $\psi$  преобразовывались при обращении времени не по формулам

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = T_- \varphi(x),$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = T_+ \psi(x), \quad x'_0 = -x_0,$$

а по формулам

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = T_- \varphi^T(x)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = iT_+ \psi^T(x), \quad t' = -t.$$

Здесь индекс «т» при  $\varphi$  и  $\psi$  (как и знак тильды над матрицами) служит для обозначения операции транспонирования в гильбертовом пространстве

$$(\Phi_i, \varphi^T \Phi_j) = (\Phi_j, \varphi \Phi_i), \quad (\Phi_i, \psi^T \Phi_j) = (\Phi_j, \psi \Phi_i),$$

где  $\Phi_i$  — некоторый базис в гильбертовом пространстве, в котором определяется операция транспонирования. Операция транспонирования физически соответствует замене начального состояния конечным, и наоборот, при обращении времени.

Ясно, что при преобразовании (2.2.55) нарушается инвариантность лагранжиана в смысле

$$\mathcal{L}(\chi(x), \partial_\mu \chi(x)) = \mathcal{L}(\chi'(x'), \partial'_\mu \chi'(x')). \quad (2.2.56)$$

Однако мы покажем, что уравнения поля и перестановочные соотношения для полей будут инвариантны по отношению к преобразованию обращения времени (2.2.55).

Чтобы убедиться в инвариантности уравнений движения по отношению к преобразованиям (2.2.55), достаточно, очевидно, показать, что выполняется соотношение

$$\mathcal{L}(\chi(x), \partial_\mu \chi(x)) = \mathcal{L}^T(\chi'(x'), \partial'_\mu \chi'(x')), \quad x'_0 = -x_0, \quad (2.2.57)$$

которое заменяет теперь соотношение (2.2.56).

С этой целью рассмотрим часть лагранжиана  $\mathcal{L}_0$ , зависящую от производных поля  $\chi$  (см. (2.1.27)). В случае бозе-полей согласно (2.1.25)  $\mathcal{L}_0$  имеет вид

$$\mathcal{L}_0^-(\varphi, \partial\varphi) = -\frac{i}{4} \{\partial_\mu \varphi, B_-^\mu \varphi\}.$$

Поэтому согласно (2.2.55) и (2.2.54)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^-(\varphi', \partial'\varphi') &= -\frac{i}{4} \{\partial'_\mu \varphi'^T(x), \tilde{T}_- B_-^\mu T_- \varphi'^T(x)\} = \\ &= -\frac{i}{4} \{\partial_\mu \varphi^T(x), B_-^\mu \varphi^T(x)\}, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $\mathcal{L}_0^-(\varphi, \partial\varphi) = \mathcal{L}_0^-(\varphi', \partial'\varphi')^T$ .

В случае ферми-полей согласно (2.1.26)  $\mathcal{L}_0$  имеет вид

$$\mathcal{L}_0^+(\psi, \partial\psi) = -\frac{i}{4} [\partial_\mu \psi, B_+^\mu \psi].$$

Поэтому согласно (2.2.55) и (2.2.54)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^+(\psi', \partial'\psi') &= \frac{i}{4} [\partial'_\mu \psi'^T(x), \tilde{T}_+ B_+^\mu T_+ \psi'^T(x)] = \\ &= \frac{i}{4} [\partial_\mu \psi^T(x), B_+^\mu \psi^T(x)], \end{aligned}$$

откуда и следует, что  $\mathcal{L}_0^+(\psi, \partial\psi) = \mathcal{L}_0^+(\psi', \partial'\psi')^T$ .

Подчеркнем, что инвариантность лагранжиана  $\mathcal{L}_0^\pm$  относительно преобразования обращения времени (2.2.55) в смысле (2.2.57) достигается вследствие наличия в преобразовании (2.2.55) как множителя  $i$ , так и операции транспонирования полей. Для того чтобы полный лагранжиан был инвариантен относительно преобразования обращения времени в смысле (2.2.55), необходимо, чтобы оператор  $U(\chi)$ ,

входящий в (2.1.21), удовлетворял соотношению

$$U(\varphi, \psi) = U(\varphi', \psi')^T.$$

В случае свободного бозе-поля оператор  $U(\chi) \equiv U^-(\varphi)$  определяется формулой (2.1.32), в которой согласно (2.1.46) матрица  $\mathfrak{E}_-$  удовлетворяет соотношению

$$\tilde{T}_- \mathfrak{E}_- T_- = \mathfrak{E}_-, \quad \mathfrak{E}_s \equiv \mathfrak{E}_-. \quad (2.2.58)$$

Из (2.2.55) и (2.1.58) следует, что

$$U^-(\varphi') = \frac{1}{4} \{\varphi^T(x), \tilde{T}_- \mathfrak{E}_- T_- \varphi^T(x)\} = \frac{1}{4} \{\varphi^T(x), \mathfrak{E}_- \varphi^T(x)\}$$

и поэтому  $U^-(\varphi') = U^-(\varphi)^T$ .

В случае свободного ферми-поля оператор  $U(\chi) \equiv U^+(\psi)$  определяется формулой (2.1.34), в которой согласно (2.1.46) матрица  $\mathfrak{E}_+$  удовлетворяет соотношению

$$\tilde{T}_+ \mathfrak{E}_+ T_+ = \mathfrak{E}_+, \quad \mathfrak{E}_a \equiv \mathfrak{E}_+. \quad (2.2.58')$$

Из (2.2.55) и (2.1.58') следует

$$U^+(\psi') = -\frac{1}{4} [\psi^T(x), \tilde{T}_+ \mathfrak{E}_+ T_+ \psi^T(x)] = -\frac{1}{4} [\psi^T(x), \mathfrak{E}_+ \psi^T(x)]$$

и поэтому  $U^+(\psi') = U^+(\psi)^T$ . Подчеркнем, что инвариантность  $U^+(\psi)$  относительно преобразования обращения времени (2.2.55) в смысле (2.2.57) достигается вследствие наличия в преобразовании (2.2.55) как множителя  $i$ , так и операции транспонирования полей.

Перейдем к доказательству инвариантности перестановочных соотношений (2.1.64)

$$[B_{-\varphi}^0(x_1), B_{-\varphi}^0(x_2)]_{t_1=t_2} = B_{-\varphi}^0 \delta(x_1 - x_2),$$

$$\{B_{+\psi}^0(x_1), B_{+\psi}^0(x_2)\}_{t_1=t_2} = B_{+\psi}^0 \delta(x_1 - x_2)$$

относительно преобразований обращения времени (2.2.55).

В случае бозе-полей из (2.2.55), (2.2.54) следует

$$[B_{-\varphi'}^0(x_1), B_{-\varphi'}^0(x_2)]_{t'_1=t'_2} = \tilde{T}_-^{-1} [B_{-\varphi}^0(x_1), B_{-\varphi}^0(x_2)]_{t_1=t_2} T_-^{-1} =$$

$$= -\tilde{T}_-^{-1} [B_{-\varphi}^0(x_1), B_{-\varphi}^0(x_2)]_{t_1=t_2}^T T_-^{-1},$$

откуда, используя (2.1.64), (2.2.54), получаем

$$[B_{-\varphi'}^0(x_1), B_{-\varphi'}^0(x_2)]_{t'_1=t'_2} = -\delta(x_1 - x_2) \tilde{T}_-^{-1} B_{-\varphi}^0 T_-^{-1} = B_{-\varphi}^0 \delta(x_1 - x_2).$$

Видно, что для инвариантности перестановочных соотношений (2.1.64) для бозе-полей существенно необходимо наличие в преобразовании (2.2.55) операции транспонирования.

В случае ферми-полей из (2.2.55), (2.2.54) следует

$$\begin{aligned} \{B_{+}^0\psi'(x'_1), B_{+}^0\psi'(x'_2)\}_{t'_1=t'_2} &= -\tilde{T}_{+}^{-1} \{B_{+}^0\psi^{\top}(x_1), B_{+}^0\psi^{\top}(x_2)\}_{t_1=t_2} T_{+}^{-1} = \\ &= -\tilde{T}_{+}^{-1} \{B_{+}^0\psi(x_1), B_{+}^0\psi(x_2)\}_{t_1=t_2}^{\top} T_{+}^{-1}, \end{aligned}$$

откуда, используя (2.1.64), (2.2.54), получаем

$$\{B_{+}^0\psi'(x'_1), B_{+}^0\psi'(x'_2)\}_{t'_1=t'_2} = -\delta(x_1 - x_2) \tilde{T}_{+}^{-1} B_{+}^0 T_{+}^{-1} = B_{+}^0 \delta(x'_1 - x'_2).$$

Подчеркнем, что инвариантность перестановочных соотношений (2.1.64) для ферми-полей относительно обращения времени существенно связана с наличием множителя  $i$  в преобразовании (2.2.55) для полей  $\psi$ .

Покажем, что матрица  $T$ , удовлетворяющая соотношениям (2.2.54), будет вещественной в случае полей с целым спином и мнимой в случае полей с полуцелым спином. Отсюда и из требования инвариантности части лагранжиана  $\mathcal{L}_0$  (в смысле (2.2.57)) и перестановочных соотношений относительно обращения времени (2.2.55) следует, что поля с целым спином являются бозе-полями, а поля с полуцелым спином — ферми-полями (это следует из того, что в случае бозе-полей матрица  $T_{-}$  вещественна, а в случае ферми-полей матрица  $T_{+}$  мнимая).

Переходя к доказательству этого утверждения, отметим, что вследствие инвариантности  $\mathcal{L}_0$  по отношению к собственной группе Лоренца имеет место соотношение (2.1.48), т. е.

$$i(\tilde{\Sigma}_{\rho\nu} B^{\mu} + B^{\mu} \Sigma_{\rho\nu}) = \delta_{\rho}^{\mu} B_{\nu} - \delta_{\nu}^{\mu} B_{\rho}.$$

Если ввести матрицу

$$\tilde{B}^{\mu}(\alpha) = e^{\alpha \tilde{\Sigma}_{10}} B^{\mu} e^{\alpha \Sigma_{10}},$$

то согласно (2.1.48) она будет удовлетворять соотношению

$$\frac{dB^{\mu}(\alpha)}{d\alpha} = i\delta_0^{\mu} B_1(\alpha) - i\delta_1^{\mu} B_0(\alpha),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} B^0(\alpha) &= B^0 \cos \alpha - iB^1 \sin \alpha, \\ B^1(\alpha) &= -iB^0 \sin \alpha + B_1 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.2.59)$$

Покажем, что матрица

$$T \equiv e^{\frac{\pi}{2} \Sigma_{10}} \mathcal{P} e^{-\frac{\pi}{2} \Sigma_{10}}, \quad (2.2.60)$$

где  $\mathcal{P}$  — матрица, соответствующая преобразованию  $x'_1 = -x_1$  (см. (2.2.53)), удовлетворяет соотношениям (2.2.53') и, следовательно, может быть принята в качестве матрицы  $T$ , входящей в преобразование обращения времени (2.2.55). Действительно, из формул (2.2.59) и (2.2.60) следует, что

$$\tilde{T} B^0 T = e^{-\frac{\pi}{2} \tilde{\Sigma}_{10}} \tilde{\mathcal{P}} e^{\frac{\pi}{2} \tilde{\Sigma}_{10}} B^0 e^{\frac{\pi}{2} \Sigma_{10}} \mathcal{P} e^{-\frac{\pi}{2} \Sigma_{10}} = -ie^{-\frac{\pi}{2} \tilde{\Sigma}_{10}} \tilde{\mathcal{P}} B^1 \mathcal{P} e^{-\frac{\pi}{2} \Sigma_{10}}.$$

Замечая, что  $\tilde{\mathcal{P}}B^1\mathcal{P} = -B^1$ , и снова используя формулы (2.2.59), получаем

$$\tilde{T}B^0T = ie^{-\frac{\pi}{2}\hat{\Sigma}_{10}}B_1e^{-\frac{\pi}{2}\Sigma_{10}} = -B^0.$$

Аналогично можно показать, что

$$\tilde{T}B^1T = B^1.$$

Отметим, что для преобразований  $S$  полной группы Лоренца справедливо соотношение

$$S^{-1}\Sigma_{\mu\nu}S = a_{\mu\alpha}a_{\nu\lambda}\Sigma^{\alpha\lambda},$$

из которого следует, что

$$\Sigma_{10}\mathcal{P} = -\mathcal{P}\Sigma_{10}.$$

Поэтому

$$T = e^{\pi\Sigma_{10}\mathcal{P}}. \quad (2.2.61)$$

В силу эрмитовости поля матрица  $\mathcal{P}$  вещественна,  $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ , а матрица  $\Sigma_{10}$  мнимая,  $\Sigma_{10}^* = -\Sigma_{10}$ . Поэтому

$$T^* = e^{-\pi\Sigma_{10}\mathcal{P}}$$

и, следовательно,

$$T^* = e^{2\pi i(i\Sigma_{10})T}.$$

Как мы убедимся далее, спектр собственных значений матрицы  $i\Sigma_{10}$  совпадает со спектром матрицы  $\Sigma_2 \equiv \Sigma_{31}$ . Так как собственные значения матрицы  $\Sigma_2$  будут целыми числами для полей с целым спином и полуцелыми числами для полей с полуцелым спином, то матрица  $T$  будет вещественной для полей с целым спином и мнимой для полей с полуцелым спином.

Чтобы убедиться в справедливости сделанного утверждения, отметим, что согласно (1.1.33) справедливы формулы

$$[\Sigma_2, \Sigma_{30}] = \Sigma_{10}, \quad [\Sigma_{10}, \Sigma_{30}] = \Sigma_2. \quad (2.2.62)$$

Вводя матрицы

$$\Sigma_2(\alpha) = e^{-\alpha\Sigma_{30}}\Sigma_2e^{\alpha\Sigma_{30}}, \quad \Sigma_{10}(\alpha) = e^{-\alpha\Sigma_{30}}\Sigma_{10}e^{\alpha\Sigma_{30}}$$

и используя (2.2.62), получаем

$$\frac{d}{d\alpha}\Sigma_2(\alpha) = \Sigma_{10}(\alpha), \quad \frac{d}{d\alpha}\Sigma_{10}(\alpha) = \Sigma_2(\alpha).$$

Отсюда ясно, что

$$\Sigma_2(\alpha) \equiv e^{-\alpha\Sigma_{30}}\Sigma_2e^{\alpha\Sigma_{30}} = \Sigma_2 \operatorname{ch} \alpha + \Sigma_{10} \operatorname{sh} \alpha.$$

Полагая в этой формуле  $\alpha = \frac{\pi}{2}i$ , находим

$$i\Sigma_{10} = e^{-\frac{\pi}{2}i\Sigma_{30}}\Sigma_2e^{\frac{\pi}{2}i\Sigma_{30}},$$

откуда следует, что спектры матриц  $\Sigma_2$  и  $i\Sigma_{10}$  совпадают.



В заключение отметим, что связь между спином частиц и способом квантования полей можно доказать также, исходя из требования локальности, лоренц-инвариантности и положительной определенности энергии системы [9].

### § 2.3. КВАНТОВАНИЕ СКАЛЯРНОГО И ВЕКТОРНОГО ПОЛЕЙ

**2.3.1. Уравнения движения и перестановочные соотношения для операторов скалярного поля.** Изложив общую теорию квантования полей, перейдем к рассмотрению конкретных полей и начнем с квантования скалярного поля.

Классическая теория этого поля рассматривалась в п. 1.4.1, причем мы считали там это поле комплексным. В соответствии с этим в квантовой теории скалярное поле будем считать неэрмитовым. Поле это является бозонным, так как спин частиц, связанных с полем, равен нулю.

Лагранжиан свободного квантованного скалярного поля, описываемого пятью операторными функциями  $\varphi$ ,  $\varphi^\mu$  (см. (1.4.4)), имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \{\varphi^\mu, \partial_\mu \varphi^+\} + \frac{1}{2} \{\varphi^{\mu+}, \partial_\mu \varphi\} - \frac{1}{2} \{\varphi_\mu^+, \varphi^\mu\} - \frac{1}{2} m^2 \{\varphi, \varphi^+\}. \quad (2.3.1)$$

Отметим, что если считать  $\varphi$ ,  $\varphi^\mu$  не операторами, а  $c$ -числами, то этот лагранжиан перейдет в лагранжиан (1.4.4). От неэрмитовых полей  $\varphi$ ,  $\varphi^\mu$  легко перейти к эрмитовым полям  $\varphi_i$ ,  $\varphi_i^\mu$  ( $i = 1, 2$ ), полагая

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad \varphi^\mu = \varphi_1^\mu + i\varphi_2^\mu.$$

При этом лагранжиан поля (2.3.1) примет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\{\varphi_1^\mu, \partial_\mu \varphi_1\} - \{\varphi_1, \partial_\mu \varphi_1^\mu\} + \{\varphi_2^\mu, \partial_\mu \varphi_2\} - \{\varphi_2, \partial_\mu \varphi_2^\mu\}) - \\ - \varphi_{1\mu} \varphi_1^\mu - \varphi_{2\mu} \varphi_2^\mu - m^2 \varphi_1 \varphi_1 - m^2 \varphi_2 \varphi_2 + \frac{1}{2} \partial_\mu (\{\varphi_1, \varphi_1^\mu\} + \{\varphi_2, \varphi_2^\mu\}).$$

Этот лагранжиан будет иметь структуру общего лагранжиана (2.1.25), если опустить последнее слагаемое. Однако удобнее пользоваться не этим лагранжианом, а (2.3.1), в котором независимыми полями считаются не  $\varphi_i$ ,  $\varphi_i^\mu$ , а  $\varphi$ ,  $\varphi^\mu$ ,  $\varphi^+$ ,  $\varphi^{\mu+}$ .

Вариация полного действия скалярного поля согласно (2.1.51) определяется формулой

$$\delta W = G_1(t_2) - G_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{F}(x),$$

где

$$G_1(t) = \frac{1}{2} \int d^3x (\{\varphi^0, \delta\varphi^+\} + \{\varphi^{0+}, \delta\varphi\});$$

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2} \{\delta\varphi^\mu, \partial_\mu \varphi^+ - \varphi_\mu^+\} + \frac{1}{2} \{\delta\varphi^{\mu+}, \partial_\mu \varphi - \varphi_\mu\} - \\ - \frac{1}{2} \{\delta\varphi, \partial_\mu \varphi^{\mu+} + m^2 \varphi^+\} - \frac{1}{2} \{\delta\varphi^+, \delta_\mu \varphi^\mu + m^2 \varphi\}. \quad (2.3.2)$$

Считая вариации полей элементарными, т. е. представляющими собой произвольные  $c$ -числовые функции, из принципа стационарного действия (2.1.53) получаем уравнения поля

$$\begin{aligned} \partial_\mu \varphi - \varphi_\mu &= 0, & \partial_\mu \varphi^\mu + m^2 \varphi &= 0, \\ \partial_\mu \varphi^+ - \varphi_\mu^+ &= 0, & \partial_\mu \varphi^{\mu+} + m^2 \varphi^+ &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Уравнение  $\partial_\mu \varphi - \varphi_\mu = 0$  (так же, как уравнение  $\partial_\mu \varphi^+ - \varphi_\mu^+ = 0$ ) можно разделить на два уравнения:

$$\partial_0 \varphi - \varphi_0 = 0, \quad \partial_k \varphi - \varphi_k = 0.$$

Первое из них будет собственно уравнением поля, а второе — уравнением связи.

Перейдем к установлению перестановочных соотношений для динамически независимых компонент поля, какими согласно (2.3.3) являются поля  $\varphi$ ,  $\varphi^+$ ,  $\varphi^0$ ,  $\varphi^{0+}$ .

Кинематическая часть действия, которая необходима для построения генераторов поля, определяется формулой

$$W_K = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left( \frac{1}{2} \{ \varphi^0, \partial_0 \varphi^+ \} + \frac{1}{2} \{ \varphi^{0+}, \partial_0 \varphi \} \right).$$

В соответствии с п. 2.1.4  $c$ -числовые вариации динамически независимых компонент поля будут допустимыми, так как

$$\delta W_K = G_2(t_1) - G_2(t_2),$$

где

$$G_2(t) = - \int d^3x \left( \frac{1}{2} \{ \delta \varphi^0, \varphi^+ \} + \frac{1}{2} \{ \delta \varphi^{0+}, \varphi \} \right). \quad (2.3.4)$$

Генераторами рассматриваемых  $c$ -числовых вариаций динамически независимых компонент поля будут операторы  $G(t) = G_1(t) + G_2(t)$ . Поэтому согласно (2.3.2), (2.3.4)

$$G(t) = \int d^3x (\varphi^0 \delta \varphi^+ + \varphi^{0+} \delta \varphi - \varphi^+ \delta \varphi^0 - \varphi \delta \varphi^{0+}),$$

причем в соответствии с (2.1.69)

$$\begin{aligned} \delta \varphi &= i [G(t), \varphi], & \delta \varphi^+ &= i [G(t), \varphi^+], \\ \delta \varphi^0 &= i [G(t), \varphi^0], & \delta \varphi^{0+} &= i [G(t), \varphi^{0+}]. \end{aligned}$$

Отсюда следуют перестановочные соотношения для динамически независимых компонент поля

$$\begin{aligned} [\varphi^{0+}(x), \varphi(x')]_{t=t'} &= -i \delta(x - x'), \\ [\varphi^0(x), \varphi^+(x')]_{t=t'} &= -i \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Остальные пары динамически независимых переменных коммутируют между собой при  $t = t'$ .

Получим разновременные перестановочные соотношения для скалярного поля. Для этого отметим, что скалярное поле  $\varphi$  согласно

(2.3.3) подчиняется волновому уравнению

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi = 0. \quad (2.3.6)$$

Решение этого уравнения при заданных значениях  $\varphi$  и  $\partial_0 \varphi$  на гиперплоскости  $t = t'$  имеет вид

$$\varphi(x) = \int d^3 x' (\varphi(x') \partial_0 \Delta(x - x') + \dot{\varphi}(x') \cdot \Delta(x - x')), \quad (2.3.7)$$

где функция  $\Delta(x)$  удовлетворяет волновому уравнению

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta(x) = 0 \quad (2.3.8)$$

и начальным условиями

$$\Delta(x)|_{t=0} = 0, \quad \partial_0 \Delta(x)|_{t=0} = \delta(\mathbf{x}). \quad (2.3.8')$$

Отметим далее, что согласно (2.3.5), (2.3.3)

$$[\varphi(x), \varphi(x')]_{t=t'} = 0,$$

$$[\varphi^+(x), \dot{\varphi}(x')]_{t=t'} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Поэтому, используя (2.3.7), легко видеть, что

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = 0, \quad (2.3.9)$$

$$[\varphi(x), \varphi^+(x')] = -i\Delta(x - x').$$

Найдем явный вид функции  $\Delta$ . Разложим для этого функцию  $\Delta$  в пространственный интеграл Фурье

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{i p x} \Delta(\mathbf{p}, t).$$

Тогда фурье-компонента  $\Delta(\mathbf{p}, t)$  будет удовлетворять уравнению

$$(\partial_0^2 + p_0^2) \Delta(\mathbf{p}, t) = 0, \quad p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

и начальным условиями

$$\Delta(\mathbf{p}, t)|_{t=0} = 0, \quad \partial_0 \Delta(\mathbf{p}, t)|_{t=0} = 1.$$

Отсюда следует, что  $\Delta(\mathbf{p}, t) = \frac{\sin p_0 t}{p_0}$  и поэтому<sup>11</sup>

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{i p x} \frac{\sin p_0 t}{p_0}, \quad p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (2.3.10)$$

Легко видеть, что эту формулу можно переписать в виде

$$\Delta(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 p d p_0 e^{i p x - i p_0 t} \operatorname{sgn} p_0 \delta(\mathbf{p}^2 + m^2 - p_0^2),$$

или

$$\Delta(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 p e^{-i p x} \operatorname{sgn} p_0 \delta(p^2 - m^2). \quad (2.3.11)$$

<sup>11</sup> Функция  $\Delta(x)$  была введена Иорданом и Паули [13].

Из формулы (2.3.9) следует

$$\Delta(x) = \begin{cases} f(x^2), & t > 0, \\ -f(x^2), & t < 0, \end{cases}$$

где  $f$  — некоторая функция инварианта  $x^2$ . Так как  $\Delta(x, 0) = 0$ , то  $\Delta(x) = 0$  при  $x^2 < 0$ .

Функцию  $\Delta(x)$  также можно представить в виде

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{c_0} d^4 p \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2}, \quad (2.3.12)$$

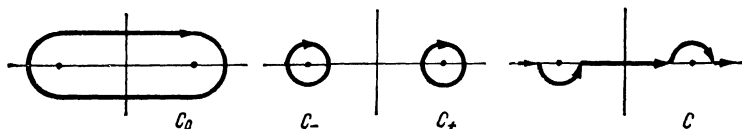


Рис. 1

где контур интегрирования в комплексной плоскости  $p_0$  показан на рис. 1. В справедливости этой формулы легко убедиться, вычисляя интеграл по  $p_0$  с помощью вычетов.

Операторы  $\varphi(x)$ ,  $\varphi^+(x)$ , удовлетворяющие волновому уравнению (2.3.6), можно разложить по плоским волнам (см. (1.4.6)):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^+ e^{ipx}), \quad (2.3.13)$$

$$\varphi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} (a_{\mathbf{p}}^+ e^{ipx} + b_{\mathbf{p}} e^{-ipx}).$$

Здесь  $V = L^3$  — нормировочный объем (компоненты вектора  $\mathbf{p}$  принимают дискретные значения  $p_i = \frac{2\pi n_i}{L}$ ,  $n_i$  — целые числа) и коэффициенты разложения  $a_{\mathbf{p}}$ ,  $b_{\mathbf{p}}$ ,  $a_{\mathbf{p}}^+$ ,  $b_{\mathbf{p}}^+$  представляют собой, как и  $\varphi$ ,  $\varphi^+$ , операторы, действующие в пространстве векторов состояний  $\Phi$ . Так как  $\varphi^+$  — оператор, эрмитово сопряженный оператору  $\varphi$ , то операторы  $a_{\mathbf{p}}^+$ ,  $b_{\mathbf{p}}^+$  эрмитово сопряжены по отношению к операторам  $a_{\mathbf{p}}$ ,  $b_{\mathbf{p}}$ .

Подставляя (2.3.13) в (2.3.9), легко видеть, что перестановочные соотношения (2.3.9) будут удовлетворяться, если

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^+] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}'}^+] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \quad (2.3.12')$$

и все другие пары операторов  $a$ ,  $b$ ,  $a^+$ ,  $b^+$  коммутируют между собой ( $\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = 0$ ,  $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'$  и  $\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}} = 1$ ).

**2.3.2. Операторы энергии — импульса и заряда скалярного поля.** Построим операторы энергии — импульса и заряда скалярного поля.

Оператор энергии — импульса  $P_{\mu}$  согласно (2.2.29) определяет генератор  $G$  вариаций операторов поля, соответствующих пространственно-временным смещениям

$$\delta\varphi = -\varepsilon^{\mu} \partial_{\mu} \varphi, \quad \delta\varphi^{\nu} = -\varepsilon^{\mu} \partial_{\mu} \varphi^{\nu}, \quad \delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu}. \quad (2.3.13')$$

Этот генератор согласно (2.2.17) определяется формулой

$$G = -\varepsilon^\mu P_\mu, \quad P_\mu = \int d^3x T_\mu^0, \quad (2.3.14)$$

$$T_\mu^\lambda = \frac{1}{2} (\{\varphi^\lambda, \varphi_\mu^+\} + \{\varphi^{\lambda+}, \varphi_\mu\}) - \delta_\mu^\lambda \mathcal{L},$$

где согласно (2.3.1), (2.3.3)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \{\varphi^\nu, \varphi_\nu^+\} - \frac{1}{2} m^2 \{\varphi, \varphi^+\}.$$

Лагранжиан (2.3.1) инвариантен по отношению к фазовым преобразованиям

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{-i\alpha} \varphi, \quad \varphi_\mu \rightarrow \varphi'_\mu = e^{-i\alpha} \varphi_\mu \quad (2.3.15)$$

( $\alpha$  — вещественная величина). Поэтому согласно общей теории мы можем построить сохраняющийся ток  $\mathcal{J}^\mu(x)$  и соответствующий ему сохраняющийся заряд  $Q = \int d^3x \mathcal{J}^0(x)$ . Так как для бесконечно малых преобразований (2.3.15)  $\delta\varphi = -i\alpha\varphi$ ,  $\delta\varphi_\mu = -i\alpha\varphi_\mu$  вариация кинематической части действия равна нулю, то будет равен нулю оператор  $G_2$  из формулы (2.1.57). Поэтому согласно (2.1.51), (2.3.1) генератором фазовых вариаций будет оператор

$$G \equiv G_1 = \alpha \int d^3x \mathcal{J}^0(x) \equiv \alpha Q, \quad (2.3.16)$$

$$\mathcal{J}^\mu(x) = \frac{i}{2} (\{\varphi^\mu, \varphi^+\} - \{\varphi^{\mu+}, \varphi\}).$$

Оператор  $\alpha Q$  является генератором фазовых преобразований. Поэтому

$$[Q, \varphi] = -\varphi, \quad [Q, \varphi^+] = \varphi^+. \quad (2.3.17)$$

Подставляя далее в (2.3.17) разложения (2.3.13), получаем

$$[Q, a_p] = -a_p, \quad [Q, b_p^+] = -b_p^+, \quad (2.3.18)$$

$$[Q, a_p^+] = a_p^+, \quad [Q, b_p] = b_p.$$

Наконец, используя общую формулу (2.2.31)

$$i\partial_\mu \varphi = -[P_\mu, \varphi], \quad (2.3.17')$$

находим

$$[P_\mu, a_p] = -p_\mu a_p, \quad [P_\mu, b_p^+] = p_\mu b_p^+, \quad (2.3.19)$$

$$[P_\mu, a_p^+] = p_\mu a_p^+, \quad [P_\mu, b_p] = -p_\mu b_p.$$

Покажем, как строятся векторы состояний скалярного поля. Введем вектор состояния вакуума

$$a_p \Phi_0 = b_p \Phi_0 = 0 \quad (2.3.20)$$

или

$$\varphi^{(+)}(x) \Phi_0 = \varphi^{+(+)}(x) \Phi_0 = 0, \quad (2.3.20')$$

где знаком (+) обозначена положительно частотная часть операторов: положительно частотная часть  $f^{(+)}(t)$  некоторой функции (или оператора)  $f(t)$  определяется так:

$$f^{(+)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} f(\omega),$$

где  $f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t)$  — фурье-компонента функции  $f(t)$ ; отрицательно частотная часть функции  $f(t)$  определяется формулой

$$f^{(-)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 d\omega e^{-i\omega t} f(\omega).$$

Отметим, что определение вакуума (2.3.30) является согласно (2.3.19) непосредственным следствием требования отсутствия состояний с энергией, меньшей энергии вакуума.

Определив вектор состояний вакуума, можно построить гильбертово пространство состояний скалярного поля

$$|p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_m\rangle \equiv a_{p_1}^+ \dots a_{p_n}^+ b_{q_1}^+ \dots b_{q_m}^+ \Phi_0. \quad (2.3.21)$$

При этом скалярное произведение векторов состояний  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  мы определим так, чтобы операторы  $a^+$  и  $b^+$  были операторами, эрмитово-сопряженными по отношению к  $a$  и  $b$ :

$$(\Phi_1, a^+ \Phi_2) = (a \Phi_1, \Phi_2), \quad (\Phi_1, b^+ \Phi_2) = (b \Phi_1, \Phi_2) \quad (2.3.21')$$

и вектор состояния вакуума  $\Phi_0$  был нормирован на единицу

$$(\Phi_0, \Phi_0) = 1.$$

Отсюда и из перестановочных соотношений (2.3.12) следует, что

$$\begin{aligned} \langle p'_1 \dots p'_n; q'_1 \dots q'_m | p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_m \rangle = \\ = \delta_{n'n} \delta_{m'm} \prod_{p_1 p_1} \delta_{p'_1 p_1} \dots \delta_{p'_n p_n} \prod_{q_1 q_1} \delta_{q'_1 q_1} \dots \delta_{q'_m q_m}, \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

где суммирование распространяется на все перестановки величин  $p'_1 \dots p'_n$  и  $q'_1 \dots q'_m$ .

Из определения  $\Phi_0$  и формул (2.3.14), (2.3.16) следует, что энергия — импульс и заряд вакуума отличны от нуля (даже равны бесконечности!). Вместе с тем ясно, что энергия, импульс и заряд вакуума должны равняться нулю. Поэтому мы должны переопределить операторы энергии — импульса и заряда скалярного поля.

Введем с этой целью определенное упорядочение операторов поля, когда встречается их произведение. Предположим вначале, что операторы, произведение которых мы упорядочиваем, являются либо положительно частотными, либо отрицательно частотными частями операторов поля. Тогда под нормальным произведением (или  $N$ -произведением) таких операторов, которое обозначается:  $\varphi^{(+)}(x_1) \dots \varphi^{(-)}(x_n)$ ; будем понимать оператор

$$:\varphi^{(+)}(x_1) \dots \varphi^{(-)}(x_n): = \varphi^{(-)}(x_n) \dots \varphi^{(+)}(x_1), \quad (2.3.23)$$

в котором операторы типа  $\varphi^{(+)}$  расположены правее операторов типа  $\varphi^{(-)}$  (так как согласно (2.3.13) операторы типа  $\varphi^{(+)}$  коммутируют друг с другом, то их упорядочивать не нужно: аналогичное утверждение справедливо и для операторов типа  $\varphi^{(-)}$ ).

В общем случае, когда  $\varphi = \varphi^{(+)} + \varphi^{(-)}$ , нормальное произведение определяется формулой

$$: \dots \varphi \dots : = : \dots \varphi^{(+)} \dots : + : \dots \varphi^{(-)} \dots : \quad (2.3.24)$$

вместе с формулой (2.3.23). Так как для операторов, удовлетворяющих волновому уравнению, разбиение на положительно и отрицательно частотные части является релятивистски инвариантным, то и определение  $N$ -произведения также является релятивистски инвариантным.

Переопределим операторы энергии — импульса и заряда. Именно под тензором энергии — импульса  $T_\mu^\nu$  и вектором тока  $\mathcal{J}^\mu$  будем понимать нормально упорядоченные операторы (2.3.14), (2.3.16)

$$T_\mu^\lambda = : \varphi^\lambda \varphi_\mu^+ + \varphi^{\lambda+} \varphi_\mu - \delta_\mu^\lambda (\varphi^\nu \varphi_\nu^+ - m^2 \varphi \varphi^+) :, \quad (2.3.25)$$

$$\mathcal{J}^\mu = i : \varphi^\mu \varphi^+ - \varphi^{\mu+} \varphi :.$$

Переопределенные таким образом операторы  $P_\mu$  и  $Q$  отличаются от введенных ранее операторов  $c$ -числовым слагаемым и поэтому также будут удовлетворять уравнениям (2.3.18), (2.3.19). При этом будут справедливы соотношения

$$P_\mu \Phi_0 = Q \Phi_0 = 0. \quad (2.3.26)$$

Из этих формул и формул (2.3.18), (2.3.19) следует

$$P_\mu |p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_m\rangle =$$

$$= (p_1 + \dots + p_n + q_1 + \dots + q_m) |p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_m\rangle,$$

$$Q |p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_m\rangle = (n - m) |p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_m\rangle.$$

Эти формулы и формулы (2.3.21) позволяют интерпретировать  $a_p^+$  как оператор рождения скалярной частицы с импульсом  $p$  и зарядом  $+1$ , а  $b_q^+$  — как оператор рождения скалярной частицы с импульсом  $q$  и зарядом  $-1$  (античастицы). Так как согласно (2.3.12)

$$a_p |p'\rangle = \delta_{pp'} |0\rangle, \quad b_q |q'\rangle = \delta_{qq'} |0\rangle,$$

( $|0\rangle \equiv \Phi_0$ ), то операторы  $a_p$ ,  $b_q$  можно интерпретировать как операторы уничтожения скалярных частиц с импульсами  $p$  и  $q$  и зарядами  $+1$ ,  $-1$ .

**2.3.3. Связи между операторами скалярного поля.** В теории матрицы рассеяния при построении теории возмущений важную роль играет понятие хронологического произведения ( $T$ -произведения) операторов поля и связи между операторами.

$T$ -произведение операторов  $\varphi(x)$  скалярного поля определяется формулой

$$T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi^+(x_k) \dots \varphi(x_n) \} = \varphi(x_{i_1}) \dots \varphi^+(x_{i_l}) \dots \varphi(x_{i_n}), \quad (2.3.27)$$

где  $t_{i_1} > t_{i_2} > \dots > t_{i_n}$  (с правой стороны равенства записаны те же операторы, что и с левой, но расположенные в хронологическом порядке). Такое определение является релятивистски инвариантным, если  $x_i \neq x_j$ . Действительно, если точки  $x_{i_1}$  и  $x_{i_2}$  разделены времениподобным интервалом, то неравенство  $t_{i_1} > t_{i_2}$  не зависит от выбора системы отсчета; если же точки  $x_{i_1}$  и  $x_{i_2}$  разделены пространственноподобным интервалом, то  $\varphi(x_{i_1})$  и  $\varphi^+(x_{i_2})$  коммутируют между собой (так как  $\Delta(x) = 0$  для  $x^2 < 0$ ), в этом случае операторы  $\varphi(x_{i_1})$ ,  $\varphi^+(x_{i_2})$  можно расставлять в произвольном порядке (более детальное обсуждение вопроса о релятивистской инвариантности  $T$ -произведений в случае, когда  $x_{i_1} = x_{i_2}$ , проведено в п. 3.2.5; при  $x_{i_1} = x_{i_2}$ ,  $T$ -произведение фактически не определено).

Определим связь между операторами  $u(x)$ ,  $v(x')$  ( $u(x)$  и  $v(x)$  — операторы типа  $\varphi(x)$ ,  $\varphi^+(x)$ ), которая обозначается через  $\underline{u(x)v(x')}$ :

$$\underline{u(x)v(x')} = T\{u(x)v(x')\} - :u(x)v(x'):. \quad (2.3.28)$$

Из определения  $T$ - и  $N$ -произведений легко видеть, что

$$\underline{u(x)v(x')} = \begin{cases} [u^{(+)}(x), v^{(-)}(x')], & t > t', \\ -[u^{(-)}(x), v^{(+)}(x')], & t < t'. \end{cases}$$

Таким образом, связи представляют собой  $c$ -числовые функции, и поэтому

$$\underline{u(x)v(x')} = (\Phi_0, T\{u(x)v(x')\} \Phi_0) \quad (2.3.29)$$

(мы учли, что  $(\Phi_0, :u(x)v(x') : \Phi_0) = 0$ ). Используя далее соотношения (2.3.9), получаем

$$\begin{aligned} [\varphi^{(+)}(x), \varphi^{+(-)}(x')] &= -i\Delta^{(+)}(x-x'), & [\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(x')] &= 0, \\ [\varphi^{(-)}(x), \varphi^{+(-)}(x')] &= -i\Delta^{(-)}(x-x'), & [\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(x')] &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

где  $\Delta^{(\pm)}(x)$  — положительно и отрицательно частотные части функции  $\Delta(x)$ . Поэтому

$$\underline{\varphi(x)\varphi(x')} = 0, \quad \underline{\varphi^+(x)\varphi^+(x')} = 0$$

и

$$\underline{\varphi(x)\varphi^+(x')} = -i\Delta^c(x-x'), \quad (2.3.31)$$

где

$$\Delta^c(x) = \begin{cases} \Delta^{(+)}(x), & t > 0, \\ -\Delta^{(-)}(x), & t < 0. \end{cases}$$

Из формулы (2.3.12) следует

$$\Delta^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_{\pm}} d^4p \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2}, \quad (2.3.32)$$



где  $C_{\pm}$  — контур интегрирования в комплексной плоскости  $p_0$  (см. рис. 1). Отсюда вытекает единое представление для функции  $\Delta^c(x)$ :

$$\Delta^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4p \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2}, \quad (2.3.33)$$

где интегрирование в комплексной плоскости  $p_0$  производится по контуру  $C$ , показанному на рис. 1. В справедливости последней формулы легко убедиться, используя теорему о вычетах и то, что вследствие экспоненты  $e^{-ip_0 t}$  при  $t > 0$  контур интегрирования  $C$  можно замкнуть в нижней полуплоскости (в результате получится контур  $C_+$ ), а при  $t < 0$  контур  $C$  можно замкнуть в верхней полуплоскости (в результате получится контур  $-C_-$ ).

Функцию  $\Delta^c(x)$ , очевидно, можно переписать в виде

$$\Delta^c(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4p \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} \quad (2.3.34)$$

(контур  $C$  левый полюс обходит снизу, а правый — сверху). Так как при  $\varepsilon \rightarrow +0$  полюса подынтегрального выражения равны

$$p_0 = -\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \left( 1 - \frac{i\varepsilon}{2\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} \right),$$

$$p_0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \left( 1 - \frac{i\varepsilon}{2\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} \right),$$

то контур интегрирования  $C$  можно совместить с действительной осью в плоскости  $p_0$ . Поэтому функцию  $\Delta^c(x)$  можно записать в виде<sup>12</sup>

$$\Delta^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \Delta^c(p), \quad (2.3.35)$$

$$\Delta^c(p) = \frac{1}{m^2 - p^2 - i0} = 2\pi i \delta_+(m^2 - p^2),$$

где  $\delta_{\pm}(\omega)$  — обобщенная функция, определяемая соотношением

$$\delta_{\pm}(\omega) = \mp \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\omega \mp i\eta}, \quad \eta \rightarrow +0. \quad (2.3.36)$$

**2.3.4. Квантование векторного поля.** Перейдем к изучению квантования комплексного векторного поля. Поле это также является бозонным, так как спин частиц, связанных с полем, равен единице.

Лагранжиан свободного квантованного векторного поля, описываемого операторами  $\varphi_{\mu}$ ,  $\varphi_{\mu\nu}$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} \{ \varphi^{\mu\nu\dagger}, \partial_{\nu}\varphi_{\mu} - \partial_{\mu}\varphi_{\nu} \} + \frac{1}{4} \{ \varphi^{\mu\nu}, \partial_{\nu}\varphi_{\mu}^{\dagger} - \partial_{\mu}\varphi_{\nu}^{\dagger} \} + \\ & + \frac{1}{4} \{ \varphi_{\mu\nu}^{\dagger}, \varphi^{\mu\nu} \} + \frac{m^2}{2} \{ \varphi_{\mu}^{\dagger}, \varphi^{\mu} \}. \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

Если поля рассматривать как  $c$ -числовые функции, то этот лагранжиан переходит в лагранжиан (1.4.13).

<sup>12</sup> Функция  $\Delta^c(x)$  (пропагатор) была введена Фейнманом [14].

Согласно (2.1.51) вариация полного действия векторного поля определяется формулой

$$\delta W = G_1(t_2) - G_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{F}(x),$$

где

$$G_1(t) = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \{ \varphi^{\mu 0+}, \delta \varphi_\mu \} + \frac{1}{2} \{ \varphi^{\mu 0}, \delta \varphi_\mu^+ \} \right);$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) = & -\frac{1}{2} \{ \delta \varphi_\mu, \partial_\nu \varphi^{\mu\nu} - m^2 \varphi^{\mu+} \} - \frac{1}{2} \{ \delta \varphi_\mu^+, \partial_\nu \varphi^{\mu\nu} - m^2 \varphi^\mu \} + \\ & + \frac{1}{4} \{ \delta \varphi^{\mu\nu}, \partial_\nu \varphi_\mu^+ - \partial_\mu \varphi_\nu^+ + \varphi_{\mu\nu}^+ \} + \frac{1}{4} \{ \delta \varphi^{\mu\nu+}, \partial_\nu \varphi_\mu - \partial_\mu \varphi_\nu + \varphi_{\mu\nu} \}, \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

откуда непосредственно следуют уравнения поля

$$\varphi_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu, \quad \partial_\nu \varphi^{\mu\nu} - m^2 \varphi^\mu = 0 \quad (2.3.39)$$

и аналогичные уравнения для эрмитово сопряженного поля. Так как  $\varphi_{\mu\nu} = -\varphi_{\nu\mu}$ , то из этих уравнений вытекают следующие уравнения для векторного поля  $\varphi_\mu$ :

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi^\nu = 0, \quad \partial_\mu \varphi^\mu = 0. \quad (2.3.40)$$

Из уравнений (2.3.39) видно, что динамически независимыми являются  $\varphi_k, \varphi_{k0}, \varphi_k^+, \varphi_{k0}^+ (k = 1, 2, 3)$ .

Перейдем к установлению перестановочных соотношений для этих переменных. Кинематическая часть действия определяется формулой

$$W_K = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left( \frac{1}{2} \{ \varphi^{k0+}, \partial_0 \varphi_k \} + \frac{1}{2} \{ \varphi^{k0}, \partial_0 \varphi_k^+ \} \right).$$

Отсюда следует, что  $c$ -числовые вариации  $\delta \varphi_k, \delta \varphi_k^+, \delta \varphi^{k0}, \delta \varphi^{k0+}$  будут допустимыми, так как

$$\delta W_K = G_2(t_1) - G_2(t_2),$$

где

$$G_2(t) = - \int d^3x \left( \frac{1}{2} \{ \delta \varphi^{k0+}, \varphi_k \} + \frac{1}{2} \{ \delta \varphi^{k0}, \varphi_k^+ \} \right). \quad (2.3.41)$$

Поэтому генератор  $c$ -числовых вариаций согласно (2.3.41), (2.3.38) определяется формулой

$$G(t) = \int d^3x (\varphi^{k0+} \delta \varphi_k + \varphi^{k0} \delta \varphi_k^+ - \varphi_k \delta \varphi^{k0+} - \varphi_k^+ \delta \varphi^{k0}).$$

Отсюда и из (2.1.69) следуют перестановочные соотношения для динамически независимых компонент поля

$$\begin{aligned} [\varphi^{k0+}(x'), \varphi_l(x)]_{t=t'} &= -i \delta_l^k \delta(x - x'), \\ [\varphi^{k0}(x'), \varphi_l^+(x)]_{t=t'} &= -i \delta_l^k \delta(x - x') \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

(коммутаторы для остальных пар динамически независимых переменных равны нулю).

Установим разновременные перестановочные соотношения для  $\varphi_\mu(x)$  и  $\varphi_\nu^+(x')$ . Для этого отметим, что решение задачи Коши для волнового уравнения (2.3.40) имеет по-прежнему вид (2.3.7):

$$\varphi_\mu(x) = \int_{t''=t'} d^3x'' (\Delta(x-x'') \partial_0'' \varphi_\mu(x'') + \varphi_\mu(x'') \partial_0 \Delta(x-x'')), \quad (2.3.43)$$

где  $\Delta(x)$  определяется формулой (2.3.12). Отметим, что не все операторы под знаком интеграла являются динамически независимыми. Именно при  $\mu = 0$  не будут динамически независимыми величины  $\varphi_0$  и  $\partial_0 \varphi_0$ ; при  $\mu = k$  не будет динамически независимой величина  $\partial_0 \varphi_k$ . Однако эти величины с помощью уравнений поля (2.3.39) можно выразить через динамически независимые переменные:

$$\begin{aligned} \varphi^0 &= -\frac{1}{m^2} \partial_k \varphi^{k0}, \quad \partial_0 \varphi^0 = -\partial_k \varphi^k, \\ \partial_0 \varphi_k &= -\left( \delta_k^l + \frac{1}{m^2} \partial_k \partial^l \right) \varphi_{l0}. \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

Используя далее (2.3.43), (2.3.44) и одновременные перестановочные соотношения (2.3.42), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} [\varphi_k(x), \varphi^{l+}(x')] &= i \left( \delta_k^l + \frac{1}{m^2} \partial_k \partial^l \right) \Delta(x-x'), \\ [\varphi_k(x), \varphi^{0+}(x')] &= [\varphi_0(x), \varphi_k^+(x')] = \frac{i}{m^2} \partial_k \partial^0 \Delta(x-x'), \\ [\varphi_0(x), \varphi^{0+}(x')] &= -\frac{i}{m^2} \partial_k \partial^k \Delta(x-x'), \end{aligned}$$

$$[\varphi_\mu(x), \varphi_\nu(x')] = 0.$$

Отмечая, что  $-\frac{1}{m^2} \partial_k \partial^k \Delta(x-x') = \left( 1 + \frac{1}{m^2} \partial_0^2 \right) \Delta(x-x')$ , эти соотношения можно переписать в релятивистски-инвариантном виде

$$\begin{aligned} [\varphi_\mu(x), \varphi^{\nu+}(x')] &= i \left( \delta_\mu^\nu + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial^\nu \right) \Delta(x-x'), \\ [\varphi_\mu(x), \varphi^\nu(x')] &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

(перестановочные соотношения (2.3.45) находятся в соответствии с условием поперечности поля  $\varphi^\mu$ ,  $\partial_\mu \varphi^\mu = 0$ ).

Рассмотрим разложение векторного поля по плоским волнам (1.4.15):

$$\varphi_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\rho\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \{ a_{\rho\lambda} e_{\rho\mu}^{(\lambda)} e^{-i\rho x} + b_{\rho\lambda}^+ e_{\rho\mu}^{(\lambda)*} e^{i\rho x} \}. \quad (2.3.46)$$

В случае операторного векторного поля коэффициенты разложения  $a$ ,  $b^+$  будут операторами. Перестановочные соотношения (2.3.45) будут удовлетворяться, если операторы  $a$ ,  $b$ ,  $a^+$ ,  $b^+$  удовлетворяют

перестановочным соотношениям

$$[a_{p\lambda}, a_{p'\lambda'}^+] = [b_{p\lambda}, b_{p'\lambda'}^+] = \delta_{pp'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (2.3.47)$$

(коммутаторы для других пар операторов  $a$ ,  $a^+$ ,  $b$ ,  $b^+$  обращаются в нуль).

Чтобы дать физическую интерпретацию квантованному векторному полю, необходимо определить операторы вектора энергии — импульса, момента и заряда и, кроме того, ввести вектор состояния вакуума  $\Phi_0$ . Все это можно сделать так же, как в случае скалярного поля. Поэтому мы приведем только основные результаты.

Вектор состояния вакуума определяется формулами

$$\varphi_\mu^{(+)}(x) \Phi_0 = \varphi_\mu^{+(+)}(x) \Phi_0 = 0, \quad (2.3.48)$$

или

$$a_{p\lambda} \Phi_0 = b_{p\lambda} \Phi_0 = 0, \quad (2.3.48')$$

где знак  $(+)$  служит для обозначения положительно частотной части операторов  $\varphi_\mu$ ,  $\varphi_\mu^+$ .

Согласно (2.2.29) оператор энергии — импульса и момента определяется генератором вариации операторов поля, соответствующих пространственно-временным смещениям и поворотам

$$\delta\varphi_\mu = -\varepsilon^\nu \partial_\nu \varphi^\mu + \frac{i}{2} \varepsilon^\lambda{}_\nu (-(\Sigma_\lambda{}^\nu)_\mu{}^\rho + i\delta_\mu^\rho (x^\nu \partial_\lambda - x_\lambda \partial^\nu)) \varphi_\rho, \\ \delta x^\mu = \varepsilon^\mu + \varepsilon^\nu x^\nu$$

(матрицы  $\Sigma_\lambda{}^\nu$  определяются формулами (1.4.20)), а генератор этих вариаций формулой (см. (2.2.17)):

$$G = -\varepsilon^\mu P_\mu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \\ P_\mu = \int d^3x T_\mu{}^0, \quad M^{\mu\nu} = \int d^3x M^{\mu\nu;0}, \quad (2.3.49)$$

где

$$T_\nu{}^\mu = : \varphi^{\lambda\mu} \partial_\nu \varphi_\lambda + \partial_\nu \varphi_\lambda^+ \varphi^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu \varphi_\lambda^+ \varphi^{\lambda\rho} + m^2 \delta_\nu^\mu \varphi_\lambda^+ \varphi^\lambda :; \\ M_\lambda{}^{\nu;\mu} = x_\lambda T^{\nu\mu} - x^\nu T_\lambda{}^\mu - i : \varphi^{\rho\mu} (\Sigma_\lambda{}^\nu)_\rho - \varphi^{\rho\mu} (\Sigma_\lambda{}^{\nu*})_\rho^+ :,$$

причем согласно (1.4.20)

$$(\Sigma_{\lambda\nu})_\mu{}^\rho = i(g_{\lambda\mu} \delta_\nu^\rho - g_{\nu\mu} \delta_\lambda^\rho).$$

Символ  $: \dots :$  служит для обозначения нормального упорядочения операторов, при котором положительно частотные части операторов расположены правее отрицательно частотных частей.

Так как лагранжиан (2.3.37) инвариантен относительно фазовых преобразований

$$\delta\varphi_\mu = -i\alpha\varphi_\mu, \quad \delta\varphi_\mu^+ = i\alpha\varphi_\mu^+,$$

то генератор этих преобразований согласно (2.2.5) будет определяться формулой

$$G = \alpha \int d^3x \mathcal{G}^0(x) \equiv \alpha Q,$$

где

$$\mathcal{G}^\mu(x) = -\frac{i}{2} \{\varphi^{\lambda\mu+}, \varphi_\lambda\} + \frac{i}{2} \{\varphi^{\lambda\mu}, \varphi_\lambda^+\} \rightarrow i: \varphi^{\lambda\mu} \varphi_\lambda^+ - \varphi^{\lambda\mu+} \varphi_\lambda: . \quad (2.3.50)$$

Так же, как и в случае скалярного поля, из соотношений

$$\partial_\nu \varphi_\mu = i [P_\nu, \varphi_\mu], \quad [Q, \varphi_\mu] = -\varphi_\mu,$$

аналогичных соотношениям (2.3.17'), (2.3.17), следует, что  $a_{p\lambda}^+$  представляет собой оператор рождения векторной частицы с импульсом  $\mathbf{p}$  и зарядом  $+1$ ; оператор  $b_{p\lambda}^+$  является оператором рождения векторной античастицы с импульсом  $\mathbf{p}$  и зарядом  $-1$ . Покажем, что справедливости соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{M} n a_{p\lambda}^+ \Phi_0 &= \mu(\lambda) a_{p\lambda}^+ \Phi_0, \\ \mathbf{M} n b_{p\lambda}^+ \Phi_0 &= \mu(\lambda) b_{p\lambda}^+ \Phi_0, \end{aligned} \quad (2.3.51)$$

где  $\mathbf{M}$  — оператор момента количества движения поля;  $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  и функция  $\mu(\lambda)$  определяется формулой

$$\mu(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda = 1, \\ -1, & \lambda = 2, \\ 0, & \lambda = 3. \end{cases}$$

С этой целью отметим, что согласно определениям оператора  $M_{ik}$  и вектора состояния вакуума

$$M_{ik} \Phi_0 = 0.$$

Поэтому, используя соотношение (2.2.32), находим

$$M_{ik} \varphi_\mu(x) \Phi_0 = (-\Sigma_{ik} - i(x_i \partial_k - x_k \partial_i)) \varphi_\mu(x) \Phi_0,$$

$$M_{ik} \varphi_\mu^+(x) \Phi_0 = (-\Sigma_{ik} - i(x_i \partial_k - x_k \partial_i)) \varphi_\mu^+(x) \Phi_0.$$

Подставляя в эти формулы разложение (2.3.46) и учитывая, что

$$\int d^3p f(p) (x_k \partial_l - x_l \partial_k) e^{ipx} = \int d^3p e^{ipx} \left( p_k \frac{\partial}{\partial p^l} - p_l \frac{\partial}{\partial p^k} \right) f(p)$$

( $f(p)$  — произвольная функция  $p$ ), находим

$$\begin{aligned} M_i \frac{1}{V\bar{V}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{2p_0} e_{p\mu}^{(\lambda)*} b_{p\lambda}^+ \Phi_0 &= \frac{1}{V\bar{V}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{V'2p_0} (\Sigma_i e_p^{(\lambda)})_\mu^* b_{p\lambda}^+ \Phi_0 + \\ &+ \varepsilon^{ikl} p_k \frac{\partial}{\partial p^l} \frac{1}{V\bar{V}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{V'2p_0} e_{p\mu}^{(\lambda)*} b_{p\lambda}^+ \Phi_0, \end{aligned}$$

$$M_i \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} e_{p\mu}^{(\lambda)*} a_{p\lambda}^{\dagger} \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} (\Sigma_i e_p^{(\lambda)})_{\mu}^* a_{p\lambda}^{\dagger} \Phi_0 + \\ + \varepsilon^{ikl} p_k \frac{\partial}{\partial p^l} \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} e_{p\mu}^{(\lambda)*} a_{p\lambda}^{\dagger} \Phi_0,$$

где (см. (1.1.34))  $\Sigma^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} \Sigma_{kl}$ ;  $M^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} M_{kl}$ . Умножая эти уравнения на  $n_i = \mathbf{p}_i / |\mathbf{p}|$ , производя суммирование по  $i$  и используя далее формулы (1.4.22), получим соотношения (2.3.51).

Из формул (2.3.51) следует, что в состояниях  $a_{p\lambda}^{\dagger} \Phi_0$ ,  $b_{p\lambda}^{\dagger} \Phi_0$  проекция момента количества движения на направление импульса равна  $\mu(\lambda)$ . Так как проекция орбитального момента на направление импульса равна нулю, то можно сказать, что величина  $\mu(\lambda)$  представляет собой проекцию спинового момента частицы на ее импульс, т. е. спиральность частицы.

Таким образом, операторы  $a_{p\lambda}^{\dagger}$ ,  $a_{p\lambda}$  ( $b_{p\lambda}^{\dagger}$ ,  $b_{p\lambda}$ ) представляют собой операторы рождения и уничтожения векторной частицы с импульсом  $\mathbf{p}$ , спиральностью  $\mu(\lambda)$  и зарядом  $1$  ( $-1$ ).

Для векторного поля так же, как и для скалярного, можно определить  $T$ -произведение операторов поля и связи между операторами. Связи между операторами  $\varphi_{\mu}$ ,  $\varphi_{\nu}$  и  $\varphi_{\mu}^{\dagger}$ ,  $\varphi_{\nu}^{\dagger}$  равны, очевидно, нулю, т. е.

$$\underbrace{\varphi_{\mu}(x) \varphi_{\nu}(x')} = 0, \quad \underbrace{\varphi_{\mu}^{\dagger}(x) \varphi_{\nu}^{\dagger}(x')} = 0, \quad (2.3.52)$$

а связь между операторами  $\varphi_{\mu}$ ,  $\varphi_{\nu}^{\dagger}$  определяется формулой

$$\underbrace{\varphi_{\mu}(x) \varphi_{\nu}^{\dagger}(x')} = i \left( g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \right) \Delta^c(x - x'). \quad (2.3.52')$$

Обратим внимание на то, что вследствие наличия производных  $\partial_{\mu} \partial_{\nu}$  фурье-компоненты связей векторного поля в области больших 4-импульсов не убывают (в отличие от скалярного поля). Поэтому теория векторного поля самого по себе оказывается неперенормируемой.

## § 2.4. КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

**2.4.1. Лагранжиан и уравнения движения квантованного электромагнитного поля.** Как мы видели в § 1.4, лагранжиан классического электромагнитного поля имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Так как электромагнитное поле является векторным и, следовательно, соответствующие ему частицы — фотоны — обладают спином единица, то электромагнитное поле является бозонным. Поэтому в соответствии с общей теорией лагранжиан квантованного электромагнитного поля

следует выбрать в виде <sup>13</sup>

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \{F^{\mu\nu}, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\} + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.4.1)$$

где  $F_{\mu\nu}$  и  $A_\mu$  следует считать независимыми компонентами электромагнитного поля. Уравнения поля, соответствующие этому лагранжиану, имеют вид

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.4.2)$$

Отсюда следует, что уравнения

$$\partial_\nu F^{k\nu} = 0, \quad \partial_0 A_k = \partial_k A_0 + F_{0k}$$

являются собственно уравнениями поля, а уравнения

$$\partial_k F^{0k} = 0, \quad F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$$

уравнениями связи. Таким образом, переменные  $F_{0k}^{(t)}$ ,  $A_k$ , которые можно задавать произвольно, в начальный момент времени являются динамически независимыми (индексом  $t$  обозначена поперечная часть 3-мерного векторного поля).

Видно, что переменную  $A_0$  нельзя выразить через динамически независимые переменные, так как лагранжиан (2.4.1) инвариантен относительно калибровочного преобразования

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}, \quad (2.4.3)$$

и поэтому динамические переменные  $A_\mu$  нашей системы не определяются однозначно динамически независимыми переменными.

Между тем общая теория квантования строилась на основании предположения о том, что все переменные поля можно выразить через динамически независимые переменные. Чтобы обойти эту трудность, следует нарушить калибровочную инвариантность лагранжиана (2.4.1). С этой целью можно ввести дополнительное скалярное поле  $\varphi$  и исходить из лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \{F^{\mu\nu}, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\} + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi} (\varphi^2 - \langle \varphi, \partial_\mu A^\mu \rangle). \quad (2.4.4)$$

Независимыми переменными теперь считаются  $F_{\mu\nu}$ ,  $A_\mu$ ,  $\varphi$  ( $\xi$  — произвольный вещественный параметр).

Чтобы нарушить калибровочную инвариантность, можно и не вводить дополнительное поле  $\varphi$ , а наложить ограничение на 4-потенциал  $A_\mu$ , потребовав, например, поперечность векторного потенциала  $A_k$ ,  $\partial_k A^k = 0$ . Такая калибровка потенциала называется радиационной или кулоновской.

В этом параграфе мы рассмотрим первую возможность, поскольку она приводит к релятивистски инвариантным формулировкам на всех этапах построения теории.

<sup>13</sup> Вопросы, связанные с квантованием электромагнитного поля, рассмотрены в монографиях [15—17].

В теории, основывающейся на радиационной калибровке, явная релятивистская инвариантность теряется. Однако эта калибровка обладает важным преимуществом: в теории, основывающейся на ней, рассматриваются только поперечные фотоны в отличие от релятивистски инвариантной формулировки теории с добавочным полем  $\varphi$ , в которой кроме реальных поперечных рассматриваются еще продольные и скалярные фотоны («духи»).

Радиационная калибровка описывается далее в п. 3.1.1 при изучении взаимодействующих электромагнитного и электронно-позитронного полей, где также доказывается эквивалентность обеих формулировок теории.

Возвращаясь к лагранжиану (2.4.4), запишем следующее выражение для вариации полного действия электромагнитного поля:

$$\delta W = G_1(t_2) - G_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{F}(x),$$

где

$$\begin{aligned} G_1(t) &= -\frac{1}{2} \int d^3x \left( \{F^{0k}, \delta A_k\} + \frac{1}{\xi} \{\varphi, \delta A^0\} \right); \\ \mathcal{F}(x) &= -\frac{1}{4} \{\delta F^{\mu\nu}, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - F_{\mu\nu}\} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \delta A_\nu, \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \partial^\nu \varphi \right\} + \frac{1}{2\xi} \{\delta\varphi, \varphi - \partial_\mu A^\mu\}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Так как электромагнитное поле является бозонным, то при получении уравнений движения элементарные вариации  $\delta A_\mu$ ,  $\delta F_{\mu\nu}$ ,  $\delta\varphi$  следует считать коммутирующими с операторами поля. Приравнявая нулю величины, стоящие перед вариациями  $\delta A_\mu$ ,  $\delta F_{\mu\nu}$ ,  $\delta\varphi$  в выражении для  $\mathcal{F}$ , получаем

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} \partial^\mu \varphi &= 0, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ \partial_\mu A^\mu &= \varphi. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Уравнения

$$\begin{aligned} \partial_0 A^0 &= -\partial_k A^k + \varphi, \quad \partial_0 A_k = \partial_k A_0 + F_{0k}, \\ \partial_0 F^{k0} &= \frac{1}{\xi} \partial^k \varphi - \partial_l F^{kl}, \quad \partial^0 \varphi = \xi \partial_k F^{0k} \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

будут теперь собственно уравнениями поля, а величины  $A_\mu$ ,  $F_{0k}$ ,  $\varphi$  — динамически независимыми переменными. Уравнения же

$$F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k \quad (2.4.8)$$

будут уравнениями связи, определяющими  $F_{kl}$  (магнитное поле) через динамически независимые переменные  $A_k$ .

Таким образом, видим, что, введя добавочное поле  $\varphi$ , мы добились того, что все переменные поля стали строго фиксированными, т. е. все они выражаются через динамически независимые переменные.



Из уравнений (2.4.6) вытекает, что поля  $A_\mu$  и  $\varphi$  удовлетворяют волновым уравнениям

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0, \quad \partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0. \quad (2.4.9)$$

В классической теории уравнения (2.4.6) допускают решения с  $\varphi = 0$ . Эти решения соответствуют решениям уравнений Максвелла при лоренцевой калибровке потенциалов,  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . В квантовой теории полагать  $\varphi = 0$  нельзя, так как кроме уравнений поля существуют еще перестановочные соотношения (см. далее п. 2.4.2), которые несовместимы с условием  $\varphi = 0$ .

**2.4.2. Перестановочные соотношения для операторов электромагнитного поля.** Установим перестановочные соотношения для динамически независимых переменных электромагнитного поля  $A_\mu$ ,  $F_{k0}$ ,  $\varphi$ .

Кинематическая часть действия, которая необходима для построения генераторов поля, определяется формулой

$$W_K = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left( -\frac{1}{2} \{F^{0k}, \partial_0 A_k\} - \frac{1}{2\xi} \{\varphi, \partial_0 A^0\} \right). \quad (2.4.10)$$

Отсюда следует, что  $c$ -числовые вариации  $\delta A_\mu(x)$ ,  $\delta F_{0k}(x)$ ,  $\delta \varphi(x)$ , являющиеся функциями только пространственных координат, будут допустимыми, т. е. будет выполняться соотношение

$$\delta W_K = G_2(t_1) - G_2(t_2),$$

где

$$G_2(t) = \int d^3x \left( \delta F^{0k} A_k + \frac{1}{\xi} \delta \varphi A^0 \right).$$

Поэтому, учитывая, что согласно (2.4.5) для рассматриваемых  $c$ -числовых вариаций

$$G_1(t) = - \int d^3x \left( F^{0k} \delta A_k + \frac{1}{\xi} \varphi \delta A^0 \right),$$

получаем следующее выражение для генератора  $G(t) \equiv G_1(t) + G_2(t)$  этих вариаций:

$$G(t) = \int d^3x \left( \delta F^{0k} A_k - F^{0k} \delta A_k + \frac{1}{\xi} \delta \varphi A^0 - \frac{1}{\xi} \varphi \delta A^0 \right). \quad (2.4.11)$$

Вариации  $\delta A_\mu$ ,  $\delta F_{0k}$ ,  $\delta \varphi$  связаны с оператором  $G$  соотношениями

$$\delta A_\mu(x) = i[G(t), A_\mu(x)], \quad \delta F^{0k} = i[G, F^{0k}], \quad \delta \varphi = i[G, \varphi].$$

Отсюда и из (2.4.11) следуют перестановочные соотношения для динамически независимых компонент поля:

$$\begin{aligned} [F^{0k}(x'), A_l(x)]_{t=t'} &= i\delta^k_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\varphi(x'), A^0(x)]_{t=t'} &= i\xi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

(коммутаторы для остальных пар динамически независимых переменных равны нулю). Для установления разновременных перестановочных

соотношений и введения операторов рождения и уничтожения фотонов найдем решения связанной системы волновых уравнений (2.4.9):

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu(x) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial^\nu A_\nu(x) = 0.$$

Пространственную часть потенциала  $A_\mu$  всегда можно представить в виде

$$A_k(x) = A_k^{(t)}(x) + A_k^{(l)}(x), \quad (2.4.13)$$

где  $A_k^{(t)}(x)$  — поперечная часть 3-мерного векторного поля  $A_k(x)$  и  $A_k^{(l)}(x)$  — продольная его часть:

$$A_k^{(t)}(x) = \partial_k \chi(x), \quad \partial^k A_k^{(l)}(x) = 0. \quad (2.4.14)$$

Поэтому согласно (2.4.9) оператор  $A_k^{(t)}(x)$  удовлетворяет обычному волновому уравнению

$$\partial_\mu \partial^\mu A_k^{(t)}(x) = 0, \quad (2.4.15)$$

а операторы  $A_0(x)$  и  $\chi(x)$  — связанной системе уравнений

$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial^\nu A_0 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) (\partial_0^2 A_0 + \partial_0 \partial^k \partial_k \chi) &= 0, \\ \partial_\nu \partial^\nu \chi - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) (\partial_0 A_0 + \partial^k \partial_k \chi) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Общее решение этой системы уравнений будем искать в виде

$$\chi(x) = a(x) + tb(x), \quad A_0(x) = c(x) + t\partial_0 b(x), \quad (2.4.17)$$

где функции  $a, b, c$  удовлетворяют волновому уравнению

$$\partial_\mu \partial^\mu f(x) = 0, \quad f = a, b, c \quad (2.4.18)$$

(множитель  $t$  появляется вследствие того, что при разложении решений по плоским волнам  $\exp ipx$  собственные значения  $\omega$  являются вырожденными). Подставляя (2.4.17) в (2.4.16), получаем

$$c(x) = \partial_0 a(x) - b(x) - \frac{2\xi}{1-\xi} b(x) = \partial_0 a(x) - \frac{1+\xi}{1-\xi} b(x).$$

Таким образом,

$$\chi(x) = a(x) + tb(x), \quad A_0(x) = \partial_0 \chi(x) - \frac{2}{1-\xi} b(x). \quad (2.4.19)$$

Общее решение системы (2.4.16) определяется четырьмя произвольными функциями пространственных координат (задача Коши). Так как величины  $a(x), b(x)$  также определяются четырьмя произвольными функциями координат, то формулы (2.4.19) определяют общее решение системы уравнений (2.4.16).

4-Потенциал  $A_\mu(x)$  окончательно можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= A_\mu^{(t)}(x) + A_\mu^{(l)}(x), \\ A_\mu^{(l)}(x) &= \partial_\mu (a(x) + tb(x)) - \frac{2}{1-\xi} b(x) \delta_\mu^0 \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

(мы считаем, что  $A_0^{(l)}(x) \equiv 0$ ). Из этих формул следует

$$\partial^\mu A_\mu(x) = -\frac{2\xi}{1-\xi} \partial_0 b(x). \quad (2.4.21)$$

Динамически независимыми компонентами поля являются  $A_k^{(l)}$ ,  $F_{0k}^{(l)}$  и  $A_k^{(l)}$ ,  $F_{0k}^{(l)}$ ,  $A_0$ ,  $\varphi$ . Последние переменные согласно (2.4.20), (2.4.6) можно выразить через  $a$ ,  $b$ ,  $\partial_0 a$ ,  $\partial_0 b$ :

$$\varphi(x) = -\frac{2\xi}{1-\xi} \partial_0 b(x), \quad F_{0k}^{(l)}(x) = \frac{2}{1-\xi} \partial_k b(x),$$

$$A_k^{(l)}(x) = \partial_k a(x) + t \partial_k b(x), \quad A_0(x) = \partial_0 a(x) + t \partial_0 b(x) - \frac{1+\xi}{1-\xi} b(x).$$

Из одновременных перестановочных соотношений (2.4.12) следуют одновременные перестановочные соотношения для  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $\partial_0 a(x)$ ,  $\partial_0 b(x)$ :

$$[\partial_0 a(x), \partial_0 b(x')]_{t=t'} = \frac{i}{2} (1-\xi) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$

$$[\partial_s a(x), \partial_k b(x')]_{t=t'} = \frac{i}{2} (1-\xi) \delta_{ks}^{(l)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \quad (2.4.22)$$

$$[\partial_s \partial_0 a(x), \partial_k a(x')]_{t=t'} = -\frac{i}{2} (1+\xi) \delta_{ks}^{(l)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$

где

$$\delta_{ks}^{(l)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{k_k k_s}{|\mathbf{k}|^2}$$

— продольная часть тензора  $\delta_{ks} \delta(\mathbf{x})$ . Остальные коммутаторы равны нулю:

$$[b(x), b(x')]_{t=t'} = [b(x), \partial_0 b(x')]_{t=t'} = 0,$$

$$[\partial_0 b(x), \partial_k a(x')]_{t=t'} = [\partial_k b(x), \partial_0 a(x')]_{t=t'} = 0, \quad (2.4.22')$$

$$[\partial_0 a(x), \partial_0 a(x')]_{t=t'} = [\partial_k a(x'), \partial_s a(x)]_{t=t'} = 0.$$

Так как операторы  $a(x)$  и  $b(x)$  удовлетворяют волновому уравнению (2.4.18), то их можно разложить на плоские волны

$$a(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(1+\xi)^{1/2}}{2\omega^{3/2}} (c_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - c_{\mathbf{k}3}^+ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}), \quad (2.4.23)$$

$$b(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1-\xi}{2(1+\xi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \{ (c_{\mathbf{k}3} - c_{\mathbf{k}0}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + (c_{\mathbf{k}3}^+ - c_{\mathbf{k}0}^+) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \},$$

где операторы  $c_{\mathbf{k}3}$ ,  $c_{\mathbf{k}3} - c_{\mathbf{k}0}$  являются коэффициентами разложения. Коэффициенты перед  $c_{\mathbf{k}3}$  и  $c_{\mathbf{k}3} - c_{\mathbf{k}0}$  в разложениях (2.4.23) выбраны таким образом, чтобы операторы  $c_{\mathbf{k}3}$ ,  $c_{\mathbf{k}0}$  удовлетворяли согласно (2.4.22) условиям коммутации

$$[c_{\mathbf{k}3}, c_{\mathbf{k}'3}^+] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [c_{\mathbf{k}0}, c_{\mathbf{k}'0}^+] = -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (2.4.24)$$

(остальные коммутаторы равны нулю). Формулы (2.4.23) вместе с (2.4.20) определяют разложения  $A_0(x)$  и  $A_k^{(t)}(x)$  на плоские волны. Разложение на плоские волны оператора  $A_\mu^{(t)}(x)$  имеет, очевидно, вид

$$A_\mu^{(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{c_{k\lambda} e_{k\mu}^{(\lambda)} e^{-ikx} + c_{k\lambda}^+ e_{k\mu}^{(\lambda)*} e^{ikx}\}, \quad (2.4.25)$$

где векторы поляризации  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  для  $(\lambda = 1, 2)$  определяются формулами (1.4.37) и операторы  $c_{k\lambda}, c_{k\lambda}^+$  ( $\lambda = 1, 2$ ) согласно (2.4.12) удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}^+] = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad [c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}] = 0, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2 \quad (2.4.26)$$

и коммутируют с операторами  $c_{k0}, c_{k0}^+, c_{k3}, c_{k3}^+$ .

Рассмотрим случай  $\xi = 1$  (калибровка Фейнмана). Тогда

$$a(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\omega \sqrt{2\omega}} (c_{k3} e^{-ikx} - c_{k3}^+ e^{ikx}),$$

$$\frac{1}{1-\xi} b(x) \xrightarrow{\xi \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{2\sqrt{2\omega}} \{(c_{k3} - c_{k0}) e^{-ikx} + (c_{k3}^+ - c_{k0}^+) e^{ikx}\}$$

(из последней формулы следует, что  $b(x) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0$ ), и поэтому согласно (2.4.20)

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k\lambda=0}^3 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{c_{k\lambda} e_{k\mu}^{(\lambda)} e^{-ikx} + c_{k\lambda}^+ e_{k\mu}^{(\lambda)*} e^{ikx}\}. \quad (2.4.27)$$

Эта формула точно совпадает с формулой (1.4.34) в классической теории.

Перейдем, наконец, к рассмотрению разновременных перестановочных соотношений для операторов поля.

При  $\xi = 1$  из формул (2.4.27), (2.4.24), (2.4.26) непосредственно вытекает, что

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')]_{\xi=1} = i g_{\mu\nu} \mathcal{D}(x-x'), \quad (2.4.28)$$

где функция  $\mathcal{D}(x)$  совпадает с функцией  $\Delta(x)$  при  $m=0$ :

$$\mathcal{D}(x) = \Delta(x)|_{m=0} = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{c_0} d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2} \quad (2.4.29)$$

(см. п. 2.3.1).

Перейдем к рассмотрению случая  $\xi \neq 1$ . Так как оператор  $b(x)$  удовлетворяет волновому уравнению (2.4.18) и перестановочным соотношениям (2.4.22), то

$$[b(x), b(x')] = 0.$$

Поэтому из определения (2.4.20) оператора  $A'_\mu(x)$  следует

$$\begin{aligned} [A'_\mu(x), A'_\nu(x')] = & -\partial_\mu \partial_\nu [a(x), a(x')] - (t' - t) \partial_\mu \partial_\nu [a(x), b(x')] - \\ & - \frac{1+\xi}{1-\xi} (\delta_\nu^0 \partial_\mu + \delta_\mu^0 \partial_\nu) [a(x), b(x')]. \end{aligned}$$

Согласно формулам (2.4.23), (2.4.24) коммутаторы  $[a(x), a(x')]$ ,  $[a(x), b(x')]$  определяются формулами

$$\begin{aligned} [a(x), a(x')] &= \frac{1+\xi}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{\omega^3} (e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')}), \\ [a(x), b(x')] &= i \frac{1-\xi}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{\omega^2} (e^{-ik(x-x')} + e^{ik(x-x')}). \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{-ikx} - e^{ikx}}{\omega^3} = \\ &= -\frac{4i}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4k \frac{e^{-ikx}}{(k^2)^2} - \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{-ikx} + e^{ikx}}{\omega^2}, \end{aligned}$$

коммутатор  $[a(x), a(x')]$  можно представить в виде

$$[a(x), a(x')] = -(t-t') \frac{1+\xi}{1-\xi} [a(x), b(x')] - i \frac{1+\xi}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4k \frac{e^{-ik(x-x')}}{(k^2)^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} [A'_\mu(x), A'_\nu(x')] &= i(1+\xi) \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4k \frac{e^{-ik(x-x')}}{(k^2)^2} - \\ & - \frac{2}{1-\xi} (t'-t) \partial_\mu \partial_\nu [a(x), b(x')]. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в этой формуле согласно (2.4.30) не зависит от  $\xi$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} [A'_\mu(x), A'_\nu(x')] &= \\ &= [A'_\mu(x), A'_\nu(x')]_{\xi=1} + (1-\xi) \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4k \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \end{aligned}$$

Так как коммутатор  $[A_\mu^{(t)}(x), A_\nu^{(t)}(x')]$  также не зависит от  $\xi$  и  $[A_\mu^{(t)}(x), A_\nu^{(t)}(x')] = 0$ , то

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = [A_\mu(x), A_\nu(x')]_{\xi=1} + (1-\xi) \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_0} \frac{d^4k}{k^2} e^{-ik(x-x')} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}.$$

Используя далее формулу (2.4.28), получаем окончательно

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x'; \xi), \quad (2.4.31)$$

где

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x; \xi) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right). \quad (2.4.32)$$

Отсюда и из формул (2.4.6) следует также, что

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(x')] &= 0, \\ [F_{\mu\nu}(x), F^{\rho\lambda}(x')] &= \\ &= i(\delta_\nu^\lambda \partial_\mu \partial^\rho - \delta_\mu^\rho \partial_\nu \partial^\lambda - \delta_\nu^\rho \partial_\mu \partial^\lambda + \delta_\mu^\lambda \partial_\nu \partial^\rho) \mathcal{D}(x-x'). \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

В заключение еще выпишем перестановочные соотношения для операторов  $c_{k\lambda}, c_{k\lambda}^{\dagger}$ :

$$[c_{k\nu}, c_{k'\lambda'}] = [c_{k\lambda}^{\dagger}, c_{k'\lambda'}^{\dagger}] = 0, \quad [c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}^{\dagger}] = \zeta_{\lambda} \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (2.4.34)$$

где  $\zeta_{\lambda} = 1$  при  $\lambda = 1, 2, 3$  и  $\zeta_0 = -1$ .

**2.4.3. Векторы состояний электромагнитного поля и индефинитная метрика.** Мы видели, что операторы  $A_{\mu}(x)$  удовлетворяют волновому уравнению (2.4.9). В классической теории это уравнение эквивалентно уравнениям Максвелла

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = 0, \quad F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}, \quad (2.4.35)$$

если учесть дополнительное условие Лоренца

$$\varphi \equiv \partial_{\mu} A^{\mu} = 0. \quad (2.4.36)$$

В квантовой теории первое из уравнений (2.4.35) несправедливо, а условие Лоренца (2.4.36) не может выполняться, так как оно несовместимо с перестановочными соотношениями (2.4.31) ( $\partial^{\mu} \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x'; \xi) \neq 0$ ).

Между тем, как мы видели в классической теории, условие Лоренца физически необходимо, так как оно вместе с требованием калибровочной инвариантности (2.4.3) позволяло исключать из 4-потенциала  $A_{\mu}(x)$  скалярные и продольные степени свободы.

Скалярные и продольные степени свободы в квантовой теории можно исключить, если наложить на векторы состояний  $\Phi$ , характеризующих поле как некоторую динамическую систему, определенное дополнительное условие. Предположим, что векторы состояния, которые могут реализоваться, удовлетворяют условию

$$\varphi^{(+)}(x) \Phi = 0, \quad (2.4.37)$$

где  $\varphi^{(+)}(x)$  — положительно частотная часть оператора  $\varphi(x)$  (это условие называется условием Лоренца — Ферми). Из уравнений (2.4.9), (2.4.33) следует, что  $\partial_{\mu} \partial^{\mu} \varphi^{(+)}(x) = 0$ ,  $[\varphi^{(+)}(x); \varphi^{(+)}(x')] = 0$ . Поэтому условие (2.4.37) совместно с уравнениями (2.4.9), (2.4.33). Векторы состояний, удовлетворяющие уравнению (2.4.37), будем называть физическими векторами состояний.

Если  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — два физических вектора состояния, то согласно (2.4.37)  $(\Phi_1, \varphi(x) \Phi_2) = 0$ . (Мы учли при этом, что  $\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x)$ , где  $\varphi^{(-)}(x)$  — отрицательно частотная часть  $\varphi(x)$ , и что  $\varphi^{(-)\dagger} = \varphi^{(+)}$ .) Поэтому вследствие (2.4.37) уравнение (2.4.35) и условие Лоренца (2.4.36) будут выполняться только в пространстве физических векторов состояний.

Физические векторы состояний образуют подпространство гильбертова пространства векторов состояний. Для того чтобы построить гильбертово пространство (а также подпространство физических векторов состояний), необходимо определить в нем скалярное произведение. Как и в п. 2.3.2, мы определим скалярное произведение  $(\Phi_1, \Phi_2)$  векторов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  таким образом, чтобы операция  $\dagger$  в перестановочных соотношениях (2.4.34) над операторами  $c_{k\lambda}$  соответствовала операции эрмитова сопряжения в определяемом скалярном произведе-

нии, т. е.

$$(\Phi_1, c_{k\lambda}\Phi_2) = (c_{k\lambda}^+\Phi_1, \Phi_2).$$

Чтобы однозначно определить скалярное произведение, необходимо еще ввести вектор состояния вакуума  $\Phi_0$ , при действии на который операторов уничтожения частиц должен получаться нуль. Исходя из перестановочных соотношений (2.4.34) в качестве операторов уничтожения частиц, казалось бы, следовало выбрать операторы  $c_{k\lambda}$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ),  $c_{k0}^+$ :

$$c_{k\lambda}\Phi_0 = 0, \quad \lambda = 1, 2, 3, \quad c_{k0}^+\Phi_0 = 0.$$

Однако при таком определении операторов уничтожения не будет существовать физических векторов состояний, удовлетворяющих условию  $\varphi^{(+)}(x)\Phi = 0$  (или  $(c_{k0} - c_{k3})\Phi = 0$ , см. (2.4.21), (2.4.23)) и обладающих конечной нормой. При этом вакуумный вектор состояния  $\Phi_0$  также не будет физическим.

Если бы оператор  $c_{k0}$  также был оператором уничтожения, то вакуумный вектор был бы физическим вектором состояния и указанной трудности не возникло бы. Поэтому мы будем исходить из предположения, что все операторы  $c_{k\lambda}$  ( $\lambda = 0, 1, 2, 3$ ) являются операторами уничтожения. При этом вектором состояния вакуума будем называть такой вектор  $\Phi_0$ , который удовлетворяет условию

$$c_{k\lambda}\Phi_0 = 0, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3. \quad (2.4.38)$$

Это условие можно еще представить в виде

$$A_{\mu}^{(+)}(x)\Phi_0 = 0, \quad (2.4.39)$$

где

$$A_{\mu}^{(\pm)}(x) = A_{\mu}^{(t)(\pm)}(x) + A_{\mu}^{\prime(\pm)}(x);$$

$$A_{\mu}^{\prime(\pm)}(x) \equiv \partial_{\mu}(a^{(\pm)}(x) + tb^{(\pm)}(x)) - \frac{2}{1-\xi} b^{(\pm)}(x) \delta_{\mu}^0$$

(см. (2.4.20)). Так, определенные операторы  $A_{\mu}^{(+)}$  ( $A_{\mu}^{(-)}$ ) являются операторами уничтожения (рождения).

Определим скалярное произведение в пространстве векторов  $\Phi$ . Как отмечалось выше, оно должно определяться перестановочными соотношениями (2.4.34), определением вакуума (2.4.38) (который для определенности будем считать нормированным на 1,  $(\Phi_0, \Phi_0) = 1$ ) и трактовкой операторов  $c_{k\lambda}^+$  как операторов, эрмитово сопряженных по отношению к операторам  $c_{k\lambda}$ .

Гильбертово пространство векторов состояний можно построить в результате действия на вакуум операторов рождения

$$|k_1\lambda_1 \dots k_n\lambda_n\rangle = c_{k_1\lambda_1}^+ \dots c_{k_n\lambda_n}^+\Phi_0. \quad (2.4.40)$$

Скалярное произведение этих векторов состояний

$$\langle k'_1\lambda'_1 \dots k'_m\lambda'_m | k_1\lambda_1 \dots k_n\lambda_n \rangle \equiv (c_{k'_1\lambda'_1}^+ \dots c_{k'_m\lambda'_m}^+ \Phi_0, c_{k_1\lambda_1}^+ \dots c_{k_n\lambda_n}^+ \Phi_0)$$

с учетом (2.3.21') можно записать в виде

$$\langle k'_1 \lambda'_1 \dots k'_m \lambda'_m | k_1 \lambda_1 \dots k_n \lambda_n \rangle = (\Phi_0, c_{k'_m \lambda'_m} \dots c_{k'_1 \lambda'_1} c_{k_1 \lambda_1}^+ \dots c_{k_n \lambda_n}^+ \Phi_0).$$

Используя далее перестановочные соотношения (2.4.34) и определение вакуума (2.4.38), получаем

$$\begin{aligned} \langle k'_1 \lambda'_1 \dots k'_m \lambda'_m | k_1 \lambda_1 \dots k_n \lambda_n \rangle = \\ = \delta_{nm} \Sigma \zeta_{\lambda_1} \dots \zeta_{\lambda_n} \delta_{k_1 \lambda_1; k'_1 \lambda'_1} \dots \delta_{k_n \lambda_n; k'_n \lambda'_n}, \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

где  $\delta_{k\lambda; k'\lambda'} = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}$  и суммирование производится по всем перестановкам индексов со штрихами. Мы видим, что скалярное произведение  $(\Phi, \Phi)$  может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от того, будет ли в состоянии  $\Phi \equiv c_{k_1 \lambda_1}^+ \dots c_{k_n \lambda_n}^+ \Phi_0$  число операторов  $c_{k_0}^+$  четным или нечетным.

Таким образом, в отличие от обычной квантовой механики, в которой гильбертово пространство векторов состояний  $\Phi$  характеризуется тем, что  $(\Phi, \Phi) > 0$ , в рассматриваемой схеме квантования электромагнитного поля скалярное произведение  $(\Phi, \Phi)$  может быть как положительным, так и отрицательным. В этом случае говорят о гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой<sup>14</sup>. Отметим, что в квантовой механике положительность нормы векторов состояний, т. е. условие  $(\Phi, \Phi) > 0$ , являлась необходимой для физической интерпретации теории. Как мы увидим далее при рассмотрении взаимодействующих электромагнитного и дираковского полей, индефинитность метрики не приводит к трудностям в интерпретации. Это связано с тем, что не все векторы  $\Phi$  описывают физические состояния. Именно физические векторы состояний образуют подпространство гильбертова пространства векторов  $\Phi$ , которое выделяется с помощью условия Лоренца — Ферми (2.4.37).

Согласно определению вакуума (2.4.38)

$$\varphi^{(+)}(x) \Phi_0 = 0. \quad (2.4.42)$$

Поэтому  $\Phi_0$  будет физическим вектором состояния. Другие физические вектора состояний можно получить в результате действия на вектор  $\Phi_0$  операторов рождения поперечных фотонов  $c_{k\lambda}^+$ ,  $\lambda = 1, 2$ . Мы учли, что для  $\lambda = 1, 2$   $[c_{k\lambda}^+, \varphi^{(+)}(x)] = 0$  (интерпретация индексов  $k$  и  $\lambda$  как импульса и спиральности рожденного фотона дана далее).

**2.4.4. Структура физического подпространства векторов состояния и калибровочная инвариантность.** Определим вектор состояния физического вакуума  $\Phi_{\text{vac}}$  таким образом, чтобы в этом состоянии не было поперечных фотонов и чтобы вектор  $\Phi_{\text{vac}}$  удовлетворял дополнительному условию Лоренца

$$c_{k\lambda} \Phi_{\text{vac}} = 0, \quad \lambda = 1, 2, \quad \varphi^{(+)}(x) \Phi_{\text{vac}} = 0. \quad (2.4.43)$$

<sup>14</sup> В квантовой электродинамике индефинитная метрика была введена в работах [18, 19].



Вектор  $\Phi_0$  удовлетворяет этим условиям, поэтому он представляет собой вектор состояния физического вакуума. Но это не единственный такой вектор. Действительно, введем унитарный оператор  $U \equiv U\{\varphi(x')\}$ , который строится только с помощью операторов  $\varphi(x)$ , коммутирующих в различных точках  $x$  (см. (2.4.33)). Замечая, что

$$\varphi(x) = \partial_\mu A^\mu(x) = \frac{-i}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi}} \sqrt{\omega} (c_{k0} - c_{k3}) e^{-ikx} + \text{э. с.}, \quad (2.4.44)$$

легко видеть, что  $[U, c_{k\lambda}] = 0$ ,  $\lambda = 1, 2$  и  $[U, \varphi^{(+)}(x)] = 0$ . Поэтому вектор  $U\Phi_0$  также будет удовлетворять условиям (2.4.43), т. е. будет представлять собой вектор состояния физического вакуума. Таким образом, мы получаем бесчисленное множество векторов состояний физического вакуума

$$\Phi_{\text{vac}} = U\{\varphi(x')\} \Phi_0. \quad (2.4.45)$$

Подчеркнем, что в состоянии, описываемом вектором  $\Phi_{\text{vac}}$ , присутствуют скалярные (связанные с оператором рождения  $c_{k0}^+$ ) и продольные (связанные с оператором  $c_{k3}^+$ ) фотоны. Отметим также, что если исходить из физического состояния

$$\Phi = c_{k_1 \lambda_1}^+ \dots c_{k_n \lambda_n}^+ \Phi_0, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n = 1, 2, \quad (2.4.46)$$

в котором присутствуют только поперечные фотоны, то можно построить эквивалентное физическое состояние

$$\Phi' = U\{\varphi(x')\} \Phi, \quad (2.4.46')$$

в котором присутствуют те же поперечные фотоны, а также продольные и скалярные фотоны. Такой произвол в выборе физических векторов связан с произволом калибровки потенциалов в рамках условия Лоренца — Ферми (2.4.37). В этом можно убедиться, если заметить, что теория, использующая векторы состояний  $\Phi$ , эквивалентна теории, использующей векторы состояний  $\Phi'$ , если при этом перейти от операторов поля  $A_\mu(x)$  к операторам  $A'_\mu(x) = U^+\{\varphi\} A_\mu(x) U\{\varphi\}$ :

$$(\Phi'_1, A'_\mu(x) \Phi'_2) \equiv (U\Phi_1, A_\mu(x) U\Phi_2) = (\Phi_1, A'_\mu(x) \Phi_2).$$

Кроме того, оператор  $A'_\mu(x)$  можно записать в виде  $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + U^+[A_\mu(x), U]$ . Отметим далее, что согласно (2.4.20)

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \equiv U^+ A_\mu(x) U, \quad (2.4.47)$$

$$\Lambda(x) = [U^+, a(x)] U.$$

Отсюда видно, что операторы  $A'_\mu$  и  $A_\mu$  действительно связаны друг с другом операторным калибровочным преобразованием с калибровочной функцией  $\Lambda(x)$ , удовлетворяющей условию  $\partial_\mu \partial^\mu \Lambda(x) = 0$ .

Оператор  $F$  будем называть калибровочно инвариантным, если

$$(U\Phi_1, F U\Phi_2) = (\Phi_1, F\Phi_2);$$

для любых физических векторов состояний  $\Phi_{1,2}$

$$\varphi^{(+)}(x) \Phi_{1,2} = 0.$$

Отсюда следует, что калибровочно инвариантный оператор должен удовлетворять соотношению

$$U\{\varphi\}^+ F U\{\varphi\} = F + B, \quad (2.4.48)$$

где  $B$  — оператор, равный нулю в физическом подпространстве:

$$(\Phi_1, B\Phi_2) = 0, \quad \varphi^{(+)}(x)\Phi_{1,2} = 0. \quad (2.4.48')$$

Так как  $[F_{\mu\nu}(x), \varphi(x')] = 0$ , то  $U^+ F_{\mu\nu} U = F_{\mu\nu}$ . Поэтому оператор напряженностей электромагнитного поля является калибровочно инвариантным. Оператор же потенциалов  $A_\mu(x)$  таким не является. Формула (2.4.48) показывает, что матричные элементы в физическом подпространстве калибровочно инвариантных операторов не зависят от произвола в выборе физических векторов состояний.

В заключение отметим, что норма физических векторов состояний (2.4.46) всегда положительна, т. е.

$$(\Phi', \Phi') = (\Phi, \Phi) > 0.$$

**2.4.5. Упорядоченные произведения операторов электромагнитного поля и связи.** Так же, как в теории скалярного поля, введем хронологическое произведение ( $T$ -произведение) операторов электромагнитного поля  $A_\mu(x)$ :

$$T\{A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n)\} = A_{\mu_{i_1}}(x_{i_1}) \dots A_{\mu_{i_n}}(x_{i_n}), \quad (2.4.49)$$

где  $t_{i_1} > t_{i_2} > \dots > t_{i_n}$ . Это определение является релятивистски инвариантным (см. п. 2.3.3).

Определим далее нормальное произведение ( $N$ -произведение) операторов электромагнитного поля. Именно, если операторы, которые мы упорядочиваем, являются либо операторами уничтожения  $A_\mu^{(+)}(x)$  либо операторами рождения  $A_\mu^{(-)}(x)$ , то  $N$ -произведение определяется формулой

$$:A_{\mu_1}^{(+)}(x_1) \dots A_{\mu_n}^{(-)}(x_n): = A_{\mu_n}^{(-)}(x_n) \dots A_{\mu_1}^{(+)}(x_1), \quad (2.4.50)$$

где в правой части равенства операторы уничтожения стоят справа от операторов рождения (ясно, что произведение только операторов  $A_\mu^{(-)}(x)$  или только операторов  $A_\mu^{(+)}(x)$  упорядочивать не нужно). В общем случае, когда  $A_\mu(x) = A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x)$ ,  $N$ -произведение определяется формулой

$$:\dots A_\mu(x) \dots: = :\dots A_\mu^{(+)}(x) \dots: + :\dots A_\mu^{(-)}(x) \dots: \quad (2.4.50')$$

вместе с формулой (2.4.50). Это определение  $N$ -произведения является, очевидно, релятивистски инвариантным (см. п. 2.3.3).

Определим связь между операторами  $A_\mu(x)$ ,  $A_\nu(x')$ , которая обозначается через  $A_\mu(x) A_\nu(x')$ :

$$\underline{A_\mu(x) A_\nu(x')} = T(A_\mu(x) A_\nu(x')) - :A_\mu(x) A_\nu(x'): \quad (2.4.51)$$

Из определения  $T$ - и  $N$ -произведений легко видеть, что

$$\underline{A_\mu(x) A_\nu(x')} = \begin{cases} [A_\mu^{(+)}(x), A_\nu^{(-)}(x')], & t > t', \\ -[A_\mu^{(-)}(x), A_\nu^{(+)}(x')], & t < t'. \end{cases}$$

Кроме того, из соотношений (2.4.31) следует, что

$$\begin{aligned} [A_{\mu}^{(+)}(x), A_{\nu}^{(-)}(x')] &= i\mathcal{D}_{\mu\nu}^{(+)}(x-x'; \xi), \\ [A_{\mu}^{(-)}(x), A_{\nu}^{(+)}(x')] &= i\mathcal{D}_{\mu\nu}^{(-)}(x-x'; \xi), \\ [A_{\mu}^{(-)}(x), A_{\nu}^{(-)}(x')] &= 0, \\ [A_{\mu}^{(+)}(x), A_{\nu}^{(+)}(x')] &= 0, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{(+)}(x; \xi)$ ,  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{(-)}(x; \xi)$  — положительно и отрицательно частотные части функции  $\mathcal{D}_{\mu\nu}(x; \xi)$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{(\pm)}(x; \xi) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_{\pm}} d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right) \quad (2.4.52)$$

(контур интегрирования в плоскости  $k_0$  определен на рис. 1). Поэтому связь операторов  $\underline{AA}$  представляет собой  $c$ -числовую функцию

$$\underline{A_{\mu}(x) A_{\nu}(x')} = i\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi), \quad (2.4.53)$$

где

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi) = \begin{cases} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{(+)}(x; \xi), & t > 0, \\ -\mathcal{D}_{\mu\nu}^{(-)}(x; \xi), & t < 0. \end{cases}$$

Поступая так же, как и в случае скалярного поля, функцию  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi)$  можно, очевидно, представить в виде

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right), \quad (2.4.54)$$

где контур интегрирования показан на рис. 1. Эту формулу можно переписать в виде (см. п. 2.3.3)

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\epsilon} \left( g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right), \quad \epsilon \rightarrow +0.$$

Таким образом, фурье-компонента функции  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi)$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikx} \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi)$$

определяется формулой

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) = -\frac{1}{k^2 + i0} \left( g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2 + i0} \right). \quad (2.4.55)$$

**2.4.6. Операторы энергии — импульса и момента электромагнитного поля.** Введя операторы электромагнитного поля, мы должны с помощью них построить операторы наблюдаемых величин — энергии — импульса и момента количества движения электромагнитного поля.

В классической теории при определении энергии — импульса и момента электромагнитного поля мы исходили из калибровочно-инвариантного лагранжиана (2.4.1). В квантовой теории мы не могли исходить из этого лагранжиана, так как в этом случае невозможно все опе-

раторы поля выразить через динамически независимые операторы поля. Чтобы устранить эту трудность, мы нарушили калибровочную инвариантность, введя в лагранжиан добавочное поле  $\varphi(x)$  и калибровочно неинвариантную дивергенцию  $\partial_\mu A^\mu(x)$ . По этой причине мы должны построить теперь операторы энергии—импульса и момента количества движения исходя из лагранжиана (2.4.3), явно зависящего от  $A_\mu(x)$ .

Согласно (2.2.17) канонический тензор энергии — импульса определяется общей формулой

$$T_{\nu\mu} = -\mathcal{L}g_{\nu\mu} + \mathcal{L}_0(\chi, g_{\mu\xi}\partial_\nu\chi).$$

В силу уравнений поля (2.4.6) лагранжиан (2.4.3) можно представить в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\varphi^2.$$

Поэтому канонический тензор энергии — импульса будет определяться формулой

$$T_{\nu\mu} = \left(\frac{1}{4}F^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda} + \frac{1}{2\xi}\varphi^2\right)g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left\{\partial_\nu A^\lambda, F_{\mu\lambda} + \frac{1}{\xi}\varphi g_{\mu\lambda}\right\}, \quad (2.4.56)$$

а вектор энергии — импульса формулой

$$P_\mu = \int d^3x T_\mu^0(x).$$

Определим действие оператора  $P_\mu$  на вектор состояния вакуума. Используя определение вектора состояния вакуума (2.4.38) и перестановочные соотношения (2.4.34), можно показать, что энергия и импульс вакуума отличны от нуля (и даже равны бесконечности; сравнить с п. 2.3.2). Поэтому мы переопределим оператор энергии — импульса так, чтобы энергия и импульс вакуума были равны нулю. Такое переопределение эквивалентно нормальному упорядочению операторов электромагнитного поля в выражении (2.4.56). Таким образом, под тензором энергии — импульса будем понимать оператор

$$T_{\nu\mu}(x) = g_{\mu\nu} : \frac{1}{4}F^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda} + \frac{1}{2\xi}\varphi^2 : - : \partial_\nu A^\lambda \left( F_{\mu\lambda} + \frac{1}{\xi}\varphi g_{\mu\lambda} \right) :, \quad (2.4.56')$$

для которого

$$P_\mu\Phi_0 = 0. \quad (2.4.57)$$

Этот оператор отличается от оператора (2.4.56) только  $c$ -числовым слагаемым.

Покажем, что вектор энергии — импульса является калибровочно-инвариантным оператором. С этой целью отметим, что согласно (2.4.47)

$$U^+ T_{\nu\mu}(x) U - T_{\nu\mu}(x) = - : \partial_\nu \partial^\lambda \Lambda(x) \left( F_{\mu\lambda} + \frac{1}{\xi}\varphi g_{\mu\lambda} \right) :$$

(мы учли, что оператор калибровочного преобразования  $U$  коммутирует с  $\varphi(x)$  и  $F_{\mu\lambda}(x)$ ). Из этой формулы следует, что

$$U^+ P_\nu U - P_\nu = B_\nu,$$

$$B_\nu = -\frac{1}{\xi} \int d^3x ( : \partial_\nu \partial_0 \Lambda \varphi : - : \partial_\nu \Lambda \partial_0 \varphi : )$$

(мы учли при этом уравнения поля (2.4.6)). Так как матричные элементы оператора  $B_\nu$  в физическом подпространстве обращаются в нуль, то оператор  $P_\nu$  является калибровочно инвариантным (чего нельзя сказать об операторе  $T_{\nu\mu}(x)$ ).

Тензор плотностей моментов  $M^{\mu\nu;\rho}$  определяется общей формулой (2.2.17). В случае лагранжиана (2.4.4) получаем

$$M_\mu^{\nu\lambda} = -x^\nu T_\mu^\lambda + x_\mu T^{\nu\lambda} + i : F^{\lambda\rho} (\Sigma_\mu^\nu A)_\rho : + \frac{i}{\xi} : \varphi (\Sigma_\mu^\nu A)^\lambda :. \quad (2.4.58)$$

Оператор моментов  $M_{\mu\nu}$  определяется при этом формулой

$$M_{\mu\nu} = \int d^3x M_{\mu\nu};^0$$

(в формуле (2.4.58) мы ввели нормальное упорядочение для того, чтобы 4-момент количества движения вакуума обращался в нуль). Можно показать, что оператор  $M_{\mu\nu}$  (но не  $M_{\mu\nu;\rho}$ ) является калибровочно-инвариантным.

Как мы видели, операторы  $A_\mu(x)$  должны удовлетворять уравнениям движения (см. (2.2.31))

$$\partial_\nu A_\mu(x) = i [P_\nu, A_\mu(x)].$$

Подставляя сюда разложение  $A_\mu(x)$  (2.4.20), (2.4.23), получаем

$$[P_l, c_{k\lambda}] = -k_l c_{k\lambda}, \quad [P_l, c_{k\lambda}^\dagger] = k_l c_{k\lambda}^\dagger, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3, \quad (2.4.59)$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} [P_0, c_{k\lambda}] &= -k_0 c_{k\lambda}, \quad [P_0, c_{k\lambda}^\dagger] = k_0 c_{k\lambda}^\dagger, \quad \lambda = 1, 2, \\ [P_0, c_{k3}] &= -\frac{2k_0}{1+\xi} \left( c_{k3} - \frac{1-\xi}{2} c_{k0} \right), \quad [P_0, c_{k3} - c_{k0}] = \\ &= -k_0 (\bar{c}_{k3} - \bar{c}_{k0}). \end{aligned} \quad (2.4.59')$$

Из формул (2.4.59) вместе с (2.4.57) следует

$$P_l c_{k_1 \lambda_1}^\dagger \dots c_{k_n \lambda_n}^\dagger \Phi_0 = (\mathbf{k}_l + \dots + \mathbf{k}_n)_l c_{k_1 \lambda_1}^\dagger \dots c_{k_n \lambda_n}^\dagger \Phi_0.$$

Эту формулу можно интерпретировать следующим образом: вектор  $c_{k_1 \lambda_1}^\dagger \dots c_{k_n \lambda_n}^\dagger \Phi_0$  описывает состояние электромагнитного поля, в котором содержится  $n$  фотонов с 3-импульсами  $k_1, \dots, k_n$ . Отсюда следует, что  $c_{k\lambda}^\dagger$  представляет собой оператор рождения фотона с 3-импульсом  $\mathbf{k}$ .

Если выбрать калибровку таким образом, чтобы вектор состояния физического вакуума совпадал с  $\Phi_0$ , т. е.

$$c_{k\lambda} \Phi_0 = 0, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3,$$

то физическими состояниями в этой калибровке будут состояния  $c_{k_1 \lambda_1}^\dagger \dots c_{k_n \lambda_n}^\dagger \Phi_0$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 1, 2$ , для которых справедливо соотношение

$$P_0 c_{k_1 \lambda_1}^\dagger \dots c_{k_n \lambda_n}^\dagger \Phi_0 = (\omega_1 + \dots + \omega_n) c_{k_1 \lambda_1}^\dagger \dots c_{k_n \lambda_n}^\dagger \Phi_0.$$

Так как в силу перестановочных соотношений (2.4.34)

$$c_{k\lambda} c_{k\lambda}^+ \Phi_0 = \delta_{kk} \delta_{\lambda\lambda} \zeta_\lambda \Phi_0,$$

то оператор  $c_{k\lambda}$  можно интерпретировать как оператор уничтожения фотона с импульсом  $k$ .

Покажем, наконец, что индекс  $\lambda$  в операторе  $c_{k\lambda}$  можно связать со спиральностью фотона, т. е. с проекцией момента количества движения фотона на его импульс. С этой целью докажем, что

$$\begin{aligned} n M c_{k\lambda}^+ \Phi_0 &= \mu(\lambda) c_{k\lambda}^+ \Phi_0, \quad \lambda = 1, 2, \\ n M c_{k0}^+ \Phi_0 &= n M c_{k3}^+ \Phi_0 = 0, \end{aligned} \quad (2.4.60)$$

где  $M^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} M_{kl}$  — момент количества движения поля  $n = k/|k|$  и

$$\mu(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda = 1, \\ -1, & \lambda = 2. \end{cases}$$

С этой целью воспользуемся формулой (2.2.32). Учитывая (2.4.39), находим

$$M_{ik} A_\mu^{(-)}(x) \Phi_0 = (-\Sigma_{ik} + i(x_k \partial_i - x_i \partial_k))_\mu^\nu A_\nu^{(-)}(x) \Phi_0$$

(матрицы  $\Sigma_{ik}$  определяются формулой (1.4.20)). Учитывая, что для произвольной функции  $f(k)$  справедливо соотношение

$$\int d^3 k f(k) (x_k \partial_i - x_i \partial_k) e^{ikx} = \int d^3 k e^{ikx} \left( k_k \frac{\partial}{\partial k^i} - k_i \frac{\partial}{\partial k^k} \right) f(k),$$

так же, как в случае векторного поля, получаем отсюда

$$n M A_\mu^{(-)}(k, t) \Phi_0 = -(n \Sigma)_\mu^\nu A_\nu^{(-)}(k, t) \Phi_0,$$

где  $A_\mu^{(-)}(k, t)$  — пространственная фурье-компонента оператора  $A_\mu^{(-)}(x, t)$  и  $\Sigma^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} \Sigma_{kl}$ . Подставляя сюда разложение (2.4.27) и учитывая определение векторов поляризации  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  (см. п. 1.4.3), получаем формулы (2.4.60).

Из соотношений (2.4.60) для физических состояний  $c_{k\lambda}^+ \Phi_0$  ( $\lambda = 1, 2$ ) следует, что проекция момента количества движения фотона на направление его импульса может принимать два значения:  $\mu(\lambda) = \pm 1$ . Проекция момента количества движения на направление импульса называется спиральностью. Таким образом, спиральность фотона равна  $\pm 1$ . Проекция орбитального момента на направление импульса всегда равна нулю. Поэтому спиральность представляет собой проекцию спинового момента на направление импульса фотона. Отсюда мы еще раз убеждаемся, что спин фотона равен единице.

## § 2.5. КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННОГО ПОЛЯ

### 2.5.1. Лагранжиан и уравнения движения квантованного дираковского поля.

Перейдем к изучению квантования дираковского поля.

Согласно (1.5.35) лагранжиан свободного классического дираковского поля имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) \psi.$$

Так как дираковское поле является спинорным и соответствующие ему частицы обладают спином  $1/2$ , то оно является фермионным. Поэтому в соответствии с общей теорией эрмитов лагранжиан дираковского поля следует выбрать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} [\bar{\psi}, (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi] + \frac{1}{4} [\psi, (i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu + m) \bar{\psi}]. \quad (2.5.1)$$

Отметим, что при формальном переходе от этого лагранжиана к классическому лагранжиану путем замены операторов  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  на  $c$ -числовые функции мы получили бы нуль. Это означает, как уже отмечалось в п. 2.1.2, что при переходе к классическому лагранжиану мы должны считать операторы  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  не обычными  $c$ -числовыми функциями, а антикоммутирующими величинами (о таких величинах говорят, что они образуют грассманову алгебру).

Вариация полного действия дираковского поля определяется формулой (2.1.51)

$$\delta W = G_1(t_2) - G_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{F}(x),$$

где

$$G_1(t) = \frac{1}{4} \int d^3x (i[\bar{\psi}, \gamma^0 \delta \psi] + i[\psi, \tilde{\gamma}_0 \delta \bar{\psi}]); \quad (2.5.2)$$

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2} [\delta \bar{\psi}, (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi] + \frac{1}{2} [\delta \psi, (i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu + m) \bar{\psi}].$$

Так как дираковское поле представляет собой фермионное поле, то при получении уравнений движения элементарные вариации  $\delta \psi$ ,  $\delta \bar{\psi}$  следует считать антикоммутирующими с операторами поля. Поэтому из принципа стационарного действия (на классе элементарных вариаций) получаем уравнения

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0, \quad (i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu + m) \bar{\psi} = 0. \quad (2.5.3)$$

Так как матрица  $\gamma^0$  имеет обратную, то все компоненты полей  $\psi_\alpha$  и  $\bar{\psi}_\alpha$  являются динамически независимыми, следовательно, уравнения (2.5.3) не содержат уравнений связи.

**2.5.2. Перестановочные соотношения для операторов дираковского поля.** Уравнения (2.5.3) формально совпадают с классическими уравнениями Дирака (1.5.7), но теперь  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  являются операторами, действующими в пространстве векторов состояний. Установим перестановочные соотношения, которым подчиняются эти операторы.

Отметим, что согласно (2.5.1) кинематическая часть действия дираковского поля

$$W_K = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left( \frac{i}{4} [\bar{\psi}, \gamma^0 \partial_0 \psi] + \frac{i}{4} [\psi, \tilde{\gamma}^0 \partial_0 \bar{\psi}] \right).$$

В соответствии с п. 2.1.4 антикоммутирующие с операторами поля вариации  $\delta\psi(\mathbf{x})$ ,  $\delta\bar{\psi}(\mathbf{x})$  будут допустимыми, так как

$$\delta W_K = G_2(t_1) - G_2(t_2),$$

где

$$G_2(x) = -\frac{i}{4} \int d^3x ([\delta\bar{\psi}, \gamma^0\psi] + [\delta\psi, \tilde{\gamma}^0\bar{\psi}]) \quad (2.5.3')$$

(согласно (2.1.52) вариации  $\delta\psi$ ,  $\delta\bar{\psi}$  считаем независимыми от времени). Генераторами рассматриваемых допустимых вариаций будут операторы  $G(t) = G_1(t) + G_2(t)$ . Поэтому согласно (2.5.2), (2.5.3)

$$G(t) = -i \int d^3x (\delta\bar{\psi}\gamma^0\psi + \delta\psi\tilde{\gamma}^0\bar{\psi}),$$

причем в соответствии с (2.1.69)

$$\delta\psi(\mathbf{x}) = i[G(t), \psi(\mathbf{x})], \quad \delta\bar{\psi}(\mathbf{x}) = i[G(t), \bar{\psi}(\mathbf{x})].$$

Отсюда следуют одновременные перестановочные соотношения для компонент дираковских полей  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ :

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\}_{t=t'} &= \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\}_{t=t'} &= \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\}_{t=t'} = 0. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Получим разновременные перестановочные соотношения для операторов поля. Для этого отметим, что решение уравнения Дирака  $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$  при заданном значении поля  $\psi(x)$  в некоторый момент времени  $t = t'$  имеет вид

$$\psi(x) = -i \int_{t'=t'} d^3x'' S(x - x'') \gamma^0 \psi(x''), \quad (2.5.5)$$

где матричная функция  $S(x)$  удовлетворяет уравнению Дирака

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)S(x) = 0 \quad (2.5.6)$$

и начальному условию

$$S(x)|_{t=0} = i\gamma^0\delta(\mathbf{x}). \quad (2.5.6')$$

Действительно, так как уравнение Дирака является уравнением первого порядка, то его решение однозначно определяется заданием поля  $\psi$  в начальный момент времени. Поэтому формула (2.5.5) непосредственно следует из (2.5.6), (2.5.6').

Легко видеть, что функция  $S(x)$  имеет вид

$$S(x) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Delta(x), \quad (2.5.7)$$

где  $\Delta(x)$  определяется формулой (2.3.12). Действительно, так как

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu + m) = -\partial^\mu\partial_\mu - m^2,$$

то вследствие (2.3.8) функция (2.5.7) удовлетворяет уравнению (2.5.6). Кроме того, из (2.3.8') следует, что функция  $S(x)$  удовлетворяет условию (2.5.6').



Используя формулу (2.5.5) и одновременные перестановочные соотношения (2.5.4), легко получить разновременные перестановочные соотношения для операторов  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ :

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} &= -iS_{\alpha\beta}(x-x'), \\ \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} &= \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = 0. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Соотношения (2.5.8) являются релятивистски инвариантными. Это значит, что поля

$$\psi'(x') = S(a)\psi(x), \quad \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(a), \quad x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$$

в системе отсчета  $K'$  удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и поля  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  в системе  $K$ . Это вытекает из того, что функция  $S(x)$  удовлетворяет соотношению

$$S(a)S(x)S^{-1}(a) = S(x'), \quad x' = ax,$$

которое непосредственно следует из определения (2.5.7) и формул (1.5.24), (2.3.11).

Отметим, что при переходе к классической теории нужно положить  $S(x) = 0$ . При этом поля  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  станут классическими; однако они будут представлять собой не обычные  $c$ -числовые функции, а антикоммутирующие функции, т. е. будут образовывать грассманову алгебру (с бесконечным числом образующих [7]).

В классической теории мы нашли решения уравнений Дирака в виде плоских волн и в виде  $u^{qm}(\mathbf{p}) \exp(-iqpx)$  (см. (1.5.46)). Эти решения образуют полную систему функций, по которым можно разложить любое решение уравнения Дирака. Поэтому оператор  $\psi(x)$  также можно разложить по плоским волнам

$$\psi(x) = \frac{1}{V\sqrt{V}} \sum_{pq\mu} \frac{1}{V\sqrt{2p_0}} a_{pq\mu} u^{qm}(\mathbf{p}) e^{-iqpx}, \quad (2.5.9)$$

где коэффициенты разложения  $a_{pq\mu}$  должны считаться операторами. Из этой формулы вытекает разложение для оператора  $\bar{\psi}(x)$ :

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{V\sqrt{V}} \sum_{pq\mu} \frac{1}{V\sqrt{2p_0}} \bar{u}^{qm}(\mathbf{p}) a_{pq\mu}^+ e^{iqpx}, \quad (2.5.9')$$

где  $a_{pq\mu}^+$  — операторы, эрмитово сопряженные операторам  $a_{pq\mu}$ ,  $u^{qm}(\mathbf{p}) = u^{qm*}(\mathbf{p}) \gamma^0$  и  $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ .

Легко видеть, что из (2.5.8), (2.5.9) вытекают перестановочные соотношения для операторов  $a_{pq\mu}$ ,  $a_{pq\mu}^+$ :

$$\begin{aligned} \{a_{pq\mu}, a_{p'q'\mu'}\} &= \{a_{pq\mu}^+, a_{p'q'\mu'}^+\} = 0, \\ \{a_{pq\mu}, a_{q'a'\mu'}^+\} &= \delta_{pp'} \delta_{qq'} \delta_{\mu\mu'} \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

(в этом проще всего убедиться, вычисляя  $\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\}$  с помощью разложений (2.5.9), (2.5.9') и формул (2.5.10)).

**2.5.3. Операторы заряда, 4-импульса и 4-момента дираковского поля.** Лагранжиан дираковского поля (2.5.1) инвариантен относительно фазовых преобразований

$$\delta\psi = -i\alpha\psi, \quad \delta\bar{\psi} = i\alpha\bar{\psi} \quad (2.5.11)$$

( $\alpha$  — бесконечно малая вещественная величина) и преобразований группы Пуанкаре

$$\begin{aligned} \delta\psi &= -\varepsilon^\mu \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \{-\Sigma_{\mu\nu} + i(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu)\} \psi, \\ \delta\bar{\psi} &= -\varepsilon^\mu \partial_\mu \bar{\psi} + \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \{\tilde{\Sigma}_{\mu\nu} + i(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu)\} \bar{\psi}, \\ \delta x^\mu &= \varepsilon^\mu_\nu x^\nu + \varepsilon^\mu, \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

где матрицы  $\Sigma_{\mu\nu}$  определяются формулой (1.5.26'). Поэтому генераторы этих вариаций, которые определяют заряд  $Q$ , 4-импульс  $P_\mu$  и 4-момент поля  $M_{\mu\nu}$ , не будут зависеть от времени.

Генераторы вариаций (2.5.11), (2.5.12) определяются формулой для  $G_1(t)$  (см. (2.5.2), оператор  $G_2$  для вариаций (2.5.11), (2.5.12) равен нулю). Поэтому согласно (2.1.57) генератор вариаций (2.5.11)

$$G = \alpha Q, \quad Q = \int d^3x \mathcal{J}^0(x), \quad (2.5.13)$$

где

$$\mathcal{J}^\mu(x) = \frac{1}{2} [\bar{\psi}, \gamma^\mu \psi]. \quad (2.5.14)$$

Далее генератором вариаций (2.5.12) будет оператор (см. (2.2.29))

$$G = -\varepsilon^\mu P_\mu + \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} M_{\mu\nu}, \quad (2.5.15)$$

$$P_\mu = \int d^3x T_\mu^0, \quad M_{\mu\nu} = \int d^3x M_{\mu\nu}{}^0,$$

где

$$T_\mu{}^\lambda = \frac{i}{4} [\bar{\psi}, \gamma^\lambda \partial_\mu \psi] + \frac{i}{4} [\psi, \tilde{\gamma}^\lambda \partial_\mu \bar{\psi}], \quad (2.5.16)$$

$$M_{\mu\nu}{}^\lambda = x_\mu T_\nu{}^\lambda - x_\nu T_\mu{}^\lambda + \frac{1}{4} [\bar{\psi}, \{\gamma^\lambda, \Sigma_{\mu\nu}\} \psi]$$

(мы учли, что для реального движения согласно (2.5.1), (2.5.3)  $\mathcal{L} = 0$ ).

Так как операторы  $G$  представляют собой генераторы вариаций (2.5.11), (2.5.12), то справедливы соотношения

$$i[G, \psi] = \delta\psi, \quad i[G, \bar{\psi}] = \delta\bar{\psi}. \quad (2.5.17)$$

Подставляя сюда выражения (2.5.11), (2.5.13), получаем

$$[Q, \psi] = -\psi, \quad [Q, \bar{\psi}] = \bar{\psi}. \quad (2.5.18)$$

Подставляя далее в (2.5.17) выражения (2.5.12), (2.5.15) для  $\delta\psi$  и  $\delta\bar{\psi}$ , находим соотношения

$$\partial_\mu \psi = i[P_\mu, \psi], \quad \partial_\mu \bar{\psi} = i[P_\mu, \bar{\psi}], \quad (2.5.19)$$

из которых следует, что оператор  $P_\mu$  играет роль оператора 4-трансляций, а также соотношения

$$\begin{aligned} (i(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) - \Sigma_{\mu\nu}) \psi &= [M_{\mu\nu}, \psi], \\ (i(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) + \tilde{\Sigma}_{\mu\nu}) \bar{\psi} &= [M_{\mu\nu}, \bar{\psi}], \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

из которых следует, что операторы  $M_{\mu\nu}$  играют роль операторов 4-поворотов.

**2.5.4. Векторы состояний дираковского поля.** Наша дальнейшая задача будет состоять в построении векторов состояний дираковского поля и операторов уничтожения и рождения частиц, связанных с данным полем.

С этой целью воспользуемся формулами (2.5.13), (2.5.15) и будем предполагать, что в состоянии вакуума заряд, 4-импульс и 4-момент равны нулю, т. е.

$$Q\Phi_0 = 0, \quad P_\mu\Phi_0 = 0, \quad M_{\mu\nu}\Phi_0 = 0. \quad (2.5.21)$$

Из первых двух соотношений (2.5.21) вместе с формулами (2.5.18), (2.5.19) находим

$$\begin{aligned} P_\mu \psi(x) \Phi_0 &= -i \partial_\mu \psi(x) \Phi_0, \quad P_\mu \bar{\psi}(x) \Phi_0 = -i \partial_\mu \bar{\psi}(x) \Phi_0, \\ Q\psi(x) \Phi_0 &= -\psi(x) \Phi_0, \quad Q\bar{\psi}(x) \Phi_0 = \bar{\psi}(x) \Phi_0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда разложения (2.5.9), получаем

$$\begin{aligned} P_\nu a_{\rho\mu} \Phi_0 &= -q p_\nu a_{\rho\mu} \Phi_0, \quad P_\nu a_{\rho\mu}^+ \Phi_0 = q p_\nu a_{\rho\mu}^+ \Phi_0, \\ Q a_{\rho\mu} \Phi_0 &= -a_{\rho\mu} \Phi_0, \quad Q a_{\rho\mu}^+ \Phi_0 = a_{\rho\mu}^+ \Phi_0. \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

Мы должны потребовать теперь, чтобы спектр оператора  $P^0$  был положительно определенным. Отсюда следует, что вектор состояния вакуума должен удовлетворять соотношениям

$$a_{\mathbf{p}1\mu} \Phi_0 = a_{\mathbf{p}-1\mu}^+ \Phi_0 = 0. \quad (2.5.23)$$

Поэтому нетривиальными из (2.5.22) будут соотношения

$$\begin{aligned} P_\nu a_{\mathbf{p}-1\mu} \Phi_0 &= p_\nu a_{\mathbf{p}-1\mu} \Phi_0, \quad P_\nu a_{\mathbf{p}1\mu}^+ \Phi_0 = p_\nu a_{\mathbf{p}1\mu}^+ \Phi_0, \\ Q a_{\mathbf{p}-1\mu} \Phi_0 &= -a_{\mathbf{p}-1\mu} \Phi_0, \quad Q a_{\mathbf{p}1\mu}^+ \Phi_0 = a_{\mathbf{p}1\mu}^+ \Phi_0. \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

Из соотношений (2.5.23), (2.5.24) следует, что операторы  $a_{\mathbf{p}1\mu}^+$ ,  $a_{\mathbf{p}1\mu}$  являются операторами рождения и уничтожения частиц с импульсом  $\mathbf{p}$  и зарядом  $+1$ , а операторы  $a_{\mathbf{p}-1\mu}$ ,  $a_{\mathbf{p}-1\mu}^+$  — операторами рождения и уничтожения частиц с импульсом  $\mathbf{p}$  и зарядом  $-1$ .

Отметим, что в отличие от бозонов любой из операторов  $a_{\mathbf{p}\mu}$ ,  $a_{\mathbf{p}\mu}^+$  можно формально интерпретировать как оператор уничтожения, так как  $a$  и  $a^+$  входят симметрично в перестановочные соотношения (2.5.10). В случае бозонов, когда перестановочные соотношения имеют вид  $[a, a^+] = 1$ , оператор  $a^+$  можно интерпретировать, как мы видели, как оператор уничтожения только после введения индефинитной метрики в гильбертовом пространстве.

Покажем, наконец, что индекс  $\mu$  следует интерпретировать как спиральность, т. е. как проекцию момента количества движения частицы на ее импульс. Обратимся для этого к соотношениям (2.5.20), (2.5.21), из которых следует, что

$$M_{ik}\psi(x)\Phi_0 = (-\Sigma_{ik} + i(x_k\partial_i - x_i\partial_k))\psi(x)\Phi_0,$$

$$M_{ik}\bar{\psi}(x)\Phi_0 = (\tilde{\Sigma}_{ik} + i(x_k\partial_i - x_i\partial_k))\bar{\psi}(x)\Phi_0.$$

Подставляя сюда разложение (2.5.9)

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{pq} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} e^{-iqx} \sum_{\mu} u^{q\mu}(p) a_{pq\mu}$$

и учитывая, что

$$\int d^3p f(\mathbf{p})(x_k\partial_i - x_i\partial_k) e^{-iqx} = \int d^3p e^{-iqx} \left( p_k \frac{\partial}{\partial p^i} - p_i \frac{\partial}{\partial p^k} \right) f(\mathbf{p})$$

( $f(\mathbf{p})$  — произвольная функция  $\mathbf{p}$ ), находим

$$M^l \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \sum_{\mu} u^{q\mu}(p) a_{pq\mu} \Phi_0 = - \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \sum_{\mu} (\Sigma^l u^{q\mu}(p)) a_{pq\mu} \Phi_0 + \\ + i\varepsilon^{lik} p_k \frac{\partial}{\partial p^l} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \sum_{\mu} u^{q\mu}(p) a_{pq\mu} \Phi_0,$$

$$M^l \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \sum_{\mu} \bar{u}^{q\mu}(p) a_{pq\mu}^+ \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \sum_{\mu} (\tilde{\Sigma}^l \bar{u}^{q\mu}(p)) a_{pq\mu}^+ \Phi_0 + \\ + i\varepsilon^{lik} p_k \frac{\partial}{\partial p^l} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \sum_{\mu} \bar{u}^{q\mu}(p) a_{pq\mu}^+ \Phi_0,$$

где  $M^l = \frac{1}{2} \varepsilon^{lik} M_{ik}$  — вектор момента количества движения поля ( $\Sigma^l = \frac{1}{2} \varepsilon^{lik} \Sigma_{ik}$ , см. (1.1.34)).

Умножая эти уравнения скалярно на  $n_l = p_l/|\mathbf{p}|$  и используя формулы (1.5.47)

$$(n\Sigma) \bar{u}^{q\mu}(p) = \mu \bar{u}^{q\mu}(p), \quad (n\tilde{\Sigma}) \bar{u}^{q\mu}(p) = \mu \bar{u}^{q\mu}(p),$$

получаем

$$(n\mathbf{M}) a_{p1\mu}^+ \Phi_0 = \mu a_{p1\mu}^+ \Phi_0, \quad (2.5.25) \\ (n\mathbf{M}) a_{p-1-\mu} \Phi_0 = \mu a_{p-1-\mu}^+ \Phi_0.$$

Эти соотношения показывают, что в состояниях  $a_{p1\mu}^+ \Phi_0$ ,  $a_{p-1-\mu} \Phi_0$  проекция момента количества движения на направление импульса равна  $\mu$ . Так как проекция орбитального момента на направление импульса равна нулю, то можно сказать, что величина  $\mu$  представляет собой проекцию спинового момента частицы на ее импульс, т. е. спиральность частицы.

Таким образом, операторы  $a_{p1\mu} = a_{p\mu}$ ,  $a_{p1\mu}^+ \equiv a_{p\mu}^+$  мы должны интерпретировать как операторы уничтожения и рождения фермиона

с импульсом  $\mathbf{p}$ , спиральностью  $\mu$  и зарядом  $+1$ . Эту частицу будем называть электроном. Операторы  $a_{\mathbf{p}-1-\mu}^+ \equiv b_{\mathbf{p}\mu}$ ,  $a_{\mathbf{p}-1-\mu} \equiv b_{\mathbf{p}\mu}^+$  мы должны интерпретировать как операторы уничтожения и рождения фермиона с импульсом  $\mathbf{p}$ , спиральностью  $\mu$  и зарядом  $-1$ . Эту частицу будем называть позитроном.

Согласно (2.5.10) операторы  $a_{\mathbf{p}\mu}$ ,  $b_{\mathbf{p}\mu}$  удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\{a_{\mathbf{p}\mu}, a_{\mathbf{p}'\mu'}^+\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\mu\mu'}, \{b_{\mathbf{p}\mu}, b_{\mathbf{p}'\mu'}^+\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\mu\mu'}. \quad (2.5.26)$$

Антикоммутаторы для всех других пар операторов  $a$ ,  $a^+$ ,  $b$ ,  $b^+$  равны нулю.

Приведем разложения операторов полей  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  по операторам уничтожения и рождения электронов и позитронов в состояниях  $\mathbf{p}$ ,  $\mu$ . Используя формулы (2.5.9), (2.5.9'), получаем

$$\psi(x) = \frac{1}{V\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}\mu} \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \{a_{\mathbf{p}\mu} u^\mu(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}x} + b_{\mathbf{p}\mu}^+ \bar{u}^\mu(\mathbf{p})^c e^{i\mathbf{p}x}\}, \quad (2.5.27)$$

где  $u^\mu(\mathbf{p}) \equiv u^{1\mu}(\mathbf{p})$ . Из этой формулы следует

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{V\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}\mu} \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \{a_{\mathbf{p}\mu}^+ \bar{u}^\mu(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}x} + b_{\mathbf{p}\mu} \bar{u}^\mu(\mathbf{p})^c e^{-i\mathbf{p}x}\}. \quad (2.5.28)$$

Мы учли при этом, что

$$u^{-q-\mu}(\mathbf{p}) = C \bar{u}^{q\mu}(\mathbf{p}) \equiv u^{q\mu}(\mathbf{p})^c. \quad (2.5.29)$$

Эта формула вытекает из того, что согласно (1.5.47) биспинор  $u^{q\mu}(\mathbf{p})^c$  удовлетворяет уравнениям

$$(q\hat{p} + m) u^{q\mu}(\mathbf{p})^c = 0, \quad \Sigma n u^{q\mu}(\mathbf{p})^c = -\mu u^{q\mu}(\mathbf{p})^c,$$

следовательно, согласно (1.5.47)

$$u^{q\mu}(\mathbf{p})^c = \lambda_{q\mu} u^{-q-\mu}(\mathbf{p}).$$

Из условий нормировки (1.5.48)

$$\bar{u}^{q\mu}(\mathbf{p}) u^{q\mu}(\mathbf{p}) = 2mq$$

следует, что

$$\bar{u}^{q\mu}(\mathbf{p})^c u^{q\mu}(\mathbf{p})^c = 2mq.$$

Поэтому множитель  $\lambda_{q\mu}$  по модулю равен единице. Так как сами биспиноры  $u^{q\mu}(\mathbf{p})$  определены условием нормировки с точностью до фазового множителя, то последний можно подобрать так, чтобы выполнялось условие  $\lambda_{q\mu} = 1$ .

Используя операторы  $a_{\mathbf{p}\mu}$  и  $b_{\mathbf{p}\mu}$ , определение вакуума дираковского поля (2.5.23) можно переписать в виде

$$a_{\mathbf{p}\mu} \Phi_0 = b_{\mathbf{p}\mu} \Phi_0 = 0 \quad (2.5.30)$$

или в виде

$$\psi^{(+)}(x) \Phi_0 = \bar{\psi}^{(+)}(x) \Phi_0 = 0, \quad (2.5.31)$$

где  $\psi^{(+)}$ ,  $\bar{\psi}^{(+)}$  — положительно частотные части операторов  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ .

Из формул (2.5.19), (2.5.18) легко получить, что в состояниях

$$\Phi = a_{p_1 \mu_1}^+ \dots a_{p_n \mu_n}^+ b_{q_1 \nu_1}^+ \dots b_{q_m \nu_m}^+ \Phi_0 \quad (2.5.32)$$

импульс равен  $p_1 + \dots + p_n + q_1 + \dots + q_m$ , а заряд равен  $n - m$ . Эти векторы описывают  $n$  электронов с импульсами  $p_i$  и спиральностями  $\mu_i$  и  $m$  позитронов с импульсами  $q_i$  и спиральностями  $\nu_i$ .

Так как  $(a_{p\mu}^+)^2 = (b_{p\nu}^+)^2 = 0$ , то векторы состояний (2.5.32) обращаются в нуль, если импульс и спиральность по крайней мере двух электронов или позитронов совпадают (принцип Паули).

**2.5.5. Упорядоченные произведения операторов дираковского поля и связи.** Как уже отмечалось, при изучении взаимодействия между полями важную роль играют определенным образом упорядоченные произведения операторов полей — хронологическое и нормальное произведения операторов. Определим эти произведения для дираковского поля.

Если через  $\chi_i(x)$  обозначить компоненты полей  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , то хронологическое произведение компонент дираковского поля будет определяться формулой

$$T\{\chi_1(x_1) \dots \chi_n(x_n)\} = \delta \cdot \chi_{i_1}(x_{i_1}) \dots \chi_{i_n}(x_{i_n}), \quad (2.5.33)$$

где справа записаны те же операторы, что и слева, но расставленные в хронологическом порядке, т. е.  $t_{i_1} > t_{i_2} > \dots > t_{i_n}$  и  $\delta = 1$  или  $\delta = -1$  в зависимости от того, является ли перестановка  $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$  четной или нечетной (величину  $\delta$  будем называть сигнатурой перестановки). Если  $t_{i_1} = t_{i_2}$ , но  $x_{i_1} \neq x_{i_2}$ , то соответствующие этим моментам времени операторы  $\chi$  согласно (2.5.8) антикоммутируют, и поэтому их можно располагать в произвольном порядке с учетом сигнатуры сделанной перестановки. Если некоторые из пространственно-временных точек совпадают, то данное определение теряет смысл (мы вернемся к этому вопросу далее, см. п. 3.2.5).

Как и в случае электромагнитного поля, хронологическое произведение операторов дираковского поля является релятивистски инвариантным.

Определим далее нормальное произведение или  $N$ -произведение операторов дираковского поля. Если  $\chi^{(+)}(x)$  и  $\chi^{(-)}(x)$  — положительно и отрицательно частотные части оператора  $\chi(x)$ , то нормальное произведение операторов  $\chi^{(\pm)}(x)$  определяется формулой

$$:\chi_1^{(+)}(x_1) \dots \chi_n^{(-)}(x_n): = \delta \cdot \chi_{i_1}^{(-)}(x_{i_1}) \dots \chi_{i_n}^{(+)}(x_{i_n}), \quad (2.5.34)$$

где в правой части равенства операторы  $\chi^{(+)}$  стоят справа от операторов  $\chi^{(-)}$  и  $\delta$  — сигнатура перестановки  $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ . Так как операторы  $\chi^{(+)}$  (как и операторы  $\chi^{(-)}$ ) антикоммутируют между собой, то их можно располагать в произвольном порядке, учитывая при этом сигнатуру сделанной перестановки. В общем случае, когда  $\chi = \chi^{(+)} + \chi^{(-)}$ ,

$N$ -произведение определяется формулой

$$: \dots \chi \dots : = \dots \chi^{(+)} \dots : + : \dots \chi^{(-)} \dots : \quad (2.5.35)$$

вместе с формулой (2.5.34).

Отметим, что если пользоваться определениями (2.5.13), (2.5.15) операторов  $Q$ ,  $P_\mu$ ,  $M_{\mu\nu}$ , то заряд, импульс, энергия и момент вакуума будут отличны от нуля (и даже равны бесконечности). Поэтому, как и в случае электромагнитного и скалярного полей, следует переопределить величины  $\mathcal{J}^\rho$ ,  $T_\mu^\rho$ ,  $M_{\mu\nu}^\rho$ , а именно операторы поля в этих величинах должны быть  $N$ -упорядочены, вследствие чего соотношения (2.5.21) будут выполняться. Так как  $N$ -упорядоченные операторы  $\mathcal{J}^\rho$ ,  $T_\mu^\rho$ ,  $M_{\mu\nu}^\rho$  отличаются от операторов (2.5.13), (2.5.15) на  $c$ -число (поскольку эти операторы представляют собой билинейные комбинации операторов поля), то согласно формулам (2.5.18), (2.5.19), (2.5.20) наличие этого  $c$ -числового слагаемого не оказывает влияния на все рассмотрение, которое было проведено в п. 2.5.4.

Разность между  $T$ - и  $N$ -произведением двух операторов  $\chi(x)$  называется их связью и обозначается  $\underline{\chi_1(x_1) \chi_2(x_2)}$ :

$$\underline{\chi_1(x_1) \chi_2(x_2)} = T(\chi_1(x_1) \chi_2(x_2)) - : \chi_1(x_1) \chi_2(x_2) : \quad (2.5.36)$$

Из определения  $T$ - и  $N$ -произведений легко видеть, что

$$\underline{\chi_1(x_1) \chi_2(x_2)} = \begin{cases} \{\chi_1^{(+)}(x_1), \chi_2^{(-)}(x_2)\}, & t_1 > t_2, \\ -\{\chi_1^{(-)}(x_1), \chi_2^{(+)}(x_2)\}, & t_1 < t_2. \end{cases}$$

Кроме того, из перестановочных соотношений (2.5.8) следует, что

$$\{\psi^{(+)}(x_1), \psi^{(-)}(x_2)\} = \{\bar{\psi}^{(+)}(x_1), \bar{\psi}^{(-)}(x_2)\} = 0$$

и поэтому

$$\underline{\psi(x_1) \psi(x_2)} = \underline{\bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2)} = 0. \quad (2.5.37)$$

Далее, согласно (2.5.8)

$$\{\psi^{(+)}(x_1), \bar{\psi}^{(-)}(x_2)\} = -iS^{(+)}(x_1 - x_2),$$

$$\{\psi^{(-)}(x_1), \bar{\psi}^{(+)}(x_2)\} = -iS^{(-)}(x_1 - x_2),$$

где  $S^{(+)}(x)$ ,  $S^{(-)}(x)$  — положительно и отрицательно частотные части функции  $S(x)$ . Поэтому связь операторов  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  представляет собой  $c$ -числовую функцию

$$\underline{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)} = -iS^c(x_1 - x_2), \quad (2.5.38)$$

где

$$S^c(x) = \theta(t) S^{(+)}(x) - \theta(-t) S^{(-)}(x)$$

( $\theta(t) = 1$  при  $t > 0$  и  $\theta(t) = -1$  при  $t < 0$ ). Так как

$$S^{(\pm)}(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta^{(\pm)}(x), \quad (2.5.39)$$

$$S^{\circ}(x) = (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)(\theta(t)\Delta^{(+)}(x) - \theta(-t)\Delta^{(-)}(x)) + \\ + i\gamma^0\delta(t)(\Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x)).$$

Учитывая, что  $\Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x) = \Delta(x)$  и  $\Delta(x, 0) = 0$ , получаем

$$S^{\circ}(x) = (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)\Delta^{\circ}(x), \quad (2.5.40)$$

где функция  $\Delta^{\circ}(x)$  определяется формулой (2.3.3)

$$\Delta^{\circ}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4p e^{-ipx} \frac{1}{m^2 - p^2}.$$

Так как функцию  $\Delta^{\circ}(x)$  можно представить в виде

$$\Delta^{\circ}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \Delta^{\circ}(p), \quad \Delta^{\circ}(p) = \frac{1}{m^2 - p^2 - i0},$$

то фурье-компонента функции

$$S^{\circ}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} S^{\circ}(p) \quad (2.5.41)$$

будет определяться формулой

$$S^{\circ}(p) = \frac{\hat{p} + m}{m^2 - p^2 - i0} = \frac{1}{m - \hat{p}}. \quad (2.5.42)$$

Отметим, что так как связь операторов представляет собой  $c$ -число, то из (2.5.36) следует, что

$$\underline{\chi_1(x_1)\chi_2(x_2)} = (\Phi_0, T(\chi_1(x_1)\chi_2(x_2))\Phi_0),$$

так как вакуумное среднее нормального произведения равно нулю.

## § 2.6. КВАНТОВАНИЕ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО ФЕРМИОННОГО ПОЛЯ И СУПЕРПОЛЯ

**2.6.1. Лагранжиан и уравнения движения квантованного спинорного поля.** В п. 1.5.5 мы видели, что уравнение Дирака (при отсутствии внешних полей) допускает решение, для которого  $\psi(x) = \psi^c(x)$  ( $\psi^c$  — зарядово-сопряженный биспинор), т. е.

$$\psi(x) = C\bar{\psi}(x). \quad (2.6.1)$$

В вейлевском представлении, в котором

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^{\mu} \\ \sigma^{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\sigma}^{\mu} = (\sigma^0 - \sigma^k),$$

матрица зарядового сопряжения  $C$  имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6.2)$$



Поэтому согласно уравнению (2.6.1) майорановский биспинор имеет структуру

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ i\sigma^2\varphi^+ \end{pmatrix}, \quad (2.6.3)$$

причем согласно уравнению Дирака спинор  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\sigma^\mu \partial_\mu \varphi - m\sigma^2 \varphi^+ = 0 \quad (2.6.4)$$

(см. также п. 1.6.3). Будем считать поле  $\varphi(x)$  квантованным и покажем, что уравнение (2.6.4) можно получить из квантового лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{i}{4} ([\varphi^+, \sigma^\mu \partial_\mu \varphi] + [\varphi, \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \varphi^+]) - \frac{i}{2} m (\varphi^+ \sigma^2 \varphi^+ - \varphi \sigma^2 \varphi). \quad (2.6.5)$$

Этот лагранжиан релятивистски инвариантен, так как поле  $\varphi(x)$  преобразуется как релятивистский контрвариантный спинор, а поле  $\varphi^+$  — как контрвариантный пунктирный спинор (см. п. 1.6.3). Лагранжиан (2.6.5) (с точностью до несущественного множителя  $1/2$ ) совпадает с лагранжианом дираковского поля (2.5.1), если вместо  $\psi$  и матриц  $\gamma^\mu$  использовать эти величины, заданные формулами (2.6.3), (1.5.6).

Чтобы получить уравнения движения, нужно найти вариацию  $\mathcal{L}$  на классе элементарных вариаций, т. е. вариаций  $\delta\varphi(x)$ ,  $\delta\varphi^+(x)$ , которые антикоммутируют с полями  $\varphi$ ,  $\varphi^+$ . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & \delta\varphi (i\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \varphi^+ + im\sigma^2 \varphi) + \\ & + \delta\varphi^+ (i\sigma^\mu \partial_\mu \varphi - im\sigma^2 \varphi^+) + \frac{1}{2} \partial_\mu (i\varphi^+ \sigma^\mu \delta\varphi + i\varphi \tilde{\sigma}^\mu \delta\varphi^+). \end{aligned}$$

Отсюда следуют уравнения движения

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \varphi - im\sigma^2 \varphi^+ = 0, \quad i\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \varphi^+ + im\sigma^2 \varphi = 0 \quad (2.6.6)$$

(второе уравнение является эрмитово сопряженным по отношению к первому).

Для получения перестановочных соотношений для операторов  $\varphi$ ,  $\varphi^+$  необходимо согласно общей теории построить генератор  $G$  элементарных вариаций. Поступая так же, как в случае дираковского поля, находим

$$G = i \int d^3x (\varphi^+ \delta\varphi + \varphi \delta\varphi^+),$$

откуда согласно (2.1.69)

$$\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')\}_{t=t'} = 0, \quad \{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta^+(x')\}_{t=t'} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.6.7)$$

**2.6.2. Разложение на плоские волны и одновременные перестановочные соотношения.** Уравнение Майорана (2.6.4) не имеет, очевидно, решений вида  $e^{i\rho x}$ , так как в это уравнение кроме  $\varphi$  входит  $\varphi^+$ . Однако оно имеет решения, представляющие собой суперпозицию

волн  $e^{ipx}$  и  $e^{-ipx}$ . Легко видеть, что комбинация

$$A \equiv u(\mathbf{p})e^{-ipx}a + v(\mathbf{p})e^{ipx}a^{\dagger} \quad (2.6.8)$$

удовлетворяет уравнению (2.6.4), если

$$\hat{\sigma}u - im\sigma^2v^* = 0, \quad -\hat{\sigma}v - im\sigma^2u^* = 0,$$

где  $\hat{\sigma} = \sigma^{\mu}p_{\mu}$ . Из первого уравнения следует, что

$$v = \frac{i}{m} u^* \hat{\sigma} \sigma^2. \quad (2.6.8')$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем

$$\{-\sigma^2 \hat{\sigma} \sigma^2 \hat{\sigma} + m^2\} u^* = 0.$$

Легко видеть, что  $\sigma^2 \hat{\sigma} \sigma^2 \hat{\sigma} = p^2$  (мы учли, что  $\sigma^2 \sigma^k \sigma^2 = -\sigma^k$ ,  $\sigma^2 \sigma^0 \sigma^2 = \sigma^0$ ). Поэтому это уравнение имеет нетривиальное решение, если  $p^2 - m^2 = 0$ . Чтобы фиксировать спинор  $u$ , потребуем выполнения условия

$$\sigma \mathbf{n} u_{\lambda}(\mathbf{p}) = \lambda u_{\lambda}(\mathbf{p}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|. \quad (2.6.9)$$

Так как  $(\sigma \mathbf{n})^2 = 1$ , то  $\lambda = \pm 1$ . Спинор  $u \equiv u_{\lambda}(\mathbf{p})$  будем нормировать согласно условию

$$u_{\lambda}^*(\mathbf{p}) u_{\lambda}(\mathbf{p}) = 1.$$

Очевидно, спиноры  $u_{\lambda}(\mathbf{p})$  удовлетворяют следующим условиям ортонормированности и полноты:

$$\begin{aligned} u_{\lambda}^*(\mathbf{p}) u_{\lambda'}(\mathbf{p}) &= \delta_{\lambda\lambda'}, \\ \sum_{\lambda} (u_{\lambda}^*(\mathbf{p}))_{\alpha} (u_{\lambda}(\mathbf{p}))_{\beta} &= \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Произвольное решение уравнения Майорана согласно (2.6.8) можно представить в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}\lambda} \frac{m}{\sqrt{2\rho_0(\rho_0 - \lambda\rho)}} \{u_{\lambda}(\mathbf{p})e^{-ipx}a_{\mathbf{p}\lambda} + v_{\lambda}(\mathbf{p})e^{ipx}a_{\mathbf{p}\lambda}^{\dagger}\}, \quad (2.6.11)$$

где  $a_{\mathbf{p}\lambda}$  и  $a_{\mathbf{p}\lambda}^{\dagger}$  — некоторые операторы, зависящие от  $\lambda$  и  $\mathbf{p}$ , и  $\rho_0 > 0$ . Множитель  $m/\sqrt{2\rho_0(\rho_0 - \lambda\rho)}$  выбран таким образом, чтобы операторы  $a^{\dagger}$  и  $a$  были операторами рождения и уничтожения частиц (см. далее). Согласно (2.6.8), (2.6.9) спинор  $v_{\lambda}(\mathbf{p})$  можно представить в виде

$$v_{\lambda}(\mathbf{p}) = -\frac{i}{m}(\rho_0 - \lambda\rho)\sigma^2 u_{\lambda}^*(\mathbf{p}), \quad \rho \equiv |\mathbf{p}|. \quad (2.6.12)$$

Поэтому, учитывая, что  $m/(\rho_0 - \lambda\rho) = (\rho_0 + \lambda\rho)/m$ , разложение (2.6.11) можно записать в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}\lambda} \frac{m}{\sqrt{2\rho_0(\rho_0 - \lambda\rho)}} \{u_{\lambda}(\mathbf{p})e^{-ipx}a_{\mathbf{p}\lambda} - i\sigma^2 u_{-\lambda}^*(\mathbf{p})e^{ipx}a_{\mathbf{p}-\lambda}^{\dagger}\}, \quad (2.6.13)$$

$$\varphi^{\dagger}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}\lambda} \frac{m}{\sqrt{2\rho_0(\rho_0 - \lambda\rho)}} \{u_{\lambda}^*(\mathbf{p})e^{ipx}a_{\mathbf{p}\lambda}^{\dagger} - i\sigma^2 u_{-\lambda}(\mathbf{p})e^{-ipx}a_{\mathbf{p}-\lambda}\}.$$

Перестановочные соотношения для операторов  $a, a^+$  можно найти, используя перестановочные соотношения (2.6.7) для  $\varphi(x)$  и  $\varphi^+(x)$ . Они имеют следующий вид:

$$\{a_{p\lambda}, a_{p\lambda'}\} = 0, \quad \{a_{p\lambda}, a_{p'\lambda'}^+\} = \delta_{pp'} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.6.14)$$

Операторы  $a_{p\lambda}, a_{p\lambda}^+$  представляют собой операторы уничтожения и рождения частицы с импульсом  $p$  и спиральностью  $\lambda$ . Покажем, что из этих соотношений вытекают соотношения (2.6.7). С этой целью найдем разновременные антикоммутирующие  $\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')\}, \{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta^+(x')\}$ .

Используя (2.6.13), (2.6.14) и условие полноты (2.6.10), находим

$$\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')\} = m(\sigma^2)_{\alpha\beta} \Delta(x - x'), \quad (2.6.15)$$

где

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{ipx} \frac{\sin p_0 t}{p_0}.$$

(см. п. 2.3.1). Найдем далее  $\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta^+(x')\}$ . Отметим, что из (2.6.9) и условия полноты (2.6.10) вытекает соотношение

$$(u_\lambda(p)^*)_\beta (u^\lambda(p))_\alpha = (\mathcal{P}_\lambda)_{\alpha\beta}, \quad \mathcal{P}_\lambda = \frac{\sigma n + \lambda}{2\lambda}, \quad (2.6.16)$$

из которого следует

$$\sum_\lambda \frac{m}{p_0 \pm \lambda p} (u_\lambda(p))_\alpha (u_\lambda(\vec{p}))_\beta^* = \frac{p_0}{m} \delta_{\alpha\beta} \mp \frac{p}{m} (\sigma n)_{\alpha\beta}.$$

Используя это соотношение и формулы (2.6.13), (2.6.14), получаем окончательно

$$\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta^+(x')\} = (\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \Delta(x - x'). \quad (2.6.17)$$

Формулы (2.6.15), (2.6.17) представляют собой разновременные релятивистски-инвариантные перестановочные соотношения для полей  $\varphi, \varphi^+$ . Замечая, что  $\Delta(x)|_{t=0} = 0$  и  $\partial_0 \Delta(x)|_{t=0} = \delta(\mathbf{x})$ , из формул (2.6.15), (2.6.17) получим одновременные перестановочные соотношения (2.6.7).

**2.6.3. Упорядоченные произведения операторов двухкомпонентного ферми-поля и связи.** Хронологическое и нормальное произведения операторов спинорного поля определяются так же, как в случае дираковского поля.

Определим далее связи между операторами  $\varphi$  и  $\varphi^+$ . Используя определение вакуума

$$\varphi^{(+)}(x) \Phi_0 = \varphi^{+(-)}(x) \Phi_0 = 0, \quad (2.6.18)$$

можно так же, как в случае дираковского поля, представить связи

$$\begin{aligned} \underline{\varphi_\alpha(x) \varphi_\beta(x')} &\equiv (\Phi_0, T(\varphi_\alpha(x) \varphi_\beta(x')) \Phi_0), \\ \underline{\varphi_\alpha(x) \varphi_\beta^+(x')} &\equiv (\Phi_0, T(\varphi_\alpha(x) \varphi_\beta^+(x')) \Phi_0) \end{aligned}$$

В ВИДЕ

$$\begin{aligned} \underline{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\beta(x') &= \begin{cases} (\Phi_0, \{\varphi_\alpha^{(+)}(x), \varphi_\beta^{(-)}(x')\} \Phi_0), & t > t', \\ -(\Phi_0, \{\varphi_\alpha^{(-)}(x), \varphi_\beta^{(+)}(x')\} \Phi_0), & t < t', \end{cases} \\ \underline{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\beta^\dagger(x') &= \begin{cases} (\Phi_0, \{\varphi_\alpha^{(+)}(x), \varphi_\beta^{+(-)}(x')\} \Phi_0), & t > t', \\ -(\Phi_0, \{\varphi_\alpha^{(-)}(x), \varphi_\beta^{+(-)}(x')\} \Phi_0), & t < t'. \end{cases} \end{aligned}$$

Используя найденные разновременные перестановочные соотношения, отсюда получаем

$$\begin{aligned} \underline{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\beta(x') &= m (\sigma^2)_{\alpha\beta} \Delta^c(x - x'), \\ \underline{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\beta^\dagger(x') &= (\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \Delta^c(x - x'), \end{aligned} \quad (2.6.19)$$

где

$$\Delta^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4p \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2}$$

(определение контура интегрирования см. в п. 2.3.3).

Определяя фурье-компоненты связей формулами

$$\begin{aligned} \underline{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\beta(x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \underline{\varphi_\alpha \varphi_\beta}(p), \\ \underline{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\beta^\dagger(x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \underline{\varphi_\alpha \varphi_\beta^\dagger}(p), \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

получаем

$$\begin{aligned} \underline{\varphi_\alpha \varphi_\beta}(p) &= \frac{m (\sigma^2)_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - i0}, \\ \underline{\varphi_\alpha \varphi_\beta^\dagger}(p) &= -i \frac{(\bar{\sigma}^\mu p_\mu)_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - i0}. \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

До сих пор мы считали, что масса частиц, связанных с полем  $\varphi(x)$ , отлична от нуля. В этом случае лагранжиан не инвариантен относительно фазового преобразования

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{-i\alpha} \varphi(x).$$

В случае  $m = 0$  лагранжиан (2.6.5) инвариантен относительно фазовых преобразований, вследствие чего для поля  $\varphi(x)$  будут справедливыми закон сохранения «заряда»  $Q = \int d^3x \mathcal{J}^0(x)$  и соответствующий ему дифференциальный закон сохранения  $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x) = 0$ , где

$$\mathcal{J}^\mu(x) = \varphi^\dagger(x) \sigma^\mu \varphi(x). \quad (2.6.22)$$

Безмассовое поле  $\varphi(x)$  удовлетворяет уравнению Вейля

$$\sigma^\mu \partial_\mu \varphi(x) = 0$$

и перестановочным соотношениям

$$\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')\} = 0, \quad \{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta^\dagger(x')\} = (\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \mathcal{D}(x - x'). \quad (2.6.23)$$

Связи для безмассового поля  $\varphi(x)$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(x) \varphi_\beta(x') &= 0, \\ \varphi_\alpha(x) \varphi_\beta^+(x') &= (\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \mathcal{D}^c(x-x') \end{aligned} \quad (2.6.24)$$

(здесь  $\mathcal{D}(x) = \Delta(x)|_{m=0}$ ,  $\mathcal{D}^c(x) = \Delta^c(x)|_{m=0}$ ).

Приведем, наконец, разложение безмассового поля  $\varphi(x)$  на плоские волны. Из (2.6.11) следует, что при  $m \rightarrow 0$  в этом разложении должно отсутствовать слагаемое, соответствующее  $\lambda = -1$ . Так как

$$\frac{m}{\sqrt{2\rho_0(\rho_0 - \rho)}} \xrightarrow{m \rightarrow 0} 1,$$

то разложение (2.6.13) принимает вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \{u_1(\mathbf{p}) e^{-i\rho x} a_{\mathbf{p}} - i\sigma^{(2)} u_{-1}^*(\mathbf{p}) e^{i\rho x} b_{\mathbf{p}}^+\}, \quad (2.6.25)$$

где оператор  $a_{\mathbf{p}} \equiv a_{\mathbf{p}_1}$  можно интерпретировать как оператор уничтожения частицы с импульсом  $\mathbf{p}$  и спиральностью  $\lambda = 1$ , а оператор  $b_{\mathbf{p}}^+ \equiv a_{\mathbf{p}-1}^+$  как оператор рождения античастицы с импульсом  $\mathbf{p}$  и спиральностью  $\lambda = -1$ . Таким образом, в двухкомпонентной безмассовой теории частицы отличаются от античастиц знаком спиральности. Отметим, что у поля  $\varphi(x)$  при  $m \neq 0$  нет закона сохранения заряда  $Q$ . Поэтому в этом случае нельзя отличить частицы от античастиц.

В заключение отметим, что формулы (2.6.21) эквивалентны формулам (2.5.37), (2.5.38), в которых под  $\psi(x)$  следует понимать майорановский биспинор (2.6.3).

**2.6.4. Квантование свободного суперполя.** Как мы видели в § 1.7, киральное скалярное суперполе

$$\chi(x, \theta) = A(x) + \theta^\alpha \varphi_\alpha(x) + \theta^\alpha \theta_\alpha F(x)$$

объединяет два скалярных поля  $A(x)$ ,  $F(x)$  и двухкомпонентное спинорное поле  $\varphi_\alpha(x)$ . Лагранжиан этого суперполя определяется формулой (1.7.48)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - U,$$

$$\mathcal{L}_0 = 2A^\mu \partial_\mu A^+ + 2A^{\mu+} \partial_\mu A - \frac{i}{2} \partial_\mu \varphi^+ \sigma^\mu \varphi + \frac{i}{2} \varphi^+ \sigma^\mu \partial_\mu \varphi, \quad (2.6.26)$$

$$U = 2A_\mu^+ A^\mu - 2FF^+ - \left\{ 2mAF + 4gA^2F - \frac{m}{2} \varphi^\alpha \varphi_\alpha - 2gA\varphi^\alpha \varphi_\alpha + \text{э. с.} \right\}.$$

При этом в соответствии с п. 2.1.2 мы записали часть лагранжиана, связанную со скалярным полем  $A(x)$  таким образом, чтобы лагранжиан приводил к уравнениям поля первого порядка для величин  $A(x)$  и  $A_\mu(x)$  и положили  $\psi_\alpha \equiv \varphi_\alpha$  (см. § 1.7). Лагранжиан свободного суперполя ( $g = 0$ ) поэтому имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f &= a^\mu \partial_\mu a^+ + a^{\mu+} \partial_\mu a - a_\mu^+ a^\mu + 2FF^+ + \sqrt{2}m(aF + a^+F^+) - \\ &- \frac{i}{2} \partial_\mu \varphi^+ \sigma^\mu \varphi - \frac{i}{2} \varphi^+ \sigma^\mu \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m\varphi^\alpha \varphi_\alpha - \frac{1}{2} m\varphi_\alpha^+ \varphi^{\alpha+}, \end{aligned} \quad (2.6.27)$$

где  $a = \sqrt{2}A$ ,  $a^\mu = \sqrt{2}A^\mu$ . Этот лагранжиан приводит к уравнению связи

$$F = -\frac{1}{\sqrt{2}} ma^+ \quad (2.6.28)$$

и к уравнениям

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)a = 0, \quad i\sigma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu \varphi^\beta + m\epsilon_{\alpha\beta} \dot{\varphi}^\beta = 0 \quad (2.6.29)$$

для скалярного и спинорного полей с совпадающими массами.

С учетом уравнения связи  $F = -\frac{1}{\sqrt{2}} ma^+$  лагранжиан (2.6.27)

можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f = & a^\mu \partial_\mu a^+ + a^{\mu+} \partial_\mu a - a_\mu^+ a^\mu - m^2 a^+ a - \frac{i}{2} \partial_\mu \varphi^+ \sigma^\mu \varphi + \\ & + \frac{i}{2} \varphi^+ \sigma^\mu \partial_\mu \varphi - \frac{m}{2} (\varphi^\alpha \varphi_\alpha + \varphi_\alpha \dot{\varphi}^\alpha). \end{aligned} \quad (2.6.30)$$

Этот лагранжиан совпадает с суммой свободных лагранжианов скалярного поля (см. п. 2.3.1) и двухкомпонентного спинорного поля  $\varphi$ . При этом мы пользуемся не матричной формой записи (как выше), а спинорной. Именно под  $\varphi_\nu$  в формулах п. 2.6.3 мы понимаем контрвариантный спинор  $\varphi^\rho$ , под  $\varphi^\rho = \varphi^{\rho+}$  ( $\varphi^\rho \equiv \varphi^{\rho+}$ ), под матричными элементами  $(\sigma_\mu)_{\alpha\beta}$  — ковариантный спинор второго ранга  $(\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ , причем индексы опускаются с помощью универсального спинора второго ранга  $\epsilon_{\alpha\beta}$  (см. п. 1.6.3),  $\varphi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \varphi^\beta$  ( $\epsilon_{\alpha\beta} = -i(\sigma^2)_{\alpha\beta}$ ). Поэтому перестановочные соотношения для полей  $a(x)$  и  $\varphi^\rho(x)$  определяются, очевидно, формулами (2.6.15), (2.6.17), (2.3.9):

$$[a(x), a^+(x')] = -i\Delta(x-x'), \quad [a(x), a(x')] = 0, \quad (2.6.31)$$

$$\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')\} = im\epsilon_{\alpha\beta}\Delta(x-x'),$$

$$\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta^+(x')\} = (\tilde{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu \Delta(x-x').$$

Так как  $F = -\frac{m}{\sqrt{2}} a^+$ , то

$$[F(x), F^+(x')] = \frac{i}{2} m^2 \Delta(x-x'). \quad (2.6.31')$$

Используя эти формулы, легко найти перестановочные соотношения для кирального суперполя

$$\chi(x, \theta) = \frac{a(x)}{\sqrt{2}} + \theta^\alpha \varphi_\alpha(x) + \theta^\alpha \theta_\alpha F(x) \quad (2.6.32)$$

и сопряженного ему поля  $\chi^+(x, \theta)$ . Используя (2.6.32), находим

$$\begin{aligned} [\chi(x, \theta), \chi(x', \theta')] = & -\frac{m}{2} (\theta\theta) [a^+(x), a(x')] - \\ & - \frac{m}{2} (\theta'\theta') [a(x), a^+(x')] + [\theta^\alpha \varphi_\alpha(x), \theta'^\alpha \varphi_\alpha(x')]. \end{aligned}$$

Учитывая далее, что  $\theta'$  антикоммутирует с  $\theta$  и  $\varphi$ , получаем

$$[\chi(x, \theta), \chi(x', \theta')] = -\frac{m}{2}((\theta\theta)[a^+(x), a(x')] +$$

$$+ (\theta'\theta')[a(x), a^+(x')]) + \theta'^\beta\theta^\alpha \{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')\},$$

откуда согласно (2.6.31)

$$[\chi(x, \theta), \chi(x', \theta')] = im \left( \varepsilon_{\alpha\beta} \theta'^\beta \theta^\alpha + \frac{1}{2} (\theta'\theta') + \frac{1}{2} (\theta\theta) \right) \Delta(x - x').$$

Легко видеть, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \theta'^\beta \theta^\alpha + \frac{1}{2} (\theta'\theta') + \frac{1}{2} (\theta\theta) = (\theta_2 - \theta'_2)(\theta_1 - \theta'_1) \equiv \delta(\theta - \theta') \quad (2.6.33)$$

(мы учли, что  $\theta^1 = \theta_2, \theta^2 = -\theta_1, \varepsilon_{12} = -1, \varepsilon_{21} = 1$ ). Поэтому

$$[\chi(x, \theta), \chi(x', \theta')] = im \delta(\theta - \theta') \Delta(x - x'). \quad (2.6.34)$$

Введенная здесь функция  $\delta(\theta - \theta')$  обладает всеми свойствами грасмановой  $\delta$ -функции, т. е.

$$f(\theta) \delta(\theta - \theta') = f(\theta') \delta(\theta - \theta'), \quad \int d\theta_1 d\theta_2 \delta(\theta) = 1. \quad (2.6.35)$$

Эти формулы непосредственно следуют из определения грасманова интегрирования (см. п. 1.7.4) и того, что произвольную функцию  $f(\theta)$  можно представить в виде

$$f(\theta) = f_1 + f_2^\alpha \theta_\alpha + f_3 \theta_1 \theta_2.$$

Найдем разновременной коммутатор  $[\chi, \chi^+]$ .

Учитывая грасманов характер величин  $\theta_\alpha$ , а также перестановочные соотношения (2.6.31), найдем

$$[\chi(x, \theta), \chi^+(x', \theta')] = -\frac{i}{2} \{1 - m^2(\theta\theta)(\bar{\theta}'\bar{\theta}') - 2i\bar{\theta}'^\beta\theta^\alpha (\tilde{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu\} \times$$

$$\times \Delta(x - x').$$

Так как функция  $\Delta(x)$  удовлетворяет волновому уравнению  $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Delta(x) = 0$ , то последнюю формулу можно переписать в виде

$$[\chi(x, \theta), \chi^+(x', \theta')] = -\frac{i}{2} \{1 + (\theta\theta)(\bar{\theta}'\bar{\theta}') \partial_\mu \partial^\mu - 2i\bar{\theta}'^\beta \theta^\alpha \partial_\mu\} \Delta(x - x').$$

Учитывая далее, что в силу грасманова характера величин  $\theta_\alpha$

$$1 + (\theta\theta)(\bar{\theta}'\bar{\theta}') \partial_\mu \partial^\mu - 2i\bar{\theta}'^\beta \theta^\alpha \partial_\mu = e^{-2i\bar{\theta}'^\beta \theta^\alpha \partial_\mu}, \quad (2.6.36)$$

получаем окончательно

$$[\chi(x, \theta), \chi^+(x', \theta')] = -\frac{i}{2} e^{-2i\bar{\theta}'^\beta \theta^\alpha \partial_\mu} \Delta(x - x'). \quad (2.6.37)$$

Покажем, что полученные нами перестановочные соотношения являются суперинвариантными. Для этого напомним, что поле  $\chi(x, \theta)$  является суперскаляром. Это значит, что преобразованное поле

$\chi'(x, \theta)$  связано с исходным полем  $\chi(x, \theta)$  формулой

$$\chi'(x', \theta') = \chi(x, \theta),$$

где

$$x'_\mu = x_\mu + a_\mu + 2i\bar{\zeta}\sigma_\mu\theta + i\bar{\zeta}\sigma_\mu\zeta, \quad \theta' = \theta + \zeta, \quad \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\zeta} \quad (2.6.38)$$

(см. формулы (1.7.33), (1.7.36)). Поле  $\chi^+(x, \theta)$  не является суперскаляром, однако поле

$$\chi(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{-2i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu} \chi^+(x, \theta)$$

представляет собой суперскаляр (см. п. 1.7.3)

$$\chi'(x', \theta', \bar{\theta}') = \chi(x, \theta, \bar{\theta}).$$

Перепишем перестановочные соотношения в виде

$$[\chi(x_1, \theta_1), \chi(x_2, \theta_2)] = im\delta(\theta_1 - \theta_2) \Delta(x_1 - x_2), \quad (2.6.39)$$

$$[\chi(x_1, \theta_1), \chi(x_2, \theta_2, \bar{\theta}_2)] = -\frac{i}{2} e^{-2i\bar{\theta}_2\sigma^\mu(\theta_1 - \theta_2)\partial_\mu} \Delta(x - x').$$

Тогда суперинвариантность перестановочных соотношений означает, что

$$[\chi'(x'_1, \theta'_1), \chi'(x'_2, \theta'_2)] = im\delta(\theta'_1 - \theta'_2) \Delta(x'_1 - x'_2), \quad (2.6.40)$$

$$[\chi'(x'_1, \theta'_1), \chi'(x'_2, \theta'_2, \bar{\theta}'_2)] = -\frac{i}{2} e^{-2i\bar{\theta}'_2\sigma^\mu(\theta'_1 - \theta'_2)\partial_\mu} \Delta(x'_1 - x'_2).$$

Так как  $\chi(x, \theta)$ ,  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  представляют собой суперскаляры, то правые части (2.6.39), (2.6.40) должны совпадать:

$$\delta(\theta_1 - \theta_2) \Delta(x_1 - x_2) = \delta(\theta'_1 - \theta'_2) \Delta(x'_1 - x'_2), \quad (2.6.41)$$

$$e^{-2i\bar{\theta}_2\sigma^\mu(\theta_1 - \theta_2)\partial_\mu} \Delta(x_1 - x_2) = e^{-2i\bar{\theta}'_2\sigma^\mu(\theta'_1 - \theta'_2)\partial_\mu} \Delta(x'_1 - x'_2).$$

Вследствие (2.6.38) первое из этих соотношений очевидно. Чтобы убедиться в справедливости второго, отметим, что согласно (2.6.38)

$$e^{-2i\bar{\theta}'_2\sigma^\mu(\theta'_1 - \theta'_2)\partial_\mu} \Delta(x'_1 - x'_2) =$$

$$= e^{-2i\bar{\theta}'_2\sigma^\mu(\theta_1 - \theta_2)\partial_\mu} \Delta(x_1 - x_2 + 2i\bar{\zeta}\sigma(\theta_1 - \theta_2)).$$

Замечая далее, что

$$\Delta(x_1 - x_2 + 2i\bar{\zeta}\sigma(\theta_1 - \theta_2)) = e^{2i\bar{\zeta}\sigma^\mu(\theta_1 - \theta_2)\partial_\mu} \Delta(x_1 - x_2),$$

согласно (2.6.38) приходим ко второму из соотношений (2.6.41).

**2.6.5. Упорядоченные произведения операторов суперполя и связи.** Так как  $a^{(+)}(x)$ ,  $\varphi^{(+)}(x)$  являются операторами уничтожения, а  $a^{(-)}(x)$ ,  $\varphi^{(-)}(x)$  операторами рождения, то положительно-частотные (по времени) части  $\chi^{(+)}(x, \theta)$ ,  $\chi^{+(+)}(x, \theta)$  операторов  $\chi(x, \theta)$ ,  $\chi^+(x, \theta)$  также будут операторами уничтожения, а отрицательно-частотные части  $\chi^{(-)}(x, \theta)$ ,  $\chi^{+(-)}(x, \theta)$  этих операторов будут операторами рождения. Таким образом, вектор состояния вакуума супер-



поля  $\Phi_0$  будет определяться формулами

$$\chi^{(+)}(x, \theta)\Phi_0 = 0, \chi^{(-)}(x, \theta)\Phi_0 = 0. \quad (2.6.42)$$

Нормальное произведение операторов  $\chi^{(\pm)}(x, \theta)$  определяется формулой

$$:\chi^{(+)}(x_1, \theta_1) \dots \chi^{(-)}(x_n, \theta_n): = \chi^{(-)}(x_n, \theta_n) \dots \chi^{(+)}(x_1, \theta_1), \quad (2.6.43)$$

где в правой части равенства стоят те же операторы, что и в левой, но расположенные так, что операторы рождения расположены слева от операторов уничтожения (так как операторы рождения (уничтожения) коммутируют друг с другом, то их можно расставлять в любом порядке). Если под знаком нормального произведения стоят операторы  $\chi(x, \theta)$ , то нормальное произведение определяется формулой

$$\begin{aligned} &: \dots \chi(x, \theta) \dots : = : \dots \chi^{(+)}(x, \theta) \dots : + \\ &+ : \dots \chi^{(-)}(x, \theta) \dots :. \end{aligned} \quad (2.6.43')$$

Подчеркнем, что хотя суперполе  $\chi(x, \theta)$  содержит фермиевские операторы, в определении нормального произведения не входят знаковые факторы. Это связано с тем, что в суперполе  $\chi(x, \theta)$  фермиевские поля  $\varphi(x)$  входят вместе с грассмановой переменной  $\theta$  (под знак нормального произведения могут входить как операторы  $\chi(x, \theta)$ , так и операторы  $\chi^+(x, \theta)$ ).

Хронологическое произведение операторов суперполя определяется согласно формуле

$$T\{\chi(x_1, \theta_1) \dots \chi(x_n, \theta_n)\} = \chi(x_{i_1}, \theta_{i_1}) \dots \chi(x_{i_n}, \theta_{i_n}), \quad (2.6.44)$$

$$t_{i_1} > \dots > t_{i_n}$$

(в этом определении также не содержится знаковых факторов; под знак  $T$ -произведения могут входить как операторы  $\chi(x, \theta)$ , так и операторы  $\chi^+(x, \theta)$ ).

Связь между операторами суперполя определяется формулами

$$\underline{\chi(x, \theta)\chi(x', \theta')} = T\{\chi(x, \theta)\chi(x', \theta')\} - : \chi(x, \theta)\chi(x', \theta') :,$$

$$\underline{\chi(x, \theta)\chi^+(x', \theta')} = T\{\chi(x, \theta)\chi^+(x', \theta')\} - : \chi(x, \theta)\chi^+(x', \theta') :.$$

Поступая так же, как при вычислении разновременных коммутаторов, получаем

$$\begin{aligned} \underline{\chi(x, \theta)\chi(x', \theta')} &= -\frac{m}{2}(\theta'\theta')\underline{a(x)a^+(x')} - \\ &- \frac{m}{2}(\theta\theta)\underline{a^+(x)a(x')} + \theta^{\beta}\theta^{\alpha}\underline{\varphi_{\alpha}(x)\varphi_{\beta}(x')} \end{aligned}$$

(мы учли, что связи между операторами  $a(x)$  и  $a(x')$  равны нулю, т. е.  $\underline{aa} = 0$ , см. п. 2.3.3). Используя формулы (2.6.19), (2.3.31), определяющие связи  $\underline{\varphi\varphi}$ ,  $\underline{aa^+}$ , и учитывая формулу (2.6.33), получаем

$$\underline{\chi(x, \theta)\chi(x', \theta')} = im\delta(\theta - \theta')\Delta^c(x - x'). \quad (2.6.45)$$

Ясно, что правая часть этого равенства представляет собой суперскаляр.

Аналогично находим

$$\begin{aligned} \underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} &= \frac{1}{2} \underline{a(x) a^+(x')} - \\ &- (\theta\theta) (\bar{\theta}'\bar{\theta}') \frac{m^2}{2} \underline{a^+(x) a(x')} + \bar{\theta}'^{\beta} \theta^{\alpha} \underline{\varphi_{\alpha}(x) \varphi_{\beta}^{\dagger}(x')}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения (2.6.19), (2.3.31) для связей, получаем

$$\begin{aligned} \underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} &= -\frac{i}{2} (1 - m^2 (\theta\theta) (\bar{\theta}'\bar{\theta}')) - 2i \bar{\theta}'^{\beta} \theta^{\alpha} (\bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu})_{\alpha\beta} \times \\ &\times \Delta^c(x - x'). \end{aligned}$$

Так как функция  $\Delta^c(x)$  удовлетворяет уравнению

$$(\partial^{\mu} \partial_{\mu} + m^2) \Delta^c(x) = \delta(x),$$

то

$$\begin{aligned} \underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} &= -\frac{i}{2} (1 + (\theta\theta) (\bar{\theta}'\bar{\theta}')) \partial^{\mu} \partial_{\mu} - 2i \bar{\theta}'^{\beta} \theta^{\alpha} \theta \partial_{\mu} \Delta^c(x - x') + \\ &+ \frac{i}{2} (\theta\theta) (\bar{\theta}'\bar{\theta}') \delta(x - x'). \end{aligned}$$

Учитывая далее формулу (2.6.36), окончательно находим

$$\underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} = \underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')}_{\text{super}} + \frac{i}{2} (\theta\theta) (\bar{\theta}'\bar{\theta}') \delta(x - x'), \quad (2.6.46)$$

где

$$\underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')}_{\text{super}} = -\frac{i}{2} e^{-2i\bar{\theta}'^{\beta} \theta^{\alpha} \theta \partial_{\mu}} \Delta^c(x - x'). \quad (2.6.47)$$

Ясно, что величина

$$e^{-2i\bar{\theta}'^{\beta} \theta^{\alpha} \theta \partial_{\mu}} \underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')}_{\text{super}}$$

представляет собой суперскаляр, что находится в соответствии с формулой

$$e^{-2i\bar{\theta}_2^{\beta} \theta_1^{\alpha} (\theta_1 - \theta_2) \partial_{\mu}} \Delta^c(x_1 - x_2) = e^{-2i\bar{\theta}'_2^{\beta} \theta'_1{}^{\alpha} (\theta'_1 - \theta'_2) \partial_{\mu}} \Delta^c(x'_1 - x'_2)$$

(доказательство этого соотношения совпадает с доказательством второй из формул (2.6.41)). Второе слагаемое в (2.6.46) нарушает суперскалярный характер величины  $\underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta', \bar{\theta}')$ . Роль неинвариантного второго слагаемого в формуле (2.6.46) будет выяснена при построении матрицы рассеяния для суперполя (см. п. 3.9.1).

## § 2.7. КВАНТОВАНИЕ КВАРКОВОГО ПОЛЯ

**2.7.1. Лагранжиан и квантовые числа кварков.** Мы уже рассматривали классическое кварковое поле  $q_A(x)$ , описываемое обобщенным дираковским лагранжианом (1.8.3) (индекс  $A = (\alpha, i)$ , где индекс  $i = 1, 2, 3$  служит для обозначения цвета кварка, а индекс  $\alpha = 1, 2, 3, 4$  — для обозначения сорта (или аромата) кварка).

Перейдем к квантованию кваркового поля, которое представляет собой ферми-поле. Будем при этом исходить из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \sum_A [\bar{q}^A, (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_A) q_A] + \frac{1}{4} \sum_A [q_A, (i\gamma^\mu \partial_\mu + m_A) \bar{q}^A], \quad (2.7.1)$$

аналогичного лагранжиану (2.5.1) (суммирование по спиновым индексам  $\bar{q}^A$ , как и ранее, не выписываем; величина  $\bar{q}^A$  определяется формулой  $\bar{q}^A = q_A^\dagger \gamma^0$ ). Масса кварка  $m_A \equiv m_\alpha$  не зависит от цвета кварка, но в принципе может зависеть от его сорта (в простейшей схеме предполагается, что масса кварков  $u, d, s$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) не зависит и от их сорта, масса же кварка  $c$  ( $\alpha = 4$ ), а также кварков  $b, t$  ( $\alpha = 5, 6$ ) значительно больше массы  $u, d, s$  кварков [20]).

Из лагранжиана (2.7.1) вытекают следующие одновременные перестановочные соотношения для полей  $q_A, \bar{q}^A$

$$\begin{aligned} \{q_A(x), q_{A'}(x')\}_{t=t'} &= \{\bar{q}^A(x), \bar{q}^{A'}(x')\}_{t=t'} = 0, \\ \{q_A(x), \bar{q}^{A'}(x')\}_{t=t'} &= \delta_A^{A'} \gamma^0 \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

аналогичные соотношениям (2.5.4). Операторы  $q_A, \bar{q}^A$  можно разложить на плоские волны

$$q_A(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}\mu} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \{u^\mu(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}\mu A} e^{-i p x} + u^\mu(\mathbf{p})^c b_{\mathbf{p}\mu A}^+ e^{i p x}\}, \quad (2.7.3)$$

где  $a_{\mathbf{p}\mu A}, b_{\mathbf{p}\mu}^A$  — операторы уничтожения кварка и антикварка с квантовыми числами  $\mu$  (спиральность),  $\mathbf{p}$  (импульс),  $A = (\alpha, i)$  (сорт и цвет). Операторы рождения кварка и антикварка будем обозначать  $a_{\mathbf{p}\mu}^+ A$  и  $b_{\mathbf{p}\mu A}^+$ ,  $a_{\mathbf{p}\mu}^+ A = (a_{\mathbf{p}\mu A})^+$ ,  $b_{\mathbf{p}\mu A}^+ = (b_{\mathbf{p}\mu}^A)^+$ . Эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\{a_{\mathbf{p}\mu A}, a_{\mathbf{p}'\mu' A'}^+\} = \{b_{\mathbf{p}'\mu' A'}, b_{\mathbf{p}\mu A}^+\} = \delta_A^{A'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad (2.7.4)$$

аналогичным перестановочным соотношениям (2.5.26) (антикоммутизаторы для остальных пар операторов  $a, a^+, b, b^+$  равны нулю).

Мы использовали здесь обозначения  $a, b, a^+, b^+$  для операторов уничтожения и рождения кварков для того, чтобы подчеркнуть аналогию между кварковым и электронно-позитронным полями. Но для разных сортов кварков используются обычно иные обозначения:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}\mu 1} &\equiv u_{\mathbf{p}\mu}, & a_{\mathbf{p}\mu 2} &\equiv d_{\mathbf{p}\mu}, \\ a_{\mathbf{p}\mu 3} &\equiv s_{\mathbf{p}\mu}, & a_{\mathbf{p}\mu 4} &\equiv c_{\mathbf{p}\mu} \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

(операторы уничтожения в  $b_{p\mu}^A$  ( $A = 1, \dots, 4$ ) антикварков обозначаются соответственно через  $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{c}$ ).

Лагранжиан (2.7.1) инвариантен, очевидно, относительно бесконечно малых фазовых преобразований

$$\delta q = -i\alpha q, \quad \delta \bar{q} = i\alpha \bar{q}, \quad \alpha = \alpha^*. \quad (2.7.6)$$

С этой инвариантностью связан закон сохранения барионного заряда. Чтобы сформулировать этот закон, отметим, что согласно общей теории (см. § 2.1) в случае, если вариации поля, связанные с преобразованиями симметрии, таковы, что  $\delta \mathcal{L} = 0$ , то  $G_2 = 0$  и генератор преобразований, связанных с симметрией, имеет вид  $G = G_1$ :

$$G = \frac{1}{4} \int d^3x (i [\bar{q}^A, \gamma^0 \delta q_A] + i [q_A, \bar{q}^A \delta]). \quad (2.7.7)$$

Подставляя сюда вариации (2.7.6), получаем

$$G = 3\alpha B,$$

где

$$B = \int d^3x \mathcal{J}^0(x), \quad \mathcal{J}^\mu = \frac{1}{6} [\bar{q}^A, \gamma^A q_A]. \quad (2.7.8)$$

Сохраняющаяся величина  $\mathcal{J}^\mu$  называется барионным током кварков, а величина  $B$  — барионным зарядом кваркового поля. Так как (см. § 2.1)

$$i[G(t), q_A(x)] = \delta q_A(x), \quad i[G(t), \bar{q}^A(x)] = \delta \bar{q}^A(x),$$

то справедливы перестановочные соотношения

$$[B, q_A] = -\frac{1}{3} q_A, \quad [B, \bar{q}^A] = \frac{1}{3} \bar{q}^A. \quad (2.7.9)$$

Из этих формул и (2.7.3) следует, что

$$[B, a_{p\mu}^{+A}] = +\frac{1}{3} a_{p\mu}^{+A}, \quad [B, b_{p\mu A}^+] = -\frac{1}{3} b_{p\mu A}^+. \quad (2.7.10)$$

Считая, что барионный заряд вакуума равен нулю, получаем

$$B a_{p\mu}^{+A} \Phi_0 = \frac{1}{3} a_{p\mu}^{+A} \Phi_0, \quad B b_{p\mu A}^+ \Phi_0 = -\frac{1}{3} b_{p\mu A}^+ \Phi_0.$$

Отсюда следует, что барионный заряд кварка равен  $1/3$ , а антикварка —  $1/3$ . Здесь нужно сделать следующее замечание. Множитель  $1/3$  в формуле (2.7.9) связан с основной идеей кварковой гипотезы, согласно которой все барионы и барионные резонансы состоят из трех кварков, а все мезоны из кварка и антикварка. Так как барионное число барионов равно единице, то кварку нужно приписать барионное число, равное  $1/3$ .

Лагранжиан (2.7.1) инвариантен, очевидно, по отношению к преобразованиям

$$q_A \rightarrow q'_A = \sum_{i'} U_{ii'} q_{\alpha i'}, \quad A = \alpha, i, \quad (2.7.11)$$

оставляющим инвариантной квадратичную форму  $\sum_i q_{xi} \bar{q}^{ai}$ . Эти преобразования образуют группу  $SU(3; C)$  (индекс  $C$  служит для обозначения цвета), которая называется группой цветовой симметрии.

Если предполагать, что массы всех кварков одинаковы, то лагранжиан (2.7.1) будет инвариантен также по отношению к преобразованиям

$$q_A \rightarrow q'_A = \sum_{\alpha'} U_{\alpha\alpha'} q_{\alpha' i}, \quad A = \alpha, i, \quad (2.7.12)$$

оставляющим инвариантной квадратичную форму  $\sum_{\alpha} q_{\alpha i} \bar{q}^{\alpha i}$ . Эти преобразования образуют группу  $SU(n; F)$  (индекс  $F$  служит для обозначения сорта, а  $n$  — числа сортов кварков). Отметим, однако, что в то время как  $SU(3; C)$  является точной группой симметрии кваркового поля,  $SU(n; F)$  является его приближенной группой. При этом лагранжиан будет инвариантен по отношению к группе  $SU(3; C) \times SU(n; F)$ , представляющей собой прямое произведение  $SU(3; C)$ - и  $SU(n; F)$ -групп.

С этими группами симметрии кваркового поля связаны определенные законы сохранения. Для установления этих законов построим генераторы  $G$  бесконечно малых преобразований группы  $SU(3; C)$ :

$$\delta q = -\frac{i}{2} \varepsilon^a \lambda_a q, \quad \delta \bar{q} = \frac{i}{2} \varepsilon^a \bar{q} \lambda_a, \quad (2.7.13)$$

где матрицы  $\lambda_a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ) определяются формулами (1.8.16). Согласно (2.7.7) генератор этих преобразований

$$G = \frac{1}{4} \varepsilon^a \int d^3x [\bar{q}^A, \gamma^0 \lambda_a q_A],$$

или

$$G = \varepsilon^a \int d^3x \mathcal{J}_a^{(c)0}(x), \quad (2.7.14)$$

где  $\mathcal{J}_a^{(c)\mu}$  — сохраняющиеся обобщенные токи группы  $SU(3; C)$ ,

$$\mathcal{J}_a^{(c)\mu}(x) = \frac{1}{4} [\bar{q}^A(x), \gamma^\mu \lambda_a q_A(x)]. \quad (2.7.15)$$

Соответствующие им обобщенные заряды группы  $SU(3; C)$  определяются формулами

$$Q_a^{(c)} = \int d^3x \mathcal{J}_a^{(c)0}(x). \quad (2.7.16)$$

Так как оператор  $\varepsilon^a Q_a^{(c)} \equiv G$  является генератором преобразований (2.7.13), то

$$[Q_a^{(c)}, q] = -\frac{1}{2} \lambda_a q, \quad [Q_a^{(c)}, \bar{q}] = \frac{1}{2} \bar{q} \lambda_a. \quad (2.7.17)$$

Используя эти соотношения и формулы (2.7.15), (2.7.16), нетрудно показать, что заряды  $Q_a^{(c)}$  удовлетворяют перестановочным соотношениям (см. также п. 2.2.3)

$$[Q_a^{(c)}, Q_b^{(c)}] = i f_{ab}^d Q_d^{(c)},$$

где  $f_{ab}^d$  — структурные постоянные группы  $SU(3; C)$ . Аналогичное рассмотрение справедливо и для группы  $SU(n; F)$ . В частности, если  $n = 4$ , то число матриц  $\lambda_a$ , действующих на индекс сорта, будет равно не восьми, а пятнадцати ( $n^2 - 1 = 15$  при  $n = 4$ ). В качестве таких бесшпуровых матриц обычно выбираются следующие матрицы (нумерация строк и столбцов матриц соответствует нумерации кварков:  $c, u, d, s$ ):

$$\lambda_{4k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \lambda_k & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, 8, \quad \lambda_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{10} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{15} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.7.18)$$

где  $\lambda_k$  — трехрядные матрицы Гелл-Манна (1.8.16). Соответствующие этим матрицам структурные постоянные  $f_{ik}^l$  определяются из формул

$$\frac{1}{2} [\lambda_a, \lambda_b] = if_{ab}^c \lambda_c, \quad a, b, c = 1, \dots, 15.$$

Явных значений структурных постоянных мы не будем здесь приводить. Пятнадцать зарядов, соответствующих этой группе, определяются формулой, аналогичной (2.7.16):

$$Q_a^{(F)} = \int d^3x \mathcal{J}_a^{(F)0}(x), \quad \mathcal{J}_a^{(F)\mu} = \frac{1}{4} [\bar{q}^A, \gamma^\mu \lambda_a q_A], \quad a = 1, \dots, 15. \quad (2.7.19)$$

Эти заряды удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[Q_a^{(F)}, Q_b^{(F)}] = if_{ab}^d Q_d^{(F)}. \quad (2.7.20)$$

Если  $a, b, c = 1, 2, 3$ , то  $f_{ab}^c = \varepsilon^{abc}$  (см. (2.7.18), а также явный вид матриц (1.8.16)) и операторы  $Q_1^{(F)} = I_1$ ,  $Q_2^{(F)} = I_2$ ,  $Q_3^{(F)} = I_3$  удовлетворяют перестановочным соотношениям группы  $SU(2)$ , которую естественно назвать группой изотопического спина. Она является, очевидно, подгруппой группы  $SU(4; F)$ . Заряд  $I_3$  можно назвать оператором третьей проекции изотопического спина.

Из перестановочных соотношений (2.7.17) операторов  $Q_a^{(F)}$  и явно-го вида матриц  $\lambda_a$  следует

$$[I_3, a_{p\mu}^{+A}] = \frac{1}{2} \lambda_3^\alpha a_{p\mu}^{+A}, \quad [I_3, b_{p\mu A}^+] = -\frac{1}{2} \lambda_3^\alpha b_{p\mu A}^+ \quad (2.7.21)$$

( $\lambda_3^\alpha$  — собственные значения матрицы  $\lambda_3$ ,  $\lambda_3^s = \lambda_3^s = 0$ ,  $\lambda_3^u = -\lambda_3^d = = 1$ ).

Будем предполагать, что все заряды  $Q_a^{(F)}$  ( $a = 1, \dots, 15$ ) для вакуума кваркового поля равны нулю. Тогда из формул (2.7.21) легко видеть, что однокварковые состояния

$$\Phi_u = u_{p\mu}^+ \Phi_0, \quad \Phi_d = d_{p\mu}^+ \Phi_0, \quad \Phi_s = s_{p\mu}^+ \Phi_0, \quad \Phi_c = c_{p\mu}^+ \Phi_0 \quad (2.7.21')$$

являются собственными состояниями оператора  $I_3$ , принадлежащими соответственно собственным значениям  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $0$ ,  $0$  (векторы

$\Phi_u = \bar{u}_{p\mu}^+ \Phi_0$ , ... описывают состояния  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -,  $c$ -антикварков).

Согласно (2.7.18), (1.8.16) с зарядами  $Q_1^{(F)}$ ,  $Q_2^{(F)}$ ,  $Q_3^{(F)}$ , связанными с изотопическим спином, коммутируют два заряда  $Q_8^{(F)}$ ,  $Q_{15}^{(F)}$ . Поэтому состояния  $\Phi_s$ ,  $\Phi_u$ ,  $\Phi_d$ ,  $\Phi_c$  являются также собственными состояниями зарядов  $Q_8^{(F)}$ ,  $Q_{15}^{(F)}$ . Введем вместо оператора  $Q_8^{(F)}$  оператор гиперзаряда

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} Q_8^{(F)}, \quad (2.7.22)$$

а вместо оператора  $Q_{15}^{(F)}$  оператор очарования

$$C = \frac{1}{2} \int d^3x [\bar{q}, Cq], \quad (2.7.23)$$

$$C = \frac{1}{4} (1 - \sqrt{6} \lambda_{15}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из формул (2.7.18), (2.7.21') следует, что

$$Y\Phi_s = -\frac{2}{3} \Phi_s, \quad Y\Phi_u = \frac{1}{3} \Phi_u, \quad Y\Phi_d = \frac{1}{3} \Phi_d, \quad Y\Phi_c = 0 \cdot \Phi_c,$$

$$C\Phi_s = 0 \cdot \Phi_s, \quad C\Phi_u = 0 \cdot \Phi_u, \quad C\Phi_d = 0 \cdot \Phi_d, \quad C\Phi_c = \Phi_c,$$

т. е. гиперзаряды  $s$ -,  $u$ -,  $d$ -,  $c$ -кварков равны соответственно  $-\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $0$  (гиперзаряды  $s$ -,  $u$ -,  $d$ -,  $c$ -антикварков равны соответственно  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $0$ ). Нормировка в формуле (2.7.22) находится в соответствии с тем, что гиперзаряд связан с барионным зарядом соотношением

$$Y = S + B - \frac{1}{3} C, \quad (2.7.24)$$

где  $S$  — странность, которая равна нулю для  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварков и равна  $-1$  для  $s$ -кварка. Согласно определению (2.7.23) очарование  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварков равно нулю, а для  $c$ -кварка оно равно 1.

Квантовые числа кварков  $Y$ ,  $I_3$ ,  $C$  сведены в весовую (пространственную) диаграмму, показанную на рис. 2.

Если исключить из рассмотрения  $c$ -кварк, то весовая диаграмма (плоская) будет иметь вид, показанный на рис. 3. Эта диаграмма соответствует группе  $SU(3; F)$ .

Электрические заряды кварков (в единицах  $e$ ) вводятся согласно модифицированной формуле Гелл-Манна — Нишиджими

$$Q = \frac{Y}{2} + I_3 + \frac{2}{3}C. \quad (2.7.25)$$

Из этой формулы следует, что электрические заряды  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -,  $c$ -кварков равны соответственно  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ .

**2.7.2. Алгебра токов.** Выше мы определили октет ( $a = 1, \dots, 8$ ) обобщенных векторных токов

$\mathcal{J}_a^{(c)\mu}(x) \equiv \mathcal{J}_a^\mu$ , которые строились с помощью кварковых полей. Для ряда задач существенно знать коммутационные соотношения для этих токов. Здесь мы получим эти соотношения <sup>15</sup>.

Так как токи  $\mathcal{J}_a^\mu(x)$  при бесконечно малых преобразованиях группы  $SU(3)$  преобразуются по формулам (1.8.13):

$$\delta \mathcal{J}_a^\mu(x) = f_{ab}^c \varepsilon^b \mathcal{J}_c^\mu(x)$$

(эти формулы можно также непосредственно получить из (2.7.15), (2.7.13), используя коммутационные соотношения (1.8.10) для матриц  $\lambda_a$ ), а оператор  $G$  представляет собой генератор преобразований (2.7.13), то

$$\delta \mathcal{J}_a^\mu(x) = i[G, \mathcal{J}_a^\mu(x)], \quad G = \varepsilon^a Q_a, \quad Q_a \equiv Q_a^{(c)}.$$

Поэтому

$$[Q_b, \mathcal{J}_a^\mu(x)] = i f_{ba}^c \mathcal{J}_c^\mu(x) \quad (2.7.26)$$

( $f_{ab}^c$  — структурные постоянные группы  $SU(3)$ ).

Перейдем к нахождению структуры одновременных коммутационных соотношений  $[\mathcal{J}_a^\mu(x), \mathcal{J}_b^\nu(x')]_{t=x'}$  для токов. Так как токи представляют собой локальные операторы, т. е. операторы, которые строятся из полевых операторов и их производных (конечного порядка), отно-

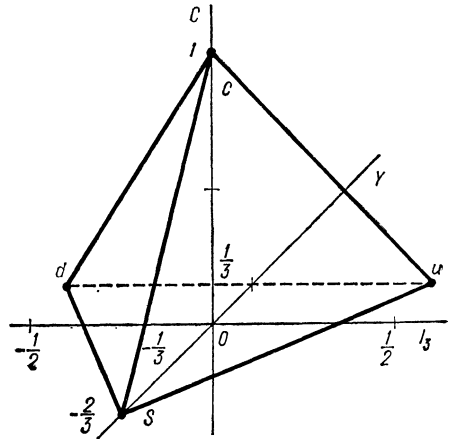


Рис. 2

<sup>15</sup> Алгебра токов впервые была введена Гелл-Манном [21] (см. также [22—24]).



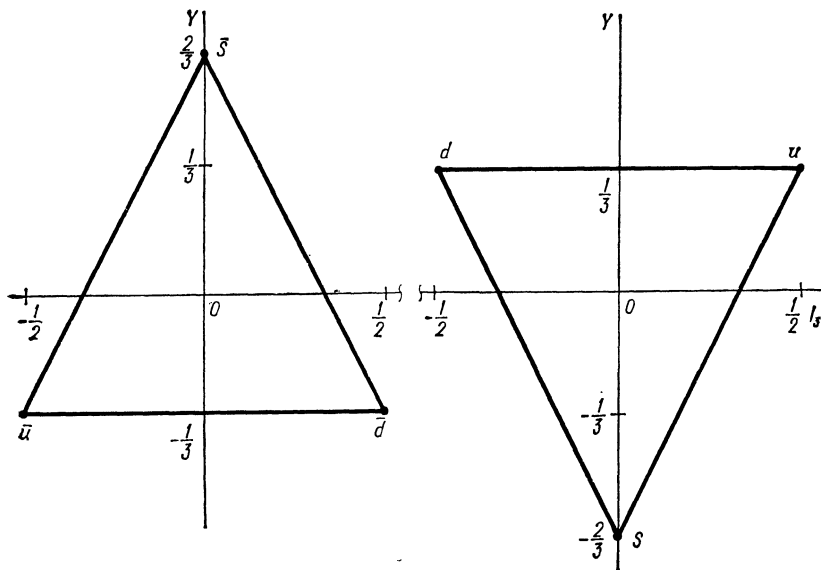


Рис. 3

сящихся к одной и той же пространственно-временной точке, то вследствие принципа причинности одновременные коммутаторы токов должны обращаться в нуль при  $x \neq x'$  и, следовательно, они должны быть линейной комбинацией  $\delta(x - x')$  и ее пространственных производных:

$$[\mathcal{J}_a^\mu(x), \mathcal{J}_b^\nu(x')]_{t=t'} = F_{ab}^{\mu\nu}(x)\delta(x - x') - G_{ab;k}^{\mu\nu}\partial^k\delta(x - x'), \quad (2.7.27)$$

где  $F$  и  $G$  — некоторые локальные операторы; мы предполагаем здесь, что коммутаторы не содержат производных от  $\delta$ -функций выше первого порядка. Полагая в этой формуле  $\nu = 0$  и интегрируя ее по  $x'$ , согласно (2.7.26) получаем

$$F_{ab}^{\mu 0}(x) = if_{ab}{}^c \mathcal{J}_c^\mu(x).$$

Поэтому при  $\nu = 0$  соотношение (2.7.27) принимает вид

$$[\mathcal{J}_a^\mu(x), \mathcal{J}_b^0(x')]_{t=t'} = if_{ab}{}^c \mathcal{J}_c^\mu(x)\delta(x - x') - R_{ab}^{\mu k}(x)\partial_k\delta(x - x'), \quad (2.7.28)$$

где  $R_{ab}^{\mu k}(x) = -G_{ab;k}^{\mu 0}(x)$ . Мы видели, что заряды  $Q_a = \int d^3x \mathcal{J}_a^0(x)$  образуют алгебру Ли группы  $SU(3)$ . Предположим, что операторы  $\mathcal{J}_a^0(x)$  образуют локальную алгебру группы  $SU(3)$ , т. е.

$$[\mathcal{J}_a^0(x), \mathcal{J}_b^0(x')]_{t=t'} = if_{ab}{}^c \mathcal{J}_c^0(x)\delta(x - x'). \quad (2.7.29)$$

Иными словами, мы предполагаем, что  $R_{ab}^{0k}(x) \equiv 0$ . Полагая в формуле (2.7.28)  $\mu = l$ , получаем

$$[\mathcal{J}_a^l(x), \mathcal{J}_b^0(x')]_{t=t'} = if_{ab}{}^c \mathcal{J}_c^l(x)\delta(x - x') - R_{ab}^{lk}(x)\partial_k\delta(x - x'). \quad (2.7.30)$$

Одновременной коммутатор пространственных компонент токов согласно (2.7.27) записываем в виде

$$[\mathcal{J}_a^l(x), \mathcal{J}_b^k(x')]_{t=t'} = F_{ab}^{lk}(x) \delta(x - x') - G_{ab}^{lk;s} \partial_s \delta(x - x'). \quad (2.7.31)$$

Имея явную кварковую структуру токов  $\mathcal{J}_a^\mu(x)$  (2.7.15) и используя одновременные перестановочные соотношения для кваркового поля, можно формально вычислить коммутаторы токов. В результате такого формального вычисления получим

$$[\mathcal{J}_a^\mu(x), \mathcal{J}_b^0(x')]_{t=t'} = i f_{ab}^c \mathcal{J}_c^\mu(x) \delta(x - x'). \quad (2.7.32)$$

Видно, что в правые части этих формул входит только пространственная  $\delta$ -функция, но не ее производные, следовательно,

$$R_{ab}^{\mu k}(x) = 0. \quad (2.7.33)$$

Однако легко убедиться, что не все эти результаты являются правильными. Действительно, рассмотрим одновременный коммутатор  $[\mathcal{J}^\mu(x), \mathcal{J}^k(x')]_{t=t'}$  и будем для простоты предполагать, что группа абелева ( $f_{ab}^c = 0$ ). Этот случай соответствует токам, связанным с инвариантностью лагранжиана относительно фазовых преобразований (например, электромагнитным токам):

$$\mathcal{J}^\mu = \frac{1}{2} [\bar{q}(x), \gamma^\mu q(x)].$$

Тогда согласно (2.7.32)

$$[\mathcal{J}^0(x), \mathcal{J}^k(x')]_{t=t'} = 0.$$

Дифференцируя это соотношение по  $x'^k$ , используя закон сохранения тока  $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0$ , получаем

$$[\mathcal{J}^0(x), \partial_0' \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} = 0. \quad (2.7.34)$$

Вычислим вакуумное среднее входящего сюда коммутатора. Вводя полную систему векторов состояний  $|n\rangle$  гамильтониана  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$$

(вектор  $|0\rangle$  обозначает вакуумное состояние с энергией  $E_0$ ) и учитывая, что

$$\langle 0 | \partial_0 \mathcal{J}^0(x) | n \rangle = -i(E_n - E_0) \langle 0 | \mathcal{J}^0(x) | n \rangle,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int d^3x d^3x' f(x) f(x') \langle 0 | [\mathcal{J}^0(x), \partial_0' \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} | 0 \rangle = \\ = 2i \sum_n (E_n - E_0) \left| \int d^3x f(x) \langle 0 | \mathcal{J}^0(x) | n \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

( $f(x)$  — произвольная вещественная функция  $x$ ). Так как  $E_n - E_0 > 0$  и матричные элементы  $\langle 0 | \mathcal{J}^0(x) | n \rangle$  отличны от нуля, например, для состояний  $|n\rangle$ , в которых имеется одна частица и одна античастица, то  $\langle 0 | [\mathcal{J}^0(x), \partial_0' \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} | 0 \rangle \neq 0$ , что находится в противоречии с формулой (2.7.34).

Таким образом, видим, что формальный вывод коммутационных соотношений для токов, основанный только на явном выражении для кварковых токов, неверен. Это связано с тем, что произведение полевых операторов в одной и той же пространственно-временной точке, вообще говоря, не имеет смысла, что видно, например, из одновременных перестановочных соотношений (2.7.2), так как  $\delta$ -функция  $\delta(\mathbf{x})$  не имеет смысла при  $\mathbf{x} = 0$ . В связи со сказанным, чтобы придать смысл произведениям операторов поля в совпадающих точках, следует пространственные аргументы операторов несколько «раздвинуть». Именно если заданы два полевых оператора  $a(x)$ ,  $b(x)$  ( $a, b = q, \bar{q}$ ), то под произведением  $a(x)b(x)$  будем понимать

$$a(x)b(x) \rightarrow a\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)b\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

где  $\varepsilon$  — бесконечно малый пространственный вектор. При таком определении электромагнитный ток  $\mathcal{J}^\mu(x)$  можно представить в виде

$$\mathcal{J}^\mu(x) = \frac{1}{2}\bar{q}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\gamma^\mu q\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{1}{2}q\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\bar{\gamma}^\mu \bar{q}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (2.7.35)$$

При таком определении тока, вычисляя с помощью одновременных перестановочных соотношений (2.7.2) коммутатор токов, получаем

$$\begin{aligned} 4[\mathcal{J}^\mu(x), \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} = & \left(-\bar{q}\left(x' + \frac{\varepsilon'}{2}\right)\gamma^\mu q\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \right. \\ & \left. + \bar{q}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)\gamma^\mu q\left(x' + \frac{\varepsilon'}{2}\right)\right) \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}\right) + \\ & + \left(\bar{q}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\gamma^\mu q\left(x' - \frac{\varepsilon'}{2}\right) - \right. \\ & \left. - \bar{q}\left(x' - \frac{\varepsilon'}{2}\right)\gamma^\mu q\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}\right) + \\ & + \left(-\bar{q}\left(x' - \frac{\varepsilon'}{2}\right)\gamma^\mu q\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \right. \\ & \left. + \bar{q}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)\gamma^\mu q\left(x' - \frac{\varepsilon'}{2}\right)\right) \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2}\right) + \\ & + \left(\bar{q}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\gamma^\mu q\left(x' + \frac{\varepsilon'}{2}\right) - \right. \\ & \left. - \bar{q}\left(x' + \frac{\varepsilon'}{2}\right)\gamma^\mu q\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2}\right) \end{aligned}$$

(вектор  $\varepsilon$  относится к току  $\mathcal{J}^\mu(x)$ , а вектор  $\varepsilon'$  к току  $\mathcal{J}^0(x')$ ). Таким образом, при  $\varepsilon = \varepsilon' = 0$  этот коммутатор формально обращается в нуль. Вычислим вакуумное среднее полученного коммутатора. Учитывая, что (см. (2.7.3))

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}\mu} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} (u^\mu(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}\mu} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} + u^\mu(\mathbf{p})^c b_{\mathbf{p}\mu}^+ e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}})$$

и

$$\bar{u}^\mu(\mathbf{p})^c \gamma^\lambda u^\mu(\mathbf{p})^c = 2p^\lambda,$$

находим

$$\langle 0 | \bar{q}(x) \gamma^\lambda q(x') | 0 \rangle_{t=t'} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p^\lambda}{p_0} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \equiv f^\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \langle 0 | [\mathcal{J}^\lambda(x), \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} | 0 \rangle = \\ & = (f^\lambda(\varepsilon + \varepsilon') - f^\lambda(-\varepsilon - \varepsilon')) \left( \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}\right) - \right. \\ & \quad \left. - \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}\right) \right) + \\ & + (f^\lambda(\varepsilon - \varepsilon') - f^\lambda(\varepsilon' - \varepsilon)) \left( \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2}\right) - \right. \\ & \quad \left. - \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \langle 0 | [\mathcal{J}^0(x), \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} | 0 \rangle = 0, \\ & \langle 0 | [\mathcal{J}^k(x), \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} | 0 \rangle = \\ & = -\frac{1}{2} \{ f^k(\varepsilon + \varepsilon')(\varepsilon + \varepsilon')_l + f^k(\varepsilon - \varepsilon')(\varepsilon - \varepsilon')_l \} \partial^l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

(мы учли при этом, что  $f^0(\mathbf{x})$  — четная функция  $\mathbf{x}$ ;  $f^k(\mathbf{x})$  — нечетная функция  $\mathbf{x}$ ). Так как  $f^k(\varepsilon) \approx \frac{2i}{\varepsilon^3} \varepsilon^k$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то

$$\begin{aligned} & i \langle 0 | [\mathcal{J}^k(x), \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} | 0 \rangle \approx \\ & \approx \left\{ \frac{(\varepsilon + \varepsilon')_k (\varepsilon + \varepsilon')_l}{|\varepsilon + \varepsilon'|^4} + \frac{(\varepsilon - \varepsilon')_k (\varepsilon - \varepsilon')_l}{|\varepsilon - \varepsilon'|^4} \right\} \partial^l (\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.7.36) \end{aligned}$$

следовательно, при  $\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0$  вакуумное среднее коммутатора  $[\mathcal{J}^k(x), \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'}$  не обращается в нуль (даже расходится). По этой причине в формуле (2.7.30) мы не можем в качестве операторов  $R_{ab}^{lk}$  использовать операторы (2.7.33), т. е. в этой формуле кроме членов, содержащих  $\delta$ -функцию, должны входить члены, содержащие пространственные производные от  $\delta$ -функции. Эти члены называются швингеровскими [25]. К вопросу о роли швингеровских членов мы еще вернемся в § 3.2.

Алгебра токов используется при получении так называемых правил сумм, связывающих амплитуды и сечения различных процессов [26].

**ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

**§ 3.1. ЛАГРАНЖИАНЫ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО  
И ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННОГО ПОЛЕЙ**

**3.1.1. Уравнения квантовой электродинамики в кулоновской калибровке.** До сих пор мы рассматривали квантование различных свободных полей. Перейдем к исследованию квантовой теории взаимодействующих полей, начав с изучения взаимодействия электромагнитного и электронно-позитронного полей. Так как электромагнитные поля  $A_\mu$ ,  $F_{\mu\nu}$  являются бозе-полями, а электронно-позитронные поля  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  — ферми-полями, то лагранжиан электромагнитного и электронно-позитронного полей следует выбирать в виде (см. (1.9.3), (1.4.29))

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_M + \frac{1}{4} [\bar{\psi}, (i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\psi] + \\ + \frac{1}{4} [\psi, (i\bar{\gamma}^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) + m)\bar{\psi}], \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{8} \{F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}\} - \frac{1}{4} \{F^{\mu\nu}, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\}.$$

Этот лагранжиан приводит к калибровочно инвариантным уравнениям движения, формально совпадающим с уравнениями движения классических полей. Вследствие калибровочной инвариантности мы не можем выразить поле  $A_0$  через динамически независимые переменные. Чтобы устранить эту трудность, необходимо нарушить калибровочную инвариантность, наложив на поле  $A_\mu$  некоторое дополнительное условие.

Мы здесь будем считать, что поля  $A_k$  удовлетворяют условию пространственной поперечности [1, 2]

$$\partial^k A_k = 0. \quad (3.1.2)$$

В этом случае говорят о кулоновской (или радиационной) калибровке электромагнитного поля. Преимуществом этой калибровки является то, что в ней не возникают духовые состояния, т. е. состояния, соответствующие скалярным и продольным фотонам. Однако в кулоновской калибровке отсутствует явная релятивистская инвариантность теории.

Лагранжиан электромагнитного поля можно представить в виде

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \{F^{k0}, \partial_0 A_k\} + \frac{1}{4} \{F_{k0}, F^{k0}\} + \frac{1}{8} \{F_{kl}, F^{kl}\} - \\ - \frac{1}{4} \{F^{kl}, \partial_k A_l - \partial_l A_k\} + \frac{1}{2} \{\partial_k F^{k0}, A_0\} - \frac{1}{2} \partial_k \{F^{k0}, A_0\}.$$

Последнее слагаемое в выражении для  $\mathcal{L}_M$ , представляющее собой пространственную дивергенцию, можно отбросить. Разбив  $F_{k0}$  на продольную  $F_{k0}^{(l)}$  и поперечную  $F_{k0}^{(t)} \equiv \mathcal{E}_k$  части,  $F_{k0} = F_{k0}^{(l)} + F_{k0}^{(t)}$ , и учитывая, что

$$\int d^3x A_k^{(l)} B_k^{(t)} = 0$$

( $A_k^{(l)}$  и  $B_k^{(t)}$  — продольная и поперечная части векторов  $A_k, B_k$ ), мы можем заменить  $\mathcal{L}_M$  оператором

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \{\mathcal{E}^k, \partial_0 A_k\} - \omega_M + \frac{1}{2} \{A_0, \partial^k F_{k0}^{(l)}\} + \frac{1}{4} \{F_{k0}^{(l)}, F^{k0(l)}\}, \\ \omega_M = -\frac{1}{4} \{\mathcal{E}^k, \mathcal{E}_k\} - \frac{1}{8} \{F_{kl}, F^{kl}\} + \frac{1}{4} \{F^{kl}, \partial_k A_l - \partial_l A_k\}. \quad (3.1.3)$$

Таким образом, лагранжиан взаимодействующих полей можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \{\mathcal{E}^k, \partial_0 A_k\} + \frac{i}{4} [\bar{\psi}, \gamma^0 \partial_0 \psi] + \frac{i}{4} [\psi, \tilde{\gamma}^0 \partial_0 \bar{\psi}] - \omega, \quad (3.1.4)$$

где

$$\omega = \omega_M + \omega_{\mathcal{D}} + \omega_{\text{int}};$$

$$\omega_{\mathcal{D}} = -\frac{1}{4} [\bar{\psi}, (i\gamma^k \partial_k - m)\psi] - \frac{1}{4} [\psi, (i\tilde{\gamma}^k \partial_k + m)\bar{\psi}]; \quad (3.1.5)$$

$$\omega_{\text{int}} = -A_k j^k - \frac{1}{4} \{F_{k0}^{(l)}, F^{k0(l)}\} - \frac{1}{2} \{A_0, \partial_k F^{k0(l)} + j^0\};$$

$$j^\mu = \frac{e}{2} [\bar{\psi}, \gamma^\mu \psi].$$

Согласно общей формуле (2.1.50) оператор  $\omega$  представляет собой оператор плотности энергии полей ( $\omega_M, \omega_{\mathcal{D}}, \omega_{\text{int}}$  — соответственно плотности энергии электромагнитного поля, электронно-позитронного поля и плотность энергии взаимодействия), а первых три слагаемых в  $\mathcal{L}$  определяют кинематическую часть лагранжиана и соответствующую ей кинематическую часть действия

$$W_K = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left( \frac{1}{2} \{\mathcal{E}^k, \partial_0 A_k\} + \frac{i}{4} [\bar{\psi}, \gamma^0 \partial_0 \psi] + \frac{i}{4} [\psi, \tilde{\gamma}^0 \partial_0 \bar{\psi}] \right).$$

Отсюда видно, что динамически независимыми переменными являются  $A_k, \mathcal{E}_k, \psi, \bar{\psi}$ .

Вариация полного действия определяется формулой (см. (2.1.51))

$$\delta W = G_1(t_2) - G_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{F}(x), \quad (3.1.6)$$

$$G_1(t) = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \{\mathcal{E}^k, \delta A_k\} + \frac{i}{4} [\bar{\psi}, \gamma^0 \delta \psi] + \frac{i}{4} [\psi, \tilde{\gamma}^0 \delta \bar{\psi}] \right),$$

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2} \{\delta \mathcal{E}^k, \partial_0 A_k\} - \frac{1}{2} \{\partial_0 \mathcal{E}^k, \delta A_k\} + \frac{i}{2} [\delta \bar{\psi}, \gamma^0 \partial_0 \psi] + \\ + \frac{i}{2} [\delta \psi, \tilde{\gamma}^0 \partial_0 \bar{\psi}] - \delta \omega.$$

Установим перестановочные соотношения для динамически независимых компонент поля. В соответствии с ранее изложенным вариации  $\delta\psi$ ,  $\delta\bar{\psi}$ , антикоммутирующие с полями  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  и коммутирующие с полями  $A_k$ ,  $\mathcal{E}_k$ , и вариации  $\delta A_k$ ,  $\delta \mathcal{E}_k$ , коммутирующие со всеми полями, будут допустимыми, так как

$$\delta W_K = G_2(t_1) - G_2(t_2),$$

$$G_2(t) = - \int d^3x \left( \delta \mathcal{E}^k A_k + \frac{i}{2} \delta \bar{\psi} \gamma^0 \psi + \frac{i}{2} \delta \psi \tilde{\gamma}^0 \bar{\psi} \right) \quad (3.1.7)$$

(согласно § 2.1 вариации  $\delta \mathcal{E}_k$ ,  $\delta \bar{\psi}$ ,  $\delta \psi$  не зависят от  $t$ ). Генератором рассматриваемых допустимых вариаций будет оператор  $G(t) = G_1(t) + G_2(t)$ . Поэтому согласно (3.1.6), (3.1.7)

$$G(t) = \int d^3x (\mathcal{E}^k \delta A_k - A_k \delta \mathcal{E}^k - i \delta \bar{\psi} \gamma^0 \psi - i \delta \psi \tilde{\gamma}^0 \bar{\psi}),$$

причем в соответствии с (2.1.69)

$$\delta \psi = i [G, \psi], \quad \delta \bar{\psi} = i [G, \bar{\psi}], \quad \delta A_k = i [G, A_k], \\ \delta \mathcal{E}_k = i [G, \mathcal{E}_k].$$

Отсюда следуют одновременные перестановочные соотношения для полей  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $A_k$ ,  $\mathcal{E}_k$ :

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\}_{t=t'} = (\gamma^0)_{\alpha\beta} \delta(x - x'), \\ \{\mathcal{E}_k(x), A_l(x')\}_{t=t'} = -i (g_{kl} \delta(x - x'))^{(t)}, \quad (3.1.8)$$

где  $(g_{kl} \delta(x - x'))^{(t)}$  — поперечная часть тензора  $g_{kl} \delta(x - x')$ , определяемая формулой

$$(g_{kl} \delta(x - x'))^{(t)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{ik(x-x')} \left( g_{kl} + \frac{k_k k_l}{k^2} \right) \quad (3.1.9)$$

(мы не приводим перестановочные соотношения, в которых коммутаторы или антикоммутаторы равны нулю). В выражение для коммутатора  $\{\mathcal{E}_k(x), A_l(x')\}_{t=t'}$  поперечная часть тензора  $g_{kl} \delta(x - x')$  входит вследствие того, что вариации  $\delta A_k$ ,  $\delta \mathcal{E}_k$  удовлетворяют условию поперечности  $\partial^k \delta A_k = \partial^k \delta \mathcal{E}_k = 0$ . Отметим, что поперечную часть тензора  $g_{kl} \delta(x)$  можно символически записать в виде

$$(g_{kl} \delta(x))^{(t)} = \left( g_{kl} + \frac{\partial_k \gamma_l}{\Delta} \right) \delta(x'), \quad \Delta \equiv -\partial^k \partial_k.$$

Для нахождения уравнений движения и уравнений связи следует найти вариацию действия по всем переменным  $F_{\mu\nu}$ ,  $A_\mu$ ,  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ , или, что то же, приравнять нулю интеграл  $\int d^4x \mathcal{F}(x)$  на классе элементарных вариаций. Легко видеть, что варьирование по  $F_{kl}$  приводит к уравнению связи

$$F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k, \quad (3.1.10)$$

а варьирование по  $\mathcal{E}_k$  и  $F_{k0}^{(l)}$  — к уравнению движения

$$\partial_0 A_k = -\mathcal{E}_k \quad (3.1.11)$$

и уравнению связи

$$\partial_k A_0 = F_{k0}^{(l)}. \quad (3.1.12)$$

Варьирование по  $A_k$  с учетом поперечности  $A_k$  приводит к уравнению движения

$$\partial_0 \mathcal{E}_k + \Delta A_k = j_k^{(l)}, \quad (3.1.13)$$

а варьирование по  $A_0$  — к уравнению связи

$$\partial_k F^{k0(l)} = -j^0. \quad (3.1.14)$$

Наконец, варьирование по  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  приводит к уравнениям движения

$$\{i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m\} \psi = 0, \quad \{i\tilde{\gamma}^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) + m\} \bar{\psi} = 0. \quad (3.1.15)$$

Из уравнений связи (3.1.12), (3.1.14) следует

$$\Delta A_0 = j_0, \quad (3.1.16)$$

откуда

$$A_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{t'=t} d^3x' \frac{j_0(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (3.1.16')$$

Поэтому плотность энергии взаимодействия согласно (3.1.12), (3.1.16') можно представить в виде

$$\omega_{\text{int}} = -A_k(x) j^k(x) + \frac{1}{8\pi} j^0(x) \int_{t'=t} d^3x' \frac{j_0(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (3.1.17)$$

а гамильтониан взаимодействия  $V = \int d^3x \omega_{\text{int}}(x)$  в виде

$$V = -\int d^3x j_k(x) A^k(x) + \frac{1}{8\pi} \int_{t'=t} d^3x d^3x' \frac{j_0(x) j_0(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (3.1.17')$$

Здесь первое слагаемое определяет взаимодействие зарядов с реальными (поперечными) фотонами, а второе — кулоновское взаимодействие зарядов (в выражении для  $\omega_{\text{int}}$  мы отбросили слагаемые, имеющие вид пространственной дивергенции, так как они не вносят вклада в  $V$ ).

В формуле (3.1.5) для  $\omega_{\mathcal{D}}$  под  $m$  мы понимаем массу свободного электрона, т. е. электрона, не взаимодействующего с электромагнитным полем. Такой электрон называется голым электроном. В действительности, однако, всегда имеет место взаимодействие электрона с



вакуумом электромагнитного и электронно-позитронного поля, вследствие чего электрон приобретает электромагнитную массу  $\delta m$ . Эту массу нельзя отличить от массы голого электрона  $m$ . Поэтому масса реального электрона равна  $m + \delta m$ . Данную массу будем обозначать  $\underline{m}$ ,  $\underline{m} = m + \delta m$ . Величина  $\delta m$  как функция  $e$ ,  $m$  (и так называемого параметра обрезания  $M$ ) определяется далее (см. п. 3.6.4). В соответствии с этим переопределим операторы  $\omega_{\mathcal{D}}$  и  $\omega_{\text{int}}$ :

$$\omega_{\mathcal{D}} = -\frac{1}{4} [\bar{\psi}, (i\gamma^k \partial_k - \underline{m}) \psi] - \frac{1}{4} [\psi, (i\gamma^k \partial_k + \underline{m}) \bar{\psi}], \quad (3.1.18)$$

$$\omega_{\text{int}} = -A_{kj} \dot{j}^k + \frac{1}{8\pi} j_0(x) \int_{t'=t} d^3x' \frac{j_0(x')}{|x-x'|} - \frac{1}{2} \delta m [\bar{\psi}, \psi].$$

Сумма этих величин  $\omega_{\mathcal{D}} + \omega_{\text{int}}$ , очевидно, остается неизменной. Таким образом, под гамильтонианом взаимодействия будем понимать далее не оператор (3.1.17'), а оператор

$$V = -\int d^3x A_{kj} \dot{j}^k + \frac{1}{8\pi} \int d^3x \int_{t'=t} d^3x' \frac{j_0(x) j_0(x')}{|x-x'|} - \frac{1}{2} \delta m \int d^3x [\bar{\psi}, \psi]. \quad (3.1.19)$$

В результате взаимодействия электрона с вакуумом электромагнитного и электронно-позитронного полей изменяется также его заряд, в результате чего заряд электрона  $e$  будет отличаться от заряда голого электрона (это изменение заряда электрона связано с явлением поляризации вакуума и рассмотрено в п. 3.6.5).

**3.1.2. Представление взаимодействия в кулоновской калибровке.** Выше мы пользовались гейзенберговским представлением квантовой механики, в котором векторы состояний не зависят от времени. Однако в квантовой электродинамике при конкретных расчетах целесообразно использовать представление взаимодействия, которое введено в п. 2.1.1. Это связано с тем, что безразмерная константа взаимодействия электронно-позитронного и электромагнитного полей  $e^2/4\pi\hbar c$  мала ( $e^2/4\pi\hbar c = 1/137$ ). Теория возмущений по этому параметру наиболее просто строится в представлении взаимодействия.

Согласно (2.1.5), (2.1.6) векторы состояния  $\tilde{\Phi}(t)$  и операторы  $\tilde{R}(t)$  в представлении взаимодействия связаны с векторами состояния  $\Psi$  и операторами  $R(t)$  в гейзенберговском представлении соотношениями

$$\tilde{\Phi}(t) = S(t, 0) \Psi, \quad \tilde{R}(t) = S(t, 0) R(t) S(t, 0)^+,$$

где оператор преобразования  $S(t, 0)$  удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial S(t, 0)}{\partial t} = \tilde{V}(t) S(t, 0), \quad S(0, 0) = 1.$$

Из этих формул следует соотношение

$$i \frac{\partial \tilde{R}(t)}{\partial t} = S(t, 0) \left\{ i \frac{\partial R(t)}{\partial t} + [V(t), R(t)] \right\} S(t, 0)^+, \quad (3.1.20)$$

определяющее эволюцию оператора  $\underline{R}(t)$  в представлении взаимодействия.

В кулоновской калибровке  $\underline{V}(t)$  согласно (3.1.19) определяется формулой

$$\underline{V}(t) = - \int d^3x \underline{j}_k(x) \underline{A}^k(x) + \frac{1}{8\pi} \int_{t'=t} d^3x d^3x' \frac{\underline{j}_0(x) \underline{j}_0(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{2} \delta m \int d^3x [\underline{\bar{\psi}}(x), \underline{\psi}(x)]. \quad (3.1.21)$$

Используя формулу (3.1.20), можно получить уравнения поля в представлении взаимодействия, если в качестве  $\underline{V}(t)$  выбрать это выражение, а в качестве уравнений поля в гейзенберговском представлении — уравнения (3.1.11), (3.1.13), (3.1.15).

Используя перестановочные соотношения в гейзенберговском представлении (3.1.8), легко показать, что

$$[V(t), \underline{\mathcal{E}}_k(x)] = -i \underline{j}_k^{(t)}(x), \quad [V(t), A_k(x)] = 0, \\ [V(t), \underline{\psi}(x)] = e \gamma^0 \gamma^\mu \underline{\psi}(x) A_\mu(x) + \delta m \gamma^0 \underline{\psi}(x).$$

Отсюда и из (3.1.20) получаем уравнения поля в представлении взаимодействия

$$\partial_0 \underline{A}_k(x) = -\underline{\mathcal{E}}_k(x), \quad \partial_0 \underline{\mathcal{E}}_k(x) = -\Delta \underline{A}_k(x), \\ (i \underline{\gamma}^\mu \partial_\mu - \underline{m}) \underline{\psi}(x) = 0, \quad (i \underline{\bar{\psi}} \partial_\mu + \underline{m}) \underline{\bar{\psi}}(x) = 0. \quad (3.1.22)$$

Из первых двух уравнений следует

$$\partial^\mu \partial_\mu \underline{A}_k(x) = 0.$$

Из (3.1.8) вытекает, что перестановочные соотношения для операторов  $\underline{A}_k, \underline{\mathcal{E}}_k, \underline{\psi}, \underline{\bar{\psi}}$  определяются формулами

$$[\underline{\mathcal{E}}_k(x), \underline{A}_l(x')]_{t=t'} = -i (g_{kl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'))^{(t)}, \\ \{\underline{\psi}_\alpha(x), \underline{\bar{\psi}}_\beta(x')\}_{t=t'} = (\gamma^0)_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.1.23)$$

(коммутаторы и антикоммутаторы для остальных пар динамически независимых переменных равны нулю). Разновременные перестановочные соотношения для операторов полей в представлении взаимодействия можно получить из одновременных перестановочных соотношений (3.1.23) и уравнений поля (3.1.22):

$$[\underline{A}_k(x), \underline{A}_l(x')] = i (g_{kl} \mathcal{D}(x - x'))^{(t)}, \\ \{\underline{\psi}_\alpha(x), \underline{\bar{\psi}}_\beta(x')\} = -i S_{\alpha\beta}(x - x'), \quad (3.1.24)$$

где  $S_{\alpha\beta}(x)$  определяется формулой (2.5.7) (в которой под  $m$  следует понимать массу реального электрона  $\underline{m}$ ) и  $(g_{kl} \mathcal{D}(x))^{(t)}$  — поперечная

часть тензора  $g_{kl}\mathcal{D}(x)$ ,

$$(g_{kl}\mathcal{D}(x))^{(t)} = \left(g_{kl} + \frac{\partial_k \partial_l}{\Delta}\right) \mathcal{D}(x). \quad (3.1.25)$$

Функция  $\mathcal{D}(x)$  определяется формулой (2.4.29).

Разложение операторов  $\underline{\psi}(x)$ ,  $\underline{\bar{\psi}}(x)$  по плоским волнам по-прежнему определяется формулами (2.5.27), (2.5.28), в которых биспиноры  $u$ ,  $\bar{u}$  удовлетворяют уравнениям (1.5.47) с реальной массой электрона. Разложение же оператора  $\underline{A}_l(x)$  имеет вид

$$\underline{A}_l(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{c_{k\lambda} e_{ki}^{(\lambda)} e^{-ikx} + c_{k\lambda}^{\dagger} e_{ki}^{(\lambda)*} e^{ikx}\}, \quad (3.1.26)$$

где  $e_{ki}^{(\lambda)}$  — векторы поляризации (см. (1.4.37)) и  $c_{k\lambda}^{\dagger}$ ,  $c_{k\lambda}$  — операторы рождения и уничтожения поперечных фотонов, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{k,k'} \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2. \quad (3.1.27)$$

Так как положительно и отрицательно частотные части полевых операторов представляют собой соответственно операторы уничтожения и рождения, то связи между операторами, являющиеся вакуумными средними от  $T$ -произведений соответствующих операторов, определяются формулами

$$\underline{\psi}(x) \underline{\bar{\psi}}(x') = -iS^c(x-x'), \quad (3.1.28)$$

$$\underline{A}_k(x) \underline{A}_l(x') = i(g_{kl}\mathcal{D}^c(x-x'))^{(t)},$$

где

$$(g_{kl}\mathcal{D}^c(x))^{(t)} = \left(g_{kl} + \frac{\partial_k \partial_l}{\Delta}\right) \mathcal{D}^c(x), \quad \mathcal{D}^c(x) = \Delta^c(x)|_{m=0}.$$

Функции  $S^c(x)$  и  $\Delta^c(x)$  определяются формулами (2.5.40), (2.3.35) (в функции  $S^c(x)$  под  $m$  следует понимать массу реального электрона  $m$ ).

Матрица рассеяния, как мы знаем (см. (2.1.13)), задается общей формулой

$$S = T \exp\left(-i \int d^4x \underline{\omega}_{\text{int}}(x)\right). \quad (3.1.29)$$

Согласно (3.1.21) в кулоновской калибровке величина  $\underline{\omega}_{\text{int}}(x)$  определяется формулой (3.1.18). Зная связи между операторами, можно построить теорию возмущений, раскладывая матрицу рассеяния по заряду голого электрона (см. п. 2.1.1); разложение величины  $\delta m$  начинается с члена, пропорционального  $e^2$ . При этом 4-импульс  $p_\mu$  реального электрона согласно (3.1.22) будет лежать на массовой оболочке, т. е.  $p^2 - \underline{m}^2 = 0$ . Отметим, что вследствие требования градиентной инва-

риантности массы голого и реального фотонов совпадают (см. п. 3.6.5) и равны нулю. Поэтому 4-импульс  $k_\mu$  реального фотона также будет лежать на массовой оболочке, т. е.  $k^2 = 0$ .

**3.1.3. Уравнения квантовой электродинамики в лоренцевой калибровке.** Выше при формулировке основных уравнений квантовой электродинамики мы использовали кулоновскую калибровку, накладывая на потенциал  $A_k(x)$  условие пространственной поперечности (3.1.2). Это условие не является релятивистски инвариантным. Однако калибровочную инвариантность можно нарушить релятивистски инвариантным способом, добавив к лагранжиану (3.1.1) калибровочно неинвариантное, но релятивистски инвариантное слагаемое

$$\mathcal{L}' = -\frac{i}{2\xi} (\{\varphi, \partial_\nu A^\nu\} - \varphi^2),$$

где  $\xi$  — произвольная константа и  $-\frac{i}{\xi}\varphi$  — новое поле, сопряженное с полем  $A_0$ ,  $-\xi^{-1}\varphi = \partial\mathcal{L}'/\partial_0 A_0$  (см. п. 2.4.1).

Таким образом, будем исходить из лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{8} \{F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}\} - \frac{1}{4} \{F^{\mu\nu}, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\} - \frac{1}{2\xi} (\{\varphi, \partial_\nu A^\nu\} - \varphi^2) + \\ & + \frac{1}{4} [\bar{\psi}, (i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m) \psi] + \frac{1}{4} [\psi, (i\tilde{\gamma}^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) + m) \bar{\psi}]. \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

В этом случае говорят, что лагранжиан задан в калибровке типа Лоренца.

Этот лагранжиан можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \{F_{k0}, \partial_0 A_k\} - \frac{1}{2\xi} \{\varphi, \partial_0 A_0\} + \frac{i}{4} [\bar{\psi}, \gamma^0 \partial_0 \psi] + \\ & + \frac{i}{4} [\psi, \tilde{\gamma}^0 \partial_0 \bar{\psi}] - \omega, \end{aligned} \quad (3.1.30')$$

где явно записанные слагаемые определяют кинематическую часть лагранжиана и оператор  $\omega$  согласно общей формуле (2.1.50) представляет собой плотность энергии взаимодействующих полей

$$\omega = \omega_0 + \omega_{\text{int}},$$

$$\begin{aligned} \omega_0 = & -\frac{1}{8} \{F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}\} + \frac{1}{4} \{F^{kl}, \partial_k A_l - \partial_l A_k\} + \frac{1}{2} \{F^{k0}, \partial_k A_0\} + \\ & + \frac{1}{2\xi} (\{\varphi, \partial_k A^k\} - \varphi^2) - \frac{1}{4} [\bar{\psi}, (i\gamma^k \partial_k - \underline{m}) \psi] - \frac{1}{4} [\psi, (i\tilde{\gamma}^k \partial_k + \underline{m}) \bar{\psi}], \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

$$\omega_{\text{int}} = -j_\mu A^\mu - \frac{1}{2} \delta m [\bar{\psi}, \psi], \quad \underline{m} = m + \delta m,$$

где  $j_\mu$  — плотность 4-тока электронно-позитронного поля

$$j_\mu = \frac{e}{2} [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi]. \quad (3.1.32)$$

Здесь  $\omega_0$  — оператор плотности энергии свободных полей и  $\omega_{\text{int}}$  — оператор плотности энергии взаимодействия.

Гамильтониан взаимодействия в гейзенберговском представлении определяется формулой

$$V(t) = \int d^3x \omega_{\text{int}}(x) = - \int d^3x j_\mu(x) A^\mu(x) - \frac{1}{2} \delta m \int d^3x [\bar{\psi}(x), \psi(x)]. \quad (3.1.33)$$

Исходя из лагранжиана (3.1.30) согласно общей теории гл. 2, можно получить одновременные перестановочные соотношения для взаимодействующих полей. Учитывая, что кинематические части лагранжиана  $\mathcal{L}$  и лагранжианов (2.4.4), (2.5.1) для свободных полей совпадают, можно утверждать, что одновременные перестановочные соотношения для взаимодействующих полей совпадают с перестановочными соотношениями (2.4.12), (2.5.4) для свободных полей, т. е.

$$\begin{aligned} [F^{0k}(x), A_l(x')]_{t=t'} &= i\delta_l^k \delta(x-x'), \quad [\varphi(x), A_0(x')]_{t=t'} = i\xi \delta(x-x'), \\ \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\}_{t=t'} &= (\gamma^0)_{\alpha\beta} \delta(x-x'). \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

Мы записали здесь только отличные от нуля коммутаторы и антикоммутаторы (бозевские и фермиевские поля коммутируют друг с другом).

Используя принцип стационарного действия, можно так же, как в § 2.1, получить уравнения движения взаимодействующих полей. Для электромагнитного поля они имеют вид

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \partial_\mu A^\mu = \varphi, \\ \partial^\nu F_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} \partial_\mu \varphi &= j_\mu, \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

а для электронно-позитронного поля вид

$$(i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\psi = 0, \quad (i\tilde{\gamma}^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) + m)\bar{\psi} = 0. \quad (3.1.36)$$

Отметим, что из последних уравнений и определения тока  $j_\mu$  следует закон сохранения 4-тока

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3.1.37)$$

Отсюда и из уравнений (3.1.35) вытекают уравнения второго порядка для полей  $A_\mu$ ,  $\varphi$ :

$$\partial^\nu \partial_\nu A_\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial^\nu A_\nu = -j_\mu, \quad \partial^\nu \partial_\nu \varphi = 0. \quad (3.1.38)$$

Из перестановочных соотношений (3.1.34) вытекают одновременные перестановочные соотношения для полей  $\partial_0 A_\mu$ ,  $A_\mu$

$$\begin{aligned} [A_l(x'), \partial_0 A^k(x)]_{t=t'} &= -i\delta_l^k \delta(x-x'), \\ [A_0(x'), \partial_0 A_0(x)]_{t=t'} &= -i\xi \delta(x-x') \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

(остальные коммутаторы равны нулю).

Так как мы рассматриваем гейзенберговское представление операторов, то векторы состояний полей  $\Psi$  не зависят от времени. Реальным

физическим состояниям соответствуют такие векторы  $\Psi$ , которые удовлетворяют дополнительному условию Лоренца — Ферми [3]

$$\varphi^{(+)}(x) \Psi = 0, \quad (3.1.40)$$

где  $\varphi^{(+)}(x)$  — положительно частотная часть оператора  $\varphi(x)$ . Отметим, что так как  $\partial^\mu \partial_\mu \varphi = 0$ , то это условие совместно с уравнениями поля.

Вследствие нелинейного характера уравнений движения в отличие от теории свободных полей мы не можем из перестановочных соотношений (3.1.39) получить разновременные перестановочные соотношения. Однако оператор  $\varphi(x)$  удовлетворяет линейному уравнению  $\partial^\mu \partial_\mu \varphi(x) = 0$ . Поэтому можно получить разновременные перестановочные соотношения для поля  $\varphi(x)$  с полями  $A_\mu(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ :

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \psi(x')] &= e\xi \mathcal{D}(x-x') \psi(x'), & [\varphi(x), \bar{\psi}(x')] &= -e\xi \mathcal{D}(x-x') \bar{\psi}(x'), \\ [\varphi(x), A_\mu(x')] &= i\xi \partial_\mu \mathcal{D}(x-x'). \end{aligned} \quad (3.1.41)$$

Эти соотношения немедленно вытекают из решения задачи Коши для волнового уравнения  $\partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0$

$$\varphi(x) = \int_{t''=t'} d^3x'' \left\{ \varphi(x'') \frac{\partial \mathcal{D}(x-x'')}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(x'')}{\partial t''} \mathcal{D}(x-x'') \right\},$$

одновременных перестановочных соотношений (3.1.34) и соотношений

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), \partial'_0 \varphi(x')]_{t=t'} &= i\xi \delta_\mu^k \partial_k \delta(x-x'), & [\psi(x), \partial'_0 \varphi(x')]_{t=t'} &= \\ = -e\xi \psi(x) \delta(x-x'), & [\bar{\psi}(x), \partial'_0 \varphi(x')]_{t=t'} &= e\xi \bar{\psi}(x) \delta(x-x'), \end{aligned}$$

которые следуют из одновременных перестановочных соотношений (3.1.34) и уравнений поля (3.1.35)  $\partial_0 \varphi = -\xi \int_0 + \xi \partial^k F_{0k}$  (определение функции  $\mathcal{D}(x)$  см. в п. 2.4.2).

Из формул (3.1.41) следует

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = 0. \quad (3.1.42)$$

### 3.1.4. Калибровочные преобразования взаимодействующих полей.

Если с помощью только одного оператора  $\varphi(x)$  построить некоторый унитарный оператор  $U(\varphi)$ , то из соотношений (3.1.42) и (3.1.40) следует

$$\varphi^{(+)}(x) U(\varphi) \Psi = 0.$$

Поэтому если  $\Psi$  является физическим вектором состояния, то и  $U(\varphi) \Psi$  также является физическим вектором состояния. Будем считать, что векторы  $\Psi$  и  $U(\varphi) \Psi$  описывают одно и то же физическое состояние и отличаются только калибровкой. Чтобы пояснить это, отметим, что неоднозначность в выборе векторов состояний ( $\Psi$  и  $U(\varphi) \Psi$  — физически эквивалентные векторы) мы можем перенести на операторы  $R(x)$ , рассматривая вместо них операторы  $R^U(x) \equiv U^+(\varphi) R(x) U(\varphi)$ , так что  $(U\Psi_1, RU\Psi_2) = (\Psi_1, R^U\Psi_2)$ . Ясно, что

$$A_\mu^U(x) = U^+(\varphi) A_\mu(x) U(\varphi) = A_\mu(x) + U^+(\varphi) [A_\mu(x), U(\varphi)].$$

Поэтому, используя (3.1.41), находим

$$A_{\mu}^U(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\Lambda(x; \varphi),$$

$$\Lambda(x; \varphi) = i\xi \int d^4x' U^+(x) \frac{\delta U(\varphi)}{\delta \varphi(x')} \mathcal{D}(x - x'). \quad (3.1.43)$$

Полагая  $U(\varphi) = \exp iG(\varphi)$  ( $G(\varphi)$  — эрмитов оператор), получаем

$$\Lambda(x; \varphi) = -\xi \int d^4x' \frac{\delta G(\varphi)}{\delta \varphi(x')} \mathcal{D}(x - x'). \quad (3.1.44)$$

Из эрмитовости оператора  $G(\varphi)$  и вещественности функции  $\mathcal{D}(x - x')$  следует эрмитовость оператора  $\Lambda(x; \varphi)$ . Кроме того, так как  $\partial_{\mu}\partial^{\mu}\mathcal{D}(x - x') = 0$ , то  $\partial_{\mu}\partial^{\mu}\Lambda(x; \varphi) = 0$ . Таким образом, преобразование (3.1.43) представляет собой операторное калибровочное преобразование потенциалов  $A_{\mu}(x)$  в рамках лоренцевой калибровки.

В частности, если

$$G(\varphi) = \int d^4x \varphi(x) G(x)$$

( $G(x)$  — произвольная  $c$ -числовая функция  $x$ ), то

$$\Lambda(x; \varphi) \equiv \Lambda(x) = -\xi \int d^4x' \mathcal{D}(x - x') G(x').$$

В этом случае калибровочная функция  $\Lambda(x)$  будет  $c$ -числовой функцией. Используя формулу (2.3.7), генератор  $G(\varphi)$  этих  $c$ -числовых калибровочных преобразований можно представить в виде

$$G(\varphi) = -\frac{1}{\xi} \int d^3x' \{ \varphi(x') \partial_0' \Lambda(x') - \Lambda(x') \partial_0' \varphi(x') \} \quad (3.1.45)$$

(так как  $\partial^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda(x) = \partial^{\mu}\partial_{\mu}\varphi(x) = 0$ , то  $G(\varphi)$  не зависит от  $t'$ ).

В связи с тем что векторы состояний  $\Psi$  и  $U(\varphi)\Psi$  мы считаем физически эквивалентными, операторы  $R$  физических (калибровочно инвариантных) величин должны удовлетворять условию

$$(\Psi_1, R\Psi_2) = (U(\varphi)\Psi_1, RU(\varphi)\Psi_2)$$

для любых физических векторов состояний  $\Psi_{1,2}$ ,  $\varphi^{(+)}(x)\Psi_{1,2} = 0$ . Отсюда следует, что калибровочно инвариантный оператор  $R$  должен удовлетворять соотношению (2.4.48)

$$U^+(\varphi)R(x)U(\varphi) = R(x) + B(x), \quad (3.1.46)$$

где матричные элементы в физическом подпространстве оператора  $B(x)$  равны нулю.

Очевидно, оператор  $F_{\mu\nu}(x)$  в отличие от оператора  $A_{\mu}(x)$  является калибровочно инвариантным,  $U^+F_{\mu\nu}U = F_{\mu\nu}$  (в этом случае  $B(x) = 0$ ).

Покажем, что 4-вектор энергии — импульса  $P_{\nu}$  взаимодействующих полей (он определяется с помощью общих формул (2.2.17), в которых под лагранжианом  $\mathcal{L}$  следует понимать выражение (3.1.30)) является калибровочно инвариантным оператором. С этой целью воспользуемся формулой (2.2.21):

$$-i\partial_{\nu}A_{\mu} = [P_{\nu}, A_{\mu}].$$

Отсюда следует

$$-i\partial_\nu\varphi = [P_\nu, \varphi].$$

Учитывая далее (3.1.42), находим

$$[P_\nu, U(\varphi)] = -i \int d^4x \frac{\delta U(\varphi)}{\delta\varphi(x)} \partial_\nu\varphi(x).$$

Поэтому, замечая, что  $U(\varphi) = \exp iG(\varphi)$ , получаем

$$U^+ P_\nu U = P_\nu + B_\nu, \quad B_\nu = \int d^4x \frac{\delta G(\varphi)}{\delta\varphi(x)} \partial_\nu\varphi(x).$$

Ясно, что матричные элементы оператора  $B_\nu$  в физическом подпространстве равны нулю. Отсюда следует, что оператор  $P_\nu$  является калибровочно инвариантным.

Аналогично можно убедиться в калибровочной инвариантности тензора моментов  $M_{\mu\nu}$ , который для взаимодействующих полей определяется общей формулой (2.2.17), в которой под  $\mathcal{L}$  следует понимать (3.1.30). При этом необходимо учесть перестановочные соотношения (2.2.32) для операторов  $M_{\mu\nu}$  с операторами поля.

Выясним закон преобразования  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  при унитарном преобразовании  $U(\varphi)$ . Из (3.1.41) следует, что

$$\psi(x)\varphi(x') = (\varphi(x') + e\xi\mathcal{D}(x-x'))\psi(x).$$

Поэтому

$$\psi(x)U(\varphi) = U(\varphi(x') + e\xi\mathcal{D}(x-x'))\psi(x)$$

и, следовательно,

$$U^+(\varphi)\psi(x)U(\varphi) = \exp i(G(\varphi + e\xi\mathcal{D}) - G(\varphi))\psi(x).$$

Замечая, что согласно (3.1.44)

$$\begin{aligned} G(\varphi + e\xi\mathcal{D}) - G(\varphi) &= \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda} G(\varphi + e\xi\lambda\mathcal{D}) = \\ &= - \int_0^1 d\lambda e\Lambda(x; \varphi(x') + e\xi\lambda\mathcal{D}(x-x')), \end{aligned}$$

находим

$$U^+(\varphi)\psi(x)U(\varphi) = \exp\left(-ie \int_0^1 d\lambda \Lambda(x; \varphi + e\xi\lambda\mathcal{D})\right)\psi(x). \quad (3.1.47)$$

Аналогичная формула справедлива для оператора  $\bar{\psi}(x)$ :

$$U^+(\varphi)\bar{\psi}(x)U(\varphi) = \bar{\psi}(x) \exp\left(ie \int_0^1 d\lambda \Lambda(x; \varphi + e\xi\lambda\mathcal{D})\right). \quad (3.1.47')$$

Из этих формул следует, что величина  $\bar{\psi}(x)\psi(x)$  является калибровочно инвариантной.



Отметим, наконец, что из формул (3.1.41) следуют соотношения

$$[\varphi(x'), (\partial_\mu - ieA_\mu(x))\psi(x)] = -\xi e\mathcal{D}(x-x')(\partial_\mu - ieA_\mu(x))\psi(x),$$

$$[\varphi(x'), \bar{\psi}(x)(\overleftarrow{\partial}_\mu + ieA_\mu(x))] = \xi e\mathcal{D}(x-x')\bar{\psi}(x)(\overleftarrow{\partial}_\mu + ieA_\mu(x)),$$

которые показывают, что операторы  $(\partial_\mu - ieA_\mu(x))\psi$ ,  $\bar{\psi}(\overleftarrow{\partial}_\mu + ieA_\mu)$  преобразуются при унитарном преобразовании  $U(\varphi)$  по таким же формулам, как и операторы  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ . Поэтому операторы  $\bar{\psi}(x)(\partial_\mu - ieA_\mu(x))\psi(x)$ ,  $(\partial_\mu + ieA_\mu(x))\bar{\psi}(x)\psi(x)$  являются калибровочно инвариантными.

В заключение отметим, что при  $c$ -числовых калибровочных преобразованиях (3.1.45) операторы  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  преобразуются по формулам

$$U^+\psi(x)U = e^{-ie\Lambda(x)}\psi(x), \quad U^+\bar{\psi}(x)U = e^{ie\Lambda(x)}\bar{\psi}(x). \quad (3.1.48)$$

### 3.1.5. Представление взаимодействия в лоренцевой калибровке.

Как мы видели, операторы и векторы состояний в представлении взаимодействия связаны с операторами и векторами состояний в гейзенберговском представлении общими формулами (2.1.5), в которых оператор преобразования  $S(t, 0)$  удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial S(t, 0)}{\partial t} = \underline{V}(t) S(t, 0).$$

В случае лоренцевой калибровки  $\underline{V}(t)$  определяется формулой

$$\underline{V}(t) = - \int d^3x \underline{j}_\mu(x) \underline{A}^\mu(x) - \frac{1}{2} \delta m \int d^3x [\bar{\psi}(x), \psi(x)], \quad (3.1.49)$$

где в представлении взаимодействия плотность 4-тока

$$\underline{j}_\mu(x) = \frac{e}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)]. \quad (3.1.49')$$

Вектор состояния полей  $\underline{\Phi}(t)$  удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \underline{\Phi}(t)}{\partial t} = \underline{V}(t) \underline{\Phi}(t). \quad (3.1.50)$$

Чтобы получить уравнения поля в представлении взаимодействия, обратимся к формуле (3.1.20). Полагая в ней  $R(t) = A_\mu(x)$  и учитывая, что согласно определению  $\underline{V}(t)$  и одновременным перестановочным соотношениям  $[\underline{V}(t), A_\mu(x)] = 0$ , получаем

$$\partial_0 \underline{A}_\mu = \underline{\partial}_0 \underline{A}_\mu. \quad (3.1.51)$$

Полагая в (3.1.20)  $R(t) = \partial_0 A_\mu(x)$  и учитывая, что согласно (3.1.33), (3.1.34)

$$\begin{aligned} [V(t), \partial_0 A^k(x)] &= ij^k(x), \\ [V(t), \partial_0 A^0(x)] &= i\xi j^0(x), \end{aligned}$$

находим

$$\frac{\partial^2 \underline{A}^k(x)}{\partial t^2} = S(t, 0) \left\{ \frac{\partial^2 A^k(x)}{\partial t^2} + j^k(x) \right\} S^+(t, 0),$$

$$\frac{\partial^2 \underline{A}^0(x)}{\partial t^2} = S(t, 0) \left\{ \frac{\partial^2 A^0(x)}{\partial t^2} + \xi j^0(x) \right\} S^+(t, 0).$$

Используя уравнения поля (3.1.38) в гейзенберговском представлении, отсюда получаем

$$\partial^\nu \partial_\nu \underline{A}_\mu(x) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial^\nu \underline{A}_\nu(x) = 0. \quad (3.1.52)$$

Аналогично, полагая в (3.1.20)  $R(t) = \psi(x)$  и учитывая, что

$$[V(t), \psi(x)] = e\gamma^0 \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) + \delta m \gamma^0 \psi(x),$$

для  $\underline{\psi}(x)$ ,  $\bar{\underline{\psi}}(x)$  находим уравнения Дирака свободных полей

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - \underline{m}) \underline{\psi}(x) = 0, \quad (i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu + \underline{m}) \bar{\underline{\psi}}(x) = 0. \quad (3.1.53)$$

Установим разновременные перестановочные соотношения для операторов полей в представлении взаимодействия. Так как  $\partial_0 \underline{A}_\mu = \underline{\partial_0 A}_\mu$ , то, учитывая (3.1.39), (3.1.34), получаем следующие одновременные перестановочные соотношения:

$$[\underline{A}_I(x), \underline{\partial_0 A}^k(x')]_{t=t'} = -i\delta^k_I \delta(x - x'), \quad [\underline{A}_0(x), \underline{\partial_0 A}^0(x')]_{t=t'} =$$

$$= -i\xi \delta(x - x'),$$

$$\{\underline{\psi}_\alpha(x), \bar{\underline{\psi}}_\beta(x')\}_{t=t'} = (\gamma^0)_{\alpha\beta} \delta(x - x').$$

Так как уравнения поля и одновременные перестановочные соотношения в представлении взаимодействия совпадают с уравнениями поля и одновременными перестановочными соотношениями для свободных полей в лоренцевой калибровке, то будут совпадать также разновременные перестановочные соотношения для взаимодействующих полей в представлении взаимодействия и для свободных полей:

$$[\underline{A}_\mu(x), \underline{A}_\nu(x')] = i\mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x'; \xi),$$

$$\{\underline{\psi}_\alpha(x), \bar{\underline{\psi}}_\beta(x')\} = -iS_{\alpha\beta}(x - x') \quad (3.1.54)$$

(мы не выписываем перестановочные соотношения, соответствующие операторам, для которых обращаются в нуль коммутаторы или антикоммутаторы).

Сформулируем, наконец, условие Лоренца — Ферми в представлении взаимодействия. Это условие согласно (3.1.40), (2.1.5) можно записать в виде

$$\underline{\varphi}^{(+)}(x; t') \underline{\Phi}(t') = 0,$$

где  $\underline{\varphi}^{(+)}(x; t')$  — положительно частотная часть по переменной  $t$  оператора  $\underline{\varphi}(x; t')$ :

$$\underline{\varphi}(x; t') = S(t', 0) \underline{\varphi}(x) S(t', 0)^{\dagger} \quad (3.1.55)$$

(мы не предполагаем здесь, что  $t'$  равно  $t$ , так как выделение положительно частотной части является интегральной операцией по времени). Покажем, что оператор  $\underline{\varphi}(x; t')$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \underline{\varphi}(x; t')}{\partial t'} = -\xi \frac{\partial}{\partial t'} \int d^3x' \mathcal{D}(x - x') \underline{j}_0(x'). \quad (3.1.56)$$

С этой целью отметим, что согласно (3.1.55), (2.1.7)

$$i \frac{\partial \underline{\varphi}(x; t')}{\partial t'} = S(t', 0) [V(t'), \underline{\varphi}(x)] S(t', 0)^{\dagger}.$$

Из разновременных перестановочных соотношений для гейзенберговских операторов (3.1.41) следует, что  $[j_{\mu}(x'), \underline{\varphi}(x)] = 0$ . Учитывая далее, что согласно (3.1.41)  $[A_{\mu}(x'), \underline{\varphi}(x)] = -i\xi \partial_{\mu} \mathcal{D}(x - x')$ , получаем

$$\frac{\partial \underline{\varphi}(x; t')}{\partial t'} = -\xi \int d^3x' \underline{j}^{\mu}(x') \partial'_{\mu} \mathcal{D}(x - x').$$

Отсюда и из закона сохранения тока  $\partial_{\mu} \underline{j}^{\mu}(x) = 0$  мы и получим соотношение (3.1.56). Учитывая далее, что  $\underline{\varphi}(x; t) = \underline{\varphi}(x)$  (см. (3.1.55)), из уравнения (3.1.56) находим

$$\underline{\varphi}(x; t') = \underline{\varphi}(x) - \xi \int d^3x' \mathcal{D}(x - x') \underline{j}_0(x').$$

Поэтому условие Лоренца — Ферми в представлении взаимодействия можно сформулировать в виде [4]

$$\{\underline{\varphi}^{(+)}(x) - \xi \int d^3x' \mathcal{D}^{(+)}(x - x') \underline{j}_0(x')\} \underline{\Phi}(t') = 0. \quad (3.1.57)$$

Из определения (3.1.55) следует

$$S(t'', 0)^{\dagger} \underline{\varphi}(x, t') S(t', 0) = S(t'', 0)^{\dagger} \underline{\varphi}(x, t'') S(t'', 0).$$

Так как оператор эволюции (от момента времени  $t'$  к моменту времени  $t''$ ) определяется формулой  $S(t'', t') = S(t'', 0) \times S(t', 0)^{\dagger}$  (см. (2.1.6)), то

$$S(t'', t') \underline{\varphi}(x; t') = \underline{\varphi}(x; t'') S(t'', t'). \quad (3.1.58)$$

Эта формула показывает, что если условие Лоренца — Ферми удовлетворяется для какого-либо фиксированного момента времени  $t'$ , то вследствие формулы  $\underline{\Phi}(t'') = S(t'', t') \underline{\Phi}(t')$  оно будет удовлетворяться и для произвольных моментов времени  $t''$ .

Так как  $\underline{\varphi}(x; \pm\infty) = \underline{\varphi}(x)$ , то из (3.1.58) следует

$$[S, \underline{\varphi}(x)] = 0, \quad (3.1.59)$$

где  $S = S(\infty, -\infty)$  — матрица рассеяния в лоренцевой калибровке:

$$S = (T \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \underline{V}(t) \right\}), \quad (3.1.60)$$

а  $\underline{V}(t)$  определяется формулой (3.1.49) (условие (3.1.59) будем называть свойством калибровочной инвариантности матрицы рассеяния, см. (3.1.46)).

Операторы полей в представлении взаимодействия можно разложить (так же, как в теории свободного поля) на плоские волны (см. (2.4.25), (2.5.27)). Отсюда следует, что положительно частотные части полевых операторов мы должны по-прежнему интерпретировать как операторы уничтожения частиц, а отрицательно частотные части — как операторы рождения частиц. Связи между полевыми операторами в представлении взаимодействия определим по-прежнему как разность  $T$ - и  $N$ -произведений двух полевых операторов в представлении взаимодействия. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \underline{A}_\mu(x) \underline{A}_\nu(x') &= i \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x - x'; \xi), \\ \underline{\psi}_\alpha(x) \underline{\bar{\psi}}_\beta(x') &= -i S_{\alpha\beta}^c(x - x') \end{aligned} \quad (3.1.61)$$

(остальные связи между полевыми операторами равны нулю; функция  $S^c(x)$  определяется массой реального электрона).

Зная связи между операторами в лоренцевой калибровке, в теории возмущений по заряду голого электрона можно вычислить матричные элементы  $S$ -матрицы (3.1.60) (см. п. 3.4.1). Эквивалентность выражений для матриц рассеяния в лоренцевой и кулоновской калибровках доказана далее в п. 3.2.4.

В заключение отметим, что в выражения для лагранжианов (3.1.30), (3.1.4), как и в формулы (3.1.49'), (3.1.5), входят произведения полевых операторов в одной и той же пространственно-временной точке. Такие произведения, вообще говоря, не имеют смысла, что видно, например, из одновременных перестановочных соотношений, так как  $\delta$ -функция  $\delta(x)$  не имеет смысла при  $x = 0$ . В частности, не имеет смысла хронологическое произведение операторов в одной и той же точке (см. п. 3.2.5). Однако нормальное произведение операторов свободных полей или полей в представлении взаимодействия имеет смысл даже при совпадающих пространственно-временных аргументах. Поэтому, чтобы придать смысл произведениям операторов поля в совпадающих точках, следует пространственно-временные аргументы операторов несколько раздвинуть. Именно в соответствии с п. 2.7.2 под произведением двух полевых операторов  $a(x)$ ,  $b(x)$  ( $a, b \equiv \underline{\psi}, \underline{\bar{\psi}}$ )

Будем понимать оператор

$$a(x)b(x) \rightarrow a\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)b\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad (3.1.62)$$

где  $\varepsilon$  --- бесконечно малый пространственно-подобный вектор. В частности, под операторами  $\underline{j}_\mu(x)$  и  $\frac{1}{2} [\underline{\bar{\psi}}(x), \underline{\psi}(x)]$  следует понимать операторы

$$\underline{j}_\mu(x) \rightarrow \frac{e}{2} \left( \underline{\bar{\psi}}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \gamma_\mu \underline{\psi}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \underline{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \tilde{\gamma}_\mu \underline{\bar{\psi}}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right), \quad (3.1.63)$$

$$\frac{1}{2} [\underline{\bar{\psi}}(x), \underline{\psi}(x)] \rightarrow \frac{1}{2} \left( \underline{\bar{\psi}}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \underline{\psi}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \underline{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \underline{\bar{\psi}}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right).$$

Покажем, что если в этих формулах операторы  $\underline{\psi}$ ,  $\underline{\bar{\psi}}$  относятся к представлению взаимодействия, то формулы (3.1.63) эквивалентны формулам

$$\underline{j}_\mu(x) = e : \underline{\bar{\psi}}(x) \gamma_\mu \underline{\psi}(x) :,$$

$$\frac{1}{2} [\underline{\bar{\psi}}(x), \underline{\psi}(x)] = : \underline{\bar{\psi}}(x) \underline{\psi}(x) : - \frac{m}{2\pi^3} \int d^3p \frac{e^{-ip\varepsilon}}{p_0} \quad (3.1.64)$$

(интеграл в последней формуле расходится как  $1/\varepsilon^2$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Действительно, формулы (3.1.63) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \underline{j}_\mu(x) &= e : \underline{\bar{\psi}}(x) \gamma_\mu \underline{\psi}(x) : + \frac{e}{2} \left\langle \underline{\bar{\psi}}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \gamma_\mu \underline{\psi}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right\rangle_0 - \\ &\quad - \frac{e}{2} \left\langle \underline{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \tilde{\gamma}_\mu \underline{\bar{\psi}}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right\rangle_0, \\ \frac{1}{2} [\underline{\bar{\psi}}(x), \underline{\psi}(x)] &= : \underline{\bar{\psi}}(x) \underline{\psi}(x) : + \frac{1}{2} \left\langle \underline{\bar{\psi}}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \underline{\psi}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right\rangle_0 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\langle \underline{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \underline{\bar{\psi}}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right\rangle_0, \end{aligned}$$

где угловыми скобками обозначено вакуумное усреднение. Используя выражения (2.5.27) для полевых операторов в представлении взаимодействия, находим

$$\begin{aligned} &\left\langle \underline{\bar{\psi}}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \gamma_\lambda \underline{\psi}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \underline{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \tilde{\gamma}_\lambda \underline{\bar{\psi}}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right\rangle_0 = \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}\mu} \frac{e^{-i\mathbf{p}\varepsilon}}{2\rho_0} (\bar{u}^{-1\mu}(\mathbf{p}) \gamma_\lambda u^{-1\mu}(\mathbf{p}) - \bar{u}^{1\mu}(\mathbf{p}) \gamma_\lambda u^{1\mu}(\mathbf{p})), \\ &\left\langle \underline{\bar{\psi}}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \underline{\psi}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \underline{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \underline{\bar{\psi}}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right\rangle_0 = \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}\mu} \frac{e^{-i\mathbf{p}\varepsilon}}{2\rho_0} (\bar{u}^{-1\mu}(\mathbf{p}) u^{-1\mu}(\mathbf{p}) - \bar{u}^{1\mu}(\mathbf{p}) u^{1\mu}(\mathbf{p})). \end{aligned}$$

Так как

$$\bar{u}^{\sigma\mu}(\mathbf{p}) \gamma_\lambda u^{\sigma\mu}(\mathbf{p}) = 2p_\lambda, \quad \bar{u}^{\sigma\mu}(\mathbf{p}) u^{\sigma\mu}(\mathbf{p}) = 2mq$$

( $q = \pm 1$ ), то мы приходим к формулам (3.1.64).

### § 3.2. МАТРИЦА РАССЕЙНИЯ

**3.2.1. Унитарность матрицы рассеяния.** Здесь мы будем изучать свойства квантовоэлектродинамической матрицы рассеяния, описывающей различные процессы взаимодействия электронов, позитронов и фотонов. Будем исходить вначале из представления матрицы рассеяния в лоренцевой калибровке, так как в ней матрица рассеяния, как мы увидим, имеет явно релятивистски-инвариантный вид. Однако это представление матрицы рассеяния обладает тем недостатком, что для формального обеспечения релятивистской инвариантности в ней необходимо вводить нефизические частицы (духи) — скалярные и продольные фотоны. Матрица рассеяния в кулоновской калибровке этого недостатка не имеет. В п. 3.2.4 мы покажем, что матрица рассеяния в лоренцевой калибровке, усредненная по вакууму скалярных и продольных фотонов, совпадает с матрицей рассеяния в кулоновской калибровке.

Изучим свойство унитарности матрицы рассеяния в лоренцевой калибровке. Из формулы (2.1.13) следует, что матрица рассеяния в полном гильбертовом пространстве является унитарной, т. е.

$$S^+ S = 1. \quad (3.2.1)$$

Учитывая условие полноты векторов состояний

$$\sum_m |m\rangle \langle m|m\rangle \langle m| = 1, \quad \langle m|m\rangle = \pm 1, \quad (3.2.2)$$

отсюда получаем

$$\sum_m \langle a| S^+ |m\rangle \langle m|m\rangle \langle m| S |b\rangle = \delta_{ab} \langle a|a\rangle. \quad (3.2.3)$$

Векторы  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$ ,  $|m\rangle$  определяют состояния, в которых существуют частицы с определенными импульсами и поляризациями. Обычно  $\langle m|m\rangle = 1$ . Однако в квантовой электродинамике при использовании лоренцевой калибровки метрика в полном гильбертовом пространстве является индефинитной, поэтому величина  $\langle m|m\rangle = \pm 1$  (именно  $\langle m|m\rangle = (-1)^{N_0}$ , где  $N_0$  — суммарное число скалярных фотонов в состоянии  $|m\rangle$ ). Полагая в (3.2.3)  $|a\rangle = |b\rangle$  и замечая, что  $\langle m| S |b\rangle^* = \langle b| S^+ |m\rangle$ , получаем

$$\sum_m |\langle m| S |a\rangle|^2 \langle m|m\rangle = 1 \quad (3.2.4)$$

(предполагается, что  $|a\rangle$  — физическое состояние, в котором не содержится скалярных и продольных фотонов).

Если бы все состояния  $|m\rangle$  были физическими, то выполнялось бы равенство  $\langle m|m\rangle = 1$  и последнее условие выражало бы тот факт, что вероятность перехода из состояния  $|a\rangle$  во все другие состояния

$|m\rangle$  равна единице. Именно такая интерпретация условия унитарности имеет место при использовании кулоновской калибровки, в которой отсутствуют духи, т. е. скалярные и продольные фотоны. Однако при использовании лоренцевой калибровки возникают духи и кроме того применяется индефинитная метрика, т. е.  $\langle m|m\rangle = \pm 1$ . Тем не менее мы сейчас покажем, что именно вследствие индефинитности метрики в уравнении (3.2.4) происходит сокращение вкладов от продольных и скалярных фотонов, так что условие унитарности (3.2.4) по-прежнему можно интерпретировать как равенство единице суммы вероятностей переходов во все возможные физические состояния. Так как  $\langle m|m\rangle = (-1)^{N_0}$  ( $N_0$  — число скалярных фотонов в состоянии  $|m\rangle$ ), то условие полноты (3.2.2) векторов состояний фотонной системы можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k_1\lambda_1 \dots k_n\lambda_n} (-1)^{N_0} c_{k_1\lambda_1}^+ \dots c_{k_n\lambda_n}^+ \mathcal{P}_0 c_{k_n\lambda_n} \dots c_{k_1\lambda_1} = 1, \quad (3.2.5)$$

где  $\mathcal{P}_0 = |0\rangle\langle 0|$  — проектор на вакуумное состояние фотонов (множитель  $\frac{1}{n!}$  введен потому, что в сумму по  $k_1\lambda_1, \dots, k_n\lambda_n$  одно и то же состояние входит  $n!$  раз). Это соотношение эквивалентно соотношению

$$\mathfrak{N} \exp \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \left( \sum_{\lambda=1}^3 c_{\mathbf{k}\lambda}^+ c_{\mathbf{k}\lambda} - c_{\mathbf{k}0}^+ c_{\mathbf{k}0} \right) \right\} = 1,$$

где  $\mathfrak{N}$  — символ  $N$ -упорядочения операторов  $c, c^+$  с последующей вставкой между операторами рождения и уничтожения вакуумного проектора  $\mathcal{P}_0$ . В соответствии с этим условие полноты фотонных, а также электронно-позитронных состояний можно записать в виде

$$\mathfrak{N} (e^{A+B}) = 1, \quad (3.2.5')$$

где  $A$  содержит операторы рождения и уничтожения продольных и скалярных фотонов (или, как мы будем говорить, духовых состояний);

$$A = \sum_{\mathbf{k}} (c_{\mathbf{k}3}^+ c_{\mathbf{k}3} - c_{\mathbf{k}0}^+ c_{\mathbf{k}0}),$$

а  $B$  содержит операторы рождения и уничтожения реальных частиц

$$B = \sum_{\mathbf{k}\lambda=1}^2 c_{\mathbf{k}\lambda}^+ c_{\mathbf{k}\lambda} + \sum_{\mathbf{p}\mu} a_{\mathbf{p}\mu}^+ a_{\mathbf{p}\mu} + \sum_{\mathbf{p}\mu} b_{\mathbf{p}\mu}^+ b_{\mathbf{p}\mu}.$$

Ясно, что оператор

$$\mathcal{P}_e = \mathfrak{N} e^B$$

представляет собой проектор на физическое подпространство, т. е. пространство состояний электронов, позитронов и реальных (поперечных) фотонов.

Введем оператор

$$\mathcal{E}(\xi) = \mathfrak{N} (e^{\xi A+B}),$$

где  $\xi$  — произвольный вещественный параметр. Очевидно,

$$\mathcal{E}(0) = \mathcal{P}_r, \quad \mathcal{E}(1) = 1.$$

Покажем, что функция

$$f(\xi) = (\Phi_a, S^+ \mathcal{E}(\xi) S \Phi_b),$$

где  $\Phi_a, \Phi_b$  — два физических вектора состояния ( $(c_{k3} - c_{k0}) \Phi_{a,b} = 0$ ), не зависит от параметра  $\xi$ . Действительно, согласно определению операции упорядочения  $\mathcal{N}$

$$\frac{d\mathcal{E}(\xi)}{d\xi} = \sum_k \{c_{k3}^+ \mathcal{E}(\xi) c_{k3} - c_{k0}^+ \mathcal{E}(\xi) c_{k0}\}.$$

Поэтому

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = \sum_k (\Phi_a, S^+ \{(c_{k3}^+ - c_{k0}^+) \mathcal{E}(\xi) c_{k3} + c_{k0}^+ \mathcal{E}(\xi) (c_{k3} - c_{k0})\} S \Phi_b).$$

Отметим, что из формулы (3.1.59) (условие калибровочной инвариантности  $S$ -матрицы) следует, что матрица рассеяния коммутирует с операторами  $c_{k3} - c_{k0}$  и  $c_{k3}^+ - c_{k0}^+$ :

$$[S, c_{k3} - c_{k0}] = [S, c_{k3}^+ - c_{k0}^+] = 0.$$

Так как  $\Phi_a$  и  $\Phi_b$  — физические векторы состояния, то  $f'(\xi) = 0$  и, следовательно, функция  $f(\xi)$  не зависит от параметра  $\xi$ . Поэтому  $f(0) = f(1)$ . Учитывая, что  $S^+ S = 1$  (см. (3.2.1)), находим отсюда

$$(\Phi_a, S^+ \mathcal{P}_r S \Phi_b) = (\Phi_a, \Phi_b)$$

или

$$\sum_{\Phi_r} (\Phi_a, S^+ \Phi_r) (\Phi_r, S \Phi_b) = (\Phi_a, \Phi_b), \quad (3.2.6)$$

где суммирование проводится по системе векторов состояний  $\Phi_r$ , содержащих только реальные частицы.

Таким образом, действительно, в условии унитарности матрицы рассеяния для физических состояний  $\Phi_a, \Phi_b$  нефизические промежуточные состояния, содержащие произвольные числа продольных и скалярных фотонов, не вносят вклада, а физические состояния, для которых унитарность имеет обычный смысл, такой вклад вносят.

**3.2.2. Представление матрицы рассеяния в виде суммы нормальных произведений.** Возвратимся к разложению (2.1.12) матрицы рассеяния. Так как операторы  $\underline{A}_\mu(x), \underline{\psi}(x), \underline{\bar{\psi}}(x)$  представляют собой сумму операторов рождения и уничтожения отдельных частиц, то каждый член в этом разложении можно представить в виде суммы произведений операторов рождения и уничтожения электронов, позитронов и фотонов в различных состояниях. Выясним, при каких условиях такого рода произведения имеют отличные от нуля матричные элементы, соответствующие какому-либо интересующему нас процессу  $i \rightarrow f$ . Если, например, в начальном состоянии  $i$  имеется один электрон и ни одного позитрона и фотона, а в конечном состоянии  $f$  — электрон и



фотон, то, очевидно, один из операторов уничтожения должен «уничтожить» электрон в состоянии  $i$ , два оператора рождения должны «создать» электрон и фотон в состоянии  $f$ , а все остальные операторы должны поделиться на пары, причем операторы каждой пары «создают» и «уничтожают» одну и ту же частицу [5, 6].

Такого рода виртуальные процессы испускания и последующего поглощения одной и той же частицы сильно усложняют вычисление элементов матрицы рассеяния. Мы постараемся поэтому преобразовать матрицу рассеяния таким образом, чтобы виртуальные процессы не нужно было рассматривать.

Задача сводится, очевидно, к тому, чтобы представить матрицу рассеяния в виде суммы нормальных произведений операторов рождения и уничтожения частиц, в которых операторы рождения расположены слева от операторов уничтожения. При вычислении матричных элементов таких произведений операторы уничтожения будут «уничтожать» только те частицы, которые находятся в начальном состоянии, а операторы рождения будут «создавать» только те частицы, которые должны быть в конечном состоянии. Что же касается виртуальных процессов испускания и поглощения частиц, то явным образом они в рассмотрение входить не будут.

Чтобы представить матрицу рассеяния в указанном виде, отметим, что согласно (3.1.64)

$$\underline{j}_\mu(x) = e : \bar{\underline{\psi}}(x) \gamma_\mu \underline{\psi}(x) :,$$

$$\frac{1}{2} [\bar{\underline{\psi}}(x), \underline{\psi}(x)] = : \bar{\underline{\psi}}(x) \underline{\psi}(x) : - \frac{m}{2\pi^3} \int d^3p \frac{e^{-ipx}}{p_0},$$

и поэтому в лоренцевой калибровке (см. (3.1.49))

$$\underline{V}(t) = \int d^3x \underline{\omega}_{\text{int}}(x), \quad (3.2.7)$$

$$\underline{\omega}_{\text{int}}(x) = -e : \bar{\underline{\psi}}(x) \hat{A}(x) \underline{\psi}(x) : - \delta m : \bar{\underline{\psi}}(x) \underline{\psi}(x) :,$$

где  $\hat{A}(x) = \gamma^\mu A_\mu(x)$  (мы опустили здесь расходящееся при  $\varepsilon \rightarrow 0$  слагаемое  $\frac{m}{(2\pi)^3} \int d^3p p_0^{-1} \exp ipx$ , приводящее лишь к несущественному фазовому множителю в выражении для  $S$ -матрицы). Отсюда следует, что  $n$ -й член в разложении  $S$ -матрицы можно записать в виде

$$S_n = \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n T \{ \underline{\omega}_{\text{int}}(x_1) \dots \underline{\omega}_{\text{int}}(x_n) \}. \quad (3.2.8)$$

Отдельные множители  $T$ -произведения, входящего в эту формулу, представляют собой  $N$ -произведения операторов полей, относящихся к одному и тому же моменту времени. Такого рода  $T$ -произведение мы будем называть смешанным  $T$ -произведением.

Наша задача состоит в представлении смешанного  $T$ -произведения в виде суммы  $N$ -произведений. Это можно выполнить с помощью следующих двух правил (правил Вика) [8].

I.  $T$ -произведение операторов полей равно сумме их  $N$ -произведений, в которых операторы связаны всеми возможными связями.

II. Смешанное  $T$ -произведение операторов полей равно сумме их  $N$ -произведений, в которых операторы связаны всеми возможными связями, за исключением связей между операторами в пределах одного и того же  $N$ -произведения. Отметим, что определение связей (2.4.51), (2.5.36) является частным случаем правила I.

Чтобы доказать правило I, отметим предварительно, что одновременной одинаковой перестановкой множителей внутри  $T$ - и  $N$ -произведений в (3.2.8) мы не нарушаем этого соотношения, поэтому без ограничения общности можно предположить, что операторы в (3.2.8) уже расположены в хронологическом порядке.

Расположим множители в (3.2.8) так, чтобы все операторы рождения стояли слева от операторов уничтожения (для простоты предполагается, что каждый из операторов  $\chi_i = A, \psi, \bar{\psi}$  является либо оператором рождения, либо оператором уничтожения). Выберем для этого самый левый  $N$ -неупорядоченный оператор рождения и будем последовательно переставлять его со всеми операторами уничтожения, расположенными левее данного оператора. При этом появятся дополнительные члены со связями между переставляемыми операторами в соответствии с формулой

$$\chi_1 \chi_2 = T(\chi_1 \chi_2) = : \chi_1 \chi_2 : + \underline{\chi_1} \chi_2 = \pm \chi_2 \chi_1 + \underline{\chi_1} \chi_2.$$

Такую же операцию упорядочения мы сделаем с другими неупорядоченными операторами рождения. В результате исходное  $T$ -произведение выразим в виде суммы  $N$ -произведений. Эти произведения могут входить как с положительным, так и с отрицательным знаком, но если под знаком  $N$ -произведений переставить множители таким образом, чтобы они снова стали  $T$ -упорядоченными, т. е. расположенными в хронологическом порядке, то, очевидно, все  $N$ -произведения будут входить с положительным знаком и мы получим представление  $T$ -произведения в виде суммы  $N$ -произведений. В эту сумму будут, очевидно, входить не все возможные связи, а только связи между всеми парами  $N$ -неупорядоченных операторов; так как, однако, связи между  $N$ -упорядоченными операторами, являющимися одновременно  $T$ -упорядоченными, равны нулю, то можно считать, что в данную сумму входят все возможные связи. Таким образом, мы доказали справедливость правила I.

Аналогично можно доказать правило II. При этом следует лишь иметь в виду, что менять местами операторы под знаком одного и того же  $N$ -произведения не нужно, так как эти операторы уже  $N$ -упорядочены, поэтому соответствующие им связи должны отсутствовать (более детальное доказательство правил Вика см. в [6, 7]).

Используя приведенные правила, величину  $S_n$  можно представить в виде суммы интегралов, содержащих только  $N$ -произведения операторов полей:

$$S_n = \sum \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \mathcal{F}_n(x_1 \dots x_n) : \underline{\chi}_{i_1}(x_1) \dots \underline{\chi}_{i_n}(x_n) :, \quad (3.2.9)$$

где под знак  $N$ -произведения входят операторы  $\chi_i = \underline{\psi}, \bar{\underline{\psi}}, A$  в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и величины  $\mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_n)$ , называемые коэффициентными функциями, определяются связями между операторами.

Связи между операторами полей, отличные от нуля, определяются формулами (2.4.53), (2.5.38)

$$\begin{aligned} \underline{A}_\mu(x) \underline{A}_\nu(x') &= i \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x - x'; \xi), \\ \underline{\psi}_\alpha(x) \bar{\underline{\psi}}_\beta(x') &= -i S_{\alpha\beta}^c(x - x'). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

**3.2.3. Функциональная форма представления матрицы рассеяния в виде  $N$ -упорядоченного оператора.** Покажем, что правила Вика можно сформулировать в аналитической форме [9].

Прежде всего рассмотрим функционал от операторов электромагнитного поля

$$F\{\underline{A}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int d^4x_1 \dots d^4x_n K_{v_1 \dots v_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \underline{A}_{v_1}(x_1) \dots \underline{A}_{v_n}(x_n), \quad (3.2.11)$$

где  $K_{v_1 \dots v_n}^{(n)}(x_1 \dots x_n)$  — некоторые числовые функции от  $x_1 \dots x_n$  и суммирование производится, кроме  $n$ , также по всем  $v_k$  ( $v_k = 0, 1, 2, 3$ ), и покажем, что

$$TF\{\underline{A}\} = : e^{\Delta} F\{\underline{A}\} :, \quad (3.2.12)$$

где

$$\Delta = \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' \frac{\delta}{\delta \underline{A}_\mu(x)} \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x - x'; \xi) \frac{\delta}{\delta \underline{A}_\nu(x')} \quad (3.2.13)$$

и функциональная производная по бозе-оператору  $\underline{A}_\mu(x)$  определяется обычным образом.

Чтобы доказать формулу (3.2.12), убедимся сначала в том, что  $\Delta F\{\underline{A}\}$  получается из  $F\{\underline{A}\}$ , если в каждом члене разложения (3.2.11) всеми возможными способами образовать одну связь между операторами  $\underline{A}_\mu(x)$  и просуммировать затем полученные выражения. Для этого достаточно проверить соотношение

$$\Delta(\underline{A}_\lambda(x_1) \underline{A}_\sigma(x_2)) = \underline{A}_\lambda(x_1) \underline{A}_\sigma(x_2) \equiv i \mathcal{D}_{\lambda\sigma}^c(x_1 - x_2; \xi),$$

которое немедленно вытекает из (3.2.13) и (3.2.10).

Аналогично можно проверить, что функционал  $\frac{\Delta^k}{k!} F\{\underline{A}\}$  получается из функционала  $F\{\underline{A}\}$ , если в каждом члене разложения (3.2.11) образовать всеми возможными способами  $k$  связей между операторами  $\underline{A}_\mu$  и просуммировать затем полученные выражения.

Отсюда вытекает, что сформулированное выше правило I о разложении  $T$ -произведения на  $N$ -произведения в применении к оператору

рам  $\underline{A}_\mu$  можно записать в виде

$$TF\{\underline{A}\} = \sum_{k=0}^{\infty} : \left( \frac{\Delta^k}{k!} F\{\underline{A}\} \right) : .$$

Учитывая, что  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k}{k!} = e^\Delta$ , получаем формулу (3.2.12).

Формула такого же типа справедлива и для электронно-позитронных операторов, а именно если  $F\{\underline{\psi}, \bar{\underline{\psi}}\}$  — функционал от операторов  $\underline{\psi}$  и  $\bar{\underline{\psi}}$  вида

$$F\{\underline{\psi}, \bar{\underline{\psi}}\} = \sum_{n_1, n_2} \int d^4x_1 \dots d^4x'_{n_2} K^{(n_1, n_2)}(x_1, \dots, x_{n_1}; x'_1, \dots, x'_{n_2}) \times \\ \times \underline{\psi}(x_1) \bar{\underline{\psi}}(x'_1) \dots \underline{\psi}(x_{n_1}) \bar{\underline{\psi}}(x'_{n_2}),$$

где суммирование кроме  $n_1$  и  $n_2$  производится по спинорным индексам, от которых зависит  $K^{(n_1, n_2)}$ , то

$$TF\{\underline{\psi}, \bar{\underline{\psi}}\} = : e^{\Sigma} F\{\underline{\psi}, \bar{\underline{\psi}}\} : , \quad (3.2.14)$$

где

$$\Sigma = i \int d^4x d^4x' \frac{\delta}{\delta \underline{\psi}_\alpha(x)} S^c_{\alpha\beta}(x-x') \frac{\delta}{\delta \bar{\underline{\psi}}_\beta(x')} \quad (3.2.15)$$

и функциональные производные по  $\underline{\psi}$  и  $\bar{\underline{\psi}}$  определяются в соответствии с формулами (см. п. 2.1.2)

$$\delta F\{\underline{\psi}, \bar{\underline{\psi}}\} = \int d^4x \delta \underline{\psi}_\alpha(x) \frac{\delta F}{\delta \underline{\psi}_\alpha(x)} + \int d^4x \delta \bar{\underline{\psi}}_\beta(x) \frac{\delta F}{\delta \bar{\underline{\psi}}_\beta(x)} .$$

Из формул (3.2.12) и (3.2.14) следует, что если мы имеем общий функционал  $F\{\underline{A}, \underline{\psi}, \bar{\underline{\psi}}\}$  от операторов  $\underline{A}_\mu(x)$ ,  $\underline{\psi}_\alpha(x)$ ,  $\bar{\underline{\psi}}_\beta(x)$ , то

$$TF\{\underline{A}, \underline{\psi}, \bar{\underline{\psi}}\} = : (e^{\Delta + \Sigma} F\{\underline{A}, \underline{\psi}, \bar{\underline{\psi}}\}) : \quad (3.2.16)$$

(более детальное доказательство этих формул см. в [10]). Ясно, что формулы типа (3.2.12), (3.2.14), (3.2.16) справедливы не только для электромагнитного и электронно-позитронного полей, но и для любых бозе- или ферми-полей  $\chi(x)$ , для которых связи определяются формулой

$$\underline{\chi}(x) \underline{\chi}(x') = T(\underline{\chi}(x) \underline{\chi}(x')) - : \underline{\chi}(x) \underline{\chi}(x') : .$$

Если в  $F$  входят  $N$ -упорядоченные комплексы, относящиеся к одной и той же пространственно-временной точке, то связи  $S^c(0)$ ,  $\mathcal{D}^c(0)$ , относящиеся к операторам внутри одного и того же  $N$ -упорядоченного комплекса, нужно положить равными нулю.

Из вывода формулы (3.2.16) следует, что при вычислении величин

$$e^{\Delta + \Sigma} F\{\underline{A}, \underline{\psi}, \bar{\underline{\psi}}\}$$

мы можем рассматривать поля  $A_\mu(x)$  как обычные  $c$ -числовые функции, а поля  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  — как обычные грассмановы функции; в полученных после вычисления этой величины полиномиальных по  $A_\mu$ ,  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  выражениях возникшие произведения полевых величин следует заменить нормальными произведениями соответствующих операторов. Для этого в формуле (3.2.16) введен символ  $N$ -упорядочения.

Полагая

$$F\{A, \psi, \bar{\psi}\} = \exp i \left( \int d^4x j^\mu(x) A_\mu(x) + \delta M(\psi) \right),$$

$$\delta M = \delta m \int d^4x \bar{\psi}(x) \psi(x)$$

и помня, что

$$S = TF\{A, \psi, \bar{\psi}\} = T_\psi T_A F\{A, \psi, \bar{\psi}\}$$

( $T_\psi$  и  $T_A$  —  $T$ -упорядоченные операторы  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  и  $A$ ), получаем следующее общее выражение для матрицы рассеяния в виде  $N$ -упорядоченного оператора:

$$S = : e^{\Delta^{\psi\bar{\psi}}} \exp i \left( \int d^4x \underline{j}_\mu(x) \underline{A}^\mu(x) + \delta m \int d^4x \bar{\psi}(x) \psi(x) \right) :. \quad (3.2.17)$$

Согласно доказанному выше

$$T_A F\{A, \psi, \bar{\psi}\} = N_A(e^{\Delta F}\{A, \psi, \bar{\psi}\})$$

( $N_A$  обозначает  $N$ -упорядочение операторов  $\underline{A}_\mu$ ). Замечая, что

$$N_A \frac{\delta}{\delta \underline{A}_\nu(x')} \exp i \int \underline{j}^\mu(x) \underline{A}_\mu(x) d^4x =$$

$$= i N_A \left( \underline{j}^\nu(x') \exp i \int \underline{j}^\mu(x) \underline{A}_\mu(x) d^4x \right),$$

легко убедиться, что

$$N_A \left( \Delta \exp i \int d^4x \underline{j}^\mu(x) \underline{A}_\mu(x) \right) =$$

$$= - N_A \left( \frac{i}{2} \int d^4x' d^4x'' \underline{j}^\nu(x') D^c(x' - x'') \underline{j}_\nu(x'') \exp i \int d^4x \underline{j}^\mu(x) \underline{A}_\mu(x) \right),$$

где

$$\mathcal{D}^c(x) g_{\mu\nu} = \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; 1)$$

(мы учли при этом закон сохранения тока  $\partial_\mu j^\mu = 0$ ). Поэтому

$$T_A F\{A, \psi, \bar{\psi}\} = \exp \left( - \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' \underline{j}^\nu(x') \mathcal{D}^c(x' - x'') \underline{j}_\nu(x'') + \right.$$

$$\left. + i\delta M(\psi) \right) N_A \exp i \int d^4x \underline{j}^\mu(x) \underline{A}_\mu(x).$$

Отсюда следует

$$S = T_\psi \left\{ \exp \left( - \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' \underline{j}^\nu(x') \mathcal{D}_{\nu\mu}^c(x' - x'') \underline{j}^\mu(x'') + \right. \right.$$

$$\left. \left. + i\delta M(\psi) \right) N_A \left( \exp i \int d^4x \underline{j}^\mu(x) \underline{A}_\mu(x) \right) \right\}. \quad (3.2.18)$$

Для процессов без участия фотонов последний множитель в (3.2.18) равен единице и матрица рассеяния приобретает вид

$$S = T_{\psi} \exp \left( -\frac{i}{2} \int d^4x d^4x' \tilde{j}^{\nu}(x') \mathcal{D}^c(x' - x'') \tilde{j}_{\nu}(x'') + i\delta M(\psi) \right). \quad (3.2.19)$$

Если движение электронов считать заданным, то плотность тока можно рассматривать как заданную числовую функцию  $j_{\mu}(x)$ . Из (3.2.18) следует, что в таком приближении матрица рассеяния приобретает вид

$$S = \exp \left( -\frac{i}{2} \int d^4x d^4x' j^{\nu}(x') \mathcal{D}^c(x' - x'') j_{\nu}(x'') \right) \times \\ \times : \exp \left( i \int d^4x j^{\mu}(x) A_{\mu}(x) \right) :, \quad (3.2.20)$$

где операторами являются только потенциалы  $A_{\mu}(x)$ .

**3.2.4. Связь определений матрицы рассеяния в кулоновской и лоренцевой калибровках.** Установим связь между матрицей рассеяния в лоренцевой калибровке  $S$  и матрицей рассеяния в кулоновской калибровке  $\bar{S}$ , именно покажем, что

$$\bar{S} = \langle S \rangle, \quad (3.2.21)$$

где усреднение производится по вакууму духовых состояний электромагнитного поля, т. е. по вакууму скалярных и продольных фотонов. С этой целью отметим, что функция распространения в лоренцевой калибровке  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi)$  связана с функцией распространения в кулоновской калибровке  $\bar{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^c(x)$  формулой

$$i\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi) = i\bar{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^c(x) - \frac{i}{4\pi} \eta_{\mu}\eta_{\nu} \frac{\delta(t)}{x^2} + \partial_{\nu}\varphi_{\mu}(x; \xi) + \partial_{\mu}\varphi_{\nu}(x; \xi), \quad (3.2.22)$$

где  $\varphi_{\mu}(x; \xi)$  — некоторая векторная функция  $x$  и функция  $\bar{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^c(x)$  совпадает с функцией  $(g_{kl}\mathcal{D}^c(x))^{(t)}$  (см. (3.1.28)), если  $\mu = k$ ,  $\nu = l$ , и равна нулю в остальных случаях. Для доказательства отметим, что векторы поляризации  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 1, 2$ ),  $e_{k\mu}^{(0)} \equiv \eta_{\mu}$ ,  $e_{k\mu}^{(3)} \equiv \xi_{\mu}$  образуют полную систему. Поэтому

$$\sum_{\lambda=1}^2 e_{k\mu}^{(\lambda)} e_{k\nu}^{(\lambda)*} = -g_{\mu\nu} + \eta_{\mu}\eta_{\nu} - \xi_{\mu}\xi_{\nu}.$$

Так как  $e_{k\mu}^{(3)} = \left(0, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right)$ , то вектор  $\xi_{\mu}$  можно представить в виде

$$\xi_{\mu} = \frac{k_{\mu} - (k\eta)\eta_{\mu}}{\sqrt{(k\eta)^2 - k^2}}$$

(мы учли, что  $\eta_{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ ). Поэтому, учитывая, что

$$\sum_{\lambda=1}^2 e_{k\lambda}^{(\lambda)} e_{k\sigma}^{(\lambda)*} = \delta_{k\sigma} - \frac{k_{\lambda}k_{\sigma}}{k^2},$$

Функцию  $i\bar{D}_{\mu\nu}^c(x)$  согласно (3.1.28) можно представить в виде

$$\begin{aligned} i\bar{D}_{\mu\nu}^c(x) &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikx} \frac{1}{k^2 + i0} (-g_{\mu\nu} + \eta_\mu \eta_\nu - \xi_\mu \xi_\nu) = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i0} \left\{ -g_{\mu\nu} - \frac{k^2 \eta_\mu \eta_\nu}{(k\eta)^2 - k^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_\mu k_\nu}{(k\eta)^2 - k^2} + (k\eta) \frac{k_\mu \eta_\nu + k_\nu \eta_\mu}{(k\eta)^2 - k^2} \right\}, \end{aligned}$$

откуда, учитывая определение (2.4.55) функции распространения в лоренцевой калибровке и замечая, что

$$\int d^4k \frac{e^{-ikx}}{(k\eta)^2 - k^2} = 2\pi\delta(t) \int d^3k \frac{e^{ikx}}{k^2} = \frac{4\pi^3}{|x|} \delta(t),$$

приходим к формуле (3.2.22) (последние слагаемые в этой формуле вместе со слагаемыми, содержащими  $1 - \xi$  в формуле для  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi)$ , определяют функцию  $\varphi_\mu(x; \xi)$ ).

Обратимся к соотношению (3.2.18). Подставим в это соотношение вместо  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi)$  выражение (3.2.22). Ясно, что при этом можно опустить слагаемые  $\partial_\mu \varphi_\nu, \partial_\nu \varphi_\mu$ , так как интегрирование по частям приводит к выражению  $\partial^\mu \underline{j}_\mu$ , которое обращается в нуль вследствие закона сохранения тока. При этом отметим, что при интегрировании по частям кроме членов  $\partial^\mu \underline{j}_\mu$  появляются дополнительные члены, связанные с дифференцированием  $T$ -произведения токов

$$T(\underline{j}_\mu(x) \underline{j}_\nu(x')) = \theta(t - t') \underline{j}_\mu(x) \underline{j}_\nu(x') + \theta(t' - t) \underline{j}_\nu(x') \underline{j}_\mu(x) \quad (3.2.23)$$

в соответствии с формулой

$$\partial_\mu T(\underline{j}^\mu(x) \underline{j}^\nu(x')) = T(\partial_\mu \underline{j}^\mu(x) \underline{j}^\nu(x')) + \delta(t - t') [\underline{j}^0(x), \underline{j}^\nu(x')].$$

Последнее слагаемое, вообще говоря, отлично от нуля вследствие наличия так называемых швингеровских членов в коммутаторе токов (см. (2.7.30)). Однако если в отличие от (3.2.23) использовать релятивистски-инвариантное определение  $T$ -произведения в окрестности точки  $x' = x$  (которое отличается от определения (3.2.23) наличием слагаемых, содержащих  $\delta$ -функцию  $\delta(x - x')$ ), то слагаемые типа  $\delta(t - t') [\underline{j}^0(x), \underline{j}^\nu(x')]$  не появляются, т. е. будет справедливо соотношение

$$\partial_\mu T(\underline{j}^\mu(x) \underline{j}^\nu(x')) = T(\partial_\mu \underline{j}^\mu(x) \underline{j}^\nu(x')) = 0 \quad (3.2.24)$$

(см. п. 3.2.6). К этому результату можно прийти также, используя правила Вика, с помощью которых  $T$ -произведение токов преобразуется в сумму  $N$ -произведений. Дело в том, что представление  $T$ -произведения согласно правилам Вика в виде суммы  $N$ -произведений является всюду релятивистски-инвариантным.

Согласно правилам Вика

$$T\{:\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \underline{\psi}(x) : : \bar{\psi}(x') \gamma^\nu \underline{\psi}(x') : \} = :\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \underline{\psi}(x) \bar{\psi}(x') \gamma^\nu \underline{\psi}(x') : -$$

$$-i : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu S^c(x-x') \gamma^\nu \psi(x') : - i : \bar{\psi}(x') \gamma^\nu S^c(x'-x) \gamma^\mu \psi(x) : - \\ - (-i)^2 \text{Sp} S^c(x'-x) \gamma^\mu S^c(x-x') \gamma^\nu. \quad (3.2.25)$$

Входящие в эти  $N$ -произведения операторы  $\psi^{(\pm)}$ ,  $\bar{\psi}^{(\pm)}$  удовлетворяют уравнениям Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi^{(\pm)}(x) = 0, \quad \bar{\psi}^{(\pm)}(x) (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0.$$

Поэтому

$$\partial_\mu : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(x') \gamma^\nu \psi(x') : = 0. \quad (3.2.26)$$

Отметим, что функции  $S_{\alpha\beta}^c(x-x')$  удовлетворяют уравнениям (см. (2.5.42))

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) S^c(x-x') = -\delta(x-x'), \quad S^c(x-x') (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = \\ = \delta(x-x'). \quad (3.2.27)$$

Поэтому, используя уравнения Дирака для  $\bar{\psi}^{(\pm)}(x)$ ,  $\psi^{(\pm)}(x)$ , получаем

$$\partial_\mu \bar{\psi}^{(\pm)}(x) \gamma^\mu S^c(x-x') = i\delta(x-x') \bar{\psi}^{(\pm)}(x), \\ \partial_\mu S^c(x-x') \gamma^\mu \psi^{(\pm)}(x) = -i\delta(x-x') \psi^{(\pm)}(x).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\partial_\mu \{ : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu S^c(x-x') \gamma^\nu \psi(x') : + : \bar{\psi}(x') \gamma^\nu S^c(x'-x) \gamma^\mu \psi(x) : \} = 0. \quad (3.2.28)$$

Последнее слагаемое в формуле (3.2.25) представляет собой поляризационный оператор фотона (см. § 3.5). Эта величина содержит ультрафиолетовые расходимости. Однако если использовать промежуточную градиентно-инвариантную регуляризацию (например, градиентно-инвариантную регуляризацию Паули — Виллрса или размерную регуляризацию, см. § 3.6), то получим (см. п. 3.7.3)

$$\partial_\mu \text{Sp} S^c(x'-x) \gamma^\mu S^c(x-x') \gamma^\nu = 0. \quad (3.2.29)$$

Отметим, что формальное применение формул (3.2.27) приводит к соотношению

$$\partial_\mu \text{Sp} S^c(x'-x) \gamma^\mu S^c(x-x') \gamma^\nu = i\delta(x-x') \text{Sp} (S^c(x'-x) \gamma^\nu - \\ - S^c(x-x') \gamma^\nu).$$

Однако отсюда, строго говоря, не следует обращение в нуль выражения в правой части данной формулы. Это связано с тем, что до промежуточной регуляризации выражение  $\text{Sp} S^c(x) \gamma^\mu S^c(-x) \gamma^\nu$  не имеет смысла. Учитывая (3.2.26), (3.2.28), (3.2.29), мы приходим к формуле (3.2.24).

Таким образом, учитывая, что функция  $\bar{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^c$  отлична от нуля только при  $\mu = l$ ,  $\nu = s$ , матрицу рассеяния  $S$  можно представить в виде

$$S = T_\psi \left( \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4x' \tilde{j}^l(x') \bar{\mathcal{D}}_{ik}^c(x'-x'') \tilde{j}^k(x'') + \right. \right.$$



$$+ \frac{1}{8\pi i} \int d^3x' \int d^3x'' \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{|x' - x''|} \underline{j}_0(x', t) \underline{j}_0(x'', t) \Big\} \times \\ \times N_A \exp \left( i \int d^4x \underline{j}^\nu(x) \underline{A}_\nu(x) \right).$$

В последний множитель под знак  $T_\Psi$ -произведения входит полное электромагнитное поле  $\underline{A}_\nu(x)$ , включающее операторы рождения и уничтожения продольных и скалярных фотонов. Усредняя последнюю формулу по вакууму скалярных и продольных фотонов, получаем

$$\langle S \rangle = T_\Psi \left( \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4x' \underline{j}^i(x') \underline{\mathcal{D}}_{ik}^c(x' - x'') \underline{j}^k(x'') + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{8\pi i} \int d^3x' \int d^3x'' \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{|x' - x''|} \underline{j}_0(x', t) \underline{j}_0(x'', t) \right\} \times \right. \\ \left. \times N_A \exp \left( i \int d^4x \underline{j}^\nu(x) \underline{A}_\nu^{(t)}(x) \right) \right), \quad (3.2.30)$$

где поле  $\underline{A}_\nu^{(t)}(x)$  содержит только операторы рождения и уничтожения поперечных фотонов (см. (2.4.25)). Это выражение представляет собой  $S$ -матрицу в кулоновской калибровке. Действительно, поступая так же, как при выводе формулы (3.2.18) для  $S$ -матрицы в лоренцевой калибровке, мы из формул (3.2.18), (3.1.28) в качестве  $\bar{S}$ -матрицы в кулоновской калибровке получаем правую часть равенства (3.2.30).

Из формулы (3.2.30) следует также, что матричные элементы матрицы рассеяния  $S$  между физическими состояниями не зависят от калибровочного параметра  $\xi$ , так как матрица рассеяния в кулоновской калибровке не содержит этого параметра.

**3.2.5. Введение релятивистски-инвариантных  $T$ -произведений и швингеровские члены.** Мы уже отмечали, что хронологическое произведение операторов при совпадении пространственно-временных аргументов операторов не определено. Поэтому мы могли бы, например, к  $T$ -произведению  $T(a(x) b(y))$  добавить слагаемое типа  $\delta(x_0 - y_0) \partial_k \times \delta(x - y)$ , которое могло бы нарушить релятивистскую инвариантность исходного  $T$ -произведения, если бы оно обладало ею, или сделало его релятивистски-инвариантным при  $x = y$ , если бы исходное  $T$ -произведение не было релятивистски-инвариантным при  $x = y$ . Обычно при раскрытии  $T$ -произведений мы пользуемся правилами Вика, при которых  $T$ -произведение выражается в виде суммы нормальных произведений. Нормальные произведения вместе с входящими в них функциями распространения являются релятивистски-инвариантными. Поэтому правила Вика, по сути, доопределяют  $T$ -произведения (при совпадающих аргументах) и делают их релятивистски-инвариантными. Можно, однако, поставить вопрос о введении релятивистски-инвариантных  $T$ -произведений без использования правил Вика, а исходя из первоначального определения  $T$ -произведения:

$$T(a(x) b(y)) = \theta(x_0 - y_0) a(x) b(y) + \theta(y_0 - x_0) b(y) a(x),$$

где  $a(x)$ ,  $b(y)$  — некоторые локальные операторы, построенные из операторов поля  $\chi(x)$  и содержащие четное число ферми-операторов; такими операторами являются, в частности, операторы токов  $\mathcal{J}_a^\mu(x)$ , входящие в лагранжиан взаимодействия полей. Здесь мы рассмотрим вопрос о релятивистской инвариантности таким образом определенных  $T$ -произведений и покажем, что этот вопрос тесно связан с наличием швингеровских членов в коммутаторах токов (см. п. 2.7.2) [12].

Чтобы выяснить, является ли релятивистски-инвариантным хронологическое произведение токов

$$T(\mathcal{J}_a^\nu(x)\mathcal{J}_b^\mu(y)) \equiv T^{\nu\mu}(x, y) = \theta(x_0 - y_0)\mathcal{J}_a^\nu(x)\mathcal{J}_b^\mu(y) + \theta(y_0 - x_0)\mathcal{J}_b^\mu(y)\mathcal{J}_a^\nu(x) \quad (3.2.31)$$

(для общности рассматриваем сохраняющиеся токи при наличии внутренней симметрии поля), введем унитарное преобразование  $U(a)$  (см. § 2.2), соответствующее преобразованию Лоренца

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu.$$

$T$ -произведение (3.2.31) будет релятивистски-инвариантным, если  $T^{\nu\mu}(x, y)$  при этих преобразованиях будет преобразовываться как тензор 2-го ранга, т. е.

$$U(a)T^{\nu\mu}(x', y')U(a)^\dagger = a^\nu{}_\rho a^\mu{}_\lambda T^{\rho\lambda}(x, y), \quad (3.2.32)$$

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu, \quad y'^\mu = a^\mu{}_\nu y^\nu.$$

В случае бесконечно малых преобразований Лоренца, соответствующих движению с бесконечно малой скоростью  $v_l = \varepsilon_{0l}$  ( $a_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}$ ,  $\varepsilon_{kl} = 0$ ), оператор  $U(a)$  определяется формулой (2.2.29)

$$U(a) = 1 + iG, \quad G = \varepsilon_{0l}M^{0l} \quad (3.2.33)$$

и соотношение (3.2.32) приобретает вид

$$[M^{0l}, T^{\nu\mu}(x, y)] = i(x^l\partial^0 - x^0\partial^l)T^{\nu\mu}(x, y) + i(y^l\partial^0 - y^0\partial^l)T^{\nu\mu}(x, y) + L^l T^{\nu\mu}(x, y), \quad (3.2.34)$$

где

$$L^l T^{\nu\mu} = -ig^{0\nu}T^{l\mu} - ig^{0\mu}T^{\nu l} + ig^{l\nu}T^{0\mu} + ig^{l\mu}T^{\nu 0}. \quad (3.2.35)$$

Так как  $\mathcal{J}_a^\nu(x)$  представляет собой 4-вектор, то

$$[M^{0l}, \mathcal{J}_a^\nu(x)\mathcal{J}_b^\mu(y)] = i(x^l\partial^0 - x^0\partial^l)\mathcal{J}_a^\nu(x)\mathcal{J}_b^\mu(y) + i(y^l\partial^0 - y^0\partial^l)\mathcal{J}_a^\nu(x)\mathcal{J}_b^\mu(y) + L^l(\mathcal{J}_a^\nu(x)\mathcal{J}_b^\mu(y)).$$

Поэтому согласно (3.2.31) справедлива формула

$$[M^{0l}, T^{\nu\mu}(x, y)] = L^l T^{\nu\mu}(x, y) + i(x^l\partial^0 - x^0\partial^l)T^{\nu\mu}(x, y) + i(y^l\partial^0 - y^0\partial^l)T^{\nu\mu}(x, y) - i(x^l - y^l)\delta(x^0 - y^0)[\mathcal{J}_a^\nu(x), \mathcal{J}_b^\mu(y)]. \quad (3.2.36)$$

Последнее слагаемое в этой формуле компенсирует временные производные от  $\theta(x_0 - y_0)$  и  $\theta(y_0 - x_0)$ , появляющиеся во втором и третьем слагаемых.

Если бы коммутатор токов не содержал швингеровских членов (пропорциональных  $\partial_i \delta(x - y)$ ), т. е. был бы пропорционален  $\delta(x - y)$ , то слагаемое, содержащее коммутатор токов в (3.2.36), обратилось бы в нуль и мы пришли бы к формуле (3.2.34). Это значит, что при отсутствии швингеровских членов в коммутаторе токов хронологическое произведение, определяемое формулой (3.2.31), было бы релятивистски-инвариантным.

Вместе с тем, как мы видели, введение швингеровских членов необходимо, и, следовательно, хронологическое произведение, определяемое формулой (3.2.31), не является релятивистски-инвариантным и должно быть модифицировано в окрестности точки  $x = y$ . Модифицированное (простейшим образом) хронологическое произведение токов обозначим так:

$$T^*(\mathcal{J}_a^\nu(x) \mathcal{J}_b^\mu(y)) \equiv T^{*\nu\mu}(x, y) = T^{\nu\mu}(x, y) + \delta(x - y) \rho^{\nu\mu}(x), \quad (3.2.37)$$

где  $T^{\nu\mu}(x, y)$  определяется формулой (3.2.31) и операторы  $\rho^{\nu\mu}(x)$  мы подберем так, чтобы модифицированное  $T$ -произведение было релятивистски-инвариантным, т. е. чтобы выполнялось соотношение

$$[M^{0l}, T^{*\nu\mu}(x, y)] = i(x^l \partial^0 - x^0 \partial^l) T^{*\nu\mu}(x, y) + \\ + i(y^l \partial^0 - y^0 \partial^l) T^{*\nu\mu}(x, y) + L^l T^{*\nu\mu}(x, y).$$

Подставляя сюда выражение (3.2.37) и учитывая (3.2.36), получаем

$$[M^{0l}, \rho^{\nu\mu}(x)] \delta(x - y) - i(x^l - y^l) \delta(x^0 - y^0) [\mathcal{J}_a^\nu(x), \mathcal{J}_b^\mu(y)] = \\ = \delta(x - y) L^l \rho^{\nu\mu}(x) + \delta(x - y) i(x^l \partial^0 - x^0 \partial^l) \rho^{\nu\mu}(x).$$

Мы использовали при этом очевидную формулу

$$(x^l \partial^0 - x^0 \partial^l) \delta(x - y) + (y^l \partial^0 - y^0 \partial^l) \delta(x - y) = 0.$$

Учитывая далее, что согласно (2.7.27)

$$\delta(x^0 - y^0) [\mathcal{J}_a^\nu(x), \mathcal{J}_b^\mu(y)] = F_{ab}^{\nu\mu}(x) \delta(x - y) - G_{ab}^{\nu\mu;k}(x) \partial_k \delta(x - y)$$

и

$$L^l \rho^{\nu\mu}(x) = -ig^{0\nu} \rho^{l\mu}(x) - ig^{0\mu} \rho^{\nu l}(x) + ig^{l\nu} \rho^{0\mu}(x) + ig^{l\mu} \rho^{\nu 0}(x),$$

получаем

$$[M^{0l}, \rho^{\nu\mu}(x)] - iG_{ab}^{\nu\mu;l}(x) = i(x^l \partial^0 - x^0 \partial^l) \rho^{\nu\mu}(x) - \\ - ig^{0\nu} \rho^{l\mu}(x) - ig^{0\mu} \rho^{\nu l}(x) + ig^{l\nu} \rho^{0\mu}(x) + ig^{l\mu} \rho^{\nu 0}(x). \quad (3.2.38)$$

Эта формула служит для определения  $\rho_{ab}^{\nu\mu}(x)$ . Так как

$$e^{iPx} G_{ab}^{\nu\mu;l}(0) e^{-iPx} = G_{ab}^{\nu\mu;l}(x),$$

$$i[P_\rho, M^{0l}] = -g^{0\rho} P^l + g^{l\rho} P^0$$

(см. (2.2.46)) и, следовательно,

$$e^{iPx} M^{0l} e^{-iPx} = M^{0l} + x^l P^0 - x^0 P^l,$$

то из формулы (3.2.38) вытекает, что

$$\rho^{\nu\mu}(x) = e^{iPx} \rho^{\nu\mu}(0) e^{-iPx}.$$

Поэтому достаточно определить оператор  $\rho^{\nu\mu}(0)$ . Полагая в (3.2.38)  $x = 0$ , находим

$$\begin{aligned} [M^{0l}, \rho^{\nu\mu}(0)] - iG_{ab}^{\nu\mu,l}(0) &= -ig^{0\nu} \rho^{l\mu}(0) - \\ &- ig^{0\mu} \rho^{\nu l}(0) + ig^{\nu l} \rho^{0\mu}(0) + ig^{l\mu} \rho^{\nu 0}(0). \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

Предположим, что

$$\rho^{\nu 0}(0) = \rho^{0\nu}(0) = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (3.2.40)$$

Тогда уравнение (3.2.39) удовлетворяется при  $\nu = \mu = 0$ , так как  $G_{ab}^{00,l}(0) = 0$  (см. (2.7.29); в коммутаторе  $[\mathcal{J}_a^0(x), \mathcal{J}_b^0(y)]$  нет швингеровских членов). При  $\nu = 0, \mu = s$  уравнение (3.2.39) приводит к определению пространственных составляющих оператора  $\rho^{\nu\mu}$ :

$$\rho_{ab}^{ls}(0) = G_{ab}^{0s,l}(0). \quad (3.2.41)$$

Формулы (3.2.40), (3.2.41) определяют оператор  $\rho_{ab}^{\nu\mu}$ , а тем самым и релятивистски-инвариантное  $T^*$ -произведение токов (см. (3.2.37)).

Для пространственных индексов уравнение (3.2.39) принимает вид

$$[M^{0l}, \rho_{ab}^{ks}(0)] - iG_{ab}^{ks,l}(0) = 0,$$

или с использованием (3.2.41)

$$[M^{0l}, G_{ab}^{0s,k}(0)] = iG_{ab}^{ks,l}(0). \quad (3.2.42)$$

Это соотношение связывает между собой швингеровские члены  $G_{ab}^{0s,k}$  и  $G_{ab}^{ks,l}$ . В действительности, однако, эта связь является непосредственным следствием векторного характера токов  $\mathcal{J}_a^\mu(x)$ . Действительно, рассмотрим двойной коммутатор  $[M^{0l}, [\mathcal{J}_a^0(x), \mathcal{J}_b^s(0)]]_{x_0=0}$ . Тогда из тождества Якоби следует

$$\begin{aligned} [M^{0l}, [\mathcal{J}_a^0(x), \mathcal{J}_b^s(0)]_{x_0=0}] &= -[\mathcal{J}_a^0(x), [\mathcal{J}_b^s(0), M^{0l}]]_{x_0=0} - \\ &- [\mathcal{J}_b^s(0), [M^{0l}, \mathcal{J}_a^0(x)]]_{x_0=0}. \end{aligned}$$

Так как  $\mathcal{J}_a^\mu(x)$  представляет собой 4-вектор, то

$$\begin{aligned} [M^{0l}, \mathcal{J}_a^\mu(x)] &= i(x^l \partial^0 - x^0 \partial^l) \mathcal{J}_a^\mu(x) + L^l \mathcal{J}_a^\mu(x), \\ L^l \mathcal{J}_a^\mu(x) &= -ig^{0\mu} \mathcal{J}_a^l(x) + ig^{l\mu} \mathcal{J}_a^0(x). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} [M^{0l}, [\mathcal{J}_a^0(x), \mathcal{J}_b^s(0)]_{x_0=0}] &= [\mathcal{J}_a^0(x), L^l \mathcal{J}_b^s(0)]_{x_0=0} - \\ &- [\mathcal{J}_b^s(0), L^l \mathcal{J}_a^0(x)]_{x_0=0} + ix^l [\mathcal{J}_b^s(0), \partial_k \mathcal{J}_a^k(x)]_{x_0=0}. \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

Мы использовали здесь закон сохранения тока  $\partial_0 \mathcal{J}_a^0(x) = -\partial_k \mathcal{J}_a^k(x)$ . Левая сторона этого равенства согласно (2.7.30) равна

$$\begin{aligned} [M^{0l}, [\mathcal{J}_a^0(x), \mathcal{J}_b^s(0)]_{x_0=0}] &= \\ &= -if_{ba}{}^d \delta(\mathbf{x}) [M^{0l}, \mathcal{J}_a^s(0)] - [M^{0l}, G_{ba}^{s0,k}(0)] \partial_k \delta(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Поэтому формулу (3.2.43) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \partial_k (ix^l [\mathcal{F}_b^s(0), \mathcal{F}_a^k(x)]_{x_0=0}) + [M^{0l}, G_{ba}^{s0,k}(0)] \partial_k \delta(\mathbf{x}) = \\ & = [\mathcal{F}_b^s(0), L^l \mathcal{F}_a^0(x)]_{x_0=0} - [\mathcal{F}_a^0(x), L^l \mathcal{F}_b^s(0)]_{x_0=0} + i [\mathcal{F}_b^s(0), \mathcal{F}_a^l(x)]_{x_0=0} - \\ & \quad - i f_{ba}^d [M^{0l}, \mathcal{F}_a^s(0)] \delta(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Правая сторона равенства вследствие (3.2.33), (3.2.35) обращается в нуль и согласно (2.7.31) мы приходим к соотношению (3.2.42), связывающему швингеровские члены  $G_{ab}^{0s,k}$  и  $G_{ab}^{ks,l}$ .

Таким образом, мы связали дополнительные слагаемые (пропорциональные  $\delta(x-y)$ ), входящие в релятивистски-инвариантное определение хронологического произведения токов, со швингеровскими членами, входящими в одновременной коммутатор токов.

Покажем, что справедливо соотношение

$$\partial_\nu T^* (\mathcal{F}_a^\nu(x) \mathcal{F}_b^\mu(y)) = i \delta(x-y) f_{ab}^c \mathcal{F}_c^\mu(x). \quad (3.2.44)$$

Используя определение (3.2.37), находим

$$\partial_\nu T^* (\mathcal{F}_a^\nu(x) \mathcal{F}_b^\mu(y)) = \rho_{ab}^{\nu\mu}(y) \partial_\nu \delta(x-y) + \delta(x_0 - y_0) [\mathcal{F}_a^0(x), \mathcal{F}_b^\mu(y)],$$

или, учитывая (3.2.40), (2.7.28):

$$\begin{aligned} \partial_\nu T^* (\mathcal{F}_a^\nu(x) \mathcal{F}_b^\mu(y)) & = \rho_{ab}^{k\mu}(y) \partial_k \delta(x-y) - G_{ab}^{0\mu,k}(y) \partial_k \delta(x-y) + \\ & \quad + i f_{ab}^d \mathcal{F}_d^\mu(x) \delta(x-y), \end{aligned}$$

откуда вследствие (3.2.41) вытекает формула (3.2.44).

Отметим, что такой же результат мы получаем, если используем обычное определение  $T$ -произведения и в коммутаторе токов не учитываем швингеровских членов.

В квантовой электродинамике  $f_{ab}^0 = 0$  и, следовательно,

$$\partial_\nu T^* (\mathcal{F}^\nu(x) \mathcal{F}^\mu(y)) = 0. \quad (3.2.45)$$

Этим соотношением мы фактически пользовались при доказательстве эквивалентности двух выражений для матрицы рассеяния в кулоновской и лоренцевой калибровках.

Далее в п. 5.2.2 свяжем вакуумное среднее швингеровских членов, входящих в коммутатор временной и пространственной компонент токов, с полным сечением аннигиляции электронно-позитронной пары.

### § 3.3. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

**3.3.1. Инвариантность  $S$ -матрицы по отношению к непрерывным преобразованиям пространства — времени.** Электромагнитное взаимодействие обладает рядом свойств симметрии, которые проявляются в инвариантности уравнений квантовой электродинамики относительно соответствующих преобразований координат и операторов полей. Именно эти уравнения инвариантны по отношению к непрерывным преобразованиям пространства — времени, преобразованиям отражения про-

странственных координат и обращения времени, преобразованию зарядового сопряжения и калибровочным преобразованиям [5].

Релятивистская инвариантность и инвариантность относительно отражения координат и обращения времени уравнений общих квантованных полей в гейзенберговском представлении изучались нами в § 2.2. Полученные выводы относятся и к уравнениям квантовой электродинамики в гейзенберговском представлении. Здесь мы рассмотрим свойства инвариантности  $S$ -матрицы, связанные с указанными симметриями.

Начнем рассмотрение с релятивистской инвариантности. При переходе от системы отсчета  $K$  к системе отсчета  $K'$  ( $x^\mu \rightarrow x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ ) операторы полей в представлении взаимодействия преобразуются по формулам

$$\begin{aligned}\underline{\psi}(x) &\rightarrow \underline{\psi}'(x') = S(a)\underline{\psi}(x), \\ \underline{A}_\mu(x) &\rightarrow \underline{A}'_\mu(x') = a_\mu{}^\nu \underline{A}_\nu(x).\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

Легко видеть, что операторы  $\underline{\psi}'(x)$ ,  $\underline{A}'_\mu(x)$  удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям (см. (3.1.54)) и уравнениям движения (см. (3.1.52), (3.1.53)), как операторы  $\underline{\psi}(x)$ ,  $\underline{A}_\mu(x)$ . Поэтому они связаны унитарным преобразованием

$$\underline{\psi}'(x) = U\underline{\psi}(x)U^+, \quad \underline{A}'_\mu(x) = U\underline{A}_\mu(x)U^+, \tag{3.3.2}$$

где  $U \equiv U(a_\mu{}^\nu, a_\mu)$  — некоторый унитарный оператор, не зависящий от  $x$ , но зависящий от  $a^\mu{}_\nu$ ,  $a^\mu$ . Для бесконечно малого преобразования  $a_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}$ ,  $a_\mu = \epsilon_\mu$

$$U = 1 + iG, \quad G^+ = G,$$

где (см. § 2.2)

$$G = -\epsilon_\mu P^\mu + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}.$$

Входящие сюда величины  $P^\mu$  и  $M^{\mu\nu}$  представляют собой 4-вектор энергии — импульса и 4-тензор моментов свободных квантованных электронно-позитронного и электромагнитного полей.

Из определения плотности 4-тока и (3.3.1) следует, что

$$Uj^\mu(x')U^+ = a^\mu{}_\nu j^\nu(x).$$

Поэтому согласно (3.3.1) и определению  $\tilde{S}$ -матрицы (3.2.8)

$$USU^+ = S$$

и, следовательно,

$$[P^\mu, S] = [M^{\mu\nu}, S] = 0. \tag{3.3.3}$$

Коммутативность  $S$  и  $P^\mu$  обеспечивает выполнение закона сохранения 4-импульса в процессах столкновений, поэтому матричные элементы  $\langle f|S|i\rangle$  содержат  $\delta$ -функцию  $\delta(\Sigma p_i - \Sigma p_f)$ . Коммутативность  $S$  и  $M^{\mu\nu}$  обеспечивает релятивистскую инвариантность амплитуды  $A_{i \rightarrow f}$  (см. (3.4.10)).

**3.3.2. Инвариантность  $S$ -матрицы по отношению к сильному отражению пространства — времени.** Перейдем к рассмотрению инвариантности уравнений квантовой электродинамики в представлении взаимодействия по отношению к одновременному преобразованию отражения пространства и обращения времени  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = -x^\mu$ . Если с этим преобразованием связать преобразования операторов полей

$$\begin{aligned} \underline{A}_\mu(x) &\rightarrow \underline{A}_\mu^R(x') = -\underline{A}_\mu^T(x), \\ \underline{\psi}(x) &\rightarrow \underline{\psi}^R(x') = O\underline{\psi}^T(x), \quad \underline{\bar{\psi}}(x) \rightarrow \underline{\bar{\psi}}^R(x') = \underline{\bar{\psi}}^T(x) O, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

где  $O = i\gamma^5$ , то, как легко проверить, операторы  $\underline{A}_\mu^R(x)$ ,  $\underline{\psi}^R(x)$ ,  $\underline{\bar{\psi}}^R(x)$  будут удовлетворять таким же уравнениям движения (см. (3.1.54)) и таким же перестановочным соотношениям (см. (3.1.52), (3.1.53)), как и операторы  $\underline{A}_\mu(x)$ ,  $\underline{\psi}(x)$ ,  $\underline{\bar{\psi}}(x)$ . Поэтому эти системы операторов связаны между собой некоторым унитарным преобразованием  $U_R$ , не зависящим от  $x$ :

$$\underline{A}_\mu^R(x) = U_R \underline{A}_\mu(x) U_R^\dagger, \quad \underline{\psi}^R(x) = U_R \underline{\psi}(x) U_R^\dagger, \quad \underline{\bar{\psi}}^R(x) = U_R \underline{\bar{\psi}}(x) U_R^\dagger. \quad (3.3.5)$$

Это преобразование называется сильным отражением или  $R$ -преобразованием. Покажем, что

$$U_R S U_R^\dagger = S^T. \quad (3.3.6)$$

Для этого отметим, что согласно (3.3.5)

$$U_R j^\mu(x) U_R^\dagger = \frac{e}{2} [\underline{\bar{\psi}}^R(x), \gamma^\mu \underline{\psi}^R(x)] \equiv \underline{j}^\mu(x)^R.$$

Используя (3.3.4), находим

$$\underline{j}^\mu(x)^R = -\underline{j}^\mu(-x)^T.$$

Замечая далее, что  $U_R \underline{A}_\mu(x) U_R^\dagger = -\underline{A}_\mu(-x)^T$ , получаем

$$U_R j^\mu(x) \underline{A}_\mu(x) U_R^\dagger = (\underline{j}^\mu(-x) \underline{A}_\mu(-x))^T.$$

Отсюда и из (3.2.8) следует, что

$$\begin{aligned} U_R S U_R^\dagger &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T \{ \underline{\omega}_{\text{int}}^T(-x_1) \dots \underline{\omega}_{\text{int}}^T(-x_n) \} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \bar{T} \{ \underline{\omega}_{\text{int}}^T(x_1) \dots \underline{\omega}_{\text{int}}^T(x_n) \}, \end{aligned}$$

где  $\bar{T}$  — антихронологический оператор, располагающий операторы полей, считая слева направо, в порядке возрастания временных аргументов операторов. Но последнее выражение, очевидно, совпадает с формулой для  $S^T$ , что и доказывает (3.3.6).

Из формулы (3.3.6) вытекает общее соотношение

$$\langle p_f, e_f, \mu_f | S | p_i, e_i, \mu_i \rangle = (-1)^{N_i + N_f} \langle p_i, -e_i, -\mu_i | S | p_f, -e_f, -\mu_f \rangle, \quad (3.3.7)$$

где  $|p, e, \mu\rangle$  — вектор состояния частиц с импульсами  $p$ , зарядами  $e$  и спиральностями  $\mu$  (индексы  $i$  и  $f$  служат для обозначения начального и конечного состояний;  $N_i, N_f$  — суммарные числа фотонов в состояниях  $i$  и  $f$ ).

Действительно, из формул (1.4.37), (1.5.47), определяющих векторы поляризации  $e_{k\nu}^{(\lambda)}$  и биспиноры  $u^{q\mu}(p)$ , следует

$$e_{k\nu}^{(\lambda)*} = e_{k\nu}^{(-\lambda)}, \quad \lambda = \pm 1, \quad i\gamma^5 u^{q\mu}(p) = u^{-q\mu}(p) \quad (3.3.8)$$

(в первой из этих формул индекс  $\lambda$  означает спиральность фотона, так что  $e_{k\nu}^{(1)}$  и  $e_{k\nu}^{(-1)}$  соответствуют в обозначениях п. 1.4.3 величинам  $e_{k\nu}^{(1)}$ ,  $e_{k\nu}^{(2)}$ ). Заметим далее, что в представлении, в котором матричные элементы операторов  $a, b, c$  вещественны, справедливы формулы

$$a^T = a^+, \quad b^T = b^+, \quad c^T = c^+.$$

Поэтому из формул (3.3.5) и разложений (2.4.25), (2.5.27) операторов  $A_\mu, \psi, \bar{\psi}$  на плоские волны вытекают соотношения

$$\begin{aligned} U_R a_{p\mu}^+ U_R^+ &= b_{p-\mu}^+, & U_R b_{p\mu}^+ U_R^+ &= a_{p-\mu}^+, \\ U_R c_{k\lambda}^+ U_R^+ &= -c_{k-\lambda}^+. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Из этих формул следует, что

$$U_R |p, e, \mu\rangle = (-1)^N |p, -e, -\mu\rangle \quad (3.3.10)$$

(мы учли при этом, что  $U_R |0\rangle = |0\rangle$ ,  $|0\rangle$  — вектор состояния вакуума), следовательно, согласно (3.3.6):

$$\langle p_f, e_f, \mu_f | S | p_i, e_i, \mu_i \rangle = (-1)^{N_i + N_f} \langle p_f, -e_f, -\mu_f | S^T | p_i, -e_i, -\mu_i \rangle.$$

Отсюда получаем формулу (3.3.7).

**3.3.3. Инвариантность  $S$ -матрицы по отношению к преобразованию зарядового сопряжения.** Перейдем к рассмотрению инвариантности уравнений квантовой электродинамики относительно преобразования зарядового сопряжения. В гейзенберговском представлении этому преобразованию соответствует преобразование операторов полей

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi^c(x) = C\bar{\psi}(x), & \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}^c(x) = C^{-1}\psi(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = -A_\mu(x). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Легко убедиться, что канонические перестановочные соотношения и уравнения Дирака инвариантны относительно этого преобразования. Для доказательства инвариантности уравнений для электромагнитного поля отметим, что 4-ток  $j'_\mu(x)$ , построенный из операторов  $\psi^c(x)$ ,  $\bar{\psi}^c(x)$ , так же, как оператор  $j_\mu(x)$ , построен с помощью операторов  $\psi(x)$ ,



$\bar{\psi}(x)$ :

$$j_{\mu}^c(x) = \frac{e}{2} [\bar{\psi}^c(x), \gamma_{\mu} \psi^c(x)] \quad (3.3.12)$$

и отличается только знаком от  $j_{\mu}(x)$ :

$$j_{\mu}^c(x) = -j_{\mu}(x). \quad (3.3.13)$$

Так как  $A_{\mu}^c(x) = -A_{\mu}(x)$ , то уравнение (3.1.38) также инвариантно относительно преобразования зарядового сопряжения. Поэтому операторы  $A_{\mu}^c(x)$ ,  $\psi^c(x)$ ,  $\bar{\psi}^c(x)$  связаны с операторами  $A_{\mu}(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ ,  $\psi(x)$  унитарным преобразованием  $U_c$ , не зависящим от  $x$ :

$$A_{\mu}^c(x) = U_c A_{\mu}(x) U_c^{\dagger}, \quad \psi^c(x) = U_c \psi(x) U_c^{\dagger}, \quad \bar{\psi}^c(x) = U_c \bar{\psi}(x) U_c^{\dagger} \quad (3.3.14)$$

(инвариантность теории по отношению к преобразованию зарядового сопряжения называется  $C$ -инвариантностью).

Отметим, что в классической теории мы не можем обеспечить инвариантность уравнения  $\partial^{\nu} \partial_{\nu} A_{\mu} = -j_{\mu}$  относительно зарядового сопряжения, так как в ней  $j_{\mu}^c = j_{\mu}$  (определение же тока в (3.1.32) в виде коммутатора приводит в классической теории к нулевому току). Если бы классические ферми-поля мы описывали грассмановыми переменными, то определение тока в форме (3.1.32) имело бы смысл и теория также была бы  $C$ -инвариантна.

В представлении взаимодействия справедливы формулы, аналогичные (3.3.11), (3.3.14):

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x) \rightarrow \underline{\psi}^c(x) &= C \bar{\underline{\psi}}(x), & \bar{\underline{\psi}}(x) \rightarrow \bar{\underline{\psi}}^c(x) &= C^{-1} \underline{\psi}(x), \\ \underline{A}_{\mu}(x) \rightarrow \underline{A}_{\mu}^c(x) &= -\underline{A}_{\mu}(x), \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

причем

$$U_c \underline{\psi}(x) U_c^{\dagger} = \underline{\psi}^c(x), \quad U_c \bar{\underline{\psi}}(x) U_c^{\dagger} = \bar{\underline{\psi}}^c(x), \quad U_c \underline{A}_{\mu}(x) U_c^{\dagger} = \underline{A}_{\mu}^c(x). \quad (3.3.16)$$

Так как

$$U_c j^{\mu}(x) U_c^{\dagger} = -j^{\mu}(x) \quad (3.3.17)$$

(см. также (3.3.13)), то легко видеть, что

$$U_c S U_c^{\dagger} = S. \quad (3.3.18)$$

Используя разложения (2.4.25), (2.5.27), находим

$$U_c c_{\kappa\lambda}^{\dagger} U_c^{\dagger} = -c_{\kappa\lambda}^{\dagger}, \quad U_c a_{\nu\mu}^{\dagger} U_c^{\dagger} = b_{\nu\mu}^{\dagger}, \quad U_c b_{\nu\mu}^{\dagger} U_c^{\dagger} = a_{\nu\mu}^{\dagger}. \quad (3.3.19)$$

Считая, что  $U_c |0\rangle = |0\rangle$ , получаем

$$U_c |p, e, \mu\rangle = (-1)^N |p, -e, \mu\rangle, \quad (3.3.20)$$

где  $N$  — полные числа фотонов в состояниях  $|p, e, \mu\rangle$ . Поэтому из (3.3.17) следует, что

$$\langle p_f, e_f, \mu_f | S | p_i, e_i, \mu_i \rangle = (-1)^{N_i + N_f} \langle p_f, -e_f, \mu_f | S | p_i, -e_i, \mu_i \rangle. \quad (3.3.21)$$

Мы видим, что если в состояниях  $i$  и  $f$  нет электронов и позитронов и суммарное число фотонов в начальном и конечном состояниях  $N_i + N_f$  нечетно, то матричный элемент равен нулю (теорема Фарри).

Из формул (3.3.19) следует, что  $U_c^2 = 1$ . Поэтому собственные значения оператора  $U_c$  равны  $\Lambda_c = \pm 1$ . Так как согласно (3.3.17)  $U_c Q U_c^+ = -Q$  ( $Q$  — оператор заряда системы), то система, обладающая ненулевым зарядом, не может находиться в состоянии, являющемся собственным оператором  $U_c$ . Наоборот, зарядово нейтральная система может находиться в состоянии, являющемся собственным состоянием оператора  $U_c$ . В этом случае говорят, что система обладает определенной зарядовой четностью,  $\Lambda_c = \pm 1$ . Так как  $U_c c_{k\lambda}^+ |0\rangle = -c_{k\lambda}^+ |0\rangle$ , то зарядовая четность фотона равна  $-1$ . В частности, определенной зарядовой четностью обладает  $\pi^0$ -мезон ( $\Lambda_c = +1$ ), позитроний ( $\Lambda_c = (-1)^{l+s}$ ,  $l$  — орбитальный момент,  $s$  — спин позитрония) и т. д. Нейтрон, являясь нейтральной системой, не обладает определенной зарядовой четностью (антинейтрон не совпадает с нейтроном).

**3.3.4. Инвариантность  $S$ -матрицы по отношению к отражению пространства, обращению времени и СРТ-теорема.** Так как уравнения квантовой электродинамики инвариантны относительно преобразований сильного отражения и зарядового сопряжения, то они инвариантны также и относительно произведения  $R$ - и  $C$ -преобразований. Такое преобразование будем называть преобразованием слабого отражения и обозначать  $R_W = CR$ .

Согласно (3.3.15), (3.3.4) операторы полей преобразуются при слабом отражении следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x) &\rightarrow \underline{\psi}^{RW}(x') = O_W \bar{\underline{\psi}}(x)^T = U_W \underline{\psi}(x') U_W^+, \\ \bar{\underline{\psi}}(x) &\rightarrow \bar{\underline{\psi}}^{RW}(x') = O_W^{-1} \underline{\psi}(x)^T = U_W \bar{\underline{\psi}}(x') U_W^+, \\ \underline{A}_\mu(x) &\rightarrow \underline{A}_\mu^{RW}(x') = \underline{A}_\mu^T(x) = U_W \underline{A}_\mu(x') U_W^+, \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

где  $x'_\mu = -x_\mu$ ,  $O_W = i\gamma^5 C$  и унитарный оператор  $U_W$  определяется формулой  $U_W = U_c U_R$ . Операторы  $a, b, c$ , относящиеся к электронам, позитронам и фотонам, преобразуются согласно формулам

$$U_W a_{p\mu}^+ U_W^+ = a_{p-\mu}^+, \quad U_W b_{p\mu}^+ U_W^+ = b_{p-\mu}^+, \quad U_W c_{k\lambda}^+ U_W^+ = c_{k-\lambda}^+. \quad (3.3.23)$$

Таким образом, преобразование слабого отражения  $U_W$  в отличие от преобразования сильного отражения  $U_R$  изменяет только знак спиральности частицы, но не переводит частицу в античастицу. Поэтому можно считать, что преобразование слабого отражения представляет собой чистое комбинированное преобразование отражения пространства и обращения времени.

Выше мы видели, что при преобразовании сильного отражения 4-вектор плотности тока изменяет свой знак:  $\underline{j}_\mu^R(x) = -\underline{j}_\mu(-x)^T$ . При слабом отражении знак вектора плотности тока не изменяется. Действительно, построив с помощью операторов  $\underline{\psi}^{RW}(x)$  и  $\bar{\underline{\psi}}^{RW}(x)$  4-вектор плотности тока, согласно (3.3.22) получим

$$\underline{j}_\mu^{RW}(x) \equiv \frac{e}{2} [\bar{\underline{\psi}}^{RW}(x), \underline{\psi}^{RW}(x)] = \underline{j}_\mu(-x)^T.$$

Это связано с тем, что плотность тока изменяет знак как при  $R$ -, так и при  $C$ -преобразовании. Отсюда видно, что преобразование слабого отражения аналогично отражению пространства — времени в классической электродинамике.

Выделим из преобразования слабого отражения преобразование отражения пространственных координат ( $P$ -преобразование)

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x) &\rightarrow \underline{\psi}^P(x') \equiv i\gamma^0 \underline{\psi}(x) = U_P \underline{\psi}(x') U_P^\dagger, \\ \bar{\underline{\psi}}(x) &\rightarrow \bar{\underline{\psi}}^P(x') \equiv -i\bar{\underline{\psi}}(x) \gamma^0 = U_P \bar{\underline{\psi}}(x') U_P^\dagger, \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

$$\underline{A}_\mu(x) \rightarrow \underline{A}_\mu^P(x') \equiv \begin{cases} -\underline{A}_i(x), & \mu = i \\ \underline{A}_0(x), & \mu = 0 \end{cases} = U_P \underline{A}_\mu(x') U_P^\dagger$$

( $x \equiv (x, t)$ ,  $x' \equiv (-x, t)$ ). Здесь  $U_P$  — унитарный оператор, соответствующий пространственной инверсии. Представив преобразование слабого отражения в виде  $R_W = PT$ , мы тем самым определим преобразование обращения времени  $T$ , которое называется преобразованием слабого обращения времени. Унитарный оператор  $U_T$ , соответствующий этому преобразованию, определяется формулой

$$U_P U_T = U_W. \quad (3.3.25)$$

Таким образом, видно, что сильное отражение пространства — времени представляет собой произведения  $C$ -,  $P$ - и  $T$ -преобразований:

$$R = CPT. \quad (3.3.26)$$

Уравнения квантовой электродинамики инвариантны относительно каждого из преобразований  $R$ ,  $C$ ,  $P$  и  $T$ . Эта инвариантность является, как уже отмечалось, математическим выражением симметрии электромагнитного взаимодействия электронов и фотонов относительно отражений пространства и времени и замены электрона позитроном.

Другие взаимодействия, в принципе, могут не обладать всеми свойствами симметрии, характерными для электромагнитного взаимодействия электрона и фотонов. Поэтому от уравнений, описывающих эти взаимодействия, нельзя, вообще говоря, требовать, чтобы они были инвариантными относительно тех же преобразований, которые оставляют инвариантными уравнения квантовой электродинамики. Исключением являются непрерывные преобразования Лоренца — Пуанкаре, по отношению к которым должны быть инвариантны уравнения любой физической теории.

Как пример отметим слабое взаимодействие, в котором порознь нарушается  $C$ -,  $P$ - и  $T$ -инвариантность (см. далее).

Несмотря, однако, на возможные нарушения инвариантности уравнений, описывающих те или иные волновые поля, относительно одного из преобразований  $C$ ,  $P$  или  $T$  любая релятивистски-инвариантная теория с локальным взаимодействием должна быть инвариантной относительно  $R$ -преобразования, представляющего собой произведение  $C$ -,  $P$ - и  $T$ -преобразований [11].

Вернемся к  $P$ -преобразованию. Ясно, что двойное его применение эквивалентно тождественному преобразованию, т. е.  $U_P^2 = 1$ . Поэтому оператор  $U_P$  является эрмитовым с собственными значениями  $\pm 1$ . Состояния, относящиеся к собственному значению  $+1$ , называются  $P$ -четными, а состояния, относящиеся к собственному значению  $-1$ ,  $P$ -нечетными.

Найдем закон преобразования операторов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , относящихся к электрону, позитрону и фотону, при  $P$ -преобразовании. Для этого отметим, что согласно определению (1.5.47) биспиноров  $u^{\sigma\mu}(\mathbf{p})$  справедливы уравнения

$$(q\hat{p} + m)\gamma^0 u^{\sigma\mu}(-\mathbf{p}) = 0, \quad (\Sigma\mathbf{n})\gamma^0 u^{\sigma\mu}(-\mathbf{p}) = -\mu\gamma^0 u^{\sigma\mu}(-\mathbf{p})$$

(где  $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ ). Отсюда следует, что

$$\gamma^0 u^{\sigma\mu}(\mathbf{p}) = u^{\sigma-\mu}(-\mathbf{p}). \quad (3.3.27)$$

Учитывая далее, что  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)} = e_{\mathbf{k}\mu}^{(-\lambda)}$  для  $\lambda = +1, -1$  и подставляя в (3.3.24) разложения (2.4.25), (2.5.27) операторов  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $A_\mu$  на плоские волны, получаем

$$U_P a_{\mathbf{r}\mu}^+ U_P^\dagger = a_{-\mathbf{r}-\mu}^+, \quad U_P b_{\mathbf{r}\mu}^+ U_P^\dagger = -b_{-\mathbf{r}-\mu}^+,$$

$$U_P c_{\mathbf{k}\lambda} U_P^\dagger = c_{-\mathbf{k}-\lambda}. \quad (3.3.28)$$

Из этих формул следует, что при пространственном отражении изменится направление импульса, направление же спина не изменится. Действительно, так как  $\mu$  представляет собой проекцию спина на направление  $\mathbf{p}$ , то  $-\mu$  будет проекцией этого вектора на направление  $-\mathbf{p}$ . Из этих же формул следует, что внутренние четности электрона и позитрона противоположны по знаку [13]. Действительно, считая, что  $P$ -четность вакуума равна  $+1$  для покоящихся электрона и позитрона, находим

$$U_P a_{\mathbf{r}\mu}^+ |0\rangle = a_{-\mathbf{r}-\mu}^+ |0\rangle, \quad U_P b_{\mathbf{r}\mu}^+ |0\rangle = -b_{-\mathbf{r}-\mu}^+ |0\rangle, \quad (3.3.29)$$

где  $\mathbf{p} \rightarrow 0$ . Отсюда вытекает справедливость сделанного утверждения.

Инвариантность  $S$ -матрицы по отношению к калибровочным преобразованиям рассматривалась в п. 3.1.5 (она выражается формулой (3.1.59),  $[S, c_{\mathbf{k}3} - c_{\mathbf{k}0}] = 0$ ).

## § 3.4. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

### 3.4.1. Графическое представление нормальных произведений.

В п. 3.2.2 показано, что матрицу рассеяния можно представить в виде суммы нормальных произведений операторов полей, соответствующих

различным процессам рассеяния частиц. Каждое такое нормальное произведение, а следовательно, и любой процесс рассеяния можно изобразить графически [14], если условиться сопоставлять 4-векторам  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , по которым производится интегрирование в матрице  $S_n$ , точки диаграммы (они называются вершинами диаграммы), а операторам полей, входящим под знак нормального произведения, — линии, проходящие через эти вершины. Оператор  $\underline{A}_\mu(x)$  будем изображать штриховой линией (без определенного направления) с началом в вершине  $x$ ; оператор  $\underline{\psi}(x)$  — направленным сплошным лучом, идущим к вершине  $x$ ; оператор  $\overline{\psi}(x)$  — направленным сплошным лучом, идущим из вершины  $x$ . Все эти линии, которые называются внешними, предполагаются уходящими за пределы диаграммы.

Так как  $\underline{A}_\mu(x)$  представляет собой сумму операторов уничтожения и рождения фотонов, то волнистой внешней линией обозначается фотон, испущенный или поглощенный в результате процесса рассеяния.

Аналогично, поскольку  $\underline{\psi}(x)$  представляет собой сумму операторов уничтожения электронов и рождения позитронов, сплошной внешней линией, направленной к вершине, соответствует электрон, существовавший до процесса рассеяния, или позитрон, образовавшийся в результате процесса рассеяния. Наконец, так как  $\overline{\psi}(x)$  представляет собой сумму операторов рождения электронов и уничтожения позитронов, то сплошной внешней линией, направленной от вершины, соответствует позитрон, существовавший до процесса рассеяния, или электрон, образовавшийся в результате процесса рассеяния.

Кроме операторов полей мы должны графически изображать также связи между операторами. Условимся связям между операторами сопоставлять внутренние линии диаграммы, соединяющие ее вершины, а именно связь между фотонными операторами  $\underline{A}_\mu(x_i)$  и  $\underline{A}_\nu(x_j)$  будем обозначать штриховой линией (не имеющей определенного направления), соединяющей вершины  $x_i$  и  $x_j$ , а связь между электронными операторами  $\underline{\psi}(x_i)$  и  $\underline{\psi}(x_j)$  — сплошной линией, соединяющей вершины  $x_j$  и  $x_i$  и имеющей направление от вершины  $x_j$  к вершине  $x_i$ .

В выражении для  $S_n$  каждая точка  $x$  является либо аргументом трех операторов (одного фотонного  $\underline{A}_\mu(x)$  и двух электронных  $\underline{\psi}(x)$ ,  $\overline{\psi}(x)$ ) (слагаемое :  $\overline{\psi}\hat{A}\underline{\psi}$  :), либо аргументов двух операторов  $\underline{\psi}(x)$ ,  $\overline{\psi}(x)$  (слагаемое  $\delta m$  :  $\overline{\psi}\underline{\psi}$  :). Оператору :  $\overline{\psi}\hat{A}\underline{\psi}$  : соответствует трехлучевая вершина, через которую проходит одна фотонная и две электронные линии, причем одна электронная линия входит в вершину, а другая выходит из нее. Оператору  $\delta m$  :  $\overline{\psi}\underline{\psi}$  : соответствует двухлучевая вершина, с которой связаны одна входящая и одна выходящая электронные линии.

Двухлучевые вершины приводят к простому переопределению электронных связей (замене массы реального электрона  $m$  массой «го-

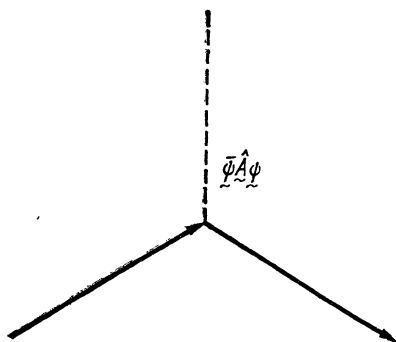


Рис. 4

лого» электрона  $m$ ); учет этих вершин необходим для того, чтобы полюсы «свободного» и «точного» пропэгаторов совпадали с учетом взаимодействия (см. § 3.6), и поэтому учет их является тривиальным. В связи с этим мы не будем далее детально останавливаться на двухлучевых вершинах.

Диаграммы, изображающие отдельные нормальные произведения, входящие в матрицу  $S_n$  и содержащие  $n$  трехлучевых вершин, будем называть диаграммами  $n$ -го порядка. Они могут использоваться для изображения эффектов  $n$ -го приближения теории возмущений.

Эффектам 1-го порядка соответствует диаграмма на рис. 4. Она характеризует излучение или поглощение фотона электроном (позитроном), а также образование или поглощение электронно-позитронной пары. (Справа от диаграммы символически показано подынтегральное выражение матричного элемента  $S_1$  без знака нормального произведения.)

Эффектам 2-го порядка соответствуют шесть топологически различных диаграмм, показанных на рис. 5. Рядом с диаграммами символически показано подынтегральное выражение элемента матрицы  $S_2$ .

Рассмотрим подробнее диаграммы 2 и 3 на рис. 5. Первой из этих диаграмм соответствует одно нормальное произведение:  $(\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi)$  ;,

а второй — два нормальных произведения:  $(\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi)$  ;, :  $(\bar{\psi} \hat{A} \psi) (\bar{\psi} \hat{A} \psi)$  ;.

Как легко убедиться, последних два  $N$ -произведения, отличающиеся местом наложения одной связи между электронными операторами, после интегрирования по  $d^4 x_1$  и  $d^4 x_2$  вносят одинаковый вклад в элемент матрицы  $S_2$ , соответствующий диаграмме 3. Поэтому достаточно рассмотреть только одно из этих нормальных произведений и вносимый им вклад в элемент матрицы  $S_2$  умножить на 2.

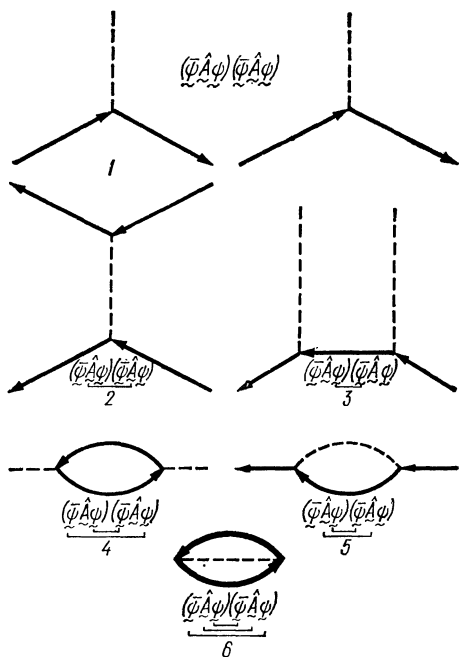


Рис. 5

Аналогичная ситуация наблюдается для других диаграмм. Каждой из них может соответствовать несколько нормальных произведений, отличающихся только местом наложения связей между операторами полей и вносящих одинаковый вклад в элемент матрицы рассеяния. Они называются эквивалентными нормальными произведениями.

Приведенные на рис. 5 диаграммы изображают нормальные произведения операторов полей и описывают одновременно ряд процессов.

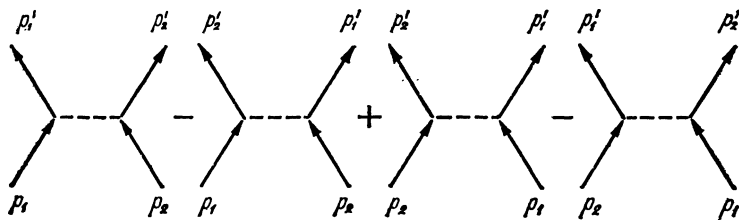


Рис. 6

Эти операторы представляют собой суммы операторов испускания и поглощения частиц в различных состояниях, поэтому нормальное произведение, соответствующее какому-либо конкретному физическому процессу, можно представить в виде суммы нескольких слагаемых, которые содержат произведения операторов испускания и поглощения частиц, участвующих в рассматриваемом процессе, и отличаются друг от друга только порядком расположения операторов. Эти слагаемые можно изображать диаграммами, которые топологически эквивалентны и отличаются друг от друга только порядком расположения электронных и фотонных линий.

Если в процессе участвуют  $n$  фотонов, то после разбиения нормального произведения на слагаемые, содержащие операторы поглощения и испускания отдельных фотонов, мы получим  $n!$  членов, которым соответствуют диаграммы, отличающиеся друг от друга только порядком расположения фотонных линий.

Аналогично, если в процессе участвуют несколько электронов и позитронов, то нормальное произведение можно представить в виде суммы членов, которые содержат одни и те же операторы испускания и поглощения электронов и позитронов и отличаются только порядком расположения этих операторов, а соответствующие этим членам диаграммы отличаются друг от друга только порядком расположения электронных линий.

Например, процессу рассеяния электрона электроном соответствуют четыре диаграммы (рис. 6); на этих диаграммах  $p_1, p_2$  и  $p_1', p_2'$  — 4-импульсы электронов до и после рассеяния.

В отличие от процессов с участием нескольких фотонов, для которых отдельным диаграммам соответствуют матричные элементы, имеющие один и тот же знак, для процессов с участием нескольких электронов отдельным диаграммам могут соответствовать матричные элементы с разными знаками. Это связано с тем, что операторы испускания и поглощения электронов и позитронов, находящихся в различных состояниях, в отличие от коммутирующих операторов рождения и поглоще-

ния фотонов антикоммутируют между собой. Диаграммы на рис. 6 иллюстрируют это правило, которое находится в соответствии с принципом Паули.

Полученный результат можно обобщить следующим образом. Пусть в процессе участвуют  $z$  электронов, импульсы которых до и после рассеяния равны соответственно  $p_1, p_2, \dots, p_z$  и  $p'_1, p'_2, \dots, p'_z$ . Тогда процессу будут соответствовать  $(z!)^2$  диаграмм, которые отличаются обозначениями электронных линий до и после рассеяния. Если на двух диаграммах электронные линии после рассеяния (являющиеся продолжением электронных линий до рассеяния) обозначены соответственно  $p'_1, p'_2, \dots, p'_z$  и  $p'_{i_1}, p'_{i_2}, \dots, p'_{i_z}$ , то относительный знак матричных элементов, соответствующих обеим диаграммам, будет определяться четностью перестановки

$$P = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, z \\ j_1, j_2, \dots, j_z \end{pmatrix},$$

Таким образом, матричный элемент, соответствующий какому-либо физическому процессу, после разбиения нормального произведения всегда можно представить в виде

$$\langle f | S_n | i \rangle \equiv (S_n)_{i \rightarrow f} = \Sigma \mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}, \quad (3.4.1)$$

где отдельные слагаемые  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$  соответствуют конкретным диаграммам  $n$ -го порядка для рассматриваемого процесса и конкретному расположению внешних линий (суммирование распространяется по всем диаграммам  $n$ -го порядка для изучаемого процесса и по всем перестановкам внешних линий).

**3.4.2. Импульсное представление.** Чтобы найти величины  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$ , удобно перейти к импульсному пространству. Для этого связи между операторами полей  $i\mathcal{D}_{\mu\nu}^{\epsilon}(x; \xi)$ ,  $-iS_{\alpha\beta}^{\epsilon}(x)$  представим в виде интегралов Фурье (см. 2.4.55), (2.5.42) и подставим эти интегралы вместе с выражениями для матричных элементов операторов полей

$$\begin{aligned} \langle 0 | \underline{A}_{\mu}(x) | 1_{\kappa\lambda} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} e_{\kappa\mu}^{(\lambda)} e^{-ikx}, & \langle 1_{\kappa\lambda} | \underline{A}_{\mu}(x) | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} e_{\kappa\mu}^{(\lambda)*} e^{ikx}, \\ \langle 0 | \underline{\psi}(x) | 1_{\mathbf{p}\mu}^+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} u^{\mu}(\mathbf{p}) e^{-ipx}, & \langle 1_{\mathbf{p}\mu}^+ | \underline{\psi}(x) | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} u^{\mu c}(\mathbf{p}) e^{ipx}, \\ \langle 1_{\mathbf{p}\mu}^- | \underline{\bar{\psi}}(x) | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} \bar{u}^{\mu}(\mathbf{p}) e^{ipx}, & \langle 0 | \underline{\bar{\psi}}(x) | 1_{\mathbf{p}\mu}^+ \rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} \bar{u}^{\mu c}(\mathbf{p}) e^{-ipx} \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

в то из нормальных произведений под знаком интеграла для  $S_n$ , которое соответствует  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$  (здесь  $u^{\mu}(\mathbf{p}) \equiv u^{1\mu}(\mathbf{p})$ ,  $u^{\mu c}(\mathbf{p}) = \bar{C}u^{\mu}(\mathbf{p})$ ). Собирая множители  $\exp ipx_j$ ,  $\exp ikx_j$  с определенным  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) и выполняя интегрирование по  $d^4x_1 \dots d^4x_n$ , получим произведение  $n$  четырехмерных  $\delta$ -функций  $\delta(\Sigma p)$ , умноженное на  $(2\pi)^{4n}$ , где  $p$



используется для обозначения 4-векторов  $p, k$  (число слагаемых под знаком  $\delta$ -функции равно, очевидно, трем — по числу линий, проходящих через каждую вершину диаграммы).

Очевидно, в импульсном представлении каждой линии диаграммы будет соответствовать некоторый 4-вектор  $p$ . Но функции  $i\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x_j - x_i)$ , —  $iS_{\alpha\beta}^c(x_j - x_i)$ , связанные с внутренними линиями диаграммы, зависят от разности координат  $x_j, x_i$  концов линии; поэтому в двух  $\delta$ -функциях, возникающих при интегрировании по  $d^4x_j$  и  $d^4x_i$ , 4-вектор  $p$ , связанный с линией  $x_j x_i$ , будет входить с разными знаками. Это дает возможность интерпретировать векторы  $p$ , соответствующие внутренним линиям диаграммы, как 4-импульсы виртуальных «частиц», «испускаемых» в одном конце и «поглощаемых» в другом конце внутренних линий. При этом, очевидно, между временной и пространственной составляющими 4-импульса виртуальной частицы не существует никакой связи,  $p^2 - \overline{m}^2 \neq 0, k^2 \neq 0$ . Закон сохранения 4-импульса во внутренних вершинах должен иметь вид  $\delta(p_1 - p_2 \pm k)$ , где  $p_1$  — 4-импульс входящей в вершину электронной линии,  $p_2$  — 4-импульс выходящей электронной линии и  $k$  — 4-импульс фотонной линии; при этом  $k$  выбирается со знаком «плюс», если мы условились, что фотон в данной вершине поглощается, и со знаком «минус», если в данной вершине фотон испускается.

Внешним линиям диаграммы соответствуют, очевидно, 4-импульсы реальных частиц, участвующих в процессе. Закон сохранения 4-импульса во внешней вершине записывается таким образом, чтобы 4-импульс начальных (виртуальных и реальных) частиц был равен 4-импульсу конечных частиц. При этом внутренняя электронная линия, входящая в данную вершину, всегда считается соответствующей начальному электрону, а внутренняя электронная линия, выходящая из данной вершины, — соответствующей конечному электрону.

Чтобы получить окончательное выражение для  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow j}^{(n)}$ , необходимо расположить матрицы, действующие на спинорные индексы, в определенном порядке, произвести интегрирование по импульсам виртуальных частиц и просуммировать полученное выражение по поляризациям виртуальных фотонов.

Выясним прежде всего, в каком порядке должны быть расположены спинорные матрицы. Ясно, что начиная с электронной линии, выходящей из точки  $x_k$ , которой соответствует биспинор  $\bar{\psi}(x_k)$ , мы должны записать затем матрицу  $\gamma^\mu$ , относящуюся к этой вершине, которая действует на биспинор  $\bar{\psi}(x_k)$  слева; далее на полученный биспинор  $\bar{\psi}(x_k) \gamma^\mu$  слева действует матрица электронной связи, соединяющая точку  $x_k$  с некоторой точкой диаграммы  $x_i$ , и т. д. Таким образом, матрицы, действующие на спинорные индексы, т. е. матрицы  $\gamma^\mu$  и  $S^c$ , должны быть расположены в такой последовательности, считая слева направо, в которой они встречаются, если двигаться против направления электронной линии.

Выяснив, как должны быть расположены спинорные матрицы, мы можем написать следующее общее выражение для  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow j}^{(n)}$  в виде ин-

теграла в импульсном пространстве:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{i \rightarrow j}^{(n)} = & \delta_P (-1)^i (ie)^n \xi (2\pi)^{4(n-F)} \int d^4 p_1 \dots d^4 p_{F_l} \int d^4 k_1 \dots d^4 k_{F_\gamma} \times \\ & \times \prod_1^n \delta(\Sigma p) O \left( \prod_i \left( \frac{u^\mu(p)}{\sqrt{2p_0 V}} \frac{\bar{u}^{\mu c}(\bar{p})}{\sqrt{2p_0 V}} \frac{\hat{e}_k^{(\lambda)}}{\sqrt{2\omega V}} \right) \prod_f \left( \frac{\bar{u}^\mu(p)}{\sqrt{2p_0 V}} \frac{u^{\mu c}(p)}{\sqrt{2p_0 V}} \frac{\hat{e}_k^{(\lambda)*}}{\sqrt{2\omega V}} \right) \right) \times \\ & \times \prod_1^{F_l} (-iS^c(p)) \prod_1^{F_\gamma} (\gamma^\nu i \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) \gamma^\mu). \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Здесь интегрирование производится по 4-импульсам виртуальных частиц, т. е. по  $4F_l$  переменным  $p_1, p_2, \dots, p_{F_l}$ , происходящим от множителей типа  $-iS^c(p)$ , и по  $4F_\gamma$  переменным  $k_1, \dots, k_{F_\gamma}$ , происходящим от множителей типа  $i\mathcal{D}^c(k; \xi)$  ( $F_l$  и  $F_\gamma$  — числа внутренних электронных и фотонных линий, т. е. числа виртуальных электронов и фотонов  $F = F_l + F_\gamma$ ,  $l$  — число замкнутых электронных петель с четным числом электронных линий,  $\delta_P$  — четность перестановки электронных операторов (см. выше),  $\xi = r/n!$ ,  $r$  — число эквивалентных диаграмм).

Кроме интегрирования в этой формуле производится суммирование по четырем значениям индексов  $\nu, \mu$ , обозначающим различные поляризации виртуальных фотонов, причем каждому виртуальному фотону соответствует свой индекс  $\nu$ , принимающий значения  $\nu = 1, 2, 3, 0$ .

Множители в формуле имеют следующее значение: произведение

$\prod \frac{u^\mu(p)}{\sqrt{2p_0 V}} \frac{\bar{u}^{\mu c}(\bar{p})}{\sqrt{2p_0 V}} \frac{\hat{e}_k^{(\lambda)}}{\sqrt{2\omega V}}$  представляет собой произведение биспиноров

$u^\mu(p)/\sqrt{2p_0 V}$ ,  $\bar{u}^{\mu c}(\bar{p})/\sqrt{2p_0 V}$  и величин  $\hat{e}_k^{(\lambda)}/\sqrt{2\omega V}$ , описывающих электроны, позитроны и фотоны в начальном состоянии  $i$ ; произведе-

нием  $\prod \frac{\bar{u}^\mu(p)}{\sqrt{2p_0 V}} \frac{u^{\mu c}(p)}{\sqrt{2p_0 V}} \frac{\hat{e}_k^{(\lambda)*}}{\sqrt{2\omega V}}$  обозначено аналогичное произведение

для конечного состояния  $f$ . Множители  $-iS^c(p)$  и  $+i\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k, \xi)$  порождены связями электронных и фотонных операторов, причем число первых равно  $F_l$ , а вторых —  $F_\gamma$ . Наконец, буква  $O$  служит для обозначения определенного порядка в расположении спинорных матриц, а именно матрицы  $\gamma^\mu$  и  $S^c$ , действующие на спинорные индексы, должны быть расположены, считая справа налево, в такой последовательности, в какой они встречаются, если двигаться по направлению электронной линии диаграммы.

Специфическая особенность возникает в том случае, если диаграмма содержит замкнутые электронные петли с четным числом электронных линий (при нечетном числе электронных линий матричный элемент, как показано далее, равен нулю). При этом каждой электронной петле в выражении  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow j}^{(n)}$  соответствует взятый со знаком «минус» шпур произведения матриц  $\gamma^\mu$  и  $-iS^c$ , относящихся к петле. Наличие знака «минус» связано с тем, что при расстановке связей, соответствующих

петле, возникает последняя связь типа  $\overline{\psi}\psi = -\psi\overline{\psi}$ , которой не было в диаграммах без петель.

Если диаграмма содержит  $l$  замкнутых электронных петель с четным числом линий, то  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow j}^{(n)}$  приобретает множитель  $(-1)^l$ , который входит в (3.4.3) вместе с множителем  $\delta_P$ , где  $\delta_P$  определяет относительный знак  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow j}^{(n)}$  в том случае, если в процессе участвует несколько электронов. Как описано выше,  $\delta_P$  представляет собой четность пере-

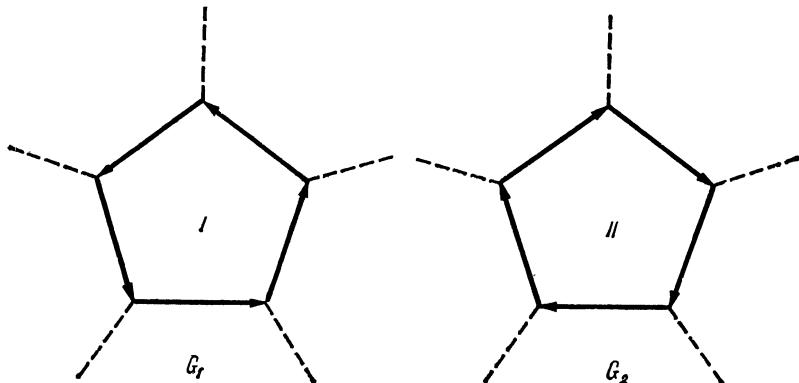


Рис. 7

становки индексов начальных и конечных электронов (или позитронов) по отношению к некоторому фиксированному расположению индексов начальных и конечных электронов (позитронов).

Покажем, что диаграммам, содержащим замкнутые внутренние электронные петли, состоящие из нечетного числа электронных линий, соответствует суммарный матричный элемент, равный нулю (теорема Фарри).

Если некоторая диаграмма  $G_1$  содержит внутреннюю замкнутую электронную петлю I (рис. 7), то кроме этой диаграммы следует, очевидно, рассматривать диаграмму  $G_2$ , отличающуюся от первой только направлением обхода замкнутой электронной петли (петля II). Сумма матричных элементов, соответствующих этим диаграммам  $\mathfrak{M}_{G_1}$  и  $\mathfrak{M}_{G_2}$ , определяет суммарный матричный элемент процесса:  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{G_1} + \mathfrak{M}_{G_2}$ . Согласно (3.4.3) петлям I и II соответствуют следующие части в матричных элементах  $\mathfrak{M}_{G_1}$  и  $\mathfrak{M}_{G_2}$ :

$$B_I = \int d^4p \operatorname{Sp} \gamma^{\mu_1} S^c(p + k_1) \gamma^{\mu_2} S^c(p + k_1 + k_2) \dots S^c(p - k_N) \gamma^{\mu_N} S^c(p),$$

$$B_{II} = \int d^4p' \operatorname{Sp} S^c(p') \gamma^{\mu_N} S^c(p' + k_N) \dots S^c(p' - k_2 - k_1) \times$$

$$\times \gamma^{\mu_2} S^c(p' - k_1) \gamma^{\mu_1},$$

входящие в  $\mathfrak{M}_{G_1}$  и  $\mathfrak{M}_{G_2}$  в виде сомножителей ( $N$  — число вершин в петле). Учитывая, что

$$\operatorname{Sp} Y = \operatorname{Sp} C^{-1} Y C,$$

и выбирая в качестве  $C$  матрицу зарядового сопряжения (см. п. 1.5.5), получаем

$$B_{II} = (-1)^N \int d^4 p' \operatorname{Sp} \tilde{S}^c(-p') \tilde{\gamma}^{\mu_n} \tilde{S}^c(-p' - k_N) \dots \\ \dots \tilde{S}^c(-p' + k_1) \tilde{\gamma}^{\mu_1}.$$

При этом мы учли, что

$$C^{-1} \gamma^\mu C = -\tilde{\gamma}^\mu, \quad C^{-1} S^c(p) C = \tilde{S}^c(-p).$$

Сделав далее замену переменной  $p' = -p$  и отмечая, что  $\operatorname{Sp} Y = \operatorname{Sp} \tilde{Y}$ , найдем окончательно

$$B_{II} = (-1)^N \int d^4 p \operatorname{Sp} \gamma^{\mu_1} S^c(p + k_1) \gamma^{\mu_2} S^c(p + k_1 + k_2) \dots \\ \dots S^c(p - k_N) \gamma^{\mu_N} S^c(p) = (-1)^N B_I.$$

Так как суммарный матричный элемент  $\mathfrak{M}$  содержит в виде сомножителя сумму выражений  $B_I$  и  $B_{II}$ , то из последней формулы следует, что при нечетном  $N$  матричный элемент  $\mathfrak{M}$  обращается в нуль. Таким образом, диаграммы, содержащие замкнутые петли, которые состоят из нечетного числа электронных линий, можно не рассматривать.

Отметим, что теорема Фарри является следствием закона сохранения зарядовой четности (см. § 3.3). Действительно, замкнутой электронной петле с  $N$  вершинами, т. е. с  $N$  подходящими к ней фотонными линиями, соответствует нейтральная система из реальных и виртуальных фотонов, общее число которых равно  $N$ . Так как четность фотона равна  $-1$ , то нечетное  $N$  означает разную зарядовую четность начального и конечного состояний системы, что невозможно.

Формула (3.4.3), определяющая величину  $\mathfrak{M}$ , выражает правила Фейнмана написания матричных элементов  $S$ -матрицы. Диаграммы, соответствующие величинам  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$ , называются фейнмановскими.

**3.4.3. Вероятность и эффективное сечение процессов.** При отсутствии взаимодействия, когда состояния частиц не изменяются, матрица рассеяния  $S$  совпадает, очевидно, с единичной матрицей  $I$ . Поэтому удобно полагать

$$S = I + iT$$

и связывать вероятности различных процессов  $P_{i \rightarrow f}$  с элементами матрицы  $T$ :

$$P_{i \rightarrow f} = |\langle f | T | i \rangle|^2, \quad (3.4.4)$$

где  $i$  и  $f$  — обозначения начального и конечного состояний системы взаимодействующих полей (предполагается, что  $|i\rangle \neq |f\rangle$ ).

Из матричного элемента  $\langle f | T | i \rangle$  можно выделить  $\delta$ -функцию, содержащую разности 4-импульсов частиц в начальном ( $p_i$ ) и конечном ( $p_f$ ) состояниях:

$$\langle f | T | i \rangle = (2\pi)^4 M_{i \rightarrow f} \delta(\Sigma p_i - \Sigma p_f) \quad (3.4.5)$$

(величину  $M_{i \rightarrow f}$  называют амплитудой рассеяния для соответствующего процесса). Поэтому вероятность процесса  $P_{i \rightarrow f}$  будет propor-

циональна квадрату  $\delta(\Sigma p_i - \Sigma p_f)$ . Заменяв одну из этих  $\delta$ -функций интегралом

$$\delta(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 x e^{i q x}, \quad q = \Sigma p_i - \Sigma p_f,$$

будем считать область интегрирования в нем ограниченной, т. е. заменим  $\delta$ -функцию на  $V \Delta t / (2\pi)^4$ , где  $\Delta t$  — интервал интегрирования по времени и  $V$  — пространственный объем интегрирования.

Таким образом, вероятность процесса  $i \rightarrow f$  пропорциональна времени  $\Delta t$  и мы можем поэтому ввести вероятность, отнесенную к единице времени:

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{P_{i \rightarrow f}}{\Delta t} = (2\pi)^4 |M_{i \rightarrow f}|^2 V \delta(\Sigma p_i - \Sigma p_f).$$

Так как в рассматриваемом процессе начальное и конечное состояния частиц относятся к непрерывному спектру, то практический интерес представляет знание вероятности того, что трехмерные импульсы частиц  $p_f$  в конечном состоянии находятся в заданных интервалах  $d^3 p_f$ . Чтобы найти эту вероятность, которую мы обозначим  $d w_{i \rightarrow f}$ , нужно умножить  $W_{i \rightarrow f}$  на  $\prod_f V d^3 p_f / (2\pi)^3$ , где  $V d^3 p_f / (2\pi)^3$  — число состояний частицы с определенной поляризацией, для которой импульс  $p_f$  лежит в интервале  $d^3 p_f$ :

$$d w_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 |M_{i \rightarrow f}|^2 \delta(\Sigma p_i - \Sigma p_f) V \prod_f \frac{V d^3 p_f}{(2\pi)^3}. \quad (3.4.6)$$

Установим зависимость величины  $d w_{i \rightarrow f}$  от нормировочного объема  $V$ . Обозначим через  $N_i$  и  $N_f$  числа частиц (электронов, позитронов и фотонов) в начальном и конечном состояниях. Так как согласно (3.4.3) каждая частица начального или конечного состояния вносит множитель  $V^{-1/2}$  в величину  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$ , то  $M_{i \rightarrow f} \sim V^{-\frac{1}{2}(N_i + N_f)}$ . Поэтому  $d w_{i \rightarrow f} \sim V^{1-N_i}$ . Если  $N_i = 1$  (процесс распада; в квантовой электродинамике такого процесса нет, так как в последней все частицы стабильны), то вероятность процесса не зависит от объема.

Если  $N_i = 2$  (столкновения двух частиц), то вероятность процесса будет обратно пропорциональна объему. Поэтому процесс в этом случае удобнее характеризовать не вероятностью  $d w_{i \rightarrow f}$ , а сечением  $d \sigma_{i \rightarrow f}$ :

$$d \sigma_{i \rightarrow f} = \frac{d w_{i \rightarrow f}}{j}, \quad (3.4.7)$$

где  $j$  — плотность потока «налетающих» частиц, которая обратно пропорциональна объему (так как плотность «налетающих» частиц равна  $1/V$ ). По этой причине дифференциальное сечение рассеяния  $d \sigma_{i \rightarrow f}$  не зависит от объема  $V$ .

Определим точное значение плотности потока сталкивающихся частиц. Если до столкновения одна из частиц (рассеиватель) покоилась, то

$$j^{(0)} = n_1^{(0)} v_1^{(0)}, \quad v_2^{(0)} = 0,$$

где  $n_1^{(0)}$  и  $v_1^{(0)}$  — соответственно плотность и скорость движущихся частиц в системе покоя рассеивателя (индекс 0 служит для обозначения этой системы, а 2 — для обозначения величин, относящихся к рассеивателю). Поэтому в системе покоя рассеивателя дифференциальное эффективное сечение рассеяния определяется так:

$$d\sigma_{i \rightarrow f}^{(0)} = \frac{dw_{i \rightarrow f}^{(0)}}{n_1^{(0)} v_1^{(0)}}.$$

В системе отсчета, в которой рассеиватель движется со скоростью  $v_2$ , отличной от нуля, определение плотности потока  $j$ , вообще говоря, неоднозначно. Мы можем лишь написать  $j = n_1 v^1$ , где  $v^1$  — произвольная величина, переходящая при  $v_2 = 0$  в  $v_1^{(0)}$ . Определим  $v^1$  так, чтобы эффективное сечение рассеяния было релятивистским инвариантом. Отметим, что общее число процессов рассеяния в объеме  $V$  за время  $\Delta t$  должно быть, очевидно, инвариантом, т. е. должно выполняться условие

$$dw_{i \rightarrow f}^{(0)} n_2^{(0)} \Delta t^{(0)} V^{(0)} = dw_{i \rightarrow f} n_2 \Delta t V,$$

где  $n_2$  — плотность движущихся рассеивателей. Так как  $\Delta t^{(0)} V^{(0)} = \Delta t V$ , то

$$d\sigma_{i \rightarrow f}^{(0)} n_1^{(0)} n_2^{(0)} v_1^{(0)} = d\sigma_{i \rightarrow f} n_2 j.$$

Учтем, что величины  $(n_1, n_1 \mathbf{v}_1)$  и  $(n_2, n_2 \mathbf{v}_2)$  образуют 4-векторы. Поэтому  $n_1 n_2 (1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) = n_1^{(0)} n_2^{(0)}$ . Учитывая далее требование инвариантности сечения, получаем

$$j = n_1 v_1^{(0)} (1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2).$$

Величина  $v_1^{(0)}$ , будучи скоростью частицы 1 в системе покоя частицы 2, является релятивистским инвариантом (относительная скорость). Вместе с тем величина  $(p_1 p_2)^{-1} \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$  ( $p_1, p_2$  — 4-векторы импульсов сталкивающихся частиц,  $m_1, m_2$  — их массы) представляет собой релятивистский инвариант, переходящий в  $v_1^{(0)}$  в системе покоя частицы 2. Поэтому

$$v_1^{(0)} = \frac{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{(p_1 p_2)}$$

и, следовательно:

$$j = \frac{n_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}, \quad n_1 = \frac{1}{V}, \quad (3.4.8)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — энергии сталкивающихся частиц (мы учли, что  $1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 = p_1 p_2 / \varepsilon_1 \varepsilon_2$ ).

Используя эту формулу и определения (3.4.7) и (3.4.6), получаем следующее общее выражение для дифференциального эффективного сечения процесса рассеяния  $i \rightarrow f$  [5]:

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 |M_{i \rightarrow f}|^2 \delta(p_1 + p_2 - \Sigma p_f) \frac{V \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \prod \frac{V d^3 p_f}{(2\pi)^3}, \quad (3.4.9)$$

где индексы 1, 2 относятся к частицам в начальном состоянии (как мы уже отмечали,  $d\sigma_{i \rightarrow f}$  не зависит от  $V$ ).

Выражение для  $d\sigma_{i \rightarrow f}$  можно переписать так, чтобы оно содержало только инвариантные величины. Для этого из  $M_{i \rightarrow f}$  выделим множители, которые не инвариантны. Эти множители происходят от матричных элементов операторов полей и согласно (3.4.2), (3.4.3) имеют вид  $\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon V}}$ , где  $\varepsilon$  — энергия фотона или электрона (позитрона). Поэтому если  $M_{i \rightarrow f}$  записать в виде

$$M_{i \rightarrow f} = A_{i \rightarrow f} \prod \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon V}}, \quad (3.4.10)$$

где произведение распространяется на все частицы как в начальном, так и в конечном состоянии, то величина  $A_{i \rightarrow f}$  будет релятивистским инвариантом. Она называется инвариантной амплитудой процесса рассеяния.

Подставляя это выражение в (3.4.9) и используя соотношение

$$\int \frac{d^3 p_f}{\varepsilon_f} \dots = 2 \int d^4 p_f \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(\varepsilon_f) \dots, \quad (3.4.11)$$

получаем

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 |A_{i \rightarrow f}|^2 \frac{\delta(p_1 + p_2 - \Sigma p_f)}{4 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \prod_f \frac{d^4 p_f \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(\varepsilon_f)}{(2\pi)^3}. \quad (3.4.12)$$

Это и есть релятивистски-инвариантная форма эффективного сечения рассеяния (в этой формуле независимыми переменными являются  $\mathbf{p}_f$ ,  $\varepsilon_f$ ; интегрирование по  $\varepsilon_f$  с помощью  $\delta(p_f^2 - m_f^2)$  приводит к формуле (3.4.9)).

Аналогичная формула для вероятности распада в терминах инвариантной амплитуды распада  $A_{i \rightarrow f}$  (в состоянии  $i$  находится одна частица) имеет вид

$$d\omega_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 |A_{i \rightarrow f}|^2 \frac{1}{2\varepsilon_i} \prod_f \frac{d^4 p_f \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(\varepsilon_f)}{(2\pi)^3} \quad (3.4.13)$$

(величина  $\varepsilon_i d\omega_{i \rightarrow f}$ , как и должно быть, представляет собой релятивистский инвариант).

Отметим, что инвариантную амплитуду  $A_{i \rightarrow f}$  процесса, в котором участвуют электроны и позитроны, можно представить в виде

$$A_{i \rightarrow f} = \bar{u}^{q\mu}(\mathbf{p}) Q, \quad (3.4.14)$$

где  $Q$  — некоторый биспинор (включающий биспиноры других частиц). Замечая, что

$$A_{i \rightarrow f}^* = \bar{Q} u^{q\mu}(\mathbf{p})$$

и используя формулу (см. (1.5.55))

$$u_{\alpha}^{q\mu}(\mathbf{p}) \bar{u}_{\beta}^{q\mu}(\mathbf{p}) = 2mq \Lambda_{\alpha\beta}^{q\mu}(\mathbf{p}),$$

получаем

$$|A_{i \rightarrow f}|^2 = 2mq\bar{Q}\Lambda^{q\mu}(\mathbf{p})Q, \quad (3.4.15)$$

где (см. (1.5.54))

$$\Lambda^{q\mu}(\mathbf{p}) = \frac{(q\hat{p} + m)(\Sigma\mathbf{n} + \mu)}{4m\mu}$$

является оператором проектирования, введенным ранее. Если  $Q = Au^{q'\mu'}(\mathbf{p}')$ , где  $A$  — некоторая матрица (возможно, зависящая от биспиноров других частиц), то, используя (1.5.15), можно вычисление  $|A_{i \rightarrow f}|^2$  свести к вычислению шпуров от произведений матриц  $\gamma^\mu$  (см. п. 1.5.4). С помощью (3.4.15) легко производить суммирование по поляризациям конечных состояний и усреднение по поляризациям начальных состояний фермионов, так как

$$\sum_{\mu} \Lambda^{q\mu}(p) = \frac{1}{2m}(q\hat{p} + m). \quad (3.4.16)$$

Покажем, как выполнять суммирование и усреднение по поляризациям фотонов. Пусть, например, в конечном состоянии находится фотон с импульсом  $k$  и поляризацией  $\lambda$  ( $\lambda = 1, 2$ ). Элемент матрицы рассеяния, соответствующий переходу  $i \rightarrow f$ , в этом случае можно записать в виде

$$(\Phi_f, S\Phi_i) = (c_{k\lambda}^{\dagger}\Phi'_f, S\Phi_i), \quad (3.4.17)$$

где  $\Phi_i, \Phi_f$  — векторы начального и конечного состояний и  $\Phi'_f$  — вектор состояния, не содержащий фотона с импульсом  $k$  и поляризацией  $\lambda$ . Состояния  $\Phi_i, \Phi_f$  будем считать физическими, так что

$$(c_{k3} - c_{k0})\Phi_{i,f} = 0.$$

Вспоминая, что

$$(c_{k3} - c_{k0})S = S(c_{k3} - c_{k0}),$$

заключаем, что

$$(c_{k3}^{\dagger}\Phi'_f, S\Phi_i) = (c_{k0}^{\dagger}\Phi'_f, S\Phi_i).$$

Поэтому интересующую нас величину

$$\sum_{\lambda=1}^2 |(\Phi_f, S\Phi_i)|^2 = \sum_{\lambda=1}^2 |(c_{k\lambda}^{\dagger}\Phi'_f, S\Phi_i)|^2$$

можно представить в виде

$$\sum_{\lambda=1}^2 |(\Phi_f, S\Phi_i)|^2 = \sum_{\lambda=1}^3 |(c_{k\lambda}^{\dagger}\Phi'_f, S\Phi_i)|^2 - |(c_{k0}^{\dagger}\Phi'_f, S\Phi_i)|^2. \quad (3.4.18)$$

Если в состояниях  $i$  и  $f$  имеется электрон, то величину  $M_{i \rightarrow f}$ , соответствующую элементу матрицы рассеяния  $(\Phi_f, S\Phi_i)$ , можно представить в виде

$$M_{i \rightarrow f} = \bar{u}_f \hat{Q} e_k^{(\lambda)*} Q' u_i, \quad (3.4.19)$$



где  $u_i, u_f$  — спинорные амплитуды электрона в начальном и конечном состояниях;  $Q$  и  $Q'$  — некоторые матрицы и  $\hat{e}_k^{(\lambda)*} = e_{k\mu}^{(\lambda)*} \gamma^\mu$  ( $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  — единичный вектор поляризации фотона). Так как

$$M_{i \rightarrow f}^* = \bar{u}_i \bar{Q}' \hat{e}_k^{(\lambda)*} \bar{Q} u_f,$$

где  $\bar{Q} = \gamma^0 Q^+ \gamma^0$ , то согласно (3.4.18)

$$\sum_{\lambda=1}^2 |M_{i \rightarrow f}|^2 = - \sum_{\lambda=0}^3 (\bar{u}_f Q \hat{e}_k^{(\lambda)*} Q' u_i) (\bar{u}_i \bar{Q}' \hat{e}_k^{(\lambda)} \bar{Q} u_f) \zeta_\lambda.$$

При этом мы учли, что

$$\hat{e}_k^{(\lambda)*} = \hat{e}_k^{(\lambda)}, \quad \zeta_\lambda = -1, \quad \lambda = 1, 2, 3, \quad \zeta_0 = 1.$$

Учитывая далее, что  $\sum_{\lambda=0}^3 e_{k\mu}^{(\lambda)} e_{k\nu}^{(\lambda)*} \zeta_\lambda = g_{\mu\nu}$ , получаем окончательно

$$\sum_{\lambda=1}^2 |M_{i \rightarrow f}|^2 = - (\bar{u}_f Q \gamma^\mu Q' u_i) (\bar{u}_i \bar{Q}' \gamma_\mu \bar{Q} u_f). \quad (3.4.20)$$

Отсюда следует, что суммирование по двум поперечным поляризациям фотона можно заменить суммированием по четырем поляризациям, включающим поляризации продольного и скалярного фотонов.

### § 3.5. ФУНКЦИИ ГРИНА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ

**3.5.1. Структура диаграмм матрицы рассеяния.** Диаграммы матрицы рассеяния в высших приближениях имеют, вообще говоря, сложную структуру. Изучение их облегчается вследствие того, что диаграммы,



Рис. 8

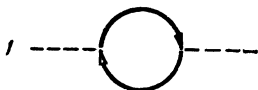


Рис. 9

соответствующие самым различным процессам, содержат общие структурные блоки, которые можно предварительно выделить и исследовать [5].

Наибольшее значение имеют три типа структурных блоков — электронные собственно-энергетические диаграммы (ЭСЭД), фотонные собственно-энергетические диаграммы (ФСЭД) и вершинные диаграммы (ВД). ЭСЭД называется такая часть произвольной диаграммы, которая связана с другими ее частями только двумя электронными ли-

ниями (рис. 8). Аналогично ФСЭД называется такая часть некоторой произвольной диаграммы, которая связана с ее остальными частями только двумя фотонными линиями (рис. 9). Наконец ВД называется такая

часть произвольной диаграммы, которая связана с другими ее частями только двумя электронными и одной фотонной линиями (рис. 10).

Следует различать компактные и некомпактные, а также неприводимые и приводимые диаграммы. Под компактными или сильно связанными диаграммами понимают такие диаграммы, которые нельзя разделить на части путем пересечения одной электронной или фотонной

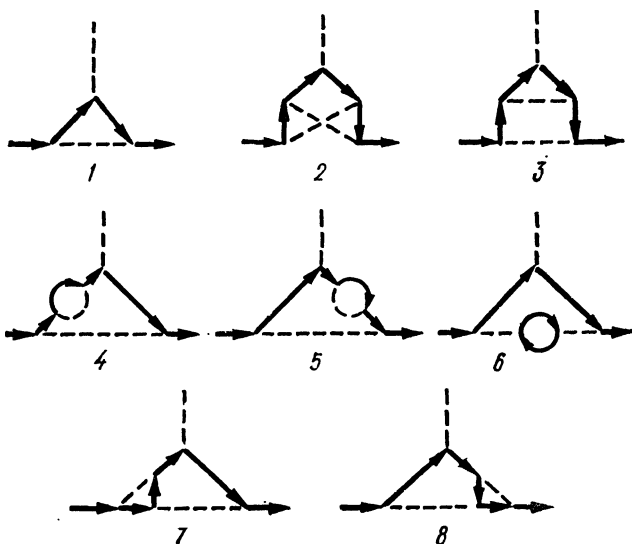


Рис. 10

линии. В противном случае диаграмма называется некомпактной или слабо связанной (рис. 11). Диаграмма называется неприводимой (скелетной), если она не содержит ЭСЭД, ФСЭД, ВД (рис. 12). В противном случае диаграмма называется приводимой (рис. 13).

Существует, очевидно, только две неприводимых ЭСЭД, а именно ЭСЭД второго порядка, показанная на рис. 8, 1, и ЭСЭД, соответствующая двухлучевой диаграмме (рис. 14, двухлучевая вершина обозначена крестиком). Последняя ЭСЭД возникает вследствие дополнительного слагаемого:  $\delta t \bar{\psi}(x) \psi(x)$ : в лагранжиане взаимодействия (при графическом представлении  $\bar{S}$ -матрицы появляются двухлучевые вершины, соответствующие этому слагаемому).

Аналогично существует только одна неприводимая ФСЭД, а именно ФСЭД второго порядка (см. рис. 9, 1).

Неприводимых ВД существует бесконечное множество. Из диаграмм, приведенных на рис. 10, неприводимыми являются диаграммы 1 и 2.

Рассмотрим какую-либо диаграмму, содержащую внутреннюю электронную линию. В высших приближениях появятся, очевидно, диаграммы со всевозможными ЭСЭД, включенными в эту линию. Вся совокупность таких диаграмм (вместе с исходной электронной линией) будем графически изображать в виде сплошной жирной линии и называть ее

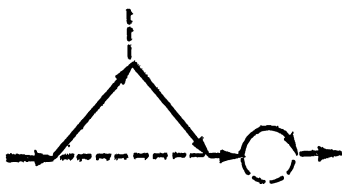


Рис. 11

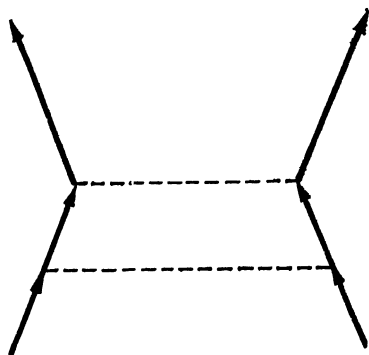


Рис. 12

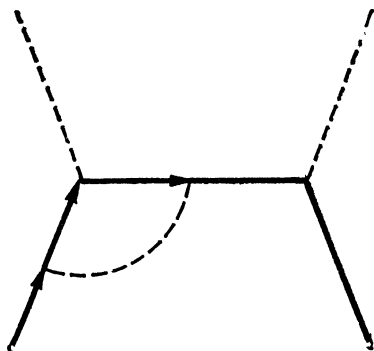


Рис. 13



Рис. 14

эффективной электронной линией. Величина, соответствующая этой линии, называется электронной функцией Грина и обозначается  $-iG_{\alpha\beta}^{(e)}(p)$ , где  $p$  — 4-импульс электронной линии (величина  $G_{\alpha\beta}^{(e)}(p)$ , как и  $S_{\alpha\beta}^{(e)}(p)$ , содержит два спинорных индекса  $\alpha, \beta$ , которые мы обычно будем опускать). Функцию Грина  $G^{(e)}(p)$ , как легко видеть, можно выразить через сумму величин, соответствующих всем компактным ЭСЭД с данным импульсом  $p$  (без внешних линий). Эту сумму будем называть массовым оператором и обозначать  $i\Sigma_{\alpha\beta}(p)$ . Графически связь между  $G_{\alpha\beta}^{(e)}(p)$  и  $\Sigma_{\alpha\beta}(p)$  изображена на рис. 15, где прямоугольником обозначен массовый оператор. Видно, что

$$\frac{1}{i}G^{(e)} = \frac{1}{i}S^c + \frac{1}{i}S^c i\Sigma \frac{1}{i}S^c + \frac{1}{i}S^c i\Sigma \frac{1}{i}S^c i\Sigma \frac{1}{i}S^c + \dots$$

Проссумировав этот бесконечный ряд, очевидно, получим

$$G^{(e)}(p) = S^c(p) + S^c(p)\Sigma(p)G^{(e)}(p). \quad (3.5.1)$$

Это уравнение, связывающее электронную функцию Грина с массовым оператором, называется уравнением Дайсона для электронной функции Грина [15]. Заметим, что из этой формулы следует, что

$$G^{(e)}(p)^{-1} = S^c(p)^{-1} - \Sigma(p) = \underline{m} - \hat{p} - \Sigma(p). \quad (3.5.2)$$

Аналогично можно определить эффективную фотонную линию как внутреннюю фотонную линию со всеми возможными включенными в нее ФСЭД; графически будем изображать ее в виде жирной штриховой

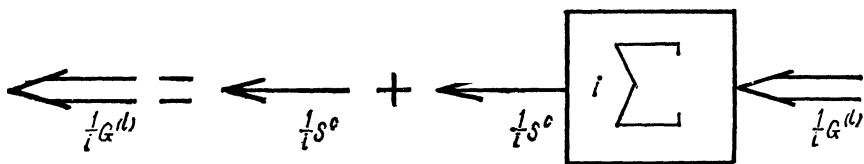


Рис. 15

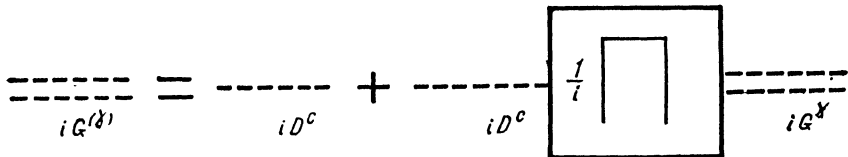


Рис. 16

линии. Величина, соответствующая этой линии, называется фотонной функцией Грина и обозначается  $iG_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k)$ , где  $k$  — 4-импульс фотонной линии (величина  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k) \equiv \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi)$  так же, как и  $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k)$ , содержит два тензорных индекса  $\mu, \nu$ , которые мы часто будем опускать).

Функцию Грина  $G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k)$ , как легко видеть, можно выразить через сумму величин, соответствующих всем компактным ФСЭД с данным импульсом  $k$  без внешних линий. Эту сумму будем называть поляризационным оператором и обозначать  $\frac{1}{i} \Pi_{\mu\nu}(k)$ . Графически связь между  $G^{(\gamma)}(k)$  и  $\Pi(k)$  изображена на рис. 16, из которого следует, что

$$iG^{(\gamma)} = i\mathcal{D}^c + i\mathcal{D}^c \frac{1}{i} \Pi i\mathcal{D}^c + i\mathcal{D}^c \frac{1}{i} \Pi i\mathcal{D}^c \frac{1}{i} \Pi i\mathcal{D}^c + \dots$$

Суммируя этот бесконечный ряд, получаем

$$G^{(\gamma)}(k) = \mathcal{D}^c(k) + \mathcal{D}^c(k) \Pi(k) G^{(\gamma)}(k). \quad (3.5.3)$$

Это уравнение, называемое уравнением Дайсона для фотонной функции Грина, связывает фотонную функцию Грина с поляризационным оператором так же, как уравнение (3.5.1) связывает электронную функцию Грина с массовым оператором.

Введение эффективных электронных и фотонных линий позволяет, очевидно, не рассматривать некомпактные вершинные диаграммы. Действительно, эти диаграммы представляют собой совокупности компактных вершинных диаграмм и эффективных электронных и фотонных линий. Поэтому далее под вершинными диаграммами всегда будут подразумеваться компактные вершинные диаграммы (без внешних линий).

Если образовать сумму величин, соответствующих всем возможным компактным вершинным диаграммам с заданными импульсами  $p_1, p_2$  и  $k$  электронных и фотонной линий, то мы получим вершинную функцию, которую будем обозначать  $\Gamma_{\mu, \alpha\beta}(p_1, p_2)$ , где  $\mu$  — векторный и  $\alpha, \beta$  — спинорные индексы. На диаграммах вершинная функция изображается в виде жирной точки, которая называется эффективной вершиной.

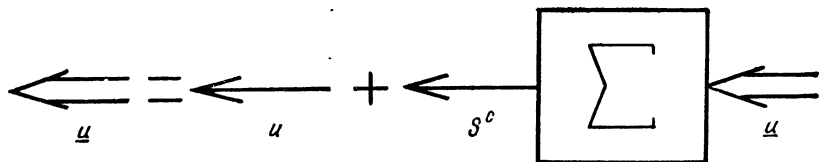


Рис. 17

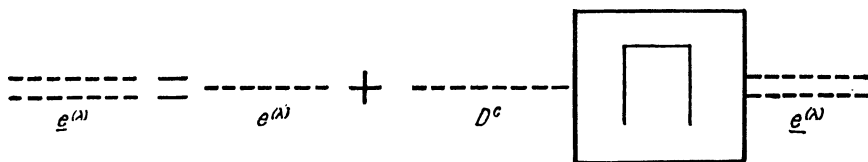


Рис. 18

Так как вследствие законов сохранения 4-импульса  $k = p_1 - p_2$ , то в числе аргументов мы не приводим импульс  $k$ ; обычно будем опускать также спинорные индексы  $\alpha, \beta$ .

Кроме эффективных внутренних электронных и фотонных линий мы должны ввести в рассмотрение эффективные внешние электронные и фотонные линии, представляющие собой внешние электронные и фотонные линии с включенными в них всеми возможными собственно энергетическими диаграммами.

Величину, соответствующую внешней эффективной электронной линии с импульсом  $p$ , будем обозначать  $\underline{u}_\alpha(p)$ . Эта величина, так же как и  $u_\alpha(p)$ , является биспинором и согласно рис. 17 может быть представлена в виде

$$\underline{u}(p) = \underline{u}(p) + S^c(p) \Sigma(p) \underline{u}(p) \quad (3.5.4)$$

(спинорные индексы опущены).

Аналогичное равенство можно написать (рис. 18) для величины  $\underline{e}^{(\lambda)}(k)$ , соответствующей эффективной внешней фотонной линии с импульсом  $k$ :

$$\underline{e}^{(\lambda)}(k) = \underline{e}_k^{(\lambda)} + \mathcal{D}^c(k) \Pi(k) \underline{e}^{(\lambda)}(k). \quad (3.5.5)$$

Как известно, внешние линии служат для обозначения свободных частиц. Так как величины  $\underline{u}(p)$  и  $\underline{e}(k)$  должны определяться на массовой оболочке частиц ( $p^2 - m^2 = 0, k^2 = 0$ ), то из релятивистской инвариантности следует [15]

$$\underline{u}(p) = \sqrt{Z_2} u(p), \quad \bar{\underline{u}}(p) = \sqrt{Z_2} \bar{u}(p), \quad \underline{e}_\mu(k) = \sqrt{Z_3} e_{k\mu}, \quad (3.5.6)$$

где  $Z_2$  и  $Z_3$  — некоторые универсальные множители, которые называются перенормировочными константами.

Эти важные соотношения, к которым мы еще вернемся в § 3.6, показывают, что вместо эффективных внешних линий достаточно рассматривать обычные внешние линии (без собственно-энергетических встав-

вок), вводя при этом в элемент матрицы рассеяния на каждую внешнюю электронную линию множитель  $Z_2^{1/2}$  и на каждую внешнюю фотонную линию — множитель  $Z_3^{1/2}$ .

Используя понятия эффективных линий и эффективных вершин, сложные диаграммы, встречающиеся при рассмотрении высших приближений, можно заменить эффективными — скелетными диаграммами, которые представляют собой неприводимые диаграммы с эффективными линиями и вершинами вместо обычных линий и вершин. Поэтому возникает задача нахождения электронной и фотонной функций Грина  $G^{(e)}(p)$  и  $G^{(\gamma)}(k)$  и вершинной функции  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ . При этом отметим, что существует только одна неприводимая ЭСЭД (если не учитывать двухлучевую вершину) и одна неприводимая ФСЭД. Эти диаграммы показаны на рис. 8, 1 и 9, 1. Обратим внимание на то, что только одной из вершин этих диаграмм должна сопоставляться вершинная функция  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$  (эту вершину мы назвали выше эффективной), второй же вершине — обычной — должна сопоставляться матрица  $\gamma_\mu$ . Это связано с тем, что в противном случае это привело бы к двойному учету одних и тех же диаграмм.

Применяя правила написания матричных элементов к скелетным диаграммам, соответствующим массовому и поляризованному операторам, получим, очевидно, следующие выражения для  $\Sigma(p)$  и  $\Pi(k)$ :

$$i\Sigma(p) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma^\mu G^{(e)}(p-k) \Gamma^\nu(p, p-k) G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) + i\delta m, \quad (3.5.7)$$

$$\frac{1}{i} \Pi_{\mu\nu}(k) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \text{Sp} \int d^4p \gamma_\mu G^{(e)}(p) \Gamma_\nu(p, p-k) G^{(e)}(p-k)$$

(в первой формуле учтена двухлучевая вершина). При определении коэффициентов типа  $1/(2\pi)^4$  в  $\Sigma$  и  $\Pi$  мы учли то обстоятельство, что правила Фейнмана относятся к матричным элементам  $S$ -матрицы, а не к величинам  $\Sigma$  и  $\Pi$ . Поэтому коэффициенты перед интегралами определяются из требования, что  $\Sigma$  и  $\Pi$  представляют собой внутренние части диаграмм, соответствующих матричным элементам  $S$ -матрицы.

В эти выражения входит неизвестная вершинная функция  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ , уравнение для которой необходимо найти. Для этого напомним, что вершинная функция представляет собой сумму величин, соответствующих всем компактным ВД с заданными импульсами электронных и фотонных линий. Поэтому мы должны, как и при нахождении уравнений для фотонной и электронной функций Грина, рассмотреть неприводимые ВД и все линии в них заменить эффективными линиями, а все вершины — эффективными вершинами. Но неприводимых ВД, в отличие от неприводимых ЭСЭД и ФСЭД, существует бесчисленное множество (неприводимые ВД 3-го и 5-го порядков показаны на рис. 10, 1, 2). Поэтому мы получим для  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$  интегральное уравнение, содержащее бесконечное число слагаемых:

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2) \equiv \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_1, p_2) = \gamma_\mu + \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \Gamma^\lambda(p_1, p_1-k) \times$$

$$\times G^{(e)}(p_1-k) \Gamma_\mu(p_1-k, p_2-k) G^{(e)}(p_2-k) \Gamma^\sigma(p_2-k, p_2) G_{\lambda\sigma}^{(\gamma)}(k) + \dots \quad (3.5.8)$$

Таким образом, для функций  $G^{(e)}$ ,  $G^{(v)}$ ,  $\Gamma$ , определяющих точные матричные элементы квантовоэлектродинамических процессов, мы получили систему интегральных уравнений. Однако уравнение для  $\Gamma$  содержит бесконечное число слагаемых, соответствующих различным неприводимым ВД.

В заключение отметим, что хотя связь между вершинной функцией и электронной и фотонной функциями Грина носит крайне сложный характер, в частном случае, когда аргументы в вершинной функции совпадают, имеет место простое соотношение

$$\Gamma_{\mu}(p, p) = -\frac{\partial}{\partial p_{\mu}} (G^{(e)}(p))^{-1}, \quad (3.5.9)$$

называемое соотношением Уорда [17] (доказательство см. в п. 3.5.3).

**3.5.2. Функции Грина как вакуумные средние.** Выше мы определили электронную и фотонную функции Грина как величины, соответствующие эффективным электронным и фотонным линиям, т. е. линиям с различными собственно-энергетическими вставками. Приведем аналитические определения функций Грина, связав их с операторами полей.

Прежде всего напомним, что функции  $\mathcal{D}^c(k)$  и  $S^c(p)$ , в которые согласно (3.5.3) и (3.5.1) переходят функции  $G^{(v)}(k)$  и  $G^{(e)}(p)$  при отсутствии взаимодействия между полями, представляют собой средние значения хронологических произведений операторов свободных полей  $A_{\mu}(x)$  и  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  в состоянии вакуума. Поэтому естественно ожидать, что функции  $\tilde{G}^{(v)}(k)$  и  $G^{(e)}(p)$ , учитывающие взаимодействие между полями, должны определяться средними от хронологических произведений операторов взаимодействующих полей, т. е. операторов полей  $A_{\mu}(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  в гейзенберговском представлении. Действительно, как мы далее убедимся, функции  $G_{\mu\nu}^{(v)}(k)$  и  $G_{\alpha\beta}^{(e)}(p)$  представляют собой компоненты Фурье функций

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{(v)}(x_1, x_2) &= -i(\Psi_0, T \{A_{\mu}(x_1) A_{\nu}(x_2)\} \Psi_0), \\ G_{\alpha\beta}^{(e)}(x_1, x_2) &= i(\Psi_0, T \{\psi_{\alpha}(x_1) \bar{\psi}_{\beta}(x_2)\} \Psi_0), \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

где  $\Psi_0$  — вектор состояния вакуума взаимодействующих полей.

Эти функции принадлежат к функциям типа [45]

$$G_{1, \dots, n}(x_1, \dots, x_n) = (\Psi_0 T \{F_1(x_1) \dots F_n(x_n)\} \Psi_0) \quad (3.5.11)$$

(где  $F_1(x)$ , ... и  $F_n(x_n)$  — операторы полей в гейзенберговском представлении), которые также носят общее название квантовоэлектродинамических функций Грина. Знание этих функций Грина эквивалентно знанию всех матричных элементов  $S$ -матрицы.

Чтобы связать функции Грина с матрицей рассеяния, выразим их через операторы полей в представлении взаимодействия. Для этого предположим, что операторы полей  $F(x)$  и векторы состояний  $\Phi(t)$  в представлении взаимодействия совпадают с операторами полей  $\tilde{F}(x)$  и векторами состояний  $\tilde{\Psi}$  в гейзенберговском представлении в момент

времени  $t = 0$ . Тогда согласно (2.1.6)

$$\tilde{F}(x) = S(t, 0) F(x) S(t, 0)^+,$$

$$\tilde{\Phi}(t) = S(t, 0) \Psi.$$

В соответствии с адиабатической гипотезой, согласно которой собственный вектор  $\Phi$  свободного гамильтониана переходит при медленном включении взаимодействия при  $t = \pm \infty$  в собственный вектор полного гамильтониана, справедливо соотношение

$$\Psi^\pm = S(0, \pm \infty) \Phi \quad (3.5.12)$$

( $\Psi^\pm$  — собственный вектор полного гамильтониана; мы учли, что при  $t = 0$  вектор состояния в представлении взаимодействия совпадает с вектором состояния в гейзенберговском представлении). Из этой формулы следует, что в случае вакуумного состояния ( $\Phi = \Phi_0$ ,  $\Psi^\pm = \Psi_0^\pm$ )

$$S_{\text{vac}} \equiv (\Phi_0, S\Phi_0) = (\Psi_0^+, \Psi_0^-). \quad (3.5.13)$$

Векторы состояния вакуума  $\Psi_0^+$  и  $\Psi_0^-$  отличаются, очевидно, друг от друга только некоторым фазовым множителем, который согласно (3.5.13) совпадает с  $S_{\text{vac}}$ , следовательно,  $\Psi_0^- = S_{\text{vac}} \Psi_0^+$  (так как  $SS^+ = 1$ , то  $|S_{\text{vac}}| = 1$ ). Таким образом,

$$\Phi_0 = S(-\infty, 0) \Psi_0 = \frac{1}{S_{\text{vac}}} S(\infty, 0) \Psi_0, \quad \Psi_0 \equiv \Psi_0^-. \quad (3.5.14)$$

Покажем, что общие функции Грина выражаются через операторы полей в представлении взаимодействия формулой

$$G_{1, \dots, n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{S_{\text{vac}}} (\Phi_0, T \{ \tilde{F}_1(x_1) \dots \tilde{F}_n(x_n) S \} \Phi_0). \quad (3.5.15)$$

Считая для простоты, что  $t_1 > t_2 > \dots > t_n$  и используя формулы (3.5.14) и соотношения

$$|S_{\text{vac}}| = 1, \quad S = S(\infty, t_1) S(t_1, 0) S(0, t_2) \dots S(0, t_n) S(t_n, -\infty),$$

находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{S_{\text{vac}}} (\Phi_0, T \{ \tilde{F}_1(x_1) \dots \tilde{F}_n(x_n) S \} \Phi_0) = \\ & = (\Psi_0, S(0, \infty) S(\infty, t_1) \tilde{F}_1(x_1) S(t_1, 0) S(0, t_2) \tilde{F}_2(x_2) S(t_2, 0) \dots \\ & \dots S(0, t_n) \tilde{F}_n(x_n) S(t_n, -\infty) S(-\infty, 0) \Psi_0), \end{aligned}$$

откуда вследствие (2.1.6) следует (3.5.11).

Формулы типа (3.5.15) справедливы также для матричных элементов операторов полей. Рассмотрим, например, матричный элемент оператора  $\psi(x)$  между состоянием вакуума  $\Psi_0$  и одноэлектронным состоянием  $\Psi_1$ . Используя (3.5.12) и (2.1.6), получаем

$$\begin{aligned} (\Psi_0, \psi(x) \Psi_1) &= S_{\text{vac}}^* (\Phi_0, S(\infty, 0) S(0, t) \psi(x) S(t, 0), \\ & S(0, -\infty) \Phi_1) = \frac{1}{S_{\text{vac}}} (\Phi_0, T \{ \psi(x) S \} \Phi_1), \end{aligned} \quad (3.5.16)$$



где  $\Phi_1$  — вектор одноэлектронного состояния при отсутствии электромагнитного взаимодействия.

Ясно, что применение правил Вика для вычисления среднего по вакууму свободных полей в правой части (3.5.15) приводит к диаграммному определению функций Грина.

При этом согласно (3.5.15) в диаграммном представлении функций Грина не нужно учитывать вакуумных петель, так как появляющиеся при вычислении вакуумного среднего  $(\Phi_0, T(F_1 \dots F_n S) \Phi_0)$  вакуумные петли приводят к появлению множителя  $S_{vac}$ , который в формуле (3.5.15) сокращается с множителем  $S_{vac}^{-1}$ .

Однако функция Грина  $G_{1, \dots, n}(x_1, \dots, x_n)$  может содержать произведения функций Грина низшего порядка. Поэтому целесообразно выделить эти части, введя связанные функции Грина  $G_{1, \dots, n}^c(x_1, \dots, x_n)$ , которые уже не содержат связанных блоков. Например, 4-точечная фотонная функция Грина

$$G(x_1, \dots, x_4) = (\Psi_0, T\{A_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_2}(x_2) A_{\mu_3}(x_3) A_{\mu_4}(x_4)\} \Psi_0)$$

выражается через связанную 4-точечную функцию Грина  $G_c(x_1, \dots, x_4)$  формулой

$$G(x_1, \dots, x_4) = G_c(x_1, \dots, x_4) + G(x_1, x_2) G(x_3, x_4) + G(x_1, x_3) \times \\ \times G(x_2, x_4) + G(x_1, x_4) G(x_2, x_3), \quad G(x_1, x_2) = (\Psi_0, T\{A(x_1) A(x_2)\} \Psi_0).$$

Определим аналитически вершинную функцию. Для этого введем функцию Грина

$$G_{\alpha\beta, \mu}^{(e, \nu)}(x_1, x_2; x) = (\Psi_0, T\{\psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) A_\mu(x)\} \Psi_0). \quad (3.5.17)$$

Очевидно, функция  $G^{(e, \nu)}$  зависит только от разностей аргументов:  $G^{(e, \nu)} = G^{(e, \nu)}(x_1 - x, x - x_2)$ . Используя общее выражение (3.5.15) для функций Грина, связывающее их с операторами полей в представлении взаимодействия, и отмечая, что вершинная функция  $\Gamma_\mu$  представляет собой сумму всех возможных компактных вершинных диаграмм без внешних линий, находим

$$G_\mu^{(e, \nu)}(x_1, x_2; x_3) = e \int d^4 x'_1 d^4 x'_2 d^4 x'_3 G^{(e)}(x_1, x'_1) \times \\ \times \Gamma^\nu(x'_1, x'_2; x'_3) G^{(e)}(x'_2, x_2) G_{\nu\mu}^{(\nu)}(x'_3, x_3). \quad (3.5.18)$$

В этой формуле мы выделим множитель  $e$ , так как по определению вершинная диаграмма  $n$ -го порядка пропорциональна  $e^{n-1}$ . Переходя в этой формуле к импульсному представлению, получаем

$$G_\mu^{(e, \nu)}(p, p') = e G^{(e)}(p) \Gamma^\nu(p, p') G^{(e)}(p') G_{\nu\mu}^{(\nu)}(p - p'), \quad (3.5.19)$$

где фурье-компоненты соответствуют разностям  $x_1 - x_3$ ,  $x_2 - x_3$  и  $x_1 - x_3$ ,  $x_2 - x_3$ .

Кроме введенных функций Грина  $G_i(x_1, \dots, x_n)$  рассматривают так называемые ампутированные функции Грина  $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ , связан-

ные с функциями Грина  $G_c$  соотношением

$$G_c(x_1, \dots, x_n) = \int d^4x'_1 \dots d^4x'_n G^{(e)}(x_1 - x'_1) \dots \dots G^{(n)}(x_n - x'_n) \Gamma(x'_1, \dots, x'_n), \quad (3.5.20)$$

где с каждой фотонной вершиной  $x_i$  связана фотонная функция Грина  $G^{(n)}(x_i - x'_i)$ , а с каждой электронной вершиной — электронная функция Грина  $G^{(e)}(x_i - x'_i)$ . На языке диаграмм «ампутированной» функции Грина  $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$  соответствуют компактные диаграммы функции Грина  $G(x_1, \dots, x_n)$  без внешних линий. Трехвершинная функция  $\Gamma_\mu(x_1, x_2; x_3)$  представляет собой пример «ампутированной» трехточечной функции Грина.

**3.5.3. Свойства функций Грина.** Покажем вначале, что взаимодействие между полями не оказывает влияния на продольную часть фотонной функции Грина (3.5.10), т. е. что выполняется соотношение

$$\partial^\mu G_{\mu\nu}^{(n)}(x - x') = \xi \partial_\nu \mathcal{D}^c(x - x'). \quad (3.5.21)$$

Переходя к доказательству этого утверждения, отметим, что операторы электромагнитного поля  $A_\mu(x)$  и  $A_\nu(x')$  коммутируют друг с другом в один и тот же момент времени, поэтому, используя (3.5.10), находим

$$i\partial^\mu G_{\mu\nu}^{(n)}(x - x') = (\Psi_0, T\{\varphi(x) A_\nu(x')\} \Psi_0), \quad \varphi(x) \equiv \partial^\nu A_\nu(x).$$

Учитывая далее, что

$$\varphi^{(+)}(x) \Psi_0 = 0,$$

и предполагая для определенности  $t > t'$ , перепишем это равенство в виде

$$i\partial^\mu G_{\mu\nu}^{(n)}(x - x') = (\Psi_0, [\varphi^{(+)}(x), A_\nu(x')] \Psi_0).$$

Принимая, наконец, во внимание соотношение (3.1.41) и то, что

$$\mathcal{D}^c(x) = \theta(t) \mathcal{D}^{(+)}(x) - \theta(-t) \mathcal{D}^{(-)}(x),$$

получаем (3.5.21).

В импульсном представлении соотношение (3.5.21) имеет вид

$$k^\mu G_{\mu\nu}^{(n)}(k) = \xi k_\nu \mathcal{D}^c(k). \quad (3.5.22)$$

Отсюда вытекает свойство поперечности поляризационного оператора

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0, \quad (3.5.23)$$

означающее, в свою очередь, что  $\Pi_{\mu\nu}(k)$  имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi(k) \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (3.5.24)$$

где  $\Pi(k)$  — некоторая скалярная функция от  $k^2$ .

Так как продольная часть фотонной функции Грина не затрагивается взаимодействием между полями, то ее можно не рассматривать, а ограничиться рассмотрением поперечной части фотонной функции Грина. Эта часть, которую мы будем обозначать через  $G_{\mu\nu}^{(n)T}(k)$ , удовле-

творяет условию  $k^\mu G_{\mu\nu}^{(\gamma)t}(k) = 0$  и имеет, очевидно, вид

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)t}(k) = G^{(\gamma)}(k) \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right),$$

где  $G^{(\gamma)}(k)$  — некоторая скалярная функция  $k^2$ , связанная с поляриза-  
ционным оператором  $\Pi(k)$  соотношением

$$G^{(\gamma)}(k) = -(k^2 + \Pi(k))^{-1}. \quad (3.5.25)$$

Покажем далее, что

$$\partial^\mu G_{\mu\nu}^{(e,\gamma)}(x_1, x_2; x) = ie\xi (\mathcal{D}^c(x-x_2) - \mathcal{D}^c(x-x_1)) G^{(e)}(x_1, x_2). \quad (3.5.26)$$

Так как оператор  $A_\mu(x)$  коммутирует с операторами  $\psi(x')$  и  $\bar{\psi}(x')$   
при  $t = t'$ , то

$$\partial^\mu G_{\mu\nu}^{(e,\gamma)}(x_1, x_2; x) = (\Psi_0, T\{\varphi(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}\Psi_0). \quad (3.5.27)$$

Разбивая  $\varphi(x)$  на положительно- и отрицательно-частотные части  
 $\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x)$ , и учитывая формулу (3.1.40), а также со-  
отношения (3.1.41)

$$[\varphi^{(\pm)}(x), \psi(x_1)] = e\xi \mathcal{D}^{(\pm)}(x-x_1)\psi(x_1),$$

$$[\varphi^{(\pm)}(x), \bar{\psi}(x_2)] = -e\xi \mathcal{D}^{(\pm)}(x-x_2)\bar{\psi}(x_2),$$

согласно (3.5.27) приходим к формуле (3.5.26).

Подставляя в (3.2.56) вместо  $G_{\mu\nu}^{(\gamma,e)}$  выражение (3.5.18) и используя  
(3.5.21), получаем

$$\begin{aligned} e\xi \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x' G^{(e)}(x_1-x_1') \frac{\partial \Gamma_\nu(x_1', x_2'; x')}{\partial x_\nu'} G^{(e)}(x_2'-x_2) \mathcal{D}^c(x-x') = \\ = ie\xi (\mathcal{D}^c(x-x_2) - \mathcal{D}^c(x-x_1)) G^{(e)}(x_1-x_2). \end{aligned}$$

Применяя к обеим частям этого соотношения оператор  $\partial^\mu \partial_\mu$  и отмечая,  
что  $\partial^\mu \partial_\mu \mathcal{D}^c(x) = \delta(x)$ , находим

$$\begin{aligned} i(\delta(x-x_1) - \delta(x-x_2)) G^{(e)}(x_1-x_2) = \\ = - \int d^4x_1' d^4x_2' G^{(e)}(x_1-x_1') \frac{\partial \Gamma_\nu(x_1', x_2'; x)}{\partial x_\nu} G^{(e)}(x_2'-x_2). \end{aligned} \quad (3.5.28)$$

Переходя к импульсному представлению, получаем [16]

$$G^{(e)}(p') - G^{(e)}(p) = -(p-p')^\mu G^{(e)}(p) \Gamma_\mu(p, p') G^{(e)}(p'),$$

или

$$G^{(e)}(p)^{-1} - G^{(e)}(p')^{-1} = -(p-p')^\mu \Gamma_\mu(p, p'). \quad (3.5.29)$$

Из этой формулы следует, в частности, соотношение Уорда  
(см. (3.5.9))

$$\Gamma_\mu(p, p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu} G^{(e)}(p)^{-1}. \quad (3.5.30)$$

Вводя функцию  $\Lambda_\mu$ :

$$\Gamma_\mu(p, p') = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p, p')$$

и используя уравнение (3.5.2), откуда получаем

$$\Lambda_\mu(p, p) = \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu}. \quad (3.5.30')$$

**3.5.4. Спектральное представление функции Грина электрона.** Покажем, что функции Грина взаимодействующих полей можно представить в виде суперпозиции функций Грина свободных полей с различными массами частиц.

Рассмотрим вначале электронную функцию Грина

$$G_{\alpha\beta}^{(e)}(x - x') = i \langle 0 | T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')) | 0 \rangle, \quad | 0 \rangle \equiv \Psi_0.$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q e^{-iq(x-x')} \rho_{\alpha\beta}(q) \theta(q_0), \\ \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x) | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q e^{iq(x-x')} \bar{\rho}_{\alpha\beta}(q) \theta(q_0), \end{aligned} \quad (3.5.31)$$

где

$$\rho_{\alpha\beta}(q) \theta(q_0) = (2\pi)^3 \sum_r \delta(q - p_r) \langle 0 | \psi_\alpha(0) | r \rangle (-1)^{N_0} \langle r | \bar{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle, \quad (3.5.32)$$

$$\bar{\rho}_{\alpha\beta}(q) \theta(q_0) = (2\pi)^3 \sum_r \delta(q - p_r) \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(0) | r \rangle (-1)^{N_0} \langle r | \psi_\alpha(0) | 0 \rangle,$$

находим

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{(e)}(x) &= i\theta(t) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q \rho_{\alpha\beta}(q) \theta(q_0) e^{-iqx} - \\ &- i\theta(-t) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q \bar{\rho}_{\alpha\beta}(q) \theta(q_0) e^{iqx}. \end{aligned}$$

В формулах (3.5.32) индекс  $r$  служит для обозначения различных стационарных состояний системы взаимодействующих полей и  $N_0$  представляет собой число скалярных фотонов в состоянии  $r$  (множитель  $(-1)^{N_0}$  появляется из-за индефинитности метрики в пространстве состояний). При получении формул (3.5.31), (3.5.32) мы учитывали, что (см. (2.2.31))

$$\psi(x) = e^{iPx} \psi(0) e^{-iPx}, \quad \bar{\psi}(x) = e^{iPx} \bar{\psi}(0) e^{-iPx}$$

и что 4-импульс  $p_r^\mu$  состояния  $|r\rangle$  удовлетворяет соотношениям  $p_r^0 \geq 0$ ,  $p_r^\mu p_r^\nu q_{\mu\nu} \geq m^2$  (так как состояние  $|r\rangle$  согласно (3.5.32) является однозарядовым,  $\bar{Q}|r\rangle = e|r\rangle$ , то энергия этого состояния в системе покоя,  $p_r^k = 0$ , должна быть больше или равна  $\underline{m}$ ). Величины  $\rho_{\alpha\beta}(q)$ ,  $\bar{\rho}_{\alpha\beta}(q)$ , представляющие собой матрицы в спиновом пространстве, можно, очевидно, записать в виде

$$\rho_{\alpha\beta}(q) \theta(q_0) = (2\pi)^3 \langle 0 | \psi_\alpha(0) \delta(q - P) \bar{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle, \quad (3.5.33)$$

$$\bar{\rho}_{\alpha\beta}(q) \theta(q_0) = (2\pi)^3 \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(0) \delta(q - P) \psi_\alpha(0) | 0 \rangle.$$

Из  $TCP$ -инвариантности (сильного отражения) теории следует, что

$$\bar{\rho}(q) = -\gamma^5 \rho(q) \gamma^5. \quad (3.5.34)$$

Действительно, согласно (3.3.4), (3.3.5)

$$U_R \psi(0) U_R^\dagger = i\gamma^5 \psi(0)^T, \quad U_R \bar{\psi}(0) U_R^\dagger = \bar{\psi}(0)^T i\gamma^5, \quad U_R P_\mu U_R^\dagger = P_\mu^T.$$

Поэтому, учитывая, что  $U_R |0\rangle = |0\rangle$ , находим

$$\bar{\rho}(q) = -(2\pi)^3 \gamma^5 \langle 0 | \bar{\psi}(0)^T \delta(q - P^T) \psi(0)^T | 0 \rangle \gamma^5,$$

откуда следует формула (3.5.34). Аналогично из соображений релятивистской инвариантности и инвариантности теории по отношению к отражению пространственных координат следует, что

$$\rho(q) = \rho_1(q^2) \hat{q} + \rho_2(q^2), \quad \hat{q} = \gamma^\mu q_\mu, \quad (3.5.35)$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — некоторые функции инварианта  $q^2$ , обращающиеся в нуль при  $q^2 < \underline{m}^2$ . Поэтому

$$\bar{\rho}(q) = \rho_1(q^2) \hat{q} - \rho_2(q^2). \quad (3.5.36)$$

Таким образом,

$$G^{(e)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 q \theta(q_0) (\rho_2(q^2) + i\rho_1(q^2) \gamma^\mu \partial_\mu) (\theta(t) e^{-iqx} + \theta(-t) e^{iqx}).$$

Отмечая далее, что согласно (2.3.11)

$$\begin{aligned} \Delta^c(x, M^2) &= \theta(t) \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 q e^{-iqx} \delta(q^2 - M^2) \theta(q_0) + \\ &+ \theta(-t) \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 q e^{iqx} \delta(q^2 - M^2) \theta(q_0), \end{aligned}$$

получаем

$$G^{(e)}(x) = \int_0^\infty dM^2 (\rho_2(M^2) + i\rho_1(M^2) \gamma^\mu \partial_\mu) \Delta^c(x, M^2),$$

или

$$G^{(e)}(x) = \int_0^\infty dM^2 (\rho_1(M^2) S^c(x, M) + (\rho_2(M^2) - M\rho_1(M^2)) \Delta^c(x, M^2)), \quad (3.5.37)$$

где (см. (2.5.40))

$$S^c(x, M) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + M) \Delta^c(x, M^2).$$

Для нахождения перенормировочной константы  $Z_2$  нам понадобится вакуумное среднее от антикоммутиатора полевых операторов  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ . Согласно (3.5.31), (3.5.32) и определению перестановочных функций  $\Delta(x, M^2)$ ,  $S(x, M)$  имеем

$$\begin{aligned} \langle 0 | \{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} | 0 \rangle &= -i \int_0^\infty dM^2 (\rho_1(M^2) S(x - x', M) + \\ &+ (\rho_2(M^2) - M\rho_1(M^2)) \Delta(x - x', M^2)). \end{aligned} \quad (3.5.38)$$

Поэтому, замечая, что  $\{\psi_\alpha(\bar{x}), \psi_\beta(x')\}_{t=t'} = \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta(x - x')$  и  $\Delta(x, M^2)|_{t=0} = 0$ ,  $S(x, M)|_{t=0} = i\gamma^0 \delta(x)$ , находим

$$\gamma^0 \delta(x - x') = \gamma^0 \delta(x - x') \int_0^\infty dM^2 \rho_1(M^2),$$

следовательно,

$$\int_0^\infty dM^2 \rho_1(M^2) = 1. \quad (3.5.39)$$

Формулу (3.5.37) удобно переписать в импульсном представлении. Учитывая, что

$$S^c(p, M) = \frac{1}{M - \hat{p} - i0}, \quad \Delta^c(p, M^2) = \frac{1}{M^2 - p^2 - i0}$$

и

$$\frac{1}{M^2 - p^2} = \frac{1}{2M} \left( \frac{1}{M - \hat{p}} + \frac{1}{M + \hat{p}} \right),$$

находим

$$G^{(e)}(p) = \int_0^\infty dM \left( \frac{\rho_+(M)}{M - \hat{p} - i0} + \frac{\rho_-(M)}{M + \hat{p} - i0} \right), \quad (3.5.40)$$

где  $\rho_\pm(M) = \rho_2(M^2) \pm M\rho_1(M^2)$ . Отсюда следует, то функцию Грина электронно-позитронного поля можно представить в виде суперпозиции функций Грина свободных электронно-позитронных полей с различными массами. Эта суперпозиция называется спектральным представлением функции Грина  $G^{(e)}(p)$  [18, 19] (представление Челлена — Леммана). Функции  $\rho_\pm(M)$  называются спектральными. В случае свободных полей

$$\rho_-(M) = 0, \quad \rho_+(M) = \delta(M - \underline{m}).$$

К этому выражению для  $\rho_+(M)$  приводит формула (3.5.32), если учесть, что в случае свободных полей состояния  $|r\rangle_0$  в первой из формул (3.5.32) исчерпываются одноэлектронными состояниями с импульсом  $p$  и спиральностью  $\mu$ ,  $|r\rangle_0 \equiv |p\mu\rangle_0 = a_{p\mu}^\dagger |0\rangle$ , причем

$$\langle 0 | \psi_\beta(0) | r \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2V\rho_0}} u_\beta^{\mu}(p).$$

В случае взаимодействующих полей  $\rho_-(M) \neq 0$ , а  $\rho_+(M)$  не совпадает с  $\delta(M - \underline{m})$ . Однако спектральная функция  $\rho_+(M)$  по-прежнему будет иметь  $\delta$ -образную особенность, а функция  $\rho_-(M)$  такой особенности не будет иметь. Это связано с тем, то в теории взаимодействующих полей среди однозарядовых состояний  $|r\rangle$  только одноэлектронное состояние приводит к полюсу функции  $G^{(e)}(p)$  или к  $\delta$ -образной особенности спектральной функции  $\rho_+(M)$ . Таким образом,

$$\rho_+(M) = Z_2 \delta(M - \underline{m}) + \bar{\rho}_+(M), \quad \rho_-(M) = \bar{\rho}_-(M), \quad (3.5.41)$$

где  $Z_2$  — некоторая константа и  $\bar{\rho}_{\pm}(M)$  — некоторые функции, не имеющие  $\delta$ -образных особенностей. Константа  $Z_2$  должна быть положительной. Действительно, матричный элемент  $\langle 0 | \psi(x) | r \rangle$ , соответствующий одноэлектронным состояниям  $|r\rangle \equiv |\rho\rangle$  взаимодействующих полей, можно считать, очевидно, следующим:

$$\langle 0 | \psi_{\alpha}(x) | \rho \mu \rangle = \frac{\eta}{\sqrt{2V} \rho_0} u_{\alpha}^{1\mu}(\rho) e^{-i\rho x}, \quad \rho_0 = + \sqrt{\rho^2 + \underline{m}^2},$$

где  $\eta$  — положительная постоянная (фазовый множитель в величине  $\eta$  можно включить в вектор состояния  $|\rho \mu\rangle$ ). Эти одноэлектронные состояния приводят к следующему полюсному вкладу в функцию  $G^{(e)}(\rho)$ :

$$G^{(e)}(\rho) \approx \frac{\eta^2}{\underline{m} - \hat{\rho}}. \quad (3.5.42)$$

Поэтому  $Z_2 = \eta^2 > 0$  и

$$\langle 0 | \psi_{\alpha}(x) | \rho \mu \rangle = \frac{\sqrt{Z_2}}{\sqrt{2V} \rho_0} u_{\alpha}^{1\mu}(\rho) e^{-i\rho x}. \quad (3.5.43)$$

Так как согласно (3.5.16)

$$\langle 0 | \psi_{\alpha}(x) | \rho \mu \rangle = \frac{1}{S_{\text{vac}}} (\Phi_0, T(\psi_{\alpha}(x) S) \Phi_{\rho \mu}),$$

где  $\Phi_{\rho \mu} = a_{\rho \mu}^{\dagger} \Phi_0$ , то

$$\frac{1}{S_{\text{vac}}} (\Phi_0, T(\psi_{\alpha}(x) S) \Phi_{\rho \mu}) = \frac{\sqrt{Z_2}}{\sqrt{2V} \rho_0} u_{\alpha}^{1\mu}(\rho) e^{-i\rho x},$$

следовательно, мы приходим к формуле (3.5.6), определяющей перенормировку внешних электронных линий фейнмановских диаграмм. Таким образом, видно, что константа  $Z_2$  совпадает с перенормировочной константой, введенной выше.

Подчеркнем также, что величина  $Z_2 \equiv \eta^2$  определяет полюсную часть функции Грина электрона (см. § 3.6).

Так как функции  $\rho_1(M^2)$ ,  $\rho_2(M^2)$  обращаются в нуль при  $M^2 < \underline{m}^2$ , то согласно (3.5.40), (3.5.42)

$$G^{(e)}(\rho) = \frac{Z_2}{\underline{m} - \hat{\rho} - i0} + \int_{\underline{m}}^{\infty} dM \left( \frac{\bar{\rho}_+(M)}{M - \hat{\rho} - i0} + \frac{\bar{\rho}_-(M)}{M + \hat{\rho} - i0} \right). \quad (3.5.44)$$

Согласно (3.5.39) постоянная  $Z_2$  связана со спектральными функциями  $\bar{\rho}_{\pm}$  формулой

$$Z_2 = 1 - \int_0^{\infty} dM (\bar{\rho}_+(M) - \bar{\rho}_-(M)). \quad (3.5.45)$$

Покажем, наконец, что если дираковское поле взаимодействует с другими полями, пространство состояний частиц которых обладает дефинитной метрикой (т. е. в формулах (3.5.32) нет множителя  $(-1)^{N_0}$ ), то справедливы неравенства

$$\rho_1(M^2) \geq 0, \quad M\rho_1(M^2) - \rho_2(M^2) \geq 0. \quad (3.5.46)$$

Действительно, согласно (3.5.35)

$$\begin{aligned} \text{Sp } \gamma^0 \rho(q) &= 4q_0 \rho_1(q^2), \quad \text{Sp } (\hat{q} - \sqrt{q^2}) \rho(q) (\hat{q} - \sqrt{q^2}) \gamma^0 = \\ &= 8q_0 \sqrt{q^2} (-\rho_2(q^2) - \sqrt{q^2} \rho_1(q^2)), \quad q_0 > 0. \end{aligned}$$

Вместе с тем согласно (3.5.32) находим

$$\text{Sp } \gamma^0 \rho(q) = (2\pi)^3 \sum_r \delta(q - p_r) \sum_\alpha |\langle 0 | \psi_\alpha(0) | r \rangle|^2 \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Sp } (\hat{q} - \sqrt{q^2}) \rho(q) (\hat{q} - \sqrt{q^2}) \gamma^0 &= (2\pi)^3 \sum_r \delta(q - p_r) \times \\ &\times \sum_\alpha |(\hat{q} - \sqrt{q^2}) \langle 0 | \psi(0) | r \rangle_\alpha|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

откуда следуют неравенства (3.5.46).

Неравенства (3.5.46) эквивалентны неравенствам

$$\bar{\rho}_-(M) \leq 0, \quad \bar{\rho}_+(M) - \bar{\rho}_-(M) \geq 0, \quad (3.5.47)$$

откуда согласно (3.5.45) получаем  $0 \leq Z_2 \leq 1$ . Подчеркнем, однако, что в квантовой электродинамике эти неравенства вследствие индефинитной метрики в пространстве скалярных фотонов не выполняются.

**3.5.5. Спектральное представление функции Грина фотона.** Рассмотрим фотонную функцию Грина

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x - x') = -i \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(x')) | 0 \rangle.$$

Для того чтобы избежать появления множителя  $(-1)^{N_0}$  в спектральных функциях, рассмотрим вначале функцию

$$T_{\mu\nu}(x - x') = \langle 0 | T(j_\mu(x) j_\nu(x')) | 0 \rangle, \quad (3.5.48)$$

где  $j_\mu(x)$  — калибровочно-инвариантные операторы плотности тока. Так как  $[\partial^\mu A_\mu(x), j_\nu(x')] = 0$ , то состояние  $j_\nu(x) | 0 \rangle$  будет физическим. Поэтому

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) &= \theta(t) \int d^4q e^{-iqx} \rho_{\mu\nu}(q) \theta(q_0) \frac{1}{(2\pi)^3} + \\ &+ \theta(-t) \int d^4q e^{iqx} \rho_{\nu\mu}(q) \theta(q_0) \frac{1}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (3.5.49)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{\mu\nu}(q) \theta(q_0) &= (2\pi)^3 \sum_r \delta(q - p_r) \langle 0 | j_\mu(0) | r \rangle \langle r | j_\nu(0) | 0 \rangle \equiv \\ &\equiv (2\pi)^3 \langle 0 | j_\mu(0) \delta(q - P) j_\nu(0) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.5.50)$$

и суммирование в этой формуле выполняется по физическим стационарным состояниям  $|r\rangle$ , 4-вектор энергии — импульса которых равен  $p_r^\mu$ . При получении этих формул мы учли, что  $j_\mu(x) = e^{iPx} j_\mu(0) e^{-iPx}$ .

Из соображений релятивистской инвариантности ясно, что

$$\rho_{\mu\nu}(q) = -g_{\mu\nu} q^2 \rho(q^2) + q_\mu q_\nu \rho_1(q^2).$$



Так как в силу сохранения тока  $[P_\mu, j^\mu(0)] = 0$ , то согласно (3.5.50)

$$q^\mu \rho_{\mu\nu}(q) = 0,$$

следовательно,

$$\rho_{\mu\nu}(q) = -(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu) \rho(q^2). \quad (3.5.50')$$

Вследствие того что  $(p_r)^2 \geq 4\bar{m}^2$  (спектр физических состояний в (3.5.50) начинается с состояния электронно-позитронной пары), функция  $\rho(q^2)$  обращается в нуль при  $q^2 < 4\bar{m}^2$ .

Таким образом,

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q (-q_{\mu\nu}q^2 + q_\mu q_\nu) \rho(q^2) \theta(q_0) (\theta(t) e^{-iqx} + \theta(-t) e^{iqx}).$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} -q_\mu q_\nu (\theta(t) e^{-iqx} + \theta(-t) e^{iqx}) &= \partial_\mu \partial_\nu (\theta(t) e^{-iqx} + \theta(-t) e^{iqx}) + \\ &+ i(q_\nu g_{\mu 0} + q_\mu g_{\nu 0} - q_0 g_{\nu 0} g_{\mu 0}) \delta(t) (e^{-iqx} + e^{iqx}) - \\ &- \delta'(t) g_{\nu 0} g_{\mu 0} (e^{iqx} - e^{-iqx}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) &= T_{\mu\nu}^*(x) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q \rho(q^2) \theta(q_0) i\delta(t) (e^{-iqx} + e^{iqx}) \times \\ &\times (q_\nu g_{\mu 0} + q_\mu g_{\nu 0} - q_0 g_{\nu 0} g_{\mu 0} - q_0 g_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (3.5.51)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^*(x) &= (-\partial_\mu \partial_\nu + g_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial_\lambda) \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q \theta(q_0) \times \\ &\times \delta(q^2 - m^2) (\theta(t) e^{-iqx} + \theta(-t) e^{iqx}). \end{aligned}$$

Учитывая, что (см. (2.3.11))

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q \theta(q_0) \delta(q^2 - m^2) (\theta(t) e^{-iqx} + \theta(-t) e^{iqx}) = -i\Delta^c(x, m^2),$$

получаем

$$T_{\mu\nu}^*(x) = (-\partial_\mu \partial_\nu + g_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial_\lambda) \frac{1}{i} \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2) \Delta^c(x, m^2). \quad (3.5.52)$$

Второе слагаемое в формуле (3.5.51), очевидно, можно представить в виде

$$ig_{kl} \delta_\mu^k \delta_\nu^l \delta(t) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{-iqx} \int_0^\infty dq_0^2 \rho(q_0^2 - \mathbf{q}^2).$$

Поэтому, учитывая, что  $\rho(q^2) = 0$  при  $q^2 < 0$ , находим

$$T_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}^*(x) + ig_{kl} \delta_\mu^k \delta_\nu^l \delta(x) \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2) \quad (3.5.53)$$

(по индексам  $k$  и  $l \equiv 1, 2, 3$  производится суммирование).

Из (3.5.52) видно, что  $T_{\mu\nu}^*(x)$  представляет собой релятивистски-ковариантную величину; величина  $T_{\mu\nu}(x)$  этим свойством не обладает. Сравнение (3.5.53) с определением релятивистски-инвариантного  $T^*$ -произведения токов, данного в п. 3.2.6, показывает, что именно величина  $T_{\mu\nu}^*(x)$  совпадает с вакуумным средним релятивистски-инвариантного  $T$ -произведения токов (см. также п. 5.2.2).

Вернемся к вакуумному среднему  $T$ -произведению электромагнитных потенциалов и для простоты выкладок используем фейнмановскую калибровку пропаторов ( $\xi = 1$ ).

Учитывая, что  $[A_\mu(x), A_\nu(x')]|_{t=t'} = 0$ , получаем

$$\partial_\lambda G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x-x') = -i \langle 0 | T(\partial_\lambda A_\mu(x) A_\nu(x')) | 0 \rangle.$$

Дифференцируя это выражение второй раз по  $x_\lambda$  и замечая, что в фейнмановской калибровке

$$[\partial_0 A_\mu(x), A_\nu(x')]|_{t=t'} = i g_{\mu\nu} \delta(x-x'), \quad \partial^\lambda \partial_\lambda A_\mu(x) = -j_\mu(x),$$

получаем

$$\partial^\lambda \partial_\lambda G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x-x') = g_{\mu\nu} \delta(x-x') + i \langle 0 | T(j_\mu(x) A_\nu(x')) | 0 \rangle.$$

Производя аналогичные выкладки при дифференцировании по  $x'_\rho$  и учитывая, что  $[j_\mu(x), A_\nu(x')]|_{t=t'} = [j_\mu(x), \partial_0 A_\nu(x')]|_{t=t'} = 0$ , находим

$$\partial^\rho \partial_\rho \partial^\lambda \partial_\lambda G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x-x') = g_{\mu\nu} \partial^\rho \partial_\rho \delta(x-x') - i \langle 0 | T(j_\mu(x) j_\nu(x')) | 0 \rangle.$$

Известно, что функция Грина  $G_{\mu\nu}$  является 4-тензором второго ранга. Поэтому под  $T$ -произведением токов следует понимать инвариантное  $T^*$ -произведение и, следовательно, последнюю формулу точнее записывать в виде

$$\partial^\rho \partial_\rho \partial^\lambda \partial_\lambda G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x-x') = g_{\mu\nu} \partial^\rho \partial_\rho \delta(x-x') - i \langle 0 | T^*(j_\mu(x) j_\nu(x')) | 0 \rangle,$$

или в фурье-компонентах

$$(q^2)^2 G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(q) = -q^2 g_{\mu\nu} - i \langle 0 | T^*(j_\mu j_\nu) | 0 \rangle_q,$$

где согласно (3.5.52)

$$\langle 0 | T^*(j_\mu j_\nu) | 0 \rangle_q = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \frac{1}{i} \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2) \Delta^c(q, m^2).$$

Таким образом, учитывая, что  $\rho(q^2) = 0$  при  $q^2 < 4m^2$ , получаем

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(q) = -\frac{1}{q^2} \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} + \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) G^{(\gamma)}(q),$$

$$G^{(\gamma)}(q) = -\frac{1}{q^2} + \int_{4m^2}^\infty dm^2 \rho(m^2) \frac{\Delta^c(q, m^2)}{q^2}.$$

Так как

$$\Delta^c(q, m^2) = \frac{1}{m^2 - q^2}, \quad \frac{1}{q^2} \Delta^c(q, m^2) = \frac{1}{m^2} \Delta^c(q, m^2) + \frac{1}{m^2 q^2},$$

$$G^{(\nu)}(q) = -\frac{Z_3}{q^2} + \int_{4m^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2} \Delta^c(q, M^2), \quad (3.5.54)$$

где

$$Z_3 = 1 - \int_{4m^2}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2}. \quad (3.5.55)$$

Эта формула определяет спектральное представление фотонной функции Грина. Далее мы убедимся, что константа  $Z_3$  совпадает с перенормировочной константой  $Z_3$ , введенной в п. 3.5.1.

Докажем положительную определенность функции  $\rho(q^2)$ . Из (3.5.50) следует, что

$$\rho(q^2) = -\frac{1}{3}(2\pi)^3 \sum_r \delta(q - p_r) \left\{ |\langle 0 | j_0(0) | r \rangle|^2 - \sum_{k=1}^3 |\langle 0 | j_k(0) | r \rangle|^2 \right\}.$$

Так как вследствие закона сохранения тока

$$-p_r^0 \langle 0 | j_0(0) | r \rangle = p_r^k \langle 0 | j_k(0) | r \rangle$$

и  $|p_r| < p_r^0$  (так как  $p_r$  — времениподобный вектор), то  $\rho(q^2) \geq 0$ .

Функция  $\rho(M^2)/M^2 \equiv \bar{\rho}(M^2)$  представляет собой спектральную функцию 4-потенциалов  $A_\mu(x)$ . Действительно, величина

$$\bar{\rho}_{\mu\nu}(q) = (2\pi)^3 \langle 0 | A_\mu(0) \delta(q - P) A_\nu(0) | 0 \rangle, \quad q_0 > 0, \quad (3.5.56)$$

определяет  $T$ -произведение потенциалов  $A_\mu(x)$  так же, как величина  $\rho_{\mu\nu}(q)$  (см. (3.5.50)) определяла  $T$ -произведение токов. Согласно (3.5.56)

$$(q^2)^2 \bar{\rho}_{\mu\nu}(q) = (2\pi)^3 \langle 0 | j_\mu(0) \delta(q - P) j_\nu(0) | 0 \rangle \equiv \rho_{\mu\nu}(q).$$

Поэтому

$$\bar{\rho}_{\mu\nu}(q) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) \frac{\rho(q^2)}{q^2}, \quad q^2 \neq 0, \quad (3.5.57)$$

что и требовалось доказать.

Покажем, что константа  $Z_3$  положительна. Действительно, полюсный член в (3.5.54) получается в результате суммирования по промежуточным состояниям в спектральной функции  $\bar{\rho}_{\mu\nu}(q)$ , соответствующим однофотонным состояниям. Для однофотонных состояний справедлива формула

$$\langle 0 | A_\mu(x) | k\lambda \rangle = \frac{\eta'}{\sqrt{2V\omega}} e_{k\mu}^{(\lambda)} e^{-ikx}, \quad \omega = |\mathbf{k}|, \quad \lambda = 1, 2,$$

причем можно считать, что  $\eta' > 0$ . При  $\eta' = 1$  мы приходим к хорошо известному поперечному пропатору свободного электромагнитного поля  $G_0^{(\nu)}(q) = -1/q^2$ . Поэтому полюсная часть пропатора  $G^{(\nu)}(q)$  взаимодействующих полей имеет вид  $G^{(\nu)}(q) \approx -\eta'^2/q^2$ . Таким образом,  $Z_3 = \eta'^2 > 0$ , следовательно, согласно (3.5.55)

$$0 \leq Z_3 < 1. \quad (3.5.58)$$

В п. 3.5:2 мы видели, что

$$\langle 0 | A_\mu(x) | k\lambda \rangle = \frac{1}{S_{\text{vac}}} (\Phi_0, T(A_\mu(x) S) \Phi_{k\lambda}),$$

где  $\Phi_{k\lambda} = c_{k\lambda}^\dagger \Phi_0$ . Поэтому

$$\frac{1}{S_{\text{vac}}} (\Phi_0, T(A_\mu(x) S) \Phi_{k\lambda}) = \frac{\sqrt{Z_3}}{\sqrt{2V\omega}} e_{k\mu}^{(\lambda)} e^{-ikx}, \quad (3.5.59)$$

и, следовательно, мы приходим к формуле (3.5.6), определяющей перенормировку внешних фотонных линий фейнмановских диаграмм.

Из (3.5.54) следует, что  $G^{(\nu)}(k)$  как функция  $k^2$  не имеет особенностей в верхней полуплоскости переменной  $k^2$ . Если интеграл  $\mathcal{J} \equiv \int_{4m^2}^{\infty} dM^2 \rho(M^2)/M^2$  конечен, то, как видно из (3.5.54), функция  $G^{(\nu)}(\bar{k})$  ведет себя в области больших  $k^2$  так же, как свободная функция Грина электромагнитного поля. Если величина  $\mathcal{J}$  бесконечна, то функция  $G^{(\nu)}(k)$  убывает при  $k^2 \rightarrow \infty$  медленнее, чем  $\frac{1}{k^2}$ .

Наконец, используя соотношение

$$\frac{1}{x-i0} = \pi i \delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x},$$

легко получить формулы

$$\begin{aligned} \frac{\rho(q^2)}{q^2} &= \frac{1}{\pi} \text{Im} G^{(\nu)}(q), \\ G^{(\nu)}(q) &= -\frac{Z_3}{q^2} + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dM^2 \frac{\text{Im} G^{(\nu)}(q)}{M^2 - q^2 - i0}. \end{aligned} \quad (3.5.60)$$

## § 3.6. ТЕОРИЯ ПЕРЕНОРМИРОВОК

### 3.6.1. Расходимости неприводимых диаграмм матрицы рассеяния.

При вычислении элементов матрицы рассеяния в высших приближениях мы встречаемся с принципиальной трудностью, вследствие которой многие годы считалось, что применимость квантовой электродинамики ограничена первым приближением. Эта трудность заключается в том, что выражения для матричных элементов в высших приближениях содержат интегралы, расходящиеся в области больших импульсов виртуальных частиц.

В данном параграфе рассмотрим вопрос об этих расходимостях и о методах их устранения. При этом мы не будем рассматривать встречающиеся в ряде случаев расходимости в области малых импульсов («инфракрасная катастрофа»). Они связаны с неприменимостью теории возмущений при малых частотах фотонов.

Чтобы разъяснить причину возникновения расходимостей, рассмотрим некоторую неприводимую диаграмму. В общем случае ей соответ-

Ствует многократный интеграл по импульсам виртуальных частиц

$$\mathcal{J}(p_1 \dots p_m) = \int d^4 p'_1 \dots d^4 p'_n \mathcal{F}(p'_1 \dots p'_n; p_1 \dots p_m), \quad (3.6.1)$$

где  $\mathcal{F}(p'; p)$  — некоторая рациональная функция, представляющая собой отношение двух полиномов; переменные  $p_1, \dots, p_m$  представляют собой 4-импульсы свободных частиц.

В простейшем случае мы имеем дело с интегралом вида

$$\mathcal{J} = \int d^4 p \frac{f(p)}{(p^2 + l)^n}, \quad (3.6.2)$$

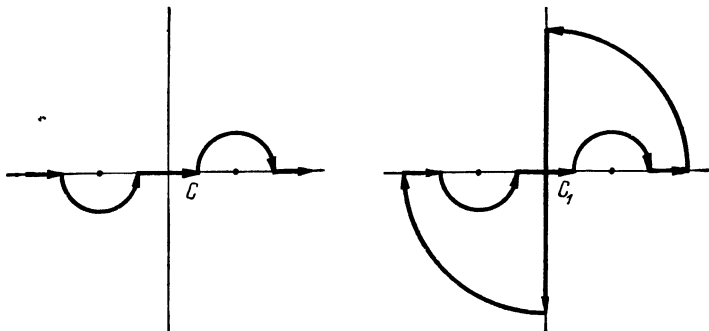


Рис. 19

где  $f(p)$  — некоторый полином от  $p^2$ . В этом интеграле в соответствии с определением фурье-компонент функций распространения величину  $p^2$  следует заменить на  $p^2 + i0$ . Согласно изложенному в п. 2.3.3 можно поступить иначе, а именно вместо введения бесконечно малой мнимой добавки в знаменателе производить интегрирование по  $p_0$  вдоль контура  $C$ , показанного на рис. 19. Однако интеграл (3.6.2) даже при достаточно большом  $n$  и указанном правиле обхода полюсов не будет абсолютно сходящимся. Это связано с тем, что пространство импульсов является псевдоевклидовым. Поэтому если вначале производить интегрирование по поверхности гиперboloида  $p^2 = \text{const}$ , то вследствие бесконечности площади последнего этот интеграл будет расходиться. При определении интеграла  $\mathcal{J}$  всегда вначале будем выполнять интегрирование по  $p_0$ . При этом очевидно, что интеграл по контуру  $C'$  (см. рис. 19) в комплексной плоскости  $p_0$  будет равен нулю. Поэтому вместо интегрирования по контуру  $C$  (см. рис. 19) мы можем выполнять интегрирование вдоль мнимой оси:

$$\int_C dp_0 \frac{f(p)}{(p^2 + l)^n} = i \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{f(p)}{(p^2 + l)^n} \Big|_{p_0 \rightarrow i p_0}$$

(мы учли при этом, что подынтегральная функция в (3.6.2) убывает при  $p_0 \rightarrow \infty$  быстрее, чем  $p_0^{-1}$ ). Таким образом,

$$\mathcal{J} = i \int d^4 p \frac{f(p)}{(p^2 + l)^n} \Big|_{p_0 \rightarrow i p_0}.$$

В этом интеграле мы имеем дело не с псевдоэвклидовой, а с евклидовой метрикой ( $p^2/p_0 \rightarrow ip_0 = -p^2 - p_0^2 = \text{const}$  является сферической поверхностью).

В общем случае интеграл (3.6.1) приобретает, очевидно, вид

$$\mathcal{J}(p_1, \dots, p_m) |_{p_0 \rightarrow ip_0} = i^n \int d^4 p'_1 \dots d^4 p'_n \mathcal{F}(p; p') |_{p_0 \rightarrow ip_0, p'_0 \rightarrow ip'_0}. \quad (3.6.3)$$

После вычисления этого интеграла по переменным  $p'_{i0}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) следует выполнить аналитическое продолжение по переменным  $p_{i0}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) в псевдоэвклидовом пространстве. Переход к евклидовому пространству позволяет произвести классификацию расходимостей по разности степеней полиномов в числителе и знаменателе функции  $\mathcal{F}$ . Так как каждой внутренней электронной линии диаграммы соответствует множитель  $-iS^c(p)$ , содержащий импульс в степени  $-1$ , а каждой внутренней фотонной линии — множитель  $iD^c(p)$ , содержащий импульс в степени  $-2$ , то разность степеней полиномов в числителе и знаменателе  $\mathcal{F}$  будет равна  $-(F_e + 2F_\gamma)$ , где  $F_e$  и  $F_\gamma$  — числа внутренних электронных и фотонных линий.

Подсчитаем число переменных интегрирования. Число различных импульсов равно числу внутренних линий, т. е. равно сумме  $F_e + F_\gamma$ . Но они не независимы, так как три импульса линий, сходящихся в каждой из  $n$  вершин диаграммы, связаны законом сохранения. Один из законов сохранения можно отнести к внешним линиям, поэтому число независимых импульсов, по которым производится интегрирование, будет равно  $F_e + F_\gamma - n + 1$ . Учтем, что с каждой вершиной связаны две электронные и одна фотонная линии. С каждым концом электронной линии связана одна вершина. Поэтому

$$n = F_e + \frac{1}{2} N_e, \quad (3.6.4)$$

где  $N_e$  — число внешних электронных линий (при подсчете числа вершин выходящие внешние электронные линии не учитываются).

С каждой внутренней фотонной линией связаны две вершины, а с каждой внешней фотонной линией — одна. Поэтому

$$n = 2F_\gamma + N_\gamma, \quad (3.6.5)$$

где  $N_\gamma$  — число внешних фотонных линий.

Если интеграл  $\mathcal{J}$  схематически записать в виде

$$\mathcal{J} = \int d^{4\omega_1} p \cdot p^{-\omega_2},$$

где  $\omega_1 = F_e + F_\gamma - n + 1$ ,  $\omega_2 = F_e + 2F_\gamma$ , то, используя приведенный подсчет, получаем

$$\omega_1 = \frac{1}{2} n + 1 - \frac{1}{2} N_e - \frac{1}{2} N_\gamma, \quad \omega_2 = 2n - \frac{1}{2} N_e - N_\gamma.$$

Поскольку мы рассматриваем связанную неприводимую диаграмму, то подынтегральная функция не распадается на множители, содержащие независимые переменные. Поэтому сходимость интеграла определяется

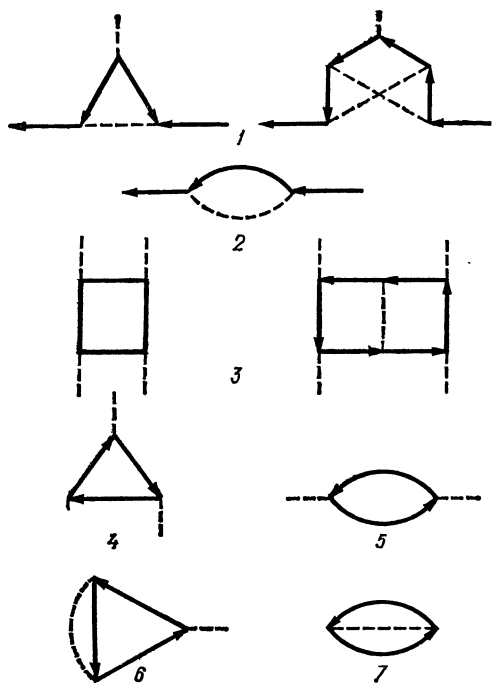


Рис. 20

3.  $N_e = 0$ ,  $N_\gamma = 4$ ,  $\omega = 0$ ; 4.  $N_e = 0$ ,  $N_\gamma = 3$ ,  $\omega = 1$ ;  
 5.  $N_e = 0$ ,  $N_\gamma = 2$ ,  $\omega = 2$ ; 6.  $N_e = 0$ ,  $N_\gamma = 1$ ,  $\omega = 3$ ;  
 7.  $N_e = 0$ ,  $N_\gamma = 0$ ,  $\omega = 4$ .

На рис. 20 показаны простейшие неприводимые диаграммы, соответствующие этим расходимостям. Не все из них, однако, вносят вклад в матричные элементы. Ясно, что диаграмму 7, представляющую собой вакуумную петлю, можно вообще не учитывать (она приводит только к появлению фазового множителя в матричном элементе). Согласно теореме Фарри, можно также не рассматривать диаграммы 4 и 6, представляющие собой замкнутые электронные петли с нечетным числом вершин.

Таким образом, основными неприводимыми диаграммами, приводящими к расходимостям в матрице рассеяния, являются ЭСЭД ( $\omega = 1$ ) и ФСЭД ( $\omega = 2$ ) 2-го порядка, неприводимая ВД любого порядка ( $\omega = 0$ ) и диаграмма рассеяния света светом ( $\omega = 0$ ; диаграмма 3).

Покажем, что формулу (3.6.6), определяющую индекс расходимости диаграммы, можно получить иным способом, исходя из соображений размерности. При этом будем рассматривать несколько более общий случай, когда константа связи, которую обозначим через  $g$ , в отличие от электродинамики, имеет ненулевую размерность. Считая  $\hbar = c = 1$ , размерность всех величин можно выразить через размерность импульса:  $[g] = p^s$ . Будем предполагать, что функция распространения

разностью  $4\omega_1 - \omega_2$  (она называется индексом расходимости диаграммы):

$$\omega = 4\omega_1 - \omega_2 = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e. \quad (3.6.6)$$

При  $\omega < 0$  интеграл сходится, при  $\omega \geq 0$  расходится. Степень расходимости определяется величиной  $\omega$ : при  $\omega = 0$  в области больших импульсов интеграл расходится как  $\ln p$ , а при  $\omega > 0$  — как  $p^\omega$ . Интересно, что величина  $\omega$  зависит только от числа внешних линий и не зависит от числа вершин  $n$ .

Из (3.6.6) следует, что существует ограниченное число типов расходящихся интегралов, соответствующих следующим значениям чисел  $N_e$  и  $N_\gamma$ :

1.  $N_e = 2$ ,  $N_\gamma = 1$ ,  $\omega = 0$ ;  
 2.  $N_e = 2$ ,  $N_\gamma = 0$ ,  $\omega = 1$ ;

в области больших импульсов зависит только от импульсов и не зависит от других размерных параметров (таким свойством обладает функция распространения скалярного, электромагнитного, спинорных полей и не обладает функция распространения векторных полей, см. формулу (2.3.52')). Так как матрица рассеяния безразмерна, то безразмерны и все ее матричные элементы  $S_{i \rightarrow j}$ ,  $[S_{i \rightarrow j}] = p^0$ . Вместе с тем размерность матричного элемента неприводимой диаграммы  $n$ -го порядка теории возмущений определяется формулой

$$[(S_n)_{i \rightarrow j}] = p^{sn-4+\omega + \sum_i l_i N_i},$$

где  $p^{sn}$  определяется размерностью  $g^n$ ;  $p^{-4}$  размерность  $\delta$ -функции, выражающей закон сохранения 4-импульса диаграммы в целом;  $p^\omega$  — размерность фейнмановского интеграла  $\int dp \cdot p^{\omega-1}$  с индексом расходимости  $\omega$ ;  $p^{\sum_i l_i N_i}$  — размерность волновых функций, сопоставляемых внешним линиям диаграммы ( $N_i$  — число внешних линий частиц сорта  $i$ ;  $l_i$  — размерность операторов, соответствующих этим линиям). Так как  $[(S_n)_{i \rightarrow j}] = p^0$ , то

$$\omega = 4 - sn - \sum_i l_i N_i. \quad (3.6.8)$$

Эта формула обобщает формулу (3.6.6). В случае квантовой электродинамики  $s = 0$  и размерность операторов поля определяется перестановочными соотношениями (3.1.34), (3.1.39), из которых следует  $[\psi] = p^{3/2}$ ,  $[A_\mu] = p^1$ , поэтому  $l_\psi = \frac{3}{2}$ ,  $l_A = 1$ . Таким образом, мы приходим к формуле (3.6.6).

Формула (3.6.8) позволяет выяснить влияние размерности константы связи на степень расходимости неприводимых диаграмм. Если  $s > 0$ , то расходиться может только конечное число неприводимых диаграмм. В этом случае теорию называют суперперенормируемой. Примером такой теории является теория скалярного поля с лагранжианом взаимодействия  $g\varphi^3$ . Так как величина  $g \int d^4x \varphi^3$  имеет нулевую размерность и  $[\varphi] = p^1$ , то  $s = 1$ . Если  $s = 0$ , то теория называется перенормируемой. В этом случае количество неприводимых расходящихся диаграмм бесконечно, однако конечно число возможных типов расходящихся диаграмм (каждый тип характеризуется числом внешних линий диаграммы). Примерами перенормируемых теорий являются квантовая электродинамика и теория скалярного поля с лагранжианом взаимодействия  $g\varphi^4$ . Наконец если  $s < 0$ , то возникает бесконечное число расходящихся диаграмм с неограниченным числом типов расходимостей. В этом случае теорию называют неперенормируемой. Примером неперенормируемой теории является, например, теория скалярного поля с лагранжианом взаимодействия  $g\varphi^m$ ,  $m \geq 5$ , или теория с лагранжианом  $g\varphi \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$ .

**3.6.2. Промежуточная регуляризация.** Появление расходимостей в матрице рассеяния свидетельствует о неудовлетворительности теории. Ясно, что ряд теории возмущений, строго говоря, не имеет смысла, если второй член ряда бесконечен. Между тем результаты применения



теории возмущений в первом приближении хорошо подтверждаются опытом. Вместе с тем для того, чтобы первое приближение имело какой-либо теоретический смысл, следующие приближения должны приводить лишь к малым поправкам.

Идея выхода из этого противоречия подсказывается уже классической электродинамикой. Как известно, классическая электродинамика не является логически замкнутой теорией. Последовательное ее применение приводит к противоречиям, проявляющимся, например, в бесконечной электромагнитной массе электрона. Смысл этих противоречий сводится к неприменимости уравнений классической электродинамики на расстояниях, меньших классического радиуса электрона  $e^2/mc^2$  (фактически классическая электродинамика из-за квантовых эффектов неприменима уже при расстояниях порядка  $\hbar/mc$ ).

Квантовая электродинамика правильно описывает взаимодействие между электронами и фотонами в области достаточно больших пространственно-временных интервалов или соответственно в области достаточно малых импульсов частиц. Однако в области малых пространственно-временных интервалов, т. е. больших импульсов, она становится неприменимой. Не рассматривая здесь вопрос о том, связано ли это ограничение с недостатками основных идей и уравнений квантовой электродинамики или с неприменимостью теории возмущений, можно, однако, утверждать, что если рассматривать процессы, в которых частицы обмениваются импульсами, малыми по сравнению с некоторым граничным импульсом  $\Lambda$ , то область импульсов виртуальных частиц, превосходящих  $\Lambda$ , не будет играть практически никакой роли. В этих условиях величина граничного импульса не должна входить в выражения для элементов  $S$ -матрицы. Поэтому хотя точно величина  $\Lambda$  не известна, тем не менее мы можем варьировать ее и выбирать так, чтобы, с одной стороны, выполнялось условие  $\Delta p \ll \Lambda$ , где  $\Delta p$  — величина, характеризующая изменение импульса частиц при столкновениях, а с другой — чтобы была применима теория возмущений.

Введение граничного импульса математически означает, что при вычислении интегральных величин, сопоставляемых диаграммам Фейнмана, интегрирование будем выполнять не по бесконечной, а по некоторой конечной области 4-импульсного пространства. Эта область должна быть, естественно, инвариантной относительно преобразований Лоренца.

Вместо интегрирования по конечной области в 4-импульсном пространстве можно пользоваться также другими, эквивалентными методами, состоящими в введении в подынтегральные выражения некоторого «обрезающего фактора», т. е. множителя  $f(p, \Lambda)$ , равного единице при  $|p^2| \ll \Lambda^2$  и обращающегося в нуль при  $|p^2| \gg \Lambda^2$ . Введение «обрезающего фактора» в подынтегральное выражение матричного элемента будем называть промежуточной регуляризацией. Частным случаем промежуточной регуляризации является модификация функций Грина (функций распространения) свободных частиц. Исходные функции распространения  $\mathcal{L}^c, S^c$  можно записать единым образом в виде

$$\mathcal{D}(p) = \mathcal{P}(p) \frac{1}{m^2 - p^2 - i0},$$

где  $\mathcal{P}(p)$  — некоторый полином от 4-импульса  $p$  и  $m$  — масса частиц (степень полинома в случае фотона равна нулю, в случае электрона — единице, в случае векторной частицы — двум).

Модифицированную функцию распространения можно определить следующим образом [20]:

$$\underline{\mathcal{D}}(p) = \frac{\mathcal{P}(p)}{m^2 - p^2 - i0} - \mathcal{P}(p) \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\mathcal{M}_i^2 - p^2 - i0}, \quad (3.6.9)$$

где  $\mathcal{M}_i$  —  $n$  произвольных вспомогательных масс, а коэффициенты  $c_i \equiv c_i(\mathcal{M})$  определяются из соотношений

$$\sum_{i=1}^n c_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{M}_i^2 = m^2, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{M}_i^{2(n-2)} = m^{2(n-2)}. \quad (3.6.10)$$

При этих условиях модифицированная функция распространения убывает при больших  $p^2$  как  $\mathcal{P}(p) (p^2)^{-n-1}$ . Поэтому при достаточно больших  $n$  матричный элемент не будет содержать расходимостей в области больших  $p^2$ . Эта промежуточная регуляризация носит название регуляризации Паули — Вилларса.

В квантовой электродинамике (если не учитывать вакуумных петель) достаточно регуляризовать только электронную функцию распространения  $\underline{S}^c(p)$ , используя лишь одну вспомогательную массу

$$\underline{S}^c(p) = (\hat{p} + m) \left\{ \frac{1}{-p^2 + m^2 - i0} - \frac{1}{-p^2 + \mathcal{M}^2 - i0} \right\}. \quad (3.6.11)$$

Рассмотрим еще один важный тип промежуточной регуляризации — так называемую размерную регуляризацию, связанную с изменением размерности пространства, по которому происходит интегрирование в матричных элементах  $S$ -матрицы.

Мы знаем, что интегралы, сопоставляемые различным диаграммам, имеют следующую структуру:

$$\mathcal{I} = \int d^4 p_1 \dots d^4 p_n \frac{F(p_1, \dots, p_n)}{a_1 \dots a_n}, \quad (3.6.12)$$

где  $F$  — некоторый полином по 4-импульсам  $p$ ;  $a_i$  — полином второй степени относительно  $p$ . С помощью повторного применения формулы типа

$$\frac{1}{a_i a_j} = \int_0^1 du [a_i u + a_j (1-u)]^{-2} \quad (3.6.13)$$

(и формул, получающихся из (3.6.13) путем дифференцирования по  $a_i$ ) вычисление интеграла (3.6.12) сводится к вычислению интегралов типа

$$\mathcal{I}(u_1, \dots, u_{n-1}) = \int d^4 p \frac{F(p)}{[p^2 - 2pk + l]^m}, \quad (3.6.14)$$

где  $k$  и  $l$  — некоторые функции параметров  $u_1, \dots, u_{n-1}$ , по которым далее должно производиться интегрирование. В методе размерной

регуляризации вместо этого интеграла рассматривается интеграл [21, 22]

$$\mathcal{G} = \int d^d p \frac{F(p)}{(p^2 - 2pk + l)^m},$$

где целые числа  $d$ ,  $m$  выбираются так, чтобы интеграл существовал. В этом случае, как мы убедимся далее, справедлива формула

$$\int \frac{d^d p}{(p^2 - 2pk + l)^m} = \frac{i\pi^{d/2}}{\Gamma(m)} \frac{\Gamma\left(m - \frac{d}{2}\right)}{(-l + k^2)^{m - \frac{d}{2}}} (-1)^m. \quad (3.6.15)$$

Для сходимости этого интеграла должно выполняться соотношение  $d < 2m$ . Правая часть формулы имеет смысл при произвольных вещественных значениях параметров  $d$ ,  $m$ , причем величины  $m$ ,  $m - \frac{d}{2}$  не должны быть целыми отрицательными числами или нулями. При этом формула (3.6.15) определяет соответствующие интегралы при произвольном значении  $d$ . При  $d$  целом и  $d \geq 2m$  интеграл (3.6.15) расходится. Идея размерной регуляризации заключается в том, что при вычислении расходящихся интегралов мы переходим от пространства с 4-измерениями к пространству с  $d$ -измерениями и считаем далее  $d$  произвольным вещественным числом, близким к 4. Таким образом, мы придаем смысл расходящимся интегралам, не прибегая к понятию граничного импульса  $\Lambda$  или вспомогательных масс в методе Паули — Вилларса. Далее после проведения физической процедуры перенормировки заряда и массы электрона проводится предельный переход  $d \rightarrow 4$  аналогично тому, как в методе с граничным импульсом производится (после перенормировки) предельный переход  $\Lambda \rightarrow \infty$ , а в методе Паули — Вилларса —  $M_i \rightarrow \infty$ .

**3.6.3. Метод размерной регуляризации.** Выше изложена идея метода размерной регуляризации; теперь мы перейдем к нахождению интегралов, встречающихся в этом методе, и получим формулы, используемые при применении данного метода.

Рассмотрим сперва интеграл

$$\mathcal{G} = \int \frac{d^d p}{(p^2 - 2pk + l)^\alpha},$$

где  $d$  — целое число и  $\alpha$  — произвольное вещественное число, причем  $\alpha > \frac{d}{2}$ , так что интеграл существует. Производя в этом сходящемся интеграле замену переменных  $p \rightarrow p + k$ , получаем

$$\mathcal{G} = \int \frac{d^d p}{(p^2 + l - k^2)^\alpha}.$$

Так как  $d^d p = ip^{d-1} dp d\Omega$  (множитель  $i$  появляется при переходе к интегрированию в евклидовом пространстве, см. п. 3.6.1), где  $d\Omega$  — элемент телесного угла  $d - 1$  мерной сферы в  $d$ -мерном пространстве, и

$$\int d\Omega = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)},$$

то

$$\mathcal{G} = \frac{2i\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty \frac{p^{d-1} dp}{(l - k^2 - p^2)^\alpha}.$$

Замечая, что

$$\int_0^\infty dx \frac{x^\beta}{(x^2 + l)^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta + 1)\right) \Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}(\beta + 1)\right)}{\Gamma(\alpha)} (l)^{-\alpha + \frac{1}{2}(\beta + 1)}, \quad (3.6.16)$$

получаем

$$\int \frac{d^d p}{(p^2 - 2pk + l)^\alpha} = \frac{i}{(-1)^\alpha} \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{(k^2 - l)^{\alpha - \frac{d}{2}}}. \quad (3.6.17)$$

Рассмотрим далее интеграл

$$\int d^d p \frac{p_\mu}{(p^2 - 2pk + l)^\alpha}.$$

Предполагая, что этот интеграл сходится, представим его в виде

$$\int \frac{d^d p p_\mu}{(p^2 - 2pk + l)^\alpha} = \frac{\partial}{\partial k^\mu} \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha - 1} \int \frac{d^d p}{(p^2 - 2pk + l)^{\alpha-1}},$$

откуда, используя формулу (3.6.17), находим

$$\int \frac{d^d p p_\mu}{(p^2 - 2pk + l)^\alpha} = ik_\mu \frac{\pi^{d/2}}{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{(k^2 - l)^{\alpha - \frac{d}{2}}}. \quad (3.6.18)$$

Поступая аналогично, получаем

$$\int \frac{d^d p p_\mu p_\nu}{(p^2 - 2pk + l)^\alpha} = \frac{i\pi^{d/2}}{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{(k^2 - l)^{\alpha - \frac{d}{2}}} k_\mu k_\nu - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2} - 1\right)}{(k^2 - l)^{\alpha - \frac{d}{2} - 1}} \right\}, \quad (3.6.19)$$

$$\int \frac{d^d p p_\mu p_\nu p_\lambda}{(p^2 - 2pk + l)^\alpha} = \frac{i\pi^{d/2}}{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{(k^2 - l)^{\alpha - \frac{d}{2}}} k_\mu k_\nu k_\lambda - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} k_\lambda + g_{\mu\lambda} k_\nu + g_{\nu\lambda} k_\mu) \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2} - 1\right)}{(k^2 - l)^{\alpha - \frac{d}{2} - 1}} \right\}.$$

В методе размерной регуляризации считается, что формулы (3.6.17) — (3.6.19) справедливы при произвольных  $\alpha$ ,  $d$ , так как правые части этих формул имеют смысл при произвольных  $\alpha$ ,  $d$ . В связи с тем что после перенормировки полагается  $d = 4$ , то векторы  $k_\mu$ , входящие в эти формулы, считаются 4-мерными.

В конкретной фейнмановской диаграмме число  $\alpha$  является целым. Однако формально его можно считать произвольным, но таким, чтобы интеграл (3.6.17) существовал при  $d = 4$ . При этом мы приходим к формулам (3.6.17) с  $d = 4$ , но с  $\alpha$ , не совпадающим со значением  $m$ , соответствующим исходной фейнмановской диаграмме. На этом замечании основана идея аналитической регуляризации, в которой пропаторы  $\mathcal{D}^c$ ,  $S^c$  заменяются функциями

$$\underline{\mathcal{D}}^c = \left(-\frac{1}{k^2}\right)^\lambda, \quad \underline{S}^c = (\hat{p} + m) \left(\frac{1}{m^2 - p^2}\right)^{\lambda'}, \quad (3.6.20)$$

где  $\lambda$  и  $\lambda'$  — произвольные, но достаточно большие параметры такие, что все фейнмановские интегралы, содержащие вместо функций  $\mathcal{D}^c$ ,  $S^c$  функции  $\underline{\mathcal{D}}^c$ ,  $\underline{S}^c$ , сходятся. После перенормировки (физической регуляризации, см. п. 3.6.6) величины  $\lambda$  и  $\lambda'$  должны быть положены равными единице. Приведем некоторые формулы, определяющие асимптотику  $\Gamma(x)$ -функции вблизи полюсов  $x = 0, -1, -2, \dots$ . Используя соотношение

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

и замечая, что  $\Gamma'(1) = -C$  ( $C = 0,577 \dots$  — постоянная Эйлера), при  $x \ll 1$  получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \frac{1}{x} - C + \dots, & \Gamma(-1+x) &= -\frac{1}{x} + C - 1 + \dots, \\ \Gamma(-2+x) &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}C + \frac{3}{4} + \dots \end{aligned} \quad (3.6.21)$$

Отсюда следует, что с точностью до членов, исчезающих при  $n \rightarrow 4$ , справедливы формулы

$$\begin{aligned} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) f(d) &= \frac{f(4)}{2 - \frac{d}{2}} - Cf(4) - 2 \frac{\partial f(4)}{\partial d} + \dots, \\ \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) f(d) &= -\frac{f(4)}{2 - \frac{d}{2}} + (C-1)f(4) + 2 \frac{\partial f(4)}{\partial d} + \dots, \\ \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) f(d) &= \frac{1}{2} \frac{f(4)}{2 - \frac{d}{2}} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}C\right) f(4) - \frac{\partial f(4)}{\partial d} + \dots, \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

где  $f(d)$  — функция, регулярная вблизи точки  $d = 4$ .

При использовании метода размерной регуляризации предполагается, что матрицы Дирака удовлетворяют условиям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu},$$

где  $g_{00} = 1$ ,  $g_{ii} = -1$  ( $i = 1, \dots, d-1$ ) и  $g_{\mu\nu} = 0$  при  $\mu \neq \nu$  ( $d$  предполагается целым). Алгебра таких матриц может быть реализована в пространстве матриц размерности  $2^{d/2}$ . Замечая, что  $\text{Sp } I = 2^{d/2}$ , так же, как в п. 1.5.2, легко получить следующие формулы, определяющие шпур от произведения матриц  $\gamma_\mu$ :

$$\begin{aligned} \text{Sp } \gamma_\mu &= 0, & \text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu &= 2^{d/2} g_{\mu\nu}, \\ \text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho &= 2^{d/2} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} + g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}), \dots \end{aligned} \quad (3.6.23)$$

Далее, используя перестановочные соотношения для матриц  $\gamma_\mu$ , легко получить формулы

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu &= (2-d) \gamma_\nu, & \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma^\mu &= 4g_{\nu\lambda} + (d-4) \gamma_\nu \gamma_\lambda, \\ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho \gamma^\mu &= -2\gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma_\nu + (4-d) \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho, \dots \end{aligned} \quad (3.6.24)$$

Подчеркнем, что после вычисления шпуров и проведения процедуры перенормировки следует производить предельный переход  $d \rightarrow 4$ .

Отметим, наконец, что при использовании метода размерной регуляризации нужно учитывать тот факт, что заряд должен иметь вполне определенную размерность. Действительно, матричные элементы  $S$ -матрицы должны быть безразмерными, а следовательно, безразмерной должна быть величина  $\int d^d x j A$ . Из коммутационных соотношений для операторов  $A$  и  $\psi$  следует, что размерности этих операторов равны  $[A] = \mu^{\frac{d-2}{2}}$ ,  $[\psi] = \mu^{\frac{d-1}{2}}$  (величина  $\mu$  имеет размерность импульса). Поэтому размерность тока  $j = e' \bar{\psi} \gamma \psi$  равна  $[j] = [e'] \mu^{d-1}$  и, следовательно, величина  $e' \mu^{\frac{d}{2}-2}$  имеет размерность, совпадающую с размерностью интеграла  $\int d^d x j A$ . Так как этот интеграл безразмерен, то под зарядом  $e'$ , входящим в выражение для лагранжиана, мы должны понимать величину  $e' = e \mu^{2-d/2}$ , где  $e$  — безразмерный заряд электрона.

Важным свойством метода размерной регуляризации является то, что при его применении не нарушается свойство градиентной инвариантности. Аналогичным свойством обладает метод регуляризации с помощью вспомогательных масс (метод Паули — Вилларса), если применять его не к функциям распространения, а к фейнмановским диаграммам в целом.

**3.6.4. Перенормировка массы электрона.** Промежуточная регуляризация делает элементы матрицы рассеяния конечными. Однако при снятии промежуточной регуляризации, т. е. при  $M_i \rightarrow \infty$  (регуляризация Паули — Вилларса),  $d \rightarrow 4$  (размерная регуляризация), мы снова приходим к расходимостям, поэтому для их окончательного устранения необходима еще добавочная физическая идея. Эта идея носит название перенормировки массы и заряда электрона, к рассмотрению которой мы переходим.

При установлении основных уравнений квантовой электродинамики (см. § 3.1) мы исходили из уравнения Дирака для электрона, в которое входили две константы:  $m$  и  $e$ . Эти константы мы интерпретировали как массу и заряд электрона. Однако следует внести уточнения в эти

понятия. Действительно, по самой идее исходных классических уравнений Дирака и Максвелла константы  $m$  и  $e$  представляют собой массу и заряд «свободного» электрона, т. е. электрона, полностью изолированного от воздействий электромагнитного поля. Иными словами,  $m$  и  $e$  являются характеристиками некоторого гипотетического объекта (будем называть его «голым» электроном), не взаимодействующего с электромагнитным полем.

Взаимодействие между полями должно приводить к отличию энергетического спектра взаимодействующих полей от энергетического спектра свободных полей. Поэтому масса «голового» электрона должна отличаться от массы реального электрона, т. е. минимальной энергии однозарядового состояния взаимодействующих полей.

При построении  $S$ -матрицы в § 3.1 мы учитывали это обстоятельство и в уравнение Дирака в представлении взаимодействия вместо массы «голового» электрона вводили массу реального электрона  $\underline{m}$ . При этом в  $S$ -матрицу вошло дополнительное «взаимодействие»  $\delta m : \bar{\psi}\psi$  ;, где  $\delta m = \underline{m} - m$ . Здесь мы определим величину  $\delta m$ . Далее увидим, что и заряд гипотетического «голового» электрона отличается от заряда реального электрона. Поэтому возникает задача о выяснении связи между зарядом «голового» электрона  $e$  и зарядом реального, физического электрона, который будем обозначать  $e$ .

Перейдем к нахождению величины  $\delta m$ . Учитывая, что электронная функция Грина  $G^{(e)}(p)$  (она зависит только от одного аргумента  $\hat{p} = \gamma^\mu p_\mu$ ) должна иметь полюс при  $\hat{p} = \underline{m}$  (см. (3.5.44)), где  $\underline{m}$  — масса реального электрона ( $\underline{m}$  — вещественная величина вследствие стабильности электрона), можем написать соотношение [15]

$$G^{(e)}(p) \sim Z_2 S^c(p), \quad S^c(p) = \frac{1}{\underline{m} - \hat{p}}, \quad (3.6.25)$$

справедливое при  $p^2 - \underline{m}^2 \approx 0$ . Константа  $Z_2$ , входящая в формулу (3.6.25), совпадает, очевидно, с постоянной  $Z_2$  в формуле (3.5.6).

Вместе с тем согласно (3.5.2)

$$G^{(e)}(p)^{-1} = -\hat{p} + \underline{m} - \Sigma(\hat{p}),$$

где  $\Sigma(\hat{p})$  — массовый оператор, который можно рассматривать как функцию матрицы  $\hat{p}$ . Поэтому

$$G^{(e)}(p)^{-1} = -\hat{p} + \underline{m} - \Sigma(\underline{m}) - (\hat{p} - \underline{m}) \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p}=\underline{m}} + \dots$$

При сравнении этой формулы с (3.6.25) получаем

$$\Sigma(\underline{m}) = 0, \quad Z_2^{-1} = 1 + \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p}=\underline{m}}. \quad (3.6.26)$$

Величина  $\Sigma(\hat{p})$  согласно (3.5.7) определяется формулой

$$\Sigma(\hat{p}) = \delta m + \bar{\Sigma}(\hat{p}),$$

где

$$\bar{\Sigma}(\hat{p}) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma_\mu G^{(e)}(p-k) \gamma^\mu G^{(\gamma)}(k), \quad \xi = 0.$$

Поэтому величина  $\delta m$  как функция  $\underline{m}$  и  $e$  определяется из уравнения

$$\delta m + \bar{\Sigma}(\underline{m}) = 0. \quad (3.6.27)$$

Напомним, что разность масс реального и гипотетического «голового» электронов  $\delta m = \underline{m} - m$ , обусловленную взаимодействием электрона с вакуумом квантованных полей, мы называем электромагнитной массой электрона. Уравнение (3.6.27) определяет перенормировку массы электрона.

**3.6.5. Физический заряд электрона и перенормировка функций Грина и вершинной функции.** Выше мы видели, что вследствие взаимодействия электрона с электромагнитным полем масса электрона  $\underline{m}$  не совпадает с постоянной  $m$ , входящей в уравнения квантовой электродинамики в представлении Гейзенберга. Аналогичная ситуация имеет место для постоянной  $e$ , которая в действительности не является зарядом реального электрона  $\underline{e}$ .

Физический заряд электрона можно определить с помощью исследования рассеяния электромагнитных волн малой частоты  $\omega$  на покоящемся электроне. Этот процесс чисто классический, и никакие квантовые поправки не должны иметь место в предельном случае  $\omega \rightarrow 0$ . Поэтому естественно определить физический заряд электрона  $\underline{e}$  как коэффициент, входящий в формулу Томсона для эффективного сечения рассеяния фотона при  $\omega = 0$ :

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{\underline{e}^2}{4\pi m c^3} \right)^2. \quad (3.6.28)$$

Точное решение этой задачи в квантовой электродинамике приводит к формуле Томсона со следующим значением заряда  $e$ :

$$\underline{e} = Z_3^{1/2} e, \quad (3.6.29)$$

где  $Z_3$  — постоянная, входящая в формулы (3.5.6), (3.5.54).

Выше мы рассмотрели поведение функции Грина электрона на массовой оболочке, т. е. при  $p^2 - \underline{m}^2 = 0$ . Рассмотрим поведение поперечной части фотонной функции Грина на массовой оболочке фотона, т. е. при  $k^2 = 0$ . Согласно формулам (3.5.3)

$$G^{(\gamma)}(k) = -(k^2 + \Pi(k))^{-1}. \quad (3.6.30)$$

Так как функция  $G^{(\gamma)}(k)$  должна иметь полюс при  $k^2 = 0$  (это соответствует тому, что масса фотона равна нулю), то  $\Pi(0) = 0$ . Поэтому



поведение функции  $G^{(\nu)}(k)$  при малых  $k^2$  определяется формулой

$$G^{(\nu)}(k) \approx Z_3 \mathcal{D}^c(k), \quad \mathcal{D}^c(k) = -\frac{1}{k^2}, \quad (3.6.31)$$

где

$$Z_3^{-1} = 1 + \Pi'(0); \quad \Pi'(0) \equiv \left. \frac{\partial \Pi(k)}{\partial k^2} \right|_{k^2=0} \quad (3.6.32)$$

(постоянная  $Z_3$  совпадает с постоянной  $Z_3$  в формуле (3.5.54)). Отметим, что если пользоваться методом регуляризации, основанным на введении граничного импульса, либо методом Паули — Вилларса, в котором регуляризация функций распространения осуществляется с помощью введения вспомогательных масс, то поляризационный оператор  $\Pi(k)$  не будет обращаться в нуль при  $k^2 = 0$ , т. е. масса фотона не будет равна нулю; кроме того не будет выполняться условие  $k^\nu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0$ , требуемое калибровочной инвариантностью. Если же пользоваться калибровочно-инвариантной регуляризацией Паули — Вилларса (в которой промежуточной регуляризации подвергаются не функции распределения, а матричные элементы, соответствующие различным процессам) или размерной регуляризацией, то автоматически будет выполняться условие  $k^\nu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0$  и масса фотона также будет равна нулю (см. п. 3.7.3).

Введем перенормированные функции Грина электрона и фотона

$$\underline{G}^{(e)}(p) = Z_2^{-1} G^{(e)}(p), \quad \underline{G}^{(\nu)}(k) = Z_3^{-1} G^{(\nu)}(k). \quad (3.6.33)$$

Эти функции вблизи массовой оболочки частиц согласно (3.6.25), (3.6.31) ведут себя так же, как функции Грина свободных частиц:

$$\underline{G}^{(e)}(p) \approx S^c(p), \quad \hat{p} \approx \underline{m}, \quad G^{(\nu)}(k) \approx \mathcal{D}^c(k), \quad k^2 \approx 0. \quad (3.6.34)$$

Из формул (3.6.33), (3.5.1), (2.5.42) следует, что перенормированная функция Грина  $\underline{G}^{(e)}$  удовлетворяет уравнению Дайсона

$$\underline{G}^{(e)}(p) = S^c(p) + S^c(p) \underline{\Sigma}(p) \underline{G}^{(e)}(p), \quad (3.6.35)$$

где  $\underline{\Sigma}$  — перенормированный массовый оператор, определяемый формулой

$$\underline{\Sigma}(\hat{p}) = Z_2 \left\{ \underline{\Sigma}(\hat{p}) - (\hat{p} - \underline{m}) \frac{\partial \underline{\Sigma}(p)}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} \right\},$$

или (см. (3.6.26))

$$\underline{\Sigma}(\hat{p}) = Z_2 \left\{ \underline{\Sigma}(\hat{p}) - \underline{\Sigma}(\underline{m}) - (\hat{p} - \underline{m}) \frac{\partial \underline{\Sigma}(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} \right\}. \quad (3.6.36)$$

Аналогично перенормированная поперечная фотонная функция Грина  $\underline{G}^{(\nu)}(k)$  удовлетворяет уравнению

$$\underline{G}^{(\nu)}(k) = \mathcal{D}^c(k) + \mathcal{D}^c(k) \underline{\Pi}(k) \underline{G}^{(\nu)}(k), \quad (3.6.37)$$

где  $\underline{\Pi}$  — перенормированный поляризационный оператор, определяемый согласно (3.6.33), (3.5.3) формулой

$$\underline{\Pi}(k) = Z_3 \{ \Pi(k) - \Pi(0) - k^2 \Pi'(0) \} \quad (3.6.38)$$

(напомним, что  $\Pi(0) = 0$ ).

Так как основными величинами, с помощью которых по скелетным диаграммам определяются элементы матрицы рассеяния  $S$ , являются функции Грина  $G$  и вершинная функция  $\Gamma$ , то следует ввести еще перенормированную вершинную функцию

$$\underline{\Gamma}_\mu = Z_1 \Gamma_\mu, \quad (3.6.39)$$

где константа  $Z_1$  находится из условия

$$\underline{\Gamma}_\mu(p, p) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} = \gamma_\mu. \quad (3.6.40)$$

При этом предполагается, что величина  $\Gamma_\mu(p, p)$  представлена в виде  $\Gamma_\mu(p, p) = \Sigma A(\hat{p}) \gamma_\mu B(\hat{p})$  (это всегда можно сделать, если учитывать, что  $2p_\mu = (\hat{p}, \gamma_\mu)$ ), так что

$$\Gamma_\mu(p, p) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} \equiv \gamma_\mu \Sigma A(\underline{m}) B(\underline{m}) = Z_1^{-1} \gamma_\mu, \quad (3.6.41)$$

следовательно,  $Z_1^{-1} = \Sigma A(\underline{m}) B(\underline{m})$ .

Кроме величины  $\Lambda_\mu = \Gamma_\mu - \gamma_\mu$  введем перенормированную величину  $\underline{\Lambda}_\mu$ :

$$\underline{\Gamma}_\mu = \gamma_\mu + \underline{\Lambda}_\mu. \quad (3.6.42)$$

Из этого определения и (3.6.39) следует, что

$$\underline{\Lambda}_\mu = Z_1 (\Lambda_\mu - (Z_1^{-1} - 1) \gamma_\mu).$$

Поэтому согласно (3.6.40)

$$\underline{\Lambda}_\mu = Z_1 (\Lambda_\mu - \Lambda_\mu(p, p) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}}), \quad (3.6.43)$$

где

$$\Lambda_\mu(p, p) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} = (Z_1^{-1} - 1) \gamma_\mu. \quad (3.6.44)$$

Покажем, что из тождества Уорда следует

$$Z_1 = Z_2. \quad (3.6.45)$$

Действительно, из тождества (3.5.30') и определения (3.6.41) величин типа  $\Lambda_\mu(p, p) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}}$  получаем

$$\Lambda_\mu(p, p) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} = \gamma_\mu \frac{\partial \Sigma(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=\underline{m}}, \quad \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu} \right) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} = \gamma_\mu \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}} \right) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}},$$

следовательно,

$$Z_1^{-1} - 1 = \frac{\partial \Sigma(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=\underline{m}},$$

откуда вследствие (3.6.26) вытекает соотношение (3.6.45).

Из (3.6.43), (3.6.36), (3.6.45) следует, что перенормированные величины  $\underline{\Lambda}_\mu(p, p)$  и  $\underline{\Sigma}(p)$  удовлетворяют тождеству Уорда

$$\underline{\Lambda}_\mu(p, p) = \frac{\partial \underline{\Sigma}(p)}{\partial p^\mu}. \quad (3.6.46)$$

**3.6.6. Перенормировка элементов матрицы рассеяния и общих функций Грина.** Наша задача будет состоять теперь в том, чтобы построить теорию возмущений для различных квантовоэлектродинамических процессов, в которой параметром разложения будет величина  $\underline{e}$ , а не  $e$ .

В § 3.5 мы показали, что для учета высших приближений теории возмущений внутренним линиям и внутренним вершинам неприводимых диаграмм нужно сопоставлять функции Грина  $G^{(e)}(p)$ ,  $G^{(\nu)}(k)$  и вершинную функцию  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ , а внешним линиям — амплитуды  $e^{(\lambda)}$  и  $u$ . Иными словами, если рассматривается некоторая неприводимая диаграмма  $n$ -го порядка, то соответствующий ей элемент  $\mathfrak{M}$ -матрицы можно схематически представить в виде

$$\mathfrak{M} = e^n \int (\Gamma)^n (G^{(e)})^{F_e} (G^{(\nu)})^{F_\nu} (\underline{u})^{N_e} (\underline{e}^{(\lambda)})^{N_\nu}, \quad (3.6.47)$$

где  $(K)^m$  служит для обозначения того, что величина типа  $K$  входит под знак интеграла  $m$  раз.

Матричный элемент  $\mathfrak{M}$  выражен через неперенормированные величины. Определим вид элемента  $\mathfrak{M}$  при переходе к перенормированным величинам:

$$\begin{aligned} G^{(e)} &= Z_2 \underline{G}^{(e)}, & G^{(\nu)} &= Z_3 \underline{G}^{(\nu)}, & \Gamma &= Z_1^{-1} \underline{\Gamma}, \\ u &= Z_2^{-1/2} \underline{u}, & e^{(\lambda)} &= Z_3^{-1/2} \underline{e}^{(\lambda)}, & e &= Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} \underline{e} \end{aligned} \quad (3.6.48)$$

$(\underline{e}^{(\lambda)})_{\underline{k}\mu}$ ,  $\lambda = 1, 2$ , — вектор поляризации реального фотона). Легко видеть, что

$$\mathfrak{M} = Z_2^{-n+F_e+\frac{1}{2}N_e} Z_3^{-\frac{n}{2}+F_\nu+\frac{1}{2}N_\nu} \underline{e}^n \int (\underline{\Gamma})^n (\underline{G}^{(e)})^{F_e} (\underline{G}^{(\nu)})^{F_\nu} (\underline{u})^{N_e} (\underline{e}^{(\lambda)})^{N_\nu}.$$

Учитывая (3.6.4), (3.6.5), получаем

$$\mathfrak{M} = \underline{e}^n \int (\underline{\Gamma})^n (\underline{G}^{(e)})^{F_e} (\underline{G}^{(\nu)})^{F_\nu} (\underline{u})^{N_e} (\underline{e}^{(\lambda)})^{N_\nu}. \quad (3.6.49)$$

Таким образом, матричные элементы выражаются одинаково через неперенормированные ( $e$ ,  $G^{(e)}$ ,  $G^{(\nu)}$ ,  $\Gamma$ ,  $u$ ,  $e^{(\lambda)}$ ) и перенормированные ( $\underline{e}$ ;  $\underline{\Gamma}$ ,  $\underline{G}^{(e)}$ ,  $\underline{G}^{(\nu)}$ ,  $\underline{u}$ ,  $\underline{e}^{(\lambda)}$ ) величины [23]. Это фундаментальное свойство  $\mathfrak{S}$ -матрицы связано с перенормируемостью квантовой электродинамики.

Таким образом, при вычислении матричного элемента  $\mathfrak{M}$  для скелетных диаграмм мы можем пользоваться правилами Фейнмана, в которых используются перенормированный заряд электрона  $\underline{e}$  и перенормированные функции  $\underline{\Gamma}$ ,  $\underline{G}^{(e)}$ ,  $\underline{G}^{(\nu)}$ . Для последних в свою очередь должна быть построена теория возмущений по степеням  $e$ .

Согласно (3.6.35), (3.6.37) величины  $\underline{G}^{(e)}$ ,  $\underline{G}^{(\nu)}$  определяются величинами  $\underline{\Sigma}$  и  $\underline{\Pi}$ , которые в свою очередь (см. (3.6.36), (3.6.38)) связаны с перенормированными величинами:

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma} &\equiv \Sigma(e, \underline{\Gamma}, \underline{G}^{(e)}, \underline{G}^{(\nu)}) = e^2 \int \underline{\Gamma} \underline{G}^{(e)} \gamma \underline{G}^{(\nu)} - \delta m, \\ \underline{\Pi} &\equiv \Pi(e, \underline{\Gamma}, \underline{G}^{(e)}) = e^2 \int \underline{\Gamma} \underline{G}^{(e)} \gamma \underline{G}^{(e)}.\end{aligned}\quad (3.6.50)$$

Используя формулы (3.6.33), (3.6.39), видим, что

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma} &= \Sigma(\underline{e}, \underline{\Gamma}, \underline{G}^{(e)}, \underline{G}^{(\nu)}), \\ \underline{\Pi} &= Z_3^{-1} Z_1 \Pi(\underline{e}, \underline{\Gamma}, \underline{G}^{(e)}).\end{aligned}\quad (3.6.50')$$

Аналогично можно показать, что перенормированная величина

$$\underline{\Lambda} \equiv \Lambda(e, \underline{\Gamma}, \underline{G}^{(e)}, \underline{G}^{(\nu)}) = \Sigma e^{n-1} \int (\underline{\Gamma})^n (\underline{G}^{(e)})^{n-1} (\underline{G}^{(\nu)})^{\frac{n-1}{2}}$$

(см. (3.6.48)) обладает свойством

$$\underline{\Lambda} = Z_1^{-1} \Lambda(\underline{e}, \underline{\Gamma}, \underline{G}^{(e)}, \underline{G}^{(\nu)}). \quad (3.6.51)$$

Используя формулы (3.6.50'), (3.6.51), (3.6.35), (3.6.37) и определения величин  $Z_3$  и  $Z_1$ :

$$Z_3^{-1} = 1 + \Pi'(0), \quad Z_2^{-1} = Z_1^{-1} = 1 + \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho} \right|_{\hat{\rho}=\underline{m}}, \quad (3.6.51')$$

для величин  $\underline{G}^{(e)}$ ,  $\underline{G}^{(\nu)}$ ,  $\underline{\Gamma}$  можно получить разложения в ряд по степеням истинного заряда электрона  $e$ . Таким образом можно построить теорию возмущений, содержащую ряды по степеням заряда реального, а не «голого» электрона.

В заключение рассмотрим вопрос о перенормировке общих функций Грина  $G_c(x_1, \dots, x_n)$ , введенных в п. 3.5.2.

Ампутированную  $n$ -точечную функцию Грина символически можно представить в виде

$$\underline{\Gamma}(x_1, \dots, x_m) = \Sigma e^n \int (\underline{\Gamma})^n (\underline{G}^{(e)})^{F_e} (\underline{G}^{(\nu)})^{F_\nu} \gamma,$$

где суммирование распространяется на все неприводимые диаграммы, соответствующие рассматриваемой функции Грина. Используя формулы (3.6.33), а также формулы (3.6.39), получаем

$$\underline{\Gamma}(x_1 \dots x_m) = Z_2^{-\frac{N_e}{2}} Z_3^{-\frac{N_\nu}{2}} \underline{\Gamma}(x_1 \dots x_m), \quad m = N_e + N_\nu, \quad (3.6.52)$$

где  $\underline{\Gamma}(x_1 \dots x_m) = \underline{\Sigma} e^n \int (\underline{\Gamma})^n (\underline{G}^{(e)})^{F_e} (\underline{G}^{(\nu)})^{F_\nu}$  — перенормированная ампутированная функция Грина.

Общая  $m$ -точечная функция Грина  $G_c(x_1 \dots x_m)$  связана с ампутированной функцией Грина  $\underline{\Gamma}(x_1 \dots x_m)$  символическим соотношением (3.5.20)

$$G_c = \Gamma (G^{(e)})^{N_e} (G^{(\nu)})^{N_\nu}.$$

Поэтому, учитывая (3.6.33), находим

$$\underline{G}_c(x_1 \dots x_m) = \underline{Z}_2^{\frac{N_e}{2}} \underline{Z}_3^{\frac{N_\nu}{2}} \underline{G}_c(x_1 \dots x_m), \quad (3.6.53)$$

где  $\underline{G}_c = \underline{\Gamma} (\underline{G}^{(e)})^{N_e} (\underline{G}^{(\nu)})^{N_\nu}$  — перенормированная  $m$ -точечная связанная функция Грина.

Из соотношений (3.6.53), (3.5.11), (3.6.33) и (3.5.10) следует, что перенормированные функции Грина можно рассматривать как вакуумные средние произведений перенормированных операторов полей  $\underline{\psi}$ ,  $\underline{\bar{\psi}}$ ,  $\underline{A}$ :

$$\underline{G}(x_1 \dots x_m) = (\Psi_0, T \{ \underline{\psi}(x_1) \dots \underline{\bar{\psi}}(x_e) \dots \underline{A}(x_m) \} \Psi_0), \quad (3.6.54)$$

которые связаны с неперенормированными операторами  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $A$  соотношениями

$$\underline{\psi}(x) = \sqrt{\underline{Z}_2} \psi(x), \quad \underline{\bar{\psi}}(x) = \sqrt{\underline{Z}_2} \bar{\psi}(x), \quad \underline{A}_\mu(x) = \sqrt{\underline{Z}_3} A_\mu(x). \quad (3.6.55)$$

Напомним, что перенормированный заряд  $\underline{e}$  связан с неперенормированным зарядом  $e$  формулой

$$\underline{e} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2^{-1} \underline{Z}_3^{-1/2} e = \underline{Z}_3^{-1/2} e. \quad (3.6.56)$$

Мы рассматривали до сих пор перенормировку только поперечной функции Грина  $G^{(\nu)}$ , которая связана с полной фотонной функцией Грина соотношением

$$G_{\mu\nu}^{(\nu)}(k) = -\underline{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} + G^{(\nu)}(k) \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right). \quad (3.6.57)$$

Для того чтобы связь неперенормированной функции Грина  $G_{\mu\nu}^{(\nu)}$  с перенормированной функцией Грина  $\underline{G}_{\mu\nu}^{(\nu)}$  осуществлялась с помощью множителя  $\underline{Z}_3$ :

$$G_{\mu\nu}^{(\nu)} = \underline{Z}_3 \underline{G}_{\mu\nu}^{(\nu)}, \quad (3.6.58)$$

необходимо потребовать согласно (3.6.57), чтобы перенормированная калибровочная постоянная  $\underline{\xi}$ , определяющая перенормированную функцию Грина

$$\underline{G}_{\mu\nu}^{(\nu)}(k) = -\underline{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} + \underline{G}^{(\nu)}(k) \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (3.6.59)$$

была связана с калибровочной постоянной  $\xi$ , входящей в перенормированную функцию Грина, формулой

$$\xi = Z_3 \underline{\xi}. \quad (3.6.60)$$

Таким образом, формула (3.6.53) в более развернутой записи имеет вид

$$G_c(x_1 \dots x_m; \xi, e) = Z_2^{\frac{N_e}{2}} Z_3^{\frac{N_\gamma}{2}} \underline{C}_c(x_1 \dots x_m; \underline{\xi}, \underline{e}). \quad (3.6.61)$$

Лагранжиан взаимодействующих электромагнитного и электронно-позитронного полей можно выразить через перенормированные операторы полей. Подставляя (3.6.55), (3.6.60), (3.6.56) в (3.6.30), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{Z_3}{8} \{ \underline{F}_{\mu\nu}, \underline{F}^{\mu\nu} \} - \frac{Z_3}{4} \{ \underline{F}_{\mu\nu}, \partial^\mu \underline{A}^\nu - \partial^\nu \underline{A}^\mu \} - \\ & - \frac{1}{2\underline{\xi}} \{ (\underline{\varphi}, \partial_\nu \underline{A}^\nu) - \underline{\varphi}^2 \} + \frac{Z_2}{4} [ \underline{\bar{\psi}}, (i\gamma^\mu \partial_\mu - \underline{m}) \underline{\psi} ] + \\ & + \frac{Z_2}{4} [ \underline{\psi}, (i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu + \underline{m}) \underline{\bar{\psi}} ] + Z_1 e \underline{\mathcal{J}}^\mu \underline{A}_\mu, \quad \underline{\mathcal{J}}^\mu = \frac{1}{2} [ \underline{\bar{\psi}}, \gamma^\mu \underline{\psi} ], \end{aligned}$$

или

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (3.6.62)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \frac{1}{8} \{ \underline{F}_{\mu\nu}, \underline{F}^{\mu\nu} \} - \frac{1}{4} \{ \underline{F}_{\mu\nu}, \partial^\mu \underline{A}^\nu - \partial^\nu \underline{A}^\mu \} - \frac{1}{2\underline{\xi}} \{ (\underline{\varphi}, \partial_\nu \underline{A}^\nu) - \underline{\varphi}^2 \} + \\ & + \frac{1}{4} [ \underline{\bar{\psi}}, (i\gamma^\mu \partial_\mu - \underline{m}) \underline{\psi} ] + \frac{1}{4} [ \underline{\psi}, (i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu + \underline{m}) \underline{\bar{\psi}} ] \end{aligned}$$

— лагранжиан свободных перенормированных полей и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & \frac{1}{8} (Z_3 - 1) \{ \underline{F}_{\mu\nu}, \underline{F}^{\mu\nu} \} - \frac{1}{4} (Z_3 - 1) \{ \underline{F}_{\mu\nu}, \partial^\mu \underline{A}^\nu - \partial^\nu \underline{A}^\mu \} + \\ & + \frac{1}{4} (Z_2 - 1) \{ [ \underline{\bar{\psi}}, (i\gamma^\mu \partial_\mu - \underline{m}) \underline{\psi} ] + [ \underline{\psi}, (i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu + \underline{m}) \underline{\bar{\psi}} ] \} + \\ & + Z_2 \delta m \frac{1}{2} [ \underline{\bar{\psi}}, \underline{\psi} ] + Z_1 e \underline{\mathcal{J}}^\mu \underline{A}_\mu \end{aligned}$$

— лагранжиан взаимодействия. Лагранжиан (3.6.62) мы получили из исходного лагранжиана в результате перенормировки полей и констант  $\xi$ ,  $m$ ,  $e$ . Однако можно поступить иначе: сразу вводить перенормированные поля  $\underline{\psi}$ ,  $\underline{A}$  и перенормированные константы  $\underline{\xi}$ ,  $\underline{m}$ ,  $e$  и в качестве исходного использовать лагранжиан (3.6.62). Тогда величины  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $\delta m$  находятся из требования, чтобы полюсы и вычеты функций Грина электрона и фотона для взаимодействующих полей совпадали с полюсами и вычетами соответствующих функций Грина свободных полей, а вершинная функция  $\underline{\Gamma}_\mu$  взаимодействующих полей совпадала при  $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \underline{m}$  с матрицей  $\underline{\gamma}_\mu$ .

**3.6.7. Отсутствие расходимостей в рядах теории возмущений по перенормированному заряду.** Покажем, что ряды теории возмущений

по перенормированному заряду электрона  $e$  для элементов матрицы рассеяния  $S$ , перенормированных функций Грина и перенормированной вершинной функции не содержат расходимостей после снятия промежуточной регуляризации, т. е. при  $M_i \rightarrow \infty$  (в методе промежуточной регуляризации Паули — Вилларса) или  $d \rightarrow 4$  (в методе размерной регуляризации) и т. д. Начнем с исследования расходимостей функций, соответствующих неприводимым ВД. Простейшей неприводимой ВД 2-го порядка (см. рис. 10, 1) соответствует функция

$$\Lambda_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2) = \int d^4q R_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2; q),$$

где

$$R_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2; q) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \gamma_{\lambda} \underline{S}^c(p_1 - q) \gamma_{\mu} \underline{S}^c(p_2 - q) \gamma^{\lambda} \mathcal{D}^c(q);$$

$$\underline{S}^c(p) = (\hat{p} + \underline{m}) \left( \frac{1}{\underline{m}^2 - p^2} - \frac{1}{\mathcal{M}^2 - p^2} \right).$$

Мы при этом учли, что в нулевом приближении теории возмущений по перенормированному заряду функции  $\Gamma_{\mu}$ ,  $G^{(e)}$ ,  $G^{(\gamma)}$  совпадают с  $\gamma_{\mu}$ ,  $\underline{S}^c(p)$ ,  $\mathcal{D}^c(q)$  (см. формулы (3.6.50), (3.6.51), (3.6.51')). Поэтому во втором приближении теории возмущений по  $e$  перенормированная вершинная функция  $\underline{\Lambda}_{\mu}^{(2)}$  определяется согласно (3.6.43), (3.6.51') формулой

$$\underline{\Lambda}_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2) = \{ \Lambda_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2) - \Lambda_{\mu}^{(2)}(p, p) \Big|_{\substack{\hat{p} \\ p=m}} \}_{e \rightarrow \underline{e}}. \quad (3.6.63)$$

Покажем, что функция  $\underline{\Lambda}_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2)$  не содержит расходимостей, т. е. что в выражении для  $\underline{\Lambda}_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2)$  можно произвести предельный переход  $M \rightarrow \infty$ .

Для этого отметим, что

$$R^{(2)}(p_1, p_2; q) - R^{(2)}(p_0, p_0; q) = (p_1 - p_0)_{\lambda} \frac{\partial R^{(2)}}{\partial p_{1\lambda}} \Big|_{p_1=p_1} + \\ + (p_2 - p_0)_{\lambda} \frac{\partial R^{(2)}}{\partial p_{2\lambda}} \Big|_{p_2=p_2},$$

где  $p'_1$  и  $p'_2$  — некоторые величины, лежащие соответственно между  $p_1$ ,  $p_0$  и  $p_2$ ,  $p_0$ . При  $|q^2| \rightarrow \infty$  функция  $R^{(2)}$  ведет себя, очевидно, как  $(q^2)^{-2}$  (при  $M = \infty$ ), а так как  $q$  входит в  $R^{(2)}$  только в комбинациях  $p_1 - q$  и  $p_2 - q$ , то  $\partial R^{(2)}/\partial p_{1\lambda}$  и  $\partial R^{(2)}/\partial p_{2\lambda}$  будут вести себя при  $|q^2| \rightarrow \infty$  (и при  $M = \infty$ ) не как  $(q^2)^{-2}$ , а как  $q^{-5}$ , вследствие чего интеграл, определяющий функцию  $\underline{\Lambda}_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2)$ , будет сходиться при  $M \rightarrow \infty$ .

Ясно, что приведенное доказательство сходимости интеграла, определяющего  $\underline{\Lambda}_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2)$ , немедленно обобщается на произвольные неприводимые ВД  $\underline{\Lambda}_{\mu}^{(2m)}(p_1, p_2)$ .

Перейдем к рассмотрению функций  $\Sigma^{(2)}$  и  $\Pi^{(2)}$ , соответствующих неприводимым ЭСЭД и ФСЭД. Перенормированные функции  $\underline{\Sigma}^{(2)}(p)$  и  $\underline{\Pi}^{(2)}(k)$  согласно (3.6.36), (3.6.38), (3.6.51') определяются формулами

$$\underline{\Sigma}^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p) - \Sigma^{(2)}(\underline{m}) - (\hat{p} - \underline{m}) \left. \frac{\partial \Sigma^{(2)}}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p}=\underline{m}}, \quad (3.6.64)$$

$$\underline{\Pi}^{(2)}(k) = \Pi^{(2)}(k) - \Pi^{(2)}(0) - k^2 \Pi^{(2)'}(0),$$

где

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma_\mu S^c(p-k) \gamma^\mu \underline{\mathcal{D}}^c(k), \quad (3.6.65)$$

$$\Pi^{(2)}(k) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{3} \int d^4p \text{Sp} \gamma_\mu S^c(p-k) \gamma^\mu S^c(p)$$

(мы учли, что в нулевом приближении по  $e$   $Z_3 = Z_1 = 1$ , см. (3.6.51')). Величины  $\underline{\Sigma}^{(2)}$  и  $\underline{\Pi}^{(2)}$  сходятся при  $M \rightarrow \infty$ . В этом можно убедиться, если использовать явные выражения для  $\underline{\Sigma}^{(2)}$  и  $\underline{\Pi}^{(2)}$ . Действительно, согласно (3.6.64)  $\underline{\Sigma}^{(2)}$  получается из  $\Sigma^{(2)}$  вычитанием двух первых членов разложения  $\bar{\Sigma}^{(2)}$  в ряд по степеням  $p - p_0$ , откуда следует, что  $\underline{\Sigma}^{(2)}$  пропорционально второй производной от  $\Sigma^{(2)}(p)$  по  $p$ , взятой в некоторой точке, промежуточной между  $p_0$  и  $p$ . Так как импульс  $p$  входит в подынтегральное выражение для  $\Sigma^{(2)}(p)$  в виде суммы с переменной интегрирования, то подынтегральное выражение для  $\underline{\Sigma}^{(2)}(p)$  будет представлять собой рациональную дробь, степень которой на две единицы меньше, чем степень соответствующего подынтегрального выражения для  $\Sigma^{(2)}(p)$ . Так как интеграл для  $\Sigma^{(2)}$  согласно (3.6.65) содержит линейную расходимость, то интеграл, определяющий  $\underline{\Sigma}^{(2)}$ , будет сходящимся.

Аналогичная ситуация наблюдается для неприводимой фотонной собственно-энергетической части  $\underline{\Pi}^{(2)}$ . Из (3.6.64) следует, что выражение для  $\underline{\Pi}^{(2)}(k)$  получается из выражения для  $\Pi^{(2)}(k)$  вычитанием трех первых членов разложения  $\bar{\Pi}^{(2)}(k)$  в ряд по степеням  $k_\mu$ . Повторяя рассуждения, относящиеся к  $\underline{\Sigma}^{(2)}$ , нетрудно проверить, что это вычитание обеспечивает сходимость интеграла, определяющего  $\underline{\Pi}^{(2)}(k)$ .

Мы видим, что процедура физической регуляризации состоит в вычитании из регуляризуемой функции нескольких первых членов ее разложения в ряд Тейлора по степени  $\hat{p} - m$  или  $k^2$ . Количество вычитаемых членов должно быть минимальным для обеспечения сходимости остатка; тот факт, что остаток не будет содержать расходимостей, при  $M \rightarrow \infty$  следует из того, что регуляризуемая функция представляет собой интеграл, в котором в случае неприводимых диаграмм внешние импульсы входят в виде линейной комбинации с переменными интегрирования, и поэтому каждое дифференцирование увеличивает степень полинома в знаменателе подынтегральной функции на единицу.



Как следует из предыдущего анализа, физический смысл этой «вычитательной» процедуры заключается в том, то она эквивалентна перенормировке констант  $e$  и  $m$  — соответственно заряда и массы электрона.

Мы показали, что процедура перенормировки массы и заряда электрона позволяет однозначно устранить расходимости в функциях Грина и вершинных функциях, соответствующих неприводимым диаграммам. Покажем, что эта же процедура позволяет регуляризовать функции, соответствующие приводимым диаграммам.

В этом случае задача сильно усложняется. Действительно, рассмотрим, например, приводимую ВД 11-го порядка, показанную на рис. 21. Ясно, что интегральное выражение  $\Lambda^{(10)}(p_1, p_2)$ , соответствующее этой ВД, расходится при  $M \rightarrow \infty$  как при интегрировании по переменным  $q_1, q_2$ , относящимся к диаграмме как к целому, так и при интегрировании по переменным  $q', q'', q'''$ , относящимся к внутренним частям диаграммы, т. е. к функциям  $\Sigma^{(2)}(q_1), \Sigma^{(2)}(q_2), \Pi^{(2)}(q_3), \Lambda^{(2)}(q_2, p_2)$ .

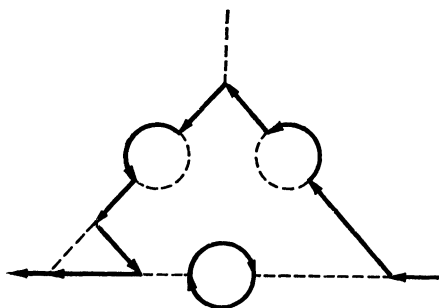


Рис. 21

Чтобы регуляризовать функцию  $\Lambda^{(10)}(p_1, p_2)$ , вначале согласно

(3.6.51) проведем регуляризацию функций, соответствующих внутренним частям диаграммы, т. е. заменим в интеграле, определяющем  $\Lambda^{(10)}(p_1, p_2)$ , величины  $\Sigma^{(2)}(q_1), \Sigma^{(2)}(q_2), \Pi^{(2)}(q_3), \Lambda^{(2)}(q_2, p_2)$  их регуляризованными значениями  $\underline{\Sigma}^{(2)}(q_1), \underline{\Sigma}^{(2)}(q_2), \underline{\Pi}^{(2)}(q_3), \underline{\Lambda}^{(2)}(q_2, p_2)$ . Интеграл по остающимся переменным  $q_1, q_2$ , относящимся к диаграмме как к целому (функции  $\underline{\Sigma}^{(2)}(q), \underline{\Pi}^{(2)}(q), \underline{\Lambda}^{(2)}(q, p)$  предполагаются при этом известными), будет по-прежнему расходящимся, и вопрос сводится к тому, каков характер этой расходимости. Покажем, что эта расходимость будет такой же, как расходимость вершинной функции третьего порядка  $\Lambda^{(2)}(p_1, p_2)$ , т. е. логарифмической. Вследствие этого замечательного свойства регуляризация «внутренних» функций не ухудшает расходимости интеграла, определяющего  $\Lambda^{(10)}(p_1, p_2)$ , и последний (после регуляризации «внутренних» функций) согласно (3.6.43) может быть регуляризован так же, как функция  $\Lambda^{(2)}(p_1, p_2)$ , — путем вычитания из  $\Lambda^{(10)}(p_1, p_2)$  величины  $\Lambda^{(10)}(p_0, p_0)|_{\hat{p}_0 \rightarrow \underline{m}}$ :

$$\underline{\Lambda}^{(10)}(p_1, p_2) = \Lambda^{(10)}(p_1, p_2) - \Lambda^{(10)}(p_0, p_0)|_{\hat{p}_0 \rightarrow \underline{m}}$$

Чтобы убедиться в справедливости сделанного утверждения, отметим, что согласно результатам п. 3.7.3 функции  $\underline{\Sigma}^{(2)}(p), \underline{\Pi}^{(2)}(k), \underline{\Lambda}^{(2)}(q, p_2)$  в области больших значений  $p, k, q$  ведут себя соответственно так:

$$\underline{\Sigma}^{(2)}(p) \sim \hat{p} \ln \frac{p^2}{\underline{m}^2}, \quad \underline{\Pi}^{(2)}(k) \sim k^2 \ln \frac{k^2}{\underline{m}^2},$$

$$\underline{\Lambda}_\mu^{(2)}(q, p_2) \sim \gamma_\mu \ln \frac{q^2}{\underline{m}^2}.$$

Из полученных формул следует, что если перейти от диаграммы рис. 21 к скелетной диаграмме рис. 10, 1 с эффективной вершиной и эффективными электронными и фотонной линиями, то соответствующие им величины будут вести себя в области больших импульсов так:

$$\underline{\Gamma} \sim \ln \frac{q^2}{\underline{m}^2}, \quad G^{(e)} \sim \frac{1}{\hat{q}} \ln \frac{q^2}{\underline{m}^2}, \quad G^{(\nu)} \sim \frac{1}{q^2} \ln \frac{q^2}{\underline{m}^2}.$$

Поэтому, как утверждалось, интеграл, соответствующий скелетной диаграмме в целом:

$$\underline{\Lambda}^{(10)}(p_1, p_2) \sim e^2 \int \underline{\Gamma} (G^{(e)})^2 G^{(\nu)} d^4 q,$$

будет расходиться при  $M \rightarrow \infty$  так же, как  $\Lambda^{(2)}(p_1, p_2)$ , т. е. логарифмически, и для его регуляризации достаточно из  $\Lambda^{(10)}(p_1, p_2)$  вычесть  $\Lambda^{(10)}(p_0, p_0)$ .

Изложенный метод постепенного устранения расходимостей — от внутренних неприводимых диаграмм к охватывающим их ЭСЭД, ФСЭД и ВД и от последних ко всей диаграмме в целом — применим в случае сколь угодно сложной приводимой диаграммы. Это связано с тем, что поведение функций  $\underline{G}^{(e)}$ ,  $\underline{G}^{(\nu)}$ ,  $\underline{\Gamma}$  в области больших импульсов отличается от поведения соответствующих функций для свободных частиц только наличием логарифмического множителя, который, по сути, не изменяет характер расходимостей.

Идея перенормировки впервые была высказана Крамерсом и Бете, а реализована в работах Швингера, Фейнмана и Томанага. Общее построение S-матрицы и классификация расходимостей принадлежат Дайсону [23]. Общее доказательство отсутствия расходимостей в перенормированных членах рядов теории возмущений выполнено Боголюбовым и Парасюком [24]. Переход от перенормированной матрицы рассеяния к перенормированной, члены разложения которой по перенормированному заряду электрона свободны от бесконечностей, называется R-операцией (подробнее об этом см. в [25]).

### § 3.7. ФУНКЦИИ ГРИНА В НИЗШИХ ПОРЯДКАХ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

**3.7.1. Вычисление электронной функции Грина во втором порядке теории возмущений в методе промежуточной регуляризации Паули — Вилларса.** Проиллюстрируем процедуру физической регуляризации на примерах вычисления функций Грина электрона и фотона во втором приближении теории возмущений. Начнем рассмотрение с функции Грина электрона. Для ее нахождения нужно вычислить массовый оператор  $\underline{\Sigma}$ , который во втором порядке теории возмущений определяется формулой (3.6.64)

$$\underline{\Sigma}^{(2)}(p) = \underline{\Sigma}^{(2)}(p) - \underline{\Sigma}^{(2)}(p) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} - (\hat{p} - \underline{m}) \frac{\partial \underline{\Sigma}^{(2)}}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=\underline{m}},$$

где 
$$\underline{\Sigma}^{(2)}(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \gamma_\mu \underline{S}^c(p+k) \gamma^\mu \underline{\mathcal{D}}^c(k)$$

и  $\underline{S}^c(p)$  определяется формулой (3.6.11). Мы пользуемся здесь пропагатором  $\underline{\mathcal{D}}^c(k)$  в фейнмановской калибровке ( $\xi = 1$ ). Как будет видно из дальнейшего изложения, величина  $\underline{\Sigma}^{(2)}$  (в отличие от  $\Sigma^{(2)}$ ) будет расходиться при интегрировании по  $\hat{k}$  в области малых  $k$ . Эта расходимость называется инфракрасной и никак не связана с ультрафиолетовой расходимостью в области больших  $k$ , которую мы здесь изучаем. Формально инфракрасная расходимость возникает вследствие того, что величина  $\partial \underline{\Sigma}^{(2)} / \partial \hat{p} |_{\hat{p}=m}$  расходится в области как больших, так и малых импульсов. Инфракрасная расходимость связана с тем, что фотоны обладают нулевой массой и функция  $\underline{\mathcal{D}}^c(k)$  имеет полюс при  $k^2 = 0$ .

Для устранения инфракрасной расходимости в величине  $\underline{\Sigma}^{(2)}$  достаточно заменить функцию  $\underline{\mathcal{D}}^c(k)$  функцией  $\underline{\mathcal{D}}^c(k) = -(k^2 - \lambda^2)^{-1}$ , где  $\lambda^2$  — некоторая положительная величина, которую можно пока интерпретировать как массу фотона. Величину  $\lambda$  можно связать с энергией мягких фотонов, всегда сопровождающих основной процесс рассеяния (вероятность рассеяния без испускания мягких фотонов равна нулю). Поэтому в сечения рассеяния вместо величины  $\lambda$  будет входить величина  $\delta\omega$  — максимальная энергия мягких фотонов.

Таким образом, мы будем исходить из следующего выражения для  $\underline{\Sigma}^{(2)}(p)$ :

$$\underline{\Sigma}^{(2)}(p) = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma_\mu \underline{S}^c(p+k) \gamma^\mu \frac{1}{k^2 - \lambda^2},$$

$$\underline{S}^c(p) = (\hat{p} + \underline{m}) \left( \frac{1}{\underline{m}^2 - p^2} - \frac{1}{\mathcal{M}^2 - p^2} \right).$$

Учитывая, что  $\gamma_\mu (\hat{p} + \hat{k}) + \underline{m} \gamma^\mu = -2(\hat{p} + \hat{k}) + 4\underline{m}$  и используя соотношение

$$\frac{1}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} = i \int_0^\infty ds e^{-is(m^2 - p^2 - i\varepsilon)}, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (3.7.1)$$

получаем

$$\underline{\Sigma}^{(2)}(p) = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' \int d^4k (-2(\hat{p} + \hat{k}) + 4\underline{m}) \times$$

$$\times e^{-is'(\lambda^2 - k^2 - i\varepsilon)} e^{is(p+k)^2 + i\varepsilon} (e^{-ism^2} - e^{-is\mathcal{M}^2}).$$

Используя далее формулы

$$\int d^4k e^{i(ak^2 + 2bk)} = \frac{\pi^2}{ia^2} e^{-\frac{ib^2}{a}}, \quad a > 0,$$

$$\int d^4k k_\lambda e^{i(ak^2 + 2bk)} = \frac{ib_\lambda}{a} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 e^{-\frac{ib^2}{a}}, \quad (3.7.2)$$

НАХОДИМ

$$\Sigma^{(2)}(p) = -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' \frac{e^{\frac{ss'}{s+s'} p^2}}{(s+s')^2} \left( 2\underline{m} - \hat{p} \frac{s'}{s+s'} \right) e^{-is'\lambda^2} \times \\ \times (e^{-ism^2} - e^{-is\mathcal{M}^2}).$$

Переходя к новым переменным  $s = (1 - \xi) \rho$ ,  $s' = \xi \rho$  и учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} (e^{iA\rho} - e^{iB\rho}) e^{-\varepsilon\rho} = \ln \frac{B + i\varepsilon}{A + i\varepsilon}, \quad (3.7.3)$$

получаем

$$\Sigma^{(2)}(p) = -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 d\xi (2\underline{m} - \hat{p}\xi) \mathcal{J}(\xi, \mathcal{M}), \\ \mathcal{J}(\xi, \mathcal{M}) = \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} e^{i\rho^2\xi(1-\xi)\rho - i\lambda^2\xi\rho} (e^{-i(1-\xi)m^2\rho} - e^{-i(1-\xi)\mathcal{M}^2\rho}) = \\ = \ln \frac{\rho^2\xi(1-\xi) - \lambda^2\xi - \mathcal{M}^2(1-\xi)}{\rho^2\xi(1-\xi) - \lambda^2\xi - \underline{m}^2(1-\xi)}$$

(в этих формулах предполагается, что  $\underline{m}^2$ ,  $\lambda^2$ ,  $\mathcal{M}^2$  содержат бесконечно малые отрицательные мнимые добавки, так что  $\ln(a + i\varepsilon) = \ln|a| + \pi i$ ,  $a < 0$ ). В пределе  $\mathcal{M} \rightarrow \infty$  отсюда получаем

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 d\xi \left\{ (\hat{p}\xi - 2\underline{m}) \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2} - \frac{3}{4} \hat{p} + 2\underline{m} - \right. \\ \left. - (\hat{p}\xi - 2\underline{m}) \ln \frac{m^2(1-\xi) + \lambda^2\xi - \rho^2\xi(1-\xi)}{\mu^2} \right\},$$

где  $\mu^2$  — произвольная величина размерности квадрата массы, в качестве которой можно выбрать  $m^2$ . Отсюда следует, что

$$\Sigma^{(2)} = \Sigma^{(2)}(\underline{m}) + (\hat{p} - \underline{m}) \Sigma^{(2)'}(\underline{m}) + \underline{\Sigma}^{(2)}(p), \quad (3.7.4)$$

где

$$\Sigma^{(2)}(\underline{m}) = -\frac{me^2}{8\pi^2} \left( \frac{3}{2} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} + \frac{5}{4} \right), \\ \Sigma^{(2)'}(\underline{m}) = \frac{e^2}{8\pi^2} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} + \frac{7}{4} + \ln \frac{\lambda^2}{\underline{m}^2} \right) \quad (3.7.5)$$

и перенормированный массовый оператор  $\underline{\Sigma}^{(2)}(p)$  определяется формулой

$$\underline{\Sigma}^{(2)}(p) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 d\xi \left\{ (2\underline{m} - \hat{p}\xi) \ln \left( 1 - \frac{\rho^2}{\underline{m}^2} \xi \right) - (\hat{p} - \underline{m}) \ln \frac{\lambda^2}{\underline{m}^2} + \right. \\ \left. + 3\underline{m} - \frac{7}{4} \hat{p} \right\}, \\ \underline{m}^2 \gg \lambda^2, \quad |\rho^2 - \underline{m}^2| \gg \lambda^2,$$

или после интегрирования по  $\xi$

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}^{(2)}(p) = & \frac{e^2}{8\pi^2} \left\{ 2\underline{m} \left[ \frac{p^2 - \underline{m}^2}{p^2} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{\underline{m}^2} \right) - \frac{5}{8} \right] + \right. \\ & + \frac{1}{2} \hat{p} \left[ \frac{3}{2} + \frac{m^2}{p^2} + \frac{m^4 - (p^2)^2}{(p^2)^2} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{\underline{m}^2} \right) \right] - \\ & \left. - (\hat{p} - \underline{m}) \left( \frac{9}{4} + \ln \frac{\lambda^2}{\underline{m}^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

Электромагнитная масса электрона  $\delta m$  определяется формулой (3.6.27), следовательно, в приближении  $\underline{e}^2$

$$\delta m^{(2)} = -\Sigma^{(2)}(\underline{m}) = \frac{me^2}{8\pi^2} \left( \frac{3}{2} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} + \frac{5}{4} \right). \quad (3.7.7)$$

Перенормировочная постоянная  $Z_2$  в приближении  $\underline{e}^2$  определяется согласно (3.6.26) формулой

$$Z_2 = 1 - \Sigma^{(2)'}(\underline{m}) = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} + \frac{7}{4} + \ln \frac{\lambda^2}{\underline{m}^2} \right). \quad (3.7.8)$$

Из формулы (3.7.6) видно, что для пространственно подобных  $p_\mu$  величина  $\underline{\Sigma}^{(2)}$  удовлетворяет соотношению

$$\gamma^0 \underline{\Sigma}^{(2)+} \gamma^0 = \underline{\Sigma}^{(2)}, \quad (3.7.9)$$

т. е. коэффициенты в (3.7.6) при  $\hat{p}$  и  $\underline{m}$  вещественны.

Напомним, что полученные нами формулы относятся к фейнмановской калибровке ( $\xi = 1$ ). Если пользоваться общей калибровкой  $\xi \neq 1$ , то в качестве фотонного пропэгатора согласно (2.4.55) следует выбрать

$$D_{\mu\nu}^c(k; \xi) = -\frac{1}{k^2 + i0} \left( g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i0} \right).$$

Как мы видели, для устранения инфракрасной расходимости в  $\Sigma$  необходимо ввести фиктивную массу фотона  $\lambda$ , так что в фейнмановской калибровке ( $\xi = 1$ ) пропэгатор будет равен  $-g_{\mu\nu} (k^2 - \lambda^2 + i0)^{-1}$ . В произвольной калибровке при наличии массы фотона  $\lambda$  фотонный пропэгатор мы выберем в виде

$$D_{\mu\nu}^c(k; \xi) = -\frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i0} \left( g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \lambda^2 \xi + i0} \right),$$

или

$$D_{\mu\nu}^c(k; \xi) = -\frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2}}{k^2 - \lambda^2 + i0} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 \xi + i0}. \quad (3.7.10)$$

Первое слагаемое в этом выражении соответствует пропэгатору векторной частицы с «реальной» массой  $\lambda$ , а второе — пропэгатору скалярного поля (возникающего при представлении продольной части потен-

циала  $A_\mu^{(l)}(x)$  в виде  $A_\mu^{(l)} = \partial_\mu \varphi$  с фиктивной массой  $\lambda \sqrt{\xi}$ ; последнее слагаемое обеспечивает убывание пропагатора  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi)$  в области больших  $k$  (подробнее см. далее п. 6.4.1).

Таким образом, электронный массовый оператор в общей калибровке можно представить в виде [26]

$$\Sigma^{(2)}(p; \xi) = \Sigma^{(2)}(p) + \Sigma_\xi^{(2)}(p), \quad (3.7.11)$$

где  $\Sigma^{(2)}(p)$  — массовый оператор в фейнмановской калибровке,  $\Sigma^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p; 1)$ , определяемый формулой (3.7.4), и  $\Sigma_\xi^{(2)}(p)$  определяется формулой

$$\Sigma_\xi^{(2)}(p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} (\xi - 1) \int d^4k \hat{k} \underline{S}^c(p+k) \hat{k} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 \xi + i0}. \quad (3.7.12)$$

Этот интеграл вычисляется так же, как интеграл для  $\Sigma^{(2)}(p)$ . В результате при  $\lambda \rightarrow 0$  получаем

$$\Sigma_\xi^{(2)}(p) = (\hat{p} - \underline{m}) \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ (\xi - 1) \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} + (1 - \xi) \ln \frac{\lambda^2}{\underline{m}^2} - \xi \ln \xi \right\} + \Sigma_\xi^{(2)}(p), \quad (3.7.13)$$

где  $\Sigma_\xi^{(2)}(p)$  — перенормированная часть массового оператора  $\Sigma_\xi^{(2)}(p)$ , которая при  $m^2, |p^2 - m^2| \gg \lambda^2$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Sigma_\xi^{(2)}(p) = & (1 - \xi) \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \hat{p} \frac{p^2 - m^2}{p^2} \left( 1 + \frac{m^2}{p^2} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right) - \right. \\ & \left. - (\hat{p} - \underline{m}) \left( 1 - \frac{p^2 - m^2}{p^2} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{m^2} \right) + \ln \frac{\lambda^2}{\underline{m}^2} + \frac{\xi \ln \xi}{\xi - 1} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

Таким образом, перенормированный массовый оператор в произвольной калибровке во втором приближении теории возмущений определяется так:

$$\underline{\Sigma}^{(2)}(p; \xi) = \underline{\Sigma}^{(2)}(p) + \underline{\Sigma}_\xi^{(2)}(p), \quad (3.7.15)$$

где  $\underline{\Sigma}^{(2)}(p)$  и  $\underline{\Sigma}_\xi^{(2)}(p)$  при  $\underline{m}^2, |p^2 - m^2| \gg \lambda^2$  определяются формулами (3.7.6), (3.7.14). Отметим, что  $\underline{\Sigma}_\xi^{(2)}(p)|_{p=m} = 0$ . Поэтому величина  $\delta m^{(2)}$ , определяющая перенормировку массы, не зависит от  $\xi$  и по-прежнему определяется формулой (3.7.7). Константа же перенормировки  $Z_2$  зависит от  $\xi$  и согласно (3.7.13) задается формулой

$$Z_2(\xi) = Z_2 + Z_{2\xi},$$

где  $Z_2 = Z_2(1)$  определяется формулой (3.7.8), а величина

$$Z_{2\xi} = - \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ (\xi - 1) \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} + (1 - \xi) \ln \frac{\lambda^2}{\underline{m}^2} - \xi \ln \xi \right\}.$$

Таким образом,

$$Z_2(\xi) = 1 - \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \xi \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} + (3 - \xi) \ln \frac{\lambda^2}{\underline{m}^2} + \frac{7}{2} - \xi \ln \xi \right\}. \quad (3.7.16)$$

Обратим внимание на то, что величина  $Z_2(\xi)$  не будет содержать ультрафиолетовых расходимостей, если  $\xi = 0$  (калибровка Ландау), и не будет содержать инфракрасных расходимостей, если  $\xi = 3$ .

Отметим, что расходимости (при  $M \rightarrow \infty$ ) в перенормированном массовом операторе  $\underline{\Sigma}^{(2)}$  содержатся только в полиноме первой степени по  $\hat{p}$ :

$$-\delta m^{(2)} + (\hat{p} - \underline{m})(1 - Z_2),$$

причем согласно (3.7.16), (3.7.7) эти расходимости являются логарифмическими по  $M$ , а не линейными (степень расходимости, оцененная в п. 3.6.1, оказалась завышенной, так как вследствие релятивистской симметрии происходит сокращение членов, приводящих к линейной по  $M$  расходимости). Величина  $\underline{\Sigma}^{(2)}(p)$  (как и  $Z_2$ ) при  $\lambda \rightarrow 0$  логарифмически расходится.

**3.7.2. Вычисление фотонной функции Грина во втором порядке теории возмущений в методе промежуточной регуляризации Паули — Вилларса.** Перенормированная функция Грина фотона во втором приближении теории возмущений определяется поляризационным оператором

$$\underline{\Pi}^{(2)}(k) = \Pi^{(2)}(k) - \Pi^{(2)}(0) - k^2 \Pi^{(2)'}(0), \quad \Pi = \frac{1}{3} \Pi_{\mu}^{\mu}, \quad (3.7.17)$$

где

$$\Pi^{(2)}(k) = -\frac{ie^2}{3(2\pi)^4} \text{Sp} \int d^4 p \hat{p} \gamma_{\mu} \underline{S}^c(p) \gamma^{\mu} \underline{S}^c(p-k)$$

(для упрощения вычислений мы сразу предположили поперечность тензора  $\Pi_{\mu\nu}$ ). Замечая, что

$$\text{Sp} \gamma_{\mu} (\hat{p} + \underline{m}) \gamma^{\mu} ((\hat{p} - \hat{k}) + \underline{m}) = 16\underline{m}^2 + 8p(p-k)$$

и учитывая формулу (3.7.1), получаем

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(k) = & \frac{ie^2}{3(2\pi)^4} \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} ds' (e^{-ism^2} - e^{-is\mathcal{M}^2})(e^{-is'm^2} - e^{-is'\mathcal{M}^2}) \times \\ & \times e^{is'k^2} \int d^4 p (16\underline{m}^2 - 8p(p-k)) e^{i(s+s')p^2 - 2is'pk}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя формулы (3.7.2) и формулу

$$\int d^4 k k^2 e^{i(ak^2 + 2bk)} = \frac{\pi^2}{a^2} \frac{2a - ib^2}{a^2} e^{-i\frac{b^2}{a}},$$

находим

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(k) = & -\frac{ie^2}{6\pi^2} \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} ds' (e^{-ism^2} - e^{-is\mathcal{M}^2})(e^{-is'm^2} - e^{-is'\mathcal{M}^2}) \times \\ & \times e^{i\frac{ss'k^2}{s+s'}} \frac{1}{(s+s')^2} \left( 2 \left( im^2 + \frac{1}{s+s'} \right) + i \frac{ss'}{(s+s')^2} k^2 \right). \end{aligned}$$

Откуда, делая замену переменных  $s = (1 - \xi) \rho$ ,  $s' = \xi \rho$ , найдем

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(k) = & -\frac{ie^2}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} \int_0^1 d\xi (e^{-i\xi\rho m^2} - e^{-i\xi\rho \mathcal{M}^2}) (e^{-i(1-\xi)\rho m^2} - \\ & - e^{-i(1-\xi)\rho \mathcal{M}^2}) e^{i\rho\xi(1-\xi)k^2} \left\{ i\xi(1-\xi)k^2 + 2 \left( \underline{im}^2 + \frac{1}{\rho} \right) \right\}, \end{aligned}$$

или

$$\Pi^{(2)}(k) = -\frac{ie^2}{6\pi^2} \int_0^1 d\xi F(\xi, \mathcal{M}),$$

$$F(\xi, \mathcal{M}) = \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} f(\rho) i(2\underline{m}^2 + \xi(1-\xi)k^2) + 2 \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho},$$

где

$$f(\rho) = e^{i\rho\xi(1-\xi)k^2} (e^{-i\xi\rho m^2} - e^{-i\xi\rho \mathcal{M}^2}) (e^{-i(1-\xi)\rho m^2} - e^{-i(1-\xi)\rho \mathcal{M}^2}).$$

Учитывая (3.7.3), получаем

$$\begin{aligned} F(\xi, \mathcal{M}) \xrightarrow{\mathcal{M} \rightarrow \infty} & -2i(\mathcal{M}^2 - \underline{m}^2) (\xi \ln \xi + (1-\xi) \ln(1-\xi)) + \\ & + 3i\xi(1-\xi)k^2 \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} - 2i(\underline{m}^2 - \xi(1-\xi)k^2) + \\ & + 3i\xi(1-\xi)k^2 \ln \frac{\xi(1-\xi)\underline{m}^2}{\underline{m}^2 - \xi(1-\xi)k^2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Pi^{(2)}(k) = \Pi^{(2)}(0) + k^2 \Pi^{(2)'}(0) + \underline{\Pi}^{(2)}(k),$$

где

$$\Pi^{(2)}(0) = \frac{e^2}{3\pi^2} (2\mathcal{M}^2 - 3\underline{m}^2), \quad \Pi^{(2)'}(0) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left( \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} - 1 \right)$$

и перенормированный поляризационный оператор  $\underline{\Pi}^{(2)}(k)$  определяется формулой

$$\underline{\Pi}^{(2)}(k) = -\frac{e^2}{2\pi^2} k^2 \int_0^1 d\xi (1-\xi) \xi \ln \left( 1 - \xi(1-\xi) \frac{k^2}{\underline{m}^2} \right). \quad (3.7.18)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что величина  $\Pi^{(2)}(0)$  отлична от нуля и расходится как  $\mathcal{M}^2$ , в то время как в п. 3.6.5 мы считали ее равной нулю. Кроме того, если бы мы вычислили величину  $\Pi_{\mu\nu}$  (а не  $\Gamma_{\mu}^{\mu}$ ), то перенормированная величина  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}$  не удовлетворяла бы условию поперечности ( $\Pi_{\mu\nu}^{(2)} k^\nu \neq 0$ ), однако перенормированная величина  $\underline{\Pi}_{\mu\nu}^{(2)}$  удовлетворяет условию поперечности  $\underline{\Pi}_{\mu\nu}^{(2)} k^\nu = 0$ . Это связано с тем, что использованная нами промежуточная регуляризация Паули — Вилларса, будучи релятивистски-инвариантной, не является



калибровочно-инвариантной. Как мы уже отмечали, если промежуточной регуляризации Паули — Вилларса подвергать не функции распространения, а матричные элементы, например электронные петли, то мы получим  $\underline{\Pi}^{(2)}(0) = 0$  и  $\underline{\Pi}_{\mu\nu}^{(2)} k^\nu = 0$  (см. также далее).

Величина  $Z_3$  согласно (3.6.32) во втором приближении теории возмущений определяется формулой

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \left( \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} - 1 \right). \quad (3.7.19)$$

Формулу (3.7.18) можно, очевидно, переписать в виде

$$\underline{\Pi}^{(2)}(k) = \frac{e^2}{96\pi^2} (k^2)^2 \int_0^1 dv \frac{v^2 \left( 1 - \frac{v^2}{3} \right)}{\underline{m}^2 - \frac{1-v^2}{4} k^2} \quad (3.7.20)$$

( $\xi = \frac{1+v}{2}$ ; как мы уже отмечали, под величиной  $\underline{m}^2$  необходимо понимать  $\underline{m}^2 - i0$ ). Из этой формулы видно, что

$$\text{Im} \underline{\Pi}^{(2)}(k) = \frac{e^2}{48\pi} \theta(k^2 - 4\underline{m}^2) k^2 \left( 1 - \frac{4\underline{m}^2}{k^2} \right)^{1/2} \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{2\underline{m}^2}{k^2} \right), \quad (3.7.21)$$

и поэтому функция  $\underline{\Pi}^{(2)}(k)$  является вещественной для пространственно-подобных  $k_\mu$ .

**3.7.3. Вычисление функций Грина и вершинной функции во втором приближении теории возмущений в методе размерной регуляризации.** Найдем величины  $\underline{\Pi}^{(2)}$  и  $\underline{\Sigma}^{(2)}$ , используя калибровочно-инвариантный метод размерной регуляризации. В методе размерной регуляризации поляризационный оператор 2-го порядка определяется формулой

$$\underline{\Pi}_{\mu\nu}^{(2)}(k) = -ie^2 \mu^{4-d} \text{Sp} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma_\mu \frac{\hat{p} + \underline{m}}{\underline{m}^2 - p^2} \gamma_\nu \frac{(\hat{p} - \hat{k}) + \underline{m}}{\underline{m}^2 - (p-k)^2},$$

где шпур следует вычислять по формулам (3.6.23). Используя эти формулы, получаем

$$\underline{\Pi}_{\mu\nu}^{(2)}(k) = -ie^2 \mu^{4-d} 2^{\frac{d}{2}} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{g_{\mu\nu} (\underline{m}^2 + pk - p^2) + 2p_\mu p_\nu - p_\mu k_\nu - p_\nu k_\mu}{(p^2 - \underline{m}^2) [(p-k)^2 - \underline{m}^2]}. \quad (3.7.22)$$

Для нахождения появляющихся здесь интегралов воспользуемся формулой (3.6.13), а затем формулами (3.6.17) — (3.6.19). В результате при  $d \rightarrow 4$  получим

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{4-d} \cdot 2^{d/2}}{(p^2 - \underline{m}^2) [(p-k)^2 - \underline{m}^2]} \rightarrow \frac{i}{4\pi^2} \left\{ \eta - \int_0^1 dx \ln f(x) \right\},$$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{4-d} \cdot 2^{d/2} p_\lambda}{(p^2 - \underline{m}^2) [(p-k)^2 - \underline{m}^2]} \rightarrow \frac{ik_\lambda}{4\pi^2} \left\{ \frac{\eta}{2} - \int_0^1 dx x \ln f(x) \right\},$$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{4-d} \cdot 2^{d/2} p_\lambda p_\nu}{(p^2 - \underline{m}^2) [(p-k)^2 - \underline{m}^2]} \rightarrow \frac{ik_\lambda k_\nu}{4\pi^2} \left\{ \frac{\eta}{3} - \int_0^1 dx x^2 \ln f(x) \right\} -$$

$$- \frac{i}{8\pi^2} g_{\lambda\nu} \left\{ -(\eta + 1) \left( \underline{m}^2 - \frac{k^2}{6} \right) + \mu^2 \int_0^1 dx f(x) \ln f(x) \right\}, \quad (3.7.23)$$

где

$$\eta = \frac{2}{4-d} - C + \ln 2\pi, \quad f(x) = \mu^{-2} (\underline{m}^2 - k^2 x (1-x)),$$

(при получении этих формул мы использовали асимптотические соотношения (3.6.22)). Подставляя (3.7.23) в (3.7.22) и учитывая, что  $g_\mu^\mu = d$ , находим

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \Pi^{(2)}(k), \quad (3.7.24)$$

$$\Pi^{(2)}(k) = \frac{e^2}{4\pi^2} k^2 \left\{ \frac{\eta}{3} - 2 \int_0^1 dx x (1-x) \ln \frac{\underline{m}^2 - k^2 x (1-x)}{\mu^2} \right\}.$$

Как мы видим благодаря множителю  $g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ , это выражение является калибровочно инвариантным ( $\Pi_{\mu\nu}^{(2)} k^\nu = 0$ ), причем  $\Pi(0) = 0$  (см. п. 3.6.5). Для получения перенормированного поляризованного оператора необходимо воспользоваться формулой (3.7.17). В результате получим уже известное нам конечное выражение (3.7.18).

Найдем массовый оператор электрона  $\Sigma^{(2)}(p)$ , используя метод размерной регуляризации. Так как согласно (3.6.24), (3.6.65)

$$\gamma^\mu ((\hat{p} + \hat{k}) + \underline{m}) \gamma_\mu = \underline{m}d + (2-d)(\hat{p} + \hat{k}),$$

то

$$\Sigma^{(2)}(p) = -ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)(\hat{p} + \hat{k}) + \underline{m}d}{(k^2 - \lambda^2) [\underline{m}^2 - (p+k)^2]}.$$

Используя формулу (3.6.13), представляем  $\Sigma^{(2)}(p)$  в виде

$$\Sigma^{(2)}(p) = ie^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)(\hat{p} + \hat{k}) + \underline{m}d}{[k^2 + 2xkp + (p^2 - \underline{m}^2 + \lambda^2)x - \lambda^2]^2}.$$

Вычисляя интегралы по  $k$  с помощью формул (3.6.17), (3.6.18), получаем

$$\Sigma^{(2)}(p) = e^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx ((d-2)\hat{p}(1-x) - \underline{m}d) \times$$

$$\times [\underline{m}^2 x + \lambda^2(1-x) - p^2 x(1-x)]^{\frac{d}{2}-2}.$$

Вблизи значения  $d = 4$  это выражение приобретает вид

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \eta (\hat{p}(1-x) - \underline{2m}) - \hat{p}(1-x) + \underline{m} - \right. \\ \left. - (\hat{p}(1-x) - \underline{2m}) \ln \frac{m^2 x + \lambda^2(1-x) - p^2 x(1-x)}{\mu^2} \right\}, \quad (3.7.25)$$

где

$$\eta = \frac{2}{4-d} - C + \ln 4\pi.$$

Вычитая из  $\Sigma^{(2)}$  два первых члена разложения по степеням  $\hat{p} - \underline{m}$ , получаем выражение (3.7.6) для  $\underline{\Sigma}^{(2)}(p)$ . Формулы (3.7.4), (3.7.25) совпадают, если

$$\eta = \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2} - \frac{1}{2}.$$

Найдем перенормированную вершинную функцию  $\underline{\Lambda}_\mu^{(2)}$ , используя размерную регуляризацию. Исходной при этом является формула

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p_1, p_2) = \frac{ie^2 \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \int d^d k \gamma_\nu S^c(k+q) \gamma_\mu S^c(k) \gamma^\nu \mathcal{D}^c(p_1-k),$$

где  $\mathcal{D}^c(k) = (k^2 - \lambda^2)^{-1}$ ,  $q = p_2 - p_1$  (мы пользуемся этим выражением, так как перенормированная величина  $\underline{\Lambda}^{(2)}$  содержит инфракрасные расходимости).

Используя соотношения (3.6.24), получаем

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p_1, p_2) = -ie^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} [(k+q)^2 - \underline{m}^2]^{-1} [(p_1-k)^2 - \lambda^2] \times \\ \times (k^2 - \underline{m}^2)^{-1} \{ -2\hat{k}\gamma_\mu \hat{k} - 2\hat{k}\gamma_\mu \hat{q} + (4-d)\hat{k}\gamma_\mu \hat{k} + 8\underline{m}k_\mu + 4\underline{m}q_\mu - \\ - 2\underline{m}^2 \gamma_\mu + (4-d)(\hat{q}\gamma_\mu \hat{k} - 2\underline{m}k_\mu - \underline{m}\hat{q}\gamma_\mu + \underline{m}^2 \gamma_\mu) \}.$$

Последнее слагаемое в фигурных скобках при  $d \rightarrow 4$  не дает вклада в  $\underline{\Lambda}_\mu^{(2)}$ , так как сводится к выражениям типа

$$(d-4) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1, k_\lambda}{(k^2 - 2Qk + I^2)^3} \sim (d-4) \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) (I^2 - Q^2)^{3 - \frac{d}{2}}$$

(см. (3.6.17), (3.6.18)), которые стремятся к нулю при  $d \rightarrow 4$ .

Используя формулу

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} = \Gamma(3) \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 [a_1 x_2 + a_2 (x_1 - x_2) + a_3 (1 - x_1)]^{-3}$$

и полагая в ней

$$a_1 = (k+q)^2 - \underline{m}^2, \quad a_2 = k^2 - \underline{m}^2, \quad a_3 = (p_1-k)^2 - \lambda^2,$$

находим

$$\Lambda_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2) = 2i\Gamma(3) e^{2\mu^4-d} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times \\ \times \frac{\hat{k}\gamma_{\mu}\hat{k} + \hat{k}\gamma_{\mu}\hat{q} - \left(2 - \frac{d}{2}\right)\hat{k}\gamma_{\mu}\hat{k} - 4\underline{m}k_{\mu} - 2\underline{m}q_{\mu} + \underline{m}^2\gamma_{\mu}}{[k^2 + 2kqx_2 - 2kp_1(1-x_1) - \underline{m}^2x_1 + q^2x_2 + (p_1^2 - \lambda^2)(1-x_1)]^3}.$$

Производя интегрирование по  $k$  с помощью формул (3.6.17) — (3.6.19), получаем

$$\Lambda_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2) = -\frac{2e^{2\mu^4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) [(qx_2 - p_1(1-x_1))^2 + \\ + \underline{m}^2x_1 - q^2x_2 - (p_1^2 - \lambda^2)(1-x_1)]^{\frac{d}{2}-3} \left\{ 2\underline{m}q_{\mu} - \underline{m}^2\gamma_{\mu} - \right. \\ \left. - 4\underline{m}(q_{\mu}x_2 - p_{1\mu}(1-x_1) + (\hat{q}x_2 - \hat{p}_1(1-x_1))\gamma_{\mu}\hat{q} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{d}{2}\right)(\hat{q}x_2 - \hat{p}_1(1-x_1))\gamma_{\mu}(\hat{q}x_2 - \hat{p}_1(1-x_1)) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times \gamma_{\nu}\gamma_{\mu}\gamma^{\nu} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right)} [(qx_2 - p_1(1-x_1))^2 + \underline{m}^2x_1 - q^2x_2 - \right. \\ \left. - (p_1^2 - \lambda^2)(1-x_1)] \right\}.$$

Асимптотика этой величины при  $d \rightarrow 4$  согласно (3.6.22) имеет вид

$$\Lambda_{\mu}^{(2)}(p_1, p_2) = -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ (2-\eta)\gamma_{\mu} + \right. \\ \left. + \gamma_{\mu} \ln \frac{(qy - p_1x)^2 + \underline{m}^2(1-x) - q^2y - (p_1^2 - \lambda^2)x}{\mu^2} + \right. \\ \left. + \frac{(\hat{q}y - \hat{p}_1x)\gamma_{\mu}\hat{q} - 4\underline{m}(q_{\mu}y - p_{1\mu}x) + 2\underline{m}q_{\mu} - \underline{m}^2\gamma_{\mu} - (\hat{q}y - \hat{p}_1x)\gamma_{\mu}(\hat{q}y - \hat{p}_1x)}{(qy - p_1x)^2 + \underline{m}^2(1-x) - q^2y - (p_1^2 - \lambda^2)x} \right\} \quad (3.7.26)$$

где

$$\eta = \frac{2}{4-d} - C + \ln 4\pi.$$

Отсюда следует, что

$$\Lambda_{\mu}^{(2)}(p, p) = -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx x \left\{ (2-\eta)\gamma_{\mu} + \gamma_{\mu} \ln \frac{\underline{m}^2x - p^2x(1-x) + \lambda^2(1-x)}{\mu^2} + \right. \\ \left. + \frac{4mp_{\mu}(1-x) - \underline{m}^2\gamma_{\mu} - \hat{p}\gamma_{\mu}\hat{p}(1-x)^2}{\underline{m}^2x - p^2x(1-x) + \lambda^2(1-x)} \right\}. \quad (3.7.26')$$

Заменяя  $p_\mu$  на  $\frac{1}{2} \{\hat{p}, \gamma_\mu\}$  и полагая  $\hat{p} = \underline{m} (p_\mu \rightarrow \underline{m} \gamma_\mu)$ , находим

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p, p)|_{\underline{p}=\underline{m}} = \frac{e^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{\eta}{2} + 2 - \frac{1}{2} \ln \frac{m^2}{\underline{m}^2} + \ln \frac{\lambda_2}{\underline{m}^2} \right\}. \quad (3.7.27)$$

Согласно (3.6.43) регуляризованное выражение

$$\underline{\Lambda}_\mu^{(2)}(p_1, p_2) = \Lambda_\mu^{(2)}(p_1, p_2) - \Lambda_\mu^{(2)}(p, p)|_{\underline{p}=\underline{m}}$$

является конечным при  $d \rightarrow 4$ .

Из (3.7.25) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma^{(2)}(p)}{\partial p_\mu} = & \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ (\eta - 1)(1 - x) \gamma_\mu - \right. \\ & - \gamma_\mu (1 - x) \ln \frac{m^2 x - p^2 x (1 - x) + \lambda^2 (1 - x)}{\underline{m}^2} + \\ & \left. + 2p_\mu x (1 - x) \frac{\hat{p} (1 - x) - 2\underline{m}}{m^2 x - p^2 x (1 - x) + \lambda^2 (1 - x)} \right\}. \end{aligned}$$

Сравнивая эту формулу с (3.7.26), после несложных преобразований находим

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p, p) = \frac{\partial \Sigma^{(2)}(p)}{\partial p_\mu}.$$

Это соотношение представляет собой тождество Уорда. Таким образом, в методе размерной регуляризации тождество Уорда (связанное с калибровочной инвариантностью теории) автоматически выполняется для неперенормированных величин (ср. с аналогичной ситуацией в случае поляризованного оператора).

**3.7.4. Особенности и асимптотики фейнмановских диаграмм.** Амплитуда рассеяния и функции Грина определяются фейнмановскими диаграммами, которым, как правило, соответствуют многократные интегралы. Они являются аналитическими функциями инвариантов, построенных из внешних импульсов частиц. Важнейшей характеристикой таких функций являются их особенности. Поэтому большой интерес представляет нахождение особенностей фейнмановских интегралов, а также выяснение их асимптотического поведения в области больших импульсов. Этой задачей мы будем заниматься далее.

Особенности интеграла по внешним параметрам определяются сингулярностями подынтегрального выражения. Разъясним это на простом примере однократного интеграла

$$F(p) = \int_0^1 d\alpha f(\alpha, p),$$

где функция  $f(\alpha, p)$  вещественных переменных  $\alpha, p$  имеет сингулярности на линии

$$p = \bar{p}(\alpha),$$

так что

$$\frac{1}{f(\alpha, \bar{p}(\alpha))} \equiv 0.$$

Функция  $\bar{p}(\alpha)$  имеет в области интегрирования  $0 < \alpha < 1$  минимальное и максимальное значения. Пусть, например, максимальное значение функции  $\bar{p}(\alpha)$  достигается внутри области интегрирования при  $\alpha = \alpha_0$  ( $0 < \alpha_0 < 1$ ):

$$\bar{p}(\alpha_0) = \max_{0 < \alpha < 1} \bar{p}(\alpha),$$

а минимальное значение функция  $\bar{p}(\alpha)$  достигает при  $\alpha = 0$ :

$$\bar{p}(0) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \bar{p}(\alpha).$$

Таким образом, если  $p > \bar{p}(\alpha_0)$  или  $p < \bar{p}(0)$ , то подынтегральная функция не имеет сингулярностей в области интегрирования и, следовательно, для таких значений  $p$  функция  $F(p)$  регулярна. Особенности  $F(p)$  могут появиться только при  $\bar{p}(0) \leq p \leq \bar{p}(\alpha_0)$ . Именно особенность впервые появляется при  $p = \bar{p}(\alpha_0)$ , где  $\alpha_0$  определяется из уравнения

$$\frac{\partial \bar{p}(\alpha)}{\partial \alpha} = 0,$$

либо при  $p = \bar{p}(0)$ , т. е. на границе области интегрирования. Рассматривая  $F(p)$  как функцию комплексного переменного  $p$ , мы должны сделать в комплексной плоскости  $p$  разрез  $p(0) < p < \bar{p}(\alpha_0)$ . Функция  $F(p)$ , таким образом, будет аналитической в разрезанной плоскости, если подынтегральное выражение — аналитическая функция.

В случае многократных интегралов, соответствующих фейнмановским диаграммам, особенности интегралов также определяются сингулярностями подынтегрального выражения. Эти интегралы имеют следующую структуру:

$$F(p) = \int d^4k_1 d^4k_2 \dots d^4k_r \frac{B(k, p)}{(m_1^2 - q_1^2 - i0) \dots (m_n^2 - q_n^2 - i0)},$$

где  $m_i$  — масса виртуальной частицы сорта  $i$  с 4-импульсом  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ );  $r$  — число интегрирований (равное числу независимых замкнутых контуров в изучаемой диаграмме);  $B(k, p)$  — полиномиальная функция внешних 4-импульсов  $p_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) и 4-импульсов интегрирования  $k_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ). Величины  $q_i$  являются линейными комбинациями  $p_s, k_j$  с коэффициентами, равными  $\pm 1, 0$ , которые определяются законом сохранения 4-импульса в каждой вершине. Так как функция  $B(k, p)$  в пространстве переменных  $k_j$  не имеет сингулярностей, то положение особенностей функции  $F(p)$  по переменным  $p$  определяется только знаменателем, и поэтому далее мы будем полагать  $B = 1$ .

Замечая, что (см. 3.6.13)

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = (n-1)! \int_0^1 d\alpha_1 \dots \int_0^1 d\alpha_n \frac{\delta(\alpha_1 + \dots + \alpha_n - 1)}{(\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n)^n}, \quad (3.7.28)$$

представляем интеграл  $F(p)$  в виде

$$F(p) = (n-1)! \int_0^1 d\alpha_1 \dots \int_0^1 d\alpha_n \int d^4 k_1, \dots, \\ \dots, d^4 k_r \frac{\delta(\alpha_1 + \dots + \alpha_n - 1)}{[f(k, \alpha; p) - i0]^n}, \quad (3.7.29)$$

где

$$f(k, \alpha; p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (m_i^2 - q_i^2). \quad (3.7.30)$$

Поверхность сингулярностей подынтегрального выражения в пространстве  $k, \alpha$  определяется уравнением

$$f(k, \alpha; p) = 0.$$

Из этого уравнения можно определить компоненту  $\bar{p}$  одного из 4-векторов  $p$  как функцию переменных  $k, \alpha$  и остальных компонент  $p_a$  векторов  $p_{iu}$  ( $i = 1, \dots, l$ ):

$$\bar{p} = \bar{p}(k, \alpha; p_a).$$

Таким образом, тождественно относительно  $k, \alpha, p_a$  находим

$$f(k, \alpha; \bar{p}(k, \alpha; p_a), p) = 0. \quad (3.7.31)$$

Если компонента  $\bar{p}$  будет больше максимума функции  $\bar{p}(k, \alpha; p_a)$  (по переменным  $k, \alpha$  в области интегрирования) или меньше минимума функции  $\bar{p}(k, \alpha; p_a)$  (по переменным  $k, \alpha$  в области интегрирования), то функция  $f(k, \alpha; p)$  для таких значений  $\bar{p}$  никогда не обратится в нуль в области интегрирования. Функция  $f(k, \alpha; p)$  обращается в нуль в области интегрирования и, следовательно, имеет место сингулярность подынтегрального выражения, если  $\bar{p}$  больше минимума и меньше максимума функций  $\bar{p}(k, \alpha; p_a)$ . Таким образом, соотношения

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial k_i} = \frac{\partial \bar{p}(k, \alpha; p_a)}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (3.7.32)$$

определяют значения переменных  $k, \alpha$  (в области интегрирования), вблизи которых функция  $\bar{p}(k, \alpha; p_a)$  достигает минимума или максимума, следовательно, при этих значениях  $k, \alpha$  в подынтегральном выражении впервые появляется сингулярность. Соотношения (3.7.32), определяющие параметры  $k, \alpha$ , при которых в подынтегральном выражении впервые может появиться сингулярность, можно сформулировать в ином виде. Именно, дифференцируя соотношение (3.7.31) по  $k_i, \alpha_j$

$$\frac{\partial f}{\partial k_i} + \frac{\partial f}{\partial \bar{p}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial k_i} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial f}{\partial \bar{p}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \alpha_j} = 0$$

и используя (3.7.32), получаем

$$\frac{\partial f(k, \alpha; p)}{\partial k_i} = 0, \quad \frac{\partial f(k, \alpha; p)}{\partial \alpha_j} = 0. \quad (3.7.33)$$

Эти уравнения вместе с соотношением

$$f(k, \alpha; p) = 0 \quad (3.7.34)$$

определяют некоторую поверхность в пространстве внешних импульсов, на которой функция  $F(p)$  имеет особенность.

Отметим, что минимум и максимум функции  $\bar{p}(k, \alpha; p_a)$  могут достигаться не только внутри области интегрирования (в пространстве  $k, \alpha$ ), но и на ее границах. В нашем случае граничными могут быть сингулярности только по  $\alpha$ , а именно при  $\alpha_i = 0$  (если, например,  $\alpha_i = 1$ , то все остальные параметры обращаются в нуль в силу наличия в подынтегральном выражении для  $F(p)$   $\delta(1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_n)$ -функции).

Используя явный вид (3.7.30) функции  $f$ , находим

$$q_i^2 - m_i^2 = 0, \quad \sum_i \alpha_i q_i \frac{\partial q_i}{\partial k_j} = 0.$$

Если учесть, что могут иметь место граничные сингулярности, условие возникновения которых имеет вид  $\alpha_i = 0$ , то некоторые из соотношений  $q_i^2 - m_i^2 = 0$  заменятся соотношением  $\alpha_j = 0$  (для некоторых индексов  $j$ ). Таким образом, в общем случае для нахождения особенностей нужно пользоваться системой уравнений

$$q_i^2 - m_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad \alpha_j = 0, \quad j = s + 1, \dots, n, \\ \sum_i \alpha_i q_i \frac{\partial q_i}{\partial k_j} = 0. \quad (3.7.35)$$

Эти уравнения называются уравнениями Ландау, а сами особенности — особенностями Ландау [37].

Установим характер особенности функции  $F(p)$ . С этой целью вычислим интеграл по  $k$  в функции  $F(p)$  (см. (3.7.29)). Функцию  $f(k, \alpha; p)$  согласно (3.7.30) можно представить в виде

$$f(k, \alpha; p) = \sum_{ij} a_{ij}(\alpha) k_i k_j + 2 \sum_i b_i(\alpha, p) k_i + c(\alpha, p),$$

где  $a_{ij}(\alpha)$  — симметричная вещественная матрица, зависящая от  $\alpha$ ;  $b_i(\alpha, p)$  — линейная однородная функция  $p$ , зависящая от  $\alpha$ , и  $c(\alpha, p)$  — функция  $\alpha, p$ , представляющая собой полином второй степени по  $p$ .

Переходя от переменных интегрирования  $k$  к новым переменным

$$k = k' - ba^{-1}$$

(мы использовали матричное обозначение  $(ba^{-1})_i = b_j (\alpha^{-1})_{ji}$ ), получаем

$$f = k' a k' + c', \quad c' = c - ba^{-1} b.$$



Поэтому

$$\int \frac{d^{4r}k}{f^n} = \int \frac{d^{4r}k'}{(k'ak' + c')^n}.$$

Так как матрица  $a$  симметрична и вещественна, то ее можно привести к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования. В результате получим

$$\int \frac{d^{4r}k}{f^n} = \frac{1}{\sqrt{\det a}} \int \frac{d^{4r}k}{(k^2 + c')^n},$$

где интегрирование происходит по  $4r$ -мерному пространству ( $k^2$ -квадрат вектора в  $4r$ -мерном пространстве). Очевидно, интеграл (см. п. 3.6.3)

$$\int \frac{d^{4r}k}{(k^2 + c')^n} = \pi^{2r} \frac{\Gamma(n-2r)}{\Gamma(n)} (c')^{2r-n}.$$

Покажем, что величину  $c'$  можно представить в виде детерминанта  $(n+1)$ -го порядка

$$c' = \frac{\mathcal{D}}{\det a}, \quad \mathcal{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}. \quad (3.7.36)$$

Для доказательства этой формулы рассмотрим систему линейных неоднородных уравнений для неизвестного  $n$  — вектора  $\mathbf{x}$  и величины  $y$ :

$$\begin{aligned} a\mathbf{x} + b y &= 0, \\ b\mathbf{x} + c y &= g. \end{aligned} \quad (3.7.37)$$

Отсюда

$$y = \frac{1}{\mathcal{D}} \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & g \end{vmatrix}.$$

Но  $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & g \end{vmatrix} = g \det a$ . Поэтому

$$y = g \frac{\det a}{\mathcal{D}}.$$

Вместе с тем из первого уравнения (3.7.37) находим

$$\mathbf{x} = -y a^{-1} b,$$

поэтому из второго уравнения (3.7.37) получаем

$$y = \frac{g}{c - b a^{-1} b}.$$

Таким образом,

$$c - b a^{-1} b \equiv c' = \frac{\mathcal{D}}{\det a},$$

что и требовалось доказать.

Итак,

$$F(p) = \pi^{2r} \Gamma(n - 2r) \int_0^1 d\alpha_1 \dots \int_0^1 d\alpha_n \frac{\delta(1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_n)}{\mathcal{D}(\alpha, p)^{n-2r} (\det a(\alpha))^{2r-n+\frac{1}{2}}}. \quad (3.7.38)$$

Согласно общей схеме положение особенностей функции  $F(p)$  определяется уравнениями

$$\frac{\partial \mathcal{D}(\alpha, p)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \mathcal{D}(\alpha, p) = 0 \quad (3.7.39)$$

(при нахождении граничных сингулярностей необходимо рассматривать некоторые из уравнений (3.7.39) совместно с уравнениями  $\alpha_i = 0$ ).

Из уравнения  $\partial \mathcal{D} / \partial \bar{\alpha}_i = 0$  можно найти  $\alpha_i = \bar{\alpha}_i(p)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Для значений  $\alpha_i$ , близких к  $\bar{\alpha}_i(p)$ , получаем

$$\mathcal{D}(\alpha, p) = \mathcal{D}(\bar{\alpha}(p), p) + \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij} \alpha'_i \alpha'_j + \dots, \quad A_{ij} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{D}(\alpha; p)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha = \bar{\alpha}},$$

где  $\alpha'_i = \alpha_i - \bar{\alpha}_i(p)$ , а  $\mathcal{D}(\bar{\alpha}, p)$  — экстремальное значение (по  $\alpha$ ) функции  $\mathcal{D}(\alpha, p)$ , равное нулю на поверхности особенностей, т. е. на поверхности

$$\mathcal{D}(\bar{\alpha}(p), p) = 0.$$

Вблизи этой поверхности интегрирование по  $\alpha$  можно производить от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В результате получим

$$F(p) \approx (\mathcal{D}(\bar{\alpha}(p), p))^{2r - \frac{n+1}{2}}. \quad (3.7.40)$$

Если исходный интеграл был расходящимся в области больших импульсов, то необходимо предварительно произвести регуляризацию, сводящуюся к вычитанию из исходного интеграла некоторого полинома по внешним импульсам (этот полином, очевидно, не содержит особенностей). Дифференцируя это перенормированное выражение по  $s$  достаточное число раз, мы избавимся от данного полинома и придем к сходящемуся выражению типа (3.7.38), особенности которого определяются формулой (3.7.40). Интегрируя полученное таким образом выражение соответствующее число раз по  $s$ , приходим к особенности типа

$$F(p) \approx (\mathcal{D}(\bar{\alpha}(p), p))^{2r - \frac{n+1}{2}},$$

совпадающей с (3.7.40), если  $2r \neq \frac{n+1}{2}$ , и типа

$$F(p) \approx \ln \mathcal{D}(\bar{\alpha}(p), p), \quad (3.7.41)$$

если  $2r = \frac{n+1}{2}$ .

Приведем некоторые примеры. Рассмотрим вначале собственно-энергетическую диаграмму типа, изображенного на рис. 8, 1 и 9, 1. Функция  $f$  для этой диаграммы, очевидно, определяется так:

$$f(q, \alpha; p) = \alpha_1 (m_1^2 - q^2) + \alpha_2 (m_2^2 - (p + q)^2).$$

Уравнения Ландау поэтому имеют вид

$$\begin{aligned} m_1^2 - q^2 = 0, \quad m_2^2 - (p + q)^2 = 0, \\ 2\alpha_1 q + 2\alpha_2 (p + q) = 0, \end{aligned} \quad (3.7.42)$$

причем  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Из первых двух уравнений следует, что

$$q^2 = m_1^2, \quad 2pq = m_2^2 - m_1^2 - p^2. \quad (3.7.43)$$

Умножая последнее из уравнений (3.7.42) на  $p$  и  $q$  и используя (3.7.43) получаем ( $\alpha \equiv \alpha_1$ )

$$\begin{aligned} p^2 + m_2^2 - m_1^2 - 2\alpha p^2 = 0, \\ p^2 - m_2^2 - m_1^2 + \alpha (m_2^2 - m_1^2 - p^2) = 0. \end{aligned}$$

Исключая  $\alpha$ , находим два значения  $p^2$ :

$$p_{\pm}^2 = (m_2 \pm m_1)^2.$$

Значению  $p_-$  соответствует

$$\alpha = \frac{m_2}{m_2 - m_1}.$$

Это значение  $\alpha$  находится вне области интегрирования по  $\alpha$ . Поэтому остается одно значение:

$$p_+^2 = (m_1 + m_2)^2, \quad (3.7.44)$$

которому соответствует

$$\alpha = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Это значение  $\alpha$  лежит в области интегрирования  $0 < \alpha < 1$ . Очевидно, что значению  $p_+$  соответствует порог реакции образования частиц с массами  $m_1, m_2$ .

При  $\alpha_1 = 0$  уравнения Ландау имеют вид

$$m_2^2 - (p + q)^2 = 0, \quad 2(p + q) = 0.$$

Эти уравнения (при  $m_2 \neq 0$ ) не имеют решений, следовательно, граничных сингулярностей не существует (аналогичная ситуация имеет место при  $\alpha_2 = 0$ ).

Так как функция  $\mathcal{D}(\alpha, p)$  имеет структуру

$$\mathcal{D}(\alpha, p) \sim (p^2 - p_+^2),$$

то согласно (3.7.40)

$$F(p) \sim (p^2 - p_+^2)^{1/2} \quad (3.7.45)$$

(так как  $n = 2, r = 1$ ).

В качестве второго примера рассмотрим вершинную диаграмму типа, изображенного на рис. 10, 1. Функция  $f$  для этой диаграммы определяется так:

$$f(k, \alpha; p) = \alpha_1(m_1^2 - q_1^2) + \alpha_2(m_2^2 - q_2^2) + \alpha_3(m_3^2 - q_3^2),$$

где

$$\begin{aligned} q_1 &= k; & q_2 &= p_3 + k; & q_3 &= p_1 + p_3 + k; \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.7.46)$$

Поэтому уравнения Ландау имеют вид (предполагается, что  $\alpha_i \neq 0$ )

$$\begin{aligned} m_1^2 - q_1^2 &= m_2^2 - q_2^2 = m_3^2 - q_3^2 = 0, \\ \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.7.47)$$

причем  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ . Умножая последнее уравнение на  $q_1, q_2, q_3$ , получаем

$$\begin{aligned} \alpha_1 q_1^2 + \alpha_2 q_1 q_2 + \alpha_3 q_1 q_3 &= 0, \\ \alpha_1 q_2 q_1 + \alpha_2 q_2^2 + \alpha_3 q_2 q_3 &= 0, \\ \alpha_1 q_3 q_1 + \alpha_2 q_3 q_2 + \alpha_3 q_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Так как не все  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) равны нулю, то

$$\begin{vmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_2 q_1 & q_2^2 & q_2 q_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отметим, что согласно (3.7.46), (3.7.47)

$$\begin{aligned} q_1^2 &= m_1^2, & q_2^2 &= m_2^2, & q_3^2 &= m_3^2, \\ q_1 q_2 &= \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 - p_3^2), & q_1 q_3 &= \frac{1}{2}(m_1^2 + m_3^2 - p_2^2), \\ q_2 q_3 &= \frac{1}{2}(m_2^2 + m_3^2 - p_1^2). \end{aligned}$$

При получении выражений, например, для  $q_1 q_2$  мы учли, что  $q_2 - q_1 = p_3$ , следовательно,  $2q_1 q_2 = q_1^2 + q_2^2 - p_3^2$ . Вводя обозначения

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2m_2 m_3}(m_2^2 + m_3^2 - p_1^2), & z_2 &= \frac{1}{2m_1 m_3}(m_1^2 + m_3^2 - p_2^2), \\ z_3 &= \frac{1}{2m_1 m_2}(m_1^2 + m_2^2 - p_3^2), \end{aligned} \quad (3.7.48)$$

и раскрывая детерминант, получаем уравнение поверхности особенностей Ландау

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 2z_1 z_2 z_3 = 1. \quad (3.7.49)$$

Решение этого уравнения, например, относительно  $z_1$ , приводит к двум значениям для  $z_1$ , и только одно из них соответствует значениям параметров  $\alpha$ , попадающим в интервал  $(0, 1)$ .

Так как в рассматриваемом примере  $r = 1$ ,  $n = 3$ , то  $2r - \frac{n+1}{2} = 0$ , следовательно, мы имеем дело с логарифмической особенностью

$$F(p) \sim \ln(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 2z_1z_2z_3 - 1). \quad (3.7.50)$$

Рассмотрим граничные сингулярности. Пусть, например,  $\alpha_3 = 0$ . Тогда уравнения Ландау имеют вид

$$m_1^2 - q_1^2 = m_2^2 - q_2^2 = 0, \quad \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

где  $q_1 = k$ ,  $q_2 = p_3 + k$ .

Эти уравнения совпадают с уравнениями (3.7.42), и поэтому граничные сингулярности (соответствующие  $\alpha_1 = 0$  или  $\alpha_2 = 0$ , или  $\alpha_3 = 0$ ) являются пороговыми и совпадают с сингулярностями собственно-энергетической диаграммы.

Мы рассматривали поведение фейнмановских интегралов в области ограниченных внешних импульсов. Представляет интерес также изучить поведение фейнмановских интегралов в области больших внешних импульсов. Мы не будем здесь останавливаться на выяснении детальной асимптотики перенормированных фейнмановских диаграмм в области больших внешних импульсов. Отметим только, что асимптотика фейнмановских интегралов  $F(p)$  имеет вид

$$F(\lambda p_1 \dots \lambda p_n) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^\alpha (\ln \lambda)^\beta. \quad (3.7.51)$$

Доказательство этого положения, так же как и метод нахождения по конкретной диаграмме показателя  $\alpha$ , были даны Вайнбергом в [38]. Показатель  $\beta$  был определен в работе [39]. Обычно  $\alpha$  совпадает (в случае неприводимой диаграммы) с индексом расходимости диаграммы  $\omega$ . Например, в квантовой электродинамике индексы расходимости электронной собственно-энергетической части, фотонной собственно-энергетической части и вершинной диаграммы равны соответственно 1, 2 и 0. Соответствующие перенормированные диаграммы в области больших импульсов ведут себя так:

$$\underline{\Sigma}(p) \sim p \ln \frac{p}{m}, \quad \underline{\Pi} \sim p^2 \ln \frac{p}{m}, \quad \underline{\Lambda}(p_1, p_2) \sim \ln \frac{p}{m}.$$

### § 3.8. РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА И АСИМПТОТИКИ ФУНКЦИЙ ГРИНА

**3.8.1. Структура фотонной функции Грина в области больших импульсов.** Выше мы показали, что матричный элемент, соответствующий какому-либо процессу, с учетом высших приближений теории возмущений сохраняет свой вид при переходе от неперенормированных величин к перенормированным:

$$\begin{aligned} e \rightarrow \underline{e} = Z^{1/2} e, \quad u \rightarrow \underline{u} = Z_1^{-1/2} u, \quad e^{(\lambda)} \rightarrow \underline{e}^{(\lambda)} = Z^{-1/2} e^{(\lambda)}, \\ G^{(e)} \rightarrow \underline{G}^{(e)} = Z_1^{-1} G^{(e)}, \quad G^{(\gamma)} \rightarrow \underline{G}^{(\gamma)} = Z^{-1} G^{(\gamma)}, \quad \Gamma \rightarrow \underline{\Gamma} = Z_1 \Gamma \\ (Z \equiv Z_3, \quad \underline{Z}_2 = Z_1). \end{aligned}$$

Это важнейшее свойство электромагнитного взаимодействия электронов и фотонов, называемое перенормируемостью, было использовано нами в § 3.6 для установления правил регуляризации различных квантовоэлектродинамических величин.

Из перенормируемости вытекает также существование некоторой группы преобразований, по отношению к которым инвариантны матричные элементы. Именно, если перенормированный заряд и перенормированные функции Грина и вершинную функцию обозначить соответственно через  $e_1, G_1^{(e)}, G_1^{(\nu)}, \Gamma_1$  и перейти от этих величин к величинам  $e_2, G_2^{(e)}, G_2^{(\nu)}, \Gamma_2$ , связанным с  $e_1, G_1^{(e)}, G_1^{(\nu)}, \Gamma_1$  соотношениями

$$e_2 = \sqrt{Z'} e_1, \quad u_2 = (\sqrt{Z'})^{-1} u_1, \quad e_2^{(\lambda)} = (\sqrt{Z'})^{-1} e_1^{(\lambda)}, \\ G_2^{(e)} = Z_1^{-1} G_1^{(e)}, \quad G_2^{(\nu)} = Z_1^{-1} G_1^{(\nu)}, \quad \Gamma_2 = Z_1 \Gamma_1,$$

где  $Z'$  и  $Z_1$  — произвольные величины, то матричные элементы  $\mathfrak{M}$ , вычисленные с помощью первой и второй систем величин, будут одинаковы:  $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$ . Такие преобразования образуют, очевидно, группу, которая носит название ренормализационной.<sup>16</sup> Покажем, что, используя свойство перенормируемости, можно выяснить структуру и получить асимптотические представления функций Грина в области больших импульсов [28]. Прежде всего рассмотрим поперечную часть фотонной функции Грина. Предполагая выполненной перенормировку массы электрона, запишем  $G^{(\nu)}(k)$  в виде

$$G^{(\nu)}(k) = \mathcal{D}^c(k) d(k),$$

где  $d(k)$  — некоторая функция квадрата 4-импульса  $k^2$ , граничного импульса  $\mathcal{M}$  и перенормированного заряда электрона:

$$d \equiv d\left(\frac{\mathcal{M}^2}{k^2}, \frac{m^2}{k^2}, e^2\right).$$

Перенормированная функция  $d$ , которую мы будем обозначать через  $\underline{d}$  и которая является функцией  $\frac{k^2}{m^2}$  и  $\underline{e}^2$ :

$$\underline{d} \equiv \underline{d}\left(\frac{k^2}{m^2}, \underline{e}^2\right),$$

согласно (3.6.33) связана с перенормированной функцией  $d$  соотношением

$$d\left(\frac{\mathcal{M}^2}{k^2}, \frac{m^2}{k^2}, e^2\right) = Z \underline{d}\left(\frac{k^2}{m^2}, \underline{e}^2\right), \quad (3.8.1)$$

где  $Z$  — некоторая функция  $\frac{\mathcal{M}^2}{m^2}$  и  $\underline{e}^2$ ;  $Z \equiv Z\left(\frac{\mathcal{M}^2}{m^2}, \underline{e}^2\right)$  и  $e^2$  и  $\underline{e}^2$  связаны между собой соотношением  $e^2 = Z^{-1} \underline{e}^2$ . Отсюда следует, что

$$e^2 d\left(\frac{\mathcal{M}^2}{k^2}, \frac{m^2}{k^2}, e^2\right) = \underline{e}^2 \underline{d}\left(\frac{k^2}{m^2}, \underline{e}^2\right). \quad (3.8.2)$$

<sup>16</sup> Впервые существование ренормализационной группы было установлено Штюкельбергом и Петерманом [27].

Как видно из структуры выражений, сопоставляемых различным фейнмановским диаграммам, они допускают предельный переход  $\underline{m} \rightarrow 0$  (речь идет о неперенормированных выражениях). Предельный переход к нулевой массе возможен и после перенормировки массы (но не после перенормировки заряда). Этот предельный переход соответствует рассмотрению области больших импульсов,  $k^2 \gg \underline{m}^2$ . Поэтому, интересуясь поведением функций Грина в области больших импульсов, мы можем в неперенормированной (по заряду) функции  $d$  опустить второй из аргументов:

$$e^2 d\left(\frac{\underline{\mathcal{M}}^2}{k^2}, 0, e^2\right) = \underline{e}^2 d\left(\frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2\right) \equiv e_{\text{inv}}^2\left(\frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2\right). \quad (3.8.3)$$

Так как вследствие условия нормировки  $\underline{d}(0, \underline{e}^2) = 1$ , то  $e_{\text{inv}}^2(0, \underline{e}^2) = \underline{e}^2$ . Величина  $e_{\text{inv}}\left(\frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2\right)$  называется инвариантным зарядом.

Отметим, что

$$\underline{m}^2 \left( \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} e^2 d\left(\frac{\underline{\mathcal{M}}^2}{k^2}, 0, e^2\right) \right)_{e^2} = 0.$$

Поэтому в асимптотической области  $k^2 \gg \underline{m}^2$  инвариантный заряд удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \underline{m}^2 \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} + \underline{e}^2 \beta(\underline{e}^2) \frac{\partial}{\partial \underline{e}^2} \right\} \underline{e}^2 d\left(\frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2\right) = 0, \quad (3.8.4)$$

где

$$\beta(\underline{e}^2) = \underline{m}^2 \left( \frac{\partial \ln \underline{e}^2}{\partial \underline{m}^2} \right)_{e^2}. \quad (3.8.5)$$

Отметим, что так как  $\underline{e}^2 d$  не зависит от  $\underline{\mathcal{M}}^2$ , то и функция  $\beta(\underline{e}^2)$  не зависит от  $\underline{\mathcal{M}}^2/\underline{m}^2$ , т. е. она является функцией одного аргумента  $\underline{e}^2$ .

Уравнение (3.8.4) называется уравнением ренормализационной группы [34]. Подчеркнем, что это уравнение является следствием перенормируемости теории (независимости  $\underline{d}$  от  $\underline{\mathcal{M}}$ ) и того, что неперенормированная величина  $d$  имеет предел при  $\underline{m} \rightarrow 0$ .

Из формул (3.8.5), (3.6.56) следует, что перенормировочная постоянная  $Z$  удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \underline{m}^2 \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} + \beta(\underline{e}^2) \left( \underline{e}^2 \frac{\partial}{\partial \underline{e}^2} - 1 \right) \right\} Z\left(\frac{\underline{\mathcal{M}}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2\right) = 0. \quad (3.8.6)$$

Общее решение уравнений (3.8.4) и (3.8.6) имеет, очевидно, следующий вид:

$$\begin{aligned} \underline{e}^2 d\left(\frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2\right) &= \Phi\left(\Phi(\underline{e}^2) \frac{k^2}{\underline{m}^2}\right), \quad \Phi(\underline{e}^2) = \exp \int^{\underline{e}^2} \frac{dy}{y\beta(y)} \equiv e^\chi, \\ Z\left(\frac{\underline{\mathcal{M}}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2\right) &= \underline{e}^2 C\left(\Phi(\underline{e}^2) \frac{\underline{\mathcal{M}}^2}{\underline{m}^2}\right), \end{aligned} \quad (3.8.7)$$

где  $\Phi$  и  $C$  — некоторые неизвестные функции одного аргумента. Эти формулы удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} \underline{e}^2 \underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right) &= F(v + \chi(\underline{e}^2)), \\ Z \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right) &= \underline{e}^2 Q (v_{\mathcal{M}} + \chi(\underline{e}^2)), \end{aligned} \quad (3.8.8)$$

где  $v = \ln \left( -\frac{k^2}{\underline{m}^2} \right)$ ;  $v_{\mathcal{M}} = \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}$ ;  $\chi(x) = \ln \varphi(x)$ ;  $F$  и  $Q$  также некоторые неизвестные функции одного аргумента.

Видно, что в области больших импульсов величина  $\underline{e}^2 \underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right)$  является функцией не двух, а одного аргумента  $\varphi(\underline{e}^2) \frac{k^2}{\underline{m}^2}$ . Отсюда можно получить важное следствие относительно эффективной плотности заряда в облаке электронно-позитронных пар, окружающих в вакууме какой-либо пробный заряд. Внешний потенциал  $A_{\mu}^{(e)}(x)$  и порождающий его ток  $j_{\mu}(x)$  связаны между собой в вакууме соотношением [5]

$$A_{\mu}^{(e)}(x) = - \int d^4 x' \underline{G}_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x, x') j^{\nu}(x').$$

В случае покоящегося пробного заряда  $j^{\nu}(x) = Q \delta_0^{\nu} \delta(x)$  и, следовательно, потенциал, порождаемый зарядом  $Q$  в вакууме, имеет вид

$$A_0^{(e)}(\mathbf{x}) = -Q \int_{-\infty}^{\infty} dt \underline{G}^{(\gamma)}(x),$$

или

$$A_0^{(e)}(\mathbf{x}) = -\frac{Q}{(2\pi)^3} \int d^3 k \underline{G}^{(\gamma)}(k) |_{k_0=0} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

откуда следует, что плотность заряда в облаке электронно-позитронных пар, окружающих пробный заряд, определяется формулой

$$\rho(\mathbf{x}) = -\Delta A_0^{(e)}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{(2\pi)^3} \int d^3 k \underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (3.8.9)$$

Так как  $\underline{d}(0, \underline{e}^2) = 1$ , то  $\int d^3 x \rho(\mathbf{x}) = Q$ .

Видно, что функция  $\underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right)$  имеет наглядный физический смысл: с точностью до постоянного множителя она представляет собой компоненту Фурье плотности заряда в облаке пар, окружающих «точечный» заряд  $Q$ . Иначе можно сказать, что  $\underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right)$  представляет собой форм-фактор «точечного» заряда.

На очень малых расстояниях от пробного заряда ( $|\mathbf{x}| \ll \hbar/\underline{m}c$ ) в (3.8.8) можно вместо функции  $\underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right)$  подставить ее асимптотическое



представление (3.8.7)

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{Q}{(2\pi)^3 \underline{e}^2} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \Phi\left(-\varphi(\underline{e})^2 \frac{\mathbf{k}^2}{\underline{m}^2}\right).$$

Выполняя здесь замену переменных  $\frac{\mathbf{k}}{\underline{m}} \sqrt{\varphi(\underline{e})^2} = \mathbf{k}'$  и вводя обозначение

$$f(\mathbf{x}) = \int d^3k' \Phi(-\mathbf{k}'^2) e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}},$$

получаем

$$\rho(\mathbf{x}) \approx f\left(\mathbf{x} \frac{\underline{m}}{\sqrt{\varphi(\underline{e})^2}}\right). \quad (3.8.10)$$

Эта формула показывает, что на расстояниях, меньших чем  $\hbar/mc$ , форма распределения заряда не зависит от постоянной связи  $\underline{e}^2$ , которая входит лишь в масштабный множитель  $\varphi(\underline{e})^2$ .

Поведение функции  $\Phi(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  тесно связано с величиной заряда «голого» электрона, или, как мы будем говорить, первичного заряда  $e$ . Если  $\Phi(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ , то сингулярность в центре распределения заряда будет более сильной, чем  $\delta$ -образная, и, следовательно, первичный заряд будет бесконечным,  $e = \infty$ . Если же при  $x \rightarrow \infty$  функция  $\Phi(x)$  стремится к конечному пределу  $\Phi(\infty)$ , то и первичный заряд будет конечным, причем его величина, определяемая этим пределом, не будет зависеть от  $\underline{e}$ .

Подчеркнем, что все эти выводы, так же как и соотношение (3.8.7), определяющее структуру фотонной функции Грина в области больших импульсов или малых расстояний, основаны только на свойстве перенормируемости и существовании у перенормированных матричных элементов конечных пределов при  $m \rightarrow 0$ . Эти результаты были получены Гелл-Манном и Лоу [28]. Исследование различных асимптотик функций Грина, как ультрафиолетовых, так и инфракрасных, на основе уравнений ренормализационной группы в рамках перенормированной теории (с конечными перенормировочными постоянными  $z_1, z_2, z_3$ ) выполнено в работах [29—31].

**3.8.2. Структура электронной функции Грина в области больших импульсов.** Перейдем к определению структуры функции Грина электрона в области больших импульсов  $-p^2 \gg m^2$ . С этой целью представим функцию Грина электрона, перенормированную по массе (но не перенормированную по заряду), в виде

$$G^{(e)}(p)^{-1} = -\hat{p}A\left(\frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, \frac{m^2}{p^2}, e^2; \xi\right) + mA'\left(\frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, \frac{m^2}{p^2}, e^2; \xi\right), \quad (3.8.11)$$

где  $A$  и  $A'$  — некоторые скалярные функции трех аргументов:  $\mathcal{M}^2/p^2, m^2/p^2, e^2$ . Кроме того, в отличие от фотонной функции Грина электронная функция Грина зависит от калибровочного параметра  $\xi$  или от параметра  $\zeta \equiv e^2\xi$ . Такой выбор аргумента  $\zeta$  удобен в связи с тем, что перенормированная калибровочная постоянная  $\underline{\xi}$  связана с  $\xi$  соотно-

шением  $\xi = \underline{\xi}Z$ , следовательно,  $\zeta = \underline{e}^2 \underline{\xi}$ , так что  $\underline{\zeta} = \zeta$  (см. п. 3.6.6). Перед функцией  $A'$  мы ввели массу «голого» электрона, а не перенормированную массу  $\underline{m}$ , так как при этом функция  $A'$  будет иметь конечный предел при  $\underline{m} \rightarrow 0$ . Сказанное следует из того, что перенормированные ни по заряду, ни по массе функции  $A$  и  $A'$  имеют, как следует из теории возмущений, конечный предел при  $\underline{m} \rightarrow 0$ . Вместе с тем в теории возмущений величины  $\underline{m}$  и  $\underline{m}$  связаны между собой соотношением  $\underline{m} = \underline{m} \left( 1 + e^2 \ln \frac{\mathcal{M}}{\underline{m}} + \dots \right)$ . Поэтому если  $\underline{m} \rightarrow 0$ , то и  $\underline{m} \rightarrow 0$  и, следовательно, обе функции  $A \left( \frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, \frac{m^2}{p^2}, e^2; \zeta \right)$ ,  $A' \left( \frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, \frac{m^2}{p^2}, e^2; \zeta \right)$  должны иметь конечный предел при  $\underline{m} \rightarrow 0$ . (Если бы в формуле для  $G^{(e)^{-1}}$  перед функцией  $A'$  мы поставили перенормированную массу электрона  $\underline{m}$ , то это утверждение было бы неверно, так как отношение  $\underline{m}/m$  не имеет предела при  $\underline{m} \rightarrow 0$ .)

Перенормированную функцию Грина электрона запишем в виде

$$\underline{G}^{(e)}(p)^{-1} = -\hat{p} \underline{A} \left( \frac{p^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) + \underline{m} \underline{A}' \left( \frac{p^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right), \quad (3.8.12)$$

где  $\underline{A}$  и  $\underline{A}'$  — некоторые функции  $\frac{p^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2, \zeta$ .

Так как согласно (3.6.33)

$$\underline{G}^{(e)^{-1}} = Z_1 \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) G^{(e)^{-1}},$$

где  $Z_1$  — некоторая функция  $\frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2, \zeta$  (см. п. 3.6.5), то

$$\underline{A} = Z_1 A, \quad \underline{A}' = Z_1' A', \quad (3.8.13)$$

где  $Z_1' = Z_1 m/\underline{m}$ .

Рассмотрим асимптотическую область  $-p^2 \gg \underline{m}^2$ . В этом случае, как отмечалось выше, в функциях  $A$  и  $A'$  мы можем положить второй аргумент равным нулю:

$$\begin{aligned} A \left( \frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, 0, e^2; \zeta \right) &\equiv A \left( \frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, e^2; \zeta \right), \quad A' \left( \frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, 0, e^2; \zeta \right) \equiv \\ &\equiv A' \left( \frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, e^2; \zeta \right). \end{aligned}$$

В результате соотношения (3.8.13) примут вид

$$\begin{aligned} \underline{A} \left( \frac{p^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) &= Z_1 \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) A \left( \frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, e^2; \zeta \right), \\ \underline{A}' \left( \frac{p^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) &= Z_1' \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) A' \left( \frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, e^2; \zeta \right), \quad -p^2 \gg \underline{m}^2, \end{aligned}$$

причем согласно (3.6.56) величины  $\underline{e}^2$  и  $e^2$  связаны между собой соотношением

$$\underline{e}^2 = e^2 Z \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, e^2 \right).$$

Отмечая, что

$$\underline{m}^2 \left( \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} \ln A \left( \frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, e^2; \zeta \right) \right)_{e^2, \zeta} = \underline{m}^2 \left( \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} \ln A' \left( \frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, e^2; \zeta \right) \right)_{e^2, \zeta} = 0,$$

находим

$$\begin{aligned} \left\{ \underline{m}^2 \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} + e^2 \beta(e^2) \frac{\partial}{\partial e^2} + \gamma(e^2, \zeta) \right\} \underline{A} \left( \frac{p^2}{\underline{m}^2}, e^2; \zeta \right) &= 0, \\ \left\{ \underline{m}^2 \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} + e^2 \beta(e^2) \frac{\partial}{\partial e^2} + \gamma'(e^2, \zeta) \right\} \underline{A}' \left( \frac{p^2}{\underline{m}^2}, e^2; \zeta \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.8.14)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(e^2, \zeta) &= - \frac{\underline{m}^2}{Z_1} \left( \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} Z_1 \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, e^2; \zeta \right) \right)_{e^2, \zeta}; \\ \gamma'(e^2, \zeta) &= - \frac{\underline{m}^2}{Z_1'} \left( \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} Z_1' \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, e^2; \zeta \right) \right)_{e^2, \zeta} \end{aligned} \quad (3.8.15)$$

и  $\beta(e^2)$  определяется формулой (3.8.5). Так как величины  $\underline{A}$ ,  $\underline{A}'$  не зависят от  $\mathcal{M}$ , то  $\gamma$  и  $\gamma'$  не зависят от  $\mathcal{M}^2/\underline{m}^2$ . Последние две формулы можно использовать для определения величин  $Z_1$ ,  $Z_1'$ :

$$\begin{aligned} \left\{ \underline{m}^2 \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} + e^2 \beta(e^2) \frac{\partial}{\partial e^2} + \gamma(e^2, \zeta) \right\} Z_1 \left( \frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, e^2; \zeta \right) &= 0, \\ \left\{ \underline{m}^2 \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} + e^2 \beta(e^2) \frac{\partial}{\partial e^2} + \gamma'(e^2, \zeta) \right\} Z_1' \left( \frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, e^2; \zeta \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8.16)$$

Мы видим, что в уравнения для  $\underline{A}$ ,  $\underline{A}'$ ,  $Z_1$ ,  $Z_1'$  кроме уже введенной функции  $\beta(e^2)$  входят две новые неизвестные функции:  $\gamma$ ,  $\gamma'$ , зависящие от аргументов  $e^2$ ,  $\zeta$ . Представляя функции  $\underline{A}$ ,  $Z_1$  в виде

$$\underline{A} = \underline{B} \exp \left\{ - \int \frac{e^2}{y \beta(y)} dy \right\}, \quad Z_1 = D_1 \exp \left\{ - \int \frac{e^2}{y \beta(y)} dy \right\},$$

для функций  $\underline{B}$ ,  $D_1$  получаем уравнения, совпадающие с уравнением (3.8.4) для функции  $e^2 d$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \underline{A} \left( \frac{p^2}{\underline{m}^2}, e^2; \zeta \right) &= Q \left( \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2} + \chi(e^2); \zeta \right) \exp \left( - \int \frac{e^2}{y \beta(y)} dy \right), \\ Z_1 \left( \frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, e^2; \zeta \right) &= \mathcal{P} \left( \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} + \chi(e^2); \zeta \right) \exp \left( - \int \frac{e^2}{y \beta(y)} dy \right), \end{aligned} \quad (3.8.17)$$

где  $Q(\mathcal{P})$  — функция двух аргументов:  $\chi(\underline{e}^2) + \ln \frac{-p^2}{m^2} \left( \chi(\underline{e}^2) + \ln \frac{M^2}{m^2} \right)$  и  $\zeta$ . Аналогичные соотношения справедливы для функций  $\underline{A}'$ ,  $\underline{Z}'_1$ :

$$\underline{A}'\left(\frac{p^2}{m^2}, \underline{e}^2; \zeta\right) = Q'\left(\ln \frac{-p^2}{m^2} + \chi(\underline{e}^2); \zeta\right) \exp\left(-\int_{\underline{e}^2}^{\underline{e}^2} \frac{\gamma'(\gamma, \zeta)}{y\beta(y)} dy\right), \quad (3.8.18)$$

$$\underline{Z}'_1\left(\frac{M^2}{p^2}, \underline{e}^2; \zeta\right) = \mathcal{P}'\left(\ln \frac{M^2}{m^2} + \chi(\underline{e}^2); \zeta\right) \exp\left(-\int_{\underline{e}^2}^{\underline{e}^2} \frac{\gamma'(y, \zeta)}{y\beta(y)} dy\right).$$

Подчеркнем, что отношение  $\underline{Z}'_1/Z_1$  определяет связь между  $\underline{m}$  и  $m$ :  $\underline{m} = mZ_1/\underline{Z}'_1$ . Полученные формулы справедливы в асимптотической области  $-p^2 \gg m^2$ . Аналогичные соотношения можно получить для вершинной функции.

**3.8.3. Асимптотика фотонной функции Грина в теории возмущений.** До сих пор мы не пользовались теорией возмущений. Теперь же для нахождения асимптотик функций Грина используем теорию возмущений, учитывая, что  $e^2 \ll 1$ . Из формулы (3.8.5) (или (3.8.4)) и того факта, что величина  $Z$  (или  $\underline{d}$ ) представима в виде ряда теории возмущений по степеням  $\underline{e}^2$ , следует, что функция  $\beta(x)$  ( $x \equiv \underline{e}^2$ ) также разложима в ряд по степеням  $x$ , причем  $\beta(0) = 0$ :

$$\beta(x) = c_1x + c_2x^2 + \dots, \quad c_1 \neq 0. \quad (3.8.19)$$

Поэтому согласно (3.8.7)

$$\chi'(x) = \frac{1}{x\beta(x)} = \frac{1}{x^2} (a_0 + a_1x + \dots),$$

где  $c_i$ ,  $a_i$  — некоторые числовые коэффициенты, и следовательно,

$$\chi(x) = -\frac{a_0}{x} + a_1 \ln x + c + a_2x + \dots \quad (3.8.20)$$

( $c$  — постоянная интегрирования). Обратимся к асимптотическому представлению (3.8.8) инвариантного заряда  $\underline{e}^2 \underline{d}$ :

$$x \underline{d}\left(\frac{k^2}{m^2}, x\right) = F(v + \chi(x)), \quad -k^2 \gg m^2,$$

где  $x = \underline{e}^2$ ;  $v = \ln \frac{-k^2}{m^2}$ . Так как эта формула справедлива при произвольном положительном  $x$ , то, учитывая, что  $\chi(x) \rightarrow -\frac{a_0}{x}$ , а  $\underline{d} \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$ , получаем

$$x = F\left(-\frac{a_0}{x}\right), \quad 0 < x \ll 1.$$

Из этой формулы следует асимптотическое представление функции  $F(y)$  в области больших  $y$ :

$$F(y) = -\frac{a_0}{y}, \quad -a_0 y \rightarrow +\infty \quad (3.8.21)$$

(так как  $xy = -a_0$ ). Иными словами, мы можем определить асимптотику функции  $F(y)$  при  $y \rightarrow +\infty$ , если  $a_0 < 0$ , и асимптотику этой функции при  $y \rightarrow -\infty$ , если  $a_0 > 0$ . В первом случае из формулы (3.8.8) видно, что тем самым (так как  $v > 0$ ) мы определили асимптотику функции  $\underline{d}$  при  $-k^2 \gg \underline{m}^2$  и  $\underline{e}^2 \ll 1$ . Именно такая ситуация, как мы увидим, имеет место в неабелевых калибровочных полях (см. п. 4.8.2). Если же  $a_0 > 0$  (что имеет место в квантовой электродинамике), то согласно (3.8.8) можно определить асимптотику функции  $\underline{d}$  только в области

$$\frac{a_0}{\underline{e}^2} - \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} = \frac{a_0}{\underline{e}^2} \left( 1 - \frac{\underline{e}^2}{a_0} \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} \right) \gg 1. \quad (3.8.22)$$

Так как  $\underline{e}^2 \ll 1$ , то это неравенство означает, что  $\underline{e}^2 \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} < a_0$ .

Таким образом, асимптотика функции  $\underline{d}$  согласно (3.8.8) имеет вид

$$\underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right) \approx \frac{1}{1 - \frac{\underline{e}^2}{a_0} \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2}}. \quad (3.8.23)$$

Подчеркнем еще раз, что если  $a_0 < 0$ , то эта формула справедлива при  $-k^2 \gg \underline{m}^2$ , лишь бы выполнялось неравенство  $\underline{e}^2 \ll 1$ . Если же  $a_0 > 0$ , то формула справедлива при  $-k^2 \gg \underline{m}^2$  и при выполнении неравенства (3.8.22) (при этом, очевидно, должно быть  $\underline{e}^2 \ll 1$ ).

Если  $\underline{e}^2 \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} \ll 1$ , то согласно (3.8.23)

$$\underline{d} \approx 1 + \frac{\underline{e}^2}{a_0} \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (3.7.18), имеющей место в квантовой электродинамике в теории возмущений, видим, что  $a_0 = 12\pi^2$ . Поэтому в квантовой электродинамике

$$\underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right) \approx \left( 1 - \frac{\underline{e}^2}{12\pi^2} \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} \right)^{-1}. \quad (3.8.24)$$

Отметим, что эта формула соответствует изборочному суммированию ряда теории возмущений, в каждом члене которого удерживается только асимптотически главное при  $-k^2 \gg \underline{m}^2$  слагаемое, т. е. слагаемое типа  $\left( \underline{e}^2 \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} \right)^n$ , и не удерживаются слагаемые  $\underline{e}^2 \left( \underline{e}^2 \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} \right)^{n-1}$ .

Формула (3.8.24) в квантовой электродинамике впервые получена в работе Ландау, Абрикосова, Халатникова [32].

Полученную нами асимптотику функции  $\underline{d}$  нетрудно уточнить. Для этого в формуле (3.8.20) для  $\chi(x)$  учтем первых два главных члена при  $x \ll 1$ :  $\chi(x) = -\frac{a_0}{x} + a_1 \ln x$ . Отсюда согласно (3.8.8) получим следующее уравнение для определения асимптотики функции  $F(y)$  при  $-a_0 y \rightarrow +\infty$

$$x = F(y), \quad y = -\frac{a_0}{x} + a_1 \ln x.$$

Легко видеть, что

$$F(y) = -\frac{a_0}{y + a_1 \ln\left(-\frac{y}{a_0}\right)}, \quad -a_0 y \rightarrow +\infty.$$

Поэтому уточненная асимптотика функции  $\underline{d}$  имеет вид [6]

$$\underline{d}\left(\frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2\right) = \left\{1 - \frac{e^2}{a_0} v - \frac{e^2}{a_0} \frac{a_1}{a_0} \ln\left(1 - v \frac{e^2}{a_0}\right)\right\}^{-1},$$

$$v = \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2}. \quad (3.8.25)$$

Она соответствует удержанию в  $n$ -м члене ряда теории возмущений по степеням  $\underline{e}^2$  в области  $-k^2 \gg \underline{m}^2$  кроме  $(e^2 v)^n$  еще члена  $\underline{e}^2 (e^2 v)^{n-1}$ . При  $e^2 v \ll 1$  эта формула имеет вид

$$\underline{d} = 1 + \frac{e^2}{a_0} v - \frac{a_1}{a_0^2} e^2 e^2 v.$$

Для нахождения коэффициента  $a_1$  в квантовой электродинамике нужно найти асимптотическое представление при  $-k^2 \gg \underline{m}^2$  обычного ряда теории возмущений вплоть до членов  $\underline{e}^4$ . В результате получим  $a_1 = -\frac{9}{4}$ .

Определим асимптотику константы перенормировки  $Z$  при  $\mathcal{M}^2/\underline{m}^2 \gg \gg 1$  и  $\underline{e}^2 \ll 1$ . С этой целью обратимся ко второй из формул (3.8.8). Устремляя в ней  $\underline{e}^2 \equiv x$  к нулю и используя асимптотику (3.8.20) функции  $\chi(x)$ , получаем следующее уравнение для определения асимптотики функции  $Q(y)$ :

$$xQ(y) = 1, \quad y = -\frac{a_0}{x},$$

где  $-a_0 y \rightarrow +\infty$ . Отсюда

$$Q(y) = -\frac{y}{a_0}, \quad -a_0 y \rightarrow +\infty.$$

Поэтому

$$Z\left(\frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2\right) = 1 - \frac{e^2}{a_0} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}. \quad (3.8.26)$$

В квантовой электродинамике, когда  $a_0 = 12\pi^2$ , эта формула справедлива при  $\underline{e}^2 \ll 1$  и  $0 < \frac{1}{\underline{e}^2} \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{M^2}{\underline{m}^2}\right) \ll 1$ . Так как  $\underline{e}^2 = Ze^2$ , то мы имеем следующую связь между «голым» и перенормированным, т. е. наблюдаемым, зарядами электрона:

$$\underline{e}^2 = \frac{\frac{e^2}{\underline{e}^2}}{1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{M^2}{\underline{m}^2}}, \quad e^2 = \frac{e^2}{1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{M^2}{\underline{m}^2}}. \quad (3.8.27)$$

Из второй формулы следует, что

$$\underline{e}^2 < \frac{12\pi^2}{\ln \frac{M^2}{\underline{m}^2}}.$$

Если формально устремить  $M$  к бесконечности, то получим  $\underline{e}^2 = 0$  (см. [39]), что физически невозможно. В действительности, однако, согласно (3.8.22) мы не можем переходить в формуле (3.8.27) к пределу  $M \rightarrow \infty$ .

Из формул (3.8.27) также следует, что  $\underline{e}^2 < e^2$  (т. е.  $0 < Z < 1$ ). Это неравенство имеет простой физический смысл: заряд реального электрона меньше заряда «голового» электрона, так как последний окружен облаком электронно-позитронных пар, экранирующих первичный заряд  $e$ ; внешний же наблюдатель воспринимает действие экранированного заряда.

**3.8.4. Асимптотика электронной функции Грина в теории возмущений.** Перейдем к нахождению асимптотики электронной функции Грина в области больших импульсов  $-p^2 \gg \underline{m}^2$  при  $\underline{e}^2 \ll 1$ . Так как функции  $A$ ,  $A'$  разложимы в ряды по степеням  $\underline{e}^2$ , то согласно (3.8.14) функции  $\underline{\gamma}(\underline{e}^2, \zeta)$  и  $\underline{\gamma}'(\underline{e}^2, \zeta)$  также разложимы в ряды по степеням  $\underline{e}^2$ :

$$\underline{\gamma}(\underline{e}^2, \zeta) = \underline{\gamma}_0(\zeta) + \underline{e}^2 \underline{\gamma}_1(\zeta) + \dots, \quad \underline{\gamma}'(\underline{e}^2, \zeta) = \underline{\gamma}'_0(\zeta) + \underline{e}^2 \underline{\gamma}'_1(\zeta) + \dots$$

Поэтому согласно (3.8.19) при  $x \equiv \underline{e}^2 \rightarrow 0$

$$\frac{\underline{\gamma}(x, \zeta)}{x\beta(x)} = \frac{c_0(\zeta)}{x^2} + \frac{c_1(\zeta)}{x} + \dots, \quad \frac{\underline{\gamma}'(x, \zeta)}{x\beta(x)} = \frac{c'_0(\zeta)}{x^2} + \frac{c'_1(\zeta)}{x} + \dots,$$

где  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c'_0$ ,  $c'_1$  — некоторые константы, не зависящие от  $x$ , но зависящие, вообще говоря, от  $\zeta$ . Отсюда легко видеть, что

$$\exp\left(-\int^x \frac{\underline{\gamma}(y, \zeta)}{y\beta(y)} dy\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} a(\zeta) e^{\frac{c_0(\zeta)}{x}} x^{-c_1(\zeta)},$$

$$\exp\left(-\int^x \frac{\underline{\gamma}'(y, \zeta)}{y\beta(y)} dy\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} a'(\zeta) e^{\frac{c'_0(\zeta)}{x}} x^{-c'_1(\zeta)},$$

где  $a(\zeta)$ ,  $a'(\zeta)$  — некоторые функции одного аргумента  $\zeta$ .

Таким образом, формулу (3.8.17) в области малых  $x \equiv e^2$  можно записать в виде

$$\underline{A} \xrightarrow{x \ll 1} Q(y, \zeta) \left( \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2} - y \right)^{c_1(\zeta)} \left( -\frac{p^2}{\underline{m}^2} \right)^{\frac{c_0(\zeta)}{a_0}} a_0^{-c_1(\zeta)} a(\zeta), \quad (3.8.28)$$

где

$$y = \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2} - \frac{a_0}{x}, \quad a_0 = 12\pi^2$$

(мы учли, что  $\chi(x) \rightarrow -\frac{a_0}{x}$  при  $x \rightarrow 0$ ). Перейдем в формуле (3.8.28) к пределу  $x \rightarrow 0$  ( $y \rightarrow -\infty$ ) и учтем, что

$$\underline{A} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \underline{A} \left( \frac{p^2}{\underline{m}^2}, \zeta \right) \equiv \underline{A} \left( \frac{p^2}{\underline{m}^2}, 0, \zeta \right), \quad -p^2 \gg \underline{m}^2.$$

Тогда из (3.8.28) получим

$$Q(y, \zeta) (-y)^{c_1(\zeta)} \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 1,$$

$$\underline{A} \left( \frac{p^2}{\underline{m}^2}, 0, \zeta \right) \xrightarrow{-p^2 \gg \underline{m}^2} b(\zeta) \left( -\frac{p^2}{\underline{m}^2} \right)^{\frac{c_0(\zeta)}{a_0}}, \quad b(\zeta) = a_0^{-c_1(\zeta)} a(\zeta),$$

и, следовательно,

$$Q(y, \zeta) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} (-y)^{-c_1(\zeta)}$$

( $b(\zeta)$  — некоторая функция одного аргумента  $\zeta$ ). Поэтому асимптотика функции  $\underline{A} \left( \frac{p^2}{\underline{m}^2}, e^2; \zeta \right)$  в области  $-p^2 \gg \underline{m}^2, e^2 \ll 1$  имеет вид

$$\underline{A} \sim \left( 1 - \frac{e^2}{a_0} \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2} \right)^{-c_1(\zeta)} \left( -\frac{p^2}{\underline{m}^2} \right)^{\frac{c_0(\zeta)}{a_0}} b(\zeta). \quad (3.8.29)$$

Аналогично асимптотика функции  $\underline{A}' \left( \frac{p^2}{\underline{m}^2}, e^2; \zeta \right)$  при  $-p^2 \gg \underline{m}^2, e^2 \ll 1$  имеет вид

$$\underline{A}' \left( \frac{p^2}{\underline{m}^2}, e^2; \zeta \right) \sim \left( 1 - \frac{e^2}{a_0} \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2} \right)^{-c'_1(\zeta)} \left( -\frac{p^2}{\underline{m}^2} \right)^{\frac{c'_0(\zeta)}{a_0}} b'(\zeta). \quad (3.8.30)$$

Так как  $Z_1$  и  $Z'_1$  определяются такими же формулами, как  $\underline{A}$  и  $\underline{A}'$ , только с заменой  $-p^2$  на  $\mathcal{M}^2$ , то

$$Z_1 \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, e^2; \zeta \right) \sim \left( 1 - \frac{e^2}{a_0} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} \right)^{-c_1(\zeta)} \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} \right)^{\frac{c_0(\zeta)}{a_0}} b_1(\zeta), \quad (3.8.31)$$

$$Z'_1 \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, e^2; \zeta \right) \sim \left( 1 - \frac{e^2}{a_0} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} \right)^{-c'_1(\zeta)} \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} \right)^{\frac{c'_0(\zeta)}{a_0}} b'_1(\zeta).$$



Учитывая, что  $m = \underline{m}Z_1'/Z_1$ , получаем

$$m = \underline{m} \left( 1 - \frac{e^2}{a_0} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} \right)^{c_1(\xi) - c_1'(\xi)} \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} \right)^{\frac{c_0'(\xi) - c_0(\xi)}{a_0}} \frac{b_1'(\xi)}{b_1(\xi)}. \quad (3.8.32)$$

Пусть величина  $\xi \equiv e^2 \underline{\xi}$  в силу малости  $e^2$  является малой (при фиксированном  $\underline{\xi}$ ). Тогда справедливы разложения

$$\begin{aligned} b(\xi) &= b(0) + \dots, & b'(\xi) &= b'(0) + \dots, & c_1(\xi) &= c_1(0) + \dots, \\ c_1'(\xi) &= c_1'(0) + \dots, & c_0(\xi) &= c_0(0) + \xi \bar{c}_0(0) + \dots, \\ c_0'(\xi) &= c_0'(0) + \xi \bar{c}_0'(0) + \dots, \end{aligned}$$

следовательно, при  $e^2 \rightarrow 0$  (и фиксированном  $\underline{\xi}$ )

$$\begin{aligned} \underline{A} &\rightarrow b(0) \left\{ 1 + \frac{e^2 c_1(0)}{a_0} \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2} + \frac{c_0(0)}{a_0} \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2} + \xi \frac{\bar{c}_0(0)}{a_0} \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2} \right\}, \\ \underline{A}' &\rightarrow b'(0) \left\{ 1 + \frac{e^2 c_1'(0)}{a_0} \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2} + \frac{c_0'(0)}{a_0} \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2} + \xi \frac{\bar{c}_0'(0)}{a_0} \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2} \right\}. \end{aligned}$$

Вместе с тем из формул (3.7.6), (3.7.14) следует, что в теории возмущений по  $e^2$  при  $-p^2 \gg \underline{m}^2$  справедливы соотношения

$$\underline{A} \rightarrow 1 - \frac{\xi}{16\pi^2} \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2}, \quad \underline{A}' \rightarrow 1 - \frac{3e^2}{16\pi^2} \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2} - \frac{\xi}{16\pi^2} \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2}.$$

Сравнивая эти формулы и учитывая, что  $a_0 = 12\pi^2$ , находим

$$\begin{aligned} b(0) &= b'(0) = 1, & c_0(0) &= c_0'(0) = 0, & \bar{c}_0(0) &= \bar{c}_0'(0) = -\frac{3}{4}, \\ c_1(0) &= 0, & c_1'(0) &= -\frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Кроме того, легко видеть, что  $b_1(0) = b_1'(0) = 1$ . Таким образом, в области  $-p^2 \gg \underline{m}^2$ ,  $e^2 \ll 1$  справедливы формулы [34]

$$\underline{A} \sim \left( -\frac{p^2}{\underline{m}^2} \right)^{-\frac{\xi e^2}{16\pi^2}}, \quad \underline{A}' \sim \left( 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{-p^2}{\underline{m}^2} \right)^{\frac{9}{4}} \left( -\frac{p^2}{\underline{m}^2} \right)^{-\frac{\xi e^2}{16\pi^2}}, \quad (3.8.33)$$

а при  $M^2 \gg m^2$  формулы

$$Z_1 \sim \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} \right)^{-\frac{\xi e^2}{16\pi^2}}, \quad Z_1' \sim \left( 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} \right)^{\frac{9}{4}} \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} \right)^{-\frac{\xi e^2}{16\pi^2}}. \quad (3.8.34)$$

Поэтому ([35], см. также [33])

$$m = \underline{m} \left( 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} \right)^{\frac{9}{4}}. \quad (3.8.35)$$

Формула (3.8.35) позволяет дать чисто полевую интерпретацию массе электрона. Действительно, полагая здесь  $m = 0$ , находим

$$\underline{m}^2 = M^2 \exp\left(-\frac{12\pi^2}{e^2}\right).$$

Эта формула связывает массу реального электрона с импульсом обрезания  $M$ . Если импульс обрезания имеет реальный физический смысл (т. е. обрезание на импульсе  $M$  обуславливается какими-то другими, не электромагнитными, взаимодействиями), то эту формулу можно интерпретировать как возникновение «сверхпроводящей» щели в спектре однозарядовых состояний. Отметим, однако, что, как следует из (3.8.35) и (3.8.27), в пределе  $m \rightarrow 0$ ,  $\underline{m} \neq 0$  с необходимостью происходит выход за рамки слабой связи, являющейся областью применимости рассмотренных выше разложений. Существование решения сверхпроводящего типа в электродинамике в предположении справедливости асимптотического уравнения ренормализационной группы для массового оператора фермиона в пределе  $m \rightarrow 0$  исследовалось в [36]. Механизм генерации массы фермиона, который приводит к нарушению этого свойства, был предложен и разработан в работе [40].

**3.8.5. Инфракрасная асимптотика электронной функции Грина.** Выше мы изучали ультрафиолетовую асимптотику перенормированных функций Грина. Однако перенормированные электронная функция Грина и вершинная функция имеют особенности на массовой оболочке электрона  $p^2 = \underline{m}^2$ . Эти особенности называются инфракрасными. Исследуем эту особенность для электронной функции Грина. Начнем с изучения этой особенности в перенормированном массовом операторе электрона во втором порядке теории возмущений.

Массовый оператор  $\underline{\Sigma}(p)$  (и электронную функцию Грина  $\underline{G}_{(p)}^{(e)}$ ) можно, очевидно, рассматривать как скалярную функцию одной переменной  $x$ :  $\underline{\Sigma} = \underline{\Sigma}(x)$  ( $\underline{G}^{(e)} = \underline{G}^{(e)}(x)$ ). При этом матрица  $\underline{\Sigma}(p)$  (или  $\underline{G}^{(e)}(p)$ ) получается из скалярной функции  $\underline{\Sigma}(x)$  (или  $\underline{G}^{(e)}(x)$ ) путем замены  $x \rightarrow \hat{p}$ . Согласно формулам (3.7.6), (3.7.14) асимптотика функции  $\underline{\Sigma}^{(2)}(x, \xi)$  при  $\underline{m}^2 \gg \underline{m} |x - \underline{m}| \gg \lambda^2$  имеет вид

$$\underline{\Sigma}^{(2)}(x, \xi) \approx (3 - \xi) \frac{e^2}{16\pi^2} (x - \underline{m}) \ln \frac{(x - \underline{m})^2}{\lambda^2}, \quad \frac{m}{\lambda} \gg \left| \frac{x - \underline{m}}{\lambda} \right| \gg \frac{\lambda}{\underline{m}},$$

следовательно,

$$\underline{G}^{(e)-1}(x, \xi) \approx (\underline{m} - x) \left\{ 1 + \frac{e^2}{16\pi^2} (3 - \xi) \ln \frac{(x - \underline{m})^2}{\lambda^2} + \dots \right\}. \quad (3.8.36)$$

Отсюда видно, что функции  $\underline{\Sigma}^{(2)}(x, \xi)$ ,  $\underline{G}^{(2)}(x, \xi)$  обладают логарифмической инфракрасной особенностью.

Представим неперенормированную (по заряду) и перенормированную электронные функции Грина в виде

$$\underline{G}^{(e)}(p) = \frac{a(\hat{p})}{\underline{m} - \hat{p}}, \quad \underline{G}^{(e)}(p) = \frac{\underline{a}(\hat{p})}{\underline{m} - \hat{p}}. \quad (3.8.37)$$

Тогда согласно (3.6.33) безразмерные функции  $a(\hat{\rho})$  и  $\underline{a}(\hat{\rho})$  связаны соотношением

$$a(\hat{\rho}) = Z_2 \underline{a}(\hat{\rho}). \quad (3.8.38)$$

Неперенормированная функция  $a(\hat{\rho})$  в теории возмущений имеет предел при  $\lambda \rightarrow 0$  ( $\lambda \ll m$ ), в то время как  $Z_2$  и  $\underline{a}(\hat{\rho})$  существенно зависят от  $\lambda$ . Поэтому при  $\lambda \ll m$  должна иметь место факторизация по  $\lambda$ , т. е.

$$Z_2\left(\frac{\mathcal{M}}{\underline{m}}, \frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e}\right) = Z_2\left(\frac{\mathcal{M}}{\underline{m}}, \underline{e}\right) f\left(\frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e}\right),$$

$$\underline{a}\left(\frac{x-m}{\lambda}, \frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e}\right) = \underline{a}\left(\frac{x-m}{\underline{m}}, \underline{e}\right) f^{-1}\left(\frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e}\right)$$

( $x \equiv \hat{\rho}$ ; функция  $f\left(\frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e}\right)$  не может зависеть от  $\frac{\mathcal{M}}{\underline{m}}$ , так как от этого отношения не зависит  $\underline{a}$ , и не может зависеть от  $\frac{x-m}{\lambda}$ , так как от этого отношения не зависит  $Z_2$ ).

Отметим, что функция  $\underline{a}\left(\frac{x-m}{\lambda}, \frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e}\right)$  при  $\underline{m}^2 \gg m |x-m| \gg \lambda^2$  не зависит от  $\lambda/m$  (мы в этом убедились на примере 2-го порядка теории возмущений). Поэтому в этой области должно выполняться соотношение

$$\underline{a}\left(\frac{x-m}{\lambda}, 0, \underline{e}\right) = \underline{a}\left(\frac{x-m}{\underline{m}}, \underline{e}\right) f^{-1}\left(\frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e}\right),$$

откуда следует

$$\underline{a}\left(\frac{x-m}{\underline{m}}, \underline{e}\right) = \left(\frac{x-m}{\underline{m}}\right)^{d(\underline{e})} C(\underline{e}), \quad |x-m| \ll \underline{m},$$

$$f\left(\frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e}\right) = \left(\frac{\lambda}{\underline{m}}\right)^{d(\underline{e})}, \quad \lambda \ll \underline{m},$$

где  $C(\underline{e})$ ,  $d(\underline{e})$  — функции одного аргумента  $\underline{e}$ . Поэтому

$$\underline{a}\left(\frac{x-m}{\lambda}, \frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e}\right) \approx C(\underline{e}) \left(\frac{x-m}{\lambda}\right)^{d(\underline{e})}, \quad \frac{m}{\lambda} \gg \left|\frac{x-m}{\lambda}\right| \gg \frac{\lambda}{\underline{m}}. \quad (3.8.39)$$

Так как согласно (3.5.2)  $\underline{a}\left(\frac{x-m}{\lambda}, \frac{\lambda}{\underline{m}}, 0\right) = 1$ , то  $C(0) = 1$ ,  $d(0) = 0$ . Поэтому в теории возмущений по  $\underline{e}$

$$\underline{a}\left(\frac{x-m}{\lambda}, \frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e}\right) = 1 + \frac{d(\underline{e})}{2} \ln \frac{(x-m)^2}{\lambda^2}, \quad \frac{m}{\lambda} \gg \left|\frac{x-m}{\lambda}\right| \gg \frac{\lambda}{\underline{m}}.$$

Вместе с тем согласно (3.8.36), (3.8.37)

$$\underline{a}\left(\frac{x-m}{\lambda}, \frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e}\right) = 1 - \frac{e^2}{16\pi^2} (3 - \xi) \ln \frac{(x-m)^2}{\lambda^2} + \dots$$

Из сравнения этих формул следует, что

$$d(\underline{e}) = -\frac{e^2}{8\pi^2} (3 - \xi) + \dots = \frac{\alpha}{2\pi} (\xi - 3) + \dots$$

Таким образом,

$$\underline{a}\left(\frac{x - \underline{m}}{\underline{\lambda}}, \frac{\underline{\lambda}}{\underline{m}}, \underline{e}\right) \approx \left(\frac{x - \underline{m}}{\underline{\lambda}}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi} (\xi - 3)},$$

следовательно,

$$\underline{G}^{(e)}(p) \approx \frac{1}{m - \hat{p}} \left(\frac{\hat{p} - \underline{m}}{\underline{\lambda}}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi} (\xi - 3)}. \quad (3.8.40)$$

Видно, что электронная функция Грина при  $m^2 \gg |p^2 - m^2| \gg \lambda^2$  имеет следующую инфракрасную асимптотику [31, 38]:

$$\underline{G}^{(e)}(p) \approx \frac{1}{m - \hat{p}} \left(\frac{p^2 - m^2}{2m\underline{\lambda}}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi} (\xi - 3)}. \quad (3.8.41)$$

Из этой формулы следует, что при  $\lambda \rightarrow 0$  электронная функция Грина при  $\hat{p} = \underline{m}$  имеет не полюс, а точку ветвления. Однако при конечных  $\lambda$  электронная функция Грина имеет полюс при  $\hat{p} = \underline{m}$ . Подчеркнем также, что в рассматриваемом приближении по  $e^2$  при  $\xi = 3$  инфракрасная особенность на массовой поверхности исчезает. Множитель  $(\lambda/m)^{-\frac{\alpha}{2\pi} (\xi - 3)}$  можно отнести к величине  $Z_2$ , переопределив тем самым эту величину. В результате величины  $\underline{G}$  и  $Z_2$  перестанут зависеть от  $\lambda$ .

Фотонная функция Грина при  $k^2 = 0$  не имеет инфракрасной особенности, если  $\underline{m} \neq 0$ ; вершинная же функция имеет инфракрасную особенность на массовой оболочке электронов. Однако эти вопросы мы здесь рассматривать не будем.

### § 3.9. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ НЕСВОБОДНОГО СУПЕРПОЛЯ

**3.9.1. Переход к представлению взаимодействия и матрица рассеяния.** Мы видели, что квантовая электродинамика является перенормируемой теорией. Еще одним важным примером перенормируемой теории является теория скалярного суперполя  $\chi(x, \theta)$  с взаимодействием  $\chi^3(x, \theta)$ , рассмотренная нами в § 1.7 и в п. 2.6.4. Существенной особенностью этой теории является то, что в ней вследствие инвариантности по отношению к преобразованиям суперсимметрии происходит значительное сокращение числа расходящихся в матрице рассеяния. Суперполе  $\chi(x, \theta)$  объединяет два скалярных поля  $A$  и  $F$  и майорановское поле  $\varphi$ . Так как в теории с взаимодействием  $\chi^3$  нам известен лагранжиан взаимодействия этих полей, то аналогично тому, как это было сделано в квантовой электродинамике, можно построить матрицу

рассеяния. Замечательно, однако, то, что правила Фейнмана здесь можно сформулировать сразу для всего поля  $\chi(x, \theta)$ , а не для его отдельных компонент  $A, F, \varphi$ . В данном параграфе мы построим матрицу рассеяния для суперполя, явно инвариантную по отношению к преобразованиям суперсимметрии, и рассмотрим вопрос о расходимостях, содержащихся в этой матрице [46].

Лагранжиан суперполя определяется формулой (1.7.48)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - U,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= 2A^\mu \partial_\mu A^+ + 2A^{\mu+} \partial_\mu A - \frac{i}{2} \partial_\mu \varphi^+ \sigma^\mu \varphi + \frac{i}{2} \varphi^+ \sigma^\mu \partial_\mu \varphi; \\ U &= 2A_\mu^+ A^\mu - 2FF^+ - \\ &- \left\{ 2mAF + 4gA^2F - \frac{m}{2} \varphi^\sigma \varphi_\sigma - 2gA\varphi^\alpha \varphi_\alpha + \text{э. с.} \right\}. \end{aligned} \quad (3.9.1)$$

Так как производные поля  $F$  не входят в лагранжиан, то вариация  $\mathcal{L}$  по  $F$  приводит к уравнению связи

$$F = -mA^+ - 2gA^+A^+. \quad (3.9.2)$$

Подставляя это выражение в формулу для  $U$ , получаем

$$\begin{aligned} U &= 2A_\mu^+ A^\mu + 2mA^+A + \frac{m}{2} (\varphi^\alpha \varphi_\alpha + \varphi_\alpha^+ \varphi^{\alpha+}) + U', \\ U' &= 2gA\varphi^\alpha \varphi_\alpha + 2gA^+ \varphi_\alpha^+ \varphi^{\alpha+} + 4mg(A^+A^2 + A^{+2}A) + \\ &+ 8g^2A^2A^{+2}. \end{aligned} \quad (3.9.3)$$

Гамильтониан поля согласно (2.1.50) определяется формулой

$$\mathcal{H} = \int d^3x \left\{ -2A^k \partial_k A - 2A^{k+} \partial_k A + \frac{i}{2} \partial_k \varphi^+ \sigma^k \varphi - \frac{i}{2} \varphi^+ \sigma^k \partial_k \varphi + U \right\}.$$

Отсюда следует, что гамильтониан взаимодействия определяется формулой

$$V = \int d^3x U'(x). \quad (3.9.4)$$

Зная гамильтониан взаимодействия, можно определить матрицу рассеяния

$$S = T \exp \left( -i \int d^4x \underline{U}'(x) \right) \quad (3.9.5)$$

и сформулировать правила Фейнмана, в основе которых лежат связи между операторами  $a = \sqrt{2} A$  (см. п. 2.6.5) и  $\varphi, \varphi^+$ :

$$\underline{\tilde{a}}(x) \underline{\tilde{a}}^+(x') = -i \Delta^c(x-x'), \quad \underline{\tilde{\varphi}}_\alpha(x) \underline{\tilde{\varphi}}_\beta^+(x') = (\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \Delta^c(x-x'),$$

$$\underline{\tilde{\varphi}}_\alpha(x) \underline{\tilde{\varphi}}_\beta(x') = m (\sigma^2)_{\alpha\beta} \Delta^c(x-x')$$

(в оператор  $U'$  в формуле (3.9.5) должны быть подставлены полевые операторы  $a$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi^+$  в представлении взаимодействия). Эти связи приводят, как мы видели, к связям (2.6.45), (2.6.46) для суперполей

$$\begin{aligned} \underbrace{\chi(x, \theta) \chi(x', \theta')} &= im\delta(\theta - \theta') \Delta^c(x - x'), \\ \underbrace{\chi^+(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} &= -im\delta(\bar{\theta} - \bar{\theta}') \Delta^c(x - x'), \end{aligned} \quad (3.9.6)$$

$$\underbrace{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} = -\frac{i}{2} e^{-2i\bar{\theta}'\sigma^{\mu\theta}\partial_\mu} \Delta^c(x - x') + \frac{i}{2} (\theta\theta) (\bar{\theta}'\bar{\theta}') \delta(x - x').$$

Связь  $\chi\chi^+$  содержит супернеинвариантное слагаемое  $\frac{i}{2} (\theta\theta) (\bar{\theta}'\bar{\theta}') \times \times \delta(x - x')$ . Супернеинвариантной является также плотность гамильтониана взаимодействия  $U'(x)$ .

Покажем, что, не изменяя  $S$ -матрицу, гамильтониан взаимодействия можно заменить лагранжианом взаимодействия, отбросив одновременно в связи  $\chi\chi^+$  супернеинвариантное слагаемое  $\frac{i}{2} (\theta\theta) (\bar{\theta}'\bar{\theta}') \delta(x - x')$ . Так как лагранжиан взаимодействия является суперинвариантным, то и  $S$ -матрица будет суперинвариантной.

Для доказательства этого отметим, что лагранжиан взаимодействия полей  $F$ ,  $A$ ,  $\varphi$  определяется формулой

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = 4gA^2F - 2gA\varphi\alpha\varphi_\alpha + \text{э. с.}, \quad (3.9.7)$$

или в терминах суперполей формулой

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = \frac{2}{3} g \int d^4\theta \{ \delta(\bar{\theta}) \chi^3(x, \theta) - \delta(\theta) \chi^{+3}(x, \theta) \} \quad (3.9.8)$$

(см. (1.7.43); эта формула показывает суперинвариантный характер  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ ).

В п. 2.6.5 при вычислении связей суперполей мы считали, что  $F = -mA^+$ . Поэтому при  $F = -mA^+$  оператор  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  связан с  $U'$  формулой

$$U'(x) = -\mathcal{L}_{\text{int}}(x) + 8g^2A^2A^{+2}. \quad (3.9.9)$$

Из формулы (3.9.6) для связи  $\chi\chi^+$  следует, что супернеинвариантной связью среди полей  $A$ ,  $F$ ,  $\varphi$  является только связь

$$\underbrace{F(x) F^+(x')} = \frac{i}{2} \delta(x - x') + \underbrace{F(x) F^+(x')}_{\text{super}}. \quad (3.9.10)$$

$S$ -матрицу можно  $N$ -упорядочить с помощью формулы (3.2.16)

$$S = : e^{\Delta_{FF^+} + \Delta_{FA^+} + \dots} \exp\left(-i \int d^4x' U'(x')\right);,$$

где

$$\Delta_{FF^+} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta}{\delta F(x)} \underbrace{F(x) F^+(x')} \frac{\delta}{\delta F^+(x')}$$

(среди дифференциальных операторов  $\Delta_{FF^+}$ ,  $\Delta_{FA}$ , определяемых связями  $\underline{FF^+}$ ,  $\underline{FA}$ , ..., мы выписали только дифференциальный оператор  $\Delta_{FF^+}$ , соответствующий суперинвариантной связи). В соответствии с формулой (3.9.10) дифференциальный оператор  $\Delta_{FF^+}$  можно представить в виде

$$\Delta_{FF^+} = \Delta_{FF^+}^{\text{super}} + \Delta_{FF^+}'$$

где  $\Delta_{FF^+}^{\text{super}}$  — дифференциальный оператор  $\Delta_{FF^+}$ , определяемый суперинвариантной связью  $\underline{FF^+}$

$$\Delta_{FF^+}^{\text{super}} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta}{\delta F(x)} \underbrace{F(x) F^+(x')}_{\text{super}} \frac{\delta}{\delta F^+(x')}$$

и

$$\Delta_{FF^+}' = \frac{i}{2} \int d^4x \frac{\delta^2}{\delta F(x) \delta F^+(x')}$$

Так как (см. (3.9.7))

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta F(x)} e^{-i \int d^4x U'} &= -4gA^2(x) e^{-i \int d^4x U'} \\ \frac{\delta}{\delta F^+(x)} e^{-i \int d^4x U'} &= -4gA^{+2}(x) e^{-i \int d^4x U'} \end{aligned}$$

то из (3.9.9) следует, что

$$e^{\Delta_{FF^+}'} e^{-i \int d^4x U'} = e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x)},$$

следовательно,  $S$ -матрицу можно представить в виде

$$S = : e^{\Delta_{FF^+}^{\text{super}} + \Delta_{FA^+} + \dots} \exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x) :.$$

Эту формулу можно, очевидно, записать так:

$$S = T \exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x), \quad (3.9.11)$$

где  $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$  — суперинвариантный лагранжиан взаимодействия, определяемый формулой (3.9.8), и  $T$ -произведение раскладывается по правилам Вика в сумму  $N$ -произведений с помощью суперинвариантных связей суперполей

$$\begin{aligned} \underline{\chi(x, \theta) \chi(x', \theta')} &= im\delta(\theta - \theta') \Delta^c(x - x'), \\ \underline{\chi^+(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} &= -im\delta(\bar{\theta} - \bar{\theta}') \Delta^c(x - x'), \\ \underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} &= -\frac{i}{2} e^{-2i\bar{\theta}'\sigma^{\mu\theta\theta'}} \Delta^c(x - x'). \end{aligned} \quad (3.9.12)$$

Таким образом, мы представили  $S$ -матрицу в явно суперинвариантном виде.

**3.9.2. Правила Фейнмана в теории суперполя.** Сформулируем правила Фейнмана для суперполя. Разложение  $S$ -матрицы в ряд по константе связи  $g$  имеет вид

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n! m!} \left(\frac{2}{3} g\right)^{n+m} (-1)^m \int d^4x_1 d^2\theta_1 \dots d^4x_n d^2\theta_n d^4y_1 d^2\bar{\theta}_1 \dots d^4y_m d^2\bar{\theta}_m T \{ \chi^3(x_1\theta_1) \dots \chi^3(x_n\theta_n) \chi^{+3}(y_1\bar{\theta}_1) \dots \chi^{+3}(y_m\bar{\theta}_m) \}. \quad (3.9.13)$$

Отсюда следует, что с каждой точкой  $x\theta$  диаграммы Фейнмана связаны или три суперполя  $\chi(x, \theta)$  (в этом случае точка  $(x\theta)$  называется правой вершиной) или три суперполя  $\chi^+(x, \theta)$  (в этом случае точка  $(x\bar{\theta})$  называется левой вершиной).  $T$ -произведение в формуле (3.9.13) в соответствии с правилами Вика следует разложить в сумму  $N$ -произведений. При этом под знаком  $N$ -произведения будут встречаться как свободные, так и связанные суперполя. Свободные суперполя  $\chi(x, \theta)$ , связанные с правой вершиной  $(x\theta)$ , будем изображать волнистой линией с символом  $\chi$ , а свободные суперполя  $\chi^+(x, \theta)$ , связанные с левой вершиной  $(x\bar{\theta})$ , — волнистой линией с символом  $\chi^+$ . Правые вершины будем обозначать знаком  $\ominus$ , а левые —  $\oplus$ . Связи между операторами, относящимися к правым или левым вершинам, будем обозначать штриховой линией, соединяющей эти вершины, а связи между правой и левой вершинами — сплошной линией, соединяющей эти вершины (рис. 22).

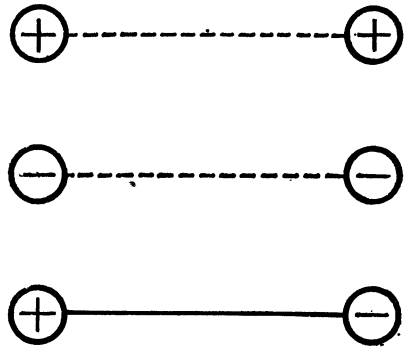


Рис. 22

Так же, как в электродинамике, удобно использовать импульсное представление матрицы рассеяния  $S$ . Для этого суперполя и функции распространения суперполей разложим в 4-мерные интегралы Фурье

$$\begin{aligned} \chi(x, \theta) &= \int d^4q e^{-iqx} \underline{\chi}(q, \theta), & \chi^+(x, \theta) &= \int d^4q e^{iqx} \underline{\chi}^+(q, \theta), \\ \underline{\chi}\underline{\chi}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \underline{\chi}\underline{\chi}(p), & \underline{\chi}\underline{\chi}^+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \underline{\chi}\underline{\chi}(p), \end{aligned} \quad (3.9.14)$$

где пропэгаторы суперполей в импульсном пространстве определяются формулами

$$\begin{aligned} \underline{\chi}\underline{\chi}(\theta) &= \frac{im}{m^2 - p^2 - i0} \delta(\theta - \theta'), & \underline{\chi}^+\underline{\chi}^+(p) &= -\frac{im}{m^2 - p^2 - i0} \delta(\bar{\theta} - \bar{\theta}'), \\ \underline{\chi}\underline{\chi}^+(p) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{m^2 - p^2 - i0} e^{-2\bar{\theta}'\sigma^{\mu\nu}\theta p_{\mu}}. \end{aligned} \quad (3.9.15)$$



Подставляя эти разложения в (3.9.13), представляем  $S$ -матрицу в виде

$$S = \sum_{nm} \int d^4 p_1 d^2 \theta_1 \dots d^4 p_n d^2 \bar{\theta}_m \chi(p_1, \theta_1) \dots \chi(p_n, \theta_n) \chi^+(p_1, \bar{\theta}_1) \dots \chi^+(p_m, \bar{\theta}_m) : F_{nm}(p_1 \theta_1, \dots, p_n \theta_n; p'_1 \bar{\theta}_1, \dots, p'_m \bar{\theta}_m), \quad (3.9.16)$$

где коэффициентные функции  $F_{nm}(p_1 \theta_1 \dots; \dots p'_m \bar{\theta}_m)$  определяются символической формулой

$$F_{nm} = \sum \frac{1}{i! s!} \left( \frac{2}{3} g \right)^{i+s} (-1)^s (2\pi)^{4(i+s)-F} \int \prod_1^{i+s} \delta(\Sigma p) \prod_1^{F_{--}} \underline{\chi\chi} \times \times \prod_1^{F_{++}} \underline{\chi^+\chi^+} \prod_1^{F_{+-}} \underline{\chi\chi^+}, \quad (3.9.17)$$

$F_{--}, F_{++}, F_{+-}$  — числа внутренних линий на диаграмме типа  $\underline{\chi\chi}, \underline{\chi^+\chi^+}, \underline{\chi\chi^+}$ ;  $F = F_{--} + F_{++} + F_{+-}$  (ср. с (3.4.3)). Суперполе  $\chi(p, \bar{\theta})$  согласно (1.7.36) можно выразить через фурье-компоненты полей  $A(x), F(x), \varphi(x)$ :

$$\chi(p, \theta) = A(p) + \theta\varphi(p) + (\theta\theta)F(p).$$

В соответствии с формулами (1.7.36), (3.9.14) поля  $A(p), \varphi(p), F(p)$  представляют собой суперпозиции операторов уничтожения суперчастиц с импульсом  $p$  и операторов рождения суперчастиц с импульсом  $-p$ .

В качестве примера приведем диаграмму Фейнмана, описывающую процессы рассеяния и аннигиляции суперчастиц (рис. 23). Эти диаграммы изображают  $N$ -произведения с четырьмя свободными операторами суперполя; внутренним линиям сопоставляются пропэгаторы  $\underline{\chi\chi}(p), \underline{\chi\chi^+}(p)$ .

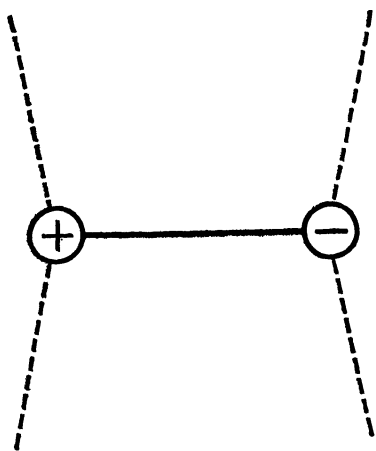


Рис. 23

**3.9.3. Расходимости в матрице рассеяния суперполя.** Введенная нами матрица рассеяния содержит расходимости в области больших импульсов суперчастиц. Однако замечательным свойством суперполя является то, что

вследствие свойств суперсимметрии все расходимости, кроме одной, сокращаются, а именно остается только одна расходимость, соответствующая диаграмме на рис. 24. Так как константа взаимодействия в рассматриваемой теории безразмерна и взаимодействие суперполей относится к типу  $\chi^3$ , то, казалось бы, что теория должна быть суперперенормируемой (см. п. 3.6.1), т. е. содержащей конечное

число расходящихся диаграмм. В действительности это не так. Дело в том, что выводы п. 3.6.1 основаны на предположении, что размерность пропэгаторов в области больших импульсов определяется только импульсом, входящим в пропэгатор. В случае же суперполей в пропэгаторах (3.9.15) в области больших импульсов остаются размерные величины  $m, \theta$ . Поэтому рассуждения п. 3.6.1 в случае суперполей не применимы.

Переходя к исследованию расходимостей в матрице рассеяния, проведем промежуточную регуляризацию, заменив пропэгаторы  $\underline{\chi\chi}(p), \underline{\chi\chi}^+(p)$  пропэгаторами

$$\begin{aligned} \underline{\chi\chi}(p) &= im\delta(\theta - \theta') \Delta_2^c(p), & \underline{\chi^+\chi^+}(p) &= -im\delta(\bar{\theta} - \bar{\theta}') \Delta_2^c(p), \\ \underline{\chi\chi}^+(p) &= -\frac{i}{2} e^{-2\bar{\theta}'\sigma^{\mu\nu}\theta p_\mu} \Delta_1^c(p), \end{aligned} \quad (3.9.18)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1^c(p) &= \frac{1 + \xi(p^2)^2}{m^2 - p^2 [1 + \xi(p^2)^2]^2 - i0}; \\ \Delta_2^c(p) &= \frac{1}{m^2 - p^2 [1 + \xi(p^2)^2]^2 - i0}. \end{aligned}$$

Эти функции при  $(p^2)^2 \ll \xi^{-1}$  совпадают с функцией  $\Delta^c(p)$ ; в области же  $(p^2)^2 \gg \xi^{-1}$  они убывают быстрее, чем  $\Delta^c(p)$ , а именно  $\Delta_1^c(p)$  убывает как  $p^{-4}$ , а  $\Delta_2^c(p)$  как  $p^{-10}$ . Эта промежуточная регуляризация является суперинвариантной, т. е. пропэгаторы (3.9.18), как и исходные пропэгаторы (3.9.15) (см. п. 2.6.5), суперинвариантны. После физической перенормировки параметр  $\xi$  нужно устремить к нулю.

Перейдем к анализу расходимостей в диаграммах 2-го и 3-го порядков. Рассмотрим вначале диаграммы рис. 25. Формальный подсчет степени расходимости этих диаграмм привел бы к выводу, что они расходятся логарифмически. Однако легко видеть, что величины, соответствующие этим диаграммам, тождественно равны нулю, так как произведение пропэгаторов  $\underline{\chi\chi}(k, \theta) \underline{\chi\chi}(p - k, \theta)$  содержит квадрат грасмановой  $\delta$ -функции, который равен нулю:  $\delta^2(\theta_1 - \theta_2) = 0$  (напомним, что  $\delta(\theta_1 - \theta_2) = (\theta_1 - \theta_2)(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)$ ). Отметим, что этот результат было бы труднее получить, если бы мы пользовались не суперполем  $\chi$  при формулировке правил Фейнмана, а его компонентами  $\varphi, a, F$ . Аналогично обращаются в нуль величины, соответствующие диаграммам на



Рис. 24

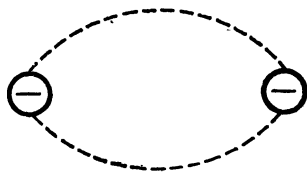


Рис. 25

рис. 26. Действительно, в эти диаграммы входят только пропэгаторы  $\underline{\chi\chi}$  ( $p, \theta$ ), содержащие грассмановы  $\delta$ -функции. Например, диаграмме третьего порядка (рис. 26) соответствует произведение трех грассмановых  $\delta$ -функций:  $\delta(\theta_1 - \theta_2) \delta(\theta_2 - \theta_3) \delta(\theta_1 - \theta_3)$ . Так как это произведение сводится к виду  $\delta^2(\theta_1 - \theta_2) \delta(\theta_2 - \theta_3)$ , то оно равно нулю.

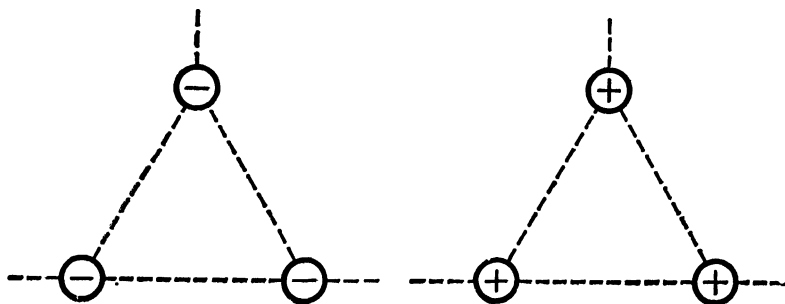


Рис. 26

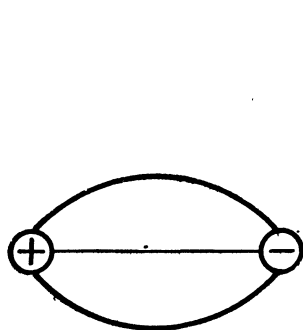


Рис. 27

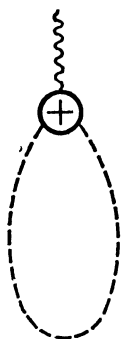


Рис. 28

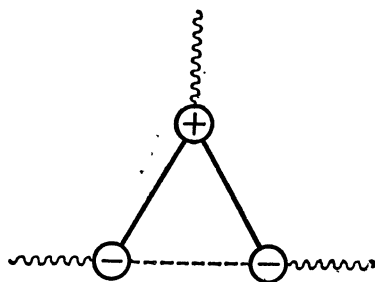


Рис. 29

Отсюда легко заключить, что величины, соответствующие диаграммам, содержащим замкнутые циклы, построенные из штриховых линий, обращаются в нуль.

Покажем, что в нуль обращается и диаграмма на рис. 27. Эта диаграмма при формальном подсчете степени пропэгаторов расходится. Однако произведение трех пропэгаторов, соответствующих этой диаграмме,

$$\underline{\chi\chi}^+(p) \underline{\chi\chi}^+(k) \underline{\chi\chi}^+(-p-k) = \frac{i}{8} \Delta^c(p) \Delta^c(k) \Delta^c(-p-k),$$

не содержит грассмановых переменных; поэтому после интегрирования по грассмановым переменным  $\theta_1, \theta_2$ , которое должно производиться согласно правилам Фейнмана, мы получим в результате нуль (напомним, что  $\int d\theta = 0$ ). Мы видим, что вакуумные диаграммы во втором порядке теории возмущений обращаются в нуль. Можно показать, что этот результат справедлив и для вакуумных диаграмм всех порядков.

В теории суперполя появляются также диаграммы, показанные на рис. 28 (в квантовой электродинамике таких диаграмм не было, так как вектор тока представлял собой  $N$ -упорядоченный оператор). В связи с тем что согласно (3.9.15) эта диаграмма содержит грассманову  $\delta$ -функцию  $\delta(\theta)$  при  $\theta = 0$ , она также обращается в нуль (напомним, что  $\delta(0) = 0$ ).

Рассмотрим трехвершинную диаграмму, показанную на рис. 29. Формальный подсчет степени расходимости показывает, что эта диаграмма расходится как  $\int d^4p/p^2$ . Однако она содержит произведение трех пропаторов:  $\underline{\chi}\chi$ ,  $\underline{\chi}\chi^+$ ,  $\underline{\chi}\chi^+$ , которое согласно (3.9.15) сводится к виду

$$e^{2\bar{\theta}_s \hat{k}_1 \theta_1} e^{2\bar{\theta}_s \hat{k}_2 \theta_2} \delta(\theta_1 - \theta_2) \Delta^c(p) \Delta^c(p - k_1) \Delta^c(-p - k_2), \quad \hat{k} = \sigma^\mu p_\mu.$$

Поэтому интеграл по  $p$  от этого выражения сходится.

Рассмотрим еще диаграмму на рис. 24. Эта диаграмма вносит в  $S$ -матрицу вклад

$$\int d^4p d\theta d\bar{\theta} : \chi(p, \theta) \chi^+(p, \bar{\theta}) : \Sigma(p, \theta, \bar{\theta}),$$

где согласно (3.9.15)

$$\Sigma(p, \theta, \bar{\theta}) = e^{-2\bar{\theta} \hat{p} \theta} \int d^4k \Delta^c(k) \Delta^c(p - k).$$

Данное выражение отлично от нуля, а входящий сюда интеграл в области больших импульсов расходится логарифмически. Среди диаграмм второго и третьего порядков это единственная диаграмма, приводящая к расходимости в матрице рассеяния.

Можно показать, что в более высоких порядках теории возмущений к расходимостям приводят только диаграммы, содержащие две внешние линии, соответствующие супер полям  $\chi(p, \theta)$  и  $\chi^+(p, \theta)$ , причем расходимость этих диаграмм будет логарифмической.

**КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ НЕАБЕЛЕВЫХ  
КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ**

**§ 4.1. КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНОГО ПОЛЯ  
В КУЛОНОВСКОЙ КАЛИБРОВКЕ**

**4.1.1. Лагранжиан калибровочного и фермионного полей в кулоновской калибровке.** Перейдем к построению квантовой теории неабелевых калибровочных полей, взаимодействующих с фермионными полями. В случае группы  $SU(3)$  неабелевым калибровочным полем является глюонное поле. Поэтому с учетом приложений мы часто вместо калибровочных полей будем говорить о глюонных полях, а вместо фермионных полей — о кварковых полях, хотя развиваемая ниже теория относится к произвольным калибровочным и фермионным полям (связанным с произвольной группой  $SU(n)$ ). Как и в случае квантовой электродинамики, для получения уравнений поля будем рассматривать операторы калибровочного поля  $A_\mu^a, F_{\mu\nu}^a$  и ферми-поля  $q, \bar{q}$  (мы не выписываем явно спиновый и цветовой индексы, на которые действуют матрицы  $\gamma^\mu, T^a$ )<sup>17</sup> как независимые переменные. Так как операторы  $A_\mu^a, F_{\mu\nu}^a$  являются бозе-полями, а операторы  $q, \bar{q}$  — ферми-полями, то согласно изложенному в § 1.9 лагранжиан полей следует выбрать в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \frac{1}{4} [\bar{q}, (i\gamma^\mu D_\mu - m)q] + \frac{1}{4} [q, (i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu + m)\bar{q}],$$

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{8} \{F_{\mu\nu}^a, F^{a\mu\nu}\} - \frac{1}{4} \{F^{a\mu\nu}, \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g(A_\mu \times A_\nu)^a\}, \quad (4.1.1)$$

где

$$D_\mu q = \partial_\mu q - igA_\mu^a T_a q; \quad D_\mu \bar{q} = \partial_\mu \bar{q} + igA_\mu^a \tilde{T}_a \bar{q};$$

$(A \times B)^a = f^{abc} A^b B^c$  (матрицы  $T_a$  действуют на цветовой индекс).

Этот лагранжиан приводит к калибровочно-инвариантным уравнениям движения, совпадающим с уравнениями движения классического калибровочного и фермионного полей. Однако так же, как в случае квантования электромагнитного поля, вследствие калибровочной инвариантности лагранжиана мы не можем выразить все переменные  $A_\mu^a, F_{\mu\nu}^a$  через динамически независимые переменные. Для устранения этой трудности следует так же, как в § 3.1, нарушить калибровочную

<sup>17</sup> Индекс, связанный с сортом кварка, мы опускаем, так как в теории сильного взаимодействия сорт кварка сохраняется, следовательно, этот индекс легко восстанавливается.

инвариантность, наложив на поля  $A_\mu^a$  некоторое дополнительное условие. Здесь мы будем считать, что поля  $A_k^a$  удовлетворяют условию пространственной поперечности

$$\partial^k A_k^a = 0. \quad (4.1.2)$$

Как и в квантовой электродинамике, будем говорить, что поля  $A_\mu^a$  относятся к кулоновской (радиационной) калибровке. Мы видели, что в квантовой электродинамике в случае кулоновской калибровки не возникают нефизические состояния, т. е. состояния, соответствующие скалярным и продольным фотонам, которые наблюдаются в лоренцевой калибровке. Однако в кулоновской калибровке отсутствует явная релятивистская инвариантность теории, в то время как в лоренцевой калибровке такая инвариантность имеет место. Аналогичная ситуация возникает и в теории неабелевых калибровочных полей. Так, в кулоновской калибровке не возникает никаких нефизических состояний, но теория теряет явную релятивистскую инвариантность. Если же использовать лоренцеву калибровку, то теория на всех этапах будет явно релятивистски-инвариантной, однако при этом возникнут нефизические состояния. Учитывая сказанное, начнем исследование с формулировки теории в кулоновской калибровке, где она обладает большей физической наглядностью, и только после этого перейдем к рассмотрению лоренцевой калибровки.

Лагранжиан  $\mathcal{L}_G$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = & \frac{1}{2} \{F^{ak0}, \partial_0 A_k^a\} + \frac{1}{4} \{F^{ak0}, F_{k0}^a\} + \frac{1}{8} \{F^{akl}, F_{kl}^a\} - \\ & - \frac{1}{4} \{F^{akl}, \partial_k A_l^a - \partial_l A_k^a + g(A_k \times A_l)^a\} + \frac{1}{2} \{\partial_k F^{ak0}, A_0^a\} - \\ & - \frac{1}{2} g \{F^{ak0}, (A_k \times A_0)^a\} - \frac{1}{2} \partial_k \{F^{ak0}, A_0^a\}. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в выражении для  $\mathcal{L}_G$ , представляющее собой пространственную дивергенцию, можно отбросить. Разбив  $F_{k0}$  на продольную  $F_{k0}^{(l)}$  и поперечную  $F_{k0}^{(t)} \equiv \mathcal{E}_k$  части,  $F_{k0} = F_{k0}^{(l)} + F_{k0}^{(t)}$ , и учитывая, что

$$\int d^3x F_{k0}^{(l)}(x) A^k(x) = 0$$

( $A_k \equiv A_k^{(t)}$  — поперечный вектор),  $\mathcal{L}_G$  можем заменить оператором

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = & \frac{1}{2} \{\mathcal{E}^{ak}, \partial_0 A_k^a\} - \omega_G + \frac{1}{2} \{A_0^a, \partial_k F^{ak0} - g(F^{k0} \times A_k)^a\}, \\ \omega_G = & -\frac{1}{4} \{F_{k0}^a, F^{ak0}\} - \frac{1}{8} \{F^{akl}, F_{kl}^a\} + \\ & + \frac{1}{4} \{F^{akl}, \partial_k A_l^a - \partial_l A_k^a + g(A_k \times A_l)^a\}. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Мы учли, что вследствие перестановочных соотношений (4.1.7)  $\{F^{ak0}, (A_k \times A_0)^a\} = \{A_0^a, (F^{k0} \times A_k)^a\}$ . Таким образом, лагранжиан  $\mathcal{L}$

в кулоновской калибровке можно окончательно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \{ \mathcal{E}^{ak}, \partial_0 A_k^a \} + \frac{i}{4} [\bar{q}, \gamma^0 \partial_0 q] + \frac{i}{4} [q, \tilde{\gamma}^0 \partial_0 \bar{q}] - \omega + \\ & + \frac{1}{2} \{ A_0^a, \partial_k F^{ak0} - g (F^{k0} \times A_k)^a + j_0^a \}, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

где

$$\omega = \omega_G + \omega_{\mathcal{D}} - j^{ak} A_k^a \quad (4.1.5)$$

и

$$\omega_{\mathcal{D}} = -\frac{1}{4} [\bar{q}, (i\gamma^k \partial_k - m) q] - \frac{1}{4} [q, (i\tilde{\gamma}^k \partial_k + m) \bar{q}],$$

$$j_{\mu}^a = \frac{g}{2} [\bar{q}, \gamma_{\mu} T^a q].$$

**4.1.2. Перестановочные соотношения и уравнения поля.** Согласно изложенному в § 2.1 переменные  $\mathcal{E}^{ak}$ ,  $A_k^a$ ,  $q$ ,  $\bar{q}$  являются динамически независимыми, а первые три слагаемых в  $\mathcal{L}$  определяют кинематическую часть лагранжиана и соответствующую ей кинематическую часть действия

$$W_K = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left( \frac{1}{2} \{ \mathcal{E}^{ak}, \partial_0 A_k^a \} + \frac{i}{4} [\bar{q}, \gamma^0 \partial_0 q] + \frac{i}{4} [q, \tilde{\gamma}^0 \partial_0 \bar{q}] \right).$$

Вариация полного действия определяется формулой

$$\delta W = G_1(t_2) - G_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{F}(x), \quad (4.1.6)$$

$$G_1(t) = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \{ \mathcal{E}^{ak}, \delta A_k^a \} + \frac{i}{4} [\bar{q}, \gamma^0 \delta q] + \frac{i}{4} [q, \tilde{\gamma}^0 \delta \bar{q}] \right),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) = & -\frac{1}{2} \{ \partial_0 \mathcal{E}^{ak}, \delta A_k^a \} + \frac{1}{2} \{ \delta \mathcal{E}^{ak}, \partial_0 A_k^a \} + \frac{i}{2} [\delta \bar{q}, \gamma^0 \partial_0 q] + \\ & + \frac{i}{2} [\delta q, \tilde{\gamma}^0 \partial_0 \bar{q}] - \delta \omega + \frac{1}{2} \delta \{ A_0^a, \partial^k F_{k0}^a - g (F^{k0} \times A_k)^a + j_0^a \}. \end{aligned}$$

Так как оператор  $G_1(t)$  имеет такую же структуру, как в квантовой электродинамике, то мы приходим к следующим нетривиальным одно-временным перестановочным соотношениям, аналогичным перестановочным соотношениям (3.1.8):

$$\begin{aligned} \{ q(x), \bar{q}(x') \}_{t=t'} &= \gamma^0 \delta(x - x'), \\ [\mathcal{E}_k^a(x), A_l^b(x')]_{t=t'} &= -i \delta_{ab} (g_{kl} \delta(x - x'))^{(t)}, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

где

$$(g_{kl} \delta(x))^{(t)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left( g_{kl} - \frac{k_k k_l}{k^2} \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}.$$

Для нахождения уравнений движения и связи следует приравнять нулю вариацию действия по всем переменным  $\mathcal{E}_k^a, A_k^a, F_{kl}^a, F_{k0}^{a(l)}, q, \bar{q}$ , или, что то же, приравнять нулю интеграл  $\int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{F}(x)$  на классе эле-

ментарных вариаций. Легко видеть, что варьирование по  $F_{kl}^a$  приводит к уравнению связи

$$F_{kl}^a = \overset{\circ}{F}_{kl}^a + g(A_k \times A_l)^a, \quad \overset{\circ}{F}_{kl}^a = \partial_k A_l^a - \partial_l A_k^a. \quad (4.1.8)$$

Варьирование по  $F_{k0}^{a(l)}$  приводит к уравнению связи

$$\partial_k A_0^a - F_{k0}^{a(l)} + g(A_k \times A_0)^{a(l)} = 0 \quad (4.1.9)$$

(напомним, что индекс  $(l)$  служит для обозначения продольной части пространственных векторов). Наконец, варьирование по  $A_0^a$  приводит также к уравнению связи:

$$\partial^k F_{k0}^{a(l)} - g(F_{k0}^{(l)} \times A^k)^a = g(\mathcal{E}_k \times A^k)^a - j_0^a. \quad (4.1.10)$$

Варьирование по  $A_k^a$  и  $\mathcal{E}_k^a$  (с учетом поперечности этих полей) приводит к уравнениям движения

$$\partial_0 A_k^a + \mathcal{E}_k^a - g(A_k \times A_0)^{a(l)} = 0, \quad (4.1.11)$$

$$\partial_0 \mathcal{E}_k^a + \partial^l F_{kl}^a - j_k^{a(l)} - g(F_{kl} \times A^l)^{a(l)} - g(F_{k0} \times A_0)^{a(l)} = 0,$$

а варьирование по  $q, \bar{q}$  — к уравнениям движения

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)q = 0, \quad (i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu + m)\bar{q} = 0. \quad (4.1.12)$$

Вследствие уравнений связи (4.1.10) последнее слагаемое в  $\mathcal{L}$  обращается в нуль. Поэтому оператор  $\omega$  представляет собой плотность гамильтониана (см. п. 2.1.4). Выделяя из оператора  $\omega_G$  члены, связанные с самодействием калибровочного поля, представим оператор  $\omega$  в виде

$$\omega = \omega_0 + \omega_{\text{int}},$$

где  $\omega_0$  — плотность гамильтониана свободных полей ( $g = 0$ ):

$$\begin{aligned} \omega_0 = & \frac{1}{8} \{ \overset{\circ}{F}_{kl}^a, \overset{\circ}{F}^{akl} \} - \frac{1}{4} \{ \mathcal{E}_k^a, \mathcal{E}^{ak} \} - \\ & - \frac{1}{4} [\bar{q}, (i\gamma^k \partial_k - m)q] - \frac{1}{4} [q, (i\tilde{\gamma}^k \partial_k + m)\bar{q}], \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

а  $\omega_{\text{int}}$  — плотность гамильтониана взаимодействия:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{int}} = & -j_k^a A^{ak} - \frac{1}{4} \{ \partial_k \varphi^a, \partial^k \varphi^a \} + \frac{g}{4} \{ \overset{\circ}{F}_{kl}^a, (A^k \times A^l)^a \} + \\ & + \frac{g^2}{8} \{ (A_k \times A_l)^a, (A^k \times A^l)^a \}, \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

где  $\partial_k \varphi^a = F_{k0}^{a(l)}$  — продольное глюонное поле. Согласно уравнению связи (4.1.10) поле  $\varphi^a$  удовлетворяет уравнению

$$\partial^k \partial_k \varphi^a + g(A^k \times \partial_k \varphi)^a = -j_0^a + g(\mathcal{E}_k \times A^k)^a. \quad (4.1.15)$$



В это уравнение входят поперечные динамически независимые поля  $A_k, \mathcal{E}_k$ . В случае абелевых полей структурные постоянные  $f^{abc}$  обращаются в нуль, поэтому исчезают члены, содержащие «векторные» произведения. Возникающее уравнение можно точно решить, а в результате исключения переменной  $\varphi$  величина  $\omega_{\text{int}}$  примет следующий вид:

$$\omega_{\text{int}} = -j_k A^k + \frac{1}{8\pi} \int d^3x' \frac{j_0(x', t)}{|x - x'|} j_0(x, t)$$

(ср. с формулой (3.1.18)). В случае неабелевых полей поле  $\varphi^a$  можно исключить из  $\omega_{\text{int}}$  с помощью уравнения (4.1.15) только в рамках теории возмущений (по  $g$ ). Поэтому при исключении поля  $\varphi^a$  из  $\omega_{\text{int}}$  возникнет бесконечный ряд по  $g$ .

Отметим, что согласно определению поля  $\varphi^a$  уравнение связи (4.1.9), определяющее поле  $A_0^a$ , можно записать в виде

$$\partial^k \partial_k A_0^a + g(A_k \times \partial^k A_0)^a = \partial^k \partial_k \varphi^a. \quad (4.1.16)$$

**4.1.3. Представление взаимодействия в кулоновской калибровке.** Найдя выражения для  $\omega_0$  и  $\omega_{\text{int}}$  через динамически независимые переменные, согласно изложенному в п. 2.1.1 можно перейти к представлению взаимодействия в кулоновской калибровке. В этом представлении вектор состояния  $\underline{\Phi}(t)$  будет удовлетворять уравнению

$$i \frac{\partial \underline{\Phi}(t)}{\partial t} = \underline{V}(t) \underline{\Phi}(t), \quad \underline{V}(t) = \int d^3x \underline{x} \omega_{\text{int}}(x), \quad (4.1.17)$$

где  $\omega_{\text{int}}(x)$  определяется формулой (4.1.14), в которой операторы  $A_k, \mathcal{E}_k$  заменены операторами в представлении взаимодействия  $\underline{A}_k, \underline{\mathcal{E}}_k$ , причем поле  $\varphi$  следует исключать с помощью уравнения (4.1.15)

$$\partial^k \partial_k \underline{\varphi}^a + g(\underline{A}^k \times \partial_k \underline{\varphi})^a = -\underline{j}_0^a + g(\underline{\mathcal{E}}_k \times \underline{A}^k)^a.$$

Динамически независимые поля  $\underline{A}_k, \underline{\mathcal{E}}_k$  удовлетворяют следующим нетривиальным одновременным перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [A_i^a(x), \mathcal{E}_k^b(x')]_{t=t'} &= i \delta_{ab} (g_{ik} \delta(x - x'))^{(4)}, \\ [q(x), \bar{q}(x')]_{t=t'} &= \gamma^0 \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Уравнения движения для этих полей имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_0 \underline{A}_k^a(x) &= i [\mathcal{H}_0, \underline{A}_k^a(x)], \quad \partial_0 \underline{\mathcal{E}}_k^a(x) = i [\mathcal{H}_0, \underline{\mathcal{E}}_k^a(x)], \\ \partial_0 \underline{q}(x) &= i [\mathcal{H}_0, \underline{q}(x)], \end{aligned}$$

где согласно (4.1.13)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \int d^3x \left( \frac{1}{8} \{ \underline{\dot{F}}_{kl}^a, \underline{\dot{F}}^{akl} \} - \frac{1}{4} \{ \underline{\mathcal{E}}_k^a, \underline{\mathcal{E}}^{ak} \} - \frac{1}{4} [\underline{q}, (i\gamma^k \partial_k - m) \underline{q}] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} [\underline{q}, (i\gamma^k \partial_k + m) \underline{\bar{q}}] \right). \end{aligned}$$

Используя перестановочные соотношения (4.1.18), эти уравнения можно переписать в виде

$$\partial_0 \underline{A}_k^a(x) + \underline{\mathcal{E}}_k^a(x) = 0, \quad \partial_0 \underline{\mathcal{E}}_k^a(x) - \partial^l \partial_l \underline{A}_k^a(x) = 0, \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \underline{q}(x) = 0 \quad (4.1.19)$$

(ср. с формулами (4.1.11), (4.1.12) при  $g = 0$ ).

Определим  $S$ -матрицу. Согласно (2.1.13)

$$S = T \exp \left( -i \int d^4x \omega_{\text{int}}(x) \right).$$

Разложим операторы  $\underline{A}_k(x)$  и  $\underline{\mathcal{E}}_k(x)$  по плоским волнам:

$$\begin{aligned} A_l^a(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{ e_{kl}^{(\lambda)} c_{k\lambda}^a e^{-ikx} + e_{kl}^{(\lambda)*} c_{k\lambda}^{a+} e^{ikx} \}, \\ \underline{\mathcal{E}}_l^a(x) &= \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{k\lambda=1}^2 \sqrt{\frac{\omega}{2}} \{ e_{kl}^{(\lambda)} c_{k\lambda}^a e^{-ikx} - e_{kl}^{(\lambda)*} c_{k\lambda}^{a+} e^{ikx} \} \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

(векторы поляризации  $e_{kl}^{(\lambda)}$  определяются формулами (1.4.37) при  $\lambda = 1, 2$  и  $l = 1, 2, 3$ ). Эти операторы удовлетворяют свободным уравнениям (4.1.19), так как операторы  $c_{k\lambda}^a$  не зависят от  $x$  и  $t$ . Из перестановочных соотношений (4.1.18) следуют перестановочные соотношения для операторов  $c_{k\lambda}^a$  ( $\lambda = 1, 2$ )

$$[c_{k\lambda}^a, c_{k'\lambda'}^{a'+}] = \delta_{aa'} \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (4.1.21)$$

Разложение операторов  $\underline{q}$  и  $\underline{\bar{q}}$  на плоские волны определяется формулами (2.5.27), (2.5.28).

Определим состояние вакуума  $\Phi_0$  свободных полей

$$\underline{A}_k^{(+)} \Phi_0 = \underline{\mathcal{E}}_k^{(+)} \Phi_0 = \underline{q}_\alpha^{(+)} \Phi_0 = \underline{\bar{q}}^{\alpha(+)} \Phi_0 = 0. \quad (4.1.22)$$

Тогда операторы  $c_{k\lambda}^a, c_{k\lambda}^{a+}$  будут операторами уничтожения и рождения глюонов с импульсом  $k$ , поляризацией  $\lambda$  и цветовым индексом  $a$  ( $a = 1, \dots, n^2 - 1$  в случае группы  $SU(n)$ ).

Для нахождения матричных элементов  $S$ -матрицы с помощью теоремы Вика найдем связи между операторами  $\underline{A}_k, \underline{\mathcal{E}}_k$ :

$$\begin{aligned} i\mathcal{D}_{ij}^{11}(x-x') &= (\Phi_0, T \{ \underline{A}_i^a(x) \underline{A}_j^b(x') \} \Phi_0), \\ i\mathcal{D}_{ij}^{22}(x-x') &= (\Phi_0, T \{ \underline{\mathcal{E}}_i^a(x) \underline{\mathcal{E}}_j^b(x') \} \Phi_0), \\ i\mathcal{D}_{ij}^{12}(x-x') &= (\Phi_0, T \{ \underline{A}_i^a(x) \underline{\mathcal{E}}_j^b(x') \} \Phi_0), \\ i\mathcal{D}_{ij}^{21}(x-x') &= (\Phi_0, T \{ \underline{\mathcal{E}}_i^a(x) \underline{A}_j^b(x') \} \Phi_0). \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Используя формулы (4.1.20), (4.1.21), отсюда получаем

$$\mathcal{D}_{ij}^{ab}(x) = -\frac{\delta_{ab}}{(2\pi)^4} \int d^4k \left( g_{ij} + \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 + i0} e^{-ikx},$$

$$\mathcal{D}_{ij}^{22}(x) = -\frac{\delta_{ab}}{(2\pi)^4} \int d^4k \left( g_{ii} + \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{k_0^2}{k^2 + i0} e^{-ikx}, \quad (4.1.24)$$

$$\mathcal{D}_{ij}^{12}(x) = i \frac{\delta_{ab}}{(2\pi)^4} \int d^4k \left( g_{ii} + \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{k_0}{k^2 + i0} e^{-ikx} = -\mathcal{D}_{ij}^{21}(x).$$

Связи между дираковскими полями определяются формулами (2.5.37), (2.5.38).

## § 4.2. МЕТОД КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

**4.2.1. Континуальное интегрирование.** Выше мы нашли связи между операторами полей в представлении взаимодействия в кулоновской калибровке. Зная гамильтониан взаимодействия полей в кулоновской калибровке (см. (4.1.14)), можно построить  $S$ -матрицу

$$S = T \exp \left\{ -i \int d^4x \underline{\omega}_{\text{int}}(x) \right\}. \quad (4.2.1)$$

Это выражение, однако, не является явно релятивистски-инвариантным, так как плотность гамильтониана взаимодействия  $\underline{\omega}_{\text{int}}(x)$  и связи между операторами не являются релятивистски-инвариантными. Чтобы получить из формулы (4.2.1) явно релятивистски-инвариантную  $S$ -матрицу, воспользуемся методом континуального интегрирования.

Выше мы видели, что для получения  $N$ -упорядоченной формы матрицы рассеяния удобно пользоваться формулой (3.2.16), содержащей функциональные производные по полям  $A$ ,  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ . Эта формула, по сути, эквивалентна правилам Вика для перехода от  $T$ -упорядоченных произведений операторов к  $N$ -упорядоченным произведениям этих операторов. При вычислении функциональных производных операторы могут считаться обычными  $c$ -числовыми функциями в случае бозе-полей и грассмановыми функциями для ферми-полей.

Далее мы приведем иную замкнутую формулировку  $N$ -упорядочения  $S$ -матрицы (в частности,  $S$ -матрицы (4.2.1)), основанную на применении метода континуального интегрирования, а не метода функционального дифференцирования. Этот метод весьма гибкий, так как дает возможность естественным образом производить замену динамических переменных, а также вводить новые динамические переменные, что позволит нам далее получить явно релятивистски-инвариантную форму  $S$ -матрицы.

Разъясним вначале метод континуального интегрирования<sup>18</sup>. Начнем с рассмотрения гауссова континуального интеграла по бозе-полям  $\varphi(x)$

$$\mathcal{K}(\mathcal{J}, A) = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -i \int \varphi \mathcal{J} - \frac{1}{2} \int \varphi A \varphi \right\}. \quad (4.2.2)$$

Здесь

$$\int \varphi \mathcal{J} \equiv \int d^4x \varphi(x) \mathcal{J}(x), \quad \int \varphi A \varphi \equiv \int d^4x d^4x' \varphi(x) A(x, x') \varphi(x'),$$

<sup>18</sup> Метод континуального интегрирования подробно изложен в работе [1], а также в [2, 3].

где  $\mathcal{J}(x)$ ,  $A(x, x') = A(x', x)$  — произвольные функции своих аргументов;  $\mathcal{D}\varphi$  — мера в пространстве функций  $\varphi(x)$ , формальное определение которой имеет вид

$$\mathcal{D}\varphi = \prod_x d\varphi(x). \quad (4.2.3)$$

Вычислим интеграл  $\mathcal{K}$ . Для этого отметим, что

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int \varphi A \varphi - i \int \varphi \mathcal{J} = \\ & = -\frac{1}{2} \int (\varphi + i\mathcal{J}A^{-1}) A (\varphi + iA^{-1}\mathcal{J}) - \frac{1}{2} \int \mathcal{J}A^{-1}\mathcal{J}. \end{aligned}$$

Поэтому, производя в континуальном интеграле замену переменных  $\varphi + i\mathcal{J}A^{-1} = \varphi'$ , соответствующую сдвигу функции  $\varphi(x)$ , получаем

$$\mathcal{K}(\mathcal{J}, A) = e^{-\frac{1}{2} \int \mathcal{J}A^{-1}\mathcal{J}} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} \int \varphi A \varphi}.$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x_i A_{ik} x_k} \prod_1^n dx_i = (\det A)^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}},$$

где  $A_{ik} = A_{ki}$  — несингулярная положительно определенная матрица, интеграл  $\int \mathcal{D}\varphi \exp\left(-\frac{1}{2} \int \varphi A \varphi\right)$  можно представить в виде

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} \int \varphi A \varphi} = N^{-1} (\det A)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.2.4)$$

где  $N$  — некоторый множитель (вообще говоря, бесконечный, но не зависящий от  $\mathcal{J}$  и  $A$ ; его можно положить равным единице, переопределив меру  $\mathcal{D}\varphi$ );  $\det A$  — функциональный определитель, элементами которого являются величины  $A(x, x')$  (мы предполагаем, что этот определитель — определитель Фредгольма — существует и не равен нулю). Таким образом,

$$\mathcal{K}(\mathcal{J}, A) \equiv \int \mathcal{D}\varphi e^{-i \int \varphi \mathcal{J} - \frac{1}{2} \int \varphi A \varphi} = \frac{1}{N \sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{2} \int \mathcal{J}A^{-1}\mathcal{J}}. \quad (4.2.5)$$

Это выражение можно рассматривать как определение гауссова континуального интеграла по бозе-полям.

Определим более общий континуальный интеграл по бозе-полям

$$\mathcal{F} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-i \int \varphi \mathcal{J} - \frac{1}{2} \int \varphi A \varphi} F(\varphi), \quad (4.2.6)$$

где функционал  $F(\varphi)$  допускает функциональное разложение в ряд Тейлора

$$F(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n F(x_1 \dots x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n).$$

Тогда  $\mathcal{F}$  можно выразить через функциональные производные от функционала  $\mathcal{K}(\mathcal{J}, A)$  по  $\mathcal{J}(x)$ :

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n F(x_1 \dots x_n) \frac{\delta^n \mathcal{K}(\mathcal{J}, A)}{\delta \mathcal{J}(x_1) \dots \delta \mathcal{J}(x_n)}. \quad (4.2.7)$$

Введем функциональную компоненту Фурье  $\mathcal{F}(\mathcal{J})$  функционала  $\mathcal{F}(\varphi)$ :

$$\mathcal{F}(\mathcal{J}) = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{F}(\varphi) e^{-i \int \varphi \mathcal{J}}.$$

Функционал  $\mathcal{K}(\mathcal{J}, A)$  можно рассматривать как компоненту Фурье функционала  $\exp\left(-\frac{1}{2} \int \varphi A \varphi\right)$ . Обратное фурье-преобразование имеет, очевидно, вид

$$\mathcal{F}(\varphi) = N' \int \mathcal{D}\mathcal{J} \mathcal{F}(\mathcal{J}) e^{i \int \varphi \mathcal{J}}$$

( $N'$  — некоторый множитель типа  $N$ ). Из этих формул следует, что

$$N' \int \mathcal{D}\varphi e^{-i \int \varphi (\mathcal{J} - \mathcal{J}')} = \delta(\mathcal{J} - \mathcal{J}'), \quad (4.2.8)$$

где  $\delta(\mathcal{J} - \mathcal{J}')$  — функциональная  $\delta$ -функция:

$$\int \mathcal{D}\mathcal{J}' \delta(\mathcal{J} - \mathcal{J}') \mathcal{F}(\mathcal{J}') = \mathcal{F}(\mathcal{J}),$$

которую при выборе меры в виде (4.2.3) можно интерпретировать так:

$$\delta(\mathcal{J} - \mathcal{J}') = \prod_x \delta(\mathcal{J}(x) - \mathcal{J}'(x)). \quad (4.2.9)$$

Перейдем к изучению континуальных интегралов по ферми-полям, которые в классическом случае представляют собой грассманы функции.<sup>19</sup> Рассмотрим предварительно грассманову алгебру с конечным числом образующих  $x_i, x_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Напомним, что  $\{x_i, x_j\} = \{x_i^*, x_j^*\} = \{x_i, x_j^*\} = 0$ . Отсюда следует, что произвольную функцию  $f(x, x^*)$  грассмановых переменных можно представить в виде

$$f(x, x^*) = \Sigma C(a_1 \dots a_n; b_1 \dots b_n) x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} x_1^{*b_1} \dots x_n^{*b_n},$$

где  $C(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$  —  $c$ -числовые функции величин  $a_i, b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), принимающих только два значения: 0, 1. Интеграл от функции грассмановых переменных определяется в соответствии с правилами (ср. с п. 1.7.4)

$$\begin{aligned} \int dx_i (f_1(x, x^*) + f_2(x, x^*)) &= \int dx_i f_1(x, x^*) + \int dx_i f_2(x, x^*), \\ \int dx_i f(x, x^*) g(x, x^*) &= \left( \int dx_i f(x, x^*) \right) g(x, x^*), \\ \int dx_i \cdot 1 &= 0, \quad \int dx_i x_j = \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

где  $g(x, x^*)$  — произвольная функция грассмановых переменных, не зависящая от  $x_i$  (предполагается, что  $\{dx_i, x_j\} = \{dx_i^*, x_j\} = 0$ ).

<sup>19</sup> Более подробно об этом см. в [4].

Из этих формул следует, что операция интегрирования по  $x_i$  эквивалентна операции дифференцирования по  $x_i$ , причем

$$\int e^{-x^*Ax} dx^*dx = \det A, \quad (4.2.11)$$

$$\int e^{-x^*Ax - i\eta^*x - ix^*\eta} dx^*dx = e^{-\eta^*A^{-1}\eta} \det A,$$

где  $x^*Ax = x_i^*A_{ij}x_j$  и  $\eta, \eta^*$  — также грассмановы переменные, антикоммутирующие с  $x$  и  $x^*$  (здесь  $dx \equiv dx_1 \dots dx_n$ ). Так как интегрирование по грассмановым переменным эквивалентно дифференцированию, то под знаком интеграла можно производить замену, соответствующую сдвигу грассмановых переменных  $x_i \rightarrow x_i' = x_i + \xi_i$ , где  $\xi_i$  — некоторые грассмановы переменные, антикоммутирующие с  $x_i$  (вследствие этого вторая из формул (4.2.11) следует из первой).

Формулы (4.2.11) можно обобщить на случай грассмановой алгебры с бесконечным числом образующих. Именно введем континуальный интеграл по грассмановым функциям  $\psi(x), \bar{\psi}(x)$ :

$$\mathcal{H}(\eta, \bar{\eta}; A) = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left(-\int \bar{\psi}A\psi - i\int \bar{\psi}\eta - i\int \bar{\eta}\psi\right). \quad (4.2.12)$$

Здесь

$$\int \bar{\psi}A\psi = \int d^4x d^4x' \bar{\psi}(x) A(x, x') \psi(x'), \quad \int \bar{\psi}\eta = \int d^4x \bar{\psi}(x) \eta(x),$$

и  $\eta(x), \bar{\eta}(x)$  — грассмановы функции независимой переменной  $x$ ;  $A(x, x')$  —  $c$ -числовая функция своих аргументов;  $\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}$  — мера в пространстве грассмановых функций:

$$\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} = \prod_x d\psi(x) d\bar{\psi}(x). \quad (4.2.13)$$

В соответствии с (4.2.11) будем считать, что этот интеграл определяется формулой

$$\mathcal{H}(\eta, \bar{\eta}; A) = N \det A e^{-\int \bar{\eta}A^{-1}\eta}, \quad (4.2.14)$$

где  $N$  — некоторый множитель, не зависящий от  $\eta, \bar{\eta}, A$ . Эта формула аналогична формуле (4.2.5) для континуальных интегралов по бозе-полям (подчеркнем, что в случае ферми-полей функциональный определитель  $\det A$  входит в числитель, в то время как в случае бозе-полей  $\sqrt{|\det A|}$  входит в знаменатель). Для негауссовых континуальных интегралов

$$\mathcal{F} = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} F(\psi, \bar{\psi}) \exp\left(-\int \bar{\psi}A\psi - i\int \bar{\psi}\eta - i\int \bar{\eta}\psi\right) \quad (4.2.15)$$

справедлива формула

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \int d^4x_1 \dots d^4x_n d^4y_1 \dots d^4y_n \times$$

$$\times F(x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_n) \frac{\delta^{2n} \mathcal{H}(\eta, \bar{\eta}; A)}{\delta\eta(y_n) \dots \delta\eta(y_1) \dots \delta\bar{\eta}(x_1)}, \quad (4.2.16)$$

где  $F(x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_n)$  — коэффициенты разложения функционала  $F(\psi, \bar{\psi})$  по степеням  $\psi, \bar{\psi}$ :

$$F(\psi, \bar{\psi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \int d^4x_1 \dots d^4x_n d^4y_1 \dots d^4y_n F(x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_n) \times \\ \times \psi(x_1) \dots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_1) \dots \bar{\psi}(y_n)$$

(функция  $F$  антисимметрична по отношению к перестановкам  $x_1 \dots x_n$  и  $y_1 \dots y_n$ ).

Определим функциональную компоненту Фурье  $\mathcal{F}(\eta, \bar{\eta})$  функционала  $\mathcal{F}(\psi, \bar{\psi})$  формулой

$$\mathcal{F}(\eta, \bar{\eta}) = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{F}(\psi, \bar{\psi}) e^{-i \int \bar{\psi} \eta - i \int \bar{\eta} \psi}.$$

Тогда левую сторону равенства (4.2.12) можно рассматривать как компоненту Фурье функционала  $\exp(-\int \bar{\psi} A \psi)$ . Обратное фурье-преобразование имеет, очевидно, вид

$$\mathcal{F}(\psi, \bar{\psi}) = N' \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{F}(\eta, \bar{\eta}) e^{i \int \bar{\psi} \eta + i \int \bar{\eta} \psi}.$$

Из этих формул следует, что

$$N' \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-i \int \bar{\psi}(\eta - \eta') - i \int (\bar{\eta} - \bar{\eta}') \psi} = \delta(\eta - \eta') \delta(\bar{\eta} - \bar{\eta}'), \quad (4.2.17)$$

где  $\delta(\eta - \eta')$  — функциональная  $\delta$ -функция:

$$\int \mathcal{D}\eta' \mathcal{D}\bar{\eta}' \delta(\eta - \eta') \delta(\bar{\eta} - \bar{\eta}') \mathcal{K}(\eta', \bar{\eta}') = \mathcal{K}(\eta, \bar{\eta}),$$

которую при выборе меры в виде (4.2.13) можно интерпретировать как

$$\delta(\eta - \eta') = \prod_x \delta(\eta(x) - \eta'(x)). \quad (4.2.18)$$

**4.2.2. Представление  $S$ -матрицы в виде континуального интеграла.** Выше мы получили замкнутое выражение для матрицы рассеяния, в которое входили функциональные производные по полям. Если считать, что имеются фермионные поля  $\psi, \bar{\psi}$  и бозонные поля  $\varphi_\alpha$  (в частности, поле  $\varphi_\alpha$  может быть электромагнитным), то согласно (3.2.16) матрица рассеяния будет определяться формулой

$$S = : e^{\Delta + \Sigma} S(\chi) :, \quad (4.2.19)$$

где  $S(\chi) \equiv S(\varphi, \psi, \bar{\psi})$  — функционал полей  $\chi \equiv \varphi, \psi, \bar{\psi}$ , определяемый формулой

$$S(\chi) = \exp i W_{\text{int}}(\chi), \quad W_{\text{int}}(\chi) = - \int d^4x w_{\text{int}}(x) \quad (4.2.20)$$

( $w_{\text{int}}(x)$  — гамильтониан взаимодействия; знак  $\sim$  служит для обо-

значения полей в представлении взаимодействия), и

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \Delta^c(x-x') \frac{\delta}{\delta \varphi(x')}, \\ \Sigma &= i \int d^4x d^4x' \frac{\delta}{\delta \psi(x)} S^c(x-x') \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x')}.\end{aligned}\quad (4.2.21)$$

Здесь  $\Delta^c(x-x')$  и  $S^c(x-x')$  — связи между операторами поля:

$$\begin{aligned}i\Delta_{\alpha\beta}^c(x-x') &= \underbrace{\varphi_\alpha(x) \varphi_\beta(x')}, \\ -iS_{\alpha\beta}^c(x-x') &= \underbrace{\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')}.\end{aligned}\quad (4.2.22)$$

В частном случае электромагнитного взаимодействия

$$\omega_{\text{int}}(x) = -\underline{j}^\mu(x) \underline{A}_\mu(x), \quad \underline{j}^\mu(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x).$$

Преобразуем выражение (4.2.19) так, чтобы в него вместо функционального дифференцирования входило континуальное интегрирование.

Используя определение континуальной  $\delta$ -функции (4.2.8), (4.2.17), функционал  $S(\underline{\chi})$  можно представить в виде

$$S(\underline{\chi}) = \int \mathcal{D}\chi S(\chi) \delta(\chi - \underline{\chi}) = N' \int \mathcal{D}\chi S(\chi) \int \mathcal{D}\xi e^{i \int \xi(\underline{\chi} - \chi)},$$

где  $\mathcal{D}\chi = \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}$ ;  $\mathcal{D}\xi = \mathcal{D}\mathcal{J} \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta}$ ;  $\xi = (\mathcal{J}, \eta, \bar{\eta})$ ;

$$\begin{aligned}\int \xi(\underline{\chi} - \chi) &= \int d^4x \xi(x) (\underline{\chi}(x) - \chi(x)) = \\ &= \int d^4x (\mathcal{J}(x) (\varphi(x) - \underline{\varphi}(x)) + (\bar{\psi}(x) - \underline{\bar{\psi}}(x)) \eta(x) + \bar{\eta}(x) (\psi(x) - \underline{\psi}(x))).\end{aligned}$$

Теперь в (4.2.19) легко выполнить функциональное дифференцирование экспоненты, в которую поля входят линейно:

$$S = : \int \mathcal{D}\chi S(\chi) Q(\underline{\chi}; \underline{\chi}) : = \int \mathcal{D}\chi S(\chi) : Q(\underline{\chi}; \underline{\chi}) :, \quad (4.2.23)$$

где

$$Q(\underline{\chi}; \underline{\chi}) = N' \int \mathcal{D}\xi e^{i \int \xi(\underline{\chi} - \chi) - \frac{i}{2} \int \mathcal{J} \Delta^c \mathcal{J} + i \int \bar{\eta} S^c \eta}.$$

Входящий сюда гауссов интеграл легко вычислить с помощью формул (4.2.5), (4.2.14):

$$Q(\underline{\chi}; \underline{\chi}) = N \exp \left\{ \frac{i}{2} \int (\underline{\varphi} - \varphi) \Delta^{c-1} (\underline{\varphi} - \varphi) - i \int (\underline{\bar{\psi}} - \bar{\psi}) S^{c-1} (\underline{\psi} - \psi) \right\}, \quad (4.2.24)$$

где  $N$  — некоторая новая константа. Поэтому матрицу рассеяния  $S$  можно представить в виде

$$S = \int \mathcal{D}\chi e^{iW(\chi)} : A(\underline{\chi}) \exp i \int (-\underline{\varphi} \Delta^{c-1} \varphi + \underline{\bar{\psi}} S^{c-1} \psi + \bar{\psi} S^{c-1} \underline{\psi}) :, \quad (4.2.25)$$



где

$$A(\underline{\chi}) = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \underline{\varphi} \Delta^{c-1} \underline{\varphi} - i \int \bar{\underline{\psi}} S^{c-1} \underline{\psi} \right\} N$$

и

$$W(\underline{\chi}) = W_0(\underline{\chi}) + W_{\text{int}}(\underline{\chi}), \quad W_0(\underline{\chi}) = \frac{1}{2} \int \underline{\varphi} \Delta^{c-1} \underline{\varphi} - \int \bar{\underline{\psi}} S^{c-1} \underline{\psi}.$$

При выводе формул (4.2.25) мы не предполагали, что поля  $\underline{\varphi}$ ,  $\underline{\psi}$ ,  $\bar{\underline{\psi}}$  являются решениями свободных волновых уравнений. Это связано с тем, что в формулу (4.2.19) входит функциональное дифференцирование по полям. Однако после выполнения этого дифференцирования необходимо считать поля свободными, т. е. удовлетворяющими уравнениям

$$\Delta^{c-1} \underline{\varphi}(x) = 0, \quad S^{c-1} \underline{\psi}(x) = 0. \quad (4.2.26)$$

По этой причине  $A = N$ . Отметим, однако, что в выражениях  $\underline{\varphi} \Delta^{c-1} \underline{\varphi}$ ,  $\bar{\underline{\psi}} S^{c-1} \underline{\psi}$ ,  $\bar{\underline{\psi}} S^{c-1} \underline{\psi}$  мы не можем считать поля  $\underline{\varphi}$ ,  $\underline{\psi}$ ,  $\bar{\underline{\psi}}$  сразу свободными. Вначале нужно вычислить континуальный интеграл по полям  $\underline{\chi}$ , соответствующий конкретному  $N$ -произведению. В результате получим множители типа  $\Delta^c(x' - x'')$ ,  $S^c(x' - x'')$ , связанные с наличием в величинах  $\underline{\varphi} \Delta^{c-1} \underline{\varphi}$ ,  $\bar{\underline{\psi}} S^{c-1} \underline{\psi}$  полей  $\underline{\chi}(x')$ . После интегрирования по  $x'$  возникнут выражения типа  $\int d^4x' \Delta^{c-1}(x - x') \Delta^c(x' - x'') = \delta(x - x'')$ ; после сокращения пропаторов  $\Delta^c$  и  $\Delta^{c-1}$  поля  $\underline{\chi}(x)$  можно считать свободными.

Вводя связи между операторами  $\underline{\chi}_\alpha$ ,  $\underline{\chi}_\beta$ ,

$$\underline{\underline{\chi}}_\alpha \underline{\underline{\chi}}_\beta = \underline{\underline{\Delta}}_{\alpha\beta}, \quad (4.2.27)$$

функционал  $W_0(\underline{\chi})$  можно переписать в виде

$$W_0(\underline{\chi}) = \frac{i}{2} \int \underline{\chi} \bar{\underline{\Delta}}^{-1} \underline{\chi}. \quad (4.2.28)$$

Мы учли при этом, что

$$\underline{\underline{\varphi}} \underline{\underline{\varphi}} = i \Delta^c, \quad \underline{\underline{\psi}} \underline{\underline{\bar{\psi}}} = -i S^c, \quad \underline{\underline{\bar{\psi}}} \underline{\underline{\psi}} = i \bar{S}^c$$

( $\sim$  — знак транспонирования). Учитывая далее, что

$$i \int (-\underline{\varphi} \Delta^{c-1} \underline{\varphi} + \bar{\underline{\psi}} S^{c-1} \underline{\psi} + \bar{\underline{\psi}} S^{c-1} \underline{\psi}) = \int \underline{\chi} \bar{\underline{\Delta}}^{-1} \underline{\chi},$$

представим  $S$ -матрицу в виде

$$S = N \int \mathcal{D}\underline{\chi} e^{iW(\underline{\chi})} : e^{\int \underline{\chi} \bar{\underline{\Delta}}^{-1} \underline{\chi}} :, \quad (4.2.29)$$

где  $W(\underline{\chi}) = W_0(\underline{\chi}) + W_{\text{int}}(\underline{\chi})$ .

Так как в случае спинорного поля (см. (2.5.42))

$$S^{c^{-1}} = - (i\gamma^\mu \partial_\mu - m),$$

а в случае электромагнитного поля (см. (2.4.55))

$$(\Delta^{c^{-1}})_{\mu\nu} \equiv (\mathcal{D}^{c^{-1}})_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \partial^\rho \partial_\rho - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial_\nu,$$

то согласно (4.2.28), (4.2.27) функционал  $W_0(\chi)$  представляет, очевидно, действие свободных полей (это утверждение справедливо и для других полей, см. п. 4.2.4). Поэтому функционал  $W(\chi)$  представляет полное действие. Полагая в формуле (4.2.29)  $\chi = 0$ , можем найти вакуумное среднее  $S$ -матрицы:

$$S_{\text{vac}} = N \int \mathcal{D}\chi e^{iW(\chi)}.$$

Поэтому

$$\frac{S}{S_{\text{vac}}} = \left( \int \mathcal{D}\chi e^{iW(\chi)} \right)^{-1} \int \mathcal{D}\chi e^{iW(\chi)} : e^{\int \chi \bar{\Delta}^{-1} \chi} :. \quad (4.2.30)$$

Отметим, что  $|S_{\text{vac}}| = 1$ .

Формулу (4.2.30) (а не формулу (4.2.19)) можно считать исходной при построении теории  $S$ -матрицы. При этом, как мы видим,  $S$ -матрица определяется классическим действием  $W$ , являющимся функционалом  $c$ -числовых бозе- и ферми-полей, которые рассматриваются как грасмановы функции.

**4.2.3. Представление функций Грина в виде континуального интеграла.** Функции Грина квантованных полей  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  согласно (3.5.15) определяются формулой

$$\begin{aligned} & G(x_1 \dots x_n; x'_1 \dots x'_n; y_1 \dots y_m) = \\ & = \frac{1}{S_{\text{vac}}} \langle T \{ \underline{\psi}(x_1) \dots \underline{\psi}(x_n) \bar{\underline{\psi}}(x'_1) \dots \bar{\underline{\psi}}(x'_n) \underline{\varphi}(y_1) \dots \underline{\varphi}(y_m) S \} \rangle_0, \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

где  $\langle \dots \rangle_0 \equiv \langle \Phi_0, \dots, \Phi_0 \rangle$ ,  $S_{\text{vac}} \equiv \langle S \rangle_0$ . Легко видеть, что функционал

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{J}, \eta, \bar{\eta}) = \frac{1}{S_{\text{vac}}} \langle T \{ \exp i \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{int}}(x) + \mathcal{J}(x) \underline{\varphi}(x) + \bar{\eta}(x) \underline{\psi}(x) + \\ + \bar{\underline{\psi}}(x) \eta(x)) \} \rangle_0 \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

представляет собой производящий функционал функций Грина, т. е.

$$\begin{aligned} & G(x_1 \dots x_n; x'_1 \dots x'_n; y_1 \dots y_m) = \\ & = (-i)^{2n+m} \frac{\delta^{2n+m} Z(\mathcal{J}, \eta, \bar{\eta})}{\delta \mathcal{J}(y_1) \dots \delta \mathcal{J}(y_m) \delta \bar{\eta}(x_1) \dots \delta \bar{\eta}(x_n) \delta \eta(x'_1) \dots \delta \eta(x'_n)} \Big|_{\mathcal{J}=\eta=\bar{\eta}=0}. \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

Здесь  $\eta(x)$ ,  $\bar{\eta}(x)$  — элементы грасмановой алгебры, антикоммутирующие с полями  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  ( $\delta/\delta\eta$ ,  $\delta/\delta\bar{\eta}$  представляют собой левые функциональные производные по элементам грасмановой алгебры  $\eta$ ,  $\bar{\eta}$ ).

Легко показать, что если ввести функции

$$G_c(x_1 \dots x_n; x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_m) = (-i)^{2n+m} \frac{\delta^{2n+m} \ln Z(\mathcal{J}, \eta, \bar{\eta})}{\delta \mathcal{J}(y_1) \dots \delta \mathcal{J}(y_m) \delta \bar{\eta}(x_1) \dots \delta \bar{\eta}(x_n) \delta \eta(x'_1) \dots \delta \eta(x'_n)} \Big|_{\mathcal{J}=\eta=\bar{\eta}=0} \quad (4.2.34)$$

то в диаграммном представлении им соответствуют связанные диаграммы Фейнмана, т. е. диаграммы, которые не распадаются на несвязанные блоки. Поэтому эти функции можно назвать связными функциями Грина.

$T$ -произведение, входящее в формулу (4.2.31), можно, очевидно, представить в виде

$$T \{S(\underline{\chi}) e^{i \int \underline{\xi} \underline{\chi}}\} = : e^{\Delta + \Sigma} S(\underline{\chi}) e^{i \int \underline{\xi} \underline{\chi}} :,$$

где

$$\int \underline{\xi} \underline{\chi} = \int d^4x (\mathcal{J}(x) \varphi(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x)).$$

Легко видеть, что справедливо соотношение

$$: e^{\Delta + \Sigma} S(\underline{\chi}) e^{i \int \underline{\xi} \underline{\chi}} : = \int \mathcal{D}\chi S(\underline{\chi}) e^{i \int \underline{\xi} \underline{\chi}} : Q(\underline{\chi}; \underline{\chi}) :, \quad (4.2.35)$$

где функционал  $Q(\underline{\chi}; \underline{\chi})$  определяется формулой (4.2.24) (для этого достаточно в формуле (4.2.23) заменить  $S(\underline{\chi})$  на  $S(\underline{\chi}) \exp i \int \underline{\xi} \underline{\chi}$ ).

Поэтому

$$\langle T \{S(\underline{\chi}) e^{i \int \underline{\xi} \underline{\chi}}\} \rangle_0 = \int \mathcal{D}\chi S(\underline{\chi}) e^{i \int \underline{\xi} \underline{\chi}} Q(\underline{\chi}), \quad (4.2.36)$$

где

$$Q(\underline{\chi}) \equiv Q(\underline{\chi}; 0) = N \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \varphi \Delta^{c-1} \varphi - i \int \bar{\psi} S^{c-1} \psi \right\}. \quad (4.2.37)$$

Мы учли, что для получения вакуумного среднего от выражения (4.2.35) необходимо в (4.2.35) положить  $\underline{\chi} = 0$ . Учитывая формулу (4.2.28), находим

$$\langle T \{S(\underline{\chi}) e^{i \int \underline{\xi} \underline{\chi}}\} \rangle_0 = N \int \mathcal{D}\chi e^{iW(\underline{\chi}) + i \int \underline{\xi} \underline{\chi}}.$$

Так как согласно этой формуле

$$S_{\text{vac}} = N \int \mathcal{D}\chi e^{iW(\underline{\chi})},$$

то производящий функционал функций Грина  $Z(\underline{\xi}) \equiv Z(\mathcal{J}, \eta, \bar{\eta})$  равен:

$$Z(\underline{\xi}) = \left( \int \mathcal{D}\chi e^{iW(\underline{\chi})} \right)^{-1} \int \mathcal{D}\chi e^{iW(\underline{\chi}) + i \int \underline{\xi} \underline{\chi}}. \quad (4.2.38)$$

Формулы (4.2.30), (4.2.38) справедливы и для электромагнитного взаимодействия. Если использовать лоренцеву калибровку, то под дей-

ствием  $W(\chi)$  следует понимать классическое действие (1.9.39) взаимодействующих электромагнитного и электронно-позитронного полей:

$$W(A, \psi, \bar{\psi}) = W_0(A, \psi, \bar{\psi}) + \int d^4x j^\mu(x) A_\mu(x), \quad (4.2.38')$$

$$W_0(A, \psi, \bar{\psi}) = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - \frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \frac{1}{2} \psi (i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu + m) \bar{\psi} \right\},$$

а величину  $\int d^4x \mathcal{J}(x) \varphi(x)$  в производящем функционале необходимо заменить на  $\int d^4x \mathcal{J}^\mu(x) A_\mu(x)$ .

**4.2.4. Представление  $S$ -матрицы и функций Грина неабелевых калибровочных полей в виде континуальных интегралов.** Возвратимся к формуле (4.2.1) для  $S$ -матрицы неабелевых калибровочных полей и ферми-полей. В п. 4.2.2 показано, что матрицу рассеяния можно представить в виде континуального интеграла. Именно, если совокупность динамически независимых компонент поля обозначить через  $\chi_\alpha(x)$ , то матрицу рассеяния можно представить в виде (4.2.29)

$$S = N \int \mathcal{D}\chi e^{i(W_0(\chi) + W_{\text{int}}(\chi))} : e^{\int \tilde{\chi} \bar{\Delta}^{-1} \chi} :,$$

где  $W_{\text{int}}(\chi)$  — интеграл действия, связанный с лагранжианом взаимодействия между полями, а  $W_0(\chi)$  определяется формулой

$$W_0(\chi) = \frac{i}{2} \int \chi \bar{\Delta}^{-1} \chi.$$

Здесь  $\bar{\Delta}_{\alpha\beta}$  — связи между полями  $\chi_\alpha$  и  $\chi_\beta$ :

$$\bar{\Delta}_{\alpha\beta}(x - x') = \underbrace{\tilde{\chi}_\alpha(x) \chi_\beta(x')}.$$

В случае электромагнитного или фермионного поля функционал  $W_0(\chi)$  представляет собой, как мы видели, свободное действие этих полей. Покажем, что и для динамически независимых неабелевых калибровочных полей  $\mathcal{E}_k^a$ ,  $A_k^a$  и фермионных полей  $q$ ,  $\bar{q}$  функционал  $W_0(\chi)$  представляет собой свободное действие полей  $\chi = \mathcal{E}, A, q, \bar{q}$ . Согласно (4.2.28) величина  $W_0(\chi)$  представляет собой сумму функционалов калибровочных и фермионных полей (так как пропэгаторы  $\bar{\Delta}_{\alpha\beta}$  не связывают между собой калибровочные и фермионные поля):

$$W_0(\chi) = W_0(\mathcal{E}, A) + W_0(q, \bar{q}). \quad (4.2.39)$$

Известно, что функционал  $W_0(q, \bar{q})$  характеризует свободное действие фермионных полей (см. п. 4.2.2). Чтобы доказать, что  $W_0(\mathcal{E}, A)$  характеризует свободное действие калибровочных полей, т. е. что (см. (4.1.4), (4.1.5))

$$W_0(\mathcal{E}, A) = \int d^4x \mathcal{L}_G^0(x), \quad \mathcal{L}_G^0(x) = -\omega_G^0 + \mathcal{E}^{ak} \partial_0 A_k^a, \\ \omega_G^0 = \frac{1}{4} \overset{\circ}{F}_{kl}^a \overset{\circ}{F}^{akl} - \frac{1}{2} \mathcal{E}_k^a \mathcal{E}^{ak}, \quad (4.2.40)$$

обратимся к формулам (4.1.23), определяющим пропэгаторы динамически независимых компонент калибровочного поля в кулоновской калибровке. В силу уравнений (4.1.23) получаем

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{D}_{ij}^{11ab}(x-x') &= -\partial_0 \mathcal{D}_{ij}^{21ab}(x-x') - i\delta(t-t') [\mathcal{E}_i^a(x), A_j^b(x')], \\ \Delta \mathcal{D}_{ij}^{12ab}(x-x') &= -\partial_0 \mathcal{D}_{ij}^{22ab}(x-x') - i\delta(t-t') [\mathcal{E}_i^a(x), \mathcal{E}_j^b(x')], \\ \mathcal{D}_{ij}^{22ab}(x-x') &= -\partial_0 \mathcal{D}_{ij}^{12ab}(x-x') - i\delta(t-t') [A_i^a(x), \mathcal{E}_j^b(x')], \\ \mathcal{D}_{ij}^{21ab}(x-x') &= -\partial_0 \mathcal{D}_{ij}^{11ab}(x-x') - i\delta(t-t') [A_i^a(x), A_j^b(x')],\end{aligned}$$

где  $\Delta \equiv \partial^k \partial_k$ .

Мы учли при этом, что  $\partial_0 \theta(t-t') = \delta(t-t')$ . Используя канонические перестановочные соотношения (4.1.18), отсюда получаем

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{D}_{ij}^{11ab}(x-x') + \partial_0 \mathcal{D}_{ij}^{21ab}(x-x') &= -\delta_{ab} (g_{ij} \delta(x-x'))^{(t)}, \\ \Delta \mathcal{D}_{ij}^{12ab}(x-x') + \partial_0 \mathcal{D}_{ij}^{22ab}(x-x') &= 0, \\ \mathcal{D}_{ij}^{22ab}(x-x') + \partial_0 \mathcal{D}_{ij}^{12ab}(x-x') &= \delta_{ab} (g_{ij} \delta(x-x'))^{(t)}, \\ \mathcal{D}_{ij}^{21ab}(x-x') + \partial_0 \mathcal{D}_{ij}^{11ab}(x-x') &= 0,\end{aligned}$$

где

$$(g_{ij} \delta(x-x'))^{(t)} = \delta(t-t') (g_{ij} \delta(x-x'))^{(t)}.$$

Эти уравнения можно представить в матричной форме

$$K \mathcal{D}_{ij}^{ab}(x) = -\delta_{ab} g_{ij}(x),$$

где матрицы  $K$  и  $g_{ij}$ , действующие в пространстве индексов  $m, n$  ( $m, n = 1, 2$ ) пропэгаторов  $\mathcal{D}(x)$ , определяются формулами

$$K = \begin{pmatrix} \Delta & \partial_0 \\ -\partial_0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_{ij}^{(t)}(x), \quad g_{ij}^{(t)}(x) = (g_{ij} \delta(x-x'))^{(t)}.$$

Так как  $g_{ij}(x)^{-1} = g_{ij}(x)$ , то

$$\mathcal{D}_{ij}^{ab-1} = -g_{ij} \delta_{ab} K,$$

следовательно,

$$\int d^4 x \chi_a^i(x) \mathcal{D}_{ij}^{ab-1} \chi_b^j(x) = - \int d^4 x \chi_{ai}(x) K \chi_a^i(x),$$

где

$$\chi_a^i(x) = \begin{pmatrix} A_a^i(x) \\ \mathcal{E}_a^i(x) \end{pmatrix}; \quad \chi_a^i(x) = \begin{pmatrix} A_a^i(x) \\ \mathcal{E}_a^i(x) \end{pmatrix}.$$

Интеграл такого вида при  $\chi' = \chi$  определяет свободное действие калибровочных полей, а в общем случае такой интеграл входит в определение (4.2.29)  $S$ -матрицы. При выводе последней формулы мы учли

поперечность полей  $A_i^a$  и  $\mathcal{E}_i^a$ . Именно из условия поперечности следует, что  $\chi_a^i(x) g_{ij} = \chi_{aj}(x)$ . Используя явное выражение для  $K$  и производя интегрирование по частям, находим

$$\begin{aligned} & \int d^4x \chi_a^i(x) \mathcal{D}_{ij}^{ab} \chi_b^j(x) = \\ & = - \int d^4x (\partial_k A_j^b \partial^k A'^{bj} - \partial_0 A_j^b \mathcal{E}^{'bj} + \partial_0 \mathcal{E}_i^b A'^{bi} - \mathcal{E}^b \mathcal{E}_i^{'b}). \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

Полагая в этой формуле  $\chi = \chi'$  и используя при интегрировании по частям поперечность полей  $\mathcal{E}$ ,  $A$ , получаем

$$\int d^4x \chi_a^i(x) \mathcal{D}_{ij}^{ab-1} \chi_b^j(x) = - \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \bar{F}_{ik}^a \bar{F}^{aik} + 2\partial_0 \mathcal{E}_i^b A'^{bi} - \mathcal{E}_i^b \mathcal{E}^{'bi} \right\}.$$

Поэтому согласно (4.2.27)

$$\begin{aligned} W_0(\mathcal{E}, A) & \equiv \frac{i}{2} \int d^4x \chi_a^i(x) \bar{\mathcal{D}}_{ij}^{ab-1} \chi_b^j(x) = \\ & = - \frac{1}{2} \int d^4x \left( \frac{1}{2} \bar{F}_{ik}^a \bar{F}^{aik} + 2A^{bj} \partial_0 \mathcal{E}_j^b - \mathcal{E}_i^b \mathcal{E}^{'bi} \right). \end{aligned}$$

Из этой формулы и (4.2.40) вытекает, что  $W_0(\mathcal{E}, A)$  представляет собой действие свободных калибровочных полей в кулоновской калибровке. Таким образом,  $S$ -матрицу можно представить в виде (4.2.29), где  $W(\chi) = \int d^4x \mathcal{L}(x)$  — полное действие, рассматриваемое как функционал динамически независимых компонент калибровочных и фермионных полей. Лагранжиан  $\mathcal{L}(x)$  классических полей  $\chi \equiv (A, \mathcal{E}, q, \bar{q})$  определяется формулой (см. (4.1.4), (4.1.5))

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) & = \mathcal{E}^{ak} \partial_0 A_k^a + \frac{i}{2} \bar{q} \gamma^0 \partial_0 q - \frac{i}{2} \partial_0 \bar{q} \gamma^0 q - w, \\ w(x) & = \frac{1}{4} \bar{F}_{kl}^a \bar{F}^{akl} - \frac{1}{2} \mathcal{E}_k^a \mathcal{E}^{ak} - \frac{1}{2} \bar{q} (i\gamma^k \partial_k - m) q + \\ & + \frac{1}{2} \bar{q} (i\gamma^k \overleftarrow{\partial}_k + m) q - j_k^a A^{ak} - \frac{1}{2} \partial_k \varphi^a \partial_k \varphi^a + \quad (4.2.42) \\ & + \frac{g}{2} \bar{F}_{kl}^a (A^k \times A^l)^a + \frac{g^2}{4} (A_k \times A_l)^a (A^k \times A^l)^a, \quad \bar{F}_{kl}^a \equiv \partial_k A_l^a - \partial_l A_k^a. \end{aligned}$$

Поля  $\varphi^a$  должны исключаться с помощью уравнения (4.1.15). Интеграл  $\int \chi \bar{\Delta}^{-1} \chi$ , входящий в представление  $S$ -матрицы в виде континуального интеграла, определяется формулой (4.2.41).

В заключение приведем производящий функционал функций Грина полей  $A$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $q$ ,  $\bar{q}$  в кулоновской калибровке, который согласно (4.2.38) определяется формулой

$$Z(\xi) = N \int \mathcal{D}\chi e^{iW(\chi) + i \int \xi \chi},$$

где

$$\int \xi \chi \equiv \int d^4x (\bar{\eta}(x) q(x) + \bar{q}(x) \eta(x) + \mathcal{F}_k^A(x) A^k(x) + \mathcal{F}_k^{\mathcal{G}}(x) \mathcal{G}^k(x)).$$

Здесь  $\eta$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $\mathcal{F}_k^A$ ,  $\mathcal{F}_k^{\mathcal{G}}$  — внешние источники, варьирование по которым функционала  $Z$  приводит к функциям Грина (4.2.33).

#### § 4.3. ПЕРЕХОД ОТ КУЛОНОВСКОЙ КАЛИБРОВКИ К ЛОРЕНЦЕВОЙ КАЛИБРОВКЕ

**4.3.1. Калибровочная инвариантность усеченной  $S$ -матрицы.**  $S$ -матрица в кулоновской калибровке не является явно релятивистски-инвариантной, так как гамильтониан взаимодействия и связи релятивистски не инвариантны. Выражение для  $S$ -матрицы в виде континуального интеграла используем для того, чтобы преобразовать ее к явно релятивистски-инвариантной форме.

С этой целью перепишем формулу (4.2.29) в виде

$$S = N \int \mathcal{D}\chi' e^{iW(\chi', \varphi_0)} \delta(\partial^k A_k^a) : \exp \int \chi \bar{\Delta}^{-1} \chi' :, \quad (4.3.1)$$

где  $\chi'(x)$  объединяет поля  $\chi(x) \equiv \mathcal{G}_i^a(x)$ ,  $A_k^{a(i)}(x)$ ,  $q(x)$ ,  $\bar{q}(x)$  и продольное поле  $A_k^{a(l)}(x)$ . В действии  $W(\chi', \varphi_0)$  поле  $\varphi_0$  исключается с помощью уравнения (4.1.15)

$$R\varphi_0 = G, \quad R = \partial_k \partial^k \dots + g(A_k \times \partial^k \dots), \quad G = -j_0 + g(\mathcal{G}_k \times A^k). \quad (4.3.2)$$

Чтобы не находить явного решения этих уравнений в виде рядов по степеням  $g$ , представим экспоненту  $\exp iW$  так:

$$e^{iW(\chi', \varphi_0)} = \int \mathcal{D}\varphi e^{iW(\chi', \varphi)} \delta(\varphi - \varphi_0) = |\det R| \int \mathcal{D}\varphi e^{iW(\chi', \varphi)} \delta(R\varphi - R\varphi_0)$$

( $\det R$  — функциональный определитель оператора  $R$ ), или, учитывая (4.3.2), в виде

$$e^{iW(\chi', \varphi_0)} = |\det R| \int \mathcal{D}\varphi e^{iW(\chi', \varphi)} \delta(R\varphi - G).$$

Интегрирование по  $\varphi$  эквивалентно интегрированию по  $F_{0k}^{(l)}$  (напомним, что  $F_{k0}^{a(l)} = \partial_k \varphi^a$ ). Воспользовавшись формулой

$$\delta(R\varphi - G) = \int \mathcal{D}A_0 e^{-i \int (R\varphi - G)^a A_0^a},$$

перепишем (4.3.1) в виде

$$S = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}F_{0k} \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} |\det R| \delta(\partial^k A_k^a) \times \\ \times e^{iW(\chi', \varphi) - i \int A_0^a (R\varphi - G)^a} : \exp \int \chi \bar{\Delta}^{-1} \chi' :.$$

Замечая далее, что

$$\exp \frac{1}{i} \int d^4x \left( \frac{1}{4} \hat{F}_{kl}^a \hat{F}^{akl} + \frac{g}{2} \hat{F}_{kl}^a (A^k \times A^l)^a + \frac{g^2}{4} (A_k \times A_l)^a (A^k \times A^l)^a \right) \approx \\ \approx \int \mathcal{D}F_{ik} \exp i \int d^4x \left( \frac{1}{4} F_{ik}^a F^{aik} - \frac{1}{2} F_{ik}^a (\partial^i A^{ak} - \partial^k A^{ai}) + g (A^i \times A^k)^a \right),$$

где  $\overset{\circ}{F}_{ik}^a = \partial_i A_k^a - \partial_k A_i^a$ , находим

$$S = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}F_{\mu\nu} \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} |\det R| \delta(\partial^k A_k^a) \times \\ \times \exp iW(A, F, q, \bar{q}) : \exp \int \chi \bar{\Delta}^{-1} \chi' :, \quad (4.3.3)$$

где  $W = \int d^4x \mathcal{L}(x)$  — действие калибровочных и фермионных полей, построенное на основе релятивистски- и калибровочно-инвариантного лагранжиана (4.1.1):

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2} F^{a\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g(A_\mu \times A_\nu)^a) + \\ + \frac{1}{2} \bar{q} (i\gamma^\mu D_\mu - m) q + \frac{1}{2} q (i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu + m) \bar{q} \quad (4.3.4)$$

(ср. переход от лагранжиана (4.1.1) к лагранжиану (4.1.4) в п. 4.1.1). Подчеркнем, что в отличие от (4.2.29), где интегрирование выполняется по динамически независимым компонентам поля, в формуле (4.3.3) интегрирование ведется по всем компонентам полей  $A_\mu$  и  $F_{\mu\nu}$ .

Замечая, что  $\det R$  зависит только от поля  $A_\mu^a$ , перепишем формулу (4.3.3) в виде

$$S = N \int \mathcal{D}A_\mu \delta(\partial^k A_k^a) |\det R| : S(A) :, \quad (4.3.5)$$

где

$$S(A) = \int \mathcal{D}F_{\mu\nu} \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} e^{iW} \exp \int \chi \bar{\Delta}^{-1} \chi'. \quad (4.3.6)$$

Величина  $S(A)$  является функционалом полей  $A_\mu^a$ . Структура функционала  $S(A)$  аналогична структуре  $S$ -матрицы в теории обычных (некалибровочных) полей. В этом случае функционал  $S(A)$ , будучи проинтегрирован по полям  $A_\mu^a(x)$ , давал бы  $S$ -матрицу. В случае же калибровочных полей, как мы видим, для получения  $S$ -матрицы необходимо воспользоваться формулой (4.3.5), в которой под знак интеграла по  $A_\mu^a(x)$  кроме  $S(A)$  входит ещё множитель  $\delta(\partial^k A_k^a)$ , связанный с фиксацией кулоновской калибровки, и множитель  $|\det R|$ , который появляется в результате исключения продольного поля  $\varphi$  с помощью уравнения (4.1.15). При этом в неабелевых теориях (но не в абелевой квантовой электродинамике, в которой можно положить  $\det R = 1$ ), коэффициенты при пространственных производных поля  $\varphi$  в уравнении (4.1.15) существенно зависят от самого поля  $A_\mu^a$ , следовательно, от этого поля зависит и  $\det R$ . Далее  $S(A)$  будем называть усеченной матрицей рассеяния.

Покажем, что усеченная матрица рассеяния  $S(A)$  является релятивистски- и калибровочно-инвариантной величиной. Для этого отметим, что поля  $\mathcal{E}_k$  и  $A_k$  (но не  $\mathcal{E}_k, A_k$ ) связаны соотношением

$$\partial_0 \mathcal{E}_k(x) + \mathcal{E}_k^a(x) = 0$$



(мы не используем уравнение  $\partial_0 \bar{\mathcal{G}}_k^a(x) + \Delta \bar{A}_k^a(x) = 0$ , которое привело бы к равенству  $\bar{\chi} \bar{\Delta}^{-1} = 0$ ; как мы уже говорили, уравнением  $\partial_0 \bar{\mathcal{G}}_k^a(x) + \Delta \bar{A}_k^a(x) = 0$  можно воспользоваться только после вычисления континуального интеграла, см. п. 4.2.2). Поэтому согласно (4.2.41)

$$\int \bar{\chi} \bar{\Delta}^{-1} \chi = -i \int d^4x (A^{bI} \partial^\mu \partial_\mu \bar{A}_j^b - \bar{q} S^{c-1} q - \bar{q} S^{c-1} \bar{q}),$$

$$S^{c-1} = -(i\gamma^\mu \partial_\mu - m). \quad (4.3.7)$$

При бесконечно малых калибровочных преобразованиях поля  $A$  и  $q$  преобразуются согласно формулам

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^{a(\omega)} = A_\mu^a + \partial_\mu \omega^a + g (A_\mu \times \omega)^a \equiv A_\mu^a + \mathcal{D}_\mu \omega^a,$$

$$q \rightarrow q^{(\omega)} = q + ig \omega^a T_a q. \quad (4.3.8)$$

Поэтому, учитывая поперечность поля  $\bar{A}_k^a$  (см. (4.1.2)), получаем

$$\int \bar{\chi} \bar{\Delta}^{-1} \chi^{(\omega)} = \int \bar{\chi} \bar{\Delta}^{-1} \chi - ig \int d^4x (A^I(x) \times \omega(x))^b \partial^\mu \partial_\mu \bar{A}_j^b. \quad (4.3.9)$$

Так как  $\omega^a(x)$  — произвольная функция  $x$ , то появляющиеся в теории возмущений при вычислении континуальных гауссовых интегралов полюсные слагаемые (пропэгаторы), связанные со вторым членом в (4.3.9), не компенсируют нулей, появляющихся вследствие того, что поля  $\bar{\chi} \equiv A_k^b$ ,  $q$ ,  $\bar{q}$  удовлетворяют уравнениям  $\partial^\mu \partial_\mu A_k^b = 0$ ,  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \bar{q} = 0$  (лежат на массовых оболочках свободных частиц). Таким образом, учитывая, что поля  $\bar{A}_k^b$ ,  $q$  удовлетворяют свободным уравнениям движения, видим, что функционал  $\int \bar{\chi} \bar{\Delta}^{-1} \chi$  является калибровочно-инвариантным, т. е.

$$\int \bar{\chi} \bar{\Delta}^{-1} \chi^{(\omega)} = \int \bar{\chi} \bar{\Delta}^{-1} \chi. \quad (4.3.10)$$

Так как действие  $W(A, F, q, \bar{q})$  является калибровочно-инвариантным, т. е.

$$W(A^{(\omega)}, F^{(\omega)}, q^{(\omega)}, \bar{q}^{(\omega)}) = W(A, F, q, \bar{q}), \quad F^{(\omega)} \equiv F \quad (4.3.11)$$

и  $\mathcal{D}q^{(\omega)} \mathcal{D}\bar{q}^{(\omega)} = \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q}$ , то функционал  $S(A)$  также является калибровочно-инвариантным, т. е.

$$S(A^{(\omega)}) = S(A). \quad (4.3.12)$$

Вводя скалярное поле  $A_0^a$  в  $\int \bar{\chi} \bar{\Delta}^{-1} \chi$ :

$$\int \bar{\chi} \bar{\Delta}^{-1} \chi \rightarrow -i \int d^4x (A^{b\lambda} \partial^\mu \partial_\mu \bar{A}_\lambda^b - \bar{q} S^{c-1} q - \bar{q} S^{c-1} \bar{q}), \quad (4.3.13)$$

легко видеть, что матричные элементы между физическими состояниями от  $S$ -матрицы не изменяются, так как оператор  $A_0^b$  содержит только

операторы рождения и уничтожения скалярных глюонов (нефизические состояния; подробнее см. п. 4.5.4). Поэтому можно считать, что усеченная матрица рассеяния  $S(A)$ , определяющая согласно (4.3.5) матрицу рассеяния  $S$ , является калибровочно- и релятивистски-инвариантной.

**4.3.2. Релятивистская инвариантность  $S$ -матрицы неабелевых калибровочных полей.** Покажем, что выражение  $\delta(\partial^k A_k^a) |\det R(A)|$  «не портит» релятивистской инвариантности  $S$ -матрицы вследствие калибровочной инвариантности  $S(A)$  и калибровочной инвариантности меры  $\mathcal{D}A \equiv \prod dA^a(x)$ .

Докажем калибровочную инвариантность меры  $\mathcal{D}A$ . Напомним, что если вместо полей  $A_\mu^a$  ввести матрицы  $A_\mu = A_\mu^a T_a$ , то при конечных калибровочных преобразованиях эти матрицы преобразуются согласно формулам

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^{(\omega)}(x) = U_\omega A_\mu(x) U_\omega^+ + \frac{1}{g} U_\omega^+ \frac{\partial U_\omega}{\partial x^\mu},$$

где  $U_\omega(x) = \exp ig T_a \omega^a(x)$ . Учитывая, что  $\text{Sp } T_a T_b = \frac{1}{2} \delta_{ab}$ , можно получить закон преобразования полей  $A_\mu^a(x)$  при конечных калибровочных преобразованиях:

$$A_\mu^{a(\omega)}(x) = A_\mu^b(x) L^{ba}(x; \omega) + Q_\mu^a(x; \omega), \quad (4.3.14)$$

где

$$L^{ba}(x; \omega) = 2 \text{Sp } U_\omega T_a U_\omega^+ T_b, \quad Q_\mu^a(x; \omega) = \frac{-2i}{g} \text{Sp } U_\omega^+ \frac{\partial U_\omega}{\partial x^\mu} T_a.$$

Таким образом, для доказательства калибровочной инвариантности меры  $\mathcal{D}A$  нам достаточно убедиться в равенстве единице якобиана преобразования (4.3.14) в фиксированной точке  $x$ , или, что то же, в справедливости равенства  $\det L^{ba}(x, \omega) = 1$ . Так как

$$L^{ab} L^{cb} = 4 (U_\omega T_a U_\omega^+)_{ik} (T_b)_{kl} (U_\omega T_c U_\omega^+)_{ls} (T_b)_{sl}$$

и

$$(T_b)_{ki} (T_b)_{sl} = \frac{1}{2} \delta_{is} \delta_{kl} - \frac{1}{2n} \delta_{ik} \delta_{ls}$$

(см. формулы (1.8.28)), то

$$L^{ab} L^{cb} = 2 \text{Sp } U_\omega T_a U_\omega^+ U_\omega T_c U_\omega^+ = 2 \text{Sp } T_a T_c = \delta_{ac},$$

следовательно,  $\det L^{ab} = 1$ , что и требовалось доказать. Таким образом,

$$\mathcal{D}A^{(\omega)} = \mathcal{D}A. \quad (4.3.15)$$

Отметим, что мера  $\mathcal{D}\omega \equiv \prod_{xa} d\omega^a(x)$  в пространстве калибровочных функций  $\omega^a(x)$  является инвариантной по отношению к преобразованиям, соответствующим закону умножения калибровочных функций

$\omega^a(x)$ . Это значит, что для произвольного функционала  $g(\omega)$  должно выполняться соотношение

$$\int \mathcal{D}(\omega) g(\omega) = \int \mathcal{D}\omega g(\omega''(\omega, \omega')), \quad (4.3.16)$$

где функции  $\omega''^a(\omega, \omega')$  определяют закон сложения параметров группы, который следует из группового закона умножения

$$\exp igT_a \omega^a(x) \exp igT_a \omega'^a(x) = \exp igT_a \omega''^a(x).$$

Легко видеть, что из этого соотношения в случае бесконечно малых  $\omega$  и  $\omega'$  (только такие преобразования нам далее потребуются) следует

$$\omega''^a = \omega^a + \omega'^a - \frac{g}{2}(\omega \times \omega')^a$$

(члены типа  $\omega^2$  и  $\omega'^2$  не появляются). Отсюда вытекает, что

$$\det \left( \frac{\partial \omega''^a}{\partial \omega^b} \right)_{\omega'} = 1.$$

Это соотношение доказывает формулу (4.3.16).

Вернемся к формуле (4.3.5). Покажем, что выполняется равенство

$$\int \mathcal{D}\omega \delta(\partial^k A_k^{(\omega)}) |\det R(A^{(\omega)})| = 1. \quad (4.3.17)$$

Прежде чем доказывать (4.3.17), отметим, что все функции  $A_\mu^a(x)$  можно разбить на классы, объединив в один класс функции, которые связаны между собой калибровочным преобразованием (это значит, что класс определяется некоторым представителем  $A_\mu(x)$ ; тогда функции  $A_\mu^{(\omega)}(x)$  и образуют класс). Таким образом, интегрирование в формуле (4.3.5) можно проводить по всем классам и по всем функциям  $\omega$ ,  $\mathcal{D}A = (\mathcal{D}A)_{\text{кл}} \mathcal{D}\omega$  (это соотношение является определением меры в пространстве классов  $(\mathcal{D}A)_{\text{кл}}$ ). Тогда в силу калибровочной инвариантности функционала  $S(A)$  ( $S(A) = S(A^{(\omega)})$ ) и вследствие соотношения (4.3.17) матрицу рассеяния  $S$  можно представить в виде

$$S = N \int (\mathcal{D}A)_{\text{кл}} : S(A) :, \quad (4.3.18)$$

откуда фактически следует релятивистская инвариантность  $S$ .

Для доказательства (4.3.17) введем функционал

$$\Delta(A)^{-1} = \int \mathcal{D}\omega \delta(\partial^k A_k^{(\omega)}). \quad (4.3.19)$$

Этот функционал по определению (см. (4.3.16)) является калибровочно инвариантным:

$$\Delta(A) = \Delta(A^{(\omega)}). \quad (4.3.20)$$

Функционал  $\Delta(A)$  при  $\partial^k A_k = 0$  совпадает с  $\det R(A)$ , т. е.

$$\Delta(A)|_{\partial^k A_k=0} = |\det R|. \quad (4.3.21)$$

Действительно, при  $\partial^k A_k = 0$  в интеграл (4.3.19) вносят вклад только бесконечно малые  $\omega$ . Но в этом случае

$$A_\mu^{(\omega)} = A_\mu + \partial_\mu \omega + g(A_\mu \times \omega) = A_\mu + \mathcal{D}_\mu \omega,$$

следовательно,

$$\partial^k A_k^{(\omega)} = -\Delta\omega + g(A_k \times \partial^k \omega) \equiv R\omega.$$

Отсюда и из (4.2.8) следует соотношение (4.3.21). Это соотношение можно записать в виде

$$|\det R| \delta(\partial^k A_k^a) = \Delta(A) \delta(\partial^k A_k^a), \quad (4.3.22)$$

откуда и из (4.3.19), (4.3.20) вытекает формула (4.3.17).

**4.3.3. Переход от кулоновской калибровки к лоренцевой и возникновение духов.** Как уже отмечалось, формулой (4.3.18) доказывается релятивистская инвариантность  $S$ -матрицы. Однако она неудобна для применений, так как содержит интегрирование не по всем полям  $A_\mu^a$ , а по классам полей. Чтобы выполнять интегрирование не по классам, а по всем полям, введем релятивистски-инвариантный функционал

$$\Delta_b(A)^{-1} = \int \mathcal{D}\omega \delta(\partial^\mu A_\mu^{(\omega)} - b), \quad (4.3.23)$$

где  $b^a(x)$  — произвольные функции  $x$ . По определению функционал  $\Delta_b(A)$  является калибровочно-инвариантным:

$$\Delta_b(A^{(\omega)}) = \Delta_b(A). \quad (4.3.23')$$

Найдем этот функционал для полей  $A_\mu^a(x)$ , удовлетворяющих условию  $\partial^\mu A_\mu^a(x) = b^a(x)$ . Для таких полей вклад в интеграл по  $\omega$  в (4.3.22) вносят только бесконечно малые  $\omega$ . Для бесконечно малых  $\omega$

$$(\partial^\mu A_\mu^{(\omega)} - b)|_{\partial^\mu A_\mu = b} = \partial^\mu (\partial_\mu \omega + g(A_\mu \times \omega)) \equiv L\omega. \quad (4.3.24)$$

Поэтому  $\Delta_b(A)|_{\partial^\mu A_\mu = b} = |\det L|$ , следовательно,

$$|\det L(A)| \delta(\partial^\mu A_\mu - b) = \Delta_b(A) \delta(\partial^\mu A_\mu - b).$$

Отсюда и из (4.3.22), (4.3.23) получаем

$$\int \mathcal{D}\omega \delta(\partial^\mu A_\mu^{(\omega)} - b) |\det L(A^{(\omega)})| = 1.$$

Из найденного соотношения следует, что матрицу рассеяния (4.3.18) можно представить в виде

$$S = N \int \mathcal{D}A \delta(\partial^\mu A_\mu - b) |\det L(A)| : S(A) :, \quad (4.3.25)$$

где  $S(A)$  — усеченная матрица рассеяния. В этой формуле интегрирование происходит не по классам полей, а по всем полям  $A_\mu^a(x)$ . Так как правая сторона этого равенства не зависит от  $b^a(x)$ , то матрицу рассеяния можно переписать в виде

$$S = N \int \mathcal{D}A : S(A) : |\det L(A)| \int \mathcal{D}b \delta(\partial^\mu A_\mu - b) \exp\left(-\frac{i}{2\xi} \int d^4x (b(x))^2\right),$$

или

$$S = N \int \mathcal{D}A |\det L(A)| e^{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x (\partial^\mu A_\mu^a)^2} : S(A) :. \quad (4.3.26)$$

Это выражение является явно релятивистски-инвариантным. Используя (4.3.6), находим

$$S = N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}F \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} | \det L(A) | \times \\ \times \exp \left\{ iW - \frac{i}{2\xi} \int d^4x (\partial^\mu A_\mu^a)^2 \right\} : \exp \int \chi \bar{\Delta}^{-1} \chi : , \quad (4.3.27)$$

где дифференциальный оператор  $L(A)$  согласно (4.3.24) определяется формулой

$$L\omega = \partial^\mu \partial_\mu \omega + g \partial^\mu (A_\mu \times \omega) \equiv \partial^\mu \mathcal{D}_\mu \omega.$$

Используя (4.2.14),  $\det L$  можно представить в виде континуального интеграла по грассмановым полям  $c(x)$  и  $\bar{c}(x)$ :

$$| \det L | = N' \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \int d^4x \bar{c}(x) Lc(x),$$

или, учитывая определение  $L(A)$ ,

$$| \det L | = N' \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp i \int d^4x \{ i \partial^\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + ig \partial^\mu \bar{c}^a (A_\mu \times c)^a \}.$$

Подставляя это выражение в (4.3.27), получаем

$$S = N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}F \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{iW_{\text{eff}}} : \exp \int \chi \bar{\Delta}^{-1} \chi : , \quad (4.3.28)$$

где эффективное действие  $W_{\text{eff}}$  определяется формулой

$$W_{\text{eff}} = W + \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + i \partial^\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + ig \partial^\mu \bar{c}^a (A_\mu \times c)^a \right\}. \quad (4.3.29)$$

В формуле (4.3.28) можно выполнить интегрирование по  $F_{\mu\nu}$ . В результате придем к формуле<sup>20</sup>

$$S = N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{iW_{\text{eff}}} : \exp \int \chi \bar{\Delta}^{-1} \chi : , \quad (4.3.30)$$

в которой под  $W_{\text{eff}}$  понимается выражение (4.3.29) с заменой

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g(A_\mu \times A_\nu).$$

Напомним, что под  $\int \chi \bar{\Delta}^{-1} \chi$  следует понимать оператор

$$\int \chi \bar{\Delta}^{-1} \chi = -i \int d^4x (A^{b\lambda} \partial^\mu \partial_\mu A_\lambda^b - \bar{q} S^{c-1} q - \bar{q} S^{c-1} q). \quad (4.3.31)$$

Подчеркнем, что в формулах (4.3.28), (4.3.30) интегрирование проводится не только по поперечным полям  $A_k^{(l)}$ , но и по полям  $A_k^{(l)}$  и  $A_0$ . Применение этих полей, которые необходимы для построения явно релятивистски-инвариантной теории, приводит к введению продольных и скалярных глюонов (бозонные духи). Чтобы построить лагранжеву формулировку и ввести эффективное действие  $W_{\text{eff}}$ , мы представили  $\det L$  в виде континуального интеграла по скалярным фермионным

<sup>20</sup> Последовательное изложение теории калибровочных полей на основе формулировки квантовой теории с помощью континуального интегрирования изложено в работах [12, 13].

полям. Этот процесс эквивалентен использованию в теории скалярных фермионных частиц (фермионные духи). Подчеркнем, что ни бозонные, ни фермионные духовые поля не связаны с реальными частицами, а используются только в явно релятивистски-инвариантной диаграммной технике в качестве виртуальных частиц.

В формуле (4.3.25) калибровка фиксируется условием  $\partial^\mu A_\mu^a = b^a$ . Такого типа калибровки называются обобщенными калибровками Лоренца. Матрицу рассеяния в форме (4.3.30) будем называть также матрицей рассеяния в лоренцевой калибровке (ср. с формулой (4.2.38') для матрицы рассеяния в квантовой электродинамике).

В заключение отметим, что квантование неабелевых калибровочных полей в кулоновской калибровке впервые было выполнено Швингером [5, 6]. Квантование калибровочных полей в формализме континуального интегрирования с использованием формулы (4.3.18) для  $S$ -матрицы, в которой интегрирование проводится по классам калибровочных полей, впервые было проведено Фаддеевым и Поповым [7]. Они также впервые ввели скалярные фермионные духи<sup>21</sup>. Квантование калибровочных полей в произвольной калибровке было также проведено де-Виттом [9]. Каноническое квантование калибровочных полей предложено Фрадкиным и Тютиним [10].

#### § 4.4. ОПЕРАТОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ КВАНТОВАНИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ В ЛОРЕНЦЕВОЙ КАЛИБРОВКЕ

**4.4.1. Лагранжиан калибровочных полей в лоренцевой калибровке (эффективный лагранжиан).** Мы получили эффективное действие полей, с помощью которого, используя формализм континуального интегрирования, можно построить матрицу рассеяния.

Здесь мы построим квантовую теорию калибровочных полей в лоренцевой калибровке, основываясь на операторном формализме. Будем исходить из операторного лагранжиана (4.1.1), который обозначим  $\mathcal{L}_a$ :

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{8} \{F_{\mu\nu}^a, F^{a\mu\nu}\} - \frac{1}{4} \{F^{a\mu\nu}, \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g(A_\mu \times A_\nu)^a\} + \\ + \frac{1}{4} [\bar{q}, (i\gamma^\mu D_\mu - m)q] + \frac{1}{4} [q, (i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu + m)\bar{q}]. \quad (4.4.1)$$

Этот лагранжиан является калибровочно-инвариантным, поэтому так же, как в квантовой электродинамике и в п. 4.1.1, для построения квантовой теории необходимо нарушить калибровочную инвариантность. С этой целью мы к лагранжиану  $\mathcal{L}_a$  добавим слагаемое  $\mathcal{L}_b$  (ср. с п. 3.1.3):

$$\mathcal{L}_b = -\frac{1}{\xi} \left( \frac{1}{2} \{\varphi^a, \partial^\nu A_\nu^a\} - \frac{1}{2} \varphi^a \varphi^a \right), \quad (4.4.2)$$

где  $\xi$  — произвольная константа, а  $-\xi^{-1}\varphi^a$  — новое поле, сопряженное полю  $A_0^a$ :  $-\xi^{-1}\varphi^a = \partial\mathcal{L}_b/\partial\partial_0 A_0^a$ . Таким образом, исходным при

<sup>21</sup> На необходимость модификации диаграммной техники указал Фейнман [8].

построении квантовой теории калибровочного поля в лоренцевой калибровке будет лагранжиан  $\mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b$ . Варьирование этого лагранжиана по  $\varphi^a$  приводит к уравнениям поля

$$\varphi^a = \partial^\nu A_\nu^a.$$

В квантовой электродинамике аналогичная величина  $\varphi = \partial^\nu A_\nu$  удовлетворяла уравнению для свободного поля  $\partial^\nu \partial_\nu \varphi = 0$ , вследствие чего можно было показать, что духовые состояния (т. е. скалярные и продольные фотоны) не дают вклада в условие унитарности для  $S$ -матрицы между физическими состояниями. В данном случае ситуация осложняется, так как поля  $\varphi^a$  не удовлетворяют уравнениям движения для свободного поля, а удовлетворяют более сложным нелинейным уравнениям, содержащим само поле  $A_\mu^a$ .

Чтобы построить унитарную  $S$ -матрицу, необходимо ввести добавочные фермионные поля (см. п. 4.3.3). Для этого отметим, что лагранжиан  $\mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b$  инвариантен относительно калибровочного преобразования

$$\delta A_\mu^a \equiv A_\mu^{\prime a} - A_\mu^a \equiv \mathcal{D}_\mu \omega^a, \quad \varphi^a \rightarrow \varphi^{\prime a} = \varphi^a, \quad (4.4.3)$$

$$\delta q \equiv q' - q = ig\omega^a T_a q, \quad \delta \bar{q} \equiv \bar{q}' - \bar{q} = -ig\omega^a \bar{q} T_a$$

(здесь  $\mathcal{D}_\mu \omega^a = \partial_\mu \omega^a + g(A_\mu \times \omega)^a$ ) только в том случае, если величина  $\omega^a$  удовлетворяет уравнениям

$$\partial^\mu \mathcal{D}_\mu \omega^a = 0. \quad (4.4.4)$$

Поэтому для определения величин  $\omega^a(x)$  необходимо (в отличие от электродинамики, где  $\partial^\mu \partial_\mu \omega = 0$ ) знать структуру калибровочного поля  $A_\mu^a$ . Таким образом, для сохранения калибровочной инвариантности в рамках лоренцевой калибровки мы должны считать  $\omega^a$  некоторым новым эрмитовым полем, которое взаимодействует с калибровочным полем. Это поле будем обозначать  $c^a(x)$ . Для того чтобы для поля  $c^a(x)$  получить уравнения движения  $\partial^\mu \mathcal{D}_\mu c^a = 0$ , мы должны еще ввести поле  $\bar{c}^a$  и полям  $c^a$  и  $\bar{c}^a$  сопоставить лагранжиан  $\mathcal{L}_c = \partial^\mu \bar{c}^a \mathcal{D}_\mu c^a$ . Таким образом, для эрмитовых полей  $c^a$  и  $\bar{c}^a$  получим уравнения поля 2-го порядка<sup>22</sup>. Однако нам необходимы уравнения первого порядка, так как при этом применение квантового динамического принципа позволит построить квантовую теорию калибровочного поля. Поэтому в качестве лагранжиана новых полей  $\mathcal{L}_c$  выберем лагранжиан

$$\mathcal{L}_c = -\frac{i}{2} [\bar{\Psi}_\mu^a, \mathcal{D}^\mu c^a] - \frac{i}{2} [\Psi_\mu^a, \partial^\mu \bar{c}^a] + \frac{i}{2} [\bar{\Psi}_\mu^a, \Psi^{\mu a}],$$

$$\mathcal{D}_\mu c^a = \partial_\mu c^a + g(A_\mu \times c)^a, \quad (4.4.5)$$

где  $\Psi_\mu^a$  и  $\bar{\Psi}_\mu^a$  — эрмитовы поля, сопряженные эрмитовым полям  $\bar{c}^a$  и  $c^a$ . Все эти поля будем считать фермионными (поэтому в формулу для  $\mathcal{L}_c$  входят коммутаторы, а не антикоммутаторы), несмотря на то

<sup>22</sup> В этой связи см. работу [11].

что с точки зрения группы Лоренца они являются скалярными и векторными. Фермионный характер этих полей необходим для обеспечения калибровочной инвариантности теории в рамках лоренцевой калибровки (в этой связи см. п. 4.4.3). В формализме 2-го порядка лагранжиан  $\mathcal{L}_c$  эквивалентен лагранжиану  $\mathcal{L}_c = \frac{i}{2} [\partial^\mu \bar{c}^a, \mathcal{D}_\mu c^a]$  (ср. с формулой (4.3.29) п. 4.3.3).

Таким образом, окончательно будем исходить из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_c, \quad (4.4.6)$$

где операторы  $\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b, \mathcal{L}_c$  определяются формулами (4.4.1), (4.4.2), (4.4.5).

**4.4.2. Уравнения движения и перестановочные соотношения для полей.** Зная лагранжиан полей, согласно п. 2.1.5 можно установить перестановочные соотношения и сформулировать уравнения движения для полей. С этой целью отметим, что кинематическая часть действия, т. е. часть, содержащая временные производные, имеет вид

$$W_K = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left( -\frac{1}{2} \{F^{a0k}, \partial_0 A_k^a\} - \frac{1}{2\xi} \{\varphi^a, \partial_0 A_0^a\} - \frac{i}{2} [\bar{\psi}_0^a, \partial_0 c^a] - \right. \\ \left. - \frac{i}{2} [\bar{\psi}_0^a, \partial_0 \bar{c}^a] + \frac{i}{4} [\bar{q}, \gamma^0 \partial_0 q] + \frac{i}{4} [q, \bar{\gamma}^0 \partial_0 \bar{q}] \right).$$

Отметим, что бозе-поля  $F_{0k}^a, A_\mu^a, \varphi^a$  и ферми-поля  $\psi_0^a, \bar{\psi}_0^a, c^a, \bar{c}^a, q, \bar{q}$ , определяющие кинематическую часть действия, являются динамически независимыми. Оператор  $W_K$  инвариантен по отношению к элементарным вариациям полей, для которых  $\delta A_\mu^a, \delta F_{0k}^a, \delta \varphi^a$  представляют собой произвольные функции  $x$ , а вариации  $\delta \psi_0^a, \delta \bar{\psi}_0^a, \delta c^a, \delta \bar{c}^a, \delta q, \delta \bar{q}$  — произвольные, зависящие от  $x$  грассмановы функции, т. е. функции, антикоммутирующие между собой и со всеми фермионными полями. Построив согласно § 2.1 генератор этих элементарных вариаций, приходим к следующим перестановочным соотношениям (см. п. 2.1.5):

$$[F_{0k}^a(x), A^{bl}(x')]_{t=t'} = i\delta_k^l \delta_{ab} \delta(x-x'), \quad [\varphi^a(x), A_0^b(x')]_{t=t'} = \\ = i\xi \delta_{ab} \delta(x-x'), \quad \{\bar{\psi}_0^a(x), c^b(x')\}_{t=t'} = -\delta_{ab} \delta(x-x'), \quad (4.4.7)$$

$$\{\psi_0^a(x), \bar{c}^b(x')\}_{t=t'} = -\delta_{ab} \delta(x-x'), \quad \{q(x), \bar{q}(x')\}_{t=t'} = \gamma^0 \delta(x-x').$$

Остальные перестановочные соотношения являются тривиальными.

Перейдем к установлению уравнений движения для калибровочных и фермионных полей. Варьирование лагранжиана по бозе-полям  $F_{\mu\nu}^a, A_\mu^a, \varphi^a$  приводит (с учетом одновременных перестановочных соотношений) к уравнениям поля

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g(A_\mu \times A_\nu)^a, \quad \varphi^a = \partial^\mu A_\mu^a, \quad (4.4.8) \\ \partial^\mu F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{\xi} \partial_\nu \varphi^a + g(A^\mu \times F_{\mu\nu})^a + ig(\bar{\psi}_\nu \times c)^a + j_\nu^a = 0,$$



где

$$j_a^\nu = \frac{g}{2} [\bar{q}, \gamma^\nu T_a q]. \quad (4.4.9)$$

Варьирование лагранжиана по ферми-полям  $\psi_\mu^a, \bar{\psi}_\mu^a, c^a, \bar{c}^a, q, \bar{q}$  приводит (с учетом одновременных перестановочных соотношений) к уравнениям поля

$$\begin{aligned} \psi_\mu^a &= \mathcal{D}_\mu c^a, \quad \bar{\psi}_\mu^a = -\partial_\mu \bar{c}^a, \quad \partial^\mu \psi_\mu^a = 0, \quad \mathcal{D}^\mu \bar{\psi}_\mu^a = 0, \\ (i\gamma^\mu D_\mu - m)q &= 0, \quad (i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu + m)\bar{q} = 0. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Полученные уравнения включают в себя как собственно уравнения поля для динамически независимых переменных, так и уравнения связи, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_k^a &= \mathcal{D}_k c^a, \quad \bar{\psi}_k^a = -\partial_k \bar{c}^a, \\ F_{kl}^a &= \partial_k A_l^a - \partial_l A_k^a + g(A_k \times A_l)^a. \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Исключая из лагранжиана (4.4.6) поля  $\psi, \bar{\psi}$  с помощью уравнений (4.4.8), (4.4.10) приходим к лагранжиану, соответствующему эффективному действию (4.3.29).

**4.4.3. Инвариантность теории по отношению к калибровочным преобразованиям.** Как легко видеть, уравнения движения и перестановочные соотношения инвариантны к калибровочным преобразованиям с величиной  $\omega^a(x) = \text{const}$ . Если операторы  $Q^a \equiv \{F_{\mu\nu}^a, A_\mu^a, \varphi^a, \psi_\mu^a, \bar{\psi}_\mu^a, c^a, \bar{c}^a\}$  по индексу  $a$  преобразуются как  $SU(n)$ -векторы:

$$\delta Q^a \equiv Q'^a - Q^a = g(Q \times \omega)^a, \quad (4.4.12)$$

а операторы  $q, \bar{q}$  — согласно закону

$$\delta q = q' - q = ig\omega^a T_a q, \quad \delta \bar{q} = \bar{q}' - \bar{q} = -ig\omega^a \tilde{T}_a \bar{q}, \quad (4.4.13)$$

то рассматриваемые преобразования оставляют инвариантным лагранжиан полей (4.4.6) и, следовательно, представляют собой преобразования внутренней симметрии. С этой симметрией связаны законы сохранения 4-токов  $I_\mu^a$  ( $a = 1, \dots, n^2 - 1$ )

$$\partial^\mu I_\mu^a = 0, \quad (4.4.14)$$

$$gI_\mu^a = j_\mu^a + g(F_{\mu\nu} \times A^\nu)^a + \frac{g}{\xi}(\varphi \times A_\mu)^a + ig(\bar{\psi}_\mu \times c)^a + ig(\psi_\mu \times \bar{c})^a.$$

Покажем, что уравнения движения и перестановочные соотношения инвариантны также по отношению к однопараметрической группе нелинейных преобразований динамически независимых бозе-полей

$$\delta A_0^a = i\zeta\psi_0^a, \quad \delta A_l^a = i\zeta\{\partial_l c^a + g(A_l \times c)^a\}, \quad (4.4.15)$$

$$\delta F_{0l}^a = -ig\zeta(c \times F_{0l})^a, \quad \delta\varphi^a = 0$$

и динамически независимых ферми-полей

$$\delta c^a = -\frac{i}{2}g\zeta(c \times c)^a, \quad \delta \bar{c}^a = -\frac{1}{\xi}\zeta\varphi^a, \quad \delta\psi_0^a = 0,$$

$$\delta\bar{\psi}_0^a = \zeta \{ \partial^l F_{0l}^a + g(A^l \times F_{0l})^a - ig(\bar{\psi}_0 \times c)^a - j_0^a \},$$

$$\delta q = -g\zeta c^a T_a q, \quad \delta\bar{q} = g\zeta c^a \bar{T}_a \bar{q}, \quad (4.4.15')$$

где  $\zeta$  — произвольный, не зависящий от  $x$  параметр, антикоммутирующий с ферми-полями  $\{\zeta, \psi_\mu^a\} = \{\zeta, c^a\} = \{\zeta, q\} = 0$  и кроме того удовлетворяющий условиям  $\zeta^2 = 0$ ,  $\zeta = \zeta^*$ . Последнее условие означает, что  $(\zeta A)^+ \equiv A^+ \zeta^* = A^+ \zeta$ , где  $A$  — произвольный оператор. Эти преобразования связывают бозе-поля  $A_\mu^a, F_{0l}^a, \varphi^a$  с ферми-полями  $\psi_0^a, \bar{\psi}_0^a, c^a, \bar{c}^a$ . Такая связь оказывается возможной, так как параметр  $\zeta$  вместе с ферми-полями (в классическом случае) образуют грасманову алгебру. Именно при преобразовании бозе-полей ферми-поля ( $\psi$  или  $c$ ) входят вместе с параметром  $\zeta$  четное число раз, а при преобразовании ферми-полей параметр  $\zeta$  вместе с ферми-полями входит нечетное число раз. Отметим, что данные преобразования в этом смысле аналогичны преобразованиям суперполей (см. § 1.7).

Преобразования (4.4.15), (4.4.15') по форме — релятивистски-инвариантны. Однако если воспользоваться уравнениями поля, то эти преобразования приобретут релятивистски-инвариантный вид:

$$\delta A_\mu^a = i\zeta \psi_\mu^a, \quad \delta F_{\mu\nu}^a = -ig\zeta (c \times F_{\mu\nu})^a, \quad \delta \varphi^a = 0 \quad (4.4.16)$$

для бозонных полей и

$$\delta c^a = -\frac{1}{2} ig\zeta (c \times c)^a, \quad \delta \bar{c}^a = -\frac{1}{\xi} \zeta \varphi^a, \quad \delta \bar{\psi}_\mu^a = \zeta \frac{1}{\xi} \partial_\mu \varphi^a, \\ \delta \psi_\mu^a = 0, \quad \delta q = -\zeta g c^a T_a q, \quad \delta \bar{q} = \zeta g c^a \bar{T}_a \bar{q} \quad (4.4.16')$$

для фермионных полей.

Чтобы убедиться в инвариантности теории по отношению к преобразованиям (4.4.16), (4.4.16'), вычислим вариацию величин, входящих в лагранжиан (4.4.6) и в уравнения поля. Согласно (4.4.16), (4.4.16')

$$\delta \mathcal{D}_\mu c^a = -\zeta \frac{ig}{2} \mathcal{D}_\mu (c \times c)^a + \zeta ig (\mathcal{D}_\mu c \times c)^a + \zeta ig ((\psi_\mu - \mathcal{D}_\mu c) \times c)^a,$$

а так как  $f^{abc} = -f^{acb}$  и  $\{c, c\} = 0$ , то

$$\delta \mathcal{D}_\mu c^a = \zeta ig ((\psi_\mu - \mathcal{D}_\mu c) \times c)^a. \quad (4.4.17)$$

Поэтому, учитывая (4.4.16'), (4.4.17), получаем

$$\delta (\psi_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a) = -\zeta ig ((\psi_\mu - \mathcal{D}_\mu c) \times c)^a. \quad (4.4.18)$$

Далее

$$\delta (\bar{\psi}_\mu^a + \partial_\mu \bar{c}^a) = 0, \quad \delta \partial^\mu \psi_\mu^a = 0, \quad \delta (\varphi^a - \partial^\mu A_\mu^a) = -i\zeta \partial^\mu \psi_\mu^a. \quad (4.4.19)$$

Еще раз учитывая (4.4.16), (4.4.16'), находим

$$\delta \{ F_{\mu\nu}^a - \partial_\mu A_\nu^a + \partial_\nu A_\mu^a - g(A_\mu \times A_\nu)^a \} = \\ = -i\zeta \mathcal{D}_\mu (\psi_\nu^a - \mathcal{D}_\nu c^a) + i\zeta \mathcal{D}_\nu (\psi_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a) - \\ - i\zeta \{ \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu c^a - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu c^a + g(c \times F_{\mu\nu})^a \}.$$

Вследствие (1.9.24) последнее слагаемое в этом равенстве обращается в нуль, поэтому

$$\begin{aligned} & \delta \{F_{\mu\nu}^a - \partial_\mu A_\nu^a + \partial_\nu A_\mu^a - g(A_\mu \times A_\nu)^a\} = \\ & = -i\zeta \mathcal{D}_\mu (\psi_\nu^a - \mathcal{D}_\nu c^a) + i\zeta \mathcal{D}_\nu (\psi_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a). \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

Аналогично можно показать, что

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{D}^\mu \bar{\psi}_\mu^a &= \zeta \mathcal{D}^\mu \left\{ \mathcal{D}^\lambda F_{\lambda\mu}^a + \frac{1}{\xi} \partial_\mu \psi^a + ig(\bar{\psi}_\mu \times c)^a \right\} - \\ & - i\zeta g(\mathcal{D}^\mu \bar{\psi}_\mu \times c)^a - i\zeta g(\bar{\psi}_\mu \times (\mathcal{D}^\mu c - \psi^\mu))^a, \quad (4.4.21) \\ \delta \left\{ \mathcal{D}^\mu F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{\xi} \partial_\nu \varphi^a + ig(\bar{\psi}_\nu \times c)^a + j_\nu^a \right\} &= \\ & = -i\zeta g \left\{ -(\mathcal{D}^\mu F_{\mu\nu} \times c)^a - \frac{1}{\xi} (\partial_\nu \varphi \times c)^a - ig((\bar{\psi}_\nu \times c) \times c)^a - \right. \\ & \left. - (j_\nu \times c)^a \right\} - ig\zeta((\mathcal{D}^\mu c - \psi^\mu) \times F_{\mu\nu})^a. \end{aligned}$$

При доказательстве первой из этих формул мы учли, что  $\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}^\lambda F_{\mu\lambda}^a = 0$ , а при доказательстве второй формулы учли свойство (1.1.30) структурных постоянных

$$fcabfbde + fdcfbfae + fadbfbce = 0$$

и закон преобразования тока

$$\delta j_\nu^a = i\zeta g(j_\nu \times c)^a,$$

вытекающий из (4.4.9), (4.4.16').

Наконец, используя (4.4.16'), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \delta(i\gamma^\mu D_\mu - m)q &= i\zeta g \gamma^\mu (\psi_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a) T_a q - \zeta g c^a T_a (i\gamma^\mu D_\mu - m)q, \\ \delta(i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu + m)\bar{q} &= -i\zeta g (\psi_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a) \tilde{\gamma}^\mu \tilde{T}_a \bar{q} + \zeta g c^a \tilde{T}_a (i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu + m)\bar{q}. \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

С помощью этих формул легко вычислить вариацию функции Лагранжа  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_c$ . Учитывая, что  $\delta \{F_{\mu\nu}^a, F^{a\mu\nu}\} = 0$ , согласно (4.4.16), (4.4.20), (4.4.22) получаем

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_a &= -\zeta \frac{ig}{4} \{ (F^{\mu\nu} \times c)^a, F_{\mu\nu}^a - \partial_\mu A_\nu^a + \partial_\nu A_\mu^a - g(A_\mu \times A_\nu)^a \} + \\ & + \zeta \frac{i}{4} \{ F^{a\mu\nu}, \mathcal{D}_\nu (\psi_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a) - \mathcal{D}_\mu (\psi_\nu^a - \mathcal{D}_\nu c^a) \} + \zeta ig (\psi_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a) \times \\ & \times \left( \frac{1}{4} [\bar{q}, \gamma^\mu T_a q] - \frac{1}{4} [q, \tilde{\gamma}^\mu \tilde{T}_a \bar{q}] \right). \end{aligned}$$

Вариация  $\mathcal{L}_b$

$$\delta \mathcal{L}_b = -\frac{i}{2\xi} \{ \varphi^a, \zeta \partial^\nu \psi_\nu^a \}.$$

Вариация  $\mathcal{L}_c$  определяется формулой

$$\delta\mathcal{L}_c = -\zeta \frac{i}{2\xi} \partial^\mu \{\psi_\mu^a, \varphi^a\} - \frac{i}{2\xi} [\partial^\mu \psi_\mu^a, \zeta \psi^a] + \\ + \zeta \frac{i}{2\xi} \{\partial^\mu \varphi^a, \psi_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a\} - \zeta \frac{g}{2} \{\bar{\psi}_\mu^a, ((\psi^\mu - \mathcal{D}^\mu c) \times c)^a\}.$$

В силу уравнений поля (4.4.8), (4.4.10)

$$\delta\mathcal{L}_a = \delta\mathcal{L}_b = 0, \quad \delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L}_c = -\zeta \frac{i}{2\xi} \partial^\mu \{\psi_\mu^a, \varphi^a\}. \quad (4.4.23)$$

Таким образом, вариация лагранжиана сводится к дивергенции некоторого оператора, следовательно, согласно общей теории уравнения поля так же, как и перестановочные соотношения, инвариантны по отношению к рассматриваемым преобразованиям. Отметим, что инвариантность уравнений поля также непосредственно вытекает из формул (4.4.18) — (4.4.22). Действительно, вариации (4.4.18) — (4.4.22) являются линейными и однородными функциями самих варьируемых величин, поэтому вследствие уравнений поля обращаются в нуль. Так же легко непосредственно убедиться в инвариантности перестановочных соотношений. Существенно, что эта инвариантность достигается только вследствие того, что поля  $c, \bar{c}$  (и  $\psi_\mu, \bar{\psi}_\mu$ ) являются ферми-полями, а не бозе-полями. Сказанное следует из того, что если бы эти поля были бозевскими, то вариация поля  $c^a$  обращалась бы в нуль (вследствие того, что  $f^{bc} = -f^{acb}$ ), и получить инвариантность уравнений поля по отношению к преобразованиям (4.4.16) было бы невозможно. Преобразования (4.4.16), оставляющие инвариантным лагранжиан (4.4.6), называются преобразованиями Бекки, Руэ, Стора [14], Тютина [15].

Построим генератор  $G$  преобразований (4.4.16), (4.4.16'), т. е. такой оператор, который удовлетворяет соотношениям

$$\delta\chi = i[G, \chi],$$

где  $\chi$  — рассматриваемые поля и  $\delta\chi$  их вариации, определяемые преобразованиями (4.4.16), (4.4.16').

Лагранжиан рассматриваемой системы согласно (2.1.21) можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\chi, \partial_\xi \chi) - U(\chi),$$

где оператор  $\mathcal{L}_0$  линеен и однороден относительно  $\chi$  и  $\partial_\xi \chi$  и  $U(\chi)$  — часть лагранжиана, не содержащая производных операторов полей. Согласно общей теории (см. п. 2.1.4; вариации (4.4.16), (4.4.16') являются, очевидно, допустимыми)

$$G = G_1 + G_2,$$

где

$$G_1 = \int d^3x \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^0 \delta\chi), \quad \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^0 \delta\chi) \equiv \mathcal{L}_0(\chi, \partial_\xi \chi) |_{\partial_\xi \chi \rightarrow \delta_\xi^0 \delta\chi}$$

и  $G_2$  определяется согласно (2.1.54) вариацией лагранжиана при рассматриваемых преобразованиях:

$$G_2 = - \int d^3x f^0(x), \quad \delta\mathcal{L} = \partial_\mu f^\mu(x).$$

Оператор  $G_1$  имеет, очевидно, вид

$$G_1 = \zeta \int d^3x \left( -\frac{i}{2} \{F^{a0k}, \psi_k^a\} + \frac{g}{4} \{\bar{\psi}^{a0}, (c \times c)^a\} - \right. \\ \left. - \frac{i}{2\xi} \{\psi^{a0}, \varphi^a\} - \frac{1}{2} igc^a [\bar{q}, \gamma^0 T_a q] \right).$$

Учитывая далее, что  $f^0(x) = -\frac{i\zeta}{2\xi} \{\psi_0^a, \varphi^a\}$ , получаем

$$G = i\zeta Q, \quad Q = \int d^3x S^0(x), \quad (4.4.24)$$

где

$$S^\mu(x) = -\frac{1}{2} \{F^{a\mu\nu}, \psi_\nu^a\} - \frac{1}{2\xi} \{\varphi^a, \psi^{a\mu}\} - \\ - \frac{ig}{4} \{\bar{\psi}^{a\mu}, (c \times c)^a\} - \frac{1}{2} gc^a [\bar{q}, \gamma^\mu T_a q]. \quad (4.4.25)$$

Так как  $G$  является генератором преобразований (4.4.16), (4.4.16'), то

$$i[Q, A_\mu^a(x)] = \psi_\mu^a(x), \quad i[Q, \psi^a(x)] = 0, \\ i[Q, F_{\mu\nu}^a(x)] = -g(c(x) \times F_{\mu\nu}(x))^a, \quad \{Q, \bar{c}^a(x)\} = -\frac{1}{\xi} \varphi^a(x), \\ \{Q, c^a(x)\} = \frac{i}{2} g(c(x) \times c(x))^a, \quad \{Q, \bar{\psi}_\mu^a(x)\} = -\frac{1}{\xi} \partial_\mu \varphi^a(x), \\ \{Q, \psi_\mu^a(x)\} = 0, \quad \{Q, q(x)\} = c^a(x) g T_a q(x).$$

В справедливости этих формул также можно убедиться непосредственным вычислением коммутаторов и антикоммутаторов.

Из инвариантности (4.4.23) лагранжиана следует закон сохранения 4-тока  $S^\mu(x)$

$$\partial_\mu S^\mu(x) = 0, \quad (4.4.27)$$

следовательно, закон сохранения заряда  $Q$ . Действительно, согласно (4.4.23), (4.4.16')

$$\mathcal{L}_0(\delta_0\chi, \partial_\xi\chi) + \mathcal{L}_0(\chi, \partial_\xi\delta_0\chi) - \delta_0 U(\chi) = \partial^\mu \frac{i}{2} [\delta_0 \bar{c}^a, \psi_\mu^a], \quad (4.4.28)$$

где  $\delta_0\chi$  — вариации операторов поля, соответствующие преобразованиям (4.4.16), (4.4.16') (индекс «0» служит для того, чтобы подчеркнуть, что речь идет о вариациях при  $\zeta = \text{const}$ ).

Если  $\zeta$  является функцией  $x$ ,  $\zeta = \zeta(x)$ , то вариации (4.4.16), (4.4.16') (обозначим их  $\delta\chi$ ) будут допустимыми вариациями (см. § 2.1), однако они не будут оставлять инвариантными уравнения поля и лагранжиан. Согласно § 2.1 для допустимых вариаций справедлив принцип стационарного действия (2.1.53)

$$\int d^3x \mathcal{F}(x) = 0, \quad (4.4.29)$$

$$\mathcal{F}(x) = \delta \mathcal{L}_0(\chi, \partial_\xi\chi) - \partial_\nu \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^\nu \delta\chi) - \delta U.$$

Ясно, что члены, содержащие производные от вариаций  $\delta\chi$ , не будут входить в  $\mathcal{F}(x)$ :

$$\mathcal{F}(x) = -\mathcal{L}_0(\partial_\nu\chi, \delta_\xi^\nu\delta\chi) + \mathcal{L}_0(\delta\chi, \delta_\xi^\nu\partial_\nu\chi) - \delta U.$$

Отсюда и из (4.4.28) следует, что

$$\mathcal{F}(x) = -\partial_\nu \left\{ \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^\nu\delta\chi) - \frac{1}{2i} [\psi^{a\nu}, \delta\bar{c}^a] \right\},$$

причем в этой формуле не должна дифференцироваться функция  $\zeta(x)$ . Используя явный вид лагранжиана, получаем

$$\mathcal{F}(x) = i\zeta(x)\partial^\nu S_\nu(x),$$

где  $S_\nu(x)$  определяется формулой (4.4.25). Так как  $\zeta(x)$  — произвольная функция  $x$ , то отсюда и из (4.4.29) вытекает закон сохранения (4.4.27).

Отметим, что в отличие от известных нам выражений для токов в ток  $S^\mu(x)$  входит не четное, а нечетное число фермионных операторов. Это связано с тем, что преобразования (4.4.16), (4.4.16') являются, по сути, преобразованиями суперсимметрии, групповым параметром  $\zeta$  которых является элемент грассмановой алгебры.

Обратим внимание на то, что рассмотренные преобразования вследствие уравнений поля можно интерпретировать как калибровочные преобразования полей  $A_\mu^a, F_{\mu\nu}^a$  (см. п. 4.4.1) с калибровочной функцией

$$\omega^a(x) = i\zeta c^a(x), \quad (4.4.30)$$

дополненные преобразованиями ферми-полей  $\psi, \bar{\psi}, c, \bar{c}$ . Таким образом, можно сказать, что наличие духовых ферми-полей, описываемых лагранжианом  $\mathcal{L}_c$ , восстанавливает калибровочную инвариантность теории, описываемой лагранжианом  $\mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b$  на классе калибровочных преобразований, определяемых полем  $c^a(x)$ . Напомним, что часть лагранжиана  $\mathcal{L}_b$  (нарушающая инвариантность теории с одним только лагранжианом  $\mathcal{L}_a$ ) была необходима в квантовой теории при применении динамического принципа для того, чтобы можно было выразить все переменные поля через динамически независимые переменные.

**4.4.4. Квантовая теория калибровочных и фермионных полей в пренебрежении взаимодействием.** Лагранжиан  $\mathcal{L}_a$  содержит слагаемые, пропорциональные константе  $g$ , которые описывают эффекты самодействия калибровочного поля и взаимодействия калибровочного поля с дираковскими полями. Кроме того, константа  $g$  входит в лагранжиан  $\mathcal{L}_c$ , и соответствующее слагаемое описывает взаимодействие калибровочного поля с фермионными полями  $\bar{c}^a, c^a, \bar{\psi}_\mu^a, \psi_\mu^a$ .

При построении теории возмущений естественно начать с рассмотрения свободного поля, которому соответствует приближение  $g = 0$ .

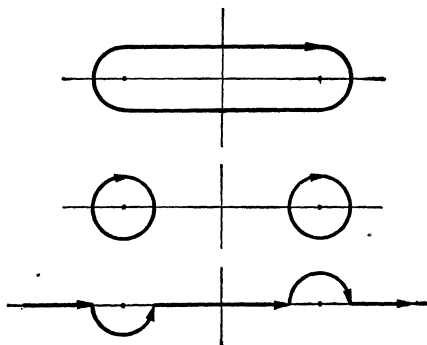


Рис. 30

Далее так же, как в квантовой электродинамике, мы будем строить теорию возмущений по степеням величины  $g$ , играющей роль константы связи, аналогичной величине  $e$  в квантовой электродинамике, которая описывает взаимодействие электромагнитного и электронно-позитронного полей. Таким образом, исходным приближением будет приближение свободных полей.

Вместо уравнений поля (4.4.8), (4.4.10) первого порядка для величин  $F$ ,  $A$ ,  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $\varphi$ ,  $c$ ,  $\bar{c}$  легко получить уравнения поля второго порядка для операторов  $A_\mu^a$ ,  $c^a$ ,  $\bar{c}^a$ . При  $g = 0$  эти уравнения, очевидно, имеют вид

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu^a - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\nu \partial^\mu A_\mu^a = 0, \quad \partial^\mu \partial_\mu c^a = \partial^\mu \partial_\mu \bar{c}^a = 0. \quad (4.4.31)$$

Динамически независимые переменные  $A_\nu^a$ ,  $\partial_0 A_\nu^a$ ,  $c^a$ ,  $\partial_0 c^a$ ,  $\bar{c}^a$ ,  $\partial_0 \bar{c}^a$  согласно (4.4.7) удовлетворяют следующим одновременным перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} \{\partial_0 \bar{c}^a(x), c^b(x')\}_{t=t'} &= \delta_{ab} \delta(x - x'), \\ \{\partial_0 c^a(x), \bar{c}^b(x')\}_{t=t'} &= -\delta_{ab} \delta(x - x'), \\ [\partial_0 A_k^a(x), A^{bl}(x')\}_{t=t'} &= i \delta_k^l \delta_{ab} \delta(x - x'), \\ [\partial_0 A_0^a(x), A_0^b(x')\}_{t=t'} &= i \xi \delta_{ab} \delta(x - x') \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

(здесь записаны только нетривиальные перестановочные соотношения). Решение задачи Коши для уравнения  $\partial^\mu \partial_\mu \varphi = 0$  имеет вид

$$\varphi(x) = \int d^3x' \{ \mathcal{D}(x - x') \partial_0' \varphi(x') + \varphi(x') \partial_0 \mathcal{D}(x - x') \},$$

где  $\mathcal{D}(x)$  — та же функция, которую мы ввели при квантовании свободного электромагнитного поля (см. п. 2.3.1). Отсюда и из (4.4.32) следуют релятивистски-инвариантные разновременные перестановочные соотношения для полей  $c^a$ ,  $\bar{c}^a$ :

$$\begin{aligned} \{\bar{c}^a(x), c^b(x')\} &= \delta_{ab} \mathcal{D}(x - x'), \\ \{c^a(x), c^b(x')\} &= \{\bar{c}^a(x), \bar{c}^b(x')\} = 0. \end{aligned} \quad (4.4.33)$$

Согласно (4.4.31), (4.4.32) при  $\xi = 1$  разновременные перестановочные соотношения для полей  $A_\mu^a(x)$  имеют вид

$$[A_\mu^a(x), A_\nu^b(x')] = i \delta_{ab} g_{\mu\nu} \mathcal{D}(x - x').$$

Для произвольного  $\xi$  перестановочные соотношения для этих полей имеют вид

$$\begin{aligned} [A_\mu^a(x), A_\nu^b(x')] &= i \delta_{ab} \mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x'; \xi), \\ \mathcal{D}_{\mu\nu}(x; \xi) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_0} \frac{d^4k}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) e^{-ikx}, \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

где интегрирование по  $k_0$  производится по контуру  $C_0$ , показанному на рис. 30.

Действительно, функция  $\mathcal{D}_{\mu\nu}(x; \xi)$  удовлетворяет уравнению

$$\left(\partial^\lambda \partial_\lambda \delta_\nu^\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\nu \partial^\mu\right) \mathcal{D}_{\mu\rho}(x; \xi) = 0, \quad (4.4.35)$$

так как

$$\left(-k^2 \delta_\nu^\mu + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k_\nu\right) \left(g_{\mu\rho} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\rho}{k^2}\right) = -k^2 g_{\nu\rho}, \quad k^2 = k^\mu k_\mu,$$

и следовательно, подынтегральное выражение для функции  $\left(\partial^\lambda \partial_\lambda \delta_\nu^\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\nu \partial^\mu\right) \mathcal{D}_{\mu\rho}(x; \xi)$  не будет содержать особенности  $1/k^2$ ; поэтому при интегрировании по  $k_0$  вдоль контура  $C_0$  мы получим нуль. Наконец, легко видеть, что справедливы формулы

$$\begin{aligned} \partial_0 \mathcal{D}_{k\lambda}(x; \xi)|_{t=0} &= g_{k\lambda} \delta(x), & \partial_0 \mathcal{D}_{0\lambda}(x; \xi)|_{t=0} &= \xi g_{0\lambda} \delta(x), \\ \mathcal{D}_{\mu\nu}(x; \xi)|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.4.35), учитывая перестановочные соотношения (4.4.32) и уравнения поля (4.4.31), приходим к соотношению (4.4.34).

Определим связи операторов свободного поля. С этой целью отметим, что положительно частотные части операторов являются операторами уничтожения, т. е.

$$A_\mu^{a(+)}(x) \Phi_0 = 0, \quad c^{a(+)}(x) \Phi_0 = 0, \quad \bar{c}^{a(+)}(x) \Phi_0 = 0 \quad (4.4.36)$$

( $\Phi_0$  — вектор состояния вакуума), а отрицательно частотные части полевых операторов  $A_\mu^{a(-)}$ ,  $c^{a(-)}$ ,  $\bar{c}^{a(-)}$  являются операторами рождения. Связи между двумя операторами, так же как и в электродинамике, определяются как разность  $T$ - и  $N$ -произведений этих операторов или как среднее по вакууму от  $T$ -произведения этих же операторов. Поэтому

$$\underline{\bar{c}^a(x) c^b(x')} = \begin{cases} (\Phi_0, \{\bar{c}^{a(+)}(x), c^{b(-)}(x')\} \Phi_0), & t > t', \\ -(\Phi_0, \{c^{b(+)}(x'), \bar{c}^{a(-)}(x)\} \Phi_0), & t < t'. \end{cases}$$

Из перестановочных соотношений (4.4.33) вытекает

$$\begin{aligned} \{c^{a(+)}(x), c^{b(-)}(x')\} &= \delta_{ab} \mathcal{D}^{(+)}(x - x'), \\ \{\bar{c}^{a(-)}(x), \bar{c}^{b(+)}(x')\} &= \delta_{ab} \mathcal{D}^{(-)}(x - x'), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\underline{\bar{c}^a(x) c^b(x')} = \begin{cases} \delta_{ab} \mathcal{D}^{(+)}(x - x'), & t > t', \\ -\delta_{ab} \mathcal{D}^{(-)}(x - x'), & t < t'. \end{cases}$$

Отсюда, используя определение (2.6.24) функции  $\mathcal{D}^c(x)$ , находим

$$\underline{\bar{c}^a(x) c^b(x')} = \delta_{ab} \mathcal{D}^c(x - x'), \quad \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x, 1) \equiv g_{\mu\nu} \mathcal{D}^c(x). \quad (4.4.37)$$

Аналогично находим связь между операторами  $A_\mu^a(x)$  и  $A_\nu^b(x')$ :

$$\begin{aligned} \underline{A_\mu^a(x) A_\nu^b(x')} &= \begin{cases} i \delta_{ab} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{(+)}(x - x'; \xi), & t > t', \\ -i \delta_{ab} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{(-)}(x - x'; \xi), & t < t', \end{cases} = \\ &= i \delta_{ab} \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x - x'; \xi). \end{aligned} \quad (4.4.38)$$



Так же, как и в квантовой электродинамике, легко видеть, что функцию  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi)$  можно представить в виде

$$\mathcal{D}_{\nu\mu}^c(x; \xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikx} \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi),$$

$$D_{\nu\mu}^c(k; \xi) = -\frac{1}{k^2 + i0} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i0} \right). \quad (4.4.39)$$

Связи между остальными парами операторов равны нулю, т. е.

$$\underline{cc} = \underline{\bar{c}\bar{c}} = \underline{\bar{c}A} = \underline{\bar{c}A} = 0. \quad (4.4.40)$$

Как увидим в следующем параграфе, гамильтониан взаимодействия содержит производные от операторов  $A_\mu^a$ . Поэтому найдем еще связи между операторами  $A_\mu^a$ ,  $\partial_\mu A_\lambda^a$ . С этой целью отметим, что для бозевских операторов  $u$  и  $v$  справедлива общая формула

$$\partial_\mu T(u(x)v(x')) = T(\partial_\mu u(x)v(x')) + \delta_\mu^0 \delta(t-t') [u(x), v(x')].$$

Эта формула следует из того, что

$$\begin{aligned} T(u(x)v(x')) &= \theta(t-t') u(x)v(x') + \theta(t'-t) v(x')u(x), \\ \partial_0 \theta(t-t') &= \delta(t-t'). \end{aligned} \quad (4.4.41)$$

Поэтому, дифференцируя формулу (4.4.38) по  $x_\lambda$  и учитывая, что  $\delta(t-t') [A_\mu^a(x), A_\nu^b(x')] = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \underline{\partial_\lambda A_\mu^a(x) A_\nu^b(x')} &= (\Phi_0 T \{ \partial_\lambda A_\mu^a(x) A_\nu^b(x') \} \Phi_0) = \\ &= i \delta_{ab} \partial_\lambda \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi). \end{aligned} \quad (4.4.42)$$

Дифференцируя эту формулу по  $x'_\rho$  и используя (4.4.41) и одновременные перестановочные соотношения (4.4.32), находим

$$\begin{aligned} \underline{\partial_\lambda A_\mu^a(x) \partial'_\rho A_\nu^b(x')} &= -i \delta_{ab} \partial_\rho \partial_\lambda \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi) - \\ &- i \delta_\rho^0 \delta_\lambda^0 \bar{g}_{\mu\nu} \delta_{ab} \delta(x-x'), \end{aligned} \quad (4.4.42')$$

где

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0.$$

Вводя оператор

$$F_{\lambda\mu}^a(x) \equiv \partial_\lambda A_\mu^a(x) - \partial_\mu A_\lambda^a(x),$$

совпадающий с оператором  $F_{\lambda\mu}^a$  (см. (4.4.8)) при  $g = 0$ , находим связь между операторами  $F_{\lambda\mu}^a(x)$  и  $F_{\rho\nu}^b(x')$ :

$$\begin{aligned} \underline{F_{\lambda\mu}^a(x) F_{\rho\nu}^b(x')} &= i \delta_{ab} \{ \partial_\mu \partial_\rho \mathcal{D}_{\lambda\nu}^c(x-x'; \xi) - \partial_\rho \partial_\lambda \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi) + \\ &+ \partial_\lambda \partial_\nu \mathcal{D}_{\mu\rho}^c(x-x'; \xi) - \partial_\mu \partial_\nu \mathcal{D}_{\lambda\rho}^c(x-x'; \xi) \} - \\ &- i \delta_{ab} \{ \delta_\rho^0 \delta_\lambda^0 \bar{g}_{\mu\nu} - \delta_\nu^0 \delta_\lambda^0 \bar{g}_{\mu\rho} + \delta_\nu^0 \delta_\mu^0 \bar{g}_{\lambda\rho} - \delta_\rho^0 \delta_\mu^0 \bar{g}_{\lambda\nu} \} \delta(x-x'). \end{aligned}$$

Используя определение величин  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , эту формулу можно представить в виде

$$\begin{aligned} \underline{F_{\lambda\mu}^a(x) F_{\rho\nu}^b(x')} &= i\delta_{ab} \{ \partial_\mu \partial_\rho \mathcal{D}_{\lambda\nu}^c(x-x'; \xi) - \partial_\rho \partial_\lambda \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi) + \\ &+ \partial_\lambda \partial_\nu \mathcal{D}_{\mu\rho}^c(x-x'; \xi) - \partial_\mu \partial_\nu \mathcal{D}_{\lambda\rho}^c(x-x'; \xi) \} - i\delta_{ab} \{ \delta_\rho^0 \delta_\lambda^0 g_{\mu\nu} - \\ &- \delta_\nu^0 \delta_\lambda^0 g_{\mu\rho} + \delta_\nu^0 \delta_\mu^0 g_{\lambda\rho} - \delta_\rho^0 \delta_\mu^0 g_{\lambda\nu} \} \delta(x-x'). \end{aligned} \quad (4.4.43)$$

Мы рассмотрели свободные калибровочные и духовые фермионные поля. Перейдем к рассмотрению свободных фермионных (кварковых) полей. Уравнения движения этих полей имеют вид

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q(x) = 0, \quad (i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu + m)\bar{q}(x) = 0. \quad (4.4.44)$$

Отсюда согласно одновременным перестановочным соотношениям (4.4.7) так же, как в п. 2.5.2, можно получить разновременные перестановочные соотношения

$$\{q(x), \bar{q}(x')\} = -iS(x-x') \quad (4.4.45)$$

и найти связи операторов  $q, \bar{q}$ :

$$\underline{q(x)\bar{q}(x')} = -iS^c(x-x'), \quad (4.4.46)$$

где функции  $S(x), S^c(x)$  определяются формулами (2.5.7), (2.5.40). Для вакуума фермионного поля справедливо соотношение

$$q^{(+)}(x)\Phi_0 = \bar{q}^{(+)}(x)\Phi_0 = 0. \quad (4.4.47)$$

Приведем еще разложение операторов полей на плоские волны. Разложение полей  $A_\mu^a(x)$  мы запишем в фейнмановской калибровке  $\xi = 1$  (общий случай рассмотрен в п. 2.4.2):

$$A_\mu^a(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k\lambda=0}^3 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{ e_{k\mu}^{(\lambda)} c_{k\lambda}^a e^{-ikx} + e_{k\mu}^{(\lambda)*} c_{k\lambda}^{a+} e^{ikx} \}, \quad (4.4.48)$$

где  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  — векторы поляризации, аналогичные векторам поляризации электромагнитного поля и определяемые формулами (1.4.36), (1.4.37);  $c_{k\lambda}^a, c_{k\lambda}^{a+}$  — операторы уничтожения и рождения, удовлетворяющие, согласно (4.4.32), перестановочным соотношениям

$$[c_{k\lambda}^a, c_{k'\lambda'}^{b+}] = \zeta_\lambda \delta_{ab} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{kk'} \quad (4.4.49)$$

( $\zeta_\lambda = 1$  для  $\lambda = 1, 2, 3$  и  $\zeta_\lambda = -1$  для  $\lambda = 0$ ). Операторы  $c_{k\lambda}^a, c_{k\lambda}^{a+}$  для  $\lambda = 3, 0$  являются операторами уничтожения и рождения продольных и скалярных (по отношению к группе Лоренца) частиц, которые реально не существуют (духи). Состояние вакуума в соответствии с (4.4.36) определяется так:

$$c_{k\lambda}^a \Phi_0 = 0.$$

При этом вследствие перестановочных соотношений (4.4.49) пространство векторов состояний обладает индефинитной метрикой (векторы состояний  $\Phi$  с нечетным числом скалярных частиц обладают отрицательной нормой,  $(\Phi, \Phi) < 0$ ).

Чтобы ввести операторы рождения и уничтожения фермионных духов, вместо эрмитовых фермионных полей  $c^a(x)$ ,  $\bar{c}^a(x)$  введем неэрмитово поле

$$d^a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c^a(x) + i\bar{c}^a(x)) \quad (4.4.50)$$

и сопряженное ему поле

$$d^{a+}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c^a(x) - i\bar{c}^a(x)).$$

Из перестановочных соотношений (4.4.33) для  $c^a$ ,  $\bar{c}^a$  следуют перестановочные соотношения для полей  $d^a$ ,  $d^{a+}$ :

$$\begin{aligned} \{d^a(x), d^{a'}(x')\} &= \{d^{a+}(x), d^{a'+}(x')\} = 0, \\ \{d^a(x), d^{a'+}(x')\} &= i\delta_{aa'}\mathcal{D}(x-x'). \end{aligned} \quad (4.4.51)$$

Раскладывая поле  $d^a(x)$  на плоские волны

$$\begin{aligned} d^a(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (d_{\mathbf{k}}^a e^{-ikx} + f_{\mathbf{k}}^{a+} e^{ikx}), \\ d^{a+}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (d_{\mathbf{k}}^{a+} e^{ikx} + f_{\mathbf{k}}^a e^{-ikx}), \quad \omega = |\mathbf{k}|, \end{aligned} \quad (4.4.52)$$

получаем следующие перестановочные соотношения для операторов  $d_{\mathbf{k}}^a$ ,  $f_{\mathbf{k}}^a$ :

$$\{d_{\mathbf{k}}^a, d_{\mathbf{k}'}^{a'+}\} = -\delta_{aa'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad \{f_{\mathbf{k}}^a, f_{\mathbf{k}'}^{a'+}\} = \delta_{aa'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (4.4.53)$$

(остальные антикоммутаторы равны нулю). Вакуум, как обычно, удовлетворяет условиям

$$c^{a(+)}(x)\Phi_0 = \bar{c}^{a(+)}(x)\Phi_0 = 0$$

или

$$d^{a(+)}(x)\Phi_0 = d^{a'+(+)}(x)\Phi_0 = 0.$$

Тогда

$$d_{\mathbf{k}}^a\Phi_0 = f_{\mathbf{k}}^a\Phi_0 = 0,$$

откуда следует, что операторы  $d_{\mathbf{k}}^a$ ,  $f_{\mathbf{k}}^a$  являются операторами уничтожения, а  $d_{\mathbf{k}}^{a+}$ ,  $f_{\mathbf{k}}^{a+}$  — операторами рождения фермионных духов с импульсом  $\mathbf{k}$ . Обратим внимание на то, что так как  $\{d_{\mathbf{k}}^a, d_{\mathbf{k}}^{a+}\} = -1$ , то метрика в пространстве состояний фермионных духов является индефинитной (состояния с нечетным числом духов типа  $d$  обладают отрицательной нормой). Напомним, что аналогичная ситуация наблюдалась для бозонных состояний, связанных со скалярными степенями свободы поля  $A_{\mu}^a(x)$ .

Разложение фермионных полей  $\bar{q}(x)$ ,  $q(x)$  определяется формула-

ми (2.5.27), (2.5.28):

$$q_i(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}\mu} \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \{a_{\mathbf{p}\mu i} u^\mu(\mathbf{p}) e^{-i\rho x} + b_{\mathbf{p}\mu i}^+ u^\mu(\mathbf{p})^c e^{i\rho x}\},$$

$$\bar{q}_i(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}\mu} \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \{a_{\mathbf{p}\mu i}^+ \bar{u}^\mu(\mathbf{p}) e^{i\rho x} + b_{\mathbf{p}\mu i} \bar{u}^\mu(\mathbf{p})^c e^{-i\rho x}\},$$
(4.4.54)

где операторы рождения и уничтожения кварков и антикварков удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\{a_{\mathbf{p}\mu i}, a_{\mathbf{p}'\mu' i'}^+\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{ii'}, \quad \{b_{\mathbf{p}\mu i} b_{\mathbf{p}'\mu' i'}^+\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{ii'}$$

( $i = 1, 2, \dots, n$  — индекс фундаментального представления группы  $SU(n)$  или цвет, если  $n = 3$ ).

## § 4.5. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

**4.5.1. Переход к представлению взаимодействия.** Выше развита квантовая теория калибровочных и фермионных полей при отсутствии взаимодействия ( $g = 0$ ). Здесь мы перейдем от уравнений взаимодействующих полей в гейзенберговском представлении (которые рассматривались в п. 4.4.2) к уравнениям взаимодействующих полей в представлении взаимодействий.

Согласно (4.4.1), (4.4.2), (4.4.5) плотность энергии взаимодействующих полей определяется формулой

$$\begin{aligned} \omega(x) = & \frac{1}{4} F_{kl}^a F^{akl} - \frac{1}{2} F_{0k}^a F^{a0k} - F^{a0k} \partial_k A_0^a + g F^{a0k} (A_0 \times A_k)^a - \\ & - \frac{1}{4} [\bar{q}, (i\gamma^k \partial_k - m) q] - \frac{1}{4} [q, (i\tilde{\gamma}^k \partial_k + m) \bar{q}] - g \mathcal{J}_\mu^a A^{\mu} - \\ & - \frac{1}{2\xi} (\varphi^a \varphi^a - \{\varphi^a, \partial^k A_k^a\}) + \frac{i}{2} [\bar{\psi}_k^a, \mathcal{D}^k c^a] + \frac{i}{2} [\bar{\psi}_0^a, g (A_0 \times c)^a] + \\ & + \frac{i}{2} [\bar{\psi}_k^a, \partial^k \bar{c}^a] - \frac{i}{2} [\bar{\psi}_\mu^a, \psi^{\mu}]. \end{aligned}$$

В это выражение входят как динамически независимые компоненты поля, так и компоненты поля, определяемые уравнениями связей

$$F_{kl}^a = \partial_k A_l^a - \partial_l A_k^a - g (A_k \times A_l)^a,$$

$$\psi_k^a = \mathcal{D}_k c^a, \quad \bar{\psi}_k^a = -\partial_k \bar{c}^a.$$

Мы должны выразить  $\omega(x)$  только через динамически независимые компоненты поля. Учитывая уравнения связи, получаем

$$\omega(x) = \omega_0(x) + \omega_{\text{int}}(x),$$

где  $\omega_0(x)$  — плотность гамильтониана свободного поля:

$$\omega_0(x) = \frac{1}{4} (\partial_k A_l^a - \partial_l A_k^a)^2 - \frac{1}{2} F_{0k}^a F^{a0k} - F^{a0k} \partial_k A_0^a -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\xi} (\varphi^a \varphi^a - 2\varphi^a \partial^k A_k^a) - \frac{1}{4} [\bar{q}, (i\gamma^k \partial_k - m) q] - \\
& -\frac{1}{4} [q, (i\tilde{\gamma}^k \partial_k + m) \bar{q}] + \frac{i}{2} [\partial_k c^a, \partial^k \bar{c}^a] - \frac{i}{2} [\bar{\psi}_0^a, \psi^{a0}] \quad (4.5.1)
\end{aligned}$$

■  $\omega_{\text{int}}(x)$  — плотность гамильтониана взаимодействия:

$$\begin{aligned}
\omega_{\text{int}}(x) = & \frac{1}{2} g (\partial_k A_l^a - \partial_l A_k^a) (A^k \times A^l)^a + \frac{1}{4} g^2 (A^k \times A^l)^a (A_k \times A_l)^a + \\
& + g F^{a0k} (A_0 \times A_k)^a - g A_\mu^a \mathcal{G}^{a\mu} + \frac{ig}{2} [\bar{\psi}_0^a, (A^0 \times c)^a] - \\
& - \frac{ig}{2} [\partial_k \bar{c}^a, (A^0 \times c)^a]. \quad (4.5.2)
\end{aligned}$$

Чтобы перейти к представлению взаимодействия, согласно п. 2.1.1 следует произвести унитарное преобразование операторов поля

$$\chi(x) \rightarrow \underline{\chi}(x) = S(t, 0) \chi(x) S^\dagger(t, 0),$$

где оператор  $S(t, 0)$  удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial S(t, 0)}{\partial t} = \int d^3x \omega_{\text{int}}(x) S(t, 0), \quad S(0, 0) = 1. \quad (4.5.3)$$

Динамически независимые переменные поля в гейзенберговском представлении и представлении взаимодействия удовлетворяют уравнениям

$$i \partial_0 \underline{\chi}(x) = [\underline{\mathcal{H}}, \underline{\chi}(x)], \quad i \partial_0 \underline{\chi}(x) = [\underline{\mathcal{H}}_0, \underline{\chi}(x)], \quad (4.5.4)$$

где  $\underline{\mathcal{H}}_0 = \int d^3x \omega_0(x)$ . Так как одновременные перестановочные соотношения в гейзенберговском представлении и представлении взаимодействия совпадают, то уравнения движения для динамически независимых компонент поля в представлении взаимодействия совпадают с уравнениями движения для динамически независимых компонент поля в гейзенберговском представлении при  $g = 0$ . В частности,

$$\underline{F}^{a0k} = \partial_0 \underline{A}^{ak} - \partial^k \underline{A}^{a0}, \quad \underline{\bar{\psi}}_0^a = -\partial_0 \underline{\bar{c}}^a. \quad (4.5.5)$$

Поэтому согласно (4.5.2), (4.5.5)

$$\underline{\omega}_{\text{int}}(x) = \underline{v}(x) + \underline{v}'(x), \quad (4.5.6)$$

где

$$\begin{aligned}
\underline{v}(x) = & \frac{1}{2} g \underline{F}_{\mu\nu}^a (\underline{A}^\mu \times \underline{A}^\nu)^a + \frac{g^2}{4} (\underline{A}_\mu \times \underline{A}_\nu)^a (\underline{A}^\mu \times \underline{A}^\nu)^a - \\
& - \frac{ig}{2} [\partial_\mu \bar{c}^a, (\underline{A}^\mu \times \underline{c})^a] - g \underline{A}_\mu^a \underline{\mathcal{G}}^{a\mu}, \quad \underline{F}_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu \underline{A}_\nu^a - \partial_\nu \underline{A}_\mu^a, \\
\underline{v}'(x) = & -\frac{g^2}{2} (\underline{A}_0 \times \underline{A}_k)^a (\underline{A}^0 \times \underline{A}^k)^a.
\end{aligned}$$

Уравнение Шредингера в представлении взаимодействия для вектора состояния  $\underline{\Phi}(t)$  имеет вид

$$i \frac{\partial \underline{\Phi}(t)}{\partial t} = (\underline{V}(t) + \underline{V}'(t)) \underline{\Phi}(t), \quad (4.5.7)$$

$$\underline{V}(t) = \int d^3x \underline{v}(x), \quad \underline{V}'(t) = \int d^3x \underline{v}'(x).$$

Так как в представлении взаимодействия одновременные перестановочные соотношения и уравнения движения для динамически независимых компонент поля совпадают с одновременными перестановочными соотношениями и уравнениями движения для свободного поля ( $g = 0$ ), то разновременные перестановочные соотношения для операторов поля в представлении взаимодействия совпадают с перестановочными соотношениями для свободных полей

$$\begin{aligned} \{\underline{\tilde{c}}^a(x), \underline{\tilde{c}}^b(x')\} &= \delta_{ab} \mathcal{D}(x - x'), \quad [\underline{A}_\mu^a(x), \underline{A}_\nu^b(x')] = i \delta_{ab} \mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x'; \xi), \\ \{q(x), \bar{q}(x')\} &= -i S(x - x'). \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Кроме того, связи между операторами  $\underline{c}$ ,  $\bar{c}$ ,  $q$ ,  $\bar{q}$ ,  $A$ ,  $\partial A$  определяются формулами (4.4.37), (4.4.38), (4.4.42), ( $\tilde{4.4.42}'$ ), ( $\tilde{4.4.46}$ ).

Переходя к представлению взаимодействия, мы можем (см. п. 2.1.1) определить матрицу рассеяния

$$S = T \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} dt (\underline{V}(t) + \underline{V}'(t)) \right). \quad (4.5.9)$$

Отметим, что это выражение, в отличие от выражения для матрицы рассеяния в квантовой электродинамике, не является явно релятивистски-инвариантным — оно содержит релятивистски-неинвариантное выражение  $\int_{-\infty}^{\infty} dt \underline{V}'(t)$  (интеграл же  $\int_{-\infty}^{\infty} dt \underline{V}(t)$  представляет собой релятивистский скаляр). При этом выражение для связей операторов  $\partial_\lambda A(x)$  и  $\partial_\lambda A(x')$  (4.4.43), необходимое для определения матричных элементов  $\underline{S}$ -матрицы, также содержит релятивистски-неинвариантное слагаемое. Однако связи и  $S$ -матрицу можно переопределить таким образом, чтобы они не содержали релятивистски-неинвариантных выражений. Именно матрицу рассеяния  $S$  можно записать в виде

$$S = T \exp \left( -i \int d^4x \underline{v}(x) \right), \quad (4.5.10)$$

если связи между бозонными операторами определить не формулами (4.4.38), (4.4.42), (4.4.43), а формулами

$$\underline{A}_\mu^a(x) \underline{A}_\nu^b(x') = i \delta_{ab} \underline{\mathcal{D}}_{\mu\nu}^c(x - x'; \xi),$$

$$\partial_\lambda \underbrace{A_\mu^a(x)}_{\sim} \underbrace{A_\nu^b(x')}_\sim = i \delta_{ab} \partial_\lambda \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x - x'; \xi), \quad (4.5.11)$$

$$\partial_\lambda \underbrace{A_\mu^a(x)}_{\sim} \partial'_\rho \underbrace{A_\nu^b(x')}_\sim = -i \delta_{ab} \delta_\rho \partial_\lambda \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x - x'; \xi)$$

(связи между фермионными операторами  $c, \bar{c}, q, \bar{q}$  остаются прежними).

Чтобы убедиться в этом, согласно (3.2.16) выполним N-упорядочение S-матрицы (4.5.9) по переменным  $F_{\mu\nu}^a$ :

$$S = N_F T_{Ac} e^{\Delta + \Delta'} \exp\left(-i \int d^4x \omega_{\text{int}}(x)\right), \quad (4.5.12)$$

где  $N_F$  — символ N-упорядочения по полям  $F_{\mu\nu}^a$ ;  $T_{Ac}$  — символ T-упорядочения по полям  $A, c, \bar{c}$  и согласно (4.4.43)

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \frac{\delta}{\delta F_{\lambda\mu}^a(x_1)} \underbrace{F_{\lambda\mu}^a(x_1)}_{\sim} \underbrace{F_{\rho\nu}^b(x_2)}_{\sim} \frac{\delta}{\delta F_{\rho\nu}^b(x_2)}, \quad (4.5.13)$$

$$\underbrace{F_{\lambda\mu}^a(x)}_{\sim} \underbrace{F_{\rho\nu}^b(x')}_\sim = i \delta_{ab} \{\partial_\mu \partial_\rho \mathcal{D}_{\lambda\nu}^c(x - x'; \xi) - \partial_\rho \partial_\lambda \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x - x'; \xi) +$$

$$+ \partial_\lambda \partial_\nu \mathcal{D}_{\mu\rho}^c(x - x'; \xi) - \partial_\mu \partial_\nu \mathcal{D}_{\lambda\rho}^c(x - x'; \xi)\},$$

$$\Delta' = -\frac{1}{8} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \frac{\delta}{\delta F_{\lambda\mu}^a(x_1)} i \delta_{ab} (\delta_\rho^0 \delta_\lambda^0 g_{\mu\nu} - \delta_\nu^0 \delta_\lambda^0 g_{\mu\rho} +$$

$$+ \delta_\nu^0 \delta_\mu^0 g_{\lambda\rho} - \delta_\rho^0 \delta_\mu^0 g_{\lambda\nu}) \delta(x_1 - x_2) \frac{\delta}{\delta F_{\rho\nu}^b(x_2)}.$$

Замечая, что

$$\frac{\delta}{\delta F_{\lambda\mu}^a(x)} \frac{1}{i} \int d^4x \omega_{\text{int}}(x) = -ig (A^\lambda \times A^\mu)^a,$$

в выражении для  $\Delta'$  операторы функционального дифференцирования  $\delta/\delta F_{\lambda\mu}^a(x)$  в применении к экспоненте  $\exp \frac{1}{i} \int d^4x \omega_{\text{int}}(x)$  можно заменить множителем  $-ig (A^\lambda \times A^\mu)^a$ . В результате выражение (4.5.12) для S-матрицы можно привести к виду

$$S = N_F T_{Ac} e^\Delta \exp\left(-i \int d^4x \underline{v}(x)\right) \quad (4.5.14)$$

(см. определение (4.5.6) операторов  $\underline{v}$  и  $\underline{v}'$ ), где оператор функционального дифференцирования согласно (4.5.13) определяется формулой

$$\Delta = \frac{1}{8} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \frac{\delta}{\delta F_{\lambda\mu}^a(x_1)} \underbrace{F_{\lambda\mu}^a(x_1)}_{\sim} \underbrace{F_{\rho\nu}^b(x_2)}_{\sim} \frac{\delta}{\delta F_{\rho\nu}^b(x_2)}, \quad (4.5.15)$$

в которой использовано релятивистски-инвариантное определение связей (4.5.13), (4.5.11).

Отметим, что выражение для  $\underline{v}(x)$  формально совпадает с выраже-

нием для  $-\mathcal{L}'$ ,  $\tilde{v} = -\mathcal{L}'$  (определение  $\mathcal{L}'$  введено в п. 4.4.1). Формула (4.5.14), очевидно, эквивалентна формулам (4.5.10), (4.5.11).

Обратим внимание на то, что в выражение для  $\tilde{v}(x)$  входят производные  $\partial_\mu \bar{c}^a$ . Но так как согласно (4.4.32)

$$\underbrace{\partial_\mu \bar{c}}_{\tilde{v}} c = \partial_\mu (\underbrace{\bar{c}}_{\tilde{v}} c), \quad \partial_\mu \underbrace{\bar{c}}_{\tilde{v}} \partial_\nu \bar{c} = 0,$$

то производные  $\partial_\mu \bar{c}$  не приводят к нековариантным слагаемым в  $S$ -матрице.

**4.5.2. Переход к импульсному представлению.** Имея выражение для матрицы рассеяния  $S$  и предполагая константу связи малой, можно построить теорию возмущений, разложив  $S$  в ряд по степеням  $g$ . Для этого матрицу рассеяния удобно представить в виде

$$S = T \exp iW', \quad W' = W_1 + W_2 + W_3 + W_4. \quad (4.5.16)$$

Действие  $W_1$  описывает взаимодействие калибровочного поля  $A_\mu^a$  с фермионными духами:

$$W_1 = igf^{abc} \int d^4x \partial^\mu \bar{c}^a A_\mu^b c^c, \quad (4.5.17)$$

действие  $W_2$  — тройное взаимодействие калибровочных полей:

$$W_2 = -\frac{1}{2} g f^{abc} \int d^4x A_\mu^b A_\nu^c (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a); \quad (4.5.18)$$

действие  $W_3$  — четверное взаимодействие калибровочных полей:

$$W_3 = -\frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{adl} \int d^4x A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu\nu} A^{\lambda\rho} \quad (4.5.19)$$

и, наконец, действие  $W_4$  описывает взаимодействие калибровочного поля с фермионным (кварковым) полем:

$$W_4 = g \int d^4x A_\mu^a \mathcal{J}^{a\mu}, \quad \mathcal{J}^{a\mu} = \frac{1}{2} [\bar{q}, \gamma^\mu T_a q]. \quad (4.5.20)$$

Так же, как в случае квантовой электродинамики, мы должны  $N$ -упорядочить матрицу рассеяния, т. е. воспользоваться для преобразования  $T$ -произведения в сумму  $N$ -произведений правилами Вика. Можно, однако, непосредственно воспользоваться формулой (3.2.16)

$$T\mathcal{F}(A, q, c, \bar{c}) = : \exp(\Delta + \Sigma + \Xi) \mathcal{F}(A, q, c, \bar{c}) : , \quad (4.5.21)$$

где

$$\Delta = \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi) \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \frac{\delta}{\delta A_\nu^a(x')};$$

$$\Xi = \int d^4x d^4x' \mathcal{D}^c(x-x') \frac{\delta}{\delta c^a(x)} \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a(x')};$$

$$\Sigma = i \int d^4x d^4x' \frac{\delta}{\delta q(x)} S^c(x-x') \frac{\delta}{\delta \bar{q}(x')}.$$



В результате действия оператора  $\exp(\Delta + \Sigma + \Xi)$  на произведение операторов полей получим сумму их  $N$ -произведений, в которых операторы полей связаны всеми возможными связями (теорема Вика).

В соответствии с (4.5.21)  $S$ -матрицу можно представить в виде

$$S = : e^{\Delta + \Sigma + \Xi} \exp iW' : . \quad (4.5.22)$$

Отметим, что функции Грина полей  $\chi \equiv \{A, q, c, \bar{c}\}$  в лоренцевой калибровке (см. (3.5.15))

$$G(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{S_{\text{vac}}} (\Phi_0, T \{ \underline{\chi}(x_1) \dots \underline{\chi}(x_n) S \} \Phi_0)$$

(индекс «0» означает усреднение по вакууму свободных полей) имеют аналогичную структуру (см. § 4.2):

$$G(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{S_{\text{vac}}} e^{\Delta + \Sigma + \Xi} \{ \chi(x_1) \dots \chi(x_n) e^{iW'} \} |_{\chi=0}. \quad (4.5.23)$$

Перейдем снова к  $S$ -матрице (4.5.22). В формуле (4.5.22) величину  $\exp iW'$  (под знаком  $N$ -произведения) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \exp iW' = \\ & = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{m_1 + \dots + m_4 = N} \frac{N!}{m_1! \dots m_4!} (iW_1)^{m_1} (iW_2)^{m_2} (iW_3)^{m_3} (iW_4)^{m_4}. \quad (4.5.24) \end{aligned}$$

Операторы  $W_1, W_2$  содержат производные по координатам от операторов полей. Поэтому в отличие от квантовой электродинамики  $N$ -упорядочение  $S$ -матрицы удобно проводить, предварительно выполняя переход в импульсное представление

$$\begin{aligned} A_{\mu}^a(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikx} A_{\mu}^a(k), \quad c^a(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikx} c^a(k), \\ q(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} q(p). \quad (4.5.25) \end{aligned}$$

Матричные элементы оператора  $A_{\mu}^a(x)$  согласно (4.4.48) определяются так:

$$\begin{aligned} \langle 1_{k\lambda}^b | A_{\mu}^a(x) | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} e_{k\mu}^{(\lambda)*} \delta_{ab} e^{ikx}, \\ \langle 0 | A_{\mu}^a(x) | 1_{k\lambda}^b \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} e_{k\mu}^{(\lambda)} \delta_{ab} e^{-ikx}, \end{aligned}$$

а операторов  $q_{\alpha}(x), \bar{q}^{\alpha}(x)$ :

$$\begin{aligned} \langle \bar{1}_{p\mu\alpha} | q_{\alpha'}(x) | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} u^{\mu}(p)^c \delta_{\alpha\alpha'} e^{ipx}, \\ \langle 0 | q_{\alpha'}(x) | 1_{p\mu\alpha} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2q_0 V}} u^{\mu}(p) \delta_{\alpha\alpha'} e^{-ipx}, \\ \langle 1_{p\mu\alpha} | \bar{q}^{\alpha'}(x) | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} \bar{u}^{\mu}(p) \delta_{\alpha\alpha'} e^{ipx}, \end{aligned}$$

$$\langle 0 | \bar{q}^{\alpha'}(x) | \bar{1}_{\rho\mu\alpha} \rangle = \frac{1}{V^{2\rho_0 V}} \bar{u}^\mu(\mathbf{p})^c \delta_{\alpha\alpha'} e^{-i\rho x},$$

где  $|1_{k\lambda}^b\rangle = c_{k\lambda}^{b+} |0\rangle$ ,  $|1_{\rho\mu\alpha}\rangle \equiv a_{\rho\mu\alpha}^+ |0\rangle$ ,  $|\bar{1}_{\rho\mu\alpha}\rangle = b_{\rho\mu\alpha}^+ |0\rangle$  и т. д. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \langle 1_{k\lambda}^b | A_\mu^a(k') | 0 \rangle &= \frac{1}{V^{2\omega V}} e_{k\mu}^{(\lambda)*} \delta_{ab} (2\pi)^4 \delta(k + k'), \\ \langle 0 | A_\mu^a(k') | 1_{k\lambda}^b \rangle &= \frac{1}{V^{2\omega V}} e_{k\mu}^{(\lambda)} \delta_{ab} (2\pi)^4 \delta(k - k') \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

и

$$\begin{aligned} \langle 0 | q_{\alpha'}(\rho') | 1_{\rho\mu\alpha} \rangle &= \frac{1}{V^{2\rho_0 V}} u^\mu(\mathbf{p}) \delta_{\alpha\alpha'} (2\pi)^4 \delta(\rho - \rho'), \\ \langle 1_{\rho\mu\alpha} | \bar{q}^{\alpha'}(\rho') | 0 \rangle &= \frac{1}{V^{2\rho_0 V}} \bar{u}^\mu(\mathbf{p}) \delta_{\alpha\alpha'} (2\pi)^4 \delta(\rho + \rho'). \end{aligned} \quad (4.5.26')$$

Операторы  $W_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) согласно (4.5.25) можно представить в виде

$$W_1 = g (2\pi)^4 \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + k_3) V_\mu^{abc}(k_1, k_2, k_3) \times \\ \times A^{b\mu}(k_1) \bar{c}^a(k_3) c^c(k_2),$$

$$W_2 = g (2\pi)^4 \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + k_3) \tilde{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3) \times \\ \times A^{a\mu}(k_1) A^{b\nu}(k_2) A^{c\lambda}(k_3),$$

$$W_3 = g^2 (2\pi)^4 \int \prod_{i=1}^4 \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \tilde{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4) \times \\ \times A^{a\mu}(k_1) A^{b\nu}(k_2) A^{c\lambda}(k_3) A^{d\rho}(k_4),$$

$$W_4 = g (2\pi)^4 \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + k_3) : \bar{q}(k_1) V_\mu^a q(k_2) : A^{a\mu}(k_3), \quad (4.5.27)$$

где функции  $V_\mu^{abc}$ ,  $\tilde{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ ,  $\tilde{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$ ,  $V_\mu^a$  определяются формулами

$$\begin{aligned} V_\mu^{abc}(k_1, k_2, k_3) &= f^{abc} k_{3\mu}, \quad \tilde{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = \frac{i}{6} f^{abc} \times \\ &\times \{ (k_{1\nu} g_{\mu\lambda} - k_{1\lambda} g_{\mu\nu}) + (k_{2\lambda} g_{\mu\nu} - k_{2\mu} g_{\nu\lambda}) + (k_{3\mu} g_{\nu\lambda} - k_{3\nu} g_{\mu\lambda}) \}, \\ \tilde{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= -\frac{1}{4!} \{ f^{gac} f^{gbd} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}) + \\ &+ f^{gad} f^{gbc} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) + f^{gab} f^{gcd} (g_{\mu\nu} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}) \}, \quad (4.5.28) \\ V_\mu^a &= T^a \gamma_\mu. \end{aligned}$$

В импульсном пространстве функциональные операторы  $\Delta$ ,  $\Xi$ ,  $\Sigma$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{i}{2} (2\pi)^4 \int d^4k D_{\mu\nu}^c(k; \xi) \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(k)} \frac{\delta}{\delta A_\nu^a(-k)}, \\ \Xi &= (2\pi)^4 \int d^4k D^c(k) \frac{\delta}{\delta c^a(k)} \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a(-k)}, \\ \Sigma &= i (2\pi)^4 \int d^4p \frac{\delta}{\delta q(p)} S^c(p) \frac{\delta}{\delta \bar{q}(-p)},\end{aligned}\quad (4.5.29)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^c(k) &= -\frac{1}{k^2 + i0}, \quad S^c(p) = \frac{1}{m - \hat{k} - i0}, \\ \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) &= -\frac{1}{k^2 + i0} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\nu k_\mu}{k^2 + i0} \right).\end{aligned}$$

**4.5.3. Графическое представление матрицы рассеяния и правила Фейнмана.** Величинам  $W_1, W_2, W_3, W_4$  можно сопоставить диаграммы, изображенные на рис. 31 (будем называть их преддиаграммами). Вершинам этих преддиаграмм сопоставляются функции  $V_\mu^{abc}, \tilde{V}_{\mu\nu\lambda}, \tilde{V}_{\mu\nu\lambda\rho}, V_\mu^a$ , умноженные на  $(2\pi)^4 \delta(\Sigma k_i)$ , где  $k_i$  — импульсы линий преддиаграмм, по которым производится интегрирование,  $\int \frac{d^4k_i}{(2\pi)^4}$ ; внешние концы сопоставляются с фурье-компонентами операторов полей; волнистые линии соединяют вершину с операторами калибровочных полей, штриховые — вершину с операторами духовых фермионных полей и, наконец, сплошные — вершину с операторами фермионных (кварковых) полей.

Выражению  $W_1^{m_1} W_2^{m_2} W_3^{m_3} W_4^{m_4}$  соответствует  $m_1$  преддиаграмм  $a$  (см. рис. 31),  $m_2$  преддиаграмм  $b$ ,  $m_3$  преддиаграмм  $c$  и  $m_4$  преддиаграмм  $d$ . На это выражение действует функциональный оператор  $\exp(\Delta + \Xi + \Sigma)$ . Так как

$$\begin{aligned}\Delta \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} A_\mu^a(k_1) A_\nu^b(k_2) \dots &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i D_{\mu\nu}^c(k; \xi) \delta_{ab} \dots, \\ \Xi \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \bar{c}^a(k_1) c^b(k_2) \dots &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D^c(k) \delta_{ab} \dots, \\ \Sigma \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} q(k_1) \bar{q}(k_2) \dots &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-i) S^c(k) \dots,\end{aligned}$$

то в результате действия этого оператора образуются всевозможные связи между парами операторов калибровочных полей, парами операторов духовых ферми-полей  $c$  и  $\bar{c}$  и парами операторов фермионных полей. Видно, что образованию связей в результате действия функциональных операторов  $\Delta, \Xi, \Sigma$  соответствует замена двух интегрирований по  $k_1$  и  $k_2$  одним интегрированием по  $k$  и замена пар операторов  $A_\mu^a(k_1), A_\nu^b(k_2); \dots$  функциями  $\delta_{ab} i \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi); \dots$  Эту операцию

можно графически интерпретировать как попарное закорачивание, т. е. объединение двух линий различных (или одной и той же) преддиаграмм в одну линию, которой теперь сопоставляются фурье-компоненты связей, т. е. функции  $\delta_{ab}^i D_{\mu\nu}^c(k; \xi)$ ,  $\delta_{ab} D^c(k)$ ,  $-iS^c(k)$ .

Так как функции  $\tilde{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ ,  $\tilde{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$  симметричны относительно перестановки своих аргументов (таким свойством не обладает функция  $V_{\mu}^{abc}$ ), то при применении оператора  $\exp(\Delta + \Xi + \Sigma)$  к члену

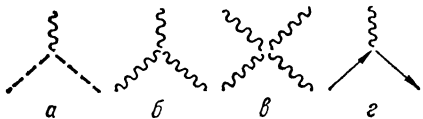


Рис. 31

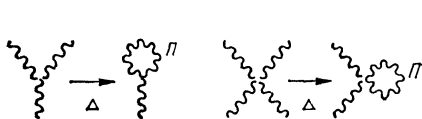


Рис. 32

$W_1^{m_1} W_2^{m_2} W_3^{m_3} W_4^{m_4}$  возникает  $(3!)^{m_2} (4!)^{m_3} \times m_1! m_2! m_3! m_4!$  одинаковых членов. Множители  $3!$  и  $4!$  появляются в результате того, что линии преддиаграмм  $k_1, k_2, k_3$  для  $\tilde{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}$  и  $k_1, k_2, k_3, k_4$  для  $\tilde{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$  могут быть закорочены с линиями других преддиаграмм соответственно  $3!$  и  $4!$  способами. Поэтому, переопределив вершинные функции

$$V_{\mu\nu\lambda}^{abc} = 3! \tilde{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}, \quad V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd} = 4! \tilde{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$$

и учитывая наличие множителя  $(m_1! m_2! m_3! m_4!)^{-1}$  в разложении  $S$ -матрицы, мы можем не учитывать указанные перестановки и одновременно не учитывать множитель  $(m_1! m_2! m_3! m_4!)^{-1}$  в разложении  $S$ -матрицы (4.5.24). Это рассуждение справедливо, однако, только в том случае, если внешние линии преддиаграмм, связанные с вершинами  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ ,  $V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$ , не «закорачиваются» друг на друге после применения операции функционального дифференцирования  $\exp(\Delta + \Xi + \Sigma)$ . Такое «закорачивание» внутри преддиаграмм в результате применения операций  $\Delta$  схематически показано на рис. 32. В этом случае на каждую возникающую закороченную линию ( $\Pi$ ) должен быть введен множитель  $1/2$  (аналогичная ситуация в квантовой электродинамике не возникает, так как в ней гамильтониан взаимодействия представляет собой  $N$ -упорядоченный оператор). Действительно, внутри преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}$  внутренних закорачиваний может быть три, а внутри преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$  — шесть. После внутренних закорачиваний оставшаяся линия преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}$  одним способом закорачивается с фиксированной векторной линией других преддиаграмм, а оставшиеся две линии преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$  закорачиваются двумя способами с фиксированными векторными линиями других преддиаграмм. Таким образом, в случае закорачивания внутри преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}$  возникает три эквивалентных слагаемых вместо  $3!$  слагаемых, а в случае закорачивания внутри преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$  — двенадцать эквивалентных слагаемых вместо  $4!$  слагаемых.

Кроме того, как и в квантовой электродинамике, следует учитывать, что при различных способах соединения линий преддиаграмм могут

получаться эквивалентные диаграммы. Перед такими диаграммами следует ставить множитель  $1/r$ , где  $r$  — число способов, которыми эту диаграмму можно получить из преддиаграмм.

Рассмотрим, например, две преддиаграммы, показанные на рис. 33. Из этих преддиаграмм можно получить две эквивалентные диаграммы, показанные на рис. 34. Поэтому ясно, что в данном случае  $r = 2$ .

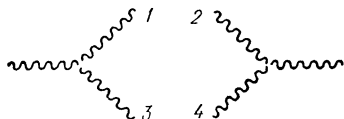


Рис. 33

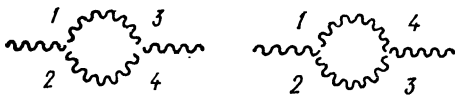


Рис. 34

Наконец, как и в квантовой электродинамике, каждой замкнутой фермионной духовой или кварковой петле следует сопоставлять множитель  $-1$ .

Таким образом, в результате  $N$ -упорядочения  $S$ -матрицы (применения оператора  $\exp(\Delta + \Xi + \Sigma)$  к преддиаграммам, связанным с выражением  $W_1^{m_1} W_2^{m_2} W_3^{m_3} W_4^{m_4}$ ), возникают фейнмановские диаграммы, которые изображают различные процессы и получаются из преддиаграмм всевозможными закорачиваниями внешних линий.

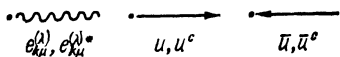


Рис. 35

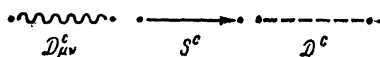


Рис. 36

Из изложенного следует, что элементы  $S$ -матрицы, соответствующие различным процессам, можно получить из соответствующих диаграмм с помощью следующих правил<sup>23</sup>.

1. Векторной частице (глюону), изображаемой внешней волнистой линией (рис. 35), соответствует множитель  $\frac{1}{\sqrt{2V\omega}} e_{k\mu}^{(\lambda)}$  для начальной частицы и множитель  $\frac{1}{\sqrt{2V\omega}} e_{k\mu}^{(\lambda)*}$  для конечной частицы.

2. Спинорной частице (кварку), изображаемой внешней сплошной линией, выходящей из вершины (см. рис. 35), соответствуют множители  $\frac{u^\mu}{\sqrt{2p_0V}}$ ,  $\frac{u^{\mu c}}{\sqrt{2p_0V}}$  в зависимости от того, соответствует ли линия кварку в начальном или антикварку в конечном состоянии.

3. Спинорной частице (кварку), изображаемой внешней сплошной линией, входящей в вершину (см. рис. 35), соответствуют множители  $\frac{\bar{u}^{\mu c}}{\sqrt{2p_0V}}$ ,  $\frac{\bar{u}^\mu}{\sqrt{2p_0V}}$  в зависимости от того, соответствует ли линия антикварку в начальном или кварку в конечном состоянии.

<sup>23</sup> Теория возмущений для неабелевых калибровочных полей развивалась также в работах [16—18].

4. Внутренней волнистой линии, изображающей распространение векторной частицы (рис. 36), соответствует пропатор

$$i\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) \delta_{ab} = -\frac{i\delta_{ab}}{k^2 + i0} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i0} \right).$$

5. Внутренней сплошной линии, изображающей распространение спинорной частицы (см. рис. 36), соответствует пропатор

$$-iS^c(p) = \frac{-i}{m - \hat{p} - i0}.$$

6. Внутренней штриховой линии, изображающей распространение скалярного фермионного духа (см. рис. 36), соответствует пропатор

$$\mathcal{D}^c(k) \delta_{ab} = -\frac{\delta_{ab}}{k^2 + i0}.$$

7. Вершине, изображенной на рис. 31, б, соответствует величина

$$V_{\alpha\beta\gamma}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = if^{abc} \{ (k_{1\beta}g_{\alpha\gamma} - k_{1\gamma}g_{\alpha\beta}) + \\ + (k_{2\gamma}g_{\alpha\beta} - k_{2\alpha}g_{\beta\gamma}) + (k_{3\alpha}g_{\beta\gamma} - k_{3\beta}g_{\alpha\gamma}) \}.$$

8. Вершине, показанной на рис. 31, в, соответствует величина

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4) = f^{gac} f^{gbd} (g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}) + \\ + f^{gad} f^{gbc} (g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}) + f^{gab} f^{gcd} (g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}).$$

9. Вершине, изображенной на рис. 31, а, соответствует величина

$$V_{\mu}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = f^{abc} k_{3\mu}.$$

10. Вершине, изображенной на рис. 31, г, соответствует величина

$$V_{\mu}^a = \gamma_{\mu} T^a$$

11. Каждой внутренней линии с 4-импульсом  $k$  соответствует интегрирование  $d^4k/(2\pi)^4$ .

12. Каждой вершине соответствует множитель  $(2\pi)^4\delta(\Sigma k)$ , где  $k$  — 4-импульсы частиц, связанные с данной вершиной.

13. Диаграмме должен сопоставляться множитель  $(-1)^l \frac{1}{r} 2^{-s} \times$   
 $\times (ig)^{m_1+m_2+m_3} (ig^2)^{m^2}$ , где  $l$  — число замкнутых фермионных петель;  
 $r$  — симметричный множитель;  $s$  — число закороченных векторных  
линий (закорачивание происходит внутри вершины), связанных с  
вершинами  $V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd}$ ,  $V_{\alpha\beta\gamma}^{abc}$ ;  $m_1, m_2, m_3, m_4$  — числа вершин типа  $V_{\mu}^{abc}$ ,  
 $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ ,  $V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$ ,  $V_{\mu}^a$ .

14. Все спинорные величины должны быть расположены в том порядке, в котором они встречаются, если двигаться против направления кварковой линии.

**4.5.4. Унитарность матрицы рассеяния.** Построенная нами матрица рассеяния для калибровочных и фермионных полей является унитарной в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой,  $S^+S = S^{-1}$ . Это пространство содержит как реальные физические состояния,

так и духовые состояния, т. е. состояния, содержащие скалярные и продольные глюоны и скалярные фермионные духи. Покажем, что так же, как в квантовой электродинамике, условие унитарности справедливо и в физическом подпространстве, т. е.

$$\sum_r (\Phi_a, S^+ \Phi_r) (\Phi_r, S \Phi_b) = (\Phi_a, \Phi_b), \quad (4.5.30)$$

где  $\Phi_a, \Phi_b$  — произвольные физические векторы состояний; суммирование проводится по всем векторам, содержащим только реальные частицы.

Как и в случае квантовой электродинамики (см. п. 3.2.1), введем оператор

$$\mathcal{E}(\xi) = \mathcal{N} e^{\xi A + B}, \quad (4.5.31)$$

где оператор  $A$  содержит операторы рождения и уничтожения духовых состояний:

$$A = \sum_{ka} (c_{k3}^{a+} c_{k3}^a - c_{k0}^{a+} c_{k0}^a + f_k^{a+} f_k^a - d_k^{a+} d_k^a), \quad (4.5.32)$$

а оператор  $B$  — операторы рождения и уничтожения реальных частиц:

$$B = \sum_{ka} \sum_{\lambda=1}^2 c_{k\lambda}^{a+} c_{k\lambda}^a + \sum_{\rho\mu i} a_{\rho\mu i}^+ a_{\rho\mu i} + \sum_{\rho\mu i} b_{\rho\mu i}^+ b_{\rho\mu i}. \quad (4.5.33)$$

Здесь  $\mathcal{N}$  — символ  $N$ -упорядочения операторов рождения и уничтожения (с учетом знакового множителя для фермионов) с последующей вставкой между операторами рождения и уничтожения вакуумного проектора  $\mathcal{P}_0 \equiv |0\rangle\langle 0|$ . Тогда условие полноты векторов состояний можно сформулировать в виде (см. (4.5.4))

$$\mathcal{E}(1) = I \quad (4.5.34)$$

(знак минус перед операторами  $c_{k0}^+ c_{k0}$  и  $d_k^+ d_k$  в формуле для  $A$  связан с индефинитностью метрики в пространстве скалярных глюонов и фермионных духов типа  $d$ ). Оператор  $\mathcal{E}(0)$ , очевидно, представляет собой проектор  $\mathcal{P}_r$  на подпространство реальных частиц

$$\mathcal{E}(0) = \mathcal{P}_r. \quad (4.5.35)$$

Как и в квантовой электродинамике, введем функцию

$$g(\xi) = (\Phi_a, S^+ \mathcal{E}(\xi) S \Phi_b), \quad (4.5.36)$$

где  $\Phi_a, \Phi_b$  — произвольные векторы состояний реальных частиц. Эта функция, как мы покажем, не зависит от параметра  $\xi$ . Поэтому

$$(\Phi_a, S^+ \mathcal{E}(1) S \Phi_b) = (\Phi_a, S^+ \mathcal{E}(0) S \Phi_b),$$

откуда, учитывая (4.5.34), (4.5.35), получаем соотношение (4.5.30).

Чтобы доказать независимость  $g(\xi)$  от  $\xi$ , воспользуемся инвариантностью теории по отношению к преобразованиям (4.4.16). Так как взаимодействие при  $t = \pm\infty$  выключается, то  $S$ -матрица должна коммутировать с генератором  $G$  этих преобразований при константе

связи  $g$ , равной нулю (напомним, что  $S$ -матрица коммутирует не с генератором временных трансляций  $\mathcal{H}$ , а с генератором временных трансляций при  $g = 0$ , т. е. со свободным гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ ). Проведем формальное доказательство этого утверждения. Согласно (4.4.24) генератор  $G \equiv G(g)$  можно представить в виде  $G = G_0 + G_1$ , где  $G_0$  не зависит от  $g$ , а оператор  $G_1$  пропорционален  $g$ . Гамильтониан  $\mathcal{H}$  также можно представить в виде  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$  (см. (4.4.6)), где  $\mathcal{H}_i \sim g^i$  ( $i = 0, 1, 2$ ). Так как  $G$  представляет собой интеграл движения, то  $[\mathcal{H}, G] = 0$ , или в представлении взаимодействия,

$$[\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1(t) + \mathcal{H}_2(t), G_0(t) + G_1(t)] = 0.$$

Отсюда

$$[\mathcal{H}_0, G_0(t)] = 0, \quad (4.5.37)$$

$$[\mathcal{H}_0, G_1(t)] + [\mathcal{H}_1(t), G_0(t)] = 0, \quad (4.5.38)$$

$$[\mathcal{H}_1(t), G_1(t)] + [\mathcal{H}_2(t), G_0(t)] = 0, \quad (4.5.39)$$

$$[\mathcal{H}_2(t), G_1(t)] = 0. \quad (4.5.40)$$

Первое соотношение показывает, что оператор  $G_0(t) \equiv G_0$  не зависит от  $t$ . Матрицу рассеяния  $S$  в терминах  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  можно представить в виде

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n+m}}{n! m!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots dt'_m T \{ \mathcal{H}_1(t_1) \dots \dots \mathcal{H}_1(t_n) \mathcal{H}_2(t'_1) \dots \mathcal{H}_2(t'_m) \}.$$

Поэтому

$$[G_0, S] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n+m}}{n! m!} \left\{ n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots dt'_m \times \right. \\ \times T \{ [G_0, \mathcal{H}_1(t_1)] \dots \mathcal{H}_1(t_n) \mathcal{H}_2(t'_1) \dots \mathcal{H}_2(t'_m) \} + m \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots dt'_m T \{ \mathcal{H}_1(t_1) \dots \mathcal{H}_1(t_n) [G_0, \mathcal{H}_2(t'_1)] \dots \mathcal{H}_2(t'_m) \} \}.$$

Отметим, что согласно (4.5.38)

$$[G_0, \mathcal{H}_1(t)] = -i \frac{\partial G_1(t)}{\partial t}.$$



Поэтому, используя (4.5.38), находим

$$\begin{aligned}
 [G_0, S] = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n+m}}{n! m!} \left\{ -in \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots \right. \\
 & \dots dt'_m \frac{\partial}{\partial t'_1} T(G_1(t_1) \mathcal{H}_1(t_2) \dots \mathcal{H}_1(t_n) \mathcal{H}_2(t'_1) \dots \mathcal{H}_2(t'_m)) + \\
 & + in(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots dt'_m \delta(t_1 - t_2) T([G_1(t_1), \mathcal{H}_1(t_2)] \times \\
 & \times \mathcal{H}_1(t_3) \dots \mathcal{H}_1(t_n) \mathcal{H}_2(t'_1) \dots \mathcal{H}_2(t'_m)) + m \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots \\
 & \dots dt'_m T(\mathcal{H}_1(t_1) \dots \mathcal{H}_1(t_n) [G_0, \mathcal{H}_2(t'_1)] \dots \mathcal{H}_2(t'_m)).
 \end{aligned}$$

Мы учли при этом, что

$$\frac{\partial}{\partial t} T(a(t) b(t')) = T\left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} b(t')\right) + \delta(t - t') [a(t), b(t')].$$

Используя соотношение (4.5.39), получаем

$$\begin{aligned}
 [G_0, S] = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n+m}}{n! m!} \left\{ -in(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots \right. \\
 & \dots dt'_m T([G_0, \mathcal{H}_2(t_2)] \mathcal{H}_1(t_3) \dots \mathcal{H}_1(t_n) \mathcal{H}_2(t'_1) \dots \mathcal{H}_2(t'_m)) + \\
 & + m \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots dt'_m T(\mathcal{H}_1(t_1) \dots \mathcal{H}_1(t_n) [G_0, \mathcal{H}_2(t'_1)] \dots \\
 & \dots \mathcal{H}_2(t'_m)) \left. \right\},
 \end{aligned}$$

или, переобозначая индексы суммирования, приходим к соотношению

$$[G_0, S] = 0. \quad (4.5.41)$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение: если  $G(g)$  — интеграл движения,  $[G(g), \mathcal{H}(g)] = 0$ , то  $[G(0), S] = 0$ . Вернемся к доказательству независимости  $g(\xi)$  от  $\xi$ .

Запишем интересующие нас преобразования (4.4.16) для фейнмановской калибровки ( $\xi = 1$ ) и при  $g = 0$ :

$$\begin{aligned}
 A_\mu^a &= A_\mu^a + i\xi \partial_\mu c^a, \quad \bar{c}^a = c^a - \xi \partial^\mu A_\mu^a, \quad c^a = c^a, \\
 q' &= q, \quad \bar{q}' = \bar{q}.
 \end{aligned} \quad (4.5.42)$$

Подставляя сюда разложения (4.4.48), (4.4.52) операторов на плоские

ВОЛНЫ, получаем

$$c_{k3}^{a'} = c_{k3}^a + \frac{\zeta k_0}{\sqrt{2}} (d_k^a + f_k^a), \quad c_{k0}^{a'} = c_{k0}^a + \frac{\zeta k_0}{\sqrt{2}} (d_k^a + f_k^a),$$

$$d_k^{a'} = d_k^a + \frac{\zeta k_0}{\sqrt{2}} (c_{k3}^a - c_{k0}^a), \quad f_k^{a'} = f_k^a - \frac{\zeta k_0}{\sqrt{2}} (c_{k3}^a - c_{k0}^a),$$

$$a'_{\rho\mu i} = a_{\rho\mu i}, \quad b'_{\rho\mu i} = b_{\rho\mu i}.$$

Вводя общее обозначение  $K$  для операторов  $(c, d, f)$  и учитывая перестановочные соотношения для этих операторов, представляем формулы (4.5.42) в виде

$$K' - K = i[G_0, K],$$

где

$$G_0 = i\zeta \sum_{ka} \frac{k_0}{\sqrt{2}} \{ (c_{k3}^{a+} - c_{k0}^{a+}) (d_k^a + f_k^a) + (d_k^{a+} + f_k^{a+}) (c_{k3}^a - c_{k0}^a) \}.$$

Таким образом, оператор  $G_0$  является генератором преобразований (4.5.42). (Оператор  $G_0$  совпадает с оператором  $i\zeta Q$  (см. (4.4.24)) при  $g = 0$  и  $\xi = 1$ .) Вводя оператор  $Q_0$  с помощью соотношения  $G_0 = i\zeta Q_0$  (очевидно,  $Q_0^+ = Q_0$ ), перепишем формулы (4.5.42) в виде

$$[Q_0, c_{k3}^a] = -\frac{k_0}{\sqrt{2}} (d_k^a + f_k^a), \quad [Q_0, c_{k0}^a] = -\frac{k_0}{\sqrt{2}} (d_k^a + f_k^a),$$

$$\{Q_0, d_k^a\} = -\frac{k_0}{\sqrt{2}} (c_{k3}^a - c_{k0}^a), \quad \{Q_0, f_k^a\} = \frac{k_0}{\sqrt{2}} (c_{k3}^a - c_{k0}^a). \quad (4.5.43)$$

Как мы отмечали,  $S$ -матрица коммутирует с оператором  $G_0$ .

Так как  $S$ -матрица содержит четное число фермионных полей, то она будет коммутировать с оператором  $Q_0$ :

$$[S, Q_0] = 0. \quad (4.5.44)$$

Покажем, что

$$[\mathcal{E}(\xi), Q_0] = 0. \quad (4.5.45)$$

Отметим, что так как  $Q_0\Phi_0 = 0$ , то

$$[Q_0, K^+\mathcal{P}_0K] = [Q_0, K^+]\mathcal{P}_0K + K^+\mathcal{P}_0[Q_0, K],$$

где  $K$  — любой из операторов  $c_{k3}^a, d_k^a, c_{k0}^a, f_k^a$ . Используя формулы (4.5.43), получаем

$$[Q_0, c_{k3}^{a+}\mathcal{P}_0c_{k3}^a - c_{k0}^{a+}\mathcal{P}_0c_{k0}^a + f_k^{a+}\mathcal{P}_0f_k^a - d_k^{a+}\mathcal{P}_0d_k^a] = 0,$$

откуда согласно определению  $\mathcal{E}(\xi)$  следует формула (4.5.45).

Найдем  $\mathcal{E}(\xi) \equiv \frac{d\mathcal{E}(\xi)}{d\xi}$ . Согласно (4.5.31)

$$\mathcal{E}(\xi) = \sum_{ka} \{ c_{k3}^{a+} \mathcal{E}(\xi) c_{k3}^a - c_{k0}^{a+} \mathcal{E}(\xi) c_{k0}^a + f_k^{a+} \mathcal{E}(\xi) f_k^a - d_k^{a+} \mathcal{E}(\xi) d_k^a \} =$$

$$= \sum_{ka} \{ (c_{k3}^{a+} - c_{k0}^{a+}) \mathcal{E}(\xi) c_{k3}^a + c_{k0}^{a+} \mathcal{E}(\xi) (c_{k3}^a - c_{k0}^a) + (f_k^{a+} + d_k^{a+}) \mathcal{E}(\xi) f_k^a -$$

$$- d_k^{a+} \mathcal{E}(\xi) (d_k^a + f_k^a) \}.$$

Используя (4.5.43), находим

$$\begin{aligned} \xi(\xi) = \sum_{ka} \frac{V\sqrt{2}}{k_0} & (-\{Q_0, d_k^{a+}\} \xi(\xi) c_{k3}^a + c_{k0}^{a+} \xi(\xi) \{Q_0, f_k^a\} - \\ & - [Q_0, c_{k0}^{a+}] \xi(\xi) f_k^a + d_k^{a+} \xi(\xi) [Q_0, c_{k3}^a]), \end{aligned}$$

или, учитывая (4.5.45):

$$\begin{aligned} \xi(\xi) = \sum_{ka} \frac{V\sqrt{2}}{k_0} & (-Q_0 d_k^{a+} \xi(\xi) c_{k3}^a - d_k^{a+} \xi(\xi) c_{k3}^a Q_0 + c_{k0}^{a+} \xi(\xi) f_k^a Q_0 + \\ & + Q_0 c_{k0}^{a+} \xi(\xi) f_k^a). \end{aligned}$$

Так как для физических векторов состояний  $Q_0 \Phi_a = Q_0 \Phi_b = 0$  и  $[S, Q_0] = 0$ , то согласно определению (4.5.36)  $g(\xi) = 0$ , что и требовалось доказать.

Отметим, что если учесть результаты § 4.3, то физическая унитарность  $S$ -матрицы (4.5.22) будет очевидной. Действительно,  $S$ -матрица (4.2.1) в кулоновской калибровке не содержит духовых состояний и строится на основе эрмитова гамильтониана взаимодействия. Поэтому она является физически унитарной. В п. 4.3.3 мы преобразовали эту  $S$ -матрицу к виду (4.3.30), который совпадает с видом выражения для матрицы рассеяния в лоренцевой калибровке. Отсюда следует физическая унитарность последней. Кроме того, из совпадения матриц рассеяния в физическом подпространстве в кулоновской и лоренцевой калибровках следует, что матричные элементы  $S$ -матрицы в лоренцевой калибровке между физическими векторами состояния не зависят от калибровочного параметра  $\xi$ . Подчеркнем, однако, что в формализме, исходящем из лагранжиана (4.4.6), физическая унитарность  $S$ -матрицы не очевидна. Поэтому здесь мы привели независимое доказательство унитарности.

## § 4.6. ПЕРЕНОРМИРУЕМОСТЬ ТЕОРИИ НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

**4.6.1. Классификация ультрафиолетовых расходимостей неабелевых калибровочных полей.** Элементы  $S$ -матрицы и функции Грина калибровочных полей расходятся в высших приближениях теории возмущений как в области больших, так и в области малых 4-импульсов виртуальных частиц. Расходимости в области больших импульсов называются ультрафиолетовыми, а в области малых импульсов — инфракрасными. Последние связаны с отсутствием массы у глюонов (и кварков, если мы считаем их массы равными нулю). При этом, если не пользоваться теорией возмущений, то так же, как в квантовой электродинамике, вероятность процессов с участием конечного числа глюонов будет равна нулю (в теории возмущений этот нуль соответствует инфракрасной расходимости  $S$ -матрицы). Мы не будем здесь касаться проблемы инфракрасных расходимостей, тесно связанных с проблемой удержания кварков в адронах (в связи с этим см. п. 5.1.2). Ограничимся здесь рассмотрением ультрафиолетовых расходимостей в матрице рассеяния и покажем, что так же, как в квантовой электродинамике,

намике, в теории неабелевых калибровочных полей существует только конечное число основных расходимостей, которые можно устранить с помощью процедуры перенормировки.

Для простоты рассмотрим калибровочное поле при отсутствии фермионов, т. е. глюонное поле с самодействием без кварков. При анализе расходимостей будем считать, что в интегралах, определяющих матричные элементы  $S$ -матрицы, выполнен поворот в комплексной плоскости  $p_0$  на угол  $\frac{\pi}{2}$ , в результате чего 4-импульсы виртуальных частиц становятся евклидовыми (а не псевдоевклидовыми, см. п. 3.6.1). Кроме того, чтобы получать конечные величины, произведем промежуточную регуляризацию с помощью одного из описанных в § 3.6 способов, например путем введения граничного импульса  $M$ , который в дальнейшем (после перенормировки) должен быть устремлен к бесконечности.

В рассматриваемой нами квантовой динамике глюонов матричные элементы  $S$ -матрицы содержат в качестве основных величин функцию распространения глюонов  $i\delta_{ab}D_{\mu\nu}^c(k; \xi)$ , функцию распространения фермионных скалярных духов  $\mathcal{D}^c(k)\delta_{ab}$  и три типа вершинных функций:  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3)$  (тройная глюонная вершина),  $V_{\mu}^{abc}(k_1, k_2, k_3)$  (тройная глюон-духовая вершина) и  $V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4)$  (четверная глюонная вершина). Эти функции ведут себя в области больших импульсов так:

$$V_{\mu\nu\lambda}^{abc} \sim k_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad V_{\mu}^{abc} \sim k_3, \quad \mathcal{D}^c(k) \sim \frac{1}{k^2},$$

$$V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd} \sim k_i^0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k) \sim \frac{1}{k^2}. \quad (4.6.1)$$

Рассмотрим вначале неприводимые диаграммы, т. е. диаграммы, не содержащие собственно-энергетических и вершинных частей (т. е. функций распространения  $G_{\mu\nu}$ ,  $G$  и вершинных функций  $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ ,  $\Gamma_{\mu}$ ,  $\Gamma_{\mu\nu\rho}$  в высших порядках теории возмущений; нулевым приближением для этих функций являются функции (4.6.1)). Такая неприводимая диаграмма содержит в общем случае  $N$  внешних глюонных линий,  $N_c$  внешних духовых линий (если данная диаграмма является внутренней частью более сложной диаграммы),  $F$  внутренних глюонных линий,  $F_c$  внутренних духовых линий,  $n_3$ ,  $n_4$  тройных и четверных глюонных вершин и, наконец,  $n_c$  тройных глюон-духовых вершин.

Так как в каждую глюон-духовую вершину входит одна духовая линия (и одна духовая линия выходит), то число духовых вершин будет равно  $F_c + \frac{1}{2} N_c$  (только половина внешних духовых линий входит в глюон-духовые вершины рассматриваемой диаграммы), т. е.

$$n_c = F_c + \frac{1}{2} N_c.$$

Так как с вершиной  $V_{\mu\nu\lambda\rho}$  связано четыре глюонные линии, с вершиной  $V_{\mu\nu\lambda}$  — три глюонные линии и с вершиной  $V_{\mu}$  — одна глюонная линия, то число  $4n_4 + 3n_3 + n_c$  будет равно удвоенному числу внут-

ренных глюонных линий (глюонная линия всегда связана с двумя какими-либо вершинами) плюс число внешних глюонных линий (каждая внешняя глюонная линия связана только с какой-либо одной вершиной):

$$4n_4 + 3n_3 + n_c = 2F + N.$$

Из этих формул числа внутренних линий  $F$ ,  $F_c$  можно выразить через числа вершин и внешних линий:

$$F_c = \frac{1}{2} (2n_c - N_c), \quad F = \frac{1}{2} (4n_4 + 3n_3 + n_c - N). \quad (4.6.2)$$

Так же, как в квантовой электродинамике (см. § 3.6), интеграл  $\mathcal{J}$ , соответствующий рассматриваемой неприводимой диаграмме, согласно (4.6.1) можно схематически представить в виде

$$\mathcal{J} = \int \frac{d^{4\omega_1} p}{p^{\omega_2}},$$

где

$$\omega_1 = F + F_c - (n - 1), \quad \omega_2 = 2F + 2F_c - n_3 - n_c, \quad n = n_3 + n_4 + n_c. \quad (4.6.3)$$

Поскольку мы рассматриваем связанную неприводимую диаграмму, то подынтегральная функция не распадается на множители, содержащие независимые переменные. Поэтому сходимость интеграла определяется разностью  $4\omega_1 - \omega_2$  (она называется индексом расходимости диаграммы), т. е.

$$\omega = 4\omega_1 - \omega_2.$$

Используя формулы (4.6.2), (4.6.3), получаем

$$\omega = 4 - N - N_c. \quad (4.6.4)$$

При  $\omega < 0$  интеграл  $\mathcal{J}$  сходится, при  $\omega \geq 0$  — расходится. Замечательно, что здесь так же, как в квантовой электродинамике, величина  $\omega$  не зависит от числа вершин  $n_3, n_4, n_c$ .

Из (4.6.4) следует, что существует ограниченное число типов расходимостей (а именно девять), соответствующих следующим значениям  $N$  и  $N_c$ :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$N$	0	1	2	3	4	2	0	1	0
$N_c$	2	2	0	0	0	2	4	0	0
$\omega$	2	1	2	1	0	0	0	3	4

Типичные диаграммы, соответствующие этим типам расходимостей, показаны на рис. 37. Отметим, что диаграммы, соответствующие случаям 7 и 6 на рис. 37, в действительности не приводят к логарифмическим расходимостям и, следовательно, являются сходящимися. Это связано с тем, что духовая вершина  $V_\mu$  пропорциональна импульсу только входящей духовой линии. Диаграммы 7 и 6 обязательно содержат хотя бы одну внешнюю вершину с входящей внешней духовой

линией, по которой не производится интегрирование. Поэтому при определении степени расходимости мы завязали ее в этих случаях по крайней мере на единицу, следовательно, интегралы, соответствующие случаям 7 и 6, будут сходящимися.

Диаграммы типа 8 можно, очевидно, не рассматривать, так как соответствующие интегралы представляют собой 4-векторы, причем

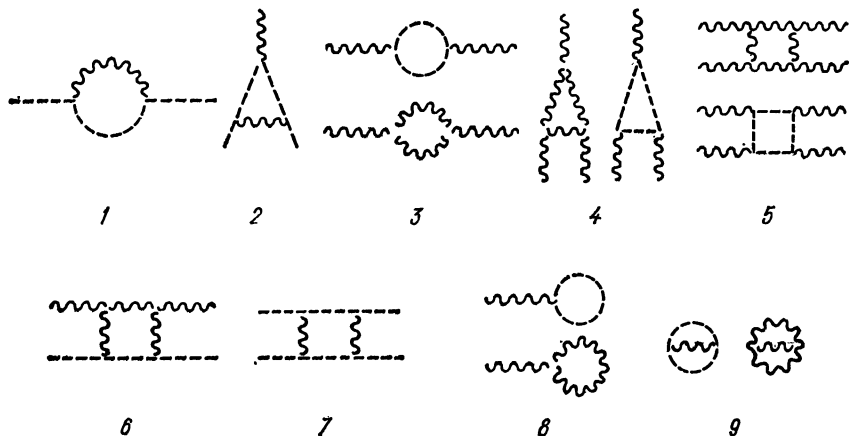


Рис. 37

4-импульс внешней линии диаграммы равен нулю, следовательно, вследствие релятивистской инвариантности соответствующие интегралы обращаются в нуль.

Наконец, вакуумные диаграммы типа 9, как и в случае квантовой электродинамики, можно не учитывать, так как они приводят только к фазовому множителю с бесконечной фазой в матричных элементах  $S$ -матрицы.

В оставшихся случаях, соответствующих диаграммам типа 1—5, мы также имеем, вообще говоря, завышенные степени расходимости. Однако если учесть требования релятивистской и калибровочной инвариантности промежуточной регуляризации, то для диаграмм типа 1—5 мы получим только логарифмические расходимости (см. § 3.7). В этом смысле ситуация с расходимостями в теории неабелевых калибровочных полей аналогична ситуации в квантовой электродинамике.

**4.6.2. Перенормируемость теории неабелевых калибровочных полей.** Оставшиеся логарифмические расходимости можно устранить, как и в квантовой электродинамике, путем перенормировки константы связи  $g$  и требования, чтобы масса глюона после перенормировки осталась равной нулю. Кроме того, если рассматривать калибровочно неинвариантные величины, то должна быть перенормирована также константа  $\xi$ , фиксирующая калибровку.

Функции Грина и вершинные функции, соответствующие диаграммам типов 1—5, обозначим  $G^{ab}(p)$ ,  $G_{\mu\nu}^{ab}(p)$ ,  $\Gamma_{\mu}^{abc}$ ,  $\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ ,  $\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}^{abca}$ . Эти функции учитывают все радиационные поправки к элементарным функ-

циям Грина и вершинным функциям, так что

$$G^{ab}(p)|_{g=0} = \delta_{ab} \mathcal{D}^c(p), \quad G_{\mu\nu}^{ab}(p)|_{g=0} = \delta_{ab} \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(p; \xi), \quad (4.6.5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu}^{abc}(k_1, k_2, k_3)|_{g=0} &= V_{\mu}^{abc}(k_1, k_2, k_3), \quad \Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3)|_{g=0} = \\ &= V_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3), \quad \Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4)|_{g=0} = V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4). \end{aligned}$$

Они соответствуют эффективным линиям и вершинам, которые должны подставляться в скелетные (неприводимые) диаграммы.

Расходимости в функциях Грина и вершинных функциях, как и в квантовой электродинамике, выделяются в виде множителей

$$\begin{aligned} G^{ab}(g, \xi) &= \tilde{z}_3 G_{\mu\nu}^{ab}(g, \xi), \quad G_{\mu\nu}^{ab}(g, \xi) = z_3 \underline{G}_{\mu\nu}^{ab}(g, \xi), \\ \Gamma_{\mu}^{abc}(g, \xi) &= \tilde{z}_1^{-1} \underline{\Gamma}_{\mu}^{abc}(g, \xi), \quad \Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(g, \xi) = z_1^{-1} \underline{\Gamma}_{\mu\nu\lambda}^{abc}(g, \xi), \\ \Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(g, \xi) &= z^{-1} \underline{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(g, \xi), \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

где черта снизу служит для обозначения перенормированных величин (для краткости записи импульсные переменные во всех функциях опущены).

Далее мы покажем, что функция  $G_{\mu\nu}^{ab}$  имеет следующую структуру:

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k, \xi) = G_{(t)}^{ab}(k, \xi) \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right) - \xi \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2)^2} \delta_{ab}, \quad (4.6.7)$$

где  $G_{(t)}^{ab}$  — поперечная часть функции Грина, содержащая расходимости, и  $\xi \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2)^2}$  — продольная часть функции Грина, которая, как мы видим, не испытывает влияния взаимодействия. Считая, что перенормированная функция  $\underline{G}_{\mu\nu}^{ab}$  определяется формулой, аналогичной (4.6.7),

$$\underline{G}_{\mu\nu}^{ab}(k, \bar{\xi}) = \underline{G}_{(t)}^{ab}(k, \bar{\xi}) \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right) - \bar{\xi} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2)^2} \delta_{ab}, \quad (4.6.8)$$

приходим к соотношению

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{z_3}. \quad (4.6.9)$$

Связь перенормированной константы связи  $\underline{g}$  с неперенормированной константой связи  $g$  мы установим несколько позже, а пока отметим, что величины  $z$  и перенормированные функции  $\underline{G}$ ,  $\underline{\Gamma}$  определяются соотношениями (4.6.6) неоднозначно, именно эти величины определены с точностью до конечных множителей  $z'$  и  $z'^{-1}$ . Для устранения этого произвола потребуем, чтобы функции  $\underline{G}$ ,  $\underline{G}_{(t)}$  и  $\underline{\Gamma}_{\mu}^{abc} k_3^{\mu}$  при  $k^2 = -\mu^2$  и  $k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = -\mu^2$  (где  $\mu^2 > 0$  — некоторая константа) вели себя так же, как функции  $G$ ,  $G_{(t)}$  и  $\Gamma_{\mu}^{abc} k_3^{\mu}$  при  $k^2 = -\mu^2$  и

$$k_2^1 = k_2^2 = k_3^2 = -\mu^2 \text{ и } g = 0^{24};$$

$$\underline{G}^{ab}(p)|_{p^2=-\mu^2} = \delta_{ab} \mathcal{D}^c(p)|_{p^2=-\mu^2}; \quad \underline{G}_{(t)}^{ab}(k)|_{k^2=-\mu^2} = \delta_{ab} \mathcal{D}^c(k)|_{k^2=-\mu^2},$$

$$k_3^\lambda \underline{\Gamma}_\lambda^{abc}(k_1, k_2, k_3)|_{k_1^2=k_2^2=k_3^2=-\mu^2} = k_3^\lambda V_\lambda^{abc}(k_1, k_2, k_3)|_{k_1^2=k_2^2=k_3^2=-\mu^2}. \quad (4.6.10)$$

Эти соотношения определяют величины  $\tilde{z}_3, z_3, \tilde{z}_1$ . Величины  $z_1$  и  $z$  мы доопределим далее исходя из требования, чтобы выполнялись соотношения (4.6.12). Напомним, что аналогично мы определяли перенормированные функции в квантовой электродинамике, считая, что вблизи массовой поверхности частиц ( $k^2 = 0, p^2 = m^2$ ) они ведут себя как соответствующие функции свободных частиц. В рассматриваемом случае точку нормировки  $p^2 = -\mu^2$  считаем отличной от нуля, так как вследствие равенства нулю массы глюона выбор  $\mu = 0$  приводил бы к инфракрасным расходимостям (см. п. 5.5.2). Считая  $\mu^2 > 0$ , получаем, что все константы  $z$  вещественны, так как для пространственно подобных импульсов функции  $G, \Gamma$  вещественны.

Отметим, что наличие величины  $\mu$  является существенным для всей дальнейшей теории и она будет входить во все конечные результаты. Вместе с тем выбор величины  $\mu$  произвольный, и это будет использовано нами при выводе уравнений ренормализационной группы.

Покажем, что если считать

$$\underline{g} = g \frac{z_3^{3/2}}{z_1} \quad (4.6.11)$$

и предполагать, что величины  $z$  связаны между собой соотношениями

$$\frac{z_1^*}{z_3} = \frac{\tilde{z}_1}{z_3}, \quad z = \frac{z_1^2}{z_3}, \quad (4.6.12)$$

то из отсутствия расходимостей в функциях  $\underline{G}, \underline{\Gamma}$  будет следовать отсутствие расходимости в матричных элементах  $S$ -матрицы. Соотношения (4.6.12) доказаны нами далее (они называются тождествами Уорда).

Для доказательства сделанного утверждения рассмотрим некоторую скелетную (неприводимую) диаграмму, содержащую  $N$  внешних глюонных линий,  $N_c$  внешних духовых линий,  $n_4$  четверных вершин,  $n_3$  тройных глюонных вершин и  $n_c$  тройных глюон-духовых вершин. Эта диаграмма содержит также  $F$  внутренних глюонных линий и  $F_c$  внутренних духовых линий. Соответствующую этой диаграмме внутреннюю часть (без внешних линий) обозначим  $g^{2n_4+n_3+n_c} U_n(G, \Gamma)$  (степень  $g$  соответствует тому, что каждая четверная вершина вносит вклад  $g^2$ , а каждая тройная — вклад  $g$ ). Величина  $U_n(G, \Gamma)$  представляет собой некоторый функционал функций Грина  $G$  и вершинных функций  $\Gamma$ , соответствующих эффективным линиям и вершинам, входящим в рассматриваемую диаграмму.

<sup>24</sup> В квантовой электродинамике перенормированную вершинную функцию мы нормировали несколько иначе (см. 3.6.40)).



Матричный элемент  $S$ -матрицы (без внешних линий) будет определяться величиной

$$U(G, \Gamma, g) = \sum_n \underline{g}^{2n_s+n_s+n_c} U_n(G, \Gamma), \quad (4.6.13)$$

где суммирование производится по всем скелетным диаграммам, относящимся к рассматриваемому процессу. Используя соотношения (4.6.10), (4.6.11), эту величину можно переписать в виде

$$U(G, \Gamma, g) = \sum_n \underline{g}^{2n_s+n_s+n_c} U_n(\underline{G}, \underline{\Gamma}) z^{-n_s} \tilde{z}_1^{-n_c} \tilde{z}_3^{F_c} z_1^{2n_s+n_c} z_3^{F-\frac{3}{2}(2n_s+n_s+n_c)}.$$

Входящее сюда произведение множителей  $z$  вследствие (4.6.2) определяется так:

$$z^{-n_s} \tilde{z}_1^{-n_c} \tilde{z}_3^{F_c} z_1^{2n_s+n_c} z_3^{F-\frac{3}{2}(2n_s+n_s+n_c)} = \tilde{z}_3^{-\frac{1}{2}N_c} z_3^{-\frac{1}{2}N} \left( \frac{\tilde{z}_3}{z_1} \right)^{n_c} z^{-n_s} z_1^{2n_s+n_c} z_3^{-n_s-n_c}.$$

Поэтому, используя (4.6.12), получаем

$$U(G, \Gamma, g) = \tilde{z}_3^{-\frac{1}{2}N_c} z_3^{-\frac{1}{2}N} \sum_n \underline{g}^{2n_s+n_s+n_c} U_n(\underline{G}, \underline{\Gamma}),$$

откуда следует

$$U(G, \Gamma, g) = \tilde{z}_3^{-\frac{1}{2}N_c} z_3^{-\frac{1}{2}N} U(\underline{G}, \underline{\Gamma}, \underline{g}). \quad (4.6.14)$$

Величины  $\underline{G}$ ,  $\underline{\Gamma}$  в области больших импульсов с точностью до множителей, ведущих себя как логарифмы импульсов, ведут себя, как и соответствующие функции свободных частиц (см. § 3.7). Поэтому, используя соображения п. 3.6.7, можно прийти к выводу, что величина  $U(\underline{G}, \underline{\Gamma}, \underline{g})$  (в рамках теории возмущений) не будет содержать расходимостей.

Как и в квантовой электродинамике, внешние линии содержат радиационные вставки, вследствие чего внешние линии заменяются некоторыми эффективными внешними линиями. Эффективным линиям сопоставляются эффективные векторы поляризации глюонов  $e^{(\lambda)}$ , связанные с исходными векторами поляризации  $e^{(\lambda)}$  (которые сопоставляются обычным внешним линиям), соотношением

$$\underline{e}^{(\lambda)} = z_3^{1/2} e^{(\lambda)} \quad (4.6.15)$$

(формальное соотношение для духовых частиц, аналогичное (4.6.15), имеет вид  $\underline{c} = z_3^{1/2} c$ ). Таким образом, согласно (4.6.14), (4.6.15) матричные элементы  $S$ -матрицы определяются формулой

$$S_{i \rightarrow j} = (\underline{e}^{(\lambda)})^N U(G, \Gamma, g) = (e^{(\lambda)})^N U(\underline{G}, \underline{\Gamma}, \underline{g}) \quad (4.6.16)$$

и являются, следовательно, конечными в теории возмущений по  $\underline{g}$  (мы положили здесь  $N_c = 0$ ). Это соотношение выражает свойство перенормируемости теории неабелева калибровочного поля.

Видно, что соотношения Уорда (4.6.12) играют фундаментальную роль при выводе перенормируемости теории неабелева калибровочного поля. Тождества Уорда в квантовой электродинамике (см. п. 3.6.5) такой роли не играют.

Формула (4.6.16) позволяет с помощью теории возмущений найти конечные матричные элементы произвольного физического процесса, если известно разложение в ряд по степеням  $\underline{g}$  перенормированных функций Грина  $\underline{G}$  и перенормированных вершинных функций  $\underline{\Gamma}$ . Теория возмущений по степеням  $\underline{g}$  для величин  $\underline{G}$ ,  $\underline{\Gamma}$  строится так же, как в квантовой электродинамике, и приводит к вычислительной процедуре, т. е. в низших порядках теории возмущений из вершинных функций и массовых операторов функций Грина следует вычитать  $\omega + 1$  первых членов разложения этих величин в ряд Тейлора ( $\omega$  — индекс расходимости соответствующей величины).

**4.6.3. Тождества Уорда.** Выше при доказательстве перенормируемости теории неабелева калибровочного поля мы использовали тождества Уорда, представляющие собой некоторые соотношения между перенормировочными константами  $z$ . Здесь мы рассмотрим, как выводятся эти тождества.

Напомним сначала определение функций Грина калибровочного поля  $G_{\mu\nu}^{ab}(k)$  и духового поля  $G^{ab}(p)$  (см. формулы (4.6.5), а также (3.5.10)):

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i \int d^4x e^{ikx} \langle 0 | T (A_\mu^a(x) A_\nu^b(0)) | 0 \rangle,$$

$$G^{ab}(p) = \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T (\bar{c}^a(x) c^b(0)) | 0 \rangle. \quad (4.6.17)$$

Здесь  $A_\mu^a$ ,  $c^a$ ,  $\bar{c}^a$  — операторы глюонных и духовых полей в гейзенберговском представлении; усреднение проводится по вакууму взаимодействующих полей. Используя одновременные перестановочные соотношения (4.4.32)

$$\delta(t - t') \{ \partial_0 c^a(x), \bar{c}^b(x') \} = -\delta(x - x') \delta^{ab}$$

и то, что  $\partial_0 \theta(t) = \delta(t)$ , получаем

$$\partial^\mu \partial_\mu \langle 0 | T (c^a(x) \bar{c}^b(0)) | 0 \rangle = \langle 0 | T (\partial^\mu \partial_\mu c^a(x) \bar{c}^b(0)) | 0 \rangle - \delta(x) \delta_{ab}. \quad (4.6.18)$$

Согласно уравнениям поля (4.4.10)

$$\partial^\mu \partial_\mu c^a(x) = -g \partial^\mu (A_\mu(x) \times c(x))^a.$$

Поэтому, учитывая (4.6.17), (4.6.18), находим

$$-ip^2 G^{ab}(p) = i\delta_{ab} + \Sigma^{ac}(p) G^{cb}(p),$$

где матрица  $\Sigma^{ac}(p)$  определяется соотношением

$$\Sigma^{ac}(p) G^{cb}(p) = g \int d^4x e^{ipx} \partial^\mu \langle 0 | T ((A_\mu(x) \times c(x))^a \bar{c}^b(0)) | 0 \rangle. \quad (4.6.19)$$

Величину  $\Sigma(p)$  можно представить в виде

$$\Sigma = p^\mu \Sigma_\mu, \quad \Sigma_\mu = \frac{p_\mu}{p^2} \Sigma, \quad (4.6.20)$$

где  $\Sigma_\mu(p)$  определяется уравнением

$$i\Sigma_\mu^{ac}(p)G^{cb}(p) = g \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T \{ (A_\mu(x) \times c(x))^a \bar{c}^b(0) \} | 0 \rangle. \quad (4.6.21)$$

Таким образом, дуговая функция Грина представима в виде

$$G(p) = - \frac{1}{p^2 + \Sigma(p)}, \quad (4.6.22)$$

так что

$$G = \mathcal{D}^c + \mathcal{D}^e \Sigma G, \quad (4.6.23)$$

следовательно, матрица  $\Sigma^{ac}$  играет роль массового оператора функции Грина  $G^{ac}$ .

Рассмотрим тройную глюон-дуговую вершинную функцию  $\Gamma_\mu^{abc}(p, q)$ . Эта функция связана с фурье-компонентой соответствующей функции Грина соотношением

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y e^{ipx+iqy} \langle 0 | T \{ c^d(x) \bar{c}^e(y) A_\nu^f(0) \} | 0 \rangle = \\ & = -g \Gamma_\mu^{abc}(p, q) G^{ad}(p) G^{be}(q) G^{cf\nu}_\nu(k), \quad p+q+k=0 \end{aligned} \quad (4.6.24)$$

(ср. с аналогичной формулой (3.5.18) в квантовой электродинамике).

Поступая так же, как при выводе соотношения (4.6.18), и учитывая, что  $\langle 0 | A_\mu^a | 0 \rangle = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} & \partial^\mu \partial_\mu \langle 0 | T \{ c^d(x) \bar{c}^e(y) A_\nu^f(0) \} | 0 \rangle = \\ & = -g \partial^\mu \langle 0 | T \{ (A_\mu(x) \times c(x))^d \bar{c}^e(y) A_\nu^f(0) \} | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому

$$ip^2 g \Gamma_\mu^{abc}(p, q) G^{ad}(p) G^{be}(q) G^{cf\nu}_\nu(k) = gp^\nu \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{abc}(p, q) G^{be}(q) G^{cf\lambda}_\nu(k),$$

или

$$ip^2 \Gamma_\mu^{abc}(p, q) G^{ad}(p) = p^\nu \bar{\Gamma}_{\nu\mu}^{abc}(p, q), \quad (4.6.25)$$

где функция  $\bar{\Gamma}_{\nu\mu}$  определяется с помощью соотношения

$$\begin{aligned} & i\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{abc}(p, q) G^{be}(q) G^{cf\lambda}_\nu(k) = \\ & = -i \int d^4x d^4y e^{ipx+iqy} \langle 0 | T \{ (A_\mu(x) \times c(x))^d \bar{c}^e(y) A_\nu^f(0) \} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.6.26)$$

Используя (4.6.23), (4.6.21), соотношение (4.6.25) можно представить в виде

$$\Gamma_\mu^{abc}(p, q) = ip^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^{abc}(p, q), \quad (4.6.27)$$

где

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{abc}(p, q) = \bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^{abc}(p, q) + i(\Sigma_\lambda(p)G(p))^{da} \Gamma_\mu^{abc}(p, q). \quad (4.6.28)$$

Это соотношение допускает простую диаграммную интерпретацию. Именно функция  $\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}(x, y, 0)$  соответствует диаграмме, показанной в левой части диаграммного равенства (рис. 38) (точке  $x$  соответствуют совмещенные в ней полевые операторы  $A_\mu$  и  $c$ ). Первый член в правой

части этого равенства соответствует всем компактным (т. е. не разделяющимся на две части путем пересечения только одной линии) частям величины  $\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}$ , а второй — некомпактным частям величины  $\Gamma_{\lambda\mu}$ .

Приведенные нами формулы являются, по сути, определением функций Грина и вершинных функций в терминах вакуумных средних произведений полевых операторов. Используем инвариантность теории по отношению к преобразованиям (4.4.16) [11]. Вначале покажем, что продольная часть глюонной функции Грина не модифицируется взаимодействием и определяется формулой

$$q^\nu G_{\mu\nu}^{ab}(q) = -\xi \frac{q_\mu}{q^2} \delta_{ab}. \quad (4.6.29)$$

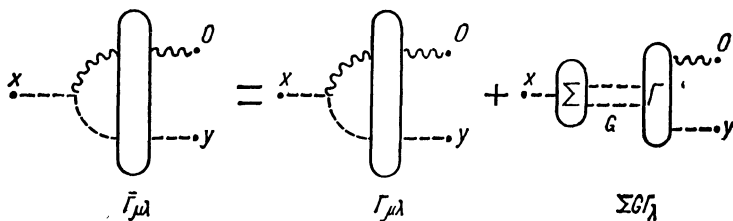


Рис. 38

Генератором преобразований (4.6.16) является оператор  $G$ , определяемый формулой (4.4.24). Считая, что  $G|0\rangle = 0$ , получаем

$$\langle 0 | [G, T \{A_\mu^a(x) \bar{c}^b(0)\}] | 0 \rangle = 0.$$

Так как  $i[G, \mathfrak{U}] = \delta\mathfrak{U}$  ( $\mathfrak{U}$  — операторы глюонных и духовых полей), то, замечая, что (см. (4.4.16), (4.4.16'))

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a(x) &= i\zeta \mathcal{D}_\mu c^a(x), & \delta \bar{c}^a(x) &= -\frac{\zeta}{\xi} \partial^\mu A_\mu^a(x), \\ \delta c^a(x) &= -\frac{i}{2} g \zeta (c(x) \times c(x))^a, \end{aligned} \quad (4.6.30)$$

получаем

$$i\zeta \langle 0 | T \{ \mathcal{D}_\mu c^a(x) \bar{c}^b(0) \} | 0 \rangle - \frac{\zeta}{\xi} \langle 0 | T \{ A_\mu^a(x) \partial^\nu A_\nu^b(0) \} | 0 \rangle = 0.$$

Так как операторы  $A_\mu^a(x)$  коммутируют между собой в один и тот же момент времени, то

$$\partial^\nu \langle 0 | T \{ A_\mu^a(x) A_\nu^b(0) \} | 0 \rangle = -i\zeta \langle 0 | T \{ \mathcal{D}_\mu c^a(x) \bar{c}^b(0) \} | 0 \rangle.$$

Учитывая, что

$$\mathcal{D}_\mu c^a(x) = \partial_\mu c^a(x) + g(A_\mu(x) \times c(x))^a,$$

и используя определение величины  $\Sigma_\mu(q)$  для фурье-компонент, получаем

$$-ik^\nu G_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i\zeta k_\mu G^{ab}(k) - i\zeta (\Sigma_\mu(k) G(k))^{ab}, \quad (4.6.31)$$

Используя формулы (4.6.23), (4.6.20), приходим к соотношению (4.6.29). Таким образом, функцию Грина глюонов можно представить в виде

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) G_{(t)}^{ab}(k) - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} \delta_{ab}, \quad (4.6.32)$$

где  $G_{(t)}^{ab}(k)$  — поперечная часть функции Грина.

Покажем, что между введенными здесь вершинными функциями  $\Gamma_\mu^{abc}$ ,  $\Gamma_{\mu\lambda}^{abc}$  и функциями Грина выполняется соотношение

$$\begin{aligned} & - \left( \Gamma_{\mu\lambda}^{aef}(p, q) + i \frac{p_\mu}{p^2} \Gamma_\lambda^{aef}(p, q) \right) G^{eb}(q) k^\lambda + \\ & + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{def}(p, q) G^{da\alpha}_\mu(p) \frac{q^\beta}{q^2} k^\gamma = 0. \end{aligned} \quad (4.6.33)$$

Для доказательства этого отметим, что справедливо соотношение

$$\langle 0 | [G, T(A_\mu^a(x) \bar{c}^b(y) \partial^\nu A_\nu^c(0))] | 0 \rangle = 0.$$

Используя формулы (4.6.30) и отмечая, что  $\delta\partial^\nu A_\nu^c(x) = 0$ , отсюда получаем

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\xi} \langle 0 | T(A_\mu^a(x) \partial^\lambda A_\lambda^b(y) \partial^\nu A_\nu^c(0)) | 0 \rangle + i \partial_\mu \langle 0 | T(c^a(x) \bar{c}^b(y) \partial^\nu A_\nu^c(0)) | 0 \rangle + \\ & + ig \langle 0 | T((A_\mu(x) \times c(x))^a \bar{c}^b(y) \partial^\nu A_\nu^c(0)) | 0 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.6.34)$$

(мы при этом учли, что  $\langle 0 | A_\nu^c | 0 \rangle = 0$ ).

Трехглюонная вершинная функция определяется формулой, аналогичной формуле (4.6.24):

$$\begin{aligned} & g \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{def}(p, q) G^{da\alpha}_\mu(p) G^{eb\beta}_\lambda(q) G^{fc\gamma}_\nu(k) = \\ & = \int d^4x d^4y e^{ipx+iqy} \langle 0 | T\{A_\mu^a(x) A_\lambda^b(y) A_\nu^c(0)\} | 0 \rangle, \quad p + q + k = 0. \end{aligned} \quad (4.6.35)$$

Используя определения величин  $\Gamma_\mu^{abc}(p, q)$ ,  $\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{abc}(p, q)$ , а также соотношение (4.6.29), перепишем формулу (4.6.34) в виде

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{def}(p, q) G^{da\alpha}_\mu(p) \frac{q^\beta k^\gamma}{q^2 k^2} + ip_\mu \Gamma_\alpha^{def}(p, q) G^{da}(p) G^{eb}(q) \frac{k^\alpha}{k^2} - \\ & - \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{aef}(p, q) G^{eb}(q) \frac{k^\lambda}{k^2} = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что согласно (4.6.28), (4.6.22)

$$\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{aef}(p, q) - ip_\mu \Gamma_\lambda^{def}(p, q) G^{da}(p) = \Gamma_{\mu\lambda}^{aef}(p, q) + i \frac{p_\mu}{p^2} \Gamma_\lambda^{aef}(p, q),$$

мы приходим к формуле (4.6.33).

Так как  $\Gamma_\mu^{abc}(p, q) = ip^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^{abc}(p, q)$  (см. (4.6.27)), то из (4.6.33) вытекает

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{abc}(p, q) p^\alpha q^\beta k^\gamma = 0, \quad (4.6.36)$$

следовательно, согласно (4.6.32)

$$\begin{aligned}
 & - \left( \Gamma_{\mu\lambda}^{aef}(p, q) + i \frac{p_\mu}{p^2} \Gamma_{\lambda}^{aef}(p, q) \right) G^{eb}(q) k^\lambda + \\
 & + \Gamma_{\mu\beta\lambda}^{dbf}(p, q) \frac{q^\beta}{q^2} k^\lambda G_{(i)}^{da}(p) = 0 \quad k = -p - q. \quad (4.6.37)
 \end{aligned}$$

Соотношения (4.6.36), (4.6.37) называются соотношениями Уорда для неабелева калибровочного поля. Мы воспользуемся этими соотношениями для вывода первого из тождеств (4.6.12) для перенормировочных констант. Для этого отметим, что если величина  $\Gamma_{\lambda\mu}^{abc}$  перенормируется с помощью некоторой константы  $z'_1$  (см. также п. 5.4.5):

$$\Gamma_{\lambda\mu}(p, q) = (z'_1)^{-1} \underline{\Gamma}_{\lambda\mu}(p, q),$$

то согласно (4.6.27) эта константа будет совпадать с величиной  $\tilde{z}_1$ ,  $z'_1 = \tilde{z}_1$ . Поэтому согласно (4.6.37)

$$\begin{aligned}
 & - \tilde{z}_1^{-1} \tilde{z}_3 \left( \underline{\Gamma}_{\mu\lambda}^{aef}(p, q) + i \frac{p_\mu}{p^2} \underline{\Gamma}_{\lambda}^{aef}(p, q) \right) \underline{G}^{eb}(q) k^\lambda + \\
 & + z_1^{-1} z_3 \underline{\Gamma}_{\mu\beta\lambda}^{dbf}(p, q) \frac{q^\beta}{q^2} k^\lambda \underline{G}_{(i)}^{da}(p) = 0, \quad k = -p - q.
 \end{aligned}$$

Так как функции перед множителями  $\tilde{z}_1^{-1} \tilde{z}_3$  и  $z_1^{-1} z_3$  конечны (в теории возмущений), то конечной (в теории возмущений) будет также величина  $\tilde{z}_1^{-1} \tilde{z}_3 / z_1^{-1} z_3$ . Учитывая, что конечная перенормировка величины  $z_1$  нами не была фиксирована, можем считать, что  $z_1 / z_3 = \tilde{z}_1 / \tilde{z}_3$  (см. (4.6.12)). Таким образом, тождество Уорда (4.6.37) для перенормированных и неперенормированных величин будет иметь одинаковый вид.<sup>25</sup>

Аналогично, отмечая, что

$$\langle 0 | [G, T(A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) A_\lambda^c(x_3) A_\rho^d(x_4))] | 0 \rangle = 0,$$

можно получить соотношение Уорда, аналогичное соотношению (4.6.37), в которое будет входить 4-глюонная вершина  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd}$ . Здесь это соотношение не приводится. Отметим лишь, что из него вытекает второе из соотношений (4.6.12).

## § 4.7. ФУНКЦИИ ГРИНА И КОНСТАНТЫ ПЕРЕНОРМИРОВКИ ВО ВТОРОМ ПОРЯДКЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

**4.7.1. Функция Грина и константа перенормировки скалярного фермионного поля.** Вычислим функции Грина и константы перенормировки во втором приближении теории возмущений по константе связи  $g$ . При этом будем пользоваться методом размерной регуляризации, так как этот метод является явно калибровочно-инвариантным. Начнем с рассмотрения функции Грина скалярного фермионного или духового поля.

<sup>25</sup> Тождества Уорда для неабелевых калибровочных полей были получены Славновым [19] и Тейлором [20].

Массовый оператор этой функции Грина во втором приближении теории возмущений определяется диаграммой, показанной на рис. 39. Соответствующая величина  $\Sigma^{(2)ab}(p)$ , согласно правилам Фейнмана, определяется формулой

$$\Sigma^{(2)ab}(p) = -ig^2 f^{adc} f^{bcd} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (p+k)^\alpha p^\beta \frac{i}{(p+k)^2} \frac{-i}{k^2} \times \\ \times \left( g_{\alpha\beta} - (1-\xi) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right). \quad (4.7.1)$$

В методе размерной регуляризации величина  $d^4 k / (2\pi)^4$  должна быть заменена величиной  $d^d k / (2\pi)^d$  ( $d$  — размерность пространства), а безразмерная константа связи  $g^2$  — величиной  $g^2 \mu^{4-d}$  ( $\mu$  — произвольная величина, имеющая размерность импульса). При этом сохранится прежняя размерность массового оператора, а следовательно, и правильная размерность функции Грина (эта замена, как мы видели, обеспечивает правильную размерность действия). Не нарушая общности,

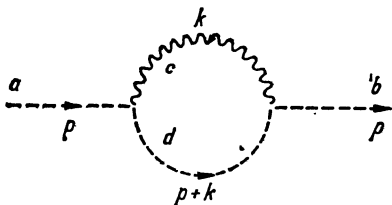


Рис. 39

можно считать, что величина  $\mu$  совпадает с точкой нормировки  $\mu$ , введенной в п. 4.6.2. Обратим внимание на то, что в методе размерной регуляризации еще до процедуры вычитания появляется величина  $\mu$  размерности массы, которая будет входить даже в неперенормированные величины, содержащие в качестве параметров  $\mu$  и  $d = 4$ . Таким образом, в  $d$ -мерном пространстве массовый оператор имеет вид

$$\Sigma^{(2)ab}(p) = -ig^2 \mu^{4-d} f^{adc} f^{bcd} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p+k)^\alpha p^\beta}{(p+k)^2 k^2} \left( g_{\alpha\beta} - (1-\xi) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) = \\ = ig^2 \mu^{4-d} n \delta_{ab} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{p^2}{k^2 (p+k)^2} + \frac{1+\xi}{2} \frac{kp}{k^2 (k+p)^2} - \right. \\ \left. - \frac{1-\xi}{2} \frac{kp}{(k^2)^2} + \frac{1-\xi}{2} \frac{p^2 kp}{(k^2)^2 (k+p)^2} \right\}.$$

Мы учли при этом, что  $f^{adc} f^{bcd} = n \delta_{ab}$  (см. п. 1.8.4). Для вычисления этого и других подобных интегралов будем использовать формулу

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[ax+b(1-x)]^{\alpha+\beta}}. \quad (4.7.2)$$

Полагая в ней  $a = (k+p)^2$ ,  $b = k^2$  и используя формулы (3.6.17), (3.6.18), приходим к следующим выражениям для интегралов в  $d$ -мерном пространстве:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1; k_\mu}{k^2 (k+p)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \frac{1; -xp_\mu}{(x^2 p^2 - xp^2)^{2 - \frac{d}{2}}},$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1; k_\mu}{(k^2)^2 (k+p)^2} = - \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x \frac{1; -xp_\mu}{(x^2 p^2 - xp^2)^{3 - \frac{d}{2}}}. \quad (4.7.3)$$

Используя эти формулы, получаем

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)ab}(p) = & g^2 \mu^{4-d} \frac{-p^2}{(4\pi)^{d/2}} n \delta_{ab} \int_0^1 dx \left\{ \left[ \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) (x^2 p^2 - xp^2)^{\frac{d}{2} - 2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(1+\xi)}{2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) x (x^2 p^2 - xp^2)^{\frac{d}{2} - 2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{(1-\xi)}{2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) p^2 x (1-x) (x^2 p^2 - xp^2)^{\frac{d}{2} - 3} \right\}. \end{aligned}$$

При  $d \rightarrow 4$  расходится только первое слагаемое. Отмечая, что справедлива формула (см. (3.6.22))

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) f(d) = \frac{f(4)}{2 - \frac{d}{2}} - C f(4) - 2 \frac{\partial f(4)}{\partial d}, \quad d \rightarrow 4,$$

где  $f(d)$  — регулярная функция при  $d = 4$ , и полагая в ней

$$f(d) = \frac{\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} (x^2 p^2 - xp^2)^{\frac{d}{2} - 2},$$

получаем

$$\Sigma^{(2)ab}(p) = \frac{-g^2}{16\pi^2} p^2 n \delta_{ab} \left\{ \left( \frac{3}{4} - \frac{\xi}{4} \right) \left( \eta - \ln \frac{-p^2}{\mu^2} \right) + 1 \right\},$$

где

$$\eta = \frac{2}{4-d} - C + \ln 4\pi. \quad (4.7.4)$$

Функция Грина духовой частицы  $G^{ab}(p)$  связана с массовым оператором соотношением

$$G^{ab}(p) = - \frac{1}{p^2 + \Sigma(p)}.$$

Поэтому с точностью до членов второго порядка по  $g$

$$\begin{aligned} G^{ab}(p) = & - \delta_{ab} \frac{1}{p^2} d(p), \\ d(p) = & 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} n \left\{ \left( \frac{3}{4} - \frac{\xi}{4} \right) \left( \eta - \ln \frac{-p^2}{\mu^2} \right) + 1 \right\}. \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

В рассматриваемом приближении функцию Грина  $\underline{G}^{ab}$  можно представить в виде

$$G^{ab}(p) = \tilde{z}_3 \underline{G}^{ab}(p), \quad (4.7.6)$$



где

$$\tilde{z}_3 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} n \left\{ \left( \frac{3}{4} - \frac{\xi}{4} \right) \eta + 1 \right\}, \quad (4.7.7)$$

и перенормированная функция Грина  $\underline{G}^{ab}$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \underline{G}^{ab}(p) &= -\delta_{ab} \frac{1}{p^2} \underline{d}(p), \\ \underline{d}(p) &= 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} n \left( \frac{3}{4} - \frac{\xi}{4} \right) \ln \frac{-p^2}{\mu^2}. \end{aligned} \quad (4.7.8)$$

В соответствии с требованием (4.6.10) мы учли, что

$$\underline{G}^{ab}(p) |_{p^2=-\mu^2} = \frac{1}{\mu^2} \delta_{ab}.$$

Отметим, что так же, как в квантовой электродинамике, при использовании промежуточной регуляризации, основанной на введении предельного импульса  $M$ , величину  $\eta$  в формуле для  $\tilde{z}_3$  следует заменить на  $\ln \frac{M^2}{\mu^2}$ :

$$\eta \rightarrow \ln \frac{M^2}{\mu^2}.$$

При этом произвольная величина  $\mu$  в формуле (4.7.5) сократится.

**4.7.2. Функция Грина и константа перенормировки глюонного поля.** Перейдем к вычислению глюонной функции Грина, которая связана с поляризационным оператором  $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q)$  формулой

$$G(q) = \mathcal{D}^c(q; \xi) + \mathcal{D}^c(q; \xi) \Pi(q) G(q).$$

Во втором порядке теории возмущений поляризационному оператору соответствуют четыре диаграммы (рис. 40). Первые две ( $\Pi_1^{(2)}$ ,  $\Pi_2^{(2)}$ ) соответствуют взаимодействию глюонов друг с другом, третья ( $\Pi_3^{(2)}$ ) — взаимодействию глюона с фермионным духом и, наконец, четвертая — взаимодействию глюона с кварками.

Согласно правилам Фейнмана, величина  $\Pi_1^{(2)}(q)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \Pi_{1\mu\nu}^{(2)ab}(q) &= -\frac{i}{2} \mu^{4-d} g^2 f^{adc} f^{bcd} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 (k+q)^2} \times \\ &\times (g_{\mu\rho} (q-k)_\lambda + g_{\rho\lambda} (q+2k)_\mu - g_{\lambda\mu} (k+2k)_\rho) \left( g_{\rho\sigma} - (1-\xi) \frac{k_\rho k_\sigma}{k^2} \right) \times \\ &\times (g_{\sigma\nu} (2k+q)_\nu - g_{\nu\nu} (k+2q)_\sigma + g_{\nu\sigma} (q-k)_\nu) \times \\ &\times \left( g_{\nu\lambda} - (1-\xi) \frac{(k+q)_\nu (k+q)_\lambda}{(k+q)^2} \right), \end{aligned}$$

или после раскрытия скобок и учета того, что  $f^{abc} f^{abd} = n \delta_{cd}$ :

$$\Pi_{1\mu\nu}^{(2)ab}(q) = \frac{i}{2} \mu^{4-d} g^2 n \delta_{ab} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{g_{\mu\nu} (2k^2 + 2kq + 5q^2) + (4d-6) k_\mu k_\nu}{k^2 (k+q)^2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(d-6)q_\mu q_\nu + (2d-3)(q_\mu k_\nu + q_\nu k_\mu)}{k^2(k+q)^2} - \frac{(1-\xi)}{k^2(k+q)^4} (g_{\mu\nu}(k^2 - q^2)^2 - \\
& - kq(k_\mu q_\nu + k_\nu q_\mu) + q_\mu q_\nu(2k^2 - q^2) + k_\mu k_\nu(2q^2 - k^2)) - \\
& - \frac{1-\xi}{k^4(k+q)^2} (g_{\mu\nu}(k^2 + 2kq)^2 - (k^2 + 3kq)(k_\mu q_\nu + k_\nu q_\mu) + k^2 q_\mu q_\nu + \\
& + k_\mu k_\nu(q^2 - k^2 - 2kq)) + \\
& + \frac{(1-\xi)^2}{k^4(k+q)^4} (q^4 k_\mu k_\nu + (kq)^2 q_\mu q_\nu - q^2 kq(k_\mu q_\nu + k_\nu q_\mu)) \}.
\end{aligned}$$

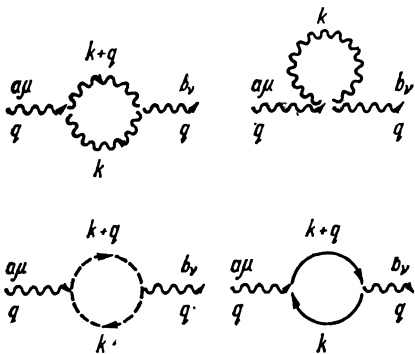


Рис. 40

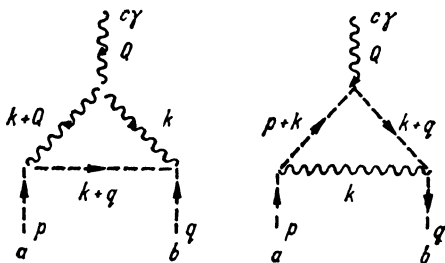


Рис. 41

Используя формулы (4.7.3), а также формулы

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k+q)^2} &= \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left\{ \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{x^2 q_\mu q_\nu}{(x^2 q^2 - xq^2)^{2 - \frac{d}{2}}} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \frac{g_{\mu\nu}}{(x^2 q^2 - xq^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \right\}, \\
\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1; k_\mu}{k^2(k+q)^4} &= \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x \frac{1; -xq_\mu}{(x^2 q^2 - xq^2)^{2 - \frac{d}{2}}}, \quad (4.7.9) \\
\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k+q)^4} &= \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left\{ \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \frac{x^3 q_\mu q_\nu}{(x^2 q^2 - xq^2)^{3 - \frac{d}{2}}} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{x g_{\mu\nu}}{(x^2 q^2 - xq^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \right\}, \\
\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{k^4(k+q)^4} &= \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left\{ \Gamma\left(4 - \frac{d}{2}\right) \frac{x^3(1-x)q_\mu q_\nu}{(x^2 q^2 - xq^2)^{4 - \frac{d}{2}}} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \frac{x(1-x)g_{\mu\nu}}{(x^2 q^2 - xq^2)^{3 - \frac{d}{2}}} \right\},
\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{1\mu\nu}^{(2)ab}(q) = & \frac{i}{2} n \delta_{ab} g^2 \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right)^{\frac{d}{2}-2} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx (x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} \times \\ & \times \left\{ 4q^2 g_{\mu\nu} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + (2d-3) q^2 g_{\mu\nu} x(1-x) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) + \right. \\ & + (d-6) q_\mu q_\nu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) - (4d-6) q_\mu q_\nu x(1-x) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \\ & + (1-\xi) (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \left( \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) - 4\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \right) + \\ & \left. + \frac{1}{2} (1-\xi)^2 (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Для нахождения асимптотики этого выражения при  $d \rightarrow 4$  нам необходимо воспользоваться формулами (3.6.22). В результате получим

$$\begin{aligned} \Pi_{1\mu\nu}^{(2)ab}(q) = & -n \delta_{ab} \frac{g^2}{16\pi^2} \left\{ q^2 g_{\mu\nu} \left( \frac{19}{12} \eta - \frac{19}{12} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + \frac{58}{18} \right) + \right. \\ & + q_\mu q_\nu \left( -\frac{11}{6} \eta + \frac{11}{6} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} - \frac{67}{18} \right) + (1-\xi) (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \times \\ & \left. \times \left( \frac{1}{2} \eta - \frac{1}{2} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} - 1 \right) + \frac{1}{4} (1-\xi)^2 (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \right\}. \quad (4.7.10) \end{aligned}$$

Перейдем к нахождению  $\Pi_{2\mu\nu}^{(2)ab}(q)$  и  $\Pi_{3\mu\nu}^{(2)ab}(q)$ . Согласно правилам Фейнмана,

$$\begin{aligned} \Pi_{2\mu\nu}^{(2)ab}(q) = & -\frac{i}{2} \mu^{4-d} g^2 \delta^{cd} \{ f^{abe} f^{cde} (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\nu\rho} g_{\mu\lambda}) + \\ & + f^{ace} f^{bde} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) + f^{ade} f^{cbe} (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}) \} \times \\ & \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} \left( g_{\lambda\rho} - (1-\xi) \frac{k_\lambda k_\rho}{k^2} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\Pi_{2\mu\nu}^{(2)ab}(q) = -i \mu^{4-d} g^2 f^{ace} f^{bce} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left\{ (d-1) \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} - (1-\xi) \frac{k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} \right\}.$$

Так как согласно (3.6.17)

$$\int \frac{d^d k}{k^2} = 0,$$

то

$$\Pi_{2\mu\nu}^{(2)ab}(q) = 0. \quad (4.7.11)$$

Согласно правилам Фейнмана и формулам (4.7.3), (4.7.9),

$$\Pi_{3\mu\nu}^{(2)ab}(q) = i \mu^{4-d} g^2 f^{adc} f^{bcd} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu (k+q)_\nu}{k^2 (k+q)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= g^2 n \delta_{ab} \frac{\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left\{ q_\mu q_\nu \Gamma \left( 2 - \frac{d}{2} \right) x^2 (x^2 q^2 - xq^2)^{\frac{d}{2}-2} - \right. \\
&\quad \left. - q_\mu q_\nu x (x^2 q^2 - xq^2)^{\frac{d}{2}-2} \Gamma \left( 2 - \frac{d}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Gamma \left( 1 - \frac{d}{2} \right) (x^2 q^2 - xq^2)^{\frac{d}{2}-1} \right\}.
\end{aligned}$$

Используя формулы (3.6.22), находим отсюда асимптотику этого выражения при  $d \rightarrow 4$ :

$$\begin{aligned}
\Pi_{3\mu\nu}^{(2)ab}(q) &= n \delta_{ab} \frac{g^2}{16\pi^2} \left\{ -\frac{\eta}{12} g_{\mu\nu} q^2 - \frac{\eta}{6} q_\mu q_\nu + \frac{1}{12} g_{\mu\nu} q^2 \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} q_\mu q_\nu \ln \frac{-q^2}{\mu^2} - \frac{2}{9} g_{\mu\nu} q^2 - \frac{5}{18} q_\mu q_\nu \right\}. \quad (4.7.12)
\end{aligned}$$

Таким образом, согласно (4.7.10), (4.7.11), (4.7.12)

$$\begin{aligned}
\Pi_{1\mu\nu}^{(2)ab}(q) + \Pi_{2\mu\nu}^{(2)ab}(q) + \Pi_{3\mu\nu}^{(2)ab}(q) &= -n \delta_{ab} \frac{g^2}{16\pi^2} (g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) \times \\
&\quad \times \left\{ \left( \frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right) \left( \eta - \ln \frac{-q^2}{\mu^2} - 1 \right) + \frac{175}{36} + \frac{\xi^2}{4} \right\}. \quad (4.7.13)
\end{aligned}$$

Отметим, что только в вычисленной сумме (но не в отдельных слагаемых) выделяется множитель  $g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu$ , соответствующий поперечному характеру поляризованного оператора (см. формулу (4.6.32)). Отметим также, что в это выражение (в отличие от квантовой электродинамики) входит величина  $\xi$ , связанная с выбором калибровки. Это связано с тем, что сам по себе поляризованный оператор не является наблюдаемой величиной. В величине же  $\langle 0 | T (F_{\mu\nu}(x) F_{\lambda\rho}(x')) | 0 \rangle$  постоянная  $\xi$  отсутствует.

Вычислим вклад в поляризованный оператор, вносимый кварковой петлей в величину  $\Pi_{4\mu\nu}^{(2)ab}$ , считая массу кварка равной нулю. Согласно правилам Фейнмана, этот вклад определяется формулой

$$\Pi_{4\mu\nu}^{(2)ab}(q) = -g^2 \mu^{4-d} i \text{Sp} T_a T_b \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\text{Sp} \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu (\hat{k} + \hat{q})}{k^2 (k+q)^2},$$

откуда вычисляем шпур от произведения дираковских матриц; находим

$$\begin{aligned}
\Pi_{4\mu\nu}^{(2)ab}(q) &= -4g^2 \mu^{4-d} i \text{Sp} T_a T_b \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} 2^{\frac{d}{2}-2} \times \\
&\quad \times \frac{2k_\mu k_\nu + k_\mu q_\nu + k_\nu q_\mu - g_{\mu\nu} (k^2 + kq)}{k^2 (k+q)^2}.
\end{aligned}$$

Используя формулу (4.7.3), а также формулы (4.7.9), определяющие  $d$ -мерные интегралы, получаем

$$\Pi_{4\mu\nu}^{(2)ab}(q) = 2g^2 \mu^{4-d} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} 2^{\frac{d}{2}-2} \int_0^1 dx \left\{ g_{\mu\nu} \Gamma \left( 1 - \frac{d}{2} \right) (x^2 q^2 - xq^2)^{\frac{d}{2}-1} + \right.$$

$$+ q^2 g_{\mu\nu} \Gamma \left( 2 - \frac{d}{2} \right) x (x^2 q^2 - x q^2)^{\frac{d}{2}-2} - \\ - 2 q_{\mu} q_{\nu} \Gamma \left( 2 - \frac{d}{2} \right) x (1-x) (x^2 q^2 - x q^2)^{\frac{d}{2}-2} \}.$$

В пределе  $d \rightarrow 4$  эта формула принимает вид

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)ab}(q) = \frac{2}{3} \frac{g^2}{16\pi^2} (q^2 g_{\mu\nu} - q_{\mu} q_{\nu}) \delta_{ab} \left( \eta - \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + \frac{5}{3} - \ln 2 \right) \quad (4.7.14)$$

(мы учли при этом, что  $\text{Sp } T_a T_b = \frac{1}{2} \delta_{ab}$ , матрицы  $T_a$  относятся к фундаментальному представлению группы  $SU(n)$ ). Эта формула справедлива и при массе кварка  $m$ , отличной от нуля, если рассматривать асимптотическую область  $-q^2 \gg m^2$ .

Если в процессе взаимодействия участвует не один кварк, а  $n_f$  различных сортов кварков, то выражение для  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)ab}(q)$  следует умножить на  $n_f$ .

Просуммировав вклады всех диаграмм (рис. 40), найдем

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)ab}(q) = \frac{-g^2}{16\pi^2} \delta_{ab} (g_{\mu\nu} q^2 - q_{\mu} q_{\nu}) \left\{ n \left( \frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right) \left( \eta - \ln \frac{-q^2}{\mu^2} - 1 \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} n_f \left( \eta - \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + \frac{5}{3} - \ln 2 \right) + \frac{175}{36} n + \frac{\xi^2}{4} n \right\}. \quad (4.7.15)$$

Отсюда можно найти функцию Грина глюона с учетом поправки второго порядка по  $g$  (мы опускаем конечные при  $d \rightarrow 4$  слагаемые в  $z_3$ ):

$$G_{(t)\mu\nu}^{ab}(q) = z_3 \underline{G}_{(t)\mu\nu}^{ab}(q), \quad (4.7.16) \\ z_3 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \eta \left( n \left( \frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right) - \frac{2}{3} n_f \right),$$

где поперечная перенормированная функция Грина глюона  $\underline{G}_{(t)\mu\nu}^{ab}(q)$  определяется формулой

$$\underline{G}_{(t)\mu\nu}^{ab}(q) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{q^2} \right) \underline{G}_{(t)}^{ab}(q), \quad (4.7.17) \\ \underline{G}_{(t)}^{ab}(q) = -\frac{1}{q^2} \left( 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left( n \left( \frac{\xi}{2} - \frac{13}{6} \right) + \frac{2}{3} n_f \right) \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right).$$

Мы учли при этом, что  $\underline{G}_{(t)}^{ab}(q)/q^2 = -\mu^2 = \mu^{-2} \delta_{ab}$ , и подразумеваем под  $g$  перенормированную константу связи  $\underline{g}$ , так как здесь учитываются только поправки второго порядка.

Отметим, что при использовании предельного импульса величина  $\eta$  должна быть заменена на  $\ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}$ ,  $\eta \rightarrow \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}$ . При этом величина  $\mu$  не будет входить в функцию  $G_{(t)}$ .

**4.7.3. Глюон-духовая вершина и ее константа перенормировки.** Вычислим константу перенормировки  $\tilde{z}_1$  (во втором порядке теории

возмущений), которая будет необходима при изучении уравнений ренормализационной группы. С этой целью достаточно исследовать глюон-духовую вершину, определяемую диаграммами рис. 41. Согласно правилам Фейнмана, вклад этих диаграмм в вершинную функцию  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  определяется формулами

$$g\Gamma_{1\gamma}^{abc}(p, q) = -(\mu^{2-\frac{d}{2}}g)^3 f^{dga} f^{bed} f^{cge} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k+q)_\mu}{(k+q)^2} q_\sigma \times \\ \times (g_{\gamma\rho}(k+2Q)_\delta - g_{\rho\delta}(2k+Q)_\gamma + g_{\delta\gamma}(k-Q)_\rho) \frac{1}{k^2} \times \\ \times \left( g_{\delta\sigma} - (1-\xi) \frac{k_\delta k_\sigma}{k^2} \right) \frac{-i}{(k+Q)^2} \left( g_{\mu\rho} - (1-\xi) \frac{(k+Q)_\mu (k+Q)_\rho}{(k+Q)^2} \right), \\ g\Gamma_{2\gamma}^{abc}(p, q) = -(\mu^{2-\frac{d}{2}}g)^3 f^{dga} f^{bed} f^{cge} q_\beta \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (p+k)_\alpha \frac{i}{(p+k)^2} \times \\ \times (k+q)_\gamma \frac{1}{(k+q)^2} \frac{1}{k^2} \left( g_{\alpha\beta} - (1-\xi) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right).$$

Для вычисления константы перенормировки  $\tilde{z}_1$  достаточно вычислить эти величины в симметричной точке  $p^2 = q^2 = Q^2$ . Так как  $q = p + Q$ , то отсюда следует, что  $2pq = 2qQ = -2pQ = q^2$ . Чтобы найти коэффициент в  $\tilde{z}_1$  при величине  $\eta$ , нам достаточно удержать в формулах для  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  члены вида соответственно

$$\frac{k_\gamma k_\delta}{k^2 (k+q)^2 (k+Q)^2}, \quad \frac{k_\alpha k_\gamma}{k^2 (k+p)^2 (k+q)^2},$$

которые приводят к наиболее сильным расходимостям. Вклад этих наиболее сильно расходящихся членов в  $\Gamma_1$  определяется формулой

$$g\Gamma_{1\gamma}^{abc}(p, q) = -i(\mu^{2-\frac{d}{2}}g)^3 \frac{n}{2} f^{abc} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 (k+q)^2 (k+Q)^2} \times \\ \times \{-kqk_\gamma + k^2q_\gamma - (1-\xi)(-kqk_\gamma + k^2q_\gamma)\} = \\ = -i(\mu^{2-\frac{d}{2}}g)^3 \frac{\xi n}{2} f^{abc} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2q_\gamma - kqk_\gamma}{k^2 (k+q)^2 (k+Q)^2}.$$

Мы учли при этом, что согласно (1.8.33)

$$f^{adg} f^{gec} f^{bed} = -\frac{n}{2} f^{abc}.$$

Используя формулу

$$\frac{1}{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma)} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{y^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} (1-x)^{\gamma-1}}{[ay + b(x-y) + c(1-x)]^{\alpha+\beta+\gamma}} \quad (4.7.18)$$

и полагая в ней  $a = (k+Q)^2$ ,  $b = (k+q)^2$ ,  $c = k^2$ , получаем

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{kqk_\gamma}{k^2 (k+q)^2 (k+Q)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma(3) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{kqk_\nu}{[k^2 + 2k(xq - y\rho) + xq^2]^3} = \\
&= \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) (y\rho q - xq^2) (y\rho_\nu - xq_\nu) B^{\frac{d}{2}-3} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} q_\nu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) B^{\frac{d}{2}-2} \right\}, \\
&\quad B = -q^2(x(1-x) + y(x-y)).
\end{aligned}$$

Отметим далее, что согласно (4.7.3)

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k+q)^2 (k+Q)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 q^2 - xq^2)^{2-\frac{d}{2}}}.$$

Поэтому, отбрасывая регулярное при  $d \rightarrow 4$  слагаемое, пропорциональное  $\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right)$ , получаем

$$\begin{aligned}
g\Gamma_{1\nu}^{abc}(p, q) &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (\mu^{2-\frac{d}{2}} g)^3 \frac{\xi n}{2} f^{abc} q_\nu (-q^2)^{\frac{d}{2}-2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \times \\
&\times \int_0^1 dx \left\{ (x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} - \frac{1}{2} \int_0^x dy (x(1-x) + y(x-y))^{\frac{d}{2}-2} \right\}.
\end{aligned}$$

При  $d \rightarrow 4$  отсюда находим

$$\Gamma_{1\nu}^{abc}(p, q) = f^{abc} \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\xi n}{2} q_\nu \left( \frac{3}{4} \eta - \frac{3}{4} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right) \quad (4.7.19)$$

(в скобках не учитываются постоянные, не зависящие от  $q$  члены).

Аналогично можно найти величину  $\Gamma_2$ :

$$\Gamma_{2\nu}^{abc}(p, q) = f^{abc} \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\xi n}{2} q_\nu \left( \frac{1}{4} \eta - \frac{1}{4} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right). \quad (4.7.20)$$

Таким образом, вершинная функция  $\Gamma_\nu^{abc}$  при  $p^2 = q^2 = Q^2$  имеет вид

$$\Gamma_\nu^{abc}(p, q) = f^{abc} q_\nu \left\{ 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\xi n}{2} \left( \eta - \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right) \right\}, \quad (4.7.21)$$

или

$$\Gamma_\nu^{abc}(p, q) = \tilde{z}_1^{-1} \underline{\Gamma}_\nu^{abc}(p, q), \quad (4.7.22)$$

где

$$\tilde{z}_1^{-1} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\xi n}{2} \eta;$$

$$\underline{\Gamma}_\nu^{abc}(p, q) = f^{abc} q_\nu \left( 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\xi n}{2} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right) \quad (4.7.23)$$

(мы учли, что  $\underline{\Gamma}_\nu^{abc}(p, q)|_{p^2=q^2=Q^2=-\mu^2} = f^{abc} q_\nu$ ).

Из формулы (4.7.21) видно, что при использовании предельного импульса величину  $\eta$  следует заменить на  $\ln \frac{\mathcal{M}^e}{\mu^2}$  с тем, чтобы величина  $\mu$  не входила в величину  $\Gamma$ .

Приведем еще константы перенормировки  $\tilde{z}_1, z_3, \tilde{z}_3$  во втором порядке теории возмущений (см. формулы (4.7.7), (4.7.16), (4.7.23)), выраженные не через  $\eta$ , а через предельный импульс  $\mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1^{-1} &= 1 + \frac{ng^2}{16\pi^2} \xi \ln \frac{\mathcal{M}}{\mu}, \quad \tilde{z}_3 = 1 + \frac{ng^2}{16\pi^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{\xi}{2} \right) \ln \frac{\mathcal{M}}{\mu}, \\ z_3 &= 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left( n \left( \frac{13}{3} - \xi \right) - \frac{4}{3} n_f \right) \ln \frac{\mathcal{M}}{\mu}. \end{aligned} \quad (4.7.24)$$

Остальные константы перенормировки  $z_1, z$  можно найти из тождеств Уорда (4.6.12)

$$z_1 = z_3 \frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_3}, \quad z = z_3 \left( \frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_3} \right)^2.$$

## § 4.8. АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ ГРИНА КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ В ОБЛАСТИ БОЛЬШИХ ИМПУЛЬСОВ

**4.8.1. Уравнения ренормализационной группы.** Как мы видели, свойство перенормируемости квантовой электродинамики позволяет установить асимптотическое поведение в области больших импульсов различных функций Грина. Теперь покажем, что аналогичная ситуация имеет место и в теории неабелевых калибровочных полей. Будем предполагать вначале, что кварковых полей нет.

Напомним свойство перенормируемости теории неабелевых калибровочных полей.

Будем использовать общее обозначение  $\Gamma(p; g; \xi, \mathcal{M})$  для неперенормированных обратных функций распространения глюонов  $(G^{-1})_{\mu\nu}$  и духов  $G^{-1}$ , а также вершинных функций, соответствующих любому числу внешних линий. Последние считаем ампутированными или одночастично неприводимыми (это значит, что в соответствующей многочастичной функции Грина отброшены одночастичные функции Грина, которые сопоставляются с внешними линиями). Функции  $\Gamma$  зависят от совокупности 4-импульсов внешних линий  $p \equiv \{p_1 \dots p_n\}$ , неперенормированных константы связи  $g$  и калибровочной постоянной  $\xi$ , а также импульса обрезания  $\mathcal{M}$ . Согласно свойству перенормируемости структура бесконечностей (логарифмических, т. е.  $\sim \ln \mathcal{M}$ ) в неперенормированных функциях  $\Gamma$  такова, что они могут быть выделены в виде отдельного множителя  $z$ , не зависящего от импульсов  $p$ :

$$\Gamma(p; g, \xi, \mathcal{M}) = z(g, \xi, \mathcal{M}, \mu) \underline{\Gamma}(p; \underline{g}, \underline{\xi}, \mu), \quad (4.8.1)$$

где функции  $\underline{\Gamma}$  уже не содержат бесконечностей и называются перенормированными функциями. Здесь  $\underline{g}$  и  $\underline{\xi}$  — перенормированные константа связи и калибровочная постоянная, соответствующие точке нормировки  $\rho^2 = -\mu^2 < 0$ . Точку вычитания, или нормировки, мы выбираем



пространственно подобной, так как в этом случае функции Грина не будут содержать адсорбционных частей, соответствующих мнимым частям массовых операторов, следовательно, согласно (4.8.1) константы перенормировки  $z$  будут вещественными. Подчеркнем, что в формуле (4.8.1) неперенормированная величина  $\Gamma$  зависит от импульса обрезания  $M$ , но не зависит от  $\mu$ , в то время как перенормированная величина  $\underline{\Gamma}$  зависит от  $\mu$ , но не зависит от  $M$ .

Множители  $z$ , разные для различных функций  $\Gamma$ , можно выразить через пять универсальных констант перенормировки  $z_1, \tilde{z}_1, z_3, \tilde{z}_3, z$ , введенных в п. 4.6.2. При этом пяти функциям распространения и вершинным функциям (неприводимые диаграммы которых содержат расходимость), введенным в п. 4.6.2, в связи с теорией перенормировок будут соответствовать следующие функции  $\Gamma$ :

$$(G^{-1})_{\mu\nu}^{ab} = \Gamma_1, \quad (G^{-1})^{ab} = \Gamma_2, \quad g\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc} = \Gamma_3, \quad (4.8.2)$$

$$g^2\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd} = \Gamma_4, \quad g\Gamma_{\mu}^{abc} = \Gamma_5.$$

Функциям  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) и общим вершинным функциям согласно (4.8.1), (4.6.14) соответствуют множители

$$z = (\tilde{z}_3)^{-\frac{n_c}{2}} (z_3)^{-\frac{n_A}{2}} \equiv z_{n_A n_c}, \quad (4.8.3)$$

где  $n_c$  и  $n_A$  — числа внешних духовых и глюонных линий в функциях  $\Gamma$ . При этом мы учли, что неперенормированная константа связи  $g$  и калибровочная постоянная  $\xi$  связаны с перенормированными константой связи  $\underline{g} \equiv g_\mu$  и калибровочной постоянной  $\underline{\xi} \equiv \xi_\mu$  соотношениями

$$g_\mu = z_3^{3/2} z_1^{-1} g, \quad \xi_\mu = z_3^{-1} \xi, \quad (4.8.4)$$

а константы перенормировки  $z$  удовлетворяют тождествам Уорда

$$z_1 \tilde{z}_3 = \tilde{z}_1 z_3, \quad z z_3 = z_1^2.$$

Напомним, что константы перенормировки  $\tilde{z}_1, z_3, \tilde{z}_3$  определяются из условия равенства перенормированных функций  $\underline{G}_{\mu\nu}^{ab}, \underline{G}^{ab}, \underline{\Gamma}_\lambda^{abc}$  в симметричной точке  $p_1 = p_2 = p$  (или  $p_1 = p$ ) при  $p^2 = -\mu^2$ , соответствующим свободным функциям (константы  $z_1, z$  определяются из тождеств Уорда (4.6.12)).

Так как функции  $\Gamma \equiv \Gamma_{n_A n_c}$  не зависят от выбора произвольной точки вычитания  $\mu$ , то

$$\frac{1}{z_{n_A n_c}} \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma_{n_A n_c}(p; g, \xi, M) = 0,$$

откуда, используя (4.8.1), находим

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\underline{g}, \underline{\xi}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} + \delta(\underline{g}, \underline{\xi}) \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} - \gamma_{n_A n_c}(\underline{g}, \underline{\xi}) \right\} \Gamma_{n_A n_c}(p; \underline{g}, \underline{\xi}; \mu) = 0, \quad (4.8.5)$$

где

$$\beta(\underline{g}, \underline{\xi}) = \mu \frac{\partial \underline{g}}{\partial \mu}, \quad \delta(\underline{g}, \underline{\xi}) = \mu \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \mu}, \quad \gamma_{n_A n_c}(\underline{g}, \underline{\xi}) = -\mu \frac{\partial \ln z_{n_A n_c}}{\partial \mu} \quad (4.8.6)$$

(производные в определении функций  $\beta, \delta, \gamma_{n_A n_c}$  вычисляются при постоянных  $\underline{g}, \underline{\xi}, M$ ).<sup>26</sup>

Подчеркнем, что функции  $\beta, \delta, \gamma$  являются безразмерными и не зависят от импульсов  $p$ . Поэтому они могли бы зависеть от отношения  $\frac{\mu}{M}$ . Однако так как функции  $\Gamma$  конечны при  $M \rightarrow \infty$ , то в пределе  $M \rightarrow \infty$  величины  $\beta, \delta, \gamma$  не зависят от  $\mu$  и являются функциями только  $\underline{g}$  и  $\underline{\xi}$ . Подчеркнем также, что функции  $\beta$  и  $\delta$  являются универсальными, т. е. не зависят от рассматриваемой вершинной функции  $\Gamma_{n_A n_c}$ , величина же  $\gamma_{n_A n_c}$  зависит от числа внешних линий вершины  $\Gamma_{n_A n_c}$ . Согласно (4.8.3)

$$\gamma_{n_A n_c} = n_A \gamma_A + n_c \gamma_c, \quad \delta = -2\underline{\xi} \gamma_A, \quad (4.8.7)$$

где

$$\gamma_A = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln z_A}{\partial \mu}, \quad \gamma_c = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln \tilde{z}_3}{\partial \mu} \quad (4.8.8)$$

и функции  $\gamma_A, \gamma_c$ , как и  $\beta, \delta$ , уже не зависят от рассматриваемой вершинной функции.

Наконец, отметим, что в калибровке Ландау ( $\underline{\xi} = 0$ )  $\underline{\xi} = 0$ , поэтому  $\delta = 0$ .

Уравнение (4.8.5) называется уравнением ренормализационной группы (уравнением Калана — Симанчика). Оно аналогично уравнению ренормализационной группы (3.8.4), которое рассматривалось в квантовой электродинамике. Так как здесь мы рассматриваем безмассовую масштабно-инвариантную теорию, то роль массы электрона играет нормировочная постоянная  $\mu$ . Эта постоянная не содержится в исходном масштабно-инвариантном лагранжиане и появляется в регуляризованных величинах вместо импульса обрезания  $M$ , входящего в перенормированные величины.

**4.8.2. Структура функций Грина калибровочных полей в области больших импульсов.** Уравнение ренормализационной группы (4.8.5) можно использовать для исследования поведения функций Грина и вершинных функций в области больших импульсов. С этой целью сделаем масштабное преобразование  $p_i \rightarrow \lambda p_i$  и будем рассматривать функцию  $\underline{\Gamma}(\lambda p; \underline{g}, \mu)$  вместо функции  $\underline{\Gamma}(p; \underline{g}, \mu)$  (мы будем использовать калибровку Ландау,  $\underline{\xi} = 0$ ). Если размерность функции  $\Gamma$  равна  $\mu^\kappa$ ,  $[\Gamma] = \mu^\kappa$ , то

$$\underline{\Gamma}(\lambda p; \underline{g}, \mu) = \mu^\kappa \tilde{\Gamma}\left(\frac{\lambda}{\mu} p; \underline{g}\right),$$

<sup>26</sup> Метод ренормализационной группы в теории неабелевых калибровочных полей впервые был применен Гроссом, Вильчеком [21] и Политцером [22]. Уравнения ренормализационной группы в форме (4.8.5) рассматривались в работах [23], [24].

где  $\tilde{\Gamma}$  — безразмерная функция, зависящая только от аргументов  $\frac{\lambda}{\mu}$   $\rho$  и  $\underline{g}$ . Из этой формулы следует

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma(\lambda \rho; \underline{g}, \mu) = \left( -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \kappa \right) \Gamma(\lambda \rho; \underline{g}, \mu),$$

следовательно, уравнение (4.8.5) приобретает вид

$$\left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} - \kappa + \gamma_{nn_c}(\underline{g}) \right\} \Gamma_{nn_c}(\lambda \rho; \underline{g}, \mu) = 0 \quad (4.8.9)$$

(мы заменили  $\underline{g}$  на  $\underline{g}$  и учли, что  $\xi = 0$ ). Введем функцию  $\bar{g}(\lambda, \underline{g})$ , зависящую от  $\underline{g}$  и  $\lambda$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \bar{g} = \beta(\bar{g}) \quad (4.8.10)$$

и начальному условию

$$\bar{g}(1, \underline{g}) = \underline{g}. \quad (4.8.11)$$

Эта функция называется эффективной константой связи. Вводя вместо  $\lambda$  новую переменную  $t = \ln \lambda$ , перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t, \underline{g}) = \beta(\bar{g}(t, \underline{g})). \quad (4.8.12)$$

Это уравнение с учетом начального условия эквивалентно уравнению

$$t = \int_{\underline{g}}^{\bar{g}(t, \underline{g})} \frac{dx}{\beta(x)} \quad (4.8.12')$$

и неявным образом определяет  $\bar{g}(t, \underline{g})$  как функцию  $t, \underline{g}$ . Оно называется уравнением Гелл-Манна и Лоу. Дифференцируя это уравнение по  $\underline{g}$  и используя (4.8.10), получаем

$$\left( \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} \right) \bar{g}(\lambda, \underline{g}) = 0 \quad (4.8.13)$$

(мы снова вернулись к переменной  $\lambda$ ).

Эффективная константа связи  $\bar{g}(\lambda, \underline{g})$  имеет простой физический смысл: она представляет собой перенормированную константу связи в случае, когда вычитание производится не в точке  $p^2 = -\mu^2$ , а в точке  $p^2 = -\mu^2 \lambda^2$ ,

$$\bar{g}(\lambda, \underline{g}_\mu) = g_{\lambda \mu}, \quad g_\mu \equiv \underline{g}. \quad (4.8.14)$$

Действительно, используя уравнение (4.8.13) и определение (4.8.6) функции  $\beta$ , легко видеть, что величина  $\bar{g}\left(\frac{s}{\mu}, \underline{g}_\mu\right)$  не зависит от  $\mu$

(является ренорм-инвариантом):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} \bar{g}\left(\frac{s}{\mu}, g_\mu\right) &= -\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial \bar{g}(\lambda, g_\mu)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{g}(\lambda, g_\mu)}{\partial g_\mu} \frac{\partial g_\mu}{\partial \mu} = \\ &= -\frac{1}{\mu} \left( \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - \beta(g_\mu) \frac{\partial}{\partial g_\mu} \right) \bar{g}(\lambda, g_\mu) = 0, \quad \lambda \equiv \frac{s}{\mu}. \end{aligned}$$

Поэтому, используя (4.8.11), получаем

$$\bar{g}\left(\frac{s}{\mu}, g_\mu\right) = \bar{g}(1, g_s) = g_s.$$

Заменяя далее  $s$  на  $\mu\lambda$ , приходим к соотношению (4.8.14).

Величина  $\kappa$  (каноническая размерность) определяется формулой

$$\kappa = 4 - n_A - n_c \equiv \kappa_{n_A n_c}. \quad (4.8.15)$$

Это вытекает из того, что размерность операторов  $A_\mu^a$ ,  $c^a$ ,  $\bar{c}^a$  равна  $\mu$  (см. (4.4.32)), следовательно, размерность функций Грина в координатном представлении будет  $\mu^{n_A n_c}$ ; в импульсном представлении размерность функции Грина (без учета размерности  $\delta(\Sigma p)$ , выражающей закон сохранения 4-импульса диаграммы в целом) будет  $\mu^{4-3(n_A+n_c)}$ , следовательно, размерность  $n_A + n_c$  точечной вершины будет  $\mu^{4-n_A-n_c}$ .

Учитывая определение (4.8.10) функции  $\bar{g}$  и формулу (4.8.13), решение уравнения (4.8.9) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{n_A n_c}(\lambda p; g, \mu) &= \\ &= \Gamma_{n_A n_c}(p; \bar{g}(\lambda, g), \mu) \exp \int_0^{\ln \lambda} (\kappa_{n_A n_c} - \gamma_{n_A n_c}(\bar{g}(\lambda, g))) d \ln \lambda, \end{aligned}$$

или

$$\Gamma_{n_A n_c}(\lambda p; g, \mu) = \lambda^{\kappa_{n_A n_c}} e^{-\int_0^t dx \gamma_{n_A n_c}(\bar{g}(x, g))} \Gamma_{n_A n_c}(p; \bar{g}(t, g), \mu).$$

Переходя в этой формуле с помощью уравнения (4.8.10) от интегрирования по  $x \equiv \ln \lambda$  к интегрированию по  $\bar{g}$ , получаем

$$\Gamma_{n_A n_c}(\lambda p; g, \mu) = \Gamma_{n_A n_c}(p; \bar{g}(\lambda, g), \mu) \lambda^{\kappa_{n_A n_c}} \exp \int_{\bar{g}(\lambda, g)}^g dg \frac{\gamma_{n_A n_c}(g)}{\beta(g)}, \quad (4.8.16)$$

где функции  $\beta$ ,  $\gamma_{n_A n_c}$  определяются формулами (4.8.6), (4.8.7).

Данная формула связывает перенормированные функции  $\Gamma$  с импульсами  $\lambda p$  и константой связи  $g$  с перенормированной функцией  $\Gamma$  с импульсами  $p$  и константой связи  $\bar{g}(\lambda, g)$ . Поэтому, зная вершинные функции при конечных импульсах, эту формулу можно использовать для нахождения асимптотики вершинных функций в области больших импульсов, если считать, что  $\lambda \rightarrow \infty$ . При этом надо знать асимптотику  $\bar{g}(\lambda, g)$  в области больших  $\lambda$ .

Если уравнение (4.8.10) допускает решение, для которого существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{g}(\lambda, g) \equiv g_{\infty},$$

то этот предел называют ультрафиолетово-стабильной фиксированной точкой. Из уравнения (4.8.12') следует, что  $g_{\infty}$  представляет собой нуль-функции  $\beta(g)$ ,  $\beta(g_{\infty}) = 0$ . Кроме того, чтобы предел  $g_{\infty}$  существовал, необходимо выполнение условия  $\left. \frac{\partial \beta(g)}{\partial g} \right|_{g=g_{\infty}} < 0$  (так как в этом случае согласно (4.8.10)  $\beta(\bar{g}) = \partial \bar{g} / \partial \ln \lambda > 0$  при  $\bar{g} < g_{\infty}$  и  $\beta(\bar{g}) = \partial \bar{g} / \partial \ln \lambda < 0$  при  $\bar{g} > g_{\infty}$ , следовательно, функция  $\bar{g}(\lambda, g)$  растет с ростом  $\lambda$  при  $\bar{g} < g_{\infty}$  и убывает с ростом  $\lambda$  при  $\bar{g} > g_{\infty}$ ).

Аналогично легко убедиться, что если  $\beta(g_0) = 0$  и  $\left. \frac{\partial \beta(g)}{\partial g} \right|_{g=g_0} > 0$ , то существует предел  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} g(\lambda, g) = g_0$ , который называется инфракрасно-стабильной фиксированной точкой.

Если  $g_{\infty} = 0$ , то теория называется асимптотически свободной.

**4.8.3. Асимптотика вершинных функций и функций Грина в теории возмущений.** Перейдем к нахождению вершинных функций и функций Грина в области больших импульсов, предполагая справедливую теорию возмущений, т. е. считая  $g^2 \ll 1$ .

Весь анализ, проведенный выше, справедлив, очевидно, и при учете кварков, если масса  $m$  последних равна нулю. Если масса кварков  $m$  отлична от нуля, то в аргументах вершинных функций, как и в квантовой электродинамике, появляется дополнительный безразмерный параметр  $m/p$ . В рамках теории возмущений можно показать, что в области больших пространственноподобных 4-импульсов  $p \equiv (p_1, \dots, p_n)$  этим параметром можно пренебречь. По этой причине для больших ( $|p| \gg m$ ) пространственноподобных векторов  $p$  в функциях  $\Gamma$  можно пренебречь массой кварков и пользоваться формулами, приведенными выше. При этом модифицируются величины  $\kappa_{n_A n_c}$  (см. (4.8.15)) и  $\gamma_{n_A n_c}$  (см. (4.8.7)). Именно эти величины заменяются величинами  $\kappa_{n_A n_c n_q}$  и  $\gamma_{n_A n_c n_q}$  ( $n_q$  — число внешних кварковых линий в функции  $\Gamma \equiv \Gamma_{n_A n_c n_q}$ ), зависящими от числа внешних глюонных  $n_A$ , духовых  $n_c$  и кварковых  $n_q$  линий:

$$\kappa_{n_A n_c n_q} = 4 - n_A - n_c - \frac{3}{2} n_q, \quad (4.8.17)$$

$$\gamma_{n_A n_c n_q} = n_A \gamma_A + n_c \gamma_c + n_q \gamma_q, \quad \gamma_q = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln z_q}{\partial \mu}$$

( $z_q$  — константа перенормировки кварковой функции Грина).

При  $g^2 \ll 1$  перенормировочные константы в приближении  $g^2$  определяются формулами (4.7.24)

$$z_3 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left( n \left( \frac{13}{3} - \xi \right) - \frac{4}{3} n_f \right) \ln \frac{\mu}{\mu},$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_3 &= 1 + \frac{ng^2}{16\pi^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{\xi}{2} \right) \ln \frac{\mathcal{M}}{\mu}, \\ \tilde{z}_1^{-1} &= 1 + \frac{ng^2}{16\pi^2} \xi \ln \frac{\mathcal{M}}{\mu}, \\ z_q &= 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \xi \frac{n^2 - 1}{n} \ln \frac{\mathcal{M}}{\mu}\end{aligned}\quad (4.8.18)$$

(выражение для  $z_q$  можно получить из выражения для  $z_2$  (см. (3.7.8)), если учесть формулу (1.8.29)).

Поэтому согласно (4.8.6) функция  $\beta(g)$  определяется формулой

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left( \frac{11}{3} n - \frac{2}{3} n_f \right) \equiv -b \frac{g^3}{16\pi^2}, \quad (4.8.19)$$

а функций  $\gamma_A, \gamma_c, \gamma_q$  формулами

$$\begin{aligned}\gamma_A &= -\frac{g^2}{32\pi^2} \left\{ n \left( \frac{13}{3} - \xi \right) - \frac{4}{3} n_f \right\}, \quad \gamma_c = -\frac{g^2}{32\pi^2} n \left( \frac{3}{2} - \frac{\xi}{2} \right), \\ \gamma_q &= \frac{g^2}{32\pi^2} \xi \frac{n^2 - 1}{n}.\end{aligned}\quad (4.8.20)$$

Обратим внимание на то, что согласно изложенному в § 4.7 в величину  $b$  через константы перенормировки отрицательный вклад вносит последняя диаграмма на рис. 40, а положительный — все остальные диаграммы.

Подставляя (4.8.19) в (4.8.10), находим

$$\bar{g}^2(\lambda, g) = \frac{g^2}{1 + \frac{g^2}{16\pi^2} b \ln \lambda^2}, \quad b = \frac{11}{3} n - \frac{2}{3} n_f. \quad (4.8.21)$$

Аналогичная формула для  $\bar{g}$  получена в квантовой электродинамике (мы называли ее инвариантным зарядом). Различие между этими формулами состоит в том, что в квантовой электродинамике константа  $b$  была отрицательной, а для неабелевых калибровочных полей с самодействием — положительной, если число кварков не очень велико,  $n_f < \frac{11}{2} n$ . Вследствие этого величина  $\bar{g}$  уменьшается с ростом  $\lambda$  и в пределе  $\lambda \rightarrow \infty$  она стремится к нулю<sup>27</sup>. Отсюда вытекает, что использование теории возмущений в уравнении (4.8.16) тем более оправдано, чем больше величина  $\lambda$ .

Отсюда и из (4.8.20) следует, что если  $g^2 \ll 1$ , то для нахождения выражения в экспоненте формулы (4.8.16) мы также можем пользоваться методом теории возмущений. Именно из (4.8.20) следует, что

$$\int_g^{\bar{g}} dg \frac{\gamma_{AN_c n_g}(g)}{\beta(g)} = \frac{a}{2b} \ln \frac{\bar{g}^2}{g^2}, \quad a = n_A \left( \frac{13}{6} n - \frac{2}{3} n_f \right) + n_c \frac{3}{4} n.$$

<sup>27</sup> Наличие свойства асимптотической свободы для неабелевых калибровочных теорий, по сути, вытекало из работы Хрипловича [17]. Это свойство затем было открыто Гроссом, Вильчеком [21] и Политцером [22], указавшими на его важность для объяснения характера сильных взаимодействий.

Поэтому согласно (4.8.16)

$$\underline{\Gamma}_{n_A n_c n_q}(\lambda \rho, g; \mu) = \underline{\Gamma}_{n_A n_c n_q}(\rho, \bar{g}(\lambda, g); \mu) \lambda^\kappa \left(1 + \frac{g^2}{16\pi^2} b \ln \lambda^2\right)^{\frac{a}{2b}}. \quad (4.8.22)$$

Видно, что в этой формуле от  $\lambda$  зависит не только величина  $\underline{\Gamma}(\rho, \bar{g}, \mu)$  (которую можно найти в рамках обычной теории возмущений, так как  $\bar{g}^2 \ll 1$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ ), но и множитель  $\lambda^\kappa (\ln \lambda^2)^{a/2b}$ . Величина  $\kappa$  определяет размерность функции  $\Gamma$  и называется канонической размерностью, а величина  $\gamma$  называется аномальной размерностью.

Из данной формулы следует, что функция распространения глюонов в области  $k^2 \rightarrow \infty$  определяется формулой

$$\begin{aligned} G_{(i)}^{ab}(\lambda k) &\approx -\frac{1}{\lambda^2 k^2} \left(1 + \frac{g^2 b}{16\pi} \ln \lambda^2\right)^{-\frac{a}{2b}} \delta_{ab}, \\ a &= \frac{13}{3} n - \frac{4}{3} n_f. \end{aligned} \quad (4.8.23)$$

## § 4.9. ВВЕДЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ И ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА

**4.9.1. Стохастические поля с пятой «временной» координатой.** До сих пор при построении  $S$ -матрицы и функций Грина мы исходили из операторного формализма, в котором поля считались операторами, подчиняющимися определенным перестановочным соотношениям. Было показано, что функции Грина и  $S$ -матрицу можно представить в виде континуальных интегралов, которые определялись функционалом действия классических полей.

Рассмотрим другой метод построения функций Грина, основанный на введении стохастических полей  $\varphi_\eta(x, \tau)$ , зависящих (в отличие от физического поля  $\varphi(x)$ ) от случайного источника  $\eta(x; \tau)$  и дополнительного пятого параметра  $\tau$ , который играет роль «времени»: эволюция поля  $\varphi_\eta(x, \tau)$  происходит именно по параметру  $\tau$  [25]. Обычное же время  $t$  будем считать чисто мнимым, так что величина  $x_4 = it$  будет вещественной, следовательно, пространство  $x = (x, x_4)$  — евклидово, а не псевдоевклидово.

Предположим, что поле  $\varphi_\eta(x, \tau)$  со «временем»  $\tau$  эволюционирует по закону

$$\frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\delta \mathcal{J}(\varphi(x', \tau))}{\delta \varphi(x, \tau)} + \eta(x, \tau), \quad \varphi_\eta(x, \tau) \equiv \varphi(x, \tau). \quad (4.9.1)$$

Величина  $\mathcal{J}(\varphi(x'))$  представляет собой классическое действие в евклидовом пространстве, которое определяется формулой

$$\mathcal{J}(\varphi(x')) = \int d^3 x dx_4 \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi), \quad (4.9.2)$$

где  $\mathcal{L}$  — лагранжиан классических полей  $\varphi(x)$ , в котором  $\partial_0 \varphi$  заменено на  $i \partial \varphi / \partial x_4$ . Это действие отличается от действия  $W(\varphi(x'))$  мно-

жителем  $i$ :  $\mathcal{F}(\varphi(x')) = iW(\varphi(x'))$ . При замене в функционале евклидова действия  $\mathcal{F}(\varphi(x'))$  поля  $\varphi(x)$  на  $\varphi(x, \tau)$  ( $\mathcal{F}(\varphi(x)) \rightarrow \mathcal{F}(\varphi(x, \tau))$ ) функционал  $\mathcal{F}(\varphi(x, \tau))$  становится функцией «времени»  $\tau$ .

Случайное поле  $\eta(x, \tau)$  считается гауссовым, т. е.

$$\begin{aligned} & \langle \eta(x_1, \tau_1) \dots \eta(x_{2n}, \tau_{2n}) \rangle_\eta = \\ & = \Sigma \langle \eta(x_1, \tau_1) \eta(x_2, \tau_2) \rangle_\eta \dots \langle \eta(x_{2n-1}, \tau_{2n-1}) \eta(x_{2n}, \tau_{2n}) \rangle_\eta, \end{aligned} \quad (4.9.3)$$

где символ  $\langle \dots \rangle_\eta$  служит для обозначения усреднения по случайным полям и суммирование происходит по всем разбиениям на пары источников  $\eta(x_i, \tau_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ). Предполагается, что среднее от произведения нечетного числа функций  $\eta(x_i, \tau_i)$  равно нулю. Таким образом, среднее от произведения источников  $\eta(x_i, \tau_i)$  вычисляется по правилам Вика, причем в качестве связи между «полями»  $\eta(x, \tau)$  используется величина  $\langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle_\eta$ . Мы предполагаем, что эта связь задается формулой

$$\langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle_\eta = 2\delta(x - x') \delta(\tau - \tau'). \quad (4.9.4)$$

Это значит, что случайный процесс  $\eta(x, \tau)$  представляет собой гауссов белый шум.

Ясно, что если бы источники  $\eta(x, \tau)$  и функции  $\varphi_\eta(x, \tau)$  не зависели от  $\tau$ , то уравнение (4.9.1) переходило бы в уравнение

$$\frac{\delta \mathcal{F}(\varphi_\eta(x'))}{\delta \varphi_\eta(x)} = \eta(x) \quad (4.9.5)$$

и представляло бы собой обычное уравнение поля (в евклидовом пространстве) при наличии источника  $\eta$ .

Уравнение (4.9.1) имеет структуру функционального уравнения Ланжевена, которое используется в статистической физике [26].

Как мы знаем, построение  $S$ -матрицы полей  $\varphi(x)$  (которые мы здесь предполагаем бозевскими) эквивалентно нахождению функций Грина полей  $\varphi(x)$ , т. е. определению вакуумных средних

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{S_{\text{vac}}} \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \} | 0 \rangle. \quad (4.9.6)$$

Далее мы покажем, что евклидовы функции Грина (т. е. функций Грина (4.9.6) с вещественным значением  $x_4 = it$ ; в связи с этим см. п. 3.6.1, в котором производился евклидов поворот в комплексной плоскости  $\rho_0$ . Евклидовы функции Грина (непосредственно используются в статистической физике) связаны с одновременными корреляционными функциями  $\langle \varphi(x_1, \tau) \dots \varphi(x_n, \tau) \rangle_\eta$  вспомогательных полей  $\varphi(x, \tau)$ , являющихся решениями уравнения Ланжевена, следующим соотношением:

$$G(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \langle \varphi(x_1, \tau) \dots \varphi(x_n, \tau) \rangle_\eta. \quad (4.9.7)$$

Это уравнение связывает функции Грина реальных полей в евклидовой области со стохастическими полями  $\varphi(x, \tau)$ .

**4.9.2. Функциональное уравнение Фоккера — Планка и его стационарное решение.** Для нахождения одновременных (по  $\tau$ ) корреляци-



онных функций  $\langle \varphi(x_1, \tau) \dots \varphi(x_n, \tau) \rangle_\eta$  удобно ввести функционал распределения полей  $\varphi(x, \tau)$ :

$$\mathcal{P}(\varphi; \tau) = \langle \delta(\varphi - \varphi(\tau)) \rangle_\eta, \quad \delta(\varphi - \varphi(\tau)) \equiv \prod_x \delta(\varphi(x) - \varphi(x, \tau)), \quad (4.9.8)$$

где  $\delta(\varphi - \varphi(\tau))$  — функциональная  $\delta$ -функция и  $\varphi(x, \tau)$  — решение уравнения Ланжевена (4.9.1) с произвольными начальными условиями.

Одновременная корреляционная функция  $\langle \varphi(x_1, \tau) \dots \varphi(x_n, \tau) \rangle_\eta$  связана с функционалом распределения  $\mathcal{P}(\varphi; \tau)$  полей  $\varphi(x)$  соотношением

$$\langle \varphi(x_1, \tau) \dots \varphi(x_n, \tau) \rangle_\eta = \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \mathcal{P}(\varphi; \tau), \quad (4.9.9)$$

где  $\int \mathcal{D}\varphi \dots$  — континуальный интеграл по полям  $\varphi(x)$ . Наша задача теперь состоит в нахождении функционала  $\mathcal{P}(\varphi; \tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Покажем, что функционал  $\mathcal{P}(\varphi; \tau)$  изменяется со «временем» согласно уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\varphi; \tau)}{\partial \tau} = \int d^4x \frac{\delta j(x, \tau; \varphi)}{\delta \varphi(x)}, \quad (4.9.10)$$

$$j(x, \tau; \varphi) = \frac{\delta \mathcal{P}(\varphi; \tau)}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta \mathcal{P}(\varphi)}{\delta \varphi(x)} \mathcal{P}(\varphi; \tau).$$

Это уравнение можно назвать функциональным уравнением Фоккера—Планка, соответствующим функциональному уравнению Ланжевена (4.9.1).

Чтобы убедиться в справедливости уравнения (4.9.10), продифференцируем (4.9.8) по  $\tau$ :

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\varphi; \tau)}{\partial \tau} = \int d^4x \frac{\delta j(x, \tau; \varphi)}{\delta \varphi(x)},$$

где

$$j(x, \tau; \varphi) = - \left\langle \frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial \tau} \delta(\varphi - \varphi(\tau)) \right\rangle_\eta.$$

Используя уравнение Ланжевена (4.9.1), находим

$$j(x, \tau; \varphi) = \left\langle \left( \frac{\delta \mathcal{P}(\varphi(x', \tau))}{\delta \varphi(x, \tau)} - \eta(x, \tau) \right) \delta(\varphi - \varphi(\tau)) \right\rangle_\eta.$$

В функционале  $\delta \mathcal{P} / \delta \varphi(x, \tau)$  можно заменить  $\varphi(x, \tau)$  на  $\varphi(x)$ . В результате, учитывая (4.9.8), получим

$$j(x, \tau; \varphi) = \frac{\delta \mathcal{P}(\varphi)}{\delta \varphi(x)} \mathcal{P}(\varphi; \tau) - \langle \eta(x, \tau) \delta(\varphi - \varphi(\tau)) \rangle_\eta. \quad (4.9.11)$$

Используя далее и правила Вика и (4.9.3), второе слагаемое в этой формуле можно представить в виде

$$\langle \eta(x, \tau) \delta(\varphi - \varphi(\tau)) \rangle_\eta =$$

$$= \int d^4x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle_\eta \left\langle \frac{\delta}{\delta \eta(x', \tau')} \delta(\varphi - \varphi(\tau)) \right\rangle_\eta. \quad (4.9.12)$$

Для нахождения интеграла в правой части (4.9.12) необходимо согласно (4.9.4) найти производную  $\delta\varphi(x, \tau)/\delta\eta(x', \tau')$  при  $\tau' = \tau$ . Так как уравнение (4.9.1) является причинным, т. е. поле  $\varphi(x, \tau)$  в момент «времени»  $\tau$  определяется структурой источников только при  $\tau' < \tau$ , то

$$\frac{\delta\varphi(x, \tau)}{\delta\eta(x', \tau')} = 0, \quad \tau' > \tau. \quad (4.9.13)$$

Для нахождения производной  $\delta\varphi(x, \tau)/\delta\eta(x', \tau')$  при  $\tau' = \tau - 0$  обратимся к уравнению Ланжевена (4.9.1), из которого следует, что

$$\varphi(x, \tau) = - \int_0^{\tau} dt'' \frac{\delta\mathcal{S}(\varphi(x', \tau''))}{\delta\varphi(x, \tau'')} + \int_0^{\tau} dt'' \eta(x, \tau'') + \varphi(x, 0).$$

Дифференцируя эту формулу по  $\eta(x', \tau')$ , получаем (начальное значение поля  $\varphi(x, 0)$  не зависит от  $\eta(x, \tau)$ )

$$\frac{\delta\varphi(x, \tau)}{\delta\eta(x', \tau')} = \delta(x - x') \theta(\tau - \tau') - \int_0^{\tau} dt'' \frac{\delta}{\delta\eta(x', \tau')} \frac{\delta\mathcal{S}(\varphi(x', \tau''))}{\delta\varphi(x, \tau'')}.$$

Будем считать, что  $\tau' < \tau$  (при  $\tau' > \tau$  эта величина равна нулю, см. (4.9.13)). Тогда согласно (4.9.13)

$$\frac{\delta\varphi(x, \tau)}{\delta\eta(x', \tau')} = \delta(x - x') - \int_{\tau'}^{\tau} dt'' \frac{\delta}{\delta\eta(x', \tau')} \frac{\delta\mathcal{S}(\varphi(x', \tau''))}{\delta\varphi(x, \tau'')},$$

откуда

$$\left. \frac{\delta\varphi(x, \tau)}{\delta\eta(x', \tau')} \right|_{\tau'=\tau-0} = \delta(x - x'). \quad (4.9.14)$$

Учитывая (4.9.13), находим

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\delta}{\delta\eta(x', \tau')} \delta(\varphi - \varphi(\tau)) \right\rangle_{\eta} = \\ & = -\theta(\tau - \tau') \int d^4x'' \frac{\delta}{\delta\varphi(x'')} \left\langle \frac{\delta\varphi(x'', \tau)}{\delta\eta(x', \tau')} \delta(\varphi - \varphi(\tau)) \right\rangle_{\eta}, \end{aligned}$$

причем согласно (4.9.14), (4.9.8)

$$\int d^4x'' \frac{\delta}{\delta\varphi(x'')} \left\langle \frac{\delta\varphi(x'', \tau)}{\delta\eta(x', \tau')} \delta(\varphi - \varphi(\tau)) \right\rangle_{\eta} = \frac{\delta\mathcal{S}(\varphi; \tau)}{\delta\varphi(x')},$$

если  $\tau' \rightarrow \tau - 0$ . Из этих формул и (4.9.12) следует, что

$$\begin{aligned} & \langle \eta(x, \tau) \delta(\varphi - \varphi(\tau)) \rangle_{\eta} = \\ & = - \int d^4x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle \eta(x, \tau) \eta(x', \tau') \rangle_{\eta} \theta(\tau - \tau') \frac{\delta\mathcal{S}(\varphi; \tau)}{\delta\varphi(x')}. \quad (4.9.15) \end{aligned}$$

В случае белого шума в подынтегральное выражение в (4.9.15) входит неопределенная величина  $\delta(\tau - \tau') \theta(\tau - \tau')$ . Для раскрытия этой неопределенности заменим в (4.9.4)  $\delta(\tau - \tau')$  некоторой гладкой

функцией  $g(\tau - \tau') = g(\tau' - \tau)$ , что соответствует некоторой модификации стохастического шума. При этом согласно определению (4.9.4) связи полей  $\eta(x, \tau)$  функция  $g(\tau)$  должна быть четной. Отметим, что при переходе к связи  $\langle \eta \eta' \rangle_\eta = 2\delta(x - x')g(\tau - \tau')$ , соответствующей гладкой функции  $g(\tau)$ , все предыдущие выкладки, приводящие к формуле (4.9.15), остаются без изменения, в частности в формуле (4.9.15) остается функция  $\theta(\tau - \tau')$ . Таким образом, для нахождения среднего  $\langle \eta \delta(\varphi - \varphi(\tau)) \rangle_\eta$  необходимо найти интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' g(\tau - \tau') \theta(\tau - \tau') f(\tau') = \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' g(\tau - \tau') f(\tau')$$

( $f(\tau)$  — гладкая функция  $\tau$ ). Если функция  $g(\tau)$  отлична от нуля только при малых  $\tau$ , то вследствие четности функции  $g(\tau)$  рассматриваемый интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{\tau} d\tau' g(\tau - \tau') f(\tau') = f(\tau) \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau g(\tau) \xrightarrow{g \rightarrow \delta} \frac{1}{2} f(\tau).$$

Поэтому согласно (4.9.15)

$$\langle \eta(x, \tau) \delta(\varphi - \varphi(\tau)) \rangle_\eta = - \frac{\delta \mathcal{F}(\varphi; \tau)}{\delta \varphi(x)}. \quad (4.9.16)$$

Таким образом, учитывая (4.9.11), мы приходим к функциональному уравнению Фоккера — Планка (4.9.10).

Найдем стационарные (по  $\tau$ ) решения уравнения (4.9.10). Стационарному решению соответствует обращение в нуль тока  $j$ :

$$\frac{\delta \mathcal{F}(\varphi)}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta \mathcal{F}(\varphi)}{\delta \varphi(x)} \mathcal{P}(\varphi) = 0,$$

откуда

$$\mathcal{P}(\varphi) = \frac{e^{-\mathcal{F}(\varphi)}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{-\mathcal{F}(\varphi)}}.$$

Считая, что при произвольном начальном распределении  $\mathcal{P}(\varphi; 0)$  функционал  $\mathcal{P}(\varphi; \tau)$  стремится к этому стационарному распределению при  $\tau \rightarrow \infty$ , находим

$$\mathcal{P}(\varphi; \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\varphi) \equiv \frac{e^{-\mathcal{F}(\varphi)}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{-\mathcal{F}(\varphi)}}. \quad (4.9.17)$$

Поэтому согласно (4.9.9)

$$\langle \eta(x_1, \tau) \dots \eta(x_n, \tau) \rangle_\eta \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) e^{-\mathcal{F}(\varphi)}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{-\mathcal{F}(\varphi)}}. \quad (4.9.18)$$

Правая часть этого равенства согласно (4.2.38) представляет собой евклидову функцию Грина для физических полей  $\varphi(x)$ . Таким образом, мы получили формулу (4.9.7). Чтобы найти реальные функции Грина, следует выполнить аналитическое продолжение фурье-компонент функций Грина с вещественных значений  $p_4$  на чисто мнимые значения  $p_4 = ip_0$ .

Поле  $\varphi(x)$  мы считаем однокомпонентным бозевским полем. Однако все полученные результаты можно очевидным образом обобщить на многокомпонентные бозевские поля. Кроме того, их можно обобщить и на случай фермиевских полей. При этом под полями  $\varphi_\eta(x, \tau)$  следует понимать грассманы поля, а под источниками  $\eta(x, \tau)$  — грассманы источники, образующие грассманов белый шум. Это значит, что средние от произведений источников вычисляются по правилам Вика для фермиевских полей. Так, в случае дираковских полей величины  $\psi(x, \tau)$ ,  $\bar{\psi}(x, \tau)$  представляют собой грассманы поля, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}(x, \tau)} + \eta(x, \tau), \quad \frac{\partial \bar{\psi}(x, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi(x, \tau)} + \bar{\eta}(x, \tau),$$

где связи грассмановых источников  $\eta(x, \tau)$ ,  $\bar{\eta}(x, \tau)$  определяются формулами

$$\langle \eta \eta' \rangle_\eta = \langle \bar{\eta} \bar{\eta}' \rangle_\eta = 0, \quad \langle \eta_\alpha(x, \tau) \bar{\eta}_\beta(x', \tau) \rangle_\eta = 2\delta_{\alpha\beta} \delta(x - x') \delta(\tau - \tau').$$

В соответствии с тем что переменная  $x_4$  является вещественной, действие  $\mathcal{J}_0$  дираковского свободного поля следует считать равным

$$\mathcal{J}_0 = \int d^4x \bar{\psi}(x) (\bar{\gamma}^\mu \partial_\mu + m) \psi(x),$$

где матрицы  $\bar{\gamma}^\mu$  являются эрмитовыми и удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\{\bar{\gamma}^\mu, \bar{\gamma}^\nu\} = 2\delta_{\mu\nu};$$

величины же  $\bar{\psi}(x, \tau)$  и  $\psi(x, \tau)$  (они являются грассмановыми) представляют собой независимые переменные, не связанные между собой соотношением  $\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4$  (аналогичная ситуация имеет место в статистической физике [26]).

Проиллюстрируем изложенную теорию на примере однокомпонентного вещественного скалярного свободного поля. Действие для такого поля согласно п. 2.3.1 определяется формулой

$$\mathcal{J} = \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) + m^2 \varphi^2(x)).$$

Поэтому уравнение Ланжевена имеет вид

$$\frac{\partial \varphi(x, \tau)}{\partial \tau} = (\partial^2 - m^2) \varphi(x, \tau) + \eta(x, \tau), \quad \partial^2 = \partial_\mu \partial_\mu.$$

Переходя к фурье-компонентам поля  $\varphi$  и источника  $\eta$  по переменным  $x$ :

$$\varphi(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ikx} \varphi(k, \tau), \quad \eta(x, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ikx} \eta(k, \tau),$$

(4.9.19)

получаем

$$\frac{\partial \varphi(k, \tau)}{\partial \tau} = -(k^2 + m^2) \varphi(k, \tau) + \eta(k, \tau).$$

Решение этого уравнения, очевидно, имеет вид

$$\varphi(k, \tau) = e^{-(k^2+m^2)\tau} \varphi(k, 0) + \int_0^\tau d\tau' e^{-(k^2+m^2)(\tau-\tau')} \eta(k, \tau'),$$

где  $\varphi(k, 0)$  — начальное значение функции  $\varphi(k, \tau)$ . Найдем парную корреляционную функцию  $\langle \varphi(k, \tau) \varphi(k', \tau') \rangle_\eta$ . Согласно (4.9.4)

$$\langle \varphi(k, \tau) \varphi(k', \tau') \rangle_\eta = \varphi(k, 0) \varphi(k', 0) e^{-\tau(k^2+m^2) - \tau'(k'^2+m^2)} + (2\pi)^4 \delta(k+k') \mathcal{D}(k, \tau, \tau'), \quad (4.9.20)$$

где

$$\mathcal{D}(k, \tau, \tau') = \frac{1}{k^2 + m^2} (e^{-(k^2+m^2)|\tau-\tau'|} - e^{-(k^2+m^2)(\tau+\tau')}).$$

Мы учли при этом, что

$$\langle \eta(k, \tau) \eta(k', \tau') \rangle_\eta = 2(2\pi)^4 \delta(\tau - \tau') \delta(k + k').$$

Полагая в (4.9.19)  $\tau = \tau'$  и устремляя  $\tau$  к бесконечности ( $\tau \rightarrow +\infty$ ), получаем

$$\langle \varphi(k, \tau) \varphi(k', \tau) \rangle_\eta \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^4}{k^2 + m^2} \delta(k + k').$$

Видно, что в этом выражении исчезла память о начальном условии. Эту формулу в соответствии с (4.9.19) можно переписать в виде

$$\langle \varphi(x, \tau) \varphi(x', \tau) \rangle_\eta \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik(x-x')} \frac{1}{k^2 + m^2},$$

что находится в соответствии с общей формулой (4.9.7) и определением евклидова пропэгатора скалярного поля.

Отметим, что при наличии самодействия для нахождения решений уравнения Ланжевена (4.9.1) можно применить теорию возмущений и развить диаграммную технику для нахождения средних  $\langle \varphi(x_1, \tau_1) \dots \varphi(x_n, \tau_n) \rangle_\eta$ . Результаты вычислений по теории возмущений находятся в соответствии с общей формулой (4.9.7).

**4.9.3. Стохастические поля и функции Грина неабелевых калибровочных полей.** Применим метод, развитый выше, к неабелевому калибровочному полю. Евклидов лагранжиан неабелева самодействующего калибровочного поля определяется формулой

$$\mathcal{L}(A, \partial A) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a,$$

где

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g(A_\mu \times A_\nu)^a \quad (4.9.21)$$

и  $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$  (поле  $A_4$  — вещественное). Поэтому евклидово действие

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a. \quad (4.9.22)$$

Уравнение Ланжевена (4.9.1) можно записать в форме

$$\frac{\partial A_\mu^a(x, \tau)}{\partial \tau} = - \frac{\delta \mathcal{S}(A(x', \tau))}{\delta A_\mu^a(x, \tau)} + \eta_\mu^a(x, \tau), \quad (4.9.23)$$

где случайные поля  $\eta_\mu^a(x, \tau)$  (источники) считаются гауссовыми, причем

$$\langle \eta_\mu^a(x, \tau) \eta_\nu^b(x', \tau') \rangle_\eta = 2\delta_{ab}\delta_{\mu\nu}\delta(x - x')\delta(\tau - \tau'). \quad (4.9.24)$$

Уравнение Фоккера — Планка, соответствующее этому уравнению, согласно (4.9.10) имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{P}(A; \tau)}{\partial \tau} = -L^* \mathcal{P}(A; \tau), \quad (4.9.25)$$

$$L^* = - \int d^4x \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \left\{ \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} + \frac{\delta \mathcal{S}(A)}{\delta A_\mu^a(x)} \right\}.$$

Формальное решение этого уравнения определяется формулой

$$\mathcal{P}(A; \tau) = e^{-L^* \tau} \mathcal{P}_0(A), \quad \mathcal{P}_0(A) \equiv \mathcal{P}(A; 0). \quad (4.9.26)$$

Если  $\chi(A(x, \tau))$  — некоторый функционал калибровочных полей  $A_\mu^a(x, \tau)$  в пространстве  $x$ , относящихся к одному и тому же «времени»  $\tau$  (например,  $\chi(A(x, \tau)) = A_{\mu_1}^{a_1}(x_1, \tau) \dots A_{\mu_n}^{a_n}(x_n, \tau)$ ), то среднее значение этого функционала по случайному полю  $\eta$

$$\langle \chi(A(x, \tau)) \rangle_\eta = \int \mathcal{D}A \chi(A) e^{-\tau L^*} \mathcal{P}_0(A). \quad (4.9.27)$$

Производя функциональное интегрирование по частям, получаем

$$\langle \chi(A(\tau)) \rangle_\eta = \int \mathcal{D}A \chi_\tau(A) \mathcal{P}_0(A), \quad (4.9.28)$$

$$\chi_\tau(A) = e^{-\tau L} \chi(A),$$

где  $L$  — оператор, сопряженный оператору  $L^*$ :

$$L = - \int d^4x \left\{ \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} - \frac{\delta \mathcal{S}(A)}{\delta A_\mu^a(x)} \right\} \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)}. \quad (4.9.29)$$

Нас интересует предельное значение среднего  $\langle \chi(A(\tau)) \rangle_\mu$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . В случае калибровочных полей такой предел в общем случае не существует. Однако если функционал  $\chi(A)$  является калибровочно-инвариантным, т. е.

$$\chi(A) = \chi(A'), \quad A_\mu^a(x) = A_\mu^a(x) + \varepsilon^c(x) f_{cb}^a A_\mu^b(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon^a(x) \quad (4.9.30)$$

(мы рассматриваем бесконечно малые калибровочные преобразования), то такой предел существует и совпадает с евклидовым средним, задаваемым квантовой теорией неабелевых калибровочных полей (см. § 4.1).

Чтобы разъяснить это, рассмотрим калибровочное поле без самодействия ( $g = 0$ ). В этом случае

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a,$$

следовательно, уравнение Ланжевена имеет вид

$$\frac{\partial A_{\mu}^a(x, \tau)}{\partial \tau} = (\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_{\mu} \partial_{\nu}) A_{\nu}^a(x, \tau) + \eta_{\mu}^a(x, \tau).$$

Переходя к фурье-компонентам (см. (4.9.19)), получаем

$$\frac{\partial A(k, \tau)}{\partial \tau} = -R(k) A(k, \tau) + \eta(k, \tau),$$

где  $R(k)$  — матрица, действующая на индекс поля:  $(RA)_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} A_{\nu}$ ;

$$R_{\mu\nu}(k) = k^2 \delta_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu}.$$

Эта матрица удовлетворяет соотношению

$$R^2(k) = k^2 R(k).$$

Отсюда следует, что

$$e^{-\tau R(k)} = 1 + \frac{e^{-k^2 \tau} - 1}{k^2} R(k). \quad (4.9.31)$$

Решение уравнения Ланжевена (4.9.23) имеет вид

$$A(k, \tau) = e^{-\tau R(k)} A(k, 0) + \int_0^{\tau} d\tau' e^{-R(k)(\tau-\tau')} \eta(k, \tau').$$

Учитывая, что

$$\langle \eta_{\mu}^a(k, \tau) \eta_{\nu}^b(k', \tau') \rangle_{\eta} = 2\delta_{ab} \delta_{\mu\nu} (2\pi)^4 \delta(k + k') \delta(\tau - \tau'),$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle A_{\mu}^a(k, \tau) A_{\nu}^b(k', \tau') \rangle_{\eta} &= (e^{-\tau R(k)})_{\mu\rho} (e^{-\tau' R(k')})_{\nu\sigma} A_{\rho}^a(k, 0) A_{\sigma}^b(k', 0) + \\ &+ 2(2\pi)^4 \delta_{ab} \delta(k + k') \int_0^{\min(\tau, \tau')} d\tau_1 (e^{-(\tau+\tau'-2\tau_1)R(k)})_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

откуда, используя (4.9.31), находим

$$\begin{aligned} \langle A_{\mu}^a(k, \tau) A_{\nu}^b(k', \tau') \rangle_{\eta} &= \left( \left( \delta_{\mu\rho} - \frac{k_{\mu} k_{\rho}}{k^2} \right) e^{-k^2 \tau} + \frac{k_{\mu} k_{\rho}}{k^2} \right) \left( \left( \delta_{\nu\sigma} - \frac{k'_{\nu} k'_{\sigma}}{k'^2} \right) \times \right. \\ &\times \left. e^{-k'^2 \tau'} + \frac{k'_{\nu} k'_{\sigma}}{k'^2} \right) A_{\rho}^a(k, 0) A_{\sigma}^b(k', 0) + (2\pi)^4 \delta_{ab} \delta(k + k') \mathcal{D}_{\mu\nu}(k, \tau, \tau'), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}(k, \tau, \tau') &= \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right) e^{-k^2(\tau+\tau')} \frac{e^{2k^2 \min(\tau, \tau')} - 1}{k^2} + \\ &+ 2 \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \min(\tau, \tau'). \end{aligned}$$

Полагая в этой формуле  $\tau = \tau'$  и устремляя  $\tau$  к бесконечности ( $\tau \rightarrow +\infty$ ), получаем

$$\begin{aligned} \langle A_{\mu}^a(k, \tau) A_{\nu}^b(k', \tau) \rangle_{\eta} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} &\frac{k_{\mu} k_{\rho}}{k^2} A_{\rho}^a(k, 0) \frac{k'_{\nu} k'_{\sigma}}{k'^2} A_{\sigma}^b(k', 0) + \\ &+ (2\pi)^4 \delta_{ab} \delta(k + k') \left\{ \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right) \frac{1}{k^2} + 2\tau \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right\}. \quad (4.9.32) \end{aligned}$$

Видно, что при  $\tau \rightarrow \infty$  в отличие от рассмотренного выше случая скалярного поля в среднем  $\langle A \rangle_\eta$  остается память о начальном поле и, кроме того, возникает член, линейно растущий со «временем»  $\tau$ . Из этой формулы следует, что вычисляемые нами средние не имеют предела при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Однако для поперечных частей потенциалов

$$A_\mu^{(t)}(k, \tau) = \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) A_\nu(k, \tau),$$

которые полностью определяют тензор поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^{(t)} - \partial_\nu A_\mu^{(t)},$$

справедлива формула

$$\langle A_\mu^{(t)}(k, \tau) A_\nu^{(t)}(k', \tau) \rangle_\eta \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} (2\pi)^4 \delta(k + k') \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2},$$

или в координатном представлении

$$\langle A_\mu^{(t)}(x, \tau) A_\nu^{(t)}(x', \tau) \rangle_\eta \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{ikx} \frac{1}{k^2} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right). \quad (4.9.33)$$

Видно, что это выражение не содержит ни памяти о начальном поле  $A(x, 0)$ , ни растущего со «временем»  $\tau$  члена. Правая часть равенства (4.9.33) совпадает с евклидовым пропэгатором калибровочного поля в калибровке Ландау ( $\xi = 0$ ). Таким образом, в случае поперечного калибровочного поля (являющегося калибровочно-инвариантной величиной) полученная формула находится в соответствии с общей формулой (4.9.7).

Такая же ситуация имеет место при  $g \neq 0$ . В этом случае для решения уравнения (4.9.23) может быть построена теория возмущений по степеням  $g$  [27]. При этом оказывается, что если рассматриваются средние  $\langle \chi(A(\tau)) \rangle_\eta$  от калибровочно-неинвариантных функционалов  $\chi$ , то любое приближение теории возмущений будет зависеть при  $\tau \rightarrow \infty$  от начальных полей  $A(x, 0)$  и, кроме того, будет содержать слагаемые, растущие со «временем»  $\tau$ . Если же функционал  $\chi$  калибровочно-инвариантен, то при  $\tau \rightarrow \infty$  исчезает его зависимость от начального поля, а также исчезают растущие со «временем»  $\tau$  слагаемые. Построенное таким образом предельное значение ( $\tau \rightarrow +\infty$ ) для усредненного калибровочного инвариантного функционала  $\chi(A(\tau))$  совпадает с соответствующим вакуумным средним в квантовой теории поля (см. (4.9.7)). При этом существенно то, что для нахождения величин  $\langle \chi(A(\tau)) \rangle_\eta$  при  $\tau \rightarrow \infty$  нет необходимости в фиксации калибровки. В общем случае зависимость от калибровки проявляется в зависимости средних  $\langle \chi \rangle_\eta$  от начальных значений полей  $A_\mu^a(x, 0)$  и в наличии растущих с ростом  $\tau$  слагаемых. При этом отпадает вопрос об однозначном нахождении представителя класса эквивалентных полей  $A_\mu^a$  (т. е. полей, приводящих к одному и тому же тензору  $F_{\mu\nu}$ ), соответствующих фиксированной калибровке [28].

**4.9.4. Фиксация калибровки и модификации оператора эволюции.** Разъясним сделанные выше утверждения, не обращаясь к явному построению теории возмущений по степеням  $g$ .



Как уже отмечалось, среднее  $\langle \chi(A(\tau)) \rangle_\eta$  при  $\tau \rightarrow \infty$  в случае калибровочно-инвариантного функционала  $\chi$  содержит в теории возмущений растущие с ростом  $\tau$  слагаемые. Для устранения этих слагаемых введем модифицированный оператор эволюции  $L_v$ , т. е. такой оператор эволюции, что средние

$$\langle \chi(A(\tau)) \rangle_\eta \equiv \int \mathcal{D}A \mathcal{P}_0(A) e^{-\tau L_v} \chi(A) \quad (4.9.34)$$

будут конечными при  $\tau \rightarrow \infty$ . Модифицированный оператор эволюции  $L_v$  будет зависеть от произвольных функций  $v^a(x)$  ( $a = 1, \dots, n^2 - 1$ ), которые определяют выбор калибровки. При этом существенно, что для калибровочно-инвариантных величин  $\chi(A)$  средние  $\langle \chi(A(\tau)) \rangle_\eta$  при  $\tau \rightarrow \infty$  не зависят от того, происходит ли эволюция величин  $\chi(A)$  с оператором  $L$  или с оператором  $L_v$ . Чтобы ввести оператор эволюции  $L_v$ , отметим, что согласно (4.9.30) вариация поля  $A_\mu^a(x)$  при бесконечно малых калибровочных преобразованиях имеет вид

$$\delta A_\mu^a(x) = -\frac{1}{g} \mathcal{D}_\mu^{ab} \varepsilon^b(x), \quad \mathcal{D}_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^c(x).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \delta \chi(A) &= i \int d^4x \varepsilon^a(x) G^a(x) \chi(A), \\ G^a(x) &= -\frac{i}{g} \mathcal{D}_\mu^{ab} \frac{\delta}{\delta A_\mu^b(x)} = -\frac{i}{g} (\delta_{ab} \partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^c(x)) \frac{\delta}{\delta A_\mu^b(x)} \end{aligned} \quad (4.9.35)$$

(мы провели интегрирование по частям и учли, что  $f^{abc} = -f^{bac}$ ). Из этой формулы следует, что оператор  $G^a(x)$  можно рассматривать как генератор калибровочных преобразований. Эта трактовка находится в соответствии с тем, что операторы  $G^a(x)$  удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[G^a(x), G^b(y)] = i f^{abc} G^c(x) \delta(x-y), \quad (4.9.36)$$

в справедливости которых легко убедиться непосредственным вычислением. Оператор  $L_v$  мы определим следующим образом:

$$L_v = L - ig \int d^4x v^a(x) G^a(x), \quad (4.9.37)$$

или

$$L_v = - \int d^4x \left\{ \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} - \frac{\delta \mathcal{S}(A)}{\delta A_\mu^a(x)} - \mathcal{D}_\mu^{ab} v^b(x, A) \right\} \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)}, \quad (4.9.38)$$

где  $v^a(x) \equiv v^a(x, A)$  ( $a = 1, \dots, n^2 - 1$ ) — некоторые произвольные функции  $x$ , которые могут являться функционалами поля  $A_\mu^a(x)$ .

Покажем прежде всего, что для калибровочно-инвариантного функционала  $\chi(A)$  справедливо соотношение

$$e^{-\tau L_v} \chi(A) = e^{-\tau L} \chi(A). \quad (4.9.39)$$

С этой целью отметим, что если функционал  $\chi(A)$  является калибровочно-инвариантным, то вследствие произвольности функций  $\varepsilon^a(x)$

из (4.9.30) следует

$$G^a(x)\chi(A) = 0. \quad (4.9.40)$$

В частности, так как действие  $\mathcal{J}(A)$  калибровочно-инвариантно, то

$$G^a(x)\mathcal{J}(A) = 0. \quad (4.9.41)$$

Покажем, что оператор эволюции  $L$  (см. (4.9.29)) коммутирует с генераторами  $G^a(x)$ :

$$[L, G^a(x)] = 0. \quad (4.9.42)$$

Легко видеть, что

$$\frac{\delta G^a(x)}{\delta A_\mu^b(x')} \frac{\delta}{\delta A_\mu^b(x')} = 0 \quad (4.9.43)$$

(эта формула следует из (4.9.35) и того, что  $f^{abc} = -f^{acb}$ ). Согласно этой формуле и определению (см. (4.9.29))

$$L = - \int d^4x' \left\{ \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x')} - \frac{\delta \mathcal{J}(A)}{\delta A_\mu^a(x')} \right\} \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x')}$$

справедливо соотношение

$$[G^a(x), L] = \int d^4x' \left[ G^a(x), \left[ \frac{\delta}{\delta A_\mu^b(x')}, \mathcal{J}(A) \right] \frac{\delta}{\delta A_\mu^b(x')} \right].$$

Учитывая, что

$$\left[ \frac{\delta}{\delta A_\mu^b(x')}, \mathcal{J}(A) \right] = \frac{\delta \mathcal{J}(A)}{\delta A_\mu^b(x')},$$

соотношение (4.9.41) можно переписать в виде

$$[G^a(x), \mathcal{J}(A)] = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} [G^a(x), L] &= - \int d^4x' \left( \left[ \frac{\delta G^a(x)}{\delta A_\mu^b(x')}, \mathcal{J}(A) \right] \frac{\delta}{\delta A_\mu^b(x')} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\delta}{\delta A_\mu^b(x')}, \mathcal{J}(A) \right] \frac{\delta G^a(x)}{\delta A_\mu^b(x')} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{\delta G^a(x)}{\delta A_\mu^b(x')} = i\delta(x-x') f^{acb} \frac{\delta}{\delta A_\mu^c(x)},$$

вследствие антисимметрии  $f^{acb}$  по индексам  $c$  и  $a$  приходим к соотношению (4.9.42).

В справедливости формулы (4.9.39) можно убедиться, раскладывая  $\exp(-iL_\nu)$  в ряд по степеням  $\nu$  и учитывая, что  $[L, G^a] = 0$  и калибровочно-инвариантный функционал  $\chi(A)$  удовлетворяет уравнению  $G^a(x)\chi(A) = 0$ .

Для калибровочно-неинвариантного функционала  $\chi(A)$  предел

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int \mathcal{D}A \mathcal{P}_0(A) e^{-\tau L_v \chi(A)}$$

может существовать, причем он будет зависеть от выбора функций  $v^a(x, A)$ , но не будет зависеть от начальных значений поля  $A_\mu^a(x, 0)$ . В соответствии с модификацией оператора  $L$  изменится и оператор эволюции  $L^*$ , с помощью которого эволюционирует функционал распределения  $\mathcal{P}(A; \tau)$  (см. (4.9.25), (4.9.10)):

$$\begin{aligned} L_v^* &= L^* - \int d^4x \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \mathcal{D}_\mu^{ab}(x) v^b(x, A) \equiv \\ &\equiv - \int d^4x \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \left\{ \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} + \frac{\delta \mathcal{S}(A)}{\delta A_\mu^a(x)} + \mathcal{D}_\mu^{ab} v^b(x, A) \right\}. \end{aligned} \quad (4.9.44)$$

В частности, если в качестве функций  $v^a(x, A)$  выбрать функции

$$v^a(x) = -\frac{1}{\xi} \partial_\mu A_\mu^a, \quad (4.9.45)$$

то

$$\begin{aligned} L_v \equiv L_\xi &= - \int d^4x \left\{ \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} - \frac{\delta(\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}_\xi(A))}{\delta A_\mu^a(x)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g}{\xi} f^{abc} (\partial_\nu A_\nu^b) A_\mu^c(x) \right\} \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)}, \end{aligned} \quad (4.9.46)$$

$$\begin{aligned} L_v^* \equiv L_\xi^* &= - \int d^4x \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \left\{ \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta(\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}_\xi(A))}{\delta A_\mu^a(x)} + \frac{g}{\xi} f^{abc} (\partial_\nu A_\nu^b) A_\mu^c(x) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{S}_\xi(A) = \frac{1}{2\xi} \int d^4x (\partial_\nu A_\nu^a)^2.$$

В абелевой теории  $f^{abc} = 0$  и уравнение Фоккера — Планка имеет стационарное нормированное решение

$$\mathcal{P}(A) = \frac{e^{-\mathcal{S}(A) - \mathcal{S}_\xi(A)}}{\int \mathcal{D}A e^{-\mathcal{S}(A) - \mathcal{S}_\xi(A)}}, \quad (4.9.46)$$

которое согласно (4.9.17), (2.4.4) определяет среднее значение  $\langle \chi(A(\tau)) \rangle_\eta$  при  $\tau \rightarrow \infty$  в лоренцевой калибровке (действие  $\mathcal{S}(A)$  может, очевидно, включать взаимодействие с другими, не калибровочными полями). Подчеркнем, что формальное стационарное решение исходного уравнения Фоккера — Планка

$$\frac{\partial \mathcal{P}(A, \tau)}{\partial \tau} = -L^* \mathcal{P}(A, \tau)$$

также имеет вид

$$\mathcal{P}(A) = e^{-\mathcal{I}(A)} \int \mathcal{D}A e^{-\mathcal{I}(A)},$$

однако оно не имеет смысла, так как вычисление средних с этим распределением приводит к бессмысленным выражениям типа  $\frac{\infty}{\infty}$  (если учесть, что объем класса, соответствующего данному представителю калибровочного поля, равен бесконечности).

В случае неабелевых калибровочных полей стационарное решение уравнения Фоккера — Планка

$$L_{\xi}^* \mathcal{P}(A) = 0$$

или уравнения

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta A_{\mu}^a(x)} + \frac{\delta(\mathcal{I} + \mathcal{I}_{\xi})}{\delta A_{\mu}^a(x)} + \frac{g}{\xi} f^{abc} A_{\mu}^c(x) \partial_{\nu} A_{\nu}^b(x) \right\} \mathcal{P}(A) = 0$$

не может быть найдено в явном виде, но его можно получить в рамках теории возмущений по  $g$ , так как нулевое приближение по  $g$  имеет вид (4.9.46) [27]. Евклидовы функции Грина, которые можно получить с помощью таким образом построенного стационарного распределения, не будут совпадать (в случае калибровочно-неинвариантных функций Грина) с евклидовыми функциями Грина, полученными в квантовой теории поля в лоренцевой калибровке (см. п. 4.3.3).

Если, однако, в качестве функций  $v^a(x, A)$  выбрать функции [29]

$$v^a(x, A) = - \int d^4 y \frac{\partial G^{ab}(x, y; A)}{\partial y_{\nu}} \mathcal{J}_{\nu}^b(y, A), \quad (4.9.47)$$

то стационарное решение уравнения

$$L_v^* \mathcal{P}(A) = 0$$

можно найти явно, причем оно будет определяться формулой

$$\mathcal{P}(A) = N \det \partial \mathcal{D} \exp \left\{ -\mathcal{I}_{\text{кл}} - \frac{1}{2\xi} \int d^4 x (\partial_{\mu} A_{\mu}^a)^2 \right\}. \quad (4.9.48)$$

Здесь

$$\mathcal{J}_{\nu}^b(y, A) = \mathcal{D}_{\mu}^{bc} F_{\mu\nu}^c(y) + \frac{1}{\xi} \partial_{\nu} \partial_{\mu} A_{\mu}^b(y) + f^{bcd} \partial_{\nu}^{(z)} G^{cd}(y, z, A)|_{y=z}$$

и функции  $G(x, y, A)$  определяются из уравнения

$$-\partial \mathcal{D}^{(x)ac} G^{cb}(x, y; A) = -\mathcal{D} \partial^{(y)bc} G^{ac}(x, y; A) = \delta_{ab} \delta(x - y).$$

Распределение (4.9.48) можно переписать в виде

$$\mathcal{P}(A) \approx \exp \{ -\mathcal{I}_{\text{кл}} - \mathcal{I}_{\xi} - \mathcal{I}_F \},$$

$$I_F = i \int d^4 x \partial_{\mu} \bar{\mathcal{D}}_{\mu c},$$

если учесть, что

$$\det \partial \mathcal{D} = \exp i \int d^4x \partial_\mu \bar{c} \mathcal{D}_\mu c,$$

где  $c, \bar{c}$  — антикоммутирующие грассмановы функции.

Функции Грина, вычисленные с помощью этого распределения, будут, очевидно, совпадать с функциями Грина в лоренцевой калибровке, введенной в п. 4.3.3.

В заключение отметим, что стохастические поля в квантовой теории используются также в том случае, когда пятая координата  $\tau$  не вводится. При этом исходят из уравнения (4.9.5), в котором  $\mathcal{J}(\varphi)$  — некоторый функционал поля  $\varphi(x)$ . При решении этого уравнения в результате применения процедуры, аналогичной описанной в § 4.3, кроме исходного поля  $\varphi(x)$  появляются фермионные поля, а модель обладает свойствами суперсимметрии [30].

§ 5.1. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ХРОМОДИНАМИКА

**5.1.1. Кварки и глюоны.** В предыдущей главе развита квантовая теория неабелева калибровочного поля и взаимодействующего с ним фермионного поля. Полученные результаты лежат в основе современной теории сильного взаимодействия адронов, которая называется квантовой хромодинамикой. Именно мы предполагаем, что все адроны построены из кварков и антикварков различных сортов (ароматов), связанных внутри адронов вследствие обмена глюонами квантами калибровочного поля. В этом отношении глюоны аналогичны фотонам, обмен которыми приводит к взаимодействию электрически заряженных частиц. Напомним, что кварковое поле обладает точной  $SU(3, c)$ -цветовой симметрией и каждый кварк может находиться в трех цветовых состояниях (условно называемых красным, голубым и желтым). Цветовая симметрия вводится вначале как глобальная. Чтобы сделать ее локальной, необходимо, как мы видели, ввести восемь векторных полей  $A_\mu^a(x)$  ( $a = 1, \dots, 8$ ), которые и представляют собой глюонные поля. Глюонное поле (даже при отсутствии кваркового) является нелинейным, причем нелинейность описывается той же константой взаимодействия  $g$ , которая определяет взаимодействие кварков и глюонов. Эта константа взаимодействия играет такую же роль, как и заряд электрона  $e$  в квантовой электродинамике, и называется цветowym зарядом. Подчеркнем, что цветовой заряд, в отличие от электрического, характерен как для кваркового, так и для глюонного поля.

Мы видели (см. § 4.8), что эффективная константа связи  $\bar{g}\left(\frac{k}{\mu}, g\right)$ , т. е. эффективный цветовой заряд, уменьшается с увеличением  $k$  (в задачах рассеяния  $k$  имеет смысл переданного импульса). Большим переданным импульсам соответствуют малые расстояния. Поэтому можно заключить, что энергия взаимодействия кварков уменьшается с уменьшением расстояния (в отличие от электрических зарядов, энергия взаимодействия которых растет с уменьшением расстояния, см. п. 5.1.2). Иными словами, кварки в адронах практически ведут себя как свободные частицы (по терминологии Фейнмана — протоны). Это явление носит название асимптотической свободы.

Ниже приведены заряды кварков в единицах заряда протона и их массы:

	<i>u</i>	<i>d</i>	<i>s</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>t</i>
Масса	5 МэВ	10 МэВ	100 МэВ	2 ГэВ	5 ГэВ	50 ГэВ
Заряд/ <i>e</i>	2/3	-1/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3

То, что кварки и антикварки ведут себя практически как свободные частицы и обладают дробным электрическим зарядом, видно, в частности, из опытов по аннигиляции  $e^+e^-$  в адроны. В следующем параграфе показано, что отношение  $R$  полного сечения этого процесса к полному сечению аннигиляции  $e^+e^-$  в  $\mu^+\mu^-$  определяется формулой [1]

$$R(E) = 3 \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2,$$

где  $Q_{\alpha}$  — заряд кварка  $\alpha$ -го сорта в единицах заряда протона, а суммирование распространяется на все кварки, масса которых  $m_{\alpha} < \frac{1}{2} E$  ( $E$  — энергия пары  $e^+e^-$  в системе центра инерции). Поэтому величина  $R(E)$  как функция  $E$  изменяется скачкообразно. Измерение величины  $R(E)$  позволяет оценить как массу (по положению скачка функции  $R(E)$ ), так и заряд кварка (по величине скачка). Взаимодействие между кварками разных цветов в белых адронах на расстояниях порядка размеров адронов так велико, что развести их на большие расстояния невозможно. Это утверждение, называемое гипотезой конфаймента (пленения) кварков и глюонов внутри белых адронов, находится в согласии со всеми экспериментальными фактами, относящимися к сильному взаимодействию.

**5.1.2. Феноменологии конфаймента.** Асимптотическая свобода, которая, как мы видели в п. 4.8.3, вытекает из основных уравнений квантовой теории калибровочных полей, правильно описывает тенденцию роста взаимодействия с увеличением расстояния между кварками. Однако таким путем мы не можем построить последовательную теорию конфаймента кварков, поскольку при этом необходимо перейти в область больших расстояний, в которой теряет силу теория возмущений, лежащая в основе всего нашего рассмотрения.

В этих условиях приобретает интерес развитие феноменологической теории конфаймента. Здесь мы приведем одну из феноменологических моделей конфаймента — так называемую модель кварк-глюонных мешков [2]. В этой модели лагранжиан кварков имеет вид [3]

$$\mathcal{L}_q = \left\{ \sum_{\alpha} \left( \frac{i}{2} \bar{q}^{\alpha} \gamma_{\mu} \partial^{\mu} q_{\alpha} - \frac{i}{2} \partial^{\mu} \bar{q}^{\alpha} \gamma_{\mu} q_{\alpha} - m_{\alpha} \bar{q}^{\alpha} q_{\alpha} \right) - B \right\} \theta_{\Omega}(x) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \bar{q}^{\alpha} q_{\alpha} \delta_{\Omega}(x), \quad (5.1.1)$$

где суммирование выполняется по сортам кварков, входящих в адрон. Здесь  $\theta_{\Omega}(x)$  — объемная  $\theta$ -функция, равная единице внутри мешка, т. е. внутри некоторой пространственно-временной области  $\Omega$ , и равная нулю вне этой области; для сферического покоящегося (статического) мешка  $\theta_{\Omega}(x) = \theta(R - r)$ , где  $R$  — радиус мешка ( $t$  — произвольно). Величина  $B$  по определению лагранжиана через гамильтониан (см. (2.1.50)) представляет собой плотность энергии вакуума внут-

ри мешка (т. е. внутри адрона); наконец,  $\delta_S(x)$  — поверхностная  $\delta$ -функция, определяемая следующим образом: если  $n_\mu$  — единичный пространственно-подобный 4-вектор нормали к пространственно-временной области  $\Omega$  и  $\delta x_\mu$  — бесконечно малый вектор смещения поверхности  $S$  этой области, то вариация функции  $\theta_\Omega$  определяет поверхностную  $\delta$ -функцию

$$\delta\theta_\Omega(x) = n^\mu \delta x_\mu \delta_S(x), \quad \delta_S(x) = -n^\mu \partial_\mu \theta_\Omega(x). \quad (5.1.2)$$

Уравнения движения кваркового поля внутри мешка и граничные условия на поверхности для этого поля можно получить, вычисляя вариацию действия. Именно варьируя действия по  $\bar{q}(q)$ , получаем уравнения движения кваркового поля (приравнивая нулю члены при  $\delta q \theta_\Omega$ )

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\alpha) q_\alpha = 0,$$

$$(i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu + m_\alpha) \bar{q}^\alpha = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5.1.3)$$

и линейное граничное условие (приравнивая нулю члены при  $\delta \bar{q} \delta_S$ )

$$\begin{aligned} in_\mu \gamma^\mu q_\alpha(x) &= q_\alpha(x), \\ -in_\mu \tilde{\gamma}^\mu \bar{q}^\alpha(x) &= \bar{q}^\alpha(x), \quad x \in S. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Мы учли при этом, что  $\partial_\mu \theta_\Omega(x) = n_\mu \delta_S(x)$ . Варьируя поверхность, получаем квадратичное граничное условие

$$B = \frac{1}{2} n^\mu \partial_\mu \sum_\alpha \bar{q}^\alpha q_\alpha, \quad x \in S. \quad (5.1.5)$$

При варьировании поверхности мы учли формулу (5.1.2), определяющую вариацию функции  $\theta_\Omega$ , и формулу

$$\delta \delta_S(x) = n^\nu \delta x_\nu n^\mu \partial_\mu \delta_S(x),$$

определяющую вариацию функции  $\delta_S(x)$ . Кроме того, мы учли, что в силу (5.1.4)

$$\bar{q}^\alpha q_\beta = 0, \quad x \in S. \quad (5.1.6)$$

Граничное условие (5.1.5) получается путем приравнивания нулю коэффициента при  $n^\nu \delta x_\nu \delta_S(x)$ .

Отметим, что граничные условия (5.1.4), (5.1.5) впервые были получены в работе [4] при нахождении полей  $q$  внутри пространственной области  $V$  и полей  $Q$  вне области  $V$ , действие которых определяется формулой

$$\begin{aligned} W = \int d^4x \left\{ \left( \frac{i}{2} q \gamma^\mu \partial_\mu q - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{q} \gamma^\mu q - m \bar{q} q - B \right) \theta_V(x) + \right. \\ \left. + \left( \frac{i}{2} \bar{Q} \gamma^\mu \partial_\mu Q - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{Q} \gamma^\mu Q - M \bar{Q} Q \right) \theta_{\bar{V}}(x) \right\}, \end{aligned}$$

где  $\theta_{\bar{V}} = 1 - \theta_V$ . При этом требовалось, чтобы в пределе  $M \rightarrow \infty$  поле оставалось только внутри области  $V$ .



Аналогично кваркам можно рассмотреть глюоны. При этом лагранжиан будет иметь вид

$$\mathcal{L}_g = \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - B \right) \theta_\Omega. \quad (5.1.7)$$

Уравнения движения и линейное граничное условие можно получить вариацией действия по полю  $A_\mu^a$ . Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\mathcal{D}_\mu F^{a\mu\nu} = 0, \quad \mathcal{D}_\mu F^{a\mu\nu} \equiv \partial_\mu F^{a\mu\nu} + g f^{abc} A_\mu^b F^{c\mu\nu}, \quad x \in \Omega, \\ n_\mu F^{a\mu\nu} = 0, \quad x \in S.$$

Варьируя границу, получаем квадратичное граничное условие

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = B, \quad x \in S.$$

В общем случае, когда рассматриваются кварки и глюоны, лагранжиан модели мешков с учетом кварк-глюонного взаимодействия можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}', \quad (5.1.8)$$

где

$$\mathcal{L}' = g \sum_\alpha \bar{q}^{\alpha\gamma\mu} \frac{1}{2} \lambda^a q_\alpha A_\mu^a.$$

Этому лагранжиану соответствуют уравнения

$$\partial_\mu F^{a\mu\nu} = g \sum_\alpha \bar{q}^{\alpha\gamma\nu} \frac{1}{2} \lambda^a q_\alpha + g f^{abc} F^{b\nu\mu} A_\mu^c \equiv g I^{a\nu} \equiv j^{a\nu}, \\ \left\{ i\gamma^\mu \left( \partial_\mu - ig \frac{1}{2} \lambda^a A_\mu^a \right) - m_\alpha \right\} q_\alpha = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5.1.9)$$

для калибровочного и кварковых полей внутри области  $\Omega$ . Кроме того, возникают линейные и квадратичные граничные условия на поверхности

$$n^\mu F_{\mu\nu}^a(x) = 0, \\ in_\mu \gamma^\mu q_\alpha = q_\alpha, \quad -in_\mu \tilde{\gamma}^\mu \bar{q}^\beta = \bar{q}^\beta, \quad (5.1.10) \\ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - B + \frac{1}{2} n^\mu \partial_\mu \sum_\alpha \bar{q}^{\alpha\gamma\mu} q_\alpha = 0, \quad x \in S$$

(цветовой индекс кваркового поля  $i$  явно не выписывается). Вследствие линейных граничных условий для полей  $q, \bar{q}$  выполняется соотношение  $\bar{q}^\alpha q_\beta / S = 0$ . Поэтому из определения тока  $j_\nu^a$  и граничного условия для глюонов  $n^\mu F_{\mu\nu}^a(x) / S = 0$  следует, что

$$n_\mu j^{a\mu}(x) |_S = 0. \quad (5.1.11)$$

Это условие гарантирует обращение в нуль нормальной составляющей кваркового цветового тока на поверхности мешка. Обращение в нуль величины  $n_\mu j^{a\mu}$  на поверхности  $S$ , гарантирующее невылетание кварков, связано с линейным граничным условием для кваркового поля.

Последнее возникает из-за наличия в лагранжиане кваркового поля слагаемого, содержащего поверхностную  $\delta$ -функцию. Обратим внимание на то, что линейное граничное условие (5.1.10) является более сильным, чем условие  $\bar{q}^\alpha q_\beta = 0$ .

Используя граничные условия, можно показать, что не существует мешков с ненулевым цветовым зарядом. Действительно, цветовой заряд статического мешка определяется формулой

$$Q^a = \int_V d^3x j^{a0}(x),$$

где согласно (5.1.9)  $j^{a0} = \partial_l F^{a l 0}$  (суммирование выполняется по пространственным индексам  $l = 1, 2, 3$ ;  $V$  — пространственная область мешка). Поэтому

$$Q^a = \int_S ds n_l F^{a l 0}(x).$$

Поскольку на поверхности статического мешка  $n_l F^{a l 0} = n_\mu F^{a \mu 0} = 0$  (вследствие линейного граничного условия для глюонов), то  $Q^a = 0$ , следовательно, состояние мешка является синглетным по цветовой группе.

**5.1.3. Волновая функция кварка в мешке.** Определим волновую функцию кварков, пренебрегая взаимодействием кварков с глюонами ( $g = 0$ ). Считая границу мешка сферической поверхностью радиуса  $R$ , граничные условия для кваркового поля запишем в виде

$$-i \frac{r}{r} \gamma q_\alpha(x) = q_\alpha(x), \quad 2B = -\frac{\partial}{\partial r} \sum_\alpha \bar{q}^\alpha(x) q_\alpha(x), \quad |x| = R,$$

где  $r, \theta, \varphi$  — сферические координаты точки  $x$  (мы учли, что  $n_\mu = (0, -\frac{r}{r})$ ). Общее решение уравнения Дирака для безмассовой частицы (массу кварка мы предполагаем для простоты равной нулю) можно записать в виде

$$q_\alpha(x) = \sum_{nkjm} a_\alpha(nkjm) \psi_{nkjm}(x), \quad (5.1.12)$$

где  $j, m$  — угловой момент и его проекция; индексом  $k = \pm(j + \frac{1}{2})$  обозначены состояния, отличающиеся пространственной четностью, а индексом  $n$  — частоты, которые находятся из линейного граничного условия. В случае статической границы квадратичное граничное условие разрешает только решение  $j = \frac{1}{2}$  (левая часть квадратичного граничного условия не должна зависеть от углов  $\theta, \varphi$ ). Поэтому формулу (5.1.12) можно записать в виде

$$q_\alpha(x) = \sum_{nkm=\pm\frac{1}{2}} a_\alpha(nkm) \psi_{nkm}(x), \quad (5.1.12')$$

где функции  $\psi_{nkm}(x) \equiv \psi_{nk\frac{1}{2}m}(x)$  определяются, как известно, формулами [5]

$$\psi_{n,-1,m}(x) = \frac{A_{n,-1}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} ij_0\left(\omega_{n,-1}\frac{r}{R}\right)U_m \\ -j_1\left(\omega_{n,-1}\frac{r}{R}\right)\sigma\frac{r}{r}U_m \end{pmatrix} e^{-i\omega_{n,-1}\frac{t}{R}},$$

$$\psi_{n,1,m}(x) = \frac{A_{n,1}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} ij_1\left(\omega_{n,1}\frac{r}{R}\right)\sigma\frac{r}{r}U_m \\ j_0\left(\omega_{n,1}\frac{r}{R}\right)U_m \end{pmatrix} e^{-i\omega_{n,1}\frac{t}{R}}.$$
(5.1.13)

Здесь  $U_m$  — двухкомпонентный паулевский спинор;  $j_l(z)$  — сферическая функция Бесселя. Нормировочные постоянные  $A_{n,k}$ ,  $k = \pm 1$ , определяются из условия  $\int_V d^3x |\psi_{nkm}|^2 = 1$ :

$$A_{n,k}^2 = \frac{\omega_{nk}^3}{2R^3(\omega_{nk} + k)\sin^2\omega_{nk}}.$$
(5.1.14)

Спектр частот  $\omega_{nk}$ , как указано выше, определяется из линейного граничного условия, которое принимает вид [6]

$$j_0(\omega_{nk}) = -kj_1(\omega_{nk}),$$

или

$$\text{tg } \omega_{nk} = \frac{\omega_{nk}}{\omega_{nk} + k}.$$
(5.1.15)

Выпишем первые несколько решений этого уравнения при  $n = 1, 2, \dots$ :

$$\omega_{1,-1} = 2,04 \dots, \quad \omega_{2,-1} = 5,4 \dots,$$

$$\omega_{1,1} = 3,81 \dots, \quad \omega_{2,1} = 7, \dots$$

( $\omega_{nk}$  при  $n < 0$  определяется формулой  $\omega_{-n,-k} = -\omega_{n,k}$ ).

Квадратичное граничное условие определяет радиус адрона. Прежде чем переходить к анализу этого условия, отметим, что до сих пор мы рассматривали классическую теорию. При переходе к квантовой теории поля  $q(x)$  следует рассматривать как оператор, удовлетворяющий уравнению Дирака и граничному линейному условию. Под квадратичным граничным условием в квантовой теории будем понимать соотношение

$$2B = n^\mu \partial_\mu \sum_\alpha \langle q^{-\alpha} q_\alpha \rangle,$$

где усреднение  $\langle \dots \rangle$  производится по состоянию адронной системы.

В разложении (5.1.12) величины  $a_\alpha(nkjm)$  должны трактоваться как операторы рождения и уничтожения кварков в состоянии  $nkjm$ . Именно операторы

$$a_\alpha(nkjm) \equiv b_\alpha(nkm), \quad \omega_{nk} > 0 \quad (n > 0)$$

следует трактовать как операторы уничтожения кварков в состоянии  $\alpha n, k, m$  ( $\omega_{nk} > 0$ ), а операторы

$$a_{\alpha}(nkjm) \equiv d_{\alpha}^{+}(nkm), \quad \omega_{nk} < 0 \quad (n < 0),$$

как операторы рождения антикварков в состоянии  $\alpha n, k, m$  ( $\omega_{nk} < 0$ ). При этом квадратичное граничное условие принимает вид [6]

$$4\pi BR^4 = \sum_{\substack{\alpha n k m \\ (n > 0)}} \{ \omega_{nk} \langle b_{\alpha}^{+} b_{\alpha} \rangle - \omega_{-n, -k} \langle d_{\alpha}^{+} d_{\alpha} \rangle \} \quad (5.1.16)$$

( $\omega_{-n, -k} = -\omega_{n, k}$ ). К этой формуле можно прийти иным путем. Энергия поля кварков, запертых в мешке, и энергия вакуума мешка определяются интегралом по объему мешка от плотности энергии  $\varepsilon = T_{00}(x)$ , где  $T_{\mu\nu}$  — тензор энергии — импульса. Вследствие выбранной нами нормировки

$$E = \int_V d^3x T_{00}(x) = \sum_{\substack{\alpha n k m \\ (n > 0)}} \left\{ \frac{\omega_{nk}}{R} \langle b_{\alpha}^{+} b_{\alpha} \rangle - \frac{\omega_{-n, -k}}{R} \langle d_{\alpha}^{+} d_{\alpha} \rangle \right\} + \frac{4}{3} \pi R^3 B.$$

Отметим, что энергия поля кварков уменьшается с ростом  $R$ , поэтому кварки сами по себе не могут оставаться внутри адрона. В теории мешков вводится положительная плотность энергии вакуума внутри адрона  $B$ , так что полная энергия адрона определяется формулой

$$E(R) = E_f + \frac{4}{3} \pi R^3 B, \quad E_f = \frac{1}{R} \sum_{\kappa} n_{\kappa} \omega_{\kappa} \quad (5.1.17)$$

( $n_{\kappa}$  — число кварков в состоянии  $\kappa$ ). Условие равновесия  $\partial E / \partial R = 0$  определяет положение минимума системы, т. е. радиус адрона в модели мешков и приводит к условию (5.1.16).

**5.1.4. Структура нестранных барионов.** Рассмотрим подробнее структуру легких нестранных барионов в модели мешков, которые строятся только из легких  $u, d$ -кварков, массами которых можно пренебречь [6]. Цветовая волновая функция бариона должна быть синглетом, т. е. трехкварковая цветовая волновая функция бариона должна быть полностью антисимметричной по цветовым индексам. Поэтому волновая функция бариона в соответствии с принципом Паули должна быть симметричной по спиновым, сортовым и пространственным переменным.

Радиус бариона согласно сказанному выше определяется из условия  $\partial E(R) / \partial R = 0$ :

$$R = \left( \frac{\sum_{\kappa} n_{\kappa} \omega_{\kappa}}{4\pi B} \right)^{1/4}. \quad (5.1.18)$$

Подставляя это значение для  $R$  в (5.1.17), получаем массу бариона

$$M = \frac{4}{3} (4\pi B)^{1/4} \left( \sum_{\kappa} n_{\kappa} \omega_{\kappa} \right)^{3/4}. \quad (5.1.19)$$

При  $j = 1/2$  возможны только следующие состояния:

$$1s_{1/2} (\omega_{1, -1} = 2, 04), \quad 1p_{1/2} (\omega_{1, 1} = 3, 84), \quad 2s_{1/2} (\omega_{2, -1} = 5, 4).$$

Распределяя  $u$ ,  $d$ -кварки по этим состояниям полностью симметричным способом, получим спектр нестранных барионов (см. рис. 42).

Отметим, что без учета кварк-глюонного взаимодействия спектр барионов вырожден по спине и изоспину. Поэтому спектр нуклонов (включая нуклонные резонансы) совпадает со спектром  $\Delta$ -резонансов.

Наинижнее состояние  $3(1s_{1/2})$  идентифицируется с  $N$  (938) и  $\Delta$  (1236). Параметр  $B$  определяется из согласования средней массы  $N - \Delta$  системы с ее экспериментальным значением. Отсюда находится параметр  $B: B^{1/4} = 120$  МэВ.

Аналогично можно исследовать спектр масс мезонов. В частности, отношение массы самого легкого бариона к массе самого легкого мезона в рассматриваемой модели мешков согласно

(5.1.19) равно  $\left(\frac{3}{2}\right)^{3/4}$ . Эта величина хорошо описывает отношение массы нуклона к массе самых легких векторных  $\rho$ ,  $\omega$ -мезонов.

Однако она не согласуется с отношением массы нуклона к массе самого легкого псевдоскалярного  $\pi$ -мезона. Это значит, что  $\pi$ -мезон не описывается рассматриваемой простой моделью мешка.

Вычислим еще в модели мешков магнитный момент бариона. Оператор магнитного момента кваркового поля определяется формулой [7]

$$\mu = \frac{1}{2} \int d^3x \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \mathbf{r} \times \bar{q}^{\alpha} \boldsymbol{\gamma} q_{\alpha},$$

где  $Q_{\alpha}$  — заряд кварка сорта  $\alpha$ . Подставляя в эту формулу выражение (5.1.12) для кваркового поля и усредняя полученное выражение по адронному состоянию, получаем [6]

$$\mu = \frac{R}{12} \sum_{nkm} f(\omega_{nk}) U_m^* \boldsymbol{\sigma} U_m \sum_{\alpha} Q_{\alpha} (\langle b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha} \rangle + \langle d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha} \rangle),$$

где

$$f(\omega_{nk}) = \frac{4\omega_{nk} + 3k}{(\omega_{nk} + k) \omega_{nk}}.$$

Отсюда для протона получаем  $\mu_p = \frac{R}{12} \frac{4\omega_{1,-1} - 3}{(\omega_{1,-1} - 1) \omega_{1,-1}} = 1,4$  ГэВ<sup>-1</sup>.

Это приводит к гиромагнитному отношению  $g_p = 2m_p \mu_p = 2,6$ , что близко к экспериментальному значению 2.79. Для магнитного момента нейтрона получается известный результат:  $g_n = -\frac{2}{3} g_p$ .

Полученные результаты относятся к простейшему случаю сферического мешка без учета кварк-глюонного взаимодействия. В более

сложных моделях, учитывающих кварк-глюонное взаимодействие и несферичность формы, а также наличие странных кварков, получается лучшее согласие эксперимента с теорией.

## § 5.2. АННИГИЛЯЦИЯ ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННОЙ ПАРЫ В АДРОНЫ

**5.2.1. Полное сечение аннигиляции.** Свойство асимптотической свободы позволяет получить ряд важных физических выводов относительно взаимодействия быстрых лептонов с адронами. Именно если импульс, переданный лептоном кварку, велик, то кварк будет вести себя как квазисвободная частица, и поэтому рассеяние лептона на адроне будет выглядеть как рассеяние на системе почти свободных частиц. Такая же ситуация наблюдается при аннигиляции электронно-позитронной пары в адроны, когда энергия пары  $e^+e^-$  достаточно велика. Оба эти процесса можно рассматривать как взаимодействие виртуального фотона, обладающего большим 4-импульсом  $q$ , с адронной системой. В процессе рассеяния этот импульс является пространственно-подобным,  $q^2 < 0$ . Действительно,  $q = p' - p$  ( $p'$  и  $p$  — конечный и начальный импульсы лептонов), и поэтому  $q^2 = 2m^2 - 2\epsilon\epsilon' + 2pp'$ . Эта величина, очевидно, меньше нуля. В процессах аннигиляции вектор  $q$  будет времениподобным,  $q^2 > 0$ , так как в системе центра инерции электрона и позитрона инвариантная величина  $q^2$  положительна ( $q = p_+ + p_-$ ,  $p_+ + p_- = 0$ , где  $p_-$  и  $p_+$  — 4-импульсы электрона и позитрона). Диаграммы, соответствующие этим процессам, показаны на рис. 43, где  $X$  служит для обозначения какого-либо адронного состояния.

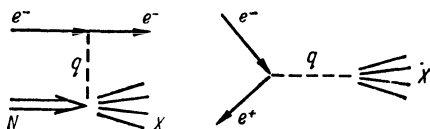


Рис. 43

Матрица рассеяния, описывающая эти процессы, определяется формулой (3.1.60)

$$S = T \exp \left( -i \int d^4x \omega_{\text{int}}(x) \right), \quad \omega_{\text{int}}(x) = - (j_\mu(x) + j'_\mu(x)) A^\mu(x), \quad (5.2.1)$$

где  $j_\mu(x)$ ,  $j'_\mu(x)$  — операторы электромагнитного тока кварков и лептонов;  $A_\mu(x)$  — 4-потенциал электромагнитного поля (при феноменологическом описании  $j_\mu(x)$  представляет собой адронный ток). Эти операторы выбираются в представлении взаимодействия, которое соответствует «свободному» (по отношению к электромагнитному взаимодействию) гамильтониану

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} + \mathcal{H}_l + \mathcal{H}_\nu, \quad (5.2.2)$$

где  $\mathcal{H}$  — гамильтониан кварков с учетом сильного взаимодействия;  $\mathcal{H}_l$  и  $\mathcal{H}_\nu$  — гамильтонианы свободных лептонного и электромагнитного полей. Поэтому операторы  $j'_\mu(x)$ ,  $A_\mu(x)$  совпадают с квантово-

электродинамическими операторами тока и потенциала в представлении взаимодействия (см. п. 3.1.5), а  $j_\mu(x)$  является оператором электромагнитного тока кварков в гейзенберговском представлении по отношению к гамильтониану  $\mathcal{H}$ .

Рассмотрим вначале процесс аннигиляции. Этот процесс будем изучать во втором порядке теории возмущений по заряду электрона. Матрица рассеяния второго порядка теории возмущений определяется формулой

$$S_2 = -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' T(A^\mu(x) A^\nu(x')) T\{(j_\mu(x) + j'_\mu(x))(j_\nu(x') + j'_\nu(x'))\}. \quad (5.2.1')$$

Матричный элемент процесса аннигиляции, очевидно, имеет вид

$$(S_2)_{i \rightarrow f} = - \int d^4x d^4x' i \mathcal{D}^{\mu\nu}(x-x') \langle X | j_\mu(x) | 0 \rangle \langle 0 | j'_\nu(x') | p_+ p_- \rangle.$$

Здесь  $|X\rangle$  — вектор состояния конечных адронов;  $|p_+ p_- \rangle$  — вектор состояния начальной электронно-позитронной пары с 4-импульсами  $p_-$ ,  $p_+$ ;  $|0\rangle$  — вектор состояния вакуума. Так как

$$j_\mu(x) = e^{i\mathcal{P}x} j_\mu(0) e^{-i\mathcal{P}x}, \quad j'_\mu(x) = e^{i\mathcal{P}x} j'_\mu(0) e^{-i\mathcal{P}x} \quad (5.2.3)$$

( $\mathcal{P}^\mu$  — оператор 4-импульса «свободных» полей), то

$$\begin{aligned} \langle X | j_\mu(x) | 0 \rangle &= e^{i\mathcal{P}x} \langle X | j_\mu(0) | 0 \rangle, \quad \langle 0 | j'_\nu(x') | p_+ p_- \rangle = \\ &= e^{-i(p_+ + p_-)x'} \langle 0 | j'_\nu(0) | p_+ p_- \rangle \end{aligned}$$

( $\mathcal{P}_X$  — 4-импульс состояния  $|X\rangle$ ), и, следовательно,

$$\begin{aligned} (S_2)_{i \rightarrow f} &= - \frac{(2\pi)^4}{iq^2} \delta(p_+ + p_- - \mathcal{P}_X) g^{\mu\nu} \langle X | j_\nu(0) | 0 \rangle \times \\ &\quad \times \langle 0 | j'_\mu(0) | p_+ p_- \rangle, \end{aligned}$$

где  $q = p_+ + p_-$  — 4-импульс электронно-позитронной пары. Нас будет интересовать вероятность аннигиляции в единицу времени  $\omega_{i \rightarrow f}$  в произвольное состояние  $|X\rangle$ , т. е. вероятность, просуммированная по всем адронным состояниям  $|X\rangle$ . Эта вероятность определяется формулой

$$\omega_{i \rightarrow f} = \frac{1}{T} \sum_X |(S_2)_{i \rightarrow f}|^2.$$

Заменяя  $\delta(0)$  на  $VT/(2\pi)^4$ , получаем

$$\omega_{i \rightarrow f} = \frac{(2\pi)^4}{q^4} \frac{1}{V\varepsilon_+\varepsilon_-} \mathcal{L}^{\mu\nu} \sum_X \delta(q - \mathcal{P}_X) \langle 0 | j_\nu(0) | X \rangle \langle X | j_\mu(0) | 0 \rangle, \quad (5.2.4)$$

где

$$\mathcal{L}_{\nu\lambda} = \frac{V^2\varepsilon_+\varepsilon_-}{4} \sum_{\mu_+\mu_-} \langle 0 | j'_\nu(0) | p_+ p_- \rangle \langle p_+ p_- | j'_\lambda(0) | 0 \rangle \quad (5.2.5)$$

( $\rho_{0\pm} \equiv \varepsilon_{\pm}$ , мы при этом произвели усреднение по поляризациям электрона и позитрона). Используя формулы (1.5.55) и (1.5.54), величину  $\mathcal{L}_{\nu\lambda}$  можно представить в виде

$$\mathcal{L}_{\nu\lambda} = \frac{e^2}{4} \left\{ p_{-\nu} p_{+\lambda} + p_{-\lambda} p_{+\nu} - \frac{1}{2} g_{\nu\lambda} q^2 \right\}. \quad (5.2.6)$$

Вводя плотность потока электронов

$$j = \frac{1}{V} \frac{1}{\varepsilon_+ \varepsilon_-} \sqrt{(p_+ p_-)^2 - m^4} = \frac{1}{2V \varepsilon_+ \varepsilon_-} \sqrt{q^2 (q^2 - 4m^2)},$$

получаем следующее выражение для сечения аннигиляции электронно-позитронной пары в адроны  $\sigma = j^{-1} \omega_{l \rightarrow f}$ :

$$\sigma = \frac{(2\pi)^4}{q^4} \frac{1}{\sqrt{(p_+ p_-)^2 - m^4}} \sum_X \delta(q - \mathcal{P}_X) \langle 0 | j_\nu(0) | X \rangle \langle X | j_\mu(0) | 0 \rangle \mathcal{L}^{\mu\nu},$$

или, используя формулы (5.2.3):

$$\sigma = \frac{1}{q^4 \sqrt{(p_+ p_-)^2 - m^4}} \mathcal{L}^{\mu\nu} \int d^4 x e^{iqx} \langle 0 | j_\nu(x) j_\mu(0) | 0 \rangle.$$

Так как  $q_0 > 0$ , то

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 x e^{iqx} \langle 0 | j_\mu(0) j_\nu(x) | 0 \rangle &\equiv \sum_X \delta(q + \mathcal{P}_X) \langle 0 | j_\mu | X \rangle \langle X | j_\nu | 0 \rangle = \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.2.6')$$

Поэтому

$$\sigma = \frac{1}{q^4 \sqrt{(p_+ p_-)^2 - m^4}} \mathcal{L}^{\mu\nu} \int d^4 x e^{iqx} \langle 0 | [j_\nu(x), j_\mu(0)] | 0 \rangle. \quad (5.2.7)$$

Входящую сюда фурье-компоненту от вакуумного среднего коммутатора токов можно выразить через поляризационный оператор фотонов

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -i \int d^4 x e^{iqx} \langle 0 | T^* (j_\nu(x) j_\mu(0)) | 0 \rangle. \quad (5.2.8)$$

Отметим, что эта формула вместе с уравнением Дайсона для функции Грина фотона аналогична формуле (3.5.10) в квантовой электродинамике, если ограничиться вторым приближением по  $e$ . Напомним, что  $T^*$  обозначает релятивистски-инвариантное хронологическое произведение, введенное в п. 3.2.6. Из градиентной инвариантности следует, что  $\Pi_{\mu\nu}(q) q^\nu = 0$  и, следовательно:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \Pi(q), \quad \Pi = \frac{1}{3} \Pi_{\mu\nu}(q) g^{\mu\nu}.$$

Согласно (3.2.60) величину  $\Pi_{\mu\nu}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= -i \int_{-\infty}^0 d^4 x e^{iqx} \langle 0 | j_\mu(0) j_\nu(x) | 0 \rangle - \\ &- i \int_0^{\infty} d^4 x e^{iqx} \langle 0 | j_\nu(x) j_\mu(0) | 0 \rangle + i \langle 0 | \rho_{\nu\mu} | 0 \rangle. \end{aligned}$$



Согласно (3.2.64)

$$i \langle 0 | \rho_{\nu\mu} | 0 \rangle = i g_{\nu k} g_{\mu l} \langle 0 | G^{0k;l} | 0 \rangle. \quad (5.2.9)$$

Поэтому вследствие антиэрмитовости оператора  $G^{0k;l}$  (см. (2.7.27)) величина  $i \langle 0 | \rho_{\nu\mu} | 0 \rangle$  вещественна. Следовательно, учитывая, что  $q_0 > 0$ , находим

$$\text{Im } \Pi_{\nu\nu}(q) = -\frac{1}{2} \int d^4 x e^{iqx} \langle 0 | [j_\nu(x), j_\mu(0)] | 0 \rangle \quad (5.2.10)$$

(мы учли, что  $\langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle = \langle 0 | j_\mu(0) j_\nu(-x) | 0 \rangle$  и воспользовались (5.2.6')). Таким образом, полное сечение аннигиляции электронно-позитронной пары в адроны можно представить в виде <sup>28</sup>

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow h) = \frac{e^2}{q^4} \text{Im } \Pi(q) \quad (5.2.11)$$

(мы пренебрегли массой электрона по сравнению с  $q^2$ ,  $-q^2 \gg m^2$ ).

**5.2.2. Связь между полным сечением  $e^+e^-$ -аннигиляции и швингеровскими членами в коммутаторе кварковых токов.** Вакуумное среднее швингеровского члена  $G^{0k;l}$ , входящего в вакуумное среднее коммутатора кварковых токов, связано с вакуумным средним  $\langle 0 | \rho_{\nu\mu} | 0 \rangle$  оператора, входящего в определение релятивистски-ковариантного хронологического произведения кварковых токов, формулой (5.2.9).

Покажем, что величина  $\langle 0 | G^{0k;l} | 0 \rangle$  связана с полным сечением  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны  $\sigma(e^+e^- \rightarrow h) \equiv \sigma(s)$ , где  $s = -q^2$ , соотношением [10]

$$\langle 0 | G^{0i;k} | 0 \rangle = \frac{ig_{ik}}{\pi e^4} \int_0^\infty dq^2 q^2 \sigma(q^2). \quad (5.2.12)$$

Воспользуемся представлением Челлена — Леммана для вакуумного среднего коммутатора токов

$$\langle 0 | [j_\mu(x), j_\nu(y)] | 0 \rangle = i \int_0^\infty dm^2 m^2 \rho(m^2) \left( g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m^2} \right) \Delta(x-y, m^2), \quad (5.2.13)$$

где функция  $\Delta(x, m^2)$  определяется формулой (2.3.11)

$$\Delta(x, m^2) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 k \delta(k^2 - m^2) \text{sgn } k_0 e^{-ikx}, \quad (5.2.14)$$

а  $\rho(m^2)$  — некоторая положительно определенная функция  $m^2$ , определяемая формулой

$$k^2 \rho(k^2) = \frac{1}{\pi} \text{Im } \Pi(k) \quad (5.2.15)$$

(доказательство этого соотношения, аналогичное доказательству соотношений Челлена — Леммана для  $T$ -произведений полевых операторов (см. п. 3.5.5), приведено ниже).

<sup>28</sup> Вывод формул для сечения  $e^+e^-$ -аннигиляции см. также в книгах [8, 9].

Полагая в формуле (5.2.13)  $\mu = 0$ ,  $\nu = i$ , получаем

$$\langle 0 | [j_0(x), j_i(y)] | 0 \rangle_{x_0=y_0} = i \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x_i} \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2),$$

где мы учли, что  $\frac{\partial}{\partial x_0} \Delta(x, m^2)|_{x_0=0} = \delta(x)$ . Вместе с тем, как мы видели ранее,

$$\langle 0 | [j_0(x), j_l(y)] | 0 \rangle_{x_0=y_0} = - \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x_k} e^2 \langle 0 | G^{0l;k} | 0 \rangle$$

(для электромагнитных токов  $f^{abc} = 0$ ). Поэтому

$$\langle 0 | G^{0i;k} | 0 \rangle = i g_{ik} \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2) \frac{1}{e^2},$$

следовательно, согласно (5.2.11), (5.2.15) получаем соотношение (5.2.12) (интегрирование в этой формуле фактически производится от  $4m_\pi^2$ ,  $m_\pi$  — масса  $\pi$ -мезона; так как  $m_\pi \gg m_e$ , то при интегрировании мы находимся в области применимости формулы (5.2.11)).

Докажем (5.2.13). Согласно (5.2.3)

$$\langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(y) | 0 \rangle = \sum_n e^{-i p_n(x-y)} \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle n | j_\nu(0) | 0 \rangle$$

( $p_n$  — 4-импульс состояния  $|n\rangle$ ), или

$$\langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(y) | 0 \rangle = \int_0^\infty dm^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 k \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ik(x-y)} \rho_{\mu\nu}(k),$$

где

$$\rho_{\mu\nu}(k) = (2\pi)^3 \sum_n \delta(p_n - k) \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle n | j_\nu(0) | 0 \rangle$$

(ср. с формулой (3.5.50)). Мы учли при этом, что

$$\int_{(p_{0n} > 0)} d^4 k \delta(p_n - k) \theta(k_0) = 1, \quad \int_0^\infty dm^2 \delta(k^2 - m^2) = 1.$$

Величину  $\rho_{\mu\nu}(k)$  можно представить в виде

$$\rho_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{(2\pi)} \int d^4 x e^{ikx} \langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle.$$

Отсюда в силу закона сохранения тока  $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$  следует, что

$$k^\mu \rho_{\mu\nu}(k) = 0.$$

Поэтому вследствие релятивистской инвариантности

$$\rho_{\mu\nu}(k) = -k^2 \rho(k^2) \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right),$$

и, следовательно,

$$\langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(y) | 0 \rangle = i \int_0^\infty dm^2 m^2 \rho(m^2) \left( g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m^2} \right) \Delta^+(x-y, m^2),$$

где

$$\Delta^{\pm}(x, m^2) = \frac{\pm i}{(2\pi)^3} \int d^4 k e^{-ik(x-y)\theta} (\pm k_0) \delta(k^2 - m^2)$$

(см. (5.2.14)). Для вакуумного среднего коммутатора токов отсюда получаем

$$\langle 0 | [j_{\mu}(x), j_{\nu}(y)] | 0 \rangle = i \int_0^{\infty} dm^2 m^2 \rho(m^2) \left( g_{\mu\nu} + \frac{\partial_{\mu} \partial_{\nu}}{m^2} \right) \Delta(x, m^2),$$

где

$$\Delta(x, m^2) = \Delta^{+}(x, m^2) + \Delta^{-}(x, m^2) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4 k e^{-ikx} \operatorname{sgn} k_0 \delta(k^2 - m^2)$$

(см. (5.2.14)). Сравнение формул (5.2.13), (5.2.10) приводит к соотношению

$$k^2 \rho(k^2) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \Pi(k).$$

Отметим, что величина  $\rho(k^2)$  положительна,  $\rho(k^2) > 0$ . Доказательство этого утверждения совпадает с доказательством аналогичного утверждения в случае квантовой электродинамики, приведенного в разделе п. 3.5.5.

Таким образом, мы получили соотношения (5.2.13), (5.2.15).

**5.2.3. Сечение аннигиляции в области больших импульсов электронно-позитронной пары.** Согласно (5.2.11) сечение аннигиляции определяется вкладом кварков в поляризационный оператор фотонов  $\Pi$ . Этот оператор связан с поперечной частью фотонной функции Грина  $G_{(t)}$  формулой (3.5.25)

$$G_{(t)}^{-1} = \mathcal{D}^{c-1} - \Pi(q), \quad \mathcal{D}^c(q) = -\frac{1}{q^2}. \quad (5.2.16)$$

Неперенормированная функция  $G$  связана с перенормированной функцией  $\underline{G}$  соотношением

$$\underline{G} = Z^{-1} G, \quad (5.2.17)$$

где  $Z$  — константа перенормировки электрического заряда. В эту константу вносит вклад как электромагнитное, так и сильное взаимодействие кварков и лептонов. (Она совпадает с константой перенормировки заряда, введенной в п. 3.6.5, если не учитывать вклад кваркового поля.) Соотношение (5.2.17) является, по сути, определением перенормировочной константы  $Z$ , если считать, что  $\underline{G}$  ведет себя при  $q^2 \approx -\mu^2$  как  $\mathcal{D}^c(q)$  (в квантовой электродинамике мы считали, что  $\mu^2 = 0$ , см. § 3.6).

Легко видеть, что электрический заряд всех частиц перенормируется одинаковым образом. Действительно, перенормированный заряд  $\underline{e}$  связан с неперенормированным зарядом  $e$  соотношением (см. (3.6.48))

$$\underline{e} = Z_2^{-1} Z_1 e^2,$$

где константа  $Z$  одна и та же для всех электрически заряженных частиц (так как она связана с перенормировкой электромагнитного поля), а константы  $Z_1$  и  $Z_2$  зависят от сорта частиц (электрон, кварк и т. д.). Но в силу калибровочной инвариантности  $Z_1 = Z_2$  (тождество Уорда, см. § 3.6). Поэтому  $\underline{e}^2 = Ze^2$  и, следовательно, отношение зарядов  $\underline{e}^2/e^2$  будет одинаковым для всех частиц. При равенстве затравочных зарядов частиц будут одинаковы и их физические заряды. В пренебрежении электромагнитным взаимодействием константа перенормировки  $Z$  обращается в единицу и, следовательно, только сильное взаимодействие не перенормирует электрический заряд  $\underline{e}^2 = e^2$  [10].

Нас будет интересовать сечение аннигиляции в главном приближении по заряду  $\underline{e}^2$ . Так как вклад лептонной пары в полное сечение  $e^+e^-$ -аннигиляции в приближении  $\underline{e}^2$  для полного поляризационного оператора  $\Pi$  входит аддитивно, то его просто выделить в конечном результате из полного поляризационного оператора и получить таким образом полное сечение  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны.

В рассматриваемом приближении формулу (5.2.11) можно переписать в виде

$$\sigma = -\frac{e^2}{q^4} \text{Im } \underline{G}_{(t)}^{-1}, \quad (5.2.18)$$

причем в окончательном результате не должен учитываться вклад в  $\underline{G}_{(t)}^{-1}$ , вносимый лептонной парой.

Для нахождения асимптотики сечения аннигиляции электронно-позитронной пары при высоких энергиях воспользуемся методом ренормализационной группы [11]. Вводя безразмерную функцию  $\underline{d} \equiv q^2 \underline{G}$ , являющуюся функцией безразмерных параметров  $\frac{q^2}{\mathcal{M}^2}$ ,  $e$ ,  $g$  ( $\mathcal{M}$  — импульс обрезания), а также перенормированную функцию  $\underline{d} \equiv q^2 \underline{G}$ , являющуюся функцией безразмерных параметров  $\frac{q^2}{\underline{\mu}^2}$ ,  $\underline{e}$ ,  $\underline{g}$  ( $\underline{\mu}$  — импульс нормировки; при  $q^2 = -\underline{\mu}^2 < 0$  функции  $\underline{G}$  и  $\underline{D}$  совпадают), перепишем формулу (5.2.17) в виде

$$\underline{d}^{-1} \left( \frac{q^2}{\mathcal{M}^2}, e, g \right) = Z^{-1} \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{\mu}^2}, e, g \right) \underline{d}^{-1} \left( \frac{q^2}{\underline{\mu}^2}, \underline{e}, \underline{g} \right), \quad (5.2.19)$$

где перенормированные константы связи  $\underline{e}$ ,  $\underline{g}$  связаны с не перенормированными константами связи  $e$ ,  $g$  соотношениями

$$\underline{e} = Z^{1/2} e, \quad \underline{g} = z_3^{3/2} z_1^{-1} g. \quad (5.2.20)$$

Так как  $\underline{d}^{-1} \left( \frac{q^2}{\mathcal{M}^2}, e, g \right)$  не зависит от  $\underline{\mu}$  при фиксированных «голых» константах связи  $e$ ,  $g$ , то так же, как в п. 4.8.1, мы приходим к уравнению для  $\underline{d}^{-1}$

$$\left\{ \underline{\mu} \frac{\partial}{\partial \underline{\mu}} + \beta(\underline{e}, \underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{e}} + \beta'(\underline{g}, \underline{e}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} - \gamma(\underline{e}, \underline{g}) \right\} \underline{d}^{-1} = 0,$$

где

$$\beta(\underline{e}, \underline{g}) = \mu \frac{\partial e}{\partial \mu}, \quad \beta'(\underline{g}, \underline{e}) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \quad (5.2.21)$$

и  $\gamma$  — аномальная размерность функции  $\underline{d}^{-1}$ , определяемая формулой

$$\gamma(\underline{e}, \underline{g}) = \mu \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}. \quad (5.2.22)$$

Раскладывая безразмерную величину  $\underline{d}^{-1}$  по степеням  $\underline{e}^2$ :

$$\underline{d}^{-1} = 1 + f\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \underline{g}^2\right), \quad (5.2.23)$$

где величина  $f\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \underline{g}^2\right)$  пропорциональна  $\underline{e}^2$ , получаем

$$\left(-\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}}\right) f\left(\lambda^2 \frac{q^2}{\mu^2}, \underline{g}^2\right) = \gamma^{(2)}(\underline{e}, \underline{g}),$$

где  $\beta(\underline{g}) \equiv \beta'(\underline{g}, 0)$  — универсальная функция перенормированной константы связи  $\underline{g}$ , введенная в п. 4.8.2, и  $\gamma^{(2)}$  — аномальная размерность функции  $\underline{d}^{-1}$  в приближении  $\underline{e}^2$ . Используя обозначение  $t = \ln \lambda$ , перепишем последнее уравнение в виде

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}}\right) f\left(e^{2t} \frac{q^2}{\mu^2}, \underline{g}\right) = \gamma^{(2)}(\underline{e}, \underline{g}). \quad (5.2.24)$$

Введем далее, как и в п. 4.8.2, бегущую константу связи  $\bar{g}(t, \underline{g})$ , определяемую уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}}\right) \bar{g}(t, \underline{g}) = 0, \quad \bar{g}(0, \underline{g}) = \underline{g}. \quad (5.2.25)$$

Тогда уравнение (5.2.24) можно записать в виде (см. (5.2.25))

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f\left(e^{2t} \frac{q^2}{\mu^2}, \bar{g}(-t, \underline{g})\right) &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \beta(\bar{g}(-t)) \frac{\partial}{\partial \bar{g}(-t)}\right) \times \\ &\times f\left(e^{2t} \frac{q^2}{\mu^2}, \bar{g}(-t)\right) = \gamma^{(2)}(\bar{g}(-t)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$f\left(e^{2t} \frac{q^2}{\mu^2}, \bar{g}(-t, \underline{g})\right) - f\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \underline{g}\right) = -\int_0^{-t} d\tau \gamma^{(2)}(\bar{g}(\tau, \underline{g})),$$

или

$$f\left(e^{2t} \frac{q^2}{\mu^2}, \underline{g}\right) = f\left(\frac{q^2}{\mu^2}, \bar{g}(t, \underline{g})\right) + \int_0^t d\tau \gamma^{(2)}(\bar{g}(\tau, \underline{g})).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k^2}{\mu^2}, \underline{g}\right) &= f\left(-1, \bar{g}(t, \underline{g})\right) + \int_0^{\frac{1}{2} \ln \frac{-k^2}{\mu^2}} d\tau \gamma^{(2)}(\bar{g}(\tau, \underline{g})), \\ t &= \frac{1}{2} \ln \frac{-k^2}{\mu^2}. \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

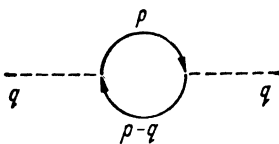


Рис. 44

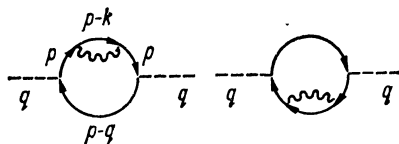


Рис. 45

Так как величина  $e^{2t}$  положительна, то, строго говоря, этой формулой можно непосредственно пользоваться, если  $k^2 < 0$ . Нас, однако, интересует случай  $k^2 > 0$ . Для рассмотрения этого случая сделаем аналитическое продолжение формулы (5.2.26) из области  $k^2 < 0$  на область  $k^2 > 0$ . Учтывая, что  $\ln \frac{-k^2}{\mu^2} = \ln \frac{k^2}{\mu^2} + \pi i$  ( $k^2 > 0$ ), в области больших положительных  $k^2$  получаем



Рис. 46

$$\text{Im } f\left(\frac{k^2}{\mu^2}, g\right) = \frac{\pi}{2} \gamma^{(2)}\left(\bar{g}\left(\frac{k^2}{\mu^2}, g\right)\right), \quad g\left(\frac{k^2}{\mu^2}, g\right) = g(t, g)\Big|_{t=\frac{1}{2}} \ln \frac{k^2}{\mu^2}.$$

(Мы учли, что функция  $f(-1, \bar{g}(t, g))$  вещественна, так как она соответствует  $q^2 = -\mu^2 < 0$ ). Эта величина согласно (5.2.18) определяет сечение процесса аннигиляции электронно-позитронной пары

$$\sigma = \frac{e^2}{q^2} \text{Im } f = \frac{\pi e^2}{2q^2} \text{Im } \gamma^{(2)}\left(\bar{g}\left(\frac{k^2}{\mu^2}, g\right)\right). \quad (5.2.27)$$

**5.2.4. Поляризационный оператор фотона с учетом сильного взаимодействия.** Перейдем к вычислению аномальной размерности функции  $G^{-1}q^{-2} \equiv d^{-1}$ . Для вычисления величины  $Z$ , определяющей аномальную размерность функции Грина фотона, необходимо найти поляризационный оператор фотона с учетом сильного взаимодействия кварков и глюонов в приближении  $e^2$ . В приближении  $e^2$  и  $e^2 g^2$  поляризационный оператор определяется диаграммами на рис. 44—46. Величина  $Z$  в рассматриваемом приближении будет иметь следующую структуру:

$$Z = 1 + \underline{a}e^2 + \underline{b}e^2 + \underline{c}e^2 \underline{g}^2,$$

где коэффициент  $a$  определяется лептонной петлей,  $b$  — кварковой петлей и  $c$  — диаграммами на рис. 45, 46. Эти величины зависят от импульса нормировки  $\mu$ . Поэтому аномальная размерность функции Грина фотона будет определяться формулой

$$\gamma^{(2)} = \underline{e}^2 \mu \frac{\partial a}{\partial \mu} + \underline{e}^2 \mu \frac{\partial b}{\partial \mu} + \underline{e}^2 \underline{g}^2 \mu \frac{\partial c}{\partial \mu}.$$

Так как мы рассматриваем полное сечение  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны, то первое слагаемое здесь, соответствующее аннигиляции в лептоны, следует опустить. Поэтому полное сечение (5.27) аннигиляции в адроны будет определяться формулой (5.2.27), в которой

$$\gamma^{(2)} = \underline{e}^2 \mu \frac{\partial b}{\partial \mu} + \underline{e}^2 \underline{g}^2 \mu \frac{\partial c}{\partial \mu}.$$

Диаграмме на рис. 44 (приближение  $e^2 \underline{g}^0$ ) соответствует следующий вклад в поляризационный оператор [5, 12]:

$$\Pi^{(1)} = -ie^2 \mu^{4-d} Q \frac{n}{3} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\text{Sp } \gamma_\mu \hat{p} \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{q})}{p^2 (p-q)^2}, \quad (5.2.28)$$

диаграмме на рис. 45 (приближение  $e^2 \underline{g}^2$ ) — вклад

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)} &= -e^2 \underline{g}^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2 - 1}{3 \cdot 2} 2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\text{Sp } \gamma_\mu \hat{p} \Sigma \hat{p} \gamma_\mu (\hat{p} - \hat{q})}{(p^2)^2 (p-q)^2}, \\ \Sigma(p) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\rho (\hat{p} - \hat{k}) \gamma^\sigma}{k^2 (p-k)^2} \left( g_{\rho\sigma} - (1 - \xi) \frac{k_\rho k_\sigma}{k^2} \right), \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

наконец, диаграмме на рис. 46 (приближение  $e^2 \underline{g}^2$ ) — вклад<sup>29</sup>

$$\begin{aligned} \Pi^{(3)} &= -e^2 \underline{g}^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2 - 1}{3 \cdot 2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times \\ &\times \left( g_{\rho\sigma} - (1 - \xi) \frac{(p-k)_\rho (p-k)_\sigma}{(p-k)^2} \right) \frac{\text{Sp } \gamma_\mu \hat{k} \gamma^\rho \hat{p} \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{q}) \gamma^\sigma (\hat{k} - \hat{q})}{p^2 k^2 (p-q)^2 (k-q)^2 (p-k)^2} \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

( $e^2 Q^2 = \sum_\alpha e^2 Q_\alpha^2$ ,  $Q_\alpha$  — электрический заряд кварка сорта  $\alpha$ ). Поляризационный оператор  $\Pi_{\mu\nu}$  связан с  $\Pi \equiv \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} + \dots$  соотношением

$$\Pi_{\mu\nu} = \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \Pi.$$

Эти формулы относятся к цветовой группе  $SU(n)$  ( $n = 3$ ).

Множитель  $n$  в формуле для  $\Pi^{(1)}$  появляется при суммировании по цветовой переменной кварка вследствие того, что  $\text{Sp } 1 = n$ ; множитель  $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$  в выражении для  $\Pi^{(2)}$  и  $\Pi^{(3)}$  возникает из выражения  $\delta_{ab} \frac{1}{4} \text{Sp } \lambda^a \lambda^b \equiv \frac{1}{2}(n^2 - 1)$  (глюонному пропатору соответствует множитель  $\delta_{ab}$ , а глюон-кварковым вершинам — матрицы  $\frac{1}{2}\lambda^a$  и  $\frac{1}{2}\lambda^b$ ,  $a, b = 1, 2, \dots, n^2 - 1$ ). В формулах (5.2.28) — (5.2.30) мы пренебрегаем массами кварков  $m$ , так как нас интересует область больших импульсов. При вычислении величины  $\Pi$  пользуемся методом размерной регуляризации, считая размерность пространства  $d = 4 - \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) и устремляя в конечных формулах  $\epsilon \rightarrow 0$ . Так как нас интересует аномальная размерность функции  $G$ , которая определяется величиной  $Z$  (см. (5.2.22)), то в выражении для  $Z$  необходимо знать коэффициент при  $1/\epsilon$  (величина  $1/\epsilon$  связана с предельным импульсом  $M$  и константой нормировки  $\mu$  соотношением (5.2.50)). При этом в соответствии с изложенным ранее мы величины  $e^2$  и  $g^2$  заменили на  $e^2 \mu^{4-d}$  и  $g^2 \mu^{4-d}$ .

<sup>29</sup> Аналогичные вычисления величин  $\Pi^{(2)}$ ,  $\Pi^{(3)}$  в квантовой электродинамике приведены в работе [13].

Приведем еще интегралы, через которые выражаются величины  $\Pi^{(1)}$ ,  $\Pi^{(2)}$ ,  $\Pi^{(3)}$  (см. п. 3.6.3 и [14] — [16]):

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2)^\alpha (k-q)^{2\beta}} = (q^2)^{\frac{d}{2}-\alpha-\beta} \Phi_d(\alpha, \beta),$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu}{k^{2\alpha} (k-q)^{2\beta}} = q_\mu (q^2)^{\frac{d}{2}-\alpha-\beta} \frac{\frac{d}{2}-\alpha}{d-\alpha-\beta} \Phi_d(\alpha, \beta),$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{k^{2\alpha} (k-q)^{2\beta}} = (q^2)^{\frac{d}{2}-\alpha-\beta} \left( \frac{d}{2}-\alpha \right) \frac{\Gamma(d-\alpha-\beta)}{\Gamma(d+2-\alpha-\beta)} \times$$

$$\times \Phi_d(\alpha, \beta) \left\{ \frac{\frac{d}{2}-\beta}{\alpha+\beta-1-\frac{d}{2}} g_{\mu\nu} \frac{q^2}{2} + q_\mu q_\nu \left( \frac{d}{2}-\alpha+1 \right) \right\}, \quad (5.2.31)$$

где

$$\Phi_d(\alpha, \beta) = i \left( -\frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B\left(\frac{d}{2}-\alpha, \frac{d}{2}-\beta\right). \quad (5.2.32)$$

Здесь  $B(\alpha, \beta)$  — В-функция Эйлера:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (5.2.33)$$

Эти формулы легко можно получить с помощью формул (3.6.17) — (3.6.19) и тождества (см. (3.6.13)):

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} \equiv \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[(a-b)x+b]^{\alpha+\beta}}, \quad (5.2.34)$$

позволяющего привести интегралы, содержащие в знаменателе произведение двух множителей, к интегралу, содержащему в знаменателе некоторую степень одного множителя. Последний из интегралов в (5.2.31) удобно представить в виде

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{k^{2\alpha} (k-q)^{2\beta}} = \frac{1}{2} (q^2)^{\frac{d}{2}-\alpha-\beta} \frac{\Phi_d(\alpha-1, \beta)}{(\alpha-1)(n+1-\alpha-\beta)} \times$$

$$\times \left\{ g_{\mu\nu} q^2 \left( \frac{d}{2}-\beta \right) + q_\mu q_\nu (d+2-2\alpha) \left( \alpha+\beta-1-\frac{d}{2} \right) \right\}, \quad (5.2.35)$$

если учесть, что

$$\Phi_d(\alpha+1, \beta) = \Phi_d(\alpha, \beta) \frac{\alpha+\beta-\frac{d}{2}}{\alpha} \frac{d-\alpha-\beta-1}{\frac{d}{2}-\alpha-1}. \quad (5.2.36)$$



При нахождении асимптотики этих интегралов при  $d \rightarrow 4$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) удобно пользоваться следующими формулами (см. (3.6.21)):

$$\Gamma(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon} - c, \quad \Gamma(1 - \varepsilon) \approx 1 + \varepsilon c.$$

Отсюда следует, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \varphi_d(1, 1) &= i \left( -\frac{1}{4\pi} \right)^{d/2} \frac{2}{\varepsilon} \left( 1 + \varepsilon \left( 1 - \frac{c}{2} \right) \right) + 0(\varepsilon), \quad (5.2.37) \\ \varphi_d \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1 \right) &= i \left( -\frac{1}{4\pi} \right)^{d/2} \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{3}{2} - \frac{c}{2} \right) \right) + \\ &+ 0(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varphi_d(1, 1) \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) + 0(\varepsilon). \end{aligned}$$

Кроме того, из рекуррентного соотношения (5.2.36) следует

$$\varphi_d \left( \frac{\varepsilon}{2}, 1 \right) = -\frac{\varepsilon}{8} \varphi_d(1, 1) + 0(\varepsilon). \quad (5.2.38)$$

**5.2.5. Вычисление вкладов, вносимых в поляризационный оператор кварковыми и кварк-глюонными петлями.** Перейдем к вычислению  $\Pi$ . Начнем с величины  $\Pi^{(1)}$ . В отличие от квантовой электродинамики в рассматриваемом случае масса фермиона (кварка) предполагается равной нулю и вычисления становятся особенно простыми. Учитывая, что  $\gamma_\rho \hat{p} \gamma^\rho = (2 - d) \hat{p}$ , и вычисляя шпур в формуле (5.2.28), находим

$$\Pi^{(1)} = \frac{4i}{3} n e^2 \mu^{4-d} Q^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{d-2}{2} \frac{p^2 + (p-q)^2 - q^2}{p^2 (p-q)^2}.$$

В методе размерной регуляризации (см. (3.6.17))

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^{2\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (5.2.39)$$

Поэтому согласно (5.2.31)

$$\Pi^{(1)} = -\frac{4i}{2} n e^2 \mu^{4-d} Q^2 (q^2)^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \varphi_d(1, 1). \quad (5.2.40)$$

Это выражение совпадает с (3.7.24) при  $m = 0$ , если воспользоваться формулой (5.2.32).

Перейдем к вычислению величины  $\Pi^{(2)}$ . Используя формулы (5.2.31), получаем

$$\Sigma(p) = \hat{p} (p^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \left( 1 - \frac{d}{2} \right) \varphi_d(1, 1) \xi.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)} &= \frac{8}{3} e^2 g^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2 - 1}{2} \varphi_d(1, 1) \left( \frac{d}{2} - 1 \right) \times \\ &\times \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{2\xi (pq - p^2)}{(p^2)^{1+\frac{\varepsilon}{2}} (p-q)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, используя формулы (5.2.31), находим

$$\Pi^{(2)} = \frac{8}{3} e^2 g^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2-1}{2} (q^2)^{1-\varepsilon} \varphi_d(1, 1) \varphi_d\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right) \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^3}{1 - \frac{3}{4}\varepsilon} \xi. \quad (5.2.41)$$

Отметим, что в калибровке Ландау ( $\xi = 0$ ) величина  $\Sigma(p)$ , а следовательно, и величина  $\Pi^{(2)}$  обращается в нуль.

Переходя к вычислению  $\Pi^{(3)}$ , отметим, что величина  $\Pi^{(2)} + \Pi^{(3)}$  не зависит от  $\xi$ . Действительно, часть величины  $\Pi^{(3)}$ , пропорциональная  $1 - \xi$ , согласно (5.2.30) имеет вид

$$\Pi^{(3)'} = \frac{-2}{3} (1 - \xi) e^2 g^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2-1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times \\ \times \frac{\text{Sp } \gamma_\mu \hat{k} \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{q})}{k^2 (p - q)^2 (p - k)^4}.$$

Мы воспользовались при этом формулой (5.2.39). Учтывая, что

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\rho}{k^2 (p - k)^2} = -p_\rho (p^2)^{-1 - \frac{\varepsilon}{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \varphi_d(1, 1),$$

находим

$$\Pi^{(3)'} = \frac{8}{3} (1 - \xi) e^2 g^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2-1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^3 \times \\ \times (q^2)^{1-\varepsilon} \varphi_d(1, 1) \varphi_d\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right) \frac{1}{1 - \frac{3}{4}\varepsilon}. \quad (5.2.42)$$

Отсюда и из (5.2.41) следует, что член, пропорциональный  $\xi$ , в величине  $\Pi^{(2)} + \Pi^{(3)}$  обращается в нуль.

Величина  $\Pi^{(3)'}$ , не зависящая от  $1 - \xi$ , согласно (5.2.30) определяется так:

$$\Pi^{(3)''} = -e^2 g^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2-1}{6} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times \\ \times \frac{\text{Sp } \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\rho \hat{p} \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{q}) \gamma^\rho (\hat{k} - \hat{q})}{p^2 k^2 (p - q)^2 (k - q)^2 (p - k)^2}. \quad (5.2.43)$$

Используя соотношения (3.6.24)

$$\gamma_\rho \hat{a} \hat{b} \hat{c} \gamma^\rho = -2 \hat{c} \hat{b} \hat{a} + \varepsilon \hat{a} \hat{b} \hat{c}, \quad \varepsilon = 4 - d, \\ \gamma_\rho \hat{a} \hat{b} \gamma^\rho = 4ab - \varepsilon \hat{a} \hat{b}, \quad \gamma_\rho \hat{a} \gamma^\rho = (\varepsilon - 2) \hat{a}.$$

находим

$$\text{Sp } \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\rho \hat{p} \gamma^\mu (p - q) \gamma^\nu (k - q) = 4 \{ \varepsilon(2 - \varepsilon) [(k, p)(p - q, k - q) + \\ + (k, k - q)(p, p - q)] + (\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 8)(k, p - q)(p, k - q) \}.$$

Вводя обозначения

$$S_p = (p - q)^2, \quad S_k = (k - q)^2, \quad S_{pk} = (p - k)^2,$$

представим этот шпур в виде

$$\begin{aligned} \text{Sp } \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\rho \hat{p} \gamma^u (\hat{p} - \hat{q}) \gamma^\rho (\hat{k} - \hat{q}) &= 4\epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) (p^2 S_k + k^2 S_p) + \\ &+ 8 \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) [q^2 (p^2 + k^2 + S_p + S_k - q^2) - S_{pk}^2] + \\ &+ 2(\epsilon^2 + 2\epsilon - 8) q^2 S_{pk}^2 + (\sim p^2 S_p, k^2 S_k, p^2 S_{pk}, k^2 S_{pk}, S_p S_{pk}, S_k S_{pk}). \end{aligned} \quad (5.2.44)$$

Так как знаменатель в величине  $\Pi^{(3)''}$  имеет структуру  $\mathcal{D} \equiv \equiv p^2 k^2 S_p S_k S_{pk}$ , то интегралы, соответствующие членам  $p^2 S_p$ ,  $k^2 S_k$ ,  $p^2 S_{pk}$ ,  $k^2 S_{pk}$ ,  $S_p S_{pk}$ ,  $S_k S_{pk}$ , в шпуре (5.2.44) в силу соотношения (5.2.39) обращаются в нуль.

Отметим, что интегралы

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2 p^2}{\mathcal{D}} &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{S_p S_k}{\mathcal{D}} = \\ &= (q^2)^{1-\epsilon} \varphi_d(1, 1) \varphi_d\left(0, 1 + \frac{\epsilon}{2}\right), \end{aligned}$$

как видно из асимптотических формул (5.2.37), конечны при  $\epsilon \rightarrow 0$  и, следовательно, не дают вклада в аномальную размерность фотонной функции Грина. Далее можно показать, что интеграл

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathcal{D}}$$

сходится при  $d \rightarrow 4$  и, следовательно, также не дает вклада в аномальную размерность фотонной функции Грина.

Оставшиеся интегралы определяются формулами

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{p^2 S_k}{\mathcal{D}} &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2 S_p}{\mathcal{D}} = \\ &= (q^2)^{1-\epsilon} \varphi_d(1, 1) \varphi_d\left(\frac{\epsilon}{2}, 1\right), \end{aligned}$$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{q^2 p^2, q^2 S_p, q^2 k^2, q^2 S_k}{\mathcal{D}} = (q^2)^{1-\epsilon} \varphi_d(1, 1) \varphi_d\left(1 + \frac{\epsilon}{2}, 1\right),$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{q^2 S_{pk}}{\mathcal{D}} &= (q^2)^{1-\epsilon} \varphi_d(1, 1) \varphi_d(1, 1) = \\ &= -2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{S_{pk}^2}{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Используя эти формулы и (5.2.43), получаем

$$\begin{aligned} \Pi^{(3)''} &= \frac{-1}{3} e^2 g^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2 - 1}{2} (q^2)^{1-\epsilon} \varphi_d(1, 1) \times \\ &\times \left\{ 32 \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \varphi_d\left(1 + \frac{\epsilon}{2}, 1\right) - 12 \left(1 - \frac{\epsilon}{6}\right) \varphi_d(1, 1) \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.45)$$

Мы учитываем только члены, содержащие в асимптотике сингулярные слагаемые по  $\varepsilon$  и  $q^2$ . Таким образом, согласно (5.2.41), (5.2.42), (5.2.45)

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} &= \frac{-1}{3} e^2 g^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2 - 1}{2} \varphi_d(1, 1) (q^2)^{1-\varepsilon} \times \\ &\times \left\{ 24 \left( 1 - \frac{\varepsilon \varepsilon}{12} \right) \varphi_d \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1 \right) - 12 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{6} \right) \varphi_d(1, 1) \right\}, \end{aligned}$$

или, используя (5.2.37), при малых  $\varepsilon$  получаем

$$\Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} = -e^2 g^2 Q^2 \frac{n^2 - 1}{2} q^2 \left( \frac{q^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon} \varepsilon \varphi_d(1, 1) \varphi_d(1, 1). \quad (5.2.46)$$

Отметим, что  $\Pi^{(2)}$  и  $\Pi^{(3)}$  содержат слагаемые, пропорциональные  $\frac{1}{\varepsilon^2}$ , которые, однако, в величине  $\Pi^{(2)} + \Pi^{(3)}$  сократились. Это сокращение связано с тождеством Уорда, которое связывает собственно-энергетическую часть  $\Sigma$ , содержащуюся в  $\Pi^{(2)}$ , с вершинной функцией, содержащейся в  $\Pi^{(3)}$ . Полный поляризационный оператор при  $\varepsilon \rightarrow 0$  согласно последней формуле и (5.2.40) имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi &= -i \frac{4}{3} e^2 Q^2 n \varphi_d(1, 1) q^2 \left\{ \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right)^{-\frac{\varepsilon}{2}} + \right. \\ &\left. + \frac{3}{4} g^2 \frac{n^2 - 1}{2n} \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right)^{-\varepsilon} \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.47)$$

**5.2.6. Аномальная размерность фотонной функции Грина и отношение сечений аннигиляции электронно-позитронной пары в адроны и мюоны.** Имея выражение для поляризационного оператора при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , можно определить аномальную размерность  $\gamma$  фотонной функции Грина. Для этого нужно предварительно найти перенормировочную постоянную  $Z$ .

Функция Грина фотона определяется формулой

$$G_{(t)}^{-1} = -q^2 - \Pi,$$

где согласно (5.2.47) поляризационный оператор  $\Pi$  в приближении  $e^2$  и  $e^2 g^2$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi &= -q^2 \left( \frac{a}{\varepsilon} + b' \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right), \quad (5.2.48) \\ a &= -\frac{Q^2 e^2 n}{6\pi^2} \left( 1 + \frac{3g^2}{64\pi^2} \frac{n^2 - 1}{n} \right), \\ b' &= \frac{Q^2 e^2 n}{6\pi^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{3g^2}{64\pi^2} \frac{n^2 - 1}{n} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$G_{(t)}^{-1} = -q^2 - \Pi = -q^2 \left( 1 - \frac{a}{\varepsilon} - b' \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right). \quad (5.2.49)$$

При проведении процедуры регуляризации с помощью введения предельного импульса  $M$  получим аналогичную формулу, в которой

величину  $\frac{a}{e}$  нужно заменить на  $-b' \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}$ :

$$\frac{a}{e} \rightarrow -b' \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}. \quad (5.2.50)$$

Это следует из независимости неперенормированной функции Грина от параметра нормировки  $\mu$ . В соответствии с теорией перенормировки

$$G_{(t)} = Z \underline{G}_{(t)},$$

где в рассматриваемом приближении величины  $\underline{G}_{(t)}$ ,  $Z$  определяются формулами

$$\underline{G}_{(t)}^{-1} = -q^2 \left( 1 - b' \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right), \quad Z = 1 - b' \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}, \quad (5.2.51)$$

причем

$$b' = \frac{Q^2 e^2}{4\pi^2} \left( 1 + \frac{\underline{g}^2}{4\pi^2} \right), \quad n = 3 \quad (5.2.52)$$

(в формуле для  $b'$  мы заменили  $e$  и  $g$  их перенормированными значениями  $\underline{e}$ ,  $\underline{g}$ , что можно сделать в рассматриваемом приближении).

Из выражения для  $Z$  и формулы (5.2.22) можно найти аномальную размерность функции Грина фотона

$$\gamma = \mu \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} = 2b'.$$

Подставляя выражение (5.2.52) в формулу (5.2.27) для сечения аннигиляции, получаем

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow h) = \frac{Q^2 e^4}{4\pi q^2} \left( 1 + \frac{g^2(q^2)}{4\pi^2} \right), \quad (5.2.53)$$

где

$$g^2(q^2) = \frac{g^2(\mu^2)}{1 + g^2(\mu^2) \frac{b}{16\pi^2} \ln \frac{q^2}{\mu^2}}, \quad b = 11 - \frac{2}{3} n_f. \quad (5.2.54)$$

При этом мы учли, что  $n = 3$ . Вводя вместо  $g^2(\mu^2)$  величину  $\lambda^2$

$$\frac{1}{g^2(\mu^2)} = \frac{b}{16\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \quad g^2(q^2) = \frac{16\pi^2}{b \ln \frac{q^2}{\lambda^2}}, \quad (5.2.55)$$

представим выражение (5.2.53) в виде

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow h) = \frac{e^4}{4\pi q^2} \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2 \left( 1 + \frac{4}{b \ln \frac{q^2}{\lambda^2}} \right). \quad (5.2.56)$$

При анализе экспериментальных результатов удобно рассматривать отношение полного сечения образования адронов к полному сечению образования мюонной пары:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{1}{3} \frac{e^4}{4\pi q^2}. \quad (5.2.57)$$

Эта формула следует из формулы (5.2.56), если в последней  $\Sigma Q^2$  заменить единицей, отбросить слагаемое  $4/b \ln \frac{q^2}{\lambda^2}$ , учитывающее сильное взаимодействие (в процессе  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  сильное взаимодействие проявляется не в приближении  $e^4$ , а в приближении  $e^6$ ) и, наконец, разделить полученный результат на три, так как формула (5.2.56) учитывает три цвета кварка. Отношение сечений определяется формулой

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow h)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2 \left( 1 + \frac{4}{b \ln \frac{q^2}{\lambda^2}} \right). \quad (5.2.58)$$

Видно, что это отношение зависит от числа сортов кварков и только логарифмически зависит от энергии электронно-позитронной пары. При больших энергиях  $R$  стремится к константе  $R \rightarrow 3 \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2$  [17—19], что соответствует модели свободных кварков. Переход к асимптотическому режиму осуществляется сверху, т. е. величина  $R$  уменьшается с ростом  $q^2$ , что находится в соответствии с экспериментом.

Отметим, что если бы мы учитывали массы кварков, то число сортов кварков, по которым происходит суммирование в (5.2.58), зависело бы от  $q^2$  (см. формулу (3.7.21); при  $q^2 < 4m_{\alpha}^2$  в формулу (5.2.58) дают вклад только кварки с массами меньшими  $m_{\alpha}$ ). Это находится в соответствии с наблюдаемым на опыте скачкообразным изменением  $R$  с ростом  $q^2$ . При достигнутой энергии электронно-позитронных пар  $\sqrt{q^2} = 45$  ГэВ асимптотическое значение  $R = 4 \div 4,5$ , что соответствует пяти кваркам  $u, d, s, c, b$  с электрическими зарядами  $2/3, -1/3, -1/3, 2/3, -1/3$ . Согласно (5.2.58) этим пяти кваркам соответствует теоретическое значение  $R = 11/3$ .

Теоретически предсказанному шестому  $t$ -кварку с зарядом  $2/3$  соответствует асимптотическое значение  $R = 5$ . Таким образом, масса  $t$ -кварка должна быть больше 20 ГэВ.

### § 5.3. КВАРК-ГЛЮОННЫЕ СТРУИ

**5.3.1. Двухструйные процессы с участием мягких и виртуальных глюонов.** В предыдущем параграфе мы определили полное сечение превращения электронно-позитронной пары в кварки и глюоны в приближении  $e^4 g^2$ . Это сечение мы интерпретируем как полное сечение аннигиляции электронно-позитронной пары в адроны, предполагая, что кварки и глюоны с вероятностью единица превращаются в адроны. Наряду с полным сечением аннигиляции большой интерес представляет изучение сечения аннигиляции электронно-позитронной пары в кварк-глюонные струи, которые наблюдаются на опыте в виде адронных струй. В данном параграфе мы будем изучать образование двух и трех кварк-глюонных струй. Под двухструйными событиями будем понимать такие события, в которых вся энергия  $E = \sqrt{q^2}$  электронно-позитронной пары в системе центра инерции за исключе-

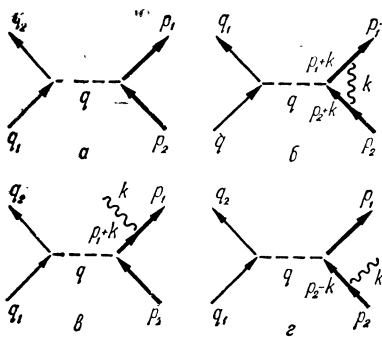


Рис. 47

показанные на рис. 47. Диаграммы на рис. 47, а, б дают вклад только в двухструйные события, а диаграммы на рис. 47, в, г — как в двухструйные, так и в трехструйные события.

Матричный элемент образования кварк-антикварковой пары сорта  $\alpha$  и цвета  $j$ , соответствующий диаграмме на рис. 47, а, определяется формулой

$$S_{\alpha j}^{(0)} = \frac{i(2\pi)^4}{(2V)^2 \sqrt{q_{10}q_{20}p_{10}p_{20}}} A_{\alpha j}^{(0)} \delta(q_1 + q_2 - p_1 - p_2), \quad (5.3.1)$$

$$A_{\alpha j}^{(0)} = e^2 Q_\alpha D^c(q_1 + q_2) \bar{v}^{\mu_2}(q_2) \gamma_\lambda u^{\mu_1}(q_1) \bar{u}^{\alpha\sigma_1}(p_1) \gamma^\lambda v^{\alpha\sigma_2}(p_2), \quad v \equiv u^c,$$

где

$D^c(q_1 + q_2) = -1/(q_1 + q_2)^2$ ;  $eQ_\alpha$  — заряд кварка сорта  $\alpha$  ( $j = 1, 2, 3$  — цветовой индекс кварка). Дифференциальное сечение процесса, просуммированное по сортам и цветам кварков, определяется формулой

$$d\sigma^{(0)} = \frac{1}{64\pi^2 E^2} \frac{1}{4} \sum |A_{\alpha j}^{(0)}|^2 d\Omega, \quad E^2 = (q_1 + q_2)^2$$

(знак  $\sum$  означает суммирование по сортам, цветам и поляризациям кварков, а также по поляризациям электронов и позитронов;  $d\Omega$  — элемент телесного угла импульса кварка в системе центра инерции). Замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\mu_1 \mu_2} (\bar{v}^{\mu_2}(q_2) \gamma_\lambda u^{\mu_1}(q_1)) (\bar{v}^{\mu_2}(q_2) \gamma_\nu u^{\mu_1}(q_1))^* &= q_{1\lambda} q_{2\nu} + q_{1\nu} q_{2\lambda} - \\ &- (q_1 q_2) g_{\nu\lambda} \equiv \{q_1 q_2\}_{\lambda\nu}, \\ \frac{1}{4} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} (\bar{u}^{\alpha\sigma_1}(p_1) \gamma_\lambda u^{\alpha\sigma_2}(p_2)) (\bar{u}^{\alpha\sigma_1}(p_1) \gamma_\nu v^{\alpha\sigma_2}(p_2))^* &= \{p_1 p_2\}_{\lambda\nu} \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

(мы пренебрегаем массами электронов и позитронов и считаем, что массы кварков равны нулю, т. е.  $p_1^2 = p_2^2 = 0$ ), получаем

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} = \frac{3\alpha^2}{4E^2} (1 + \cos^2 \theta) \sum_\alpha Q_\alpha^2, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (5.3.3)$$

Полное сечение в борновском приближении определяется формулой

$$\sigma^{(0)} = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{E^2} 3 \sum_\alpha Q_\alpha^2 = \sigma^{(0)}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) 3 \sum_\alpha Q_\alpha^2 \quad (5.3.4)$$

(ср. с формулой (5.2.28)).

нием малой части  $\epsilon E$  ( $\epsilon \ll 1$ ) переходит в энергию кварков и глюонов, летящих в двух противоположно направленных конусах с углом раствора  $\delta$ , расположенных под углом  $\theta$  к направлению сталкивающихся  $e^+ e^-$ -пучков. Аналогично определяются трехструйные процессы, в которых три струи лежат в одной плоскости при произвольных углах между осями струй. Так как мы вычисляем сечение с точностью до членов порядка  $e^4$ , то необходимо учитывать диаграммы Фейнмана,

Найдем поправку к борновскому сечению за счет интерференции диаграмм на рис. 47, а, б. Амплитуда, соответствующая диаграмме на рис. 47, б, имеет вид

$$A_{\alpha j}^{(2)} = e^2 \mathcal{D}^c(q) Q_\alpha \bar{v}^{\mu_2}(q_2) \gamma^{\nu \mu_1}(q_1) \bar{u}^{\alpha \sigma_1}(p_1) \underline{\Lambda}_\nu(q) v^{\alpha \sigma_2}(p_2),$$

где  $\underline{\Lambda}_\nu(q) \equiv \Lambda_\nu(q) - \Lambda_\nu(0)$  ( $q = q_1 + q_2$ ) — регуляризованная вершинная функция и

$$\Lambda_\nu(q) = -g^2(q^2) \frac{4}{3} i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\lambda(\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\nu(\hat{p}_2 + \hat{k}) \gamma^\lambda}{(p_1 - k)^2 (p_2 + k)^2 (k^2 - \lambda^2)}.$$

Здесь  $\lambda$  — фиктивная масса глюона, которая введена для того, чтобы избежать инфракрасных расходимостей (мы учли, что  $\frac{1}{4} \sum_a (\lambda^a)^2 = \frac{4}{3}$ , где  $\lambda^a$  — матрицы Гелл-Манна).

Импульсы кварков, входящие в матрицы  $\hat{p}_1$  и  $\hat{p}_2$ , исключаются с помощью уравнения Дирака при нахождении матричного элемента  $\bar{u} \underline{\Lambda}_\nu v$ . Наконец, в качестве величины  $g$  в соответствии с результатами предыдущего пункта мы должны выбрать значение бегущей константы связи  $g(q^2)$  при  $q^2 = E^2$ . Поэтому величину  $\underline{\Lambda}_\nu$  можно представить в виде [5]

$$\underline{\Lambda}_\nu(q) = -i \frac{g^2(q^2)}{6\pi^4} \{ q^2 \gamma_\nu \mathcal{J}_1 + (\hat{q} \gamma_\nu \gamma_\sigma - \gamma_\sigma \gamma_\nu \hat{q}) \mathcal{J}_\sigma + \gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\sigma \mathcal{J}_{\sigma\tau} \},$$

где

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\pi^2 i}{q^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - 2 \ln^2 \frac{E}{\lambda} \right); \quad \mathcal{J}_\sigma = \frac{\pi^2 i}{q^2} (p_1 - p_2)_\sigma \left( 2 \ln \frac{\lambda}{E} + 1 \right);$$

$$\mathcal{J}_{\sigma\tau} = \frac{\pi^2 i}{q^2} \left\{ \frac{1}{2} p_{1\sigma} p_{2\tau} - \frac{1}{2} q^2 g_{\sigma\tau} \left( \ln \frac{\lambda}{E} + \frac{3}{4} \right) \right\}$$

(эту формулу можно получить, используя (3.7.26)). Отсюда и из (5.3.1) следует, что

$$A_{\alpha j}^{(2)} = A_{\alpha j}^{(0)} \frac{g^2(q^2)}{6\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{7}{4} + 3 \ln \frac{E}{\lambda} - 2 \ln^2 \frac{E}{\lambda} \right). \quad (5.3.5)$$

Поэтому поправка к борновскому дифференциальному сечению (5.3.3), обусловленная интерференцией амплитуд  $A_{\alpha j}^{(0)}$ ,  $A_{\alpha j}^{(2)}$ :

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E^2} \frac{1}{4} \sum 2 \operatorname{Re} A_{\alpha j}^{(0)} A_{\alpha j}^{(2)*},$$

определяется формулой

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} \frac{g^2(q^2)}{3\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{7}{4} + 3 \ln \frac{E}{\lambda} - 2 \ln^2 \frac{E}{\lambda} \right). \quad (5.3.6)$$

Перейдем к рассмотрению вклада в сечение двухструйных процессов диаграмм с излучением реальных глюонов (см. рис. 47, в, г). Амплитуда, соответствующая диаграммам на рис. 47, в, г, определяется



формулой

$$A_{\alpha ij}^{(1)} = g^2 (q^2) Q_\alpha \frac{e^2}{q^2} e_{\text{kv}}^{(\lambda)} \bar{v}^{\mu_2} (q_2) \gamma_\lambda u^{\mu_1} (q_1) \left\{ \bar{u}^{\alpha \sigma_1} (p_1) \gamma^\nu \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}}{(p_1 + k)^2} \times \right. \\ \left. \times \gamma^\lambda \frac{1}{2} \lambda_{ij}^a v^{\alpha \sigma_2} (p_2) - \bar{u}^{\alpha \sigma_1} (p_1) \gamma^\lambda \frac{\hat{p}_2 + \hat{k}}{(p_2 + k)^2} \gamma^\nu \frac{1}{2} \lambda_{ij}^a v^{\alpha \sigma_2} (p_2) \right\}, \quad (5.3.7)$$

где  $e_{\text{kv}}^{(\lambda)}$  — вектор поперечной поляризации глюонов. Амплитуда  $A_{\alpha ij}^{(1)}$  зависит от цветов кварка и антикварка  $i, j$ , а также от сорта глюона  $a$ . В записанной формуле зависимость от цветов кварков определяется выражением  $\lambda_{ij}^a$ . Для «мягких» глюонов, энергия которых  $\omega$  меньше  $\varepsilon E$  ( $\omega < \varepsilon E$ ), это выражение принимает вид

$$A_{\alpha ij}^{(1)} \underset{\omega < \varepsilon E}{\approx} g^2 (q^2) Q_\alpha \frac{e^2}{E^2} \bar{v}^{\mu_2} (q_2) \gamma_\lambda u^{\mu_1} (q_1) \times \\ \times \bar{u}^{\alpha \sigma_1} (p_1) \gamma^\lambda \lambda_{ij}^a v^{\alpha \sigma_2} (p_2) \left( \frac{p_1^\nu}{p_1 k} + \frac{p_2^\nu}{p_2 k} \right) e_{\text{kv}}^{(\lambda)}. \quad (5.3.8)$$

Поэтому вклад в сечение двухструйного процесса «мягких» глюонов

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E^2} \frac{1}{4} \sum \int_{\omega < \varepsilon E} d^3 k |A_{\alpha ij}^{(1)}|^2$$

(суммирование проводится по  $\alpha, i, j$ , а также по поляризациям электронов, позитронов, кварков и антикварков) определяется формулой

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} \left( -\frac{4}{3} \frac{g^2 (q^2)}{16\pi^3} \right) \int_{\omega < \varepsilon E} \left( \frac{p_1^\nu}{p_1 k} + \frac{p_2^\nu}{p_2 k} \right)^2 \frac{d^3 k}{\omega}.$$

При суммировании по цветам и спинам кварков мы использовали формулы

$$\text{Sp} \lambda^a \lambda^b = \frac{1}{2} \delta_{ab}, \quad u_\alpha^{q\mu} (\mathbf{p}) \bar{u}_\beta^{q\mu} (\mathbf{p}) = 2mq \Lambda_{\alpha\beta}^{q\mu} (\mathbf{p}),$$

где  $\Lambda (\mathbf{p})$  — матрица проектирования (1.5.53), действующая в спиновом пространстве и не зависящая от  $j$  и  $\alpha$ . Выполняя интегрирование по  $d^3 k$ , получаем

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} \frac{g^2 (E^2)}{3\pi^2} \left( 2 \ln^2 \frac{2\varepsilon E}{\lambda} - \frac{\pi^2}{6} \right). \quad (5.3.9)$$

Обратим внимание на то, что из суммы  $\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega} + \frac{d\sigma^{(2)}}{d\Omega}$  не выпадает фиктивная масса глюона, в то время как в аналогичном расчете в квантовой электродинамике масса фотона выпадала. Это связано с тем, что в квантовой электродинамике масса электрона отлична от нуля, а в рассматриваемой теории мы полагали массу кварка равной нулю. При массе фермиона, равной нулю, возникает добавочная инфракрасная расходимость при  $\lambda = 0$ . Чтобы исключить массу глюона, необходимо учесть еще вклад в сечение двухструйных событий жестких глюонов (которые мы до сих пор не учитывали), движущихся почти параллельно кварку в конусах полураствора  $\delta$ .

**5.3.2. Учет жестких глюонов в двухструйных процессах.** Матричный элемент излучения жестких глюонов ( $\omega > \epsilon E$ ) определяется формулой (5.3.7). Суммируя квадрат модуля этого матричного элемента по поляризациям начальных и конечных частиц и по цветам конечных частиц, получаем

$$\begin{aligned} \Sigma |A_{\alpha i i}^{(1)}|^2 = & 16 \cdot \frac{4}{3} g^2 (q^2) Q_{\alpha}^2 \frac{e^4}{E^4} \left\{ \frac{4 (p_1 k) \{p_2 k\}_{\mu\nu} - 2\lambda^2 \{p_1 p_2\}_{\mu\nu}}{(p_1 + k)^4} - \right. \\ & - \frac{2}{(p_1 + k)^2 (p_2 + k)^2} [\lambda^2 (p_1 p_2) g_{\mu\nu} - 2 (p_1 p_2) (\{p_1 p_2\}_{\mu\nu} + \{p_1 k\}_{\mu\nu}) - \\ & - 2 (p_1 k) \{p_1 p_2\}_{\mu\nu} + 2 (p_2 k) \{p_1 p_2\}_{\mu\nu}] + \\ & \left. + (p_1 \rightleftharpoons p_2) \{q_1 q_2\}_{\mu\nu} \right\} \quad (5.3.10) \end{aligned}$$

Сечение процесса с излучением глюона определяется формулой

$$d\sigma = \frac{1}{4} \Sigma |A_{\alpha i i}^{(1)}|^2 \frac{1}{E^2} d\Phi, \quad (5.3.11)$$

где

$$\begin{aligned} d\Phi = & (2\pi)^4 \delta(q_1 + q_2 - p_1 - p_2 - \\ & - k) \left( \prod_{i=1}^2 \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) \frac{d^3 k}{2(2\pi)^3 \omega}. \quad (5.3.12) \end{aligned}$$

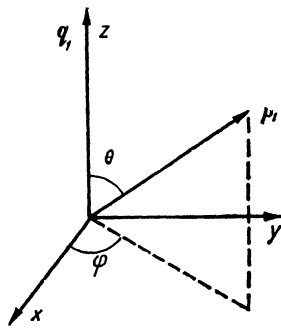


Рис. 48

Введем безразмерные величины  $x_i = 2E_i/E$  ( $E_i$  — энергия конечного кварка, антикварка или глюона,  $i = 1, 2, 3$ ). Тогда в силу закона сохранения энергии  $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ . Учитывая, что  $p_1^2 = p_2^2 = 0$ ,  $k^2 = \lambda^2$ , в системе центра инерции сталкивающихся частиц получаем

$$\begin{aligned} p_1 p_2 = & \frac{1}{2} E^2 (1 - x_3 + \beta), \quad p_2 k = \frac{1}{2} E^2 (1 - x_1 + \beta), \\ p_1 k = & \frac{1}{2} E^2 (1 - x_2 + \beta), \quad \beta \equiv \frac{\lambda^2}{E^2}. \quad (5.3.13) \end{aligned}$$

Введем пространственную систему координат с осью  $z$ , направленной вдоль импульса электрона  $\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_2$ , и обозначим через  $\theta$  и  $\varphi$  полярный и азимутальный углы вектора импульса кварка  $\mathbf{p}_1$  (рис. 48, направление оси  $x$  произвольно). Так как мы интересуемся двухструйными событиями, то в формуле (5.3.13') мы положили угол между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  равным  $\pi$ . Тогда легко видеть, что

$$\begin{aligned} q_{1,2} p_1 = & \frac{E^2}{4} x_1 (1 \mp \cos \theta), \quad q_{1,2} p_2 = \frac{E^2}{4} x_2 (1 \pm \cos \theta), \\ q_{1,2} k = & \frac{E^2}{4} \{x_3 \pm (x_1 - x_2) \cos \theta\}. \quad (5.3.13') \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\int_0^{\infty} dk_0 \delta(k^2 - \lambda^2) = \frac{1}{2\omega}$$

и устраняя в (5.3.12)  $\delta$ -функцию интегрированием по 4-импульсу глюона, величину  $d\Phi$  представляем в виде

$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \delta(k^2 - \lambda^2), \quad k = q_1 + q_2 - p_1 - p_2.$$

Отмечая, что  $E_1^{-1} d^3 p_1 = \frac{1}{2} E E_1 dx_1 d \cos \theta d\varphi$  и  $E_2^{-1} d^3 p_2 = E_2 dE_2 d\chi d \cos \varphi_{12}$  ( $\varphi_{12}$  — угол между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ ;  $\chi$  — азимутальный угол, соответствующий повороту вокруг оси симметрии струй), и выполняя интегрирование по  $\chi$  (что дает множитель  $2\pi$ ) и по  $\cos \varphi_{12}$  с помощью  $\delta(k^2 - \lambda^2)$  (что дает множитель  $1/2 E_1 E_2$ ), находим, что фазовый объем  $d\Phi$  можно заменить следующим:

$$d\Phi \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{E^2}{32} dx_1 dx_2 d \cos \theta d\varphi.$$

Учитывая выписанные выражения для скалярных произведений  $q_{1,2} p_1$ ,  $q_{1,2} k$ ,  $q_{1,2}$ ,  $p_2$ ,  $p_1 p_2$ , получаем

$$\frac{1}{4} \sum |A_{\alpha i j}^{(1)}|^2_{x_3 > 2\epsilon} \sim_{2\epsilon} \frac{8}{3} g^2 (q^2) Q_\alpha^2 \frac{e^4}{E^2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \times \\ \times \left\{ \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} - \beta \left( \frac{1}{(1-x_1)^2} + \frac{1}{(1-x_2)^2} \right) \right\}, \quad x_3 > 2\epsilon, \quad \mathbf{p}_1 \parallel -\mathbf{p}_2.$$

При написании этой формулы в слагаемом, пропорциональном  $\beta = \lambda^2/E^2$ , мы учли только те члены, которые содержат наивысшую сингулярность (члены типа  $\beta/(1-x_1)$  могут дать при интегрировании по  $x_1$  только выражения типа  $\beta \ln \beta$ , которыми мы пренебрегаем при  $\lambda \rightarrow 0$ ).

Выполним интегрирование по  $x_1$  и  $x_3$ . Определим вначале нижнюю границу интегрирования по  $x_1$ . Для этого отметим, что

$$\cos \varphi_{1,3} = 1 - 2 \frac{x_1 + x_3 - \beta \left( 1 + \frac{x_1}{x_3} \right) - 1}{x_1 x_3 - 2\beta \frac{x_1}{x_3}}$$

( $\varphi_{1,3}$  — угол между векторами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{k} \equiv \mathbf{p}_3$ ). Из этого условия следует, что  $x_1 + x_3 - 1 - \beta \left( 1 + \frac{x_1}{x_3} \right) \geq 0$  или  $x_1 \geq \frac{1-x_3+\beta}{1-\beta/x_3}$ . Верхний предел интегрирования по  $x_1$  находится из условия, что векторы  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}_3$  лежат внутри конусов, соответствующих двухструйной кинематике, т. е.

$$x_2^2 \geq x_1^2 + x_3^2 + 2x_1 x_3 \cos 2\delta$$

(это неравенство следует из закона сохранения импульса  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_2$ ; при возведении этого неравенства в квадрат мы пренебрегли массой глюона, считая, что  $\beta \ll \delta$ ). Подставляя в эту формулу  $x_2 = 2 - x_1 - x_3$ , получаем

$$x_1 \leq \frac{1-x_3}{1-x_3 \sin^2 \delta}.$$

Видно, что если  $\delta$  и  $\beta$  малы, то  $x_1 \approx 1 - x_3$ , т. е.  $x_2 \approx 1$ . Интегрирование по  $x_3$ , очевидно, должно происходить в пределах от  $2\varepsilon$  до 1. Вклад жестких глюонов в дифференциальное сечение двухструйных событий определяется формулой [20]

$$\frac{d\sigma^{(ж)}}{2\Omega} = \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} \frac{g^2(q^2)}{6\pi^2} \int_{2\varepsilon}^1 dx_3 \int_{\frac{(1-x_3)/(1-x_3 \sin^2 \vartheta)}{(1-x_3+\beta)/(1-\beta/x_3)}}^{(1-x_3)/(1-x_3 \sin^2 \vartheta)} dx_1 \left\{ \frac{x_1^2 + 1}{(1-x_1)(x_1+x_3-1)} - \beta \left( \frac{1}{(1-x_1)^2} + \frac{1}{(x_1+x_3-1)^2} \right) \right\} \cdot 2.$$

При написании этой формулы мы учли, что  $x_2 = 2 - x_1 - x_3$  и  $\beta \ll \ll \delta$ ,  $\beta \ll \varepsilon$  ( $\delta \ll 1$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ), а также то, что наряду с рассмотренной областью интегрирования  $x_2 \approx 1$  такой же вклад (вследствие симметрии двухструйной кинематики) вносит область интегрирования, получаемая из рассмотренной заменой  $x_1 \approx x_2$ . Таким образом, в рассматриваемом приближении

$$\frac{d\sigma^{(ж)}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} \frac{g^2(q^2)}{3\pi^2} \left\{ -4 \ln \frac{E\delta}{\lambda} \ln 2\varepsilon - 3 \ln \frac{E\delta}{\lambda} - 2 \ln^2 \varepsilon - \frac{\pi^2}{3} + \frac{17}{4} \right\}. \quad (5.3.14)$$

Суммируя вклады (5.3.3), (5.3.6), (5.3.9), (5.3.14), соответствующие борновскому приближению, интерференции диаграмм на рис. 47, а, б, вкладу реальных мягких глюонов и вкладу жестких коллинеарных глюонов, получаем следующее выражение для сечения двухструйного процесса [21]:

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} \left\{ 1 - \frac{g^2(q^2)}{3\pi^2} \left( 3 \ln \delta + 4 \ln \delta \ln 2\varepsilon + \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2} \right) \right\}. \quad (5.3.15)$$

Здесь  $\delta$  — угол полураствора конусов, в которых летят кварки и глюоны, «одевшиеся» в реальные адроны;  $\varepsilon E$  — максимальная энергия мягких глюонов, двигающихся в любых направлениях, поэтому  $(1 - \varepsilon) E$  представляет собой энергию адронов в двух струях;  $d\sigma^{(0)}$  — дифференциальное сечение в борновском приближении превращения  $e^+e^-$  в кварк-антикварковую пару, кварк которой движется в телесном угле  $d\Omega$  по отношению к импульсу электрона в с. ц. и., иными словами,  $d\Omega$  — элемент телесного угла оси одной из струй по отношению к импульсу электрона.

Видно, что в сечении, соответствующем двухструйным событиям  $e^+e^-$ -аннигиляции, масса глюона, которую мы ввели, чтобы корректно учесть инфракрасные расходимости, выпала.

**5.3.3. Трехструйные процессы.** Вычислим полное сечение трехструйных процессов. В силу того что мы исключаем двухструйную кинематику, в выражении для квадрата модуля матричного элемента (5.3.10) можно положить  $\lambda = 0$ :

$$\frac{1}{4} \sum |A_{\alpha ij}^{(1)}|^2 = \frac{8}{3} g^2(q^2) Q_\alpha^2 \frac{e^4}{E^2} \frac{1}{2} \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)} \{x_1^2 + x_2^2 + \sin^2 \vartheta (x_1^2 \cos^2 \varphi_1 + x_2^2 \cos^2 \varphi_2)\},$$

где  $\vartheta$  — угол между нормалью  $\mathbf{n}$  к плоскости импульсов конечных частиц и импульсов  $\mathbf{q}_1$ , а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — азимутальные углы между осью  $x$  и векторами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  (ось  $x$  определяется пересечением плоскости векторов  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{n}$  и плоскости, в которой лежат импульсы конечных частиц; рис. 49).

Считая, что  $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_{12}$ , и выполняя интегрирование по  $\varphi_1$ , получаем [22]

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \frac{1}{4} \sum |A_{\alpha i i}^{(1)}|^2 = \frac{8}{3} g^2 (q^2) Q_\alpha^2 \frac{e^4}{E^2} \frac{\pi}{2} \frac{3 - \cos^2 \vartheta}{(1-x_1)(1-x_2)} (x_1^2 + x_2^2).$$

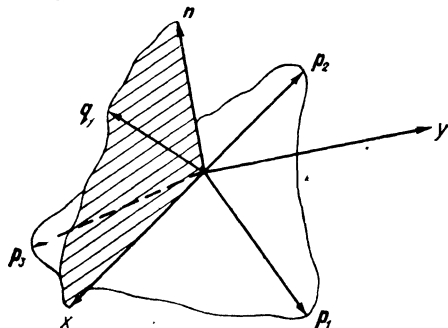


Рис. 49

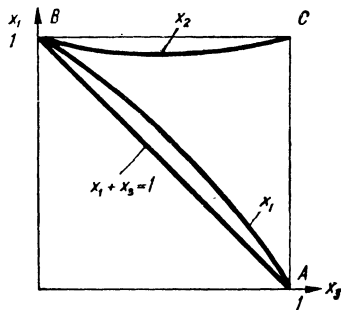


Рис. 50

Область интегрирования по переменным  $x_1$  и  $x_2$  показана на рис. 50. Уравнения граничных линий  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  имеют соответственно вид

$$x_1 = \frac{1-x_2}{1-x_2 \sin^2 \delta}, \quad x_2 = \frac{1-x_1}{1-x_1 \sin^2 \delta}, \quad x_3 = 1.$$

Интегрирование по углу  $\vartheta$  и по областям, ограниченным указанными кривыми, приводит к следующему выражению для полного сечения трехструйных процессов:

$$\sigma_3 = \sigma^{(0)} \frac{g^2(q^2)}{3\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{3} - \frac{7}{4} + \ln \delta (4 \ln 2\varepsilon + 3) \right\}, \quad (5.3.16)$$

где  $\sigma^{(0)}$  — полное сечение  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны в борновском приближении; величины  $\delta$ ,  $\varepsilon$  имеют прежний смысл, т. е. относятся к двухструйной кинематике, которая определяет трехструйную кинематику (в приближении  $g^2(q^2)$ , когда в конечном состоянии не может быть более трех частиц). В двухструйных процессах оси двух струй противоположны друг другу; в трехструйных оси трех струй расположены произвольно друг к другу (в некоторой плоскости), но таким образом, что никакая пара из них не должна попасть в конус раствора  $2\delta$ . Полное сечение двухструйных процессов согласно (5.3.15) имеет вид

$$\sigma_2 = \sigma^{(0)} \left\{ 1 - \frac{g^2(q^2)}{3\pi^2} \left( 3 \ln \delta + 4 \ln \delta \ln 2\varepsilon + \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2} \right) \right\}.$$

Сложив эти выражения, получим полное сечение  $e^+e^-$ -аннигиляции

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma^{(0)} \left( 1 + \frac{g^2(q^2)}{4\pi^2} \right). \quad (5.3.17)$$

Эта формула совпадает с формулой (5.2.53) для полного сечения аннигиляции, полученной с использованием уравнений ренормализационной группы (напомним, что под  $g(q^2)$  следует понимать значение бегущей константы связи  $g(q^2)$  при  $q^2 = E^2$ ).

Мы получили формулы для сечения аннигиляции на кварки и глюоны. Найденные выражения не зависят от фиктивной массы глюона и являются в этом смысле инфракрасно-стабильными. Можно предположить, что величины  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ,  $\sigma_{\text{tot}}$  не связаны с проблемой конфайнмента и обесцвечивания кварков и глюонов и могут интерпретироваться соответственно как сечения аннигиляции  $e^+e^-$  в адроны.

### § 5.4. ГЛУБОКО НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ЛЕПТОНОВ АДРОНАМИ

**5.4.1. Амплитуда и сечение лептон-нуклонного рассеяния.** Перейдем к исследованию рассеяния быстрых лептонов адронами, В § 5.2 уже отмечалось, что если импульс, переданный кварку, достаточно велик, то кварк будет вести себя как квазисвободная частица, и поэтому рассеяние лептона на адроне будет выглядеть как рассеяние на системе почти свободных частиц. Такая система подобно атомной системе в задаче рассеяния электрона атомом будет характеризоваться некоторыми функциями  $F_i$ , называемыми структурными. Эти функции зависят от двух переменных:  $q^2$  и  $\nu = \mathcal{P}q$ , где  $q = p_1 - p_2$  — 4-импульс, переданный лептоном кваркам ( $p_1, p_2$  — начальный и конечный импульсы лептона) и  $\mathcal{P}$  — 4-импульс адрона. В лабораторной системе, где адрон с массой  $M$  покоится,  $\nu = M(\epsilon_1 - \epsilon_2)$  ( $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  — энергия начального и конечного лептонов). Замечательным свойством структурных функций является то, что в области высоких энергий, когда выполняются неравенства  $-q^2, \nu \gg M^2$  (эта область называется областью глубоко неупругого рассеяния), они приближенно зависят только от одной переменной  $x = -q^2/2\nu, 0 \leq x \leq 1$  ( $(q + \mathcal{P})^2 > M^2, \mathcal{P}q < 0$ ). Зависимость структурных функций от одной переменной называется скейлингом<sup>30</sup>. Свойство скейлинга связано с предположением о кварках как о свободных частицах. В действительности кварки не являются свободными частицами, так как они взаимодействуют с глюонами, вследствие чего возникает взаимодействие кварков друг с другом. Это приводит к тому, что скейлинг нарушается, т. е. структурные функции зависят не только от  $x$ , но и от  $q^2$ . Нарушение скейлинга обычно характеризуют моментами структурных функций

$$M_i^{(m)}(q^2) = \int_0^1 dx x^{m-2} F_i(x, q^2). \quad (5.4.1)$$

<sup>30</sup> До открытия свойства асимптотической свободы явление скейлинга объяснялось в рамках партонной модели Фейнманом [24] и Бьеркеном [25]. Теории глубоко неупругого рассеяния были посвящены также работы [26, 27].

Если скейлинг нарушается, то моменты зависят от  $q^2$ . Как мы увидим далее, в асимптотически свободной теории зависимость моментов от  $q^2$  — логарифмическая типа

$$M_i^{(m)}(q^2) = \text{const} + \left( \ln \frac{-q^2}{\lambda^2} \right)^{-\alpha_m}, \quad (5.4.2)$$

где  $\alpha_m$  — положительные константы.

Чтобы ввести структурные функции, нужно определить амплитуду рассеяния. Для определенности будем рассматривать рассеяние электронов нуклоном. Этот процесс будем изучать во втором порядке теории возмущений по заряду электрона. Матрица рассеяния второго порядка теории возмущений определяется формулой (5.2.1'). Матричный элемент изучаемого процесса поэтому имеет вид (см. рис. 43)

$$(S_2)_{i \rightarrow f} = - \int d^4x d^4x' i \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x') \langle X | j_\mu(x) | N \rangle \langle p_2 | j_\nu^i(x') | p_1 \rangle.$$

Используя формулы (5.2.3), как и в п. 5.2.1, получаем

$$(S_2)_{i \rightarrow f} = \frac{(2\pi)^4}{iq^2} \delta(p_1 + \mathcal{P} - p_2 - \mathcal{P}_X) \langle X | j_\mu(0) | N \rangle \langle p_2 | j_\mu^i(0) | p_1 \rangle.$$

Нас будет интересовать вероятность перехода в единицу времени в произвольное состояние  $|X\rangle$  адронной системы и в интервал импульсов  $d^3p_2$  конечного электрона. Эта вероятность определяется формулой

$$dw_{i \rightarrow f} = \frac{1}{T} \sum_X |(S_2)_{i \rightarrow f}|^2 \frac{V d^3p_2}{(2\pi)^3}.$$

Заменяя  $\delta(0)$  на  $VT/(2\pi)^4$ , получаем

$$dw_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi d^3p_2}{4q^4 \varepsilon_1 \varepsilon_2} \mathcal{L}_{\mu\nu} \sum_X \delta(\mathcal{P}_X - \mathcal{P} - q) \langle N | j^\mu(0) | X \rangle \langle X | j^\nu(0) | N \rangle, \quad (5.4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mu\nu} &= 4V^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \langle p_2 | j_\nu^i(0) | p_1 \rangle \langle p_1 | j_\mu^i(0) | p_2 \rangle = \\ &= \frac{e^2}{2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} (\bar{u}^{\sigma_2}(p_2) \gamma_\nu u^{\sigma_1}(p_1)) (\bar{u}^{\sigma_1}(p_1) \gamma_\mu u^{\sigma_2}(p_2)) \end{aligned}$$

(мы при этом провели суммирование по спинам конечного электрона и усреднение по спинам начального электрона). Используя формулы (1.5.55) и (1.5.54), величину  $\mathcal{L}_{\mu\nu}$  можно представить в виде

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} = 2e^2 \left\{ p_{1\nu} p_{2\mu} + p_{1\mu} p_{2\nu} + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right\}. \quad (5.4.4)$$

Вводя плотность потока электронов  $\frac{1}{V \varepsilon_1 \mathcal{E}} \sqrt{(p_1 \mathcal{P})^2 - m^2 M^2}$ , получаем следующее выражение для сечения рассеяния электронов в интервал углов  $d\Omega$  и энергий  $de$ :

$$d\sigma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(p_1 \mathcal{P})^2 - m^2 M^2}} \frac{d^3p_2}{\varepsilon_2 q^4} \mathcal{L}^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad (5.4.5)$$

где

$$W_{\mu\nu} = (2\pi)^3 \sum_X \delta(\mathcal{P}_X - \mathcal{P} - q) \langle N | j_\mu(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | N \rangle 2V\mathcal{E}.$$

Легко видеть, что тензор  $W_{\mu\nu}$  можно представить в виде

$$W_{\mu\nu} = 2V\mathcal{E} \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle N | [j_\mu(x), j_\nu(0)] | N \rangle \quad (5.4.6)$$

(предполагаем, что величина  $W_{\mu\nu}$  усредняется по поляризационным состояниям нуклона). Действительно, согласно (5.2.3)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle N | j_\mu(x) j_\nu(0) | N \rangle = \\ & = (2\pi)^3 \sum_X \delta(q + \mathcal{P} - \mathcal{P}_X) \langle N | j_\mu(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | N \rangle \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle N | j_\nu(0) j_\mu(x) | N \rangle = \\ & = (2\pi)^3 \sum_X \delta(q - \mathcal{P} + \mathcal{P}_X) \langle N | j_\nu(0) | X \rangle \langle X | j_\mu(0) | N \rangle. \end{aligned}$$

Так как в системе покоя начального нуклона  $q_0 > 0$  и  $\mathcal{P}_x^0 \geq \mathcal{P}^0$  (в состоянии  $|X\rangle$  находится по крайней мере один нуклон), то последнее выражение обращается в нуль.

Вследствие закона сохранения кваркового тока выполняются соотношения:

$$W_{\mu\nu}(q) q^\nu = q^\mu W_{\mu\nu}(q) = 0.$$

Поэтому тензор  $W_{\mu\nu}$  можно представить в виде [9, 28, 8]

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} = & W_1(q^2, \nu) \left( -q_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \\ & + \frac{1}{M^2} W_2(q^2, \nu) \left( \mathcal{P}_\mu - \frac{\nu}{q^2} q_\mu \right) \left( \mathcal{P}_\nu - \frac{\nu}{q^2} q_\nu \right). \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Таким образом, дифференциальное сечение неупругого  $eN$ -рассеяния можно представить в виде

$$d\sigma = \frac{2\alpha^2}{Mq^4} \left( 2W_1 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) d^3p_2, \quad (5.4.8)$$

где  $\vartheta$  — угол рассеяния электрона ( $q^2 = -4\epsilon_1\epsilon_2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ ; мы пренебрегли массой электрона по сравнению с  $\epsilon$ ,  $\mathcal{E}$ ).

Величины  $W_1$ ,  $W_2$  связаны со структурными функциями  $F_1$ ,  $F_2$  соотношениями

$$F_1(x, q^2) \equiv W_1(q^2, \nu), \quad F_2(x, q^2) = \frac{\nu}{M^2} W_2(q^2, \nu). \quad (5.4.9)$$

**5.4.2. Аналитические свойства амплитуды рассеяния.** Поступая так же, как в п. 5.2.1, легко убедиться, что тензор  $W_{\mu\nu}$ , определяемый



формулой (5.4.6), можно представить в виде

$$W_{\mu\nu}(\mathcal{P}, q) = \frac{1}{\pi} \text{Im} T_{\mu\nu}(\mathcal{P}, q), \quad (5.4.10)$$

где

$$T_{\mu\nu}(\mathcal{P}, q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle N | T(j_\mu(x) j_\nu(0)) | N \rangle 2V\mathcal{E}.$$

Эту формулу можно интерпретировать как следствие оптической теоремы, согласно которой полное сечение любого процесса пропорционально мнимой части упругого рассеяния на нулевой угол (тензор  $T_{\mu\nu}$  определяет амплитуду рассеяния виртуального фотона нуклоном на нулевой угол).

Используя сохранение тока, величину  $T_{\mu\nu}$  можно записать так:

$$T_{\mu\lambda}(\mathcal{P}, q) = \left( -g_{\mu\lambda} + \frac{q_\mu q_\lambda}{q^2} \right) T_1(x, q^2) + \left( \mathcal{P}_\mu - q_\mu \frac{v}{q^2} \right) \left( \mathcal{P}_\lambda - q_\lambda \frac{v}{q^2} \right) \frac{T_2(x, q^2)}{M^2}, \quad (5.4.11)$$

где  $T_1, T_2$  — некоторые функции  $x$  и  $q^2$  (в последней формуле мы опустили нековариантные швингеровские члены, мнимые части которых равны нулю).

Изучим аналитические свойства амплитуд  $T_{\mu\nu}$ , рассматривая их как функции  $v$  и  $q^2$  [10]. Покажем, что  $T_{\mu\lambda}(v, q^2)$  является аналитической функцией в комплексной плоскости  $v$ , имеющей полюсы при  $v = \pm q^2/2$  и разрезы при  $v > v_0$  и  $v < -v_0$ , где  $v_0 = Mm_\pi + \frac{1}{2}(m_\pi^2 - q^2)$  ( $m_\pi$  — минимальная масса адронов, т.е. масса  $\pi$ -мезона). Выражение для  $T_{\mu\nu}(\mathcal{P}, q)$  можно представить в виде

$$T_{\mu\nu}(\mathcal{P}, q) = 2V\mathcal{E} (2\pi)^3 \sum_X \left\{ \langle N | j_\nu(0) | X \rangle \langle X | j_\mu(0) | N \rangle \frac{\delta(q + \mathcal{P}_X - \mathcal{P})}{q_0 - \mathcal{E} + \mathcal{E}_X - i0} - \langle N | j_\mu(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | N \rangle \frac{\delta(q + \mathcal{P} - \mathcal{P}_X)}{q_0 + \mathcal{E} - \mathcal{E}_X + i0} \right\}. \quad (5.4.12)$$

Из этой формулы следует, что однонуклонные состояния ( $|X\rangle = |N\rangle$ ) с энергией  $V(\mathcal{P} \pm \mathbf{q})^2 + M^2$  приводит к полюсным особенностям в амплитуде  $T_{\mu\nu}$  вида  $[\mathcal{E} \pm q_0 - \sqrt{(\mathcal{P} \pm \mathbf{q})^2 + M^2}]^{-1}$  или  $\frac{1}{(\mathcal{P} \pm q)^2 - M^2} = \frac{1}{q^2 \pm 2v}$ . Из формулы (5.4.12) также следует, что разрезы появляются вследствие состояний  $|X\rangle$ , в которых содержатся нуклон с импульсом  $\mathcal{P}'$  и  $\pi$ -мезон с импульсом  $\mathcal{P} \pm \mathbf{q} - \mathcal{P}'$  (по  $\mathcal{P}'$  выполняется интегрирование; другие состояния также приводят к разрезам, однако вследствие минимальности массы  $\pi$ -мезона в семействе адронов эти разрезы лежат внутри  $\pi$ -мезонных разрезов). Именно  $N\pi$ -состояние определяет величину  $v_0$ . Очевидно, должно выполняться условие  $(\mathcal{P} + q)^2 \geq (M + m_\pi)^2$  или  $(\mathcal{P} - q)^2 \geq (M + m_\pi)^2$  (в противном случае состояния не будут давать вклад в мнимую часть амплитуды  $T_{\mu\nu}$ ). Отсюда следует, что  $v_0 = Mm_\pi + \frac{m_\pi^2 - q^2}{2}$ .

Из сказанного следует, что величины  $T_1(x, q^2)$  и  $T_2(x, q^2)$  являются аналитическими функциями переменной  $x$ , причем в плоскости  $x$  существует разрез  $-1 < x < 1$  и полюсы при  $x = \pm 1$ .

Формула (5.4.7) показывает, что

$$W_{uv}(\mathcal{P}, q) = -W_{uv}(\mathcal{P}, -q) = -W_{vu}(\mathcal{P}, -q),$$

поэтому

$$W_{1,2}(q^2, -v) = -W_{1,2}(q^2, v).$$

Для структурных функций  $F_{1,2}$  отсюда получаем

$$\begin{aligned} F_1(x, q^2) &= -F_1(-x, q^2), \\ F_2(x, q^2) &= F_2(-x, q^2). \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

Перейдем к рассмотрению моментов структурных функций. Введем с этой целью контурные интегралы

$$\mathcal{J}_1^{(m)} = \frac{i}{2\pi} \int_C dx x^{m-1} T_1(x, q^2), \quad \mathcal{J}_2^{(m)} = \frac{i}{2\pi} \int_C dx x^{m-3} T_2(x, q^2), \quad (5.4.14)$$

где контур  $C$  изображен на рис. 51. Стягивая контур интегрирования к отрезку  $-1 \leq x \leq 1$  и учитывая аналитические свойства амплитуд  $T_k(x, q^2)$  ( $k = 1, 2$ ), получаем

$$\mathcal{J}_1^{(m)} = \text{Im} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 dx T_1(x, q^2) x^{m-1} = \int_{-1}^1 dx x^{m-1} F_1(x, q^2), \quad (5.4.15)$$

$$\mathcal{J}_2^{(m)} = \text{Im} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 dx T_2(x, q^2) x^{m-3} = -\frac{2M^2}{q^2} \int_{-1}^1 dx x^{m-2} F_2(x, q^2),$$

где мы учли (5.4.9). В этих формулах мы выполняем интегрирование по верхнему берегу разреза; значения амплитуд  $T_k$  на верхнем и нижнем берегах разреза согласно (5.4.12) являются комплексно сопряженными. Отметим, что вследствие формул (5.4.13), (5.4.15)  $\mathcal{J}_k^{(m)} \neq 0$  только при четном  $m$ . При этом мы пренебрегли вкладом полюсов при  $x = \pm 1$  (соответствующих однонуклонным состояниям  $|N\rangle$ ), поскольку они содержат нуклонные формфакторы, быстро убывающие с ростом  $q^2$ . Используя формулы (5.4.1), (5.4.15), получаем следующие выражения для моментов  $M_{1,2}^{(m)}$  структурных функций [29], [30]:

$$M_1^{(m)} = \int_0^1 dx x^{m-1} F_1(x, q^2) = \mathcal{J}_1^{(m)}, \quad (5.4.16)$$

$$M_2^{(m)} = \int_0^1 dx x^{m-2} F_2(x, q^2) = -\frac{q^2}{2M^2} \mathcal{J}_2^{(m)},$$

которые справедливы только при четном  $m$ .

**5.4.3. Представление произведения операторов токов в виде суперпозиции локальных операторов.** Величина  $W_{uv}(\mathcal{P}, q)$ , входящая

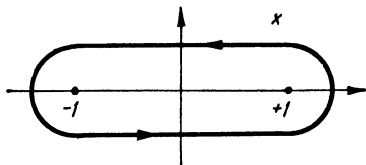


Рис. 51

в сечение (5.4.5), определяется коммутатором токов  $[\mathcal{J}_\mu(x), \mathcal{J}_\nu(0)]$ , который (вследствие принципа причинности) обращается в нуль для пространственно-подобных  $x_\mu$ . Покажем, что при больших  $v$  и  $q^2$  в  $W_{\mu\nu}$  доминирующий вклад вносит область малых  $x_\mu^2$  ( $0 < x_\mu^2 \leq \frac{1}{2xv}$ ; см. [31]). Действительно, в лабораторной системе 4-импульс нуклона  $\mathcal{P} = (M, 0, 0, 0)$ . Предполагая, что переданный импульс  $q$  направлен вдоль оси  $z$ , находим  $q = \frac{1}{M} (v, 0, 0, v \sqrt{1 + \frac{2M^2x}{v}})$ . Так как величина  $x$  предполагается конечной, а  $v \rightarrow \infty$ , то  $q \approx \frac{1}{M} (v, 0, 0, v + M^2x)$  и, следовательно,  $qx \approx \frac{v}{M} (x_0 - x_3) + Mx x_3$ . Поэтому при  $v \rightarrow \infty$  доминирующий вклад в интеграл для  $W_{\mu\nu}$  дает область  $|x_0 - x_3| \leq \frac{M}{v}$ ,  $|x_3| \leq \frac{1}{Mx}$ . Отмечая, что  $x^2 = -x_1^2 + (x_0 - x_3)(x_0 + x_3) \leq (x_0 - x_3)(x_0 + x_3)$ , видим, что эффективная область интегрирования в  $W_{\mu\nu}$  определяется неравенством  $0 < x_\mu^2 \leq \frac{1}{vx}$ . Подчеркнем, что, несмотря на малость  $x_\mu^2$ , компоненты вектора  $x_\mu$  могут быть не малыми. Таким образом, возникает проблема выяснения поведения коммутатора токов  $[\mathcal{J}_\mu(x), \mathcal{J}_\nu(0)]$  вблизи светового конуса  $x_\mu^2 \approx 0$ . С этой целью воспользуемся разложением произведения двух произвольных локальных операторов  $A(x)$  и  $B(y)$  по некоторому операторному базису, состоящему из локальных операторов  $O_n(y)$  [32]:

$$A(x)B(y) = \sum_n C_n(x-y) O_n(y), \quad (5.4.17)$$

где  $C_n(x-y)$  — некоторые  $C$ -числовые функции. Произведение локальных операторов представляет собой очень сингулярный объект при  $(x-y)^2 \approx 0$ . В разложении (5.4.17) эти сингулярности переносятся на  $C$ -числовые функции  $C_n(x-y)$ . В качестве операторного базиса данного разложения (оно называется разложением Вильсона) можно выбрать, например, различные нормальные произведения операторов полей и их производных, относящихся к точке  $y$ .

Чтобы разъяснить смысл этого разложения, рассмотрим свободное скалярное поле  $\varphi(x)$  и в качестве операторов  $A(x)$  и  $B(y)$  выберем операторы  $:\varphi^2(x):$  и  $:\varphi^2(y):$ . Тогда, согласно теореме Вика,

$$\begin{aligned} :\varphi^2(x): :\varphi^2(y): &= :\varphi^2(x)\varphi^2(y): + 4:\varphi(x)\varphi(y): + i\Delta^c(x-y) - \\ &- 4(\Delta^c(x-y))^2 \end{aligned}$$

(предполагается, что  $x_0 > y_0$ ). Подставляя в эту формулу разложение в ряд Тейлора оператора  $\varphi(x)$  по степеням  $x-y$

$$\varphi(x) = \varphi(y) + (x-y)_\mu \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_\mu} + \dots,$$

получаем разложение вида (5.4.17). Вблизи светового конуса функция

$\Delta^c(x)$  ведет себя так:

$$\Delta^c(x) = \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) \theta(x^2).$$

Поэтому наибольшей сингулярностью на световом конусе в разложении Вильсона обладают члены, которые содержат наименьшее число полевых операторов.

Будем применять разложение Вильсона к произведению адронных (кварковых) токов вблизи светового конуса. При этом нас будет интересовать те слагаемые в этом разложении, которым соответствует наибольшая сингулярность функций  $C_n(x-y)$ . В случае свободного

поля функции  $C_n(x-y)$  ведут себя при  $x \rightarrow y$  как  $[(x-y)^2]^{-\frac{1}{2}d_{C_n}}$ . Величина  $d_{C_n}$ , называемая масштабной размерностью, определяет степень сингулярности функций  $C_n(x-y)$ . Если операторы  $A$ ,  $B$  и базисные операторы  $O_n$  строятся только из полевых операторов и их производных (но не включают в себя массовых переменных), то учитывая, что пропаторы и перестановочные функции вблизи светового конуса не содержат массовых переменных, легко прийти к выводу, что размерность функций  $C_n(x-y)$  определяется только величиной  $x-y$ . Поэтому в данном случае масштабная размерность  $d_{C_n}$  функций  $C_n$  совпадает с канонической (каноническая размерность  $d_A$  величины  $A$  определяется формулой  $[A] = p^{d_A}$ , где  $p$  — величина размерности импульса). Таким образом, в случае свободных полей степень сингулярности  $d_{C_n}$  (масштабная размерность) функции  $C_n$  определяется формулой [32, 33]

$$d_{C_n} = d_A + d_B - d_{O_n}. \quad (5.4.18)$$

В случае взаимодействующих полей в функциях  $C_n(x)$  появляются величины размерности массы (например, импульсы нормировки  $\mu$ ), и поэтому сингулярность не определяется только обычной (канонической) размерностью функций  $C_n(x-y)$ . Именно в этом случае функция  $C_n(x-y)$  ведет себя вблизи светового конуса как  $[(x-y)^2]^{-\frac{1}{2}d_{C_n}} \ln^m \frac{(x-y)^2}{\mu^{-2}}$ , где  $d_{C_n}$  — по-прежнему определяется формулой (5.4.18).

Хронологическое произведение токов также можно представить в форме (5.4.17)

$$T \{j^\mu(x) j^\nu(0)\} = \sum_x C_x^{\mu\nu}(x) O_x(0). \quad (5.4.19)$$

Оператор полного тока  $j^\mu$  представляет собой сумму изоскаляра и изовектора группы  $SU(2)$ , являющейся подгруппой сортовой группы  $SU(3)$ . В квантовой модели с кварками трех сортов электромагнитный ток согласно (2.7.25) можно представить в виде

$$j_\mu = j_\mu^3 + j_\mu^8, \quad (5.4.20)$$

$$j_\mu^3 = \frac{e}{2} \bar{q} \gamma_\mu \lambda^3 q, \quad j_\mu^8 = \frac{e}{2\sqrt{3}} \bar{q} \gamma_\mu \lambda^8 q$$

( $\lambda^a$  — матрицы Гелл-Манна сортовой группы  $SU(3)$ ). Величина  $j_\mu^3$  по отношению к группе  $SU(2)$  преобразуется как третья компонента изовектора, а величина  $j_\mu^8$  — как изоскаляр. Разложение Вильсона также можно написать для  $T\{j_\mu^a(x)j_\nu^b(y)\}$ , ( $a, b = 1, \dots, 8$ ). При этом  $c$ -числовые коэффициенты  $C_x^{\mu\nu}$  будут зависеть от индексов  $a$  и  $b$ .

Базисные операторы  $O_x(0)$  должны строиться с помощью операторов кварковых и глюонных полей и их производных. Имея в виду, что в задаче о глубоко-неупругом рассеянии электронов нуклоном доминирующую роль должны играть те  $c$ -числовые функции  $C_x^{\mu\nu}$  (или  $C_x^{\mu\nu,ab}$ ), которые имеют наибольшую сингулярность при  $x_\mu^2 \rightarrow 0$ , в качестве операторов  $O_x(0)$  можно выбрать операторы  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$ ,  $i = a, q, g$  ( $a = 1, \dots, 8$ ), представляющие собой неприводимые тензоры [34, 11]:

$$O_a^{\mu_1 \dots \mu_n} = S \{ \bar{q} \lambda^a \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_n} q - (\text{следы}) \},$$

$$O_q^{\mu_1 \dots \mu_n} = S \{ \bar{q} \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_n} q - (\text{следы}) \}, \quad (5.4.21)$$

$$O_g^{\mu_1 \dots \mu_n} = S \{ F^{\mu_1 \nu} \mathcal{D}^{\mu_2} \dots \mathcal{D}^{\mu_{n-1}} F^{\mu_n \nu} - (\text{следы}) \},$$

где  $S$  — символ симметризации по индексам  $\mu_1 \dots \mu_n$  и  $\lambda^a$  — матрицы Гелл-Манна для сортовой группы  $SU(3)_F$ ,  $a = 1, \dots, 8$ . Нас в дальнейшем будут интересовать матричные элементы  $\langle N | O_i^{\mu_1 \dots \mu_n} | N \rangle$ , просуммированные по поляризациям нуклона, которые будут строиться только из вектора  $\mathcal{P}^{\mu_i}$  и тензора  $g^{\mu_i \mu_j}$ . Из соображений размерности ясно, что будут встречаться комбинация  $\mathcal{P}^{\mu_1} \dots \mathcal{P}^{\mu_n}$  и, например, комбинация  $g^{\mu_1 \mu_2} \mathcal{P}^{\mu_3} \dots \mathcal{P}^{\mu_n} \mathcal{P}^2$ . Так как  $\mathcal{P}^2 = M^2$ , то последняя комбинация мала по сравнению с симметричной комбинацией  $\mathcal{P}^{\mu_1} \dots \mathcal{P}^{\mu_n}$ , и поэтому главный вклад в сечение глубоко-неупругого рассеяния будут давать симметризованные операторы  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$ . Вычитание следов в операторах  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$  вследствие сказанного не меняет главных членов асимптотики, но использование бесследных операторов является технически более удобным.

Отметим, что операторы  $O_a^{\mu_1 \dots \mu_n}$  преобразуются по октетному представлению группы  $SU(3)_F$ , а оператор  $O_q^{\mu_1 \dots \mu_n}$  (так же, как  $O_g^{\mu_1 \dots \mu_n}$ ) — по синглетному представлению группы  $SU(3)_F$ .

В соответствии с таким выбором базиса коэффициенты  $C_x^{\mu\nu} \equiv C_{i;\mu_1 \dots \mu_n}^{\mu\nu}$  в силу лоренцевой инвариантности имеют вид

$$C_{i;\mu_1 \dots \mu_n}^{\mu\nu}(x) = \left\{ \left( -q_{\mu\nu} + \frac{1}{\square} \partial_\mu \partial_\nu \right) x_{\mu_1} x_{\mu_2} C_i^1(x^2) + \right.$$

$$+ \frac{2}{\square} \left( -g_{\mu\mu_1} + \frac{1}{\square} \partial_\mu \partial_{\mu_1} \right) \left( -g_{\nu\nu_2} + \frac{1}{\square} \partial_{\mu_2} \partial_\nu \right) C_i^2(x^2) \times \\ \times x_{\mu_3} \dots x_{\mu_n}, \quad \square \equiv \partial_\mu \partial^\mu. \quad (5.4.22)$$

Это выражение написано с учетом сохранения тока.

Как мы увидим далее, функции  $C_i^1$  определяют структурную функцию  $F_1$ , а функции  $C_i^2$  — структурную функцию  $F_2$ .

Разъясним, почему в нашей задаче существенны именно выписанные операторы  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$ . Из анализа размерностей видно, что размерность функций  $C_i^1$  и  $C_i^2$  равна  $2d_i + n - dO_n$ , где  $dO_n$  — размерность оператора  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$ . Наибольшей сингулярности  $C_i^{1,2}(x^2)$  соответствует минимальное значение величины  $dO_n$  —  $n$ , называемой твистом. Величину  $n$  можно интерпретировать как спин, соответствующий операторам  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$ , так как последние являются симметричными тензорами со шпурами, равными нулю. Поэтому твист представляет собой разность между размерностью операторов  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$  и их спином. Для приведенных операторов  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$  твист равен двум. Отметим, что хотя операторы  $\bar{q}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}D^{\mu_3} \dots D^{\mu_n}q$  имеют твист, равный единице, тем не менее они дают меньший вклад на световом конусе по сравнению с операторами твиста два, так как  $\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}x_{\mu_1}x_{\mu_2} = x_\mu^2$ . Для всех же других операторов, которые можно построить с помощью матриц  $\gamma$ ,  $\lambda$ , полей  $q$ ,  $F_{\mu\nu}$  и их производных, твист будет больше двух. Например, операторы  $\bar{q}D_{\mu_1} \dots D_{\mu_n}q$  имеют твист три.

Свяжем коэффициенты  $C_i^{1,2}$  в операторном разложении с моментами  $M_{1,2}^{(n)}$  структурных функций. В соответствии с формулами (5.4.10), (5.4.15) нам необходимо рассмотреть матричные элементы операторов  $O_i$  между нуклонными состояниями:

$$2\mathcal{E}V \langle N | O_i^{\mu_1 \dots \mu_n} | N \rangle = -iA_i^{(n)} (\mathcal{P}^{\mu_1} \dots \mathcal{P}^{\mu_n} - \text{следы}), \quad (5.4.23)$$

где  $A_i^{(n)}$  — некоторые константы, связанные со структурой нуклона (предполагается, что матричные элементы усреднены по поляризациям нуклона). Мы учли здесь лоренцеву инвариантность и то, что свертка  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$  по любой паре индексов равна нулю.

Отметим теперь, что

$$\int d^4x e^{iqx} C_i^{1,2}(x^2) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} = \frac{q^{\mu_1} \dots q^{\mu_n}}{(q^2)^n} (-2)^n C_{i,n}^{1,2}(q^2), \quad (5.4.24)$$

где

$$C_{i,n}^{1,2}(q^2) = (iq^2)^n \frac{\partial^n}{\partial (q^2)^n} \int d^4x e^{iqx} C_i^{1,2}(x^2).$$

Мы не выписали здесь члены, содержащие символы Кронекера  $q^2 \delta_{\mu_i \mu_j}$ , так как они не дают вклада при свертке с операторами  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$ .

Используя эти формулы и формулу (5.4.19), получаем

$$i \int d^4x e^{iqx} 2\mathcal{E}V \langle N | T(j_\mu(x) j_\lambda(0)) | N \rangle = T_{\mu\lambda}(\mathcal{P}, q) = \left( -g_{\mu\lambda} + \frac{q_\mu q_\lambda}{q^2} \right) \times \\ \times \sum_{in} A_i^n \frac{1}{x^n} C_{i,n}^1(q^2) - \frac{1}{q^2} \left( \mathcal{P}_\mu - \frac{v}{q^2} q_\mu \right) \left( \mathcal{P}_\lambda - \frac{v}{q^2} q_\lambda \right) \times \\ \times \sum_{in} A_i^n \frac{1}{x^{n-2}} C_{i,n-2}^2(q^2).$$

Отсюда и из (5.4.11) находим

$$T_1(x, q^2) = \sum_{in} A_i^{(n)} \frac{1}{x^n} C_{i,n}^1(q^2), \\ T_2(x, q^2) = -\frac{2M^2}{q^2} \sum_{in} A_i^{(n)} \frac{1}{x^{n-2}} C_{i,n-2}^2(q^2).$$

Согласно теореме Коши и формуле (5.4.14), определяющей величины  $\mathcal{J}_{1,2}^{(m)}$ , получаем

$$\mathcal{J}_1^{(m)} = -\sum_i A_i^{(m)} C_{i,m}^1(q^2), \quad \mathcal{J}_2^{(m)} = \frac{2M^2}{q^2} \sum_i A_i^{(m)} C_{i,m-2}^2(q^2),$$

поэтому моменты структурных функций согласно (5.4.16) будут определяться формулами

$$M_1^{(m)} = -\sum_i A_i^{(m)} C_{i,m}^1(q^2), \quad M_2^{(m)} = -\sum_i A_i^{(m)} C_{i,m-2}^2(q^2). \quad (5.4.25)$$

**5.4.4. Скейлинг в модели свободных кварков.** На простейшем примере свободных кварковых полей разъясим, как применяется операторное разложение Вильсона. Рассмотрим глубоко-неупругое рассеяние электронов на адронах, предполагая, что они состоят из свободных кварков. Это предположение находится в соответствии с асимптотической свободой кварковых полей в случае больших переданных импульсов. Покажем, что в этом случае имеет место скейлинг, о котором мы уже говорили в п. 5.4.1 (см. [35]).

Электромагнитный ток  $j_\mu(x)$  заряженных кварковых полей определяется формулой

$$j^\mu(x) = \bar{e}q(x) \gamma^\mu Q q(x), \quad (5.4.26)$$

где  $Q$  — зарядовая матрица кварков:

$$Q = \frac{1}{2} \lambda^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda^8.$$

Здесь  $\lambda^a$  — сортовые матрицы Гелл-Манна (см. п. 27.1; для простоты предполагается, что существуют три сорта кварков). Как мы уже отмечали, поля  $q(x)$ ,  $\bar{q}(x)$  предполагаются свободными и удовлетворяющими поэтому перестановочным соотношениям

$$\{q(x), \bar{q}(y)\} = -iS(x-y).$$

Вблизи светового конуса функция  $S(x)$  имеет следующую асимптотику:

$$S(x) \approx \frac{1}{2\pi} \gamma^\mu \partial_\mu (\delta(x^2) \text{Sgn } x_0), \quad x^2 \rightarrow 0.$$

Используя соотношения

$$[AB, C]_{\pm} = A[B, C] \mp [A, C]B$$

(знак «+» соответствует антикоммутатору, а «-» — коммутатору), а также формулу (5.4.26), находим

$$\begin{aligned} [j_\mu(x), j_\nu(y)] &= i\bar{q}(y) e^2 Q^2 \gamma_\nu S(y-x) \gamma_\mu q(x) - i\bar{q}(x) e^2 Q^2 \gamma_\mu S(x-y) \times \\ &\times \gamma_\nu q(y) \approx e^2 \{\bar{q}(x) Q^2 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu q(y) - \\ &- \bar{q}(y) Q^2 \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu q(x)\} \partial^\alpha \delta((x-y)^2) \text{Sgn}(x_0 - y_0) \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Нас будет интересовать симметризованный по индексам  $\mu$  и  $\nu$  коммутатор токов при  $y = -x$  (именно он определяет симметричный тензор  $W_{\mu\nu}$ , см. (5.4.6)). Вблизи светового конуса

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \{[j_\mu(x), j_\nu(-x)] + [j_\nu(x), j_\mu(-x)]\} = \\ &= e^2 \left( \bar{q}(x) Q^2 \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu) q(-x) - \bar{q}(-x) Q^2 \times \right. \\ &\left. \times \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu) q(x) \right) \frac{1}{8\pi} \partial^\alpha \delta(x^2) \text{Sgn } x_0. \end{aligned}$$

Раскладывая произведения  $\bar{q}(x) q(-x)$  в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \bar{q}(x) q(-x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} \bar{q}(0) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_1} \dots \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_n} q(0), \\ \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu &= \overset{\rightarrow}{\partial}_\mu - \overset{\leftarrow}{\partial}_\mu \end{aligned}$$

и учитывая, что

$$\frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu) = (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta}) \gamma^\beta,$$

получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \{[j_\mu(x), j_\nu(-x)] + [j_\nu(x), j_\mu(-x)]\} = \\ &= \frac{ie^2}{8\pi} \sum_{(\text{неч.}n)} x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} \frac{1}{n!} O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta}) \times \\ &\times \partial^\alpha \delta(x^2) \text{Sgn } x_0, \end{aligned} \quad (5.4.27)$$

где

$$O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} = i\bar{q}(0) Q^2 \gamma^\beta \overset{\leftrightarrow}{\partial}^{\mu_1} \dots \overset{\leftrightarrow}{\partial}^{\mu_n} q(0).$$



Это выражение и является разложением Вильсона для симметризованного (по индексам  $\mu$  и  $\nu$ ), коммутатора токов свободных кварковых полей.

Сечение глубоко-неупругого рассеяния определяется диагональным матричным элементом коммутатора токов, т. е. диагональным элементом оператора  $O$ :

$$2\mathcal{E}V \frac{1}{2} \sum_{\text{пол.}N} \langle N | O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} | N \rangle = a_{n+1} \cdot 2^n (\mathcal{P}^\beta \mathcal{P}^{\mu_1} \dots \mathcal{P}^{\mu_n} - \text{следы})$$

(эта формула аналогична формуле (5.4.23)). Члены, содержащие свертки  $g_{\mu_i \mu_j}$  по двум индексам, можно не учитывать, так как они умножаются на  $x^{\mu_i} x^{\mu_j}$ ,  $x^2 \rightarrow 0$ . Если бы состояния  $|N\rangle$  были собственными состояниями 4-импульса свободного кваркового поля, то коэффициенты  $a_n$  легко можно было бы найти. В действительности состояния  $|N\rangle$  не являются собственными состояниями 4-импульса свободных полей, поэтому величины  $a_n$  нельзя вычислить без детального знания кварковой структуры нуклона, которая связана с проблемой конфайнмента.

Величину  $W_{\mu\nu}$  (см. (5.4.6)):

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4 y e^{iqy} 2\mathcal{E}V \frac{1}{2} \sum_{\text{пол.}N} \langle N | \left[ j_\mu \left( \frac{y}{2} \right), j_\nu \left( -\frac{y}{2} \right) \right] | N \rangle$$

согласно (5.4.27) можно представить в виде

$$W_{\mu\nu} = \frac{ie^2}{2\pi} \int d^4 y e^{iqy} \sum_{\text{неч.}n} \frac{1}{n!} y_{\mu_1} \dots y_{\mu_n} \frac{1}{2} \sum_{\text{пол.}N} 2\mathcal{E}V \times \\ \times \langle N | \frac{1}{2^n} O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} | N \rangle (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) \partial^\alpha \delta(y^2) \text{Sgn } y_0.$$

В последнюю формулу входят только члены с нечетным  $n$ . Вводя функцию  $f(x)$  с помощью соотношения

$$e^2 \sum_{\text{неч.}n} a_{n+1} \frac{(y\mathcal{P})^n}{n!} = \frac{1}{2i} \int dx e^{ix(y\mathcal{P})} \frac{f(x)}{x}$$

и пренебрегая величиной  $\mathcal{P}^2 = M^2$  по сравнению с  $\mathcal{P}q$ , получаем

$$W_{\mu\nu} = \frac{i}{4\pi} \int d^4 y e^{iqy} \int dx e^{ix(y\mathcal{P})} \frac{f(x)}{x} [\mathcal{P}_\mu (q + x\mathcal{P})_\nu + \mathcal{P}_\nu (q + x\mathcal{P})_\mu - \\ - g_{\mu\nu} \mathcal{P}q] \delta(y^2) \text{Sgn } y_0,$$

или, выполняя интегрирование по  $y$ :

$$W_{\mu\nu} = \frac{f(x)}{2x} \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{f(x)}{\nu} \left( \mathcal{P}_\mu - \frac{\nu}{q^2} q_\mu \right) \left( \mathcal{P}_\nu - \frac{\nu}{q^2} q_\nu \right), \quad (5.4.28)$$

где  $\nu = \mathcal{P}q$ ;  $x = -q^2/2\nu$ .

Видно, что в рассматриваемой модели структурные функции  $F_1(x, q^2)$ ,  $F_2(x, q^2)$  определяются формулами

$$F_1(x, q^2) = \frac{Mf(x)}{2x}, \quad F_2(x, q^2) = Mf(x) \quad (5.4.29)$$

и не зависят от  $q^2$ , причем

$$F_2(x, q^2) = 2xF_1(x, q^2). \quad (5.4.30)$$

Независимость этих функций от  $q^2$  выражает свойство скейлинга в глубоко-неупругом рассеянии. Функция  $f(x)$ , а следовательно и структурные функции  $F_1$  и  $F_2$  будут разными для протона и нейтрона. Чтобы объяснить это, отметим, что (см. (1.8.16))

$$\lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

и, следовательно,

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 4/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix} = \frac{2}{9} I + \frac{1}{3} Q. \quad (5.4.31)$$

Видно, что матрица  $Q^2$  представляет собой суперпозицию единичной матрицы  $I$  и зарядовой матрицы  $Q$ . С точки зрения представлений группы  $SU(3)_F$  часть оператора  $O$ , соответствующая матрице  $I$ , является синглетом, а часть, соответствующая матрице  $Q$ , — суперпозицией компонент октета (для краткости говорят просто об октете или несинглете). Протон состоит из двух  $u$ -кварков и одного  $d$ -кварка, а нейтрон из двух  $d$ -кварков и одного  $u$ -кварка. Поэтому матричные элементы операторов  $O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n}$  между протонными  $|p\rangle$  и нейтронными  $|n\rangle$  состояниями связаны соотношением

$$\langle p | O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} | p \rangle = \frac{3}{2} \langle n | O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} | n \rangle$$

(для протона  $Q^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1$ , а для нейтрона  $Q^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$ ). Таким образом, в модели свободных кварков

$$\bar{F}_i = \frac{3}{2} F_i, \quad i = 1, 2.$$

Далее мы изучим отклонение от скейлинга, обусловленное взаимодействием кварков и глюонов.

**5.4.5. Применение метода ренормализационной группы.** Мы видели, что в модели свободных кварков структурные функции обладают свойством скейлинга. Теперь перейдем к исследованию отклонения от скейлинга, обусловленного взаимодействием кварков с глюонами. В п. 5.4.3 мы выразили моменты структурных функций через функции  $S_{i,n}^{1,2}(q^2)$  (см. (5.4.26)). Задача заключается в том, чтобы найти  $S_{i,n}^{1,2}(q^2)$  при больших  $q^2$  с учетом взаимодействия кварков с глюонами. С этой целью можно использовать метод ренормализационной группы [34]. Напомним предварительно, что в п. 4.8.1 мы рассматривали функции Грина  $G$ , которые представляли собой вакуумные средние от произведения полевых операторов  $q, \bar{q}, A$ , и получали для этих функций уравнения ренормализационной группы.

Но уравнения ренормализационной группы можно применять также в случае, когда функции Грина кроме операторов полей содержат также некоторые локальные операторы  $O(x)$ , которые в свою очередь строятся из полевых операторов и их производных. Считая, что перенормированный оператор  $\underline{O}(x)$  связан с неперенормированным оператором  $O(x)$  соотношением

$$O(x) = Z_0 \underline{O}(x), \quad (5.4.32)$$

можем написать следующее соотношение между перенормированной  $\underline{G}_{nm0}$  и неперенормированной  $G_{nm0}$  функциями Грина:

$$G_{nm0} = z_3^{n/2} z_q^{m/2} Z_0 \underline{G}_{nm0}, \quad (5.4.33)$$

где  $z_3^{1/2}$  представляет собой константу перенормировки глюонных полей, число которых в функции Грина равно  $n$ , а  $z_q^{1/2}$  — константу перенормировки кварковых полей, число которых в функции Грина равно  $m$ .

Для «ампутированных» функций Грина (т. е. функций Грина, не содержащих внешних линий), будем обозначать их через  $\Gamma_{nm0}$  выполняется соотношение

$$\Gamma_{nm0} = Z_\Gamma \underline{\Gamma}_{nm0}, \quad Z_\Gamma = z_3^{-n/2} z^{-m/2} z_0, \quad (5.4.34)$$

так как «ампутированные» функции Грина  $\Gamma$  и исходные функции Грина  $G$  связаны между собой формулой

$$G_{nm0} = \Gamma_{nm0} (G_g)^m (G_g)^n,$$

где

$$G_g = z_3 \underline{G}_g, \quad G_q = z_q \underline{G}_q.$$

Поступая так же, как в § 4.8, легко получить уравнение ренормализационной группы для перенормированных функций Грина  $\underline{\Gamma}_{nm0}$ . Считая неперенормированную функцию Грина функцией неперенормированной константы связи  $g$  и импульса обрезания  $\mathcal{M}$ , находим

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma_{nm0}(\mathcal{M}, g) = 0 \quad (5.4.35)$$

( $\mu$  — точка нормировки, см. § 4.6). Перенормированная функция Грина  $\underline{\Gamma}_{nm0}$  зависит от перенормированного заряда  $\underline{g}$  и импульса нормировки  $\underline{\mu}$ ,  $\underline{\Gamma}_{nm0} = \underline{\Gamma}_{nm0}(\underline{g}, \underline{\mu})$ , но не зависит от  $\mathcal{M}$ . Поэтому из (5.4.35), (5.4.34) следует, что

$$\left\{ \underline{\mu} \frac{\partial}{\partial \underline{\mu}} + \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} - n\gamma_g - m\gamma_q + \gamma_0 \right\} \underline{\Gamma}_{nm0} = 0, \quad (5.4.36)$$

где

$$\beta(\underline{g}) = \underline{\mu} \left( \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\mu}} \right)_{g, \mathcal{M}} \quad (5.4.37)$$

— функция перенормированной константы связи, введенная в п. 4.8.1, и

$$\gamma_0 = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_0 |_{g, \mathcal{M}}. \quad (5.4.38)$$

Эта величина называется аномальной размерностью оператора  $O$ . В частности,  $\gamma_g$  и  $\gamma_q$  — аномальные размерности глюонного и кваркового полей:

$$\gamma_g = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln z_3 |_{g, \mathcal{M}}, \quad \gamma_q = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln z_q |_{g, \mathcal{M}}, \quad (5.4.39)$$

так как перенормированные и неперенормированные глюонные и кварковые поля согласно (3.6.55) связаны между собой соотношениями

$$A_\mu^a(x) = \sqrt{z_3} \underline{A}_\mu^a(x), \quad q(x) = \sqrt{z_q} \underline{q}(x).$$

Обратимся к разложению Вильсона и получим уравнения ренормализационной группы для  $c$ -числовых функций  $C_x$ . Из формулы (5.4.19) следует разложение Вильсона для неперенормированных матричных элементов

$$\langle N | T(\underline{j}\underline{j}) | N \rangle = \sum_x C_x \langle N | \underline{O}_x | N \rangle.$$

Учитывая связь между перенормированными и неперенормированными операторами, находим

$$z_j^2 \langle N | T(\underline{j}\underline{j}) | N \rangle = \sum_x C_x Z_{O_x} \langle N | \underline{O}_x | N \rangle,$$

где  $Z_j$  и  $Z_{O_x}$  — константы перенормировки операторов  $j$  и  $O_x$  и  $\langle N | T(\underline{j}\underline{j}) | N \rangle$ ,  $\langle N | \underline{O}_x | N \rangle$  — перенормированные матричные элементы. Эту формулу можно записать в виде

$$\langle N | T(\underline{j}\underline{j}) | N \rangle = \sum_x \underline{C}_x \langle N | \underline{O}_x | N \rangle,$$

где

$$\underline{C}_x = Z_j^2 Z_{O_x}^{-1} C_x. \quad (5.4.40)$$

Так как величины  $C_x$  зависят от  $M$  и  $g$ , а величины  $\underline{C}_x$  от  $\mu$  и  $\underline{g}$ , то для величин  $\underline{C}_x$  справедливо следующее уравнение ренормализационной группы:

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} + 2\gamma_j - \gamma_{O_x} \right) \underline{C}_x = 0,$$

где  $\gamma_j$  — аномальная размерность оператора тока,  $\gamma_j = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_j$ . Эта величина ввиду сохранения тока равна нулю. Действительно, как показано в п. 5.3.3, сильное взаимодействие само по себе (без электромагнитного взаимодействия) не перенормирует электрического заряда. Вследствие закона сохранения 4-тока  $j_\mu$  сильное взаимодействие не перенормирует также и оператор 4-тока  $j_\mu$ . Поэтому окончательное

уравнение ренормализационной группы для  $\underline{C}_x$  имеет вид

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} - \gamma_{O_x}\right) \underline{C}_x = 0. \quad (5.4.41)$$

Зная асимптотику функции  $\beta(\underline{g})$  в области малых  $\underline{g}$  и используя свойство асимптотической свободы, с помощью этого уравнения можно найти асимптотику функции  $\underline{C}_x(q^2)$  в области больших  $q^2$ . При этом нужно знать аномальную размерность оператора  $O_x$ , которая определяется константой перенормировки  $Z_{O_x}$  оператора  $O_x$ .

Формулы (5.4.32), (5.4.41) относятся к случаю, когда в разложении Вильсона отсутствует вырождение, т. е.  $O_x = Z_{O_x} \underline{O}_x$ , где индексом  $x = a, q, g$  обозначены базисные операторы (см. формулы (5.4.21)). Иными словами, эта формула справедлива только в случае одного оператора  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n} \equiv O_{ni}$  ( $n$  — фиксировано) с квантовыми числами произведения токов (токи преобразуются по октетному представлению группы  $SU(3)_F$ , произведение токов разлагается на сумму синглета и октета). Этим свойством обладает несинглетный оператор  $O_{na}$  (см. (5.4.21)), который преобразуется по октетному представлению группы  $SU(3)_F$ .

В общем случае может быть несколько операторов  $O_{ni}$  с квантовыми числами произведения токов. В этом случае формулу  $O_x = Z_{O_x} \underline{O}_x$  следует заменить формулой  $O_x = \sum_x Z_{O_x} \underline{O}_x$  [34, 11]. Операторы  $O_{nq}$  и  $O_{ng}$  (см. (5.4.21)) преобразуются по синглетному представлению сортовой группы, и поэтому при перенормировке эти операторы могут смешиваться, т. е.

$$O_i = \sum_{j=q,g} Z_{ij} \underline{O}_j, \quad O_i \equiv O_{ni}, \quad i, j = q, g.$$

Поэтому в общем случае для всех  $i$  можно записать

$$O_i = \sum_j Z_{ij} \underline{O}_j, \quad i, j = a, q, g. \quad (5.4.42)$$

При этом  $Z_{aq} = Z_{ag} = Z_{qa} = Z_{ga} = 0$  ( $Z_{ij}$  — элементы матрицы констант перенормировки).

Учитывая эту формулу, из разложения Вильсона (5.4.19) получаем

$$\langle N | T(\underline{j}\underline{j}) | N \rangle = \sum_{ni} \underline{C}_{ni} \langle N | \underline{O}_{ni} | N \rangle,$$

где согласно (5.4.42)

$$\underline{C}_{ni} = \sum_j C_{nj} Z_{ji}. \quad (5.4.43)$$

Отсюда следует уравнение ренормализационной группы для  $\underline{C}_{ni}$ :

$$\sum_j \left\{ \delta_{ij} \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} \right) - \gamma_{ji} \right\} \underline{C}_{nj} = 0, \quad (5.4.44)$$

где

$$\gamma_{li} = \mu \left( Z^{-1} \frac{\partial Z}{\partial \mu} \right)_{li}. \quad (5.4.45)$$

Эти величины образуют матрицу аномальных размерностей. Если ввести столбец базисных векторов  $\begin{pmatrix} O_a \\ O_q \\ O_g \end{pmatrix}$  (см. (5.4.21)), то матрицу  $Z_{li}$  можно представить в виде

$$(Z_{li}) = \begin{pmatrix} Z_{aa'} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{qq} & Z_{qg} \\ 0 & Z_{gq} & Z_{gg} \end{pmatrix}, \quad Z_{aa'} = Z_0 \delta_{aa'}. \quad (5.4.46)$$

Аналогичную структуру имеет матрица  $\gamma_{li}$ . Матрица  $Z_{aa'}$  соответствует невырожденному случаю (в этом случае мы можем пользоваться уравнением (5.4.41)), поскольку соответствующая матрица кратна единичной  $\delta_{aa'}$ ; матрица  $\begin{pmatrix} Z_{qq} & Z_{qg} \\ Z_{gq} & Z_{gg} \end{pmatrix}$  описывает смешивание операторов  $O_j$  и  $O_g$  при перенормировке.

**5.4.6. Вычисление аномальных размерностей.** Перейдем к вычислению аномальных размерностей  $\gamma_{li}$ . Для этого нам необходимо найти матрицу констант перенормировки  $Z_{li}$ , которые определяются соотношением (5.4.42). Рассмотрим подробно несинглетный случай. Для этого введем функцию Грина

$$G_{q\bar{q}0}(x-z, y-z) = \langle 0 | T(q(x) O(z) \bar{q}(y) | 0) \quad (5.4.47)$$

и соответствующую ей ампутированную функцию Грина  $\Gamma_{q\bar{q}0}(x-z, y-z)$ . Для нахождения константы перенормировки  $Z_0$  оператора  $O_a$  введем фурье-компоненту  $G$ :

$$G(p) = G_{q\bar{q}0}(p, p), \quad (5.4.48)$$

где

$$G_{q\bar{q}0}(p_1, p_2) = \int d^4x \int d^4y e^{i(x-z)p_1} e^{-i(y-z)p_2} G_{q\bar{q}}^-(x-z, y-z).$$

Так как функция  $G_{q\bar{q}0}^-(x, y, z)$  зависит только от двух разностей  $x-z$ ,  $y-z$ , то величина  $G_{q\bar{q}0}^-(p_1, p_2)$  не зависит от  $z$ .

В формуле (5.4.47) операторы относятся к гейзенберговскому представлению. При построении теории возмущений удобно перейти к операторам в представлении взаимодействия. В этом случае функцию  $G_{q\bar{q}0}^-$  можно представить в виде

$$G_{q\bar{q}0}^-(x-z, y-z) = \frac{1}{S_{\text{vac}}} \langle 0 | T \{ \underline{q}(x) \underline{O}(z) \underline{\bar{q}}(y) S \} | 0 \rangle, \quad (5.4.49)$$

где  $S$  — матрица рассеяния (см. (4.5.10)), причем при нахождении среднего по вакууму свободных полей нужно учитывать только связанные диаграммы (знак  $\sim$  означает, что операторы рассматриваются в представлении взаимодействия).

Для вычисления констант перенормировки достаточно считать, что операторы  $O_a^{\mu_1 \dots \mu_m}(z)$  сворачиваются с тензором  $\Delta_{\mu_1} \dots \Delta_{\mu_m}$ , где  $\Delta_{\mu} \Delta^{\mu} = 0$ . Поэтому далее вместо оператора  $O_a^{\mu_1 \dots \mu_m}$  будем рассматривать операторы [34, 29]

$$O_a \equiv O_a^{\mu_1 \dots \mu_m} \Delta_{\mu_1} \dots \Delta_{\mu_m}, \quad \Delta_{\mu} \Delta^{\mu} = 0. \quad (5.4.50)$$

При нахождении величин (5.4.48) можно использовать диаграммную технику. При этом в импульсном представлении величины  $\Delta^{\mu} \partial_{\mu}$  заменяются на  $i \Delta^{\mu} p_{\mu}$ . Из явного вида операторов  $O_a$  следует, что кроме обычных вершин появляются «одиночные вершины», связанные с оператором  $O$ . Именно с операторами  $O_a$  и  $O_{\psi}$  связаны кварковые вершины, которым в нулевом порядке теории возмущений должны быть сопоставлены величины  $\lambda^a \hat{\Delta} (p\Delta)^{m-1}$  (рис. 52, а) и  $\hat{\Delta} (p\Delta)^{m-1}$  (рис. 52, б), а оператору  $O_g$  в нулевом приближении согласно (5.4.21) должна быть сопоставлена величина (рис. 52, в)

$$(p\Delta)^{m-2} \{ \Delta_{\mu} \Delta_{\nu} p^2 - (p\Delta) \Delta_{\mu} p_{\nu} - (p\Delta) \Delta_{\nu} p_{\mu} + g_{\mu\nu} (p\Delta)^2 \}. \quad (5.4.51)$$

В первом порядке теории возмущений вследствие того, что в ковариантные производные входит слагаемое, содержащее  $g A_{\mu}^a$ , возникают дополнительные вершины. В случае оператора  $O_a$  эта вершина показана на рис. 53. Ей соответствует величина

$$g \lambda_F^i \lambda_c^a \Delta_{\mu} \hat{\Delta} \sum_{i=0}^{m-2} (p_1 \Delta)^i (p_2 \Delta)^{m-2-i}. \quad (5.4.52)$$

Перейдем к вычислению константы перенормировки несинглетной функции Грина.

Диаграммы, соответствующие этой функции Грина (5.4.47), показаны на рис. 54. Диаграмме на рис. 54, а соответствует приближение  $g^0$ , а диаграммам на рис. 54, б —  $g$  приближение  $g^2$ . В случае ампутированных функций Грина выражения, соответствующие внешним линиям, следует опустить. Ампутированную функцию Грина, соответствующую несинглетному оператору  $O_a$ , будем обозначать  $\Gamma_m(p)$ . В приближении  $g^0$

$$\Gamma_m^0(p) = \hat{\Delta} (p\Delta)^{m-1} \lambda_F^a. \quad (5.4.53)$$

В приближении  $g^2$

$$\Gamma_m^2(p) = \mathcal{J}_1 + 2\mathcal{J}_2, \quad (5.4.54)$$

где

$$\mathcal{J}_1 = -ig^2 \frac{n^2 - 1}{2n} \lambda_F^a \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_{\rho} \hat{k} \hat{\Delta} \hat{k} \gamma^{\rho}}{k^4 (p-k)^2} (k\Delta)^{m-1},$$

$$\mathcal{J}_2 = ig^2 \frac{n^2 - 1}{2n} \lambda_F^a \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\hat{\Delta} \hat{k} \hat{\Delta}}{k^2 (p-k)^2} \sum_{j=0}^{n-2} (k\Delta)^j (p\Delta)^{m-2-j}$$

(вычисления проводятся в фейнмановской калибровке,  $\xi = 1$ ;  $n$  — число цветов кварков; диаграммы на рис. 54, в, г дают одинаковый вклад). Вычислим вначале интеграл  $\mathcal{J}_1$ . Учтывая, что

$$\gamma_\rho \hat{k} \hat{\Delta} \hat{k} \gamma^\rho = (\epsilon - 2) [2 (k\Delta) \hat{k} - k^2 \hat{\Delta}]$$

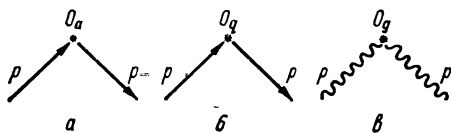


Рис. 52

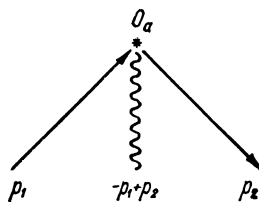


Рис. 53

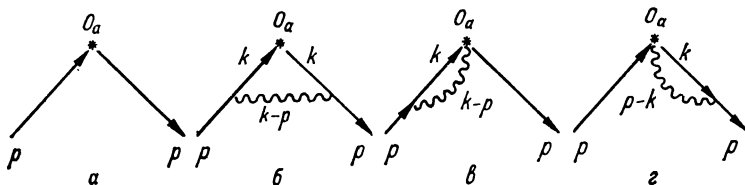


Рис. 54

( $d = 4 - \epsilon$ ) и используя формулу (3.6.13), находим

$$\mathcal{J}_1 = -2ig^2 (\epsilon - 2) \frac{n^2 - 1}{2n} \int \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx (1-x) \times \\ \times \frac{2 (k\Delta) \hat{k} - k^2 \hat{\Delta}}{[\kappa^2 + x(1-x)p^2]^3} (k\Delta)^{m-1} \lambda^a,$$

где  $\kappa = k - xp$ . Так как  $\Delta^2 = 0$ , то под знаком интеграла мы можем заменить  $(k\Delta)^n$  на

$$(k\Delta)^m \equiv (\kappa + xp, \Delta)^m \rightarrow x^m (p\Delta)^m + m (\kappa\Delta) (p\Delta)^{m-1} x^{m-1}. \quad (5.4.55)$$

Величину  $\hat{k} (k\Delta)^m$  под знаком интеграла в  $\mathcal{J}_1$  можно, очевидно, заменить на

$$\hat{k} (k\Delta)^m \rightarrow \frac{m}{d} \kappa^2 \hat{\Delta} x^{m-1} (p\Delta)^{m-1} + x^{m+1} \hat{p} (p\Delta)^m$$

(под знаком интеграла мы заменили также  $\kappa_\mu \kappa_\nu$  на  $\frac{1}{d} \kappa^2 g_{\mu\nu}$ ). Второе слагаемое в этой формуле приводит к сходящемуся при  $\epsilon \rightarrow 0$  выражению и поэтому не дает вклада в аномальную размерность. Аналогично величину  $k^2 \hat{\Delta} (k\Delta)^{m-1}$  можно заменить на

$$k^2 \hat{\Delta} (k\Delta)^{m-1} \rightarrow \kappa^2 x^{m-1} \hat{\Delta} (p\Delta)^{m-1} \left( 1 + 2 \frac{m-1}{d} \right).$$



Таким образом, получаем

$$\int \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} \frac{2(k\Delta)\hat{k} - k^2\hat{\Delta}}{[\kappa^2 + x(1-x)\rho^2]^3} (k\Delta)^{m-1} = \hat{\Delta} (\rho\Delta)^{m-1} x^{m-1} \left( \frac{2}{d} - 1 \right) \times \\ \times \int \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} \frac{\kappa^2}{[\kappa^2 + x(1-x)\rho^2]^3}$$

(мы отбрасываем слагаемые, которые сходятся при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). В методе размерной регуляризации (см. (3.6.19))

$$\int \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} \frac{(\kappa^2)^r}{(\kappa^2 + R^2)^m} = i \left( -\frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(r + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(m - r - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma(m)} (R^2)^{r-m+\frac{d}{2}}. \quad (5.4.56)$$

Поэтому

$$\mathcal{J}_1 = \lambda^a \frac{2-d}{d} (\varepsilon - 2) \left( -\frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{d}{2}} g^2 \frac{n^2 - 1}{2n} \hat{\Delta} (\rho\Delta)^{m-1} (\rho^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) B\left(m - \frac{\varepsilon}{2}, 2 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad (5.4.57)$$

где мы учли, что

$$\int_0^1 dx x^{m-\frac{\varepsilon}{2}-1} (1-x)^{1-\frac{\varepsilon}{2}} = B\left(m - \frac{\varepsilon}{2}, 2 - \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (5.4.58)$$

При  $\varepsilon \ll 1$

$$\mathcal{J}_1 = \lambda^a \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{n^2 - 1}{n} \hat{\Delta} (\rho\Delta)^{m-1} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{(\rho^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}}}{m(m+1)}. \quad (5.4.59)$$

Перейдем к вычислению интеграла  $\mathcal{J}_2$ . Отмечая, что  $\hat{\Delta} k \hat{\Delta} = 2(k\Delta)\hat{\Delta}$ , находим

$$\mathcal{J}_2 = 2ig^2 \frac{n^2 - 1}{2n} \hat{\Delta} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(\rho - k)^2} \sum_{j=0}^{m-2} (k\Delta)^{j+1} (\rho\Delta)^{m-2-j} \lambda^a.$$

Используя далее формулы (3.6.13), (5.4.55), получаем

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(\rho - k)^2} \sum_{j=0}^{m-2} (k\Delta)^{j+1} (\rho\Delta)^{m-2-j} = \\ = (\rho\Delta)^{m-1} \sum_{j=0}^{m-2} \int_0^1 dx x^{j+1} \int \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\kappa^2 + x(1-x)\rho^2]^2}.$$

Поэтому, учитывая формулы (5.4.56), (5.4.58), при  $\varepsilon \ll 1$  находим

$$\mathcal{J}_2 = -2g^2 \frac{n^2 - 1}{2n} \hat{\Delta} (\rho\Delta)^{m-1} \left( \sum_{j=2}^m \frac{1}{j} \right) (\rho^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{1}{16\pi^2} \lambda^a. \quad (5.4.60)$$

Таким образом, учитывая, что в методе размерной регуляризации величина  $g^2$  заменяется на  $g^2\mu^{4-d}$ , имеем

$$\Gamma_m(p) = \left\{ 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{n^2 - 1}{n} \left( \frac{p^2}{\mu^2} \right)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times \left( 2 \sum_{j=2}^{m-1} \frac{1}{j} - \frac{1}{m(m+1)} \right) \right\} \hat{\Delta}(p\Delta)^{m-1} \lambda^a. \quad (5.4.61)$$

Эту формулу в терминах параметра обрезания можно (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) переписать в виде

$$\Gamma_m(p) = \left\{ 1 + a \ln \frac{\mu^2}{\mathcal{M}^2} + a \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right\} \hat{\Delta}(p\Delta)^{m-1} \lambda^a,$$

где

$$\ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2} = \frac{2}{\varepsilon}, \quad a = \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{n^2 - 1}{n} \left( 2 \sum_{j=2}^m \frac{1}{j} - \frac{1}{m(m+1)} \right). \quad (5.4.62)$$

Таким образом,

$$Z_\Gamma = 1 + a \ln \frac{\mu^2}{\mathcal{M}^2}, \quad (5.4.63)$$

следовательно, аномальная размерность ампутированной функции Грина (см. (5.4.38)) определяется формулой

$$\gamma_\Gamma = \frac{8}{3} \frac{g^2}{16\pi^2} \left\{ -\frac{2}{m(m+1)} + 4 \sum_{j=2}^m \frac{1}{j} \right\}, \quad n = 3. \quad (5.4.64)$$

Согласно формуле (5.4.34) аномальная размерность оператора  $O_a$  связана с аномальной размерностью  $\gamma_\Gamma$  формулой

$$\gamma_0 = \gamma_\Gamma + 2\gamma_a,$$

где (см. (4.8.18))

$$\gamma_a = \frac{4}{3} \frac{g^2}{16\pi^2}.$$

Поэтому

$$\gamma_{0n} = \frac{8}{3} \frac{g^2}{16\pi^2} \left\{ 1 - \frac{2}{m(m+1)} + 4 \sum_{j=2}^m \frac{1}{j} \right\}. \quad (5.4.65)$$

Мы не будем приводить здесь громоздких вычислений аномальных размерностей для синглетного случая, которые связаны со смешиванием синглетных операторов  $O_{qm}$  и  $O_{gm}$ , а приведем лишь окончательные результаты для  $SU(3)_c$ ,  $SU(n_f)_F$ -групп [34, 11, 36]:

$$\gamma_m^{qq} = \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{2}{m(m+1)} + 4 \sum_{j=2}^m \frac{1}{j} \right),$$

$$\gamma_m^{gq} = -\frac{g^2}{8\pi^2} \frac{4(m^2 + m + 2)}{m(m+1)(m+2)} \frac{1}{2} n_f,$$

$$\gamma_m^{gg} = -\frac{g^2}{3\pi^2} \frac{m^2 + m + 2}{m(m^2 - 1)}, \quad (5.4.66)$$

$$\gamma_m^{gg} = \frac{g^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{2}{3} n_f + 3 \left( \frac{1}{3} - \frac{4}{m(m-1)} - \frac{4}{(m+1)(m+2)} + 4 \sum_{i=2}^m \frac{1}{i} \right) \right\}.$$

**5.4.7. Нарушение скейлинга.** Используем полученные значения аномальных размерностей, чтобы с помощью уравнений (5.4.41), (5.4.44) ренормализационной группы определить функции  $C_{i,m} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, g \right)$ .

Решение уравнения (5.4.41) для несинглетной функции  $C_{a,m}^{(1,2)}$  ( $a = 1, \dots, 8$ ) имеет вид

$$C_{a,m}^{(1,2)} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, g \right) = e^{-\int_0^t dt' \gamma_{0,m}(\bar{g}(t', g))} C_{a,m}^{(1,2)}(1, \bar{g}(t, g)), \quad (5.4.67)$$

где

$$\bar{g}^2(t, g) = g^2 / \left( 1 + b \frac{g^2 t}{8\pi^2} \right), \quad t = \frac{1}{2} \ln \frac{-q^2}{\mu^2}.$$

Видно, что для определения асимптотики функций  $C_{a,m}^{(1,2)} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, g \right)$  в области больших  $q^2$  достаточно знать аномальные размерности при малых  $g^2$ . Используя формулы (5.4.65), (5.4.67), легко получить, что

$$C_{a,m}^{(1,2)} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, g \right) \sim \left( \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right)^{-\alpha_m}, \quad (5.4.68)$$

где

$$\alpha_m = \frac{2}{3b} \left( 1 - \frac{2}{m(m+1)} + 4 \sum_{i=2}^m \frac{1}{i} \right), \quad b = 11 - \frac{2}{3} n_f.$$

В синглетном случае решение уравнения (5.4.44) имеет вид

$$C_{i,m}^{(1,2)} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, g \right) = \sum_i \left\{ T \exp \left( - \int_0^t dt' \gamma_m(\bar{g}(t', g)) \right) \right\}_{ii} C_{i,m}^{(1,2)}(1, \bar{g}(t, g)),$$

где  $T$  — операция хронологического упорядочения по переменной  $t$ . Отсюда, используя матрицу аномальных размерностей (5.4.66), найденную в области малых  $g$ , можно найти функции  $C_{i,m}^{(1,2)}$  в области больших  $q^2$ :

$$C_{i,m}^{(1,2)} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, g \right) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \sum_i \left\{ \exp \left( - \frac{\ln t}{b} \bar{\gamma}_m \right) \right\}_{ii} C_{i,m}^{(1,2)}(1, 0),$$

где

$$\frac{g^2}{8\pi^2} (\bar{\gamma}_m)_{ij} \equiv (\gamma_m(g))_{ij}, \quad i, j = q, g.$$

Эту формулу можно представить в виде

$$C_{i,m}^{(1,2)} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, g \right) \sim A \left( \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right)^{-\frac{1}{\lambda} \frac{1}{m^{2b}}} + B \left( \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right)^{-\frac{2}{\lambda} \frac{1}{m^{2b}}}, \quad (5.6.69)$$

где  $\lambda_n^1$  и  $\lambda_n^2$  — собственные значения матрицы аномальных размерностей  $(\gamma_n)_{ij}$ .

Зная асимптотики функций  $C_{i,m}^{(1,2)}$  и используя формулы (5.4.25), можно найти асимптотики моментов структурных функций в области больших переданных импульсов.

Мы вводили структурные функции  $F_{1,2}$  и моменты структурных функций  $M_{1,2}^{(m)}$  для нуклонов, не оговаривая, о каком состоянии нуклона, протонном или нейтронном, идет речь. Интересуясь же конкретным состоянием нуклона, этим величинам следует приписать индекс  $N$  ( $F_{1,2}^N$ ,  $M_{1,2}^{(m)N}$ , где  $N = p, n$ ). Эти величины можно связать с синглетными и несинглетными моментами  $M_i^{s(m)}$ ,  $M_i^{ns(m)}$  ( $i = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} M_1^{s(m)} &= \sum_{i=q,g} A_i^{(m)} C_{i,m}^{(1)}(q^2), & M_2^{s(m)} &= \sum_{i=qg} A_i^{(m)} C_{i,m-2}^{(2)}(q^2), \\ M_1^{ns(m)} &= A_a^{(m)} C_{am}^{(1)}(q^2), & M_2^{ns(m)} &= A_a^{(m)} C_{a,m-2}^{(2)}(q^2). \end{aligned} \quad (5.4.70)$$

Действительно, согласно (5.4.31)

$$Q^2 = \frac{2}{9} I + \frac{1}{3} Q.$$

Поэтому для моментов нуклонных структурных функций имеем

$$M_i^{(m)N} = \frac{2}{9} \cdot 3M_i^{s(m)} + \frac{1}{3} \langle N | Q | N \rangle M_i^{ns(m)}$$

(нуклон состоит из трех кварков). Следовательно, учитывая, что  $\langle p | Q | p \rangle = 1$ ,  $\langle n | Q | n \rangle = 0$ , находим

$$M_i^{(m)p} = \frac{1}{3} (2M_i^{s(m)} + M_i^{ns(m)}), \quad M_i^{(m)n} = \frac{2}{3} M_i^{s(m)}. \quad (5.4.71)$$

Формулы (5.4.71) вместе с формулами (5.4.68), (5.4.69) определяют зависимость от  $q^2$  синглетных и несинглетных моментов структурных функций, а тем самым — моментов структурных функций протона и нейтрона.

Как видно из формулы (5.4.68), несинглетные моменты асимптотически стремятся к нулю при  $q^2 \rightarrow \infty$ , так как  $\alpha_m > 0$ . С ростом  $m$  убывание моментов усиливается вследствие того, что [34]

$$\alpha_m \approx 0,296 \ln m - 0,051$$

при  $m > 1$  и  $n_f = 3$ .

Обратим внимание на то, что при  $m = 2$  в синглетном случае матрица аномальных размерностей имеет собственное значение, равное нулю. Это связано с тем, что из операторов  $O_q$  и  $O_g$  при  $m = 2$  можно построить тензор энергии — импульса кваркового и глюонного полей. Такой тензор представляет собой сохраняющуюся величину и, следовательно, его аномальная размерность равна нулю. В данном случае ( $m = 2$ ) вклад нулевого собственного значения в области больших

$q^2$  оказывается доминирующим, и поэтому зависимость от  $q^2$  второго момента ( $m = 2$ ) более слабая по сравнению с моментами при  $m \neq 2$ .

Мы рассмотрели нарушение скейлинга, которое определяется логарифмическими членами  $\ln \frac{-q^2}{\mu^2}$ . Однако отклонение от скейлинга мо-

жет носить и степенной характер:  $\left(\frac{\mu^2}{-q^2}\right)^{\frac{\tau}{2}-1}$ ,  $\frac{\tau}{2} - 1 \geq 0$ , где коэффициент  $\tau$  представляет собой твист локальных операторов, входящих в разложение Вильсона. Мы учитывали только локальные операторы с твистом два. Учет локальных операторов с высшими твистами приводит к степенному нарушению скейлинга. Отметим, что кроме степенных членов  $\left(\frac{\mu^2}{-q^2}\right)^{\frac{\tau}{2}-1}$  появляются также члены типа  $\left(\frac{\mu^2}{-q^2}\right)^{\frac{\tau}{2}-1} \left(\ln \frac{-q^2}{\mu^2}\right)^\nu$ , где коэффициент  $\nu$  можно определить с помощью метода ренормализационной группы. Эти вопросы изучались в работах [37—40]. Глубоко-неупругие процессы на основе анализа инфракрасных особенностей амплитуд рассеяния исследовались в обзоре [41].

**ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ  
ЭЛЕКТРОСЛАБОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
И ВЕЛИКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ**

**§ 6.1. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ И ЛЕПТОННЫЕ  
И СКАЛЯРНЫЕ МУЛЬТИПЛЕТЫ**

**6.1.1. Четырехфермионное слабое взаимодействие.** В предыдущих параграфах мы изучали электромагнитное и сильное взаимодействия элементарных частиц. Кроме этих и гравитационного взаимодействия существует еще одно важное взаимодействие — слабое взаимодействие. Оно ответственно за различные физические процессы:  $\beta$ -распад ядер, многочисленные распады элементарных частиц, нейтринные реакции.

Слабому взаимодействию подвержены как адроны, как и лептоны (электрон, мюон,  $\tau$ -лептон и соответствующие им нейтрино). Радиус действия слабого взаимодействия составляет по порядку величины  $\frac{\hbar}{m_w c} \approx 10^{-16}$  см ( $m_w$  — масса  $W$ -бозона). Если сечение, обусловленное сильным взаимодействием, составляет  $10^{-28}$  см<sup>2</sup>, то сечение, обусловленное слабым взаимодействием, составляет  $10^{-32} \left(\frac{E}{m_w c^2}\right)^2$  см<sup>2</sup> ( $E$  — энергия частиц в системе центра инерции).

Характерной особенностью слабого взаимодействия, отличающей его от сильного и электромагнитного взаимодействий, является то, что оно нарушает целый ряд дискретных законов сохранения: сохранение пространственной четности  $\mathcal{P}$ , зарядовой четности  $c$ , странности  $s$  и т. д.

Первоначальная теория слабого взаимодействия, созданная Ферми около 50 лет назад, строилась по аналогии с электродинамикой. Аналогия состояла в следующем. Так же, как фотон, излучается или поглощается атомом, хотя и не содержится в нем, так и нейтрино и электрон могут испускаться и поглощаться ядром, не содержась в нем. Различие между теорией электромагнитного взаимодействия и первоначальными теориями слабого взаимодействия (Ферми [1]; Гелл-Манна, Фейнмана [2], Сударшана, Маршака [3], Сакураи [4]) заключается в том, что в первом случае происходит локальное взаимодействие между электромагнитным током и электромагнитным полем, во втором — локальное взаимодействие между так называемыми слабыми токами. Если для простоты ограничиться слабым взаимодействием заряженных лептонов и соответствующих им нейтрино, то слабый ток  $\mathcal{J}_V^{(w)}$  будет определяться формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_V^{(w)} &= \frac{1}{2} (\bar{e}\gamma_\nu (1 + \gamma^5) \nu_e + \bar{\mu}\gamma_\nu (1 + \gamma^5) \nu_\mu + \bar{\tau}\gamma_\nu (1 + \gamma^5) \nu_\tau) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_l \bar{l}\gamma_\nu (1 + \gamma^5) \nu_l, \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

где  $l \equiv e, \mu, \tau$  — биспиноры электрона, мюона и  $\tau$ -лептона, а  $\nu_e \equiv \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  — биспиноры электронного, мюонного и  $\tau$ -лептонного нейтрино. Лагранжиан слабого локального взаимодействия этих токов имеет вид

$$\mathcal{L}^{(w)} = 2\sqrt{2}G\mathcal{J}_\lambda^{(w)+}\mathcal{J}^{(w)\lambda}, \quad (6.1.2)$$

где  $G$  — универсальная константа слабого взаимодействия (константа Ферми),  $G = 1,02 \cdot 10^{-5}/m_p^2$  ( $m_p$  — масса протона). Обратим внимание на различие структуры слабого тока  $\mathcal{J}_\lambda^{(w)}$  и электромагнитного тока  $\mathcal{J}_{em}^\lambda = e\bar{\gamma}^\lambda e$ . Последнее выражение представляет собой 4-вектор, а выражение  $\mathcal{J}_\lambda^{(w)}$  — разность 4-вектора  $\frac{1}{2} \sum_l \bar{l}\gamma_\lambda \nu_l$  и аксиального вектора  $\frac{1}{2} \sum_l \bar{l}\gamma^5 \gamma_\lambda \nu_l$ . Поэтому о взаимодействии заряженных токов  $\mathcal{J}_\lambda^{(w)}$  говорят как об универсальном  $(V - A)$ -взаимодействии (электромагнитный ток является нейтральным, так как при действии на вектор состояния он не изменяет заряд системы, в то время как ток  $\mathcal{J}_\lambda^{(w)}$  изменяет заряд системы на единицу).

Чтобы описать процесс  $\beta$ -распада нейтрона в теории 4-фермионного взаимодействия, к току  $\mathcal{J}_\lambda^{(w)}$  добавляется слагаемое  $\frac{1}{2} \bar{p}\gamma_\lambda (1 + \gamma^5)n$ :

$$\mathcal{J}_\lambda^{(w)} = \frac{1}{2} \sum_l \bar{l}\gamma_\lambda (1 + \gamma^5) \nu_l + \frac{1}{2} \bar{p}\gamma_\lambda (1 + \gamma^5) n,$$

где  $p$  и  $n$  — биспиноры протона и нейтрона. Обратим внимание на то, что все слагаемые, связанные с лептонами и нуклонами, входят в ток с одинаковым коэффициентом. В этом состоит свойство универсальности 4-фермионного слабого взаимодействия — все слабые процессы определяются в этой теории одной константой  $G^{\beta 1}$ .

Приведем значения масс лептонов: масса электрона  $m_e = 0,511$  МэВ, масса мюона  $m_\mu = 105,7$  МэВ, масса  $\tau$ -лептона  $m_\tau = 1785$  МэВ; будем считать далее, что нейтрино является безмассовым (эксперимент дает следующие верхние и нижние границы для масс нейтрино:  $m_{\nu_e} < 46$  эВ,  $m_{\nu_\mu} < 0,50$  МэВ,  $m_{\nu_\tau} < 164$  МэВ [10];  $m_{\nu_e} > 14$  эВ [11]).

Биспиноры  $\psi_L$  и  $\psi_R$ , определяемые формулами

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi, \quad (6.1.3)$$

<sup>31</sup> Лагранжиан (6.1.2) (без члена  $\bar{\tau}\gamma_\lambda(1 + \gamma^5)\nu_\tau$  в токе  $\mathcal{J}_\lambda^{(w)}$ ) был установлен в работах [2—4]. В этих работах показано, что токи являются вполне определенной суперпозицией векторного и аксиально-векторного токов (это было подтверждено рядом экспериментов). В них же установлено, что нейтрино, принимающее участие только в слабом взаимодействии, всегда является полностью поляризованной левоспиральной частицей, а антинейтрино — правоспиральной частицей. Эти свойства нейтрино получили законченную формулировку в теории двухкомпонентного нейтрино Ландау — Ли-Янга — Салама [5—7]. Сохранение слабого векторного тока было установлено в работах [8, 2] (см. также [9]).

называются левыми и правыми биспинорами. Ток  $\mathcal{J}_\lambda^{(w)}$  (см. (6.1.1)) можно, очевидно, представить в виде

$$\mathcal{J}_\lambda^{(w)} = \sum_l \bar{l}_L \gamma_\lambda \nu_{lL}. \quad (6.1.4)$$

Таким образом, слабые токи содержат только левые биспиноры. Как мы видели в § 3.6, биспинор  $\psi_L$  при  $m = 0$  (а следовательно, и при энергиях, значительно превосходящих массу) описывает частицу с левой спиральностью (спин частицы направлен против импульса).

Так как заряженный ток представляет собой суперпозицию вектора и аксиального вектора, то слабое взаимодействие не инвариантно относительно пространственной инверсии  $\mathcal{P}$  и операции зарядового сопряжения  $C$ . Однако оно инвариантно относительно операции комбинации четности  $C\mathcal{P}$  [12].

Электромагнитное взаимодействие между заряженными частицами осуществляется с помощью обмена фотоном. Далее мы увидим, что слабое взаимодействие также осуществляется обменом некоторыми частицами — заряженными  $W^\pm$ -бозонами и нейтральным  $Z$ -бозоном. Масса этих частиц очень велика (порядка 100 ГэВ [10]). В области энергий, малых по сравнению с  $m_w, m_z$ , процесс взаимодействия происходит так, как если бы обмена промежуточной частицей не было, а происходило лишь локальное 4-фермионное взаимодействие. Обмен заряженными  $W^\pm$ -бозонами в низкоэнергетической области приводит к лагранжиану (6.1.2), в который входят заряженные токи. Обмен нейтральным  $z$ -бозоном в низкоэнергетической области также приводит к 4-фермионному лагранжиану, аналогичному (6.1.2), в который, однако, входят не заряженные, а так называемые нейтральные токи; в последние вместо комбинаций биспиноров  $\bar{l}\Gamma\nu_l$ , входящих в заряженный ток, входят комбинации биспиноров  $\bar{l}\Gamma l, \bar{\nu}_l\Gamma\nu_l$  ( $\Gamma = \gamma_\lambda, \gamma^5\gamma_\lambda$ ). Поскольку константа связи в лагранжиане (6.1.2) имеет размерность  $M^{-2}$ , то эта теория окзывается неперенормируемой (см. § 3.6).

Использование концепции калибровочных полей, которые вводятся при расширении симметрии с глобального уровня до локального, позволяет последовательно ввести в теорию промежуточные  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозоны и построить при этом перенормируемую теорию слабого взаимодействия, которая, однако, является не только теорией слабого взаимодействия, но и теорией электромагнитного взаимодействия, т. е. представляет собой теорию единого электрослабого взаимодействия [13—15]<sup>32</sup>. В этой теории предсказан целый ряд новых явлений — существование слабых нейтральных токов, новых векторных промежуточных частиц  $W^\pm$  и  $Z$  и т. д., которые подтвердились экспериментально. В 1973 г. были открыты нейтральные токи [20], а в 1983 г. — промежуточные векторные бозоны  $W^\pm$  и  $Z$  и измерены их массы [21, 22].

**6.1.2. Лагранжиан безмассовых лептонов и векторных калибровочных полей.** Как мы видели, в слабом взаимодействии участвуют

<sup>32</sup> Другими ранними работами по объединению слабого и электромагнитного взаимодействия являются [16—19].



только левые лептонные поля. В единой теории электрослабого взаимодействия левые заряженные лептоны и соответствующие им нейтрино объединяются в дублеты

$$L_l = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{lL} \\ l_L \end{pmatrix}, \quad (6.1.5)$$

где  $\nu_{lL} = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\nu_l$ ;  $l_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)l$  ( $\nu_l$  и  $l$  — биспиноры Дирака для лептонов  $l = e, \mu, \tau$ ). В этой теории исходят из лагранжианов, не содержащих масс частиц (как лептонов, так и калибровочных полей). Массы частиц «возникают» в результате введения скалярного поля, с которым взаимодействуют лептоны и калибровочные поля. При этом важную роль играет механизм спонтанного нарушения симметрии (см. п. 6.2.1).

Лагранжиан безмассовых левых лептонов определяется формулой

$$\mathcal{L}_0(L) = i \sum_l \bar{L}_l \gamma^\mu \partial_\mu L_l.$$

Правые заряженные лептоны образуют синглет  $R_l = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \times \times l$  ( $l = e, \mu, \tau$ ; мы предполагаем, что правых нейтрино не существует). Свободный лагранжиан правых заряженных безмассовых лептонов имеет вид

$$\mathcal{L}_0(R) = i \sum_l \bar{R}_l \gamma^\mu \partial_\mu R_l.$$

Таким образом, лагранжиан свободных безмассовых лептонов определяется формулой

$$\mathcal{L}_0(L, R) = i \sum_l \{ \bar{L}_l \gamma^\mu \partial_\mu L_l + \bar{R}_l \gamma^\mu \partial_\mu R_l \}. \quad (6.1.6)$$

Отметим, что это выражение не вещественно. Вещественный лагранжиан определяется формулой  $\frac{1}{2}(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0^*)$  (см. п. 2.5.1). Однако оба выражения отличаются на полную дивергенцию, поэтому формально можно пользоваться приведенным выражениям для  $\mathcal{L}_0$ .

Лагранжиан  $\mathcal{L}_0$  инвариантен относительно преобразований

$$R_l \rightarrow R'_l = R_l, \quad L_l \rightarrow L'_l = e^{i g \frac{\omega \tau}{2}} L_l, \quad (6.1.7)$$

где  $\tau_i$  — матрицы Паули;  $\omega_i$  — произвольный постоянный вектор и  $g$  — некоторая постоянная, которая далее играет роль константы взаимодействия. Эти преобразования образуют группу  $SU(2)$ , которую будем называть группой лептонного изоспина и обозначать  $SU(2)_w$ . Подчеркнем, что данная симметрия имеет место только для безмассовых лептонов. При этом левые заряженные лептоны и соответствующие им нейтрино входят в теорию на равных правах так же, как протон и нейтрон входят в теорию сильного взаимодействия. Поэтому можно говорить об изотопических дублетах левых заряженных лептонов и

соответствующих им нейтрино и ввести изотопический спин левых лептонов, равный  $1/2$  (заряженные левые лептоны имеют проекцию изоспина  $-1/2$ , а соответствующие им нейтрино — проекцию  $1/2$ ). Правые заряженные лептоны представляют собой изотопические синглеты.

Лагранжиан (6.1.6) инвариантен также по отношению к фазовым преобразованиям

$$R_i \rightarrow R'_i = e^{i \frac{\omega}{2} Y_R g'} R_i, \quad L_i \rightarrow L'_i = e^{i \frac{\omega}{2} Y_L g'} L_i. \quad (6.1.8)$$

Далее мы убедимся, что величина  $g'$ , как и  $g$ , имеет смысл безразмерной константы связи, а величины  $Y_R, Y_L$  могут интерпретироваться как гиперзаряды правых и левых лептонов. Они имеют значения  $Y_R = -2, Y_L = -1$  (см. п. 6.2.3).

Преобразование (6.1.8) образует группу, которая называется группой лептонного гиперзаряда и обозначается  $U(1)_Y$ . Таким образом, лагранжиан свободных безмассовых лептонов инвариантен относительно  $SU(2)_\omega \times U(1)_Y$ -преобразований. Эта симметрия является глобальной. Предположим, что имеет место и локальная инвариантность, в которой параметры  $\omega_i$  и  $\omega$  являются функциями координат и времени. В соответствии с результатами п. 1.9.1 для этого необходимо ввести триплет  $W_\mu^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) и синглет  $B_\mu$  калибровочных векторных полей. Чтобы ввести взаимодействие этих полей с лептонными полями, в лагранжиане (6.1.6) обычные производные  $\partial_\mu$  нужно заменить ковариантными  $D_\mu$ :

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\tau}{2} \mathbf{W}_\mu - ig' \frac{1}{2} Y_L B_\mu, \quad (6.1.9)$$

если  $\partial_\mu$  действует на  $L$ , и

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig' \frac{1}{2} Y_R B_\mu, \quad (6.1.10)$$

если  $\partial_\mu$  действует на  $R$ .

Лагранжиан самого калибровочного поля согласно (1.9.28) имеет вид

$$\mathcal{L}(W, B) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (6.1.11)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g(W_\mu \times W_\nu)^a, \quad (W_\mu \times W_\nu)^a = \\ &= \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

(напомним, что лагранжиан в такой форме приводит к уравнениям второго порядка для потенциалов  $W_\mu^a, B_\mu$ ). Таким образом, лагранжиан безмассовых лептонов и калибровочных полей равен

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(L, R, W, B) + \mathcal{L}(W, B), \quad (6.1.13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(L, R, W, B) = & i \sum_l \bar{L}_l \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau^a W_\mu^a - \frac{i}{2} g' Y_L B_\mu \right) L_l + \\ & + i \sum_l \bar{R}_l \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g' Y_R B_\mu \right) R_l. \end{aligned}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно локальных преобразований группы  $SU(2)_w \times U(1)_Y$  для лептонных (6.1.7), (6.1.8) и калибровочных (1.9.11) полей. Для бесконечно малых  $\omega$  и  $\omega^a$  эти преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} \delta W_\mu^a &= W_\mu^{a'} - W_\mu^a = \partial_\mu \omega^a + g \epsilon^{abc} W_\mu^b \omega^c \equiv \mathcal{D}_\mu^{ab} \omega^b, \\ \delta B_\mu &= B_\mu' - B_\mu = \partial_\mu \omega, \quad \delta L_l = L_l' - L_l = \left( ig \frac{\omega^a \tau^a}{2} + ig' Y_L \frac{\omega}{2} \right) L_l, \\ \delta R_l &= R_l' - R_l = ig' \frac{\omega}{2} Y_R R_l. \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Кроме того, лагранжиан (6.1.13) построен таким образом, что он инвариантен относительно глобальных фазовых преобразований лептонных полей

$$L_l \rightarrow L_l' = e^{i\alpha_l} L_l, \quad R_l \rightarrow R_l' = e^{i\alpha_l} R_l, \quad (6.1.15)$$

где  $\alpha_l$  — постоянные фазы, связанные с каждым сортом лептонов.

**6.1.3. Введение хиггсовского скалярного поля.** Введенные калибровочные поля  $W_\mu^a$ ,  $B_\mu$  так же, как лептонные поля, предполагались безмассовыми. В действительности заряженные лептоны обладают массой<sup>33</sup>. Мы хотим, чтобы с четырьмя калибровочными полями  $W_\mu^a$ ,  $B_\mu$  были связаны заряженные  $W^\pm$ -бозоны, нейтральный  $Z$ -бозон и фотон.  $W^\pm$ -и  $Z$ -бозоны обладают конечной массой. Поэтому нашу теорию следует модифицировать так, чтобы в ней калибровочные поля могли иметь конечную массу. Для этого необходимо ввести добавочные поля, взаимодействие с которыми вследствие механизма спонтанного нарушения симметрии приводит к возникновению масс частиц, связанных с калибровочными полями<sup>34</sup>.

В простейшем случае должно быть введено добавочное скалярное поле, так называемое скалярное поле Хиггса [33, 34], точнее, должен быть введен изотопический дублет заряженных скалярных полей, аналогичный изотопическому дублету левых лептонов (см. также [35, 36]).

Здесь мы рассмотрим лагранжиан хиггсовского поля с учетом его взаимодействия с калибровочными и лептонными полями. Механизм

<sup>33</sup> Нейтральные лептоны — нейтрино — в общем случае также могут иметь ненулевые массы [23—25].

<sup>34</sup> Концепция спонтанного нарушения симметрии в статистической физике была развита Н. Н. Боголюбовым [26]. Он же разработал метод квазисредних, позволяющий единым способом рассматривать системы самой различной природы со спонтанно нарушенной симметрией. В релятивистской физике системы со спонтанно нарушенной симметрией впервые исследовались Голдстоуном и Намбу [27—29] (см. также [30—32]).

спонтанного нарушения симметрии и возникновения масс у калибровочных полей и лептонов будет рассмотрен далее.

Лагранжиан изотопического дублета

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{\uparrow} \\ \varphi_{\downarrow} \end{pmatrix} \quad (6.1.16)$$

скалярных полей будем записывать в виде

$$\mathcal{L}(\varphi) = \partial^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - \lambda \left( \varphi^\dagger \varphi - \frac{1}{2} f^2 \right)^2, \quad (6.1.17)$$

где  $\lambda$  и  $f$  — некоторые константы. Этот лагранжиан инвариантен по отношению к глобальным преобразованиям группы  $SU(2)_w \times U(1)_Y$ :

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{\frac{i}{2} \tau^a \omega^a} \varphi, \quad \varphi \rightarrow \varphi' = e^{\frac{i}{2} g' \omega} \varphi \quad (6.1.18)$$

(так как величина  $g'$  входила в формулы (6.1.8), (6.1.19) с множителями  $Y_L$  и  $Y_R$ , то она фактически не была определена; в последней формуле мы считаем  $Y_\varphi = 1$  и этим фиксируем величину  $g'$ ). Чтобы лагранжиан (6.1.17) был инвариантен и по отношению к локальным преобразованиям группы  $SU(2)_w \times U(1)_Y$ , следует производные  $\partial_\mu$  в выражении для  $\mathcal{L}(\varphi)$ , действующие на  $\varphi$ , заменить на  $D_\mu$ :

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau^a W_\mu^a - \frac{i}{2} g' B_\mu. \quad (6.1.19)$$

В результате приходим к следующему выражению для лагранжиана хиггсовского поля с учетом его взаимодействия с калибровочными полями:

$$\mathcal{L}(\varphi, W, B) = \left[ \left( \partial^\mu - \frac{i}{2} g \tau^a W^{a\mu} - \frac{i}{2} g' B^\mu \right) \varphi \right]^\dagger \left[ \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau^a W_\mu^a - \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \varphi \right] - \lambda \left( \varphi^\dagger \varphi - \frac{1}{2} f^2 \right)^2. \quad (6.1.20)$$

Этот лагранжиан будет приводить к возникновению масс у частиц калибровочного поля.

Чтобы возникали массы у заряженных лептонов в результате взаимодействия со скалярным полем, мы введем еще лагранжиан  $\mathcal{L}(L, R, \varphi)$  взаимодействия скалярных и лептонных полей:

$$\mathcal{L}(L, R, \varphi) = -V\sqrt{2} f^{-1} \sum_l m_l \{ (\bar{L}_l \varphi) R_l + \bar{R}_l (\varphi^\dagger L_l) \}, \quad (6.1.21)$$

где  $m_l$  — некоторые постоянные, которые, как мы увидим далее, будут совпадать с массами лептонов.

Этот лагранжиан инвариантен по отношению и к глобальной, и к локальной группе  $SU(2)_w$ . Чтобы он был инвариантен по отношению к группе  $U(1)_Y$ , согласно (6.1.18), (6.1.8) необходимо выполнение следующего соотношения:

$$1 - Y_L + Y_R = 0. \quad (6.1.22)$$

Лагранжиан (6.1.21) также инвариантен относительно глобальных фазовых преобразований лептонных полей (6.1.15) (при этом считается, что скалярные поля  $\varphi$  не преобразуются).

Полный лагранжиан калибровочных, лептонных и скалярных полей определяется суммой

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(W, B) + \mathcal{L}(L, R, W, B) + \mathcal{L}(\varphi, W, B) + \mathcal{L}(L, R, \varphi). \quad (6.1.23)$$

Этот лагранжиан инвариантен по отношению к преобразованиям локальной группы  $SU(2)_\omega \times U(1)_\gamma$ . В случае бесконечно малых  $\omega^a$ ,  $\omega$  эти преобразования определяются формулами (6.1.14) для калибровочных и лептонных полей и формулой

$$\delta\varphi = \varphi' - \varphi = \left( g \frac{1}{2} \omega^a \tau^a + g' \frac{1}{2} \omega' \right) \varphi \quad (6.1.24)$$

в случае скалярных полей.

Лагранжиан (6.1.23) лежит в основе единой теории слабого и электромагнитного взаимодействий. Следует, однако, иметь ввиду, что в то время как первые два слагаемых в  $\mathcal{L}$  непосредственно связаны со свойствами симметрии  $SU(2)_\omega \times U(1)_\gamma$ , вторые два слагаемых в  $\mathcal{L}$ , связанные с введением скалярного поля, являются более модельными [37, 38].

Отметим, что лагранжиан самодействия скалярного поля мы выбрали пропорциональным четвертой степени поля с тем, чтобы константа  $\lambda$  была безразмерной и, следовательно, квантовая теория могла быть перенормируемой (см. § 3.6).

## § 6.2. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОСЛАБОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

**6.2.1. Спонтанное нарушение симметрии и возникновение масс частиц.** Рассмотрим вначале случай классических полей<sup>35</sup>. Выбирая определенные калибровочные параметры  $\omega^a$ , компоненту скалярного дублета  $\varphi_\uparrow$  можно обратить в нуль, а компоненту  $\varphi_\downarrow$  сделать вещественной:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \varphi^* \equiv \varphi_\downarrow.$$

В этом случае лагранжиан свободного скалярного поля с учетом его самодействия имеет вид

$$\mathcal{L}(\varphi) = \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \lambda \left( \varphi^2 - \frac{1}{2} f^2 \right)^2.$$

Ему соответствует уравнение движения поля

$$\partial^\mu \partial_\mu \varphi + 2\lambda \left( \varphi^2 - \frac{1}{2} f^2 \right) \varphi = 0. \quad (6.2.1)$$

<sup>35</sup> Изложение классической теории электрослабого взаимодействия см. также в [38—41].

Это уравнение имеет три независящих от пространственно-временных координат решения:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_0 = \pm \frac{f}{\sqrt{2}}. \quad (6.2.2)$$

Чтобы разъяснить различие между этими решениями, введем потенциальную энергию  $U(\varphi)$  для пространственно-однородного поля:

$$U(\varphi) = \lambda \left( \varphi^2 - \frac{1}{2} f^2 \right)^2.$$

Легко видеть, что экстремальные точки  $U(\varphi)$  совпадают с (6.2.2), причем для  $\lambda < 0$  решение  $\varphi_0 = 0$  соответствует минимуму, а решения  $\varphi_0 = \pm f/\sqrt{2}$  максимуму; для  $\lambda > 0$ , напротив, решение  $\varphi_0 = 0$  соответствует максимуму, а  $\varphi_0 = \pm f/\sqrt{2}$  — минимуму (рис. 55). Со-

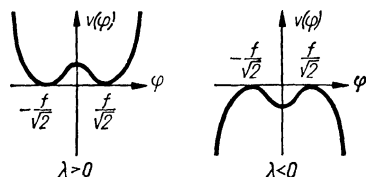


Рис. 55

гласно уравнению поля (6.2.1) величина  $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0$  в случае малых  $\tilde{\varphi}$  удовлетворяет уравнению

$$\partial^\mu \partial_\mu \tilde{\varphi} - \lambda f^2 \tilde{\varphi} = 0$$

в случае  $\varphi_0 = 0$  и уравнению

$$\partial^\mu \partial_\mu \tilde{\varphi} + 2\lambda f^2 \tilde{\varphi} = 0$$

в случае  $\varphi_0 = \pm f/\sqrt{2}$ . Отсюда видно, что при  $\lambda < 0$  колебания поля над вакуумом  $\varphi_0 = 0$  являются устойчивыми, причем масса частиц, связанных с этими колебаниями, вещественна и равна  $f\sqrt{-\lambda}$ . Напротив, колебания поля над состоянием  $\varphi_0 = \pm f/\sqrt{2}$  являются неустойчивыми и соответствуют мнимой массе. При  $\lambda > 0$  колебания над состояниями вакуума  $\varphi_0 = \pm f/\sqrt{2}$  (соответствующими минимуму  $U(\varphi)$ ) являются устойчивыми, причем масса частиц, связанных с этими колебаниями, вещественна и равна  $f\sqrt{2\lambda}$ . Колебания же поля над состоянием  $\varphi_0 = 0$  неустойчивы и соответствуют мнимой массе. Обратим внимание на то, что при  $\lambda > 0$  состояние вакуума является вырожденным — мы имеем два вакуума:  $\varphi_0 = f/\sqrt{2}$  и  $\varphi_0 = -f/\sqrt{2}$ . В теории электрослабого взаимодействия предполагается, что  $\lambda > 0$  и в качестве состояния вакуума выбирается  $\varphi_0 = f/\sqrt{2}$ . Таким образом, производится вполне определенный выбор состояния вакуума; о таком выборе говорят как о спонтанном нарушении симметрии.

Отметим, что если в случае  $\lambda < 0$  вакуумное решение  $\varphi_0 = 0$  было инвариантно по отношению к преобразованиям группы  $SU(2)_w$ , то при  $\lambda < 0$  вакуумное решение  $\varphi_0 = f/\sqrt{2}$  такой инвариантностью не обладает, так как соответствующий этому решению дублет  $\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$

изменяется при преобразованиях группы (6.1.24). Таким образом, при  $\lambda < 0$  лагранжиан и вакуумное состояние обладают одинаковой симметрией, в то время как при  $\lambda > 0$  симметрия лагранжиана больше, чем симметрия вакуумного состояния. Это свойство характерно для спонтанного нарушения симметрии.

Имея в виду использование лагранжиана (6.1.17) в квантовой теории, мы не будем полагать величины  $\varphi_{\uparrow}$  и  $\text{Im } \varphi_{\downarrow}$  равными нулю. Поэтому дублет  $\varphi$  запишем в виде

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi^2 + i\varphi^1 \\ \varphi^0 - i\varphi^3 \end{pmatrix}, \quad \varphi^0 = f + \chi, \quad (6.2.3)$$

где поля  $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \chi$  являются вещественными и описывают процессы электрослабого взаимодействия, происходящего над вакуумным состоянием хиггсовского поля ( $\varphi^{a(+)}(x)|0\rangle = 0, a = 1, 2, 3, \chi^{(+)}(x)|0\rangle = 0$ , см. далее).

Перейдем в лагранжиане от переменных  $\varphi_{\uparrow}, \varphi_{\downarrow}$  к переменным  $\varphi^a, \chi$ . Подставим вначале выражение (6.2.3) для дублета  $\varphi$  в лагранжиан  $\mathcal{L}(\varphi, W, B)$  (см. (6.1.20)). При этом возникнут квадратичные и кубические члены, а также члены четвертого порядка по калибровочным и скалярным полям  $\varphi^a, \chi$ . Мы здесь приведем лишь часть лагранжиана  $\mathcal{L}(\varphi, W, B)$ , содержащую калибровочные поля в степенях, не выше второй:

$$\mathcal{L}_0(\varphi, W, B) = \mathcal{L}(\varphi) + \mathcal{L}_{0M}(W, B) + \mathcal{L}'_0(\varphi, W), \quad (6.2.4)$$

где  $\mathcal{L}(\varphi)$  — лагранжиан переопределенных скалярных полей:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi) = & \partial_{\mu}\Phi^{+}\partial^{\mu}\Phi + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\chi\partial^{\mu}\chi + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi^a\partial^{\mu}\varphi^a - \lambda f^2\chi^2 - \\ & - 2\lambda f\chi\left(\Phi^{+}\Phi + \frac{1}{2}(\chi^2 + \varphi^2)\right) - \lambda\left(\Phi^{+}\Phi + \frac{1}{2}(\chi^2 + \varphi^2)\right)^2, \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

$\mathcal{L}_{0M}(W, B)$  — часть свободного лагранжиана калибровочных полей, возникающая вследствие взаимодействия хиггсовских и калибровочных полей и механизма спонтанного нарушения симметрии:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0M}(W, B) = & \frac{1}{4}f^2g^2W^{\mu}W_{\mu}^{+} + \frac{1}{8}f^2g^2W_{\mu}^3W^{3\mu} + \\ & + \frac{1}{8}f^2g'^2B_{\mu}B^{\mu} - \frac{1}{4}f^2gg'W_{\mu}^3B^{\mu}, \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

и лагранжиан  $\mathcal{L}'_0(\varphi, W)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0(\varphi, W) = & -\frac{1}{2}fgW^{\mu}\partial_{\mu}\Phi^{+} - \frac{1}{2}fgW^{+\mu}\partial_{\mu}\Phi - \frac{1}{2}f(gW_{\mu}^3 - g'B_{\mu}) \times \\ & \times \partial_{\mu}\varphi^3 \equiv \frac{1}{2}fg\Phi^{+}\partial_{\mu}W^{\mu} + \frac{1}{2}fg\Phi\partial_{\mu}W^{+\mu} + \frac{1}{2}f\varphi^3\partial^{\mu}(gW_{\mu}^3 - g'B_{\mu}) - \\ & - \partial_{\mu}\left\{\frac{1}{2}fg\Phi^{+}W^{\mu} + \frac{1}{2}fg\Phi W^{+\mu} + \frac{1}{2}f(gW^3_{\mu} - g'B^{\mu})\varphi^3\right\}. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$\Phi = \frac{\varphi^1 + i\varphi^2}{\sqrt{2}}, \quad W_\mu = \frac{W_\mu^1 + iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (6.2.8)$$

(знак «+» означает операцию комплексного сопряжения). Лагранжиан  $\mathcal{L}'_0$  обращается в нуль в классической теории, если выбрана рассмотренная выше калибровка  $\varphi^a = 0$  ( $a = 1, 2, 3$ ).

Произведем диагонализацию лагранжиана  $\mathcal{L}_{0M}(W, B)$ . С этой целью вместо полей  $B_\mu, W_\mu^3$  введем поля  $Z_\mu, A_\mu$ :

$$Z_\mu = W_\mu^3 \cos \theta_W - B_\mu \sin \theta_W, \quad A_\mu = W_\mu^3 \sin \theta_W + B_\mu \cos \theta_W \quad (6.2.9)$$

и, следовательно,

$$W_\mu^3 = Z_\mu \cos \theta_W + A_\mu \sin \theta_W, \quad B_\mu = A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W,$$

где  $\theta_W$  — некоторая константа. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0M}(W, B) = & \frac{1}{4} f^2 g^2 W_\mu^+ W^\mu + \frac{1}{8} f^2 g^2 \cos^2 \theta_W \left(1 + \frac{g'}{g} \operatorname{tg} \theta_W\right) Z_\mu Z^\mu + \\ & + \frac{1}{8} f^2 g^2 \cos \theta_W \left(\operatorname{tg} \theta_W - \frac{g'}{g}\right) A_\mu A^\mu + \\ & + \frac{1}{4} f^2 g^2 \cos^2 \theta_W \left[\left(1 - \frac{g'^2}{g^2}\right) \operatorname{tg} \theta_W - \frac{g'}{g} (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_W)\right] A_\mu Z^\mu. \end{aligned}$$

Чтобы в этом выражении не возникали перекрестные слагаемые  $A_\mu Z^\mu$ , выберем угол  $\theta_W$  согласно условию

$$\operatorname{tg} \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (6.2.10)$$

(величина  $\theta_W$  называется углом Вайнберга). При этом в лагранжиане  $\mathcal{L}_{0M}$  обращаются в нуль слагаемые, пропорциональные  $A_\mu A^\mu$  и  $A_\mu Z^\mu$ , и  $\mathcal{L}_{0M}$  приобретает вид

$$\mathcal{L}_{0M}(W, B) = m_W^2 W_\mu^+ W^\mu + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu, \quad (6.2.11)$$

где

$$m_W = \frac{1}{2} fg; \quad m_Z = \frac{1}{2} f \sqrt{g^2 + g'^2}. \quad (6.2.12)$$

Учитывая формулы (6.1.12), (6.1.13), (6.2.4), можно записать полный свободный (квадратичный) лагранжиан всех полей

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 = \tilde{\mathcal{L}}_0(W^\pm, Z, A) + \mathcal{L}_0(L, R) + \tilde{\mathcal{L}}_0(\varphi) + \mathcal{L}'_0, \quad (6.2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_0(W^\pm, Z, A) = & -\frac{1}{2} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^+ - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \\ & + m_W^2 W_\mu^+ W^\mu + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu; \end{aligned} \quad (6.2.14)$$



$$\tilde{\mathcal{L}}_0(\varphi) = \partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^3 \partial^\mu \varphi^3 - \lambda f^2 \chi^2;$$

$$\mathcal{L}_0(L, R) = \sum_l \bar{l} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_l) l + i \sum_l \bar{\nu}_{lL} \gamma^\mu \partial_\mu \nu_{lL}$$

и

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu, \quad Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Из выражений для  $\mathcal{L}_0(W^\pm, Z)$  и  $\mathcal{L}_0(L, R)$  видно, что величины  $m_W$ ,  $m_Z$  и  $m_l$  представляют собой массы  $W^-$ ,  $Z$ - и  $l$ -частиц. Видим, что эти массы появляются в результате взаимодействия калибровочных и лептонных полей со скалярным полем вследствие механизма спонтанного нарушения симметрии вакуума. Масса частиц, связанных с векторным полем  $A_\mu$ , равна нулю. Поэтому поле  $A_\mu$  следует интерпретировать как электромагнитное поле.

**6.2.2. Фиксация калибровки.** Мы видели (см. § 4.4), при квантовании калибровочных полей возникает трудность, связанная с тем, что импульсы, канонически сопряженные полям  $W_0^a$ ,  $B_0$ , обращаются в нуль. Чтобы устранить эту трудность, к лагранжиану электромагнитного поля (и к лагранжиану неабелева калибровочного поля) мы добавляли слагаемое типа  $\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2$ . Это слагаемое фиксировало калибровку электромагнитного поля и приводило к тому, что импульс, сопряженный полю  $A_0$ , был отличен от нуля. Аналогичная ситуация возникает и в теории электрослабого взаимодействия. Поэтому и в данной теории мы должны были бы к лагранжиану (6.1.23) добавить слагаемое типа  $\frac{1}{\xi} \partial^\mu W_\mu^a \partial^\nu W_\nu^a$ , фиксирующее калибровку полей  $W_\mu^a$ .

При выборе лагранжиана, фиксирующего калибровку, следует однако иметь в виду следующее. В соответствии с идеологией о спонтанном нарушении симметрии в лагранжиане (6.1.23) мы перешли к новым переменным  $\Phi$ ,  $\Phi^+$ ,  $\chi$ ,  $\varphi^3$ , в результате чего в свободном лагранжиане возникло интерференционное слагаемое  $\mathcal{L}'_0(\varphi, W)$ . Это слагаемое, как мы уже говорили, обращалось в нуль в классической теории при выборе калибровки  $\varphi_\uparrow = \varphi^3 = 0$ . Если исходить из лагранжиана (6.1.23), в квантовой теории такой выбор невозможен<sup>36</sup>. Поэтому в качестве лагранжиана, фиксирующего калибровку полей  $W_\mu^a$ ,  $B_\mu$ , выберем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi(W, B, \varphi) = & -\frac{1}{\xi} (\partial^\mu W_\mu + \xi m_W \Phi) (\partial^\nu W_\nu^+ + \xi m_W \Phi^+) - \\ & -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu Z_\mu + \xi m_Z \varphi^3)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu)^2, \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

<sup>36</sup> В квантовой теории выбор калибровки связан с выбором лагранжиана. Поля  $\varphi_\uparrow$  и  $\text{Im } \varphi_\downarrow$  в квантовой теории также могут быть обращены в нуль, однако при этом лагранжиан следует брать в форме, отличной от используемой нами.

где  $\xi$  — произвольный вещественный параметр. В терминах исходных полей  $W_\mu^a$ ,  $B_\mu$  этот лагранжиан согласно (6.2.9), (6.2.8) можно записать в виде

$$\mathcal{L}_\xi(W, B, \varphi) = -\frac{1}{2\xi} F^a F^a - \frac{1}{2\xi} F^2, \quad (6.2.16)$$

где

$$F^a = \partial^\mu W_\mu^a + \xi m_W \varphi^a, \quad F = \partial^\mu B_\mu - \xi m_W \frac{g'}{g} \varphi^3$$

(этот лагранжиан соответствует обобщенной лоренцевой калибровке [42], которая называется калибровкой  $m'$  Хуффа). Объясним причину выбора данного вида лагранжиана, фиксирующего калибровку [43, 44]. Прежде всего этот лагранжиан приводит к отличному от нуля импульсу, сопряженному полям  $W_0^a$  и  $B_0$ . Лагранжиан  $\mathcal{L}_\xi$  содержит слагаемые трех типов, которые пропорциональны  $\xi^{-1}$ ,  $\xi^0$ ,  $\xi$ . Слагаемые, не содержащие  $\xi$ , согласно (6.2.15) сокращаются в суммарном лагранжиане с  $\mathcal{L}'_0(\varphi, W)$  (слагаемое в  $\mathcal{L}'_0$ , представляющее собой 4-дивергенцию, можно, очевидно, отбросить). При  $f = 0$  лагранжиан  $\mathcal{L}_\xi$  переходит в стандартный лагранжиан, фиксирующий калибровку:

$$\mathcal{L}_\xi|_{f=0} = -\frac{1}{\xi} \partial^\mu W_\mu \partial^\nu W_\nu^\dagger - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu Z_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2$$

(при  $f = 0$  массы  $m_W$  и  $m_Z$  обращаются в нуль, см. (6.2.12)). Наконец, лагранжиан (6.2.15) приводит к пропэгаторам векторных массивных частиц, которые при  $\xi < \infty$  будут убывать в области больших импульсов (в обычной теории векторных массивных полей (см. § 2.3) пропэгаторы не убывают в области больших импульсов). Это делает более очевидным свойство перенормируемости теории.

Лагранжиан  $\mathcal{L}_\xi$  квадратичен по полям. Поэтому, введя его в суммарный лагранжиан, мы модифицируем члены, квадратичные по полям. Легко видеть, что результирующий свободный (квадратичный) лагранжиан  $\mathcal{L}_0 \equiv \tilde{\mathcal{L}}_0 + \mathcal{L}_\xi$  будет иметь вид

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(W^\pm) + \mathcal{L}_0(Z) + \mathcal{L}_0(A) + \mathcal{L}_0(L) + \mathcal{L}_0(\varphi), \quad (6.2.17)$$

где лагранжиан свободных массивных  $W^\pm$ -бозонов определяется формулой

$$\mathcal{L}_0(W^\pm) = -\frac{1}{2} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^\dagger - \frac{1}{\xi} \partial^\mu W_\mu \partial^\nu W_\nu^\dagger + m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu, \quad (6.2.18)$$

лагранжиан свободных массивных  $Z$ -бозонов и фотонов формулами

$$\mathcal{L}_0(Z) = -\frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu Z_\mu)^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu, \quad (6.2.19)$$

$$\mathcal{L}_0(A) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2$$

и, наконец, лагранжиан скалярных частиц определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\varphi) = & \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - \xi m_W^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^3)^2 - \frac{1}{2} \xi m_Z^2 \varphi^{3^2} + \\ & + \frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

(лагранжиан свободных лептонов по-прежнему определяется формулой (6.2.14)). Мы видим, что масса скалярных  $\chi$ -бозонов

$$m_\chi = f \sqrt{2\bar{\lambda}}. \quad (6.2.21)$$

Массы же скалярных  $\Phi$ - и  $\varphi^3$ -бозонов равны соответственно  $m_\Phi = \sqrt{\xi} m_W$  и  $m_{\varphi^3} = \sqrt{\xi} m_Z$ . Они зависят от произвольного параметра  $\xi$ , и поэтому частицы, связанные с полями  $\Phi$  и  $\varphi^3$ , не являются физическими (они представляют собой духи скалярного поля, аналогичные духам, связанным со скалярной и продольной компонентами 4-потенциала  $A_\mu$  [40, 43, 45]).

**6.2.3. Лагранжианы взаимодействия.** Выше мы подробно изучили структуру лагранжиана свободных полей. Здесь рассмотрим лагранжианы взаимодействия полей и установим природу различных калибровочных полей. При этом следует различать взаимодействия лептонных и калибровочных полей, калибровочных и скалярных полей, лептонных и скалярных полей и, наконец, лагранжианы самодействия калибровочных и скалярных полей.

Лагранжиан взаимодействия калибровочных и лептонных полей согласно (6.1.13), (6.2.9) определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(l, W) = & \frac{gg'(1+Y_L)}{4\sqrt{g^2+g'^2}} A_\mu \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1+\gamma^5) \nu_l - \\ & - \frac{gg'(1-Y_L+Y_R)}{4\sqrt{g^2+g'^2}} A_\mu \sum_l \bar{l} \gamma^\mu \gamma^5 l - \frac{gg'(1-Y_L-Y_R)}{4\sqrt{g^2+g'^2}} A_\mu \sum_l \bar{l} \gamma^\mu l + \\ & + \frac{g}{2\sqrt{2}} W_\mu \sum_l \bar{l} \gamma^\mu (1+\gamma^5) \nu_l + \frac{g}{2\sqrt{2}} W_\mu^+ \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1+\gamma^5) l + \\ & + \frac{g^2-g'^2 Y_L}{4\sqrt{g^2+g'^2}} Z_\mu \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1+\gamma^5) \nu_L - \frac{g^2+g'^2 Y_L+g'^2 Y_R}{4\sqrt{g^2+g'^2}} Z_\mu \sum_l \bar{l} \gamma^\mu l - \\ & - \frac{g^2+g'^2 Y_L-g'^2 Y_R}{4\sqrt{g^2+g'^2}} Z_\mu \sum_l \bar{l} \gamma^\mu \gamma^5 l. \end{aligned}$$

Мы будем интерпретировать безмассовое бозонное поле  $A_\mu$  как электромагнитное поле, которое должно взаимодействовать только с заряженными лептонами. Поэтому первое слагаемое в этой формуле должно исчезать и, следовательно, должно выполняться условие

$$Y_L = -1. \quad (6.2.22)$$

Далее, так как электромагнитное взаимодействие сохраняет четность, то должно исчезать и второе слагаемое, следовательно, будет выполняться условие

$$1 - Y_L + Y_R = 0 \quad (6.2.23)$$

(см. в этой связи (6.1.22)). Третье слагаемое в этой формуле представляет собой лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с заряженными лептонами:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(l, A) = -e\mathcal{J}_{em}^\mu A_\mu, \quad (6.2.24)$$

где

$$\mathcal{J}_{em}^\mu = \sum_l \bar{l}\gamma^\mu l \quad (6.2.25)$$

и электрический заряд  $e$  связан с константами связи  $g$  и  $g'$  (мы их будем называть слабыми зарядами) формулой

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g \sin \theta_W \quad (6.2.26)$$

(здесь  $e$  в отличие от формул гл. 3 означает модуль заряда электрона). Таким образом, лагранжиан взаимодействия калибровочных полей и лептонов можно представить в виде

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(l, W) = \mathcal{L}_{\text{int}}(W^\pm, l) + \mathcal{L}_{\text{int}}(Z, l) + \mathcal{L}_{\text{int}}(l, A), \quad (6.2.27)$$

где

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(W^\pm, l) = \frac{g}{\sqrt{2}} (\mathcal{J}^\mu W_\mu + \mathcal{J}^{\mu+} W_\mu^+) \quad (6.2.28)$$

— лагранжиан взаимодействия заряженных  $W^\pm$ -бозонов с лептонами;

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(Z, l) = \frac{g}{\cos \theta_W} \mathcal{J}_0^\mu Z_\mu \quad (6.2.29)$$

— лагранжиан взаимодействия нейтральных  $Z$ -бозонов с лептонами и, наконец,  $\mathcal{L}_{\text{int}}(l, A)$  — лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля и заряженных лептонов, который определяется формулой (6.2.24). Здесь величины

$$\mathcal{J}^\mu = \frac{1}{2} \sum_l \bar{l}\gamma^\mu (1 + \gamma^5) \nu_l = \sum_l \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_{lL}, \quad (6.2.30)$$

$$\mathcal{J}_0^\mu = \frac{1}{4} \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \nu_l + \sum_l (g_\nu \bar{l}\gamma^\mu l - g_A \bar{l}\gamma^\mu \gamma^5 l),$$

$$g_A = \frac{1}{4}, \quad g_\nu = \sin^2 \theta_W - \frac{1}{4} \quad (6.2.31)$$

называются слабыми токами — заряженными и нейтральными. Используя (6.2.25), выражение для  $\mathcal{J}_0^\mu$  можно представить в виде

$$\mathcal{J}_0^\mu = \sin^2 \theta_W \mathcal{J}_{em}^\mu + \frac{1}{2} \sum_l (\bar{\nu}_{lL} \gamma^\mu \nu_{lL} - \bar{l}_L \gamma^\mu l_L) \quad (6.2.31')$$

(подчеркнем, что в первое слагаемое входит электромагнитный ток заряженных лептонов, содержащий полные биспиноры лептонов, во второе слагаемое входит ток, содержащий только левые биспиноры).

Рассмотрим теперь лагранжиан взаимодействия лептонов со скалярными бозонами  $\mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi, l)$ . Согласно (6.1.21), (6.2.3)

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi, l) = \mathcal{L}_{\text{int}}(\chi, l) + \mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi^a, l), \quad (6.2.32)$$

где

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\chi, l) = -\frac{1}{f} \sum_l m_l \chi(\bar{l}l) \quad (6.2.33)$$

— лагранжиан взаимодействия лептонов с физическими скалярными частицами — хиггсовскими  $\chi$ -бозонами, и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi^a, l) = & -i\varphi^3 \sum_l \frac{m_l}{f} (\bar{l}\gamma^5 l) + \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}} \Phi \sum_l \frac{m_l}{f} \bar{l}(1 + \gamma^5) \nu_l - \frac{i}{\sqrt{2}} \Phi^+ \sum_l \frac{m_l}{f} \bar{\nu}_l(1 - \gamma^5) l \end{aligned} \quad (6.2.34)$$

— лагранжиан взаимодействия лептонов со скалярными хиггсовскими духами.

Лагранжиан взаимодействия калибровочных и скалярных полей согласно (6.1.20) определяется формулой

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(W, \varphi) = \mathcal{L}_{\text{int}}(W, \chi) + \mathcal{L}_{\text{int}}(W, \varphi^a),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(W, \chi) = & gm_W W_\mu^+ W^\mu \chi + \frac{g}{2 \cos \theta_W} m_Z Z_\mu Z^\mu \chi + \\ & + \frac{1}{4} g^2 W_\mu^+ W^\mu \chi^2 + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \chi^2, \end{aligned} \quad (6.2.35)$$

и лагранжиан взаимодействия  $W, Z$ -бозонов и фотонов со скалярными хиггсовскими духами определяется формулой

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(W, B, \varphi) = \mathcal{L}_{\text{int}}^{(3)}(W, B, \varphi) + \mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)}(W, B, \varphi).$$

Здесь  $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(3)}(W, B, \varphi)$  — лагранжиан «тройных» взаимодействий:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{(3)}(W, B, \varphi) = & iem_W A_\mu (W^\mu \Phi^+ + W^{\mu+} \Phi) + ie A_\mu (\Phi \partial^\mu \Phi^+ - \Phi^+ \partial^\mu \Phi) - \\ & - iem_Z \sin \theta_W Z_\mu (W^\mu \Phi^+ - W^{\mu+} \Phi) + \frac{i}{2} g \partial^\mu \varphi^3 (W_\mu \Phi^+ - W_\mu^+ \Phi) - \\ & - \frac{1}{2} g \partial^\mu \chi (W_\mu \Phi^+ + W_\mu^+ \Phi) + ie \text{ctg} 2\theta_W Z_\mu (\Phi \partial^\mu \Phi^+ - \Phi^+ \partial^\mu \Phi), \end{aligned} \quad (6.2.36)$$

а  $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)}(W, B, \varphi)$  — лагранжиан «четверных» взаимодействий:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)}(W, B, \varphi) = & -\frac{i}{2} eg A_\mu \chi (W^{\mu+} \Phi - W^\mu \Phi^+) - \\ & - \frac{1}{2} eg A_\mu \varphi^3 (W^{\mu+} \Phi + W^\mu \Phi^+) + e^2 A^\mu A_\mu \Phi^+ \Phi + 2e^2 \text{ctg} 2\theta_W A_\mu Z^\mu \Phi^+ \Phi + \\ & + e^2 \text{ctg}^2 2\theta_W Z_\mu Z^\mu \Phi^+ \Phi + \frac{e^2}{2 \cos \theta_W} Z^\mu \varphi^3 (W_\mu^+ \Phi + W_\mu \Phi^+) + \\ & + \frac{ie^2}{2 \cos \theta_W} Z^\mu \chi (W_\mu^+ \Phi - W_\mu \Phi^+) + \\ & + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \varphi^3 + \frac{1}{4} g^2 W_\mu^+ W^\mu (\varphi^3 + \Phi^+ \Phi). \end{aligned} \quad (6.2.37)$$

Лагранжиан самодействия калибровочных полей согласно (6.1.12) определяется формулой

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(W, B) = \mathcal{L}_{\text{int}}^{(3)}(W, B) + \mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)}(W, B),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{(3)}(W, B) = & i(eA^\nu + g \cos \theta_W Z^\nu) W^\mu W_{\mu\nu}^+ - i(eA^\nu + g \cos \theta_W Z^\nu) \times \\ & \times W^{\mu+} W_{\mu\nu} - ie W^\mu W^{\nu+} F_{\mu\nu} - ig \cos \theta_W W^\mu W^{\nu+} Z_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.2.38)$$

— лагранжиан «тройных» взаимодействий и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)}(W, B) = & -\frac{1}{2} g^2 (W_\mu W^{\mu+} W_\nu W^{\nu+} - W_\mu W^\mu W^{\nu+} W_\nu^+) + \\ & + W_\mu^+ W^\mu (eA_\nu + g \cos \theta_W Z_\nu)^2 + W_\mu^+ W_\nu (eA^\mu + g \cos \theta_W Z^\mu) \times \\ & \times (eA^\nu + g \cos \theta_W Z^\nu) \end{aligned} \quad (6.2.39)$$

— лагранжиан «четверных» взаимодействий. Наконец, лагранжиан самодействия хиггсовских скалярных физических и духовых полей определяется формулой

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi) = \mathcal{L}_{\text{int}}(\chi) + \mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi^a, \chi),$$

где  $\mathcal{L}_{\text{int}}(\chi)$  — лагранжиан самодействия физических хиггсовских бозонов:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\chi) = -\lambda f \chi^3 - \frac{1}{4} \lambda \chi^4 \quad (6.2.40)$$

и  $\mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi^a, \chi)$  — лагранжиан самодействия, включающий нефизические хиггсовские бозоны:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi, \chi) = & -2\lambda f \chi \left( \Phi^+ \Phi + \frac{1}{2} \varphi^3 \right) - \\ & - \lambda \left( \Phi^+ \Phi - \frac{1}{2} \varphi^3 \right)^2 - \lambda \chi^2 \left( \Phi^+ \Phi + \frac{1}{2} \varphi^3 \right). \end{aligned} \quad (6.2.41)$$

В заключение покажем, что электрический заряд частиц  $Q$  связан с лептонным гиперзарядом  $Y$  и проекцией лептонного изотопического спина  $I_3$  формулой Гелл-Манна — Нишиджимы

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}. \quad (6.2.42)$$

С этой целью обратимся к лагранжиану (6.1.23) полей до фиксации калибровки. Как мы уже отмечали, он инвариантен относительно преобразований группы  $SU(2)_W \times U(1)_Y$  (6.1.7), (6.1.8). Найдем закон преобразования вещественных полей  $\varphi^0, \varphi^a$  при преобразованиях этой группы. Дублет скалярных полей преобразуется согласно (6.1.24) по закону

$$\delta\varphi = \frac{i}{2} (g\tau^a \omega^a + g'\omega) \varphi, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi \uparrow \\ \varphi \downarrow \end{pmatrix}.$$

Выражая поля  $\varphi_{\uparrow}, \varphi_{\downarrow}$  через вещественные поля  $\varphi^0, \varphi^a$ :

$$\varphi_{\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi^2 + i\varphi^1), \quad \varphi_{\downarrow} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi^0 - i\varphi^3), \quad \varphi^0 = f + \chi$$

и используя явный вид матриц Паули

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

получаем закон преобразования полей  $\varphi^a, \varphi^0$

$$\begin{aligned} \delta\varphi^a &= \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \varphi^b \omega^c + \frac{1}{2} g \varphi^0 \omega^a + \frac{1}{2} g' \varepsilon^{ab3} \varphi^b \omega - \frac{1}{2} g' \delta_{a3} \varphi^0 \omega, \\ \delta\varphi^0 &= -\frac{1}{2} \varphi^a \omega^a + \frac{1}{2} g' \varphi^3 \omega. \end{aligned} \quad (6.2.43)$$

Поля  $W_{\mu}^a$  и  $B_{\mu}$  преобразуются согласно формулам

$$\delta W_{\mu}^a = g \varepsilon^{abc} W_{\mu}^b \omega^c + \partial_{\mu} \omega^a, \quad \delta B_{\mu} = \partial_{\mu} \omega.$$

Калибровочные преобразования электромагнитного поля представляют собой частный случай этих преобразований и соответствуют выбору  $\omega^a$ :

$$\omega^1 = \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = \frac{g'}{g} \omega. \quad (6.2.44)$$

Действительно, легко видеть, что калибровочные поля преобразуются при этом по формулам

$$\begin{aligned} \delta W_{\mu}^a &= g \varepsilon^{ab3} W_{\mu}^b \omega^3, \quad a = 1, 2, \\ \delta W_{\mu}^3 &= \partial_{\mu} \omega^3, \quad \delta B_{\mu} = \partial_{\mu} \omega, \end{aligned}$$

а скалярные поля по формулам

$$\delta\varphi^0 = \delta\varphi^3 = 0, \quad \delta\varphi^a = g \varepsilon^{ab3} \varphi^b \omega^3, \quad a = 1, 2.$$

Отсюда следует, что поля  $Z_{\mu} = W_{\mu}^3 \cos \theta_W - B_{\mu} \sin \theta_W$ ,  $A_{\mu} = W_{\mu}^3 \sin \theta_W + B_{\mu} \cos \theta_W$  преобразуются по формулам

$$\delta Z_{\mu} = 0, \quad \delta A_{\mu} = \partial_{\mu} \Lambda, \quad \Lambda = \frac{g}{e} \omega^3, \quad (6.2.45)$$

поля  $W_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_{\mu}^1 + iW_{\mu}^2)$ ,  $W_{\mu}^+$  по формулам

$$\delta W_{\mu} = -ie\Lambda W_{\mu}, \quad \delta W_{\mu}^+ = ie\Lambda W_{\mu}^+ \quad (6.2.46)$$

и скалярные поля  $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi^1 + i\varphi^2)$ ,  $\Phi^+$ ,  $\chi$ ,  $\varphi^3$  по формулам  $\delta\Phi = -ie\Lambda\Phi$ ,  $\delta\Phi^+ = ie\Lambda\Phi^+$ ,  $\delta\chi = \delta\varphi^3 = 0$ . Эти формулы показывают, что электрический заряд  $Q$  для  $Z$ ,  $\chi$ -бозонов равен нулю, а электрический заряд  $W$ ,  $\Phi$ -бозонов равен  $\pm e$ .

В случае лептонов электромагнитные калибровочные преобразования согласно (6.1.7), (6.1.8) имеют вид

$$\delta L_l = -ie\Lambda \left( \frac{1}{2} - \frac{\tau_3}{2} \right) L_l, \quad \delta R_l = -ie\Lambda R_l. \quad (6.2.47)$$

Из этих формул следует, что электрические заряды левых и правых лептонов определяются так:

$$Q_{IL} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q_{IR} = -1$$

( $Y_L = -1$ ,  $Y_R = -2$ ). Эти формулы находятся в соответствии с формулой (6.2.42), если учесть, что изотопический спин левых лептонов равен  $\frac{1}{2}$ , а изотопический спин правых лептонов равен 0.

**6.2.4. Введение фиктивных скалярных фермионов.** Как мы видели в § 2.4, при квантовании калибровочных полей в лоренцевой калибровке (для которой характерна явная релятивистская инвариантность теории) возникают нефизические состояния — скалярные и продольные глюоны. В неабелевой теории эти состояния нарушают условие физической унитарности матрицы рассеяния, согласно которому вероятность перехода из физического состояния во все возможные другие физические состояния должна равняться единице. Чтобы матрица рассеяния была унитарной в этом смысле, мы вводили дополнительные фиктивные скалярные фермионные поля (духи Фадеева — Попова, или шпурионы). Последние восстанавливали калибровочную инвариантность теории внутри лоренцевой калибровки и вследствие этого приводили к физической унитарности  $S$ -матрицы (напомним, что в кулоновской калибровке, в которой явная релятивистская инвариантность отсутствует, нет необходимости вводить фиктивные фермионные души, так как в этой калибровке не возникает «духовых» состояний векторных калибровочных полей).

Аналогичная ситуация наблюдается и в единой теории электрослабого взаимодействия. В этой теории нефизические состояния, связанные с продольными компонентами калибровочных полей  $W_\mu$ ,  $Z_\mu$ , становятся физическими — они соответствуют проекции спина, равной нулю для массивных  $W$ - и  $Z$ -бозонов. Нефизическими состояниями становятся три компоненты скалярного поля  $\varphi^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ). Кроме этого нефизические состояния связаны также со скалярными полями  $\partial^\mu W_\mu$ ,  $\partial^\mu Z_\mu$ ,  $\partial^\mu A_\mu$  и продольной компонентой поля  $A_\mu$ . Все эти нефизические состояния приводят к нарушению физического условия унитарности. Чтобы восстановить это условие, необходимо, как и в § 4.4, ввести дополнительные фиктивные фермионные поля, которые восстанавливали бы калибровочную инвариантность теории внутри обобщенной лоренцевой калибровки, соответствующей лагранжиану (6.2.15). При этом автоматически, как и в п. 4.5.4, будет восстанавливаться физическая унитарность  $S$ -матрицы.

Лагранжиан  $\mathcal{L}_\xi$ , который нарушает калибровочную инвариантность теории, согласно (6.2.16) имеет вид

$$\mathcal{L}_\xi = -\frac{1}{2\xi} F^a F^a - \frac{1}{2\xi} F^2,$$

$$F^a = \partial^\mu W_\mu^a + \frac{1}{2} \xi f g \varphi^a, \quad F = \partial^\mu B_\mu - \frac{1}{2} \xi f g' \varphi^3.$$



Калибровочные поля  $W_\mu^a$ ,  $B_\mu$  преобразуются при бесконечно малых калибровочных преобразованиях согласно формулам (6.1.14):

$$\delta W_\mu^a = g \varepsilon^{abc} \varphi^b \omega^c + \partial_\mu \omega^a \equiv \mathcal{D}_\mu^a \omega^b, \quad \delta B_\mu = \partial_\mu \omega,$$

а скалярные поля — согласно формулам (6.2.43):

$$\delta \varphi^a = \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \varphi^b \omega^c + \frac{1}{2} g \varphi^0 \omega^a + \frac{1}{2} g' \varepsilon^{ab3} \varphi^b \omega - \frac{1}{2} g' \delta_{a3} \varphi^0 \omega,$$

$$\delta \varphi^0 = -\frac{1}{2} g \varphi^a \omega^a + \frac{1}{2} g' \varphi^3 \omega,$$

где  $\omega^a$  и  $\omega$  — бесконечно малые калибровочные функции, связанные с локальными преобразованиями групп  $SU(2)_W$  и  $U(1)_Y$  соответственно.

Чтобы лагранжиан  $\mathcal{L} + \mathcal{L}_\xi$  был инвариантен относительно преобразований (6.1.14), (6.2.43), необходимо, чтобы вариации  $\delta F^a$  и  $\delta F$ , связанные с вариациями поля (6.1.14), (6.2.43), обращались в нуль:

$$\delta F^a = 0, \quad \delta F = 0.$$

Эти уравнения согласно (6.2.16) имеют вид

$$\begin{aligned} \partial^\mu \left\{ \partial_\mu \omega^a + g \varepsilon^{abc} W_\mu^b \omega^c \right\} + \frac{1}{2} \xi f g \left\{ \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \varphi^b \omega^c + \frac{1}{2} g \varphi^0 \omega^a + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g' \varepsilon^{ab3} \varphi^b \omega - \frac{1}{2} g' \delta_{a3} \varphi^0 \omega \right\} \equiv \Delta F^a(\omega^c, \omega) = 0, \end{aligned} \quad (6.2.48)$$

$$\partial^\mu \partial_\mu \omega - \frac{1}{2} \xi f g' \left\{ \frac{1}{2} g \varepsilon^{3bc} \varphi^b \omega^c + \frac{1}{2} g \varphi^0 \omega^3 - \frac{1}{2} g' \varphi^0 \omega \right\} \equiv \Delta F(\omega^c, \omega) = 0$$

и представляют собой связь калибровочных функций  $\omega^a$ ,  $\omega$  с функциями поля  $W$ ,  $\varphi$ , которая обеспечивает калибровочную инвариантность теории в рамках обобщенной лоренцевой калибровки.

Отметим, что здесь, как и в § 4.4, в уравнения для  $\omega^a$ ,  $\omega$  входят поля  $W$ ,  $\varphi$ , поэтому уравнения (6.2.48) нельзя рассматривать независимо от уравнений поля для  $W$  и  $\varphi$ . Отсюда следует, что калибровочные функции  $\omega^a$  и  $\omega$  должны рассматриваться как независимые поля, которые мы будем обозначать через  $\zeta C^a(x)$ ,  $\zeta C(x)$  ( $\zeta$  — бесконечно малый множитель, не зависящий от  $x$ ).

Чтобы получить уравнения (6.2.48) из лагранжева формализма, мы должны кроме полей  $C^a$ ,  $C$  ввести еще новые поля  $\bar{C}^a$ ,  $\bar{C}$ , варьирование по которым будет приводить к уравнениям (6.2.48). Таким образом, мы приходим к лагранжиану

$$\mathcal{L}_C = -i \bar{C}^a \Delta F^a(C^b, C) - i \bar{C} \Delta F(C^b, C), \quad (6.2.49)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta F^a(C^b, C) = \partial^\mu \left\{ \partial_\mu C^a + g \varepsilon^{abc} W_\mu^b C^c \right\} + \xi m_W \left\{ \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \varphi^b C^c + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g \varphi^0 C^a + \frac{1}{2} g' \varepsilon^{ab3} \varphi^b C - \frac{1}{2} g' \delta_{a3} \varphi^0 C \right\}; \end{aligned}$$

$$\Delta F(C^b, C) = \partial^\mu \partial_\mu C - \xi m_W \frac{g'}{g} \left\{ \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \varphi^b C^c + \frac{1}{2} g \varphi^0 C^3 - \frac{1}{2} g' \varphi^0 C \right\}. \quad (6.2.50)$$

Этот лагранжиан приводит к уравнениям поля как для  $C^a$ ,  $C$ , так и для  $\bar{C}^a$ ,  $\bar{C}$ . Поля  $C$  и  $\bar{C}$ , как и в общей теории калибровочных полей, должны быть фермионными (в классической теории они должны антикоммутировать друг с другом и между собой, т. е. должны быть грассмановыми функциями; по этой причине, рассматривая поля  $C$ ,  $\bar{C}$  как «вещественные», в лагранжиан (6.2.49) мы ввели множитель  $i$ ).

Покажем, что полный эффективный лагранжиан, включающий поля  $C$ ,  $\bar{C}$ :

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_\xi + \mathcal{L}_C, \quad (6.2.51)$$

инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \delta W_\mu^a &= i\xi (g \varepsilon^{abc} W_\mu^b C^c + \partial_\mu C^a) \equiv i\xi D_\mu^{ab} C^b, \quad \delta B_\mu = i\xi \partial_\mu C, \\ \delta \varphi^a &= i\xi \left( \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \varphi^b C^c + \frac{1}{2} g \varphi^0 C^a + \frac{1}{2} g' \varepsilon^{ab3} \varphi^b C - \frac{1}{2} g' \delta_{a3} \varphi^0 C \right), \\ \delta \varphi^0 &= i\xi \left( -\frac{1}{2} g \varphi^a C^a + \frac{1}{2} g' \varphi^3 C \right), \end{aligned} \quad (6.2.52)$$

в которых роль калибровочных функций  $\omega^a$  и  $\omega$  играют величины

$$\omega^a = i\xi C^a, \quad \omega = i\xi C, \quad (6.2.53)$$

где  $\xi$  — бесконечно малый, независящий от  $x$  параметр, антикоммутирующий со всеми фермионными полями, включая  $C$  и  $\bar{C}$ , и с самим собой ( $\xi^2=0$ ), и, следовательно, представляющий грассманову переменную. Введение этой грассмановой переменной необходимо потому, что поля  $C^a$ ,  $C$  являются фермионными, а калибровочные функции  $\omega^a$ ,  $\omega$  соответствуют бозонным полям (необходимость трактовки  $C$  и  $\bar{C}$  как фермионных полей для обеспечения инвариантности лагранжиана (6.2.51) относительно калибровочных преобразований (6.2.52) разъяснена далее).

К преобразованиям (6.2.52) следует добавить закон преобразования полей  $C$  и  $\bar{C}$

$$\begin{aligned} \delta \bar{C}^a &= -\xi \frac{1}{\xi} F^a, \quad \delta \bar{C} = -\xi \frac{1}{\xi} F, \\ \delta C^a &= -\frac{1}{2} \xi g \varepsilon^{abc} C^b C^c, \quad \delta C = 0, \end{aligned} \quad (6.2.54)$$

который совместно с преобразованиями (6.2.52) обеспечивает инвариантность лагранжиана (6.2.51).

Чтобы убедиться в этом, отметим предварительно, что согласно изложенному в § 6.1  $\delta \mathcal{L} = 0$ . Далее, используя преобразование

(6.2.54), находим

$$\delta\mathcal{L}_C = i \frac{\zeta}{\xi} F^a \Delta F^a + i \frac{\zeta}{\xi} F \Delta F - i \bar{C}^a \delta \Delta F^a - i C \delta \Delta F,$$

$$\delta\mathcal{L}_\xi = -\frac{1}{\xi} F^a \delta F^a - \frac{1}{\xi} F \delta F,$$

где  $\delta F^a, \delta F$  — вариации функций  $F^a$  и  $F$  при преобразовании (6.2.52), (6.2.53). Согласно (6.2.48)

$$i\zeta \Delta F^a = \delta F^a, \quad i\zeta \Delta F = \delta F,$$

следовательно,

$$\delta\mathcal{L}_\xi + \delta\mathcal{L}_C = -i\bar{C}^a \delta \Delta F^a - i C \delta \Delta F. \quad (6.2.55)$$

Таким образом, для доказательства инвариантности лагранжиана  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  необходимо убедиться в справедливости равенств

$$\delta \Delta F = 0, \quad \delta \Delta F^a = 0. \quad (6.2.56)$$

С этой целью отметим, что

$$\begin{aligned} \delta \Delta F = & -\xi m_W \frac{g'}{g} \left\{ \frac{1}{2} g \varepsilon^{3bc} \delta \varphi^b C^c + \frac{1}{2} g \varepsilon^{3bc} \varphi^b \delta C^c + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} g \delta \varphi^0 C^3 + \frac{1}{2} g \varphi^0 \delta C^3 - \frac{1}{2} g' C \delta \varphi^0 \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда вариации (6.2.52), (6.2.53), получаем

$$\begin{aligned} \delta \Delta F = & -\xi m_W i g' \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^{3bc} C^c \zeta \left[ \frac{1}{2} g \varepsilon^{bad} \varphi^a C^d + \frac{1}{2} g \varphi^0 C^b + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} g' \varepsilon^{ba3} \varphi^a C - \frac{1}{2} g' \delta_{b3} \varphi^0 C \right] + \frac{1}{2} \varepsilon^{3bc} \varphi^b C^c + \frac{1}{2} g \varphi^0 C^3 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} C^3 \zeta \left[ \frac{1}{2} g' \varphi^3 C - \frac{1}{2} g C^a \varphi^a \right] - \frac{1}{2} \frac{g'}{g} C \zeta \left[ \frac{1}{2} g' \varphi^3 C - \frac{1}{2} g C^a \varphi^a \right] \right\}. \end{aligned}$$

Используя соотношение

$$\varepsilon^{acb} \varepsilon^{bae} = \delta_{ca} \delta_{de} - \delta_{da} \delta_{ce},$$

а также грассманов характер величин  $\zeta, C, \bar{C}$ , получаем отсюда  $\delta \Delta F = 0$ .

Для доказательства соотношения  $\delta \Delta F^a = 0$  отметим, что согласно (6.2.52), (6.2.53)

$$\begin{aligned} \delta \Delta F^a = & \partial^\mu \left\{ \partial_\mu \delta C^a + g \varepsilon^{abc} W_\mu^b \delta C^c + i \zeta g \varepsilon^{abc} (\partial_\mu C^b + g \varepsilon^{bl d} W_\mu^l C^d) C^c \right\} + \\ & + \xi m_W \left\{ \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \varphi^b \delta C^c + \frac{i}{2} g \varepsilon^{abc} C^c \zeta \left( \frac{1}{2} g \varepsilon^{bl d} \varphi^l C^d + \frac{1}{2} g \varphi^0 C^b + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} g' \varepsilon^{bl3} \varphi^l C - \frac{1}{2} g' \delta_{b3} \varphi^0 C \right) + \frac{1}{2} g \varphi^0 \delta C^a + \frac{i}{2} g \zeta \left( \frac{1}{2} g' \varphi^3 C - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} g \varphi^b C^b \right) C^a + \frac{i}{2} g' \varepsilon^{ab3} \zeta \left( \frac{1}{2} g \varepsilon^{bl d} \varphi^l C^d + \frac{1}{2} g \varphi^0 C^b + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} g' \varepsilon^{bl3} \varphi^l C - \frac{1}{2} g' \delta_{b3} \varphi^0 C \right) C - \frac{i}{2} g' \delta_{a3} \zeta \left( \frac{1}{2} g' \varphi^3 C - \frac{1}{2} g \varphi^b C^b \right) C \right\}. \end{aligned}$$

Для того чтобы сокращались члены, не содержащие полей  $\varphi$  и  $W$ , необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$\partial_\mu \delta C^a = -i \zeta g \varepsilon^{abc} \partial_\mu C^b \cdot C^c \equiv -\frac{i}{2} \zeta g \varepsilon^{abc} (\partial_\mu C^b C^c - \partial_\mu C^c C^b),$$

иными словами, необходимо, чтобы правая сторона равенства представляла собой производную по  $x_\mu$ . Сказанное возможно только в том случае, если величины  $C^b$  и  $C^c$  антикоммутируют, при этом в соответствии с (6.2.54) вариация  $\delta C^a = -\frac{i}{2} g \zeta \varepsilon^{abc} C^b C^c$ . Используя соотношение (6.2.54), а также грассманов характер величин  $\zeta$ ,  $C$ ,  $\bar{C}$ , нетрудно убедиться, что  $\delta \Delta F^a = 0$ ; это и требовалось доказать. Таким образом, для обеспечения калибровочной инвариантности лагранжиана (6.2.51) (в рамках калибровки  $m'$  Хуофта) необходимо предполагать, что добавочные поля  $C$  и  $\bar{C}$  являются фермиевскими.

Преобразования (6.2.54) (они называются преобразованиями Бекки, Руе, Стори, Тютиня, см. также § 4.4) замечательны тем, что преобразования для  $\bar{C}^a$  и  $C$  определяются функциями  $F^a$ ,  $F$ , фиксирующими калибровку, а преобразования для  $C^a$  и  $\bar{C}$  определяются самой группой, т. е. структурными константами (равными  $\varepsilon^{abc}$  для группы  $SU(2)$  и 0 для группы  $U(1)$ ). Кроме этого, (6.2.54) являются преобразованиями суперсимметрии, так как они смешивают бозонные и фермионные поля.

Запишем явный вид лагранжиана  $\mathcal{L}_C$ . Подставляя (6.2.50) в (6.2.49), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C = & i g \varepsilon^{abc} \partial^\mu \bar{C}^a C^b W_\mu^c - \frac{i}{2} g \xi m_W \varepsilon^{abc} \bar{C}^a C^b \varphi^c + \frac{i}{2} g \xi m_W \bar{C}^a C^a \chi + \\ & + \frac{i}{2} \xi m_W g' \varepsilon^{ab3} \bar{C}^a C \varphi^b - \frac{i}{2} \xi m_W g' \bar{C}^3 C \chi + \frac{i}{2} \xi m_W g' \varepsilon^{ab3} \bar{C} C^a \varphi^b + \\ & + i \bar{C}^a \partial^\mu \partial_\mu C^a + i \xi m_W^2 \bar{C}^a C^a - \frac{i}{2} \xi m_W f g' (\bar{C}^3 C + \bar{C} C^3) + \bar{C} \partial_\mu \partial^\mu C. \end{aligned} \quad (6.2.57)$$

При  $\varphi = \chi = f = 0$  этот лагранжиан переходит в лагранжиан (4.4.6), соответствующий уравнениям поля первого порядка.

Члены, квадратичные по полям  $C$ ,  $\bar{C}$ , не являются диагональными.

Чтобы произвести диагонализацию членов, квадратичных по полям  $C$ ,  $\bar{C}$ , введем преобразование полей  $C^3$ ,  $C$  и  $\bar{C}^3$ ,  $\bar{C}$ , аналогичное преобразованию (6.2.9):

$$\begin{aligned} C^3 &= C_A \sin \theta_W + C_Z \cos \theta_W, & C &= C_A \cos \theta_W - C_Z \sin \theta_W, \\ \bar{C}^3 &= \bar{C}_A \sin \theta_W + \bar{C}_Z \cos \theta_W, & \bar{C} &= \bar{C}_A \cos \theta_W - \bar{C}_Z \sin \theta_W, \end{aligned}$$

где  $\theta_W$  — угол Вайнберга. В результате получим

$$\mathcal{L}_C = \mathcal{L}_0(C) + \mathcal{L}_{\text{int}}(C, W, \varphi),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(C) = & i \bar{C}^1 \partial_\mu \partial^\mu C^1 + i \bar{C}^2 \partial_\mu \partial^\mu C^2 + i \xi m_W^2 (\bar{C}^1 C^1 + \bar{C}^2 C^2) + \\ & + i \bar{C}_Z \partial_\mu \partial^\mu C_Z + i \xi m_Z^2 \bar{C}_Z C_Z + i \bar{C}_A \partial_\mu \partial^\mu C_A \end{aligned} \quad (6.2.58)$$

— лагранжиан свободных фермионных духов и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(C, W, \varphi) = & ig\epsilon^{abc}\partial^\mu\bar{C}^a C^b W_\mu^c - \frac{i}{2} g\xi m_W \epsilon^{abc}\bar{C}^a C^b \varphi^c + \\ & + \frac{i}{2} g\xi m_W \bar{C}^a C^a \chi + \frac{i}{2} \xi m_W g' \epsilon^{ab3}\bar{C}^a C^b \varphi^3 - \frac{i}{2} \xi m_W g' \bar{C}^3 C^3 \chi + \\ & + \frac{i}{2} \xi m_W g' \epsilon^{ab3}\bar{C}^a C^b \varphi^3 \end{aligned} \quad (6.2.59)$$

— лагранжиан взаимодействия фермионных духов с калибровочными полями и хиггсовскими скалярными полями  $\varphi^a$ ,  $\chi$ . Величины  $m_W \sqrt{\xi}$  и  $m_Z \sqrt{\xi}$  (зависящие от калибровки) представляют собой массы скалярных фиктивных фермионов. Один из скалярных фиктивных фермионов обладает нулевой массой. Эффективный лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  инвариантен также относительно глобальных преобразований (6.1.7), (6.1.8) группы  $SU(2) \times U(1)$  с параметрами  $\omega^a$ ,  $\omega$ , не зависящими от  $x$ . При этом поля  $C$  и  $\bar{C}$  должны преобразовываться согласно формулам

$$\begin{aligned} \delta C^a = g\epsilon^{abc} C^b \omega^c, \quad \delta \bar{C}^a = g\epsilon^{abc} \bar{C}^b \omega^c, \\ \delta C = \delta \bar{C} = 0. \end{aligned} \quad (6.2.60)$$

В частности, лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  инвариантен относительно преобразований (6.2.44), если считать, что согласно (6.2.60)

$$\begin{aligned} \delta C = 0, \quad \delta \bar{C} = 0, \\ \delta C^a = e\Lambda \epsilon^{ab3} C^b, \quad \delta \bar{C}^a = e\Lambda \epsilon^{ab3} \bar{C}^b, \end{aligned}$$

где  $\Lambda = \text{const}$ .

Лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  инвариантен относительно фазовых преобразований только лептонных полей:

$$L_l \rightarrow L_l' = e^{i\alpha_l} L_l, \quad R_l \rightarrow R_l' = e^{i\alpha_l} R_l, \quad (6.2.61)$$

где  $\alpha_l$  — постоянные фазы, связанные с каждым сортом лептонов ( $e$ ,  $\mu$ ,  $\tau$ ). Отсюда следует сохранение трех лептонных чисел ( $N_e$ ,  $N_\mu$ ,  $N_\tau$ ) [46, 47]. Считается, что  $N_e = 1$  для электрона,  $\nu_e$ ,  $N_e = 0$  для мюона и  $\nu_\mu$ ,  $N_e = 0$  для  $\tau$ -лептона и  $\nu_\tau$ . Аналогично определяются квантовые числа  $N_\mu$  и  $N_\tau$  (для античастиц эти квантовые числа имеют противоположные знаки).

## § 6.3. ЭЛЕКТРОСЛАБОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КВАРКОВ

**6.3.1. Лагранжиан безмассовых кварков, взаимодействующих с калибровочными полями.** До сих пор мы рассматривали взаимодействие лептонов с векторными калибровочными полями. Но слабому взаимодействию подвержены также адроны, а следовательно, и составляющие их кварки. Поэтому возникает вопрос о построении теории электрослабого взаимодействия кварков, который мы здесь и рассмотрим [48].

Теория электрослабого взаимодействия кварков строится аналогично теории электрослабого взаимодействия лептонов. Будем внача-

ле исходить из представления о безмассовых кварках. В этом случае так же, как для лептонов, можно предположить, что кварки обладают  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ -симметрией и группируются в левые дублеты и правые синглеты. В этом параграфе будем использовать шесть сортов («ароматов») кварков:  $u, d, c, s, t, b$ . Каждый из этих сортов может находиться в трех цветовых состояниях, причем сильное взаимодействие не изменяет сорт кварка (но изменяет цвет кварка), в то время как слабое взаимодействие изменяет сорт кварка, но сохраняет его цвет. Электрические заряды  $u$ -,  $c$ - и  $t$ -кварков равны  $2/3$ , а заряды  $d$ -,  $s$ - и  $b$ -кварков равны  $-1/3$  (в единицах заряда протона). Шесть кварков делятся на три левых дублета и шесть правых синглетов, которые преобразуются по фундаментальному представлению группы  $SU(2) \times U(1)$ :

$$q_{iL}^0 = \begin{pmatrix} u_L^0 \\ d_L^0 \end{pmatrix}, \quad q_{iR}^0 = \begin{pmatrix} u_R^0 \\ d_R^0 \end{pmatrix}; \quad q_{2L}^0 = \begin{pmatrix} c_L^0 \\ s_L^0 \end{pmatrix}, \quad q_{2R}^0 = \begin{pmatrix} c_R^0 \\ s_R^0 \end{pmatrix}; \quad q_{3L}^0 = \begin{pmatrix} t_L^0 \\ b_L^0 \end{pmatrix}, \quad q_{3R}^0 = \begin{pmatrix} t_R^0 \\ b_R^0 \end{pmatrix}. \quad (6.3.1)$$

Кварки с зарядом  $2/3$  ( $u$ -,  $c$ -,  $t$ -кварки) называются верхними, а кварки с зарядом  $-1/3$  — нижними (мы их будем обозначать соответственно  $q^{(u)}$  и  $q^{(d)}$ ). Индекс «0» указывает на безмассовость кварка. Эта структура кварковых мультиплетов аналогична структуре лептонных мультиплетов

$$\begin{pmatrix} \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \\ e & \mu & \tau \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u & c & t \\ d & s & b \end{pmatrix}.$$

Различие между ними в том, что количество лептонных синглетов было в два раза меньше, так как мы не вводили правых синглетов нейтрино.

Разбиение лептонов и кварков на три группы называется разбиением на поколения. Именно лептоны  $\nu_e, e$  и кварки  $u, d$  называют лептонами и кварками первого поколения, лептоны  $\nu_\mu, \mu$  и кварки  $c, s$  — лептонами и кварками второго поколения, наконец,  $\nu_\tau, \tau$  и  $t, b$  — лептонами и кварками третьего поколения. Таким образом, индексом  $i = 1, 2, 3$  в формулах (6.3.1) пронумерованы поколения.

Предполагая, что глобальная группа симметрии  $SU(2) \times U(1)$  лагранжиана безмассовых кварков

$$\mathcal{L}_0(q) = i \sum_{i=1}^3 \bar{q}_{iL}^0 \gamma^\mu \partial_\mu q_{iL}^0 + i \sum_{i=1}^3 \bar{q}_{iR}^{0(u)} \gamma^\mu \partial_\mu q_{iR}^{0(u)} + i \sum_{i=1}^3 \bar{q}_{iR}^{0(d)} \gamma^\mu \partial_\mu q_{iR}^{0(d)}$$

при учете взаимодействия с калибровочными полями расширяется до локальной, приходим (как и в § 6.1) к лагранжиану

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(W, B, q) = & i \sum_{i=1}^3 \bar{q}_{iL}^0 \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau_a W_\mu^a - \frac{i}{2} g' Y_L B_\mu \right) q_{iL}^0 + \\ & + i \sum_{i=1}^3 \bar{q}_{iR}^{0(u)} \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g' Y_R^{(u)} B_\mu \right) q_{iR}^{0(u)} + \\ & + i \sum_{i=1}^3 \bar{q}_{iR}^{0(d)} \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g' Y_R^{(d)} B_\mu \right) q_{iR}^{0(d)}, \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

описывающему кварки и их взаимодействие с калибровочными полями. Здесь  $Y_L$  — гиперзаряд левых дублетов кварков;  $Y_R^{(u)}$  и  $Y_R^{(d)}$  — гиперзаряды правых верхних и нижних кварков с зарядами  $2/3$  и  $-1/3$  (значения  $Y_L, Y_R^{(u)}, Y_R^{(d)}$  определены далее). В первом слагаемом происходит суммирование по трем левым дублетам  $q_{jL}^0$  ( $j = 1, 2, 3$ ); во втором слагаемом — по трем правым верхним синглетам  $q_{iR}^{(0)u}$ :  $q_{1R}^{(0)u} = u_R^0, q_{2R}^{(0)u} = c_R^0, q_{3R}^{(0)u} = t_R^0$ . В последнем слагаемом суммирование выполняется по трем нижним синглетам  $q_{iR}^{(0)d}$ :  $q_{1R}^{(0)d} = d_R^0, q_{2R}^{(0)d} = s_R^0, q_{3R}^{(0)d} = b_R^0$ .

Константы  $g$  и  $g'$  здесь те же, что и в лагранжиане (6.1.13). В этих формулах происходит также суммирование по цветам кварков (цветовой индекс не выписывается).

Вводя вместо  $W_\mu^a, B_\mu$  поля  $W_\mu, Z_\mu, A_\mu$  и подставляя явное выражение для левых дублетов и матриц  $\tau_a$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(W, B, q) = & \sum_{i=1}^3 \left\{ i\bar{q}_i^{0(u)} \gamma^\mu \partial_\mu q_i^{0(u)} + i\bar{q}_i^{0(d)} \gamma^\mu \partial_\mu q_i^{0(d)} + \right. \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{q}_{iL}^{0(u)} \gamma^\mu q_{iL}^{0(d)} W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{q}_{iL}^{0(d)} \gamma^\mu q_{iL}^{0(u)} W_\mu^- + \\ & + \bar{q}_i^{0(u)} \gamma^\mu \gamma^5 q_i^{0(u)} \left[ \frac{1}{4} (1 + Y_L + Y_R^{(u)}) e A_\mu + \frac{g^2 - g'^2 (Y_L - Y_R^{(u)})}{4 \sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu \right] - \\ & - \bar{q}_i^{0(d)} \gamma^\mu \gamma^5 q_i^{0(d)} \left[ \frac{1}{4} (1 - Y_L + Y_R^{(d)}) e A_\mu + \frac{g^2 + g'^2 (Y_L - Y_R^{(d)})}{4 \sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu \right] - \\ & - \bar{q}_i^{0(d)} \gamma^\mu q_i^{0(d)} \left[ \frac{1}{4} (1 - Y_L - Y_R^{(d)}) e A_\mu + \frac{g^2 + g'^2 (Y_L + Y_R^{(d)})}{4 \sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu \right] + \\ & \left. + \bar{q}_i^{0(u)} \gamma^\mu q_i^{0(u)} \left[ \frac{1}{4} (1 + Y_L + Y_R^{(u)}) e A_\mu + \frac{g^2 - g'^2 (Y_L + Y_R^{(u)})}{4 \sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu \right] \right\} \\ & \left( \text{мы использовали при этом соотношение } e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right). \end{aligned}$$

Так как электромагнитное взаимодействие сохраняет пространственную четность, то здесь должны отсутствовать слагаемые вида

$$\bar{q}_i^{0(u)} \gamma^\mu \gamma^5 q_i^{0(u)} A_\mu, \quad \bar{q}_i^{0(d)} \gamma^\mu \gamma^5 q_i^{0(d)} A_\mu.$$

Отсюда следует, что

$$1 + Y_L - Y_R^{(u)} = 0, \quad 1 - Y_L + Y_R^{(d)} = 0. \quad (6.3.3)$$

Так как лагранжиан электромагнитного взаимодействия верхних кварков определяется формулой

$$\frac{2}{3} e \sum_i \bar{q}_i^{0(u)} \gamma^\mu q_i^{0(u)} A_\mu,$$

то должно выполняться соотношение

$$\frac{1}{4} (1 + Y_L + Y_R^{(u)}) = \frac{2}{3}. \quad (6.3.4)$$

Поэтому

$$Y_L = \frac{1}{3}, \quad Y_R^{(u)} = \frac{4}{3}, \quad Y_R^{(d)} = -\frac{2}{3}. \quad (6.3.5)$$

Легко видеть, что лагранжиан электромагнитного взаимодействия нижних кварков соответствует, как и должно быть, частицам с зарядом  $-1/3$ . Эти значения гиперзарядов кварков находятся в соответствии с формулой Гелл-Манна — Нишиджимы  $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$ .

Таким образом, лагранжиан  $\mathcal{L}(W, B, q)$  можно представить в виде

$$\mathcal{L}(W, B, q) = \mathcal{L}_0(q) + \mathcal{L}_{\text{int}}(W, B, q) \quad (6.3.6)$$

где

$$\mathcal{L}_0(q) = \sum_i (i\bar{q}_i^{0(u)} \gamma^\mu \partial_\mu q_i^{0(u)} + i\bar{q}_i^{0(d)} \gamma^\mu \partial_\mu q_i^{0(d)}) \quad (6.3.7)$$

— лагранжиан свободных безмассовых кварков и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(W, B, q) = \sum_i \left\{ \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{q}_{iL}^{0(u)} \gamma^\mu q_{iL}^{0(d)} W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{q}_{iL}^{0(d)} \gamma^\mu q_{iL}^{0(u)} W_\mu^- + \right. \\ \left. + \bar{q}_i^{0(u)} \gamma^\mu q_i^{0(u)} \left[ eQ^{(u)} A_\mu + \frac{g}{4 \cos \theta_W} (1 - 4Q^{(u)} \sin^2 \theta_W) Z_\mu \right] + \right. \\ \left. + \bar{q}_i^{0(d)} \gamma^\mu q_i^{0(d)} \left[ eQ^{(d)} A_\mu - \frac{g}{4 \cos \theta_W} (1 + 4Q^{(d)} \sin^2 \theta_W) Z_\mu \right] + \right. \\ \left. + \frac{g}{4 \cos \theta_W} (\bar{q}_i^{0(u)} \gamma^\mu \gamma^5 q_i^{0(u)} - \bar{q}_i^{0(d)} \gamma^\mu \gamma^5 q_i^{0(d)}) Z_\mu \right\} \end{aligned}$$

— лагранжиан взаимодействия кварков с калибровочными полями.

В этой формуле  $Q^{(u)} = \frac{2}{3}$  — заряд верхних кварков и  $Q^{(d)} = -\frac{1}{3}$  — заряд нижних кварков.

Вводя так же, как для лептонов, электромагнитный ток кварков

$$\mathcal{J}_{em}^\mu = \sum_{i=1}^3 (Q^{(u)} \bar{q}_i^{0(u)} \gamma^\mu q_i^{0(u)} + Q^{(d)} \bar{q}_i^{0(d)} \gamma^\mu q_i^{0(d)}) \quad (6.3.8)$$

и слабые заряженный  $\mathcal{J}^\mu$  и нейтральный  $\mathcal{J}_0^\mu$  токи

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\mu &= 2 \sum_{i=1}^3 \bar{q}_{iL}^{0(d)} \gamma^\mu q_{iL}^{0(u)}, \\ \mathcal{J}_0^\mu &= 2\mathcal{J}_3^\mu - 4 \sin^2 \theta_W \mathcal{J}_{em}^\mu, \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

где

$$\mathcal{J}_3^\mu = \sum_{i=1}^3 \bar{q}_{iL}^{0(u)} \gamma^\mu \tau_3 q_{iL}^{0(u)} \equiv \sum_{i=1}^3 (\bar{q}_{iL}^{0(u)} \gamma^\mu q_{iL}^{0(u)} - \bar{q}_{iL}^{0(d)} \gamma^\mu q_{iL}^{0(d)}),$$

представим лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{int}}(W, B, q)$  в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(W, B, q) = \\ = e\mathcal{J}_{em}^\mu A_\mu + \frac{g}{4 \cos \theta_W} \mathcal{J}_0^\mu Z_\mu + \frac{g}{2\sqrt{2}} (\mathcal{J}^\mu W_\mu + \mathcal{J}^{\mu+} W_\mu^+). \end{aligned} \quad (6.3.10)$$



Эти формулы, описывающие взаимодействие кварков с калибровочными полями, аналогичны формулам (6.2.28) и (6.2.29), описывающим взаимодействие лептонов с калибровочными полями.

**6.3.2. Спонтанное нарушение симметрии и массы кварков.** Взаимодействие кварков со скалярными полями (которое, как мы увидим, приводит после спонтанного нарушения симметрии к возникновению масс кварков) вводится в основном так же, как взаимодействие лептонов со скалярными полями. Отличие состоит лишь в том, что в случае лептонов нейтрино оставались безмассовыми и, кроме того, предполагалось наличие трех точных законов сохранения лептонных чисел: электронного, мюонного и  $\tau$ -лептонного. Поэтому исходные лептонные поля после взаимодействия с хиггсовскими полями не смешивались и приобретали вполне определенную массу. В случае же кварков не только нижние, но и верхние кварки должны приобрести (в результате взаимодействия с хиггсовскими полями и спонтанного нарушения симметрии) массу. Кроме того, вследствие слабого взаимодействия возможны процессы, переводящие кварки одного мультиплета в кварки другого мультиплета (так как в слабом взаимодействии, в отличие от сильного и электромагнитного, не сохраняются «ароматы», т. е. такие квантовые числа, как странность, чарм и т. д.).

Рассмотрим вначале механизм возникновения масс нижних кварков.  $SU(2) \times U(1)$ -инвариантный лагранжиан взаимодействия кварков с хиггсовским дублетом скалярных полей (см. (6.1.21)) имеет вид

$$\mathcal{L}^{(d)}(q, \varphi) = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \{ (\bar{q}_{iL} \varphi) \Gamma_{ij}^{(d)} q_{jR}^{0(d)} + \text{э. с.} \}, \quad (6.3.11)$$

где  $\Gamma_{ij}^{(d)}$  — элементы  $3 \times 3$ -матрицы констант взаимодействия поля  $\varphi$  с кварками разных сортов (матрица  $\Gamma^{(d)}$  может быть комплексной). Чтобы выделить из этого лагранжиана массовые члены, квадратичные по полям кварков, заменим выражение (6.2.3) для  $\varphi$  на  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$ .

В результате получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^{(d)}(q) &= - \sum_{ij=1}^3 (\bar{q}_{iL}^{0(d)} M_{ij}^{(d)} q_{jR}^{0(d)} + \text{э. с.}) \equiv \\ &\equiv - (\bar{q}_L^{0(d)} M^{(d)} q_R^{0(d)} + \text{э. с.}), \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

где

$$M^{(d)} = \frac{f}{\sqrt{2}} \Gamma^{(d)}, \quad \bar{q}_{L,R}^{0(d)} = (\bar{d}_{L,R}^0, \bar{s}_{L,R}^0, \bar{b}_{L,R}^0) \quad (6.3.13)$$

(отметим, что если бы в формуле (6.3.11) вместо  $q_R^{0(d)}$  мы использовали  $q_R^{(d)}$ , то массовый лагранжиан не удовлетворял бы требованию сохранения электрического заряда). Матрица  $M^{(d)}$  называется массовой; она может быть всегда представлена в виде

$$M^{(d)} = U_L^{(d)+} m^{(d)} U_R^{(d)}, \quad (6.3.14)$$

где  $m^{(d)}$  — диагональная матрица

$$m^{(d)} = \begin{pmatrix} m_d & 0 \\ & m_s \\ 0 & m_b \end{pmatrix}$$

с положительными элементами  $m_d, m_s, m_b$ , а  $U_L^{(d)}, U_R^{(d)}$  — две унитарные матрицы. В результате массовый лагранжиан можно преобразовать к виду

$$\mathcal{L}_m^{(d)}(q) = -(\bar{q}_L^{(d)} m^{(d)} q_R^{(d)} + \text{э. с.}) = -(m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s + m_b \bar{b}b), \quad (6.3.15)$$

где

$$q_L^{(d)} = U_L^{(d)} q_L^{0(d)}, \quad q_R^{(d)} = U_R^{(d)} q_R^{0(d)}. \quad (6.3.16)$$

Таким образом, величины  $m_d, m_s, m_b$  играют роль масс нижних кварков, а величины  $q_L^{(d)}, q_R^{(d)}$  — роль полей физических кварков с определенными массами (эти поля определяются с точностью до фазовых множителей).

Аналогично можно придать массы и верхним кваркам. Для этого введем сопряженный дублет скалярных полей

$$\varphi^c = i\tau_2 \varphi^* = \begin{pmatrix} \varphi^0 + i\varphi^3 \\ -\varphi^2 + i\varphi^1 \end{pmatrix}, \quad \varphi^0 = f + \chi, \quad (6.3.17)$$

который преобразуется при преобразованиях группы  $SU(2)$  так же, как дублет  $\varphi$  (гиперзаряд поля  $\varphi^c$  равен  $-1$ ).  $SU(2) \times U(1)$ -инвариантный лагранжиан взаимодействия кварков с хиггсовским дублетом  $\varphi^c$  имеет вид

$$\mathcal{L}^{(u)}(q, \varphi) = -\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \{(\bar{q}_{iL}^0 \varphi^c) \Gamma_{ij}^{(u)} q_{jR}^{0(u)} + \text{э. с.}\}, \quad (6.3.18)$$

где  $\Gamma_{ij}^{(u)}$  — элементы некоторой комплексной  $3 \times 3$ -матрицы. Подставляя в эту формулу вместо  $\varphi^c$  дублет (см. (6.2.3))

$$\varphi^c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

получаем массовый лагранжиан в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^{(u)}(q) &= -\sum_{i,j=1}^3 (\bar{q}_{iL}^{0(u)} M_{ij}^{(u)} q_{jR}^{0(u)} + \text{э. с.}) \equiv \\ &\equiv -(\bar{q}_L^{0(u)} M^{(u)} q_R^{0(u)} + \text{э. с.}), \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

где

$$M^{(u)} = \frac{f}{\sqrt{2}} \Gamma^{(u)}; \quad \bar{q}_{L,R}^{0(u)} = (\bar{u}_{L,R}^0, \bar{c}_{L,R}^0, \bar{t}_{L,R}^0). \quad (6.3.20)$$

Аналогично (6.3.14) матрицу  $M^{(u)}$  можно привести к диагональному виду с помощью преобразования

$$m^{(u)} = U_L^{(u)} M^{(u)} U_R^{(u)\dagger},$$

где

$$m^{(u)} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ & m_c \\ 0 & m_t \end{pmatrix}$$

( $m_u > 0, m_c > 0, m_t > 0$ ) и  $U_L^{(u)}, U_R^{(u)}$  — два унитарных преобразования. В результате получим

$$\mathcal{L}_m^{(u)}(q) = -(\bar{q}_L^{(u)} m^{(u)} q_R^{(u)} + \text{э. с.}) = -(m_u \bar{u}u + m_c \bar{c}c + m_t \bar{t}t), \quad (6.3.21)$$

где  $m_u, m_c, m_t$  — массы  $u$ -,  $c$ -,  $t$ -кварков и

$$q_L^{(u)} = U_L^{(u)} q_L^{0(u)}, \quad q_R^{(u)} = U_R^{(u)} q_R^{0(u)} \quad (6.3.22)$$

— физические поля массивных кварков.

Таким образом, массовый лагранжиан верхних и нижних кварков определяется формулой

$$\mathcal{L}_m(q) = - \sum_q m_q \bar{q}q. \quad (6.3.23)$$

Легко видеть, что лагранжиан взаимодействия кварков с хиггсовским скалярным бозоном  $\chi$  определяется формулой

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(q, \chi) = - \frac{1}{f} \sum_q m_q \bar{q}q\chi. \quad (6.3.24)$$

**6.3.3. Лагранжиан и токи физических кварков.** Выше мы установили вид лагранжиана безмассовых кварков, взаимодействующих с калибровочными и скалярными полями, и, кроме того, установили связь между полями физических и безмассовых кварков, которая возникает в результате механизма спонтанного нарушения симметрии. Используя соотношения (6.3.16) и (6.3.22), получим лагранжиан физических кварков, т. е. кварков, обладающих ненулевой массой.

Лагранжиан свободных физических кварков, очевидно, определяется формулой

$$\mathcal{L}_0(q) = \sum_q \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q)q. \quad (6.3.25)$$

Здесь суммирование выполняется по всем сортам и по трем цветам физических кварков.

Лагранжиан взаимодействия физических кварков с калибровочными полями определяется формулой (6.3.10), в которой токи кварков должны быть выражены через физические поля кварков. Электромагнитный ток кварков согласно (6.3.8) можно представить в виде

$$\mathcal{J}_{em}^\mu = Q^{(u)}(\bar{q}_L^{0(u)}\gamma^\mu q_L^{0(u)} + \bar{q}_R^{0(u)}\gamma^\mu q_R^{0(u)}) + (u \rightarrow d).$$

Используя формулы (6.3.16), (6.3.22), отсюда находим

$$\mathcal{J}_{em}^\mu = Q^{(u)}\bar{q}^{(u)}\gamma^\mu q^{(u)} + Q^{(d)}\bar{q}^{(d)}\gamma^\mu q^{(d)}. \quad (6.3.26)$$

Аналогичные преобразования легко выполнить для нейтрального тока кварков. В результате получим

$$\mathcal{J}_3^\mu = 2\mathcal{J}_3^\mu - 4 \sin^2 \theta_W \mathcal{J}_{em}^\mu, \quad (6.3.26')$$

$$\mathcal{J}_3^\mu = \bar{q}_L \gamma^\mu \tau_3 q_L = \bar{q}_L^{(u)} \gamma^\mu q_L^{(u)} - \bar{q}_L^{(d)} \gamma^\mu q_L^{(d)}.$$

Таким образом, выражения для электромагнитного и нейтрального токов при переходе от безмассовых полей к физическим полям кварков не изменяются. Это связано с тем, что в электромагнитном и нейтральном токах верхние и нижние кварки не меняются местами.

Перейдем, наконец, к нахождению выражения для заряженного тока в терминах физических полей кварков. Из формул (6.3.16) и (6.3.22) следует, что

$$\mathcal{J}^\mu = 2\bar{q}_L^{(u)}U_L^{(u)+}\gamma^\mu U_L^{(d)}q_L^{(d)},$$

или

$$\mathcal{J}^\mu = 2\bar{q}_L^{(u)}U\gamma^\mu q_L^{(d)}, \quad (6.3.27)$$

где  $U = U_L^{(u)+}U_L^{(d)}$  — унитарная матрица, называемая матрицей смешивания. Ее конкретный вид определяет структуру слабого заряженного тока. Отличные от нуля недиагональные элементы матрицы  $U$  будут приводить к нарушению в слабом взаимодействии законов сохранения таких квантовых чисел, как странность, чарм и др. Рассмотрим вначале случай, когда смешиваются кварки  $u, d, s, c$  [48]:

$$U = \begin{pmatrix} U_c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.3.28)$$

где  $U_c$  —  $2 \times 2$ -матрица смешивания кварков  $(u; c)$  и  $(d, s)$ . Всякая унитарная  $n \times n$ -матрица характеризуется  $n^2$  вещественными параметрами. В случае  $n = 2$  в качестве этих параметров можно выбрать угол  $\theta_c$  и три фазы:  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ , и представить матрицу  $U_c$  в виде

$$U_c = U_1^\dagger O_c U_2, \quad O_c = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}, \quad (6.3.29)$$

где

$$U_1 = e^{i\alpha_0} \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_1} \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_2} \end{pmatrix}.$$

Подставляя (6.3.28) в (6.3.27) и переопределяя поля  $q_L^{(u)}, q_L^{(d)}$ :

$$q_L^{(u)} \rightarrow U_1 q_L^{(u)}, \quad q_L^{(d)} \rightarrow U_2 q_L^{(d)},$$

получаем

$$\mathcal{J}^\mu = 2\bar{q}_L^{(u)}O_c\gamma^\mu q_L^{(d)} + 2\bar{l}_L\gamma^\mu b_L,$$

где  $\bar{q}_L^{(u)} = (\bar{u}_L, \bar{c}_L)$ ,  $\bar{q}_L^{(d)} = (\bar{d}_L, \bar{s}_L)$ . Очевидно, что при указанном переопределении полей электромагнитный и нейтральный токи, а также свободный лагранжиан физических кварков не изменяются.

Используя явное выражение для матрицы  $O_c$ , находим

$$\mathcal{J}^\mu = 2\bar{u}_L\gamma^\mu d_L + 2\bar{c}_L\gamma^\mu s_L + 2\bar{l}_L\gamma^\mu b_L, \quad (6.3.30)$$

где

$$d_L = d_L \cos \theta_c + s_L \sin \theta_c; \quad s_L = s_L \cos \theta_c - d_L \sin \theta_c. \quad (6.3.31)$$

Угол  $\theta_c$  называется углом Кабибо [50], причем  $\theta_c = 13^\circ$  ( $\sin \theta_c = 0,226 \pm 0,009$  [10]). Таким образом, в выражение для заряженного

тока вошли суперпозиции  $d$ - и  $s$ -кварков. Вследствие этого в процессах слабого взаимодействия, обусловленных обменом заряженным  $W$ -бозоном при  $\theta_c \neq 0$ , происходит нарушение законов сохранения странности  $s$  и чарма  $c$ , которые имели место в сильном взаимодействии (очевидно, что в низшем порядке теории возмущений  $\Delta s = 0, \pm 1$  и  $\Delta c = 0, \pm 1$ ).

Отметим, что найденный нами лагранжиан не содержит комплексных констант связи и, следовательно, является  $T$ -инвариантным, поэтому также и  $CP$ -инвариантным (вследствие  $CPT$ -теоремы). Вместе с тем в слабом взаимодействии с участием странных кварков  $s$  нарушается  $CP$ -инвариантность. Покажем, что это нарушение можно объяснить, если ввести смешивание в системе шести кварков [49]. В этом случае  $3 \times 3$ -матрица смешивания  $U$  зависит от девяти вещественных параметров. В качестве этих параметров можно выбрать три угла Эйлера  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  ортогонального преобразования и шесть фаз  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) унитарных преобразований. Пять фаз можно устранить переопределением кварковых полей без изменения электромагнитного и нейтрального токов. Остальные четыре параметра (три угла  $\vartheta_i$  и фаза  $\delta$ ) определяют существенную зависимость матрицы смешивания  $U$  от физических параметров. Согласно [49], матрица  $U$  представляется в виде

$$U = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & -c_1 s_2 c_3 - c_2 s_3 e^{i\delta} & -c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}, \quad (6.3.32)$$

где  $c_i = \cos \vartheta_i$ ;  $s_i = \sin \vartheta_i$ . Наличие фазы  $\delta$  в лагранжиане заряженного тока обуславливает нарушение  $CP$ -инвариантности, свидетельствующее о том, что число кварков должно быть больше четырех.

Матрица  $U$  переходит в матрицу (6.3.28), если положить  $\vartheta_1 = \vartheta_c, \vartheta_2 = \vartheta_s = 0, \delta = 0$ .

## § 6.4. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОСЛАБОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

**6.4.1. Квантование свободных полей.** Имея лагранжиан электрослабого взаимодействия и применяя процедуру канонического квантования, можно построить квантовую теорию электрослабого взаимодействия. Рассмотрим свободные поля, а затем построим матрицу  $S$ , которая описывает различные процессы рассеяния, обусловленные электрослабым взаимодействием.

Начнем с квантования свободного поля  $Z$ -бозонов. Лагранжиан свободного поля  $Z$ -бозонов согласно (6.2.19) определяется формулой

$$\mathcal{L}_0(Z) = -\frac{1}{4} (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu Z_\mu)^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu. \quad (6.4.1)$$

Уравнения поля, соответствующие этому лагранжиану, имеют вид

$$\partial^\mu \partial_\mu Z_\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\nu \partial^\mu Z_\mu + m_Z^2 Z_\nu = 0. \quad (6.4.2)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$(\partial^\nu \partial_\nu + m_Z^2 \xi) \partial^\mu Z_\mu = 0.$$

Если в соответствии с этим уравнением будем считать  $\partial^\mu Z_\mu = 0$ , то уравнение (6.4.2) перейдет в уравнение для векторного поля (см. п. 1.4.2). При этом мы исключаем из рассмотрения поле  $\partial^\mu Z_\mu$ , частицы которого обладают нулевым спином. В квантовой теории, в которой поля  $Z_\mu(x)$  представляют собой операторы, а перестановочные соотношения находятся на основе лагранжиана (6.4.1) (см. далее), мы не можем считать  $\partial_\mu Z^\mu = 0$ .

Чтобы установить одновременные перестановочные соотношения для поля  $Z_\mu$ , найдем обобщенные импульсы  $\partial \mathcal{L}_0 / \partial \partial_0 Z_\mu$ , соответствующие обобщенным координатам  $Z_\mu$ . Согласно (6.4.1)

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_0 Z_0} = -\frac{1}{\xi} (\partial_0 Z^0 + \partial_k Z^k), \quad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_0 Z_k} = \partial_0 Z_k - \partial_k Z_0.$$

Поэтому, учитывая, что обобщенные координаты  $Z_\mu(x)$  коммутируют друг с другом в один и тот же момент времени:

$$[Z_\mu(x), Z_\nu(x')]_{t=t'} = 0 \quad (6.4.3)$$

и принимая во внимание, что

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}_0(x)}{\partial \partial_0 Z_k}, Z_l(x') \right]_{t=t'} = -i \delta_{kl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_0(x)}{\partial \partial_0 Z_0}, Z_0(x') \right]_{t=t'} = -i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

получаем

$$[\partial_0 Z_\mu(x), Z_\nu(x')]_{t=t'} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu, \\ -i \delta_{kl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), & \mu = k, \nu = l, \\ i \xi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), & \mu = \nu = 0. \end{cases} \quad (6.4.4)$$

Подчеркнем, что эти формулы, как и уравнения поля (6.4.2), относятся к гейзенберговскому представлению свободного поля  $Z$ -бозонов, в котором операторы поля зависят от времени.

Так как поля  $Z_\mu(x)$  удовлетворяют уравнению (6.4.2), то разновременной коммутатор  $[Z_\mu(x), Z_\nu(x')]$  удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \partial^\lambda \partial_\lambda \delta_\rho^\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\rho \partial^\mu + m_Z^2 \delta_\rho^\mu \right\} [Z_\mu(x), Z_\nu(x')] = 0.$$

Коммутатор  $[Z_\mu(x), Z_\nu(x')]$  однозначно определяется этим уравнением и начальными условиями (6.4.3), (6.4.4). Поскольку начальные условия представляют собой  $c$ -числовые функции, то и коммутатор  $[Z_\mu(x), Z_\nu(x')]$  должен быть  $c$ -числовой функцией

$$[Z_\mu(x), Z_\nu(x')] = i \Delta_{\mu\nu}(x - x'; \xi). \quad (6.4.5)$$

Покажем, что функция  $i \Delta_{\mu\nu}$ , где

$$\Delta_{\mu\nu}(x - x'; \xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{c_0} d^4 k e^{-ik(x-x')} \left\{ \frac{1}{m_Z^2 - k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{1}{m_Z^2 - k^2 \xi^{-1}} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\} \quad (6.4.6)$$

и контур  $C_0$  в плоскости  $k_0$  (рис. 56) охватывает полюса подынтегрального выражения  $k_0 = \pm \sqrt{m_Z^2 + k^2} \equiv \pm k_{01}$  и  $k_0 = \pm \sqrt{\xi m_Z^2 + k^2} \equiv \pm k_{02}$  и обходится по часовой стрелке, удовлетворяет волновому уравнению (6.4.2) и начальным условиям (6.4.4) (полюса  $k_0 = \pm |k|$  в подынтегральном выражении отсутствуют). Действительно,

$$\begin{aligned} & \left( \partial^\lambda \partial_\lambda \delta_\rho^\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\rho \partial^\mu + m_Z^2 \delta_\rho^\mu \right) \Delta_{\mu\nu}(x - x'; \xi) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4 k e^{-ik(x-x')} \left\{ g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{k^2} + \frac{k_\rho k_\nu}{k^2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

(слагаемое  $g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{k^2}$  порождено поперечной частью функции  $\Delta_{\mu\nu}$ , а слагаемое  $\frac{k_\rho k_\nu}{k^2}$  — продольной). Так как подынтегральное выражение

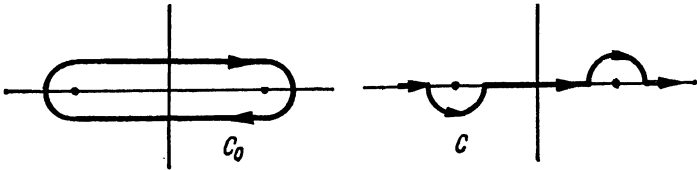


Рис. 56

представляет собой аналитическую функцию  $k_0$ , не имеющую полюсов внутри контура  $C_0$ , то интеграл в правой части приведенного равенства обращается в нуль. Убедимся, что удовлетворяются также одно-временные перестановочные соотношения (6.4.4). Действительно, используя формулу

$$\oint \frac{g(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum \frac{g(z_i)}{f'(z_i)}$$

(суммирование выполняется по простым нулям  $z_i$  аналитической функции  $f(z)$ , содержащимся внутри контура интегрирования;  $g(z)$  — аналитическая функция внутри контура интегрирования), получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}(x - x'; \xi) |_{t=t'} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 k (-2\pi i) e^{ik(x-x')} \times \\ & \times \left\{ -\frac{1}{2k_{01}} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \right)_{k_0=k_{01}} + \frac{1}{2k_{01}} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \right)_{k_0=-k_{01}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2k_{02}} \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \Big|_{k_0=k_{02}} + \frac{1}{2k_{02}} \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \Big|_{k_0=-k_{02}} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом находим

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Delta_{\mu\nu}(x - x'; \xi)}{\partial t} \Big|_{t=t'} &= \frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int d^3 k e^{ik(x-x')} \left\{ \frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \right)_{k_0=k_{01}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \right)_{k_0=-k_{01}} + \frac{1}{2} \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \Big|_{k_0=k_{02}} + \frac{1}{2} \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \Big|_{k_0=-k_{02}} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$i \frac{\partial \Delta_{\mu\nu}(x-x'; \xi)}{\partial t} \Big|_{t=t'} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu, \\ -i\delta_{kl}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), & \mu = l, \nu = k, \\ i\xi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), & \mu = \nu = 0, \end{cases}$$

что находится в соответствии с формулой (6.4.4). Таким образом, разновременной коммутатор поля  $Z$ -бозонов определяется формулами (6.4.5), (6.4.6).

Определим вакуум  $\Phi_0$  поля  $Z$ -бозонов формулой

$$Z_{\mu}^{(+)}(x)\Phi_0 = 0, \quad (6.4.7)$$

где  $Z_{\mu}^{(+)}(x)$  — положительно частотная часть поля  $Z_{\mu}(x)$ . Функция распространения (пропатор) поля  $Z_{\mu}(x)$  определяется формулой

$$i\Delta_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi) = (\Phi_0, T\{Z_{\mu}(x)Z_{\nu}(x')\}\Phi_0), \quad (6.4.8)$$

или с учетом определения вектора состояния вакуума формулой

$$i\Delta_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi) = \begin{cases} [Z_{\mu}^{(+)}(x), Z_{\nu}^{(-)}(x')], & t > t', \\ -[Z_{\mu}^{(-)}(x), Z_{\nu}^{(+)}(x')], & t < t'. \end{cases}$$

Используя определение перестановочной функции  $\Delta_{\mu\nu}(x-x'; \xi)$ , отсюда находим

$$\Delta_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi) = \begin{cases} \Delta_{\mu\nu}^{(+)}(x-x'; \xi), & t > t', \\ -\Delta_{\mu\nu}^{(-)}(x-x'; \xi), & t < t' \end{cases}$$

(знаки «+» и «-» служат для обозначения положительно и отрицательно частотных частей функции  $\Delta_{\mu\nu}$ ). Поэтому согласно (6.4.6)

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^c(x; \xi) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4k e^{-ikx} \left\{ \frac{1}{m_Z^2 - k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right) + \frac{1}{m_Z^2 - k^2\xi^{-1}} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right\}, \end{aligned}$$

где контур интегрирования в плоскости  $k_0$  изображен на рис. 56. Отсюда следует, что фурье-компонента функции

$$\Delta_{\mu\nu}^c(x; \xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikx} \Delta_{\mu\nu}^c(k; \xi) \quad (6.4.9)$$

определяется формулой

$$\Delta_{\mu\nu}^c(k; \xi) = \frac{1}{m_Z^2 - k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right) + \frac{1}{m_Z^2 - k^2\xi^{-1}} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \quad (6.4.10)$$

(при этом необходимо помнить, что  $k^2 \rightarrow k^2 + i0$ , см. п. 2.3.3).

Видно, что при  $\xi < \infty$  пропатор убывает в области больших  $k$ . При  $\xi = 1$  он соответствует фейнмановской калибровке

$$\Delta_{\mu\nu}^c(k; 1) = \frac{g_{\mu\nu}}{m_Z^2 - k^2},$$



при  $\xi = 0$  — калибровке Ландау

$$\Delta_{\mu\nu}^c(k; 0) = \frac{1}{m_Z^2 - k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

и, наконец, при  $\xi = \infty$  пропатор не убывает в области больших  $k$  и имеет вид

$$\Delta_{\mu\nu}^c(k; \infty) = \frac{1}{m_Z^2 - k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \right).$$

Он совпадает с пропатором векторного поля частиц со спином 1 (уравнение Прока; см. п. 2.3.4).

Рассмотрим свободное поле  $W$ -бозонов. Лагранжиан этого поля согласно (6.2.18) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(W) = & -\frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) (\partial^\mu W^{\nu\dagger} - \partial^\nu W^{\mu\dagger}) - \frac{1}{\xi} \partial^\mu W_\mu \partial^\nu W_\nu^\dagger + \\ & + m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu. \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

Поступая так же, как и в случае  $Z$ -бозонов, из этого уравнения находим уравнения поля

$$\partial^\mu \partial_\mu W_\nu - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\nu \partial^\mu W_\mu + m_W^2 W_\nu = 0 \quad (6.4.12)$$

и разновременные перестановочные соотношения

$$[W_\mu(x), W_\nu^\dagger(x')] = i\Delta_{\mu\nu}^W(x - x'; \xi), \quad (6.4.13)$$

$$[W_\mu(x), W_\nu(x')] = [W_\mu^\dagger(x), W_\nu^\dagger(x')] = 0,$$

где функция  $\Delta_{\mu\nu}^W$  определяется формулой (6.4.6) с заменой  $m_Z$  на  $m_W$ .

Определяя вакуум поля  $W$ -бозонов формулой

$$W_\mu^{(+)}(x) \Phi_0 = W_\mu^{+(+)}(x) \Phi_0 = 0, \quad (6.4.14)$$

для пропаторов получаем выражения

$$\underbrace{W_\mu(x) W_\nu^\dagger(x')} \equiv (\Phi_0, T \{W_\mu(x) W_\nu^\dagger(x')\} \Phi_0) = i\Delta_{\mu\nu}^{Wc}(x - x'; \xi); \quad (6.4.15)$$

$$\underbrace{W_\mu(x) W_\nu(x')} = \underbrace{W_\mu^\dagger(x) W_\nu^\dagger(x')} = 0,$$

где функция  $\Delta_{\mu\nu}^{Wc}$  определяется формулой (6.4.10) с заменой  $m_Z$  на  $m_W$ .

Пропатор электромагнитного поля определяется формулой (2.4.53), а пропатор лептонных полей (или кварков) — формулой (4.4.46), в которой вместо массы электрона используется масса соответствующего лептона (или кварка).

Нетривиальные (отличные от нуля) пропаторы скалярных полей определяются формулами

$$\underbrace{\Phi(x) \Phi^\dagger(x')} = (\Phi_0, T \{\Phi(x) \Phi^\dagger(x')\} \Phi_0) = i\Delta_\Phi^c(x - x'),$$

$$\underline{\chi(x)\chi(x')} = i\Delta_\chi^c(x-x'), \quad (6.4.16)$$

$$\underline{\varphi^3(x)\varphi^3(x')} = i\Delta_\varphi^c(x-x'),$$

в которых функции  $\Delta_\Phi^c$ ,  $\Delta_\chi^c$ ,  $\Delta_\varphi^c$  определяются формулой (2.3.35) с заменой массы электрона на массы скалярных частиц:

$$m_\varphi = \sqrt{\xi} m_W, \quad m_\chi, \quad m_\varphi = \sqrt{\xi} m_Z. \quad (6.4.17)$$

Выражения для пропэгаторов фермионных скалярных духов приведены в списке пропэгаторов электрослабого взаимодействия (в связи с этим см. выражение (6.2.58) для лагранжиана  $\mathcal{L}_0(C)$ ).

**6.4.2. Разложение векторных полей по плоским волнам.** Обратимся к уравнению (6.4.2) для поля  $Z$ -бозонов. Поле  $Z_\nu(x)$  всегда можно представить в виде

$$Z_\nu(x) = Z_\nu^{(t)}(x) + \frac{1}{m_Z} \partial_\nu Z(x), \quad (6.4.18)$$

где  $Z_\nu^{(t)}(x)$  — поперечная ( $\partial^\nu Z_\nu^{(t)}(x) = 0$ ) часть поля  $Z_\nu(x)$  и  $m_Z^{-1} \partial_\nu Z(x)$  — продольная часть поля  $Z_\nu(x)$ . Подставляя (6.4.18) в (6.4.2), получаем уравнение

$$\partial^\mu \partial_\mu Z_\nu^{(t)} + m_Z^2 Z_\nu^{(t)} = 0 \quad (6.4.19)$$

для поперечного поля  $Z_\nu^{(t)}$  и уравнение

$$\partial^\mu \partial_\mu Z + \xi m_Z^2 Z = 0 \quad (6.4.20)$$

для скалярного поля  $Z(x)$ . Поля  $Z_\nu^{(t)}(x)$  и  $Z(x)$  можно разложить по плоским волнам

$$Z_\nu^{(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{e_{k\nu}^{(\lambda)} a_{k\lambda} e^{-ikx} + e_{k\nu}^{(\lambda)*} a_{k\lambda}^\dagger e^{ikx}\}, \quad k^2 = m_Z^2, \quad (6.4.21)$$

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_\xi}} \{a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx}\} \quad k^2 = m_Z^2 \xi.$$

В первой из этих формул  $\omega = +\sqrt{k^2 + m_Z^2}$ , а во второй  $\omega_\xi = +\sqrt{k^2 + m_Z^2 \xi}$ . Величины  $e_{k\nu}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ) представляют собой векторы поляризации, которые удовлетворяют соотношениям

$$e_{k\nu}^{(\lambda)} k^\nu = 0, \quad \lambda = 1, 2, 3. \quad (6.4.22)$$

Коэффициенты разложения  $a_{k\lambda}$ ,  $a_k$  являются операторами, удовлетворяющими определенным перестановочным соотношениям (см. далее).

Так как векторы поляризации  $e_{k\nu}^{(\lambda)}$  — пространственноподобны (они ортогональны времениподобному вектору  $k^\nu$ ), то условие ортогональности для них можно записать в виде

$$e_{k\mu}^{(\lambda)} e_k^{(\lambda')\mu*} = -\delta_{\lambda\lambda'}. \quad (6.4.23)$$

Дополним векторы  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ) вектором  $e_{k\mu}^{(0)} \equiv \frac{k_\mu}{m_Z}$  до полной системы векторов в 4-пространстве. Очевидно, векторы  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 0, 1, 2, 3$ ) согласно (6.4.22) и (6.4.23) удовлетворяют условиям ортогональности

$$e_{k\mu}^{(\lambda)} e_k^{(\lambda')\mu*} = \zeta_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \zeta_\lambda = \begin{cases} 1, & \lambda = 0, \\ -1, & \lambda = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (6.4.24)$$

Так как произвольный вектор  $f_\mu$  можно разложить по векторам  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$ :

$$f_\mu = \sum_{\lambda=0}^3 c_\lambda e_{k\mu}^{(\lambda)}, \quad c_\lambda = f_\mu e_k^{(\lambda)\mu*} \zeta_\lambda,$$

то

$$\sum_{\lambda=0}^3 e_{k\mu}^{(\lambda)} e_k^{(\lambda)\nu*} \zeta_\lambda = \delta_\mu^\nu. \quad (6.4.25)$$

Поэтому

$$\sum_{\lambda=0}^3 e_{k\mu}^{(\lambda)} e_{k\nu}^{(\lambda)*} \zeta_\lambda = g_{\mu\nu}, \quad \sum_{\lambda=1}^3 e_{k\mu}^{(\lambda)} e_{k\nu}^{(\lambda)*} = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2}.$$

Векторы  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  для  $\lambda = 1, 2, 3$  можно выбрать, в частности, в виде

$$e_{k\mu}^{(1)} = (0, \mathbf{e}_k^{(1)}), \quad e_{k\mu}^{(2)} = (0, \mathbf{e}_k^{(2)}), \quad e_{k\mu}^{(3)} = \left( \frac{|\mathbf{k}|}{m_Z}, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \frac{k_0}{m_Z} \right),$$

где  $\mathbf{e}_k^{(1)}$ ,  $\mathbf{e}_k^{(2)}$  — пространственные части векторов поперечной поляризации  $e_{k\mu}^{(1)}$ ,  $e_{k\mu}^{(2)}$  ( $\mathbf{e}_k^{(1)}$ ,  $\mathbf{e}_k^{(2)}$  ортогональны друг другу и вектору  $\mathbf{k}$ ).

Покажем, что операторы  $a_{k\lambda}$ ,  $a_k$  удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[a_{k\lambda}, a_{k'\lambda'}^\dagger] = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad [a_k, a_k^\dagger] = -\delta_{kk'} \quad (6.4.26)$$

(остальные коммутаторы обращаются в нуль). Для этого достаточно доказать, что  $Z_\nu(x)$ , определяемое формулами (6.4.18), (6.4.21) и перестановочным соотношениям (6.4.26), удовлетворяет перестановочным соотношениям (6.4.5). С этой целью отметим, что

$$[Z_\nu(x), Z_\mu(x')] = [Z_\nu^{(t)}(x), Z_\mu^{(t)}(x')] + \frac{1}{m_Z^2} \partial_\nu \partial'_\mu [Z(x), Z(x')], \quad (6.4.27)$$

где

$$[Z_\nu^{(t)}(x), Z_\mu^{(t)}(x')] = \frac{1}{V} \sum_{k\lambda=1}^3 \frac{1}{2\omega} \{ e_{k\nu}^{(\lambda)} e_{k\mu}^{(\lambda)*} e^{-ik(x-x')} - e_{k\nu}^{(\lambda)*} e_{k\mu}^{(\lambda)} e^{ik(x-x')} \};$$

$$[Z(x), Z(x')] = -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \{ e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')} \}.$$

Используя условия полноты (6.4.25), эти формулы можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 [Z_\nu^{(t)}(x), Z_\mu^{(t)}(x')] &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4k \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m_Z^2} \left( -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \right), \\
 [Z(x), Z(x')] &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4k \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - \xi m_Z^2}.
 \end{aligned} \tag{6.4.28}$$

Мы учли при этом, что

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega} (e^{-ikx} - e^{ikx}) &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{\sin \omega t}{\omega} = \\
 &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2},
 \end{aligned}$$

где контур интегрирования  $C_0$  в плоскости  $k_0$  обходится по часовой стрелке и охватывает оба полюса подынтегрального выражения (см. п. 2.3.1).

Поле  $Z_\nu^{(t)}(x)$  представляет собой векторное поле, уже рассмотренное в п. 2.3.4, а поле  $Z(x)$  — скалярное поле, которое мы рассматривали в п. 2.3.1. Однако в отличие от условий коммутации в п. 2.3.1 здесь коммутатор  $[Z(x), Z(x')]$  отличается знаком от коммутатора в п. 2.3.1. Это объясняется тем, что  $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ . Необходимость же последнего из соотношений (6.4.26) связана с тем, что мы должны получить формулу (6.4.5) для коммутатора  $[Z_\nu(x), Z_\mu(x')]$ . Подставляя (6.4.28) в (6.4.27), получаем

$$\begin{aligned}
 [Z_\nu(x), Z_\mu(x')] &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4k e^{-ik(x-x')} \left\{ \frac{1}{k^2 - m_Z^2} \left( -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{m_Z^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi m_Z^2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.4.29}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{m_Z^2} \left( \frac{1}{k^2 - m_Z^2} - \frac{1}{k^2 - \xi m_Z^2} \right) = \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{k^2 - m_Z^2} - \frac{1}{k^2 \xi^{-1} - m_Z^2} \right),$$

приходим к формуле (6.4.5).

Обратим внимание на то, что подынтегральное выражение в (6.4.5) (как и в пропагаторах (6.4.9)) убывает в области больших  $k$ . Это связано с тем, что в формуле (6.4.29) слагаемые входят с разными знаками, что в свою очередь связано с наличием знака минус во втором из перестановочных соотношений (6.4.26). Так как вакуум поля  $Z$ -бозонов мы определяли формулой (6.4.21), то оператор  $a_{\mathbf{k}}$  является оператором уничтожения (а не рождения!). А это приводит к индефинитной метрике в пространстве скалярных духов поля  $Z_\mu(x)$ . Видно, что в квантовой теории векторного поля  $Z_\mu(x)$  с убывающими пропагаторами векторное поле нельзя рассматривать независимо от

скалярного, как, казалось бы, можно делать, если исходить из того, что неприводимые векторное  $Z_{\nu}^{(t)}$  и скалярное  $Z$  поля относятся к различным представлениям группы Лоренца. В действительности, в квантовой теории мы должны их рассматривать вместе, чтобы получить перенормируемую теорию, но при этом гильбертово пространство скалярных частиц (духов) должно обладать индефинитной метрикой.

Разложение, аналогичное (6.4.21), имеет место и для поля  $W$ -бозонов:

$$W_{\mu} = W_{\mu}^{(t)} + \frac{1}{m_W^2} \partial_{\mu} W, \quad (6.4.30)$$

где

$$W_{\mu}^{(t)} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\kappa\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{ e_{\kappa\mu}^{(\lambda)} b_{\kappa\lambda} e^{-ikx} + e_{\kappa\mu}^{(\lambda)\dagger} \bar{b}_{\kappa\lambda} e^{ikx} \},$$

$$\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_W^2}. \quad (6.4.31)$$

Здесь  $b_{\kappa\lambda}$ ,  $\bar{b}_{\kappa\lambda}$  — операторы уничтожения  $W^+$ - и  $W^-$ -бозонов (векторы поляризации  $e_{\kappa\mu}^{(\lambda)}$  определяются формулами, аналогичными формулам для  $Z$ -бозонов). Разложений для поля духов скалярных  $W$ -бозонов мы здесь не приводим.

Приведем еще разложение на плоские волны реальных хиггсовских бозонов:

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (c_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{ikx}), \quad (6.4.32)$$

где  $c_{\mathbf{k}}$ ,  $c_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  — операторы уничтожения и рождения хиггсовских бозонов, удовлетворяющие соотношениям коммутации

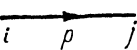
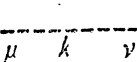
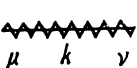
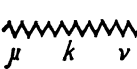
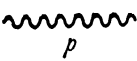
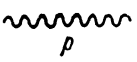
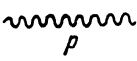
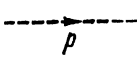
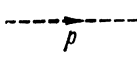
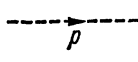
$$[c_{\mathbf{k}}, c_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (6.4.33)$$

**6.4.3. Матрица рассеяния и правила Фейнмана.** Зная лагранжиан электрослабого взаимодействия, по формуле (2.1.13) можно найти плотность гамильтониана электрослабого взаимодействия и тем самым определить плотность гамильтониана взаимодействия полей  $\omega_{\text{int}}(x)$ . После этого матрицу рассеяния можно определить, согласно общей формуле

$$S = T \exp \left( -i \int d^4x \omega_{\text{int}}(x) \right).$$

При этом, однако,  $\omega_{\text{int}}(x)$  не является релятивистским инвариантом, так как лагранжиан взаимодействия (который является релятивистским инвариантом) содержит, как и в хромодинамике, производные от полей (в отличие от квантовой электродинамики). Связи между полями представляют собой релятивистски-ковариантные величины. Поскольку в гамильтониан взаимодействия входят производные полей, то нам необходимы также связи между производными полей. Эти

## Пропагаторы электрослабого взаимодействия

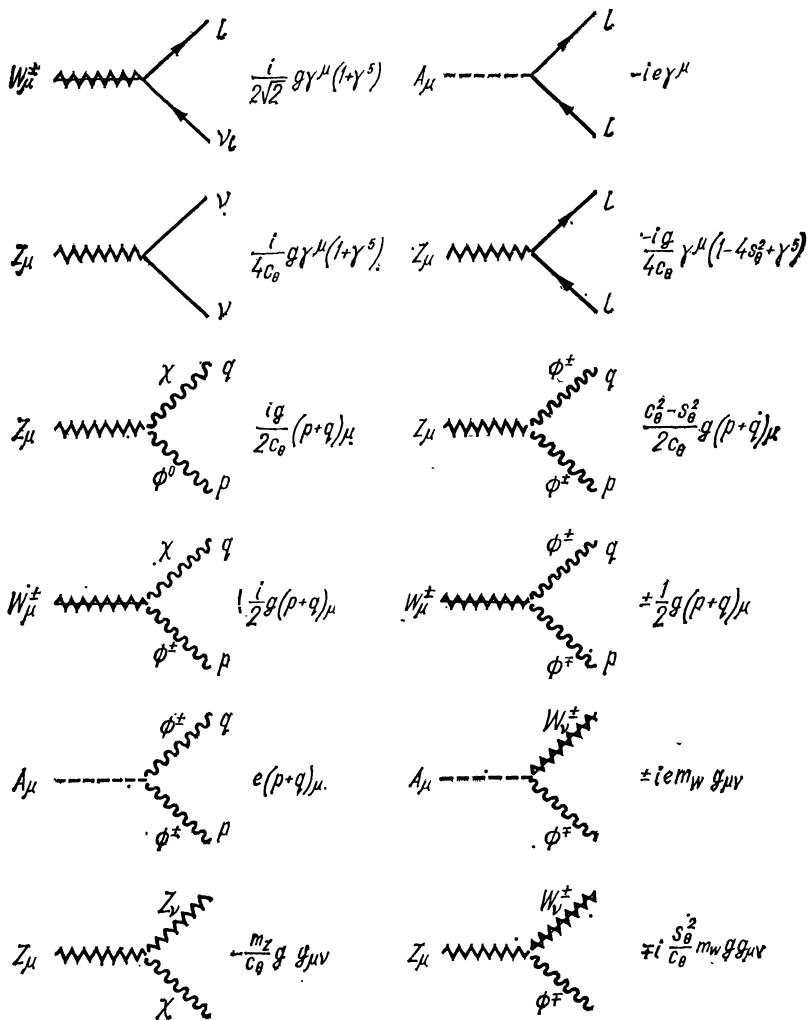
Лептон		$\frac{i}{\hat{p} - m_l + i0} \delta_{ij}$
Фотон		$(-i) \frac{1}{k^2 + i0} \left\{ g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\}$
$W^\pm$ -бозон		$(-i) \frac{1}{k^2 - m_W^2 + i0} \left\{ g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi m_W^2} \right\}$
Z-бозон		$(-i) \frac{1}{k^2 - m_Z^2 + i0} \left\{ g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi m_Z^2} \right\}$
$\chi$ -бозон		$\frac{1}{p^2 - m_\chi^2 + i0}$
$\phi^?$ -бозон		$\frac{1}{p^2 - \xi m_\phi^2 + i0}$
$\phi^\pm$ -бозон		$\frac{1}{p^2 - \xi m_\phi^2 + i0}$
$C^\pm$ -шпурин		$\frac{1}{p^2 - \xi m_C^2 + i0}$
$C_Z$ -шпурин		$\frac{1}{p^2 - \xi m_C^2 + i0}$
$C_A$ -шпурин		$\frac{1}{p^2 + i0}$

связи можно получить путем дифференцирования по  $x_\mu$  связей между полями. При этом при дифференцировании  $T$ -произведений появляются нековариантные члены, содержащие  $g_{\mu 0}$  (см. п. 4.4.4). Таким образом, матрица рассеяния содержит нековариантные величины, обусловленные как гамильтонианом взаимодействия, так и связями между производными полей. Между тем матрица рассеяния является релятивистски-инвариантной. Поэтому нековариантные слагаемые в матрице рассеяния должны сокращаться.

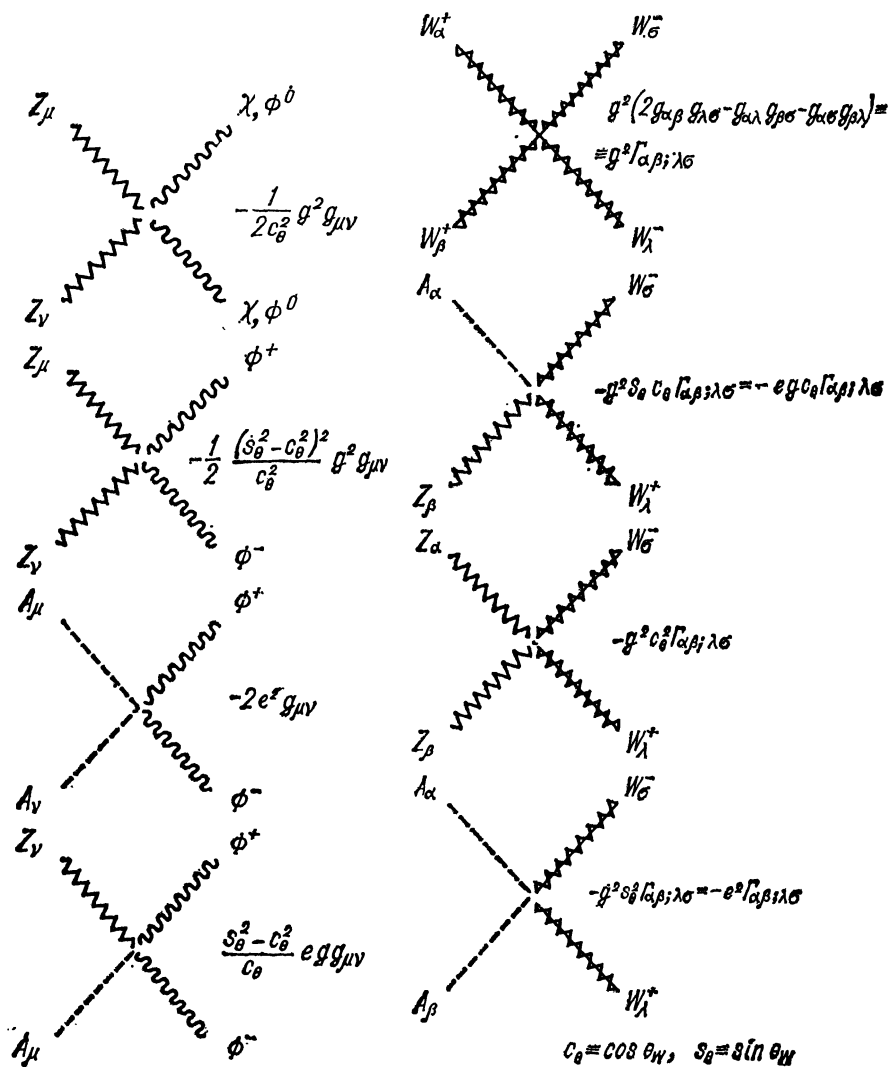
Однако для матрицы рассеяния можно построить явно релятивистски-инвариантное выражение. Для этого, как и в хромодинамике, следует в  $S$ -матрице релятивистски-нековариантный гамильтониан вза-

Таблица 2

Вершины электрослабого взаимодействия



имодействия  $w_{\text{int}}(x)$  заменить релятивистски-инвариантным лагранжианом взаимодействия, взятым с обратным знаком:  $w_{\text{int}} \rightarrow -\mathcal{L}_{\text{int}}$ , и, кроме того, в качестве связей между производными полей (входящими в  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ ) использовать релятивистски-ковариантные связи, получающиеся в результате дифференцирования по  $x_{\mu}$  релятивистски-ковариантных связей между полями (без учета дополнительных слагаемых, связанных с дифференцированием  $T$ -произведений). Доказательство этого факта такое же, как в квантовой хромодинамике, поэтому мы здесь его не приводим.



Таким образом, для матрицы рассеяния будем использовать формулу<sup>37</sup>

$$S = T \exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x), \quad (6.4.34)$$

а для связей между производными полей, входящими в  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ , формулу

$$\partial_\mu \underline{A} \partial_\nu \underline{B} = \partial_\mu \partial_\nu \underline{AB} \quad (6.4.35)$$

(подчеркнем, что эта формула не совпадает с выражением  $(\Phi_0, T(\partial_\mu A \partial_\nu B) \Phi_0)$ ).

<sup>37</sup> Отсылаем читателя к работам [40, 43], а также к обзорам [41, 51].



Используя явное выражение для  $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$ , полученное в § 6.3, а также выражения для связей между полями (см. предыдущий пункт), нетрудно установить правила Фейнмана в теории электрослабого взаимодействия. Согласно этим правилам внутренним линиям различных частиц сопоставляются пропэгаторы соответствующих полей (табл. 1), а каждой вершине — константы взаимодействия вместе с соответствующей тензорной структурой [52] (табл. 2). При использовании правил Фейнмана следует иметь в виду, что каждой замкнутой фермионной петле (в том числе и шпурионной) должен сопоставляться дополнительный множитель  $-1$ .

**6.4.4. Низкоэнергетический предел теории электрослабого взаимодействия.** Покажем, как исходя из общей теории электрослабого взаимодействия, построить теорию локального 4-фермионного слабого взаимодействия. Теория 4-фермионного слабого взаимодействия относится к теории области энергий, малых по сравнению с массами  $W$ - и  $Z$ -бозонов. В этой области энергий в процессах рассеяния и аннигиляции начальных частиц (лептонов, фотонов, кварков, глюонов) реальные  $W$ - и  $Z$ -бозоны не могут образовываться. Для описания процессов в низкоэнергетической области с участием только лептонов удобно от полного лагранжиана взаимодействия, содержащего фермионные и бозонные поля, перейти к «эффективному» лагранжиану, содержащему только фермионные поля.

Для этого отметим, что процессы с участием только лептонов можно описывать с помощью матрицы рассеяния второго порядка (см. (6.4.34))

$$S_2 = -\frac{1}{2} \langle 0 | T \int d^4x_1 \int d^4x_2 \mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \mathcal{L}_{\text{int}}(x_2) | 0 \rangle, \quad (6.4.36)$$

где  $\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_{\text{int}}(W, l) + \mathcal{L}_{\text{int}}(Z, l)$  — часть общего лагранжиана, содержащего взаимодействие лептонов и  $W$ -,  $Z$ -бозонов (см. (6.2.28), (6.2.29)), и усреднение происходит по вакууму  $W$ - и  $Z$ -бозонов. Мы хотим в низкоэнергетической области представить это выражение в виде

$$S_2 = i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) \quad (6.4.37)$$

и считать, что изучаемые нами процессы происходят в первом порядке теории возмущений по  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ .

Учитывая, что  $\underline{WZ} = 0$ , формулу (6.4.36) можно представить в виде

$$S_2 = S_2^W + S_2^Z,$$

где

$$\begin{aligned} S_2^W &= -\frac{1}{2} g^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \underline{W_\mu(x_1) W_\nu^+(x_2)} \mathcal{J}^\mu(x_1) \mathcal{J}^{\nu+}(x_2); \\ S_2^Z &= -\frac{g^2}{2 \cos^2 \theta_W} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \underline{Z_\mu(x_1) Z_\nu(x_2)} \mathcal{J}_0^\mu(x_1) \mathcal{J}_0^\nu(x_2). \end{aligned} \quad (6.4.38)$$

Связи  $W$ - и  $Z$ -бозонов согласно (6.4.15) и (6.4.9) определяются форму

$$\begin{aligned} \underbrace{W_\mu(x_1) W_\nu^\dagger(x_2)} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikx} \times \\ &\times \left\{ \frac{i}{m_W^2 - k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{i}{m_W^2 - \frac{k^2}{\xi}} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\}, \\ \underbrace{Z_\mu(x_1) Z_\nu(x_2)} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikx} \times \\ &\times \left\{ \frac{i}{m_Z^2 - k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{i}{m_Z^2 - \frac{k^2}{\xi}} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\}. \end{aligned}$$

Область малых энергий и переданных импульсов формально соответствует асимптотике

$$\begin{aligned} \underbrace{W_\mu(x_1) W_\nu^\dagger(x_2)} &\rightarrow \frac{i}{m_W^2} \delta(x_1 - x_2) g_{\mu\nu}, \\ \underbrace{Z_\mu(x_1) Z_\nu(x_2)} &\rightarrow \frac{i}{m_Z^2} \delta(x_1 - x_2) g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (6.4.38), получаем

$$\begin{aligned} S_W^{(2)} &= -i \frac{g^2}{2m_W^2} \int d^4x \mathcal{J}^\mu(x) \mathcal{J}_\mu^+(x), \\ S_Z^{(2)} &= -i \frac{g^2}{2m_Z^2 \cos^2 \theta_W} \int d^4x \mathcal{J}_0^\mu(x) \mathcal{J}_{0\mu}(x). \end{aligned}$$

Сравнивая эти формулы с (6.4.37), приходим к следующему выражению для эффективного лагранжиана взаимодействия:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) &= \mathcal{L}_{\text{eff}}^W(x) + \mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(x), \quad (6.4.39) \\ \mathcal{L}_{\text{eff}}^W(x) &= -\frac{g^2}{2m_W^2} \mathcal{J}^\mu(x) \mathcal{J}_\mu^+(x), \\ \mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(x) &= -\frac{g^2}{2m_W^2} \mathcal{J}_0^\mu(x) \mathcal{J}_{0\mu}(x) \end{aligned}$$

(мы учли, что  $m_W = m_Z \cos \theta_W$ ). Сравнение первой из этих формул с (6.1.2) приводит к связи между фермиевской константой взаимодействия  $G$  и константой электрослабого взаимодействия  $g$  [53]:

$$g^2 = \frac{8Gm_W^2}{\sqrt{2}}, \quad G = 1,116 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}. \quad (6.4.40)$$

Таким образом, мы приходим к «эффективным» лагранжианам слабого 4-фермионного взаимодействия, содержащим заряженные и нейтраль-

ные токи:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^W(x) = 2\sqrt{2}G\mathcal{J}^\mu(x)\mathcal{J}_\mu^+(x), \quad (6.4.41)$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(x) = 2\sqrt{2}G\mathcal{J}_0^\mu(x)\mathcal{J}_{0\mu}(x).$$

Выразим массы  $W$ - и  $Z$ -бозонов через фермиевскую константу взаимодействия  $G$ , заряд лептона  $e > 0$  и угол Вайнберга  $\theta_W$ . Согласно (6.2.26), (6.2.12)  $e = g \sin \theta_W$ ,  $m_W = m_Z \cos \theta_W$ . Поэтому, используя (6.4.40), находим

$$m_W = \frac{1}{\sin \theta_W} \sqrt{\frac{\pi\alpha}{G\sqrt{2}}} = \frac{37,3}{\sin \theta_W} \text{ ГэВ}, \quad m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W} = \\ = \frac{74,6}{\sin 2\theta_W} \text{ ГэВ}, \quad (6.4.42)$$

где  $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$ . Из экспериментов по рассеянию лептонов (см. п. 6.4.5) было найдено, что  $\sin^2 \theta_W = 0,220 \pm 0,015$  [10]. Поэтому согласно (6.4.42)

$$m_W = (80 \pm 3) \text{ ГэВ}, \quad m_Z = (90 \pm 3) \text{ ГэВ}.$$

Непосредственное измерение масс (при изучении процессов рождения и распада  $W$ - и  $Z$ -бозонов на встречных  $p\bar{p}$ -пучках) привело к следующим результатам [10, 21, 22]:

$$m_W = (80,8 \pm 2,7) \text{ ГэВ}, \quad m_Z = (92,9 \pm 1,6) \text{ ГэВ}.$$

Очевидно, что найденные экспериментальные значения масс  $W$ - и  $Z$ -бозонов находятся в хорошем согласии с результатами теории электрослабого взаимодействия.

**6.4.5. Процессы рассеяния лептонов и распады  $W$ - и  $Z$ -бозонов.** Имея лагранжиан 4-фермионного взаимодействия, можно вычислить сечения различных процессов слабого взаимодействия лептонов [38, 54, 55].

Рассмотрим вначале процессы взаимодействия нейтрино с заряженными лептонами. Согласно (6.4.41) в низкоэнергетической области они описываются частью 4-фермионного лагранжиана

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(v, l) = \mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(v, l) + \mathcal{L}_{\text{eff}}^W(v, l),$$

где  $\mathcal{L}_{\text{eff}}^W(v, l)$  — полный эффективный лагранжиан взаимодействия заряженных токов:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^W(v, l) = 2\sqrt{2}G \sum_{l'l'} (\bar{l}_L \gamma^\mu v_{lL}) (\bar{v}_{l'L} \gamma_\mu l'_L) \quad (6.4.43)$$

и  $\mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(v, l)$  — эффективный лагранжиан нейтральных токов, связанный с процессами взаимодействия нейтрино с заряженными лептонами:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(v, l) = 2\sqrt{2}G \sum_{l'l'} (\bar{v}_{lL} \gamma^\mu v_{lL}) (\bar{l}' (g_V + g_A \gamma_5) \gamma_\mu l'), \quad (6.4.44)$$

где  $g_V = \sin^2 \theta_W - \frac{1}{4}$ ;  $g_A = \frac{1}{4}$ . Полный лагранжиан взаимодействия

нейтральных токов можно записать в виде

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^Z = \mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(\nu, l) + \mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(l, l), \quad (6.4.45)$$

где

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(l, l) = 2V\sqrt{2}G \sum_{l'l''} (\bar{l}(g_V + g_A\gamma_5)\gamma^\mu l) (\bar{l}'(g_V + g_A\gamma_5)\gamma_\mu l').$$

Отметим, что  $g_V = 0,03 \pm 0,02$ , т. е.  $g_V \ll g_A$  и нейтральный слабый ток, связанный с заряженными лептонами, является в основном аксиальным вектором, в то время как заряженный ток (и часть нейтрального тока, связанного с нейтрино) представляет собой суперпозицию вектора и аксиального вектора с равными весами ( $V - A$ -взаимодействии).

Рассмотрим процессы, обусловленные взаимодействием только слабых нейтральных токов:

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-, \quad (6.4.46)$$

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^- \quad (6.4.47)$$

(рассеяние мюонного нейтрино на электроном).

Матричный элемент процесса (6.4.46) (рис. 57) определяется формулой

$$\langle f | S | i \rangle = -i \frac{(2\pi)^4 \delta(k+p-k'-p')}{(16\epsilon\epsilon'\omega\omega')^{1/2}} M(\nu_\mu, e),$$

$$M(\nu_\mu e) = 2V\sqrt{2}G\bar{u}(k') \frac{1-\gamma_5}{2} \gamma^\mu u(k) \bar{u}(p')(g_V + g_A\gamma_5)\gamma_\mu u(p),$$

где  $\epsilon, \omega$  ( $\epsilon', \omega'$ ) — энергии начальных (конечных) электрона и нейтрино.

Усредняя квадрат модуля амплитуды процесса (6.4.46) по поляризациям начальных частиц и суммируя по поляризациям конечных частиц, получаем дифференциальное сечение процесса

$$d\sigma(\nu_\mu e^-) = \frac{G^2}{8\pi m_e \omega^2} \{ (g_V + g_A)^2 (pk)^2 + (g_V - g_A)^2 (pk')^2 - m_e^2 (g_V^2 - g_A^2) (kk')^2 \} \frac{d\epsilon'}{\omega}, \quad (6.4.48)$$

где  $m_e$  — масса электрона.

Полное сечение имеет вид

$$\sigma(\nu_\mu e^-) = \frac{G^2 (kp)}{2\pi} \left[ (1 - 2\sin^2\theta_W)^2 + \frac{4}{3}\sin^4\theta_W \right] \quad (6.4.49)$$

(мы предполагаем, что  $\omega \gg m_e$ ).

Рассмотрим далее процесс (6.4.47). Дифференциальное сечение этого процесса можно получить из (6.4.48), если сделать в выражении в фигурных скобках замену  $k \rightleftharpoons k'$ :

$$d\sigma(\bar{\nu}_\mu e^-) =$$

$$= \frac{G^2}{8\pi m_e \omega^2} \{ (g_V + g_A)^2 (pk')^2 + (g_V - g_A)^2 (pk)^2 - m_e^2 (g_V^2 - g_A^2) (kk')^2 \}. \quad (6.4.50)$$

Полное сечение процесса при  $\omega \gg m_e$  определяется формулой

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu e^-) = \frac{G^2(kp)}{2\pi} \left[ \frac{1}{3} (1 - 2 \sin^2 \theta_W)^2 + 4 \sin^4 \theta_W \right]. \quad (6.4.51)$$

Из измерений сечений этих процессов находится значение угла Вайнберга  $\theta_W$ . Отметим, что в системе покоя начального электрона сечения этих процессов, растущие линейно с энергией начального нейтрино, приближенно ( $\sin^2 \theta_W \approx 1/4$ ) определяются так:

$$\sigma \approx \frac{G^2 m_e}{6\pi} \omega \approx 1,4 \cdot 10^{-42} \frac{\omega}{\text{ГэВ}} \text{ см}^2.$$

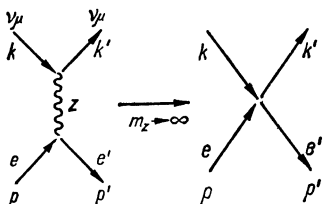


Рис. 57

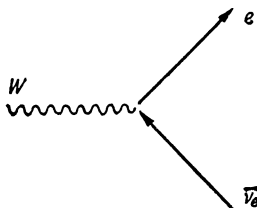


Рис. 58

В заключение исследуем еще вопрос о распадах  $W$ - и  $Z$ - бозонов.

Рассмотрим двухлептонный распад  $W$ -бозона:  $W \rightarrow l + \bar{\nu}_l$ . Этот процесс в низшем порядке обуславливается лагранжианом взаимодействия (6.3.10). Матричный элемент этого процесса имеет вид (рис. 58)

$$\langle f | S | i \rangle = -i \frac{(2\pi)^4 \delta(p + q - p_W)}{(8\epsilon_0 m_W)^{1/2}} M(W \rightarrow e \bar{\nu}_l),$$

$$M(W \rightarrow e \bar{\nu}_l) = \frac{g}{2\sqrt{2}} e_{p_W \mu}^{(\lambda)} u(p) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) u^c(q),$$

где  $e_{p_W \mu}^{(\lambda)}$  — вектор поляризации  $W$ -бозона. Поскольку не только  $m_e \ll m_W$ , но и массы  $\mu$  и  $\tau$  лептонов значительно меньше  $m_W$ , то для ширины распадов  $W$ -бозона на  $e \bar{\nu}_e$ ,  $\mu \bar{\nu}_\mu$  и  $\tau \bar{\nu}_\tau$  получаем

$$\Gamma(W \rightarrow e \bar{\nu}_l) = \Gamma(W \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu) = \Gamma(W \rightarrow \tau \bar{\nu}_\tau) = \frac{G m_W^3}{6\sqrt{2}\pi} = (230 \pm 20) \text{ МэВ}. \quad (6.4.52)$$

Таким образом, если существуют только три заряженных лептона, взаимодействующих с  $W$ -бозоном, то полная ширина распада  $W$ -бозона в двухчастичные лептонные каналы

$$\Gamma_l(W) = 3\Gamma(W \rightarrow e \bar{\nu}_l) \approx 0,7 \text{ ГэВ}.$$

Рассмотрим двухлептонные распады  $Z$ -бозона. Матричный элемент распада  $Z$ -бозона

$$\langle f | S | i \rangle = -i \frac{(2\pi)^4 \delta(q_1 + q_2 - p_Z)}{(8m_Z \omega_1 \omega_2)^{1/2}} M(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l),$$

$$M(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l) = \frac{g}{4 \cos \theta_W} e_{p_Z \mu}^{(\lambda)} \bar{u}(q_1) (1 + \gamma_5) \gamma^\mu u(q_2)^c.$$

Поэтому ширина распада

$$\Gamma(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l) = \frac{Gm_Z^3}{12\sqrt{2}\pi} \approx (180 \pm 10) \text{ МэВ}. \quad (6.4.53)$$

Ширины распадов на пары заряженных лептонов определяются так:

$$\Gamma(Z \rightarrow e\bar{e}) = \Gamma(Z \rightarrow \mu\bar{\mu}) = \Gamma(Z \rightarrow \tau\bar{\tau}) = \frac{4 \sin^2 \theta_W + (1 - 2 \sin^2 \theta_W)^2}{12\sqrt{2}\pi} Gm_Z^3. \quad (6.4.54)$$

Для  $\sin^2 \theta_W \approx \frac{1}{4}$

$$\Gamma(Z \rightarrow e\bar{e}) = \Gamma(Z \rightarrow \mu\bar{\mu}) = \Gamma(Z \rightarrow \tau\bar{\tau}) \approx \frac{1}{2} \Gamma(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l).$$

Таким образом, полная ширина распада  $Z$ -бозона в двухчастичные лептонные каналы равна

$$\Gamma_t(Z) \approx 3\Gamma(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l) + \frac{3}{2} \Gamma(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l) \approx 0,8 \text{ ГэВ}.$$

Аналогично лептонным распадам можно рассмотреть кварковые (адронные) распады  $W$ - и  $Z$ -бозонов. Пренебрегая, как и в случае лептонов, массами кварков, для ширин распадов  $W$ -бозона (множитель 3 возникает из-за суммирования по цветам кварков) получаем формулы

$$\begin{aligned} \Gamma(W \rightarrow d\bar{u}) &= \Gamma(W \rightarrow s\bar{c}) = 3 \cos^2 \theta_c \Gamma(W \rightarrow e\bar{\nu}_l), \\ \Gamma(W \rightarrow s\bar{u}) &= \Gamma(W \rightarrow c\bar{d}) = 3 \sin^2 \theta_c \Gamma(W \rightarrow e\bar{\nu}_l), \\ \Gamma(W \rightarrow b\bar{t}) &= 3\Gamma(W \rightarrow e\bar{\nu}_l). \end{aligned} \quad (6.4.55)$$

Таким образом, для полной ширины распада  $W$ -бозона получаем оценку ( $\sin \theta_c \approx 0,226$ )

$$\Gamma_t(W) = 12\Gamma(W \rightarrow e\bar{\nu}_l) \approx 2,8 \text{ ГэВ}.$$

Из эксперимента известна пока лишь верхняя граница для полной ширины [10]

$$\Gamma_t(W) < 7 \text{ ГэВ}.$$

Для кварковых распадов  $Z$ -бозонов

$$\begin{aligned} \Gamma(Z \rightarrow u\bar{u}) &= \Gamma(Z \rightarrow c\bar{c}) \approx \Gamma(Z \rightarrow t\bar{t}) = \\ &= [(1 - 2 \sin^2 \theta_W)^2 + 4 \sin^4 \theta_W] \Gamma(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l), \\ \Gamma(Z \rightarrow d\bar{d}) &= \Gamma(Z \rightarrow s\bar{s}) = \Gamma(Z \rightarrow b\bar{b}) = \\ &= \left[ \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W\right)^2 + \frac{16}{9} \sin^4 \theta_W \right] \Gamma(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l). \end{aligned}$$

Для  $\sin^2 \theta_W = 1/4$  получаем оценку полной ширины распада  $Z$ -бозона:

$$\Gamma_t(Z) = 16\Gamma(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l) \approx 2,9 \text{ ГэВ}.$$

Экспериментальная верхняя граница для полной ширины [10]

$$\Gamma_t(Z) < 8,5 \text{ ГэВ}.$$

## § 6.5. ВЕЛИКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ

**6.5.1. Бегущие константы связи.** В предыдущих параграфах мы видели, что локальная симметрия лежит в основе динамики частиц. Именно, если предположить локальность цветовой  $SU(3)$ -симметрии кваркового поля, то необходимо будет ввести калибровочные глюонные поля (октет глюонов), которые будут обеспечивать сильное взаимодействие. Мы видели также, что  $W$ - и  $Z$ -бозоны, обуславливающие слабое взаимодействие, также должны выступать как калибровочные поля, причем они должны вводиться на той же основе, что и фотон. Поэтому мы рассматривали систему лептонов и кварков с характерной для них  $SU(2) \times U(1)$  глобальной симметрией (в предположении, что массы лептонов и кварков равны нулю). Чтобы сделать эту симметрию локальной, нужно ввести четыре калибровочных векторных поля:  $W_\mu^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ),  $B_\mu$  (промежуточные бозоны так же, как лептоны и кварки, приобретают массы вследствие хиггсовского механизма спонтанного нарушения симметрии). В результате возникает единая теория электромагнитного и слабого взаимодействий, которые объединяются в единое электрослабое взаимодействие.

Важнейшей чертой вводимых таким образом (т. е. для обеспечения локальной симметрии) калибровочных полей является, то что эффективные константы взаимодействия этих полей с фермионами (т. е. кварками и лептонами) зависят от переданного импульса, или, иначе, от расстояния от фермиона. Именно эти эффективные константы связи уменьшаются с уменьшением расстояния в случае глюонов (вследствие этого возникает явление асимптотической свободы) и возрастают с уменьшением расстояния в случае фотонов; для промежуточных  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозонов поведение «константы» такое же, как для глюонов. Причина непостоянства констант взаимодействия, т. е. зависимости констант от переданного импульса, заключается в поляризации вакуума, которой на языке диаграмм Фейнмана соответствуют петли виртуальных частиц — векторных бозонов и фермионов. Зависимость эффективных констант связи от переданного импульса оказывается логарифмической.

Через  $g_3$ ,  $g_2$  и  $g_1$  будем обозначать константы взаимодействия, связанные с локальными группами симметрии  $SU(3)_C$ ,  $SU(2)_W$  и  $U(1)_Y$ . Константа  $g_3$  определяет сильное взаимодействие кварков и калибровочных полей глюонов  $A_\mu^a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ), лагранжиан которого определяется формулой (см. § 4.4)

$$g_3 A_\mu^a \sum_q \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q. \quad (6.5.1)$$

Константа  $g_2 \equiv g$  определяет слабое взаимодействие кварков и лептонов с калибровочными полями  $W_\mu^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ), лагранжиан которого определяется выражением (см. § 6.1)

$$g_2 W_\mu^a \left( \sum_q \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} q_L + \sum_l \bar{l}_L \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} l_L \right). \quad (6.5.2)$$

Наконец, константа  $g$  определяет слабое взаимодействие кварков и лептонов с абелевым калибровочным полем  $B_\mu$ , лагранжиан которого определяется выражением (см. § 6.1)

$$g_1 B_\mu \sum_f \bar{f} \left( C \frac{Y_f}{2} \right) \gamma^\mu f, \quad (6.5.3)$$

где  $g_1 C \equiv g'$  и суммирование производится по правым и левым кваркам и лептонам (они обозначаются через  $f$ ;  $Y_f$  — гиперзаряд). Нормировочная постоянная  $C$ , определяющая константу  $g_1$ , находится из условия [56]

$$\text{Sp} \left( C \frac{Y_f}{2} \right)^2 \equiv C^2 \Sigma \left( \frac{Y_f}{2} \right)^2 = \frac{1}{2},$$

где суммирование производится по квинтету левых кварков  $\bar{d}_L^i$  ( $i = 1, 2, 3$  — индекс цвета) и лептонов  $e_L^-, \nu_{iL}$  (см. далее). Это условие аналогично условию нормировки генераторов групп  $SU(2)_W$  и  $SU(3)_c$ :

$$\text{Sp} \left( \frac{\tau_i}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{Sp} \left( \frac{\lambda^a}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Так как

$$\frac{Y}{2} (\bar{d}_L^i) = \frac{1}{3}, \quad \frac{Y}{2} (l_L^-) = \frac{Y}{2} (\nu_{iL}) = -\frac{1}{2},$$

то

$$\Sigma \left( \frac{Y_f}{2} \right)^2 = \left( \frac{1}{3} \right)^2 \cdot 3 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \cdot 2 = \frac{5}{6},$$

поэтому  $C = \sqrt{\frac{3}{5}}$ .

Вводя константы связи  $\alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}$  и вспоминая, что

$$g' = g \text{tg} \theta_W, \quad g = \frac{e}{\sin \theta_W},$$

получаем

$$\alpha_1 = \frac{5}{3} \frac{\alpha}{\cos^2 \theta_W}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_W}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}.$$

Соответствующие эффективные константы связи  $\alpha_i(M)$ , зависящие от переданного импульса  $M$  (от переданного импульса поэтому зависят и величины  $\alpha(M)$ ,  $\theta_W(M)$ ), определяются формулой

$$\frac{1}{\alpha_i(M)} - \frac{1}{\alpha_i(\mu)} = \frac{b_i}{2\pi} \ln \frac{M}{\mu}, \quad (6.5.4)$$

где переданные импульсы  $M$  и  $\mu$  должны быть больше масс рассматриваемых нами частиц, а постоянные  $b_i$  определяются числом фермионных ароматов и размерностью неабелевой группы  $SU(n)$ :

$$b_i = \frac{11}{3} n - \frac{2}{3} n_f$$



(см. формулу (4.8.21)). В случае абелевой группы глюонные петли отсутствуют, поэтому

$$b_i = -\frac{2}{3} n_f.$$

Полагая  $n_f = 6$ , находим  $b_1 = -4$ ,  $b_2 = 10/3$ ,  $b_3 = 7$ .

Величины  $1/\alpha_i$ , как функции  $\ln \frac{M}{\mu}$ , изображены на рис. 59. Показанные прямые пересекаются в одной точке  $M = M_0$ :

$$\alpha_1(M_0) = \alpha_2(M_0) = \alpha_3(M_0) \equiv \bar{\alpha}(M_0),$$

если

$$\ln \frac{M_0}{\mu} = \frac{\pi}{11} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{8}{3\alpha_3} \right)$$

(мы имеем три уравнения для нахождения трех неизвестных:  $\ln \frac{M_0}{\mu}$ ,  $\sin^2 \theta_W$ ,  $\bar{\alpha}(M_0)$ ). Считая, что  $\mu \approx m_W$  и  $\alpha_3 \approx 0,1$ ,  $\alpha(m_W) = \frac{1}{129}$ , получаем

$$\ln \frac{M}{m_W} \approx 29, \quad \sin^2 \theta_W \approx 0,2, \quad \bar{\alpha}(M_0) \approx 0,02. \quad (6.5.5)$$

Таким образом, константы связи  $\alpha_i(M)$  становятся равными при энергиях  $M \approx 10^{14}$  ГэВ. Подчеркнем, что пересечение кривых наблюдается только при  $\sin^2 \theta_W \approx 0,2$ , что находится в соответствии с экспериментальным значением угла Вайнберга.

При таких переданных импульсах, что соответствует расстояниям порядка  $r_0 \approx 10^{-28}$  см, интенсивность трех фундаментальных взаимодействий — сильного, электромагнитного и слабого — становится одинаковой. Поэтому мы можем говорить о едином фундаментальном взаимодействии — сильноэлектрослабом [56—58]. Это явление называется большим объединением или великим синтезом. Общее значение эффективной константы взаимодействия  $\bar{\alpha}(M_0) \approx 0,02$ . Эта величина мала по сравнению с единицей, поэтому при исследовании различных процессов в области великого синтеза будет применима теория возмущений.

**6.5.2.  $SU(5)$ -симметрия.** Одинаковость констант взаимодействия при великом объединении означает, что единое фундаментальное взаимодействие должно обладать некоторой единой симметрией, которая проявляется только в области очень больших энергий:  $M > M_0 = 10^{14}$  ГэВ. Эта симметрия должна объединить цветовую  $SU(3)_c$ -симметрию кварков и  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ -симметрию, которая лежит в основе единого электрослабого взаимодействия. Все известные «элементарные фермионы», т. е. лептоны и кварки, должны подчиняться этой объединенной симметрии и группироваться в минимальное число фундаментальных мультиплетов [58, 59] (см. также [60]).

Простейшей такой объединенной симметрией является  $SU(5)$ -симметрия. Важная характеристика группы симметрии — ранг группы, т. е. число коммутирующих друг с другом генераторов группы

(которые одновременно можно привести к диагональному виду, что позволяет тем самым охарактеризовать частицы определенными квантовыми числами). Поскольку группа цветовой  $SU(3)_c$ -симметрии является группой второго ранга, а ранг группы  $SU(2)_W$  равен единице, то ранг группы симметрии единого фундаментального взаимодействия, основанного одновременно на  $SU(3)_c$ - и  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ -симметриях, должен быть равен четырем. Простейшей группой четвертого ранга есть группа  $SU(5)$ .

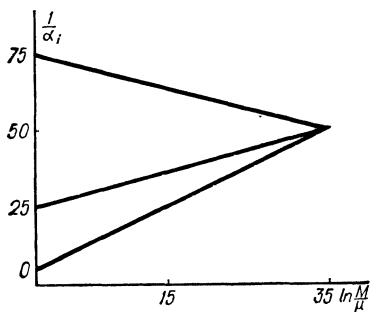


Рис. 59

	$\bar{d}_1$	$\bar{d}_2$	$\bar{d}_3$	$e$	$\nu_e$
$\bar{d}_1$	в глюонов			$\bar{\chi}_1(\frac{2}{3})$	$\bar{\nu}_1(-\frac{1}{3})$
$\bar{d}_2$				$\bar{\chi}_2(\frac{2}{3})$	$\bar{\nu}_2(-\frac{1}{3})$
$\bar{d}_3$				$\bar{\chi}_3(\frac{2}{3})$	$\bar{\nu}_3(-\frac{1}{3})$
$e$	$\chi_1(\frac{2}{3})$	$\chi_2(\frac{2}{3})$	$\chi_3(\frac{2}{3})$	$\gamma$	$w^+$
$\nu_e$	$\gamma_1(\frac{1}{3})$	$\gamma_2(\frac{1}{3})$	$\gamma_3(\frac{1}{3})$	$w^-$	$Z$

Рис. 60

При использовании группы  $SU(5)$  все известные фермионы (кварки и лептоны) делятся на три совокупности, или три поколения — I, II, III (см. п. 6.3.1):

$$(\nu_e e; u, d) \text{ (I)}, \quad (\nu_\mu \mu; cs) \text{ (II)}, \quad (\nu_\tau \tau; t, b) \text{ (III)}.$$

Каждое поколение включает два лептона и два кварка. Частицы каждого поколения описываются идентично. В рамках  $SU(5)$ -симметрии не удастся все лептоны и кварки, относящиеся к одному поколению, объединить в один мультиплет. Но с подобной ситуацией мы уже встречались при описании лептонов в группе  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ -симметрии электрослабого взаимодействия — там левый электрон и левое нейтрино объединялись в дублет, а правый электрон представлял собой синглет.

Чтобы сконструировать фермионные фундаментальные мультиплеты в рамках  $SU(5)$ -симметрии, необходимо найти число независимых состояний в каждом поколении. Поступая так же, как в единой теории электрослабого взаимодействия, будем различать левые и правые частицы. В каждом поколении содержится 15 левых и правых частиц (с учетом цветов кварков). Например, в первом поколении содержится 8 левых частиц:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L, \quad i = 1, 2, 3,$$

и 7 правых частиц:

$$e_R, \quad u_R^i, \quad d_R^i, \quad i = 1, 2, 3$$

( $L, R$  — левые и правые частицы, индекс  $i$  служит для обозначения цвета кварка; предполагается, что правые нейтрино не существуют).

вуют). Отметим, что вместо правых состояний частиц  $e_R, u_R^i, d_R^i$  можно использовать левые состояния соответствующих античастиц  $\bar{e}_L, \bar{u}_L^i, \bar{d}_L^i$ .

Эти 15 фермионных состояний можно «разместить» в двух фундаментальных мультиплетях группы  $SU(5)$ :

$$\bar{5} = \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \\ e \\ \nu_e \end{bmatrix}_L, \quad 10 = \begin{bmatrix} 0 & \bar{u}_3 & -\bar{u}_2 & -u_1 & -d_1 \\ -\bar{u}_3 & 0 & \bar{u}_1 & -u_2 & -d_2 \\ \bar{u}_2 & -\bar{u}_1 & 0 & -u_3 & -d_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & -\bar{e} \\ d_1 & d_2 & d_3 & \bar{e} & 0 \end{bmatrix}_L.$$

Эти совокупности частиц образуют базисы двух простейших представлений группы  $SU(5)$ .

Таковыми же мультиплетями описываются частицы, принадлежащие ко II и III поколениям.

Из структуры мультиплета  $\bar{5}$  легко видеть, что дробность электрического заряда кварка связана с их цветом. Дело в том, что если электрический заряд кварка не зависит от его цвета (а это неперемное условие локальной цветовой симметрии) и суммарный электрический заряд всех частиц данного мультиплета  $SU(5)$  обращается в нуль, то выполняется соотношение

$$3Q(d) - Q(e) = 0, \quad Q(d) = -\frac{1}{3}$$

(отметим, что обращение суммарного заряда в  $SU(5)$ -мультиплете в нуль имеет ту же природу, что и обращение в нуль суммарной проекции изотопического спина частиц, принадлежащего мультиплету группы  $SU(2)$ ).

До сих пор речь шла о классификации лептонов и кварков, т. е. о размещении их по мультиплетам глобальной группы симметрии  $SU(5)$ . Теперь, как и при изучении цветовой  $SU(3)_c$ -симметрии кварков и  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ -симметрии лептонов, необходимо сделать симметрию  $SU(5)$  локальной. Для этого следует ввести калибровочные поля. Число этих полей равно  $n^2 - 1 = 24$  (по числу генераторов группы  $SU(5)$ ,  $n = 5$ ). С этими полями связаны частицы (векторные бозоны), обмен которыми приводит к взаимодействию в системе фермионов, т. е. между кварками, между лептонами и между кварками и лептонами.

Вначале все бозоны — безмассовые, но затем с помощью хиггсовского механизма спонтанно мы нарушаем симметрию  $SU(5)$ , в результате чего бозоны и фермионы приобретают массу (все, кроме фотона и глюонов).

В число рассматриваемых калибровочных бозонов прежде всего входят 8 глюонов  $A_\mu^a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ), соответствующих подгруппе  $SU(3)_c$  и ответственных за переходы между известными кварками (отличающимися цветом), три бозона  $W_\mu^1, W_\mu^2$  и  $W_\mu^3$ , соответствующих

группе  $SU(2)$ , и бозон  $B_\mu$  соответствующий группе  $U(1)$ , причем линейные комбинации  $W_\mu^3$  и  $B_\mu$  определяют  $z$ -бозон и фотон так же, как в теории электрослабого взаимодействия.

Наконец, остаются еще 12 бозонов, представляющих собой четыре заряженных цветowych триплета:

$$X_i^{(4/3)}, \bar{X}_i^{(-4/3)}, Y_i^{(1/3)}, \bar{Y}_i^{(-1/3)},$$

где  $i$  — цветовой индекс ( $i = 1, 2, 3$ ), а индексы  $4/3, 1/3$  обозначают электрические заряды частиц.

С  $X$ - и  $Y$ -бозонами до сих пор мы не встречались, это новые частицы, связанные с  $SU(5)$ -симметрией. Они обуславливают переходы кварков в лептоны ( $X_i$  и  $\bar{X}_i$  обуславливают переходы  $\bar{d} \leftrightarrow e$ , а  $Y_i$  и  $\bar{Y}_i$  — переход  $\bar{d} \leftrightarrow \nu_e$ ).

Схема переходов в мультиплете  $\bar{5}$ , обусловленных взаимодействиями фермионов со всеми бозонами, т. е. глюонами,  $W$ -,  $Z$ - бозонами,  $X$ -,  $Y$ -бозонами и фотоном, представлена на рис. 60. Она имеет вид матрицы  $5 \times 5$ , в верхнем левом углу которой находится матрица  $3 \times 3$ , описывающая переходы, обусловленные 8 глюонами, а в правом нижнем углу — матрица, описывающая переходы, обусловленные  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозонами, а также фотоном  $\gamma$ ; к этим матрицам примыкают матрицы  $2 \times 3$  и  $3 \times 2$ , описывающие переходы между кварками и лептонами, обусловленные  $X$ - и  $Y$ -бозонами.

Если считать, что массы  $X$ - и  $Y$ -бозонов не превосходят величину  $M_0 \approx 10^{14}$  ГэВ, то при переданных импульсах  $M \gg M_0$  три бегущие константы  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_3$  объединяются в одну общую константу связи  $\bar{\alpha}(M)$ , определяемую формулой

$$\frac{1}{\bar{\alpha}(M)} - \frac{1}{\alpha(\mu)} = \frac{\bar{b}}{2\pi} \ln \frac{M}{\mu},$$

где постоянная  $\bar{b}$  соответствует группе симметрии  $SU(5)$  и согласно (4.8.21)

$$\bar{b} = \frac{11}{3} \cdot 5 - \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{43}{3}.$$

Таким образом, в области высоких энергий наблюдается  $SU(5)$ -симметрия и соответствующая ей теория характеризуется только одной константой связи. В области малых энергий происходит расщепление единого взаимодействия на три фундаментальных взаимодействия — сильное, электромагнитное и слабое, — которые характеризуются тремя константами связи. Это расщепление, как и возникновение конечных масс всех фермионов и бозонов (за исключением фотонов и глюонов), связано со спонтанным нарушением  $SU(5)$ -симметрии с помощью хиггсовских скалярных бозонов.

Мы не будем здесь приводить исходный  $SU(5)$ -инвариантный лагранжиан единой теории, включающий в себя хиггсовские бозоны. Отметим лишь, что этот лагранжиан характеризуется только одной константой взаимодействия  $g$ , связанной с  $SU(5)$ -группой, а также константами взаимодействия скалярных полей.

Спонтанное нарушение симметрии происходит в два этапа: вначале — вследствие введения 24-плета скалярных полей — бозоны  $X$  и  $Y$  приобретают массу и возникают две новые константы связи, так что всего получается три константы связи  $g_1$ ,  $g_2$  и  $g_3$ , характеризующие три фундаментальных взаимодействия. При этом теория теряет  $SU(5)$ -инвариантность и становится  $SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ -инвариантной. В результате дальнейшего спонтанного нарушения симметрии с помощью квинтета скалярных хиггсовских бозонов массу приобретают все остальные частицы — фермионы и бозоны, кроме фотона и глюонов. В конечном итоге теория теряет также  $SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ -инвариантность и сохраняет только  $SU(3)_c \times U(1)_Y$ -инвариантность, соответствующую цветовой и фазовой симметриям.

**6.5.3. Нестабильный протон.** Необычным является то, что  $X$ - и  $Y$ -бозоны обладают как барионным, так и лептонным зарядами. Поэтому их можно назвать лептокварками.

Взаимодействие  $X$ - и  $Y$ -бозонов с фермионами таково, что эти бозоны могут переходить как в пары кварков, так и в пары антилептон-антикварк:

$$\begin{aligned} \bar{e} + \bar{d} &\leftarrow X \rightarrow u + u, \\ \bar{\nu}_e + \bar{d} &\leftarrow Y \rightarrow u + d. \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

Сказанное следует (как и таблица переходов, см. выше) из структуры квинтета и декуплета, входящих в фермионный свободный лагранжиан кварков и лептонов, а также из принципа введения калибровочных полей, который состоит в том, что производные  $\partial_\mu$  заменяются ковариантными производными  $D_\mu$ , включающими в себя калибровочные поля. В результате переходов (6.5.6), происходящих с несохранением барионного заряда, протон и нейтрон становятся нестабильными, так как они могут превращаться в лептоны:

$$p = uud \rightarrow \bar{e}, \quad n = udd \rightarrow \bar{\nu}_e.$$

Ясно, что вследствие сохранения энергии и импульса одиночные лептоны появляться не смогут, а будут наблюдаться реакции типа

$$p \rightarrow \bar{e} + \pi^0, \quad p \rightarrow \bar{\nu}_e + \pi^+.$$

Интересно, что возможен распад протона; с образованием  $\mu^+$ -мезона он должен сопровождаться образованием  $K$ -мезонов:  $p \rightarrow \mu^+ + K^0$  или  $p \rightarrow \bar{\nu}_\mu + K^+$ . Такая корреляция среди продуктов распада протона связана с тем, что электрон и мюон принадлежат к разным поколениям группы  $SU(5)$ -симметрии.

Нестабильность протона должна быть очень малой (если вообще она существует). Поэтому массы  $X$ - и  $Y$ -бозонов должны быть очень большими (около  $10^{15}$  ГэВ). Действительно, матричный элемент распада протона должен быть пропорционален  $g^2/M_X^2$ , где  $M_X$  — масса  $X$ -бозона и  $g^2 \approx \alpha$  — квадрат универсального заряда. Отсюда можно

получить следующую оценку для времени жизни протона:

$$\tau_p = \frac{M_X^4}{\alpha^2 m_p^2}, \quad (6.5.7)$$

где  $m_p$  — масса протона. Время жизни протона следует считать не меньше  $10^{30}$  лет. Отсюда следует оценка массы  $X$ -бозона:  $M_X \approx \approx 10^{14} m_p$ ; такая же оценка массы  $Y$ -бозонов. Данная оценка массы  $X$ -бозона соответствует оценке, сделанной выше (см. обзор [60]).

Отметим, что время жизни протона на двадцать порядков выше времени существования Вселенной, которое составляет  $10^{10}$  лет.

Великое объединение относится только к сильному, слабому и электромагнитному взаимодействиям, но не затрагивает гравитационное взаимодействие. Между тем подлинно великий синтез должен включить и гравитационное взаимодействие.

Идея такого включения существует и связана с новым расширением симметрии, а именно с введением понятия суперсимметрии, преобразования которой связывают между собой частицы обеих статистик, т. е. фермионы и бозоны. Такая симметрия вначале вводится как глобальная (см. § 1.6). Если же затем от глобальной суперсимметрии перейти к локальной, то в качестве калибровочных полей в теорию войдет и гравитационное поле. Однако разработка этой идеи пока еще далека от завершения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### К главе 1

1. Паули В. Релятивистская теория элементарных частиц.— М. : Изд-во иностр. лит., 1947.— 83 с.
2. Dirac P. A. M.— Proc. Roy. Soc. A, 1928, 117, p. 610, 118, p. 341.
3. Паули В. Общие принципы волновой механики.— М. : Гостехиздат, 1947.— 332 с.
4. Fierz M.— Z. Phys., 1937, 104, p. 10.
5. Majorana E.— Nuovo sim., 1937, 14, p. 171—195.
6. Weyl H.— Z. Phys., 1929, 56, S. 330—352.
7. Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П.— Письма в Журн. эксперим. и теорет. физики, 1971, 13, с. 452—455.
8. Волков Д. В. Феноменологические лагранжианы, инвариантные относительно групп симметрии, содержащих в качестве подгруппы группу Туанкаре.— Москва, 1971.— 3 с. (Препринт / АН СССР. Физ. ин-т им. Лебедева; № 141).
9. Волков Д. В., Акулов А. П.— Письма в Журн. эксперим. и теорет. физики, 1972, 16, с. 621—624.
- 9а. Волков Д. В., Акулов А. П.— Теорет. мат. физика, 1974, 18, с. 39—50.
10. Волков Д. В., Сорока В. А.— Письма в Журн. эксперим. и теорет. физики, 1973, 18, с. 529—532.
- 10б. Волков Д. В., Сорока В. А.— Теорет. мат. физика, 1974, 20, с. 291—298.
11. Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П.— Проблемы теорет. физики (Сб. памяти И. Е. Тамма). М. : Наука, 1972, с. 37—47.
12. Огиевецкий В. И., Мезингеску Л. Успехи физ. наук, 1975, 117, вып. 4, с. 637—683.
13. Wess J., Zumino B.— Nucl. Phys. B, 1974, 70, N 1, p. 39—50.
14. Fayet P., Ferrara S.— Phys. Rep. C, 1977, 32, N 5, p. 250—334.
15. Heisenberg W.— Z. Phys., 1932, 77, p. 1.
16. Gell-Mann M.— Phys. Lett., 1964, 8, p. 214—215.
17. Zweig G.— Preprint, 1964, CERN,— 8182/TH 401.
18. Greenberg O. W.— Phys. Rev. Lett., 1964, 13, p. 598—628
19. Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н. К вопросу о составных моделях в теории элементарных частиц.— Дубна, 1965.— 10 с. (Препринт// АН СССР. Объед. ин-т ядер. исслед.; Д—1968).
20. Han C. W., Nambu Y.— Phys. Rev. B, 1965, 139, p. 1006—1056.
21. Янг Ч., Миллс Р.— В кн.: Элементарные частицы и компенсирующие поля. М. : Мир, 1964, с. 298—398. (Phys. Rev., 1954, 96, p. 191—195).
22. Утпяма Р.— В кн.: Элементарные частицы и компенсирующие поля. М. : Мир, 1964, с. 298—398. (Phys. Rev., 1956, 101, p. 1597—1607).

### К главе 2

1. Дирак П. Принципы квантовой механики.— М. : Наука, 1979.— 480 с.
2. Паули В. Общие принципы волновой механики.— М. : Гостехиздат, 1947.— 332 с.
3. Томонага С.— В кн.: Новейшее развитие квантовой электродинамики. М. : Изд-во иностр. лит., 1954, 394 с. (Prog. Theor. Phys., 1946, 1, p. 27—32).
4. Швингер Ю.— Там же (Phys. Rev., 1948, 74, N 10, p. 1439—1461).
5. Дайсон Ф.— Там же (Phys. Rev., 1949, 75, N 11, p. 1736—1755).
6. Швингер Ю. Теория квантованных полей.— М. : Изд-во иностр. лит., 1956.— 250 с.

7. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования.— М. : Наука, 1965.— 235 с.
8. Волков Д. В., Пелетминский С. В.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1959, 37, с. 170—178.
9. Паули В. Релятивистская теория элементарных частиц.— М. : Изд-во иностр. лит., 1947.— 83 с.
10. Паули В.— В кн.: Нильс Бор и развитие физики.— М. : Изд-во иностр. лит., 1958.— 258 с.
11. Швингер Ю.— В кн.: Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М. : Изд-во иностр. лит., 1954, 394 с. (Phys. Rev., 1951, 82, p. 914—926).
12. Вигнер Е.— В кн.: Этюды о симметрии. М. : Мир, 1971, 318 с.
13. Jordan P., Pauli W.— Z. Phys., 1928, 47, p. 151—169.
14. Фейнман Р.— Phys. Rev., 1951, 84, p. 108—128.
15. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М. : Наука, 1969.— 623 с.
16. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— М. : Наука, 1984, 597 с.
17. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория.— М. : Наука, 1968.— 477 с.
18. Gupta S.— Proc. Phys. Soc. A, 1950, 63, p. 681.
19. Bleuler K.— Helv. Phys. Acta, 1950, 23, p. 567.
20. Окунь Л. Б. Лептоны и кварки.— М. : Наука, 1981.— 304 с.
21. Gell-Mann M.— Phys. Rev. 1962, 125, p. 1067—1084 (Physics, 1964, 1, p. 63).
22. Бернштейн Дж. Элементарные частицы и их токи. М. : Мир, 1970, 396 с.
23. Де Альфаро, Фубини С., Фурлан Г., Росетти К. Токи в физике адронов.— М. : Мир, 1976.— 670 с.
24. Сакураи Дж. Токи и мезоны.— М. : Атомиздат, 1972.— 167 с.
25. Schwinger J.— Phys. Rev. Lett, 1959, 3, p. 296—297.
26. Иоффе Б. Л., Липатов Л. Н., Хозе В. А. Глубокоупругие процессы : Феноменология.— М. : Энергоатомиздат, 1983.— 264 с.

### К главе 3

1. Гайтлер В. Квантовая теория излучения.— М. : Изд-во иностр. лит., 1956.— 491 с.
2. Швингер Ю. Теория квантованных полей.— М. : Изд-во иностр. лит., 1956.— 250 с.
3. Fermi E.— Rev. Mod. Phys., 1932, 4, p. 87—99.
4. Швингер Ю.— В кн.: Новейшее развитие квантовой электродинамики. М. : Изд-во иностр. лит., 1954, с. 394 (Phys. Rev., 1948, 74, N 10, p. 1439—1461).
5. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М. : Наука, 1969.— 623 с.
6. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— М. : Наука, 1984.— 597 с.
7. Биленький С. М. Введение в диаграммную технику Фейнмана.— М. : Атомиздат, 1971.— 215 с.
8. Вик Д.— В кн.: Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М. : Изд-во иностр. лит., 1954.— 394 с. (Phys. Rev., 1950, 80, N 2, p. 268—272).
9. Horis.— Progr. Theor. Phys., 1952, 7, p. 578.
10. Васильев А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистика.— Л. : Изд-во Ленинград. ун-та, 1976.— 294 с.
11. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля.— М. : Наука, 1969.— 424 с.
12. Токи в физике адронов / В. Де Альфаро, С. Фубини, Г. Фурлан, К. Росетти.— М. : Мир, 1976.— 670 с.
13. Берестецкий В. Б.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1951, 21, с. 93—94.
14. Feynman R.— Phys. Rev., 1949, 76, p. 749—759, p. 769—789.
15. Дайсон Ф.— В кн.: Новейшее развитие квантовой электродинамики. М. : Изд-во иностр. лит., 1954, с. 394. (Phys. Rev., 1949, 75, N 11, p. 1736—1755).
16. Фрадкин Е. С.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1955, 29, с. 258—261.
- 16a. Takahashi Y.— Nuovo Cim., 1957, 6, p. 371—375.
17. Word J.— Phys. Rev., 1950, 73, p. 182.



18. Kallen G.— Helv. Phys. Acta, 1952, 25, p. 417.
19. Lehman H.— Nuovo Cim., 1952, 25, p. 342.
20. Паули В., Вилларс Ф.— В кн.: Сдвиг уровней атомных электронов. М.: Изд-во иностр. лит., 1950, с. 222. (Rev. Mod. Phys., 1949, 21, p. 434).
- 21a. Bollini C. G., Giabulgi J. T.— Phys. Lett., B, 1972, 40, p. 566—568.
- 21b. Ashmore J. F.— Lett. Nuovo Cim., 1972, 4, p. 289.
22. T'Hoofst G., Veltman M.— Nucl. Phys. B, 1972, 44, p. 189—213.
23. Dyson F.— Phys. Rev., 1949, 75, p. 486—502.
24. Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.— Докл. АН СССР, 1955, 100, № 1, с. 25—28. (Acta Math., 1957, 97, p. 227).
25. Завьялов О. И. Перенормированные диаграммы Фейнмана.— М.: Наука, 1979.— 317 с.
26. Ицксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля.— М.: Мир, 1984.— 397 с.
27. Stueckelberg E. C., Peterman A.— Helv. Phys. Acta, 1953, 26, p. 499.
28. Gell-Mann M., Low F.— Phys. Rev., 1954, 95, p. 1300—1312.
29. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.— Докл. АН СССР, 1955, 103, № 2, с. 203—206, № 3, с. 391—394.
30. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1956, 30, с. 77—86; Nuovo Cim., 1956, 3, p. 845.
31. Логунов А. А.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1956, 30, с. 793—795.
32. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М.— Докл. АН СССР, 1954, 95, № 6, с. 1177—1180.
33. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я.— Там же, 1955, 107, № 3, с. 489—492.
34. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М.— Там же, 1954, 95, № 4, с. 773—776.
35. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М.— Докл. АН СССР, 1954, 96, № 2, с. 261—264.
36. Трутень В. И., Фомин П. И.— Теорет. мат. физика, 1970, 5, с. 219—234.
- 36a. Фомин П. И.— Элементарные частицы, атомные ядра, 1976, 7, с. 687—787.
37. Ландау Л. Д.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1959, 37, с. 62—71.
38. Weinberg F.— Phys. Rev. 8B, 1960, 118, N 3, p. 838—849.
39. Завьялов О. И. Перенормированные диаграммы Фейнмана.— М.: Наука, 1979.
40. Fomin P. I., Miransky V. A.— Phys. Lett., B, 1976, 64, N 2, p. 166—169.
41. Fomin P. I., Gusynin V. P., Miransky V. A., Sitenko Yu. A.— Riv. Nuovo Cim., 1983, 6, N 5, p. 1—90.
42. Миранский В. А., Фомин П. И.— Элементарные частицы, атомные ядра, 1985, 16, № 3, с. 469—521.
43. Миранский В. А.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1985, 88, № 5, с. 1514—1526.
44. Горьков Л. П.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1956, 30, с. 790—791.
45. Петрина Д. Я., Иванов С. С., Ребенко А. Л. Уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния.— М.: Наука, 1979.— 295.

#### К главе 4

1. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.— 382 с.
2. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике.— М.: Атомиздат, 1976.— 256 с.
3. Васильев А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976.— 294 с.
4. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1965.— 235 с.
5. Schwinger J.— Phys. Rev., 1962, 125, p. 1043—1048.
6. Швингер Ю.— В кн.: Элементарные частицы и компенсирующие поля.— М.: Мир, 1964, с. 298 (Phys. Rev. 1962, 127, 324—330).
7. Попов В. Н., Фадеев Л. Д. Теория возмущений для калибровочно инвариантных полей.— Киев, 1967.— 30 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики; № 31).
- 7a. Fadeev L. D., Popov V. N.— Phys. Lett. B, 1967, 25, p. 29—30.
8. Feynman R.— Acta Phys. Pol., 1963, 24, p. 697.
9. De-Witt.— Phys. Rev., 1967, 160, p. 1113—1148, p. 1195.

10. *Fradkin E. S., Tyutin T. V.*— Phys. Lett. B, 1969, 30, p. 562—563.
- 10a. *Fradkin E. S., Tyutin T. V.*— Phys. Rev. D, 1970, 2, p. 2841—2857.
11. *Brandt R. A.*— Nucl. Phys. B, 1976, 116, p. 413—448.
12. *Славнов А. А., Фадеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.— 238 с.
13. *Abers E. S., Lee B. W.*— Phys. Rep, 1973, 9, p. 1—73.
14. *Becci C., Rouet A., Stora R.*— Comm. Math. Phys., 1975, 42, p. 127.
15. *Тютин И. В.* Калибровочная инвариантность в теории поля и в статистической физике в операторной формулировке.— Москва, 1975.— 62 с. (Препринт / АН СССР. Физическ. ин-т им. Лебедева, № 39).
16. *Mandelstam S.*— Phys. Rev., 1968, 175, p. 1580—1603.
17. *Хунлювич И. Б.*— Ядер. физика, 1969, 10, с. 409—424.
18. *Lee B. W., Zinn-Justin I.*— Phys. Rev. D, 1972, 5, p. 3137—3155.
19. *Славнов А. А.*— Теорет. мат. физика, 1972, 10, с. 153—161.
20. *Taylor I. C.*— Nucl. Phys. B, 1971, 33, p. 436.
21. *Gross D. I., Wilczek F.*— Phys. Rev. Lett., 1973, 30, p. 343—345 (Phys. Rev. D, 1973, 8, p. 3633—3652).
22. *Politzer H. D.*— Phys. Rev. Lett., 1973, 30, p. 1346—1349.
23. *Callan C.*— Phys. Rev. D, 1970, 2, p. 1541—1547.
24. *Symanzik K.*— Comm. Math. Phys., 1970, 18, p. 227.
25. *Parisi G., Wu Yong-Shi.*— Sci. Sin., 1981, 24, p. 483.
26. *Ахизер А. П., Петлеминский С. В.* Методы статистической физики.— М.: Наука, 1977.— 367 с.
27. *Zwanziger D.*— Nucl. Phys. B, 1981, 192, p. 259—269.
28. *Gribov V. N.*— Ibid., 1978, 139, p. 1—19.
29. *Zwanziger D., Vauillie L.*— Ibid., 1981, 193, p. 163—172.
30. *Parisi G., Sourlas N.*— Ibid., 1982, 206, p. 321—332.

#### К главе 5

1. *Грибов В. Н., Иоффе Б. Л., Померанчук И. Я.*— Ядер. физика, 1967, 6, № 3, с. 587—590.
2. *Chodos A., Jaffe R. L., Johnson K. et al.*— Phys. Rev. D, 1974, 9, p. 3471—3495.
3. *Chodos A., Thorn C. B.*— Ibid., 1975, 12, p. 2733.
4. *Боголюбов Р. Н.* Sur un modele a quarks quasi-independants.— Ann. Inst. H. Poincaré, A, 1968, 8, N 2, p. 163—189.
5. *Ахизер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1981.— 432 с.
6. *Chodos A., Jaffe R. L., Johnson K., Thorn C. B.*— Phys. Rev. 1974, 10, p. 2599—2604.
7. *Паули В.* Общие принципы волновой механики.— М.: Гостехиздат, 1947.— 332 с.
8. *Иоффе Б. Л., Липатов Л. Н., Хозе В. А.* Глубоконеупругие процессы.— Феноменология. Кварк-партоновая модель.— М.: Энергоатомиздат, 1983.— 264 с.
9. *Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория.— М.: Наука, 1978.— Т. 1—2.
10. *Де Альфаро В., Фубини С., Фурлан Г., Росетти К.* Токи в физике адронов.— М.: Мир, 1976.— 670 с.
11. *Politzer H. D.*— Phys. Repts, C, 1974, 14, N 4, p. 129—180.
12. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1984.— 597 с.
13. *Jost R., Luttinger J. M.*— Helv. Phys. Acta, 1950, 23, N 12, p. 201—214.
14. *Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V.*— Phys. Lett. B, 1979, 85, N 2/3, p. 277—279.
15. *Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V.* Computation of the  $\alpha_s^2$  correction  $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$  in QCD.— Moscow, 1980.— 36 p (Preprint / INR, p — 0170).
16. *Narison S.*— Phys. Rep., 1982, 84, N 4, p. 265—399.
17. *Бьёркен Дж. Д., Иоффе Б. Л.*— Успехи физ. наук, 1975, 116, № 1, с. 115.
18. *Исаев П. С.* Квантовая электродинамика в области высоких энергий.— М.: Энергоатомиздат, 1984.— с. 264.

19. Поляков А. М.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1970, 59, № 2, с. 542.
20. Fox C., Wolfram S.— Nucl. Phys. B, 1979, 149, p. 413—496.
21. Sterman G., Weinberg S.— Phys. Rev. Lett., 1977, 39, p. 1436—1439.
22. Weeks V. G.— Phys. Lett. B, 1979, 81, p. 377—379.
23. Curci G., Greco M.— Ibid., 1978, 79, p. 406—410.
24. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами.— М.: Мир, 1975.— 389 с.
25. Bjorken J. D., Paschos E. A.— Phys. Rev., 1969, 185, N 5, p. 1975—1982.
26. Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н.— Элементар. частицы атом. ядра, 1971, 2, № 1, с. 7—32.
27. Боголюбов Н. Н., Владимиров В. С., Тавхелидзе А. Н.— Теорет. мат. физика, 1972, 12, № 1, с. 3—17.
- 27а. Боголюбов Н. Н., Владимиров В. С., Тавхелидзе А. Н.— Теорет. мат. физика, 1972, 12, № 3, с. 305—331.
28. Ахиезер А. И., Рекало М. П. Электродинамика адронов.— Киев: Наук. думка, 1977.— 495 с.
29. Buras A. J.— Rev. Mod. Phys., 1980, 52, N 1, p. 199—276.
30. Волошин М. Б., Тер-Мартirosян К. А. Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц.— М.: Энергоиздат, 1984.— 296 с.
31. Ioffe V. L.— Phys. Lett. B, 1969, 30, p. 123—125.
32. Wilson K. G.— Phys. Rev., 1969, 179, N 5, p. 1499—1512.
33. Шелест В. П., Зиновьев Г. М., Миранский В. А. Модель сильновзаимодействующих элементарных частиц.— М.: Атомиздат, 1975.— 232 с.
34. Gross D. J., Wilczek F.— Phys. Rev. D, 1973, 8, N 10, p. 3633—3652; 1974, 9, N 4, p. 980—993.
35. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля.— М.: Мир, 1984.— Т. 1—2.
36. Андреев И. В. Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях.— М.: Наука, 1981.— 192 с.
37. Nactman O.— Nucl. Phys. B, 1973, 63, N 2, p. 237—247.
38. R. K. Ellis, W. Furmanski R. Petronzio.— Ibid., 1983, 212, N 1, p. 29—98.
39. Okawa M.— Ibid., 1981, 187, N 1, p. 71—92.
40. Buchkavostov A. P., Kurayev E. A., Lipatov L. N., Frolov G. V.— Ibid., 1985, 257, N 2, p. 151—165.
41. Ситенко Ю. А.— Укр. физ. журн., 1984, 28, № 12, с. 1761—1779.

## К главе 6

1. Fermi E.— Z. Physik, 1934, 88, N 1, S. 161—171.
2. Feynman R. P., Gell-Mann M.— Phys. Rev., 1958, 109, N 1, p. 193—198.
3. Sudarshan E. C. G., Marshak R. E.— Ibid., N 5, p. 1860—1862.
4. Sakurai J.— Nuovo Cim., 1958, 7, N 5, p. 649—660.
5. Ландау Л. Д.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1957, 32, вып. 2, с. 407.
6. Lee T. D., Yang C. N.— Phys. Rev., 1957, 105, N 5, p. 1671—1675.
7. Salam A.— Nuovo Cim., 1957, 5, N 1, p. 229—301.
8. Герштейн С. С., Зельдович Я. Б.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1955, 29, вып. 5, с. 698—699.
9. Фейнман Р. Теория фундаментальных процессов.— М.: Наука, 1978.— 199 с.
10. Wohl C. C., Cahn R. N.— Rev. Mod. Phys., 1984, 56, N 2, pt 2, p. S10, S78—S88.
11. Любимов В. А., Новиков Е. Г., Нозик В. З. и др.— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1981, 81, вып. 4, с. 1158—1181.
12. Ландау Л. Д.— Там же, 1957, 32, вып. 2, с. 405—406 (Nucl. Phys., 1957, 3, N 1, p. 127—131).
13. Weinberg S.— Phys. Rev. Lett., 1967, 19, N 21, p. 1264—1266.
14. Salam A. Elementary particle theory / Ed. by N. Svartholm.— Stockholm, 1968, p. 367.
15. Glashow S. L.— Nucl. Phys., 1961, 22, N 4, p. 579—588.
16. Klein O. On the theory of charged fields.— In: New theories in physics.— Warsaw, 1938.
17. Schwinger J.— Ann. Phys. (USA), 1957, 2, N 5, p. 407—434.
18. Salam A., Ward J. C.— Nuovo Cim., 1959, 11, N 4, p. 568—577.

19. *Salam A., Ward J. C.*— Phys. Lett., 1964, 13, N 2, p. 168—171.
20. *Haserf F. J., Kabe S., Kreuz W. et al.*— Ibid., В, 1973, 46, N 1, p. 138—140.
21. *Arnison G., Astbury A., Aubert B. et al.*— Ibid., 1983, 122, N 1, p. 103—116 (Успехи физ. наук, 1983, 141, вып. 3, с. 501—516).
22. *Arnison G., Astbury A., Aubert B. et al.*— Phys. Lett. В, 1983, 126, N 5, p. 398.
23. *Понтекорво Б.*— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1958, 34, вып. 1, с. 247.
24. *Герштейн С. С., Зельдович Я. Б.*— Письма в Журн. эксперим. и теорет. физики, 1966, 4, вып. 5, с. 174—177.
25. *Зельдович Я. Б., Хлопов М. Ю.*— Успехи физ. наук, 1981, 135, вып. 1, с. 45.
- 26а. *Боголюбов Н. Н.* Квазисредние в задачах статистической механики.— Дубна, 1961.— 52 с. (Препринт / АН СССР. Объед. ин-т ядер. исслед.; Д—781).
- 26в. *Боголюбов Н. Н.* Избранные труды по статистической физике.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979, с. 193—268.
27. *Goldstone J.*— Nuovo Cim., 1961, 19, N 1, p. 154—164.
28. *Goldstone J., Salam A., Weinberg S.*— Phys. Rev., 1962, 127, N 3, p. 965—970.
- 29а. *Nambu Y.*— Phys. Rev. Lett., 1960, 4, p. 380—382.
- 29б. *Nambu Y., Iona-Lasinio G.*— Phys. Rev., 1961, 122, N 1, p. 345—358.
30. *Арбузов Б. А., Тавхелидзе А. Н., Фаустов Р. Н.*— Докл. АН СССР, 1961, 139, с. 345.
31. *Вакс В. Г., Ларкин А. И.*— Журн. эксперим. и теорет. физики, 1961, 40, с. 282—285.
32. *Anderson P. W.*— Phys. Rev., 1963, 130, N 1, p. 439—442.
33. *Higgs P. W.*— Phys. Lett., 1964, 12, N 2, p. 132—133.
34. *Higgs P. W.*— Phys. Rev. Lett., 1964, 13, N 16, p. 508—509; Phys. Rev., 1966, 145, N 4, p. 1156—1163.
35. *Englert F., Brout R.*— Phys. Rev. Lett., 1964, 13, N 10, p. 321—323.
36. *Kibble T. W. B.*— Phys. Rev., 1967, 155, N 5, p. 1554—1561.
37. *Вайнштейн А. Н., Захаров В. И., Шифман М. И.*— Успехи физ. наук, 1980, 131, вып. 4, с. 537—575.
38. *Окунь Л. Б.* Лептоны и кварки.— М.: Наука, 1981.— 304 с.
39. *Ахизер А. И., Рекало М. П.* Электродинамика адронов.— Киев: Наук. думка, 1977.— 495 с.
40. *Волошин М. Б., Тер-Мартirosян К. А.* Теория калиброванных взаимодействий элементарных частиц.— М.: Энергоатомиздат, 1984.— 296 с.
41. *Вайнштейн А. И., Хриплович И. Б.*— Успехи физ. наук., 1974, 112, вып. 4, с. 685—709.
42. *'t Hooft G.*— Nucl. Phys., 1971, В, 35, N 1, p. 167—188.
43. *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1978.— 240 с.
44. *Миранский В. А.* Перенормировка калибровочных теорий поля.— Киев, 1978.— 44 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ-78-17Р).
45. *Тейлор Дж.* Калибровочные теории слабых взаимодействий.— М.: Мир, 1978.— 206 с.
46. *Зельдович Я. Б.*— Докл. АН СССР, 1952, 76, № 3, с. 505—508.
47. *Биленький С. М., Понтекорво Б. М.*— Успехи физ. наук, 1977, 123, вып. 2, с. 181—215.
48. *Glashow S. L., Iliopoulos J., Maiani L.*— Phys. Rev. D, 1970, 2, N 7, p. 1285—1292.
49. *Kobayashi M., Maskawa T.*— Progr. Theor. Phys., 1973, 49, N 2, p. 652—657.
50. *Kabibbo N.*— Phys. Rev. Lett., 1963, 10, N 12, p. 531—533.
51. *Миранский В. А.* Квантование калибровочных теорий поля.— Киев, 1977.— 46 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ-77-107Р).
52. *Passarino G., Veltman M.* Nucl. Phys. В, 1979, 160, N 1, p. 151—207.
53. *Weinberg S.*— Rev. Mod. Phys., 1974, 46, N 2, p. 255—277.
54. *'t Hooft G.*— Phys. Lett. В, 1971, 37, N 2, p. 195—196.
55. *Биленький С. М.* Лекции по физике нейтринных и лептон-нуклонных процессов.— М.: Энергоиздат, 1981.— 216 с.
56. *Georgi H., Quinn H. R., Weinberg S.*— Phys. Rev. Lett., 1974, 33, N 7, p. 451.
57. *Georgi H., Glashow S. L.*— Ibid., 32, N 8, p. 438—441.
58. *Pati J. C., Salam A.*— Phys. Rev. D, 1973, 8, N 4, p. 1240—1251.
59. *Pati J. C., Salam A.*— Ibid., 1974, 10, N 1, p. 275—289.
60. *Матинян С. Г.*— Успехи физ. наук, 1980, 130, вып. 1, с. 3—38.

Предисловие . . . . .	3
<b>ГЛАВА 1. КЛАССИЧЕСКИЕ ПОЛЯ . . . . .</b>	<b>5</b>
§ 1.1. Лагранжев формализм . . . . .	5
1.1.1. Вариационный принцип . . . . .	5
1.1.2. Группа пространственно-временных преобразований . . . . .	7
1.1.3. Группы внутренних симметрий . . . . .	10
§ 1.2. Законы сохранения : . . . . .	13
1.2.1. Симметрий и законы сохранения . . . . .	13
1.2.2. Тензоры энергии — импульса и моментов количества движения . . . . .	14
1.2.3. Законы сохранения, связанные с внутренними симметриями . . . . .	16
§ 1.3. Уравнения поля первого порядка . . . . .	17
1.3.1. Лагранжиан и уравнения поля . . . . .	17
1.3.2. Уравнения поля в форме скобок Пуассона . . . . .	20
1.3.3. Канонические преобразования и их генераторы в классической механике . . . . .	22
1.3.4. Канонические преобразования и их генераторы для классических полей . . . . .	24
§ 1.4. Скалярное и векторные поля . . . . .	27
1.4.1. Скалярное поле : : : . . . . .	27
1.4.2. Векторное поле . . . . .	29
1.4.3. Максвелловское поле . . . . .	32
§ 1.5. Дираковское поле : . . . . .	35
1.5.1. Уравнение Дирака . . . . .	35
1.5.2. Алгебра дираковских матриц . . . . .	37
1.5.3. Релятивистская инвариантность уравнений Дирака и лагранжиан дираковского поля . . . . .	39
1.5.4. Плоские волны . . . . .	44
1.5.5. Преобразование зарядового сопряжения и майорановский биспинор . . . . .	48
§ 1.6. Релятивистские спиноры . . . . .	52
1.6.1. Структура матрицы преобразования дираковского поля . . . . .	52
1.6.2. Матрицы преобразования спиноров при бесконечно малых преобразованиях Лоренца . . . . .	54
1.6.3. Спинорная алгебра . . . . .	56
§ 1.7. Суперполя . . . . .	60
1.7.1. Алгебра генераторов суперпреобразований . . . . .	60
1.7.2. Суперполя и закон их преобразования . . . . .	64
1.7.3. Неприводимое скалярное суперполе . . . . .	66
1.7.4. Лагранжиан и уравнения движения суперполя . . . . .	70
§ 1.8. Дираковские поля с внутренними симметриями . . . . .	75
1.8.1. Нуклонные и кварковые поля . . . . .	75
1.8.2. Унитарные симметрии . . . . .	77
1.8.3. Унитарные тензоры . . . . .	80
1.8.4. Свойства генераторов унитарной группы . . . . .	82
§ 1.9. Калибровочные поля : . . . . .	83
1.9.1. Введение калибровочного поля . . . . .	83

1.9.2. Тензорный анализ калибровочных полей . . . . .	88
1.9.3. Лагранжиан калибровочного поля и полный лагранжиан . . . . .	90
1.9.4. Калибровочные поля, связанные с дираковскими полями, обладающими внутренней симметрией . . . . .	93
<b>ГЛАВА 2. КВАНТОВАНИЕ . . . . .</b>	<b>97</b>
§ 2.1. Динамика квантованных полей $\varphi$ . . . . .	97
2.1.1. Квантовомеханическое описание состояний . . . . .	97
2.1.2. Квантовый интеграл действия и уравнения поля . . . . .	101
2.1.3. Динамически независимые переменные поля и уравнения связи . . . . .	105
2.1.4. Генераторы вариаций поля и принцип стационарного действия . . . . .	109
2.1.5. Генераторы элементарных вариаций и перестановочные соотношения . . . . .	112
2.1.6. Квантование уравнений поля второго порядка . . . . .	117
§ 2.2. Свойства уравнений полей и законы сохранения . . . . .	119
2.2.1. Внутренние и пространственные симметрии и связанные с ними законы сохранения . . . . .	119
2.2.2. Лоренцева инвариантность теории и законы сохранения 4-импульса и 4-момента . . . . .	124
2.2.3. Коммутаторы интегралов движения . . . . .	128
2.2.4. Инвариантность теории по отношению к обращению времени и связь спина со статистикой . . . . .	130
§ 2.3. Квантование скалярного и векторного полей . . . . .	136
2.3.1. Уравнения движения и перестановочные соотношения для операторов скалярного поля . . . . .	136
2.3.2. Операторы энергии — импульса и заряда скалярного поля . . . . .	139
2.3.3. Связи между операторами скалярного поля . . . . .	142
2.3.4. Квантование векторного поля . . . . .	144
§ 2.4. Квантование электромагнитного поля . . . . .	149
2.4.1. Лагранжиан и уравнения движения квантованного электромагнитного поля . . . . .	149
2.4.2. Перестановочные соотношения для операторов электромагнитного поля . . . . .	152
2.4.3. Векторы состояний электромагнитного поля и индефинитная метрика . . . . .	157
2.4.4. Структура физического подпространства векторов состояния и калибровочная инвариантность . . . . .	159
2.4.5. Упорядоченные произведения операторов электромагнитного поля и связи . . . . .	161
2.4.6. Операторы энергии — импульса и момента электромагнитного поля . . . . .	162
§ 2.5. Квантование электронно-позитронного поля . . . . .	165
2.5.1. Лагранжиан и уравнения движения квантованного дираковского поля . . . . .	165
2.5.2. Перестановочные соотношения для операторов дираковского поля . . . . .	166
2.5.3. Операторы заряда, 4-импульса и 4-момента дираковского поля . . . . .	169
2.5.4. Векторы состояний дираковского поля . . . . .	170
2.5.5. Упорядоченные произведения операторов дираковского поля и связи . . . . .	173
§ 2.6. Квантование двухкомпонентного фермионного поля и суперполя . . . . .	175
2.6.1. Лагранжиан и уравнения движения квантованного спинорного поля . . . . .	175
2.6.2. Разложение на плоские волны и одновременные перестановочные соотношения . . . . .	176
2.6.3. Упорядоченные произведения операторов двухкомпонентного ферми-поля и связи . . . . .	178
2.6.4. Квантование свободного суперполя . . . . .	180
2.6.5. Упорядоченные произведения операторов суперполя и связи . . . . .	183
§ 2.7. Квантование кваркового поля . . . . .	186
2.7.1. Лагранжиан и квантовые числа кварков . . . . .	186
2.7.2. Алгебра токов . . . . .	191
<b>ГЛАВА 3. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ . . . . .</b>	<b>196</b>
§ 3.1. Лагранжиан и уравнения движения взаимодействующих электромагнитного и электронно-позитронного полей . . . . .	196
3.1.1. Уравнения квантовой электродинамики в кулоновской калибровке . . . . .	196
3.1.2. Представление взаимодействия в кулоновской калибровке . . . . .	200
3.1.3. Уравнения квантовой электродинамики в лоренцевой калибровке . . . . .	203
3.1.4. Калибровочные преобразования взаимодействующих полей . . . . .	205
3.1.5. Представление взаимодействия в лоренцевой калибровке . . . . .	208
§ 3.2. Матрица рассеяния : . . . . .	213
3.2.1. Унитарность матрицы рассеяния . . . . .	213
3.2.2. Представление матрицы рассеяния в виде суммы нормальных произведений . . . . .	215

3.2.3. Функциональная форма представления матрицы рассеяния в виде $N$ -упорядоченного оператора . . . . .	218
3.2.4. Связь определений матрицы рассеяния в кулоновской и лоренцевой калибровках . . . . .	221
3.2.5. Введение релятивистски-инвариантных $T$ -произведений и швингеровские члены . . . . .	224
§ 3.3. Свойства симметрии электромагнитного взаимодействия . . . . .	228
3.3.1. Инвариантность $S$ -матрицы по отношению к непрерывным преобразованиям пространства — времени . . . . .	228
3.3.2. Инвариантность $S$ -матрицы по отношению к сильному отражению пространства — времени . . . . .	230
3.3.3. Инвариантность $S$ -матрицы по отношению к преобразованию зарядового сопряжения . . . . .	231
3.3.4. Инвариантность $S$ -матрицы по отношению к отражению пространства, обращению времени и СТР-теорема . . . . .	233
§ 3.4. Графическое представление матрицы рассеяния . . . . .	235
3.4.1. Графическое представление нормальных произведений . . . . .	235
3.4.2. Импульсное представление . . . . .	239
3.4.3. Вероятность и эффективное сечение процессов . . . . .	243
§ 3.5. Функции Грина взаимодействующих полей . . . . .	248
3.5.1. Структура диаграмм матрицы рассеяния . . . . .	248
3.5.2. Функции Грина как вакуумные средние . . . . .	254
3.5.3. Свойства функций Грина . . . . .	257
3.5.4. Спектральное представление функции Грина электрона . . . . .	259
3.5.5. Спектральное представление функции Грина фотона . . . . .	263
§ 3.6. Теория перенормировок . . . . .	267
3.6.1. Расходимость неприводимых диаграмм матрицы рассеяния . . . . .	267
3.6.2. Промежуточная регуляризация . . . . .	271
3.6.3. Метод размерной регуляризации . . . . .	274
3.6.4. Перенормировка массы электрона . . . . .	277
3.6.5. Физический заряд электрона и перенормировка функций Грина и вершинной функции . . . . .	279
3.6.6. Перенормировка элементов матрицы рассеяния и общих функций Грина . . . . .	282
3.6.7. Отсутствие расходимости в рядах теории возмущений по перенормированному заряду . . . . .	285
§ 3.7. Функции Грина в низших порядках теории возмущений . . . . .	289
3.7.1. Вычисление электронной функции Грина во втором порядке теории возмущений в методе регуляризации Паули—Вилларса . . . . .	289
3.7.2. Вычисление фотонной функции Грина во втором порядке теории возмущений в методе промежуточной регуляризации Паули — Вилларса . . . . .	294
3.7.3. Вычисление функций Грина и вершинной функции во втором приближении теории возмущений в методе размерной регуляризации . . . . .	296
3.7.4. Особенности и асимптотики фейнмановских диаграмм . . . . .	300
§ 3.8. Ренормализационная группа и асимптотики функций Грина . . . . .	308
3.8.1. Структура фотонной функции Грина в области больших импульсов . . . . .	308
3.8.2. Структура электронной функции Грина в области больших импульсов . . . . .	312
3.8.3. Асимптотика фотонной функции Грина в теории возмущений . . . . .	315
3.8.4. Асимптотика электронной функции Грина в теории возмущений . . . . .	318
3.8.5. Инфракрасная асимптотика электронной функции Грина . . . . .	321
§ 3.9. Квантовая теория несвободного суперполя . . . . .	323
3.9.1. Переход к представлению взаимодействия и матрица рассеяния . . . . .	323
3.9.2. Правила Фейнмана в теории суперполя . . . . .	327
3.9.3. Расходимость в матрице рассеяния суперполя . . . . .	328
<b>ГЛАВА 4. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ</b> . . . . .	<b>332</b>
§ 4.1. Квантование калибровочного поля в кулоновской калибровке . . . . .	332
4.1.1. Лагранжиан калибровочного и фермионного полей в кулоновской калибровке . . . . .	332
4.1.2. Перестановочные соотношения и уравнения поля . . . . .	334
4.1.3. Представление взаимодействия в кулонной калибровке . . . . .	336
§ 4.2. Метод континуального интегрирования . . . . .	338
4.2.1. Континуальное интегрирование . . . . .	338
4.2.2. Представление $S$ -матрицы в виде континуального интеграла . . . . .	342

4.2.3. Представление функций Грина в виде континуального интеграла . . . . .	345
4.2.4. Представление $S$ -матрицы и функций Грина неабелевых калибровочных полей в виде континуальных интегралов . . . . .	347
§ 4.3. Переход от кулоновской калибровки к лоренцевой калибровке . . . . .	350
4.3.1. Калибровочная инвариантность усеченной $S$ -матрицы . . . . .	350
4.3.2. Релятивистская инвариантность $S$ -матрицы неабелевых калибровочных полей . . . . .	353
4.3.3. Переход от кулоновской калибровки к лоренцевой и возникновение духов . . . . .	355
§ 4.4. Операторный формализм квантования калибровочных полей в лоренцевой калибровке . . . . .	357
4.4.1. Лагранжиан калибровочных полей в лоренцевой калибровке (эффективный лагранжиан) . . . . .	357
4.4.2. Уравнения движения и перестановочные соотношения для полей . . . . .	359
4.4.3. Инвариантность теории по отношению к калибровочным преобразованиям . . . . .	360
4.4.4. Квантовая теория калибровочных и фермионных полей в пренебрежении взаимодействием . . . . .	365
§ 4.5. Матрица рассеяния : : : : . . . . .	371
4.5.1. Переход к представлению взаимодействия . . . . .	371
4.5.2. Переход к импульсному представлению . . . . .	375
4.5.3. Графическое представление матрицы рассеяния и правила Фейнмана . . . . .	378
4.5.4. Унитарность матрицы рассеяния . . . . .	381
§ 4.6. Перенормируемость теории неабелевых калибровочных полей . . . . .	386
4.6.1. Классификация ультрафиолетовых расходимостей неабелевых калибровочных полей . . . . .	386
4.6.2. Перенормируемость теории неабелевых калибровочных полей . . . . .	389
4.6.3. Тожества Уорда . . . . .	393
§ 4.7. Функции Грина и константы перенормировки во втором порядке теории возмущений : . . . . .	397
4.7.1. Функция Грина и константа перенормировки скалярного фермионного поля . . . . .	397
4.7.2. Функция Грина и константа перенормировки глюонного поля . . . . .	400
4.7.3. Глюон-духовая вершина и ее константа перенормировки . . . . .	404
§ 4.8. Асимптотика функций Грина калибровочных полей в области больших импульсов : : . . . . .	407
4.8.1. Уравнения ренормализационной группы . . . . .	407
4.8.2. Структура функций Грина калибровочных полей в области больших импульсов . . . . .	409
4.8.3. Асимптотика вершинных функций и функций Грина в теории возмущений . . . . .	412
§ 4.9. Введение стохастических полей и построение функций Грина . . . . .	414
4.9.1. Стохастические поля с пятой «временной» координатой . . . . .	414
4.9.2. Функциональное уравнение Фоккера — Планка и его стационарное решение . . . . .	415
4.9.3. Стохастические поля и функции Грина неабелевых калибровочных полей . . . . .	420
4.9.4. Фиксация калибровки и модификации оператора эволюции . . . . .	423
<b>ГЛАВА 5. ТЕОРИЯ СИЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ . . . . .</b>	<b>429</b>
§ 5.1. Феноменологическая хромодинамика . . . . .	429
5.1.1. Кварки и глюоны . . . . .	429
5.1.2. Феноменологии конфаймента . . . . .	430
5.1.3. Волновая функция кварка в мешке . . . . .	433
5.1.4. Структура нестранных бариев . . . . .	435
§ 5.2. Аннигиляция электронно-позитронной пары в адроны . . . . .	437
5.2.1. Полное сечение аннигиляции . . . . .	437
5.2.2. Связь между полным сечением $e^+e^-$ -аннигиляции и швингеровскими членами в коммутаторе кварковых токов . . . . .	440
5.2.3. Сечение аннигиляции в области больших импульсов электронно-позитронной пары . . . . .	442
5.2.4. Поляризационный оператор фотона с учетом сильного взаимодействия . . . . .	445
5.2.5. Вычисление вкладов, вносимых в поляризационный оператор кварковыми и кварк-глюонными петлями . . . . .	448
5.2.6. Аномальная размерность фотонной функции Грина и отношение сечений аннигиляции электронно-позитронной пары в адроны и мюоны . . . . .	451
§ 5.3. Кварк-глюонные струи . . . . .	453
5.3.1. Двухструйные процессы с участием мягких и виртуальных глюонов . . . . .	453



5.3.2. Учет жестких глюонов в двухструйных процессах . . . . .	457
5.3.3. Трехструйные процессы . . . . .	459
§ 5.4. Глубоко неупругое рассеяние лептонов адронами . . . . .	461
5.4.1. Амплитуда и сечение лептон-нуклонного рассеяния . . . . .	461
5.4.2. Аналитические свойства амплитуды рассеяния . . . . .	463
5.4.3. Представление произведения операторов токов в виде суперпозиции локальных операторов . . . . .	465
5.4.4. Скейлинг в модели свободных кварков . . . . .	470
5.4.5. Применение метода ренормализационной группы . . . . .	473
5.4.6. Вычисление аномальных размерностей . . . . .	477
5.4.7. Нарушение скейлинга . . . . .	482

**ГЛАВА 6. ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОСЛАБОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ВЕЛИКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ . . . . . 485**

§ 6.1. Калибровочные поля и лептонные и скалярные мультиплеты . . . . .	485
6.1.1. Четырехфермионное слабое взаимодействие . . . . .	485
6.1.2. Лагранжиан безмассовых лептонов и векторных калибровочных полей . . . . .	487
6.1.3. Введение хиггсовского скалярного поля . . . . .	490
§ 6.2. Классическая теория электрослабого взаимодействия . . . . .	492
6.2.1. Спонтанное нарушение симметрии и возникновение масс частиц . . . . .	492
6.2.2. Фиксация калибровки . . . . .	496
6.2.3. Лагранжианы взаимодействия . . . . .	498
6.2.4. Введение фиктивных скалярных фермионов . . . . .	503
§ 6.3. Электрослабое взаимодействие кварков . . . . .	508
6.3.1. Лагранжиан безмассовых кварков, взаимодействующих с калибровочными полями . . . . .	508
6.3.2. Спонтанное нарушение симметрии и массы кварков . . . . .	512
6.3.3. Лагранжиан и токи физических кварков . . . . .	514
§ 6.4. Квантовая теория электрослабого взаимодействия . . . . .	516
6.4.1. Квантование свободных полей . . . . .	516
6.4.2. Разложение векторных полей по плоским волнам . . . . .	521
6.4.3. Матрица рассеяния и правила Фейнмана . . . . .	524
6.4.4. Низкоэнергетический предел теории электрослабого взаимодействия . . . . .	528
6.4.5. Процессы рассеяния лептонов и распады $W$ - и $Z$ -бозонов . . . . .	530
§ 6.5. Великое объединение : . . . . .	534
6.5.1. Бегущие константы связи . . . . .	534
6.5.2. $SU(5)$ -симметрия . . . . .	536
6.5.3. Нестабильный протон . . . . .	540

**Список литературы . . . . . 542**