

Дж.Е.Браун, А.Д.Джексон

НУКЛОН-НУКЛОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Перевод с английского
Г. А. ЛОБОВА, и Б. О. КЕРБИКОВА



МОСКВА · АТОМИЗДАТ · 1979

THE NUCLEON-NUCLEON INTERACTION

G. E. BROWN

Nordita, Copenhagen

State University of New York, Stony Brook N. Y.

A. D. JACKSON

State University of New York, Stony Brook N. Y.

**NORTH-HOLLAND PUBLISHING
COMPANY — AMSTERDAM·OXFORD
AMERICAN ELSEVIER PUBLISHING COMPANY,
INC. — NEW YORK**

Браун Дж. Е., Джексон А. Д. Нуклон-нуклонные взаимодействия: Пер. с англ.— М.: Атомиздат, 1979. Пер. изд.; США, 1976. 248 с.

Рассмотрены вопросы нуклон-нуклонных взаимодействий при низких энергиях. Дано подробное описание простейших свойств дейтрона, рассеяния нуклонов на нуклонах, в том числе сепарабельных потенциалов и аналитических свойств амплитуды рассеяния. Рассмотрена релятивистская теория рассеяния, включая квазипотенциальные уравнения, формализм спиральностей, потенциал однобозонного обмена и механизм двухпионного обмена.

Книга рассчитана на теоретиков и экспериментаторов, работающих в области физики элементарных частиц и атомного ядра, а также на аспирантов и студентов старших курсов физических факультетов, специализирующихся в этих областях.

Табл. 15. Рис. 49. Список литературы 130 наименований.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга основана на курсе лекций, прочитанных в Институте Нильса Бора и в Скандинавском институте теоретической атомной физики в Копенгагене в осенних семестрах 1971, 1972 и 1974 гг. Мы надеемся в этой книге собрать широкий круг «технологических приемов», используемых при исследовании нуклон-нуклонного взаимодействия. Поскольку подобный курс полезен только, если он не содержит ошибок, мы будем весьма признательны за сообщения о допущенных ошибках.

Мы приносим благодарность нашим коллегам Марку Чемтобу, Джону Дурсо и Дан Олафу Риске, из чьих работ была заимствована большая часть материала по теоретико-дисперсионному подходу. Мы особенно благодарны Джону Дурсо, предоставившему нам свои записи, в которых содержались детали приведенных в гл. 8 и 9 вычислений. Мы часто пользовались этими записями.

Выражаем также благодарность профессору Р. Вин Мау за многочисленные обсуждения, которые ввели нас в область мощных методов, описанных в гл. 8. Читатель сможет убедиться, что наше собственное изложение постоянно перемежается с работами Коттингхэма, Вин Мау и их коллег, а также Чемтоба, Дурсо и Риски, на которые мы широко ссылаемся. Тот факт, что в теоретико-дисперсионном подходе работает «одна большая семья», неудивителен, так как объем детальных вычислений столь велик, что для получения надежных результатов полезно проводить исчерпывающую проверку.

Благодарим также Маурицио Фортес за большую помощь в редактировании текста. Наконец блестящая работа миссис Лиз Мадсен значительно облегчила работу по перепечатке рукописи.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

§ 1.1. ВВЕДЕНИЕ

Общие свойства ядерных сил были установлены, в первую очередь благодаря Вигнеру, задолго до того, как эксперименты по нуклон-нуклонному рассеянию дали детальную информацию о природе взаимодействия. Энергия связи, приходящаяся на одну частицу в ядре, стремится с ростом атомного номера A к постоянному значению. Отсюда ясно, что, в отличие от кулоновского взаимодействия, силы между нуклонами не являются дальнедействующими. В противном случае потенциальная энергия, приходящаяся на частицу, росла бы пропорционально числу частиц A . В то же время для легких ядер энергия связи на частицу растет с увеличением A . Так, энергия связи дейтрона составляет 2,22 МэВ и на нуклон приходится ~ 1 МэВ. Энергия связи ядра ${}^3\text{H}$ равна 8,5 МэВ и на частицу приходится ~ 3 МэВ, а в ${}^4\text{He}$ энергия связи на частицу составляет 7 МэВ. Отношение числа парных ядерных взаимодействий к числу частиц равно $1/2$ для дейтрона, 1 для ${}^3\text{He}$ и $3/2$ для ${}^4\text{He}$. Таким образом, вплоть до ${}^4\text{He}$ энергия связи на частицу растет с увеличением числа парных взаимодействий, приходящихся на нуклон. На самом деле энергия связи на частицу растет быстрее, чем число парных взаимодействий, отнесенное к числу частиц, и это указывает на весьма малый радиус действия сил. В дейтроне нуклоны проводят большую часть времени вне области взаимодействия, но по мере роста числа частиц в ядре они все более сосредоточиваются в этой области.

При переходе от ${}^4\text{He}$ к тяжелым ядрам энергия связи на частицу увеличивается лишь примерно на 1 МэВ. Это указывает на то, что насыщение почти достигается, когда собираются четыре частицы, а радиус действия ядерных сил приблизительно равен радиусу α -частицы.

Получим теперь потенциал, отвечающий мезонному обмену. Вместо того, чтобы следовать исторической последовательности и описывать работу Юкавы, мы предпочтем детальнее остановиться на выводе связи между радиусом ядерных сил и массой обмениваемой частицы из соотношения неопределенностей. Рассмотрим два медленных нуклона, т. е. нуклона, скорость каждого из которых $v \ll c$, где c — скорость света. Пусть один из

нуклонов испускает мезон с массой μ , который затем поглощается другим нуклоном. При испускании мезона энергия не сохраняется, причем для мезона с импульсом k мера несохранения энергии составляет $\Delta E = \sqrt{k^2 c^2 + \mu^2 c^4}$. Будем полагать, что $kc \ll \mu c^2$, тогда $\Delta E \approx \mu c^2$.

Из соотношения неопределенностей

$$\Delta E \cdot \Delta t = \hbar \quad (1.1)$$

следует, что мезон может «распространяться» в течение времени $t \approx \hbar / \Delta E = \hbar / \mu c^2$. Двигаясь со скоростью света, он сможет пройти расстояние $\hbar / \mu c$. Таким образом, максимальный радиус действия сил, создаваемый частицей с массой μ , равен $\hbar / \mu c$.

Сейчас установлено, что силы между нуклонами обусловлены обменом многими частицами, а именно π -, ρ - и ω -мезонами. Каждая из этих частиц вносит вклад в ядерное взаимодействие на расстояниях, обратно пропорциональных массе частицы.

Мы вернемся к аргументам, основанным на соотношении неопределенностей, когда будем пользоваться представлением Манделштама для описания потенциала двухпионного обмена.

§ 1.2. ПРИМИТИВНАЯ МЕЗОННАЯ ТЕОРИЯ; ВЫВОД ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЮКАВЫ

В учебниках по ядерной физике взаимодействие Юкавы обычно выводится из мезонной теории в ее классической формулировке. Мы предпочтем дать вывод в рамках несколько старомодной мезонной теории. Впоследствии мы увидим, что такое рассмотрение вполне подходит для перехода к представлению Манделштама.

Рассмотрим силы между нуклонами, обусловленные взаимодействием нуклонов со скалярными мезонами. В нерелятивистской теории такое взаимодействие описывается следующей плотностью лагранжиана δL (или плотностью гамильтониана — δH):

$$\delta L(x) = g\psi^+(x)\varphi(x)\psi(x) = -\delta H(x), \quad (1.2)$$

где $\psi(x)$ — волновая функция нуклона, а $\varphi(x)$ — мезонное поле. Полностью релятивистское описание получится, если ψ^+ заменить $\bar{\psi}(x) = \psi^+(x)\beta$, где β — матрица Дирака, и использовать дираковские волновые функции $\psi(x)$ и $\psi^+(x)$.

Мезонное поле можно разложить в ряд Фурье следующим образом*:

$$\varphi(x) = \sum_k \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_k}} q_k \exp(ikr), \quad (1.3)$$

* Здесь и далее используются единицы $\hbar = c = 1$.

где q_k — коэффициенты Фурье; $\omega_k = \sqrt{k^2 + \mu^2}$; μ — масса мезона*. Гамильтониан мезонного поля можно представить в виде суммы по осцилляторам с энергиями ω_k , и тогда величины q_k играют роль координат осцилляторов (см., например, [1]). Проведя квантование мезонного поля, получаем, что матричные элементы q_k равны

$$\langle n_k - 1 | q_k | n_k \rangle = \langle n_k | q_k^\dagger | n_k - 1 \rangle = \sqrt{n_k}, \quad (1.4)$$

где n_k — число квантов в состоянии k осциллятора. Будем считать, что $n=0$, если мезон отсутствует, или $n=1$, если имеется один мезон. Опишем взаимодействие, показанное на рис. 1.

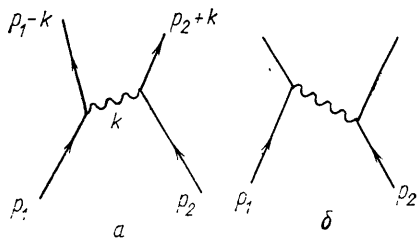


Рис. 1. Природа юкавского взаимодействия. Нуклоны изображены прямыми линиями, мезоны — волнистыми. В процессе *a* нуклон 1 испускает мезон, который поглощается нуклоном 2. В процессе *б* мезон сначала испускается нуклоном 2

Матричный элемент для взаимодействия, изображенного на рис. 1, находится во втором порядке теории возмущений. Например, на рис. 1, *a* в начальном состоянии имеются два нуклона p_1 и p_2 ; энергия начального состояния равна $E_0 = p_1^2/2M + p_2^2/2M$.

В промежуточном состоянии имеется мезон с энергией ω_k и импульсом k , его испускание описывается матричным элементом $g(2\pi/\omega_k)^{1/2}$, а энергия нуклона 1 равна $(p_1 - k)^2/2M$. Следовательно, энергия промежуточного состояния равна $E_i = \omega_k + (p_1 - k)^2/2M + p_2^2/2M$. При переходе в конечное состояние мезон поглощается и соответствующий матричный элемент равен $g(2\pi/\omega_k)^{1/2}$. Таким образом, процессу, изображенному на рис. 1, *a*, отвечает выражение

$$\frac{\langle f | \delta H | i \rangle \langle i | \delta H | 0 \rangle}{E_0 - E_i} = g^2 \left(\frac{2\pi}{\omega_k} \right) \frac{1}{p_1^2/2M - \omega_k - (p_1 - k)^2/2M}. \quad (1.4a)$$

Аналогично для процесса, изображенного на рис. 1, *б*, имеем

$$\frac{\langle f | \delta H | i \rangle \langle i | \delta H | 0 \rangle}{E_0 - E_i} = g^2 \left(\frac{2\pi}{\omega_k} \right) \frac{1}{p_2^2/2M - \omega_k - (p_2 + k)^2/2M}. \quad (1.4b)$$

В гл. 1 будем считать импульсы p_1 и p_2 малыми, т. е. $p_1, p_2 \ll k$.

Кроме того, из дальнейшего станет ясно, что существенны значения $k \sim \mu$, где μ — масса мезона. Таким образом, члены $p_1^2/(2M)$ или $(p_1 - k)^2/(2M)$ имеют порядок малости μ/M относи-

* Фактор $\omega_k^{-1/2}$ обусловлен нормировкой поля ϕ , которая выбрана таким образом, что плотность пионов равна $\rho_\pi = 2\omega_k |\phi|^2$.

тельно ω_k . Для легких по сравнению с нуклоном мезонов $\mu \ll M$, и тогда в знаменателе можно пренебречь всеми членами, кроме ω_k . Складывая (1.4а) и (1.4б), находим

$$\frac{\langle f | \delta H | i \rangle \langle i | \delta H | 0 \rangle}{E_0 - E_i} = -g^2 \frac{4\pi}{\omega_k^2} = V(k). \quad (1.5)$$

Взаимодействие в координатном пространстве находится преобразованием Фурье и представляет собой потенциал Юкавы:

$$V(r) = -\frac{g^2}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{4\pi}{\omega_k^2} \exp(ikr) = -g^2 \frac{\exp(-\mu r)}{r}. \quad (1.6)$$

Изложенный вывод выглядит сложнее, чем обычный, основанный на классической мезонной теории. Однако в результате в нашем распоряжении оказался квантовомеханический аппарат для полного описания мезон-нуклонного взаимодействия.

Посмотрим теперь, как изменятся полученные выражения, если сохранить в знаменателях (1.4а) и (1.4б) энергии нуклонов. Пользуясь законом сохранения энергии (что можно делать только, если конечные нуклоны являются физическими, а не виртуальными), получаем

$$(p_1 - k)^2/(2M) + (p_2 + k)^2/(2M) = p_1'^2/(2M) + p_2'^2/(2M). \quad (1.7)$$

Тогда для суммы (1.4а) и (1.4б) находим

$$\frac{\langle f | \delta H | i \rangle \langle i | \delta H | 0 \rangle}{E_0 - E_i} = -g^2 \frac{4\pi}{\omega_k^2 - (p_{10} - p_{10}')^2}, \quad (1.8)$$

где $p_{10} = p_1'^2/(2M)$, $p_{10}' = (p_1 - k)^2/(2M)$. Замечая, что $k^2 = (p_{1f} - p_{1i})^2$, где индексы f и i относятся соответственно к конечному и начальному импульсам нуклона, переписываем выражение (1.8) в виде

$$\frac{\langle f | \delta H | i \rangle \langle i | \delta H | 0 \rangle}{E_0 - E_i} = -g^2 \frac{4\pi}{(p_{1i} - p_{1f})^2 + \mu^2}. \quad (1.9)$$

Здесь p_{1i} и p_{1f} — 4-векторы вида $p_{1i} = (p_{1i}, p_{10})$, $p_{1f} = (p_{1f}, p_{10}')$.

Если перейти к релятивистским соотношениям

$$p_{10} = \sqrt{p_{1i}^2 + M^2}, \quad p_{10}' = \sqrt{p_{1f}^2 + M^2}, \quad (1.9a)$$

то выражение для матричного элемента станет полностью ковариантным. Впоследствии мы увидим, что это одна из форм ядра уравнения Бете—Солпитера.

Включение энергий нуклонов p_{10} и p_{10}' в знаменатель (1.8) называется «учетом отдачи нуклонов». Тем самым учитывается, что нуклоны обладают конечной массой и приобретают энергию отдачи после испускания или поглощения мезона.

Может показаться, — и на протяжении многих лет именно так и считалось, — что решение проблемы взаимодействия релятивистских нуклонов будет найдено в результате подстановки кова-

риантного взаимодействия (1.9) в релятивистское двухчастичное уравнение, которое затем будет решено «в лоб». В крайне упрощенных случаях действительно удастся получить решение таким путем. Однако с практической точки зрения выгоднее использовать нерелятивистский подход, а релятивистские эффекты включать, используя последовательные приближения, как будет описано ниже. Таким образом, взаимодействие Юкавы вида (1.5) или (1.6) займет центральное место в нашем изложении.

Сейчас известно, что самым легким из мезонов, сильно взаимодействующих с нуклонами, является пион. Пион — псевдоскалярная частица, обладающая электрическим зарядом. Взаимодействие пионов с нуклонами в нерелятивистском случае описывается следующим лагранжианом:

$$\delta L(x) = \frac{f}{\mu} \psi^+(x) (\sigma \nabla) (\tau \Phi) \psi(x). \quad (1.10)$$

Здесь τ — оператор изоспина:

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.10a)$$

σ — оператор спина нуклона, а Φ_x , Φ_y и Φ_z — компоненты пионного поля. Комбинация

$$\Phi_{\pm} = (\Phi_x \pm i\Phi_y)/\sqrt{2} \quad (1.10b)$$

отвечает заряженным пионным полям, а

$$\Phi_3 = \Phi_0 \quad (1.10b)$$

соответствует нейтральному полю.

Выкладки, аналогичные тем, которые привели к (1.5) и (1.6), приводят к следующему выражению для нуклон-нуклонного взаимодействия, обусловленного обменом пионом:

$$V(k) = -\frac{f^2}{\mu^2} 4\pi (\tau_1 \tau_2) \frac{(\sigma_1 \mathbf{k})(\sigma_2 \mathbf{k})}{\omega_k^2}; \quad (1.11)$$

$$V(r) = \frac{f^2}{\mu^2} (\tau_1 \tau_2) (\sigma_1 \nabla) (\sigma_2 \nabla) \frac{\exp(-\mu r)}{r} = f^2 \mu \tau_1 \tau_2 \left\{ S_{12} \left[\frac{1}{(\mu r)^3} + \frac{1}{(\mu r)^2} + \frac{1}{3\mu r} \right] \exp(-\mu r) + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{3} \left[\frac{\exp(-\mu r)}{\mu r} - \frac{4\pi}{\mu^3} \delta(r) \right] \right\},$$

где

$$S_{12} = 3 \frac{(\sigma_1 r)(\sigma_2 r)}{r^2} - \sigma_1 \sigma_2. \quad (1.11a)$$

Кроме скалярных и псевдоскалярных мезонов, векторные мезоны играют существенную роль во взаимодействии между нуклонами. Фазовый анализ данных по нуклон-нуклонному рассеянию указывает на существование сильного отталкивания на малых расстояниях. Введение такого взаимодействия в релятивист-

ское уравнение приводит к сильному, короткодействующему спин-орбитальному взаимодействию [2]. Именно исходя из полученных в результате фазового анализа свойств спин-орбитального взаимодействия, Брейт постулировал существование векторных мезонов.

Рассмотрение векторных мезонов и спин-орбитального взаимодействия требует использования релятивистского формализма, поэтому мы пока отложим исследование этих вопросов. Грубо говоря, нейтральный векторный мезон можно рассматривать как тяжелый фотон. Поэтому обмен тяжелыми нейтральными векторными мезонами приводит к отталкиванию между нуклонами. Из приведенных ранее рассуждений, основанных на соотношении неопределенностей, следует, что это отталкивание будет короткодействующим, если масса векторного мезона велика.

Нетрудно увидеть, каким образом возникает спин-орбитальное взаимодействие. В атоме водорода кулоновское взаимодействие V_C между электроном и протоном является притягивающим. Из кулоновского взаимодействия, используя релятивистское уравнение Дирака, можно получить спин-орбитальное взаимодействие вида

$$\frac{1}{r} \frac{dV_C}{dr} \sigma [\mathbf{r}\mathbf{p}]. \quad (1.12)$$

Это взаимодействие приводит к понижению энергии состояния с $j=l-1/2$ по сравнению с состоянием с $j=l+1/2$, как видно, например, из того, что в атоме водорода уровень $p_{1/2}$ лежит ниже уровня $p_{3/2}$.

В то же время из модели оболочек известно, что в ядре состояния с $l=j+1/2$ лежат ниже состояний с $l=j-1/2$. Следовательно, ядерные и кулоновские спин-орбитальные силы имеют противоположные знаки. Поэтому в случае ядерных сил притягивающий потенциал V_C в (1.12) надо заменить отталкивательным потенциалом, обусловленным обменом векторным мезоном*. Таким образом, короткодействующий отталкивательный потенциал, возникающий от обмена векторными мезонами, будучи подставленным в релятивистское уравнение, приведет к появлению члена вида

$$\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} (\sigma_1 + \sigma_2) [\mathbf{r}_{12}\mathbf{p}_{12}]. \quad (1.13)$$

Такой член действительно возникает, хотя следует признать, что в настоящее время невозможно провести строгое рассмотрение сильного, короткодействующего взаимодействия. Поэтому, когда

* Аналогия между обменом фотоном и сильным взаимодействием, возникающим за счет обмена массивными векторными мезонами, становится законченной, если заметить, что барионное число (равное $+1$ для нуклонов и -1 для антинуклонов) играет роль электрического заряда. Следовательно, если не считать возможных изоспиновых эффектов, нуклон-нуклонное взаимодействие, обусловленное векторными мезонами, приводит к отталкиванию.

мы говорим, что короткодействующее нуклон-нуклонное взаимодействие обусловлено обменом векторными мезонами, мы полагаемся на простую физическую картину, описанную выше.

Таким образом, в полученной нами физической картине силы на малых расстояниях являются отталкивающими и обусловлены обменом векторными мезонами. На больших расстояниях силы создаются потенциалом однопионного обмена, который дается формулой (1.11). Мы знаем, что

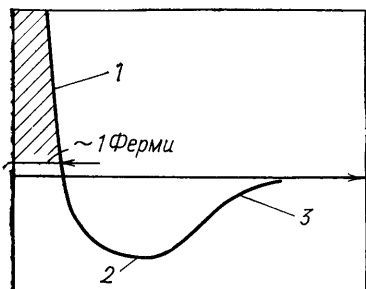


Рис. 2. Схематическое изображение нуклон-нуклонного потенциала. Обмен векторным (1), скалярными мезонами (2) и однопионный обмен (3)

должен существовать еще один существенный вклад в силы между нуклонами, так как ни один из двух названных не может связать нуклоны в ядре. Действительно, обмен векторным мезоном приводит к отталкиванию, а вклады от однопионного обмена содержат зависимость от S_{12} и $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ и поэтому имеют тенденцию к компенсации при усреднении по нуклонам ядра. Третьей составляющей ядерных сил является притягивающий потенциал, действующий на промежуточных расстояниях. Можно считать, что он создается обменом скалярными мезонами с различными массами $\mu_s > 2\mu_\pi$. Этот потен-

циал может быть представлен как суперпозиция потенциалов вида (1.6). В действительности эти скалярные мезоны представляют собой системы из двух пионов с суммарным угловым моментом $J=0$. Ниже мы еще вернемся к детальному описанию двухпионного обмена.

Итак, из мезонной теории и приведенных выше физических аргументов мы установили, что нуклон-нуклонное взаимодействие имеет вид, изображенный на рис. 2. Обратите внимание, что по своей форме нуклон-нуклонный потенциал напоминает потенциал Ван-дер-Ваальса между двумя молекулами. Имеется, однако, практически важное отличие, состоящее в том, что нуклон-нуклонное взаимодействие зависит от спина и орбитального момента частиц и поэтому различно в каждом из разных состояний сталкивающихся частиц, в то время как силы Ван-дер-Ваальса зависят только от относительного расстояния r .

Обсудив основные свойства взаимодействия, мы переходим к феноменологическому описанию нуклон-нуклонного рассеяния, чтобы увидеть, какие свойства низкоэнергетического рассеяния не зависят от детальной формы потенциала. В дальнейшем мы еще вернемся к выводу взаимодействия из мезонной теории.

ДЕЙТРОН И РАССЕЯНИЕ НЕЙТРОНОВ НА ПРОТОНАХ ПРИ НИЗКОЙ ЭНЕРГИИ

§ 2.1. ДЕЙТРОН

Начнем обсуждение низкоэнергетических явлений с рассмотрения системы нейтрон—протон. Кулоновское взаимодействие пока не рассматриваем, поскольку его просто нет в этой системе. Шредингеровская волновая функция двух частиц, взаимодействующих через потенциал $V(r)$, удовлетворяет в системе центра масс следующему уравнению:

$$\nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) + \frac{m}{\hbar^2} [E - V(r)] \psi(r, \theta, \varphi) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь m — удвоенная приведенная масса:

$$m = 2 \frac{m_n m_p}{m_n + m_p}. \quad (2.1a)$$

При отрицательной энергии E система является связанной. При положительной энергии E собственными состояниями являются состояния рассеяния.

Ограничимся пока рассмотрением S -состояния дейтрона и рассеянием в состояниях с орбитальным угловым моментом $l=0$. Вводя определение

$$u(r) = r\psi(r), \quad (2.2)$$

преобразуем уравнение Шредингера к следующему простому виду:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} [E - V(r)] u = 0. \quad (2.3)$$

Для грубой ориентации рассмотрим изображенный на рис. 3 потенциал в форме прямоугольной ямы. По своей форме этот потенциал мало напоминает потенциал, обсуждавшийся в гл. 1, однако мы хотим, чтобы настоящая глава содержала только утверждения, справедливые для любого короткодействующего потенциала.

Рассмотрим связанное состояние в этой яме (дейтрон). Вводя в уравнение (2.3) обозначение $E = -W$, где $W > 0$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} (V_0 - W) u = 0, \quad r < a; \\ \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{m}{\hbar^2} W u = 0, \quad r > a. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Решениями этого уравнения, обладающими правильным поведением в начале координат и на бесконечности, являются

$$u = \begin{cases} A \sin Kr & , \quad r < a; \\ B \exp(-\gamma r), & r > a, \end{cases} \quad (2.4a)$$

где

$$K = \sqrt{m(V_0 - W)/\hbar^2}, \quad \gamma = \sqrt{mW/\hbar^2}. \quad (2.4б)$$

Константы должны быть подобраны так, чтобы функция u и производная du/dr были непрерывны при $r=a$. Мы знаем, что энергия связи дейтрона равна [125]

$$W = (2,22452 \pm 0,00020) \text{ МэВ}. \quad (2.4в)$$

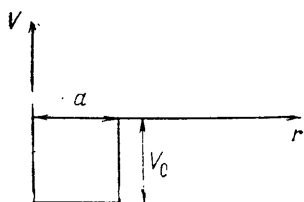


Рис. 3. Простейший потенциал, используемый нами для наглядности

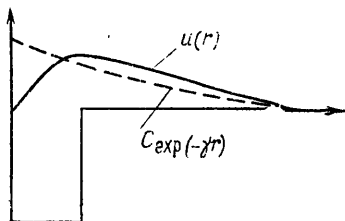


Рис. 4. Точная $u(r)$ и приближенная $C \exp(-\gamma r)$ волновые функции основного состояния дейтрона для потенциала в форме прямоугольной ямы

Тем самым задана константа γ . Удобно пользоваться логарифмической производной

$$\frac{d}{dr} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dr}, \quad (2.4г)$$

которая должна быть непрерывной, если u и du/dr непрерывны в точке $r=a$. Из условия непрерывности логарифмической производной получаем

$$K \operatorname{ctg} Ka = -\gamma. \quad (2.4д)$$

Это условие удобно тем, что не содержит A и B . Оно устанавливает связь между K и a . Следуя приведенным в гл. 1 рассуждениям относительно радиуса действия сил, мы можем объяснить малую энергию связи дейтрона тем фактом, что частицы проводят большую часть времени вне области действия сил. Поэтому величина a должна быть мала по сравнению с радиусом дейтрона, а энергия W мала по сравнению с глубиной ямы V_0 . В соответствии с этим находим

$$\operatorname{ctg} Ka = -\gamma/K \simeq -\sqrt{W/V_0}. \quad (2.4е)$$

Следовательно, $\operatorname{ctg} Ka$ отрицателен и мал по абсолютному значению. Таким образом, Ka лишь слегка превышает $\pi/2$. Описанная картина изображена на рис. 4.

Полагая $Ka \approx \pi/2$, находим

$$V_0 a^2 \approx \pi^2 \hbar^2 / 4m. \quad (2.4ж)$$

Если принять a равной комптоновской длине волны пиона, т. е.

$$a \approx \hbar / (\mu_\pi c) \approx 1,45 \text{ Ферми}, \quad (2.4з)$$

то находим, что $V_0 \sim 50$ МэВ в соответствии с нашим предположением $V_0 \gg W$.

На рис. 4 изображена приближенная функция

$$u = \sqrt{2\gamma} \exp(-\gamma r), \quad (2.4и)$$

которая в дальнейшем будет часто использоваться. Другой часто используемой функцией является [56]

$$u = C [\exp(-\gamma r) - \exp(-\alpha r)], \quad (2.5)$$

где

$$\alpha \gg \gamma. \quad (2.5а)$$

Из этого условия находим

$$C \simeq \sqrt{2\gamma} (1 + 3\gamma/2\alpha). \quad (2.5б)$$

Преимуществом функции (2.5) является правильное поведение $u \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Можно предположить, что по порядку величины параметр α равен $1/a$. Действительно, как оказывается, хорошим приближением для нормировочной постоянной B в (2.4а) является

$$B \simeq \sqrt{2\gamma} (1 + 3\gamma/2\alpha). \quad (2.5в)$$

Величина $1/\gamma$ определяет, грубо говоря, «радиус» дейтрона. Он равен $1/\gamma \approx 5$ Ферми.

§ 2.2. ДЛИНА РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим задачу рассеяния и будем пока полагать, что уравнение (2.3) описывает рассеяние бесспиновой частицы на сферически-симметричном потенциале V . Вновь предположим на время, что угловой момент $l=0$. Усложнения, возникающие при учете спина и ненулевых значений l , будут рассмотрены в последующих главах. Все, что нам надо пока знать о спине, состоит в том, что взаимодействие $V(r)$ является более притягивающим, когда спины нейтрона и протона параллельны (триpletное по спину состояние), чем когда они антипараллельны (синглетное состояние). Поэтому состояние с параллельными спинами — дейтрон — является связанным, а синглетное связанное состояние отсутствует.

Картина рассеяния при низкой энергии изображена на рис. 5. Вне области действия сил волновая функция рассеянной частицы

$u(r) = \sin(kr + \delta)$ и при низкой энергии можно записать следующее разложение:

$$u(r) \approx kr + \delta, \quad kr + \delta \ll 1. \quad (2.6)$$

Из рис. 5 видно, что $\delta \approx -ka$. В пределе $k \rightarrow 0$ это равенство становится точным, а именно*

$$\delta = -ka. \quad (2.7)$$

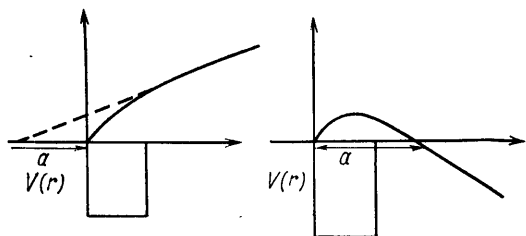


Рис. 5. Волновые функции в задаче рассеяния при низкой энергии. Левый рисунок отвечает отрицательной длине рассеяния, правый — положительной

Величина a называется длиной рассеяния. Полное сечение рассеяния равно

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta = 4\pi a^2. \quad (2.8)$$

§ 2.3. ЭФФЕКТИВНЫЙ РАДИУС

При $k \rightarrow 0$ длина рассеяния полностью описывает сечение. В этом параграфе мы покажем, что для описания рассеяния удобно пользоваться функцией $k \operatorname{ctg} \delta$. Поскольку $\delta \rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$, данная функция стремится к пределу

$$k \operatorname{ctg} \delta \rightarrow -\frac{1}{a} \quad \text{при} \quad k \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Сечение рассеяния выражается через эту функцию следующим образом:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \delta}. \quad (2.10)$$

Теперь мы покажем, что когда энергия становится отличной от нуля, $k \operatorname{ctg} \delta$ является линейной функцией энергии независимо от формы и глубины потенциала. Наклон этой функции определяется параметром, который имеет размерность длины и называется эффективным радиусом r_0 .

* Особо следует выделить случай, когда в рассматриваемом канале имеется связанное состояние. При этом фаза δ стремится к π , когда k стремится к нулю. Соответственно в формуле (2.7) следует δ заменить $\pi - \delta$.

Требуемое уравнение для $k \operatorname{ctg} \delta$ получается следующим образом. Запишем волновые уравнения для двух состояний с энергиями E_1 и E_2 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} [E_1 - V(r)] u_1 &= 0, \\ \frac{d^2 u_2}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} [E_2 - V(r)] u_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Умножим верхнее уравнение на u_2 , нижнее на u_1 , вычтем одно из другого и проинтегрируем. Получим

$$[u_2 u_1' - u_1 u_2'] \Big|_0^R = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R u_1 u_2 dr, \quad (2.12)$$

где R — некоторый произвольный радиус, превышающий радиус нуклон-нуклонного взаимодействия.

Теперь сделаем те же операции со свободными решениями, т. е. решениями уравнения Шредингера с $V(r) = 0$, которые на больших расстояниях ведут себя так же, как $u_1(r)$ и $u_2(r)$. Такими решениями являются

$$\varphi_1 = \frac{\sin(k_1 r + \delta_1)}{\sin \delta_1}; \quad \varphi_2 = \frac{\sin(k_2 r + \delta_2)}{\sin \delta_2}. \quad (2.13)$$

Обратим внимание на то, что в отличие от обычной нормировки при $r=0$ они нормированы на единицу. Мы выберем такую же нормировку для функций u_1 и u_2 на больших расстояниях. Невозможно получить соотношение

$$[\varphi_2 \varphi_1' - \varphi_1 \varphi_2'] \Big|_0^R = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R \varphi_1 \varphi_2 dr. \quad (2.14)$$

Вычтем теперь уравнение (2.12) из (2.14). Верхний предел R не дает вклада в левую часть получаемого соотношения, так как φ_1 и u_1 , φ_2 и u_2 равны друг другу на верхнем пределе. В правой части можно распространить интегрирование до ∞ , поскольку область вне действия сил не дает вклада. Пользуясь тем, что $u(0) = 0$ и $\varphi(0) = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_2'(0) - \varphi_1'(0) &= k_2 \operatorname{ctg} \delta_2 - k_1 \operatorname{ctg} \delta_1 = \\ &= (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty (\varphi_1 \varphi_2 - u_1 u_2) dr. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Перейдем теперь к пределу $k_1 \rightarrow 0$ при произвольном $k_2 = k$. Тогда $k_1 \operatorname{ctg} \delta_1 \rightarrow -1/a$, где a — длина рассеяния и, следовательно,

$$k \operatorname{ctg} \delta = -1/a + k^2 \rho(0, E)/2, \quad (2.16)$$

где функция $\rho(E_1, E_2)$ определена согласно соотношению

$$\rho(E_1, E_2)/2 = \int_0^R (\varphi_1 \varphi_2 - u_1 u_2) dr. \quad (2.17)$$

Функция u отличается от φ только в области взаимодействия. Однако именно в этой области зависимость u от энергии является слабой, так как в области низких энергий порядка 5—10 МэВ потенциальная энергия много больше, чем k^2 .

Следовательно, при низкой энергии можно с хорошей точностью заменить φ и u в формуле (2.16) теми же функциями при нулевой энергии. Определим эффективный радиус r_0 следующим образом:

$$\rho(0, E)/2 \approx \rho(0, 0) = r_0/2 = \int_0^{\infty} (\varphi_0^2 - u_0^2) dr. \quad (2.18)$$

Формально ряд, определяемый соотношением (2.16), можно продолжить и записать

$$k \operatorname{ctg} \delta = -1/a + k^2 r_0/2 - P k^4 r_0^3 + \dots \quad (2.19)$$

Для заданного потенциала, характеризуемого не менее, чем двумя параметрами (например, гауссова потенциала или потенциала в форме прямоугольной ямы), можно подобрать эти параметры так, чтобы подогнать a и r_0 , т. е. воспроизвести два первых члена ряда (2.19). Зависимость от формы потенциала впервые проявляется в параметре P , который, как эмпирически установлено, мал [126] ($P_1 = 0,13 \pm 0,09$). Когда энергия повышается настолько, что член k^4 становится существенным ($E \geq 10$ МэВ), P - и D -волны начинают участвовать в рассеянии. Поэтому трудно выделить зависимость вида k^4 в $k \operatorname{ctg} \delta$ для S -фазы δ . Таким образом, формула (2.19) полезна в той области энергий, где достаточно ограничиться первыми двумя членами ряда (2.19).

Очевидно, что приближение эффективного радиуса может быть получено и для отличных от нуля значений l . В этом случае фаза δ_l ведет себя при низкой энергии как k^{2l+1} , поэтому в качестве свободных решений следует пользоваться функциями $\varphi_l = k^{2l+1}(kr) j_l(kr + \delta_l)/\sin \delta_l$ и разлагать в ряд величину

$$k^{2l+1} \operatorname{ctg} \delta_l.$$

Соотношениями (2.12) и (2.14) можно пользоваться для дейтрона, положив $\varphi_2 = \exp(-\gamma r)$, где $\gamma^2 = mW/\hbar^2$. Тогда $\varphi_2'(0) = -\gamma$ и, выбирая φ_1 в прежнем виде, находим

$$\gamma = 1/a + \gamma^2 \rho(0, -W)/2. \quad (2.20)$$

Полагая $\rho(0, -W) \approx \rho(0, 0) = r_0$, получаем

$$r_0 = \frac{2}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\gamma a} \right). \quad (2.21)$$

Если из данных по рассеянию при низкой энергии известна длина рассеяния a , уравнение (2.21) позволяет с хорошей точностью вычислить эффективный радиус, так как энергия связи, которая определяет параметр γ , известна очень точно.

Рассматривая рассеяние, мы до сих пор не уделяли внимания зависимости сил от спина. Полное сечение рассеяния нейтрона на системе из неполяризованных протонов равно

$$\sigma(E) = \frac{4\pi}{k^2} \left(\frac{1}{4} \sin^2 \delta_s + \frac{3}{4} \sin^2 \delta_t \right), \quad (2.22)$$

где множители $1/4$ и $3/4$ отвечают соответственно статистическим весам синглетного и триплетного состояний. Если, однако, нейтрон является достаточно медленным, так что он взаимодействует более чем с одним протоном, то рассеяние будет когерентным, и необходимо складывать амплитуды отдельных волн. Именно так обстоит дело в случае тепловых нейтронов. Для них эксперименты дают следующую когерентную длину рассеяния:

$$f = (a_s + 3a_t)/2. \quad (2.22a)$$

Комбинация различных экспериментов приводит к следующим длинам рассеяния [74]:

$$\left. \begin{aligned} a_s &= -23,719 \pm 0,013 \text{ Ферми;} \\ a_t &= 5,44 \pm 0,005 \text{ Ферми.} \end{aligned} \right\} \quad (2.22b)$$

Отрицательный знак a_s указывает на то, что соответствующий потенциал не является достаточно сильным для создания связанного состояния (см. рис. 5). Зная триплетную длину рассеяния, можно, согласно уравнению (2.21), найти триплетный эффективный радиус, так как значение γ известно с большой точностью по энергии связи дейтрона. Соответствующие вычисления дают [74]

$$r_{0t} = (1,750 \pm 0,005) \text{ Ферми.} \quad (2.22b)$$

Ниже выписаны параметры различных потенциалов, которые приводят к данной длине рассеяния и эффективному радиусу для триплетного состояния:

прямоугольная яма:

$$\begin{aligned} V &= -V_0, & r < R, & & V_0 &= 31,28 \text{ МэВ,} \\ V &= 0, & r > R, & & R &= 2,205 \text{ Ферми;} \end{aligned}$$

гауссовский потенциал:

$$V = -V_0 \exp(-r^2/R^2), \quad V_0 = 60,30 \text{ МэВ,} \quad R = 1,65 \text{ Ферми;}$$

экспоненциальный потенциал:

$$V = -V_0 \exp(-r/R); \quad V_0 = 155,17 \text{ МэВ,} \quad R = 0,76 \text{ Ферми;}$$

юкавский потенциал:

$$V = -V_0 (r/R) \exp(-r/R); \quad V_0 = 20,7 \text{ МэВ,} \quad R = 2,43 \text{ Ферми;}$$

* Численные значения, приводимые в этом параграфе, являются приближенными. В настоящее время данные уточняются.

экспоненциальный потенциал с кором:

$$V = \infty, \quad r < c, \quad V = -V_0 \exp[-(r-c)/R], \quad r > c, \\ c = 0,4 \text{ Ферми}, \quad V_0 = 379,6 \text{ МэВ}, \quad R = 0,45 \text{ Ферми};$$

юкавский потенциал с кором:

$$V = \infty, \quad r < c; \quad V = -V_0 (r/R) \exp(-r/R), \quad r > c, \\ c = 0,4 \text{ Ферми}, \quad V_0 = 696,6 \text{ МэВ}, \quad R = 0,65 \text{ Ферми}. \quad (2.23)$$

Для определения синглетного эффективного радиуса r_{0s} необходимо обратиться к сечению рассеяния при низких энергиях, когда в выражении (2.19) для $k \operatorname{ctg} \delta$ становится существенным член, пропорциональный k^2 . Нетрудно получить, что сечение рассеяния нейтронов на неполяризованных протонах может быть записано в виде

$$\sigma(E) = \pi \left\{ \frac{1}{k^2 + (1/a_s - r_{0s}k^2/2)^2} + \frac{3}{k^2 + (1/a_t - r_{0t}k^2/2)^2} \right\}. \quad (2.23a)$$

Из имеющихся данных следует [74]

$$r_{0s} = (2,76 \pm 0,05) \text{ Ферми}. \quad (2.23b)$$

Данный эффективный радиус и длина рассеяния (2.226) могут быть выражены следующими потенциалами:

прямоугольная яма:

$$V = -V_0, \quad r < R; \quad V_0 = 13,4 \text{ МэВ}; \\ V = 0, \quad r > R; \quad R = 2,65 \text{ Ферми};$$

гауссовский потенциал:

$$V = -V_0 \exp(-r^2/R^2); \quad V_0 = 30,93 \text{ МэВ}, \quad R = 1,82 \text{ Ферми};$$

экспоненциальный потенциал:

$$V = -V_0 \exp(-r/R); \quad V_0 = 104,2 \text{ МэВ}, \quad R = 0,73 \text{ Ферми};$$

юкавский потенциал:

$$V = -V_0 (r/R) \exp(-r/R); \quad V_0 = 46,0 \text{ МэВ}, \quad R = 1,19 \text{ Ферми};$$

экспоненциальный потенциал с кором:

$$V = \infty, \quad r < c; \quad V = -V_0 \exp[-(r-c)/R], \quad r > c; \\ c = 0,4 \text{ Ферми}, \quad V_0 = 220,3 \text{ МэВ}, \quad R = 0,51 \text{ Ферми};$$

юкавский потенциал с кором:

$$V = \infty, \quad r < c, \quad V = -V_0 (r/R) \exp(-r/R), \quad r > c; \\ c = 0,4 \text{ Ферми}, \quad V_0 = 415,9 \text{ МэВ}, \quad R = 0,70 \text{ Ферми}. \quad (2.24)$$

В § 6 мы обобщим понятие эффективного радиуса на случай, когда имеются тензорные силы. В приведенные выше значения параметров уже включены эффекты, связанные с тензорными силами.

Понятие квадрупольного момента проще всего ввести из классического рассмотрения потенциала, создаваемого группой* электрических зарядов. Особенно прост случай, когда система имеет малые размеры, как, например, ядро. Если i -я частица несет заряд e_i и расположена в точке \mathbf{r}_i , то потенциал, создаваемый этой системой зарядов в точке \mathbf{R} , равен

$$\varphi(\mathbf{R}) = \sum_i \frac{e_i}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|}. \quad (2.25)$$

При $r_i \ll R$ можно с точностью до членов второго порядка записать

$$\varphi \approx \frac{\sum_i e_i}{R} + \frac{\sum_i e_i \mathbf{r}_i \mathbf{R}}{R^3} + \frac{Q'}{2R^3}. \quad (2.25a)$$

Здесь

$$\mathbf{D} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i \quad (2.25b)$$

— электрический дипольный момент и

$$Q' = \sum_i \frac{e_i}{R^2} [3(\mathbf{R} \mathbf{r}_i)^2 - r_i^2 R^2] \quad (2.25b')$$

является электрическим квадрупольным моментом. Электрический дипольный момент основного состояния ядра равен нулю в силу правил отбора по четности. На практике квадрупольные моменты ядер часто измеряются по их взаимодействию с полем атомных электронов. В этом случае расстояние \mathbf{R} , на котором измеряется ядерное поле, значительно превышает любую из координат \mathbf{r}_i в ядре, и разложение (2.25a) вполне законно.

Очевидно, что член, пропорциональный $\sum e_i$, преобразуется при вращениях как скаляр, а \mathbf{D} преобразуется как вектор. Трансформационные свойства той части Q' , которая пропорциональна координатам \mathbf{r}_i , сразу не очевидны. Более удовлетворительно будет определить квадрупольный момент, зависящий только от распределения заряда в ядре и имеющий определенные трансформационные свойства относительно вращений.

Если выбрать ось z в направлении \mathbf{R} , то квадрупольный момент складывается из величин типа

$$Q(i) = 3z_i^2 - r_i^2. \quad (2.26)$$

Заметим, что величины $Q(i)$ — компоненты следующего симметричного тензора второго ранга с равным нулю следом:

$$Q_{\alpha\beta}(i) = x_\alpha(i) x_\beta(i) - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} r_i^2. \quad (2.26a)$$

* Разумеется, в дейтроне имеется только одна заряженная частица — протон. Однако проще провести рассмотрение в рамках классического подхода.

Каждая из пяти линейно независимых компонент этого тензора является линейной комбинацией сферических гармоник $r^2 Y_2^m$; в частности, $Q(i)$ в (2.26) равна

$$Q(i) = 2r^2 P_2(\theta). \quad (2.266)$$

Вектор \mathbf{R} имеет компоненты X_1, X_2, X_3 , из которых можно построить еще один симметричный тензор, а именно тензор $X_\alpha X_\beta$. Свертка этих двух тензоров

$$\sum_{\alpha, \beta} Q_{\alpha\beta}(i) X_\alpha X_\beta \quad (2.27)$$

является искомым инвариантом. Естественно поэтому определить тензор квадрупольного момента следующим образом:

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_i e_i [3x_\alpha(i) x_\beta(i) - \delta_{\alpha\beta} r_i^2]. \quad (2.27a)$$

Тогда квадрупольный член в потенциале приобретает явно инвариантный вид

$$\frac{Q'}{2R^3} = \sum_{\alpha, \beta} Q_{\alpha\beta} \frac{X_\alpha X_\beta}{2R^5}, \quad (2.276)$$

где $Q_{\alpha\beta}$ зависит теперь только от распределения заряда в кластере.

Для дейтрона имеем

$$Q_{\alpha\beta} = e [3x_\alpha(p) x_\beta(p) - \delta_{\alpha\beta} r_p^2], \quad (2.27b)$$

где \mathbf{r}_p — радиус-вектор протона, поскольку нейтрон не несет электрического заряда. Радиус-вектор протона отсчитывается от центра масс, а в волновую функцию дейтрона входит расстояние между протоном и нейтроном

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{r}_p. \quad (2.27c)$$

Поэтому удобнее выразить квадрупольный момент непосредственно через компоненты вектора \mathbf{r} :

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} e (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2). \quad (2.27d)$$

Величинами, определяющими потенциал $\phi(R)$, являются средние значения

$$\langle Q_{\alpha\beta} \rangle = \int |\Psi_J^M(r)|^2 Q_{\alpha\beta} d\tau, \quad (2.28)$$

где $\Psi_J^M(r)$ — волновая функция дейтрона, включающая зависимость от спина. Дейтрон имеет полный момент $J=1$, а проекция момента на ось z равна $M=0, \pm 1$. Из пяти независимых величин, задаваемых формулой (2.27d), компоненты с $\alpha \neq \beta$ обращаются в нуль. В этом легко убедиться, если перейти к сферическим координатам и воспользоваться тем, что $|\Psi_J^M(r)|^2$ не зависит от ази-

мутального угла φ . Более того, Q_{11} и Q_{22} являются линейными комбинациями сферических гармоник $Y_2^{\pm 2}$ и Y_2^0 , причем Y_2^0 входит в Q_{11} и Q_{22} с одним и тем же коэффициентом. Поскольку из приведенных выше аргументов следует, что среднее значение $Y_2^{\pm 2}$ обращается в нуль, то

$$\langle Q_{11} \rangle = \langle Q_{22} \rangle. \quad (2.28a)$$

Кроме того, из определения (2.27д) тензора $Q_{\alpha\beta}$ имеем

$$\sum_{\alpha} \langle Q_{\alpha\alpha} \rangle = 0. \quad (2.28б)$$

Следовательно,

$$\langle Q_{11} \rangle = \langle Q_{22} \rangle = -\langle Q_{33} \rangle/2. \quad (2.28в)$$

Таким образом, квадрупольный момент определяется единственной величиной $\langle Q_{33} \rangle$.

Полученный результат легко понять, если рассматривать $|\Psi_J^M(r)|^2$ как классическую плотность заряда. Поскольку состояние характеризуется определенным квантовым числом M , плотность заряда обладает аксиальной симметрией относительно оси z . Следовательно, ось z является одной из главных осей эллипсоида, сопоставляемого тензору квадрупольного момента. Вследствие аксиальной симметрии компоненты $Q_{\alpha\beta}$ с $\alpha \neq \beta$ обращаются в нуль, а из равенства нулю следа $Q_{\alpha\beta}$ следует соотношение (2.28в).

Величина $\langle Q_{33} \rangle$ зависит от магнитного квантового числа M , но эта зависимость полностью определяется требованиями симметрии. По определению квадрупольным магнитным моментом дейтрона Q называется среднее значение Q_{33} в состоянии с максимальным магнитным квантовым числом $M=1$. Таким образом,

$$Q = \frac{1}{4} e \int |\Psi_1^1(r)|^2 (3z^2 - r^2) dt. \quad (2.29)$$

Из (2.29) ясно, что квадрупольный момент связан с формой распределения заряда. Если бы функция $|\Psi_J^M(r)|^2$ была сферически симметрична, то квадрупольный момент обратился бы в нуль, так как среднее значение $\cos^2 \theta$ равно $1/3$. Экспериментальное значение квадрупольного момента дейтрона равно*

$$Q = 2,86 \text{ мб}, \quad (2.30)$$

где $1 \text{ мб} = 10^{-27} \text{ см}^2$. Положительный знак указывает на то, что зарядовое распределение более вытянуто вдоль оси z , чем вдоль

* См. работу [65]. Для извлечения квадрупольного момента необходимо знать градиент электрического поля в ядре; последняя величина может быть найдена с помощью молекулярных волновых функций. Недавние вычисления [99] с использованием молекулярных волновых функций, содержащих 87 компонент, приводят к значению (2.30). Это значение на 2% превышает приводившееся ранее.

осей x и y , т. е. зарядовое распределение дейтрона имеет «сигарообразную» форму.

Абсолютное значение квадрупольного момента, однако, мало по сравнению с характерными размерами дейтрона, составляющими 3—5 Ферми. Отсюда ясно, что распределение плотности в дейтроне в основном сферически-симметрично. Единственное выделенное направление в дейтроне — это направление вдоль спина. Следовательно, малые отклонения от сферической симметрии должны быть обусловлены взаимодействием, зависящим от направления спина. Это взаимодействие должно также зависеть от радиальных координат, чтобы оказать влияние на зарядовую плотность. Таким образом, мы приходим к понятию тензорных сил.

Взаимодействие с требуемыми свойствами легко получить, производя свертки симметричного тензора

$$T_{\alpha\beta} = (3x_{\alpha}x_{\beta} - \delta_{\alpha\beta}r^2)/r^2 \quad (2.31)$$

с симметричным тензором

$$S_{\alpha\beta} = (1/2) [\sigma_p^{\alpha} \sigma_n^{\beta} + \sigma_p^{\beta} \sigma_n^{\alpha}], \quad (2.32)$$

построенным из спинов нейтрона и протона. Заметим, что результатом такой свертки является

$$\sum_{\alpha, \beta} T_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = S_{12}, \quad (2.33)$$

где S_{12} — оператор, определяемый равенством (1.11a) и получающийся в результате дифференцирования из выражения

$$(\sigma_1 \nabla)(\sigma_2 \nabla) \frac{\exp(-\mu r)}{r}, \quad (2.34)$$

входящего в потенциал однопионного обмена. Вследствие того, что S_{12} возникает из (2.34), ясно, что оператор S_{12} является скаляром и нет необходимости доказывать это рассуждениями, которые привели нас к (2.33). Как будет подробно обсуждаться ниже, потенциал однопионного обмена составляет наиболее твердо установленную часть нуклон-нуклонного взаимодействия. Кроме того, однопионный потенциал есть наиболее дальнедействующая часть ядерных сил (между этими двумя факторами, разумеется, имеется связь). Добавим, что, поскольку в определении Q входит r^2 , основной вклад в Q вносит периферическая часть дейтронной волновой функции. Можно поэтому надеяться, что квадрупольный момент определяется в основном потенциалом однопионного обмена. Однако хотя качественно это именно так, количественно такое утверждение, к сожалению, не вполне справедливо и нельзя пренебрегать вкладом от взаимодействия на меньших расстояниях. Исходя из того, что основной вклад в волновую функцию дейтрона вносит S -состояние, мы можем попытаться установить вид добавки к волновой функции следующим образом. Рассмотрим поправку первого порядка к волновой функции, обус-

ловленную потенциалом (1.11), содержащим оператор S_{12} . Тогда для $\delta\Psi$ получим

$$\delta\Psi = S_{12} \Psi^{(0)} = \frac{3(\sigma_n r)(\sigma_p r) - r^2(\sigma_n \sigma_p)}{r^2} \Psi^{(0)}, \quad (2.35)$$

где $\Psi^{(0)}$ — доминирующая S -волновая компонента волновой функции дейтрона. Нетрудно убедиться, что $\delta\Psi$ не отвечает S -состоянию, так как при усреднении по углам радиуса-вектора \mathbf{r} оператор S_{12} обращается в нуль. Поскольку $\delta\Psi$ имеет ту же четность, что и $\Psi^{(0)}$, $\delta\Psi$ не отвечает также и P -состоянию. Следовательно, $\delta\Psi$ является волновой функцией D -состояния, а именно состояния 3D_1 в спектроскопических обозначениях, где верхний индекс 3 указывает, что состояние является триплетным по спину, т. е. имеет спин 1, а нижний индекс означает, что полный угловой момент $J=1$. Равенство $J=1$ следует из того, что $\Psi^{(0)}$ имеет $J=1$, а взаимодействие S_{12} — скаляр относительно вращений.

Таким образом, мы можем выбрать D -состояние в виде

$$|{}^3D_1\rangle = g(r) S_{12} \chi_1^M, \quad (2.35a)$$

где χ_1^M — спиновая триплетная волновая функция с проекцией спина M , а $g(r)$ — радиальная функция, определяемая из уравнения Шредингера.

Будем нормировать волновую функцию D -состояния следующим образом:

$$\int g^2(r) (S_{12} \chi_1^M, S_{12} \chi_1^M) d^3r = 1. \quad (2.35б)$$

Далее заметим, что оператор квадрата полного спина $\mathbf{S} = (1/2)(\sigma_n + \sigma_p)$

$$\mathbf{S}^2 = \frac{1}{4} (\sigma_n^2 + \sigma_p^2 + 2\sigma_n \sigma_p) \quad (2.35в)$$

коммутирует с оператором S_{12} . С S_{12} коммутируют также операторы $\sigma_n^2 = \sigma_p^2 = 3$. Поэтому оператор $\sigma_n \sigma_p$ является диагональным и его собственное значение на функции χ_1^M равно +1. Следовательно, можно записать

$$(\chi_1^M, S_{12}^2 \chi_1^M) = (\chi_1^M, \left[9 \frac{(\sigma_n r)^2 (\sigma_p r)^2}{r^4} - 6 \frac{(\sigma_n r)(\sigma_p r)}{r^2} + 1 \right] \chi_1^M). \quad (2.35г)$$

Последнее равенство нетрудно преобразовать к виду

$$(\chi_1^M, S_{12}^2 \chi_1^M) = (\chi_1^M, [8 - 2S_{12}] \chi_1^M). \quad (2.35д)$$

Тогда условие нормировки (2.35б) сводится к

$$\int g^2(r) (\chi_1^M, [8 - 2S_{12}] \chi_1^M) dt = 1. \quad (2.35е)$$

Поскольку функция $S_{12} \chi_1^M$ отвечает D -волне, она ортогональна S -волне χ_1^M , и мы приходим к следующему условию нормировки:

$$32\pi \int_0^\infty g^2(r) r^2 dr = 1. \quad (2.35ж)$$

Для удобства принято вводить новую функцию $w(r)$, определенную согласно

$$w(r) = crg(r) \sqrt{8}, \quad (2.35з)$$

где c — амплитуда примеси D -волны в волновой функции основного состояния дейтрона. Таким образом, полная волновая функция дейтрона имеет вид

$$\Psi^M = \left\{ \frac{u(r)}{r} + \frac{w(r)}{r} \sqrt{\frac{1}{8}} S_{12} \right\} \chi_1^M. \quad (2.36)$$

Она нормирована условием

$$4\pi \left\{ \int_0^\infty u^2(r) dr + \int_0^\infty w^2(r) dr \right\} = 1. \quad (2.36а)$$

Примесь D -волны в квадрате волновой функции составляет

$$|c|^2 = 4\pi \int_0^\infty w^2(r) dr, \quad (2.36б)$$

а квадрупольный момент можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4} e \int |\Psi_1^1|^2 (3 \cos^2 \theta - 1) r^2 d\tau = \\ &= \frac{1}{4} e \int (3 \cos^2 \theta - 1) \left[\left(u + \sqrt{\frac{1}{8}} w S_{12} \right) \chi_1^1, \right. \\ &\left. \left(u + \sqrt{\frac{1}{8}} w S_{12} \right) \chi_1^1 \right] d\tau = \frac{1}{4} e \int (3 \cos^2 \theta - 1) \left\{ u^2 + 2 \sqrt{\frac{1}{8}} uw \times \right. \\ &\left. \times (\chi_1^1, S_{12} \chi_1^1) + \sqrt{\frac{1}{8}} w^2 (\chi_1^1, S_{12} \chi_1^1) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (2.36в)$$

Член, содержащий u^2 , дает при интегрировании нуль. Используя (2.35д) и учитывая то, что функция $w^2(r)$ является сферически-симметричной и поэтому при интегрировании по углам выпадает, находим

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} e \int_0^\infty r^2 dr \left(\sqrt{\frac{1}{8}} uw - \frac{1}{8} w^2 \right) d\Omega (3 \cos^2 \theta - 1) \times \\ &\times (\chi_1^1, S_{12} \chi_1^1). \end{aligned} \quad (2.36г)$$

Вычисляя спиновый матричный элемент, получаем окончательно

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} e \int_0^\infty r^2 dr \left(\sqrt{\frac{1}{8}} uw - \frac{1}{8} w^2 \right) \int d\Omega (3 \cos^2 \theta - 1)^2 = \\ &= \frac{1}{5} \pi e \int_0^\infty (\sqrt{8} uw - w^2) r^2 dr. \end{aligned} \quad (2.36д)$$

Когда между нуклонами имеется тензорное взаимодействие вида

$$V = S_{12} V_T(r), \quad (2.36e)$$

обобщением уравнения Шредингера (2.3) служит следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} [E - V(r)] u + \sqrt{8} V_T w &= 0; \\ \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{6\hbar^2}{mr^2} \right] w + \sqrt{8} V_T u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Поскольку квадрупольный момент мал, можно ожидать, что компонента $w(r)$ мала и основной вклад в Q дает перекрестный член uw . Несмотря на то, что вероятность D -состояния $|c|^2$,

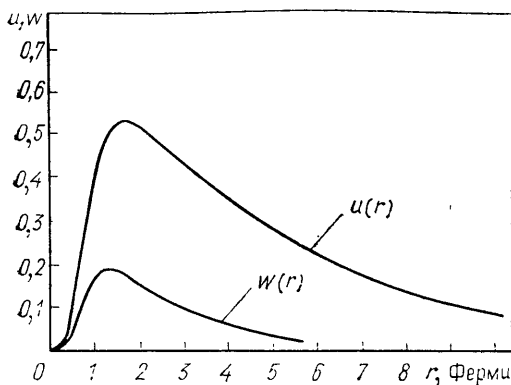


Рис. 6. Волновые функции дейтрона $u(r)$ и $w(r)$ для потенциала Рида

определяемая формулой (2.36б), мала и по современным представлениям составляет 5—8%, она вносит весьма существенный вклад и в другие величины помимо квадрупольного момента, который равен нулю, когда нет D -волны. Вблизи начала координат волновая функция D -состояния $w(r)$ мала, потому что на малых расстояниях доминирует отталкивательный центробежный барьер $\hbar^2 l(l+1)/mr^2$. Вне радиуса действия сил поведение волновой функции D -состояния также определяется центробежным барьером, который задает асимптотику вида

$$w(r) \sim C \exp(-\gamma r) \left(1 + \frac{3}{\gamma r} + \frac{3}{\gamma^2 r^2} \right). \quad (2.38)$$

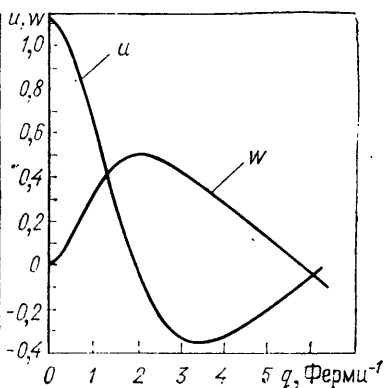


Рис. 7. Волновые функции в импульсном пространстве для потенциала Рида с мягким кором.

На графике изображены величины $(q^2 + k_B^2) u(q)$ и $(q^2 + k_B^2) w(q)$, где

$$u(q) = \int_0^\infty dr r u(r) i_0(qr), \quad w(q) = \int_0^\infty dr r w(r) i_2(qr)$$

Таким образом, центробежный барьер выталкивает D -волну из области малых расстояний и одновременно прижимает ее со стороны больших расстояний. В результате D -волна оказывается локализованной в значительно более узкой области, чем S -волна. На рис. 6 изображены обе волновые функции, вычисленные с популярным в настоящее время потенциалом Рида [7]. Вследствие того, что координатная волновая функция D -состояния является более острой, т. е. пространственно более локализованной, ее фурье-образ содержит больше компонент с высокими импульсами, как показано на рис. 7. Поэтому совершенно необходимо учитывать D -волну при рассмотрении процессов, в которых существенны компоненты дейтронной волновой функции с высокими импульсами.

Экспериментально дейтронная волновая функция исследована весьма приблизительно. Как будет показано в гл. 3, сечение электрон-дейтронного рассеяния отличается от сечения рассеяния на точечном дейтроне множителем, содержащим фурье-образы билинейных комбинаций функций u и w . Практически, однако, взаимодействие квадрупольного момента дейтрона с градиентом электрического поля, создаваемого движущимся электроном, затрудняет прямое определение функций u и w в подобных опытах.

В следующей главе мы вернемся к вопросу о примеси D -волны в связи с рассмотрением магнитного момента дейтрона.

§ 2.6. ОБОБЩЕНИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА

При обсуждении приближения эффективного радиуса в § 2.3 мы не предусматривали существования тензорных сил. Ниже рассмотрен гораздо более общий подход, позволяющий получить приближение эффективного радиуса, справедливое для систем с тензорными силами, нелокальным или зависящим от скорости взаимодействием (мы следуем работе [9]). Изложение будет носить существенно более математический характер, чем в § 2.3. Вернемся к уравнению (2.17), которое имеет вид

$$(1/2) \rho(E_1, E_2) = \int_0^{\infty} (\varphi_1 \varphi_2 - u_1 u_2) dt. \quad (2.39)$$

Заметим, что роль $u_1 u_2$ в подынтегральном выражении отличается от роли второго члена тем, что за исключением случая $E_1 = E_2$ член $u_1 u_2$ не вносит вклада в интеграл в силу ортогональности функций u_1 и u_2 . Именно член $\varphi_1 \varphi_2$, состоящий из известных функций, задает интегральное представление $\rho(E_1, E_2)$. Для вычисления интеграла от $\varphi_1 \varphi_2$ необходимо ввести фактор, обеспечивающий сходимость интеграла. В результате получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \varphi_1 \varphi_2 \exp(-\varepsilon r) dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (k_1 - k_2)^2} \right] \frac{\cos(\delta_1 - \delta_2)}{2 \sin \delta_1 \sin \delta_2} +$$

$$+ \frac{k_1 \operatorname{ctg} \delta_1 - k_2 \operatorname{ctg} \delta_2}{k_1^2 - k_2^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\delta(k_1 - k_2)}{\sin \delta_1 \sin \delta_2} + \frac{\rho(E_1, E_2)}{2}. \quad (2.40)$$

С формальной точки зрения единственная роль члена $u_1 u_2$ в (2.39) состоит в том, чтобы компенсировать $\delta(k_1 - k_2)$ в (2.40) и тем самым обеспечивать непрерывность интегрального представления при $E_1 = E_2$.

Выражение (2.39) нетрудно обобщить. Для этого выразим $\delta(k_1 - k_2)$ через соответствующие волновые функции

$$\pi \delta(k_1 - k_2)/2 = (u_{k_1}^{(\alpha)}, u_{k_2}^{(\alpha)}), \quad (2.41)$$

где в качестве $u_k^{(\alpha)}$ можно выбрать, например, функцию

$$u_k^{(\alpha)} = \left\{ u_k^{(\alpha)}(r) + \sqrt{\frac{1}{8}} S_{12} \omega_k^{(\alpha)}(r) \right\} \chi_1^M, \quad (2.42)$$

содержащую S - и D -волны. Здесь χ_1^M — спиновая часть волновой функции. Остановимся на этом примере подробнее. Для больших r имеем

$$u_k^{(\alpha)} \sim \sin(kr + \delta_\alpha); \quad \omega_k^{(\alpha)} \sim -\eta_\alpha \sin(kr + \delta_\alpha). \quad (2.43)$$

Если решение с индексом α есть такая собственная функция системы (2.37), в которой доминирует S -волна, то η_α — константа, очень малая при низкой энергии и пропорциональная энергии. Разумеется, есть другое решение, которому можно присвоить индекс β и в котором доминирует D -волна. Из ортогональности двух решений следует, что $\eta^{(\beta)} = -(1/\eta^{(\alpha)})$. Подставляя (2.41) в (2.39), получаем

$$(1/2) \rho(E_1, E_2) = \int_0^\infty \{ \varphi_1 \varphi_2 - N_1 N_2 (u_1 u_2 + \omega_1 \omega_2) \} dr. \quad (2.44)$$

Как из физических, так и из математических соображений ясно, что нормировочная постоянная $N_1 N_2$ должна быть выбрана таким образом, чтобы подынтегральное выражение обращалось в нуль при больших r . Физические аргументы, которые привели к (2.17), состоят в том, что ρ должна быть гладкой функцией E , для чего, в свою очередь, необходимо, чтобы подынтегральное выражение было сосредоточено на малых расстояниях, где ядерное взаимодействие велико по сравнению с кинетической энергией. Математический аргумент заключается в том, что второй член в подынтегральном выражении должен сокращать сингулярность в первом члене при $E_1 = E_2$. Таким образом, следует положить

$$N_1 N_2 = [\sin \delta_1 \sin \delta_2 (1 + \eta_1 \eta_2)]^{-1}. \quad (2.45)$$

Заметим, что в частном случае, когда нас интересует функция $\rho(0, E)$, произведение $\eta_1 \eta_2$ обращается в нуль, так как при $E \rightarrow 0$

величина $\eta_E \rightarrow 0$ по линейному закону. Обычно значение $\eta_1 \eta_2$ полагают равным нулю даже при отличных от нуля энергиях E_1 и E_2 . Это разумное приближение, так как при энергиях порядка нескольких мегаэлектронвольт $\eta \sim 10^{-2}$.

Заметим, наконец, что приводимое в гл. 3 вычисление поправки на конечный радиус в задаче о фоторасщеплении дейтрона также можно обобщить на рассмотренный сейчас случай.

Таким образом, нетрудно обобщить приближение эффективного радиуса на широкий круг задач. Важно лишь, чтобы только область малых расстояний давала вклад в подынтегральное выражение.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ДЕЙТРОНА. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ИЗЛУЧЕНИЕМ

§ 3.1. МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ

Магнитный момент протона равен 2,7928, а нейтрона — 1,9131 μ_B , где $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_p c}$ — ядерный магнетон Бора. Оба момента известны с погрешностью $\sim 10^{-4}$. Поскольку в дейтроне спины протона и нейтрона параллельны, магнитный момент дейтрона, казалось бы, должен быть равен

$$\mu_d \approx \mu_n + \mu_p = 0,8797. \quad (3.1)$$

В действительности он равен

$$\mu_d = 0,8573. \quad (3.2)$$

Разница составляет, таким образом, примерно 0,02 μ_B .

В § 2.6 было показано, что в дейтронной волновой функции имеется примесь D -состояния и это, конечно, сказывается на магнитном моменте. Полагая, что оператор магнитного момента равен сумме соответствующих операторов для нейтрона и протона, получаем

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_p \boldsymbol{\sigma}_p + \mu_n \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{L}_p \quad (3.3)$$

где $\mu_p = 2,7928$, $\mu_n = -1,9131$ и \mathbf{L}_p — орбитальный момент количества движения протона (все величины измеряются в магнетонах Бора $e\hbar/(2mc)$). Далее, подставляя $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}/2$, можно исключить операторы $\boldsymbol{\sigma}$, используя равенство

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + (\boldsymbol{\sigma}_p + \boldsymbol{\sigma}_n)/2. \quad (3.4)$$

Выражая $\boldsymbol{\mu}$ через операторы $(\boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_p)$ и $(\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_p)$ и пользуясь тем, что в состоянии с изоспином 0 и спином 1 среднее от $(\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_p)$ равно нулю, получаем

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_n + \mu_p) \mathbf{J} - (\mu_n + \mu_p - 1/2) \mathbf{L}. \quad (3.5)$$

Среднее значение $\boldsymbol{\mu}$ равно

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = (\boldsymbol{\mu} \mathbf{J} / \mathbf{J}^2) \mathbf{J}, \quad (3.6)$$

где $\mathbf{J}^2 = \mathbf{J}(\mathbf{J} + 1) = 2$. Учитывая, что $\mathbf{J}\mathbf{L} = (1/2)(\mathbf{L}^2 + \mathbf{J}^2 - \mathbf{S}^2)$, находим

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle_z = \mu_n + \mu_p - \frac{3}{2} \left(\mu_n + \mu_p - \frac{1}{2} \right) P_D, \quad (3.7)$$

здесь $P_D = |c|^2$ — вероятность D -состояния [ср. (2.366)]. Если указанное выше расхождение, составляющее $0,02 \mu_B$, отнести за счет примеси D -состояния, то получим $P_D \approx 4\%$. Аддитивность магнитных моментов вызывает, однако, ряд вопросов* и, кроме того, необходимо учитывать релятивистские поправки.

Релятивистские поправки к магнитному моменту дейтрона рассматривались в простой и элегантной работе Брейта [14]. Кроме дираковского магнитного момента, т. е. момента, содержащегося в уравнении Дирака для электрона, протон, как известно, обладает аномальным моментом, который вводится *ad hoc* в виде ковариантной добавки к дираковскому току. Магнитный момент нейтрона целиком аномален. Рассмотрение релятивистских поправок к аномальному моменту проводится особенно просто и результат состоит в том, что для сферически-симметричного орбитального движения учет релятивистских поправок сводится к умножению моментов на $1 - \langle T \rangle / (3mc^2)$, где $\langle T \rangle$ — среднее значение кинетической энергии. Происхождение этого множителя легко понять, если учесть, что лоренцовское сжатие магнита, расположенного под углом θ к направлению движения, составляет

$$- [1 - (1 - v^2/c^2)^{-1/2}] \cos \theta, \quad (3.8)$$

Следовательно, сокращение вдоль оси магнита приблизительно равно $[-v^2/(c^2)] \cos^2 \theta$. Умножая числитель и знаменатель на m , получаем

$$- (T/mc^2) \cos^2 \theta.$$

Усреднение по углам дает дополнительный множитель $1/3$. Поскольку

$$\langle T_p \rangle = \langle T_n \rangle = \langle T \rangle / 2, \quad (3.8a)$$

суммарный вклад аномальных магнитных моментов протона и нейтрона в релятивистскую поправку к магнитному моменту дейтрона составляет

$$- (1,79 - 1,91) (\langle T \rangle / 6mc^2) = 0,022 \langle T \rangle / mc^2, \quad (3.8b)$$

где числа 1,79 и $-1,91$ — аномальные магнитные моменты протона и нейтрона. Вследствие почти полной компенсации вкладов протона и нейтрона эта поправка пренебрежимо мала.

Вклад дираковского тока протона в магнитный момент дейтрона дается выражением

$$\mu_d = e [r\alpha] / 2. \quad (3.9)$$

Сюда входят перекрестные члены между «большими» и «малыми» компонентами спинора, описывающего протон, и релятивистские

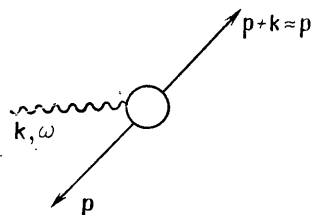
* Аренхёвел, Данос и Уилльямс [8] предполагают, что примесь барионных резонансов в волновой функции дейтрона может уменьшить данное расхождение. Поскольку изоспин дейтрона $T=0$, поправки на обменные токи, которые мы обсудим позднее в этой главе, не войдут.

поправки существенно зависят от деталей взаимодействия. Ясно, что, поскольку $\langle T \rangle / mc^2 \sim 0,02$, релятивистские поправки малы, хотя они и могут быть порядка разности между μ_d и $(\mu_n + \mu_p)$. В § 3.3 мы еще вернемся к обсуждению релятивистских поправок к дираковскому магнитному моменту.

§ 3.2. ФОТОРАСЩЕПЛЕНИЕ ДЕЙТРОНА

Первое измерение энергии связи дейтрона было произведено в реакции расщепления с использованием γ -квантов ThC'' с энергией 2,62 МэВ [21]. При такой энергии основной вклад в сечение вносит процесс поглощения электрического дипольного кванта, хотя непосредственно вблизи порога доминирует магнитное дипольное поглощение (см. ниже).

Рис. 8. Диаграмма процесса фоторасщепления. Падающий фотон имеет импульс \mathbf{k} и энергию ω . Регистрируемая частица имеет импульс \mathbf{p} . Из сохранения энергии следует, что $\omega = \omega_1 + p^2/2m$, где ω_1 — энергия связи дейтрона (ранее обозначавшаяся как ω)



Приведем схему вычисления по теории возмущений сечения поглощения электрического дипольного γ -кванта.

Согласно «золотому правилу» квантовой механики вероятность перехода в единицу времени равна

$$\omega = \int \frac{2\pi}{\hbar} |\mathfrak{M}|^2 \rho(E) d\Omega, \quad (3.10)$$

где \mathfrak{M} — исследуемый ниже матричный элемент; $\rho(E)$ — отнесенное к единичному интервалу энергии число состояний образующейся в результате реакции частицы; $d\Omega$ — элемент телесного угла, в котором частица испускается. Сечение реакции получается делением ω на поток падающих частиц, приходящийся на 1 см². Если нормировать плотность фотонов на один фотон в единичном объеме, то этот поток равен C . Таким образом (обозначения указаны на рис. 8),

$$d\sigma = (2\pi/\hbar c) |\mathfrak{M}|^2 \rho(E) d\Omega. \quad (3.11)$$

По аналогии с (1.3) можно представить векторный потенциал поля излучения в следующем виде:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{u}} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} q_{\mathbf{k}, \mathbf{u}} \mathbf{u} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (3.12)$$

где \mathbf{u} — вектор поляризации γ -кванта. Из поперечности \mathbf{A} следует, что для каждого γ -кванта есть два независимых вектора поляризации \mathbf{u} и позднее мы проведем по ним усреднение. Как и в слу-

чае мезонного поля, рассмотренного в гл. 1, гамильтониан электромагнитного поля может быть представлен в виде суммы по осцилляторам и величины $q_{k,u}$ играют роль координат осцилляторов. Таким образом,

$$(n_{k,u} | q_{k,u} | n_{k,u} - 1) = \sqrt{n_{k,u}}. \quad (3.12a)$$

Как известно, взаимодействие с излучением вводится в нерелятивистский гамильтониан следующей заменой:

$$T = \sum \frac{p_i^2}{2m_i} \rightarrow \sum \frac{1}{2m_i} (\mathbf{p}_i - e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i))^2. \quad (3.12б)$$

Следовательно, добавка к гамильтониану имеет вид

$$\delta H = \sum \frac{e_i}{m_i} \mathbf{A} \mathbf{p}_i. \quad (3.12в)$$

Поскольку $\nabla \mathbf{A} = 0$, порядок написания операторов \mathbf{A} и \mathbf{p} несуществен. Матричный элемент оператора \mathbf{p}/m между состояниями f и i дается выражением

$$\langle f | \mathbf{p}/m | i \rangle = -i\omega_{fi} \langle f | \mathbf{r} | i \rangle, \quad (3.12г)$$

где $\omega_{fi} = (E_f - E_i)$ — разность энергий*. Сделаем еще одно преобразование, а именно: запишем $\sum e_i \mathbf{r}_i$ как $\sum e(1 + \tau_{3i}) \mathbf{r}_i/2$, где τ_{3i} — изоспиновый оператор, относящийся к i -й частице. Единичный оператор в последней сумме дает $(\mathbf{r}_n + \mathbf{r}_p)/2$, оператор, действующий на центр масс системы. Он существует в задаче о томсоновском рассеянии без развала, которую мы здесь не рассматриваем. За внутреннее возбуждение системы ответствен оператор

$$\sum \frac{1}{2} e \tau_{3i} \mathbf{r}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n) = \frac{1}{2} e \mathbf{r}, \quad (3.12д)$$

который представляет собой не что иное, как дипольный момент протона относительно центра масс дейтрона.

Далее запишем

$$\mathfrak{M} = -i \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \int \omega_{fi} u_f^*(\mathbf{r}) \frac{e}{2} \mathbf{r} u_i(\mathbf{r}) d\tau, \quad (3.12е)$$

где в векторном потенциале мы заменили $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ единицей, так как рассматривается случай $(\mathbf{k}\mathbf{r}) \ll 1$. В качестве u_i возьмем пока приближенную волновую функцию $u_i = \sqrt{2}\gamma \exp(-\gamma r)$, а в качестве волновой функции конечного состояния u_f возьмем P -волновую часть плоской волны:

$$u_f = 3i r j_1(pr) \cos \theta = \frac{3i}{p} \left(\frac{\sin pr}{pr} - \cos pr \right) \cos \theta, \quad (3.12ж)$$

где θ — угол между векторами \mathbf{p} и \mathbf{r} .

* Хотя матричный элемент \mathbf{r} возникает в последнем выражении как производная от δH , задаваемого формулой (3.12в), выражение (3.12г) является более общим, так как оно справедливо и в присутствии мезонных обменных токов (см. [102]).

Воспользуемся равенством

$$\mathbf{gu} = r (\cos \theta \cos \chi + \sin \theta \sin \chi \cos \varphi), \quad (3.12з)$$

где χ — угол между векторами \mathbf{p} и \mathbf{u} . Член с $\cos \varphi$ при интегрировании выпадает. В результате имеем

$$\mathfrak{M} = -i 2\pi e \omega \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \frac{1}{2} \cos \chi \int u_i^*(r) r \cos \theta u_i(r) r^2 \sin \theta dr d\theta. \quad (3.12и)$$

Пользуясь приближением нулевого радиуса (2.4и) для функции u_i , получаем

$$|\mathfrak{M}|^2 = \frac{e^2 16\pi^2 \omega^2 p^2 \gamma}{k (p^2 + \gamma^2)^4} \cos^2 \chi. \quad (3.13)$$

Плотность состояний дается выражением

$$\rho(E) dE = p^2 dp / (2\pi)^3 = mp dE / 2 (2\pi)^3, \quad (3.13а)$$

так как $E = p^2/m$. Окончательно имеем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2e^2 p^3 \gamma}{\hbar c (p^2 + \gamma^2)^3} \cos^2 \chi, \quad (3.14)$$

где вместо одной из величин ω в (3.12и) подставили k (полагая $c=1$), а вместо другой взяли выражение $\omega = (p^2 + \gamma^2)/m$. Напомним, что χ — угол между направлением поляризации γ -кванта и направлением движения протона. Полное сечение, которое получается усреднением по всем направлениям вылета протона, равно

$$\sigma_{E1} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar^2}{m} \frac{W_1^{1/2} E^{3/2}}{(E + W_1)^3}, \quad (3.15)$$

где W_1 — энергия связи дейтрона (которая ранее обозначалась W) и E — энергия образующейся системы:

$$E = \hbar^2 p^2 / m. \quad (3.15а)$$

Поправку на конечный радиус действия сил нетрудно ввести, так как она входит лишь в нормировочную постоянную. Если записать

$$4\pi c_i^2 \int u_i^2 dr = 1 \quad (3.16)$$

и вспомнить определение (2.17) величины $\rho(E_1, E_2)$, то

$$c_i^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{2\gamma}{1 - \gamma\rho(-W_1, -W_1)} \approx \frac{1}{4\pi} \frac{2\gamma}{1 - \gamma r_{0t}}. \quad (3.16а)$$

Другими словами, с учетом поправки на конечный радиус действия сил функция u имеет вид

$$u = \left(\frac{2\gamma}{1 - \gamma r_{0t}} \right)^{1/2} \exp(-\gamma r), \quad (3.17)$$

где r_{0t} — эффективный радиус в триплетном состоянии. Таким образом, получим окончательное сечение электрического дипольного фоторасщепления

$$\sigma_{E1} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar^2}{m} \frac{W_1^{1/2} E^{3/2}}{(E + W_1)^3} \left(\frac{1}{1 - \gamma_{rot}} \right). \quad (3.18)$$

Последний множитель в этой формуле представляет собой поправку на конечный радиус действия сил.

Сечение магнитно-дипольного фоторасщепления выражается через магнитный момент системы. Запишем последний так, чтобы была явно выделена его изотопическая структура

$$\begin{aligned} \mu &= \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right) (\mu_p \sigma_p + \mu_n \sigma_n) = \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right) \left\{ \frac{1}{2} (\mu_p + \mu_n) (\sigma_p + \sigma_n) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{2} \right) (\mu_p - \mu_n) (\sigma_p - \sigma_n) \right\} = \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right) \left\{ \frac{1}{2} (\mu_p + \mu_n) \sum_i \sigma_i + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} (\mu_p - \mu_n) \sum_i \sigma_i \tau_{3i} \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Начальным состоянием является основное состояние дейтрона 3S_1 . Конечным состоянием должно быть также S -состояние, иначе интегрирование по углам даст в результате нуль. Однако, если нуклон-нуклонное взаимодействие описывается статическим потенциалом*, все возбужденные 3S -состояния должны быть ортогональны основному состоянию. Поэтому единственно возможным конечным состоянием является 1S_0 -состояние. Ясно поэтому, что изоспин меняется с $T=0$ до $T=1$ и в переходе участвует только изовекторная часть оператора магнитного момента.

Таким образом, матричный элемент перехода равен

$$\mathfrak{M}_M = \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right) \left(\frac{1}{2} \right) (\mu_p - \mu_n) \left(\chi_0^0, \sum_i \sigma_i \chi_1^0 \right) \int u_f(r) u_i(r) dr. \quad (3.20)$$

С достаточной точностью, позволяющей уяснить суть явления, интеграл можно вычислить, используя асимптотическое представление волновых функций начального и конечного состояний**. Для синглетного состояния имеем

$$u_f \approx \sin(kr + \delta_s)/k, \quad (3.21)$$

где нормировочная постоянная выбрана так, что с точностью до сдвига фазы u_f совпадает с S -волновой частью плоской волны, нормированной на единицу в кубе единичного объема.

* Поправки, возникающие при учете скоростных членов в потенциале, обсуждаются в работе [18].

** Если требуется большая точность, то как в данном случае, так и при вычислении матричного элемента $E1$ -перехода необходимо пользоваться волновыми функциями u_f и u_i , отвечающими рассматриваемому потенциалу.

Вместо u_f удобно ввести для синглетного состояния решение, аналогичное (2.13), а именно

$$\varphi_f \approx C_s \frac{u_s}{r}; \quad u_s = \frac{\sin(kr + \delta_s)}{\sin \delta_s}, \quad C_s = \frac{\sin \delta_s}{k}. \quad (3.22)$$

Из соотношения

$$k \operatorname{ctg} \delta_s = -\frac{1}{a_s(k)} = -\frac{1}{a_s} + \frac{1}{2} k^2 r_{0s}^2 + \dots \quad (3.23)$$

находим

$$C_s^2 = \frac{1}{k^2 + 1/a_s^2(k)}. \quad (3.23a)$$

Вычисляя интеграл в (3.20), получаем

$$\int \frac{\sin(kr + \delta_s)}{\sin \delta_s} \exp(-\gamma r) dr = \frac{\gamma + k \operatorname{ctg} \delta_s}{\gamma^2 + k^2}. \quad (3.23b)$$

Мы видим, что благодаря введению функции φ ответ выражается через $a_s(k)$ и в результате поправка на конечный радиус действия сил учитывается в r_{0s} .

Аналогично тому, как было получено сечение электрического дипольного расщепления, получаем сечение дипольного магнитного расщепления

$$\sigma_M = \frac{2\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 (\mu_p - \mu_n)^2 \frac{[\gamma - a_s^{-1}(k)]^2}{[k^2 + a_s^{-2}(k)]} \frac{k\gamma}{k^2 + \gamma^2} \frac{1}{1 - \gamma r_{0t}}. \quad (3.24)$$

На самом деле в приведенном выводе были опущены члены, которые дают поправки того же порядка, что и член k^2 в выражении (3.23b) для $a_s(k)$. Детальный анализ [11] показывает, что основная поправка к формуле (3.24) определяется разностью эффективных радиусов $r_{0s} - r_{0t}$. Введение тензорных сил и D -волны в дейтроне мало меняет полученный результат, так как эти эффекты влияют, главным образом, на r_{0s} и r_{0t} , а в приведенном выводе все величины выражались через $a_s(k)$ и r_{0t} .

Из формулы (3.24) следует, что сечение σ_M достигает максимального значения при

$$k^2 = k_{\max}^2 \sim \frac{1}{a_s^2(0)}, \quad E = W_0 = \frac{\hbar^2 k_{\max}^2}{m} \sim \frac{\hbar^2}{ma_s^2(0)}. \quad (3.24a)$$

Величину W_0 часто называют энергией виртуального синглетного состояния дейтрона. В обозначениях, принятых в формуле (3.24), сечение σ_M без учета зависимости от эффективного радиуса имеет вид

$$\sigma_M = \frac{2\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 (\mu_p - \mu_n)^2 \frac{W_1 E^{1/2} (W_1^{1/2} + W_0^{1/2})^2}{(E + W_1)(E + W_0)}. \quad (3.25)$$

При высоких энергиях ($E \gg W_1 = 2,2 \text{ МэВ}$) сечения электрического и фотоманнитного расщеплений убывают как $E^{-3/2}$, причем отношение сечения фотоманнитного расщепления к фотоэлектрическому мало:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{эл}} \approx \frac{W_1}{4mc^2} (\mu_p - \mu_n)^2 \approx 0,013 \quad (3.25a)$$

из-за того, что магнитный дипольный момент $e\hbar/2mc$ мал по сравнению с электрическим дипольным моментом $ez/2$.

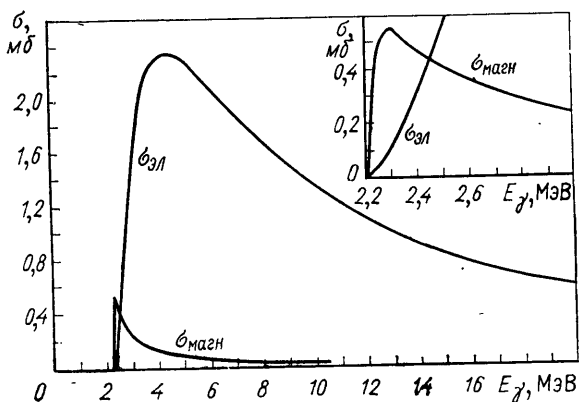


Рис. 9. Фотоэлектрическое и фотоманнитное сечения для дейтрона. В правом углу рисунка изображена область вблизи порога в увеличенном масштабе

В области низких энергий ($E \ll W_1 = 2,2 \text{ МэВ}$) сечение фотоэлектрического расщепления пропорционально $E^{3/2}$, в то время как сечение фотоманнитного расщепления меняется по закону $E^{1/2}(E + W_0)$. Поэтому вблизи порога магнитное дипольное поглощение более существенно, чем электрическое, и их отношение составляет

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{эл}} \approx 0,013 \frac{W_1}{E} \frac{W_1}{W_0 + E}. \quad (3.25б)$$

Графики энергетической зависимости сечений фоторасщепления приведены на рис. 9. (Этот рисунок заимствован из книги Бете и Моррисона [12]. В этой книге читатель найдет прекрасное изложение материала, рассмотренного нами в гл. 2 и 3). Максимальное сечение электрического фоторасщепления при $\hbar\omega = 2W_1$ составляет 2,3 мб, а сечение при 25 МэВ равно 0,5 мб. Поскольку сечение (3.24) явно зависит от эффективного радиуса r_{0s} , который трудно измерить в опытах по рассеянию, можно было бы предположить, что r_{0s} удастся определить из данных по сечению σ_m . Однако, как будет показано в § 3.3, имеются теоретические неопределенности, которые пока не позволяют это сделать.

§ 3.3. ВКЛАД ОБМЕННЫХ ТОКОВ

Пользуясь принципом детального равновесия, нетрудно получить сечение процесса, обратного фоторасщеплению, — радиационного захвата нейтронов протонами. В случае магнитных дипольных переходов это сечение равно

$$\sigma_{\text{захв}} = \pi \frac{e^2}{mc^2} \frac{\hbar}{mc} \frac{2W_1 (W_1^{1/2} + W_0^{1/2})^2 (W_1 + E/2)}{(W_0 + E/2) mc^2} (\mu_p - \mu_n)^2, \quad (3.26)$$

где $E/2 = mv^2/4$ — энергия нейтрона и протона в системе центра масс. Выражение (3.26) для $\sigma_{\text{захв}}$ справедливо только при низких энергиях, когда сечение $\sigma_{\text{эл}}$ мало по сравнению с $\sigma_{\text{м}}$. Заметим, что при $E \rightarrow 0$ сечение $\sigma_{\text{захв}}$ растет как $E^{-1/2}$, т. е. по закону $1/v$. Однако произведение $\sigma_{\text{захв}}v$ пропорционально числу актов захвата в единицу времени, поэтому вероятность захвата в единицу времени медленных нейтронов протонами не зависит от скорости нейтронов.

Приводимое обычно в литературе значение сечения захвата соответствует типичной скорости нейтронов из ядерного реактора, составляющей $v = 2200$ м/с. При такой скорости сечение захвата равно [30]

$$\sigma_{\text{захв}} = (334,2 \pm 0,5) \text{ мб.}$$

Это довольно большое сечение. Именно поэтому водород не используют в качестве замедлителя в ядерных реакторах. Сечение захвата в углероде и дейтерии примерно в 100 раз меньше, чем в водороде.

Аккуратное вычисление сечения, проведенное по намеченной в § 3.2 схеме, но с более реалистическими волновыми функциями u_f и u_i , дает результат [95]

$$\sigma_{\text{теор}} = (302,5 \pm 4,0) \text{ мб.}$$

Таким образом, между теорией и экспериментом имеется расхождение порядка 10%, которое мы сейчас обсудим.

Проблема расхождения теоретического и экспериментального значений сечения захвата существовала в течение многих лет, но правдоподобное решение было найдено лишь недавно [101]. По-видимому, сравнительно простое объяснение, предложенное Риской и Брауном, не было найдено раньше потому, что поправки, связанные с обменными токами, возникают в основном за счет примеси D -волны. Обычно в вычислениях D -волна не учитывается из-за того, что вероятность D -состояния мала, однако амплитуда D -состояния составляет от 0,25 до 0,3 в зависимости от используемого двухчастичного потенциала.

Рассмотрим основной член в поправке на обменные токи просто, чтобы показать, что в такого типа процессах нет ничего «загадочного». Начнем с взаимодействия, описываемого форму-

лой (1.10). Из калибровочной инвариантности следует, что в присутствии электромагнитного поля необходимо сделать замену

$$\nabla \rightarrow \nabla \mp \frac{ie}{c} \mathbf{A}, \quad (3.27)$$

где знаки $-$ и $+$ относятся к π^+ - и π^- -мезонам соответственно. Следовательно, в присутствии электромагнитного поля в лагранжиане появляется член

$$\delta L = \frac{f}{\mu} \frac{ie}{\sqrt{2}} \bar{\psi}(x) \tau_{\mp} \varphi_{\pm} (\sigma \mathbf{A}) \psi(x). \quad (3.27a)$$

Здесь

$$\varphi_{\pm} = \sqrt{1/2} (\varphi_1 \pm i\varphi_2); \quad \tau_{\mp} = (\tau_1 \mp i\tau_2), \quad (3.27b)$$

где φ_{\mp} — поле π^{\mp} -мезонов соответственно.

Рассмотрим процесс, когда в одной из вершин испускается γ -квант вместе с π -мезоном, а затем мезон поглощается другой частицей (рис. 10). Выпишем сначала факторы, связанные с зарядовой структурой:

1) π^+ -мезон испускается в вершине 1 и поглощается в вершине 2. Возникает фактор

$$-\frac{1}{2} ie (\tau_{1x} + i\tau_{1y}) (\tau_{2x} - i\tau_{2y}).$$

2) То же для π^- -мезона

$$+\frac{1}{2} ie (\tau_{1x} - i\tau_{1y}) (\tau_{2x} + i\tau_{2y}).$$

Сумма этих двух факторов равна

$$-e (\tau_{1x}\tau_{2y} - \tau_{1y}\tau_{2x}) = -e [\tau_1 \tau_2]_3.$$

Из этого выражения видно, что поправка на обменный ток является изовектором; это связано с изовекторной природой π -мезона.

Как уже обсуждалось в гл. 1, всякий раз, когда испускается или поглощается π -мезон, возникает нормировочный множитель $(2\pi/\omega_R)^{1/2}$ и все вычисления, относящиеся к испусканию и поглощению пиона, проводятся в точности так же, как при получении потенциала однопионного обмена в § 1.2 в гл. 1. Таким образом, для процесса, изображенного на рис. 10, получаем

$$H_{12} = \frac{ef^2}{4\mu^2} \sigma_1 \mathbf{A} (1) \frac{\exp(-\mu r)}{r} \sigma \nabla_2. \quad (3.28)$$

К этому выражению следует добавить член H_{21} , отличающийся заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$ и отвечающий взаимодействию частицы

2 с γ -квантом. Вспоминая, что для статического магнитного поля \mathcal{H} вектор-потенциал равен

$$\mathbf{A}(r) = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \mathcal{H}], \quad (3.28a)$$

находим

$$H_{12} + H_{21} = -[\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2]_3 \frac{ef_2}{4\pi\mu^2} \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\sigma}_1 [\mathbf{r}_1 \mathcal{H}] \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{r} + \\ + (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma}_2 [\mathbf{r}_2 \mathcal{H}] \} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\exp(-\mu r)}{r}, \quad (3.28b)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Определим магнитный момент обменных токов \mathbf{M}_{12} следующим образом:

$$\frac{e}{2m} \mathcal{H} \mathbf{M}_{12} = H_{12} + H_{21}. \quad (3.29)$$

После несложных преобразований получаем

$$\mathbf{M}_{12} = [\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2]_3 \frac{f^2}{4\pi} \frac{m}{\mu^2} \{ [\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{r}_1] (\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{r}) + \\ + (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{r}) [\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{r}_2] \} (\mu r + 1) \frac{\exp(-\mu r)}{r^3}. \quad (3.29a)$$

Если ввести обозначение $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, то член в фигурных скобках в выражении (3.29a) можно представить в виде суммы двух членов, один из которых

$$[\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{R}] (\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{r}) [\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{R}] \quad (3.29b)$$

зависит от R , а другой

$$\{ [\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{r}] (\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{r}) [\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{r}] \} / 2 \quad (3.29b)$$

только от r . Последний член нетрудно разложить на неприводимые сферические тензоры:

$$\frac{1}{3} [\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2] r^2 - \frac{1}{2} \{ [\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2] \mathbf{r} \mathbf{r} - \frac{1}{3} [\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2] r^2 \}. \quad (3.29r)$$

Член, зависящий от R и нарушающий галилеевскую инвариантность, появляется в магнитном моменте вследствие того, что вектор-потенциал \mathbf{A} зависит также от абсолютных, а не только от относительных координат частиц. Уалборн и Бломквист показали [118], что этот член дает поправку δg_l к орбитальному g -фактору. Для рассматриваемого нами процесса захвата эта поправка не важна. Собирая члены, зависящие только от r , находим, что магнитный момент обменных токов M_{12} равен*

$$\mathbf{M}_{12} = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2]_3 \frac{m}{\mu^2} \frac{f^2}{4\pi} \left\{ \frac{2}{3} [\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2] r^2 - \right. \\ \left. - \left([\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2] \mathbf{r} \mathbf{r} - \frac{1}{3} [\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2] r^2 \right) \right\} \frac{\exp(-\mu r)}{r^3}. \quad (3.30)$$

* Полная классификация обменных токов в процессах с участием пионов дана в работе [25].

Из структуры членов, заключенных в фигурные скобки в выражении (3.30), видно, что первый член $(2/3) [\sigma_1 \sigma] r^2$ дает переходы из начального 1S_0 -состояния нейтрона и протона в 3S_1 -состояние дейтрона, а второй член дает переходы в 3D_1 -состояние дейтрона. Для заданного нуклон-нуклонного потенциала вычисление дейтронной волновой функции и волновой функции 1S_0 -состояния не представляет труда, поэтому матричный элемент M_{12} легко находится. Детали вычислений содержатся в упомянутой работе Риски и Брауна, где рассмотрены также другие члены, входящие в обменные токи.

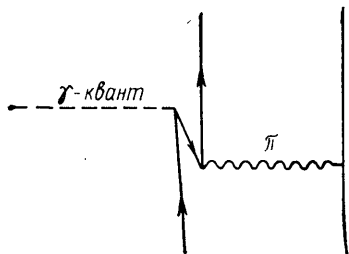


Рис. 11. Релятивистское описание процесса, изображенного на рис. 10. Излом на нуклонной линии отвечает тому, что при испускании γ -кванта рождается виртуальная пара нуклон — антинуклон

Заметим, что калибровочный член, описываемый нерелятивистским образом (см. рис. 10), в действительности возникает в релятивистской теории с γ -связью из рассмотрения процесса, изображенного на рис. 11. Этот процесс включает образование виртуальной пары в промежуточном состоянии. Ничего особенно удивительного в этом нет, так как член $A^2/(2m)$ в обычной нерелятивистской квантовой механике также возникает из-за введения пар в промежуточном состоянии в релятивистской теории.

Рассматривая волновую функцию дейтрона релятивистски, представляется оправданным в первом приближении требовать отсутствия виртуальных пар, т. е.

$$\Lambda^-(1) \Psi^{(0)} = 0 = \Lambda^-(2) \Psi^{(0)}, \quad (3.31)$$

где $\Psi^{(0)}$ — релятивистская 16-компонентная волновая функция. Однако малые компоненты волновой функции можно исключить, пользуясь условием (3.31). Мы видим, что с помощью этой волновой функции нулевого порядка можно вычислять магнитный момент μ_d , определяемый формулой (3.9). Таким образом, возникает неоднозначность в определении релятивистских поправок к магнитному моменту дейтрона, исходя из волновой функции $\Psi^{(0)}$.

Если мы теперь введем в $\Psi^{(0)}$ поправочные члены, учитывающие образование виртуальных пар, то будут происходить процессы типа изображенного на рис. 11, так как γ -квант может рождать виртуальные пары. Согласно нашей классификации, такие члены следует отнести к поправкам на обменные токи, хотя из сказанного выше ясно, что подразделение на обменные токи и релятивистские поправки условно.

Процесс, изображенный на рис. 11, линейен по амплитуде образования виртуальной пары. Если мы будем вычислять поправки, квадратичные по этой амплитуде, то следует вернуться назад и внести поправки в $\Psi^{(0)}$. На первый взгляд кажется, что эти поправки весьма значительны, однако следует заметить, что в низкоэнергетическом приближении оператор γ_5 рождает пару с одинаковым направлением спинов нуклона и антинуклона. Следовательно, результирующий магнитный момент системы из двух нуклонов и одного антинуклона будет в этом пределе таким же, как момент одного нуклона. Таким образом, основная поправка, связанная с образованием виртуальных пар, возникает за счет процесса, изображенного на рис. 11.

§ 3.4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФОРМ-ФАКТОРЫ ДЕЙТРОНА

Исследование упругого рассеяния электронов на дейтронах может дать богатую информацию о волновой функции дейтрона и, следовательно, о нуклон-нуклонном взаимодействии. Рассмотрим сначала задачу о кулоновском рассеянии нерелятивистского электрона на точечном заряде Ze . Удобно сначала найти амплитуду рассеяния на экранированном потенциале

$$-Ze^2 \frac{\exp(-\mu r)}{r},$$

а затем получить кулоновскую амплитуду предельным переходом $\mu \rightarrow 0$. Амплитуда рассеяния электрона с начальным (конечным) импульсом $\mathbf{k}(\mathbf{k}')$ в борновском приближении имеет вид

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}') &= \frac{m_e Z e^2}{2\pi \hbar^2} \int \exp(-i\mathbf{k}r) \frac{\exp(-\mu r)}{r} \exp(i\mathbf{k}'r) d^3r = \\ &= \frac{2m_e Z e^2}{\hbar^2} \frac{1}{4k^2 \sin^2 \theta/2 + \mu^2}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где θ — угол между направлениями \mathbf{k} и \mathbf{k}' . Отсюда получаем, что дифференциальное сечение кулоновского рассеяния $|f_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}')|^2$ равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m_e^2 Z^2 e^4}{4k^4 \sin^4 \theta/2}. \quad (3.32a)$$

Оказывается, что полученное таким способом сечение совпадает с точным. Амплитуда кулоновского рассеяния на заряде, распределенном с плотностью $\rho(\mathbf{r})$, может быть получена заменой

$$-\frac{Ze^2 \exp(-\mu r)}{r} \rightarrow -e \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\exp(-\mu |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.32b)$$

Фурье-преобразование, аналогичное формуле (3.32), легко проводится переходом от переменных интегрирования \mathbf{r} и \mathbf{r}' к $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и \mathbf{r}' .

Если вместо $\rho(\mathbf{r})$ подставить квадрат модуля дейтронной волновой функции, полагая нуклоны точечными, то эффекты, связанные с конечностью зарядового распределения нуклонов, могут быть учтены еще одним интегрированием. Таким образом, для дейтрона получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{M, M'} \frac{m_e^2 Z^2 e^4}{4k^2 \sin^4 \theta/2} [G_E^s(q^2) F_E^{MM'}(q^2)]^2, \quad (3.33)$$

где $G_E^s(q^2)$ — изоскалярный форм-фактор нуклона, а

$$F_E^{MM'}(q^2) = \int d^3r \exp\left(\frac{i\mathbf{q}\mathbf{r}}{2}\right) \Psi_M^*(\mathbf{r}) \Psi_{M'}(\mathbf{r}). \quad (3.33a)$$

Когда дейтроны не поляризованы и поляризация конечных продуктов не измеряется, то сумма по M и M' подразумевает усреднение по M и суммирование по M' . Рассмотрим форм-фактор $F_E^{MM'}(q^2)$ более детально, воспользовавшись волновой функцией (2.36), которая содержит S - и D -компоненты. С помощью соотношения (2.35д) получаем

$$F_E^{MM'}(q^2) = \frac{\delta_{MM'}}{4\pi} \int dr d\Omega \exp\left(\frac{i\mathbf{q}\mathbf{r}}{2}\right) (u^2 + w^2) + \\ + \frac{1}{4\pi} \int dr d\Omega \exp\left(\frac{i\mathbf{q}\mathbf{r}}{2}\right) \left(\sqrt{\frac{1}{2}} u w - \frac{w^2}{4} \right) \langle \chi_1^M | S_{12} | \chi_1^{M'} \rangle. \quad (3.34)$$

Первое и второе слагаемые в этой формуле принято называть зарядовым и квадрупольным форм-факторами соответственно. Интегрирование по углам проводится разложением плоской волны по парциальным с учетом того, что все члены, кроме $\langle \chi_1^M | S_{12} | \chi_1^{M'} \rangle$, — сферически-симметричны. В § 2.5 мы установили, что оператор S_{12} является сверткой спинового и пространственного тензоров второго ранга, так что можно записать

$$F_E^{MM'}(q^2) = F_C(q^2) \delta_{MM'} - F_Q(q^2) \langle \chi_1^M | S_{12}(\hat{\mathbf{q}}) | \chi_1^{M'} \rangle, \quad (3.35)$$

где $S_{12}(\hat{\mathbf{q}})$ получается из (2.35) заменой \mathbf{r} на \mathbf{q} . Введем следующие определения:

$$F_C(q^2) = \int dr (u^2 + w^2) j_0\left(\frac{qr}{2}\right), \quad (3.35a)$$

$$F_Q(q^2) = \int dr \left(2uw - \frac{w^2}{\sqrt{2}} \right) j_2\left(\frac{qr}{2}\right). \quad (3.35b)$$

Проводя суммирование по проекциям M конечного состояния и усредняя по проекциям начального состояния, пользуясь формулой (2.35), получаем дифференциальное сечение, соответствующее

* Здесь $\mathbf{q} = (\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ — передача импульса, а $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n$.

ще обычной постановке опыта, когда поляризация дейтронов не измеряется:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m_e^2 Z^2 e^4}{4k^2 \sin^4 \theta/2} \{ [G_E^s(q^2)]^2 [F_C^2(q^2) + F_Q^2(q^2)] \}. \quad (3.36)$$

Тем же способом можно найти вклад магнитного рассеяния в сечение рассеяния электронов на дейтронах. В результате в фигурных скобках в формуле (3.36) появляются дополнительные члены вида

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \theta/2) F_M^2(q^2) \frac{2}{3} \left(\frac{q}{2m_N} \right)^2, \quad (3.36a)$$

где форм-фактор

$$\begin{aligned} F_M(q^2) = & G_M^s(q^2) \int dr \left[\left(u^2 - \frac{w^2}{2} \right) j_0 \left(\frac{qr}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\sqrt{\frac{1}{2}} uw + \frac{w^2}{2} \right) j_2 \left(\frac{qr}{2} \right) \right] + \\ & + \frac{3}{4} G_M^s(q^2) \int dr w^2 \left[j_0 \left(\frac{qr}{2} \right) + j_2 \left(\frac{qr}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.36b)$$

Здесь $G_M^s(q^2)$ — изоскалярный магнитный форм-фактор нуклона, который в пределе $q^2 \rightarrow 0$ переходит в $\mu_n + \mu_p$.

Для всех существенных в ядерной физике значений переданного импульса электроны следует считать релятивистскими. Если по-прежнему будем полагать нуклоны нерелятивистскими, то это сведется просто к замене Резерфордского сечения в формуле (3.32a) сечением Мотта. Сохраняя только члены низшего порядка по $Z\alpha$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \left(\frac{Ze^2}{2E_e} \right)^2 \frac{\cos^2 \theta/2}{\sin^4 \theta/2} \{ [G_E^s(q^2)]^2 [F_C^2(q^2) + F_Q^2(q^2)] + \\ & + (1 + \operatorname{tg}^2 \theta/2) \frac{2}{3} \left(\frac{q}{2m_N} \right)^2 F_M^2(q^2) \}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где форм-факторы F_C , F_Q и F_M даются формулами (3.35a), (3.35б) и (3.36б) соответственно, E_e — релятивистская энергия электрона, а $q^2 = 4E^2 \sin^2 \theta/2$.

При данном q^2 отношение экспериментального сечения, усредненного и просуммированного по поляризационным состояниям, к сечению Мотта позволяет получить непосредственную информацию о структуре как дейтрона, так и составляющих его нуклонов. Заметим, что, варьируя одновременно E_e и θ и сохраняя q^2 постоянным, можно отделить F_M^2 от $F_E^2 = F_C^2 + F_Q^2$, используя только данные, усредненные по поляризации. Такое разделение было проведено для переданных импульсов вплоть до $q^2 < 16$ Ферми⁻² и результаты для $|F_E(q^2)|^2$ приведены на рис. 12.

Из формулы (3.37) ясно, что F_C и F_Q не могут быть получены по отдельности без поляризационных измерений. Наоборот, необходимо понимать, что относительные веса F_C^2 и F_Q^2 в формуле (3.37) возникают при переходе от выражения (3.35) к (3.36) в результате усреднения по спиновым состояниям начального и суммирования по спиновым состояниям конечного состояний. Эти относительные веса можно изменить и определить F_C либо постановкой эксперимента с поляризованными дейтронами,

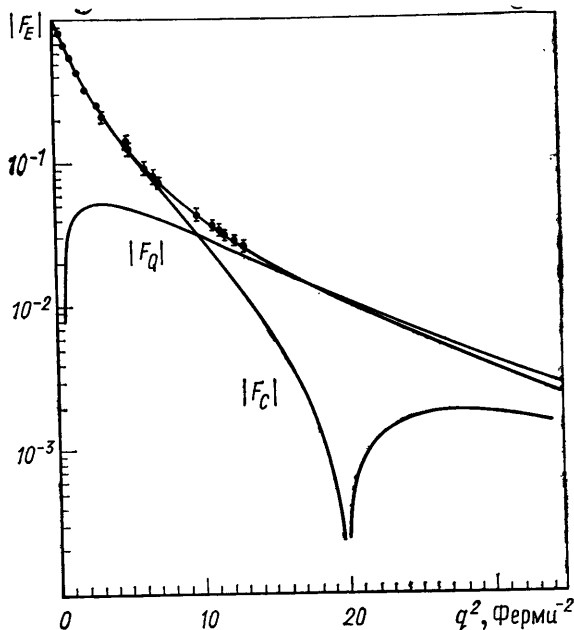


Рис. 12. Электрический форм-фактор дейтрона $F_E(q^2)$. Экспериментальные точки заимствованы из работ D. J. Drickey and L. N. Hand. «Phys. Rev. Lett.», 1962, v. 9, p. 521 и S. Galster et al. Nucl. Phys., 1971, v. B32, p. 221. Теоретические кривые вычислены для потенциала Риды с мягким кором

либо измерением поляризации дейтронов отдачи. Эти, казалось бы, несложные эксперименты, в действительности трудны и до сих пор не проведены. Отсутствие поляризационных данных тем более досадно, что форм-фактор $F_C(q^2)$ при больших $q^2 \sim (15 \div 25)$ Ферми⁻² чрезвычайно чувствителен к поведению волновой функции дейтрона на малых расстояниях.

На рис. 12 изображены форм-факторы $|F_C|$, $|F_Q|$ и $|F_E|$, полученные с потенциалом Риды с мягким кором и феноменологическими скалярными форм-факторами нуклона. Причину обращения в нуль форм-фактора проще всего понять, проделав в

формуле (3.35a) преобразование Бесселя над функциями $u(r)$ и $\omega(r)$:

$$u(k) = \int r dr j_0(kr) u(r), \quad (3.38)$$

$$\omega(k) = \int r dr \omega(r) j_2(kr). \quad (3.38a)$$

Интегрирование с функциями Бесселя можно выполнить аналитически*; в результате

$$F_C(q^2) = \frac{2}{\pi q} \left[\int_0^\infty k dk u(k) \int_{|k-q/2|}^{k+q/2} k' dk' u(k') + \int_0^\infty k dk \omega(k) \int_{|k-q/2|}^{k+q/2} k' dk' \omega(k') \right]. \quad (3.38б)$$

Функции $u(k)$ и $\omega(k)$ изображены на рис. 7 (для потенциала Рида). Нетрудно установить связь между структурой форм-фактора $F_C(q^2)$ и положением нуля и минимума функции $u(k)$. По мере ослабления отталкивания на малых расстояниях в NN -системе нуль функции $u(k)$ удаляется, а минимум становится мельче и оказывает меньшее влияние на поведение форм-фактора $F_C(q^2)$. Заметим здесь, что лишь немногие нуклон-нуклонные потенциалы дают на малых расстояниях более сильное отталкивание, чем потенциал Рида. Чувствительность форм-фактора F_E к деталям взаимодействия, однако, сильно ослаблена тем, что доминирующий вклад в F_E вносит форм-фактор F_Q , не имеющий выраженной структуры. Поэтому, хотя дейтронные волновые функции, отвечающие реалистическим потенциалам, воспроизводят, в принципе, форм-фактор F_E (см. рис. 12), решить обратную задачу, а именно получить волновую функцию дейтрона из данных по упругому электрон-дейтронному рассеянию без измерения поляризации (см. [50]) невозможно.

Если бы из подобных экспериментов удалось извлечь дейтронную волновую функцию, то NN - взаимодействие в триплетном состоянии с положительной четностью можно было бы восстановить решением обратной задачи для уравнения Шредингера, т.е. задачи о восстановлении потенциала. При этом необходимо, чтобы взаимодействие было локальным, не зависящим от энергии и содержало только центральные и тензорные силы. Знание дейтронной волновой функции могло бы наложить существенные ограничения и на взаимодействие более общего вида.

Аналогично тому, как была получена формула (3.37), можно выразить сечения упругого рассеяния электронов на ядрах ${}^3\text{He}$ и ${}^3\text{H}$ через волновые функции этих систем. Полный угловой момент основных состояний этих ядер составляет $J=1/2$, поэтому ${}^3\text{He}$ и ${}^3\text{H}$ не обладают электрическим квадрупольным моментом.

* Вычисления выполнены в работе Джексона и Максимова [61]. Заметим, что формулы (3.38), (3.35б) и (3.36б) удобнее для численных расчетов, чем соответствующие формулы в координатном представлении.

В этом случае электрический форм-фактор есть просто зарядовый форм-фактор, который измеряют в опытах с неполяризованной мишенью. Экспериментальный форм-фактор ядра ${}^3\text{He}$ изображен на рис. 13. Он имеет минимум и последующий максимум, не проявляющийся в случае дейтрона. Эта структура вновь характеризует взаимодействие на малых расстояниях. Возможно, что опыты по измерению зарядового форм-фактора ${}^3\text{He}$ дают наиболее

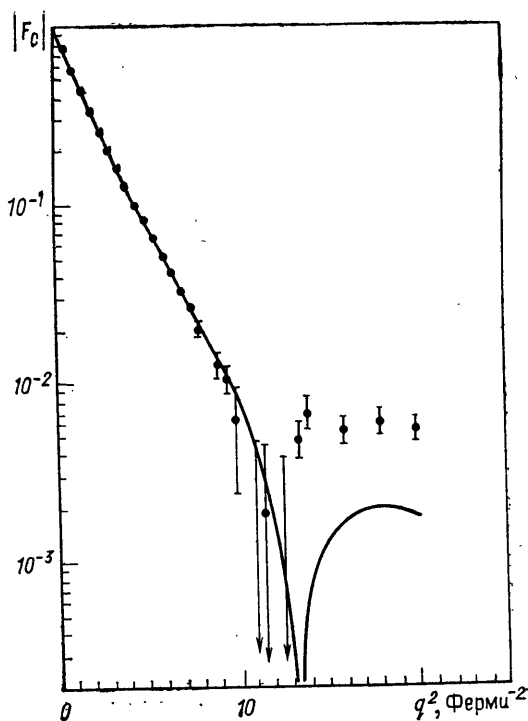


Рис. 13. Зарядовый форм-фактор ${}^3\text{He}$. Экспериментальные точки заимствованы из работы McCarthy et al. «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 25, p. 884. Теоретическая кривая получена для потенциала Рида с мягким кором в работе S. N. Yang and J. D. Jackson. «Phys. Lett.», 1972, v. 36B, p. 1

прямою доступною в настоящее время информацию о свойствах ядерного взаимодействия на малых расстояниях. Сейчас имеется хорошо развитая техника расчета связанных состояний в системе из трех нуклонов и существует большое число волновых функций, отвечающих реалистическим феноменологическим потенциалам, найденных как вариационными методами, так и из решения уравнений Фаддеева. Типичным, если не считать некоторых численных различий при $q^2 > 10$ Ферми $^{-2}$, является изображенный на рис. 13 зарядовый форм-фактор для потенциала Рида с мягким кором. Вычисленный форм-фактор имеет нуль при больших переданных

импульсах, чем на опыте, а второй максимум примерно в три раза ниже экспериментального.

Прежде чем попытаться видоизменить взаимодействие, чтобы добиться согласия с опытом, заметим, что всюду в данном параграфе мы предполагали, что другие нуклоны не оказывают влияния на взаимодействие электрона с нуклоном. Ранее было показано, что существуют значительные мезонные поправки к сечениям радиационного захвата и фоторасщепления, а также к магнитному моменту дейтрона. Из формулы (3.36б) следует, что в пределе $q^2 \rightarrow 0$ форм-фактор $F_M(q^2)$ переходит в точности в магнитный момент дейтрона, определяемый формулой (3.7). Поэтому можно ожидать, что процессы типа изображенных на рис. 10 и 11, дадут поправки также в рассмотренное сечение упругого рассеяния $e-d$ и $e-{}^3\text{He}$. В этом же самом пределе $q^2 \rightarrow 0$ форм-фактор $F_C(q^2)$ стремится к полному заряду дейтрона, который, разумеется, сохраняется. Следовательно, правильно найденные поправки на обменные токи к форм-фактору $F_C(q^2)$ должны обращаться в нуль при $q^2 \rightarrow 0$ *. Однако нет нужды, чтобы они исчезли для ненулевых передач импульса и, действительно, они оказываются существенными в двух- и трехнуклонных системах во всем интервале переданных импульсов, изображенном на рис. 12 и 13. Для больших q^2 двухчастичные процессы, изображенные на рис. 10 и 11, позволяют «распределить» передачу импульса (т.е. фотон вносит импульс q , а пион уносит импульс $q/2$). Поскольку дейтронные волновые функции $u(k)$ и $w(k)$ при больших k быстро спадают и больше зависят от модели, чем при малых k , то следует ожидать, что двухчастичные поправки будут доминировать при больших q и меньше зависеть от деталей взаимодействия по сравнению с одночастичными при одном и том же переданном импульсе.

Поправки к дейтронным форм-факторам, связанные с обменными токами, были вычислены Джексоном, Ланде и Риской [60]. В области переданных импульсов, показанной на рис. 12, эти поправки отрицательны. Они сдвигают нуль форм-фактора в область $q^2 \sim 15$ Ферми⁻² и примерно в четыре раза увеличивают высоту второго максимума. К сожалению, отрицательные поправки уменьшают чувствительность $F_C(q^2)$ к деталям взаимодействия на малых расстояниях. Сходные результаты были получены для ${}^3\text{He}$ Клоуэтом и Тьоном [67], где отрицательные поправки приводят к лучшему согласию между теорией и экспериментом.

Хотя мы не собираемся подробно обсуждать эту проблему, заметим, что неупругое ed -рассеяние играет решающую роль в определении электромагнитных форм-факторов нейтрона **. Труд-

* Для полноты изложения заметим, что форм-фактор F_Q в пределе $q^2 \rightarrow 0$ пропорционален квадрупольному моменту дейтрона, определяемому формулой (2.36д).

** Более детально вопрос об определении электромагнитных форм-факторов нейтрона рассмотрен в книге Хофштадтера [51].

но осуществить опыт по рассеянию электронов на свободных нейтронах. За исключением области очень малых q^2 (где можно использовать рассеяние тепловых нейтронов на мишени из атомных электронов), необходимо извлекать информацию о en -рассеянии из данных по рассеянию электронов на ядрах. Слабо связанный дейтрон является наиболее естественным источником квазисвободных нейтронов и неудивительно, что в неупругом ed -рассеянии имеется узкий пик, отвечающий, грубо говоря, квазиупругому рассеянию на нейтроне (протоне) в присутствии протона (нейтрона)-спектратора (т. е. частицы, не принимающей непосредственное участие в реакции. — *Прим. пер.*). Расчеты подобных квазиупругих процессов существенно сложнее, чем приведенное выше рассмотрение упругого рассеяния, поскольку в неупругом процессе необходимо учитывать взаимодействие в конечном состоянии между протоном и нейтроном. Пренебрегая взаимодействием в конечном состоянии и поправками на обменные токи, можно, пользуясь приближением полноты, получить выражение для сечения квазиупругого рассеяния в такой форме, что величины, характеризующие структуру дейтрона, и нуклонные форм-факторы факторизуются. В этом приближении отношение квазиупругих сечений для нейтрона и протона не зависит от волновой функции дейтрона, а определяется только кинематическими факторами и отношением нуклонных форм-факторов. Тогда, используя независимую информацию о протонных форм-факторах, возможно определить нейтронные форм-факторы непосредственно из сечений без привлечения волновой функции дейтрона. Эти приближения, возможно, оправданы в задаче об определении магнитного форм-фактора нейтрона, который сравним по величине с форм-факторами протона, однако оно вряд ли удовлетворительно для получения значительно меньшего по величине электрического форм-фактора нейтрона. Тем не менее, несмотря на отсутствие должной обоснованности*, им часто пользуются для экспериментального определения электрического форм-фактора нейтрона.

* Обсуждению этих вопросов посвящена работа Ренара и др. [100].

РАССЕЯНИЕ ПРОТОНОВ НА ПРОТОНАХ

§ 4.1. ВВЕДЕНИЕ

Рассеяние протонов на протонах является лучшим источником количественной информации о ядерных силах. Исторически именно в результате изучения этого процесса была получена первая хорошая оценка радиуса сил между двумя нуклонами. Точность измерений здесь довольно высока, так как протоны легко ускорять и детектировать. Так, в ускорителе Ван де Граафа можно получать хорошие пучки монохроматических протонов, которые легко детектировать по производимой ими ионизации. При более высоких энергиях первично ускоряемыми в большинстве ускорителей частицами также являются протоны.

Хотя с точки зрения эксперимента протон-протонное рассеяние легче исследовать, чем рассеяние протонов на нейтронах, теоретический анализ осложняется наличием кулоновского взаимодействия. Кулоновское и ядерное рассеяния когерентны, поэтому в сечении имеются интерференционные члены. Поскольку ядерные силы — притягивающие, а кулоновские — отталкивающие, интерференция в основном деструктивна и приводит к появлению характерных минимумов в дифференциальном сечении рассеяния под определенными углами. Несмотря на сложное поведение дифференциального сечения рассеяния как функции угла, для описания сечения при низких энергиях достаточно одного подгоночного параметра, а именно фазы $\delta_0(E)$ ядерного рассеяния в 1S_0 -состоянии. Действительно, кулоновская интерференция дает в сечении как линейные, так и квадратичные по $\delta_0(E)$ члены и в результате возникает большая чувствительность к фазе $\delta_0(E)$. Более того, кулоновское рассеяние хорошо изучено как теоретически, так и экспериментально, и это обстоятельство может быть использовано для калибровки данных по ядерному рассеянию.

Система протон — протон подчиняется статистике Ферми, в то время как в системе протон — нейтрон возможны как симметричные, так и антисимметричные относительно перестановки частиц состояния. Вследствие этого анализ протон-протонного рассеяния упрощается, и, действительно, неоднозначность в анализе протон-протонного рассеяния при более высоких энергиях меньше, чем в случае нейтрон-протонного рассеяния.

Наличие кулоновского взаимодействия существенно усложняет анализ протон-протонного рассеяния. Необходимая техника расчета была разработана Брейтом и соавторами [16], и мы коротко остановимся на их результатах после небольшого общего обсуждения вопроса о рассеянии в кулоновском поле.

Хорошо известная формула Резерфорда для сечения классического рассеяния в кулоновском поле в системе центра масс имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Z_1 e)^2 (Z_2 e)^2}{4m_r^2 v^4 \sin^4 \theta/2}, \quad (4.1)$$

где $Z_1 e$ и $Z_2 e$ — заряды частиц; v — относительная скорость; m_r — приведенная масса, а θ — угол рассеяния в системе центра масс. Для случая двух протонов

$$Z_1 = Z_2 = 1, \quad m_r = m/2, \quad \theta/2 = \theta_{\text{лаб}},$$

$\theta_{\text{лаб}}$ — угол рассеяния в лабораторной системе.

Формула Резерфорда (4.1) хорошо согласуется с экспериментальными результатами по рассеянию α -частиц на ядрах при низких энергиях, где эффекты, связанные с ядерным потенциалом, малы. Однако даже при низких энергиях классическая формула (4.1) не дает правильного результата для рассеяния протонов на протонах. Основная причина расхождения состоит в пренебрежении симметризацией при классическом описании. Квантовомеханическое описание рассеяния в кулоновском поле было дано Моттом (см. детальное изложение в

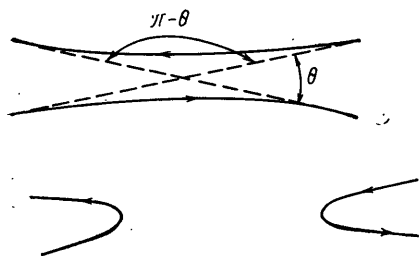


Рис. 14. Два кажущихся различными столкновения, которые экспериментально неразличимы

книге Мотта и Месси [87]), и правильная формула для тождественных частиц с единичными зарядами имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{(mv^2)^2} \left(\frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} - \frac{\cos [(e^2/\hbar v) \ln \operatorname{tg}^2 \theta/2]}{\sin^2 \theta/2 \cos^2 \theta/2} \right). \quad (4.2)$$

Заметим, что энергия в лабораторной системе равна $E_0 = mv^2$. С учетом только первого члена в скобках эта формула совпадает с (4.1), а два других члена обусловлены тем, что тождественность частиц налагает требование симметрии на волновую функцию. Заметим, что сечение рассеяния согласно формуле (4.2) одно и то же для углов θ и $\pi - \theta$. Эта симметрия является отражением неразличимости двух процессов рассеяния, изображенных на рис. 14.

Теперь мы приведем схему вывода формулы (4.2) и укажем, как включить в рассмотрение ядерное рассеяние.

В чисто кулоновском поле точечных зарядов требуемое асимптотическое решение уравнения Шредингера для рассеяния двух нетождественных частиц одинаковой массы m с относительной скоростью v имеет в системе центра масс вид:

$$\psi_C(r) \sim \exp[ikz + i\eta \ln k(r-z)] + \frac{f_C(\theta)}{r} \exp[ikr - i\eta \ln(2kr) + i\pi], \quad (4.3)$$

где η и k (которыми мы будем пользоваться и в следующем параграфе) определены согласно

$$\eta = e^2/\hbar v, \quad k = mv/2\hbar. \quad (4.3a)$$

Здесь амплитуда кулоновского рассеяния $f_C(\theta)$ имеет вид

$$f_C(\theta) = -\frac{e^2}{mv^2 \sin^2 \theta/2} \exp[-i\eta \ln \sin^2 \theta/2 + 2i\sigma_0], \quad (4.4)$$

где

$$\sigma_0 = \arg \Gamma(1 + i\eta). \quad (4.4a)$$

В правой части формулы (4.3) первый член в скобках представляет собой падающую волну. Заметим, что даже на больших расстояниях этот член не сводится к плоской волне, а содержит в экспоненте искажение вида $\ln k(r-z)$, обусловленное действующим кулоновским потенциалом. Второй член представляет собой сферическую рассеянную волну. Если бы на ψ не налагалось условие симметрии, дифференциальное сечение рассеяния было бы равно

$$\frac{d\sigma_C}{d\Omega} = |f_C(\theta)|^2. \quad (4.4b)$$

Отсюда можно получить формулу Резерфорда (4.1), которая справедлива для кулоновского рассеяния нетождественных частиц.

Тожественность сталкивающихся частиц приводит к неразличимости двух процессов рассеяния, изображенных на рис. 14. При классическом описании для получения сечения процесса, в котором любая из двух частиц движется после рассеяния под углом θ относительно направления падающего пучка, следует просто сложить сечения этих двух процессов. Таким образом, классическое сечение равно

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{кл}} = |f_C(\theta)|^2 + |f_C(\pi - \theta)|^2. \quad (4.4b)$$

Эта формула соответствует двум первым членам в (4.2), однако она не содержит третьего члена.

При квантовомеханическом описании следует внести изменения в формулу (4.3) прежде, чем применять ее к рассеянию тож-

дественных частиц. Пространственная часть волновой функции должна быть симметричной относительно перестановки $(z \rightarrow -z, \theta \rightarrow \pi - \theta)$ частиц для двух протонов в синглетном спиновом состоянии и антисимметричной для протонов в триплетном спиновом состоянии. Таким образом, формулу (4.3) следует заменить выражением

$$\psi_C(r) \sim \{ \exp [ikz + i\eta \ln k(r-z)] \pm \exp [-ikz + i\eta \ln k(r+z)] \} + [f_C(\theta) \pm f_C(\pi - \theta)] \frac{\exp [ikr - i\eta \ln 2kr + i\pi]}{r}, \quad (4.5)$$

где знак плюс отвечает протонам в синглетном спиновом состоянии, а минус — протонам в триплетном состоянии. Квантовомеханическое дифференциальное сечение рассеяния равно

$$d\sigma/d\Omega = |f_C(\theta) \pm f_C(\pi - \theta)|^2. \quad (4.5a)$$

В случае экспериментов с неполяризованными пучками протонов сечение (4.5a) следует усреднить по статистически ориентированным спинам. Статистический вес синглетного состояния равен $1/4$, а триплетного $3/4$. Следовательно, наблюдаемое сечение равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{синг}} + \frac{3}{4} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{трипл}} = (|f_C(\theta)|^2 + |f_C(\pi - \theta)|^2) - \frac{1}{2} [f^*(\theta) f(\pi - \theta) + f(\theta) f^*(\pi - \theta)], \quad (4.6)$$

что совпадает с формулой Мотта (4.2). Мы видим, что последний член в формуле (4.2) возникает из последнего члена в скобках в правой части формулы (4.6).

Теперь мы рассмотрим эффекты, обусловленные ядерным взаимодействием в области низких энергий, где достаточно учитывать ядерное рассеяние только в S -волне. Разложим несимметризованную кулоновскую волновую функцию (4.3) в ряд по полиномам Лежандра

$$\psi_C(r) = \frac{1}{r} \sum_l F_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (4.7)$$

и разложим также полную волновую функцию, которая содержит эффекты ядерного взаимодействия

$$\psi(r) = \frac{1}{r} \sum_l u_l(r) P_l(\cos \theta). \quad (4.7a)$$

Такие разложения можно проводить, поскольку оба потенциала — кулоновский и ядерный — центрально-симметричны. Обе функции F_l и u_l находятся интегрированием уравнения Шредингера. Асимптотически при больших r имеем

$$u_l(kr) \rightarrow F_l(kr + \delta_l), \quad (4.8)$$

где δ_l — зависящий от l сдвиг фазы.

Ограничимся пока рассеянием при низких энергиях (например, $E < 5$ МэВ). В этом случае существенна только фаза δ_0 и полную волновую функцию можно записать в виде

$$\psi(r) = \psi_c(r) + \frac{1}{r} [u_0(r) + F_0(r)], \quad (4.9)$$

где комплексные коэффициенты u_0 и F_0 выбраны соответствующим образом, т.е. так, что асимптотически $\psi(r)$ представляет собой плоскую волну, несколько искаженную за счет кулоновского поля [см. первый член в правой части в формуле (4.3)] и расходящуюся. Отсюда находим

$$\psi(r) = \exp[ikr + i\eta \ln k(r-z)] + \frac{f(\theta)}{r} \exp[ikr - i\eta \ln 2kr + i\pi], \quad (4.9a)$$

где

$$f(\theta) = -\frac{e^2}{mv^2} \left\{ \frac{\exp[-i\eta \ln \sin^2 \theta/2 + 2i\sigma_0]}{\sin^2 \theta/2} + \right. \\ \left. + i \frac{\exp[-i\eta \ln \cos^2 \theta/2 + 2i\sigma_0]}{\cos^2 \theta/2} \right\}. \quad (4.10)$$

Дифференциальное сечение $d\sigma/d\Omega$, получаемое из этой амплитуды как $|f(\theta)|^2$, отвечает рассеянию нетождественных частиц. Для тождественных частиц следует, как и прежде, использовать $f(\theta) \pm f(\pi - \theta)$ для синглетных и триплетных спиновых состояний соответственно. Для синглетных спиновых состояний получаем

$$f_s(\theta) = -\frac{e^2}{mv^2} \left\{ \frac{\exp[-i\eta \ln \sin^2 \theta/2 + 2i\sigma_0]}{\sin^2 \theta/2} + \right. \\ \left. + \frac{\exp[-i\eta \ln \cos^2 \theta/2 + 2i\sigma_0]}{\cos^2 \theta/2} \right\} + \frac{i}{2k} \exp(2i\sigma_0) (\exp 2i\sigma_0 - 1). \quad (4.11)$$

Для триплетных по спину состояний амплитуда является чисто кулоновской

$$f_a(\theta) = -\frac{e^2}{mv^2} \left\{ \frac{\exp[-i\eta \ln \sin^2 \theta/2 + 2i\sigma_0]}{\sin^2 \theta/2} - \right. \\ \left. - \frac{\exp[-i\eta \ln \cos^2 \theta/2 + 2i\sigma_0]}{\cos^2 \theta/2} \right\}.$$

Как и прежде, дифференциальное сечение рассеяния равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{4} |f_a(\theta)|^2 + \frac{1}{4} |f_s(\theta)|^2, \quad (4.11a)$$

что дает следующий окончательный результат для сечения:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mv^2} \right)^2 \left\{ \left[\frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} - \frac{\cos(\eta \ln \lg^2 \theta/2)}{\sin^2 \theta/2 \cos^2 \theta/2} \right] - \right.$$

$$-\frac{2}{\eta} \sin \delta_0 \left[\frac{\cos(\delta_0 + \eta \ln \sin^2 \theta/2)}{\sin^2 \theta/2} + \frac{\cos(\delta_0 + \eta \ln \cos^2 \theta/2)}{\cos^2 \theta/2} \right] + \frac{4}{\eta^2} \sin^2 \delta_0 \}. \quad (4.12)$$

§ 4.3. ТЕОРИЯ ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА ДЛЯ ПРОТОН-ПРОТОННОГО РАССЕЯНИЯ

В случае протон-протонного рассеяния выкладки аналогичны проведенным в § 2.3 с той разницей, что в присутствии кулоновского поля уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{e^2}{r} \right] u = 0, \quad (4.13)$$

где $V(r)$ — теперь чисто ядерный потенциал. Аналогом введенных в § 2.3 свободных функций будут в данном случае функции F , определяемые тем же уравнением (4.13), но без потенциала $V(r)$.

Рассмотрим сначала регулярную и нерегулярную кулоновские функции F и G , которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} \left[E - \frac{e^2}{r} \right] F = 0; \quad \frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} \left[E - \frac{e^2}{r} \right] G = 0. \quad (4.14)$$

При больших kr (где $k^2 = mE/\hbar^2$) асимптотическое поведение этих функций (как показали Йост, Уилер и Брейт [130])

$$F(r) \sim \sin(kr - \eta \ln 2kr + \sigma_0); \quad G(r) \sim \cos(kr - \eta \ln 2kr + \sigma_0). \quad (4.14a)$$

Здесь, как и в (4.3a),

$$\eta = e^2/\hbar v, \quad (\eta \approx \sqrt{25,0/E}), \quad (4.14b)$$

где v — асимптотическая скорость, а E измеряется в килоэлектронвольтах;

$$\sigma_0 = \arg \Gamma(1 + i\eta); \quad (4.14b)$$

Γ — гамма-функция. Для асимптотического поведения (4.14a) нормировка G такова, что при малых r имеем

$$G_1 \sim C_0^{-1} \left[1 + \frac{r}{R} \left(\ln \frac{r}{R} - \ln \eta + \operatorname{Re} \Psi(i\eta) + 2C - 1 \right) + o(r^2) \right],$$

где

$$C_0 = 2\pi\eta [\exp 2\pi\eta - 1]^{-1}, \quad (4.14r)$$

$C = 0,577$ — постоянная Эйлера, Ψ — логарифмическая производная Γ -функции,

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right) - C. \quad (4.14d)$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re} \Psi(i\eta) + C = \eta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + \eta^2)}. \quad (4.14e)$$

R — боровский радиус протона

$$R = \hbar^2/me^2. \quad (4.14ж)$$

Значительная часть усложнений, вносимых кулоновским взаимодействием, несущественна для нашего рассмотрения. Однако, поскольку в G присутствует множитель C_0^{-1} ; вспомогательные функции φ , которые должны быть нормированы на единицу в начале координат, необходимо определить следующим образом:

$$\varphi = C_0(G + F \operatorname{ctg} \delta), \quad (4.15)$$

т. е. на больших расстояниях вместо (2.13) мы будем иметь

$$\varphi \sim \frac{C_0 \sin(kr - \eta \ln 2kr + \sigma_0 + \delta)}{\sin \delta}. \quad (4.15a)$$

Последняя формула определяет также нормировку функций u , так как их асимптотика на больших расстояниях должна совпадать с поведением функций φ .

Регулярное решение $F(r)$, которое на больших расстояниях ведет себя согласно (4.14a), при малых r может быть представлено в виде следующего ряда:

$$F = C_0(\eta) kr (1 + r/(2R) + \dots). \quad (4.15б)$$

Таким образом, видно, что величина $C_0(\eta)$ имеет простой физический смысл «фактора кулоновского отталкивания»

$$C_0^2 = \left[\frac{2\pi\eta}{\exp 2\pi\eta - 1} \right]^2 \quad (4.16)$$

и характеризует отношение вероятности найти вместе две заряженные частицы к той же вероятности для двух нейтральных частиц. Близость величины C_0^2 к единице означает, что кулоновское поле неспособно удерживать частицы в отдалении друг от друга.

На малых расстояниях имеем

$$\begin{aligned} \varphi &= C_0(G + F \operatorname{ctg} \delta) = 1 + \frac{r}{R} \left[\ln \frac{r}{R} + h(\eta) + 2C - 1 \right] + C_0^2 kr \operatorname{ctg} \delta = \\ &= 1 + \frac{r}{R} \left[\ln \frac{r}{R} + h(\eta) + 2C - 1 + \frac{\pi \operatorname{ctg} \delta}{\exp 2\pi\eta - 1} \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

где

$$h(\eta) = \operatorname{Re} \Psi(i\eta) - \ln \eta. \quad (4.17a)$$

Заметим для дальнейшего, что при $\eta \rightarrow \infty$ (и $E \rightarrow 0$)

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} [h(\eta)] = \frac{1}{12\eta^2} + o(\eta^{-4}). \quad (4.17б)$$

Ясно, что φ' логарифмически расходится при $r=0$, поэтому использование $\varphi'(0)$ в уравнении, аналогичном (2.14), невозможно. Вместо этого мы будем использовать

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) \varphi_2'(r) - \varphi_2(r) \varphi_1'(r) + [u_2(r) u_1'(r) - u_1(r) u_2'(r)] &= \\ = (k_2^2 - k_1^2) \int_r^\infty (\varphi_1 \varphi_2 - u_1 u_2) dr, & \end{aligned} \quad (4.18)$$

где r мало, но отлично от нуля. В правой части член, содержащий u и u' , обращается в нуль при $r \rightarrow 0$, поскольку в этом пределе $u \rightarrow 0$. Функции φ нормированы на единицу в начале координат, поэтому выражение в левой части равно

$$\begin{aligned} \varphi_2' - \varphi_1' &= \frac{1}{R} \left[h(\eta_2) - h(\eta_1) + \frac{\pi \operatorname{ctg} \delta_2}{\exp 2\pi\eta_2 - 1} - \frac{\pi \operatorname{ctg} \delta_1}{\exp 2\pi\eta_1 - 1} \right] = \\ &= \frac{k_2^2 - k_1^2}{2} \rho(E_1, E_2), & \end{aligned} \quad (4.19)$$

где мы по определению положим интеграл в правой части формулы (4.18) равным $\rho(E_1, E_2)/2$. Заметим, что на нижнем пределе интегрирования можно положить $r \rightarrow 0$, так как в разности $\varphi_2' - \varphi_1'$ расходящиеся логарифмически члены сокращаются.

Действуя, как и прежде, мы положим $E_1=0$ и будем опускать индекс 2. Получаем

$$\frac{C_0^2(\eta) \operatorname{ctg} \delta}{\eta} + h(\eta) = \left[\frac{C_0^2(\eta) \operatorname{ctg} \delta}{\eta} + h(\eta) \right] \Big|_{E=0} + \frac{Rk^2 r_0}{2}, \quad (4.20)$$

где $\rho(0, E) \approx r_0$ в пренебрежении членами, зависящими от формы потенциала. Здесь

$$r_0/2 = \int_0^\infty (\varphi_0^2 - u_0^2) dr. \quad (4.20a)$$

Теперь ясно, что как функция η левая часть соотношения (4.20) обладает хорошим поведением для отличных от нуля η и разумных ядерных потенциалов. Поэтому можно также надеяться на хорошее поведение функции $\rho(0, E)$. Следовательно, функция

$$f(E) = \frac{C_0^2(\eta) \operatorname{ctg} \delta}{\eta} + h(\eta) \quad (4.21)$$

должна иметь предел при $E \rightarrow 0$, несмотря на то, что $\eta \rightarrow \infty$. Действительно, как показали Тромборг и Гамильтон [115], для типичных ядерных потенциалов (таких, которые можно представить в виде суперпозиции потенциалов Юкавы) f является регулярной функцией E в полуплоскости $\operatorname{Re} E > 0$ и имеет разрез вдоль отрицательной полуоси $\operatorname{Re} E$, причем расстояние от начала разреза до начала координат обратно пропорционально радиусу ядерных сил. Поэтому функция $f(E)$ разложима в ряд Тейлора в окрестности

точки $E=0$. Предел $f(E)$ при $E \rightarrow 0$ определим как $-2R/a_p$, т. е.

$$f(E=0) = \left[\frac{C_0^2(\eta) \operatorname{ctg} \delta}{\eta} + h(\eta) \right] \Big|_{E=0} = -\frac{R}{a_p}. \quad (4.22)$$

Таким образом, получаем

$$\frac{C^2(\eta) \operatorname{ctg} \delta}{2\eta R} + \frac{h(\eta)}{R} \approx -\frac{1}{a_p} + \frac{k^2 r_0}{2} - Pk^4 r_0^3 + Qk^6 r_0^5 + \dots, \quad (4.23)$$

где a_p и r_0 — длина рассеяния и эффективный радиус для системы протон — протон соответственно.

Связь между введенной величиной \hat{a}_p и длиной рассеяния в отсутствие кулоновского взаимодействия нельзя назвать совсем тривиальной. Если мы «выключим» кулоновское взаимодействие, перейдя к пределу $\eta \rightarrow 0$, первый член в левой части соотношения (4.23) перейдет в $k \operatorname{ctg} \delta$ (мы учитываем, что $2\eta R = k^{-1}$; множитель 2 возникает за счет того, что в соотношение между k и v входит приведенная масса). Может показаться, что мы находимся на пути к соотношению типа (2.16). Однако величина $h(\eta)$ не обращается в нуль при $\eta \rightarrow 0$, а ведет себя как $\ln(\eta^{-1})$. То обстоятельство, что при «выключении» кулоновского взаимодействия разложение (4.23) для системы протон — протон не сводится к соответствующему разложению для системы протон — нейтрон, обусловлено бесконечным радиусом кулоновского взаимодействия; при этом даже на очень больших расстояниях волновая функция не может быть представлена в виде суммы плоской и сферически-симметричной волн. Действительно, формула (4.3) показывает, что величины $\eta \ln 2kr$ и σ_0 фигурируют в асимптотике волновой функции.

Тем не менее для системы протон — протон коэффициенты r_0 , P и т. д. весьма близки к соответствующим коэффициентам в (2.19) при условии, что ядерный потенциал в обоих случаях один и тот же. Длина рассеяния a существенно изменяется при «выключении» кулоновского поля, однако это изменение можно с хорошей точностью оценить, не пользуясь никакой специальной моделью ядерных сил.

Впервые амплитуда $f(E)$ была рассмотрена и вычислена Брейтом, Кондоном и Презентом [16], построившими первую теорию протон-протонного рассеяния. Эти авторы уже в 1936 г. указали на то, что f не должна зависеть от энергии в пределе нулевого радиуса ядерных сил, и получили зависимость фазы δ от энергии в этом предельном случае. Интерес к данной проблеме вновь возрос после появления работы Л. Д. Ландау и Я. А. Смородинского [71]. Ниже мы кратко воспроизводим содержащиеся в этой работе выкладки, так как они полезны для получения связи между протон-протонной длиной рассеяния a_p и синглетной по спину нейтрон-протоной длиной рассеяния a_n .

Обозначим $g(r_0)$ логарифмическую производную ядерной волновой функции при $r=r_0$, где r_0 — радиус действия ядерных сил (при $r > r_0$ потенциал равен нулю). Тогда имеем

$$g(r_0) = \frac{r}{u(r)} \frac{du}{dr} \Big|_{r_0} = \frac{r}{\varphi(r)} \frac{d\varphi(r)}{dr} \Big|_{r_0}, \quad (4.24)$$

где φ — волновая функция во внешней области [см. формулу (4.15)]. Для вычисления последнего звена в цепочке равенств (4.24) воспользуемся соотношением (4.17). Пренебрежем членами порядка $(kr_0)^2$ и $(r_0/R)^2$, так как боровский радиус протона

$$R = \hbar^2/me^2 \approx 28,8 \text{ Ферми}$$

много больше радиуса ядерных сил. Мы рассматриваем область низких энергий, поэтому $kr_0 \ll 1$. Получаем

$$g(r_0) \approx (kr_0) C_0^2 \text{ctg } \delta + \frac{r_0}{R} \left(\ln \frac{r_0}{R} + h(\eta) + 2C \right). \quad (4.24a)$$

Если теперь положить логарифмическую производную $g(r_0)$ равной ее значению при $E=0$, то

$$kC_0^2 \text{ctg } \delta + \frac{1}{R} \left(\ln \frac{r_0}{R} + h(\eta) + 2C \right) \approx \frac{g(E=0)}{r_0}. \quad (4.24b)$$

Если длина протон-протонного рассеяния определена согласно

$$\frac{1}{a_p} = - \frac{g(E=0)}{r_0} + \frac{1}{R} \left(\ln \frac{r_0}{R} + 2C \right), \quad (4.25)$$

то мы приходим к равенству

$$\frac{C_0^2 \text{ctg } \delta}{2\eta} + h(\eta) = - \frac{R}{a_p}, \quad (4.25a)$$

где, как и прежде, $2\eta R = k^{-1}$. Мы видим, что определение (4.25) длины рассеяния a_p эквивалентно данному ранее определению (4.22).

Формула для нейтрон-протонного рассеяния, с которой следует сравнивать выражение (4.23), имеет вид

$$\frac{g_n}{r_0} = k \text{ctg } \delta = - \frac{1}{a_n} + \frac{r_n k^2}{2} + \dots \quad (4.25b)$$

Соответственно длина нейтрон-протонного рассеяния определена как

$$a_n^{-1} = g_n(E=0), \quad (4.25b)$$

где $g_n(E=0)$ является логарифмической производной в точке $r=r_0$ волновой функции нейтрон-протонной системы при нулевой энергии. Не претендуя на точность, можно считать, что кулоновское взаимодействие мало влияет на волновую функцию на малых расстояниях, так что в формуле (4.25) можно заменить $g_n(E=0)$ на $g(E=0)$ для получения приближенного соотношения между двумя длинами рассеяния. Однако в формуле (4.25) член, содержащий R^{-1} , является членом первого порядка по кулоновскому взаимодействию, и соответствующее изменение должно быть внесено в логарифмическую производную.

Чтобы оценить это изменение логарифмической производной, рассмотрим функцию $u^{(0)}$, удовлетворяющую волновому уравнению

$$\frac{d^2 u^{(0)}}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} [E - V(r)] u^{(0)} = 0, \quad (4.26)$$

и функцию u , учитывающую кулоновский потенциал V_C

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} [E - V(r) - V_C(r)] u = 0. \quad (4.26a)$$

Умножая первое из этих уравнений слева на u , второе на $u^{(0)}$ и вычитая результаты друг из друга, получаем

$$u \frac{d^2 u^{(0)}}{dr^2} - u^{(0)} \frac{d^2 u}{dr^2} = - \frac{m}{\hbar^2} uu^{(0)} V_C(r). \quad (4.26b)$$

Последнее равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dr} \Big|_{r_0} - \frac{1}{u^{(0)}} \frac{du^{(0)}}{dr} \Big|_{r_0} = \frac{1}{uu^{(0)}} \frac{m}{\hbar^2} \int_0^{r_0} uu^{(0)} V_C(r) dr. \quad (4.26b)$$

Заметим, что $u^{-1}(du/dr)$ есть как раз входящая в (4.25) величина g/r_0 . Чтобы получить справедливую в первом порядке оценку изменения логарифмической производной, заменим u на $u^{(0)}$ в правой части последнего равенства. Заметим, также, что $u^{-1}(du/dr)$ есть искомая величина f/r_0 .

Для дальнейших вычислений необходимо знать $u^{(0)}$, волновую функцию системы нейтрон — протон в области действия ядерных сил. В качестве грубого приближения можно взять функцию $u^{(0)} \approx \sin(\pi r/2r_0)$, которая отвечает прямоугольной яме радиуса r_0 и такой глубины, что в ней имеется резонанс при нулевой энергии. Воспользовавшись этой функцией, находим*

$$\frac{g(r_0)}{r_0} = \frac{g^{(0)}(r_0)}{r_0} + \frac{1}{2R} [\ln \pi + C - \text{Ci}(\pi)], \quad (4.27)$$

где C — постоянная Эйлера, а $\text{Ci}(x)$ — интегральный косинус. Вычисление дает

$$g(r_0)/r_0 = g^{(0)}(r_0)/r_0 + 0,824/R. \quad (4.28)$$

Таким образом, длина протон-протонного рассеяния a_p , определяемая формулой (4.25), равна

* При выводе используются соотношения

$$\int_0^{r_0} \frac{\sin^2(\pi r/2r_0) dr}{r} = \int_0^{r_0} \frac{1 - \cos(\pi r/r_0) dr}{2r} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos t}{t} dt = \\ = \frac{1}{2} [C + \ln \pi - \text{Ci}(\pi)] = 0,824.$$

$$\frac{1}{a_p} \approx \frac{1}{a_n} + \frac{1}{R} \left(\ln \frac{r_0}{R} + 2C - 0,824 \right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{a_n} + \frac{1}{R} \left(\ln \frac{r_0}{R} + 0,330 \right), \quad (4.29)$$

где a_n — длина нейтрон-протонного рассеяния в том же самом ядерном потенциале, а r_0 — радиус действия ядерного потенциала. Заметим, что этот радиус входит в формулу (4.29) под знаком логарифма.

Оценки показывают, что формула (4.29) с точностью до нескольких процентов справедлива для потенциалов, которые хорошо описывают данные по протон-протонному рассеянию.

Поскольку как a_p , так и a_n велики по сравнению с радиусом действия ядерных сил (это означает, что силы создают резонанс при близкой нулю энергии), большие изменения a_p и a_n отвечают лишь малым вариациям ядерных сил. Поэтому справедливое с точностью до нескольких процентов приближение для a_p и a_n обычно вполне пригодно для описания ядерных сил.

Современные значения низкоэнергетических параметров протон-протонного рассеяния таковы

$$\left. \begin{aligned} a_p &= -(7,822 \pm 0,004) \text{ Ферми}; & r_{0p} &= (2,830 \pm 0,017) \text{ Ферми}; \\ P &= 0,051 \pm 0,014; & Q &= 0,028 \pm 0,013. \end{aligned} \right\} (4.30)$$

Тщательные вычисления Шера, Сигнелла и Хеллера [107], более аккуратные, чем те, которые привели к формуле (4.29), показывают, что нейтрон-нейтронная длина рассеяния для того же самого ядерного взаимодействия, которое дает значение (4.30) для a_p , равна

$$a_{nn} = -17,06 \text{ Ферми.}$$

Нейтрон-нейтронная длина рассеяния, извлеченная из анализа системы трех нуклонов [109], с погрешностью порядка 1 Ферми совпадает с приведенным значением.

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

§ 5.1. ВВЕДЕНИЕ

Для многих расчетов, связанных с NN -взаимодействием, удобно рассматривать эквивалентное уравнению Шредингера интегральное уравнение в импульсном пространстве. В данном разделе дан беглый вывод уравнения Липпмана — Швингера и уравнения Лоу. Дана также сводка некоторых свойств T -матрицы, которые, на наш взгляд, наиболее интересны с точки зрения дальнейших приложений.

Начнем с рассмотрения уравнения Шредингера для задачи рассеяния на потенциале V , убывающем с увеличением расстояния r быстрее, чем $1/r$:

$$(H_0 + V)\psi_k = E\psi_k, \quad (5.1)$$

где H_0 — оператор кинетической энергии; $E = k^2$, ψ_k — собственная функция задачи рассеяния, для которой пока не сформулированы граничные условия. Разобьем ψ_k на два ортогональных слагаемых:

$$\psi_k = \varphi_k + \chi_k, \quad (5.2)$$

где φ_k — решение следующего уравнения Шредингера с энергией E

$$H_0\varphi_k = E\varphi_k. \quad (5.3)$$

Примем в качестве условия нормировки равенство

$$\langle \psi_k | \psi_k \rangle = \langle \varphi_k | \varphi_k \rangle. \quad (5.4)$$

Подставив (5.2) в (5.1) и используя (5.3), можно переписать уравнение Шредингера в форме

$$(E - H_0)\chi_k = V\psi_k. \quad (5.5)$$

Формальное решение этого уравнения приводит к уравнению Липпмана — Швингера для волновой функции

$$\psi_k^\pm = \varphi_k + [1/(E - H_0 \pm i\varepsilon)]V\psi_k^\pm, \quad (5.6)$$

в котором добавка $\pm\varepsilon$ подобно разделению на два слагаемых в (5.2) обеспечивает требование, чтобы $(E - H_0)$ не обращалось в нуль при действительных положительных E и чтобы, таким образом, существовал обратный оператор. Конкретный способ обхода

нуля в величине $(E - H_0)$ отражается в граничных условиях, которым должна удовлетворять соответствующая собственная функция ψ_k^\pm . В частности, выбор $+i\epsilon$ ($\epsilon > 0$) приводит к расходящейся рассеянной волне, тогда как с $-i\epsilon$ связано появление сходящейся рассеянной волны. Ясно, что уравнение (5.6) становится интегральным, если использовать спектральное представление для функции Грина $1/(E - H_0 \pm i\epsilon)$.

Полезно ввести новый оператор $T^\pm(E)$ такой, что справедливо равенство

$$T^\pm(E) \varphi_k = V \psi_k^\pm \quad (5.7)$$

для $E = k^2$. Используя это определение, а также спектральное представление для функции Грина

$$1/(E - H_0 \pm i\epsilon) = (1/2\pi)^3 \int d^3q |q\rangle \langle q| / (E - q^2 \pm i\epsilon) \quad (5.8)$$

с нормировкой для плоских волн

$$\langle q | q \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \quad (5.9)$$

можно переписать (5.6) как уравнение для T -матрицы

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | T^\pm(E) | \mathbf{k} \rangle &= \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle = \\ &+ (1/2\pi)^3 \int d^3q \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q} | T^\pm(E) | \mathbf{k} \rangle / (E - q^2 \pm i\epsilon). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Для многих приложений удобно работать в канале для отдельной парциальной волны. В этом случае, выполняя интегрирование по углам в (5.10), можно прийти к уравнению

$$\langle \mathbf{k}' | T_l^\pm(E) | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}' | V_l | \mathbf{k} \rangle + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty q^2 dq \frac{\langle \mathbf{k}' | V_l | \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q} | T_l^\pm(E) | \mathbf{k} \rangle}{E - q^2 \pm i\epsilon}. \quad (5.11)$$

Состояния $|\mathbf{k}\rangle$ в уравнении (5.11) представляют собой ненормированные сферические функции Бесселя $j_l(kr)$, которые удовлетворяют соотношению

$$\langle k | k' \rangle = \frac{\pi}{2} \frac{1}{k^2} \delta(k - k'). \quad (5.12)$$

Для определенности посмотрим, как дело обстоит в случае локального потенциала. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle &= \int \exp(-i\mathbf{k}'\mathbf{r}) V(r) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3r = \\ &= \int \sum_{l'} i^{-l'} (2l' + 1) P_{l'}(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{r}}) j_{l'}(k'r) V(r) \times \\ &\times \sum_l i^l (2l + 1) P_l(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{r}}) j_l(kr) d^3r, \end{aligned} \quad (5.12a)$$

где выражение записано во всех подробностях. Используя теорему сложения для сферических гармоник

$$P_{l'}(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{r}}) = \left[\frac{4\pi}{2l'+1} \right] \sum_m Y_{l'm}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l'm}(\hat{\mathbf{k}}'), \quad (5.12b)$$

вычисляем интеграл по углам, что дает

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle &= \sum_l 4\pi (2l+1) P_l(\widehat{\mathbf{k}'\mathbf{k}}) \int j_l(k'r) V(r) j_l(kr) r^2 dr = \\ &= 4\pi \sum_l (2l+1) P_l(\widehat{\mathbf{k}'\mathbf{k}}) \langle \mathbf{k}' | V_l | \mathbf{k} \rangle. \end{aligned} \quad (5.12\text{в})$$

Рассмотрим конкретный случай потенциала Юкавы

$$V = (V_0/r) \exp(-\mu r), \quad (5.12\text{г})$$

который будет использован в § 5.5. Легко найти для этого потенциала

$$\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle = 4\pi V_0 / [(k' - k)^2 + \mu^2]. \quad (5.12\text{д})$$

Разложение (5.12в) осуществляется просто. Найдем для примера: наинизший член в этом разложении. Так как $P_0(\widehat{\mathbf{k}'\mathbf{k}}) = 1$, имеем

$$\langle \mathbf{k}' | V_{l=0} | \mathbf{k} \rangle = \frac{4\pi V_0}{4\pi} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{k'^2 - 2k'kz + k^2 + \mu^2} dz = \quad (5.12\text{е})$$

$$\begin{aligned} &= (V_0/4k'k) \ln \{ [(k' + k)^2 + \mu^2] / [(k' - k)^2 + \mu^2] \} = \\ &= (V_0/2k'k) Q_0((k'^2 + k^2 + \mu^2)/2k'k). \end{aligned} \quad (5.12\text{ж})$$

Величина в правой части равенства Q_0 — функция Лежандра второго рода. Ниже [см. (5.75)] мы вернемся к общему случаю произвольных l . Заметим, однако, что аналитические свойства, которые будут там обсуждаться, нетрудно увидеть из выражения (5.12ж).

Определенная равенствами (5.10) или (5.11) T -матрица комплексна для действительных положительных E . Можно получить явную действительную форму для T -матрицы, взяв среднее от функций Грина, отвечающих сходящейся и расходящейся волнам. Использование такой функции Грина соответствует граничным условиям для стоячей волны, накладываемым на волновую функцию задачи рассеяния. Замечая, что «сходящуюся» и «расходящуюся» функции Грина можно записать в виде

$$1/(E - q^2 \pm i\epsilon) = P/(E - q^2) \mp i\pi\delta(E - q^2), \quad (5.13)$$

можно получить уравнение для парциальной T_l -матрицы

$$\langle \mathbf{k}' | T_l(E) | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}' | V_l | \mathbf{k} \rangle + \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty q^2 dq \frac{\langle \mathbf{k}' | V_l | q \rangle \langle q | T_l(E) | \mathbf{k} \rangle}{E - q^2}. \quad (5.14)$$

где символ P обозначает главное значение интеграла по Коши. T -матрица была определена только для случая $E = k^2$. Можно обобщить это определение, допустив, что E принимает любые возможные значения в равенствах (5.10), (5.11) и (5.14). Остается лишь выяснить, имеет ли определенная таким образом T -матрица «вне энергетической поверхности» какие-либо физические

ские приложения. Заметим, однако, что мы нигде не накладывали условия $k'^2 = k^2$.

Взятые целиком на энергетической поверхности, T -матрицы* в представлении парциальных волн из равенств (5.11) и (5.14) тесно связаны со сдвигами фаз. Для того чтобы получить эту связь, будем исходить из равенства (5.1) и эрмитовски сопряженного равенства (5.3). Умножим равенство (5.1) слева на $(r^2\varphi_k^*)$. Умножим эрмитовски сопряженное равенство (5.3) справа на $(r^2\psi_k)$ и возьмем разность двух получившихся уравнений. Проинтегрируем эту разность по радиусу от $r=0$ до $r=R$. Интегрируя по частям, найдем в результате этих действий

$$[-(r\varphi_k^*)(d/dr)(r\psi_k) + (r\psi_k)(d/dr)(r\varphi_k^*)]_{r=R} = -\int_0^R r^2 dr \varphi_k^* V \psi_k. \quad (5.15)$$

Если R выбрано достаточно большим, чтобы считать $V(r)=0$ при $r>R$, можно вычислить левую часть (5.15), заменив $(r\psi_k)$ и $(r\varphi_k^*)$ их асимптотическими выражениями и распространив верхний предел интегрирования в правой части (5.15) до ∞ . Для случая граничных условий в форме стоячих волн асимптотические выражения для $(r\varphi_k^*)$ и $(r\psi_k)$ в l -й парциальной волне имеют следующий вид:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [r\varphi_k^*] = \sin(kr + l\pi/2)/k, \quad (5.16)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [r\psi_k] = \sin(kr + l\pi/2 + \delta_l)/k \cos \delta_l, \quad (5.16a)$$

где фактор $\cos \delta_l$ в (5.16a) возникает из-за аналогичного равенству (5.4) условия нормировки, которое выражается равенством $\langle \psi_k | \varphi_k \rangle$ и $\langle \varphi_k | \varphi_k \rangle$. Используя равенства (5.16) и (5.16a), получаем, что левая часть равенства (5.15) не зависит от R , а правая часть дает T -матрицу целиком на массовой поверхности, удовлетворяющую равенству (5.14):

$$\langle k | T_l(E = k^2) | k \rangle = -(\operatorname{tg} \delta_l)/k. \quad (5.17)$$

Используя вместо (5.16) асимптотические выражения для условий излучения, отвечающих сходящимся и расходящимся волнам, находим

$$\langle k | T_l^\pm(E = k^2) | k \rangle = -[\exp(\pm i\delta_l)](\sin \delta_l)/k. \quad (5.18)$$

Хотя определение T -матрицы посредством интегральных уравнений типа Липпмана — Швингера является наиболее удобной формой для реальных расчетов, несколько отличное формальное решение уравнения Шредингера позволяет более непосредственно увидеть определенные важные свойства T -матрицы. Исходя опять из равенств (5.1) — (5.4), можно записать уравнение Шредингера в форме

$$(E - H) \chi_k = V \varphi_k, \quad (5.19)$$

* T -матрица целиком соответствует энергетической поверхности, если $k^2 = k'^2 = E$.

где полный гамильтониан $H = H_0 + V$. Формальное решение этого уравнения дает

$$\psi_k^\pm = \varphi_k + [1/(E - H \pm i\epsilon)] V \varphi_k, \quad (5.20)$$

где добавки $\pm i\epsilon$ и ψ_k^\pm определены, как и прежде. Равенство (5.20) приводит к альтернативным выражениям для T -матрицы, которую можно записать следующим образом:

$$T^\pm(E) = V + V[1/(E - H \pm i\epsilon)]V. \quad (5.21)$$

Складывая равенства для $T^+(E)$ и $T^-(E)$, получаем

$$\tilde{T}(E) = V + V[P/(E - H)]V. \quad (5.21a)$$

Прослеживая проектирование на базис парциальных волн, можно заметить, что $\tilde{T}_l(E)$ тождественно функции $T_l(E)$, определяемой уравнением (5.14) для $E < 0$. Обе эти функции различаются при $E > 0$, где можно показать [68], что имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} \langle p | T_l(k^2) | q \rangle &= \langle p | \tilde{T}_l(k^2) | q \rangle - \\ &- \frac{k \operatorname{tg} \delta_l(k)}{\cos^2 \delta_l(k)} \langle p | \tilde{T}_l(k^2) | k \rangle \langle k | \tilde{T}_l(k^2) | q \rangle. \end{aligned} \quad (5.21b)$$

Из равенства (5.21) можно видеть, что в случае, когда V эрмитово, $(T^+(E))^+$ равно $T^-(E)$ для действительных E . Из равенства (5.21a) следует, что $T(E)$ эрмитово для действительных E . Равенства (5.21) и (5.21a) можно записать в более явной форме, используя спектральное представление для полной функции Грина $1/(E - H \pm i\epsilon)$. Для того чтобы это сделать, необходимо иметь полный набор собственных функций оператора H . Сюда входят как волновые функции непрерывного спектра ψ_k^\pm с собственными значениями k^2 , так и, если они существуют, собственные функции для связанных состояний ψ_n с собственными значениями $E_n < 0$. Полную функцию Грина можно тогда записать в виде

$$\frac{1}{E - H \pm i\epsilon} = \sum_n \frac{|\psi_n\rangle \langle \psi_n|}{E - E_n} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{|\psi_q^\pm\rangle \langle \psi_q^\pm|}{E - q^2 \pm i\epsilon}, \quad (5.22)$$

где приняты следующие условия нормировки:

$$\langle \psi_n | \psi_{n'} \rangle = \delta_{nn'}, \quad \langle \psi_q | \psi_{q'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (5.22a)$$

Используя представление (5.22) для функции Грина, можно переписать равенство (5.21) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | T^\pm(E) | \mathbf{k}' \rangle &= \langle \mathbf{k} | V | \mathbf{k}' \rangle + \sum_n \langle \mathbf{k} | V | \psi_n \rangle \langle \psi_n | V | \mathbf{k}' \rangle / (E - E_n) + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \langle \mathbf{k} | V | \psi_q^\pm \rangle \langle \psi_q^\pm | V | \mathbf{k}' \rangle / (E - q^2 \pm i\epsilon). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Далее, используя определение T -матрицы с помощью равенства (5.7), получаем уравнение Лоу

$$\langle \mathbf{k} | T^{\pm}(E) | \mathbf{k}' \rangle = \langle \mathbf{k} | V | \mathbf{k}' \rangle + \sum_n \langle \mathbf{k} | V | \psi_n \rangle \langle \psi_n | V | \mathbf{k}' \rangle / (E - E_n) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \langle \mathbf{k} | T^+(q^2) | \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q} | T^-(q^2) | \mathbf{k}' \rangle (E - q^2 \pm i\epsilon). \quad (5.24)$$

Мы подчеркиваем, что (5.10) и (5.24) представляют альтернативные выражения для одной и той же величины.

Изучение равенства (5.24) обнаруживает несколько полезных свойств T -матрицы. Отметим, в первую очередь, что T -матрица как функция от E имеет простые полюса при энергиях связанных состояний для оператора H . Вычеты в этих полюсах являются сепарабельными (т. е. вычет $\langle \mathbf{k} | T(E_n) | \mathbf{k}' \rangle$ может быть записан как произведение функции от \mathbf{k} на функцию от \mathbf{k}') и выражаются через соответствующие волновые функции связанных состояний. Эту связь можно сделать еще более непосредственной, заметив, что

$$\langle \mathbf{k} | V | \psi_n \rangle = (E_n - k^2) \langle \mathbf{k} | \psi_n \rangle. \quad (5.24a)$$

Для значений E в окрестности E_n доминирующую роль в T -матрице должно играть отдельное полюсное слагаемое. Этот факт будет использован при выводе простых приближений для T -матрицы. Коль скоро T -матрица, взятая целиком на массовой поверхности (т. е. в форме $\langle i\kappa_n | T(E_n) | i\kappa_n \rangle$ при $E_n = -\kappa_n^2$), имеет такой полюс, то из (5.24a) следует, что величина $\langle k | \psi_n \rangle$ также должна иметь полюс при $k = i\kappa_n$. Волновая функция для связанного состояния удовлетворяет однородному уравнению Липпмана—Швингера в форме равенства (5.6). Присутствие в этом уравнении функции Грина для свободной частицы гарантирует появление такого полюса в $\langle k | \psi_n \rangle$. В случае слабо связанного состояния с $l=0$ можно использовать приближенную форму волновой функции [равенство (3.17)]. В результате получаем

$$\langle k | \psi_n \rangle \sim [2\kappa_B / (1 - \kappa_B r_0)]^{1/2} [1 / (k^2 + \kappa_B^2)], \quad (5.24б)$$

где члены, которыми мы пренебрегли при записи (5.24б), связаны с отклонением от асимптотической формы (3.17) на малых расстояниях, и все они регуляричны в точке $k = i\kappa_B^*$. Находим

$$(E_n - k^2) \langle k | \psi_n \rangle = - [2\kappa_B / (1 - \kappa_B r_0)]^{1/2} \quad \text{для } k = i\kappa_B. \quad (5.24в)$$

Конечные члены, отброшенные в (5.24б), не дают вклада в соотношение (5.24в) из-за нуля $(E_n - k^2)$. Таким образом, мы видим, что в случае слабо связанного состояния вычет в полюсе T -матрицы, целиком расположенной на массовой поверхности, просто связан с квадратом нормировочной константы, входящей в качестве коэф-

* При выводе (5.24б) предполагалось, что $\rho(\kappa_n^2, -\kappa_n^2)$, даваемое равенством (2.17), приближенно равно r_0 .

фициента в асимптотику волновой функции. С помощью равенства (2.21) этот вычет можно также выразить через длину рассеяния и эффективный радиус.

Исследуем теперь разность между $\langle k|T^+(E)|k'\rangle$ и эрмитово-сопряженной величиной $\langle k|(T^+(E))^+|k'\rangle$. Образую эту разность с помощью равенства (5.24) (для действительных V и ψ_n), найдем

$$\langle \mathbf{k}|T^+(E) - T^-(E)|\mathbf{k}'\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \langle \mathbf{k}|T^+(q^2)|\mathbf{q}\rangle \times \\ \times \left[\frac{1}{E + i\varepsilon - q^2} - \frac{1}{E - i\varepsilon - q^2} \right] \langle \mathbf{q}|T^-(q^2)|\mathbf{k}'\rangle. \quad (5.25)$$

С использованием (5.13) можно записать это равенство в форме

$$\langle \mathbf{k}|T^+(E) - T^-(E)|\mathbf{k}'\rangle = - \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3q \delta(E - q^2) \times \\ \times \langle \mathbf{k}|T^+(q^2)|\mathbf{q}\rangle \langle \mathbf{q}|T^-(q^2)|\mathbf{k}'\rangle. \quad (5.25a)$$

Интегрирование по q можно произвести, учитывая равенство

$$\delta(f(x)) = [\delta(x_0)] / |df/dx|_{x=x_0}, \quad (5.25b)$$

где $f(x_0) = 0$. Тогда равенство (5.25a) приобретает вид

$$\langle \mathbf{k}|T^+(E) - T^-(E)|\mathbf{k}'\rangle = \\ = - \frac{i}{8\pi^2} \sqrt{E} \int d\Omega_q \langle \mathbf{k}|T^+(E)|\mathbf{q}\rangle \langle \mathbf{q}|T^-(E)|\mathbf{k}'\rangle, \quad (5.26)$$

где $q^2 = E$. Это уравнение показывает, что функция $\langle \mathbf{k}|T^+(E)|\mathbf{k}'\rangle$ имеет разрез вдоль положительной действительной оси E , скачок на котором дается правой частью уравнения (5.26). В специальном случае, когда $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ и $E = k^2$, уравнение (5.26) сводится к знакомой оптической теореме, связывающей мнимую часть амплитуды рассеяния вперед с полным сечением при энергии E . Для парциальных амплитуд получается результат, аналогичный уравнению (5.26),

$$\langle k|T_l^+(E) - T_l^-(E)|k'\rangle = \\ = - 2i \sqrt{E} \langle k|T_l^+(E)|\sqrt{E}\rangle \langle \sqrt{E}|T_l^-(E)|k'\rangle, \quad (5.27)$$

который с очевидностью согласуется с равенством (5.18), когда амплитуда берется целиком на массовой поверхности.

Отметим, что, если потенциал V не зависит от энергии, уравнение Лоу можно привести к форме, в которую V явно не входит. Для этого можно записать равенство (5.24) для $\langle \mathbf{k}|T^\pm(E)|\mathbf{k}'\rangle$ и вычесть из него соответствующее уравнение для «полумассовой» * матрицы $\langle \mathbf{k}|T^\pm(k^2)|\mathbf{k}'\rangle$. Используя (5.24a), мы найдем в результате этих действий, что целиком «внемассовую» T -матрицу можно выразить в терминах матричных элементов полумассовой T -матрицы, а также собственных функций и собственных значений для связанных состояний. Такое соотношение зачастую удобно при обширных вычислениях немассовой T -матрицы.

* Термин «полумассовая» относится к случаю, когда $k^2 \neq k'^2$.

Для произвольных потенциалов $\langle k | V | k' \rangle$ решения уравнения Липпмана — Швингера необходимо искать численно. Это — нетрудная задача, и подходящие численные методы будут обсуждены ниже. Полезно для начала рассмотреть некоторые простые потенциалы, позволяющие получить решение уравнения Липпмана — Швингера в аналитической форме. Это в особенности интересно, когда такие простые потенциалы имеют определенный физический смысл. (Прежде, чем мы начнем этим заниматься, напомним читателю о хорошо известном соотношении дополненности между истиной и ясностью.) В данном параграфе мы рассмотрим специальный случай сепарабельных потенциалов.

Сначала запишем в импульсном пространстве матричный элемент T -матрицы для парциальной волны с орбитальным моментом l в общем случае нелокального потенциала $V(r, r')$:

$$\langle k | V_l | k' \rangle = \int r^2 dr \int r'^2 dr' j_l(kr) V(r, r') j_l(k'r'). \quad (5.28)$$

Потенциал $V(r, r')$ является сепарабельным, если он имеет форму

$$V(r, r') = \lambda v(r) v(r'), \quad (5.29)$$

или в импульсном представлении

$$\langle k | V_l | k' \rangle = \lambda v_l(k) v_l(k'), \quad (5.29a)$$

где использовано определение

$$v_l(k) = \int r^2 dr j_l(kr) v(r). \quad (5.29b)$$

Вблизи порога $v_l(k)$ должно быть пропорционально k^l вследствие известного поведения $j_l(kr)$. Мы можем использовать также известное поведение $j_l(kr)$ при больших k , из которого следует, что $v_l(k)$ должно убывать с ростом k быстрее, чем k^{-1} .

Потенциалы типа (5.29) или (5.29a) действительно позволяют получить решение уравнения Липпмана — Швингера в аналитической форме и приводят к T -матрицам, которые также оказываются сепарабельными. Напомним, что в окрестности полюса, отвечающего связанному состоянию, T -матрица имеет вид

$$\langle k | T(E) | k' \rangle \sim \langle k | V | \psi_B \rangle \langle \psi_B | V | k' \rangle / (E - E_B), \quad (5.30)$$

т. е. тоже сепарабельна. Таким образом, можно ожидать, что сепарабельная форма взаимодействия может оказаться полезной при получении простых аналитических аппроксимаций T -матриц вблизи полюсов для связанных состояний. Поскольку в случае NN -взаимодействия T -матрица имеет полюса вблизи $E=0$ в обоих каналах 1S_0 и 3S_1 , можно ожидать, что истинная T -матрица вблизи нулевой энергии приближенно сепарабельна в S -волнах. Для всех других парциальных волн нет ни связанных состояний, ни резонансов при низких энергиях, поэтому к соответствующим сепарабельным приближениям для NN -взаимодействия следует относиться с осторожностью.

При известных условиях даже знакомые локальные потенциалы могут оказаться приблизительно сепарабельными. Рассмотрим, в частности, удачно подобранный пример прямоугольной ямы с радиусом a и глубиной V_0 . Из соотношения

$$\frac{d}{dr} [r j_{l+1}(kr) j_{l+1}(k'r)] = \frac{r^2 k k'}{2l+3} [j_l(kr) j_l(k'r) - j_{l+2}(kr) j_{l+2}(k'r)] \quad (5.31)$$

можно сразу найти матричные элементы потенциала в импульсном пространстве

$$\begin{aligned} \langle k | V_l | k' \rangle &= V_0 \int_0^a j_{l+2}(kr) j_{l+2}(k'r) r^2 dr + \\ &+ V_0 \frac{2l+3}{k'k} a j_{l+1}(ka) j_{l+1}(k'a). \end{aligned} \quad (5.31a)$$

Если a , а также k и (или) k' достаточно малы, то первым слагаемым в правой части (5.31a) можно пренебречь, и мы приходим к следующему сепарабельному приближению для прямоугольного потенциала:

$$\langle k | V_l | k' \rangle \sim a^3 V_0 (2l+3) \frac{j_{l+1}(ka)}{ka} \frac{j_{l+1}(k'a)}{k'a}. \quad (5.31b)$$

Такое приближение может быть полезным при описании прямоугольной ямы для импульсов, проявляющихся в NN -взаимодействии. Отметим также, что многократное применение равенств (5.31) и (5.31a) приводит к следующему сепарабельному представлению прямоугольного потенциала в виде бесконечного ряда сепарабельных слагаемых:

$$\langle k | V_l | k' \rangle = V_0 a^3 \sum_{n=0}^{\infty} (2l+2n+3) \frac{j_{l+2n+1}(ka)}{ka} \frac{j_{l+2n+1}(k'a)}{k'a}. \quad (5.31b)$$

Обрывание этого ряда на N -м члене дает сепарабельное приближение ранга N , для которого уравнение Липпмана — Швингера также можно решить аналитически. Существуют систематические методы, позволяющие представить любой потенциал в виде ряда сепарабельных слагаемых.

До некоторой степени убежденные в том, что мы решаем интересную с физической точки зрения задачу, обратимся теперь к решению уравнения Липпмана — Швингера для потенциала вида (5.29a). Исходя из уравнения (5.14), запишем

$$\begin{aligned} \langle k | T(E) | k' \rangle &= \lambda v(k) v(k') - \frac{2}{\pi} P \int q^2 dq \lambda v(k) v(q) \langle q | T(E) | k' \rangle \times \\ &\times (q^2 - E)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Из этого уравнения немедленно следует, что T -матрица представляется в виде

$$\langle k | T(E) | k' \rangle = \lambda v(k) \tau(E, k') \quad (5.32a)$$

для всех значений k, E, k' . Подставляя (5.32a) в уравнение (5.32), найдем

$$\tau(E, k') = v(k') - \frac{2}{\pi} \lambda P \int [q^2 v^2(q)/(q^2 - E)] \tau(E, k') dq. \quad (5.32b)$$

Член $\tau(E, k')$ можно вынести за знак интеграла. Тогда задача сводится к решению алгебраического уравнения, и мы получаем

$$\langle k | T(E) | k' \rangle = \frac{\lambda v(k) v(k')}{1 + \frac{2}{\pi} \lambda P \int \frac{dq q^2 v^2(q)}{q^2 - E}}. \quad (5.33)$$

Как упоминалось выше, T -матрица, полученная из сепарабельного потенциала, сама является сепарабельной. Чтобы получить сдвиги фаз с помощью равенства (5.33), надо взять $k=k'$ и $E=k^2$ и применить равенство (5.17).

Как следует из равенства (5.30), T -матрица имеет простой полюс по E при энергии связанного состояния. В амплитуде вида (5.33) полюс возникает только в том случае, когда знаменатель обращается в нуль:

$$\frac{2}{\pi} \lambda \int_0^{\infty} \frac{q^2 dq v^2(q)}{q^2 + \kappa_B^2} = -1, \quad (5.33a)$$

где использовано обозначение $E_B = -\kappa_B^2$, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что подынтегральное выражение в равенстве (5.33a) является положительно определенным. Легко видеть, что левая часть равенства (5.33a) монотонно убывает с ростом κ_B^2 . Таким образом, T -матрица, определяемая равенством (5.33), не может иметь более одного связанного состояния. Критерием существования связанного состояния служит неравенство

$$\frac{2}{\pi} \lambda \int v^2(q) dq < -1, \quad (5.33b)$$

которое может быть справедливым только для $\lambda < 0$.

В случае, когда выполнено условие (5.33b) и потенциалу отвечает одно связанное состояние, можно привести T -матрицу к виду, в котором отвечающий связанному состоянию полюс явно выделен

$$\langle k | T(E) | k' \rangle = \frac{\lambda v(k) v(k')}{\frac{2}{\pi} \lambda (E - E_B) P \int \frac{q^2 dq v^2(q)}{(q^2 - E_B)(q^2 - E)}}. \quad (5.34)$$

Сравнивая (5.34) и (5.30) в окрестности E_B и используя равенство

$$\langle k | V | \psi_B \rangle = (E_B - k^2) \langle k | \psi_B \rangle, \quad (5.34a)$$

можно немедленно записать волновую функцию для потенциала, определяемого равенством (5.29а),

$$\langle k | \psi_B \rangle = N^{1/2} v(k)/(k^2 - E_B), \quad (5.34б)$$

с несколько необычным условием нормировки

$$\int_0^{\infty} k^2 |\langle k | \psi_B \rangle|^2 dk = \frac{\pi}{2}, \quad (5.34в)$$

которое является следствием использования ненормированных плоских волн. В координатном пространстве эта волновая функция представляется в виде интеграла

$$\psi_B(r) = N^{1/2} \int_0^{\infty} j_1(kr) k^2 dk \frac{v_1(k)}{k^2 - E_B}. \quad (5.34г)$$

Данное преобразование Фурье — Бесселя можно осуществить, заменив $j_1(kr)$ на $h_1^{(1)}(kr)$ и распространив интегрирование на область $-\infty \leq k \leq +\infty$. При этом удобно оценивать данный интеграл, замыкая контур интегрирования в верхней полуплоскости. Для связанного состояния с малой энергией связи можно получить оценку интеграла (5.34г), взяв просто вычет в полюсе при $k = i\kappa_B$ и пренебрегая при этом сингулярностями $v(k)$ в предположении, что они расположены дальше от точки $k=0$. Тогда находим

$$\psi_B(r) \sim Ch_1^{(1)}(i\kappa_B r), \quad (5.34д)$$

что дает знакомый результат для слабосвязанного состояния при больших r

$$\psi_B(r) \sim C [\exp(-\kappa_B r)]/r. \quad (5.34е)$$

Используя (5.34а) и (5.34б), можно записать T -матрицу в следующей форме, в которую входят только волновая функция связанного состояния и энергия связи:

$$\begin{aligned} \langle k | T(E) | k' \rangle &= \frac{(E_B - k^2)(E_B - k'^2)}{E - E_B} \times \\ &\times \frac{\langle k | \psi_B \rangle \langle \psi_B | k' \rangle}{1 + \frac{2}{\pi} (E - E_B) P \int \frac{q^2 \langle q | \psi_B \rangle^2 dq}{q^2 - E}}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

В окрестности $E \sim E_B$ равенство (5.35) сводится к ожидаемой форме (5.30), отвечающей доминирующему эффекту полюса. Формула (5.35) имеет несколько более широкую область применимости. При заданных волновой функции и энергии E_B связанного состояния для любого потенциала (не обязательно сепарабельного) можно использовать (5.35) как удобное приближение для T -матрицы в окрестности E_B . Дополнительное преимущество этого приближения

заключено в его унитарности (поскольку оно формально получено из решения уравнения Липпмана — Швингера). Поэтому оно имеет более широкую область применения по сравнению с приближением типа (5.30), которое заведомо не удовлетворяет условию унитарности. Отметим, что это приближение может иметь более чем формальный интерес. Экспериментально измеряемый зарядовый форм-фактор связан с волновой функцией связанного состояния соотношением

$$F_C(q) = \int |\psi_B(r)|^2 j_0(qr) r^2 dr. \quad (5.36)$$

Таким образом, измерение зарядового форм-фактора предоставляет возможность непосредственного использования формулы (5.35) для аппроксимации T -матрицы. Как уже упоминалось, аккуратное измерение форм-фактора дейтрона — нелегкая задача. Трудность возникает в связи с тем, что электрический квадрупольный момент дейтрона может взаимодействовать с градиентом электрического поля. Было найдено, что этот квадрупольный вклад оказывается доминирующим в электрическом форм-факторе дейтрона при $q > 3$ Ферми⁻¹. Это делает невозможным извлечение зарядового форм-фактора дейтрона, а следовательно, и волновой функции дейтрона. В качестве простого примера использования формулы (5.35), а также для того, чтобы приобрести дополнительный опыт расчетов в пространстве импульсов, покажем, как можно получить обычное выражение для длины рассеяния в случае потенциала, в котором имеется состояние с малой энергией связи. Определим длину рассеяния и эффективный радиус, как обычно:

$$k \operatorname{ctg} \delta \sim -1/a + r_0 k^2/2. \quad (5.37)$$

Если энергия связи мала, то можно применить равенство (5.35) к расчету T -матрицы на массовой поверхности при малых положительных энергиях и использовать в качестве волновой функции связанного состояния ее асимптотическое выражение (5.34д). Ограничиваясь S -волнами, находим, что правильно нормированная волновая функция равна

$$\psi_B(r) = \left[\frac{2\kappa_B}{1 - \kappa_B r_0} \right]^{1/2} \frac{\exp -\kappa_B r}{r}$$

или

$$\langle k | \psi_B \rangle = \frac{1}{k^2 + \kappa_B^2} \left[\frac{2\kappa_B}{1 - \kappa_B r_0} \right]^{1/2}. \quad (5.38)$$

В эти формулы был введен эффективный радиус, чтобы учесть изменение нормировочного множителя в асимптотическом выражении для волновой функции, связанное с отклонением волновой функции на малых расстояниях от ее асимптотической формы. Такое использование r_0 целиком согласуется с определением этой величины в форме равенства (2.18). Запишем формулу для массо-

вой T -матрицы с помощью равенства (5.35), взяв в качестве волновой функции выражение (5.38):

$$\langle k | T(k^2) | k \rangle = \frac{2\kappa_B}{(k^2 + \kappa_B^2) \left[(1 - \kappa_B r_0) + \frac{2}{\pi} (k^2 + \kappa_B^2) P \int \frac{2\kappa_B q^2 dq}{(q^2 - k^2)(q^2 + \kappa_B^2)^2} \right]}. \quad (5.39)$$

Интеграл в знаменателе равенства (5.39) можно вычислить, замыкая контур в любой полуплоскости и пренебрегая полюсами при $q = \pm k$, что требует процедура нахождения интеграла в смысле главного значения. При этом получаем

$$\frac{2}{\pi} 2\kappa_B (k^2 + \kappa_B^2) P \int \frac{q^2 dq}{(q^2 - k^2)(q^2 + \kappa_B^2)^2} = \frac{\kappa_B^2 - k^2}{\kappa_B^2 + k^2} \quad (5.39a)$$

и, следовательно,

$$\langle k | T(k^2) | k \rangle = (\kappa_B - \kappa_B^2 r_0/2 - r_0 k^2/2)^{-1}. \quad (5.39b)$$

Привлекая обычное соотношение между массовой T -матрицей и сдвигами фаз [данное равенством (5.17)], находим

$$1/a = \kappa_B - \kappa_B^2 r_0/2. \quad (5.39b)$$

Это — знакомый результат, полученный в виде (2.21) непосредственно из рассмотрения уравнения Шредингера. Заметим, что мы не использовали никаких приближений, кроме формулы (5.38). Отметим также, что поправки, связанные с учетом условия унитарности, отличающие формулу (5.35) от формулы (5.30), отнюдь не малы даже в том случае, когда κ_B мало. В частности, замена равенства (5.35) неунитарным полюсным приближением (5.30) в приведенном выводе привела бы к погрешности на множитель ~ 2 в результирующей длине рассеяния.

Равенства (5.34) и (5.35) нетрудно обобщить на случай учета тензорных компонент во взаимодействии, которые могут приводить к смешиванию парциальных волн. Такое обобщение дает простое приближенное соотношение между квадрупольным моментом дейтрона и параметром смешивания ϵ между S - и D -волнами при малых энергиях. Ценность подобного соотношения весьма значительна, так как даже знак ϵ не был надежно установлен при малых энергиях. Параметр смешивания определяется следующим образом:

$$\operatorname{tg} 2\epsilon = \frac{\langle k | T_{02}(k^2) | k \rangle + \langle k | T_{20}(k^2) | k \rangle}{\langle k | T_{00}(k^2) | k \rangle - \langle k | T_{22}(k^2) | k \rangle}. \quad (5.40)$$

Сравнение с приведенными в § 2.6 явными асимптотическими выражениями для волновых функций с учетом связи каналов показывает, что $\operatorname{tg} \epsilon$ просто совпадает с η_α из равенства (2.43). Используя обобщение формулы (5.35), на случай связанных каналов (оно должно быть приближенно справедливым для состоя-

ний с малой энергией связи, подобных дейтрону), получаем выражение

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{\langle k | \psi_S \rangle \langle \psi_D | k \rangle + \langle k | \psi_D \rangle \langle \psi_S | k \rangle}{\langle k | \psi_S \rangle \langle \psi_S | k \rangle - \langle k | \psi_D \rangle \langle \psi_D | k \rangle}. \quad (5.40a)$$

В пределе $k^2 \rightarrow 0$ находим

$$\varepsilon \sim \frac{\langle k | \psi_D \rangle}{\langle k | \psi_S \rangle} \equiv \frac{\int_0^\infty j_2(kr) \psi_D(r) r^2 dr}{\int_0^\infty j_0(kr) \psi_S(r) r^2 dr}. \quad (5.40б)$$

Удерживая в подынтегральных выражениях члены главного порядка в сферических функциях Бесселя, приходим к формуле

$$\varepsilon \sim \frac{1}{15} k^2 \int_0^\infty \psi_D(r) r^4 dr \Big/ \int_0^\infty \psi_S(r) r^2 dr. \quad (5.40в)$$

Примем теперь, что доминирующий вклад в оба интеграла вносит область вне радиуса действия сил, где волновые функции можно аппроксимировать с помощью следующих выражений:

$$\left. \begin{aligned} \psi_D(r) &\sim N_D \frac{\exp(-\kappa_B r)}{\kappa_B r} \left[1 + \frac{3}{\kappa_B r} + \frac{3}{(\kappa_B r)^2} \right]; \\ \psi_S(r) &\sim N_S \frac{\exp(-\kappa_B r)}{\kappa_B r}. \end{aligned} \right\} \quad (5.40г)$$

Действуя в духе пренебрежения членами высокого порядка в амплитуде для D -состояния, предположим, что корректное условие нормировки волновой функции связанного состояния дается равенством

$$\int_0^\infty \psi_S^2 r^2 dr = 1 \quad (5.40д)$$

и что в нем можно использовать асимптотическое выражение для ψ_S . Тогда имеем

$$N_S = \sqrt{2} \kappa_B^{3/2}. \quad (5.40е)$$

Вычисление интегралов в (5.40в) дает

$$\varepsilon = N_D k^2 / \sqrt{2} \kappa_B^{7/2}. \quad (5.40ж)$$

Согласно (2.36д) квадрупольный момент можно записать как

$$Q = \sqrt{\frac{1}{50}} \int_0^\infty \psi_S(r) \psi_D(r) r^4 dr - \frac{1}{20} \int_0^\infty \psi_D(r) \psi_D(r) r^4 dr.$$

Пренебрегая вторым слагаемым полностью и вычисляя первое слагаемое с асимптотическими волновыми функциями, получаем

$$Q = N_D / 2 \kappa_B^{7/2}. \quad (5.40з)$$

Таким образом, мы ожидаем, что имеет место связь

$$\varepsilon(k^2) = \sqrt{2Qk^2}. \quad (5.40и)$$

Для потенциала Рида $Q=0,282$ Ферми². Отсюда следует, что при энергии 1 МэВ в лабораторной системе $\varepsilon=0,276^\circ$. Непосредственное вычисление дает $\varepsilon=0,201^\circ$. Расхождение между этими значениями согласуется с тем, что мы отбрасывали члены порядка $\sqrt{P_D} \sim 0,26$. Успех применения равенства (5.40и) в этом модельном расчете и положительность экспериментального значения квадратурного момента дейтрона являются веским указанием на положительность ε при низких энергиях.

Для двух потенциалов T -матрицу можно построить непосредственно с помощью уравнения Липпмана — Швингера. Имеются случаи, однако, когда желателен менее прямой подход. Будем исходить из обычного уравнения Липпмана — Швингера:

$$T = (V_1 + V_2) + (V_1 + V_2)GT. \quad (5.41)$$

Разобьем искусственным образом T на T_1 и T_2 , удовлетворяющие уравнениям

$$T_1 = V_1 + V_1GT_1 + V_1GT_2; \quad (5.41а)$$

$$T_2 = V_2 + V_2GT_1 + V_2GT_2, \quad (5.41б)$$

где $T=T_1+T_2$. Уравнения (5.41а) и (5.41б) можно формально переписать в виде

$$T_1 = (1 - V_1G)^{-1}V_1[1 + GT_2], \quad (5.42)$$

$$T_2 = (1 - V_2G)^{-1}V_2[1 + GT_1]. \quad (5.42а)$$

Однако величина $(1 - V_1G)^{-1}V_1$ — это формальное решение уравнения Липпмана — Швингера в случае, когда действует только потенциал V_1 . Таким образом, можно получить полную T -матрицу решением связанных интегральных уравнений, содержащих матрицы рассеяния $t_1(t_2)$ для потенциалов $V_1(V_2)$, действующих в отдельности:

$$T_1 = t_1 + t_1GT_2; \quad (5.43)$$

$$T_2 = t_2 + t_2GT_1. \quad (5.43а)$$

Полезно отметить, что эти уравнения можно привести к следующим двум несвязанным уравнениям, произведя по одной итерации в каждом уравнении (5.43):

$$T_1 = t_1 + t_1Gt_2 + t_1Gt_2GT_1; \quad (5.44)$$

$$T_2 = t_2 + t_2Gt_1 + t_2Gt_1GT_2. \quad (5.44а)$$

Прежде чем двигаться дальше, целесообразно сделать несколько замечаний. Из уравнений (5.43) и (5.43а) или (5.44) и (5.44а) можно увидеть, что из сепарабельности t_1 и t_2 вытекает сепарабельность T_1 и T_2 . Таким образом, ясно, что сепарабельный потенциал второго ранга (т. е. когда оба потенциала, V_1 и V_2 , сепара-

белыны) приводит к сепарабельной T -матрице также второго ранга. В этом случае уравнения (5.44) и (5.44а) можно решить алгебраически в полной аналогии с выводом равенства (5.33).

Особо интересен случай, когда один из потенциалов очень сильный (например, обычное NN -взаимодействие), тогда как другой потенциал достаточно слабый, чтобы можно было ограничиться теорией возмущений первого порядка по этому потенциалу (например, слабое NN -взаимодействие). В этом случае желательно учитывать только члены первого порядка по V_w , но все порядки по V_s . Из уравнений (5.43) и (5.43а) при этом получаем

$$T = t_s + (1 + Gt_s)^+ V_w (1 + Gt_s) + O(V_w^2). \quad (5.45)$$

Может оказаться удобным определить эффективное слабое взаимодействие соотношением

$$\tilde{V}_w = (1 + Gt_s)^+ V_w (1 + Gt_s). \quad (5.45a)$$

Сравнение с уравнением (5.6) показывает, что результатом действия оператора $(1 + Gt_s)$ на решения уравнения Шредингера для свободной частицы являются решения уравнения Шредингера с потенциалом V_s . В частности, если V_s содержит короткодействующее отталкивание, эффективный оператор \tilde{V}_w будет приближенно обрезаться на малых расстояниях. Работать с потенциалом вида (5.45а) неудобно, так как оператор $1 + Gt_s$ одновременно и зависит от энергии, и нелокален.

Упрощения могут возникнуть в двух случаях. Если t_s — сепарабельная амплитуда, то оператор $1 + Gt_s$ также сепарабелен. Если же просто принять во внимание эффекты очень сильного короткодействующего отталкивания, то в этом случае можно аппроксимировать оператор $1 + Gt_s$ локальной и не зависящей от энергии функцией.

Процедуру решения задачи для двух потенциалов, связанную с введением двух уравнений (5.41), можно обобщить на случай n произвольных потенциалов. Вновь мы устанавливаем, что система уравнений

$$T = \sum_{i=1}^n T_i, \quad (5.46)$$

где

$$T_i = V_i + V_i G \sum_{j=1}^n T_j \quad (5.46a)$$

полностью эквивалентна уравнению Липпмана — Швингера для T с потенциалом $\sum_{i=1}^n V_i$. Система уравнений (5.46 а) опять позволяет получить решение алгебраически в специальном случае, когда все V_i сепарабельны. При этом можно записать T_i в виде

$$\langle k | T_i(E) | k' \rangle = \lambda_i v_i(k) \tau_i(E, k'). \quad (5.47)$$

Все n уравнений, определяемых равенствами (5.46а), сводятся при этом к системе из n линейных уравнений относительно неизвестных функций $\tau_i(E, k')$:

$$\sum_{j=1}^n [\delta_{ij} + \lambda_j f_{ij}(E)] \tau_j(E, k') = v_i(k'), \quad (5.47a)$$

где введено обозначение

$$f_{ij}(E) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} [q^2/(q^2 - E)] v_i(q) v_j(q) dq. \quad (5.47b)$$

Данные линейные уравнения можно решать любым подходящим способом, чтобы найти $\tau_i(E, k')$, а следовательно, и T . Матрица в левой части (5.47а) не зависит от k . Вся зависимость от k' сосредоточена в неоднородном члене. Таким образом, можно получить $\langle k|T(E)|k' \rangle$ для всех k и k' для фиксированного E путем нахождения обратной матрицы. Если случится, что $f_{ij}(E) = \delta_{ij}$, то сразу получается решение системы (5.47а) и (5.47б).

В § 5.3 будет видно, что эта на первый взгляд искусственная ситуация естественно возникает при обсуждении сепарабельного разложения произвольных потенциалов.

§ 5.3. СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

После того, как мы познакомились с простейшими выражениями для T -матрицы для сепарабельного потенциала конечного ранга, естественно задать вопрос, возможна ли систематическая аппроксимация произвольных потенциалов с помощью сепарабельных потенциалов конечного ранга. При выводе равенства (5.31в) была продемонстрирована возможность использования такой аппроксимации, основанной на специфических свойствах сферических функций Бесселя. В данном параграфе мы опишем более общий метод, предложенный Вейнбергом [119]. Для удобства ограничимся рассмотрением отрицательных E . При выводе уравнения Липпмана — Швингера из уравнения Шредингера оператор $(H_0 - E)^{-1}$ был записан в виде разложения (сепарабельного) по его собственным функциям. Можно привести задачу к несколько иной форме, рассмотрев разложение по собственным функциям более сложного оператора $(H_0 - E)^{-1}V$, где V — произвольный потенциал. Таким образом, нужно найти решения уравнения

$$-(H_0 - E)^{-1}V\psi_i = \eta_i(E)\psi_i, \quad (5.48)$$

которое есть просто однородная форма уравнения Липпмана — Швингера. Для положительных E собственные значения $\eta_i(E)$ должны быть комплексными. В случае отрицательных E уравнение (5.48) — обычное уравнение Шредингера для связанных состояний, в котором ψ_i — волновая функция связанного состояния с энергией E для потенциала $V/\eta_i(E)$. В этом случае все соб-

ственные значения $\eta_i(E)$ вещественны. Если потенциал V всюду положителен, ожидается, что все $\eta_i(E) < 0$. Если V всюду отрицателен, то все $\eta_i(E) > 0$. Вообще говоря, возможны оба знака для $\eta_i(E)$.

Поскольку разные функции ψ_i — решения различных уравнений Шредингера при одной и той же энергии, неудивительно, что они удовлетворяют несколько необычному соотношению ортогональности. Для его вывода возьмем уравнение Шредингера для ψ_i и сопряженное уравнение для ψ_j :

$$(E - H_0) | \psi_i \rangle = \eta_i^{-1}(E) V | \psi_i \rangle, \quad (5.49)$$

$$\langle \psi_j | (E - H_0) = \langle \psi_j | V \eta_j^{-1}(E). \quad (5.49a)$$

Умножим уравнение (5.49) слева на $\langle \psi_j |$, а уравнение (5.49a) справа на $| \psi_i \rangle$ и найдем разность получившихся уравнений

$$[\eta_i^{-1}(E) - \eta_j^{-1}(E)] \langle \psi_j | V | \psi_i \rangle = 0. \quad (5.50)$$

Поскольку мы свободны в выборе нормировки, возьмем следующую нормировку, которая особенно удобна:

$$\langle \psi_i | V | \psi_j \rangle = \sigma_i \delta_{ij}, \quad (5.51)$$

где

$$\sigma_i = -\eta_i(E) / |\eta_i(E)|. \quad (5.51a)$$

Функции ψ_i образуют базис сепарабельного представления V вида

$$V = \sum_i \sigma_i V | \psi_i \rangle \langle \psi_i |, \quad (5.52)$$

где суммирование, в принципе, не ограничено. Чтобы убедиться в справедливости такого представления для V , подставим (5.52) в уравнение (5.48):

$$-\sum_i \sigma_i (H - E_0)^{-1} V | \psi_i \rangle \langle \psi_i | V | \psi_j \rangle = \eta_j(E) | \psi_j \rangle. \quad (5.53)$$

Используя уравнение (5.48) и условие ортонормированности (5.51), найдем

$$\sigma_j^2 \eta_j(E) | \psi_j \rangle = \eta_j(E) | \psi_j \rangle. \quad (5.54)$$

Поскольку $\sigma_j^2 = 1$ для всех j , равенство (5.54) завершает доказательство справедливости представления V в форме (5.52). Таким образом можно найти сепарабельное приближение ранга n для потенциала V и, следовательно, для T -матрицы, оставив n членов в этом разложении. Для того чтобы выяснить, какие члены должны быть удержаны, построим T -матрицу при энергии E .

Сопоставление с уравнениями (5.47a) и (5.47b) дает равенства $\lambda_i = \sigma_i$ и $f_{ij} = -\eta_j \sigma_j \delta_{ij}$, тем самым подтверждая, что эта особенно простая форма для f_{ij} может возникать в физически инте-

ресных ситуациях. Линейные уравнения (5.47а) могут быть теперь решены, и мы получаем

$$T(E) \approx \sum_{i=1}^n \sigma_i [V | \psi_i(E)\rangle \langle \psi_i(E) | V] / (1 - \eta_i(E)). \quad (5.55)$$

Если окажется, что для потенциала V действительно имеется связанное состояние в окрестности E , то какое-либо из значений $\eta_i(E)$ должно быть близким единице. В этом случае равенство (5.55) сведется к знакомому нам полюсному приближению, доминирующему вблизи полюса. Особенно простая форма, даваемая равенством (5.55), получилась лишь потому, что мы строили T -матрицу при той же энергии, при которой была взята сепарабельная аппроксимация потенциала V . При построении T -матрицы для произвольной энергии с помощью сепарабельного представления (5.52) нельзя использовать формулы (5.51).

Чтобы намеченная схема аппроксимации имела практическое значение, необходимо ввести некоторую количественную меру разности между точной величиной $T(E)$ и приближением $T^{(n)}(E)$ ранга n . Сделаем следующий удобный выбор:

$$\|T^2\| = \text{Sp}[(H_0 - E)^{-1} T (H_0 - E)^{-1} T]. \quad (5.56)$$

Правую часть (5.56) можно записать в явном виде с помощью ненормированных состояний $|k\rangle$, отвечающих плоским волнам:

$$\|T^2\| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k^2 dk \langle k | (H_0 - E)^{-1} T (H_0 - E)^{-1} T | k \rangle. \quad (5.56a)$$

Исходя непосредственно из равенства (5.56) и используя (5.48), а также условия нормировки (5.51) и (5.51а), найдем

$$\|T^2\| = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - 1/\eta_i)^{-2}. \quad (5.56b)$$

Легко показать также прямым вычислением, что наилучшей сепарабельной аппроксимацией ранга 1 для T является просто выражение

$$T^{(1)} = \sigma_1 (V | \psi_1\rangle \langle \psi_1 | V) / (1 - \eta_1(E)), \quad (5.57)$$

где $\eta_1(E)$ — собственное значение, минимизирующее величину $(1 - 1/\eta_i)^2$. Действуя по индукции, мы приходим к «наилучшей» сепарабельной аппроксимации ранга n , в точности совпадающей с равенством (5.55), где все слагаемые расположены в порядке возрастания $(1 - 1/\eta_i)^2$. Под термином «наилучшая» подразумевается такая сепарабельная аппроксимация ранга n , которая минимизирует $\|(T - T^{(n)})^2\|$, где норма вновь определяется равенством (5.56). Легко увидеть, что для такого наилучшего выбора

$$\|(T - T^{(n)})^2\| = \sum_{i=n+1}^{\infty} (1 - 1/\eta_i)^{-2}. \quad (5.58)$$

Равенство (5.58) служит практическим средством, позволяющим определить, на каком члене можно оборвать разложение для T , и оценить роль отбрасываемых членов. Поскольку суммирование бесконечного ряда в (5.58) — процедура неудобная, полезно исследовать асимптотическую структуру η_i для некоторых простых i , будем надеяться, представительных потенциалов. Простейшим из таких примеров является чисто притягивающая прямоугольная яма с радиусом a и глубиной V_0 . Для достаточно больших i находим, что

$$\eta_i \approx a^2 V_0 m / (\pi^2 \hbar^2 i^2), \quad (5.59)$$

где m — масса частицы. В этом случае норма в (5.58) должна сходиться асимптотически как n^{-1} . В табл. 5.1 приведены первые несколько собственных значений для притягивающих и отталкивающих слагаемых в случае более реалистического потенциала Рида в 1S_0 -состоянии. Этот потенциал обеспечивает количественную подгонку фаз NN -рассеяния в 1S_0 -волне при энергиях в лабораторной системе ниже ~ 350 МэВ. Потенциал Рида имеет сильное короткодействующее отталкивание, на что указывают малые начальные значения $1/\eta_i^2$. Даже в этом реалистическом случае спектры η_i^A и η_i^R грубо соответствуют поведению, полученному

Таблица 5.1.

Собственные значения для потенциала Рида в 1S_0 -состоянии, построенные при $E = -20$ МэВ

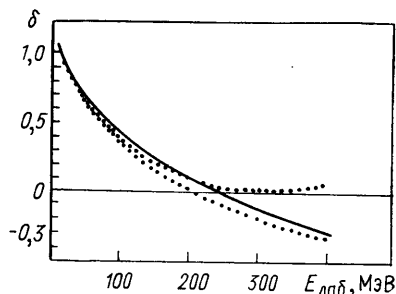
i	$(\eta_i^A)^{-1}$	$(\eta_i^R)^{-1}$
1	2,30	-0,071
2	12,30	-0,260
3	30,22	-0,512
4	42,66	-0,743
5	71,77	-0,992
6	156,46	-1,067
7	328,1	-1,882

в более простом случае прямоугольного потенциала. Собственная функция ψ_i для i -го притягивающего (или отталкивающего) члена представляет i -е связанное состояние в потенциале V/η_i . Поэтому в координатном представлении она должна иметь $i-1$ узлов в области, отвечающей, грубо говоря, радиусу действия притягивающей (или отталкивающей) части сил взаимодействия. Можно ожидать, что для $1/k$ порядка радиуса действия силы состояния $|k\rangle$ и $V|\psi_i\rangle$ будут приближаться к взаимно ортогональным функциям с ростом i . Поэтому при малых k и k' сходимость $\langle k|T(E)|k'\rangle$ может быть более быстрой, чем сходимость, вытекающая из спектра η_i и равенства (5.58).

Недостаток подхода Вейнберга в применении к практическим расчетам заключается в том, что собственные значения и собственные функции следует вычислять заново для каждого значения энергии E . Левинджер с соотр. обратили внимание на то, что потенциал ранга n вида (5.52), построенный при энергии E , приводит к сепарабельному представлению $T(E')$ для всех E' . Разумеется, только в специальном случае $E=E'$ линейные уравнения (5.47а) имеют особенно простое решение в форме (5.55), а норма,

даваемая равенством (5.58), минимизируется. Есть надежда, что эти потери компенсируются тем, что значения η_i и ψ_i нужно вычислять только при одном характерном значении энергии. Подобная схема часто используется на практике. В качестве примера на рис. 15 сдвиги фаз для потенциала Риды в 1S_0 -состоянии, полученные с использованием сепарабельной аппроксимации рангов 1 и 2, сравниваются с точными результатами. Одночленное приближение оказывается особенно хорошим при малых энергиях вследствие того, что $1/\eta_i^A = 1,082^*$. Как и для любого сепарабельного потенциала ранга 1, одночленная аппроксимация для потенциала Риды дает сдвиг фазы одного знака. Поэтому приближение ранга 1 становится несправедливым при энергиях выше 250 МэВ в лабораторной системе. Приближение с двумя слагаемыми дает

Рис. 15. Зависимость от энергии сдвигов фаз для потенциала Риды. Точные результаты показаны сплошной кривой. Верхняя и нижняя пунктирные кривые соответствуют одночленному и двухчленному сепарабельным приближениям



разумное качественное описание сдвигов фаз при всех энергиях. Дополнительные результаты при других энергиях табулированы в работе Хармса и Ньютона [49]. Рассмотренную технику вычислений можно без труда обобщить на случай связанных каналов. Изучение спектра собственных значений для потенциала Риды в состояниях $^3S_1-^3D_1$ обнаруживает, что спектр притягивающих значений η_i^A аналогичен приведенному в табл. 5.1. Однако отталкивающий спектр имеет намного большее число собственных значений $|\eta_i^R| < 1$ по сравнению с потенциалом в 1S_0 -состоянии (для $^3S_1-^3D_1$ -потенциала имеется 13 таких состояний). Сходимость нормы (5.58) в этом случае значительно более медленная. Это означает, что данный подход имеет ограниченную применимость в случае связанных каналов.

§ 5.4. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ РАНГА 1

Вообще говоря, мы намерены исходить из хорошо установленного взаимодействия и образовывать наблюдаемые величины для задачи двух тел (как, например, сдвиги фаз и волновые функции связанных состояний, если они имеются). В этом параграфе попытаемся решить обратную задачу, исследуя простую систему, в которой сдвиги фаз рассеяния однозначно определяют потенциал

* В этом случае собственные значения и собственные функции вычислялись при $E=0$.

и, следовательно, немассовую T -матрицу. В случае, когда неизвестный потенциал можно считать сепарабельным потенциалом ранга 1, а известные сдвиги фаз не противоречат этому утверждению о потенциале (см. § 5.2), фазовые сдвиги однозначно определяют потенциал*. (Такой результат имеет смысл, так как мы уже выяснили при выводе равенства (5.35), что волновая функция связанного состояния и энергия связи однозначно определяют потенциал, если он сепарабельный.) Хотя данная частная задача имеет ограниченное приложение с точки зрения физики, тем не менее результаты и общий подход к проблеме имеют много общего с более сложной обратной задачей рассеяния для локальных потенциалов.

Как следует из равенства (5.33), T -матрица для сепарабельного потенциала ранга 1 (который в данном случае неизвестен) должна иметь вид

$$\langle k | T(E) | k' \rangle = \lambda v(k) v(k') / D(\sqrt{E}), \quad (5.60)$$

где

$$D(x) = 1 + \frac{2}{\pi} \lambda P \int \frac{q^2}{q^2 - x^2} v^2(q) dq. \quad (5.60a)$$

Знаменатель $D(x)$ веществен для всех действительных x^2 . Определим также величину $D^+(x)$ формулой

$$D^+(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [D(x + i\varepsilon)]. \quad (5.60б)$$

Непосредственное использование равенства (5.60б) дает

$$D^+(x) = D(x) + i\lambda v^2(x) x. \quad (5.60в)$$

Это соотношение ведет к двум важным следствиям. Во-первых, ясно, что

$$\text{Im } D^+(x) = \lambda v^2(x) x, \quad (5.60г)$$

т. е. это как раз та величина, которую мы хотим определить, рассматривая обратную задачу рассеяния. Во-вторых, из равенств (5.60), (5.60а) и (5.18) видно, что

$$\text{Im } D^+(k) / \text{Re } D^+(k) = -\text{tg } \delta(k). \quad (5.60д)$$

Это позволяет написать равенство

$$D^+(k) = |D^+(k)| \exp(-i\delta(k)). \quad (5.60е)$$

Тривиальным следствием (5.60е) является равенство

$$\ln D^+(k) = \ln |D^+(k)| - i\delta(k), \quad (5.60ж)$$

показывающее, что мнимая часть $\ln D^+(k)$ единственным образом определяется через (известные) сдвиги фаз. Выписанные равенства позволяют наметить «стратегический» план решения обратной задачи рассеяния. Надо записать $\ln D^+(k)$ с помощью соответству-

* Изложение в § 5.4 близко к работе Табакина [112].

ющего интеграла типа Коши и затем связать вещественную часть $\ln D^+(k)$ с соответствующим интегралом в смысле главного значения от мнимой части этой величины. Другими словами, выразим $\ln |D^+(k)|$ через интеграл в смысле главного значения от заданных сдвигов фаз. Результат этих действий можно использовать в равенствах (5.60ж) и (5.60д), что завершает процедуру определения потенциала.

Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую внутри некоторого замкнутого контура C в z -плоскости. По теореме Коши можно записать $f(z)$ в виде интеграла по контуру C :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(x)}{x-z} dx, \quad (5.61)$$

где точка z расположена внутри контура C . Рассмотрим контур C вдоль действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$, который замыкается по полуокружности в верхней полуплоскости. Вкладом интеграла по полукругу можно пренебречь, если $f(z)$ убывает быстрее, чем $1/|z|$, всюду в верхней полуплоскости. Тогда

$$f(z + i\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-z-i\varepsilon} dx, \quad (5.61a)$$

где $+i\varepsilon$ обеспечивает расположение точки в верхней полуплоскости. Из (5.61a) следует, что действительная часть $f(z+i\varepsilon)$ равна

$$\operatorname{Re}[f(z+i\varepsilon)] = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x-z} dx. \quad (5.61b)$$

К сожалению, аналитические свойства $\ln D^+(k)$ могут не допустить использования равенства (5.61b). Из равенства (5.60a) и (5.60в), а также из общих требований для $v(k)$ видно, что

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} (D^+(k)) = 1 + O(1/|k|^2). \quad (5.62)$$

Таким образом, $\lim_{|k| \rightarrow \infty} (\ln D^+(k))$ составляет по порядку величины $1/|k|^2$, и можно пренебречь вкладом интеграла по полуокружности. Однако, если $\lambda < 0$ и $|\lambda|$ достаточно велик, чтобы выполнялось условие (5.33б), T -матрица имеет простой полюс по E [явно выделенный в формуле (5.34)]. Этот полюс обусловлен обращением в нуль величины $D^+(i\kappa_B)$. Таким образом, $\ln D^+(k)$ имеет точку ветвления при $k=i\kappa_B$ и нельзя применить теорему Коши. Чтобы обойти эту трудность, введем новую функцию

$$\tilde{D}^+(k) = [(k+i\kappa_B)/(k-i\kappa_B)] D^+(k), \quad (5.63)$$

построенную так, чтобы она была конечной в точке $k=i\kappa_B$ и не имела нулей в верхней полуплоскости. Отметим также, что дополнительный множитель в $\tilde{D}^+(k)$ не изменяет асимптотического поведения (5.62). Поэтому асимптотическое поведение $\tilde{D}^+(k)$ позво-

ляет отбросить интеграл по полуокружности. Отметим следующие равенства:

$$\operatorname{Re}(\ln \bar{D}^+(k)) = \ln |D^+(k)|, \quad (5.63a)$$

$$i \operatorname{Im}(\ln \bar{D}^+(k)) = -i \delta(k) + \ln[(k + i\kappa_B)/(k - i\kappa_B)] \quad (5.63b)$$

[Поскольку модуль аргумента под знаком логарифма в правой части (5.63b) равен 1, этот логарифм — явно мнимая величина.]

Теперь можно применить (5.61a) к функции $\ln \bar{D}^+(k)$. При этом

$$\ln |\bar{D}^+(k)| = -\Delta(k) + \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{k' - k} \ln \frac{k' + i\kappa_B}{k' - i\kappa_B}, \quad (5.64)$$

где величина Δ определяется соотношением

$$\Delta(k) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk' \delta(k')}{k' - k}. \quad (5.64a)$$

Равенство (5.64a) требует знания сдвигов фаз как для положительных, так и для отрицательных k . Изучение равенств (5.60), (5.60a) и (5.18) показывает, что $\delta(-k) = -\delta(k)$. Второй интеграл в (5.64) берется непосредственно

$$\frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{k' - k} \ln \frac{k' + i\kappa_B}{k' - i\kappa_B} = \ln \frac{k^2 + \kappa_B^2}{k^2}. \quad (5.64b)$$

Используя (5.64) и (5.60e), находим

$$D^+(k) = \frac{k^2 + \kappa_B^2}{k^2} \exp[-\Delta(k) - i\delta(k)], \quad (5.65)$$

где первый множитель в правой части можно отбросить при отсутствии связанного состояния. Решение обратной задачи рассеяния завершается использованием формулы (5.60г). В результате получаем

$$\lambda v^2(k) = -\sin \delta(k) [\exp(-\Delta(k))]/k \quad (5.66)$$

в случае отталкивающих либо притягивающих потенциалов, для которых нет связанного состояния. Для притягивающих потенциалов, дающих связанное состояние при $E = -\kappa_B^2$, имеем

$$\lambda v^2(k) = -\frac{k^2 + \kappa_B^2}{k^2} \frac{\sin \delta(k)}{k} \exp\{-\Delta(k)\}. \quad (5.66a)$$

Равенства (5.66) и (5.66a) показывают, что для однозначного определения потенциала, о котором известно, что он — сепарабельный потенциал ранга 1, достаточно знать фазовые сдвиги при

всех энергиях и энергию связанного состояния (когда оно имеется). Сразу очевидно, что необходимость знать фазы при всех энергиях ограничивает практическое значение формул (5.66). Следует ожидать, что отсутствие информации о фазах при высоких энергиях не дает возможности определить $V(k)$ при больших k или его компоненту Фурье — Бесселя на малых расстояниях.

Обратная задача рассеяния была решена Гельфандом и Левитаном для локальных потенциалов с помощью аналогичной, но более усложненной техники*. Полученный ими результат состоит в том, что для однозначного определения потенциала нужно знать фазы (при всех энергиях), энергии связанных состояний и нормировочную постоянную для волновой функции каждого связанного состояния (если они существуют), взятой в асимптотике. По-видимому, этот результат более важен, если учесть, что имеется множество локальных потенциалов, предназначенных для феноменологического описания сдвигов фаз NN -рассеяния. Результаты Гельфанда и Левитана показывают, что любые расхождения между такими локальными феноменологическими NN -потенциалами должны быть обусловлены неадекватным описанием подгоняемых сдвигов фаз, различными предположениями о фазах при высокой энергии, при которых не производилось подгонки, или различными дейтронными волновыми функциями.

§ 5.5. УРАВНЕНИЯ N/D -МЕТОДА

В некоторых случаях более желательно решать уравнение Липпмана — Швингера приближенно, используя конечное число итераций, чем непосредственно решать интегральные уравнения. В то время как такой подход дает известные преимущества в численных расчетах, он, несомненно, имеет тот недостаток, что T -матрица, полученная при любом конечном числе итераций, не унитарна. В частности, T -матрица, взятая целиком на энергетической поверхности, не удовлетворяет соотношению унитарности в упругом канале:

$$\text{Im} \langle k | T^+(E) | k \rangle = k | \langle k | T^+(E) | k \rangle|^2 \quad (5.67)$$

при $E = k^2$ для $E > 0$. В этом параграфе мы обсудим уравнения N/D -метода для потенциального рассеяния. Эти уравнения дают технику для построения по существу итерационных решений уравнения Липпмана — Швингера, явно удовлетворяющих условию унитарности. Для вывода последних нам понадобится знание некоторых общих аналитических свойств массовой T -матрицы как функции комплексной переменной E . (В данном разделе берется только значение $E = k^2$, за исключением случаев, оговоренных особо.) Отметим, во-первых, что независимо от выбора потенциала $T^+(E)$ имеет разрез вдоль положительной действительной оси

* См. например, книгу Ньютона [89].

($0 \leq E \leq +\infty$), скачок на котором равенство (5.67). Вообще говоря, массовая амплитуда имеет также разрез на отрицательной оси E ($-\infty \leq E \leq E_0$) со скачком

$$2i \operatorname{Im} \langle k | T^+(E) | k \rangle = 2i \Delta(E), \quad (5.68)$$

где как $E_0 (< 0)$, так и $\Delta(E)$ зависят от деталей потенциала. Как отмечалось в § 5.1, $T^+(E)$ имеет также простые полюса по E , соответствующие связанным состояниям либо резонансам. Отметим, наконец, что для широкого класса физически интересных потенциалов $\langle k | T^+(E) | k \rangle$ стремится к нулю при $|E| \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $1/k$.

Для некоторой парциальной волны можно записать целиком массовую амплитуду в форме

$$\langle k | T^+(E) | k \rangle = N(E)/D(E), \quad (5.69)$$

где опущен индекс, связанный с угловым моментом. Свойства отдельных функций $N(E)$ и $D(E)$ не определяются однозначно. Мы вправе выбрать их любым удобным образом при одном условии, чтобы N/D -амплитуда имела все те свойства амплитуды на энергетической поверхности, о которых говорилось выше. В частности, в качестве числителя выбирается такая функция, для которой единственная особенность — левый разрез в области $-\infty \leq E \leq E_0$. Берется функция $N(E)$, вещественная при $E > 0$ и убывающая в пределе $|E| \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $1/k$. Функция в знаменателе, $D(E)$, имеет унитарный разрез $0 \leq E \leq \infty$ и действительна при $E < 0$. В пределе больших $|E|$ мы требовали, чтобы $D(E) \rightarrow 1$ убывало не медленнее, чем $1/k$. Наконец, мы требуем, чтобы полюса $\langle k | T^+(E) | k \rangle$, если они существуют, были обусловлены нулями $D(E)$. Используя эти свойства $N(E)$ и $D(E)$ и равенство (5.69), можно убедиться, что скачки на разрезах выражаются равенствами (5.67) и (5.68). На левом разрезе мы находим, что при $E < E_0$

$$2i \Delta(E) = 2i D^{-1}(E) \operatorname{Im} N(E). \quad (5.70)$$

На правом разрезе получаем, что для $E > 0$

$$\operatorname{Im} \langle k | T^+(E) | k \rangle = -N(E) | D(E) |^{-2} \operatorname{Im} D(E). \quad (5.71)$$

Используя условие унитарности в упругом канале, выражаемое равенством (5.67), можно записать

$$\operatorname{Im} \langle k | T^+(E) | k \rangle = k N^2(E) / | D(E) |^2. \quad (5.71a)$$

Совместное использование равенств (5.71) и (5.71a) позволяет следующим образом выразить мнимую часть от $D(E)$ на унитарном разрезе:

$$\operatorname{Im} D(E) = -k N(E). \quad (5.72)$$

Условия, налагаемые на функции в числителе и знаменателе, позволяют применить теорему Коши с тем, чтобы записать $N(E)$

и $D(E) - 1$ через интегралы по левому и правому разрезам соответственно:

$$N(E) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{E_0} \frac{\text{Im } N(E')}{E' - E - i\epsilon} dE'; \quad (5.73)$$

$$D(E) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } D(E')}{E' - E - i\epsilon} dE'. \quad (5.73a)$$

Можно получить обычные N/D -уравнения, комбинируя равенства (5.71) и (5.73), а также (5.72) и (5.73a). Приходим к следующим связанным интегральным уравнениям:

$$N(E) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{E_0} \frac{\Delta(E') D(E')}{E' - E} dE'; \quad (5.74)$$

$$D(E) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{N(E') dE' \sqrt{E'}}{E' - E}. \quad (5.74a)$$

Сведение этих уравнений к двум несвязанным уравнениям осуществляется одной итерацией. Информация о взаимодействии вводится в N/D -уравнения неявно через скачок на левом разрезе, $\Delta(E)$, а не через собственно потенциал. Решение уравнений (5.74) можно найти, например, используя метод, описанный в § 5.6. Он дает $N(E)$ для $E > 0$ и $D(E)$ для $E < E_0$. Чтобы получить $N(E)$ и $D(E)$ при других значениях энергии, можно воспользоваться равенствами (5.74) и (5.74a) соответственно. При заданной функции $\Delta(E)$ решения N/D -уравнений дают амплитуду $\langle k | T^+(E) | k \rangle$ на энергетической поверхности для всех значений E . В этом отношении имеется отличие по сравнению с уравнением Липпмана — Швингера, решение которого позволяет найти все матричные элементы для полумассовой T -матрицы, $\langle p | T^+(E = k^2) | k \rangle$ при фиксированной энергии. Решения N/D -уравнений можно также использовать для определения нулей $D(E)$ и тем самым для нахождения полюсов связанных состояний и резонансов.

В действительности, конечно, нам неизвестна точная форма $\Delta(E)$ для заданного потенциала. Поэтому N/D -уравнения не обеспечивают практической альтернативы точному решению уравнения Липпмана — Швингера для потенциального рассеяния. Однако, если задана приближенная функция $\Delta(E)$, уравнения N/D -метода дают способ нахождения приближенной амплитуды рассеяния на энергетической поверхности, гарантирующий выполнение условия унитарности в упругом канале (5.67) независимо от выбора $\Delta(E)$. Точный скачок на левом разрезе можно аппроксимировать с помощью итерационного решения уравнения Липпмана — Швингера любого порядка. Для потенциала в форме Юкавы

$$V = V_0 \exp(-\mu r)/r \quad (5.75)$$

T -матрица в первом борновском приближении дается формулой

$$T^{(1)} = \langle k | V | p \rangle = \frac{V_0}{2pk} Q_l \left(\frac{p^2 + k^2 + \mu^2}{2pk} \right), \quad (5.75a)$$

где $Q_l(x)$ — функция Лежандра второго рода с точками ветвления при $x = \pm 1$. Для амплитуды, взятой целиком на энергетической поверхности, это соответствует левому разрезу вдоль полупрямой ($-\infty \leq E \leq -\mu^2/4$) со скачком (только для случая $l=0$)

$$2i \Delta(E) = i\pi V_0/2E. \quad (5.75b)$$

Участки, дающие вклады в $\Delta(E)$ в результате дальнейшего итерирования уравнения Липпмана — Швингера, могут быть получены в этом случае без труда. Можно определить решение уравнения Липпмана — Швингера в итерационной процедуре, как

$$T^+(E) = \sum_{n=1}^{\infty} T^{+(n)}(E), \quad (5.76)$$

где

$$\langle k | T^{+(n+1)}(p^2) | p \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} q^2 dq \frac{\langle k | V | q \rangle \langle q | T^{+(n)}(p^2) | p \rangle}{p^2 + i\varepsilon - q^2} \quad (5.76a)$$

с определением $T^{+(1)}(E) = V$. Можно увидеть, что разрезы у функций V и $T^{+(1)}(E)$ могут зажимать контур интегрирования, приводя к точкам ветвления $\langle k | T^{+(2)}(p^2) | p \rangle$, определяемым равенствами $(p^2 + k^2 + 4\mu^2)/(2pk) = \pm 1$. Вклад в $\Delta(E)$ дает при этом область $-\infty \leq E \leq -\mu^2$. Последовательный анализ показывает, что член $\langle p | T^{+(n)}(p^2) | p \rangle$ имеет точку ветвления при $E = -(n\mu)^2/4$ и таким образом дает вклад в $\Delta(E)$ в области $-\infty \leq E \leq -(n\mu)^2/4$. [Заметим, что положение этих точек ветвления не зависит от l для потенциала (5.75), хотя соответствующие вклады в $\Delta(E)$ зависят от l]. Если наиболее сильное влияние на массовую амплитуду при $E > 0$ оказывает та часть $\Delta(E)$, которая расположена наиболее близко к физической области, то аппроксимация $\Delta(E)$ с помощью итерации низкого порядка может быть удовлетворительной. Важно понимать, однако, что даже в том случае, когда ΔE выражено с помощью формулы (5.75б), уравнения N/D -метода являются интегральными уравнениями, которые должны быть решены численно.

Рассмотрим один из немногих случаев, когда N/D -уравнения можно решить аналитически. Если скачок на левом разрезе равен или может быть аппроксимирован δ -функцией

$$\Delta(E) = R\delta(E - E_C) \quad (5.77)$$

с $E_C < E_0$, легко найти из уравнения (5.74)

$$N(E) = (R/\pi) D(E_C) (E_C - E)^{-1}. \quad (5.78)$$

Функция $D(E+i\epsilon)$ получается просто из равенств (5.74а) и (5.78):

$$D(E+i\epsilon) = 1 + \frac{RD(E_C)}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E'} dE'}{(E'-E_C)(E'-E-i\epsilon)}. \quad (5.78a)$$

Постоянную $D(E_C)$ можно определить непосредственно, взяв $E = E_C$ в аргументе функции D в левой части равенства

$$D(E_C) = \left[1 - \frac{R}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E'} dE'}{(E'-E_C)^2} \right]^{-1}. \quad (5.78б)$$

Из равенства (5.78а) сразу вытекает, что $D(E)-1$ — монотонная функция E для $E < 0$. Поэтому, если $RD(E_C) < 0$ и достаточно велик $|RD(E_C)|$, то $D(E)$ будет иметь единственный нуль, отвечающий полюсу для связанного состояния в амплитуде $T^+(E)$. Для $E > 0$ можно вычислить интегралы (5.78а) и (5.78б) и найти амплитуду на массовой поверхности и с помощью равенства (5.17) сдвига фаз

$$k \operatorname{ctg} \delta = -1/a + r_0 k^2/2, \quad (5.79)$$

где

$$a = 2R/[\kappa(2\pi\kappa + R)], \quad (5.79a)$$

$$r_0 = (R - 2\pi\kappa)/(R\kappa). \quad (5.79б)$$

Здесь введено обозначение $E_C = -\kappa^2$ с $\kappa > 0$. Равенство (5.79) является строгим для $\Delta(E)$ в форме (5.77). Сравнение с равенством (2.19) показывает, что величины a и r_0 можно отождествить с обычными длиной рассеяния и эффективным радиусом соответственно. Это означает, что приближение эффективного радиуса эквивалентно замене левого разреза полюсом (т. е. замене скачка на левом разрезе δ -функцией)*.

Поскольку N/D -метод связан с решением интегральных уравнений для большинства физически интересных приближений $\Delta(E)$, он не имеет каких-либо преимуществ в численных расчетах по сравнению с точным уравнением Липпмана — Швингера. Однако уравнения N/D -метода могут быть полезными, когда непосредственная аппроксимация скачка массовой амплитуды на левом разрезе проще, чем определение потенциала. Подобная ситуация может возникнуть, например, при попытках построения NN -взаимодействия на основе механизма обменов бозонами или при использовании дисперсионной теории.

* Данный полюс не имеет отношения к полюсу связанного состояния, который был использован при рассмотрении приближения эффективного радиуса в § 2.3. Этот полюс аппроксимирует эффект разреза в массовой T -матрице. Можно увидеть, что он генерирует связанное состояние в случае, когда $R < 0$ и $a > 0$. В этом случае T -матрица, выражаемая равенством (5.39б), в приближении эффективного радиуса будет иметь оба полюса при отрицательных E , соответствующих двум нулям знаменателя, один из которых аппроксимирует разрез, определяемый потенциалом, а другой отвечает связанному состоянию.

К сожалению, часто приходится использовать потенциалы, которые не являются сепарабельными потенциалами конечного ранга. В таких случаях необходимо решать уравнения Липпмана—Швингера численно. В этом параграфе мы уделим некоторое внимание этой задаче. Рассмотрим сначала уравнение Липпмана—Швингера:

$$\langle k | T(E) | k' \rangle = \langle k | V | k' \rangle - \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{q^2 |}{q^2 - E} dq \langle k | V | q \rangle \times \\ \times \langle q | T(E) | k' \rangle \quad (5.80)$$

для $E < 0$. При этом можно игнорировать символ вычисления интеграла в смысле главного значения P . Если бы интеграл в правой части (5.80) содержал известные функции, мы бы знали, как его вычислять. Следовало бы просто заменить интеграл суммой

$$\int_0^{\infty} f(q) dq \rightarrow \sum_{i=1}^N f(q_i) \omega_i, \quad (5.81)$$

где выбор точек и весов $\{f_i, \omega_i\}$ определяется структурой подынтегрального выражения. В настоящем случае под знаком интеграла находится неизвестная функция $\langle q | T(E) | k' \rangle$. В связи с этим выбор точек и весов может быть оправдан лишь *a posteriori*, когда установлено, что вычисленные значения $\langle q | T(E) | k' \rangle$ более не чувствительны к увеличению числа точек. (Такая процедура может оказаться неэкономной. Как показано Чао и Джексоном [23], часто бывает возможно определить аналитическую структуру зависимости $\langle q | T(E) | k' \rangle$ от q , не решая задачу во всей полноте. Эту информацию можно использовать для отыскания с помощью техники конформных отображений намного более эффективных выборов точек и весов). Делая замену (5.81), находим.

$$\langle k | T(E) | k' \rangle = \langle k | V | k' \rangle - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i^2 \omega_i}{q_i^2 - E} \langle k | V | q_i \rangle \times \\ \times \langle q_i | T(E) | k' \rangle. \quad (5.82)$$

Записывая уравнение (5.82) N раз для $k = q_i$, получаем N линейных уравнений относительно неизвестных $\langle q_i | T(E) | k' \rangle$. Эта система может быть решена с помощью любого подходящего метода*. Если нужно построить $\langle k | T(E) | k' \rangle$ для произвольных k' , то, возможно, более удобно найти матрицу, обратную M :

$$(M)_{ij} = \delta_{ij} + (2/\pi) q_j^2 (q_j^2 - E)^{-1} \omega_j \langle q_i | V | q_j \rangle. \quad (5.82a)$$

* См., например, работу Уилкинсона [124], где рассмотрена удобная техника решения линейных уравнений.

В этом случае величина $\langle q_i | T(E) | k' \rangle$ для произвольных k' получается теперь, как произведение матриц

$$\langle q_i | T(E) | k' \rangle = \sum_j (M^{-1})_{ij} \langle q_j | V | k' \rangle. \quad (5.826)$$

Поскольку число операций при обращении матрицы порядка N^3 , важно ограничить число N уравнений (5.82), чтобы метод был практически реализуем. В связи с этим предпочтительнее работать с такими потенциалами, для которых подынтегральные выражения в (5.82) гладки и относительно свободны от осцилляций

т. е. лучше иметь дело с суперпозициями сравнительно гладких потенциалов типа Юкавы, чем с прямоугольных ям, резкий край которых приводит к неизбежным осцилляциям подынтегральных выражений в (5.82). На рис. 16 изображен график функции $\langle \rho | T(E) | k \rangle$ для потенциала Рида в состоянии 1S_0 в зависимости от ρ . Относительная гладкость этой функции дает интуитивное оправдание того факта, что система (5.82) может быть решена с $N \leq 20$ для тех потенциалов и значений E и k' , которые представляют интерес в ядерной физике. Удобно выбирать в качестве $\{q_i, w_i\}$ точки и веса Гаусса—Лагерра или Гаусса—Эрмита, для которых есть хорошие таблицы*.

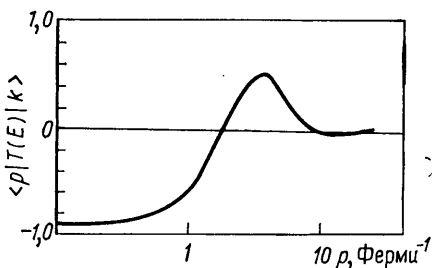


Рис. 16. График зависимости $\langle \rho | T(E) | k \rangle$ от ρ для потенциала Рида в состоянии 1S_0 при $k=1,0$ Ферми $^{-1}$, $E=-20$ МэВ

Уравнения (5.82) без дальнейших модификаций могут служить для определения энергий связанных состояний и соответствующих волновых функций. Припоминая, что T -матрица имеет простой полюс в точке $E=E_B$, отметим, что детерминант системы линейных уравнений (5.82) должен обращаться в нуль при $E=E_B$. Равенство (5.30) показывает, что решения $\langle q_i | T(E) | k \rangle$ при $E \sim E_B$ пропорциональны $\langle q_i | V | \psi_B \rangle$. С помощью (5.34. а), можно получить ненормированную волновую функцию $\langle q_i | \psi_B \rangle$, которую, благодаря использованию нами ненормированных плоских волн, можно нормировать следующим образом:

$$N(2/\pi) \sum_{i=1}^N w_i |\langle q_i | \psi_B \rangle|^2 = 1. \quad (5.83)$$

В случае $E > 0$ нельзя не учитывать символа P интеграла в смысле главного значения, так как необходимо избежать сингулярности функции Грина при $k^2=E$ в равенстве (5.80). Поэтому надо модифицировать уравнения (5.82). Подобные модификации можно осуществить разными способами с различной математической

* См., например, справочник Абрамовица и Стегана [1].

строгостью. Рассмотрим для начала особенно простой, но неприемлемый с формальной точки зрения путь ликвидации трудностей, связанных с необходимостью вычислять главное значение интеграла. Остановимся без потери общности на случае, когда $E = k^2$. Отметим, что

$$P \int_0^{\infty} \frac{dq}{q^2 - k^2} = 0. \quad (5.84)$$

Тогда можно переписать уравнение (5.80) в форме

$$\begin{aligned} \langle k | T(E) | k \rangle &= \langle k | V | k \rangle - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dq}{q^2 - k^2} [q^2 \langle k | V | q \rangle \times \\ &\times \langle q | T(E) | k \rangle - k^2 \langle k | V | k \rangle \langle k | T(E) | k \rangle], \end{aligned} \quad (5.85)$$

где опять отброшен символ P , так как подынтегральная функция теперь не сингулярна. Осуществив вновь замену (5.81) и определив $q_{N+1} = k$, получаем $N+1$ линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \langle q_j | T(E) | k \rangle &= \langle q_j | V | k \rangle - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^N \frac{w_i q_i^2}{q_i^2 - E} \langle q_j | V | q_i \rangle \times \\ &\times \langle q_i | T(E) | k \rangle + \frac{2}{\pi} k^2 \langle q_j | V | k \rangle \langle k | T(E) | k \rangle \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{q_i - E}, \end{aligned} \quad (5.85a)$$

которые можно, как и прежде, решить относительно неизвестных $\langle q_j | T(E) | k \rangle$. Подобные уравнения вызывают возражения в том смысле, что с увеличением N в матричном уравнении проявляются две компенсирующие друг друга сингулярности. Очевидно, что в пределе больших N ошибки, связанные с округлением чисел, делают уравнения (5.85a) бесполезными для численных расчетов. Однако на практике эти возражения не мешают использовать уравнения (5.85a) при $N \leq 100$ для представляющих физический интерес потенциалов и значений E и k .

Можно переписать уравнения Липпмана — Швингера в форме, в которой они явно не содержат сингулярности при положительных энергиях [69]. Рассмотрим опять случай $\langle p | T(k^2) | k \rangle$. Запишем сначала уравнение (5.80) для амплитуд $\langle p | T(k^2) | k \rangle$ и $\langle k | T(k^2) | k \rangle$, помножим последнюю из них на отношение $\langle p | V | k \rangle / \langle k | V | k \rangle$ и найдем разность. В результате придем к уравнению

$$\langle p | T(k^2) | k \rangle = \frac{\langle p | V | k \rangle}{\langle k | V | k \rangle} \langle k | T(k^2) | k \rangle - \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{q^2 dq}{q^2 - k^2} \times$$

$$\times \left[\langle p | V | q \rangle - \frac{\langle p | V | k \rangle \langle k | V | q \rangle}{\langle k | V | k \rangle} \right] \langle q | T(k^2) | k \rangle. \quad (5.86)$$

Подынтегральная функция вполне регулярна при $q \rightarrow k$ и поэтому символ P можно не учитывать. Замена (5.81) приводит к линейным уравнениям, которые, в отличие от уравнений (5.85а), совершенно свободны от сингулярностей. Подобные системы уравнений не могут быть использованы непосредственно, поскольку результирующие N уравнений содержат $N+1$ неизвестных $\langle q_i | T(k^2) | k \rangle$ и $\langle k | T(k^2) | k \rangle$, а уравнение (5.86) для $p=k$ тривиально.

В связи с этим введем функцию $f(p, k)$ с помощью соотношения

$$\langle p | T(k^2) | k \rangle = f(p, k) \langle k | T(k^2) | k \rangle \quad (5.87)$$

с очевидным условием $f(k, k) = 1$. Подстановка (5.87) в уравнение (5.86) приводит к несингулярному уравнению

$$f(p, k) = \frac{\langle p | V | k \rangle}{\langle k | V | k \rangle} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q^2 dq}{q^2 - k^2} \left[\langle p | V | q \rangle - \frac{\langle p | V | k \rangle \langle k | V | q \rangle}{\langle k | V | k \rangle} \right] f(q, k). \quad (5.88)$$

Теперь можно сделать замену (5.81) и решить уравнения относительно $f(q_i, k)$. Чтобы определить $\langle k | T(k^2) | k \rangle$, следует использовать равенства (5.87) и (5.80), что дает

$$\begin{aligned} \langle k | T(k^2) | k \rangle &= \\ &= \langle k | V | k \rangle \left/ \left[1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{q^2 dq}{q^2 - k^2} \langle k | V | q \rangle f(q, k) \right] \right. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Формула (5.89) содержит интеграл в смысле главного значения, который можно найти численно с учетом равенства $f(k, k) = 1$.

Совокупность равенств (5.87) — (5.89) обеспечивает совершенно свободный от сингулярностей практически реализуемый подход к решению уравнения Липпмана — Швингера для $E = k^2$, который нетрудно обобщить на случай произвольного положительного E .

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ФОРМАЛИЗМ. НУКЛОННЫЕ ФОРМ-ФАКТОРЫ

§ 6.1. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

В этом разделе мы рассмотрим модификации уравнения Липпмана—Швингера, связанные с требованиями релятивистской кинематики. На первый взгляд, подобные изменения имеют слабое отношение к проблеме нуклон-нуклонного рассеяния при энергии ниже первого порога неупругих процессов, поскольку в системе центра масс кинетическая энергия составляет незначительную часть от энергии покоя нуклона. Однако это не так, поскольку в феноменологических описаниях нуклон-нуклонного взаимодействия с помощью локального потенциала неизменно присутствует короткодействующее отталкивание. При рассмотрении NN -взаимодействия в рамках квантовой теории поля (данном в следующих главах) это отталкивание связывается с обменом векторными мезонами ρ , ω и ϕ . (Из наблюдаемых констант VNN -связи следует, что наибольший вклад в NN -силы на малых расстояниях вносит обмен изоскалярным ω -мезоном. То обстоятельство, что этот обмен приводит к отталкиванию, можно понять по аналогии с обменом между частицами с одинаковым зарядом более знакомой нейтральной векторной частицей — фотоном. В случае обмена ω -мезоном роль «сильного заряда» принимает барионное число.) Сильное отталкивание приводит к быстрому убыванию на расстояниях $\lesssim 0,5$ Ферми волновой функции для относительного движения двух нуклонов в S -состояниях и играет важную роль в компонентах волновой функции, отвечающих большим импульсам, при всех энергиях рассеяния. Вряд ли можно рассчитывать на то, что эти компоненты могут быть адекватно описаны нерелятивистскими уравнениями для амплитуды рассеяния, рассмотренными в предыдущей главе. В феноменологических описаниях NN -взаимодействия неадекватность нерелятивистского подхода не играет важной роли, поскольку обычно параметризация является достаточно гибкой, чтобы обеспечить количественную подгонку к экспериментальным данным. До тех пор, пока наша цель — количественное описание NN -рассеяния в терминах обмена бозонами с константами связи и массами, определенными из других экспериментов, использование нерелятивистских уравнений оправдано, так как численно они обеспечивают надежную альтернативу полностью релятивистскому описанию процесса рассеяния.

Поскольку завершенной теории сильных взаимодействий нет, а исследованию удобных приближенных релятивистских уравнений до некоторой степени спекулятивно, мы начнем с небольшой модификации уравнения Липпмана — Швингера, обеспечивающей одно обязательное требование любой релятивистской теории — амплитуда рассеяния должна удовлетворять релятивистскому соотношению унитарности на правом разрезе. Получающееся при этом уравнение — релятивистское обобщение уравнения Липпмана — Швингера — выведено многими авторами, однако уместно подчеркнуть, что оно отнюдь не единственно. Позднее в этом разделе мы обсудим этот вопрос более подробно. Для начала отметим равенство, связывающее релятивистскую амплитуду со сдвигом фазы

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{E}{km} \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta), \quad (6.1)$$

где $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$, $E = \sqrt{m^2 + k^2}$ и θ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{k}' . Релятивистское соотношение унитарности в упругом канале приводит к связи между амплитудой рассеяния вперед и полным сечением:

$$\text{Im} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \frac{mk}{4\pi E} \int |f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 d\Omega_{k'}, \quad (6.2)$$

являющейся следствием равенства (6.1). Отметим, что оба эти равенства отличаются от нерелятивистских аналогов, равенств (5.18) и (5.26) только множителями m/E . Такие множители возникают естественным путем в расчетах сечения по релятивистской теории возмущений. Они возникают вследствие использования релятивистского выражения для плотности состояний и преобразования элемента объема $k^2 dk d\Omega_k$ к $k^2 (dk/dE) dE d\Omega_k$, необходимого для устранения δ -функции по энергиям начального и конечного состояний. Рассмотрим теперь модифицированную матрицу рассеяния, такую, что на энергетической поверхности

$$\mathcal{T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{2\pi}{m} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \quad (6.3)$$

Если \mathcal{T} удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') - \frac{|2m^2}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{V(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \mathcal{T}(\mathbf{q}, \mathbf{k}')}{(q^2 - k^2 - i\epsilon) \sqrt{q^2 + m^2}}, \quad (6.4)$$

где $V(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ — матричные элементы взаимодействия, появляющиеся в аналогичных расчетах с уравнением Липпмана — Швингера, то $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ будет удовлетворять соотношению унитарности в форме (6.2).

Заметим, что, если определить вспомогательные функции соотношениями

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{\mathcal{T}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\sqrt{k^2 + m^2}} m, \quad (6.4a)$$

$$\widehat{V}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}} V(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \quad (6.4b)$$

записанное выше уравнение (6.4) приобретает вид

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \widehat{V}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') - \frac{2m}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{\widehat{V}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) T(\mathbf{q}, \mathbf{k}')}{q^2 - k^2 - i\epsilon}. \quad (6.4\text{в})$$

Это уравнение совпадает с (5.10), если вспомнить, что в гл. 5 мы условились определять энергию, как истинную энергию, помноженную на m/\hbar^2 [так что в уравнении (6.4в) m заменяется на 1]. Таким образом, экономный способ обеспечения релятивистской унитарности состоит в решении уравнения Липпмана — Швингера (5.10) с модифицированным нелокальным потенциалом (6.4б). В литературе эту процедуру называют «минимальный релятивизм». Из эстетических соображений можно использовать иное выражение:

$$\widehat{V}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{m}{(k^2 + m^2)^{1/4}} V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{1}{(k'^2 + m^2)^{1/4}}. \quad (6.4\text{г})$$

Для того чтобы увидеть, что $f(k, k')$, определяемое уравнением (6.4) удовлетворяет равенству (6.2), можно записать (6.4) в форме

$$\mathcal{T} = V + Vg\mathcal{T}, \quad (6.5)$$

где

$$g(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \frac{2m^2}{(2\pi)^3 (k^2 - q^2 + i\epsilon) \sqrt{m^2 + q^2}}. \quad (6.6)$$

Аналогично находим

$$\mathcal{T}^* = V + Vg^*\mathcal{T}^* = V + \mathcal{T}^*g^*V. \quad (6.7)$$

Объединяя равенства (6.5) и (6.7), получаем соотношения

$$\mathcal{T}^* = V + \mathcal{T}^*g\mathcal{T} + \mathcal{T}^*g^*Vg\mathcal{T}, \quad (6.8\text{а})$$

$$\mathcal{T} - \mathcal{T}^* = \mathcal{T}^*(g - g^*)\mathcal{T}. \quad (6.8\text{б})$$

Из определения g непосредственно следует, что

$$g - g^* = \frac{2i}{(2\pi)^2} \frac{m^2}{\sqrt{m^2 + q^2}} \delta(q^2 - k^2). \quad (6.9)$$

Переписав уравнение (6.8б) в виде уравнения для амплитуды рассеяния $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ и подставив в него эту явную форму для $g - g^*$, мы найдем, что амплитуда рассеяния, определенная равенствами (6.3) и (6.4), действительно удовлетворяет релятивистскому соотношению унитарности в упругом канале (6.2). Уравнение (6.4) мы будем называть уравнением Бланкенбеклера — Шугара. До сих пор мы просто постулировали это уравнение и проверили, что оно отвечает желаемому соотношению унитарности. Остается открытым вопрос о том, существуют ли другие уравнения с таким свойством, и в какой мере уравнение Бланкенбеклера — Шугара представляет справедливое приближение к корректному релятивистскому описанию процесса рассеяния. Для того,

чтобы ответить на эти вопросы, мы должны обратиться к полнотой релятивистскому уравнению Бете — Солпитера, которое мы будем рассматривать как корректное релятивистское уравнение для амплитуды рассеяния*.

Для того, чтобы избежать усложнений, связанных со спином нуклона, рассмотрим две скалярные частицы с массой m (которые мы тем не менее будем называть нуклонами), взаимодействующие посредством обмена скалярной частицей с массой μ . Изменения, связанные со спином нуклона, будут рассмотрены в § 6.2. Уравнение Бете — Солпитера для матрицы рассеяния в произвольной системе отсчета можно записать в терминах 4-импульсов отдельных нуклонов следующим образом:

$$T(p_1 p_2, p'_1 p'_2) = V(p_1 p_2, p'_1 p'_2) + \int d^4 k V(p_1 p_2, P/2 + k P/2 - k) G(P, k) T(P/2 + k P/2 - k, p'_1 p'_2), \quad (6.10)$$

где $P = p_1 + p_2$. В системе центра масс P имеет компоненты $(0, \sqrt{w})$, где \sqrt{w} — полная энергия. Релятивистский двухчастичный пропагатор $G(P, k)$ равен

$$G(P, k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \{[(P/2 + k)^2 + M^2 + i\epsilon][(P/2 - k)^2 + M^2 + i\epsilon]\}^{-1}. \quad (6.11)$$

В уравнении (6.10) V содержит сумму всех связанных двухчастичных неприводимых диаграмм. Вообще говоря, неизвестно, как просуммировать все такие диаграммы. На практике приходится брать лишь малое число диаграмм невысокого порядка. В большинстве случаев применяется лестничное приближение (т. е. взаимодействие V аппроксимируется отдельной диаграммой, описывающей однообозонный обмен). Однако при заданном наборе неприводимых диаграмм уравнение Бете — Солпитера дает сумму всех итераций для этих диаграмм подобно тому, как уравнение Липпмана — Швингера отвечает итерационному ряду по потенциалу во всех порядках. Неадекватность решения уравнения Бете — Солпитера с малым числом неприводимых диаграмм строгому решению очевидна, поскольку не существует общих соображений, на основании которых можно было бы пренебречь неприводимыми диаграммами данного порядка по сравнению с приводимыми диаграммами того же порядка, которые учтены в уравнении. В гл. 7 и 8 для специального случая нуклон-нуклонного взаимодействия показано, по какой причине развитие теории все же осуществляется в этом, как могло бы показаться непродуктивном, направлении. Короче говоря, существует надежда на то, что обмен отдельными векторными мезонами достаточно интенсивен, чтобы эффективно маскировать вклад неприводимых диаграмм более высокого порядка, отвечающих меньшим радиусам взаимодействия. Кроме того, осуществлен-

* Более детальное обсуждение уравнения Бете — Солпитера содержится в работах Бете и Солпитера [103] и Наканиши [88].

с помощью приближенных уравнений в § 6.2 перегруппировка диаграмм позволяет использовать сильную компенсацию между неприводимыми диаграммами и частями приводимых диаграмм в специальном случае обмена псевдоскалярными частицами (например, пионами) между нуклонами. Эта компенсация, которую принято называть «подавлением пар», будет более подробно рассмотрена в гл. 8.

После того, как установлены принципиальные ограничения на применение уравнения Бете — Солпитера с ограниченной суммой диаграмм в качестве потенциала V , остаются значительные практические трудности в нахождении численных решений интегральных уравнений (6.10)*. После разложения по парциальным волнам в системе центра масс уравнение Бете — Солпитера сводится к двумерному линейному интегральному уравнению. В этом случае переменными интегрирования являются величина обычного импульса k и четвертая компонента 4-вектора. Для решения уравнения Бете — Солпитера можно применить аппарат, аналогичный рассмотренному в § 5.6, однако число линейных уравнений $\sim N^2$ вместо N линейных уравнений в случае уравнения Липпмана — Швингера. Число операций при решении линейных уравнений равно по порядку кубу числа уравнений. Поэтому очевидно, что с практической точки зрения важно найти одномерные уравнения, которые обеспечивали бы надежную аппроксимацию решения уравнения Бете — Солпитера при вычислении фазовых сдвигов в области энергии ниже первого порога для неупругих процессов.

В первую очередь мы рассмотрим класс приближенных уравнений, которые наиболее просто можно получить как аппроксимации релятивистского двухчастичного пропагатора (6.11). Подобные уравнения имеют то преимущество, что они могут быть получены независимо от деталей взаимодействия (хотя, разумеется, справедливость любого отдельного приближения может зависеть от взаимодействия). Конечно, существует много приближенных уравнений, форма которых зависит от взаимодействия**. Для того, чтобы получить такие не зависящие от взаимодействия приближенные уравнения, перепишем уравнение Бете — Солпитера в форме

$$T = V + VgT + V(G - g)T, \quad (6.12)$$

где в качестве g возьмем трехмерную аппроксимацию к двухчастичному пропагатору (6.11). Для того, чтобы результирующая приближенная амплитуда T удовлетворяла минимальному требо-

* См., например, работу [72].

** Наиболее распространенное уравнение этого класса было предложено в работе Коэна [28]. В этом уравнении при интегрировании правой части (6.10) T считается не зависящим от k_0 . Было найдено, что результирующее уравнение дает простую и довольно точную оценку для сдвигов фаз, полученных в лестничном приближении для уравнения Бете — Солпитера. Что касается полного уравнения Бете — Солпитера, то приближенное уравнение Коэна не дает удовлетворительной оценки фазовых сдвигов. Кроме того, трудно найти поправки к уравнению Коэна в систематической форме.

ванию релятивизма — релятивистскому соотношению унитарности в упругом канале — достаточно потребовать, чтобы g удовлетворяло равенству (6.9). Уравнение (6.12) можно записать в форме двух уравнений:

$$T = K + KgT; \quad (6.13)$$

$$K = V + V(G - g)K, \quad (6.13a)$$

полностью эквивалентных исходному уравнению Бете — Солпитера. Подобная система уравнений может служить полезным базисом для вывода приближенных уравнений, если удастся найти такой приближенный пропагатор g , чтобы оператор $G - g$ был достаточно малым. В этом случае уравнение (6.13a) может быть решено с помощью итераций даже в тех случаях, когда константы связи слишком велики, чтобы было возможным итерационное решение уравнения (6.13). В частности, если указанная разность настолько мала, что можно приравнять K и V , мы получим уравнение

$$T = V + VgT. \quad (6.13b)$$

Для специального вида $g(P, k)$, даваемого равенством (6.6), мы видим, что уравнение Бланкенбеклера — Шугара можно рассматривать как аппроксимацию уравнения Бете — Солпитера в лестничном приближении. Объектом широкого исследования послужило семейство приближенных пропагаторов вида

$$g(P, k) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{d' - \omega - i\epsilon} f(s', \omega) \delta^{(+)} \left[\left(\frac{P'}{2} + k \right)^2 + m^2 \right] \delta^{(+)} \left[\left(\frac{P'}{2} - k \right)^2 + m^2 \right]. \quad (6.14)$$

В равенстве (6.14) 4-вектор P' определен как $(\sqrt{s'}/\sqrt{\omega})P$, а $\delta^{(+)}$ обозначает, что учитывается лишь корень с положительной энергией у аргумента δ -функции. Интеграл по s' может быть вычислен в системе центра масс, что дает

$$g(\omega, k) = \frac{1}{4(2\pi)^3} \delta(k_0) \frac{f(4E_k^2, \omega)}{E_k(E_k^2 - \omega/4 - i\epsilon)}, \quad (6.15)$$

где $E_k = \sqrt{k^2 + m^2}$. Непосредственно видно, что в случае, когда одна из переменных взята на энергетической поверхности (т. е. $E_k = \sqrt{\omega}/2$), полученное таким образом выражение для g удовлетворяет равенству (6.9) и имеет поэтому правильный скачок на разрезе, соответствующий релятивистскому соотношению унитарности. Это справедливо при любом выборе функции $f(s', \omega)$, ограниченном лишь условием $f(\omega, \omega) = 1$. Присутствие произвольной функции f подчеркивает тот факт, что имеется бесконечное число уравнений для амплитуды рассеяния, удовлетворяющих требованию релятивистского соотношения унитарности в упругом канале.

Для частного случая $f(s', \omega) \equiv 1$ равенство (6.15) сводится к выбору приближенного пропагатора в форме (6.6), сделанному Бланкенбеклером и Шугаром. Функция вида

$$f(s', \omega) = \frac{\sqrt{\omega} + \sqrt{s'}}{2\sqrt{\omega}} \quad (6.16)$$

также удовлетворяет ограничению, накладываемому соотношением унитарности $f(\omega, \omega) = 1$, и приводит к предложенному Томпсоном выбору приближенного пропагатора [114].

Запись в форме (6.13) никоим образом не исчерпывает класса возможных трехмерных аппроксимаций полностью релятивистского пропагатора, отвечающих релятивистскому соотношению унитарности. Другое подходящее семейство может быть получено путем модификации аргумента δ -функции в равенстве (6.14). Соответствующее выражение

$$g(P, k) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' - \omega - i\epsilon} f(s', \omega) \delta^{(+)} \left[\left(\frac{P}{2} + k \right)^2 + m^2 \right] \delta^{(+)} \left[\left(P' - \frac{P}{2} - k \right)^2 + m^2 \right] \quad (6.17)$$

вновь ковариантно. Интеграл в (6.17) также может быть вычислен в системе центра масс. Тогда получаем формулу

$$g(\omega, k) = -\frac{1}{4(2\pi)^3} \delta(k_0 + \sqrt{\omega}/2 - E_k) \frac{f(4E_k^2, \omega)}{E_k(E_k^2 - \omega/4 - i\epsilon)}, \quad (6.18)$$

где по-прежнему $f(s', \omega)$ должно удовлетворять условию $f(\omega, \omega) = 1$, чтобы имело место равенство (6.9). На энергетической поверхности ($E_k = \sqrt{\omega}/2$) равенство (6.18) идентично равенству (6.15) и вновь удовлетворяет релятивистскому соотношению унитарности. Специальный выбор $f(s', \omega) = 1$ приводит к уравнению, предложенному в работе Эркеленца и Холинда [32]. Если взять $f(s', \omega)$ в форме (6.16), то мы приходим к уравнению, введенному Гроссом [44], которое было также применено к рассеянию частиц неравных масс. Наконец отметим, что выбор

$$f(s', \omega) = (\sqrt{s'} + \sqrt{\omega}) / (2\sqrt{s'}) \quad (6.19)$$

ведет к уравнению, предложенному Кадышевским [64].

Различие между семействами приближений, даваемых равенствами (6.15) и (6.18), заложено в аргументе δ -функций, позволяющих свести четырехмерное уравнение (6.13) к трехмерному уравнению для амплитуды рассеяния. Для семейства приближений типа (6.15) бозон, которым обмениваются нуклоны, переносит только трехмерный импульс. Таким образом, оба нуклона в промежуточных состояниях одинаково удалены от массовой поверхно-

сти, а матричные элементы взаимодействия не содержат запаздывания, естественно связанного с релятивистским описанием обмена частицей. Вот почему имеются, по крайней мере эстетические, основания рассмотреть приближенные уравнения для амплитуды рассеяния, отвечающие равенству (6.18), которые учитывают эффекты запаздывания. В этом случае виртуальный бозон переносит 4-импульс таким образом, что один из нуклонов остается на массовой поверхности во всех промежуточных состояниях так же, как в начальном и конечном состояниях. (Сохранение 4-импульса в каждой вершине делает невозможным нахождение обеих частиц на массовой поверхности во всех промежуточных состояниях.) Для рассеяния частиц с неодинаковыми массами естественно принять такое несимметричное рассмотрение, в котором тяжелая частица берется на массовой поверхности.

Итак, перед нами бесконечное множество трехмерных уравнений для амплитуды рассеяния, каждое из которых ковариантно и удовлетворяет релятивистскому условию унитарности в упругом канале. Естественно задать вопрос, какое из этих уравнений дает наилучшее приближение для сдвигов фаз и амплитуд рассеяния, полученных из уравнения Бете — Солпитера. Проблема имеет слишком много «степеней свободы», чтобы можно было рассчитывать на однозначный ответ. Константа связи и масса обмениваемого бозона или бозонов, число учитываемых неприводимых диаграмм, рассматриваемая область кинематических переменных — все это играет роль в установлении наилучшего приближенного уравнения. Поскольку нас в конечном счете интересуют сдвиги фаз при низких энергиях, разумно исследовать матричные элементы T -матрицы, взятой целиком на массовой поверхности, вблизи порога для различных вариантов выбора g , и сравнить их с результатом, получаемым при использовании корректного пропагатора (6.11). Если рассмотреть решение уравнений (6.10) и (6.13) методом итераций, то очевидно, что первая ошибка возникает вследствие замены VGV на VgV . Отличие между этими вторыми борновскими приближениями дает истинную меру расхождения точной и приближенной T -матриц лишь в пределе малых бозон-нуклонных констант связи. Соответствующую разность легко найти в аналитическом виде. На практике сравнение вторых борновских приближений дает полезную качественную информацию об относительных преимуществах того или иного выбора g даже в тех случаях, когда константы связи достаточно велики.

В связи с этим сделаем расчет вторых борновских членов для случая, когда V соответствует обмену одной частицей:

$$V^{(2)}(p_1, p_2, p'_1, p'_2) = \frac{\lambda^2}{(p'_1 - p_1)^2 + \mu^2}. \quad (6.20)$$

Если передается только трехмерный импульс, равенство (6.20) сводится к хорошо известному матричному элементу для потенциала Юкавы. Хотя величины $V^{(2)}GV^{(2)}$ и $V^{(2)}gV^{(2)}$ можно вычислить

точно [127], целесообразно рассмотреть их поведение вблизи порога в виде разложения по степеням μ/m

$$V^{(2)}gV^{(2)} = \frac{-\lambda^4}{32\pi^2\mu^2m^2} [\alpha(m/\mu) + \beta + \gamma(\mu/m) + \delta(\mu/m)^2 + \dots]. \quad (6.21)$$

Результаты такого вычисления приведены в табл. 6.1 для уравнений Бланкенбеклера — Шугара, Томпсона, Гросса, Эркеленца —

Таблица 6.1

Сравнение порогового поведения $V^{(2)}gV^{(2)}$ для различных приближенных уравнений

Уравнение	α	β	γ	δ
Бланкенбеклера—Шугара	π	0	$-\pi/2$	5/3
Томпсона	π	0	$-\pi/4$	5/3
Гросса	π	0	$\pi/8$	5/12
Эркеленца—Холинда	π	0	$-\pi/8$	7/12
Кадышевского	π	0	$-3\pi/8$	$5/12 + \pi/2$
Коэна	π	$-2/3$	$-13\pi/16$	—
Бете—Солпитера (лестничное приближение)	π	-1	$\pi/8$	$-1/12$
Бете—Солпитера* (учет всех членов до 4-го порядка включительно)	π	0	$-\pi/8$	5/12

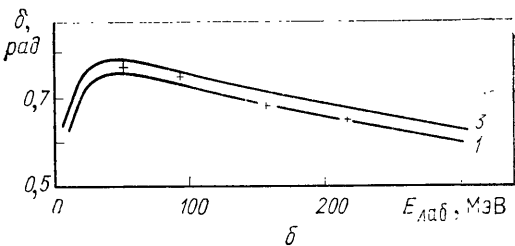
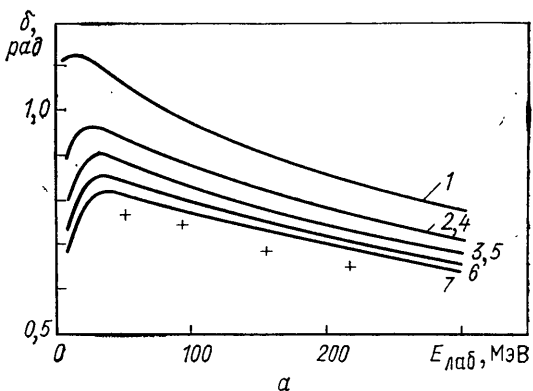
* Эта строка таблицы отвечает учету $V^{(2)}gV^{(2)}$ плюс $V^{(4)}$, см. неприводимую диаграмму четвертого порядка, изображенную на рис. 18.

Холинда, Кадышевского, Коэна и Бете — Солпитера. Из этой таблицы видно, что все приближенные уравнения дают одно и то же значение α , совпадающее со значением, полученным из уравнения Бете — Солпитера. Это согласие является следствием того факта, что рассмотренные приближенные уравнения удовлетворяют релятивистскому соотношению унитарности в упругом канале. Все уравнения типа (6.136) приводят к величине β , равной нулю, в отличие от результата, получаемого из уравнения Бете — Солпитера в лестничном приближении. Это расхождение обусловлено пренебрежением вкладами бозонного полюса в приближениях, не зависящих от взаимодействия. Подобные вклады частично учтены в уравнении Коэна, и результаты, приведенные в табл. 6.1, явно показывают, что уравнение Коэна является наилучшим приближением к уравнению Бете — Солпитера в лестничном приближении, когда λ^2 и μ/m малы. То обстоятельство, что этот вывод остается справедливым при удалении от порога и в случаях, когда второе борновское приближение не обеспечивает адекватного описания рассеяния, а μ/m не близко к нулю, продемонстрировано на рис. 17, а, где приведены результаты расчета фазовых сдвигов для S-волны при значениях $\mu=2,1$ Ферми⁻¹ и $\lambda=27,6$ Ферми⁻¹ с использованием в качестве значения массы нуклона $m=4,76$ Фер-

ми⁻¹. В этом случае остальные уравнения не обеспечивают доста-точно хорошего приближения к фазовым сдвигам для уравнения Бете — Солпитера, и их применение нецелесообразно. Отклонение сдвигов фаз от точных для различных приближенных уравнений нетрудно объяснить как следствие отклонений вторых борновских членов, приведенных в табл. 6.1, от значений, полученных из уравнения Бете — Солпитера в лестничном приближении.

Рис. 17. Зависимость от энергии фазовых сдвигов δ в S -волне, вычисленных при значениях параметров $\mu = 2,1$ Ферми⁻¹ и $\lambda = 27,6$ Ферми⁻¹ с помощью уравнения (6.136) для случаев уравнений:

а — Гросса 1; Эркеленца—Холин-да 2; Кадьшевского 3; Томпсона 4; Бланкенбеклера—Шугара 5; решение уравнения Бете—Солпитера в лестничном при-ближении 6 и Козна 7; резуль-таты решения уравнения Бете—Солпитера показаны крестиками; б — те же вычисления с по-мощью уравнений, полученных после взятия одной итерации. Отметим, что результаты для случаев 2, 4, 5 расположены между кривыми 1 и 3



Результаты, аналогичные указанным в табл. 6.1, можно полу-чить путем разложения по степеням μ/m приближенных T -матриц на пороге во всех порядках теории возмущений в случае, когда V дано равенством (6.20). В частности, для борновского члена n -го порядка из уравнений типа (6.136) главное слагаемое пропорционально $(m/\mu) (\lambda^2/\mu m)^n$, независимо от конкретного выбора g в согласии с результатами, получаемыми из уравнения Бете — Солпитера в лестничном приближении при условии, что пропагатор удовлетворяет равенству (6.9), выражающему релятивистское условие унитарности. Следующее слагаемое зависит от g , и его отношение к главному слагаемому порядка $(\mu/m)^2$. Таким обра-зом, можно видеть, что все уравнения типа (6.136) дают сдвиги фаз, отличие между которыми составляет величину порядка $(\mu/m)^2$ даже в тех случаях, когда значение $\lambda^2/\mu m$ становится боль-шим. Результирующие сдвиги фаз могут отличаться от получен-ных из уравнения Бете — Солпитера в лестничном приближении на величину порядка μ/m .

Возвращаясь к уравнениям (6.13), мы видим, что приближенные уравнения могут быть улучшены путем дополнительного итерирования уравнения (6.13а). В частности, более хорошее приближение к уравнению Бете — Солпитера в лестничном приближении получается, если взять

$$K = V^{(2)} + V^{(2)}(G - g)V^{(2)}. \quad (6.22)$$

В этом случае приближенные T -матрицы отличаются от точных только членами порядка λ^6 . Соответствующие расчеты фазовых сдвигов для S -волны были выполнены для всех приближенных уравнений, перечисленных в табл. 6.1 (за исключением вышеупомянутого уравнения Коэна), после взятия одной итерации. Результаты показаны на рис. 17, б только для уравнений Гросса (1) и Кадышевского (3). Для остальных однократно итерированных уравнений фазовые сдвиги лежат между этими двумя кривыми, т. е. еще ближе к результатам для уравнения Бете — Солпитера в лестничном приближении. Результаты, качественно подобные приведенным на рис. 17, получаются также с потенциалом в виде суперпозиции потенциалов однобозонного обмена в форме (6.20) с константами связи и массами, взятыми в грубом соответствии с величинами, найденными из соответствующего описания нуклон-нуклонного взаимодействия в 1S_0 -состоянии [127].

Подведем итог результатам, касающимся точности трехмерных аппроксимаций уравнения Бете — Солпитера в лестничном приближении. Ни одно из рассмотренных здесь приближений для релятивистского пропагатора не является достаточно надежным, чтобы можно было получить правильные значения сдвигов фаз для S -волны при малых энергиях из уравнений (6.13б) с V , равным $V^{(2)}$. Для всех выборов g , рассмотренных здесь, можно получить достаточно точные значения этих фаз при использовании K в форме (6.22), отвечающей взятию одной итерации. Хотя и очевидно, что использование подобных однократно итерированных форм связано с громоздкими численными расчетами, в гл. 8 мы увидим, что при нахождении вклада двухпионного обмена в нуклон-нуклонное взаимодействие мы вынуждены будем во всяком случае учитывать слагаемое $V^{(2)}(G - g)V^{(2)}$ явно. Техника дисперсионных соотношений позволит нам найти сумму (приводимой) квадратной диаграммы и (неприводимой) перекрестной квадратной диаграммы (см. рис. 18, а и б) из данных о πN -рассеянии. Квадратной диаграмме соответствует не что иное, как слагаемое $V^{(2)}GV^{(2)}$. В связи с этим, чтобы избежать двойного счета, необходимо явно исключить член $V^{(2)}gV^{(2)}$, возникающий при итерациях взаимодействия, связанного с однопионным обменом. Таким образом, учет двухпионного обмена, реализованный в гл. 8, можно понимать как выбор K в форме

$$K = V^{(2)} + V^{(4)} + V^{(2)}(G - g)V^{(2)}, \quad (6.23)$$

где $V^{(4)}$ — неприводимая диаграмма четвертого порядка, изображенная на рис. 18, б.

Как указывалось выше, больший интерес представляет надежная аппроксимация решений полного уравнения Бете — Солпитера, чем решений лестничного приближения для этого уравнения. Поэтому полезно сравнить пороговые значения вторых борновских членов для приближенных уравнений типа (6.13б) с соответствующей амплитудой для уравнения Бете — Солпитера с полным учетом вкладов от диаграмм четвертого порядка. Наряду с обычными диаграммами, изображенными на рис. 18, *а* и *б* (квадратной и

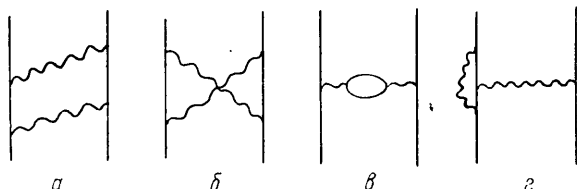


Рис. 18. Диаграммы, учитывающие вклады во взаимодействие порядка λ^4

перекрестной), следует принимать во внимание диаграммы (рис. 18, *в* и *г*), включающие поправки к собственно энергетической и к вершинной частям. Однако главный эффект подобных диаграмм может быть учтен путем перенормировки масс и констант связи, и мы пока не будем их рассматривать. Сумма вкладов квадратной и перекрестной диаграмм (см. рис. 18, *а* и *б*) учтена в последней строчке табл. 6.1. Сразу отметим, что имеется полная компенсация между вкладами бозонного полюса для этих диаграмм с коэффициентом β в равенстве (6.21). В результате первые два слагаемых равенства (6.21) для всех уравнений совпадают с соответствующими слагаемыми полного уравнения Бете — Солпитера. Уравнение Коэна не согласуется в этом порядке с уравнением Бете — Солпитера и далее не рассматривается. Сравнение членов более высокого порядка в табл. 6.1 показывает, что выбор пропагатора в (6.13б) в форме Эркеленца—Холинда должен обеспечивать наилучшее приближение к результатам для полного уравнения Бете — Солпитера. Наиболее убедительным способом проверки этого вывода было бы сравнение фазовых сдвигов, полученных из уравнения Эркеленца—Холинда, с найденными из уравнения Бете—Солпитера с $V = V^{(2)} + V^{(4)}$. Неприводимый член четвертого порядка $V^{(4)}$ в рассматриваемой здесь модели скалярных нуклонов, взаимодействующих посредством обмена скалярных частиц, имеет вид

$$V^{(4)} = \frac{i\lambda^4}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{[(p_1 - q)^2 + m^2 + i\epsilon][(p_1 + p_2 - q)^2 + \mu^2 + i\epsilon] \times \rightarrow \rightarrow \times [(q - p_2')^2 + m^2 + i\epsilon][q^2 + \mu^2 + i\epsilon]} \quad (6.24)$$

Поскольку нужных решений нет, мы исследуем зависимость фазовых сдвигов, полученных путем решения уравнения (6.13), от выбора g , рассмотренных выше, с оператором K в форме (6.23)

и записанным выражением (6.24) для $V^{(4)}$. Результаты соответствующих расчетов показаны на рис. 19 для того же набора констант связи и масс, которые были использованы при вычислении фаз, изображенных на рис. 17. Как и ожидалось, из результатов порогового анализа (см. табл. 6.1), фазовые сдвиги, получаемые из уравнения Эркеленца — Холинда по существу не изменяются при переходе от $K=V^{(2)}$ (как для рис. 17, а) к оператору K в форме (6.23). Поскольку детали в результатах порогового анализа могут

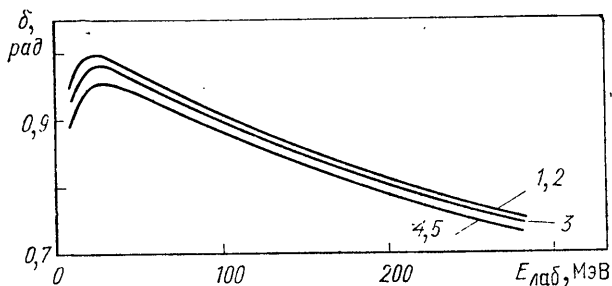


Рис. 19. Зависимость от энергии фазовых сдвигов в S -волне (см. рис. 17 а), вычисленных с использованием равенства (6.23) для величины K

измениться при учете спиновых эффектов, по-видимому, более важно, что изображенные на рис. 19 сдвиги фаз изменяются в зависимости от выбора g в значительно меньших пределах по сравнению с результатами на рис. 17, а, полученными для неитерированных уравнений. Сопоставление с рис. 17, б дает основание надеяться, что разброс результатов на рис. 19 характеризует меру качества приближения, достигаемого при вычислении сдвигов фаз с помощью уравнения Бете — Солпитера с V , равным сумме $V^{(2)}$ и $V^{(4)}$. Аналогичные результаты были получены с оператором K в форме (6.23) для случая обмена двумя частицами [127], массы и константы связи для которых подогнаны по данным о нуклон-нуклонном рассеянии в 1S_0 -состоянии.

В связи с изложенным мы будем считать, что надежные приближения к сдвигам фаз для уравнения Бете — Солпитера при низких энергиях нуклон-нуклонного рассеяния могут быть получены для любого из рассмотренных уравнений при условии, что эффективное взаимодействие взято в форме (6.22) или (6.23), т. е. с использованием первой итерации для K .

§ 6.2. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ФЕРМИОНОВ

Для простоты отбор надежных трехмерных релятивистских уравнений для амплитуды рассеяния осуществлялся в предыдущем параграфе для модели, в которой и рассеиваемые частицы, и мезоны, которыми эти частицы обмениваются при взаимодействии, рассматривались как бесспиновые скалярные частицы.

В этом разделе мы затронем главные изменения кинематического характера, связанные с тем, что нуклоны являются фермионами со спином $1/2$. Сосредоточим внимание на изменениях в двухнуклонном пропагаторе. Связанные со спином нуклона изменения в операторе V по сравнению с простой формой (6.20) будут рассмотрены в следующей главе.

Двухфермионный пропагатор можно записать в системе центра масс фермионов в виде

$$G(P, k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{\gamma^\mu (P/2 + k)_\mu - m + i\epsilon} \right]^{(1)} \left[\frac{1}{\gamma^\mu (P/2 - k)_\mu - m + i\epsilon} \right]^{(2)}, \quad (6.25)$$

где по-прежнему P можно записать через полную энергию в системе центра масс \sqrt{w} , как $(0, i\sqrt{w})$. Явное представление матриц γ дано в табл. 7.3. В равенстве (6.25) мы не выписали спиновых и изоспиновых индексов нуклонов. Однако при использовании данного пропагатора в расчетах по теории возмущений либо в решении уравнения Бете—Солпитера для фермионов необходимо брать суммы по всем возможным комбинациям квантовых чисел спина и изоспина, а также по состояниям с положительной и отрицательной энергией двух нуклонов, наряду с обычным интегрированием по 4-импульсу. Сходство между пропагаторами в форме (6.25) и (6.11) можно усилить, помножив числитель и знаменатель выражения (6.25) на $[i\gamma^\nu (P/2 + k)_\nu - m]^{(1)} [i\gamma^\nu (P/2 - k)_\nu - m]^{(2)}$ и воспользовавшись обычными соотношениями антикоммутиации для матриц γ . В результате получим

$$G(P, k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \left[\frac{i\gamma^\mu (P/2 + k)_\mu - m}{(P/2 + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \right]^{(1)} \left[\frac{i\gamma^\mu (P/2 - k)_\mu - m}{(P/2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \right]^{(2)}. \quad (6.26)$$

Отметим, что в специальном случае, когда нуклоны находятся на массовой поверхности (т. е. когда $(P/2 \pm k)^2 = m^2$), операторы $[i\gamma^\mu (P/2 \pm k)_\mu - m]$ становятся проекционными операторами, они проектируют спинорные решения уравнения Дирака для свободных частиц с обеими возможными ориентациями спина на состояние с положительной энергией. Таким образом, мнимая часть от $G(P, k)$ на правом разрезе в упругом канале (которая является альтернативным способом выражения релятивистского условия унитарности) отличается от мнимой части пропагатора в форме (6.11) только присутствием указанного проекционного оператора, выделяющего состояния с положительной энергией, для каждого из нуклонов.

Соображения, позволившие ввести в § 6.1 трехмерные приближенные пропагаторы, остаются в силе и для фермионов. Нетрудно убедиться, что выбор $g(P, k)$ в виде

$$g(P, k) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' - w - i\epsilon} f(s', w) \delta^{(+)} \left[\left(\frac{P'}{2} + k \right)^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + m^2 \delta^{(+)} \left[\left(\frac{P'}{2} - k \right)^2 - m^2 \right] \left[i\gamma^\mu \left(\frac{P'}{2} + k \right)_\mu - \right. \\
 & \left. - m \right]^{(1)} \left[i\gamma^\mu \left(\frac{P'}{2} - k \right)_\mu - m \right]^{(2)}
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

опять приводит к ковариантному выражению, при этом $g(P, k)$ имеет тот же скачок на правом разрезе в упругом канале, что и $G(P, k)$ из (6.26), при условии $f(\omega, \omega) = 1.4$ -Вектор P' и $\delta^{(+)}$ имеют тот же смысл, что и в предыдущем параграфе. Можно вычислить интеграл по s' в (6.27) в системе центра масс. Получаем следующую формулу для пропагатора:

$$\begin{aligned}
 g(\omega, k) = & - \frac{1}{4(2\pi)^3} \frac{\delta(k_0) f(4E_k^2, \omega)}{E_k (E_k^2 - \omega/4 - i\varepsilon)} [-\gamma^0 E_k - i\gamma k - m]^{(1)} \times \\
 & \times [-\gamma^0 E_k - i\gamma k - m]^{(2)},
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

которая отличается от равенства (6.14) для скалярных частиц только множителями в квадратных скобках — проекционными операторами, явно выделяющими состояния с положительной энергией*. Таким образом, семейство приближенных пропагаторов, полученных в предыдущем разделе, обобщается на случай фермионов путем включения этих проекционных операторов. Аналогично можно обобщить и семейство пропагаторов, определенных равенством (6.17), путем простого введения множителей

$$[i\gamma^\mu (P/2 + k)_\mu - m]^{(1)} [i\gamma^\mu (P' - P/2 - k)_\mu - m]^{(2)} \tag{6.29}$$

в подынтегральное выражение. Проинтегрировав по s' , мы получаем пропагаторы, отличающиеся от (6.18) лишь появлением тех же проекционных операторов для состояний с положительной энергией, которые содержатся в равенстве (6.28).

Наряду с упомянутым выше произволом в выборе функции $f(s', \omega)$ и аргументов δ -функций, отвечающих состояниям с положительной энергией, в случае фермионов возникает дополнительная «степень свободы». Помимо проекционных операторов, выделяющих на массовой поверхности состояния с положительной энергией, можно ввести в выражение для пропагатора (6.14) или (6.17) проекционные операторы для состояний с отрицательной энергией. Для того чтобы выполнялось релятивистское соотношение унитарности, надо дополнить члены, включающие такие проекционные операторы коэффициентами, зависящими от ω и E_k , которые обращаются в нуль для случая $E_k = \omega/2$. Чтобы понять нежелательность введения этого дополнительного произвола, надо, забегаая вперед, обсудить некоторые свойства диаграмм пионного обмена второго и четвертого порядков. Более детально они будут рассмотрены в следующих главах. Дело в том, что отвечающие состояниям с положительной энергией спинорные матричные

* Для специального случая $f(s', \omega) = 1$ такое обобщение впервые было рассмотрено в работе Партови и Ломона [96].

элементы для однопионного обмена оказываются значительно меньше, чем можно было бы ожидать из относительно больших констант связи и довольно малой массы пиона. Их малость обусловлена тем, что из-за псевдоскалярного характера связи в спиновых матричных элементах объединяются «большие» и «малые» компоненты спиноров, отвечающих состояниям с положительной энергией. Поэтому введение в промежуточных состояниях даже не очень больших компонент спиноров, отвечающих состояниям с отрицательной энергией, приведет к значительному усилению взаимодействия типа однопионного обмена и резким изменениям в вычисленных сдвигах фаз. Исследуя отвечающий диаграмме четвертого порядка вклад пионов во взаимодействие [т. е. члены четвертого порядка в (6.23)], мы увидим, что возникает драматическая компенсация между очень большими частями $V^{(2)}GV^{(2)}$ и неприводимой диаграммой $V^{(4)}$, содержащей спиноры для состояний с отрицательной энергией. Эта компенсация хорошо знакома и составляет известную долю того, что обычно называют подавлением пар. Включение в приближенный пропагатор спиновых компонент, отвечающих отрицательным энергиям, частично разрушило бы компенсацию членов четвертого порядка во взаимодействии вида

$$V^{(4)} + V^{(2)}(G - g)V^{(2)}.$$

Следует ожидать, что неитерированные приближенные уравнения в форме (6.13б) будут давать наилучшее приближение к сдвигам фаз для уравнения Бете—Солпитера в тех случаях, когда подобные поправки четвертого порядка будут сделаны по возможности малыми. Основываясь на подавлении пар, мы ожидаем, что это будет иметь место и в случае, когда в выбранном g содержатся, как в (6.27), только проекционные операторы, выделяющие состояния с положительной энергией. Наилучший выбор функции $f(s', \omega)$ и аргумента δ -функции, соответствующей положительной энергии (подобно тому, как это было сделано путем анализа вблизи порога в § 6.2), будет теперь зависеть от квантовых чисел обмениваемого бозона, наряду с константами связи и массами. Будем надеяться, что вычисленные сдвиги фаз, как и в случае скалярных частиц, окажутся нечувствительными к этому выбору при условии, что использована форма приближенных релятивистских уравнений для амплитуды рассеяния, возникающая после взятия одной итерации.

§ 6.3. НУКЛОННЫЕ ФОРМ-ФАКТОРЫ

Потенциал однопионного обмена, построенный из элементарных соображений в (1.11), содержит член

$$-f^2 (\tau_1 \tau_2) (\sigma_1 \sigma_2) (4\pi/\mu^2) \delta(r),$$

помимо более знакомого слагаемого Юкавы. В импульсном пространстве такое сингулярное поведение проявляется в том, что

амплитуда, соответствующая (1.11), не исчезает в пределе бесконечного переданного импульса. В гл. 7 мы увидим, что эта проблема расходимости является общей для амплитуд однобозонного обмена в случаях псевдоскалярных, скалярных и векторных мезонов. Все эти амплитуды имеют плохое асимптотическое поведение. Мы увидим, что они расходятся для рассеяния вперед и назад, когда трехмерный импульс нуклона становится большим. Подобные расходящиеся амплитуды математически непригодны, если мы хотим вычислить соответствующую лестничную сумму, используя одно из унитаризованных уравнений § 6.2 и технику численных расчетов, подобную рассмотренной в § 5.6. Еще более серьезен тот факт, что, как показал Мандельстам [81], уравнение Бете—Солпитера в лестничном приближении для нуклон-нуклонного рассеяния имеет решения только для ограниченной области значений мезон-нуклонной константы связи.

Расходимости указанного типа устраняются либо путем отбрасывания расходящихся членов, либо путем искусственного введения форм-факторов, достаточно быстро убывающих в асимптотике, чтобы обеспечить существование решений рассматриваемых унитаризованных уравнений. (В этой связи отметим, что степень сходимости, обеспечиваемая подобными форм-факторами, в значительной мере зависит от конкретного выбора унитаризованного уравнения). Такой подход вполне удовлетворителен до тех пор, пока бозонные константы связи и массы являются просто удобными параметрами в существенно феноменологическом описании данных по нуклон-нуклонному рассеянию. Его нельзя считать удовлетворительным, когда бозонным константам связи и массам приписываются их экспериментальные значения, если только нам не удастся показать, что результирующие сдвиги фаз нечувствительны к способу ликвидации расходимостей. Как мы покажем в § 7.3, это в действительности не так для низких парциальных волн. Очевидно, что искусственное введение форм-факторов не облегчает понимания природы физических процессов, приводящих к регуляризации сингулярного поведения амплитуд. Разумно предположить, что расходимости в амплитудах однобозонного обмена можно устранить путем включения, возможно бесконечно большего, числа неприводимых диаграмм более высокого порядка, которыми мы искусственно пренебрегли при рассмотрении унитаризованных уравнений в лестничном приближении. Хотя мы не умеем строго суммировать все отброшенные неприводимые диаграммы, тем не менее успех эйконального приближения в квантовой электродинамике дает основание считать, что определенные неограниченные классы диаграмм, включающих обмены нейтральными векторными мезонами, могут быть просуммированы в приближении, справедливом в пределе больших переданных импульсов. (Разумно ожидать, что в этом пределе конечная масса векторного мезона не внесет существенных усложнений и может даже подавить инфракрасные расходимости.) Более того, экспоненциальное затухание вершинной функции

(рис. 20, б) в квантовой электродинамике, вычисленной в эйкональном приближении, позволяет предположить, что аналогичные расчеты для случая сильного взаимодействия с учетом нейтральных векторных мезонов могут обеспечить требуемое асимптотическое подавление амплитуд нуклон-нуклонного рассеяния.

Эйкональное приближение дает возможность приближенно просуммировать во всех порядках все диаграммы, подобные изображенным на рис. 20, если волнистая линия соответствует «мягкому» нейтральному векторному мезону (ρ^0 , ω или ϕ), а пунктир-

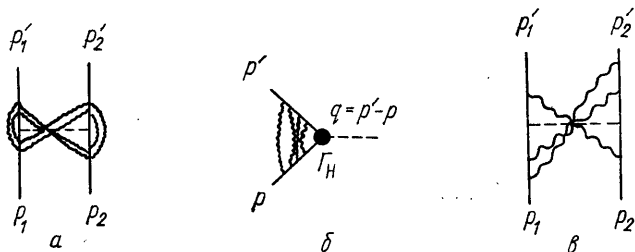


Рис. 20. Диаграммы:

а — типичная, суммируемая в эйкональном приближении; б — для вершинной части; в — перекрестно-лестничная

ная линия — обычному процессу однобозонного обмена типа описанного, например, в § 7.2. В целях демонстрации возможностей эйконального приближения рассмотрим более простую сумму диаграмм для вершинной функции. В частности, общий вклад в вершинную функцию механизма, в котором нуклон p испускает N векторных мезонов до взаимодействия Γ_H , изображенного на рис. 20 жирной точкой, а затем, после взаимодействия Γ_H , эти мезоны поглощаются нуклоном p' , можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \Gamma_N = & [-ig^2/(2\pi)^4]^N \int \dots \prod_{i=1}^N \frac{d^4 k_i}{k_i^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{\gamma^{v_1} (\widehat{p}' - \widehat{k}_1 + m)}{(p' - k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\
 & \times \frac{\gamma^{v_2} (\widehat{p}' - \widehat{k}_1 - \widehat{k}_2 + m) \gamma^{v_3}}{(p' - k_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \dots \frac{\gamma^{v_N} (\widehat{p}' - \widehat{k}_1 - \dots - \widehat{k}_N + m)}{(p' - k_1 - \dots - k_N)^2 - m^2 + i\epsilon} \times \\
 & \times \Gamma_H(p, p') \frac{(\widehat{p} - \widehat{k}'_1 - \dots - \widehat{k}'_N + m) \gamma_{v'_N}}{(p - k'_1 - \dots - k'_N)^2 - m^2 + i\epsilon} \dots \gamma_{v'_2} \times \\
 & \times \frac{(\widehat{p} - \widehat{k}'_1 + m)}{(p - k'_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_{v'_1}, \quad (6.30)
 \end{aligned}$$

где v'_1, \dots, v'_N и k'_1, \dots, k'_N — результаты некоторых перестановок v_1, \dots, v_N и k_1, \dots, k_N . Использовано также обозначение $\widehat{p} = \gamma^\mu p_\mu$. В эйкональном приближении импульс, передаваемый в каждой вершине, отвечающей поглощению или испусканию

мезона, должен быть мал по сравнению с импульсом $p-p'$, переданным в «жесткой» вершине, $\Gamma_N(p, p')$. Именно в этом смысле мы применяем термин «мягкий» к векторным мезонам. В. В. Судаков показал [111], что поведение каждого Γ_N в пределе больших переданных импульсов $t = -(p-p')^2$ определяется именно мягкими векторными мезонами. Эйкональное приближение состоит в следующем: 1) отбрасывают все члены \widehat{k} в нуклонных пропагаторах и 2) пренебрегают величинами $k_i k_j$ в знаменателях нуклонных пропагаторов. Выполнив соответствующие действия, приходим к выражению:

$$\Gamma_N = \left[\frac{-ig^2}{(2\pi)^4} \right]^N \int \dots \prod_{i=1}^N \frac{d^4 k_i}{k_i^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{\gamma^{v_1} (\widehat{p}' + m)}{-2p' k_1} \times$$

$$\times \frac{\gamma^{v_2} (\widehat{p}' + m)}{-2p' (k_1 + k_2)} \dots \frac{\gamma_{v_2'} (\widehat{p} + m)}{-2pk_1'} \gamma_{v_1'}.$$
 (6.31)

Если нуклоны находятся на массовой поверхности (и, следовательно, описываются волновыми функциями, являющимися решениями уравнения Дирака для свободных частиц, то можно, воспользовавшись соотношениями антикоммутиации для γ -матриц, всюду в равенстве (6.31) сделать замены:

$$\gamma^{v_1} (\widehat{p}' + m) \rightarrow 2p'^{v_1} \quad \text{и} \quad (\widehat{p} + m) \gamma_{v_1'} \rightarrow 2p_{v_1'}.$$

В результате после нахождения N скалярных произведений получим

$$\Gamma_N = \left[\frac{-ig^{24} p p'}{(2\pi)^4} \right]^N \int \dots \int \prod_{i=1}^N \frac{d^4 k_i}{k_i^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{1}{-2p' k_1 + i\epsilon} \times$$

$$\times \frac{1}{-2p' (k_1 + k_2) + i\epsilon} \dots \Gamma_N(p, p') \times$$

$$\times \frac{1}{\sum_{j=1}^N -2pk_j' + i\epsilon} \dots \frac{1}{(-2pk_1' + i\epsilon)}.$$
 (6.32)

Рассмотрим отдельный мезон, k_i , поглощаемый нуклоном p' . Суммируя по всем возможным вершинам на нуклонной линии p , из которых мезон может быть испущен, и используя тождество

$$\frac{1}{a} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1}{a + a_1 + \dots + a_j} + \sum_{m=1}^{N-1} \prod_{k=1}^m \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} \times$$

$$\times \prod_{j=m}^{N-1} \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_j + a} = \frac{1}{a} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_j},$$
 (6.33)

можно вынести за скобки множитель, содержащий зависимость произведения пропагаторов для нуклона p от импульса k_i . Произведя такое суммирование по всем возможным расположениям каждой из вершин на нуклонной линии p , получаем:

$$\Gamma_N(p, p') = \left[\frac{-ig^2 4pp'}{(2\pi)^4} \right]^N \int \dots \int \left[\prod_{i=1}^N \frac{d^4 k_i}{k_i^2 - \mu^2 + i\epsilon} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{-2pk_1 + i\epsilon} \right] \dots \frac{1}{\sum_{j=1}^N -2p'k_j + i\epsilon} \Gamma_N(p, p'). \quad (6.34)$$

Можно выполнить суммирование по всем топологически неэквивалентным диаграммам, взяв сумму по всем перестановкам вершин на нуклонной линии p' и применяя тождество

$$\sum_{\{\lambda\}} \frac{1}{a_{\lambda_1}} \frac{1}{a_{\lambda_1} + a_{\lambda_2}} \dots \frac{1}{a_{\lambda_1} + a_{\lambda_2} + \dots + a_{\lambda_N}} = \prod_{j=1}^N \frac{1}{a_j}, \quad (6.35)$$

где сумма в левой части распространяется на все перестановки индексов. Это тождество легко доказывается по индукции. В результате указанного суммирования рассматриваемая вершинная функция приобретает особенно простой вид:

$$\Gamma_N(p, p') = \Gamma_N(p, p') \frac{1}{N!} \left[\frac{-ig^2}{(2\pi)^4} 4pp' \int \frac{d^4 k}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{-2p'k + i\epsilon} \frac{1}{-2pk + i\epsilon} \right]^N. \quad (6.36)$$

Фактор $N!$ возникает из-за того, что при суммировании по всем перестановкам вершин на линиях p и p' мы просчитали каждую неэквивалентную диаграмму $N!$ раз. Сумма по всем возможным N находится элементарно. Окончательно получаем

$$\Gamma(p, p') = \Gamma_N(p, p') e^{i\chi(p, p')}, \quad (6.37)$$

где эйкональная функция имеет вид

$$i\chi(p, p') = -i 4pp' \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{1}{-2pk + i\epsilon} \frac{1}{-2p'k + i\epsilon}. \quad (6.37a)$$

К сожалению, интеграл в правой части равенства (6.37a) логарифмически расходится. (Это — не инфракрасная расходимость, известная из аналогичного рассмотрения в квантовой электродинамике.) Один естественный способ восстановления сходимости состоит в том, чтобы удерживать члены $k_i k_i$ в нуклонных пропагаторах равенства (6.30) и отбросить лишь члены $k_i k_j$ при $i \neq j$. Такая процедура никак не отражается на выводе формулы (6.37) и мы

вновь приходим к этой же формуле, но с другой эйкональной функцией, содержащей явно сходящийся интеграл:

$$i\chi_1 = -i4pp' \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{1}{k^2 - 2pk + i\epsilon} \frac{1}{k^2 - 2p'k + i\epsilon}. \quad (6.38)$$

Для численных расчетов более удобна преобразованная форма этого равенства:

$$i\chi_1(t) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{2m^2 - t}{2\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} \frac{1}{\sqrt{t'(t' - 4m^2)}} \times \\ \times \ln \left[\frac{t' - 4m^2 + \mu^2}{\mu^2} \right]. \quad (6.39)$$

В пределе при $t \rightarrow -\infty$ видно, что $i\chi_1(t) \sim -\ln^2(-t/4m^2)$. Таким образом, перенормированная вершинная функция $\Gamma(p, p')$ будет сходиться при условии, что исходная «жесткая» амплитуда $\Gamma_N(p, p')$ растет не быстрее, чем произвольная фиксированная степень t . Фактически это имеет место, когда $\Gamma_N(p, p')$ — любая из амплитуд однобозонного обмена, построенных в § 7.2.

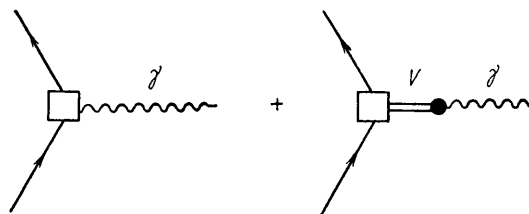
Прежде чем мы перейдем к следующему вопросу, надо высказать некоторые предостережения. Суммирование по топологически неэквивалентным диаграммам является более сложной задачей, когда «жесткое» и «мягкое» взаимодействия обусловлены одним и тем же векторным мезоном. Возникающая при этом проблема пересчета была детально изучена в работе Ислама [58] и не будет здесь рассматриваться. Выбор сходящегося выражения в эйкональном приближении в форме (6.38) в некотором смысле естествен, но, очевидно, не единствен. Альтернативное выражение было использовано в работе Фрида и Гэйссера [39, 38*]. Оно убывает менее быстро в пределе: $t \rightarrow -\infty$, где $i\chi$ становится пропорциональным $-\ln(-t/4m^2)$ с коэффициентом пропорциональности, зависящим от величины k^2 , начиная с которой векторные мезоны уже нельзя считать мягкими. С физически разумными значениями этого параметра обрезания соответствующая эйкональная форма также оказывается сходящейся в достаточной степени, чтобы обеспечить регуляризацию амплитуд однобозонного обмена. Путем суммирования членов старшего порядка по теории возмущений в рамках техники, совершенно отличной от эйконального приближения, Фишбейн и Салливан [36], а также Аппельквист и Примак [7] показали, что асимптотическое поведение вершинной функции, даваемое эйкональной функцией (6.38), является правильным. В дальнейшем мы будем рассматривать только эту форму. Отметим, наконец, что в случае, когда в эйкональную функцию вносят вклад несколько нейтральных векторных мезонов (т. е. ρ^0 , ω и ϕ), аналогичное рассмотрение показывает, что χ должно быть заменено суммой подобных членов, по одному для

* В этой монографии подробно излагается техника, обсуждаемая в данном параграфе.

каждого из нейтральных векторных мезонов. На практике даже в этом незначительном усложнении нет необходимости. Поскольку мезоны ω и ϕ имеют одинаковые квантовые числа и сходные массы (783 МэВ и 1080 МэВ соответственно), трудно различить их вклады в нуклон-нуклонное взаимодействие. В связи с этим обычно принимают константу связи ϕNN равной нулю. В этом случае кварковая модель предсказывает отношение квадратов констант связи ωNN и ρNN , равное ~ 9 . Поскольку массы ρ - и ω -мезонов по существу равны, следует ожидать, что ρ -мезон вносит

Рис. 21. Диаграммы, описывающие взаимодействие нуклонов с электромагнитным полем.

Квадрат отвечает вершинной функции, вычисленной в эйкональном приближении. Пропагатор V включает ρ -, ω - и ϕ -мезоны



пренебрежимо малый вклад в эйкональную функцию по сравнению с ω -мезоном. Это ожидание подтвердилось в модельных расчетах фаз нуклон-нуклонного рассеяния. В дальнейшем мы будем брать эйкональную функцию (6.38) или (6.39), вводя в нее массу ω -мезона и константу связи ωNN , равную $g_{\omega}^2/4\pi \sim 5,0$.

При выводе равенства (6.37) для вершинной функции не делалось никаких ограничений, касающихся природы жесткого взаимодействия. Жесткое взаимодействие могло бы представлять одну вершину в диаграмме, описывающей обмен бозоном между нуклонами. Одинаково хорошо оно могло бы представлять вершину в описании электромагнитного форм-фактора нуклона. Таким образом, эйкональная модель дает возможность установить тесную связь между наблюдаемыми электромагнитными форм-факторами и ненаблюдаемыми форм-факторами для сильного взаимодействия. Расчет нуклонных электромагнитных форм-факторов в рамках эйкональной модели служит основанием для применения этой техники к вычислению форм-факторов для сильного взаимодействия. Подобные вычисления были выполнены рядом авторов [39, 57]. Опишем их вкратце.

Нуклонные электромагнитные форм-факторы могут быть вычислены из диаграмм рис. 21, где, наряду с обычной связью типа γ^{μ} для векторных мезонов, допускается связь с производной, как обсуждается в § 7.2. Все вершины VNN и γNN описываются вершинными функциями, образованными согласно равенствам (6.37) — (6.39). Для того чтобы отразить наличие у ρ -мезона конечной ширины (~ 130 МэВ) обычный пропагатор ρ -мезона $[t - \mu_{\rho}^2]^{-1}$ был заменен выражением, предложенным Фрэзером и Фулко. (Подобные эффекты конечной ширины оказались существенными в описании электромагнитных форм-факторов при малых передан-

ных импульсах.) При подгонке экспериментальных данных в качестве параметров служили произведения констант связи VNN и $V\gamma$. Области их допустимых значений ограничивались условием воспроизведения правильных зарядов и магнитных моментов нуклонов в пределе нулевого переданного импульса. Была проведена подгонка для всех четырех нуклонных электромагнитных форм-факторов во всей области доступных эксперименту значений переданного импульса ($|t| \leq 25 \text{ ГэВ}^2/c^2$ для случая магнитного форм-фактора протона и в более узком интервале для остальных трех форм-факторов). Подгонка дала величины констант связи в

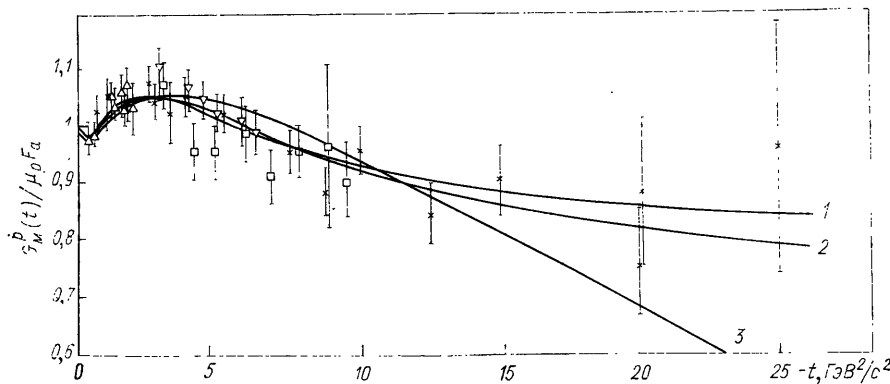


Рис. 22. Зависимость от t протонного магнитного форм-фактора G_M^p , нормированного согласно феноменологической формуле для дипольного форм-фактора $F_d(t) = 1/(1-t/0,71)^2$. Кривые 1 — эйкональное, 2, 3 соответствуют замене фактора $\exp[i\chi(t)]$ феноменологическими монополярным и дипольным выражениями

грубом согласии с оценками, использующими $SU(6)$ -симметрию, с χ^2 , равным 1,06 на каждое измерение. На рис. 22 приведены результаты для магнитного форм-фактора протона, нормированного по феноменологическому дипольному форм-фактору для удобства построения графика. Целесообразность использования полной вершинной функции из равенств (6.37) видна из того факта, что подгонка к эксперименту с использованием $\Gamma_H(p, p')$ в качестве $\Gamma(p, p')$ приводит к неприемлемой величине $\chi^2 \approx 47$ на измерение.

Основываясь на некоторых экспериментальных указаниях в пользу надежности эйконального описания вершинных функций, обратимся теперь к расчету в эйкональном приближении перекрестных лестничных диаграмм типа изображенной на рис. 20, в. На этой диаграмме нейтральные векторные мезоны испускаются нуклоном 1 (нуклоном 2) перед тем, как произойдет жесткое взаимодействие, и поглощаются нуклоном 2 (нуклоном 1) после жесткого взаимодействия. Эйкональное суммирование перекрестных лестничных диаграмм очень похоже на выполненное выше сум-

мирование при выводе формулы для вершинной функции. В этом случае результат можно записать в виде

$$M(p_1 p_2'; p_1 p_2) = \int d^4 x e^{-i q x} M_H(x) \times \\ \times \exp\{G(x; p_2' p_1)\} \exp\{G(x; p_1 p_2)\}, \quad (6.40)$$

где $q = (p' - p)$, $M_H(x)$ — фурье-преобразование жесткой амплитуды, отвечающей, например, обмену бозоном между нуклонами. Функция $G(x, p' p)$ выражается соотношением

$$G(x; p' p) = \frac{-ig^2}{(2\pi)^4} 4pp' \int \frac{d^4 k e^{ikx}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{1}{-2pk + i\epsilon} \frac{1}{-2p'k + i\epsilon}. \quad (6.40a)$$

В той мере, насколько мягкими являются нейтральные векторные мезоны (т. е. импульс, передаваемый в каждой мезонной вершине, намного меньше переданного импульса, связанного с жесткой амплитудой), мы можем использовать в подынтегральном выражении (6.40a) приближение малых k . В частности, можно заметить $\exp(ikx)$ единицей, так что вместо $G(x; p' p)$ войдет функция $G(0; p' p)$, равная $i\chi(p', p)$ из равенства (6.37 а) [39]. Регуляризация появляющегося в таком выводе интеграла может быть сделана так же, как и при расчете вершинной функции, что дает

$$M(p_1 p_2'; p_1 p_2) = \exp[i 2\chi_1(u)] M_H(p_1 p_2'; p_1 p_2), \quad (6.41)$$

где $u = -(p_2' - p_1)^2$.

Наконец, мы можем оценить сумму более общего вида по неприводимым диаграммам, содержащим испускание в любом порядке любого числа нейтральных векторных мезонов до жесткого взаимодействия и их поглощение любым нуклоном в любом порядке после того, как произошел процесс M_H . Примером подобной диаграммы служит диаграмма на рис. 20, а. Используя знакомую нам теперь технику, получим формулу

$$M(p_1 p_2'; p_1 p_2) = \exp[2i\chi_1(u) + 2i\chi_1(t)] M_H(p_1 p_2'; p_1 p_2). \quad (6.42)$$

Отметим, что в пределе больших t или больших u асимптотическая форма эйконоальной функции гарантирует сходимость перенормированной амплитуды M при условии, что жесткая амплитуда растет не быстрее полинома по t и (или) по u . Это справедливо для амплитуд однобозонного обмена. Таким образом, сходимость перенормированных амплитуд однобозонного обмена (6.42) достаточна, чтобы можно было их использовать при нахождении решений любого из унитаризованных уравнений, рассмотренных в § 6.2. Исследование аналитических свойств $\chi_1(x)$ показывает, что она имеет точку ветвления при $x = +4m^2$, расположенную намного дальше от физической области по сравнению с полюсами жестких амплитуд однобозонного обмена. В этом смысле исследованные сильные форм-факторы приводят к короткодействующей, но нелокальной модификации потенциалов однобозонного обмена. Многочастичные точки ветвления, ожидаемые в случае перекрестно-

лестничных диаграмм, в эйкональном приближении сводятся к полюсам в точках, отвечающих квадрату массы жесткого бозона.

Значительно более трудной проблемой является поиск экспериментальной информации, свидетельствующей в пользу эйконального суммирования перекрестно-лестничных диаграмм, по сравнению со случаем вершинной функции. Некоторое косвенное указание такого рода было найдено в работе Фрида и Гэйссера [39], обобщивших эйкональное суммирование на диаграммы, в которых испускание и поглощение мягких мезонов происходит до или после жесткого взаимодействия. При этом, наряду с вкладом от неприводимых диаграмм, учитываются вклады от двухчастичных приводимых диаграмм. Мы найдем вклад этих приводимых диаграмм путем явного решения унитаризованного уравнения. Таким способом Фрид и Гэйссер получили для полной амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния в эйкональном приближении выражение

$$\exp[2i\chi(t) + 2i\chi(u) - 2i\chi(\omega)] M_N(p'_1 p'_2; p_1 p_2),$$

где $\omega = -(p_1 + p_2)^2$ — квадрат полной энергии. Заметим, что, в отличие от t и u , ω положительно и больше $4m^2$ для физической области нуклон-нуклонного рассеяния и, следовательно, $\chi(\omega)$ комплексно. Дифференциальное сечение будет отличаться от сечения в борновском приближении, получаемого с использованием M_N , лишь множителем

$$\exp[4i\chi(t) + 4i\chi(u) - 4 \operatorname{Re}(i\chi\omega)].$$

Из интегрального представления χ_1 (6.39) видно, что для $\omega > 4m^2$ $\operatorname{Re}[i\chi_1(\omega)] = i\chi_1(4m^2 - \omega)$. В пределе высокой энергии для рассеяния вперед (т. е. при $|u| \sim |\omega| \gg |t|$) имеется сильная компенсация между членами $4i\chi_1(u)$ и $-4\operatorname{Re}[i\chi_1(\omega)]$, так что главным членом в показателе экспоненты становится $4i\chi_1(t)$. Таким образом, эйкональное приближение к полной амплитуде рассеяния согласуется с экспериментально подтвержденной гипотезой Янга—Ву, связывающей амплитуду рассеяния вперед нуклона на нуклоне при высокой энергии с квадратом нуклонного электромагнитного форм-фактора.

До сих пор мы рассматривали изменения в амплитудах, когда все четыре нуклона находятся на массовой поверхности. Однако при решении любого из найденных релятивистских уравнений возникает необходимость знать амплитуды для нуклонов вне массовой поверхности. При этом нельзя сделать замены $\gamma^v(\hat{p} + m) \rightarrow \rightarrow 2p^v$ при выводе эйкональной функции. Когда $|t| > |p'^2|$, из анализа характера зависимости вершинной функции от t можно предположить, что χ_1 пропорционально $\ln|t/p'^2| \ln|t/p'^2|$, так что полученное выражение (6.42) все еще приближенно справедливо. В пределах, когда $|t|$, $|p'^2|$ и $|p'^2|$ велики и сравнимы по величине, уже нельзя пренебречь членами \hat{k} по сравнению с $\hat{p} + m$ в (6.30), и эйкональные выражения становятся полностью несправедливыми. Однако в этом пределе амплитуды, определенные равенствами (6.39) и (6.42), имеют хорошее поведение и являются схо-

дящимися. Поскольку неизвестна техника приближенного суммирования диаграмм в этом пределе, мы вынуждены постулировать, что указанные равенства остаются в силе, хотя аргументы, использованные при их выводе, несправедливы.

Перенормировка расходящихся амплитуд с привлечением только нейтральных векторных мезонов может показаться искусственной. Поэтому законно спросить, почему мы не учитывали аналогичных поправок к вершинным функциям и перекрестно-лестничных диаграмм с участием псевдоскалярных частиц (т. е. π - и η -мезонов), а также заряженных векторных мезонов (т. е. ρ^\pm -мезонов). Нетрудно видеть, что псевдоскалярные мезоны не дают вклада в вершинную функцию (6.30) для нуклонов на массовой поверхности. Для этого надо заменить γ^μ на γ^5 и воспользоваться уравнением Дирака. Вейнберг пришел к аналогичным выводам [122], показав, что полное решение задачи для мягких киральных пионов не приводит к эффектам подавления. Суммируя главные расходящиеся члены в каждом порядке теории возмущений, Аппельквист и Примак [7] показали, что псевдоскалярные частицы не обеспечивают затухания в вершинной функции на массовой поверхности. Та же проблема возникает в случае заряженных векторных мезонов. Она не исследовалась столь интенсивно, хотя Кетли, Мартин и Тэйлор рассматривали эту задачу [66]. Как отмечалось выше, предположение о нулевой константе связи ϕNN наряду с оценкой по кварковой модели относительных величин констант связи ρNN и ωNN указывают на то, что ρ^0 -мезон играет сравнительно малую роль в подавлении жестких амплитуд. Это дает некоторое основание полагать, что вклады от заряженных ρ -мезонов могут быть не очень существенными.

**ВКЛАДЫ ОДНОБОЗОННОГО ОБМЕНА В НУКЛОН-
НУКЛОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ**

Наиболее надежно установлен и обоснован вклад обмена пионом в нуклон-нуклонное взаимодействие. Было найдено, что этот процесс обеспечивает хорошее описание сдвигов фаз для достаточно больших угловых моментов, для которых эффективным оказывается лишь «хвост» взаимодействия. Для низких парциальных волн хорошего согласия с опытом можно добиться только при учете процессов обмена более чем одним пионом [см., например, перекрестную четырехугольную диаграмму, отвечающую равенству (6.24)]. В гл. 8 и 9 будет показано, что даже для обмена двумя пионами расчет полного вклада во взаимодействие — отнюдь не простая задача. Отчасти это связано с тем, что два (или более) пиона могут сильно взаимодействовать друг с другом. Учет взаимодействия между пионами заметно сказывается на результатах. Однако существование сильного взаимодействия между пионами вместе с тем дает надежду на значительное упрощение всей проблемы. Если бы взаимодействие между пионами было достаточно сильным, чтобы возникали узкие резонансы с хорошо определенными угловым моментом, изоспином, четностью и G -четностью, то многопионные состояния можно было бы рассматривать как стабильные частицы с теми же квантовыми числами. Взаимодействие между нуклонами отвечало бы тогда обмену ансамблем таких стабильных бозонов, коль скоро подобные резонансы дают наиболее существенный вклад в процессы многопионного обмена. Справедливость описания нуклон-нуклонных сил в рамках однобозонного обмена определяется рядом факторов. Очевидно, что наиболее важным из них является существование таких многопионных резонансов. Экспериментальные данные для систем из двух и трех пионов свидетельствуют в пользу этого. Был обнаружен изовекторный резонанс в P -волне при энергии 784 МэВ, который можно рассматривать, как векторный бозон (ρ -мезон). В трехпионной системе наблюдался ряд резонансов, в том числе изоскалярный резонанс в S -волне при энергии 550 МэВ (η -мезон) и два изоскалярных резонанса в P -волне при энергиях 780 и 1090 МэВ. Последние два резонанса можно отождествить с векторными бозонами (нейтральными мезонами ω и ϕ соответственно). В экспериментах не видно двухпионного резонанса с малой массой в S -волне, хотя соответствующий сдвиг фазы рассеяния вполне заметен. Для описания важных эффектов, свя-

занных с обменом двумя пионами в S -волне, требуется более сложная техника, которая рассмотрена в гл. 8 и 9. Если мы хотим получить количественное феноменологическое описание сдвигов фаз нуклон-нуклонного рассеяния при малой энергии, оставаясь в узких рамках модели однобозонного обмена, приходится ввести два фиктивных скалярных бозона с $T=0$ и $T=1$ (σ -мезоны), чтобы аппроксимировать вклад нерезонансного обмена двумя пионами в S -волне для их относительного движения.

Экспериментальные данные по нуклон-нуклонному рассеянию принято классифицировать в соответствии с квантовыми числами L, S, J двухнуклонной системы. Однако матричные элементы взаимодействия для случаев обмена отдельным псевдоскалярным, скалярным или векторным бозоном технически проще строить в представлении с заданной спиральностью. Соотношение между двумя базисами для этих представлений рассмотрено в § 7.1. В § 7.2 обсуждается построение матричных элементов взаимодействия для однобозонного обмена. Взаимодействие между нуклонами слишком сильно, чтобы борновское приближение было применимым. Поэтому построение матричных элементов произведено в общности, достаточной для решения одного из унитаризованных уравнений, аппроксимирующих уравнение Бете—Солпитера, которые были рассмотрены в § 6.1 и 6.2. Мы будем иметь дело главным образом с теми уравнениями, в которых приближенные пропагаторы содержат только спиноры, отвечающие состояниям с положительной энергией.

§ 7.1. ПАРЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ И СОСТОЯНИЯ С ОПРЕДЕЛЕННОЙ СПИРАЛЬНОСТЬЮ

Цель исследования NN -взаимодействия состоит в сравнении вычисленных и экспериментальных величин дифференциальных сечений при малых энергиях. Экспериментальная информация заключена в сдвигах фаз, которые классифицируются по орбитальному моменту L , полному спину S и полному моменту количества движения J . (Изо спин двухнуклонной системы определяется из условия $L+S+T$ — нечетно, поскольку нуклоны — тождественные фермионы). В § 7.2 мы увидим, что амплитуды NN -рассеяния, отвечающие механизму бозонного обмена, наиболее просто рассчитываются в базисе состояний с определенной спиральностью. В этом базисе состояние характеризуется импульсами нуклонов \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 и их спиральностями λ_1 и λ_2 , которые описывают проекции спинов частиц на направления их движения. В данном разделе мы рассмотрим преобразование от одного базиса к другому. Мы будем придерживаться аргументации, впервые введенной Якобом и Виком [63].

Все существенные особенности формализма с использованием спиральности проявляются в случае отдельного нуклона. Мы будем исходить из волновой функции нуклона $\psi_{p\lambda}$, являющейся решением с положительной энергией уравнения Дирака для свобод-

ных частиц с импульсом \mathbf{p} , направленным по оси z , и проекцией спина $\lambda = \pm 1/2$ на направление импульса. Заметим, что при вращениях системы отсчета направление \mathbf{p} может изменяться, но λ остается неизменным. При отражениях пространственных осей знак λ изменяется.

Произведем вращение, при котором импульс \mathbf{p} принимает новое направление \mathbf{p}' с полярными координатами ρ, θ, φ . При этом мы получим новое состояние $|p\theta\varphi\lambda\rangle$. Данное преобразование можно сделать явно поворотом вектора \mathbf{p} на угол θ вокруг оси, перпендикулярной к обоим векторам \mathbf{p} и \mathbf{p}' :

$$|p\theta\varphi\lambda\rangle = e^{-i\theta\hat{\mathbf{u}}\mathbf{J}}\psi_{p\lambda}, \quad (7.1)$$

где единичный вектор $\hat{\mathbf{u}}$ равен

$$\hat{\mathbf{u}} = [\mathbf{p}\mathbf{p}'] / |\mathbf{p}\mathbf{p}'|. \quad (7.2)$$

Полезно учесть равенство

$$\hat{\mathbf{u}}\mathbf{J} = -J_x \sin \varphi + J_y \cos \varphi. \quad (7.3)$$

Для того чтобы использовать хорошо известные свойства матриц, отвечающих вращениям, запишем оператор $e^{-i\theta\hat{\mathbf{u}}\mathbf{J}}$ через обычные углы Эйлера

$$R_{\alpha\beta\gamma} = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}. \quad (7.4)$$

Воспользуемся соотношением

$$e^{-i\varphi J_z} J_y^n e^{i\varphi J_z} = (-J_x \sin \varphi + J_y \cos \varphi)^n. \quad (7.5)$$

Тогда, сопоставляя (7.3) и (7.5), запишем

$$e^{-i\theta\hat{\mathbf{u}}\mathbf{J}}\psi_{p\lambda} = R_{\varphi\theta-\varphi}\psi_{p\lambda}. \quad (7.6)$$

С помощью равенства (7.4), учитывая, что $\psi_{p\lambda}$ — собственная функция оператора J_z с собственным значением λ , перепишем (7.6) в виде

$$e^{-i\theta\hat{\mathbf{u}}\mathbf{J}}\psi_{p\lambda} = e^{i\varphi\lambda} R_{\varphi\theta\varphi}\psi_{p\lambda}. \quad (7.7)$$

Мы знаем, что операция поворота, примененная к состоянию $|JM\rangle$ с определенными значениями полного углового момента J и его проекции M на ось z , может изменить только проекцию M , но не J :

$$R_{\alpha\beta\gamma} |JM\rangle = \sum_{M'} D'_{M'M}(\alpha\beta\gamma) |JM'\rangle. \quad (7.8)$$

Матрицы $D'_{M'M}(\alpha\beta\gamma)$, отвечающие вращениям, определяются соотношением

$$D'_{M'M}(\alpha\beta\gamma) = \langle JM' | R_{\alpha\beta\gamma} | JM \rangle$$

и могут быть выражены через полиномы Якоби $d_{M'M}^J(\beta)$:

$$D_{M'M}^J(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha M'} d_{MM'}^J(\beta) e^{i\gamma M}. \quad (7.9)$$

Напомним, что функции $D_{MM'}^J(\alpha\beta\gamma)$ и $d_{MM'}^J(\beta)$ удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки, аналогичным хорошо знакомым условиям для сферических гармоник. В частности, для функций $D_{M'M}^J$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{2J+1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin\beta d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{M_1'M_1}^{J*}(\alpha\beta\gamma) \times \\ & \times D_{M_2'M_2}^J(\alpha\beta\gamma) = \delta_{M_1M_2} \delta_{M_1'M_2'} \delta_{J_1J_2}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Используя равенства (7.1), (7.6), (7.8) и (7.10), определим компоненту $|pJM\lambda\rangle$ в состоянии $|p\theta\varphi\lambda\rangle$ путем вычисления проекции:

$$|pJM\lambda\rangle = \left(\frac{2J+1}{8\pi^2}\right)^{1/2} \int d\alpha \sin\beta d\beta d\gamma D_{M'M}^{J*}(\alpha\beta\gamma) R_{\alpha\beta\gamma} \Psi_{p\lambda}. \quad (7.11)$$

Поскольку $\Psi_{p\lambda}$, по определению, собственная функция оператора J_z , интегрирование по γ в (7.11) сводится к замене зависящего от γ множителя на $2\pi\delta_{M'-\lambda}$. Тот же результат можно получить, взяв M' равным λ , заменив γ на $-\varphi$ и не интегрируя по γ . Введя множитель $\sqrt{2\pi}$, чтобы сохранить нормировку, можно переписать равенство (7.11) в форме:

$$|pJM\lambda\rangle = \left(\frac{2J+1}{4\pi}\right)^{1/2} \int d\Omega D_{M\lambda}^{J*}(\varphi, \theta, -\varphi) |p\theta\varphi\lambda\rangle, \quad (7.12)$$

где теперь $d\Omega$ — обычный элемент телесного угла.

Можно выполнить аналогичные операции для проектирования на состояния с заданным угловым моментом, исходя из двухнуклонных состояний в представлении с заданной спиральностью. Работая в системе центра масс двух нуклонов (т. е. при $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$), определим волновую функцию $\Psi_{p\lambda_1\lambda_2}$ как прямое произведение решений уравнения Дирака для свободных частиц с импульсом и спиральностью \mathbf{p} , λ_1 и $-\mathbf{p}$, λ_2 соответственно. Как и прежде, будем считать \mathbf{p} направленным вдоль оси z . Состояние, в котором частицы 1 отвечают полярные углы $\theta\varphi$, может быть получено, как в (7.1), поворотом на угол θ вокруг оси \hat{u} , определенной равенством (7.2):

$$|p\theta\varphi\lambda_1\lambda_2\rangle = e^{-i\theta\hat{u}(J_1+J_2)} \Psi_{p\lambda_1\lambda_2}; \quad (7.13)$$

$$|p\theta\varphi\lambda_1\lambda_2\rangle = e^{i\lambda\varphi} R_{\varphi\theta 0} \Psi_{p\lambda_1\lambda_2}, \quad (7.14)$$

где $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Знак минус связан с тем, что λ_2 — проекция спина частицы 2 на направление импульса \mathbf{p}_2 , противоположное по отно-

шению к p . Повторив операции, приводящие к равенству (7.12), получим

$$\left| pJM\lambda_1\lambda_2 \right\rangle = \left(\frac{2J+1}{4\pi} \right)^{1/2} \int d\Omega D_{M\lambda}^{J*}(\varphi, \theta, -\varphi) \left| p\theta\varphi\lambda_1\lambda_2 \right\rangle \quad (7.15)$$

и обратное преобразование

$$\left| p\theta\varphi\lambda_1\lambda_2 \right\rangle = \sum_{JM} \left(\frac{2J+1}{4\pi} \right)^{1/2} D_{M\lambda}^J(\varphi, \theta, -\varphi) \left| pJM\lambda_1\lambda_2 \right\rangle. \quad (7.16)$$

Переход от состояний $|pJM\lambda_1\lambda_2\rangle$ к состояниям $|pLSJM\rangle$ можно выполнить в два этапа. Вначале с помощью нужных коэффициентов Клебша—Гордана мы находим функцию с квантовыми числами $|pJMSM_s=\lambda\rangle$ в виде разложения по состояниям $|pJM\lambda_1\lambda_2\rangle$. Комбинация этих функций дает искомый результат

$$\begin{aligned} \left| pLSJM \right\rangle &= \sum_{\lambda_1\lambda_2} \left(\frac{2L+1}{2J+1} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \lambda_1 \frac{1}{2} - \lambda_2 \mid S\lambda \right) \times \\ &\times (L0S\lambda \mid J\lambda) \mid pJM\lambda_1\lambda_2 \rangle. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Отсюда, например, для состояний $|pL=JS=0JM\rangle$ и $|pL=JS=1JM\rangle$ можно получить простые соотношения

$$\begin{aligned} \left| pL=JS=0JM \right\rangle &= \sqrt{1/2} \left| pJM+1/2+1/2 \right\rangle - \\ &- \sqrt{1/2} \left| pJM-1/2-1/2 \right\rangle; \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \left| pL=JS=1JM \right\rangle &= \sqrt{1/2} \left| pJM+1/2-1/2 \right\rangle - \\ &- \sqrt{1/2} \left| pJM-1/2+1/2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Используя преобразование (7.16), разложим матричные элементы двухнуклонного взаимодействия в ряд по парциальным амплитудам в представлении спиральности:

$$\begin{aligned} \langle p'\lambda'_1\lambda'_2 \mid K \mid p\lambda_1\lambda_2 \rangle &= \sum_{JM} \frac{2J+1}{4\pi} D_{M\lambda}^{J*}(\varphi'\theta' - \varphi') \times \\ &\times D_{M\lambda}^J(\varphi\theta - \varphi) \langle p'JM\lambda'_1\lambda'_2 \mid K \mid pJM\lambda_1\lambda_2 \rangle. \end{aligned} \quad (7.20)$$

В формуле (7.20) принята во внимание скалярность взаимодействия, из которой следует диагональность по квантовым числам JM . Введено также обозначение $\lambda' = \lambda'_1 - \lambda'_2$. Будет показано, что левая часть равенства (7.20) просто вычисляется в моделях взаимодействия с обменом мезонами. Правая часть этого равенства выглядит громоздкой. Однако ее можно значительно упростить, воспользовавшись теоремой сложения для матриц $D_{M'M}^J(\alpha\beta\gamma)$:

$$D_{M'M}^J(\alpha\beta\gamma) = \sum_{M''} D_{M'M''}^J(\alpha_2\beta_2\gamma_2) D_{M''M'}^J(\alpha_1\beta_1\gamma_1), \quad (7.21)$$

где поворот, определяемый углами Эйлера α, β и γ , эквивалентен двум последовательно выполняемым поворотам с углами Эйлера α_1, β_1 и γ_1 и α_2, β_2 и γ_2 . В случае $M=M'=0$ этот общий результат сводится к обычной теореме сложения для сферических гармоник. Применяя теорему сложения в (7.20), получаем желаемое упрощение этой формулы,

$$\langle p'\lambda'_1\lambda'_2 | K | p\lambda_1\lambda_2 \rangle = \sum_{JM} \frac{2J+1}{4\pi} \langle p'JM\lambda'_1\lambda'_2 | K | pJM\lambda_1\lambda_2 \rangle d_{\lambda\lambda'}^J(\theta); \quad (7.22)$$

где θ — угол между p' и p . Парциальные амплитуды в представлении спиральности можно получить из этой формулы с помощью условия ортогональности для полиномов Якоби:

$$\frac{1}{2} (2J+1) \int_0^1 d(\cos\theta) d_{\lambda\mu}^J(\theta) d_{\lambda'\mu'}^{J'}(\theta) = \delta_{JJ'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'} \quad (7.23)$$

Для системы из двух нуклонов параметры λ и λ' могут принимать значения ± 1 и 0 . Все требуемые полиномы Якоби выражены в табл. 7.1 через полиномы Лежандра.

Таблица 7.1

Выражение полиномов Якоби $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ через полиномы Лежандра $P_J(z)$

Полином Якоби	Формула, $z = \cos \theta$
d_{00}^J	$P_J(z)$
$d_{10}^J(\theta)$	$-\frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} \frac{P_{J-1}(z) - P_{J+1}(z)}{\sin \theta}$
$d_{11}^J(\theta)$	$\frac{(J+1)P_{J-1}(z) + (2J+1)P_J(z) - JP_{J+1}(z)}{2(2J+1)\cos^2 \frac{\theta}{2}}$
$d_{-11}^J(\theta)$	$(-1)^{J+1} d_{11}^J(\pi - \theta)$
$d_{\lambda\mu}^J(\theta)$	$d_{-\lambda-\mu}^J = (-1)^{\lambda-\mu} d_{\mu\lambda}^J$

Прежде чем перейти к выводу взаимодействия в терминах состояний $|pLSJM\rangle$, укажем, что существуют четыре возможные комбинации L и S , векторная сумма которых дает заданные значения JM :

$$|pL = JS = 0JM\rangle, \quad (7.24a)$$

$$|pL = JS = 1JM\rangle, \quad (7.24b)$$

$$|pL = J - 1 \ S = 1 \ JM\rangle, \quad (7.24в)$$

$$|pL = J + 1 \ S = 1 \ JM\rangle. \quad (7.24г)$$

Из условия нечетности суммы $L+S+T$ следует, что состояниям (7.24а), (7.24в) и (7.24г) соответствует один и тот же изоспин, а состояние (7.24б) имеет противоположное значение изоспина. Это означает, если не производить дальнейшей конкретизации свойств NN -взаимодействия, что при заданных JM имеется шестнадцать независимых амплитуд, дающих вклад во взаимодействие, которые мы обозначаем как $\langle p'L'S'JM|K|pLSJM\rangle$. Общие ограничения, налагаемые законом сохранения четности и зарядовой независимостью, позволяют уменьшить это число до шести. Сохранение четности означает, что для NN -взаимодействия запрещены переходы между состояниями с $L=J$, т. е. состояниями (7.24а) и (7.24б), и состояниями с $L=J\pm 1$, т. е. состояниями (7.24в) и (7.24г). Зарядовая независимость эквивалентна утверждению, что взаимодействие изоскалярно и не может связывать состояний с различным изоспином, т. е. состояние (7.24б) не может быть связано с состояниями (7.24а), (7.24в) или (7.24г). Предполагая зарядовую независимость, мы будем пренебрегать различием масс протона и нейтрона, а также заряженных и незаряженных p - и n -мезонов при построении NN -взаимодействия. Таким образом, известное положение о сохранении полного спина в NN -взаимодействии является не фундаментальным постулатом, а следствием сохранения четности и зарядовой независимости. В итоге мы приходим к шести независимым парциальным амплитудам:

$$\langle p' \ L' = J \ S' = 0 \ JM \ | \ K \ | \ p \ L = J \ S = 0 \ JM \rangle, \quad (7.25а)$$

$$\langle p' \ L' = J \ S' = 1 \ JM \ | \ K \ | \ p \ L = J \ S = 1 \ JM \rangle, \quad (7.25б)$$

$$\langle p' \ L' = J - 1 \ S' = 1 \ JM \ | \ K \ | \ p \ L = J - 1 \ S = 1 \ JM \rangle, \quad (7.25в)$$

$$\langle p' \ L' = J + 1 \ S' = 1 \ JM \ | \ K \ | \ p \ L = J + 1 \ S = 1 \ JM \rangle, \quad (7.25г)$$

$$\langle p' \ L' = J - 1 \ S' = 1 \ JM \ | \ K \ | \ p \ L = J + 1 \ S = 1 \ JM \rangle, \quad (7.25д)$$

$$\langle p' \ L' = J + 1 \ S' = 1 \ JM \ | \ K \ | \ p \ L = J - 1 \ S = 1 \ JM \rangle. \quad (7.25е)$$

В специальном случае, когда $p=p'$ (например, в борновском приближении для амплитуды рассеяния) инвариантность взаимодействия относительно обращения времени отвечает равенству амплитуд (7.25д) и (7.25е).

В представлении спиральности ограничения, связанные с сохранением четности, полного спина и инвариантностью относительно обращения времени, приводят соответственно к трем соотношениям между амплитудами:

$$\langle p'JM\lambda'_1\lambda'_2 \ | \ K \ | \ pJM\lambda_1\lambda_2 \rangle = \langle p'JM - \lambda'_1 - \lambda'_2 \ | \ K \ | \ pJM - \lambda_1 - \lambda_2 \rangle, \quad (7.26а)$$

$$\langle p'JM\lambda_1'\lambda_2' | K | pJM\lambda_1\lambda_2 \rangle = \langle p'JM\lambda_2'\lambda_1' | K | pJM\lambda_2\lambda_1 \rangle, \quad (7.266)$$

$$\langle p'JM\lambda_1'\lambda_2' | K | pJM\lambda_1\lambda_2 \rangle = \langle pJM\lambda_1\lambda_2 | K | p'JM\lambda_1'\lambda_2' \rangle. \quad (7.26в)$$

Вновь мы видим, что ограничение, связанное с инвариантностью относительно обращения времени, полезно лишь в случае $p=p'$. Заметим, что присутствие индекса M в равенствах (7.25) — (7.26) излишне, поскольку взаимодействие целиком скалярно.

Теперь мы можем завершить преобразование взаимодействия от базиса плоских волн с заданными спиральностями к базису парциальных амплитуд $|pLSJM\rangle'$ с помощью формул (7.18) и (7.19) и рассмотренных ограничений в форме равенств (7.26). Легко видеть, что для несвязанных матричных элементов (7.25а) и (7.25б) равенства (7.18) и (7.19) дают соотношения:

$$\begin{aligned} \langle p'L' = J S' = 0JM | K | pL = J S = 0 \rangle = \\ = \left\langle p'JM + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} | K | pJM + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle - \\ - \left\langle p'JM + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} | K | pJM - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = f'_0, \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} \langle p'L' = J S' = 1 JM | K | pL = J S = 1 JM \rangle = \\ = \left\langle p'JM + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | K | pJM + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle - \\ - \left\langle p'JM + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | K | pJM - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle = f'_1. \end{aligned} \quad (7.27а)$$

Более сложные матричные элементы (7.25в) — (7.25е) для связанных каналов могут быть выражены через величины

$$\begin{aligned} f'_{11} = \left\langle p'JM + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} | K | pJM + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle + \\ + \left\langle p'JM + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} | K | pJM - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (7.27б)$$

$$\begin{aligned} f'_{22} = \left\langle p'JM + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | K | pJM + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle + \\ + \left\langle p'JM + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | K | pJM - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (7.27в)$$

$$f'_{12} = 2 \left\langle p'JM + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} | K | pJM + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (7.27г)$$

$$f'_{21} = 2 \left\langle p'JM + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | K | pJM + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (7.27д)$$

Используя эти величины, можно записать матричные элементы для связанных каналов в виде

$$\begin{aligned} \langle p' L' = J + 1 S' = 1 JM | K | p L = J + 1 S = 1 JM \rangle = \\ = \frac{1}{2J+1} [(J+1)f'_{11} + Jf'_{22} - \sqrt{J(J+1)} (f'_{12} + f'_{21})], \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\begin{aligned} \langle p' L' = J - 1 S' = 1 JM | K | p L = J - 1 S = 1 JM \rangle = \\ = \frac{1}{2J+1} [Jf'_{11} + (J+1)f'_{22} + \sqrt{J(J+1)} (f'_{12} + f'_{21})]; \end{aligned} \quad (7.28a)$$

$$\begin{aligned} \langle p' L' = J + 1 S' = 1 JM | K | p L = J - 1 S = 1 JM \rangle = \\ = \frac{11}{2J+1} [\sqrt{J(J+1)} (f'_{22} - f'_{11}) - (J+1)f'_{12} + Jf'_{21}], \end{aligned} \quad (7.28б)$$

$$\begin{aligned} \langle p' L' = J - 1 S' = 1 JM | K | p L = J + 1 S = 1 JM \rangle = \\ = \frac{1}{2J+1} [\sqrt{J(J+1)} (f'_{22} - f'_{11}) + Jf'_{12} - (J+1)f'_{21}]. \end{aligned} \quad (7.28в)$$

Хотя равенства (7.22) и (7.27), несомненно, могут быть использованы для вывода матричных элементов оператора K в базисе парциальных волн, более удобным оказывается менее прямой способ. С этой целью мы определим шесть величин:

$$\begin{aligned} f_1 = \left\langle \mathbf{p}' + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} | K | \mathbf{p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle - \\ - \left\langle \mathbf{p}' + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} | K | \mathbf{p} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} f_2 = \left\langle \mathbf{p}' + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} | K | \mathbf{p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle + \\ + \left\langle \mathbf{p}' + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} | K | \mathbf{p} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle, \end{aligned} \quad (7.29a)$$

$$\begin{aligned} f_3 = \left\langle \mathbf{p}' + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | K | \mathbf{p} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle / (1+z) - \\ - \left\langle \mathbf{p}' + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | K | \mathbf{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle / (1-z), \end{aligned} \quad (7.29б)$$

$$\begin{aligned} f_4 = \left\langle \mathbf{p}' + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | K | \mathbf{p} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle / (1+z) + \\ + \left\langle \mathbf{p}' + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | K | \mathbf{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle / (1-z), \end{aligned} \quad (7.29в)$$

$$f_3 = 2 \left\langle \mathbf{p}' + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mid K \mid \mathbf{p} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle / y, \quad (7.29г)$$

$$f_6 = 2 \left\langle \mathbf{p}' + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mid K \mid \mathbf{p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle / y. \quad (7.29д)$$

Здесь использованы обозначения $z = \cos \theta$ и $y = \sin \theta$. Преимущества такой записи станут понятными в следующем разделе, в котором будут получены явные выражения для величин f_i в случае однобозонного обмена. Будет показано, что f_i являются функциями только $\cos \theta$. Это облегчает вывод выражений для парциальных амплитуд. Используя данное выше определение амплитуд f_0^J, f_1^J, f_{11}^J (см. выражения (7.27)), f_{12}^J, f_{21}^J и f_{22}^J , а также явную запись полиномов Якоби через полиномы Лежандра, получаем

$$f_0^J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz P_J(z) f_1, \quad (7.30)$$

$$f_1^J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz \left[f_4 P_J(z) + f_3 \frac{{}^J P_{J+1}(z) + (J+1) P_{J-1}(z)}{2J+1} \right], \quad (7.30а)$$

$$f_{11}^J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz f_2 P_J(z), \quad (7.30б)$$

$$f_{12}^J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz f_5 \frac{[J(J+1)]^{1/2}}{2J+1} [P_{J+1}(z) - P_{J-1}(z)], \quad (7.30в)$$

$$f_{21}^J = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz f_6 \frac{[J(J+1)]^{1/2}}{2J+1} [P_{J+1}(z) - P_{J-1}(z)], \quad (7.30г)$$

$$f_{22}^J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz \left[f_3 P_J(z) + f_4 \frac{{}^J P_{J+1}(z) + (J+1) P_{J-1}(z)}{2J+1} \right], \quad (7.30д)$$

Представление для NN -взаимодействия в базисе парциальных волн, как и прежде, может быть получено из равенств (7.28). В следующем разделе мы применим эту процедуру.

§ 7.2. АМПЛИТУДЫ ОДНОБОЗОННОГО ОБМЕНА

Дадим явный вывод вкладов во взаимодействие, обусловленных процессами обмена одним бозоном типа изображенного на рис. 23. Все расчеты будут выполнены в рамках ковариантной теории. Соответственно обозначения на рисунке относятся к 4-им-

дугам, сохраняющимся в каждой вершине. Уместно ввести здесь определение кинематических инвариантов:

$$\omega = -(p_1 + p_2)^2 = -(p'_1 + p'_2)^2, \quad (7.31)$$

$$t = -(p_1 - p'_1)^2 = -(p'_2 - p_2)^2, \quad (7.31a)$$

$$\bar{t} = -(p_1 - p_2)^2 = -(p'_1 - p'_2)^2. \quad (7.31b)$$

Скалярное произведение 4-векторов определено выражением

$$ab = -a_0b_0 + \mathbf{a}\mathbf{b}. \quad (7.32)$$

Найдем значения этих инвариантов в системе центра масс двух нуклонов в специальном случае, когда $p_1 = (E_p, \mathbf{p})$ и $p_2 = (E_p, -\mathbf{p})$, где $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Оба начальных нуклона находятся

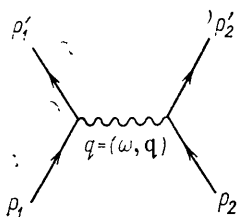


Рис. 23. Диаграмма для процесса однобозонного обмена

на массовой поверхности, поскольку $p_1^2 = p_2^2 = -m^2$. Импульсы конечных нуклонов равны $p'_1 = (E_p - \omega, \mathbf{p}')$ и $p'_2 = (E_p + \omega, -\mathbf{p}')$, поэтому при $\omega \neq 0$ обе конечные частицы не могут одновременно находиться на массовой поверхности. Кинематические переменные ω и t имеют простой физический смысл: ω соответствует квадрату полной энергии, а $-t$ — квадрату переданного 4-импульса. В случае $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$ и $\omega = 0$, имеющем место при вычислении амплитуды рассеяния в первом борновском приближении, нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\omega + t + \bar{t} = 4m^2. \quad (7.33)$$

Этот результат следует использовать с осторожностью, так как он применим лишь в случае, когда все внешние частицы находятся на массовой поверхности. Общие формулы для амплитуд, отвечающих диаграмме на рис. 1, можно записать через переменные ω , t и \bar{t} . Однако это не дает особых преимуществ, если рассматриваемая амплитуда предназначена для использования в уравнении типа Бланкенбеклера — Шугара (6.4). Удобство введения указанных переменных проявляется при исследовании обменных диаграмм. В этом случае просто учитываются эффекты тождественности частиц. В частности, перестановка частиц 1' и 2' сводится к замене t и \bar{t} . Поскольку амплитуды однобозонного обмена интересуют нас по той причине, что мы применим их в одном из унитаризованных уравнений, описанных в гл. 6, следует рассмот-

реть 4-импульсы в более общем виде по сравнению с первым борновским приближением. Например, если мы хотим решать уравнение Бете—Солпитера в лестничном приближении, то нам понадобятся амплитуды однобозонного обмена для случая, когда все четыре нуклона не находятся на массовой поверхности и относятся к состояниям как с положительной, так и с отрицательной энергией. Однако мы сосредоточим внимание на построении амплитуд, требуемых при вычислениях сдвигов фаз из уравнения Бланкенбеклера — Шугара. Из функции Грина (6.6) для уравнения Бланкенбеклера — Шугара в двухфермионном случае можно видеть, что все четыре нуклона достаточно описывать спинорами, являющимися решениями уравнения Дирака для свободных частиц с положительной энергией. Из равенства (6.6) следует также, что уравнение (6.4) содержит только трехмерный переданный импульс, т. е. $\omega=0$. Таким образом, нулевая компонента 4-импульса каждого нуклона фиксирована и имеет значение $\sqrt{\omega}/2 = \sqrt{q^2 + m^2}$, которое может быть получено в первом борновском приближении. Прямое слагаемое, соответствующее амплитуде однобозонного обмена, можно записать в представлении плоских волн с заданными спиральностями как произведение спинорных матричных элементов частиц один и два, помноженное на пропагатор для обмениваемого бозона:

$$\langle \mathbf{p}' \lambda'_1 \lambda'_2 | K | \mathbf{p} \lambda_1 \lambda_2 \rangle = (\bar{u}_{\lambda'_2}(-\mathbf{p}') \Gamma u_{\lambda_2}(-\mathbf{p})) \times \\ \times (\bar{u}_{\lambda_1}(\mathbf{p}') \Gamma u_{\lambda_1}(\mathbf{p})) \frac{1}{t - \mu^2}. \quad (7.34)$$

Обменное слагаемое, соответствующее равенству (7.34), может быть получено путем перестановки местами $\bar{u}_{\lambda'_2}(-\mathbf{p}')$ и $\bar{u}_{\lambda'_1}(\mathbf{p}')$ и замены в бозонном пропагаторе t на \bar{t} . Нет нужды вводить это обменное слагаемое, коль скоро мы всегда имеем дело с двухнуклонными антисимметричными состояниями. Мы будем работать с явно антисимметричными состояниями ($L+S+T$ — нечетно) и будем пренебрегать обменной диаграммой. Оператор Γ может быть построен с помощью комбинаций матриц γ и оператора импульса нуклона таким образом, чтобы отдельные спинорные матричные элементы были вещественными и амплитуда (7.34) была действительным скаляром. Имеется шесть независимых выборов Γ , соответствующих шести возможным независимым матричным элементам при заданных значениях JM . Один такой набор из шести операторов приведен в табл. 7.2. Трансформационные свойства этих операторов позволяют связывать их с обменом физически наблюдаемыми бозонами. В частности, мы можем связать псевдоскалярный член Γ^P с обменом π - и η -мезонами и векторный член Γ^V с обменом ρ -, ω - и ϕ -мезонами. Если мы намерены описывать обмен двумя пионами в относительной S -волне как обмен одним или более σ -мезонами, можно использовать скалярный член Γ^S . Аксиально-векторный и тен-

зорный член также можно связать с известными из эксперимента мезонами (например, A_1 - и f_0 -мезонами соответственно). Однако при явном построении амплитуд однобозонного обмена мы не будем учитывать эти формы на том основании, что массы этих мезонов велики и к тому же для них неизвестны константы связи. (Тензорный член не следует смешивать с индуцированной тензорной компонентой векторного члена.) Вариантная форма векторного члена была получена с помощью разложения Гор-

Таблица 7.2

Возможные формы оператора Γ

Γ	Выражение через γ -матрицы	Примечание
Γ^S	$\frac{g_S}{\sqrt{4\pi}} I$	Скаляр
Γ^P	$\frac{g_P}{\sqrt{4\pi}} \gamma_5$	Псевдоскаляр
Γ_μ^V	$\frac{g_V}{\sqrt{4\pi}} \gamma_\mu + \frac{f_V}{\sqrt{4\pi}} i\sigma_{\mu\nu} \frac{(p' - p)_\nu}{2m} =$ $= \frac{g_V + f_V}{\sqrt{4\pi}} \gamma_\mu - \frac{f_V}{\sqrt{4\pi}} \frac{(p + p')_\mu}{2m}$	Вектор Вектор (вариантная форма)
Γ_μ^A	$\frac{i g_A}{\sqrt{4\pi}} \gamma_5 \gamma_\mu$	Аксиальный вектор
$\Gamma_{\mu\nu}^T$	$\frac{g_T}{\sqrt{4\pi}} \sigma_{\mu\nu}$	Тензор

дона [43]*. Для спиноров с положительной энергией обе формы приводят к одинаковым матричным элементам, поэтому мы можем использовать вариантную форму при построении амплитуд для применения их в уравнении Бланкенбеклера—Шугара.

В представлении спиральности спиноры, отвечающие состояниям с положительной энергией, имеют вид

$$u_\lambda(p) = \frac{1}{N_p^{1/2}} \begin{pmatrix} E_p + m \\ 2p\lambda \end{pmatrix} \chi_\lambda, \quad (7.35)$$

* Эти две формы связаны посредством уравнения Дирака и дают одинаковые результаты для матричных элементов на массовой поверхности (например, первого борновского члена при вычислении сдвигов фаз). Требуемые для решения уравнения Бланкенбеклера—Шугара немассовые матричные элементы неидентичны. Таким образом, специфическая форма векторного лагранжиана имеет физическое содержание. Иметь дело с вариантной формой технически проще, но, по-видимому, она менее удовлетворительна, если исходить из основных принципов теории.

где $N_p = 2m(m + E_p)$ и χ_λ — двухкомпонентный спинор, описывающий спиральность нуклона

$$\chi_{+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.36)$$

При расчете амплитуды (7.34) удобно относить все проекции спинов к одной оси z . Поэтому мы выберем положительное направление оси z вдоль импульса \mathbf{p} . Пусть \mathbf{p}' расположен в плоскости

Таблица 7.3

Представления γ -матриц $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} i [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$

Обозначение	Вид	Обозначение	Вид
1	$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
γ_k	$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$	σ_1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
γ_0	$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$	σ_2	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
γ_5	$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$	σ_3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

скорости xz под углом θ по отношению к оси z . Тогда спиноры для четырех нуклонов принимают форму

$$u_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{N_p}} \begin{pmatrix} E_p + m \\ 2p\lambda_1 \end{pmatrix} \chi_{\lambda_1}, \quad u_{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{N_p}} \begin{pmatrix} E_p + m \\ 2p\lambda_2 \end{pmatrix} \chi_{-\lambda_2}, \quad (7.37)$$

$$u_{\lambda'_1} = \frac{1}{\sqrt{N_{p'}}} \begin{pmatrix} E_{p'} + m \\ 2p'\lambda'_1 \end{pmatrix} e^{-i\sigma_y\theta/2} \chi_{\lambda'_1}, \quad u_{\lambda'_2} = \frac{1}{\sqrt{N_{p'}}} \begin{pmatrix} E_{p'} + m \\ 2p'\lambda'_1 \end{pmatrix} e^{-i\sigma_y\theta/2} \chi_{-\lambda'_2}. \quad (7.37a)$$

Здесь, как и в § 7.1, мы использовали тот факт, что оператор поворота $\exp(-i\sigma_y\theta/2)$ переводит вектор, направленный по \mathbf{p} , в вектор с той же длиной, но направленный по \mathbf{p}' . Отметим также, что сопряженные спиноры, $\bar{u}_\lambda(p)$, входящие в (7.34) определены формулой

$$\bar{u}_\lambda(p) = u_\lambda^\dagger(p) \gamma^0. \quad (7.38)$$

Из записи спиноров в форме (7.37) и из явных выражений для γ -матриц, данных в табл. 7.3, непосредственно видно, что нам потребуются матричные элементы по двухкомпонентным спинорам вида $\langle \chi_{\lambda'} | \exp(i\sigma_y\theta/2) | \chi_\lambda \rangle$ и $\langle \chi_{\lambda'} | \exp(i\sigma_y\theta/2) \sigma | \chi_\lambda \rangle$. Расчет их легко выполнить, если учесть, что

$$\sigma_k = I \text{ для всех } k. \quad (7.39)$$

(Это соотношение проверяется просто с помощью форм, данных в табл. 7.3.) Таким образом, мы можем разложить оператор

$\exp(i\sigma_y\theta/2)$ в ряд по степеням переменной $i\sigma_y\theta/2$ и произвести очевидное разделение слагаемых в зависимости от четности или нечетности степени σ_y , что дает

$$e^{i\sigma_y\theta/2} = \cos(\theta/2) + i\sigma_y \sin(\theta/2). \quad (7.40)$$

Используя это равенство, мы получаем следующие выражения для нужных нам матричных элементов:

$$\langle \chi_{\lambda'} | e^{i\sigma_y\theta/2} | \chi_{\lambda} \rangle = | \lambda + \lambda' | \cos \frac{\theta}{2} + (\lambda' - \lambda) \sin \frac{\theta}{2}. \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\lambda'} | e^{i\sigma_y\theta/2} \sigma | \chi_{\lambda} \rangle = & (\lambda' + \lambda) \left[\varepsilon_z \cos \frac{\theta}{2} + i(\lambda' + \lambda) \varepsilon_y \sin \frac{\theta}{2} + \right. \\ & \left. + \varepsilon_x \sin \frac{\theta}{2} \right] - | \lambda' - \lambda | \left[\varepsilon_z \sin \frac{\theta}{2} + i(\lambda' - \lambda) \varepsilon_y \cos \frac{\theta}{2} - \varepsilon_x \cos \frac{\theta}{2} \right]. \end{aligned} \quad (7.41a)$$

С помощью равенств (7.41) мы можем теперь найти матричные элементы для операторов Γ , данных в табл. 7.2. Рассмотрим, в частности, случай псевдоскалярной связи, отвечающий обмену π - и η -мезонами. В этом случае спинорные матричные элементы равны

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\lambda'}(p') \gamma_5 u_{\lambda}(p) = & \frac{1}{\sqrt{NN'}} [2p(E_{p'} + m)\lambda - 2p'(E_p + m)\lambda'] \times \\ & \times \langle \chi_{\pm\lambda'} | e^{i\sigma_y\theta/2} | \chi_{\pm\lambda} \rangle, \end{aligned} \quad (7.42)$$

где знак плюс относится к частице 1, а знак минус — к частице 2. Вычисляя полный матричный элемент (7.34), мы находим, например, выражения

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{p}' + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \middle| K^P \middle| \mathbf{p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle = \\ = \frac{g_P^2}{4\pi} \frac{E_p E_{p'} - m^2 - pp'}{2m^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{t - \mu^2}; \end{aligned} \quad (7.43)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{p}' + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \middle| K^P \middle| \mathbf{p} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = \\ = \frac{g_P^2}{4\pi} \frac{m^2 - E_p E_{p'} - pp'}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{t - \mu^2}, \end{aligned} \quad (7.43a)$$

Теперь, следуя указаниям § 7.1, можно произвести разложение этих матричных элементов в ряд по парциальным амплитудам. Из (7.29) получаем

$$f_1 = \frac{g_P^2}{4\pi} \frac{\Delta^2 - (E_p - E_{p'})^2}{4m^2} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2}, \quad (7.44)$$

где мы записали спиральную амплитуду f_1 через квадрат переданного трехмерного импульса, $\Delta^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta$. Это адекватно применению f_1 в уравнении Бланкенбеклера — Шугара, в котором только и появляется трехмерный переданный импульс. Проектирование на парциальную амплитуду с $S=0$ и $L=J$ производится непосредственно по формуле (7.30), что дает

$$\langle p' S=0 L=J J | K^P | p S=0 L=J J \rangle = \frac{-1}{4m^2} \times \\ \times \frac{g_P^2}{4\pi} \left\{ [(E_p - E_{p'})^2 + \mu^2] \frac{1}{2pp'} Q_J(x) - \delta_{J0} \right\}, \quad (7.45)$$

где $x = (p^2 + p'^2 + \mu^2) / (2pp')$. При выводе (7.45) мы использовали равенство

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_J(z)}{x-z} dz = Q_J(x), \quad (7.46)$$

где $Q_J(x)$ — функция Лежандра второго рода. Для $J=0$, например, эта функция равна

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}. \quad (7.47)$$

Как и все функции $Q_J(x)$, функция $Q_0(x)$ имеет точки ветвления при $x = \pm 1$. Эти точки ветвления не приводят к трудностям, поскольку $x > 1$ для действительных и положительных p и p' . Из асимптотического поведения $Q_J(x)$ при больших положительных x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q_J(x) = \frac{J!}{(2J+1)!!} x^{-J-1}, \quad (7.48)$$

сразу видно, что амплитуда однобозонного обмена (7.45) имеет правильное пороговое поведение при p либо p' , стремящемся к нулю. Присутствие члена δ_{J0} в равенстве (7.45) является первым указанием на патологическое поведение амплитуд однобозонного обмена. Этот член возникает из-за фактора Δ^2 в знаменателе равенства (7.44). Его можно рассматривать как δ -функцию в начале координат в координатном представлении псевдоскалярного взаимодействия нуклонов. Присутствие этого члена означает, что следы фредгольмовской матрицы для уравнения Бланкенбеклера — Шугара в S -волне в случае подобного взаимодействия окажутся расходящимися. При этом техника, изложенная в § 5.6, для численного решения уравнения Бланкенбеклера — Шугара неприменима. Мы предвидели возникновение подобных трудностей в § 6.3. Было показано, что они преодолеваются введением «сильных» форм-факторов, которые с ростом p или p' убывают достаточно быстро, чтобы обеспечить существование решений уравнения Бланкенбеклера — Шугара. Такие сильные форм-факторы зачастую берутся без всяких обоснований. В § 6.3 было выяснено, что существуют более удовлетворительные выражения

для указанных форм-факторов, интерпретируемых как суммы бесконечного числа неприводимых диаграмм Фейнмана и служащих целям регуляризации при описании взаимодействия в рамках модели однобозонного обмена.

Таблица 7.4

Матричные элементы, соответствующие обмену скалярной частицей

Матричный элемент	Формула
f_1	$-\frac{g_S^2}{4\pi} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \times$ $\times \frac{EE' + m^2 - pp'z}{2m^2}$
f_2	$-\frac{g_S^2}{4\pi} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \times$ $\times \frac{EE'z + m^2z - pp'}{2m^2}$
f_3	$-\frac{g_S^2}{4\pi} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \frac{-pp'}{2m^2}$
f_4	$-\frac{g_S^2}{4\pi} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \frac{EE' + m^2}{2m^2}$
f_5	$-\frac{g_S^2}{4\pi} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \frac{-E - E'}{2m}$
f_6	$-f_5$

Таблица 7.5

Матричные элементы, соответствующие обмену псевдоскалярной частицей

Матричный элемент	Формула
f_1	$\frac{g_P^2}{4\pi} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \times$ $\times \frac{EE' - m^2 - pp'z}{2m^2}$
f_2	$\frac{g_P^2}{4\pi} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \times$ $\times \frac{EE'z - m^2z - pp'}{2m^2}$
f_3	$\frac{g_P^2}{4\pi} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \frac{pp'}{2m^2}$
f_4	$\frac{g_P^2}{4\pi} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \frac{m^2 - EE'}{2m^2}$
f_5	$\frac{g_P^2}{4\pi} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \frac{E - E'}{m}$
f_6	f_5

В табл. 7.4—7.6 дана сводка результатов для шести спиральных амплитуд f_i из равенств (7.30) для случаев обмена скалярной, псевдоскалярной и векторной частицами. Объединение спиральных амплитуд в величинах f_i , действительно, имеет то преимущество, что угловая зависимость входит исключительно через $\cos \theta$. Проектирование (7.30) на парциальные амплитуды может быть выполнено, таким образом, просто с помощью (7.46). Из табл. 7.4 можно видеть, что синглетная амплитуда для обмена скалярной частицей очень близка к амплитуде, определенной равенством (7.45), для обмена псевдоскалярной частицей. Главное отличие состоит в том, что член $(E_p - E_{p'})^2$ в правой части равенства (7.45) заменяется выражением $(E_p + E_{p'})^2$ для скалярного обмена. Соответственно мы видим, что на пороге (т.е. при

$p=p'=0$ и $E_p=E_{p'}=m$) для случая равных констант связи и масс амплитуда для обмена псевдоскалярной частицей меньше амплитуды для обмена скалярной частицей на множитель $\mu^2/4m^2$. Для обмена пионом это составляет приблизительно $1/200$.

Таблица 7.6

Матричные элементы, соответствующие обмену векторной частицей, с использованием вариантной формы векторного взаимодействия

Матричный элемент	Формула*
f_1	$\frac{1}{4m^2} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \frac{1}{4\pi} \{ G_V^2 [8EE' - 4m^2] + 2G_V f_V [(E + E') \sqrt{\omega} + p^2 + p'^2 + 2pp'z] + f_V^2 X [2EE' + 2m^2 - 2pp'z] \}$
f_2	$\frac{1}{4m^2} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \frac{1}{4\pi} \{ G_V^2 [4m^2z + 8pp'] + 2G_V f_V [(E + E') \sqrt{\omega} z + (2pp' + (p^2 + p'^2)z)] + f_V^2 X [2EE'z + 2m^2z - 2pp'] \}$
f_3	$\frac{1}{4m^2} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \frac{1}{4\pi} \{ G_V^2 [4pp'] + 2G_V f_V [2pp'] + f_V^2 X [-2pp'] \}$
f_4	$\frac{1}{4m^2} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \frac{1}{4\pi} \{ G_V^2 [4EE'] + 2G_V f_V [(E + E') \sqrt{\omega} + p^2 + p'^2] + f_V^2 X [2EE' + 2m^2] \}$
f_5	$\frac{1}{4m^2} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \frac{1}{4\pi} \{ G_V^2 [-4mE] + 2G_V f_V [-(EE' + m^2) \sqrt{\omega}/m - (p^2E' + p'^2E)/m] + f_V^2 X [-2m(E + E')] \}$
f_6	$\frac{1}{4m^2} \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \frac{1}{4\pi} \{ G_V^2 [4mE'] + 2G_V f_V [(EE' + m^2) \sqrt{\omega}/m + (p^2E' + p'^2E)/m] + f_V^2 X [2m(E + E')] \}$

* Используются обозначения

$$X = -(\omega + 2p^2 + 2p'^2 - \Delta^2)/4m^2, \quad G_V = (g_V + f_V).$$

Такая редукция есть следствие того, что матрица γ_5 соединяет в матричных элементах большие и малые компоненты нуклонных спиноров с положительной энергией. (Подобного уменьшения не возникло бы, например, если бы в наших унитаризованных уравнениях допускались промежуточные состояния с отрицательной энергией.)

До сих пор при рассмотрении амплитуды NN -взаимодействия мы пренебрегали эффектами изоспина обмениваемого мезона. Для их учета достаточно вспомнить, что требование зарядовой независимости NN -взаимодействия эквивалентно его изоскалярности. Из операторов изоспина частиц 1 и 2, τ_1 и τ_2 , можно по-

строить лишь два изоскаляра I и $\tau_1 \tau_2$. Очевидно, что оператор I запрещает изменение τ_z в каждой вершине на рис. 23. Поэтому он должен соответствовать обмену нейтральным, т.е. изоскалярным бозоном. Оператор $\tau_1 \tau_2$ допускает изменения проекции изоспина на ось z в каждой вершине, равные ± 1 или 0 . Он должен соответствовать поэтому обмену изовекторным бозоном (например, π^+ , π^0 , π^- или ρ^+ , ρ^0 , ρ^-). Для данного выбора формы взаимодействия матричные элементы, отвечающие обмену бозоном с изоспином $T_B=0, 1$, для состояний NN -системы с $T_{NN}=0, 1$ просто связаны друг с другом. Рассмотрев только изоспиновую зависимость матричных элементов, отметим, что

$$\langle (t_1 t_2) T_{NN} | 1 | (t_1 t_2) T_{NN} \rangle = 1, \quad (7.49)$$

$$\langle (t_1 t_2) T_{NN} | \tau_1 \tau_2 | (t_1 t_2) T_{NN} \rangle = [2T(T+1) - 3]. \quad (7.49a)$$

Эти результаты обычно объединяют, вводя изоспиновую кросс-матрицу в форме

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{T_{NN}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{T_B}. \quad (7.496)$$

Таким образом, все амплитуды для комбинаций $(T_{NN}=0, T_B=0)$, $(T_{NN}=1, T_B=0)$ и $(T_{NN}=1, T_B=1)$ равны друг другу и совпадают с амплитудами, приведенными в табл. 7.4—7.6. Амплитуды для случая $(T_{NN}=0, T_B=1)$ отличаются от табличных множителем -3 .

Из равенств (7.45) и (7.496) видно, например, что амплитуда с $S=0$, отвечающая обмену пионом, является притягивающей при $T_{NN}=1$ и отталкивающей для состояний с $T_{NN}=0$. Для грубой

Таблица 7.7

Сравнение экспериментальных* синглетных фазовых сдвигов с теоретическими величинами для модели однопионного обмена при $E_{\text{лаб}} = 100$ МэВ

1L_J	δ_{exp} , град	$\delta_{\text{ОРЕ}}$, град
1P_1	-11,1	-12,2
1D_2	3,7	1,8
1F_3	-2,0	-2,4
1G_4	0,44	0,38
1H_5	-0,65	-0,56

* Экспериментальные данные взяты из работы Мак-Грегора и др. [78].

$=\mu_\pi$ и $g_\pi^2/4\pi = 14$ (экспериментальная величина) даны в табл. 7.7 вместе с экспериментальными значениями. Имеется качественное согласие.

Отметим здесь, что изоспиновая кроссинг-матрица (7.496) такова, что обмен ρ -мезоном приводит к притяжению либо отталкиванию в зависимости от величины T_{NN} . Таким образом, следует ожидать, что доминирующий вклад в короткодействующее отталкивание (известное феноменологическое свойство NN -взаимодействия во всех парциальных волнах) дают обмены изоскалярными ω - и ϕ -мезонами, приводящие к отталкиванию во всех каналах. Отсюда также следует, что константа связи для ρ -мезона должна быть по крайней мере в $\sqrt{3}$ раз меньше константы связи для изоскалярного векторного мезона, если отталкивание должно иметь место во всех каналах. Этот результат согласуется с оценками констант связи в теории, основанной на симметрии $SU(3)$.

§ 7.3. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Целесообразно рассмотреть некоторые численные результаты для сдвигов фаз, рассчитанных для суперпозиции амплитуд однобозонного обмена с помощью техники § 7.2. Регуляризация осуществлена введением сильных форм-факторов, аппроксимирующих вершинную функцию. Вкладом перекрестно-лестничных диаграмм пренебрегали. Сдвиги фаз найдены из решения неутерированного уравнения Бланкенбеклера — Шугара с использованием численного метода, описанного в § 5.6. Константы связи и массы бозонов указаны в табл. 7.8. С целью достижения качественного согласия вычисляемых фазовых сдвигов с экспериментом эффекты двухпионного обмена имитированы введением фиктивного σ -мезона скалярного в спиновом и изоспиновом пространствах. Как отмечалось в работе Ломона [73], в таком приближении для получения количественного согласия с опытом приходится брать слишком большие (нефизические) значения констант связи для векторных мезонов. Здесь подобная подгонка не произведена, поскольку нас больше интересует сама процедура расчета сдвигов фаз, относительно свободная от произвольных предположений. Ее параметры будут определены независимо от задачи нуклон-нуклонного рассеяния. С помощью техники проектирования, рассмотренной в § 7.1, которая позволяет найти парциальные амплитуды из регуляризованных амплитуд однобозонного обмена, вычислены сдвиги фаз в каналах 1S_0 и 1P_1 . Результаты приведены на рис. 24. Качественное согласие с экспериментальными фазами получено при разумных значениях констант связи

Таблица 7.8

Параметры модели однобозонного обмена

Мезон	Масса, МэВ	Константа связи $g^2/(4\pi)$
π	139	14,3
ρ	765	0,53 ($f_\rho = 1,5 g_\rho$)
ω	783	4,77
σ	550	6,0

и масс. Это означает, что представленная здесь модель физически правдоподобна.

Для того чтобы продемонстрировать зависимость фаз от способа регуляризации амплитуд однобозонного обмена, мы приводим на тех же рисунках результаты расчетов, в которых эйкональные форм-факторы $\exp[2i\chi_1(t)]\exp[2i\chi_1(u)]$ заменены известными феноменологическими выражениями

$$\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - t} \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - u}, \quad (7.50)$$

где Λ — некоторый параметр обрезания, вообще говоря, произвольный. В феноменологических подходах зачастую просто пренебрегают зависимостью амплитуд однобозонного обмена от u и

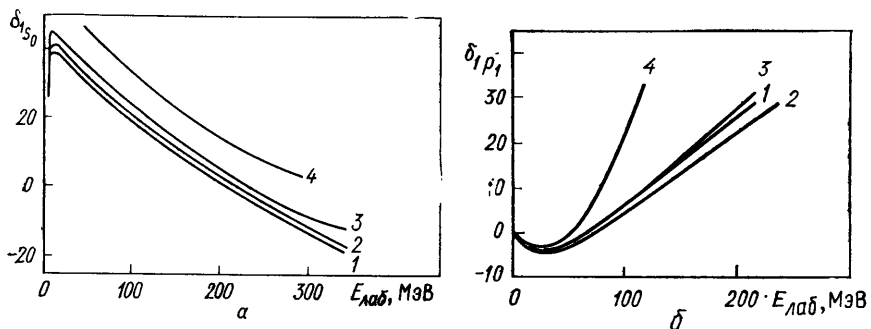


Рис. 24. Фазовый сдвиг в 1S_0 - и в 1P_1 -состояниях как функция от энергии в лабораторной системе a и b (соответственно), вычисленный

1 — с эйкональным форм-фактором из равенства (6.39); 2 — с эйкональным форм-фактором Фрида и Гэйссера; 3 и 4 — с феноменологическим форм-фактором из равенства (7.50) при значениях $\Lambda=1,6$ ГэВ и $3,2$ ГэВ соответственно

ω , оставляя в (7.50) лишь член, зависящий от t . Заметим, что такой форм-фактор превращает δ -функции, связанные, например, с взаимодействием однобозонного обмена вида (1.11), в потенциалы Юкавы с радиусом Λ^{-1} . Введение в форм-фактор зависимости (7.50) как от t , так и от u имеет целью обеспечить достаточно быструю сходимость амплитуд, содержащих связь с производной, возникающую для случая обмена векторным мезоном (см. табл. 7.6). Относительно параметра Λ обычно предполагают, что он составляет несколько нуклонных масс. В связи с этим на рис. 24 приведены результаты, полученные с параметрами из табл. 7.8, при двух значениях параметра обрезания: $\Lambda=1,6$ ГэВ и $\Lambda=3,2$ ГэВ. Чувствительность вычисленных фаз к значению Λ подчеркивает важность использования каких-либо физических аргументов при выборе процедуры, обеспечивающей сходимость амплитуд. Как отмечалось, эйкональная форма может интерпретироваться как приближенное суммирование строго определенного класса неприводимых диаграмм. С феноменологической точки зрения применение этой формы оправдано возможностью воспро-

изведения с ее помощью электромагнитных форм-факторов нуклонов, а также рассеяния вперед нуклона на нуклоне при высоких энергиях.

Сдвиги фаз в каналах 3S_1 и 3P_J проявляют сходную чувствительность к выбору сильных форм-факторов. Поскольку эти форм-факторы приводят к модификациям нуклон-нуклонного взаимодействия главным образом на малых расстояниях, фазы для больших значений орбитального момента значительно менее чувствительны к конкретному виду обрезания.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ, СВЯЗАННОЕ С ДВУХПИОННЫМ ОБМЕНОМ

§ 8.1. ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие на промежуточных и, отчасти, на малых расстояниях обусловлено членами двухпионного обмена типа указанных на диаграммах рис. 25. Естественным отправным пунктом для расчета соответствующих амплитуд является четырехугольная диаграмма, приведенная на рис. 26.

Расчеты с псевдоскалярными мезонами, связь которых с нуклонами псевдоскалярна, т. е. гамильтониан связи имеет вид

$$\delta H = g \bar{\psi} \gamma_5 (\tau \Phi) \psi(x), \quad (8.1)$$

были выполнены многими авторами. Упомянем здесь хорошо известные работы Бракнера и Ватсона [20], а также Такетани, Мачиды и Онумы [113].

В этих давних работах взаимодействие, вообще говоря, расщеплялось на два члена, один из которых соответствует промежуточным состояниям нуклонов, изображенным на рис. 26, *а*, а другой — образованию промежуточных пар, как показано на рис. 26, *б* и *в*. Для того чтобы это сделать, удобно воспользоваться теоремой эквивалентности, согласно которой взаимодействие δH , будучи примененным в теории возмущений вплоть до второго порядка, эквивалентно выражению

$$\delta H \cong \frac{f}{\mu} \bar{\psi} (\sigma \nabla) (\tau \Phi) \psi(x) + \frac{g^2}{2m} \bar{\psi} \Phi^2 \psi(x), \quad (8.2)$$

где $f = g\mu/2m$.

Разумеется, диаграмма, изображенная на рис. 26, *а* должна давать вклад при использовании первого слагаемого в правой части равенства (8.2) в четвертом порядке теории возмущений. При этом возникает затруднение, вызванное тем, что теряется эквивалентность между формулами (8.1) и (8.2).

Слагаемое в (8.2), содержащее множитель $g^2/(2m)$, соответствует диаграммам, изображенным на рис. 26, *б* и *в*. Остановимся на механизмах пион-нуклонного рассеяния, показанных на рис. 27. В амплитуде для процесса *б* присутствует зависящий от энергии знаменатель, содержащий $2mc^2$ (плюс малая кинетическая энер-

гия). По этой причине появляется множитель $(2m)^{-1}$ во втором слагаемом равенства (8.2). Известно, что оператор γ_5 в (8.1) имеет матричный элемент порядка единицы для случая промежуточных состояний рис. 26, б и в, включающих виртуальные пары.

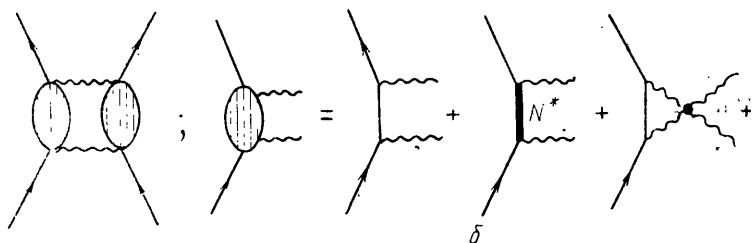


Рис. 25. Диаграмма для двухпионного обмена

Волнистые линии отвечают пионам. Заштрихованные овалы содержат все возможные взаимодействия (б) при условии, что испускаются два и только два пиона

Еще в 1950 г. стало известно, что учет слагаемого с множителем $g^2/(2m)$ в (8.2) приводит к совершенно неправильным результатам для пион-нуклонного рассеяния. Поскольку Φ^2 — изо-скаляр, а g^2 — большое число, применение этого слагаемого в

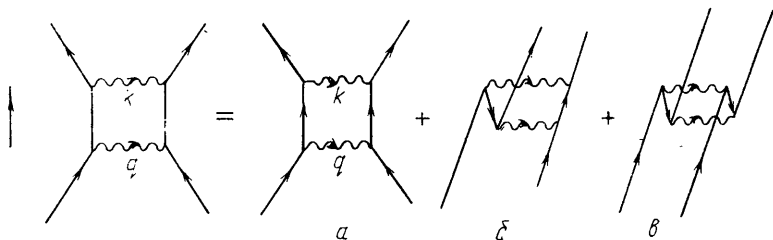


Рис. 26. Квадратная нуклонная диаграмма

В левой части равенства изображена диаграмма Фейнмана. Справа даны различные упорядочивания по времени: случай б соответствует промежуточному состоянию с одной виртуальной парой, в — промежуточному состоянию с двумя виртуальными парами. Имеется также диаграмма с перекрестным обменом мезонами, которая здесь не показана

борновском приближении привело бы к длине рассеяния порядка нескольких ферми, в то время как экспериментальное значение этой величины порядка 10^{-3} Ферми. В связи с этим указанный член вообще был отброшен в расчетах для пион-нуклонного рассеяния. Такая процедура получила название «подавление пар».

Если мы хотим осуществить подавление пар на всех этапах расчетов, имеет смысл исключить из рассмотрения графики типа показанных на рис. 26, б и в. Фактически в цитированных выше работах Бракнера и Ватсона [20] члены, включающие и не включающие виртуальные пары, были протабулированы отдельно. Процесс, изображенный на диаграмме рис. 26, а не включает вир-

туальных пар и следует, по существу, из первого слагаемого формулы (8.2), т. е.

$$\delta H' = \frac{f}{\mu} \bar{\psi} (\sigma \nabla) (\tau \Phi) \psi(x) \quad (8.2a)$$

используется четыре раза. Это эквивалентно использованию псевдовекторной связи.

Процесс, отвечающий диаграмме рис. 26, а, должен частично войти в амплитуду, получаемую из решения уравнения Шредингера или уравнения типа Шредингера с потенциалом однопионного обмена (1.11). Соответствующая часть должна вычитаться, если мы хотим получить потенциал, отвечающий обмену двумя пионами. Позднее мы рассмотрим эту проблему более полно. Часть, остающаяся после вычитания и отвечающая истинному потенциалу двухпионного обмена, представляет собой процессы, в которых оба пиона находятся в промежуточном состоянии одновременно, как показано на рис. 28.

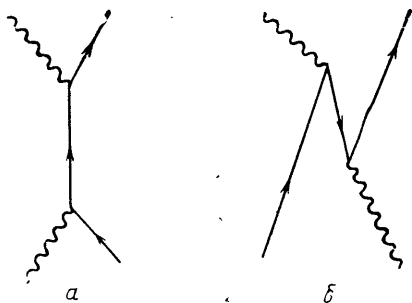


Рис. 27. Процессы пион-нуклонного рассеяния с нуклоном (а) и нуклон-antinуклонной парой (б) в промежуточном состоянии

Если отбросить члены, связанные с образованием виртуальных пар, то потенциал, полученный Бракнером и Ватсоном и дополненный потенциалом однопионного обмена, при средних и больших радиусах оказывается весьма близким к наилучшим эмпири-

ческим потенциалам Хамады — Джонстона [47] и Рида [98], найденным в результате подгонки к экспериментальным данным для нуклон-нуклонного рассеяния.

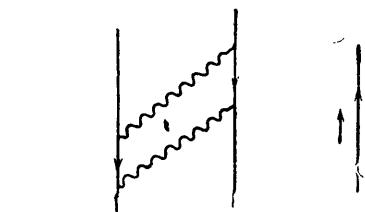


Рис. 28. Часть нуклонной квадратной диаграммы (см. рис. 26), дающая вклад в потенциал двухпионного обмена. Предполагается, что имеет место подавление вклада пар

Можно думать поэтому об использовании релятивистской теории, в которой взаимодействие $\delta H'$, определяемое равенством (8.2a), является нерелятивистским приближением к выражению вида

$$\delta H'_{rel} = \frac{f}{\mu} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \psi(x) \quad (8.2б)$$

(зависимость от изоспина здесь опущена). Однако любой процесс, подобный четырехугольной диаграмме на рис. 26, амплитуда которого требует вычисления интеграла по замкнутому контуру, приводит к расходимости для случая связи с производной. Поскольку различие между δH из (8.1) и $\delta H'$ связано с членами, включающими виртуальные пары, а расчет в предыдущем случае дает конечный результат*, ясно, что члены с виртуальными парами обеспечивают регуляризацию, и их нельзя так просто отбросить в релятивистском расчете. Более того, поскольку расходимость, возникающая в случае псевдовекторной связи, сама по себе неприятна (расходимость кубичная по импульсу q после операции интегрирования), а обрезание за счет учета членов с виртуальными парами по самой природе своей (поскольку энергии виртуальных промежуточных состояний $\geq 2mc^2$) проявляется при импульсах до $q \sim mc$, ясно, что нельзя доверять нерелятивистским расчетам для четырехугольной диаграммы. Действительно, если мы ограничиваемся низкими значениями промежуточных импульсов \mathbf{q} и \mathbf{k} , при которых псевдоскалярная и псевдовекторная связи дают одинаковые выражения для рассматриваемого процесса, то, вообще говоря, диаграмма на рис. 26, *a* не даст правильной величины дальнедействующей части потенциала в конфигурационном пространстве. После интегрирования по q_0 мы получаем для рассматриваемого процесса выражение $F(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ (причем величина k_0 определяется импульсами внешних линий). Чтобы найти амплитуду в импульсном пространстве, надо проинтегрировать это выражение по переменной \mathbf{q} . Полный переданный импульс равен $\mathbf{k} + \mathbf{q} = \Delta$, так что потенциал в конфигурационном пространстве может быть найден с помощью формулы

$$V(r_{12}) = \int e^{i\Delta r_{12}} d^3\Delta \iint \delta(\Delta - \mathbf{k} - \mathbf{q}) F(\mathbf{k}, \mathbf{q}) d^3k d^3q. \quad (8.2b)$$

Эта формула показывает, почему оба импульса \mathbf{k} и \mathbf{q} могут быть велики при фиксированном Δ и, таким образом, могут давать вклад в потенциал при больших r_{12} , при которых доминирующую роль играют малые значения Δ . Действительно, так как интеграл по \mathbf{q} сходится в случае псевдоскалярной связи и расходится в случае псевдовекторной связи, а также по той причине, что эти связи дают различия только при релятивистских импульсах $|\mathbf{q}| \geq mc$, мы видим, что записанный выше интеграл начинает сходиться лишь при указанных больших значениях q .

Релятивистский расчет амплитуды, отвечающей обмену двумя пионами — процессу, изображенному с помощью диаграмм на рис. 25 или 26, может быть сделан либо динамически (см. работу Хоссейна, Партови и Ломона [54]), либо в рамках дисперсионной теории. Мы предпочтем последнее. Мы верим, что этот аппарат является более удобным средством, позволяющим связать

* Различие между псевдовекторной и псевдоскалярной связями обусловлено, конечно, тем фактом, что псевдоскалярная связь приводит к перенормируемой теории, в отличие от псевдовекторной.

изображенный на рис. 25 заштрихованный блок с различными физическими явлениями, проявляющимися в процессах рассеяния пиона на пионе и нуклоне. Во всяком случае дальнейшее изложение будет посвящено исследованию двухпионного обмена с помощью дисперсионной теории.

§ 8.2. СХЕМА ВЫКЛАДOK

Сначала дадим грубое схематическое изложение того, что в дальнейшем будет рассмотрено подробно. На время пренебрежем осложнениями, связанными со спинами частиц и т.п. Амплитуда нуклон-нуклонного рассеяния, как функция квадрата полной энергии в системе центра масс ω и квадрата инвариантного переданного импульса t , удовлетворяет дисперсионному соотношению при фиксированной энергии:

$$M(\omega, t) = M_{\text{ОРЕС}} + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im}_t M(\omega, t')}{t' - t} dt', \quad (8.3)$$

где $M_{\text{ОРЕС}}$ — вклад однопионного обмена; $\text{Im}_t M(\omega, t')$ обозначает скачок амплитуды $M(\omega, t')$ на разрезе вдоль положительной оси t' .

Такое представление удобно с физической точки зрения. Действительно, пусть $\text{Im}_t M(\omega, t)$ имеет вид

$$\text{Im}_t M(\omega, t') = \rho(t_0) \delta(t' - t_0). \quad (8.3a)$$

Здесь t' — времениподобно, $t' > 0$, тогда, как интересующие нас при описании нуклон-нуклонного рассеяния, значения находятся в пространственноподобной области, $t < 0$, так как $t = -\Delta^2$, а Δ — переданный импульс в системе центра масс двух нуклонов. Таким образом, можно записать

$$\frac{1}{4\pi(t_0 + \Delta^2)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\exp(-\sqrt{t_0}r)}{r} e^{i\Delta r} d^3r. \quad (8.4)$$

И мы получили, что матрица рассеяния в этом случае есть как раз фурье-компонента потенциала Юкавы, соответствующего обмену частицей с массой $\sqrt{t_0}$. Поскольку удобно рассматривать нуклон-нуклонное взаимодействие как результат обмена частицами с разными массами, причем большим массам отвечают меньшие расстояния, данное выше представление для амплитуды является привлекательным. Конечно, нельзя непосредственно интерпретировать $\text{Im}_t M(\omega, t')$ как весовую функцию для потенциала Юкавы, соответствующего обмену мезоном с массой $\sqrt{t'}$, так как частично второе слагаемое в правой части (8.3) проистекает от последовательных обменов пионами. Эта часть должна быть исключена из рассмотрения, чтобы остальное можно было интерпретировать как потенциал двухпионного обмена. Последовательные обмены пионами входят в игру за счет слагаемого $M_{\text{ОРЕС}}$

[см. дисперсионное соотношение (8.3)], когда оно используется в качестве потенциала в уравнении типа уравнения Шредингера.

Задача теперь состоит в том, чтобы найти вклад двухпионного обмена в $\text{Im}_t M(\omega, t')$. С точностью до кинематических множителей $\text{Im}_t M(\omega, t')$ выражается через квадраты модулей от амплитуд аннигиляции $\tau_{\beta\alpha}$, которые будут определены в § 8.3 для процесса $N + \bar{N} \rightarrow \pi + \pi$. Эти амплитуды отличны от нуля при $t > 4\mu_\pi^2$. Наличие спина у нуклона усложняет весь формализм, к рассмотрению которого мы теперь перейдем.

§ 8.3. ФОРМАЛИЗМ

Определим* амплитуду перехода D с помощью следующего выражения для S -матрицы:

$$S_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} + i\delta^{(4)}(p_\beta - p_\alpha) D_{\beta\alpha}. \quad (8.5)$$

В случае упругого нуклон-нуклонного и нуклон-антинуклонного рассеяния амплитуда перехода связана с дифференциальным сечением в системе центра масс соотношением

$$\sigma_{\beta\alpha}(\theta, \phi) = \pi^2 E^2 |D_{\beta\alpha}|^2, \quad (8.5a)$$

где E — энергия каждой из частиц в системе центра масс. Поскольку амплитуда рассеяния определяется формулой

$$\sigma_{\beta\alpha}(\theta, \phi) = |T_{\beta\alpha}|^2, \quad (8.5b)$$

мы имеем

$$D_{\beta\alpha} = (1/\pi E) T_{\beta\alpha}. \quad (8.5v)$$

Ковариантная фейнмановская амплитуда или «причинная» (*causal*) амплитуда M дается выражением

$$M = 4\pi (E/m^2) T_{\beta\alpha}. \quad (8.6)$$

Мы будем иметь дело с двухпионной аннигиляцией нуклона и антинуклона ($N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$). Удобно ввести амплитуду τ , связанную с амплитудой рассеяния с помощью формулы

$$T_{\beta\alpha}(N\bar{N} \rightarrow \pi\pi) = -\frac{1}{8\pi} \frac{m}{E} \sqrt{\frac{q}{p}} \tau_{\beta\alpha}, \quad (8.7)$$

где p и q — трехмерные импульсы нуклонов и пионов соответственно в системе центра масс. Поэтому приходим к формуле

$$\frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\Omega}(N\bar{N} \rightarrow \pi\pi) = \frac{q}{p} \left| \frac{m}{2E} \frac{\tau_{\beta\alpha}}{4\pi} \right|^2. \quad (8.7a)$$

Для амплитуд D и T условие унитарности записывается соответственно в виде ($p_\beta = p_\alpha$):

$$i(D_{\beta\alpha}^+ - D_{\beta\alpha}) = \sum_{\gamma} \delta^{(4)}(p_\gamma - p_\alpha) D_{\beta\gamma}^+ D_{\gamma\alpha}, \quad (8.8)$$

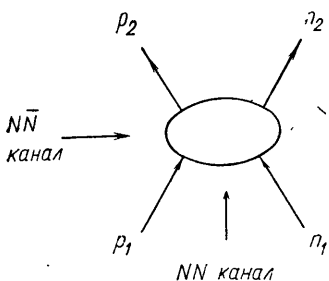
* Вообще говоря, мы следуем обозначениям работы Амати, Лидера, Витале [4].

$$i(T_{\beta\alpha}^+ - T_{\beta\alpha}) = \frac{1}{\pi E} \sum_{\gamma} \delta^{(4)}(p_{\gamma} - p_{\alpha}) T_{\beta\gamma}^+ T_{\gamma\alpha}. \quad (8.8a)$$

Если в сумме по γ учитываются только состояния двух пионов ($\pi\pi$ -состояния), то, используя (8.7), для причинной амплитуды M можно записать условие унитарности:

$$i(M_{\beta\alpha}^+ - M_{\beta\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^2 t} \sum_{\gamma} \delta^{(4)}(p_{\gamma} - p_{\alpha}) \tau_{\beta\gamma}^+ \tau_{\gamma\alpha}. \quad (8.9)$$

Исследуем переменные, от которых зависит эта амплитуда, чтобы обсудить свойства M более подробно, и раскроем смысл индексов. Рассмотрим нуклон-нуклонное рассеяние в соответствии с рис. 29. Вследствие закона сохранения энергии-импульса наш процесс описывается тремя независимыми 4-векторами, в качестве которых возьмем



$$\left. \begin{aligned} N &= (n_1 + n_2)/2, \\ P &= (p_1 + p_2)/2, \\ \Delta &= (n_1 - n_2) = (p_2 - p_1). \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Рис. 29. Описание рассеяния

Мандельштамовские переменные определены формулами

$$\left. \begin{aligned} w &= -(p_1 + n_1)^2, \\ t &= -(n_1 - n_2)^2, \\ \bar{t} &= -(p_1 - n_2)^2, \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

где $p_1^2 = \mathbf{p}^2 - p_0^2 = -m^2$. Эти переменные связаны между собой соотношением

$$w + t + \bar{t} = 4m^2. \quad (8.11a)$$

В системе центра масс двух нуклонов имеем

$$\left. \begin{aligned} w &= 4(k^2 + m^2) = 4E_k^2, \\ t &= -2k^2(1 - \cos \theta), \\ \bar{t} &= -2k^2(1 + \cos \theta), \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

где k , E_k и θ — импульс и энергия каждого нуклона и угол рассеяния в системе центра масс соответственно.

Для полноты укажем, что в системе центра масс нуклона и антинуклона

$$\left. \begin{aligned} w &= -2p^2(1 + \cos \psi), \\ t &= 4(p^2 + m^2) = 4E_p^2, \\ \bar{t} &= -2p^2(1 - \cos \psi), \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

где p , E_p и ψ имеют тот же смысл, что и переменные в (8.12), но для случая, когда вместо одного из нуклонов взят антинуклон.

Причинная амплитуда M представляет собой ковариантную матрицу в пространствах спинов и изоспинов падающих и рассеянных частиц. Ее можно записать в виде линейной комбинации инвариантных операторов O_j с коэффициентами o_j , которые представляют собой скалярные функции от ω , t и \bar{t} :

$$M_{\beta\alpha} = \sum_j o_j(\omega, t, \bar{t}) \langle \beta | O_j | \alpha \rangle. \quad (8.14)$$

Те или иные операторы оказываются удобными в различных случаях. Мы увидим, что выбор операторов целесообразно сделать так, чтобы соответствующие коэффициенты были выражены в представлении Манделъстама. В частности, один из полезных наборов, который мы укажем для примера, может быть назван набором «инвариантов для теории возмущений» (perturbative invariants). В него входят инвариантные операторы P_j :

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 1^n 1^p, \quad P_2 = (i\gamma^n P 1^p + 1^n i\gamma^p N), \\ P_3 &= (i\gamma^n P)(i\gamma^p N), \quad P_4 = \gamma^n \gamma^p, \quad P_5 = \gamma_5^n \gamma_5^p. \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

Изоспиновая структура операторов O_j проще. Она будет дана позднее.

При перестановке начальных нуклонов (кроссинге) выражение

$$[\bar{u}(n_2) O_j^{(n)} u(n_1)] [\bar{u}(p_2) O_j^{(p)} u(p_1)]$$

переходит в следующее:

$$[\bar{u}(n_2) O_j^{(n)} u(p_1)] [\bar{u}(p_2) O_j^{(p)} u(n_1)] \quad (8.16)$$

и соответственно t заменяется на \bar{t} . Здесь мы использовали обозначение

$$O_j = O_j^{(n)} O_j^{(p)}. \quad (8.16a)$$

После указанного преобразования оператор $O_j^{(n)}$ в (8.16) все еще остается оператором между спинорами $\bar{u}(n_2)$ и $u(n_1)$ (т.е. действует на переменные частицы с импульсом n_i . — Прим. пер.). Поскольку операторы O_j образуют полный набор, любую сумму $\sum_j O_j$ можно переписать в виде $\sum_j O_j = \sum_j \delta_j \tilde{O}_j$, где операторы с тильдой \tilde{O}_j могут быть факторизованы в виде произведения операторов, действующих между спинорами $u(n_2)$ и $\bar{u}(p_1)$, а также $u(p_2)$ и $\bar{u}(n_1)$ соответственно. Набор инвариантов C_j можно построить таким образом, что указанной перестановке будет отвечать преобразование

$$C_j \xrightarrow{\text{кроссинг}} (-1)^j C_j, \quad (8.16b)$$

$j=1, 2, 3, 4$ или 5 . Это мы обсудим в Дополнении В.

Соответственно можно образовать операторы, действующие в пространстве изоспина, с простым законом преобразования (про-

екционные операторы для синглетного и триплетного по изоспину состояний):

$$\langle n_2 p_2 | P_T | n_1 p_1 \rangle = -(-1)^T \langle n_2 p_2 | P_T | p_1 n_1 \rangle, \quad (8.16\Gamma)$$

где

$$P_0 = (1 - \tau^n \tau^p)/4, \quad P_1 = (3 + \tau^n \tau^p)/4. \quad (8.16\Delta)$$

Амплитуда $M_{\alpha\beta}$ может быть записана в терминах операторов C_j по аналогии с равенством (8.14)

$$M_{\beta\alpha} = \sum_{j=1}^5 \sum_{T=0}^1 c_j^T(\omega, t, \bar{t}) \langle \beta | P_T C_j | \alpha \rangle. \quad (8.17)$$

Поскольку операция кроссинг эквивалентна перестановке $n_1 \rightleftharpoons p_1$, принцип Паули требует, чтобы полная амплитуда была антисимметрична относительно кроссинг-преобразования,

$$\langle n_2 p_2 | M | n_1 p_1 \rangle = -\langle n_2 p_2 | M | p_1 n_1 \rangle. \quad (8.17a)$$

Отсюда следует, что коэффициенты разложения по инвариантным операторам должны удовлетворять условиям

$$c_j^T(\omega, t, \bar{t}) = (-1)^{j+T} c_j^T(\omega, \bar{t}, t). \quad (8.18)$$

«Инварианты для теории возмущений» (8.15) появляются в расчетах наиболее естественным образом. Однако они не имеют столь простых свойств по отношению к кроссингу. Можно использовать их для построения амплитуды рассеяния, считая сначала нуклоны различимыми, а затем «руками» производя антисимметризацию (кроссинг) при вычислении любой физической величины.

Принимая во внимание зависимость амплитуды рассеяния от изоспина, можно записать

$$M = \sum_{j=1}^5 [3\rho_j^+(\omega, t, \bar{t}) + 2\rho_j^-(\omega, t, \bar{t}) \tau^p \tau^n] P_j. \quad (8.19)$$

Появление множителей 3 и 2 в формуле (8.19) далее станет очевидным. Поскольку инварианты P_j эрмитовы, имеем

$$i(M^+ - M) = 2 \sum_j [3 \operatorname{Im} \rho_j^+(\omega, t, \bar{t}) + 2 \operatorname{Im} \rho_j^-(\omega, t, \bar{t}) \tau^p \tau^n] P_j. \quad (8.20)$$

Определим ρ_j соотношением*

$$\operatorname{Im} \rho_j^\pm(\omega, t, \bar{t}) = \rho_j^\pm(\omega, t) \mp (-1)^j \rho_j^\pm(\bar{t}, t). \quad (8.21)$$

* Величины $\rho_j^\pm(\omega, t, \bar{t})$ комплексны. В следующей главе будет подробно показано, каким образом появляются вещественная и мнимая части.

Причина появления такой комбинации $\rho_j^\pm(\omega, t) \mp (-1)^j \rho_j^\pm(\bar{t}, t)$ будет пояснена ниже в связи с равенством (8.37в). Тогда из (8.9) найдем

$$\begin{aligned} & \sum_j [3\rho_j^+(\omega, t) - (-1)^j 3\rho_j^+(\bar{t}, t)] P_j + \sum_j [2\rho_j^-(\omega, t) + \\ & + (-1)^j 2\rho_j^-(\bar{t}, t)] \tau^p \tau^n P_j = \\ & = \frac{1}{2(2\pi)^2 t} \sum_{2\pi} \langle \bar{p}_1 \bar{p}_2 | \tau^+ | \pi\pi \rangle \langle \pi\pi | \tau | n_1 \bar{n}_2 \rangle. \end{aligned} \quad (8.22)$$

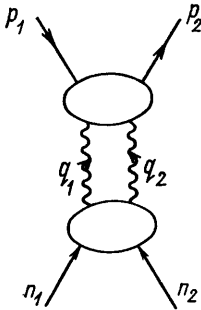


Рис. 30. Кинематика для механизма двухпионного обмена, дающего вклад в рассеяние $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$

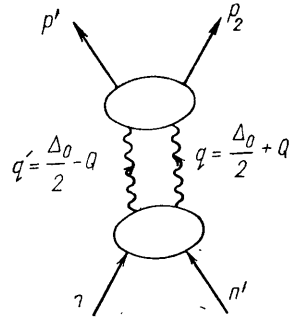


Рис. 31. Система центра масс для процесса $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$. В обозначениях предыдущего рисунка $n = n_1$, $n' = -n_2$, $p = -p_2$, $p' = -p_1$

Формула для τ матрицы записывается обычным образом

$$\begin{aligned} \langle \pi_\alpha \pi_\beta | \tau | n_1 \bar{n}_2 \rangle = & \bar{v}(n_2) \left[- \left(A_n^+ \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha] A_n^- \right) + \right. \\ & \left. + i(\gamma Q) \left(B_n^+ \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} [\tau_\beta, \tau_\alpha] B_n^- \right) \right] u(n_1), \end{aligned} \quad (8.23)$$

где вектор Q определен через импульсы пионов (рис. 30):

$$Q = (q_2 - q_1)/2. \quad (8.24)$$

Сумма по изоспинам, обозначенная символом $\Sigma_{2\pi}$, вычисляется просто. Для сумм $\sum_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}$ и $\frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta} [\tau_\alpha, \tau_\beta]_n [\tau_\beta, \tau_\alpha]_p$ получаем факторы 3 и $2 \tau_n \tau_p$ соответственно.

Интегрирование по импульсам пионов в промежуточных состояниях записывается следующим образом:

$$\sum_j [\rho_j^\pm(\omega, t) \mp (-1)^j \rho_j^\pm(\bar{t}, t)] = \frac{1}{2(2\pi)^2 t} \left\{ \frac{1}{2} \int d^3 q d^3 q' \bar{u}(p_2) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \left(-A_p^{\pm*} + i\gamma QB_p^{\pm*} \right) v(p_1) \bar{v}(n_2) \left(-A_n^{\pm} + i\gamma QB_n^{\pm} \right) u(n_1) \Big\} \times \\ & \times \delta^{(4)}(n_2 + q_1 + q_2 - n_1), \end{aligned} \quad (8.25)$$

где множитель $1/2$ перед интегралом связан с симметрией пл-состояния и позволяет избежать двойного счета. (Мы обращаем внимание на множитель $+i\gamma Q$ перед B_p^* . Изменение знака при комплексном сопряжении компенсируется изменением знака q и q' при переходе от n -системы к p -системе.)

Перейдем к системе центра масс $N\bar{N}$, чтобы выполнить интегрирование*. При этом $\sqrt{t}/4 = \sqrt{-\Delta^2/4} = \Delta_0/2$ — энергия частицы и Δ не имеет пространственных компонент. В этой системе центра масс $\delta^{(4)}(n_2 + q_1 + q_2 - n_1)$ переходит в $\delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \delta(q_0 + q'_0 - \Delta_0)$, так что интегрирование по d^3q' отвечает подстановке $\mathbf{q}' = -\mathbf{q}$, что уже учтено на рис. 31. Далее, поскольку пионы находятся на массовой поверхности

$$q_0 = q'_0 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + \mu_\pi^2}, \quad (8.25a)$$

мы приходим к выражению

$$\begin{aligned} \sum_i [\rho_i^{\pm}(\omega, t) \mp (-1)^j \rho_i^{\pm}(\bar{t}, t)] &= \frac{1}{2(2\pi)^2 t} \left\{ \frac{1}{2} \int q^2 dq d\Omega_Q \bar{u}(p) \times \right. \\ & \times \left. \left(-A_p^{\pm*} + i\gamma QB_p^{\pm*} \right) v(p') \bar{v}(n') \left(-A_n^{\pm} + i\gamma QB_n^{\pm} \right) u(n) \delta(2q_0 - \Delta_0) \right\}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Учитывая связь (8.25a) между q^2 и q_0 , а также равенство $\Delta_0 = \sqrt{t}$, легко найти выражение

$$\begin{aligned} \sum_i [\rho_i^{\pm}(\omega, t) \mp (-1)^j \rho_i^{\pm}(\bar{t}, t)] &= \frac{1}{2(2\pi)^2 t} \left\{ \frac{1}{16} \sqrt{t(t - 4\mu_\pi^2)} \times \right. \\ & \times \left. \int d\Omega_Q \bar{u}(p) \left(-A_p^{\pm*} + i\gamma QB_p^{\pm*} \right) v(p') \bar{v}(n') \left(-A_n^{\pm} + i\gamma QB_n^{\pm} \right) u(n) \right\}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

* Интересующая нас здесь область $4\mu_\pi^2 < t < m^2$ расположена намного левее физической области $t \geq 4m^2$ для процесса $N\bar{N} \rightarrow \text{пл}$. Отметим, однако, что барионы находятся на массовой поверхности, т. е. $p_1^2 = p_2^2 = n_1^2 = n_2^2 = -m^2$. Хотя трехмерные импульсы пионов \mathbf{q}, \mathbf{q}' действительны, 3-импульсы нуклонов p, n чисто мнимы. Условие унитарности должно быть поэтому продолжено на комплексную плоскость переменной p с помощью соотношения $S^+(p^*) S(p) = 1$ (см. работу [116]). Результат, получаемый при таком продолжении условия унитарности, полностью эквивалентен тому, который получился бы, если бы мы все время работали в физической области ($t \geq 4m^2$), где p и q вещественны, а затем путем аналитического продолжения по переменной t перешли в интересующую нас область ($4\mu_\pi^2 < t < m^2$).

Задача сводится теперь к вычислению интегралов четырех типов

$$\int d\Omega_Q A_p^{\pm*} A_n^{\pm} 1^p 1^n, \quad (8.28a)$$

$$\int d\Omega_Q A_p^{\pm*} B_n^{\pm} (1^p i \gamma^n Q), \quad (8.28б)$$

$$\int d\Omega_Q B_p^{\pm*} A_n^{\pm} (i \gamma^p Q 1^n), \quad (8.28в)$$

$$\int d\Omega_Q B_p^{\pm*} B_n^{\pm} (i \gamma^p Q) (i \gamma^n Q). \quad (8.28г)$$

Форма первого из интегралов уже отвечает требуемой. В Дополнении Б мы покажем, каким образом остальные интегралы приводятся к нужному виду.

§ 8.4. ТРЕБОВАНИЯ АНАЛИТИЧНОСТИ

Прежде всего хотелось бы обратить внимание на основные положения теории. Надо показать, каким образом в теорию входят требования аналитичности, какая информация об амплитудах процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ нам нужна и откуда она может быть получена. С чисто практической точки зрения мы покажем, почему мы берем $\text{Im} p_j(\omega, t, \bar{t})$ в виде суммы $\rho_j(\omega, t) \mp (-1)^j \rho_j(\bar{t}, t)$. Для того, чтобы ответить на эти вопросы, достаточно иметь дело с первым членом в (8.28). Оценка других членов добавит лишь немного деталей. Возьмем также комбинацию, симметричную по изоспину. Итак, рассмотрим интеграл

$$\mathcal{Y} = \int d\Omega_Q A_p^{+*} A_n^{+} 1^p 1^n. \quad (8.29)$$

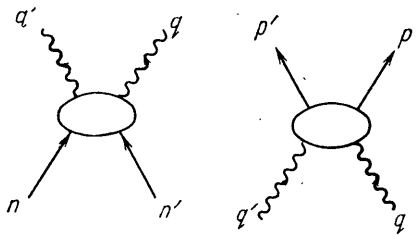


Рис. 32. Кинематика реакций $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ и $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$

Прежде всего изучим кинематику процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$, изображенного на графике рис. 32. Следуя работе Амати, Лидера и Витале [4], введем определения:

$$\left. \begin{aligned} s_n &= -(n - q')^2 = -(n^2 + q^2 - 2 |n| |q| \cos \varphi_n); \\ u_n &= -(n - q)^2 = -(n^2 + q^2 + 2 |n| |q| \cos \varphi_n); \\ s_p &= -(p - q')^2 = -(p^2 + q^2 - 2 |p| |q| \cos \varphi_p); \\ u_p &= -(p - q)^2 = -(p^2 + q^2 + 2 |p| |q| \cos \varphi_p), \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

где φ_n, φ_p — углы рассеяния для системы центра масс процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$. Кроме того, имеем

$$\left. \begin{aligned} t &= -(n_1 - n_2)^2 = -(p_2 - p_1)^2 = -(n + n')^2 = -(p + p')^2; \\ N &= (n_1 + n_2)/2 = (n - n')/2; \\ P &= (p_1 + p_2)/2 = (p - p')/2; \\ Q &= (q - q')/2, \end{aligned} \right\} \quad (8.30a)$$

где величины в правой части также следует рассматривать в системе центра масс для процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$. Теперь мы хотим использовать амплитуды A и B для процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ с тем, чтобы восстановить $\text{Im}_t M(\omega, t)$ в дисперсионном соотношении (8.3). Это означает, что нам понадобятся эти амплитуды в области $t \geq 4\mu_\pi^2$. Амплитуды $A(s, t)$ и $B(s, t)$ известны из экспериментов по рассеянию $\pi N \rightarrow \pi N$, т.е. в физической области $t \leq 0$. Будем считать, что экстраполяция амплитуд из области отрицательных t в область положительных t может быть выполнена с помощью дисперсионных соотношений для фиксированных t , рассмотренных в работе Чью и др. [27].

$$\left. \begin{aligned} A^\pm(s, t, u) &= \frac{1}{\pi} \int_{(m+\mu_\pi)^2}^{\infty} ds' \sigma_A^\pm(s', t) \left[\frac{1}{s'-s} \pm \frac{1}{s'-u} \right], \\ B^\pm(s, t, u) &= g^2 \left[\frac{1}{m^2-s} \mp \frac{1}{m^2-u} \right] + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{(m+\mu_\pi)^2}^{\infty} ds' \sigma_B^\pm(s', t) \left[\frac{1}{s'-s} \mp \frac{1}{s'-u} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

Здесь σ_A и σ_B — скачки на разрезе, $\text{Im}_s A(s, t, u)$ и $\text{Im}_s B(s, t, u)$, возникающие в пион-ядерном рассеянии. Примем также, что A и B удовлетворяют дисперсионным соотношениям без вычитаний, что, вероятно, несправедливо. Ниже мы вернемся к этому вопросу. В физической области для пион-нуклонного рассеяния ($s > (m + \mu_\pi)^2$, $t < 0$) $\sigma_A(s', t)$ и $\sigma_B(s', t)$ были определены подгонкой к экспериментальным данным. Их представляют в виде разложения по полиномам Лежандра. Соответствующий косинус угла рассеяния равен

$$\cos \theta_s = 1 + t/2k^2,$$

где индекс s указывает, что θ — угол рассеяния в s -канале физического рассеяния, k — абсолютная величина 3-импульса для пион-нуклонного рассеяния в системе центра масс. Поскольку в качестве переменной в полиномы Лежандра входит $\cos \theta_s$, можно получить скачки на разрезе $\sigma_A(s', t)$ и $\sigma_B(s', t)$ непосредственно из подгонки данных опыта для $s' > 0$, $t < 0$, представленных в виде разложения по степеням t . Простейший способ продолжения в область $t > 0$ состоит в использовании этого разложения. Можно увидеть, что для больших t при такой экстраполяции возникнет трудность. Мы попадем в область определения весовой функции $\rho(s', t)$ для представления Мандельштама. В этой области функции скачка имеют сингулярности, поэтому степенное разложение нельзя более использовать. Однако, имея в виду пределы функции $\rho(s', t)$ для важных значений s' , представляется разумным использовать степенные ряды вплоть до $t \lesssim 20\mu_\pi^2$. Ниже мы покажем, каким образом удастся осуществить продолжение в ещё более далекую область $t > 0$.

Подстановка A_φ^* и A_n из (8.31) в (8.29) приводит к четырем интегралам. Один из типичных интегралов имеет вид

$$I^0 = \int d\Omega_Q \frac{1}{(s' - u_p)(s'' - s_n)}. \quad (8.32)$$

Отметим, что аналогичные интегралы должны появиться при расчете борновских членов

$$g^2 \left[\frac{1}{m^2 - s} \mp \frac{1}{m^2 - u} \right]$$

в интеграле типа (8.28г), содержащем $B_p^\pm * B_n^\pm$. Для этого надо лишь заменить s' и s'' в (8.32) на m^2 . Ниже мы обсудим, какие трудности вносят факторы вида γQ в числителе. Удерживая только борновский член, естественно приходим к четырехугольной диаграмме.

Учитывая (8.30) и (8.30а), находим

$$I^0 = \int \frac{d\Omega_Q}{(s' + p^2 + q^2 + 2PQ)(s'' + n^2 + q^2 - 2NQ)}, \quad (8.32a)$$

где p и q — теперь 3-векторы*. Для простоты записи 3-вектор обозначен обычной буквой. Определим c' и c'' :

$$s' + p^2 + q^2 = 2pqc'; \quad s'' + n^2 + q^2 = 2pqc'', \quad (8.32б)$$

так что интеграл принимает вид

$$I^0 = \frac{1}{4p^2q^2} \int \frac{d\Omega_Q}{(c' + \widehat{Q}\widehat{P})(c' - \widehat{Q}\widehat{N})}, \quad (8.32в)$$

где \widehat{V} обозначает единичный вектор в направлении V . С помощью фейнмановской техники интегрирования перепишем (8.32в) в форме

$$I^0 = \frac{1}{4p^2q^2} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d\Omega_Q}{[\alpha(c' + \widehat{P}\widehat{Q}) + (1-\alpha)(c'' - \widehat{N}\widehat{Q})]^2}. \quad (8.32г)$$

Выберем ось z таким образом, чтобы имело место равенство

$$\widehat{e}_z = (-\alpha\widehat{P} + (1-\alpha)\widehat{N})/J, \quad (8.32д)$$

где

$$J = |-\alpha\widehat{P} + (1-\alpha)\widehat{N}| = [\alpha^2 + (\alpha-1)^2 + 2\alpha(\alpha-1)\widehat{P}\widehat{N}]^{1/2}. \quad (8.32е)$$

* Отметим, что четвертые компоненты векторов P и N , а также Q равны нулю в системе центра масс для процесса $NN \rightarrow \pi\pi$.

Тогда можно записать

$$I^0 = \frac{2\pi}{4p^2q^2} \int_0^1 d\alpha \int_{-1}^1 \frac{dz}{[c'' + (c' - c'')\alpha - Jz]^2} \quad (8.32\text{ж})$$

Интеграл по z теперь легко вычислить, и мы получаем

$$I^0 = 4\pi \int_0^1 d\alpha \frac{1}{\eta\alpha^2 + 2\xi\alpha + \zeta}, \quad (8.33)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \eta &= (s' - s'')^2 + 4q^2\omega; \\ \xi &= (s'' + p^2 + q^2)(s' - s'') - 2q^2\omega; \\ \zeta &= (s'' + p^2 + q^2)^2 - 4p^2q^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.33\text{а})$$

Мы использовали также первое из равенств (8.13) в наших новых обозначениях $\omega = -2p^2(1 + \widehat{PN})$, а также формулы (8.32б) для c' и c'' . Интеграл (8.33) веществен, если знаменатель подынтегрального выражения $\eta\alpha^2 + 2\xi\alpha + \zeta$ не имеет действительных корней в интервале $0 \leq \alpha \leq 1$. Корни равны

$$\alpha_{1,2} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - \eta\zeta})/\eta. \quad (8.33\text{б})$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I^0 &= \frac{4\pi}{\eta} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)} = \frac{4\pi}{\eta} \int_0^1 \frac{d\alpha}{(\alpha_1 - \alpha_2)} \times \\ &\times \left(\frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha - \alpha_2} \right). \end{aligned} \quad (8.33\text{в})$$

В результате находим

$$I^0(s', s''; \omega) = \frac{2\pi}{\sqrt{\xi^2 - \eta\zeta}} \ln \frac{\eta\alpha + \xi - \sqrt{\xi^2 - \eta\zeta}}{\eta\alpha + \xi + \sqrt{\xi^2 - \eta\zeta}} \Big|_0^1. \quad (8.33\text{г})$$

Для $\xi^2 - \eta\zeta > 0$ имеем

$$I^0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\xi^2 - \eta\zeta}} \ln \frac{\xi + \zeta + \sqrt{\xi^2 - \eta\zeta}}{\xi + \zeta - \sqrt{\xi^2 - \eta\zeta}}. \quad (8.34)$$

Для $\xi^2 - \eta\zeta < 0$

$$\begin{aligned} I^0 &= \frac{2\pi}{i\sqrt{\eta\zeta - \xi^2}} \left[\ln \frac{\eta + \xi - i\sqrt{\eta\zeta - \xi^2}}{\eta + \xi + i\sqrt{\eta\zeta - \xi^2}} - \ln \frac{\xi - i\sqrt{\eta\zeta - \xi^2}}{\xi + i\sqrt{\eta\zeta - \xi^2}} \right] = \\ &= \frac{2\pi}{i\sqrt{\eta\zeta - \xi^2}} \left[\ln \frac{1 + i\frac{\eta + \xi}{\sqrt{\eta\zeta - \xi^2}}}{1 - i\frac{\eta + \xi}{\sqrt{\eta\zeta - \xi^2}}} - \ln \frac{1 + \frac{i\xi}{\sqrt{\eta\zeta - \xi^2}}}{1 - \frac{i\xi}{\sqrt{\eta\zeta - \xi^2}}} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi}{\sqrt{\eta\zeta - \xi^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\eta + \xi}{\sqrt{\eta\zeta - \xi^2}} - \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\sqrt{\eta\zeta - \xi^2}} \right]. \quad (8.35)$$

Функция I^0 не является непрерывной в точке $\xi^2 - \eta\zeta = 0$.

Действительно, при $\xi^2 - \eta\zeta \rightarrow 0_+$ имеем

$$I^0 \rightarrow \frac{4\pi}{\xi + \zeta}. \quad (8.35a)$$

В то же время для случая $\xi^2 - \eta\zeta < 0$, когда ξ и η имеют противоположные знаки и $|\xi| < |\eta|$, подынтегральная функция имеет особенности (полюса) в точках

$$\alpha_{1,2} = (-\xi \pm i\sqrt{\eta\zeta - \xi^2})/\eta, \quad (8.35б)$$

которые зажимают контур интегрирования $0 < \alpha < 1$ с противоположных сторон, по мере того как $\eta\zeta - \xi^2 \rightarrow 0_+$. В этом случае I^0 становится бесконечным в указанном пределе. Таким образом, I^0 не всегда непрерывно при $\xi^2 - \eta\zeta = 0^*$.

Если многочлен $P(\alpha) = \eta\alpha^2 + 2\xi\alpha + \zeta$ имеет действительные корни в интервале $0 \leq \alpha \leq 1$, то записанные выше выражения для интеграла имеют смысл главного значения и дают действительную часть интеграла. Поскольку этот многочлен линеен по переменной w [см. (8.33a)], скачок I^0 по переменной w будет определяться мнимой частью этого интеграла, вычисленной при $w = w + i\varepsilon$.

$$\alpha_{1,2} \rightarrow \alpha_{1,2} \pm i\varepsilon.$$

Тогда

$$\operatorname{Im} I^0 = 4\pi^2 \int_0^1 d\alpha \delta(P(\alpha)) = 4\pi^2 \int_0^1 d\alpha \sum \frac{1}{|P'(\alpha_{1,2})|} \delta(\alpha - \alpha_{1,2}), \quad (8.35в)$$

$$P'(\alpha_{1,2}) = 2\eta\alpha_{1,2} + 2\xi. \quad (8.35г)$$

С помощью (8.33б) найдем

$$|P'(\alpha_{1,2})| = 2\sqrt{\xi^2 - \eta\zeta}. \quad (8.35д)$$

Поэтому мы можем записать спектральное представление для $I^0(s', s''; \bar{w})$ в следующей форме**:

$$I^0(s', s''; w) = 4\pi \int \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 - \eta\zeta}(x - w - i\varepsilon)}. \quad (8.36)$$

* Мы постарались как можно более тщательно обсудить способ расчета I^0 в связи с тем, что в опубликованных ранее работах были допущены ошибки. Например, формула (3.10) из работы Амати, Лидера и Витале [5] ошибочна. В исправленной версии этой статьи [6] имеется опечатка [см. Дополнение А, формулу (13) из [6]]. Наконец, неверно и соответствующее равенство (3.5) из работы Мандельштама [82]. Создается впечатление, что этот кажущийся простым интеграл скрывает в себе много возможностей для появления ошибок.

** Функция $K(s', s''; t, x)$, определенная Амати, Лидером и Витале, в наших обозначениях равна $K = q/\sqrt{\xi^2 - \eta\zeta}$.

Множитель 2 возникает из-за того, что $P(\alpha)$ в интервале $(0, 1)$ имеет либо оба корня, либо ни одного.

Напомним, что с интегралом $I^0(s', s''; \omega)$ мы столкнулись при вычислении членов, содержащих $A_p^+ A_n^+$ в выражении для $\rho_j(\omega, t)$, [см. равенство (8.27)]. Учтем также тот факт, что $\rho_j(\omega, t)$ — спектральные функции для дисперсионных соотношений типа (8.3) с фиксированной величиной ω , в которых в качестве $\text{Im}_t M(\omega, t)$ взята функция $\rho_j(\omega, t)$. В результате, используя I^0 , можно прийти к двойному спектральному представлению вида:

$$M(\omega, t) = M_{\text{ОРЕС}} + \int \frac{y(x', t')}{(t' - t)(x' - \omega)} dt' dx' \quad (8.37)$$

Вклад в функцию $\rho(x', t')$ от слагаемого, содержащего $A_p^+ A_n^+$, в (8.27) равен

$$y(x, t) = \frac{1}{2(2\pi)^2 t} \cdot \frac{1}{\pi} \kappa(x, t); \quad (8.37a)$$

$$\kappa(x, t) = \sqrt{t} \int ds' ds'' \sigma_A^+(s', t) \sigma_A^+(s'', t) ds' ds'' \frac{q}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}. \quad (8.37b)$$

Здесь $q = \sqrt{t/4 - \mu_\pi^2}$ [см. коэффициент в формуле (8.27)]. Был так же введен множитель 2, учитывающий то обстоятельство, что имеются два интеграла типа (8.32), дающих идентичные результаты.

Во всяком случае, вычисленный здесь вклад в спектральную функцию для двойного представления составляет только часть того, что относится к инварианту $1^p 1^n$. Исчерпывающие формулы приведены в работе Амати, Лидера и Витале [4] и в Дополнении Б. Использование двойного спектрального представления — это довольно громоздкий способ формулирования проблемы. Поскольку интеграл по переменной x в равенстве (8.36) может быть найден явно на любом этапе вывода, проще использовать $I^0(s', s''; \omega)$ со спектральной функцией $\rho_j(\omega, t)$, не прибегая к дополнительному интегрированию.

В остальной части изложения ограничимся обсуждением спектральных функций, относящихся к представлению с однократным интегралом, и рассмотрим дисперсионные соотношения типа (8.3), в которых в качестве $\text{Im}_t M(\omega, t)$ выступит $\rho_j(\omega, t)$. Это позволит учесть явно коэффициенты при различных инвариантах P_j .

Резюмируя, отметим, что для специального случая инварианта $1^p 1^n$ (и состояния по изоспину системы, характеризуемого индексом +, при использовании дисперсионного соотношения в t -канале), а также при конкретном выборе слагаемого, содержащего вычисленный нами интеграл (8.32), мы получаем

$$\rho_1^+(\omega, t) = \frac{1}{\pi^2} F(t) \int ds' \int ds'' \sigma_A^+(s', t) \sigma_A^+(s'', t) I^0(s'; s''; \omega), \quad (8.37b)$$

где

$$F(t) = \frac{\sqrt{t(t-4\mu_\pi^2)}}{16(2\pi^2)t}. \quad (8.37\Gamma)$$

Укажем здесь, что наряду со слагаемым $[(s'-u_p)(s''-s_n)]^{-1}$ из (8.32), интегрирование которого привело к результату (8.37 в), в связи с инвариантом $1^n 1^p$ возникнут члены $[(s'-s_p)(s''-u_n)]^{-1}$, $[(s'-u_p)(s''-u_n)]^{-1}$ и $[(s'-s_p)(s''-s_n)]^{-1}$. Первый из них приводит просто к дополнительному множителю 2, который мы уже включили в выписанное выше выражение для $\rho_1^+(\omega, t)$ в $F(t)$. Последние два члена дают $-\rho_1^+(\bar{t}, t)$, т. е. ту же функциональную форму, но с заменой $\omega \rightleftharpoons \bar{t}$. Аналогичные вычисления для других инвариантов [напомним, что j обозначает номер инварианта, — см. (8.15)] дают множитель $\mp(-1)^j$ в (8.21). Хотя мы рассмотрели лишь одну из пяти весовых функций, проблемы, возникающие при ее вычислении, вполне типичны и для остальных функций.

§ 8.5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПИРАЛЬНЫХ АМПЛИТУД

С целью дать общее представление о том, как мы будем использовать спиральные амплитуды, рассмотрим проблему схематично, опустив индексы, отвечающие изоспину и спину (а следовательно, и спиральности). Наши весовые функции ρ запишем в более простой по сравнению с (8.27) форме, сохранив лишь их общую структуру:

$$\rho(\omega, t) = \frac{\sqrt{t(t-4\mu_\pi^2)}}{32(2\pi^2)t} \int d\Omega_Q [\bar{u}(p) A_p^* v(p')] [\bar{v}(n') A_n u(n)]. \quad (8.38)$$

Здесь u и v — однокомпонентные волновые функции, так как мы рассматриваем бесспиновый случай.

Разложим величины, заключенные в квадратные скобки по полиномам Лежандра $P_l(\cos \varphi_p)$ и $P_l(\cos \varphi_n)$, где φ_p и φ_n — углы рассеяния в процессе $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ [см. (8.30)]. Тогда получим

$$\bar{u}(p) A_p^* v(p') = \sum_l a_l^*(t) P_l(\cos \varphi_p). \quad (8.38a)$$

Здесь мы записали коэффициенты разложения, как функции от t .

Их можно рассматривать и как функции от $|\mathbf{q}|$, поскольку $t = 4(q^2 + \mu_\pi^2)$, коль скоро мы работаем в системе центра масс для процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$. Для другой амплитуды можно записать такое же выражение:

$$\bar{v}(n') A_n u(n) = \sum_l a_l(t) P_l(\cos \varphi_n). \quad (8.38б)$$

Обратим внимание на равенство

$$\cos \varphi_n = \frac{s_n - u_n}{4|\mathbf{n}||\mathbf{q}|}, \quad (8.38в)$$

которое является следствием равенства (8.30). Отсюда следует, что разложения (8.38а) и (8.38б) представляют собой по существу разложения по степеням ($s-u$). Теперь легко вычислить интеграл по $d\Omega_Q$ в (8.38). Выберем систему отсчета с осью z , направленной вдоль импульса нейтрона n . Тогда по теореме сложения найдем

$$P_l(\cos \varphi_p) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum Y_{lm}^*(\varphi_n, 0) Y_{lm}(\varphi_p - \varphi_n, \beta_p), \quad (8.38г)$$

где β_p — азимутальный угол для вектора p . Используя равенство

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad (8.38д)$$

и ортогональность шаровых функций, приходим к формуле

$$\int d\Omega_Q [\bar{u}(p) A_p^* v(p')] [\bar{v}(n') A_n u(n)] = \sum |a_l(t)|^2 P_l(\cos(\varphi_p - \varphi_n)). \quad (8.39)$$

Результат интегрирования зависит только от t и угла ($\varphi_p - \varphi_n$). В равенствах (8.13) этот угол был обозначен буквой ψ , причем

$$\cos(\varphi_p - \varphi_n) = \cos \psi = \frac{\omega - \bar{t}}{\omega + \bar{t}}. \quad (8.40)$$

Таким образом, интегрирование по углам приводит к результату

$$\int d\Omega_Q [\bar{u}(p) A_p^* v(p')] [\bar{v}(n') A_n u(n)] = \sum |a_l(t)|^2 P_l\left(\frac{\omega - \bar{t}}{\omega + \bar{t}}\right), \quad (8.41)$$

записанному через инварианты ω , t и \bar{t} . Такая форма удобна для аналитического продолжения обратно в канал $NN \rightarrow NN$.

Возвращаясь к замечаниям, сделанным в § 8.2, подчеркнем, что в рассматриваемой здесь схематической модели весовая функция равна

$$\rho(t) = \sum_l |a_l(t)|^2 P_l\left(\frac{\omega - \bar{t}}{\omega + \bar{t}}\right). \quad (8.42)$$

Следовательно, величину

$$\rho_l(t) \equiv |a_l(t)|^2 \quad (8.42а)$$

можно интерпретировать как весовую функцию для обмена частицей с угловым моментом l и массой \sqrt{t} .

Введем теперь спин нуклона в нашу задачу, следуя работе Фрейзера и Фулко [37]. Для процесса $NN \rightarrow \pi\pi$ матричный элемент $\tau_{\beta\alpha}$ из (8.7) можно записать через инварианты A и B , входящие в (8.23), следующим образом (в операторном виде):

$$\tau = \bar{v}(p') [-A + i\gamma QB] u(p), \quad (8.43)$$

где

$$A_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} A^{(+)} + \frac{1}{2} [\tau_{\beta}, \tau_{\alpha}] A^{(-)}. \quad (8.43a)$$

Как и в равенстве (8.38) индексы β, α относятся к изоспину. Следуя Фрейзеру и Фулко, запишем:

$$u(p) = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} E + m \\ \sigma \mathbf{p} \end{pmatrix} \chi_{\lambda}, \quad (8.44)$$

$$v(p') = -\frac{1}{N} \begin{pmatrix} \sigma \mathbf{p}' \\ E + m \end{pmatrix} \chi_{\lambda}. \quad (8.44a)$$

с нормировкой $N = (2m[E + m])^{1/2}$, как и прежде. Не считая знака минус (знак, во всяком случае, произволен), можно видеть, что написанное выше выражение для v корректно, так как мы знаем, что $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$ и спиноры $u_{\lambda}(p)$ и $v_{\lambda}(p')$ должны быть ортогональными. Нетрудно найти теперь формулу для τ в терминах паулевских спиноров χ

$$\tau^{(\pm)} = \chi_{\lambda'}^{\pm} (h_1^{(\pm)} \sigma \mathbf{p} + h_2^{(\pm)} \sigma \mathbf{Q}) \chi_{\lambda}. \quad (8.45)$$

Использованы обозначения

$$h_1^{(\pm)} = -\frac{1}{m} \left\{ A^{(\pm)} + \frac{B^{(\pm)}}{m + E} \mathbf{p} \mathbf{Q} \right\}, \quad h_2^{(\pm)} = \frac{E}{m} B^{(\pm)}, \quad (8.45a)$$

где верхние индексы относятся к изоспину. Надо все время иметь это в виду, так как в дальнейшем мы введем нижние индексы $+$ и $-$, которые будут относиться к спиральности.

Введем теперь $\mathcal{F}_{\lambda'\lambda}$, амплитуду (виртуальной) аннигиляции нуклона со спиральностью λ с антинуклоном со спиральностью λ' . Нормировка $\mathcal{F}_{\lambda'\lambda}$ выбрана таким образом, чтобы имело место равенство [см. (8.7a)]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (N\bar{N} \rightarrow \pi\pi) = \frac{q}{p} \left| \frac{m}{2E} \frac{\tau}{4\pi} \right|^2 = \sum \frac{p}{q} |\mathcal{F}_{\lambda'\lambda}|^2. \quad (8.46)$$

Здесь для простоты опущены индексы β, α из (8.7a) и $(+), (-)$, относящиеся к изоспину. 3-импульсы нуклона и пиона обозначены буквами p и q соответственно. Зависимость от изоспина никак не связана с нашим рассмотрением представления спиральности, поэтому выписывание изоспиновых индексов на каждом этапе выкладок может лишь вызвать недоразумения. Из равенства (7.16) и табл. 7.1, сопровождающей равенство (7.23), находим

$$\mathcal{F}_{++} = \mathcal{F}_{--} = \frac{1}{q} \sum_J \left(J + \frac{1}{2} \right) T_{+}^J P_J(\cos \varphi_p),$$

* Напомним, что в системе центра масс процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ вектор Q имеет только пространственные компоненты ($|Q| = q, t = 4(q^2 + \mu_{\pi}^2)$).

$$\mathcal{F}_{+-} = -\mathcal{F}_{-+} = \frac{1}{q} \sum_J \frac{J + \frac{1}{2}}{\sqrt{J(J+1)}} T_-^J \sin \varphi_p P_J'(\cos \varphi_p). \quad (8.47)$$

Индексы \pm в этих формулах обозначают $\pm 1/2$. В качестве угла рассеяния взят угол φ_p в соответствии с обозначениями, принятыми в данной главе.

Следующий наш шаг будет состоять в том, чтобы связать T_{\pm}^J для состояния с полным угловым моментом J с инвариантными функциями A и B . Это легко сделать, если выбрать систему координат с осью z , направленной вдоль p . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{++} &= \frac{ie^{i\alpha} m}{8\pi E} (h_1 p + h_2 q \cos \varphi_p), \\ \mathcal{F}_{+-} &= \frac{ie^{i\alpha} m}{8\pi E} h_2 q \sin \varphi_p. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Входящая сюда произвольная фаза α будет в дальнейшем конкретизирована при записи результатов. Подставляя (8.48) в (8.47) и используя ортогональность (7.23), получаем

$$\begin{aligned} T_+^J(t) &= \frac{ie^{i\alpha} m q}{8\pi E p} \int_{-1}^1 dx P_J(x) [p^2 h_1(x) + p q x h_2(x)], \\ T_-^J(t) &= \frac{ie^{i\alpha} m q^2}{8\pi E} \frac{J+1}{J} \int_{-1}^1 dx h_2(x) [x P_J(x) - P_{J+1}(x)], \end{aligned} \quad (8.49)$$

где $x = \cos \varphi_p$. Определим новые амплитуды соотношениями

$$f_+^J = \frac{p}{q} \frac{E}{(pq)^J} T_+^J, \quad f_-^J = \frac{p}{q} \frac{1}{(pq)^J} T_-^J. \quad (8.50)$$

Амплитуды f имеют более простые аналитические свойства, чем амплитуды T или \mathcal{F} , так как с помощью факторов $(pq)^{-J}$ исключены кинематические разрезы. Используя равенство (8.45а), получаем

$$\begin{aligned} f_+^J(t) &= \frac{1}{8\pi} \left(-\frac{p}{(pq)^J} A_J + \frac{m}{(2J+1)(pq)^{J-1}} [(J+1)B_{J+1} + JB_{J-1}] \right), \\ f_-^J(t) &= \frac{1}{8\pi} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} \frac{1}{(pq)^{J-1}} (B_{J-1} - B_{J+1}). \end{aligned} \quad (8.51)$$

Здесь использованы обозначения

$$(A_J^{\pm}; B_J^{\pm}) = \int_{-1}^1 dx P_J(x) (A^{\pm}; B^{\pm}). \quad (8.51a)$$

Мы восстановили также изоспиновые индексы \pm . Произвольная фаза α в (8.51) взята такой, чтобы амплитуды f_{\pm}^J были вещест-

венными для веществных A и B . Заметим, что перестановка s и u соответствует перестановке конечных пионов (при этой перестановке имеет место также замена $\mathbf{Q} \rightarrow -\mathbf{Q}$). Поэтому очевидно, что следующие равенства

$$A^{(\pm)}(s, t, u) = \pm A^{(\pm)}(u, t, s), \quad B^{(\pm)}(s, t, u) = \mp B^{(\pm)}(u, t, s) \quad (8.52)$$

являются следствием статистики Бозе. Кроме того, из равенств (8.30) можно видеть, что замене $s \longleftrightarrow u$ отвечает замена $\cos \varphi \longleftrightarrow -\cos \varphi$. Следовательно, для четных J получаем, что

$$A_J^- = B_J^+ = 0, \quad (8.53)$$

а для нечетных J

$$A_J^+ = B_J^- = 0. \quad (8.53a)$$

Выпишем здесь явные формулы для спиральных амплитуд с наименьшими J :

$$\left. \begin{aligned} f_+^{J=0} &= \frac{1}{8\pi} (-p^2 A_0^+ + mpq B_1^+); \\ f_-^{J=1} &= \frac{1}{8\pi} \frac{\sqrt{2}}{3} (B_0^- - B_2^-); \\ f_+^{J=1} &= \frac{1}{8\pi} \left(-\frac{p}{q} A_1^- + \frac{1}{3} m [2B_2^- + B_0^-] \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.53b)$$

Разумеется, изоспиновые индексы амплитуд f те же самые, что и у амплитуд A_J и B_J .

Для полноты приведем здесь разложения амплитуд A и B по амплитудам f , которые получены путем обращения равенств (8.51),

$$\begin{aligned} A(t, x) &= \frac{8\pi}{p^2} \sum_J \frac{1}{2} (2J+1) (pq)^J \left\{ \frac{m}{\sqrt{J(J+1)}} x P_J'(x) f_-^J(t) - \right. \\ &\quad \left. - P_J(x) f_+^J(t) \right\}; \\ B(t, x) &= 8\pi \sum_J \frac{1}{2} (2J+1) \frac{(pq)^{J-1}}{\sqrt{J(J+1)}} P_J'(x) f_-^J(t). \end{aligned} \quad (8.53b)$$

Изложенная в первой части данного раздела схема выкладок может быть применена здесь, чтобы связать различные весовые функции ρ_j с амплитудами f_{\pm}^J . Из-за спинов нуклонов эти соотношения несколько усложнятся по сравнению с формулами (8.42) и (8.43). Выразим сначала ρ_j через величины $\text{Im} F^{\pm J}$, где $F^{\pm J}$ — спиральные амплитуды для процесса $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$. Соотношения имеют вид [117]:

$$\begin{aligned} \rho_1^{\pm}(\omega, t) \pm \rho_1^{\pm}(\bar{t}, t) &= \frac{\pi q}{\sqrt{t} p^4} \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) [P_J(z) \text{Im} F_{++}^{\pm J} - \\ &\quad - 2z P_J'(z) \text{Im} F_{-+}^{\pm J} + z (z P_J' + P_J) \text{Im} F_{--}^{\pm J}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2^\pm(\omega, t) \mp \rho_2^\pm(\bar{t}, t) &= \frac{\pi q}{m \sqrt{t} p^4} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) [-P'_J(z) \operatorname{Im} F_{\pm+}^{\pm J} + \\ &+ (zP''_J + P'_J) \operatorname{Im} F_{\pm-}^{\pm J}], \\ \rho_3^\pm(\omega, t) \pm \rho_3^\pm(\bar{t}, t) &= \frac{\pi q}{m^2 \sqrt{t} p^4} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) P''_J(z) \operatorname{Im} F_{\pm-}^{\pm J}, \\ \rho_4^\pm(\omega, t) \mp \rho_4^\pm(\bar{t}, t) &= -\frac{\pi q}{m^2 \sqrt{t} p^2} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) P'_J(z) \operatorname{Im} F_{\pm-}^{\pm J}. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Здесь

$$z = \cos \psi = \frac{\omega - \bar{t}}{\omega + \bar{t}}. \quad (8.54a)$$

Если ограничиться только двухпионными промежуточными состояниями для процесса $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$ (а мы работаем именно в этом приближении), то связь между F^J и f^J следует из условия унитарности

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} F_{++}^J &= (p^2 q^2)^J |f_+^J|^2, \\ \operatorname{Im} F_{-+}^J &= \frac{m (p^2 q^2)^J}{\sqrt{J(J+1)}} \operatorname{Re} (f_-^{J*} f_+^J), \\ \operatorname{Im} F_{--}^J &= \frac{m (p^2 q^2)^J}{J(J+1)} |f_-^J|^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.55)$$

Комбинация равенств (8.54) и (8.55) дает желаемое обобщение формулы (8.41) на случай частиц со спином, роль коэффициентов $|a_i(t)|^2$ в которой играют теперь величины $|f^J|^2$ и т. п.

§ 8.6. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АМПЛИТУД

Мы рассмотрим здесь дисперсионные интегралы двух типов и исследуем их сходимость.

1. Интеграл по t' для нуклон-нуклонной амплитуды — прототип интеграла из равенства (8.3).

2. Интеграл по s' для пион-нуклонных амплитуд, который соответствует интегралам из равенства (8.31).

Обсудим интегралы по t' . Если постулировать реджевское поведение для $M(\omega, t)$, тогда для больших t и конечных ω [напомним, что ω играет роль переданного импульса для рассеяния в t -канале, см. (8.13)] амплитуда имеет асимптотику

$$\operatorname{Im}_t M(\omega, t) \sim t^{\alpha(\omega)-1}. \quad (8.56)$$

Здесь $\alpha(\omega)$ соответствует главной траектории Редже в ω -канале. На рис. 29 — это NN -канал. Отсюда видно, что траектория Редже

отвечает здесь барионному числу два. На такой траектории может находиться дейтрон. Однако отсутствие двухнуклонных резонансов с угловым моментом больше 1 означает, что $\text{Im}_t M(\omega, t) \sim t^{\alpha(\omega)-1}$ с $\alpha(\omega) < 2$. Поскольку на этой траектории может быть расположен дейтрон, возможно, потребуется одно вычитание. При этом дисперсионное соотношение следует переписать в виде

$$M(\omega, t) = M(\omega, t_0) + M_{\text{ОРЕС}}(t) - M_{\text{ОРЕС}}(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu_\pi^2}^{\infty} \text{Im}_t M(\omega, t') \left\{ \frac{1}{t' - t} - \frac{1}{t' - t_0} \right\} dt'. \quad (8.57)$$

Входящий в правую часть интеграл должен теперь сходиться. Заметим, что амплитуда $M(\omega, t_0)$ в NN -канале не зависит от угла рассеяния и будет давать вклад в амплитуду NN -рассеяния в S -волне. Следует иметь в виду поэтому, что в принципе может потребоваться соответствующая модификация амплитуды NN -рассеяния в S -волне. Практически такая модификация, по-видимому, затрагивает короткодействующую часть потенциала.

Что касается асимптотического поведения $\sigma(s, t)$ в (8.31), то для нахождения нужного числа вычитаний желательно было бы иметь следующее поведение при больших s и конечных t^* :

$$\sigma(s, t) \sim s^{\alpha(t)}. \quad (8.58)$$

На соответствующей траектории Редже должны находиться частицы, которые могут быть образованы из двух пионов (см. рис. 30). В случае, когда изоспин двухпионной системы равен нулю, так что мы имеем дело с σ_A^+ и σ_B^+ , доминирующая траектория при малых t связана с помероном. При этом в грубом приближении имеем

$$\text{Re } \alpha_p(t) \approx 1,0. \quad (8.58a)$$

При больших t главную роль начинает играть траектория, на которой находится f -резонанс ($J=2$). В грубом приближении эту траекторию можно считать вырожденной с траекториями ρ и g , к обсуждению которых мы теперь перейдем.

Для амплитуд с изоспиновым индексом — основная траектория Редже содержит ρ - и g -резонансы с такими угловыми моментами, что

$$\text{Re } \alpha_\rho(t) \approx 0,5 + 0,02t. \quad (8.58b)$$

При таком поведении необходимо одно вычитание в случае канала с изоспиновым индексом $+$ в области $t < m_g^2 \approx 120 \mu_\pi^2$ и канала с изоспиновым индексом $-$ в области $t < m_\rho^2 \approx 80 \mu_\pi^2$. То, что

* Из-за кинематических факторов различным весовым функциям из (8.21) свойственно различное реджевское поведение (см. работу Вин Мау и др. [117]). Ведущее поведение дано здесь.

в случае канала с изоспиновым индексом \pm требуется одно вычитание, нетрудно понять*: квантовые числа допускают существование померона в перекрестном канале для πN -рассеяния, поэтому мнимая часть амплитуды рассеяния вперед, т. е. по существу $\sigma^+(s, 0)$, ведет себя как постоянная при больших s .

Покажем теперь, что знание спиральной амплитуды $f_+^{J=0}(t)$ позволяет произвести вычитание в канале \pm по изоспину. Как будет показано ниже, для этого мы должны знать $f_+^{J=0}(t)$ из иных соображений.

Рассмотрим дисперсионное соотношение без вычитаний для A^+

$$A^+(s, t) = \frac{1}{\pi} \int \sigma_A^+(s', t) \left(\frac{1}{s' - s} + \frac{1}{s' - u} \right) ds'$$

в качестве примера. Пусть нам известна величина

$$A_0^+ = \int_{-1}^1 dx A^+(x), \quad (8.59)$$

где $x = \cos \phi$, ϕ — угол рассеяния в процессе $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ [см. (8.30)]. Тогда можно записать

$$A^+(s, t) - \frac{1}{2} A_0^+ = \frac{1}{\pi} \int ds' \sigma_A^+(s', t) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{s' - s(x)} + \frac{1}{s' - u(x)} \right\}, \quad (8.59a)$$

где указана зависимость s и u от x , даваемая равенствами (8.30). При больших значениях s' можно разложить знаменатели в ряды

$$\left. \begin{aligned} (s' - s(x))^{-1} &= \frac{1}{s'} + \frac{s(x)}{(s')^2} + \dots; \\ (s' - u(x))^{-1} &= \frac{1}{s'} + \frac{u(x)}{(s')^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.59b)$$

Так как s' не зависит от x , интеграл

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx (s')^{-1} = (s')^{-1} \quad (8.59b)$$

компенсирует $(s')^{-1}$. Таким образом, проектирование t -канальной амплитуды на подпространство, в котором отсутствует состояние с $J=0$, т. е. вычитание A_0 , эквивалентно вычитанию в s -канале.

Поскольку $f_+^{J=0}$ из равенства (8.53б) содержит как A_0^+ , так и B_1^+ , может показаться, что нужно знать в отдельности A_0^+ и B_1^+ ,

* В работе Хёлера и Штрауса [52] главным образом на основании сравнения с численными расчетами сделано утверждение, что вычитание в указанном канале необязательно. Так или иначе, мы находим вычитание удобным по причинам, которые будут обсуждены в § 8.8.

чтобы сделать вычитания типа (8.59а). Однако можно работать с амплитудой

$$A' = A + \frac{v}{1 - t/(4m^2)} B, \quad (8.59г)$$

где

$$v = (s - u)/(4m). \quad (8.59д)$$

Определенная таким образом величина A' содержит только амплитуды переходов без изменения спиральностей:

$$A'(t, x) = -\frac{8\pi}{p^2} \sum_{J=0}^{\infty} \frac{1}{2} (2J+1) (pq)^J P_J(x) f_+^J(t). \quad (8.59е)$$

В дисперсионном интеграле для этой амплитуды $f_+^{J=0}(t)$ может быть использовано как вычитательная константа.

Аналогичную процедуру можно применить и к амплитуде $f_-^{J=0}$. Рассмотренное здесь проектирование для амплитуд $f_+^0(t)$ и $f_-^1(t)$ было предложено в работе Амати, Лидера и Витале [4]. Однако эти авторы не отметили, что это проектирование приводит к вычитанию в дисперсионных соотношениях типа (8.31) в s -канале. $f_+^0(t)$ и $f_-^1(t)$ должны быть получены из другого источника.

Предполагая их известными, можно использовать дисперсионные соотношения с вычитанием типа (8.59а) для экстраполяции функций $\sigma_A(s', t)$ и $\sigma_B(s', t)$ из физической области значений инвариантов для πN -рассеяния [$s \geq (m + \mu_\pi)^2, t < 0$] в нужную нам область [$s \geq (m + \mu_\pi)^2, t > 0$]. Величины σ_A и σ_B являются скачками функций A и B на положительной действительной оси плоскости комплексной переменной s , т. е. σ_A и σ_B определяются мнимыми частями A и B . В свою очередь, величины A^\pm и B^\pm могут быть найдены путем фазового анализа данных по πN -рассеянию. Фактически удобно работать в системе центра масс для рассеяния πN и рассматривать амплитуду M , следующим образом определяющую сечение:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\pi N}} = |\langle f | M | i \rangle|^2, \quad (8.60)$$

где $|i\rangle$ и $|f\rangle$ соответствуют паулевским спинорам для начального и конечного состояний нуклона. Можно записать M в виде

$$M = f_1(\theta) + \frac{(\sigma q_2)(\sigma q_1)}{q_1 q_2} f_2(\theta), \quad (8.60а)$$

где q_1 и q_2 — импульсы налетающего и рассеянного пионов соответственно. Квадраты q_1 и q_2 равны [см. (8.60г)]

$$q_{\pi N}^2 = \frac{1}{4} \frac{(s - m^2 - \mu_\pi^2)^2 - \mu_\pi^2 m^2}{s}. \quad (8.60б)$$

Тогда можно записать A и B в форме

$$\left. \begin{aligned} A &= 4\pi \left[\frac{W+m}{E+m} f_1 - \frac{W-m}{E-m} f_2 \right]; \\ B &= 4\pi \left[\frac{f_1}{E+m} + \frac{f_2}{E-m} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.60\text{в})$$

Здесь W — энергия в системе центра масс *, $W^2 = s$,

$$W = q_{\pi N}^2 + \mu_{\pi}^2; \quad E = q_{\pi N}^2 + m^2. \quad (8.60\text{г})$$

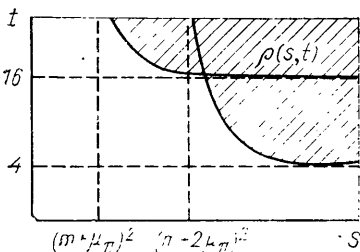
Амплитуды f_1 и f_2 просто разлагаются по парциальным волнам

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \sum_{l=0}^{\infty} f_{l+} P'_{l+1}(\cos \theta_{\pi N}) - \sum_{l=2}^{\infty} f_{l-} P'_{l-1}(\cos \theta_{\pi N}), \\ f_2 &= \sum_{l=1}^{\infty} (f_{l-} - f_{l+}) P'_l(\cos \theta_{\pi N}), \end{aligned} \right\} \quad (8.60\text{д})$$

где

$$\cos \theta_{\pi N} = 1 + t/2q_{\pi N}^2. \quad (8.60\text{е})$$

Использованы обозначения $f_{l\pm}$ для парциальных амплитуд с орбитальным моментом l и полным моментом количества движения $j = l \pm 1/2$. Связь с фазами рассеяния



$$f_{l\pm} = \frac{e^{i\delta_{l\pm} \sin \delta_{l\pm}}}{q_{\pi N}}. \quad (8.60\text{ж})$$

Рис. 33. Весовая функция $\rho_{\pi N}(s, t)$ для πN -рассеяния (область задания. — Прим. пер.)

положительных t состоит в непосредственном использовании для этой цели равенств (8.60д). Конечно, это было бы оправданным, если при такой экстраполяции мы не наталкивались бы на сингулярности. По-видимому, опасная сингулярность связана с весовой функцией $\rho_{\pi N}(s, t)$ для πN -рассеяния, область определения которой показана на рис. 33. В расчетах потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия было найдено, что наиболее важной об-

* Полезно указать, что $E \pm m = [(W \pm m)^2 - \mu_{\pi}^2]/2W$. Таким образом, вспоминая, что $W = \sqrt{s}$, легко выразить f_1 и f_2 через инварианты s и t .

ластью значений s является окрестность (3,3)-изобары, $s \approx (m + 2\mu_\pi)^2$. Для подобных значений s кажется опасным производить экстраполяцию за пределы значений $t \approx (15 \div 20) \mu_\pi^2$. Однако эта трудность возникает лишь в случаях $J=0$ и 1 для спиральных амплитуд f_+^0 и f_\pm^1 . Мы рассмотрим их явно. Из представления Мандельштама непосредственно следует связь функции $\rho_{\pi N}(s, t)$ с мнимой частью спиральной амплитуды для процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$. В области $4\mu_\pi^2 < t < 16\mu_\pi^2$ фаза амплитуды f_\pm^J может быть найдена из равенства

$$f_\pm^J(t) = e^{i\delta_{\pi\pi}^J} |f_\pm^J(t)|, \quad (8.61)$$

где $\delta_{\pi\pi}^J$ — сдвиг фазы в соответствующем канале $\pi\pi$ -рассеяния. Это соотношение будет рассмотрено более подробно в § 8.8. В сущности формула (8.61) используется и для значений $t \gg 16\mu_\pi^2$. Поправки к ней возникают в том случае, когда в дисперсионное соотношение для $f_\pm^J(t)$ важный вклад начинают вносить четыре и большее число пионов. Очевидно, что мнимая часть $f_\pm^J(t)$ становится важной, когда $\sin \delta_{\pi\pi}^J$ достаточно велик. В случае канала с $J=1$, например, это означает, что надо дойти до значений $t \approx 35\mu_\pi^2$ вблизи массы ρ -мезона, чтобы величина $\delta_{\pi\pi}^{J=1}$ стала большой. По-видимому, для $J \geq 2$ область соответствующих значений t расположена еще дальше, так как частицы с $J \geq 2$, которые могут быть образованы в $\pi\pi$ -канале, имеют большие массы. Следовательно, аналитическое продолжение с помощью непосредственного использования формул (8.60д) может стать адекватным после того, как исключены спиральные амплитуды с $J=0$ и 1.

В области значений t , отвечающих массе ρ -мезона, амплитуда $f^{J=1}(t)$ хорошо известна фактически прямо из экспериментальных данных. Можно потребовать поэтому, чтобы дисперсионное соотношение для $f^{J=1}(t)$ воспроизводило это поведение, и в результате восстановить $f^{J=1}(t)$ во всей области интересующих нас значений t [53].

Большая неопределенность возникает при нахождении $f_+^{J=0}(t)$. Фаза амплитуды $f_+^{J=0}(t)$ может быть найдена экспериментально в области $10\mu_\pi^2 \leq t \leq 50\mu_\pi^2$ из исследования процесса $\pi + p \rightarrow \pi + \pi + p$, где $\delta_{\pi\pi}(t)$ входит во взаимодействие в конечном состоянии между пионами. Ее можно найти из экспериментального распределения по инвариантной массе двухпионной системы. Зная $\delta_{\pi\pi}(t)$ и считая равенство (8.61) справедливым в относительно широкой области t , можно найти фазу амплитуды $f_+^{J=0}(t)$. Действительная часть амплитуды $f_+^{J=0}(t)$ была получена путем аналитического продолжения с использованием экспериментально найденной амплитуды для πN -рассеяния [91]. Продолжение осуществлялось от отрицательных, физических для процесса $\pi N \rightarrow \pi N$, значений t в область положительных t . К сожалению, экстраполяция должна

производиться прямо на разрез в комплексной t -плоскости. При разумных предположениях о гладкости это сделать можно, однако математическая строгость при такой экстраполяции теряется.

Здесь мы получим $f_+^{J=0}(t)$ совершенно иным способом, воспользовавшись достижениями теории мягких пионов. Схема эта привлекательна, так как она показывает, что пион-нуклонное рассеяние при низких энергиях вместе с разумными предположениями о гладкой экстраполяции соответствующих амплитуд в область вне массовой поверхности определяет нуклон-нуклонное рассеяние в промежуточной области. Счастливым обстоятельством является тот факт, что определения $f_+^{J=0}(t)$ из аналитического продолжения и с использованием теории мягких пионов хорошо согласуются друг с другом. Отложим обсуждение этих вопросов до § 8.8.

§ 8.7. ПРОЦЕДУРА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Выяснив из асимптотического поведения амплитуд пион-нуклонного рассеяния, что в каждом из изоспиновых каналов $+$ и $-$ надо сделать по одному вычитанию, обсудим теперь, как вычислять весовые функции. В последнем параграфе было показано, что вычитание из амплитуды $A^{(+)}(s, t)$ S -волновой ее части $A_+^{J=0}(t)$ — она входит в соответствующую спиральную амплитуду $f_+^{J=0}(t)$ — дает тот же эффект, что и вычитание в s -канале. Мы ограничимся здесь рассмотрением канала с изоспиновым индексом $+$. Для изоспинового индекса $-$ действия вполне аналогичны. Поскольку мы исходим из предположения, что преобладающий вклад в аннигиляцию N и \bar{N} вносит двухпионное состояние, величина $\text{Im}F^{J=0}(t)$, где F^J — спиральная амплитуда для $N\bar{N}$ -рассеяния, может быть получена из $f_+^{J=0}(t)$, как это следует из равенств (8.55). Аналогично в дисперсионном соотношении для амплитуды $M(\omega, t)$ — равенство (8.3), — зная $\text{Im}F^{J=0}(t)$, можно вычислить разность $M(\omega, t) - \text{Im}F^{J=0}(t)$. Подобно тому, как введение разности $A_+^{J=0}(t) - A(s, t)$ дает эффект вычитания в дисперсионном соотношении (8.59 а) для s -канала, взятие разности $M(\omega, t) - \text{Im}F^{J=0}(t)$ приводит к вычитанию в дисперсионном соотношении для $M(\omega, t)$ — в W -канале. Это вполне естественно, так как причины плохого асимптотического поведения при больших s и W соответственно одинаковы для πN - и NN -рассеяния. А именно: в перекрестном канале с изоспиновым индексом $+$ плохое поведение связано с возможным обменом помероном, а в соответствующем канале с индексом $-$ — с обменом ρ -мезоном — точнее ρ -траекторией, как обсуждалось в связи с равенством (8.58б).

Для того чтобы найти вычитательные константы, аналогичные $\frac{1}{2} A_0^+$ в (8.59а), вернемся к равенствам (8.53в), которые можно

переписать в виде [вспомним правила отбора (8.53) и (8.53a)]:

$$\left. \begin{aligned} A(t, x) &= -\frac{4\pi}{\rho^2} f_+^{J=0}(t) + 12\pi \frac{q}{\rho} \cos \varphi \left(\sqrt{\frac{1}{2}} m f_-^{J=1}(t) - \right. \\ &\left. - f_+^{J=1}(t) \right) + \sum_{J \geq 2}; \\ B(t, x) &= \sqrt{\frac{1}{2}} 12\pi f_-^{J=1} + \sum_{J \geq 2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.62)$$

где символом $\sum_{J \geq 2}$ обозначена сумма всех слагаемых в правой части равенства (8.62) с $J \geq 2$. Наша * стратегия состоит в следующем. В соответствии с дискуссией в § 8.6 можно сделать требуемые вычитания в дисперсионных соотношениях для A и B , если из этого или иного источника известны амплитуды $f_+^{J=0}$ и $f_{\pm}^{J=1}$. (Там же были обсуждены возможные источники подобной информации.) Следовательно, величинами, которые вычисляются по дисперсионным соотношениям, являются введенные выше $\sum_{J \geq 2}$. Используем, однако, обозначения Амати, Лидера и Витале и запишем следующие равенства:

$$A^{\pm} = (\mathcal{A}^{\pm} - \alpha^{\pm}) + A_{sp}^{\pm}, \quad B^{\pm} = (\mathcal{B}^{\pm} - \beta^{\pm}) + B_{sp}^{\pm}. \quad (8.63)$$

Здесь $(\mathcal{A}^{\pm} - \alpha^{\pm})$ и $(\mathcal{B}^{\pm} - \beta^{\pm})$ — вклады от дисперсионных интегралов в правых частях дисперсионных соотношений, аналогичных по форме (8.59а), причем α^{\pm} играет ту же роль, что и $A^{\pm}/2$. Таким образом, $\mathcal{A}^{\pm} - \alpha^{\pm}$ и $\mathcal{B}^{\pm} - \beta^{\pm}$ эквивалентны символам $\sum_{J \geq 2}$ в (8.62). С помощью A_{sp}^{\pm} и B_{sp}^{\pm} обозначены члены, содержащие $f_+^{J=0}$ и $f_{\pm}^{J=1}$ в (8.62), которые должны быть выписаны явно. В равенстве (8.38в) было указано, что $\cos \varphi$ пропорционален $s-u$, поэтому удобна следующая параметризация величин A_{sp} и B_{sp} :

$$\bar{v} [A_{sp}(s, t, u) + i\gamma QB_{sp}(s, t, u)] u = \lambda_0(t) + \frac{1}{4} (s-u) \lambda_1(t) + \eta(t). \quad (8.64)$$

После проделанной нами выше работы понятно, что эти величины просто выражаются через спиральные амплитуды $f^{J=0}$ и $f^{J=1}$:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0(t) &= -\frac{4\pi}{\rho^2} f_+^{J=0}(t); \\ \lambda_1(t) &= \frac{12\pi}{\rho^2} \left[\sqrt{\frac{1}{2}} m f_-^{J=1}(t) - f_+^{J=1}(t) \right]; \\ \eta(t) &= 6\pi \sqrt{2} f_-^{J=1}(t). \end{aligned} \right\} \quad (8.65)$$

* Здесь излагаются идеи, содержащиеся в работах Амати, Лидера и Витале [4] и Чемтоба, Дурсо, Риски [24]. Аналогичный метод, но в других обозначениях применен в работе [117].

Здесь опущены верхние индексы $+$ и $-$, относящиеся к изоспину. Из (8.53) и (8.53а) следуют равенства $\lambda_0^- = \lambda_1^+ = \eta^+ = 0$, так что возможные изоспиновые индексы в приведенных выше формулах очевидны. Аналогичным образом можно выразить α_0 , α_1 и β через величины $f^{J=0}$ и $f^{J=1}$, зависящие от того, какие веса $\sigma_A^\pm(s', t)$ и $\sigma_B^\pm(s', t)$ используются для расчета A и B [см. равенства (8.31)]. Укажем довольно простой способ их нахождения.

Заметим, что

$$A_0^+ = \frac{1}{\pi} \int ds' \sigma_A^+(s', t) \int_{-1}^1 dx \left[\frac{1}{s' - s} + \frac{1}{s' - u} \right], \quad (8.66)$$

где

$$\left. \begin{aligned} s' - s &= s' + p^2 + q^2 - 2pqx; \\ s' - u &= s' + p^2 + q^2 + 2pqx, \end{aligned} \right\} \quad (8.66a)$$

причем $x = \cos \varphi$. Поскольку мы имеем дело с областью t , в которой $4\mu_\pi^2 < t < 4m^2$, величина $p = [t/4 - m^2]^{1/2}$ оказывается мнимой, т. е.

$$p = ik. \quad (8.66б)$$

Выполняя интегрирование, легко найти

$$A_0^+(t) = \frac{2}{q\kappa} \int ds' \sigma_A^+(s', t) \operatorname{arc} \operatorname{tg} h^{-1}, \quad (8.66в)$$

где

$$h = (s' - \kappa^2 + q^2)/(2q\kappa). \quad (8.66г)$$

Для других требуемых величин нетрудно получить

$$\left. \begin{aligned} B_0^-(t) &= \frac{2}{q\kappa} \int ds' \sigma_B^-(s', t) \operatorname{arc} \operatorname{tg} h^{-1}, \\ B_1^+(t) &= \frac{2}{iq\kappa} \int ds' \sigma_B^+(s', t) \{h \operatorname{arc} \operatorname{tg} h^{-1} - 1\}; \\ B_2^-(t) &= \frac{3}{q\kappa} \int ds' \sigma_B^-(s', t) \{3h - (3h^2 + 1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} h^{-1}\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.66д)$$

В случае, когда пион-нуклонное рассеяние описывается полюсными диаграммами, соответствующими нуклонным изобарам, которые можно рассматривать как элементарные стабильные частицы, абсорбтивные части имеют форму

$$\left. \begin{aligned} \sigma_A(s', t) &= \sum_i G_{Ai} \delta(s' - m_i^{*2}); \\ \sigma_B(s', t) &= \sum_i G_{Bi} \delta(s' - m_i^{*2}). \end{aligned} \right\} \quad (8.66е)$$

Соответственно для величин α и β можно написать следующие выражения*:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0^+(t) &= \sum_i \left\{ \frac{G_{Ai}^+}{q\kappa} \operatorname{arc} \operatorname{tg} h_i^{-1} - \frac{m}{\kappa^2} G_{Bi}^+ (1 - h_i \operatorname{arc} \operatorname{tg} h_i^{-1}) \right\}, \\ \alpha_1^-(t) &= \frac{3}{q\kappa^2} \sum_i \left\{ \frac{G_{Ai}^+}{q} (1 - h_i \operatorname{arc} \operatorname{tg} h_i^{-1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{mG_{Bi}^-}{2\kappa} [3h_i - (1 + 3h_i^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} h_i^{-1}] \right\}, \\ \beta^-(t) &= -\frac{3}{2q\kappa} \sum_i G_{Bi}^- [h_i - (1 + 3h_i^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} h_i^{-1}]. \end{aligned} \right\} (8.66\text{ж})$$

Подобное представление величин σ_A и σ_B через изобары с помощью формул (8.66e) было найдено адекватным для получения Σ из (8.62). В сущности именно эта цель преследуется, когда $J \geq 2$

вычитаются слагаемые типа α и β .

Можно теперь записать весовые функции в виде

$$\rho_j^\pm = \rho_j^\pm (J \geq 2) + C_j^\pm, \quad (8.67)$$

где $\rho_j (J \geq 2)$ проистекает из величин $(\mathcal{A} - \alpha)$ и $(\mathcal{B} - \beta)$, т. е. из выражений типа (8.37в) после исключения из них вкладов от спиральных амплитуд с $J=0$ и 1. Величины C_j^\pm следуют из $A_{\text{сп}}$ и $B_{\text{сп}}$, построенных по известным амплитудам $f^{J=0}$ и $f^{J=1}$, либо, что эквивалентно, по известным функциям λ_0 , λ_1 и η . В качестве примера приведем C_1^+ для случая инварианта $1^n 1^p$

$$C_1^+(t) = \pi N |\lambda_0^+(t)|^2, \quad (8.67a)$$

где

$$N = \frac{1}{64\pi^2} \sqrt{\frac{t - 4\mu_\pi^2}{t}}. \quad (8.67b)$$

Соответствующие выражения для величин C , относящиеся к другим инвариантам, можно найти в работе Чемтоба, Дурсо и Риски [24]. Для нахождения $\rho_1^+ (J \geq 2)$ надо вычесть $\pi N |\alpha_0^+(t)|^2$ из пра-

* Связь между α и β и спиральными амплитудами, отвечающими формулам (8.66e), вновь такая же, как в формулах (8.65), а именно:

$$\alpha_0(t) = -\frac{4\pi}{p^2} f_+^{J=0}(t),$$

$$\alpha_1(t) = \frac{12\pi}{p^2} \left[\sqrt{\frac{1}{2}} m f_-^{J=1}(t) - f_+^{J=1}(t) \right],$$

$$\beta(t) = 6\pi \sqrt{2} f_-^{J=1}(t).$$

вой части (8.37в), т. е. исключить вклад спиральной амплитуды с $J=0$ в $\rho_1^+(\omega, t)$ (так как спиральная амплитуда с $J=1$ не возникает в канале с изоспиновым индексом $+$).

Следует заметить здесь, что главная часть задачи состоит в определении C_j^\pm . Вклады в ρ_j от спиральных амплитуд с $J \geq 2$ составляют всего 10—20% от полной величины ρ_j . Таким образом, значительные усилия при выводе формулы вида (8.37в) имели отношение только к малой части проблемы.

Задача о нахождении величин ρ_j ($J \geq 2$) будет рассмотрена в Дополнении Б. Ее решение несколько громоздко, хотя и не связано с принципиальными трудностями.

§ 8.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПИРАЛЬНЫХ АМПЛИТУД $f_+^{J=0}$ И $f_\pm^{J=1}$ ДЛЯ ПРОЦЕССА $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$

Как отмечалось в § 8.6, в дисперсионном соотношении для инварианта $A^+(s, t, u)$, входящего в амплитуды процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ (либо, что эквивалентно, $\pi N \rightarrow \pi N$), необходимо сделать вычитание даже при $t=0$. Это связано с возможным обменом помероном в перекрестном канале. При обмене помероном функция $\sigma_A^+(s, t)$ при $t=0$ ведет себя при больших s , как константа. Поэтому в дисперсионном соотношении (8.31), которое для удобства мы вновь выпишем здесь:

$$A^+(s, t, u) = \frac{1}{\pi} \int_{(m+\mu_\pi)^2}^{\infty} ds' \sigma_A^+(s', t) \left[\frac{1}{s'-s} + \frac{1}{s'-u} \right], \quad (8.68)$$

интеграл в правой части расходится, если не произвести вычитания.

По причинам, указанным ниже, сделаем вычитание в точке $s=m^2$. Тогда получим

$$A^+(s, t, u) = A^+(m^2, t, u(m^2)) + (s-m^2) \frac{1}{\pi} \int \frac{\sigma_A^+(s', t) ds'}{(s'-s)(s'-m^2)} + \\ + (u-u(m^2)) \frac{1}{\pi} \int \frac{\sigma_A^+(s', t) ds'}{(s'-u)(s'-u(m^2))}, \quad (8.69)$$

где

$$u(m^2) = m^2 + 2\mu_\pi^2 - t. \quad (8.69a)$$

Переменные Мандельстама связаны соотношением:

$$s + u + t = 2m^2 + 2\mu_\pi^2. \quad (8.69б)$$

Наши рассуждения будут относиться к области $t \sim \mu_\pi^2$ (на самом деле имеется в виду область $4\mu_\pi^2 < t < 16\mu_\pi^2$, хотя результаты окажутся справедливыми и в более широком интервале). Из результатов, полученных Адлером [2] и Вейнбергом [120], извест-

но, что в случае, когда масса одного из пионов взята равной нулю (т. е. $\mu_\pi^2 = 0$ для падающего либо рассеянного пиона), имеет место равенство

$$A^+(s = m^2, t = \mu_\pi^2, u = m^2) = g^2/m, \quad (8.70)$$

где $g^2 = (4\pi) \cdot 14$ — псевдоскалярная константа связи πN . В духе философии мягкопионных методов мы предположим, что t -канальная структура вычитательной константы такова, что возникает фактор $m_\sigma^2 - t$, где m_σ — масса σ -частицы, фиктивной или истинной. Его возникновение связано с усилением в $\pi\pi$ -рассеянии для S -волны и с возможными резонансами, либо частицами с большими массами в S -волне при изоспине нуль. В любом случае имеем $m_\sigma^2 \gg \mu_\pi^2$, так что зависимостью вычитательной константы от μ_π^2 можно пренебречь в первом приближении, так как она входит с малым параметром μ_π^2/m_σ^2 . Таким образом, предполагается, что функция

$$A^+(s = m^2, t = \mu_\pi^2, u = m^2)$$

имеет следующие свойства:

- а) не изменяется, когда масса одного из пионов берется равной 0;
- б) при малых t всякая зависимость от t может быть грубо представлена в виде

$$\frac{g^2}{m} \frac{m_\sigma^2}{m_\sigma^2 - t}$$

и ею можно пренебречь при $t \ll m_\sigma^2$. Ниже мы вернемся к этому вопросу.

Таким образом, для малых t имеет место следующее выражение:

$$A^+(s, t, u) = \frac{g^2}{m} + (s - m^2) \frac{1}{\pi} \int \frac{\sigma_A^+(s', t) ds'}{(s' - s)(s' - m^2)} + \\ + (u - u(m^2)) \frac{1}{\pi} \int \frac{\sigma_A^+(s', t) ds'}{(s' - u)(s' - u(m^2))}. \quad (8.70a)$$

Окрестность (3.3) — изобары, где $s' \cong (m + 2\mu_\pi)^2 \cong m^2 + 4\mu_\pi m$, вносит ближайший по энергии вклад в $\sigma_A^+(s', t)$ под интегралом.

С точностью до величин порядка μ_π^2 имеем равенство $u(m^2) \cong \cong m^2$ [см. (8.69a)], поэтому в области $s \cong m^2$ обе подинтегральные функции равны с точностью до величины μ_π/m , и можно записать

$$A^+(s, t, u) \cong \frac{g^2}{m} + (s + u - m^2 - u(m^2)) \frac{1}{\pi} \times \\ \times \int \frac{\sigma_A(s', t) ds'}{(s' - s)(s' - m^2)} \cong g^2/m, \quad (8.70б)$$

так как $s+u=2m^2+2\mu_\pi^2-t$ и $m^2+u(m^2)=2m^2+2\mu_\pi^2-t$. Приведенное выше равенство является просто выражением того факта, что в мягкопионном пределе

$$\frac{dA^+}{ds} = 0. \quad (8.70в)$$

В качестве величины B при малых t будем использовать борновские члены

$$B^+ = g^2 \left(\frac{1}{m^2 - s} - \frac{1}{m^2 - u} \right). \quad (8.71)$$

Из (8.53в) можно видеть, что амплитуда B содержит только спиральные амплитуды f_-^J с изменением спиральности. Далее $f_-^{J=0} = 0$, поскольку аннигиляция N и \bar{N} с изменением спиральности не может привести к образованию скалярной частицы. Только четные J дают вклад в амплитуды с изоспиновым индексом $+$. Следовательно, ближайшим кандидатом является значение $J=0$. При малых t и s и u , близком к m^2 , мы приближаемся к полюсу борновской амплитуды в (8.71), поэтому борновский член необходимо учитывать. Однако вкладами, которые дают дисперсионный интеграл для членов с $J=2$, можно пренебречь, поскольку возможные обмены с $J=2$ известны только при больших t , $t \sim m_q^2 \approx 120 \mu_\pi^2$, что обсуждалось в § 8.6. В связи с этим представляется разумным пренебречь вкладом дисперсионного интеграла в амплитуду B .

Аппроксимируя A^+ величиной g^2/m и используя в качестве B^+ борновский член (8.71), легко найти с помощью (8.51а), что

$$\begin{aligned} A_0^+ &= 2g^2/m, \\ B_1^+ &= \frac{2g^2}{pq} \{h \operatorname{arc} \operatorname{tg} h^{-1} - 1\}. \end{aligned} \quad (8.72)$$

Вторую формулу можно было бы получить из (8.66е) с учетом равенства $p=ik$. Из равенств (8.53б) следует, что «мягкопионная амплитуда $f_+^{J=0}$ » равна

$$\begin{aligned} f_+^{J=0} &\cong \frac{g^2}{4\pi} \left\{ -\frac{p^2}{m} + m(h \operatorname{arc} \operatorname{tg} h^{-1} - 1) \right\} = \\ &= \frac{g^2}{4\pi} \left\{ mh \operatorname{arc} \operatorname{tg} h^{-1} - \frac{t}{4m} \right\}, \end{aligned} \quad (8.72а)$$

где использовано равенство $p^2 = t/4 - m^2$.

На рис. 34 мы сравниваем амплитуду (8.72а) с действительной частью $f_+^{J=0}$, полученной Нильсеном и др. [91] с помощью аналитического продолжения. Прежде всего ясно, что согласие между $f_+^{J=0}$ из (8.72а) с амплитудой, найденной из аналитического продолжения, вполне хорошее, хотя обе эти амплитуды могут быть некорректны в области больших значений t , $t > 16 \mu_\pi^2$. В качестве второго замечания укажем, что оба эти приближения для $f_+^{J=0}(t)$

сильно отличаются от амплитуды $f_+^{J=0}$, отвечающей четырехугольной диаграмме (см. рис. 26). При нахождении верхней кривой мы использовали вычитательную константу, следующую из мягкопионной теории. Эта теория строится с учетом подавления пар, которое обсуждалось нами в § 8.1. Таким образом, нам удалось ковариантно учесть эффекты подавления пар.

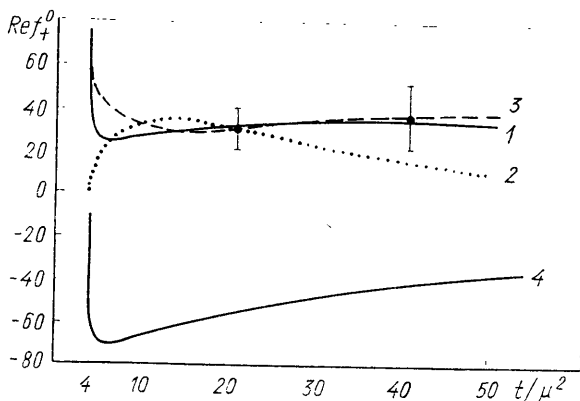


Рис. 34. «Мягкопионная» величина $f_+^{J=0}$:

1 — из равенства (8.72а); 2, 3 — результат Нильсена и др. [91]; 4 — результат с учетом только борновского члена (8.71). Этот результат относится к спиральной амплитуде для нуклонной квадратной диаграммы, изображенной на рис. 26.

Определение указанным способом величин A^+ и B^+ вблизи порога может быть связано с трудностями. С другой стороны, известно [121], что результаты, полученные с помощью алгебры токов или, что эквивалентно, в теории с мягкими пионами, воспроизводятся в вычислениях в наимизшем порядке теории возмущений с киральным лагранжианом. Для случая пион-нуклонного взаимодействия такой киральный лагранжиан имеет вид

$$\langle \pi(q) N(p') | \mathcal{L} | N(p) \rangle = i \frac{f}{\mu} q_\mu \gamma^\mu \gamma_5. \quad (8.73)$$

Это — лагранжиан для случая псевдовекторной связи или, что равнозначно, релятивистское обобщение первого слагаемого в правой части равенства (8.2). (Здесь вновь опущены изоспиновые индексы.) Рецепт тогда состоит в следующем. Амплитуды, изображенные на рис. 32, следует вычислять в теории возмущений второго порядка, учитывая только нуклонные промежуточные состояния. Произведя разложение амплитуды по инвариантным амплитудам, легко найти следующие результаты:

$$A^+ = \frac{g^2}{m}; \quad B^+ = g^2 \left(\frac{1}{m^2 - s} - \frac{1}{m^2 - u} \right), \quad (8.73a)$$

которые эквивалентны полученным нами с помощью соображений о вычитательных константах и т. п. (8.68) — (8.71). Таким обра-

зом, с помощью дисперсионного подхода задача была сведена к расчету амплитуд, отвечающих графикам типа деревьев, изображенным на рис. 32. Как раз такие графики типа деревьев можно учесть и с помощью киральных лагранжианов.

До сих пор в этом параграфе мы имели дело с определением действительной части $f_{+}^{J=0}(t)$. Такие амплитуды из-за соотношения унитарности имеют мнимые части при положительных t . На массовой поверхности промежуточные состояния с наименьшим t являются двухпионными, как изображено на рис. 35.

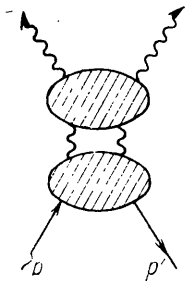


Рис. 35. Процесс, включающий промежуточные состояния на массовой поверхности с наименьшей энергией t . Волнистые линии отвечают пионам, как обычно

Из соотношения унитарности, подобного равенству (8.9), можно показать [83], что

$$\text{Im} \langle \pi\pi | N\bar{N} \rangle = C \langle \pi\pi | \pi\pi \rangle_J \langle \pi\pi | N\bar{N} \rangle_J, \quad (8.74)$$

где C — действительная константа; $\langle \pi\pi | \pi\pi \rangle_J$ и $\langle \pi\pi | N\bar{N} \rangle_J$ — амплитуды для процессов $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$ и $\pi + \pi \rightarrow N + \bar{N}$ соответственно. Последняя величина и есть та спиральная амплитуда, которую мы обсуждаем. Равенство (8.74) означает, что

$$\text{arg} \langle \pi\pi | N\bar{N} \rangle_J = \text{arg} \langle \pi\pi | \pi\pi \rangle_J = \delta_{\pi\pi}^J, \quad (8.74a)$$

где $\delta_{\pi\pi}^J$ — сдвиг фазы для упругого $\pi\pi$ -рассеяния с угловым моментом J . Таким образом, имеем

$$f^J(t) = e^{i\delta_{\pi\pi}^J} |f^J(t)|. \quad (8.75)$$

Зная действительную часть f^J и $\delta_{\pi\pi}^J$ мы, очевидно, можем найти мнимую часть. Соотношение (8.75) справедливо на верхнем берегу разреза в плоскости t , даваемого соотношением унитарности. Разрез начинается в точке $t = 4\mu_\pi^2$ и распространяется до $+\infty$. На нижнем берегу разреза

$$f^J(t - i\epsilon) = (f^J(t + i\epsilon))^*, \quad 4\mu_\pi^2 < t < 16\mu_\pi^2, \quad (8.75a)$$

как и обычно на разрезе, отвечающем соотношению унитарности. Скачок равен мнимой части амплитуды, $\text{Im} f^J(t)$. Указанные выше пределы ($4\mu_\pi^2 < t < 16\mu_\pi^2$), в которых справедливо соотношение (8.75), возникают в связи с тем, что в этой области двухпионное состояние — единственно возможное из всех промежуточных со-

стояний на массовой поверхности (см. рис. 35). Однако практически соотношение (8.75) используется вплоть до $t \cong 50 \mu_\pi^2$, поскольку четырехпионное состояние, следующее из возможных промежуточных состояний, подавлено из-за малости доступного фазового пространства. По-видимому, его вклад не играет важной роли.

Опишем теперь наиболее часто встречающуюся процедуру* нахождения $f^J(t)$, в особенности мнимой части, с помощью дисперсионных соотношений и аналитического продолжения. (Это дополнит работу Нильсена и др., обсужденную в связи с рис. 34.) Определим сначала фазовую функцию соотношением

$$D_J(t) = \exp \left[-\frac{t}{\pi} \int_{4\mu_\pi^2}^{T_R} \frac{\delta_{\pi\pi}^J(t')}{t'(t'-t)} dt' \right], \quad (8.76)$$

где верхний предел берется равным $T_R \cong 50 \mu_\pi^2$. В этом случае исходным является предположение о том, что сдвиг фазы π -рассеяния известен. Значения $\delta_{\pi\pi}^J$ могут быть извлечены из анализа взаимодействия в конечном состоянии в процессе типа $\pi + N \rightarrow \pi + \pi + N$ [86]. Процедура состоит в том, чтобы, используя найденные таким образом значения фаз, получить не только $f^J(t)$ для малых положительных t , но и улучшенные значения $\delta_{\pi\pi}^J$, в особенности при малых t , где они не очень хорошо устанавливаются при использовании процесса рождения пиона.

Функция $D_J(t)$ обладает тем свойством, что при $t = |t| \pm i\varepsilon$, где ε — бесконечно малая (положительная) величина, ее аргумент равен

$$\arg D_J = \pm \delta_{\pi\pi}^J. \quad (8.76a)$$

Следовательно, величина

$$\mathcal{F}(t) = D(t) f^J(t) \quad (8.76b)$$

не имеет разреза в области $4\mu_\pi^2 < t < T_R$, т. е. «унитарный разрез», который мы обсудили в связи с равенством (8.75a), удается исключить таким способом. Структура разреза, который имеет амплитуда $f^J(t)$, показана на рис. 36, а, а структура модифицированного разреза амплитуды $\mathcal{F}(t)$ — на рис. 36, б.

Левый разрез у амплитуды $f^J(t)$ имеет ту же природу, что и левые разрез в плоскости комплексной энергии, с которыми мы встречаемся при решении уравнения Липпмана—Швингера (см. обсуждение в § 5.5). В частности, участок разреза $0 < t < a$, где $a = 4\mu_\pi^2 - 1/m$, возникает от первого борновского члена подобно тому, как первая часть левого разреза функции N (см. § 5.5) возникает от первого борновского члена в потенциале. В области от $-26\mu_\pi^2$ до 0 $\text{Im} f_\pm^J$ может быть получена непосредственным про-

* Следуем работе Нильсена и Оадеса [93].

должением в эту область амплитуды пион-нуклонного рассеяния, разложенной по парциальным волнам [37]. При этом не возникает проблем, связанных с расходимостью. Соответствующее выражение для $\text{Re} f_{\pm}^J$ не сходится на действительной оси в плоскости t . Однако применение дисперсионных соотношений при фиксированном t позволяет вычислить $\text{Re} f_{\pm}^J$ с помощью пион-нуклонных

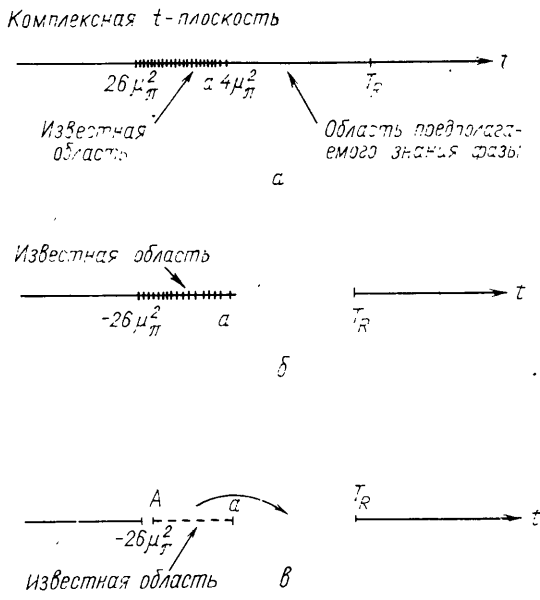


Рис. 36. Схема вычисления $f^J(t)$:

а — структура разрезов; б — при заданных величинах $\delta_{\pi\pi}^J$ можно вычислять функцию $\mathcal{F}(t)$, которая не имеет разреза в области от $4\mu_{\pi}^2$ до T_R ; в — схема аналитического продолжения $\mathcal{F}(t)$ в эту область

амплитуд. При этом аналитическое продолжение последних производится с помощью разложения по парциальным амплитудам в том же интервале. Опубликованы подробные таблицы Нильсена [90], дающие значения величин f_{\pm}^J в интервале $-26\mu_{\pi}^2 \leq t \leq a$.

Следовательно, при заданных фазах $\delta_{\pi\pi}^J$ можно путем введения функции $\mathcal{F}(t)$ исключить участок правого разреза до T_R . Кроме того, функция $\mathcal{F}(t)$ известна на участке левого разреза $-26\mu_{\pi}^2 < t < a$ (см. рис. 38, б). В области $4\mu_{\pi}^2 < t < T_R$ функцию $\mathcal{F}(t)$ можно найти с помощью аналитического продолжения, как показано на рис. 36, в. Зная $\mathcal{F}(t)$, легко найти $f^J(t)$ в той же области.

Задача теперь состоит в том, чтобы проверить правильность найденной таким способом функции и выяснить, корректны ли исходные предположения о фазах $\delta_{\pi\pi}^J$. С этой целью надо обра-

тяться к парциальным амплитудам для πN -рассеяния. Здесь целесообразно обсудить «потенциал» в связи со скачком на разрезе, наиболее близко расположенном к физической области. [В качестве примера можно указать на величину $\Delta(E)$ в равенстве (5.70) для отрицательных значений E (ближайших к точке $E=0$), возникающую при решении уравнения Липпмана—Швингера.] Скачок, дающий «потенциал» с наибольшим радиусом действия, соответствует области $t \geq 4\mu_\pi^2$. Он зависит от $\text{Im}f^J(t)$, в особенности от $f_{+}^{J=0}(t)$. Поскольку рассеяние пиона на нуклоне в периферийной области особенно чувствительно к дальнедействующему πN -«потенциалу», проверка самосогласованности первоначального выбора фаз $\delta_{\pi\pi}^J$ осуществляется путем выяснения того, насколько хорошо описывается периферийная часть амплитуды πN -рассеяния (P - и D -волны при низких энергиях).

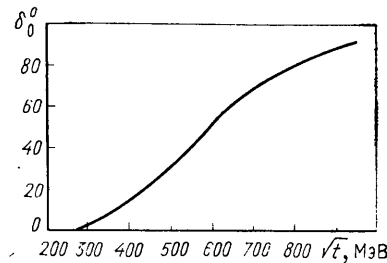


Рис. 37. Один из результатов Морган и Шоу для сдвига фазы $\pi\pi$ -рассеяния в S -волне

Основной вывод из этих исследований состоит в том, что длина a πN -рассеяния, связанная со сдвигом фазы обычным соотношением

$$\delta_{\pi\pi}^{J=0} = qa + O(q^2), \tag{8.76в}$$

мала

$$|a| < 0,2\hbar/\mu_\pi c.$$

Поэтому в области $4\mu_\pi^2 < t < 16\mu_\pi^2$ амплитуда $f^J(t)$ близка к вещественной ее части. (Напоминаем, что в этой области $\text{Im}f^J(t)/\text{Re}f^J(t) = \text{tg}\delta_{\pi\pi}^J$). При больших t , по-видимому, имеет место ситуация, изображенная на рис. 37. Отметим, что при энергиях около 600 МэВ $\delta_{\pi\pi}^0 \cong 45^\circ$, так что $\text{Im}f_{+}^0(t)$ равна здесь $\text{Re}f_{+}^0(t)$, и отношение $\text{Im}f_{+}^0(t)/\text{Re}f_{+}^0(t)$ возрастает. В некотором смысле можно говорить об обмене широким резонансом (σ -частицей) с массой в области 600 МэВ (см. обсуждение в § 8.1). Заметим, что поведение $f_{+}^0(t)$ при энергиях выше 800 МэВ играет сравнительно малую роль, так как здесь начинает проявляться сильное отталкивание за счет обмена ω -мезоном, которое «забывает» любой из обсуждаемых здесь эффектов. Проще это понять в конфигурационном пространстве. Поскольку связанный с обменом ω -мезоном потенциал является таким сильным и отталкивающим, изменения во взаимодействии в области $r < \hbar/\mu_\omega c$ имеют относительно малый эффект просто потому, что нуклоны не проникают в эту область.

На данной стадии мы рассмотрели вклады в S -матрицу, связанные с однобозонными и двухпионными обменами. Для парциальных амплитуд с большими угловыми моментами можно пренебречь искажениями и вычислять соответствующие сдвиги фаз путем проектирования нашей приближенной S -матрицы на парциальные волны. При энергиях, скажем, 300 МэВ в нуклон-нуклонном канале мы намерены именно таким способом вычислять парциальные амплитуды, начиная с F -волны.

Коль скоро мы рассчитали весовую функцию $\rho_j(\omega, t)$, мы имеем амплитуду рассеяния в форме, являющейся обобщением равенства (8.3), т. е.

$$M(\omega, t) = M_{OPEC} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^5 \int_{4\mu_\pi^2}^{t_{\max}} [3 (\rho_j^+(\omega, t') \mp (-1)^j \rho_j^+(\bar{t}, t')) + 2 (\rho_j^-(\omega, t') \mp (-1)^j \rho_j^-(\bar{t}, t')) \tau^p \tau^n] \frac{P_j dt'}{t' - t}. \quad (8.77)$$

Инварианты P_j даются равенствами (8.15). Равенство (8.77) получено из равенств (8.19) — (8.21), чтобы обобщить (8.3) на случай частиц со спином. Если взять матричные элементы $M(\omega, t)$ между состояниями нуклонов с определенными спиральностями, то возникают члены, линейные* по $\cos \theta$, где θ — угол рассеяния в системе центра масс нуклон — нуклон. Это можно увидеть из материала, изложенного в § 7.2 [формулы (7.35) — (7.44)]. Угловая зависимость иной природы в члене, отвечающем двухпионному обмену, целиком определяется присутствием t в знаменателе. Вспомним, что в системе центра масс двух нуклонов

$$t = -2k^2(1 - \cos \theta).$$

При интегрировании по t' удобно перейти к новой переменной $y = t'/(2k^2) + 1$.

Тогда часть (8.77), соответствующая двухпионному обмену, дается равенством

$$M(\omega, t) - M_{OPEC} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^5 \int_{1+2\mu_\pi^2/k^2}^{1+t_{\max}/k^2} F_j(\omega, y) \frac{P_j dy}{y - \cos \theta}, \quad (8.77б)$$

где $F_j(\omega, y)$ обозначает величину в квадратных скобках [] в (8.77), записанную через переменную y .

Парциальная волна с данным J может быть получена путем умножения (8.77б) на P_J или $P_{J\pm 1}$ и интегрирования по углам,

* Эти члены квадратичны по $\cos \theta/2$, но элементарно выражаются через константы и члены, линейные по $\cos \theta$.

как это следует из равенств (8.30). Если матричные элементы P_j дают члены, линейные по $\cos \theta$, то их можно преобразовать, записав $\cos \theta = (\cos \theta - y) + y$ и приняв во внимание, что первое слагаемое сократится с знаменателем в (8.77б) и угловая зависимость в нем вообще исчезнет. Поэтому член, содержащий $\cos \theta - y$, даст вклад только в парциальную амплитуду с $J=0$. Рассматривая парциальные амплитуды с высокими моментами, мы не будем иметь дела с такими слагаемыми.

Указанным способом задача о проектировании на парциальные волны сводится к вычислению интегралов

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_J(\cos \theta)}{x - \cos \theta} d(\cos \theta) = Q_J(x).$$

ДОПОЛНЕНИЕ А. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ НАБОРАМИ ИНВАРИАНТОВ

Не только большое число инвариантов (пять для амплитуды на массовой поверхности и шесть для «внемассовой» амплитуды) в проблеме нуклон-нуклонного взаимодействия смущает непосвященных. Необходимость «рыскать» между различными наборами, один из которых удобен для одной, а другой предпочтительнее для иной цели, заставляет работающего в данной области физики считать, что он трудится «на соляных копейках». Поскольку все это относится к области технологии, мы собрали все относящееся к этим вопросам в данном дополнении.

Так называемые «инварианты для теории возмущений» P_j даются равенствами (8.15). Другой набор инвариантов, который зачастую проще использовать на промежуточных этапах, был введен Гольдбергером, Намбу и Оме [41]. Мы будем называть соответствующий набор символом GNO и обозначать отдельные инварианты буквой G_i . Причем

$$G_1 = P_1, \quad G_2 = P_2, \quad G_3 = P_3, \quad G_4 = (i\gamma_5^n \gamma^n P) (i\gamma_5^p \gamma^p N), \quad G_5 = P_5. \quad (A.1)$$

В других задачах наиболее часто используются так называемые инварианты Ферми

$$F_1 = S = 1^n 1^p, \quad F_2 = V = \gamma^n \gamma^p, \quad F_3 = T = \sum_{\mu < \nu} (i\gamma_\mu^n \gamma_\nu^n) (i\gamma_\mu^p \gamma_\nu^p), \\ F_4 = A = (i\gamma_5^n \gamma_\mu^n) (i\gamma_5^p \gamma_\mu^p), \quad F_5 = P = \gamma_5^n \gamma_5^p, \quad (A.2)$$

где S , V и т. д. имеют обычный смысл скаляра, вектора и т. п.

Для иллюстрации рассмотрим связь между инвариантами Ферми и инвариантами GNO . Выпишем вновь для удобства пользования определения (8.10):

$$\left. \begin{aligned} N &= (n_1 + n_2)/2 = (n - n')/2; \\ P &= (p_1 + p_2)/2 = (p - p')/2; \\ \Delta &= (n_1 - n_2) = (p_2 - p_1) = (n + n') = (p + p'). \end{aligned} \right\} \quad (A.3)$$

Последние равенства в каждом случае относятся к процессу $N\bar{N} \rightarrow \rightarrow N\bar{N}$, как показано на рис. 31. Определим три других взаимно перпендикулярных вектора, которые все перпендикулярны к Δ :

$$\left. \begin{aligned} M &= N + P; & K &= N - P; \\ L_\lambda &= \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} M_\mu K_\nu \Delta_\rho. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

Квадраты перечисленных векторов равны следующим величинам, составленным из инвариантов Мандельштама:

$$\left. \begin{aligned} N^2 &= P^2 = -(\omega + \bar{t})/4; & M^2 &= -\omega; \\ K^2 &= -\bar{t}; & \Delta^2 &= -t, & L^2 &= -\omega\bar{t}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

Отметим, что в системе центра масс для процесса $N\bar{N} \rightarrow \text{пл}$ вектор Δ не имеет пространственных компонент, а M и K не имеют временных компонент.

Удобное соотношение может быть получено с помощью равенства

$$\gamma_5 \gamma L = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \gamma_\lambda M_\mu K_\nu \Delta_\rho = -(\gamma M)(\gamma K)(\gamma \Delta), \quad (\text{A.6})$$

которое следует из взаимной ортогональности M , K и Δ . Таким образом, имеем

$$\gamma L = -\gamma_5 (\gamma M)(\gamma K)(\gamma \Delta). \quad (\text{A.6a})$$

Легко проверить это соотношение в системе центра масс процесса $N\bar{N} \rightarrow \text{пл}$. В этом случае $\gamma \Delta = \gamma_4 \Delta_4$, $(\gamma M)(\gamma K) = i\sigma[\mathbf{MK}]$ и $^* \gamma_5 \sigma \gamma_4 = -\gamma$, что дает нам равенство (A.6). Непосредственно видно, что $L^2 = -M^2 K^2 \Delta^2$. Эти простые выкладки отчасти снимают «покров тайны» с вектора L , записанного довольно сложным образом. Фактически вектор L нам никогда не понадобится сам по себе, а только в комбинации (A.6a).

В выводах формул в данном разделе и в Дополнении Б часто используются волновые уравнения

$$\left. \begin{aligned} (i\gamma p + m)u(p) &= 0; & \bar{u}(p)(i\gamma p + m) &= 0; \\ (i\gamma p - m)v(p) &= 0; & \bar{v}(p)(i\gamma p - m) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6b})$$

При этом начальные и конечные нуклоны будут всегда браться на массовой поверхности. При переходе, скажем, от набора инвариантов Ферми к инвариантам GNO либо к набору инвариантов для теории возмущений мы будем часто пользоваться следующим выражением:

$$\gamma = \frac{\gamma M}{M^2} M + \frac{\gamma K}{K^2} K + \frac{\gamma \Delta}{\Delta^2} \Delta + \frac{\gamma L}{L^2} L, \quad (\text{A.7})$$

а затем переходить к матричным элементам. Аналогичная техника будет использована в Дополнении Б при вычислении интег-

* Определение матриц γ дано в табл. 7.2.

ралов, а также в гл. 9 для упрощения интегралов, связанных с Q -инвариантами, которые будут там введены.

Проиллюстрируем эту процедуру на примере перехода от инварианта Ферми $V = \gamma^n \gamma^p$ к инвариантам GNO . С помощью (A.7) получаем

$$\gamma^n \gamma^p = \frac{(\gamma^n M)(\gamma^p M)}{M^2} + \frac{(\gamma^n K)(\gamma^p K)}{K^2} + \frac{(\gamma^n \Delta)(\gamma^p \Delta)}{\Delta^2} + \frac{(\gamma^n L)(\gamma^p L)}{L^2}. \quad (\text{A.8})$$

Можно также показать, что

$$\bar{u}(n_2) \gamma^n \Delta u(n_1) = \bar{u}(n_2) [\gamma(n_1 - n_2)] u(n_1) = \bar{u}(n_2) (im - im) u(n_1) = 0, \quad (\text{A.8a})$$

где использовано то обстоятельство, что начальное и конечное состояния относятся к массовой поверхности. Имеем аналогично

$$\bar{u}(n_2) \gamma M u(n_1) = \bar{u}(n_2) (im1^n + \gamma^n P) u(n_1). \quad (\text{A.8б})$$

Учитывая, что $M^2 = -\omega$, найдем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M^2} \{ \bar{u}(n_2) \gamma M u(n_1) \} \{ \bar{u}(p_2) \gamma M u(p_1) \} = \\ & = -\frac{1}{\omega} \{ -m^2 1^n 1^p + m(1^n i \gamma^p N + i \gamma^n P 1^p) + \gamma^n P \gamma^p N \} = \\ & = \frac{1}{\omega} \{ m^2 G_1 - m G_2 + G_3 \}. \end{aligned} \quad (\text{A.8в})$$

Приведение к искомому виду следующего члена также выполняется непосредственно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K^2} \{ \bar{u}(n_2) \gamma K u(n_1) \} \{ \bar{u}(p_2) \gamma K u(p_1) \} = \\ & = -\frac{1}{i} \{ \bar{u}(n_2) \gamma (N - P) u(n_1) \} \{ \bar{u}(p_2) \gamma (N - P) u(p_1) \} = \\ & = -\frac{1}{i} \{ \bar{u}(n_2) (im - \gamma P) u(n_1) \} \{ \bar{u}(p_2) (-im + \gamma N) u(p_1) \} = \\ & = -\frac{1}{i} \{ m^2 G_1 + m G_2 + G_3 \}. \end{aligned} \quad (\text{A.8г})$$

Самым неудобным является член вида

$$\frac{1}{L^2} \{ \bar{u}(n_2) \gamma L u(n_1) \} \{ \bar{u}(p_2) \gamma L u(p_1) \},$$

который мы рассмотрим теперь в деталях, отражающих все перипетии вывода. Начнем с исследования выражения

$$\beta_n = \bar{u}(n_2) \gamma L u(n_1) = -\bar{u}(n_2) \gamma_5 (\gamma M) (\gamma K) (\gamma \Delta) u(n_1), \quad (\text{A.9})$$

где использовано равенство (A.6). Подставляя сюда M и K из (A.4) и используя равенство $N^2 - P^2 = 0$, находим

$$\beta_n = -\bar{u}(n_2) \gamma_5 [(\gamma P) (\gamma N) - (\gamma N) (\gamma P)] \gamma \Delta u(n_1) =$$

$$\begin{aligned}
&= + 2\bar{u}(n_2) \gamma_5 (NP) \gamma (n_1 - n_2) u (n_1) - \\
&- 2\bar{u}(n_2) \gamma_5 (\gamma P) (\gamma N) (\gamma \Delta) u (n_1),
\end{aligned} \tag{A.9a}$$

где на последнем шаге были применены коммутационные соотношения для матриц γ . С помощью уравнений движения (A.6б) можно преобразовать это выражение следующим образом

$$\begin{aligned}
\beta_n &= 2\bar{u}(n_2) \gamma_5 (NP) (im - \gamma n_2) u (n_1) - 2\bar{u}(n_2) \gamma_5 (\gamma P) \left(\gamma \frac{1}{2} (n_1 + \right. \\
&\quad \left. + n_2) \right) (\gamma (n_1 - n_2)) u (n_1) = 2\bar{u}(n_2) (im + \gamma n_2) (NP) \gamma_5 u (n_1) - \\
&- \bar{u}(n_2) \gamma_5 \gamma P (\gamma n_2 \gamma n_1 - \gamma n_1 \gamma n_2) u (n_1) = 4i m N P \bar{u}(n_2) \gamma_5 u (n_1) - \\
&- 2\bar{u}(n_2) \gamma_5 \gamma P (\gamma n_2 \gamma n_1 - n_1 n_2) u (n_1).
\end{aligned} \tag{A.9б}$$

Дальнейшее использование коммутационных соотношений и уравнений движения приводит к следующей формуле:

$$\begin{aligned}
\beta_n &= 4im (NP) \bar{u} \gamma_5 u + 2n_1 n_2 \bar{u} \gamma_5 \gamma P u - \\
&- 4im (Pn_2) \bar{u} \gamma_5 u + 2m^2 \bar{u} \gamma_5 \gamma P u.
\end{aligned} \tag{A.9в}$$

Так как $MK=0$, можно записать

$$NP = \frac{1}{2} (M + K) \frac{1}{2} (M - K) = \frac{1}{4} (M^2 - K^2). \tag{A.9г}$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned}
Pn_2 &= \frac{1}{2} (M - K) \left(N - \frac{1}{2} \Delta \right) = \frac{1}{2} (M - K) \frac{1}{2} (M + K - \Delta) = \\
&= \frac{1}{4} (M^2 - K^2).
\end{aligned} \tag{A.9д}$$

Таким образом, слагаемые, содержащие (NP) и (Pn_2) , взаимно компенсируют друг друга. Имеет место также следующей равенство:

$$\begin{aligned}
(n_1 n_2) &= \frac{1}{2} (M + K + \Delta) \frac{1}{2} (M + K - \Delta) = \frac{1}{4} (M^2 + K^2 - \Delta^2) = \\
&= \frac{1}{4} (-\omega - \bar{t} + t) = \frac{1}{4} (2t - 4m^2).
\end{aligned} \tag{A.9е}$$

На последнем шаге было использовано, что $t + \bar{t} + \omega = 4m^2$. В результате утомительных алгебраических выкладок мы приходим к коротенькой формуле

$$\beta_p = -it\bar{u}(n_2) i\gamma_5 \gamma P u (n_1). \tag{A.9ж}$$

Тем же способом получаем равенство

$$\beta_p \equiv \bar{u}(p_2) \gamma L u (p_1) = -it\bar{u}(p_2) i\gamma_5 (\gamma N) u (p_1). \tag{A.9з}$$

Припоминая, что [см. (A.5)] $L^2 = -\omega t \bar{t}$, можно увидеть следующую связь рассмотренных матричных элементов с инвариантами GNO (A.1):

$$\frac{1}{L^2} \{ \bar{u}(n_2) (\gamma L) u(n_1) \} \{ \bar{u}(p_2) (\gamma L) u(p_1) \} = \frac{t}{\omega \bar{t}} G_4. \quad (A.10)$$

В конечном итоге находим следующее соотношение *

$$V = \gamma^n \gamma^p = \frac{1}{t \omega \bar{t}} [m^2 (\bar{t} - \omega) G_1 - m (\bar{t} + \omega) G_2 + (\bar{t} - \omega) G_3 + t G_4]. \quad (A.11)$$

Это — наш главный результат. Остальные инварианты Ферми могут быть выражены через инварианты GNO аналогичным образом.

Равенство (A.11) можно разрешить относительно G_4 :

$$\begin{aligned} G_4 &= \frac{\omega \bar{t}}{t} V - \frac{m^2}{t} (\bar{t} - \omega) G_1 + \frac{m}{t} (\bar{t} + \omega) G_2 - \frac{1}{t} (\bar{t} - \omega) G_3 = \\ &= \frac{\omega \bar{t}}{t} P_4 - \frac{m^2}{t} (\bar{t} - \omega) P_1 + \frac{m}{t} (\bar{t} + \omega) P_2 - \frac{1}{t} (\bar{t} - \omega) P_3. \end{aligned} \quad (A.12)$$

Поскольку $G_1 = P_1$, $G_2 = P_2$, $G_3 = P_3$ и $G_5 = P_5$, с помощью указанной выше формулы для G_4 можно без труда перейти от инвариантов GNO к инвариантам для теории возмущений. Суммируя полученные результаты, выпишем соотношения между наборами инвариантов Ферми и GNO :

$$\left. \begin{aligned} S &= G_1; \\ V &= \frac{1}{\omega \bar{t}} [m^2 (\bar{t} - \omega) G_1 - m (\bar{t} + \omega) G_2 + (\bar{t} - \omega) G_3 + t G_4], \\ T &= -4 \left[\frac{\bar{t} - \omega}{4t} \left(1 - \frac{4m^2}{\omega \bar{t}} \right) G_1 + \frac{m}{t} \left(\frac{m^2 (\omega + t)}{\omega \bar{t}} - 1 \right) G_2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2 (\bar{t} - \omega)}{\omega \bar{t}} G_3 - \frac{m^2}{\omega \bar{t}} G_4 - \frac{(\omega - \bar{t})}{4t} G_5 \right]; \\ A &= - \left[\frac{m^2 (\bar{t} - \omega)^2}{\omega \bar{t}} G_1 - m \frac{\bar{t}^2 - \omega^2}{\omega \bar{t}} G_2 + \frac{(\omega + \bar{t})^2}{\omega \bar{t}} G_3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{t} - \omega}{\omega \bar{t}} G_4 - \frac{4m^2}{t} G_5 \right]; \\ P &= G_5. \end{aligned} \right\} \quad (A.13)$$

Связь между инвариантами для теории возмущений и инвариантами Ферми дается следующими формулами:

* Напомним, что знак равенства здесь, как и во многих других местах текста, имеет место только в случае, когда операторы берутся между волновыми функциями для состояний на массовой поверхности.

$$\left. \begin{aligned}
 P_1 &= S; \\
 P_2 &= \frac{1}{m} \left[\frac{1}{4} (\bar{t} - \omega) S - m^2 V + \frac{t}{4} T + \frac{1}{4} (\bar{t} - \omega) P \right]; \\
 P_3 &= \frac{1}{4} [- (\bar{t} - \omega) V - tA + 4m^2 P]; \\
 P_4 &= V; \\
 P_5 &= P.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.14})$$

Все выписанные выше соотношения, как прямые, так и обратные, могут быть просто выражены как соотношения между матрицами.

ДОПОЛНЕНИЕ Б. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ ρ_j^\pm

В данном дополнении приводятся детали расчета величин ρ_j^\pm из равенства (8.27). Вместе с тем рассмотрена задача о вычислении интегралов в равенствах (8.28), кроме функции I^0 , которая уже была рассчитана. Расчет величин ρ_j^\pm будет сначала проведен с A^\pm и B^\pm из соотношений (8.31). Результирующие выражения будут обозначены d_j^\pm :

$$[\rho_j^\pm(\omega, t) \mp (-1)^j \rho_j^\pm(\bar{t}, t)] \equiv d_j^\pm(\omega, t), \quad (\text{B.1})$$

где верхний индекс означает, что весовые функции были вычислены с помощью величин A^\pm и B^\pm , найденных из дисперсионных соотношений (8.31) без вычитаний.

Для того чтобы получить ρ_j^\pm ($J \geq 2$) из (8.67), т. е. вклады от спиральных амплитуд с $J=2$ и более, надо вычесть из d_j^\pm члены с $J=0$ и 1. Это удобно сделать, используя равенства (8.66ж). Мы вернемся к этому вопросу в конце данного дополнения.

При вычислении различных интегралов по $d\Omega_Q$ в (8.28), с простейшим из которых (8.29) мы уже разобрались, приходится иметь дело со следующими величинами под знаком интеграла: $\gamma^n Q$ и $\gamma^p Q$. Удобно записать здесь величину Q с помощью соотношения

$$Q = \frac{QM}{M^2} M + \frac{QK}{K^2} K + \frac{Q\Delta}{\Delta^2} \Delta + \frac{QL}{L^2} L, \quad (\text{B.2})$$

где векторы M , K , Δ и L были определены в (A.4). В системе центра масс процесса $N\bar{N} \rightarrow \text{пл}$ вектор Δ имеет только четвертую компоненту, а Q — пространственный вектор, так что $Q\Delta=0$. Напомним, что в данной системе M , K и L имеют только пространственные компоненты, поэтому

$$Q = \mathbf{Q} = \frac{QM}{M^2} \mathbf{M} + \frac{QK}{K^2} \mathbf{K} + \frac{QL}{L^2} \mathbf{L}. \quad (\text{B.3})$$

Рассмотрим сначала следующую величину:

$$1^p (i\gamma^n Q) = [\bar{u}(p) v(p')] \left[\bar{v}(n') \left(i\gamma M \frac{QM}{M^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i\gamma K \frac{QK}{K^2} + i\gamma L \frac{QL}{L^2} \right) u(n) \right]. \quad (\text{Б.4})$$

Поскольку \mathbf{L} ортогонально к \mathbf{M} и \mathbf{K} (а следовательно, к \mathbf{N} и \mathbf{P}), можно выбрать систему координат таким образом, чтобы вектора \mathbf{N} и \mathbf{P} были расположены в плоскости xz . Тогда член \mathbf{QL} пропорционален $\sin\varphi$, где φ — азимутальный угол, и дает нулевой результат при интегрировании. Теперь по существу будет повторена процедура, примененная в Дополнении А, с привлечением волновых уравнений (А.6б) для преобразования различных членов. Найдем

$$\bar{v}(n') i\gamma M u(n) = \bar{v}(n') (i\gamma N + i\gamma P) u(n) = \\ = \bar{v}(n') \left(\frac{1}{2} i\gamma (n - n') + i\gamma P \right) u(n) = \bar{v}(n') (-m + i\gamma P) u(n), \quad (\text{Б.4а})$$

и аналогично

$$\bar{v}(n') i\gamma K u(n) = \bar{v}(n') (-m - i\gamma P) u(n), \quad (\text{Б.4б})$$

где использовано то обстоятельство, что начальное и конечное состояния относятся к частицам на массовой поверхности. В результате член (Б.4) приводится к виду

$$1^p (i\gamma^n Q) = 1^p 1^n \left[-m \left(\frac{QM}{M^2} + \frac{QK}{K^2} \right) \right] + \\ + 1^p i\gamma^n P \left(\frac{QM}{M^2} - \frac{QK}{K^2} \right). \quad (\text{Б.4в})$$

Легко найти

$$\int i\gamma^p Q 1^n = 1^p 1^n \left[-m \left(\frac{QM}{M^2} - \frac{QK}{K^2} \right) \right] + \\ + i\gamma^p N 1^n \left(\frac{QM}{M^2} + \frac{QK}{K^2} \right). \quad (\text{Б.4г})$$

Итак, мы рассмотрели все члены в (8.28), кроме четвертого. Четвертый член

$$\int d\Omega_Q B_p^* B_n (i\gamma^p Q) (i\gamma^n Q)$$

значительно сложнее для расчета. Сначала, как и прежде, разложим Q на составляющие

$$(i\gamma^p Q) (i\gamma^n Q) = \left[i\gamma^p M \frac{QM}{M^2} + i\gamma^p K \frac{QK}{K^2} + i\gamma^p L \frac{QL}{L^2} \right] \times \\ \times \left[i\gamma^n M \frac{QM}{M^2} + i\gamma^n K \frac{QK}{K^2} + i\gamma^n L \frac{QL}{L^2} \right]. \quad (\text{Б.5})$$

В первую очередь обратим внимание на отсутствие перекрестных членов, т. е. не дают вклада члены вида:

$$\int d\Omega_Q B_p^* B_n \frac{QM}{M^2} \frac{QK}{K^2}.$$

Чтобы увидеть это, произведем вращение системы координат для вектора Q , при котором векторы N и P меняются местами. Тогда под интегралом имеет место преобразование $M \rightarrow M$ и $K \rightarrow -K$. (Заметим, что поворот производится только для переменных под знаком интеграла.) Указанное вращение не может изменить величины интеграла, так как оно является преобразованием системы отсчета. Приведенный выше интеграл равен нулю, поскольку при рассмотренном преобразовании знак подынтегрального выражения меняется на противоположный. Члены, линейные по QL , также дают нуль при интегрировании, так как можно взять систему координат таким образом, чтобы N и P лежали в плоскости xz . Поскольку вектор L ортогонален векторам N и P (а также M и K), он направлен параллельно оси y и QL будет пропорционально $\sin\varphi$, где φ — азимутальный угол, тогда как QM или QK пропорциональны $\cos\varphi$. Интегрирование по углу даст тогда нуль.

С помощью волновых уравнений [см. выше (A.6б) из Дополнения А] $(i\gamma^p M) (i\gamma^n M)$ можно привести к виду

$$\begin{aligned} [\bar{u}(p) i\gamma^p M v(p')] [\bar{v}(n') i\gamma^n M u(n)] &= [\bar{u}(p) (i\gamma^p N + i\gamma^p P) v(p')] \times \\ &\times [\bar{v}(n') (i\gamma^n N + i\gamma^n P) u(n)] = [\bar{u}(p) (-m + i\gamma^p N) v(p')] \times \\ &\times [\bar{v}(n') (-m + i\gamma^n P) u(n)]. \end{aligned} \quad (B.6)$$

Следовательно, на массовой поверхности

$$(i\gamma^p M) (i\gamma^n M) = m^2 1^p 1^n - m (1^p i\gamma^n P + i\gamma^p N 1^n) + (i\gamma^p N) (i\gamma^n P). \quad (B.6a)$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} (i\gamma^p K) (i\gamma^n K) &= -m^2 1^p 1^n - m (i\gamma^p N 1^n + \\ &+ 1^p i\gamma^n P) - (i\gamma^p N) (i\gamma^n P). \end{aligned} \quad (B.6б)$$

Наконец, слагаемое, содержащее L , можно записать в виде

$$(i\gamma^p L) (i\gamma^n L) = (-i\gamma_5^p (\gamma^p M) (\gamma^p K) (\gamma^p \Delta)) (-i\gamma_5^n (\gamma^n M) (\gamma^n K) (\gamma^n \Delta)), \quad (B.7)$$

где было использовано равенство (A.6б). С помощью уравнений Дирака (A.6б) и коммутационных соотношений это выражение по аналогии с выкладками (A.9) — (A.9ж) можно привести к формуле, содержащей инвариант GNO [см. (A.1)]:

$$(i\gamma^p L) (i\gamma^n L) = \Delta^4 (i\gamma_5^p (\gamma^p N)) (i\gamma_5^n (\gamma^n P)) = \Delta^4 G_4. \quad (B.7a)$$

Используя (А.12), можно выразить $(i\gamma^p L)(i\gamma^n L)$ через инварианты теории возмущений. Вспомним теперь, что

$$Q^2 = \frac{(QM)^2}{M^2} + \frac{(QK)^2}{K^2} + \frac{(QL)^2}{L^2}. \quad (\text{Б.8})$$

Таким образом, все выражение $(i\gamma^p L)(i\gamma^n L)$ умножается на величину

$$\frac{(QL)^2}{L^4} = \frac{1}{L^2} \left[Q^2 - \frac{(QM)^2}{M^2} - \frac{(QK)^2}{K^2} \right], \quad (\text{Б.8a})$$

где $L^2 = M^2 K^2 \Delta^2$. Соберем теперь члены из равенств (Б.6a), (Б.6б), (Б.7a) и учтем равенства (Б.8) и (Б.8a). В результате приходим к следующей формуле:

$$\begin{aligned} \int d\Omega_Q B_p^* B_n (i\gamma^p Q)(i\gamma^n Q) &= \frac{m^2}{K^2 M^2} 1^p 1^n \int d\Omega_Q B_p^* B_n \left\{ \frac{(QM)^2}{M^2} (2K^2 - \right. \\ &- M^2) + \frac{(QK)^2}{K^2} (K^2 - 2M^2) + Q^2 (M^2 - K^2) \left. \right\} - \frac{m^2}{K^2 M^2} (1^p i\gamma^n P + \\ &+ i\gamma^p N 1^n) \int d\Omega_Q B_p^* B_n \left\{ \frac{(QM)^2}{M^2} (M^2 + 2K^2) + \frac{(QK)^2}{K^2} (K^2 + 2M^2) - \right. \\ &\left. - Q^2 (M^2 + K^2) \right\} - \gamma^p \gamma^n \int d\Omega_Q B_p^* B_n \left\{ Q^2 - \frac{(QM)^2}{M^2} - \frac{(QK)^2}{K^2} \right\}. \quad (\text{Б.9}) \end{aligned}$$

Не считая фазового множителя $\Gamma = \sqrt{t(t/4 - \mu^2)}/8$, это выражение совпадает с результатом Амати, Лидера и Витале*.

С найденными выражениями мы можем теперь произвести интегрирование по углам, которое обобщает интеграл (8.32). Сделаем это для последнего слагаемого в (Б.9) в качестве примера. Типичный интеграл имеет вид

$$\int d\Omega_Q \frac{1}{(s' - u_p)(s'' - s_n)} \left\{ Q^2 - \frac{(QM)^2}{M^2} - \frac{(QK)^2}{K^2} \right\}. \quad (\text{Б.10})$$

Член с Q^2 приводит к уже рассмотренному интегралу, так как Q^2 не зависит от углов ($Q^2 = q^2$). В остальных слагаемых удобно воспользоваться равенствами

$$\begin{aligned} (QM)^2 &= [Q(N + P)]^2 = (QN)^2 + (\zeta P)^2 + 2(QN)(QP), \\ (QK)^2 &= [Q(N - P)]^2 = (\zeta N)^2 + (QP)^2 - 2(QN)(QP). \end{aligned} \quad (\text{Б.10a})$$

Все возникающие в связи с этими членами интегралы являются простыми обобщениями интеграла, найденного ранее с помощью соотношений (8.32) — (8.35). Поэтому они не будут рассматривать-

* См. равенства (3.36) работы [4].

ся подробно. Ограничимся записью результатов, получающихся после того, как собраны все слагаемые, входящие в интересующие нас величины.

Выпишем еще раз формулы (8.34) и (8.35) для интеграла I (выражение для которого, данное в работе Амати, Лидера и Витале, ошибочно):

$$I^0(x', x'', x) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{\xi^2 - \zeta\eta}} \lg \frac{\xi + \zeta + \sqrt{\xi^2 - \zeta\eta}}{\xi + \zeta - \sqrt{\xi^2 - \zeta\eta}}, & [\xi^2 - \zeta\eta > 0]; \\ \frac{4\pi}{\xi + \zeta}, & [\xi^2 - \zeta\eta = 0_+]; \\ \frac{4\pi}{\sqrt{\zeta\eta - \xi^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\xi + \eta}{\sqrt{\zeta\eta - \xi^2}} - \\ - \operatorname{arc\,tg} \frac{\xi}{\sqrt{\zeta\eta - \xi^2}}, & [\xi^2 - \zeta\eta < 0], \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

где берется главная ветвь арктангенса $(-\pi/2, +\pi/2)$. Используются следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \eta(x', x''; x) &= (x' - x'')^2 + 4q^2x; \\ \xi(x', x''; x) &= x''(x' - x'') - 2q^2x; \\ \zeta(x', x'') &= (x'')^2 + 4q^2\chi^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.11a})$$

и

$$q^2 = t'/4 - \mu^2, \quad \chi^2 = m^2 - t'/4. \quad (\text{B.11б})$$

Заметим, что χ^2 равно $-p^2$ в наших прежних обозначениях. Поскольку p чисто мнимо в псевдофизической области, часто более удобно использовать переменную χ .

Нам также понадобятся функции R и S , даваемые выражениями

$$\left. \begin{aligned} R(x', x''; x) &= \frac{1}{2x} [I(x') + I(x'') - (x' + x'') I^0(x', x''; x)]; \\ S(x', x''; x) &= \frac{1}{2x} [I(x') - I(x'') + (x' - x'') I^0(x', x''; x)], \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.12})$$

где

$$I(x) = \frac{2\pi}{q\chi} \operatorname{arc\,tg} \frac{2q\chi}{x}. \quad (\text{B.12a})$$

Будут также использованы функции $I^0(x', x''; \bar{x})$, $R(x', x''; \bar{x})$, $S(x', x''; \bar{x})$, где

$$\bar{x} = 4m^2 - t' - x. \quad (\text{B.12б})$$

Наконец, определим функции $\theta_j(x', x''; x)$ ($j=1, 2, 4$) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
\theta_1(x', x''; x) &= \frac{1}{xx} \left\{ q^2 (x - \bar{x}) I^0(x', x''; x) + (x + \bar{x}) \times \right. \\
&\quad \times \left[\frac{\pi}{\chi^2} - \frac{1}{8\chi^2} (x' I(x') + x'' I(x'')) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{2} (2x - \bar{x}) (x' + x'') R(x', x''; x) + \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (x - 2\bar{x}) (x' - x'') S(x', x''; x) \right\}; \\
\theta_2(x', x''; x) &= \frac{1}{xx} \left\{ q^2 (x + \bar{x}) I^0(x', x''; x) + \right. \\
&\quad + (x - \bar{x}) \left[\frac{\pi}{\chi^2} - \frac{1}{8\chi^2} (x' I(x') + x'' I(x'')) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{2} (2x + \bar{x}) (x' + x'') R(x', x''; x) + \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (x + 2\bar{x}) (x' - x'') S(x', x''; x) \right\}; \\
\theta_4(x', x''; x) &= q^2 I^0(x', x''; x) - \\
&\quad - \frac{1}{2} (x' + x'') R(x', x''; x) + \\
&\quad + \frac{1}{2} (x' - x'') S(x', x''; x).
\end{aligned} \tag{Б.13}$$

С помощью этих функций получаем следующие выражения для величин d_{\pm}^{\pm} :

$$\begin{aligned}
d_1^{\pm}(w, t') &= \pm \frac{N}{\pi^2} \iint ds' ds'' \{ \sigma_A(s', t') \sigma_A(s'', t') \times \\
&\quad \times I^0(x', x''; w) - 2m \bar{\sigma}_B(s', t') \sigma_A(s'', t') [R(x', x''; w) - \\
&\quad - S(x', x''; w)] + m^2 \bar{\sigma}_B(s', t') \bar{\sigma}_B(s'', t') \theta_1(x', x''; w) \}, \\
d_2^{\pm}(w, t') &= \pm \frac{N}{\pi^2} \iint ds' ds'' \{ -\bar{\sigma}_B(s', t') \sigma_A(s'', t') \times \\
&\quad \times [R(x', x''; w) + S(x', x''; w)] + \\
&\quad + m \bar{\sigma}_B(s', t') \bar{\sigma}_B(s'', t') \theta_2(x', x''; w) \}, \\
d_3^{\pm}(w, t') &= \pm \frac{N}{\pi^2} \iint ds' ds'' \bar{\sigma}_B(s', t') \bar{\sigma}_B(s'', t') \theta_1(x', x''; w), \\
d_4^{\pm}(w, t') &= \pm \frac{N}{\pi^2} \iint ds' ds'' \bar{\sigma}_B(s', t') \bar{\sigma}_B(s'', t') \theta_4(x', x''; w).
\end{aligned} \tag{Б.14}$$

Использованы следующие определения:

$$\begin{aligned}
x' &= s' - m^2 - \mu^2 + t'/2, \\
x'' &= s'' - m^2 - \mu^2 + t'/2.
\end{aligned} \tag{Б.14a}$$

Кроме того, использована запись для весовой функции $\bar{\sigma}_B(s', t')$:

$$\bar{\sigma}_B^{\pm} = \pi g^2 \delta(s' - m^2) + \sigma_B^{\pm}(s', t'), \tag{Б.14б}$$

которая позволяет избежать выписывания отдельных выражений для вкладов нуклонного полюса.

Для того чтобы найти $\rho_j^\pm (J \geq 2)$, надо вычесть из приведенных величин d_j вклады от спиральных амплитуд с $J=0$ и $J=1$. В результате находим

$$\left. \begin{aligned} \rho_1^+ (J \geq 2) &= d_1^+ (\omega, t') - \pi N |\alpha_0^+|^2, \\ \rho_1^- (J \geq 2) &= d_1^- (\omega, t') + \frac{1}{24} \pi N \omega (t' - 4\mu_\pi^2) |\alpha_1^-|^2, \\ \rho_2^- (J \geq 2) &= d_2^- (\omega, t') - \frac{1}{12} \pi N (t' - 4\mu_\pi^2) \alpha_1^- \beta^-, \\ \rho_4^- (J \geq 2) &= d_4^- (\omega, t') + \frac{1}{12} \pi N (t' - 4\mu_\pi^2) |\beta^-|^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.15})$$

Остальные функции $\rho_j^\pm (J \geq 2)$ равны соответствующим величинам из равенств (B.14). Величины α и β даны в (8.66ж), N — в (8.67б).

ДОПОЛНЕНИЕ В. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФИРЦА

В § 8.3 в связи с нуклон-нуклонным рассеянием было обсуждено преобразование «кроссинг». Следуя Фирцу [35], покажем, как связаны операторы в прямом и перекрестном каналах. Задача сводится к нахождению коэффициентов A_{jk} в формуле преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{O}_j &\equiv [\bar{u}(n_2) \tilde{O}_j u(p_1)] [\bar{u}(p_2) \tilde{O}_j u(n_1)] = \\ &= \sum A_{jk} [\bar{u}(n_2) O_k^{(n)} u(n_1)] [\bar{u}(p_2) O_k^{(p)} u(p_1)] = \sum A_{jk} O_k. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Она нашла свое отражение в формулах (8.16) — (8.16б). В более явной форме величину $[\bar{u}(n_2) \tilde{O}_j u(p_1)]$ можно записать как

$$\sum_{\alpha, \beta} \bar{u}_\alpha(n_2) (\tilde{O}_j)_{\alpha\beta} u_\beta(p_1),$$

т. е. квадратные скобки означают суммирование по спинорным индексам.

Вычисление коэффициентов A_{jk} значительно облегчается при использовании следующего тождества алгебры матриц γ :

$$\sum_A \gamma_{\alpha\beta}^A \gamma_{\delta\lambda}^A = 4\delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\delta}, \quad (\text{B.2})$$

где суммирование выполняется по всем 16 независимым элементам алгебры γ -матриц

$$(S, V, T, A, P), \quad (\text{B.3})$$

имеющим следующее явное представление:

$$(1, \gamma^\mu, \gamma^{[\mu\nu]}, \gamma^{[\mu\nu\lambda]}, \gamma^5) \dots \quad (\text{B.3a})$$

Символ $\gamma^{[\mu\nu]}$ соответствует шести антисимметричным величинам

$$T = \gamma^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2i} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu), \quad (\text{B.4})$$

а $\gamma^{[\mu\nu\lambda]}$ — четырем величинам, антисимметричным по всем индексам. Их можно записать в форме

$$A_\delta = \gamma^{[\mu\nu\lambda]} = \gamma^5 \gamma^\delta, \quad (\text{B.5})$$

где $\mu \neq \nu \neq \lambda \neq \delta$. Таким образом, $\gamma^{[\mu\nu\lambda]}$ дает компоненты аксиального вектора.

Доказательство формулы (B.2) было дано Паули [97]. Поскольку это тождество является центральным в наших рассуждениях, повторим здесь это доказательство.

Матрицы γ^A можно рассматривать как четырехмерные матрицы. Возьмем матрицу $M_{\delta\lambda}$, все элементы которой равны нулю, за исключением элемента с индексами (δ, λ) , т. е.

$$[M_{\delta\lambda}]_{ij} = \delta_{\delta i} \delta_{\lambda j}. \quad (\text{B.6})$$

Так как матрицы γ^A образуют полный набор матриц с размерностью 4×4 , по ним может быть разложена любая матрица Q :

$$Q = \sum_B C^{QB} \gamma^B, \quad (\text{B.7})$$

где C^{QB} — числовые коэффициенты. Можно показать, что рассматриваемые матрицы имеют следующее свойство:

$$\text{Sp}[\gamma^A \gamma^B] = 4\delta^{AB}. \quad (\text{B.8})$$

Таким образом, значения C^{QA} всегда можно найти с помощью соотношения

$$4C^{QA} = \text{Sp}[Q\gamma^A]. \quad (\text{B.8a})$$

Запишем теперь разложение для $M_{\lambda\delta}$:

$$M_{\lambda\delta} = \sum_A C^{\lambda\delta, A} \gamma^A \quad (\text{B.9})$$

или то же самое для матричных элементов

$$[M_{\lambda\delta}]_{\alpha\beta} = \sum_A C^{\lambda\delta, A} \gamma_{\alpha\beta}^A, \quad (\text{B.9a})$$

так как $C^{\lambda\delta, A}$ — просто число. Далее

$$4C^{\lambda\delta, A} = \text{Sp}[M_{\lambda\delta}\gamma^A] = \sum_{i,j} (M_{\lambda\delta})_{ij} \gamma_{ji}^A = \sum_{i,j} \delta_{\lambda i} \delta_{\delta j} \gamma_{ji}^A = \gamma_{\delta\lambda}^A, \quad (\text{B.9b})$$

где мы использовали явные выражения для матричных элементов $M_{\lambda\delta}$ (B.6). Формула (B.9a) эквивалентна теперь равенству

$$\delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\delta} = \frac{1}{4} \sum_A \gamma_{\delta\lambda}^A \gamma_{\alpha\beta}^A, \quad (\text{B.10})$$

которое совпадает с тождеством (B.2), которое мы желали доказать.

Из этого тождества следует, что

$$\sum_{A=1}^{16} \sum_{k, \lambda=1}^4 \gamma_{\rho\sigma}^A (\gamma_{\sigma k}^B \gamma_{k\lambda}^A \gamma_{\lambda\rho}^B) = 4\gamma_{\rho\sigma}^B \gamma_{\rho\rho}^B. \quad (\text{B.11})$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \sum_A \sum_{\rho, \sigma} u_\rho(n_2) \gamma_{\rho\sigma}^A u_\sigma(p_1) \sum_{\sigma, \bar{\rho}} \bar{u}_{\bar{\rho}}(p_2) (\gamma_{\bar{\sigma}k}^B \gamma_{k\bar{\rho}}^A \gamma_{\bar{\rho}\sigma}^B) u_{\bar{\rho}}(n_1) = \\ & = 4 \sum_{\rho, \bar{\rho}} \bar{u}_{\bar{\rho}}(n_2) \gamma_{\rho\bar{\rho}}^B u_{\bar{\rho}}(n_1) \sum_{\sigma, \sigma} \bar{u}_{\bar{\sigma}}(p_2) \gamma_{\sigma\sigma}^B u_\sigma(p_1), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

т. е. мы приходим к форме (B.2), коль скоро мы сумеем просуммировать по A левую часть равенства. Это легко сделать с помощью коммутационных соотношений для матриц γ . Беря в качестве операторов O_j инварианты Ферми S, V, T и P , найдем

$$\left. \begin{aligned} 4\tilde{S} &= S + V + T + A + P; \\ 4\tilde{V} &= 4S - 2V + 2A - 4P; \\ 4\tilde{T} &= 6S - 2T + 6P; \\ 4\tilde{A} &= 4S + 2V - 2A - 4P; \\ 4\tilde{P} &= S - V + T - A + P. \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.13})$$

С помощью данных соотношений нетрудно построить операторы C_j из (8.166), учитывая, что кроссинг-преобразование равнозначно преобразованию Фирца. Находим следующие соотношения

$$\left. \begin{aligned} 4C_1 &= (S - V - T + A + P); \\ 2C_2 &= (2S + V + A - 2P); \\ 2C_3 &= (2S - V - A - 2P); \\ 2C_4 &= (3S + T + 3P); \\ 4C_5 &= (S + V - T - A + P). \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.14})$$

ПОСТРОЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА

§ 9.1. ВВЕДЕНИЕ

Фазовые сдвиги нуклон-нуклонного рассеяния для более высоких парциальных волн можно было бы получить непосредственно из матрицы рассеяния $M(\omega, t)$, включающей члены двухпионного обмена, как обсуждалось в § 8.1. Для более низких парциальных волн, например, для S - и P -волн нуклон-нуклонного рассеяния при энергии 300 МэВ эта процедура не работает. В ней учитываются лишь единичные взаимодействия ω - и ρ -мезонов с нуклонами, в то время как из-за больших констант связи надо учитывать цепочку взаимодействий. В принципе можно было бы вычислять $M(\omega, t)$ в более высоком порядке по указанным взаимодействиям включив многие обмены векторными мезонами и т. п. Однако на практике такая громоздкая процедура нереализуема.

То, что фактически делается, состоит в нахождении потенциала, который можно взять в качестве борновского приближения соответствующего порядка, чтобы восстановить $M(\omega, t)$ путем расчетов, описанных в предыдущих разделах. Такой потенциал предназначен для использования в уравнениях Бланкенбеклера — Шугара, которые обсуждались в гл. 6. Поскольку в промежуточных состояниях, которые возникли бы при записи ряда теории возмущений, соответствующего этим уравнениям, нуклоны находятся вне массовой поверхности, эта процедура состоит в экстраполяции во немассовую область взаимодействия, полученного для нуклонов на массовой поверхности. Действительно, дисперсионный подход, который был применен для вывода члена двухпионного обмена в последней главе, может быть использован, когда внешние частицы (нуклоны) взяты на массовой поверхности.

Поскольку мы не можем оправдать нашей процедуры каким-либо строгим путем, предложим два аргумента в пользу введения потенциала и использования его в той манере, в какой это будет сделано.

1. Мы полагаем, что это самая простая процедура для экстраполяции во немассовую область.

2. Если бы было можно выполнить нашу процедуру (итерационную процедуру, описанную в гл. 6) во всех порядках, то конечный результат должен был бы совпадать с результатом суммирования всех графиков Фейнмана. Конечно, мы не сможем рассмотреть даже членов выше четвертого порядка. Поэтому последний

аргумент не слишком убедителен. Мы просто попытаемся найти разумные соображения в пользу того, что будет сделано, так как в настоящее время, очевидно, нельзя дать сколько-нибудь глубокого обоснования.

§ 9.2. ИТЕРИРОВАНИЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ОДНОПИОННОГО ОБМЕНА

Выведенный выше член амплитуды, отвечающий двухпионному обмену, надо разделить на два различных слагаемых. Одно из них возникает при итерировании уравнений Бланкенбеклера—Шугара с потенциалом однопионного обмена. Другое слагаемое мы будем называть потенциалом четвертого порядка. В данном разделе мы обсудим итерации для потенциала однопионного обмена*, который мы обозначим $V^{(2)}$. Имеем

$$V^{(2)}(\mathbf{p}', \mathbf{p} | W) = \frac{g^2}{\mu^2 + (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2} (\gamma_5^p \gamma_5^n) (\boldsymbol{\tau}^p \boldsymbol{\tau}^n). \quad (9.1)$$

Видно, что $V^{(2)}$ фактически не зависит от W . Взятый между нуклонными состояниями (с положительной энергией), он дает обычный потенциал однопионного обмена из (1.11) с перенормированной константой связи $g^2 [f^2$ в (1.11) равно $(g_{\mu\pi} / 2m)^2$].

Амплитуда, возникающая в результате итерирования, будет обозначаться как $\mathcal{F}_{OPE2}(\mathbf{p}', \mathbf{p} | W)$. В символической форме запишем

$$\mathcal{F}_{OPE2} = V^{(2)} \mathcal{G} V^{(2)}. \quad (9.2)$$

Следует все время помнить, что вся амплитуда и потенциалы, обсуждаемые в данном параграфе, являются операторами в пространстве, образованном произведением четырехкомпонентных дираковских спиноров для состояний с положительной энергией. Связь с двухкомпонентным представлением известна. Она показывает, что приведение (9.1) к взаимодействию (1.11) подразумевает весьма специфическую экстраполяцию однопионного обмена во внемассовую область, когда этот потенциал используется в уравнении Липпмана—Швингера.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{OPE2} &= \frac{-g^4}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{E_k} \frac{m^2 (\gamma_5 \Lambda_+ (\mathbf{k}) \gamma_5)^p (\gamma_5 \Lambda_+ (-\mathbf{k}) \gamma_5)^n}{(\mu^2 + (\mathbf{p}' - \mathbf{k})^2) (E_k^2 - W^2 - i\epsilon) (\mu^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{p})^2)} \times \\ &\times (\boldsymbol{\tau}^p \boldsymbol{\tau}^n)^2 = \frac{-g^4}{4(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{E_k} \frac{[\gamma_4 E - i\boldsymbol{\gamma} \mathbf{k} - m]^p [\gamma_4 E + i\boldsymbol{\gamma} \mathbf{k} - m]^n}{(\mu^2 + (\mathbf{p}' - \mathbf{k})^2) (E_k^2 - W^2 - i\epsilon) (\mu^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{p})^2)} \times \\ &\times (\boldsymbol{\tau}^p \boldsymbol{\tau}^n)^2. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Здесь W — энергия в системе центра масс (в другом нашем обозначении $4W^2 = w$).

* Впервые удовлетворительным образом это было сделано в работе Партови и Ломона [96].

Это уравнение в принципе позволяет найти \mathcal{T}_{OPE2} во внемасовой области, т. е. для произвольных значений p, p' и W . Здесь это делать необязательно, так как при расчете члена для двухпионного обмена с помощью дисперсионного метода мы уже ограничились энергетической поверхностью, т. е. $p^2 = (p')^2 = W^2 - m^2$.

Зависимость \mathcal{T}_{OPE2} от W , следующая из равенства (9.3), является весьма быстрой. Мы покажем, однако, что величина *

$$-M(\omega, t) - \mathcal{T}_{OPE2} \equiv V^{(4)}, \quad (9.4)$$

которую мы определим как потенциал четвертого порядка, медленно изменяется с энергией W . Для этого удобно переписать \mathcal{T}_{OPE2} в спектральном представлении. В этом случае дело сводится к рассмотрению разности весовых функций для $M(\omega, t)$ и \mathcal{T}_{OPE2} . Мы покажем это на примере бесспиновых нуклонов, отнеся исследование реалистического случая в Дополнение.

Интегральное уравнение Бланкенбеклера — Шугара имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(p', p | W) = & V(p', p | W) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{4E_k} V(p', k | W) \times \\ & \times \frac{1}{W^2 - E^2 + i\epsilon} \mathcal{T}(k, p | W). \end{aligned} \quad (9.4a)$$

Определим потенциал однопионного обмена для бесспиновых частиц соотношением

$$V(p', k | W) = \frac{1}{(p' - k)^2 + \mu^2} \quad (9.4b)$$

и рассмотрим борновскую амплитуду во втором порядке, записанную в символическом операторном виде

$$\mathcal{T}_{OPE2} = V\mathcal{G}V. \quad (9.4b)$$

Вскоре станет очевидным удобство представления \mathcal{T}_{OPE2} в форме

$$\mathcal{T}_{OPE2}(p^2, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \frac{\eta(p^2, t')}{t' - t}, \quad (9.5)$$

поскольку амплитуда $M(\omega, t, \bar{t})$ записана именно в такой форме, и мы покажем теперь, как это можно сделать.

Начнем с выражения

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{OPE2}(p^2, t) = & \frac{g^4}{(2\pi)^3} \int \left\{ \frac{d^3k}{4\sqrt{k^2 + m^2} (p^2 - k^2 + i\epsilon)} \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{((k - p)^2 + \mu_\pi^2) ((k - p')^2 + \mu_\pi^2)} \right\}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

* Более логично было бы иметь $+M(\omega, t)$, чем $-M(\omega, t)$, возникающую здесь амплитуду, так чтобы потенциал четвертого порядка был образован разностью величин M и \mathcal{T} . Тот факт, что здесь взято $-M(\omega, t)$, связан с соглашением о знаке, принятым в литературе.

где $p' = p$, причём здесь p и p' — 3-импульсы, поскольку как начальные, так и конечные частицы находятся на массовой поверхности. Напомним, что

$$\omega = 4(m^2 + p^2) = 4W^2. \quad (9.6a)$$

Выписанная выше амплитуда \mathcal{F}_{OPE2} отвечает графику, изображенному на рис. 38. Определим следующие вектора:

$$\mathbf{\Pi} = (\mathbf{p}' + \mathbf{p})/2; \quad \mathbf{\Delta} = (\mathbf{p}' - \mathbf{p})/2, \quad (9.6б)$$

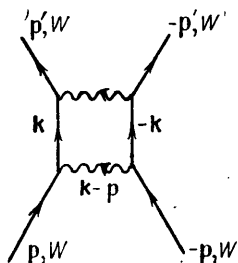


Рис. 38. График, изображающий амплитуду приближения однопионного обмена после взятия одной итерации

так что

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{\Delta} = 0, \quad \mathbf{\Pi}^2 + \mathbf{\Delta}^2 = p^2. \quad (9.6в)$$

Тогда найдем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{OPE2} &= C \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(p^2 - k^2 + i\epsilon) \sqrt{k^2 + m^2}} \times \\ &\times \int \frac{d\Omega_k}{((k - \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Delta})^2 + \mu_\pi^2) ((k - \mathbf{\Pi} - \mathbf{\Delta})^2 + \mu_\pi^2)} = \\ &= C \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(p^2 - k^2 + i\epsilon) \sqrt{k^2 + m^2}} \times \\ &\times \int \frac{d\Omega_k}{(k^2 + \mathbf{\Pi}^2 + \mathbf{\Delta}^2 + \mu_\pi^2 - 2\mathbf{k}(\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Delta})) (k^2 + \mathbf{\Pi}^2 + \mathbf{\Delta}^2 + \mu_\pi^2 - 2\mathbf{k}(\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Delta}))} = \\ &= C \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(p^2 - k^2 + i\epsilon) \sqrt{k^2 + m^2}} \int d\Omega_k \times \\ &\times \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(k^2 + p^2 + \mu_\pi^2 - 2k(\mathbf{\Pi} - x\mathbf{\Delta}))^2}. \quad (9.7) \end{aligned}$$

Коэффициент C перед интегралом равен

$$C = g^4 / (32\pi^3). \quad (9.7a)$$

Комбинация знаменателей подынтегрального выражения преобразована с помощью фейнмановской техники интегрирования.

Использовано также равенство $\Pi^2 + \Delta^2 = p^2$. Если определить теперь вектор

$$\mathbf{J} = 2(\Pi - x\Delta) \quad (9.7б)$$

и заметить, что

$$\mathbf{J}^2 = 4(\Pi^2 + x^2\Delta^2) = 4p^2 - 4(1 - x^2)\Delta^2 = 4p^2 + (1 + x^2)t, \quad (9.7в)$$

то мы приходим к выражению

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{OPE2} &= \pi C \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(p^2 - k^2 + i\epsilon) \sqrt{k^2 + m^2}} \times \\ &\times 2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{((k^2 + p^2 + \mu_\pi^2)^2 - k^2 J^2)} = \\ &= 4\pi C \int_0^\infty \frac{dk}{(p^2 - k^2 + i\epsilon) \sqrt{k^2 + m^2}} \int_0^1 \frac{dx}{\beta^2 - 4p^2 - (1-x)t}, \end{aligned} \quad (9.7г)$$

где

$$\beta \equiv (k^2 + p^2 + \mu_\pi^2)/k. \quad (9.7д)$$

Сделаем теперь замену переменной, введя t' с помощью равенства

$$t' = (\beta^2 - 4p^2)/(1 - x^2). \quad (9.7е)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{OPE2} &= 4\pi C \int_0^\infty \frac{dk}{(p^2 - k^2 + i\epsilon) \sqrt{k^2 + m^2}} \times \\ &\times \int_{\beta^2 - 4p^2}^\infty \frac{dt'}{\sqrt{t'}(t' + 4p^2 - \beta^2)^{1/2}(t' - t)}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Нижний предел интегрирования по t' равен

$$t' = \beta^2 - 4p^2 = (k^2 + p^2 + \mu_\pi^2)^2/k^2 - 4p^2. \quad (9.8а)$$

В плоскости с осями k^2 и t' область интегрирования расположена выше кривой, отвечающей равенству (9.8а). Величина k^2 , при которой эта кривая имеет минимум (по t'), определяется условием

$$dt'/dk^2 = 0. \quad (9.8б)$$

Решение этого уравнения дает

$$k^2 = p^2 + \mu_\pi^2. \quad (9.8в)$$

Таким образом, получаем

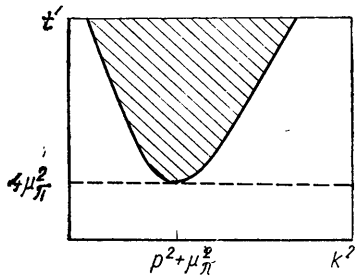
$$t'_{\min} = \frac{4(p^2 + \mu_\pi^2)^2}{p^2 + \mu_\pi^2} - 4p^2 = 4\mu_\pi^2. \quad (9.8r)$$

Следовательно, область интегрирования выглядит, как показано на рис. 39. Пределы изменения k даются решениями уравнения

$$t' = (k^2 + p^2 + \mu_\pi^2)/k^2 - 4p^2 \quad (9.9)$$

или

$$(t' + 4p^2)k^2 - (k^2 + p^2 + \mu_\pi^2)^2 = 0. \quad (9.9a)$$



Обозначим корни этого уравнения k_+ и k_- . Укажем, что эти корни совпадают с нулями величины $(t' + 4p^2 - \beta^2)^{1/2}$, возникающей в знаменателе равенства (9.8). Можно теперь изменить порядок интегрирования, что дает

Рис. 39. Область интегрирования в k^2, t' -плоскости

$$\mathcal{I}_{OPE2} = 2\pi C \int_{4\mu_\pi^2}^{\infty} \frac{dt'}{\sqrt{t'(t'-t)}} \times$$

$$\times \int_{k_-}^{k_+} \frac{k dk}{(p^2 - k^2 + i\epsilon) \sqrt{k^2 + m^2} (k^2 - k_-^2)^{1/2} (k_+^2 - k^2)^{1/2}}. \quad (9.10)$$

Мы видим, что величина $\eta(p^2, t')$, определенная равенством (9.5), выражается формулой

$$\eta(p^2, t') = \frac{g^4}{32\pi \sqrt{t'}} \times \int_{k_-}^{k_+} \frac{d(k^2)}{(p^2 - k^2 + i\epsilon) \sqrt{k^2 + m^2} (k^2 - k_-^2)^{1/2} (k_+^2 - k^2)^{1/2}}. \quad (9.11)$$

Из равенств (9.5) и (9.11) может показаться, что \mathcal{I}_{OPE2} подчиняется представлению Мандельштама. На самом деле это не так, поскольку k_-^2 и k_+^2 зависят от p^2 , тогда как в представлении Мандельштама спектральные области не имеют такой зависимости. Тем не менее сделанные преобразования окажутся очень полезными. Из того факта, что

$$\frac{1}{p^2 - k^2 + i\epsilon} = P \left(\frac{1}{p^2 - k^2} \right) - i\pi\delta(k^2 - p^2), \quad (9.11a)$$

где символ P обозначает интеграл в смысле главного значения, следует, что $\eta(p^2, t')$ имеет мнимую часть* только в области $k_-^2 < p^2 < k_+^2$. Из уравнения (9.9а), определяющего корни, легко найти, что $p^2 > k_-^2$, если справедливо неравенство

$$t' \geq 4\mu_\pi^2 + \mu_\pi^4/p^2, \quad (9.12)$$

и, более того, что всегда выполнено условие $p^2 < k_+^2$. Условие (9.12) — это то же самое условие, что и рассмотренное вначале в случае мандельштамовской двойной спектральной плотности с изменением t' , служащей для нахождения теоретико-полевой амплитуды $M(\omega, t)$. Это должно иметь место в случае, когда мнимые части η в \mathcal{F}_{OPE2} компенсируют соответствующие мнимые части ρ в $M(\omega, t)$, что приводит к действительности потенциала $V^{(4)}$.

С помощью рассмотренных преобразований мы выяснили важные свойства функции $\eta(p^2, t')$, определяемой интегралом (9.11), и построили \mathcal{F}_{OPE2} с релятивистским фазовым множителем $(k^2 + m^2)^{-1/2}$ таким образом, чтобы мнимая часть $\eta(p^2, t')$ была равна мнимой части ρ для теоретико-полевой амплитуды $M(\omega, t)$. Дело теперь сводится к технической задаче вычисления интеграла (9.11). Отмеченное выше равенство мнимых частей дает нам хороший контроль правильности расчетов в практических случаях. После введения спина оно должно выполняться для всех пяти амплитуд.

Перейдем теперь к подробному вычислению интеграла (9.11). Несмотря на простоту каждого отдельного шага вычислений, при расчете таких спектральных функций легко допустить ошибки**. Нетрудно выписать различные функции, возникающие в \mathcal{F}_{OPE2} в результате введения спина, так как все они аналогичны. Удобно использовать следующую параметризацию Партови и Ломона [96]:

$$\frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2 + k^2 + m^2}. \quad (9.13)$$

Тогда можно часть знаменателя переписать в виде

$$\frac{1}{(p^2 - k^2 + i\varepsilon)(z^2 + m^2 + k^2)} = \frac{1}{z^2 + m^2 + p^2 + i\varepsilon} \left[\frac{1}{p^2 - k^2 + i\varepsilon} + \frac{1}{z^2 + m^2 + k^2} \right] \quad (9.13a)$$

* В равенстве (8.21) мы определили ρ как мнимую часть p . Таким образом, мы действительно имеем в виду здесь, что величина, соответствующая ρ , содержит вещественную часть. В приведенном выше обсуждении мы следуем терминологии Чемтоба, Дурсо и Риски [24].

** Мы уже отмечали раньше, что в работах Мандельстама, а также Амати, Лидера и Витале были допущены ошибки. Приведя все подробности расчета, мы облегчим читателю их обнаружение.

и проинтегрировать по z соответствующее первое слагаемое в (9.11). Это дает следующее выражение:

$$\begin{aligned} \eta(p^2, t') = & \frac{g^4}{32\pi \sqrt{t'}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}} \times \right. \\ & \times \int_{k_-^2}^{k_+^2} \frac{d(k^2)}{(p^2 - k^2 + i\epsilon)(k^2 - k_-^2)^{1/2}(k_+^2 - k^2)^{1/2}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2 + m^2 + p^2 + i\epsilon} \times \\ & \left. \times \int_{k_-^2}^{k_+^2} \frac{d(k^2)}{(z^2 + m^2 + k^2)(k^2 - k_-^2)^{1/2}(k_+^2 - k^2)^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (9.13б)$$

В обоих слагаемых интегралы по k^2 имеют одинаковую форму. Отличие второго от первого слагаемого состоит в замене $p^2 \rightarrow -(z^2 + m^2)$. Величина $(p^2 - k^2 + i\epsilon)$ может обращаться в нуль, поэтому первый интеграл похитрее, и мы займемся им в первую очередь. С помощью подстановки

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= \xi + (k_2^2 + k_1^2)/2; \\ p^2 &= \xi_0 + (k_2^2 + k_1^2)/2; \\ \alpha &= (k_+^2 - k_-^2)/2 \end{aligned} \right\} \quad (9.13в)$$

найдем

$$\begin{aligned} I(p^2) &= \int_{k_1^2}^{k_2^2} \frac{d(k^2)}{(p^2 - k^2 + i\epsilon)(k^2 - k_-^2)^{1/2}(k_+^2 - k^2)^{1/2}} = \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\xi}{(\xi - \xi_0 - i\epsilon) \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}. \end{aligned} \quad (9.13г)$$

Введем обозначения

$$\xi/\alpha = \cos \theta, \quad \xi_0/\alpha \equiv x_0. \quad (9.13д)$$

Тогда получаем

$$I(p^2) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta - x_0 - i\epsilon} = -\frac{1}{2\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta - x_0 - i\epsilon}. \quad (9.13е)$$

Для случая $|x_0| > 1$, соответствующего $p^2 < k_-^2$ или $p^2 > k_+^2$, подинтегральная функция не сингулярна. С помощью замены

$$v = \exp(i\theta) \quad (9.13\text{ж})$$

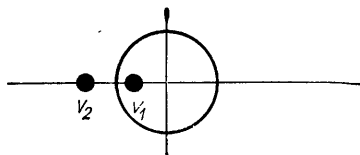
можно преобразовать этот интеграл в контурный

$$I(p^2) = -\frac{1}{i\alpha} \oint_C \frac{dv}{v^2 - 2vx_0 + 1}, \quad (9.13\text{з})$$

где в качестве контура интегрирования выступает окружность единичного радиуса. Интегрирование путем взятия вычетов дает

$$I(p^2) = -\frac{2\pi}{\alpha} \sum (\text{вычеты внутри контура } C). \quad (9.14)$$

Рис. 40. Расположение корней знаменателя подинтегрального выражения



Знаменатель (9.13з) имеет корни

$$v_{1,2} = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 1}. \quad (9.14\text{а})$$

Для $|x_0| > 1$ корни вещественны, причем один из корней лежит внутри, а другой вне круга (см. рис. 40). Следовательно, имеем

$$I(p^2) = -\frac{2\pi}{\alpha(v_1 - v_2)} = -\frac{\pi}{(\xi_0^2 - \alpha^2)^{1/2}}. \quad (9.14\text{б})$$

Переписав это выражение через исходные величины, находим

$$I(p^2) = -\frac{\pi}{\sqrt{\mu_\pi^4 - p^2(t' - 4t_\pi^2)}}, \quad p^2 < k_-^2. \quad (9.15)$$

Эта величина вещественна, если только

$$t' < 4\mu_\pi^2 + \mu_\pi^4/p^2. \quad (9.16)$$

К этому выводу мы уже пришли ранее [см. (9.11а) и (9.12)]. Второй интеграл в (9.13б) можно найти, подставив в (9.15) $p^2 \rightarrow -(z^2 + m^2)$.

По мере того, как p^2 приближается к k_-^2 , корни v_1 и v_2 сдвигаются к окружности. При дальнейшем возрастании p^2 v_2 начинает двигаться вверх по внешней стороне круга, а v_1 — вниз по его внутренней стороне. (Удерживание ε в знаменателе приводит к тому, что корень v_1 остается внутри контура.) Результат в этом случае равен

$$I(p^2) = -\frac{i\pi}{\sqrt{p^2(t' - 4\mu_\pi^2) - \mu_\pi^4}}, \quad p^2 > k_-^2.$$

Собирая вместе все слагаемые, мы получаем результат работы Чемтоба, Дурсо и Риски [24]:

$$\eta(p^2, t') = \frac{-g^4}{32 [t' (t' - 4\mu_\pi^2) (p^2 + m^2)]^{1/2}} \left[\frac{\theta(p_0^2 - p^2)}{(p_0^2 - p^2)^{1/2}} + \frac{i\theta(p^2 - p_0^2)}{(p^2 - p_0^2)^{1/2}} \right] + \frac{g^4}{32\pi \sqrt{t'}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + p^2 + m^2) [(z^2 + k_+^2 + m^2) (z^2 + k_-^2 + m^2)]^{1/2}}, \quad (9.17)$$

где $\theta(x) = 1, x > 0$ и $\theta(x) = 0, x < 0$.

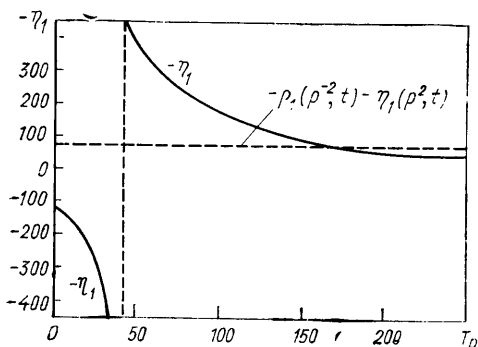


Рис. 41. Зависимости действительной части $-\eta_1(p^2, t)$ и величины $-\rho_1 - \eta_1$ при $t = 5\mu_\pi^2$ от кинетической энергии T_p в лабораторной системе ($p^2 = mT_p/2$)

Нижний индекс 1 указывает, что данные кривые относятся к весовым функциям для инварианта $l^2 l^n$. Величина η_1 имеет разрыв непрерывности при $T_p \approx 42$ МэВ

Следует отметить, что $\eta(p^2, t')$ имеет мнимую часть не только для $p^2 > p_0^2$, но также и для $p^2 < -m^2$ из-за фактора $(p^2 + m^2)^{-1/2}$. Эта последняя сингулярность не возникает в теоретико-полевой амплитуде. Она расположена весьма далеко, и связанные с ней эффекты не будут нас беспокоить. Можно полагать, что она исчезнет при взятии итераций более высокого порядка в уравнении Бланкенбеклера—Шугара (9.4). Оставшийся в (9.17) интеграл имеет также левый разрез. Его можно привести к форме, в которой он выражается через полные эллиптические функции. Все нужные интегралы даны в разд. 4 статьи Чемтоба, Дурсо и Риски [24].

Таким образом, потенциал четвертого порядка дается выражением

$$V^{(4)} = \frac{1}{\pi} \int_{\mu_\pi^2}^{\infty} dt' \frac{v(p^2, t')}{t' - t}, \quad (9.18)$$

где

$$v(p^2, t') = \rho(-4p^2 - t, t') - \rho(p^2, t') - \eta(p^2, t'). \quad (9.18a)$$

Здесь слагаемое $\rho(-4p^2-t, t')$ учитывает перекрестный пионный обмен, это обсуждалось в связи с равенством (8.37г). То, что записанное выше равенство содержит $-\rho(p^2, t')$, вызвано спецификой нашего соглашения о знаках.

Хотя величины ρ и η очень резко изменяются на границе двойной спектральной функции Мандельстама, как показано на рис. 41, их сумма как функция от p^2 является почти константой. Это означает, что потенциал $V^{(4)}$ почти не зависит от p . (Конечно, вклад от перекрестного пионного обмена, который не рассматривался на этом рисунке, не имеет сингулярности на его границе и поэтому изменяется плавно).

ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В предыдущих главах была описана разнообразная техника, оказавшаяся полезной при построении теоретико-полевых моделей нуклон-нуклонного взаимодействия. Данная глава посвящена некоторым деталям, касающимся результатов вычислений сдвигов фаз NN -рассеяния, где эта техника нашла свое применение. Хотя подобные описания фазовых сдвигов уже давно привлекают внимание, использование принятого в данной монографии подхода, относительно свободного от параметров, вполне современно. Можно надеяться, что дальнейшая работа в этом направлении позволит использовать более строгий формализм, а также приведет к улучшению качества исходных независимых эмпирических данных. Сюда относятся, например, значительные усилия, направленные в настоящее время на более точное нахождение спиральных амплитуд процесса $N\bar{N} \rightarrow p\bar{p}$, которые необходимы для адекватного описания двухпионного обмена. Вычисленные сдвиги фаз NN -рассеяния чувствительны к вариациям спиральных амплитуд в пределах имеющих неопределенностей в их оценке. Таким образом, расчеты, представленные в данной главе, надо рассматривать как ободряющие предварительные результаты, а не как окончательный ответ.

Сформулируем кратко основные положения подхода. Предполагается, что взаимодействие адекватно описывается, если учесть вклады, отвечающие разнообразным процессам однобозонного и двухпионного обменов. Построение амплитуд однобозонного обмена производится для пиона и узких, расположенных при низких энергиях резонансов в трехпионной системе (т. е. η -, ω - и ϕ -мезонов). На практике учет обмена η -мезоном с изоспином $T=0$ не играет существенной роли. Это связано с его большой массой и сравнительно малой константой связи. Последнее следует из оценки по кварковой модели, обсуждаемых в Дополнении Б. (Это — подтверждается прямыми расчетами, которые показали, что введение η -мезона приводит к изменению сдвигов фаз не более чем на 1° при энергии 350 МэВ в лабораторной системе.) Из модели кварков следует также, что ϕ -мезон составлен исключительно из странных кварков и поэтому не связан с нуклоном. Поскольку фазы NN -рассеяния не чувствительны к величине смеси ω — ϕ , мы пренебрегаем также и обменом ϕ -мезоном. Важным ингредиентом взаимодействия является ω -мезон, обмен которым приводит к от-

талкивания во всех NN -каналах. Раз волновая функция NN -системы быстро убывает на расстояниях порядка радиуса действия сил, отвечающих обмену ω -мезоном, из оценки сдвигов фаз в борновском приближении с искаженными волнами немедленно следует, что фазовые сдвиги не должны быть чувствительны к процессам более высокого порядка (с меньшим радиусом действия) при условии, что эти процессы не изменяют фундаментальной отталкивательной природы взаимодействия на малых расстояниях. Таким образом, обмен ω -мезонами служит цели оправдания пренебрежения такими процессами более высокого порядка. Спиральные амплитуды однобозонного обмена строятся, как это сделано в § 7.2 с эмпирическими массами и константами связи, согласующимися с экспериментальными величинами, приведенными в Дополнении Б. Процессы двухпионного обмена оцениваются, как в гл. 8. Требуемые спектральные функции для S - и P -волн в $\pi\pi$ -системе берутся из известного аналитического продолжения данных о πN -рассеянии и фазовых сдвигов $\pi\pi$ -рассеяния. Напомним, что обмен двумя пионами в S -волне приводит к весьма важному изоскалярному притяжению в NN -взаимодействии, тогда как обмен P -волновой парой пионов включает эффекты широкого резонанса, отвечающего ρ -мезону. Для более высоких парциальных волн системы двух пионов эмпирические спектральные функции отсутствуют и необходимо прибегать к моделям. Подобные модели обязательно учитывают неприводимые части четырехугольной диаграммы на рис. 26 и могут принимать во внимание промежуточные состояния с нуклонными изобарами, как показано на рис. 25.

Следуя доводам § 6.3, следует модифицировать результирующие амплитуды с тем, чтобы учесть обмены мягкими векторными мезонами в t - и u -каналах. Это сводится к умножению соответствующих членов в амплитуде на фактор

$$\frac{\exp\{2i[\chi(t) + \chi(u)]\}}{\exp\{2i[\chi(-\mu^2) + \chi(4m^2 - s + \mu^2)]\}} \quad (10.1)$$

Знаменатель обеспечивает неизменность обычных значений бозонных констант связи и скачков амплитуды, связанных с двухпионным обменом, при такой модификации*. Здесь μ — масса обмениваемого бозона. Для амплитуды двухпионного обмена вместо μ подставляют t' , переменную интегрирования в равенстве (8.3), и вносят указанный множитель под знак интеграла. При нахождении соответствующих результатов мы примем несколько иную процедуру, имеющую целью улучшение сходимости интеграла в (6.37а) путем введения экспоненциального затухания по k^2 . Это позволяет вычислить $\chi(t)$ в замкнутой форме:

$$i\chi(t) = \frac{-2\gamma(2m^2 - t)}{-t(4m^2 - t)} \ln\left[\left(\frac{-t}{4m^2}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{t}{4m^2}\right)^{1/2}\right]. \quad (10.1a)$$

* Второе слагаемое под знаком экспоненты в знаменателе можно рассматривать в грубом приближении как модификацию жесткой амплитуды за счет неприводимых процессов с участием мягких векторных мезонов в s -канале.

Параметр γ представляет собой некоторую комбинацию константы связи для ω -мезона и массового параметра, определяющего область обрезания интеграла. На основе подгонок для электромагнитных форм-факторов нуклонов можно выбрать значение $\gamma = 1,25$. Использование (10.1а) упрощает численные расчеты, оставляя без изменений фазы NN -рассеяния, найденные с помощью равенства (6.39).

Соответствующие спиральные немассовые амплитуды можно использовать для вывода более знакомых парциальных матричных элементов (следуя методу, изложенному в § 7.1), с помощью которых строится ядро уравнения Бланкенбеклера—Шугара из § 6.1. Модификация (6.4а) позволяет преобразовать уравнение Бланкенбеклера—Шугара к виду, идентичному уравнению Липпмана—Швингера. При этом имеет место обычное нерелятивистское соотношение между элементами T -матрицы, взятой на массовой поверхности, и сдвигами фаз, т. е. (5.17). Полученное таким путем интегральное уравнение можно привести к системе линейных алгебраических уравнений, что рассматривалось в § 5.6. Решение системы позволяет найти искомые сдвиги фаз NN -рассеяния. Волновая функция дейтрона также может быть найдена из вычета в полюсе, отвечающем связанному состоянию, T -матрицы, являющейся решением квазиуравнения Липпмана—Швингера. Процедура аналогична рассмотренной в § 5.6, и следует использовать условие нормировки (5.83). Последнее, хотя это и не очевидно, эквивалентно обобщенному условию нормировки, выраженному в терминах функции Грина для свободных частиц:

$$\left\langle \psi_B \left| \frac{\partial}{\partial E} [G_0^{-1}(E) - V] \right| \psi_B \right\rangle \Big|_{E=E_B} = 1 \quad (10.2)$$

(в применении к уравнению Бланкенбеклера—Шугара) *, при условии, что мы пренебрегаем явной зависимостью взаимодействия V от энергии. Этот подход согласуется с нерелятивистским расчетом дейтронных наблюдаемых (например, электромагнитных моментов и форм-факторов) с использованием одночастичных операторов, рассмотренных ниже.

Мы утверждаем, что данная схема обеспечивает надежную оценку доминирующих процессов, дающих вклад в NN -взаимодействие при низких энергиях. Она не содержит подгоночных параметров. В принципе все параметры могут быть найдены из эксперимента. Их вариация допускается лишь в пределах, связанных с неопределенностью данных опытов. Таким образом, любые оста-

* Это обобщенное условие нормировки можно вывести с помощью аргументации, аналогичной рассмотренной в изыщной работе Катковского и Леона [31]. В специальном случае, когда энергетическая зависимость V обусловлена только содержащими энергию знаменателями, возникающими при виртуальных возбуждениях неупругих каналов, нетрудно увидеть, что слагаемое $\langle \psi_B | \partial V / \partial E | \psi_B \rangle$ представляет собой вероятность того, что дейтрон не является просто системой из одного протона и одного нейтрона.

ющиеся расхождения между рассчитанными и экспериментальными сдвигами фаз следует приписать несовершенству модели. Вообще говоря, мы будем связывать такие расхождения с пренебрежением физическими процессами, имеющими отношение к рассматриваемой проблеме.

В расчетах Джексона, Риски и Вер Веста [62] было взято значение $g_{\pi}^2/(4\pi) = 14,48$, а константа связи $g_{\omega}^2/(4\pi)$ подгонялась независимо для каждого выбора спектральных функций так, чтобы обеспечить разумное описание сдвигов фаз для S -волны в

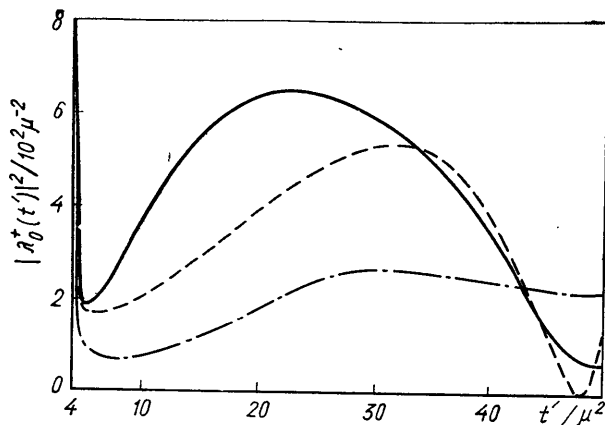


Рис. 42. Величина f_+^0 для ряда моделей:

— — — — с учетом только нуклонных полюсных членов; — — — — модели Нильсена—Оадеса; — — — — для взятой *ad hoc* амплитуды, обсуждаемой в тексте

NN -рассеянии. Подгонка производилась в грубо установленной области $g_{\omega}^2/(4\pi) = 6,4 \pm 2,6$, которая обсуждается в Дополнении Б. Выбор спектральных функций для двухпионного обмена представляет собой более сложную проблему. Будет рассмотрено несколько возможностей. В качестве простого примера рассмотрим двухпионный обмен для всех парциальных волн системы $\pi\pi$, который отвечает четырехугольной диаграмме рис. 25. При этом член, возникающий при итерировании уравнения с потенциалом однопионного обмена, исключался, чтобы избежать двойного счета. Результирующая спиральная амплитуда f_+^0 приведена на рис. 42. В этой модели, в которой полностью пренебрегают $\pi\pi$ -взаимодействием, не может возникнуть резонанс в P -волне, отвечающий ρ -мезону. В связи с этим амплитуды f_{\pm}^1 рассматриваются отдельно как сумма нуклонного полюсного слагаемого и брейт-вигнеровской амплитуды, описывающей ρ -мезонный резонанс с шириной 125 МэВ*. Наряду с учетом обмена некоррелированной парой пионов в P -волне и обмена ρ -мезоном с распределенной

* См., например, работу [26].

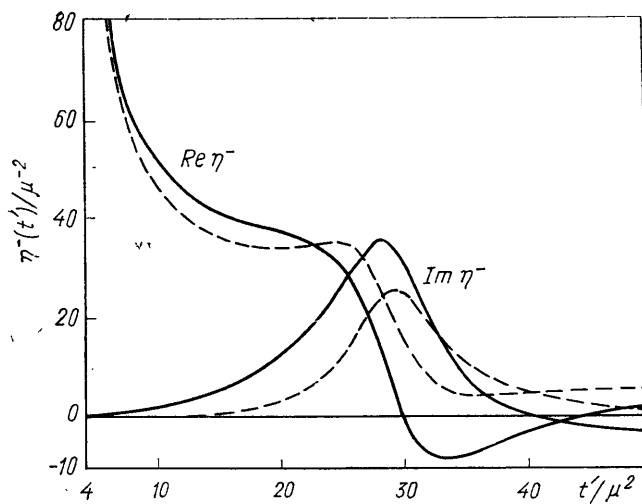
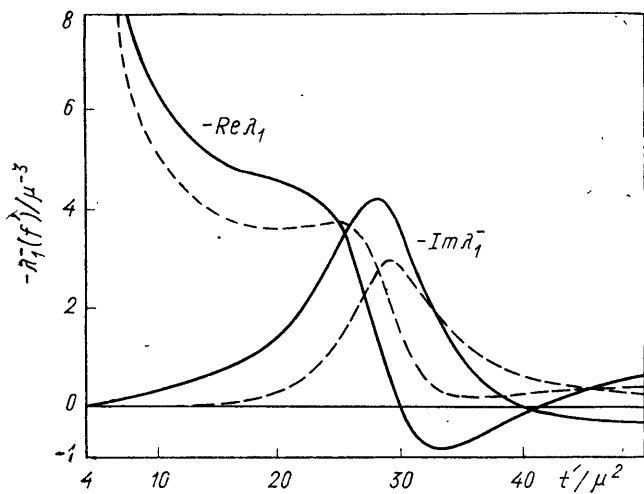


Рис. 43. P-волновые амплитуды λ и η для процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\lambda$:

— модель Нильсена—Оадеса и --- модели с учетом нуклонных полюсных членов, наряду с брейт-вигнеровским слагаемым, описывающим ρ -мезон с константой связи $g_\rho^2/(4\pi) = 0,59$

массой, такая модель включает эффекты распада на лету ρ -мезона на два пиона, поглощаемых вторым нуклоном. Расчет этого процесса требует знания константы связи $g_{\rho\pi\pi}$. Исходя из постулата об универсальности, эта константа полагается равной $2 g_{\rho NN}$. В данной картине ширина ρ -мезона (которую мы определяем эмпирически) также должна быть связана с $g_{\rho\pi\pi}$ так, чтобы в пределе нулевой ширины резонанса вклад в NN -взаимодействие распада на лету исчезал. Спектральные функции λ_1^- и η_1^- приведены на рис. 43 для $g_\rho^2/(4\pi) = 0,594$ и $\kappa_V = 3,71$. Из соображений простоты и более тонких аргументов, указанных ниже, не были включены в рассмотрение процессы с нуклонными изобарами в промежуточном состоянии. Результирующие сдвиги фаз NN -рассеяния, рассчитанные с $g_\omega^2/(4\pi) = 6,24$ и $\kappa_S = 0,12$, показаны на рис. 44. Имея в виду чрезвычайную простоту модели и явное отсутствие подгоночных параметров, следует считать согласие теории с экспериментом удивительно хорошим. Как обсуждалось в § 8.7, использование только нуклонного полюсного члена ведет к сильному расхождению с данными о πN -рассеянии при низкой энергии, давая неверный знак длины πN -рассеяния в S -волне при $T = 1/2$ (см. рис. 36). Хорошее согласие, демонстрируемое на рис. 44, следует рассматривать как отчасти случайное. Нелегко добиться сравнимого по качеству согласия при использовании более реалистичных спектральных функций, что подчеркивает присущее природе своеобразие!

Для более тщательного рассмотрения спиральных амплитуд обратимся к величинам $f_+^{J=0}$ и $f_{\pm}^{J=1}$, экспериментально определенным Нильсеном и Оадесом [93]. Эти спиральные амплитуды показаны на рис. 42 и 43 в терминах величин $|\lambda_0^+|$, λ_1^- и η^- , даваемых равенствами (8.65). В амплитудах λ_1^- и η четко проявляется ρ -мезонный резонанс при $t' \sim 30 \mu_\pi^2$. Эти амплитуды для P -волны можно достаточно хорошо воспроизвести, учтя, как это было указано выше, вклады нуклонного полюса и ρ -мезона с конечной шириной. В этом случае мы находим $g_\rho^2/(4\pi) = 0,68$ и $\kappa_V = 4,33$ в разумном согласии с величинами, полученными из электромагнитных форм-факторов нуклонов. Для более высоких парциальных волн спиральные амплитуды берутся только из члена, отвечающего нуклонному полюсу. К сожалению, не удастся добиться согласия для сдвигов фаз в состояниях 1S_0 и 3S_1 одновременно, используя одно значение g_ω^2 и спиральные амплитуды Нильсена—Оадеса. Поэтому на рис. 44 показаны сдвиги фаз, полученные с значением $g_\omega^2/(4\pi) = 13,0$, которое обеспечивает грубое согласие для фазы 1S_0 -состояния. Трудно надежно оценить неопределенности в величинах f_+^0 и $f_{+,-}^1$. Они складываются из ошибок в экспериментальном определении сдвигов фаз πN -рассеяния и чувствительности экстраполированных амплитуд πN -рассеяния к неточностям физических амплитуд πN -рассеяния. Количественная оценка этих ошибок — нелегкая задача. Еще бо-

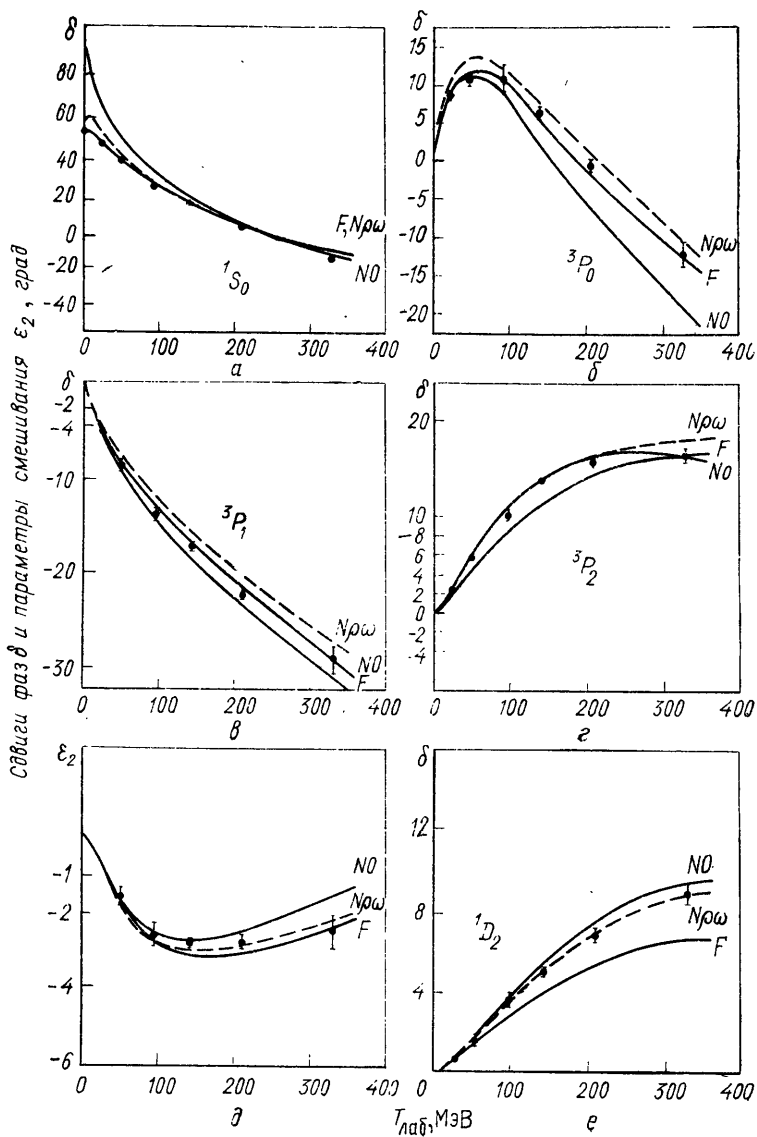


Рис. 44, а—е

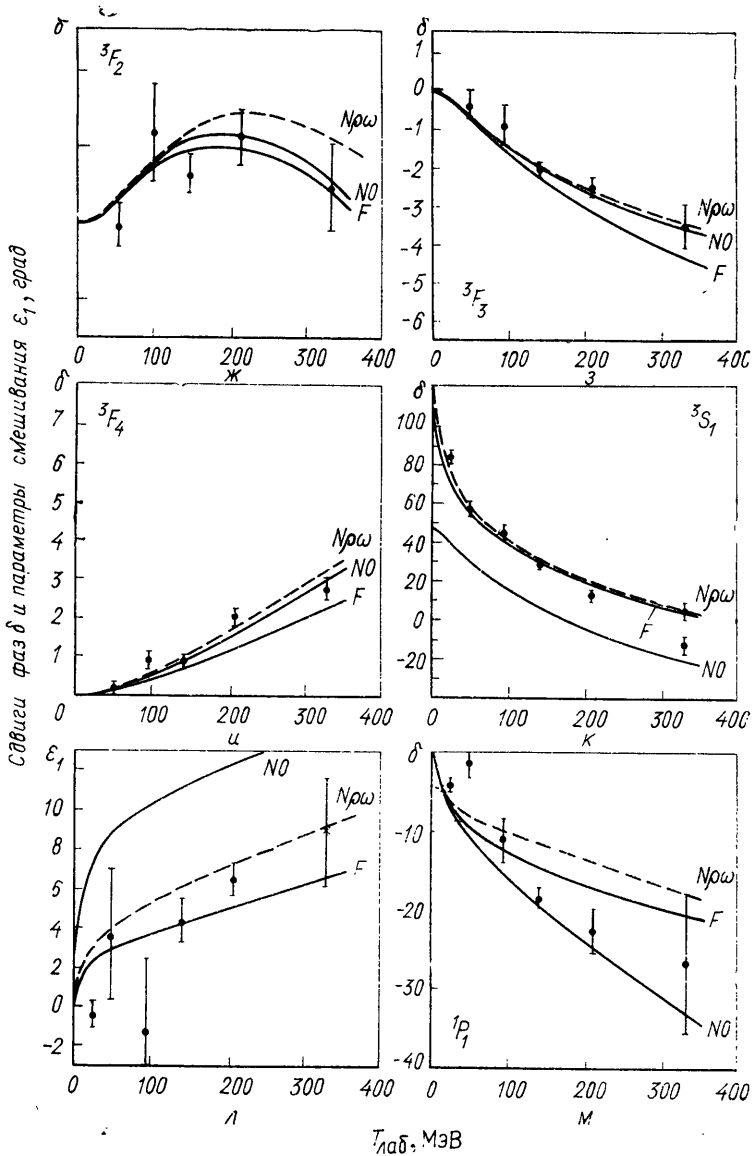


Рис. 44, ж—м

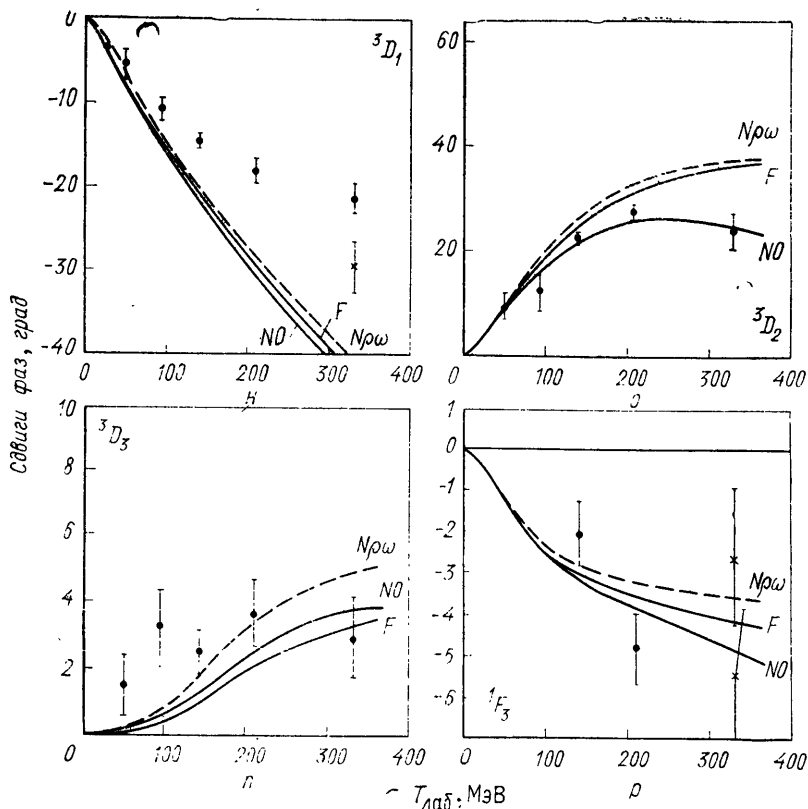


Рис. 44. Результаты расчетов сдвигов фаз и параметров смешивания для различных моделей, описывающих амплитуды процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ в S - и P -волнах: с учетом нуклонных полюсных членов ($N\rho\omega$); по модели Нильсена—Оадеса для S - и P -волн (NO), с взятой *ad hoc* амплитудой в S -волне, наряду с брейт-вигнеровской амплитудой, отвечающей ρ -мезону (F). Все фазовые сдвиги даны в градусах. Сдвиги фаз для связанных каналов определены равенствами (A.1)—(A.3) из гл. 10.

лее трудно оценить чувствительность спиральных амплитуд к функциональным формам, применяемым для экстраполяции. Игнорируя этот слабый пункт и пренебрегая неопределенностями в сдвигах фаз $\pi\pi$ -рассеяния, Нильсен и Оадес дают грубые оценки неопределенностей: 15% для $|\lambda_0|^2$ и 30% для λ_1^- и η^- вблизи резонанса.

Имея в виду эти неопределенности, мы построили феноменологические спиральные амплитуды для S - и P -волн, чтобы улучшить описание сдвигов фаз. В амплитудах для P -волн вновь учитываются члены, соответствующие нуклонному полюсу и ρ -мезону с параметрами $g_\rho^2/(4\pi) = 0,52$ и $\kappa_V = 3,7$. Таким образом, эти амплитуды не противоречат амплитудам Нильсена и Оадеса. Принятая для $|\lambda_0^+|^2$ функция показана на рис. 42. Хотя она и не согласуется с амплитудой Нильсена—Оадеса, приведенной на рис. 42,

но имеется неплохое соответствие с результатами более современного анализа *. Сдвиги фаз, вычисленные с использованием величин $g_{\omega}^2/(4\pi)=7,0$ и $\kappa_S=-0,12$, показаны на рис. 44. За исключением фазового сдвига для состояния 3D_1 , все результаты находятся в разумном согласии с экспериментальными данными. Мы подчеркиваем, что это согласие является существенной проверкой справедливости рассмотренного подхода для построения взаимодействия между нуклонами, поскольку все параметры находятся в приближенном согласии с независимыми физическими наблюдениями.

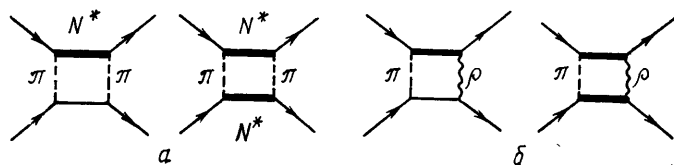


Рис. 45. Вклад во взаимодействие нуклонных изобар:

(а) учтенных неявно в эмпирических амплитудах $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ и (б) не включенных в данные расчеты

Хаапакоский [45] показал, что существует сильная компенсация на малых расстояниях между процессом двухпионного обмена на рис. 45, а и аналогичным процессом на рис. 45, б, на котором один из пионов заменен ρ -мезоном. Ожидается, что эта компенсация будет особенно эффективной в высоких парциальных волнах системы $\pi\pi$. (Именно по этой причине мы последовательно пренебрегли вкладом процесса на рис. 45, а в более высокие парциальные волны.) Процесс, изображенный на рис. 45, а, был, конечно, включен в эмпирические амплитуды для S - и P -волн, тогда как процесс, приведенный на рис. 45, б, был тщательно исключен из эмпирических амплитуд πN -рассеяния. Восстановление вклада этого процесса в низких парциальных волнах привело бы к усилению отталкивания на расстояниях, близких к радиусу действия сил, отвечающих обмену векторным мезоном. Не вдаваясь в подробности, можно было бы грубо учесть этот процесс путем некоторого увеличения константы связи для ω -мезона. Конечно, без глубокого анализа нельзя судить о величине соответствующего возрастания.

Энергия связи дейтрона и синглетная длина рассеяния являются результатом тонкой компенсации между сильным притяжением и сильным отталкиванием. Поэтому вряд ли можно надеяться, что в каком-либо модельном расчете удастся достаточно точно воспроизвести эти величины. Поскольку многие свойства дейтрона определяются асимптотикой волновой функции, которая весь-

* Нильсен, частное сообщение. Расхождение с прежними результатами, по-видимому, в значительной степени обусловлено использованием улучшенной техники экстраполяции физической πN -амплитуды. Уточнения данных по $\pi\pi$ - и πN -рассеянию играют меньшую роль.

ма чувствительна к энергии связи, была сделана небольшая дополнительная подгонка константы связи для ρ -мезона [$g_\rho^2/(4\pi) = 0,594$ и $\kappa_V = 3,24$], чтобы обеспечить правильные значения синглетной длины рассеяния нейтрона на протоне и энергии связи дейтрона. Результирующая волновая функция дейтрона показана на рис. 46 в координатном (а) и импульсном (б) представлениях. В целях сравнения там же приведена волновая функция для по-

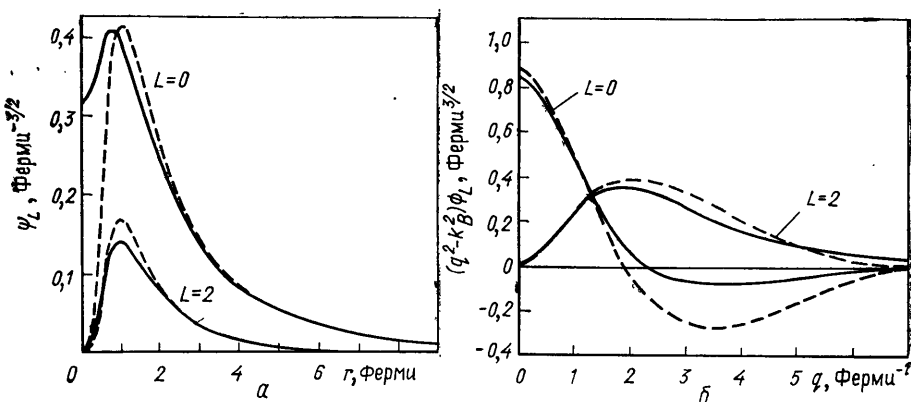


Рис. 46. Волновая функция дейтрона в зависимости от расстояния r между нуклонами (а) и вычет волновой функции дейтрона, $(E_B - q^2) \langle q | \psi_B \rangle$ (б).

Сплошные кривые соответствуют результатам, полученным в настоящей работе. Пунктирные кривые — результаты вычислений для потенциала Риды с мягким кором

тениала Риды с мягким кором. Рассчитанный с этой волновой функцией квадрупольный момент, определенный равенством (2.36д), составляет 3,09 мб в разумном согласии с эмпирической величиной 2,88 мб. Вероятность D -состояния равна 6,17% по сравнению с величиной 6,43%, полученной с потенциалом Риды. Наиболее впечатляющей особенностью этого сравнения является драматическое ослабление короткодействующего отталкивания в представленной модели, которое можно видеть из поведения волновой функции на малых расстояниях. (В импульсном представлении это отражается в расположении узла волновой функции при большем значении импульса и в менее глубоком минимуме). В рамках рассматриваемого подхода это относительно слабое короткодействующее отталкивание является, по-видимому, неизбежным следствием использования физически разумных значений для констант связи векторных мезонов (например, если бы короткодействующее отталкивание в потенциале Риды было отождествлено с обменом эффективным векторным мезоном, то его константа связи была бы приблизительно в десять раз больше). Как отмечалось в § 3.4, наиболее непосредственно поведение волновой функции на малых расстояниях проявляется в такой наблюдаемой величине, как зарядовый форм-фактор. Результаты его вычисления по формуле (2.35а) для точечных нуклонов показаны

на рис. 47. Как упоминалось выше, различие между этим форм-фактором и форм-фактором для потенциала Риды можно значительно уменьшить путем включения обменных поправок с пионным радиусом. Надо отметить, что неожиданно слабое отталкивание на малых расстояниях делает менее убедительными аргументы в пользу пренебрежения диаграммами более высокого порядка, отвечающими существенно меньшим радиусам действия. Соответственно возникает проблема изучения тщательно отобранных процессов более высокого порядка.

Как отмечалось во введении, обширные дополнительные вычисления были выполнены парижской группой [29, 70]. Дополнительными их можно назвать в том смысле, что они включают вычисления потенциалов в конфигурационном пространстве. В связи с тем, что, по мнению авторов цитированных выше работ, мезонная теория на данной стадии не способна дать истинное поведение на малых расстояниях, в последней работе они заменили их потенциал на расстояниях меньше $r \cong 0,9$ Ферми феноменологическим потенциалом с подгоночными параметрами. Это отличается по духу от работы, описанной выше в данной главе, где признанное зависящим от модели поведение на малых расстояниях (при больших импульсах) было связано с

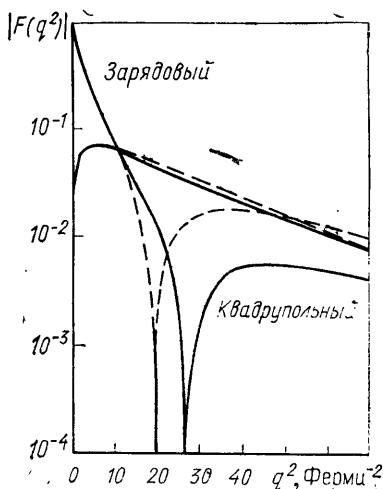


Рис. 47. Зарядовый и квадрупольный форм-факторы дейтрона, вычисленные для точечных нуклонов. Сплошные кривые — результат данной работы. Штриховые — результат для потенциала Риды с мягким «кором»

соответствующим поведением электромагнитных форм-факторов в той же области импульсов. Практически, однако, разница между подходами невелика. Оба подхода дают весьма близкие результаты для более действующей части нуклон-нуклонного взаимодействия. Относительно короткодействующей части в обоих подходах утверждается, что она должна быть параметризована, причем способ зависит от вкуса. В своей обширной статье [29] парижская группа авторов дает нуклон-нуклонные потенциалы для двух случаев. Рассмотрены как нерезонансные решения [91] для амплитуды f_+^0 , которые показаны явно в виде кривых C_R и C_I на рис. 34, так и резонансные решения [92], обсужденные выше в данной главе. Эти авторы отмечают также тот факт, о котором мы уже говорили выше, что большая величина $|f_+^0|^2$ для резонансного решения приводит к слишком сильному притяжению в центральной части нуклон-нуклонного взаимодействия. Более поздние исследования Нильсена и Оадеса (работа будет опубликована) привели

к значениям $|f_+^0|^2$, близким к нерезонансному решению, хотя в отдельности действительная и мнимая части f_+^0 совершенно отличны от результатов для этого решения и близки к величинам, построенным искусственным способом. Это построение обсуждалось выше в данной главе. Таким образом, по-видимому, в литературе имеется единое мнение по поводу того, что грубая структура весовой функции $|f_+^0|^2$ подобна той, которая возникает из нерезонансного решения, или, что эквивалентно, подобна взятой для этой цели величине $|\lambda_0^+|^2$, показанной на рис. 44. Лакомб и др. записывают потенциал в форме

$$V = V_{\text{Фен}}(1 - f(r)) + V_{\text{теор}}f(r), \quad (10.3)$$

где $V_{\text{теор}}$ — потенциал, следующий из нерезонансной амплитуды f_+^0 , а $f(r)$ — обрезывающая функция;

$$f(r) = (pr)^\alpha / (1 + (pr)^\alpha); \quad (10.3a)$$

$$V_{\text{Фен}} = \sum_{\alpha=C, SS, SO, T, (SO)^*} (V_\alpha + V'_\alpha E). \quad (10.36)$$

Здесь E — энергия в лабораторной системе. Как $V_{\text{теор}}$, так и $V_{\text{Фен}}$ содержат центральный, спин-орбитальный, спин-спиновый, тензорный и квадратичный спин-орбитальный члены. Однако эффекты

Таблица 10.1

Значения параметров для феноменологического короткодействующего взаимодействия*

α	Потенциал, МэВ	
	V_α	V'_α
C	333,5	0,688
SO	14,96	0,790
	-550,0	-0,244
	-245,1	-0,378
SS	82,41	0,106
	-3,430	0,128
T	82,89	0
	74,60	0

* Значения в первой колонке соответствуют $g_\omega^2/(4\pi)=4,65$, во второй — $g_\omega^2/(4\pi)=10,7$.

квадратичного спин-орбитального члена оказались пренебрежимо малыми. Слагаемое $V_{\text{теор}}$ очень резко обрезается при $r \approx 0,9$ Ферми путем использования значений параметров $\alpha=20$, $p=1,2$ Ферми⁻¹, так что поиск феноменологического «кора» не затрагивает теоретическую часть.

Параметры $V_{\text{Фен}}$ были определены подгонкой к результатам не зависящего от энергии фазового анализа протон-протонного рассеяния, выполненного в Ливермор [79]. Их значения приведены в табл. 10.1.

Величина $g_\omega^2/(4\pi)=10,7$ обеспечивает подгонку с $\chi^2=1,88$ на одно измерение, тогда как соответствующее значение для кварковой модели $g_\omega^2/(4\pi)=4,65$ дает лишь $\chi^2=4,77$ на измерение. В этой работе объектом подгонки были 65 данных. Отдельное данное отвечает одному сдвигу фазы при одном значении энергии. Результаты подгонки для низших парциальных волн пока-

заны на рис. 48 с параметрами потенциала, приведенными в табл. 10.1. Как отмечалось выше, процесс, отвечающий комбинации обменов π - и ρ -мезоном, изображенный на рис. 45, б, приводит к сильному отталкиванию в нуклон-нуклонных состояниях с $T=1$, радиус которого грубо соответствует радиусу для обмена ω -мезоном. Этот процесс не был учтен в расчетах парижской

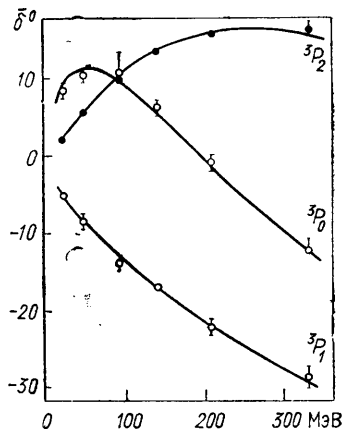
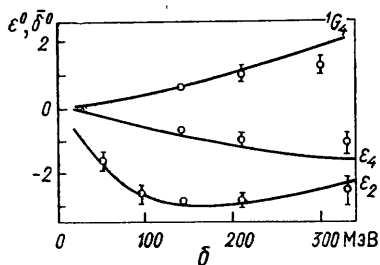
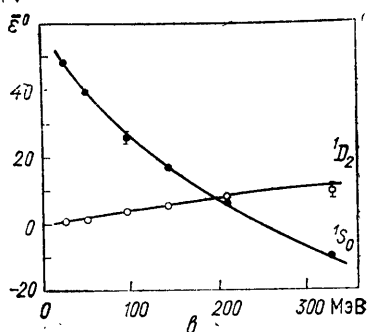
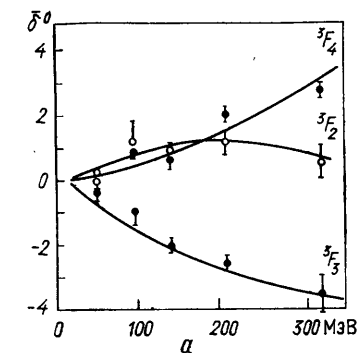


Рис. 48. Некоторые характерные фазовые сдвиги, вычисленные парижской группой. Соответствующие параметры потенциала приведены в табл. 10.1

группы, поэтому неудивительно, что им пришлось использовать для компенсации большую величину $g_{\omega}^2/(4\pi)$. Качество подгонки здесь несколько лучше, чем полученное с помощью известных в настоящее время эмпирических нуклон-нуклонных потенциалов. Ясно поэтому, что программа расчета нуклон-нуклонного взаимодействия в рамках теории, использующей технику дисперсионных соотношений, уже достигла значительного успеха. В заключение сформулируем наше мнение о статусе многочисленных расчетов нуклон-нуклонного взаимодействия, применяющих различные модели обмена частицами.

Почти не вызывает сомнений, что дальнедействующая часть взаимодействия обусловлена однопионным обменом. На промежуточных расстояниях притяжение возникает от обмена двумя

пионами, связанными в состояние с $J=0$. Этот процесс можно описывать как обмен скалярными мезонами с распределенными массами. Такое описание не отличается радикально от модели, в которой учитывается обмен единственным скалярным мезоном с большой шириной распада. Однако с улучшенной точностью нужно определить весовую функцию $|f_+^0(t)|^2$ в области малых t непосредственно из экспериментальных данных по нуклон-нуклонному рассеянию в периферической области. Для того чтобы про-

Таблица 10.2

Ядерные бар-фазы, полученные из анализа, зависящего от энергии [78]

Энергия, МэВ Энергетическая полоса, МэВ Число данных χ^2	25	50	95
	20,2—30	47,5—60	95—100
	130	205	161
	80,99	179,3	142,1
$^1S_0(p, p)$	48,60±0,26	39,43±0,44	25,53±11,09
1D_2	0,74±0,03	1,67±0,10	3,71±0,24
1G_4			
3P_0	8,52±0,31	10,58±0,66	10,95±1,94
3P_1	-5,04±0,15	-8,39±0,29	-13,68±0,45
3P_2	2,45±0,08	5,76±0,14	10,08±0,34
ϵ_2		-1,63±0,19	-2,63±0,25
3F_2		-0,02±0,28	1,19±0,61
3F_3		-0,38±0,37	-0,91±0,49
3F_4		0,21±0,15	0,89±0,19
ϵ_4			
3H_4			
3H_5			
3H_5			
$^1S_0(n, p)$	48,84±1,75	54,66±8,99	35,48±10,18
1P_1	-4,00±0,69	-1,34±1,71	-10,83±2,88
1F_3			
1H_5			
3S_1	84,49±2,70	57,11±2,69	44,98±3,10
ϵ_1	-0,34±0,73	3,53±3,27	-1,28±3,79
3D_1	-3,21±0,18	-5,28±1,80	-10,62±1,34
3D_2		9,36±2,24	12,32±3,23
3D_3		1,50±0,94	3,22±1,22
ϵ_3			
3G_3			
3G_4			
3G_5			

двинуться в этом направлении дальше, понадобится усложнить методы, рассмотренные в последних главах. Поведение нуклон-нуклонного взаимодействия на малых расстояниях вывести сложнее. Однако, по-видимому, оно может быть неплохо описано посредством учета обменов ρ - и ω -мезонами, наряду с введением дополнительного отталкивания, которое может вызываться комбинированным обменом ρ - и π -мезонами типа показанного на рис. 45, б. Для некоторых деталей взаимодействия оказывается

важным тот факт, что ρ -мезон имеет скорее распределенную, чем фиксированную, массу*. Для тех читателей, кто относится скептически к использованию мезонной теории на малых расстояниях, соответствующих радиусам, характерным для обмена ρ - и ω -мезонами, напомним, что существование векторных мезонов было впервые предсказано Брейтом в связи с наблюдаемыми свойствами спин-орбитальной части нуклон-нуклонного взаимодействия, что уже обсуждалось в гл. I.

При действительно малых расстояниях, меньше чем 0,4 или 0,5 Ферми, взаимодействия, полученные из наивной картины ме-

142 128-156 305 303,0	210 197-217 121 94,6	330 290-350 209 181,3	425 400-437 164 190,1
16,70±0,54	5,42±0,53	-10,53±1,33	-19,00±1,61
5,11±0,16	7,05±0,28	9,26±0,46	11,67±0,89
0,62±0,06	1,00±0,10	1,22±0,23	1,96±0,34
6,20±0,49	-0,86±0,56	-12,52±1,59	-16,70±1,83
-17,04±0,16	-22,22±0,32	-28,79±1,19	-34,39±1,21
13,68±0,10	15,67±0,23	16,25±0,55	19,04±0,91
-2,86±0,07	-2,82±0,16	-2,56±0,41	-0,96±0,65
0,65±0,23	1,16±0,33	0,49±0,57	1,46±0,75
-2,05±0,20	-2,58±0,20	-3,58±0,58	-3,25±0,59
0,90±0,12	2,02±0,19	2,77±0,23	3,34±0,54
-0,68±0,03	-0,99±0,09	-1,11±0,28	-2,19±0,34
	0,24±0,21	1,12±0,32	-0,32±0,45
	-1,07±0,18	-1,80±0,46	-1,90±0,43
	0,15±0,13	0,77±0,15	0,03±0,32
20,42±4,12	3,09±4,94	(-10,53)	(-19,00)
-18,22±1,33	-22,36±2,74	-26,11±8,95	-23,98±2,81
-2,02±0,79	-4,80±0,86	-6,37±4,02	-4,91±1,05
		-1,89±1,49	-5,28±0,90
29,33±0,93	13,85±1,50	-11,21±4,43	-24,85±2,37
4,28±0,96	6,47±0,70	20,69±5,53	16,07±1,68
-14,44±0,78	-17,94±1,49	-21,28±1,70	-24,09±1,97
22,54±0,79	27,31±1,23	23,62±3,04	18,42±2,09
2,52±0,64	3,67±1,01	2,99±1,19	-1,22±1,45
4,44±0,40	6,70±0,36	3,94±1,28	4,12±1,23
		6,07±1,91	-9,30±1,35
		11,24±2,16	11,08±1,08
		0,22±0,66	-1,82±0,78

зонных обменов, должны быть некоторым образом обрезаны. Мы указывали, что при исследовании электромагнитных форм-факторов нуклонов имеют дело как раз с областью больших пространственноподобных импульсов, для которых указанное обрезание

* Чемтоб и Риска [26] показали, что учет непрерывного спектра для системы двух пионов в ρ -канале необходим, чтобы получить спин-орбитальное расщепление нуклон-нуклонного взаимодействия в F -волнах.

зависимости. Таким образом, возникает возможность параметризации образования с помощью эксперимента. Это чрезвычайно важно, если придавать значение константам связи ρ - и ω -мезонов с нуклоном, полученным при подгонке теории к экспериментальным данным по нуклон-нуклонному рассеянию, поскольку результаты такой подгонки могут быть весьма чувствительны к радиусу образования.

Знание поведения потенциала отталкивания на малых расстояниях играет существенную роль во многих проблемах. Сюда относятся, например, исследования нейтронных звезд, для которых уравнения состояния при высоких плотностях почти всецело определяются величиной и радиусом такого отталкивания. Таким образом, невозможно обойти вопрос о поведении нуклон-нуклонного взаимодействия на малых расстояниях, несмотря на то, что строгий вывод, базирующийся на основных принципах современной теории, может оказаться невозможным.

Приверженец моделей однобозонного обмена может сказать, что материал, содержащийся в последних главах данной книги, подводит под эти модели более надежную теоретическую базу. Оппонент моделей однобозонного обмена может рассматривать изложенное в книге как альтернативный и, по нашему мнению, значительно улучшенный подход.

В целом подходы, основанные на применении дисперсионных соотношений, не радуют большим успехом в количественных описаниях явлений физики элементарных частиц. Обычно возникающая проблема состоит в том, что приходится включать в рассмотрение промежуточные состояния со все большей энергией таким способом, который дает малую надежду на сходимость. Можно задать вопрос, почему такой подход оказывается тем не менее удобным в проблеме о взаимодействии нуклонов. Основанием для нашего оптимизма служит сильное отталкивание, возникающее от обмена ω -мезоном, вследствие которого нуклоны по крайней мере при малых энергиях не сближаются на расстояния меньше $\sim 0,5$ Ферми. Поэтому они никогда не «увидят» эффектов, связанных с обменом более массивными частицами или системами, которые могут войти в действие на еще меньших расстояниях. Наше заявление о короткодействующем отталкивании, проистекающем от обмена ω -мезонами, надо истолковывать следующим образом. Подгонки теории к экспериментальным данным по нуклон-нуклонному рассеянию, по-видимому, последовательно требуют большего значения для константы связи ω -мезона по сравнению, например, с максимумом этой величины, даваемым кварковой моделью (и мы указали на другие механизмы, которые могут привести к короткодействующему отталкиванию). В этом смысле нам следует дать анонс, подобный используемым в кинотеатрах, и заявить, что мы показали лишь премьеру наступающих отталкиваний.

ДОПОЛНЕНИЕ А. НУКЛОН-НУКЛОННЫЕ СДВИГИ ФАЗ И ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Эмпирические сдвиги фаз нуклон-нуклонного упругого рассеяния были извлечены из существующих дифференциальных сечений рассеяния (p, p) и (n, p) и менее обильных данных, полученных из поляризационных измерений для (n, p) -рассеяния. Результаты одного из таких не зависящих от энергии анализов [78] даны в табл. 10.2. В этом анализе предполагалось, что сдвиги фаз с $L > 5$ можно надежно вычислять в первом борновском приближении с использованием потенциала однопионного обмена с определенной подгонкой константы связи $g_\pi^2 / (4\pi) = 14,43 \pm 0,41$. При энергии выше 280 МэВ в лабораторной системе в канале 4D_2 допускалось наличие неупругих процессов. При каждой энергии объектами подгонки служили 27 фазовых параметров, включая отдельные сдвиги фаз для np - и pp -рассеяния.

В случае связанных каналов существуют два соглашения для сдвигов фаз. Собственные значения сдвигов фаз имеют теснейшую связь с решениями уравнения Липпмана—Швингера со связью каналов

$$\begin{aligned} \langle p' | T_{L_1 L_2} | p \rangle &= \langle p' | V_{L_1 L_2} | p \rangle + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{\lambda} P \int_0^{\infty} \frac{\langle p' | V_{L_1 \lambda} | q \rangle \langle q | T_{\lambda L_2} | p \rangle}{p^2 - q^2} q^2 dq \end{aligned} \quad (A.1)$$

и даются соотношениями

$$\begin{aligned} \text{tg } \delta_{L_1}(p) &= -\frac{1}{2} p (\langle p | T_{L_1 L_1} | p \rangle + \langle p | T_{L_2 L_2} | p \rangle + \\ &+ (\langle p | T_{L_1 L_1} | p \rangle - \langle p | T_{L_2 L_2} | p \rangle) / \cos 2\varepsilon_J); \end{aligned} \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned} \text{tg } \delta_{L_2}(p) &= -\frac{1}{2} p (\langle p | T_{L_1 L_1} | p \rangle + \langle p | T_{L_2 L_2} | p \rangle + \\ &+ (\langle p | T_{L_2 L_2} | p \rangle - \langle p | T_{L_1 L_1} | p \rangle) / \cos 2\varepsilon_J); \end{aligned} \quad (A.2a)$$

$$\text{tg } 2\varepsilon_J = \frac{\langle p | T_{L_1 L_2} | p \rangle + \langle p | T_{L_2 L_1} | p \rangle}{\langle p | T_{L_1 L_1} | p \rangle - \langle p | T_{L_2 L_2} | p \rangle}. \quad (A.26)$$

В равенствах (A.2) $L_1 = J - 1$ и $L_2 = J + 1$. В табл. 10.2 и в большинстве других таблиц эмпирических сдвигов фаз использовано соглашение по поводу введения «бар-фаз» ($\bar{\delta}$). Связь их с собственными значениями сдвигов фаз из равенств (A.2) выражается соотношениями

$$\bar{\delta}_{L_2} + \bar{\delta}_{L_1} = \delta_{L_2} + \delta_{L_1}; \quad (A.3)$$

$$\sin(\bar{\delta}_{L_1} - \bar{\delta}_{L_2}) = \frac{\text{tg } 2\bar{\varepsilon}_J}{\text{tg } 2\varepsilon_J}; \quad (A.3a)$$

$$\sin(\delta_{L_1} - \delta_{L_2}) = \frac{\sin 2\bar{\epsilon}_J}{\sin 2\epsilon_J}. \quad (\text{A.36})$$

Целесообразно обсудить в этом месте книги вопрос о надежности эмпирических сдвигов фаз. В первую очередь отметим, что сдвиги фаз для состояний с $T=1$ из табл. 10.2 вполне удовлетворительно согласуются с фазами, полученными из отдельного зависящего от энергии анализа данных с энергиями в лабораторной системе от 1 до 450 МэВ. Эти сдвиги фаз в целом рассматриваются как хорошо установленные. В случае сдвигов фаз для состояний с $T=0$ это не так. Данные (n, p) , включенные в табл. 10.2, содержат некоторую информацию о тройном рассеянии при энергиях 142, 210 и 425 МэВ. При этих энергиях сдвиги фаз для $T=0$ определяются достаточно хорошо с той лишь оговоркой, что могут существовать систематические ошибки, обусловленные использованием дейтериевых мишеней в большинстве экспериментов по тройному рассеянию. Сдвиги фаз для других фиксированных энергий не находятся в хорошем согласии с фазами, полученными в анализе, зависящем от энергии, и, хотя результирующие значения χ^2 указывают на хорошую подгонку к рассмотренным данным, к ним следует относиться с известной осторожностью. В этой связи обратим внимание на своеобразные колебания в знаке параметра смешивания $\bar{\epsilon}_1$ при энергиях ниже 100 МэВ. Это должно было бы говорить в пользу анализа, зависящего от энергии, если бы не существование других локальных минимумов χ^2 , дающих одинаково хорошую подгонку к экспериментальным данным.

Зависящий от энергии анализ приблизительно 1000 данных с $\chi^2=1100$ приводит к выводу об отрицательности $\bar{\epsilon}_1$ при энергиях ниже 80 МэВ. Это находится в противоречии с выводами, полученными в приближении эффективного радиуса (см. конец гл. 5), свидетельствующими о том, что $\bar{\epsilon}_1$ должно быть положительным при низких энергиях. (Соответствующие выводы, сделанные в приближении эффективного радиуса, связывают величину $\bar{\epsilon}_1$ с квадрупольным моментом дейтрона в пренебрежении величинами типа $\langle \psi_D | Q | \psi_D \rangle$ и должны быть по крайней мере качественно надежными при малых энергиях.) Аналогичный анализ $\bar{\epsilon}_3$ зависимостью от энергии был проведен с условием, чтобы $\bar{\epsilon}_1$ было положительным при низких энергиях для трех искусственно образованных псевдоданных. В результате подгонки была получена величина $\chi^2=1138$, что одинаково хорошо для всех практических целей. В данном случае существенное изменение претерпела фаза в канале 1P_1 при малых энергиях, приблизившись к соответствующему значению для модели однопионного обмена, которое должно доминировать вблизи порога. Изменение в 1P_1 -фазе при 50 МэВ составляет 7 стандартных отклонений. Это означает, что ошибки, приписанные величинам, приведенным, например, в табл. 10.2, в лучшем случае носят характер качественных прикидок, спра-

ведливых в окрестности отдельного локального минимума χ^2 . В пользу такого вывода говорит и тот факт, что приведенные в табл. 10.2 ошибки не отражают сильной корреляции между ошибками для различных фазовых сдвигов. Чтобы получить более правильное представление об ошибках, необходимо рассмотреть кривизну поверхности χ^2 в минимуме этой функции во всех направлениях пространства параметров*. В связи с этим с большой степенью достоверности можно предположить, что феноменологические потенциалы, полученные только из фазовых сдвигов, не могут претендовать на хорошую точность. Необходимо также, чтобы они обеспечивали удовлетворительное воспроизведение исходных данных. Такая проверка была сделана для потенциалов Хамады — Джонстона и Рида, о чем пойдет речь ниже.

Таблица 10.3

Ядерные бар-фазы, в градусах, при энергии 330 МэВ для двух минимумов χ^2

Состояние	Решение 1	Решение 2*	Состояние	Решение 1	Решение 2*
3S_1	$5,7 \pm 4,2$	$-13,3 \pm 3,2$	$\bar{\epsilon}_3$	$8,6 \pm 1,8$	$4,0 \pm 1,1$
$\bar{\epsilon}_1$	$8,9 \pm 2,7$	$21,2 \pm 3,1$	3G_3	$-4,7 \pm 2,6$	$-6,2 \pm 1,9$
3D_1	$-29,2 \pm 3,0$	$-21,4 \pm 1,6$	1F_3	$-2,6 \pm 1,6$	$-5,4 \pm 1,6$
1P_1	$-43,3 \pm 2,1$	$-27,6 \pm 3,8$	3G_4	$0,8 \pm 1,6$	$10,3 \pm 1,1$
3D_2	$17,6 \pm 4,0$	$21,5 \pm 3,4$	3G_5	$-1,6 \pm 0,7$	$-0,9 \pm 0,7$
3D_3	$3,5 \pm 1,7$	$2,6 \pm 1,1$	1H_5	$-2,5 \pm 1,6$	$-2,5 \pm 0,8$

* Отметим, что решение 2 находится в хорошем согласии с фазовыми сдвигами из табл. [10.2, полученными, по существу, из тех же данных, и дает δ (3G_4) в согласии с соответствующей величиной для однопропного обмена.

Скептики высказывают опасение, что существуют совершенно другие, но в одинаковой степени хорошие наборы фазовых параметров для $T=0$, которые могут затеряться в подверженной причудам процедуре подгонок по χ^2 с нелинейной зависимостью этой величины в особенности при более высоких энергиях. Эта проблема оказалась в центре внимания после опубликования работы Сигнелла и Холдемана [108]. Эти авторы подвергли более тщательному анализу данные при 330 МэВ и пришли к результату с двумя минимумами χ^2 , различающимися по величине менее чем на 1%, но с драматическим различием в величинах сдвигов фаз в состояниях 3S_1 , 3D_1 , 1P_1 и 3G_4 и величине $\bar{\epsilon}_1$. Эти два набора фаз показаны в табл. 10.3. Они заставляют вспомнить бесстрастные слова М. Л. Гольдбергера: «...вряд ли когда-нибудь мир физики был должен столь по малу так многим».

Еще в большей степени осложняет ситуацию тот факт, что анализ данных при энергии 425 МэВ страдает от неоднозначности, связанной с существенной величиной мнимой части 1D_2 -фазы.

* Такая матрица кривизны была рассмотрена в работе [77].

Можно полагать, что она обусловлена рождением изобар N^* с массой 1236 МэВ. Поскольку спин и изоспин изобары N^* равны $3/2$, можно ожидать, что вблизи порога доминирующий эффект должен проявиться в канале 1D_2 .^{*} В качестве меры подобных неупругих эффектов в табл. 10.4 приведены мнимые части сдвигов фаз для состояний 1D_2 , 3P_1 и 3F_3 в области энергии от 425 до 735 МэВ. Эти результаты были получены Мак-Греггором, Арндтом и Врайтом [76] из зависящего от энергии анализа данных по рассеянию (p, p) в предположении, что для всех каналов порог неупругих процессов расположен при энергии 400 МэВ. При этих энергиях мнимые части фаз во всех других парциальных волнах малы. Хотя различные приближения, использованные при релятивистском рассмотрении нуклон-нуклонного взаимодействия, не позволяют претендовать на количественную надежность вычислений фаз при столь высоких энергиях, указанные мнимые части фаз могут служить полезным качественным тестом для компонента взаимодействия двухпионного обмена, описывающих виртуальные неупругие процессы.

Таблица 10.4

Мнимые части фазовых сдвигов, pp -рассеяния, в градусах по Риду

Энергия, МэВ	$\text{Im } \delta ({}^1D_2)$	$\text{Im } \delta ({}^3P_1)$	$\text{Im } \delta ({}^3F_3)$
425	1,3	0,2	0,2
450	2,7	0,5	0,4
500	5,5	1,6	1,1
600	10,5	6,3	3,3
650	11,8	11,1	4,9
700	11,7	19,1	7,0
735	10,9	28,4	8,8

Очевидное решение проблемы эмпирической неоднозначности, по-видимому, состоит в получении большего количества экспериментальных данных с меньшими ошибками (в особенности поляризационных данных). Однако заслуживает внимания изучение возможности того, что фазы не обеспечивают наилучшей (т. е. наиболее экономной) параметризации данных об упругом рассеянии. Такая возможность была продемонстрирована в работе Чао [22], в которой при подгонке данных по pp -рассеянию при энергиях 220 и 320 МэВ были использованы функциональные формы амплитуд на массовой поверхности, учитывающие известные аналитические свойства в плоскости $\cos \theta$. Чао показал, что знание этих аналитических свойств позволяет вывести определенные соотношения между сдвигами фаз, с помощью которых можно предсказать с высокой точностью пять фаз из табл. 10.2 для $T=1$ при $L>3$ при заданных девяти фазовых сдвигах для $T=1$ при $L\leq 3$.

В заключение приведем явные выражения для двух характерных феноменологических потенциалов, обеспечивших надежную подгонку данных по сдвигам фаз в упругом рассеянии и нашед-

* Предлагаем заинтересованному читателю убедиться в том, что единственным каналом, в котором изобара может образоваться в системе покоя (в относительном S -состоянии) по отношению к другому нуклону, является канал 1D_2 для двух налетающих нуклонов. (Используйте законы сохранения углового момента и четности).

ших широкое применение в расчетах как для двухнуклонной системы, так и при исследовании структуры ядра. Конкретно рассмотрим потенциалы Рида с мягким кором [98] и Хамады — Джонстона с жестким кором [47]. Оба потенциала локальны, не считая проекционных операторов, и согласуются с потенциалом одно-нионного обмена на больших расстояниях. Потенциал Рида подгонялся по 1966 значениям сдвигов фаз, а потенциал Хамады — Джонстона — по 1961 значению [17, 55]. Для обоих потенциалов вычисленные сдвиги фаз согласуются с результатами, приведенными в табл. 10.2 для $T=1$ в пределах указанных неточностей. Согласие для $T=0$ не такое хорошее, хотя надо иметь в виду, что приведенные в табл. 10.2 ошибки дают грубую меру расхождения. Оба потенциала хорошо описывают дейтрон. Величина ε_1 для них всегда положительна.

Потенциал Рида подгонялся независимо во всех парциальных волнах с $J \leq 2$. Для рассмотренных каналов потенциалы имеют следующий вид:

$$V(^1S_0) = -\frac{h e^{-x}}{x} - 1650,6 \frac{e^{-4x}}{x} + 6484,3 \frac{e^{-7x}}{x}, \quad (\text{A.4})$$

$$V(^1D_2) = -\frac{h e^{-x}}{x} - 12,322 \frac{e^{-2x}}{x} - 1112,6 \frac{e^{-4x}}{x} + 6484,2 \frac{e^{-7x}}{x}, \quad (\text{A.4a})$$

$$V(^3P_0) = -h \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) e^{-x} - \left(\frac{16}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) e^{-4x} \right] + 27,133 \frac{e^{-2x}}{x} - 790,74 \frac{e^{-4x}}{x} + 20\,662 \frac{e^{-7x}}{x}, \quad (\text{A.4б})$$

$$V(^3P_1) = h \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) e^{-x} - \left(\frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) e^{-4x} \right] - 135,25 \frac{e^{-2x}}{x} + 472,81 \frac{e^{-3x}}{x}, \quad (\text{A.4в})$$

$$V(^3P_2 - ^3F_2) = V_C + V_T S_{12} + V_{LS} LS, \quad (\text{A.4г})$$

где

$$V_C = \frac{h}{3} \frac{e^{-x}}{x} - 933,48 \frac{e^{-4x}}{x} + 4152,1 \frac{e^{-6x}}{x}, \quad (\text{A.4д})$$

$$V_T = h \left[\left(\frac{1}{3x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) e^{-x} - \left(\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) e^{-4x} \right] - 34,925 \frac{e^{-3x}}{x}, \quad (\text{A.4е})$$

$$V_{LS} = -2074,1 \frac{e^{-6x}}{x}, \quad (\text{A.4ж})$$

$$V({}^1P_1) = 3h \frac{e^{-x}}{x} - 634,39 \frac{e^{-2x}}{x} + 2163,4 \frac{e^{-3x}}{x}, \quad (\text{A.4з})$$

$$V({}^3D_2) = -3h \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) e^{-x} - \left(\frac{8}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) e^{-4x} \right] - \\ - 220,12 \frac{e^{-2x}}{x} + 871 \frac{e^{-3x}}{x}, \quad (\text{A.4и})$$

$$V({}^3S_1 - {}^3D_1) = V_C + V_T S_{12} + V_{LS} LS, \quad (\text{A.4к})$$

где

$$V_C = h \frac{e^{-x}}{x} + 105,468 \frac{e^{-2x}}{x} - 3187,8 \frac{e^{-4x}}{x} + 9924,3 \frac{e^{-6x}}{x}. \quad (\text{A.4л})$$

$$V_T = -h \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) e^{-x} - \left(\frac{12}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) e^{-4x} \right] + \\ + 351,77 \frac{e^{-4x}}{x} - 1673,5 \frac{e^{-6x}}{x}, \quad (\text{A.4м})$$

$$V_{LS} = 708,91 \frac{e^{-4x}}{x} - 2713,1 \frac{e^{-6x}}{x}. \quad (\text{A.4н})$$

В равенствах (А.4) $x = \mu r$, где $\mu = 0,7$ Ферми соответствует пионному радиусу, $h = 10,463$ МэВ и принято значение $\hbar^2/m = 41,47$ МэВ·Ферми². Сингулярности типа x^{-2} и x^{-3} , связанные с тензорным взаимодействием, исключались из потенциала, так что во всех каналах поведение потенциала на малых расстояниях имеет характер x^{-1} . Таким образом, потенциал Риды можно применять в уравнении Липпмана — Швингера в импульсном пространстве. В канале ${}^3S_1 - {}^3D_1$ этот потенциал дает связанное состояние с энергией связи дейтрона 2,2246 МэВ и квадрупольным моментом 0,280 Ферми² в согласии с опытом. Примесь 3D_1 -состояния в волновой функции дейтрона составляет 6,47%*. Близкий к рассмотренному потенциал Риды с жестким кором для $T=1$ был сопоставлен с исходными данными Йодером и Сигнеллом [129]. Состояния с $J > 2$ описывались с помощью потенциала однопионного обмена. Сравнение расчетов с опытом дало величину $\chi^2 = 2,1$ на одно данное. Хотя эта величина вдвое превышает значение χ^2 , полученное с эмпирическими сдвигами фаз, трудно решить, является ли это следствием неадекватности использования потенциала однопионного обмена в более высоких парциальных волнах или указывает на корреляции в ошибках для фазовых сдвигов. Во всяком случае достигнутое согласие с исходными данными можно рассматривать как удовлетворительное.

Более желательно было бы иметь только четыре потенциала для использования в синглетном четном (нечетном) и триплетном четном (нечетном) состояниях. Риду не удалось найти таких

* Дейтронная волновая функция для потенциала Риды показана на рис. 6 и 7 в координатном и импульсном представлениях.

потенциалов при использовании аналитических выражений (А.2). Например, 1D_2 -фаза, рассчитанная с потенциалом для состояния 1S_0 из равенств (4.4), согласуется с экспериментом при низких энергиях, но при более высоких энергиях на $\sim 50\%$ больше эмпирической. Аналогично при более высоких энергиях 3D_2 -фаза, вычисленная с потенциалом ${}^3S_1-{}^2D_1$ из равенств (А.4л) — (А.4н), вдвое больше эмпирической. Наконец, в сдвигах фаз для триплетных нечетных состояний, вычисленных с потенциалом (А.4г) — (А.4ж), также проявляются серьезные расхождения. Тот факт, что эти расхождения не удалось ликвидировать подгонкой параметров потенциала, побудил Рида сделать вывод о неадекватности потенциалов, включающих только центральные, тензорные и спин-орбитальные члены, для описания фазовых сдвигов.

Как будет видно из дальнейшего, Хамада и Джонстон преодолели эту трудность, добавив квадратичный спин-орбитальный член в потенциал. Для решения уравнения Липпмана — Швингера в импульсном пространстве с потенциалом Рида с мягким кором полезно знать следующие интегралы:

$$\int_0^{\infty} j_l(kr) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} j_l(k'r) r^2 dr = \frac{1}{2\mu k k'} Q_l(x), \quad (\text{А.5})$$

$$\int_0^{\infty} j_l(kr) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \left[1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{(\mu r)^2} \right] j_l(k'r) r^2 dr = \frac{1}{2\mu k k'} Q_l(x) + \frac{3}{2\mu^2 (2l+1)} [Q_{l-1}(x) - Q_{l+1}(x)], \quad (\text{А.5а})$$

$$\int_0^{\infty} j_l(kr) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \left[1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{(\mu r)^2} \right] j_l'(k'r) r^2 dr = \frac{1}{\mu^2} \left[\frac{k'}{2k} Q_l(x) + \frac{k}{2k'} Q_l'(x) - Q_l(x) \right], \quad (\text{А.5б})$$

$$\int_0^{\infty} j_l(kr) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} j_l'(k'r) r^2 dr = -\frac{1}{2\mu k k'} Q_l(x) + \frac{2l+3}{2l+1} \frac{1}{2\mu k'^2} Q_{l+1}(x) + \frac{2l+3}{2l+1} \frac{k}{k'} \int_0^{\infty} j_{l-1}(kr) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} j_{l-1}'(k'r) r^2 dr, \quad (\text{А.5в})$$

$$\int_0^{\infty} j_0(kr) \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} j_2(k'r) r^2 dr = -\frac{1}{2kk'^2\mu} \left[6kk' + \frac{1}{2} (3\mu^2 + k'^2 - 3k^2) + \ln \frac{(k+k')^2 + \mu^2}{(k-k')^2 + \mu^2} + 6\mu k \left(\text{arc tg} \frac{\mu}{k+k'} - \text{arc tg} \frac{\mu}{k-k'} \right) \right], \quad (\text{А.5г})$$

Таблица 10.5

Параметры для потенциала Хамады — Джонстона (во всех случаях взят радиус

S	L	a_C	b_C	a_T
0	четное	8,7	+10,6	—
1	нечетное	-9,07	+3,48	-1,29
1	четное	+6,0	-1,0	-0,5
0	нечетное	-8,0	+12,0	—

$$x = \frac{k^2 + k'^2 + \mu^2}{2kk'} \quad (\text{A.5д})$$

В равенствах (A.5) $j_l(kr)$ — сферические функции Бесселя, $Q_l(x)$ — функции Лежандра второго рода с разрезом при $-1 \leq x \leq +1$. В равенствах (A.5б), (A.5в) $l=J-1$ и $l'=J+1$. При использовании (A.5г) надо заботиться о том, чтобы аргумент $\arcsin \operatorname{tg} x$ лежал в первом и втором квадрантах. (Это — очевидное следствие требования непрерывности интеграла в точке $k=k'$.)

Потенциал Хамады — Джонстона с жестким кором имеет следующую форму:

$$V = V_C + V_T S_{12} + V_{LS} LS + V_{LL} L_{12}, \quad (\text{A.6})$$

где оператор L_{12} дается выражением

$$L_{12} = \mathbf{L}^2 + (\sigma_1 \sigma_2)^2 - (\mathbf{LS})^2. \quad (\text{A.6а})$$

Потенциалы V_C , V_T , V_{LS} , V_{LL} — локальные и имеют бесконечный отталкивающий кор при $x=0,343$ ($x=\mu r$, $\mu^{-1}=1,415$ Ферми). Потенциалы имеют следующую форму:

$$V_C = 0,08 (\mu/3) (\tau_1 \tau_2) (\sigma_1 \sigma_2) Y(x) [1 + a_C Y(x) + b_C Y^2(x)], \quad (\text{A.6б})$$

$$V_T = 0,08 (\mu/3) (\tau_1 \tau_2) Z(x) [1 + a_T Y(x) + b_T Y^2(x)], \quad (\text{A.6в})$$

$$V_{LS} = \mu G_{LS} Y^2(x) [1 + b_{LS} Y(x)], \quad (\text{A.6г})$$

$$V_{LL} = \mu G_{LL} x^{-2} Z(x) [1 + a_{LL} Y(x) + b_{LL} Y^2(x)], \quad (\text{A.6д})$$

где использованы обозначения

$$Y(x) = \frac{e^{-x}}{x} \quad \text{и} \quad Z(x) = \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right) Y(x). \quad (\text{A.6е})$$

В формулах (A.6б) — (A.6е) μ принимает значение 139,4 МэВ. Параметры потенциалов в формулах (A.6) были подогнаны независимо в состояниях с $S=0, 1$ и L четными и нечетными. Результаты подгонки даны в табл. 10.5. Хамада и Джонстон убедились в том, что эти потенциалы обеспечивают удовлетворительное согласие с исходными данными. Потенциал для триплетных четных

твёрдой сердцевины $x_0 = 0,343$)

b_T	G_{LS}	b_{LS}	G_{LL}	b_{LL}	b_{LL}
—	—	—	0,000891	+0,2	—0,2
+0,55	+0,1961	—7,12	—0,000891	—7,26	+6,92
+0,2	+0,0743	—0,1	+0,00267	+1,8	—0,4
—	—	—	—0,00267	+2,0	+6,0

состояний дает дейтрон с энергией связи 2,226 МэВ и квадрупольным моментом 0,285 Ферми². Вероятность D -состояния составляет 6,97%. Различия между фазовыми сдвигами, вычисленными с потенциалами Рида с мягким кором и Хамады—Джонстона, сравнимы с неточностями в эмпирических величинах табл. 10.2.

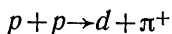
ДОПОЛНЕНИЕ Б. *Dramatis Personae**

В этом дополнении мы приведем обзор экспериментальных данных, с помощью которых установлены квантовые числа пиона и достаточно узких резонансов в системах из двух и трех пионов, чтобы можно было оправдать их рассмотрение как отдельных стабильных частиц. В первую очередь речь пойдет о таких свойствах, как масса, резонансная ширина (или время жизни), спин, четность и изоспин. Затем будут рассмотрены наилучшие оценки констант связи мезон—нуклон—нуклон. Естественно начать рассмотрение с пионов. Измерения дали для них следующие значения масс:

$$M_{\pi^{\pm}} = (139,580 \pm 0,015) \text{ МэВ,}$$

$$M_{\pi^0} = (134,974 \pm 0,015) \text{ МэВ.}$$

Предполагается, что различие между этими массами имеет электромагнитную природу. Отсюда немедленно следует возможность различия взаимодействий nn и np . Обычно в расчетах по модели однобозонного обмена указанной разностью масс пренебрегают. Из факта существования реакции



сразу следует, что пионы имеют целый спин, барионное число 0 и изоспин 1. Исходя из инвариантности взаимодействия относительно обращения времени, можно определить спин π^+ -мезона (но не его четность), используя принцип детального равновесия. При одной и той же энергии в системе центра масс отношение сечений рождения и поглощения дается отношением множителей фазового пространства и множителей, отвечающих усреднению по началь-

* Действующие лица (лат.). — Прим. пер.

ным и суммированию по конечным спиновым состояниям. Последние множители, естественно, определяются спинами участвующих в реакции частиц и позволяют установить, что спин π^+ -мезона равен 0. Античастица, π^- , должна иметь тот же спин. Определение четности заряженных пионов представляет до некоторой степени более сложную экспериментальную задачу. Однако четность известна из факта существования реакции

$$\pi^- + d \rightarrow 2n.$$

Предполагая, что пион захватывается из S -состояния, имеем в качестве J^π для начальной системы 1^\pm в зависимости от того, каковы спин и четность пиона (0^+ или 0^-). Единственно допустимым (конечным) состоянием двух нейтронов с $J=1$ является состояние 3P_1 , т. е. нечетное состояние. Отсюда следует, что частицы π^\pm псевдоскалярные*.

Основной тип распада заряженных пионов

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu$$

имеет период полураспада $(25,51 + 0,26) \cdot 10^{-9}$ с, который для наших целей можно считать бесконечным. Основной тип распада π^0

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$$

имеет время жизни $(1,78 + 0,26) \cdot 10^{-16}$ с. Существование такого процесса означает, что спин π^0 -мезона не равен 1. Анализ углового распределения γ -квантов (точнее говоря, плоскостей двух e^+e^- -пар, рождающихся в связанном процессе внутренней конверсии) обнаруживает, что, если π^0 -мезон имеет нулевой спин, то его четность должна быть отрицательна.

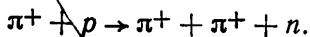
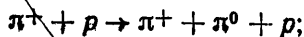
Для двух пионов (т. е. для двух тождественных бозонов) допустимы состояния: $T=0$, $J^\pi=0^+, 2^+, \dots$ и $T=1$, $J^\pi=1^-, 2^-, \dots$ Пожалуй, наиболее интересным из резонансов в системе двух пионов является тот, который не найден. Имеется в виду 0^+ резонанс с $T=0$, с малой массой (400—500 МэВ), играющий важную роль во многих моделях взаимодействия типа однобозонного обмена. Отсутствуют экспериментальные данные, которые указывали бы на существование резонанса с такой малой массой. Поэтому введение σ -мезона надо рассматривать, как способ приближенного описания сильного, но нерезонансного взаимодействия двух пионов в S -волне. Имеются, однако, указания о существовании двухпионного 0^+ -резонанса с $T=0$ (ϵ мезона) при энергии 720 МэВ с шириной около 50 МэВ [46, 34].

Были исследованы [33, 110] также следующие реакции:

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n;$$

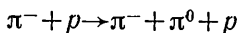
$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^0 + p;$$

* Краткое обсуждение данных, свидетельствующих в пользу захвата из S -состояния, дано в книге Газеоровича [40].

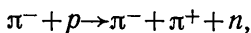


На графиках зависимости сечений первых трех реакций от инвариантной массы двух пионов $(\omega_\pi + \omega_{\pi'})^2 - (p_\pi + p_{\pi'})^2$ наблюдается сильный резонанс при 765 МэВ с шириной 125 МэВ. В четвертой из перечисленных реакций резонанс не был обнаружен. Это указывает на существование резонанса с $T=1$, известного под названием ρ -мезон. В системе покоя ρ -мезона угловое распределение пионов должно быть пропорционально $(P_f(\cos \theta))^2$. Анализ угловых распределений пары $(\pi^0\pi^-)$ показывает, что ρ -мезон имеет спин 1, а его четность должна быть отрицательна. Присутствие в амплитуде малой изотропной компоненты (приводящей к появлению в сечении слагаемого, пропорционального $\cos \theta$, и его асимметрии по отношению к направлениям вперед и назад) интерпретируется как указание на существование ε -мезона.

В реакции



был также обнаружен двухпионный резонанс при 1250 МэВ с шириной 100 МэВ [106], f^0 -мезон. Этого резонанса не наблюдают в реакции

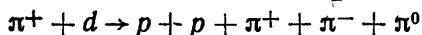


что указывает на следующие свойства f^0 -мезона: $T=0$, спин четный, четность положительна. Угловое распределение пары $(\pi^-\pi^0)$ содержит член $\cos^4 \theta$. Это означает, что для f^0 -мезона $J^\pi=2^+$. Данный тензорный мезон обычно не рассматривается в моделях однобозонного обмена. Только сравнительно большая масса f^0 -мезона и отсутствие сведений о силе его связи с нуклонами могут служить основанием для пренебрежения вкладом этого мезона. Заметим в этой связи, что можно считать f^0 -мезон расположенным на траектории Редже для ω -мезона (подобно тому, как мезон A_2 лежит на траектории ρ -мезона). Поэтому любая попытка включить внутреннюю структуру ω -мезонов (или ρ -мезонов) с помощью техники полюсов Редже влечет за собой тот или иной приближенный учет обмена мезонами f^0 (или A_2).

Система из трех пионов допускает намного большее богатство комбинаций (T, J^π) по сравнению с системой из двух пионов. По существу, для обоих возможных квантовых чисел изоспина $T=0$ и $T=1$ допустимы любые значения J^π , за одним интересным исключением. Из трех пионов невозможно образовать состояния 0^+ . (Это легко установить, рассматривая четность состояний, образованных парой пионов 1 и 2 с относительным угловым моментом l_{12} и третьим пионом с угловым моментом l_3 по отношению к центру масс пионов 1 и 2.) Скалярные мезоны с $T=1$, вводимые иногда в феноменологические модели однобозонного обмена с целью «тонкой подстройки» к сдвигам фаз нуклон-нуклонного рассеяния,

невозможно интерпретировать в терминах систем со степенями свободы для двух либо трех пионов.

Исследование инвариантной массы трех пионов в конечном состоянии реакции

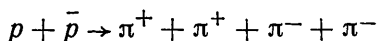


обнаруживает острый пик при $(548,7 \pm 0,5)$ МэВ, соответствующий изоскалярному η -мезону [3]. Тот факт, что распад идет в основном по каналу



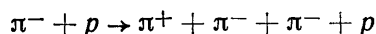
позволяет предположить, что время жизни η^0 сравнимо со временем жизни π^0 -мезона и спин η^0 не равен 1. Анализ углового распределения пионов из указанной выше реакции с помощью диаграммы Далитца показывает, что для η -мезона $J^\pi = 0^-$.

Исследование инвариантной массы в различных зарядовых состояниях конечной трехпионной системы в реакции

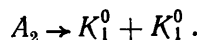
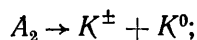


обнаруживает резкий резонанс только в канале $(\pi^+\pi^0\pi^-)$ [80]. Он соответствует ω -мезону ($T=0$) с массой 762 МэВ и шириной $(9,3 \pm \pm 1,7)$ МэВ. Спин и четность ω -мезона $J^\pi = 1^-$ были определены также из анализа углового распределения пионов.

Реакция

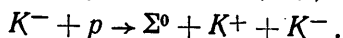
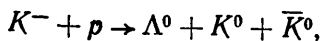
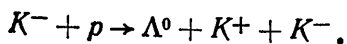


изучалась при энергии 3,2 ГэВ. Было обнаружено два максимума по инвариантной массе. Один из них расположен при 1090 МэВ, а другой — при 1320 МэВ с шириной около 80 МэВ [42]. Максимум с меньшей массой, известный под названием A_1 -мезон, распадается по каналу $(\pi\rho)$, но не распадается по каналу $(\pi\eta)$ либо $(K\bar{K})$. Данное наблюдение исключает комбинации спина — четности 0^+ , 1^- , 2^+ , ... для этого мезона. Наиболее приемлемо считать A_1 -мезон аксиально-векторной частицей с $J^\pi = 1^+$. Резонанс при 1320 МэВ, известный как A_2 -мезон, имеет две «моды» распада:

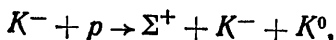


Существование первого канала распада означает, что A_2 — изовекторный мезон. Возможность распада на два тождественных бозона требует, чтобы мезон A_2 имел четный спин и положительную четность. Поскольку A_2 — резонанс в трехпионной системе, он не может иметь $J^\pi = 0^+$. Наиболее правдоподобными следует считать спин и четность 2^+ . В пользу этого свидетельствуют и данные по угловому распределению.

Отметим, наконец, что ϕ -мезон был обнаружен в спектре инвариантных масс каонов при 1020 МэВ с шириной $(3,1+0,6)$ МэВ в реакциях



Исключением была реакция



что указывает на изоскалярность ϕ -мезона [10]. Тот факт, что канал распада $(\pi^+\pi^-)$ сильно подавлен по сравнению с каналами распада $(K\bar{K})$, указывает на нечетность спина и отрицательную четность ϕ -мезона. Спин можно определить по величине отношения парциальных ширин распада по каналам $K^0 + \bar{K}^0$ и $K^+ + K^-$, оно приближенно равно $(p_0/p_{\pm})^{2J+1}$. Импульсы в системе центра масс для нейтральной (p_0) и заряженной (p_{\pm}) мод распада различаются из-за разности масс между K^0 и K^{\pm} ($m_{K^{\pm}} = (493,78 \pm \pm 0,17)$ МэВ, $m_{K^0} = (497,7 \pm 0,3)$ МэВ). Эти данные указывают на то, что $J^{\phi} = 1^-$. С точки зрения феноменологического описания нуклон-нуклонного взаимодействия ϕ -мезон является лишней степенью свободы, поскольку, за исключением массы, он эквивалентен ω -мезону. В связи с этим имеется значительная феноменологическая нечувствительность к способу распределения константы связи с нуклоном между ω - и ϕ -мезонами.

Заметим, что применимость приближения с нулевой шириной, общего для большинства описаний взаимодействия в терминах однобозонного обмена, не вызывает сомнений в случаях мезонов π , η , ω и ϕ . Оно менее удовлетворительно для ρ -мезона, а также для f^0 , A_2 , A_1 и ε -мезонов, которые обычно не включаются в модель. (В гл. 9 ρ -мезон рассматривался как резонанс с конечной шириной, а не как стабильная частица.) Справедливость приближения с нулевой шириной весьма сомнительна по отношению к « σ -мезонам» с $T=0$ и 1, которые не проявляются в виде резонансов в системах из двух или трех пионов.

За рамки рассмотренного списка попадают несколько аутсайдеров (т. е. известных резонансов с большими массами и более высокими спинами). Среди них интерес вызывают K -мезоны с $T = 1/2$. Это — псевдоскалярные частицы с гиперзарядом $Y = +1$ для случаев K^+ и K^0 и $Y = -1$ для K^- и \bar{K}^0 . Хотя они не могут вносить вклад в однобозонный обмен в нуклон-нуклонном взаимодействии, тем не менее существуют процессы обмена двумя каонами (с образованием Λ - и Σ -гиперонов в промежуточных состояниях), которые могут играть нетривиальную роль во взаимодействии.

Вопрос о константах связи с нуклонами для всех перечисленных мезонов, кроме пиона, связан со значительными экспериментальными неоднозначностями. Вообще говоря, нужно подкреп-

Лягь измеряющиеся по этому поводу данные с помощью кварковой модели. Константа связи для обмена пюном была определена двумя способами. Гамильтон и Вулкок [48] проанализировали данные по упругому $\pi^\pm p$ -рассеянию. Применяв дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния вперед, они получили значение

$$g_{NN\pi}^2/(4\pi) = 14,5 \pm 0,4.$$

При фазовом анализе NN -рассеяния обычно применяется процедура параметризации сдвигов фаз в более высоких парциальных волнах (например, с $L \geq 5$) в терминах величин, ожидаемых из механизма однопионного обмена. Константа связи $NN\pi$ выступает при этом как единственный подгоночный параметр. Таким методом в фазовом анализе, зависящем от энергии, Мак-Грегор и др. [75] получили константу связи

$$g_{NN\pi}^2/(4\pi) = 14,72 \pm 0,83.$$

Фазовые анализы NN -рассеяния при одной энергии, вообще говоря, не позволяют определить $g_{NN\pi}$ со сравнимой точностью, хотя работа Чао в этом направлении является обнадеживающей [22].

Прежде чем обсуждать экспериментальные данные для других констант связи, полезно дать сводку некоторых результатов, полученных по модели кварков. Основным строительным материалом служит изоспиновый дублет нестранных кварков (типа p и n) и изосинглетный странный кварк (типа λ). Всем кваркам приписывается спин $1/2$. При этом, однако, предполагается, что волновые функции многокварковых систем симметричны относительно замены пространственных, спиновых и изоспиновых координат, а также координат, характеризующих странность. Нуклоны (и другие 6 членов барионного октета с $S=1/2$) формируются из трех кварков (p - и n -типа) и описываются полностью симметричной пространственной волновой функцией с $L=0$, спиновой (для $S=1/2$) волновой функцией со смешанной симметрией и волновой функцией в пространстве изоспина (с $T=1/2$) и странности ($S=0$) также со смешанной симметрией. В частности, для протона можно записать спиновую, изоспиновую, гиперзарядовую функцию в форме

$$\begin{aligned} |P\rangle = (1/3\sqrt{2}) [2(p \uparrow p \uparrow n \downarrow) - (p \uparrow p \downarrow n \uparrow) - (p \downarrow p \uparrow n \uparrow) - (p \uparrow n \uparrow p \downarrow) + \\ + 2(p \uparrow n \downarrow p \uparrow) - (p \downarrow n \uparrow p \uparrow) - (n \uparrow p \uparrow p \downarrow) - (n \uparrow p \downarrow p \uparrow) + \\ + 2(n \downarrow p \uparrow p \uparrow)]. \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

Легко убедиться в том, что этой функции отвечают $S=1/2$ и $T=1/2$, применив соответствующие операторы, изменяющие проекцию спина на ось z на 1. Здесь стрелки отвечают проекциям спина на $\pm 1/2$.

Нестранные векторные мезоны ρ , ω и ϕ описываются как связанные состояния пары кварк — антикварк с пространственной

волновой функцией для $L=0$ и спиновой волновой функцией для спина $S=1$. Изоспин-гиперзарядовые волновые функции имеют странность нуль, $T=1$ для ρ -мезона и $T=0$ для мезонов ω и ϕ . Очевидно, что волновая функция для ρ -мезона не может содержать странных кварков и должна быть взята в виде

$$|\rho^0\rangle = (1/2)[p\bar{p} - n\bar{n}][\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow], \quad (\text{Б.2})$$

где вызывающий недоумение знак минус — следствие того, что кварк и антикварк связываются в состояние с полным изоспином $T=1$. Физическим мезонам ω и ϕ отвечают ортогональные линейные комбинации состояний

$$\sqrt{1/6}[2\lambda\bar{\lambda} - p\bar{p} - n\bar{n}]; \quad (\text{Б.3})$$

$$\sqrt{1/3}[\lambda\bar{\lambda} + p\bar{p} + n\bar{n}], \quad (\text{Б.3a})$$

где спиновые волновые функции опущены. Априори в кварковой модели нельзя задавать конкретных комбинаций. Состояния с волновыми функциями (Б.3) и (Б.3a) есть как раз октетно и синглетное состояния соответственно из схемы $SU(3)$. Неудача в применении массовых формул Гелл-Мана — Окубо к векторным мезонам наводит на мысль о том, что ω - и ϕ -мезоны не описываются волновыми функциями схемы с $SU(3)$ -симметрией. Обобщенные формулы масс, отношение ширины для распадов $\phi \rightarrow K\bar{K}$ и $\rho \rightarrow \pi^+\pi^-$, а также тот факт, что ϕ -мезон не распадается по каналу $\rho\lambda$, ведут к заключению, что волновые функции ϕ и ω равны

$$|\phi T=0 Y=0\rangle = \lambda\bar{\lambda}, \quad (\text{Б.4})$$

$$|\omega T=0 Y=0\rangle = \sqrt{1/2}[p\bar{p} + n\bar{n}]. \quad (\text{Б.4a})$$

Относительные величины констант связи ρ -, ω - и ϕ -мезонов с нуклонами можно оценить различными способами, исходя из механизма, в котором антикварки векторных мезонов могут аннигилировать с кварками нуклонов. Такая процедура изображена графически на рис. 49. Говоря конкретно, члены, отвечающие кваркам (антикваркам) в волновых функциях мезонов, даваемых равенствами (Б.2) и (Б.4), рассматривались как операторы рождения (уничтожения) кварков и вычислялись отношения матричных элементов вида $\langle N|V|N\rangle$. Например, оператор $\bar{n}\uparrow$ уничтожает кварк типа n со спином, направленным «вниз», а оператор $n\uparrow$ рождает кварк типа n со спином, направленным «вверх».

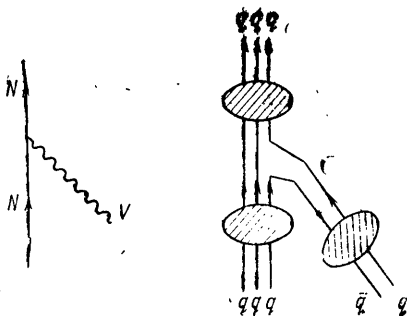


Рис. 49. Схематическая картина мезон-нуклонной связи в кварковой модели

Поскольку нуклон содержит только нестранные кварки, сразу ясно, что $g_{NN\phi}^2 = 0$. Константы связи для ω - и ρ -мезонов в кварковой модели удовлетворяют соотношению

$$g_{NN\omega}^2/g_{NN\rho}^2 = 9. \quad (\text{Б.5})$$

Это равенство дает одновременно верхнюю границу для указанного отношения констант связи в кварковой модели.

Рассмотренные константы связи можно оценить эмпирически с помощью электромагнитных форм-факторов нуклонов, привлекая ту или иную форму доминантности векторных мезонов (см. § 6.3). Хотя эти форм-факторы содержат произведение $g_{NNV}g_{V\gamma}$ (см. рис. 21), константы связи V_γ могут быть определены независимо из распадов векторных мезонов по каналам (e^+e^-) и $(\mu^+\mu^-)$. Факторы κ_V и κ_S можно оценить по изовекторному и изоскалярному магнитным моментам нуклона соответственно. Если постулировать строгую векторную доминантность и положить константу $g_{NN\phi}$ равной нулю, то остальные константы связи однозначно определяются аномальными (магнитными) моментами нуклонов и величиной $g_{V\gamma}^2/(4\pi)$, что дает

$$g_{NN\rho}^2/(4\pi) = 0,43 \pm 0,10, \quad \kappa_V = 3,71,$$

$$g_{NN\omega}^2/(4\pi) = 2,01 \pm 0,26, \quad \kappa_S = -0,12.$$

Непосредственный анализ нуклонных форм-факторов с ослаблением жестких требований строгой доминантности векторных мезонов ([59], а также частное сообщение Ячелло) приводит к значениям $g_{NN\rho}^2/(4\pi) = 0,37 \pm 0,18$ и $g_{NN\omega}^2/(4\pi) = 6,43 \pm 2,63$. Независимая оценка $g_{\rho}^2/(4\pi)$ и κ_V может быть получена из P -волновой амплитуды процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$, данной Нильсеном и Оадесом, которая обсуждалась в гл. 8. Эту амплитуду можно аппроксимировать с помощью четырехугольной и перекрестной диаграмм и ρ -мезонного полюса с конечной шириной при значениях констант $g_{\rho}^2/(4\pi) = 0,68$ и $\kappa_V = 4,33$. Подчеркнем, что отношение из равенства (Б.5) является верхней границей в кварковой модели. Очень большие значения $g_{\omega}^2/(4\pi)$, используемые зачастую в феноменологических моделях однобозонного обмена, не согласуются с данными о нуклонных форм-факторах или с кварковой моделью. Важно отметить, что как величина

$$g_{\omega NN} g_{\omega\gamma} + g_{\phi NN} g_{\phi\gamma},$$

дающая вклад в электромагнитные форм-факторы, так и величина

$$g_{\omega NN}^2 + g_{\phi NN}^2,$$

дающая вклад в нуклон-нуклонное взаимодействие, в приближении равных масс ω - и ϕ -мезонов не зависят от угла смешивания $\phi - \omega$. Метод определения вклада в нуклон-нуклонное взаимодействие

от обмена изоскалярными векторными мезонами с использованием электромагнитных форм-факторов не чувствителен к предположению, что $g_{\phi NN} = 0$.

Успех массовых формул Гелл-Мана — Окубо в описании масс псевдоскалярных мезонов наводит на мысль о том, что изоспин-гиперзарядовая волновая функция η -мезона описывается волновой функцией октета в схеме $SU(3)$ из равенства (Б.3):

$$|\eta\rangle = \sqrt{1/12} [2\lambda\lambda - \rho\rho - n\eta] [|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle]. \quad (\text{Б.6})$$

Синглетное состояние схемы $SU(3)$ из равенства (Б.3а) обычно отождествляют с мезоном X^0 (960 МэВ), наблюдаемым в спектре по инвариантной массе нейтральных частиц в реакции



Волновая функция π -мезона однозначно определяется как

$$|\pi\rangle = \sqrt{1/2} [\rho\rho - n\eta]. \quad (\text{Б.7})$$

Вычисление матричных элементов $\langle N|\pi, \eta, X^0|N\rangle$, подобное описанному выше, дает следующие предсказания для кварковой модели:

$$g_{NN\eta}^2/g_{NN\pi}^2 = 3/25; \quad g_{NNX^0}^2/g_{NN\pi}^2 = 6/25. \quad (\text{Б.8})$$

Учитывая сравнительно большие массы и малость констант связи η и X^0 -мезонов с нуклоном, получаемых в кварковой модели, можно, по-видимому, без опасений пренебречь их вкладом в нуклон-нуклонное взаимодействие. При экспериментальных оценках величины $g_{NN\eta}$ из анализа процессов рождения η -мезона в πp -реакции не было получено убедительных результатов. Однако они и не противоречат приведенному отношению [105]. Поскольку экспериментальная информация скудная, полезно отметить, что [при произвольной смеси состояний η и X^0 из (Б.3)] в кварковой модели $g_{\eta}^2/g_{\pi}^2 < 9/25$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of mathematical functions. Dover Publications, 1965.
2. Adler S. «Phys. Rev. B», 1965, v. 137, p. 1022.
3. Alif e. a. «Phys. Rev. Lett.», 1962, v. 9, p. 325.
4. Amati D., Leader E., Vitale B. «Nuovo cimento», 1960, v. 17, p. 68.
5. Amati D., Leader E., Vitale B. «Nuovo cimento», 1960, v. 18, p. 409.
6. Amati D., Leader E., Vitale B. «Phys. Rev.», 1963, v. 130, p. 750.
7. Appelquist T., Primack J. R. «Phys. Rev. D», 1971, v. 4, p. 2454.
8. Arenhövel H., Danos M., Williams H. T. «Phys. Lett B», 1970, v. 31, p. 109.
9. Austern N. «Nucl. Phys.», 1958, v. 7, p. 195.
10. Bertanza L. e. a. «Phys. Rev. Lett.», 1962, v. 9, p. 180.
11. Bethe H. A., Longmire C. «Phys. Rev.», 1950, v. 77, p. 647.
12. Бете Г., Моррисон Ф. Элементарная теория ядра, Нью-Йорк, 1956. Пер. с англ. О. В. Владимировой. Под ред. В. Б. Берестецкого. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
13. Breit G. «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1960, v. 46, p. 746; «Phys. Rev.», 1960, v. 120, p. 287.
14. Breit G. «Phys. Rev.», 1947, v. 71, p. 400.
15. Breit G., Bloch I. «Phys. Rev.», 1947, v. 72, p. 135.
16. Breit G., Condon E. U., Present R. A. «Phys. Rev.», 1936, v. 50, p. 825.
17. Breit G., Huli M. H., Lassila K. E., Pyatt K. D. «Phys. Rev.», 1960, v. 120, p. 2227.
18. Breit G., Rustgi M. L. «Nucl. Phys. A», 1971, v. 161, p. 337.
19. Breit G., Thaxton H. M., Eisenbud L. «Phys. Rev.», 1939, v. 55, p. 1018.
20. Brueckner K. A., Watson K. M. «Phys. Rev.», 1953, v. 92, p. 1023.
21. Chadwick J., Goldhaber M. «Nature», 1935, v. 134, p. 237.
22. Chao Y. «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 25, p. 309.
23. Chao Y., Jackson A. «Nucl. Phys. A», 1973, v. 215, p. 157.
24. Chemtob M., Durso J. W., Riska D. O. «Nucl. Phys. B», 1972, v. 38, p. 141.
25. Chemtob M., Rho M. «Nucl. Phys. A», 1971, v. 163, p. 1.
26. Chemtob M., Riska D.-O. «Phys. Lett B», 1971, v. 35, p. 115.
27. Chew G., Goldberger M., Low F., Nambu Y. «Phys. Rev.», 1957, v. 106, p. 1377.
28. Cohen H. «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 1738.
29. Gottingham W. N., Lacombe M., Loiseau B., Richard J. M., Vinh Mau R. «Phys. Rev. D», 1973, v. 8, p. 800.
30. Cox A. E., Wynchank S. A. R., Collie C. H. «Nucl. Phys.», 1965, v. 74, p. 497.
31. Cutkosky R. E., Leon M. «Phys. Rev. B», 1964, v. 135, p. B1445.
32. Erkelenz K., Holidne K. «Nucl. Phys. A», 1972, v. 194, p. 161.
33. Erwin A. e. a. «Phys. Rev. Lett.», 1961, v. 6, p. 628.
34. Feldman M. e. a. «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 14, p. 869.
35. Fierz M. «Z. Phys.», 1937, Bd 104, S. 553.
36. Frazbane P. M., Sullivan J. D. «Phys. Rev. D», 1971, v. 4, p. 458.
37. Frazer W. R., Fulco J. R. «Phys. Rev.», 1960, v. 117, p. 1603.
38. Fried H. M. Functional method in quantum field theory. Cambridge, MIT Press, Mass., 1972.
39. Fried H. M., Faisser T. K. «Phys. Rev.», 1969, v. 179, p. 1491.
40. Gaseorowicz S. Elementary particle physics. N. Y., Wiley, 1966, p. 229.
41. Goldberger, Nambu, Oehme. «Ann. Phys.», 1957, v. 2, p. 226.
42. Goldhaber G. e. a. «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 12, p. 336.
43. Gordon W. «Z. Phys.», 1928, Bd 50, S. 630.

44. Gross F. «Phys. Rev.», 1969, v. 186, p. 1448.
45. Haapakoski P. «Phys. Lett. B», 1974, v. 48, p. 307.
46. Hagopian V. e. a. «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 14, p. 1077.
47. Hamada T., Johnston I. D. «Nucl. Phys.», 1962, v. 34, p. 382.
48. Hamilton J., Woolcock W. S. «Rev. Mod. Phys.», 1963, v. 35, p. 737.
49. Harms E., Newton V. «Phys. Rev. C», 1970, v. 2, p. 1214.
50. Hockett J., Jackson A. D. «Phys. Lett.» (to be published).
51. Hofstadter. Nuclear and nucleon structure. N. Y., Benjamin, 1963.
52. Höhler G., Strauss R. «Z. Phys.», 1970, Bd 232, S. 205.
53. Höhler G., Strauss R., Wunder H. Karlsruhe preprint, 1968.
54. Hossein Partovi M., Lomon E. L. «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 1999.
55. Hull M. H., Lassila K. E., Ruppell H. M., McDonald F. A., Brett G. «Phys. Rev.», 1961, v. 122, p. 1606.
56. Hulthén L. «Rev. Mod. Phys.», 1951, v. 23, p. 1.
57. Iachello F., Jackson A. D., Lande A. «Phys. Lett. B», 1973, v. 43, p. 191.
58. Islam M. M. «Nuovo cimento A», 1971, v. 5, p. 315.
59. Jackson A. D., Iachello F., Lande A. «Phys. Lett. B», 1973, v. 43, p. 191.
60. Jackson A. D., Lande A., Riska D.-O. «Phys. Lett. B», 1975, v. 55, p. 23.
61. Jackson A. D., Maximon L. C. «SIAM J. Math. Anal.», 1972, v. 3, p. 446.
62. Jackson A. D., Riska D.O., Ver West B. «Nucl. Phys. A», 1975, v. 249, p. 397.
63. Jacob M., Wick G. C. «Ann. Phys.», 1959, v. 7, p. 404.
64. Kadychevsky V. G. «Nucl. Phys. B», 1968, v. 6, p. 125.
65. Kellog J. M. B., Rabi I. I., Zacharias J. R. «Phys. Rev.», 1939, v. 55, p. 318.
66. Ketley I. J., Martin T. P., Taylor J. G. «Nucl. Phys. B», 1971, v. 34, p. 567.
67. Kloet W. M., Tjon J. A. «Phys. Lett. B», 1974, v. 49, p. 419.
68. Kouri D. J., Levin F. S. «Phys. Lett. B», 1974, v. 48, p. 203.
69. Kowalski K. L. «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 15, p. 798 (erratum 1965, v. 15, p. 908).
70. Lacombe M. e. a. Proc. 6th Int. Conf. on few-body problems. Montreal, 1974.
71. Ландау Л., Смородинский Я. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1944, т. 14, с. 269.
72. Levine M. J., Wright J., Tjon J. A. «Phys. Rev.», 1967, v. 154, p. 1433.
73. Lomon E. L. «Comments on nuclear and particle physics», 1970, v. 4, p. 28.
74. Lomon E. L., Wilson R. «Phys. Rev. C», 1974, v. 9, p. 1329.
75. MacGregor M. H. e. a. «Phys. Rev.», 1968, v. 169, p. 1128.
76. MacGregor M. H., Arndt R. A., Wright R. M. «Phys. Rev.», 1968, v. 169, p. 1149.
77. MacGregor M. H., Arndt R. A., Wright R. M. «Phys. Rev.», 1968, v. 173, p. 1272.
78. MacGregor M. H., Arndt R. A., Wright R. M. «Phys. Rev.», 1969, v. 182, p. 1714.
79. MacGregor M. H., Arndt R. A., Wright R. M. «Phys. Rev.», 1969, v. 182, p. 1747.
80. Maglic B. e. a. «Phys. Rev. Lett.», 1961, v. 7, p. 178.
81. Mandelstam S. «Proc. Roy. Soc. A», 1956, v. 237, p. 496.
82. Mandelstam S. «Phys. Rev.», 1958, v. 112, p. 1344.
83. Mandelstam S. «Phys. Rev. Lett.», 1960, v. 4, p. 84.
84. McCarthy J. S. e. a. «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 25, p. 884.
85. Moravcsik M. J., Gosh P. «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 32, p. 321.
86. Morgan D., Shaw G. «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 520.
87. Mott N. F., Massey H. S. W. Theory of atomic collisions, 2nd ed. Oxford, Clarendon Press, 1949, p. 303. См. пер.: Мотт Н., Мессси Г. Теория атомных столкновений. М., «Мир», 1969.
88. Nakanishi N. «Suppl. Progr. Theor. Phys.», 1969, v. 43.
89. Newton R. G. Scattering theory of waves and particles. N. Y., McGraw—Hill, 1966. См. пер.: Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М., «Мир», 1969.
90. Nielsen H. «Nucl. Phys. B», 1971, v. 33, p. 153.
91. Nielsen H., Lyng Petersen J., Pietarinen E. «Nucl. Phys. B», 1970, v. 22, p. 525.
92. Nielsen H., Oades G. C. «Nucl. Phys. B», 1972, v. 49, p. 573.
93. Nielsen H., Oades G. C. «Nucl. Phys. B», 1972, v. 49, p. 586.

94. Nielsen H., Oades G. C. (to be published).
95. Noyes H. P. «Nucl. Phys.», 1975, v. 74, p. 508 (erratum A, 1967, v. 95, p. 705).
96. Partovi M. H., Lomon E. H. «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 1999.
97. Pauli W. Proc. L'inst. H. Poincaré, 1936, v. 6, p. 109.
98. Reid Jr. R. V. «Ann. Phys.», 1968, v. 50, p. 411.
99. Reid Jr. R. V., Vaida M. L. «Phys. Rev. Lett.», 1972, v. 29, p. 494; 1975, v. 34, p. 1064.
100. Renard F. M. e. a. «Nuovo cimento», 1965, v. 38, p. 565, 1688.
101. Riska D.-O., Brown G. E. «Phys. Lett. B», 1972, v. 38, p. 193.
102. Sachs R. G., Austern N. «Phys. Rev.», 1951, v. 81, p. 705.
103. Salpeter E. E., Bethe H. A. «Phys. Rev.», 1951, v. 84, p. 1232.
104. Samarmyake V. K., Woolcock W. S. «Phys. Rev. Lett. B», 1965, v. 15, p. 936.
105. Samios N. P., Golding M., Meadow B. T. «Rev. Mod. Phys.», 1974, v. 46, p. 49.
106. Selove W. e. a. «Phys. Rev. Lett.», 1963, v. 9, p. 272.
107. Sher M., Signell P., Heller L. «Ann. Phys.», 1970, v. 58, p. 1.
108. Signell P., Holdemann J., Jr. «Phys. Rev. Lett.», 1971, v. 27, p. 1393.
109. Slaus I., Moszkowski S. A., Haddock R. P., van Oers W. T. H. eds. Amsterdam, North-Holland, 1972.
110. Stonehill D. e. a. «Phys. Rev. Lett.», 1961, v. 6, p. 624.
111. Судаков В. В. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1956, т. 30, с. 87.
112. Tabakin F. «Phys. Rev.», 1969, v. 177, p. 1443.
113. Taketani H., Machida A., Ohnuma H. «Prog. Theor. Phys.», 1952, v. 7, p. 45.
114. Thompson R. H. «Phys. Rev. D», 1970, v. 1, p. 1738.
115. Tromborg B., Hamilton J. «Nucl. Phys. B», 1974, v. 76, p. 483.
116. Van Kampen N. «Phys. Rev.», 1953, v. 89, p. 1972.
117. Vinh Mau R., Richard J. M., Loiseau B., Lacombe M., Cottingham W. M. «Phys. Lett. B», 1973, v. 44, p. 1.
118. Wahlborn S., Blomqvist J. «Nucl. Phys. A», 1969, v. 133, p. 50.
119. Weinberg S. «Phys. Rev.», 1963, v. 131, p. 440.
120. Weinberg S. «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 17, p. 616.
121. Weinberg S. «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 18, p. 188.
122. Weinberg S. «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 674, 3085.
123. Wentzel G. Quantum theory of fields. Interscience Publishers, Inc., 1949. См. пер.: Вентцель Г. Введение в квантовую теорию волновых полей. М.—Л., 1947.
124. Wilkinson J. H. The algebraic eigenvalue problem. Oxford, 1965, ch. 4.
125. Wilson R. The nucleon-nucleon interaction. N. Y.—London, Interscience Publishers, Wiley, 1963.
126. Wilson R. Proc. Conf. on neutron cross section standards, Argonne Natl Lab., 1970.
127. Woloshyn R. M., Jackson A. D. «Nucl. Phys. B», 1973, v. 64, p. 269.
128. Yang S. N., Jackson A. D. «Phys. Lett. B», 1972, v. 36, p. 1.
129. Yoder N. R., Signell P. «Bull. Amer. Phys. Soc.», 1967, v. 12, p. 50.
130. Yost F. L., Wheeler J. A., Breit G. «Phys. Rev.», 1937, v. 49, p. 174.

АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амплитуда причинная 148—150
— спиральная 159—164, 167—169
- Бозон векторный 120
- Взаимодействие спин-орбитальное 9
— Юкавы 5, 8
- Виртуальная пара 406 41, 143
- Дейтрон 11—28
- Диаграмма нуклонная квадратная 142—145, 155, 174, 209, 211
- Диполь электрический 31
- Длина рассеяния 13, 181
- Захват (нейтронов протонами) 37
- Звезды нейтронные 224
- Инварианты Гольдбергера — Намбу — Оме (ГНО) 183—188, 190
— фермиевские 183—188, 196
- Интеграл дисперсионный 164
- Калибровочный член 38
- Каналы связанные 81, 127, 225
- Кварковая модель 115, 208, 220, 224, 238—241
- Кроссинг-матрица изоспиновая 138, 139
- Мезон векторный 8, 9
— скалярный 8
— тензорный 235
- Момент дираковский 30
— квадрупольный 19, 72, 226
— магнитный 29, 24
— обменных токов 39
- Независимость зарядовая 126
- Нейтроны тепловые 17
- Обмен двухпионный 10, 139, 142—183, 199
— однопионный 9, 22, 38, 144, 197
- Обращение времени 126, 233
- Оператор изоспина 8
— проекционный 108
- Отталкивание короткодействующее 94, 218, 224
- Параметр смешивания ϵ 73
- Подавление пар 98, 109, 143, 177
- Потенциал локальный 62, 69, 85, 94
— Риды 26, 45, 75, 80, 91, 144, 218, 227—233
— сепарабельный 68—89
— феноменологический 225—233
— эмпирический 17
— Юкавы 63, 87, 91, 101, 140, 146
- Поле мезонное 5, 7
- Поправка к магнитному моменту, паулевская релятивистская 30
- Представление Мандельстама 5, 148—154, 184
— спиральности 121, 132
- Преобразование Фирца 194—196
- Приближение лестничное 97, 105, 110, 131
— эйкональное 111—119, 140
- Пропагатор 97, 100, 107, 112, 121, 131
- Радиус эффективный 15, 16, 26, 54—60
- Рассеяние кулоновское 41, 50
— пион-нуклонное 143, 154, 170—172
- Связь псевдоскалярная 134
- Сдвиг фазовый 8, 52, 70, 82—84, 103—106, 120, 121, 139—141
- Сечение Мотта 43
— фоторасщепления 31—36
- Силы тензорные 22
- Состояние многопионное 120
— связанное 11, 70—74, 82
- Теория дисперсионная 146, 197, 221
— мягкопионная 170
- T-матрица 62—93
- Ток обменный 37—41
- Траектория Редже 164, 165, 235
- Уравнение Бете — Солпитера 7, 96—106
— Бланкенбеклера — Шугара 96—100, 197, 210
— Липпмана — Швингера 61, 64—77, 85—98, 198, 210, 225
— Лоу 66, 67
- Фактор кулоновского отталкивания 55
- Форм-фактор зарядовый 42, 72
— квадрупольный 42
— магнитный 43, 116
— нуклонный 109—119
- Энергия связи 4, 12, 17
- Яма прямоугольная 11, 69

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1	
Общие свойства взаимодействия	4
§ 1.1. Введение	4
§ 1.2. Прimitивная мезонная теория; вывод взаимодействия Юкавы	5
Глава 2	
Дейтрон и рассеяние нейтронов на протонах при низкой энергии	11
§ 2.1. Дейтрон	11
§ 2.2. Длина рассеяния	13
§ 2.3. Эффективный радиус	14
§ 2.4. Экспериментальные данные и феноменологические потенциалы *	17
§ 2.5. Квадрупольный момент дейтрона и примесь D -волны	19
§ 2.6. Обобщение приближения эффективного радиуса	26
Глава 3	
Электромагнитные свойства дейтрона. Взаимодействие с излучением	29
§ 3.1. Магнитный момент	29
§ 3.2. Фоторасщепление дейтрона	31
§ 3.3. Вклад обменных токов	37
§ 3.4. Электромагнитные форм-факторы дейтрона	41
Глава 4	
Рассеяние протонов на протонах	49
§ 4.1. Введение	49
§ 4.2. Теория протон-протонного рассеяния	50
§ 4.3. Теория эффективного радиуса для протон-протонного рассеяния	54
Глава 5	
Некоторые результаты из теории рассеяния	61
§ 5.1. Введение	61
§ 5.2. Сепарабельные потенциалы	68
§ 5.3. Сепарабельные разложения произвольных потенциалов	77
§ 5.4. Обратная задача рассеяния для сепарабельных потенциалов ранга 1	81
§ 5.5. Уравнения N/D -метода	85
§ 5.6. Численные решения уравнения Липпмана — Швингера	90
Глава 6	
Релятивистский формализм. Нуклонные форм-факторы	94
§ 6.1. Релятивистские уравнения для амплитуды рассеяния	94
§ 6.2. Релятивистские уравнения для амплитуды рассеяния фермионов	106
§ 6.3. Нуклонные форм-факторы	109

Глава 7	
Вклады однобозонного обмена в нуклон-нуклонное взаимодействие	120
§ 7.1. Парциальные волны и состояния с определенной спиральностью	121
§ 7.2. Амплитуды однобозонного обмена	129
§ 7.3. Некоторые численные результаты	139
Глава 8	
Взаимодействие, связанное с двухпионным обменом	142
§ 8.1. Введение	142
§ 8.2. Схема выкладок	146
§ 8.3. Формализм	147
§ 8.4. Требования аналитичности	153
§ 8.5. Использование спиральных амплитуд	159
§ 8.6. Асимптотическое поведение амплитуд	164
§ 8.7. Процедура вычислений	170
§ 8.8. Определение спиральных амплитуд $f_{+}^{J=0}$ и $f_{\pm}^{J=1}$ для процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$	174
§ 8.9. Рассмотрение высоких парциальных волн в нуклон-нуклонном канале	182
Дополнение А. Соотношения между различными наборами инвариантов	183
Дополнение Б. Вычисление весовых функций ρ_j^{\pm}	188
Дополнение В. Преобразование Фирца	194
Глава 9	
Построение потенциала	197
§ 9.1. Введение	197
§ 9.2. Итерирование для потенциала однопионного обмена	198
Глава 10	
Выводы и обсуждение	208
Дополнение А. Нуклон-нуклонные сдвиги фаз и феноменологические потенциалы	225
Дополнение Б. <i>Dramatis Personae</i>	233
Список литературы	242
Алфавитно-предметный указатель	245

ИБ № 707

НУКЛОН-НУКЛОНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Дж. Е. Браун, А. Д. Джексон

Редактор **Т. С. Лим**
Художественный редактор **А. Т. Кирьянов**
Технический редактор **А. А. Белоус**
Корректор **Н. А. Музыкантова**

Сдано в набор 07.02.79. Подписано к печати 13.09.79. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага кн.- журн. Литературная гарнтура. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,5. Уч.-изд. л. 16,03. Тираж 2000 экз. Зак. изд. 76395. Зак. тип. 103. Цена 2 р. 70 к.

Атомиздат, 103031 Москва, ул. Ждаиова, 5.

Московская типография № 6 Союзполнграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полнграфни и книжной торговли. 109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.