И. П. Волобуев, Ю. А. Кубышин

Дифференциальная геометрия и алгебры Ли

и их приложения в

ТЕОРИИ ПОЛЯ

URSS

Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Научно-Исследовательский Институт Ядерной Физики
им. Д. В. Скобельцына

И. П. ВОЛОБУЕВ, Ю. А. КУБЫШИН

Дифференциальная геометрия и алгебры Ли и их приложения в теории поля

Эдиториал УРСС
Москва, 1998

Игорь Павлович Волобуев, Юрий Александрович Кубышин. Дифференциальная геометрия и алгебры Ли и их приложения в теории поля. М.: Эдиториал УРСС, 1998. — 224 с.

В книге излагаются основы дифференциальной геометрии и теории алгебр Ли, а также описание теории калибровочных полей на геометрическом языке. В качестве приложений этого аппарата обсуждаются размерная редукция калибровочных теорий и задача спонтанной компактификации.

Книга рассчитана на студентов старших курсов, аспирантов и научных работников-математиков и физиков-теоретиков.

Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (*проект* № 97–02–30032)

Группа подготовки издания:

Директор — Доминго Марин Рикой
Заместители директора — Наталья Финогенова, Ирина Макеева
Компьютерный дизайн — Виктор Романов, Василий Подобед
Верстка — Наталия Бекетова, Леонид Иосилевич
Редактор — Виктория Малышенко
Обработка текста и графики — Светлана Бондаренко, Наталья Аринчева

Издательство «Эдиториал УРСС». 113208, г. Москва, ул. Чертановская, д. 2/11, ком. прав.
Лицензия ЛР № 064418 от 24.01.96 г. Подписано к печати 28.08.98 г.
Формат 70×100/16. Тираж 1000 экз. Печ. л. 14. Зак. № 311
Отпечатано в АООТ «Политех-4». 129110, г. Москва, Б. Переяславская, 46.

ISBN 5–901006–70–4

Предисловие

«Чистая математика и физика становятся связанными все теснее, хотя их методы и остаются различными. Можно сказать, что математик играет в игру, в которой он сам изобретает правила, в то время как физик играет в игру, правила которой предлагает Природа, однако с течением времени становится все более очевидным, что правила, которые математик находит интересными, совпадают с теми, которые избрала Природа. Трудно предсказать, каков будет результат всего этого. Возможно, оба предмета в конце концов сольются, и каждая область чистой математики будет иметь физические приложения, причем их важность в физике станет пропорциональна их интересности в математике.» Кажется, что это пророчество Дирака[1] начинает сбываться, по крайней мере в том, что касается дифференциальной геометрии и калибровочных теорий поля.

Действительно, экспериментальное подтверждение единой теории электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама—Глэшоу, в особенности открытие промежуточных векторных бозонов, и успехи квантовой хромодинамики, по меньшей мере непротиворечиво описывающей сильные взаимодействия, дают серьезные основания полагать, что в основе теории взаимодействия элементарных частиц лежит фундаментальный физический принцип локальной калибровочной инвариантности. Основанная на этом принципе стандартная модель взаимодействий элементарных частиц, включающая в себя теорию электрослабых взаимодействий и квантовую хромодинамику, в настоящее время хорошо согласуется практически со всеми имеющимися экспериментальными данными, а последовательное его применение позволяет выйти за рамки этой модели и существенно продвинуться вперед в программе объединения всех видов взаимодействий в одно универсальное путем построения калибровочных теорий великого объединения.

Разработанный к настоящему времени аппарат квантовой теории поля, основанный на теории возмущений, в принципе, достаточен для расчета физических процессов, которые наблюдаются или будут наблюдаться в ближайшее время в экспериментах по физике высоких энергий. Однако хорошо известно, что калибровочные теории обладают многочисленными структурами, для изучения которых требуется выход

---

[1] *P. A. M. Dirac*. The relation between mathematics and physics. Proc. of the Royal Soc. Edinburgh A. Vol. 59, (1938—1939), p. 122—129. Русский перевод в сб.: *П. А. М. Дирак*. К созданию квантовой теории поля. М.: Наука, 1990. С. 245—254.

за рамки теории возмущений. К ним относятся инстантонные и монопольные решения, сложная структура вакуума, топологические модели и модели Черна—Саймонса, — в общем, все те явления, где проявляется геометрическая и топологическая природа калибровочных теорий.

Как и следовало ожидать, изучение этой стороны калибровочных теорий потребовало применения нового аппарата, и оказалось, что необходимый математический аппарат уже был разработан или находился в стадии разработки. Основные части этого аппарата включают дифференциальную геометрию, в первую очередь теорию расслоенных пространств и теорию связностей, алгебраическую топологию, теории групп и алгебр Ли. Геометризация калибровочных теорий произошла вполне естественно и позволила, во-первых, более глубоко понять уже известные факты (как, например, неоднозначности Грибова), а во-вторых, обнаружить ряд совершенно новых свойств и явлений (структура вакуума, структура пространства модулей инстантонных решений, интерпретация теории Дональдсона—Флоера как топологической квантовой теории, инвариантные связности и т. д.).

Цель настоящей книги, во-первых, познакомить студентов, специализирующихся по теоретической физике, и специалистов, работающих в этой области, с основами математического аппарата дифференциальной геометрии и теории конечномерных алгебр Ли. По мнению многих преподавателей университетов, которое мы вполне разделяем, основные сведения из этих разделов математики уже давно должны были бы стать частью обязательных курсов по математическим методам современной теоретической физики. Так как на большинстве физических факультетов подобные курсы либо отсутствуют, либо ограничиваются, по-существу, изложением теории конечномерных групп Ли, при написании настоящей книги мы попытались частично восполнить этот пробел. Во-вторых, — и это имеет прямое отношение к основной теме книги — мы ставим целью дать введение в геометрическое описание калибровочных теорий на языке расслоений и связностей.

При отборе материала мы не стремились охватить все основные классические результаты дифференциальной геометрии. В настоящее время для этого имеются многочисленные монографии и учебные пособия, некоторые из которых написаны специально для физиков. Мы постарались очертить и ясно изложить тот минимум, который необходим для освоения геометрического подхода к описанию калибровочных теорий. Одновременно это тот минимум, который позволяет ориентироваться при чтении литературы по дифференциальной геометрии и теории алгебр Ли.

Структура книги следующая. Глава 1 носит вводный характер, в ней даются основные определения и понятия, возникающие в калибровочных моделях, а именно в электрослабой теории и в хромодинамике.

Главы 2, 3 и 5 содержат математический материал. Главы 2 и 3 посвящены изложению основных сведений по дифференциальной геометрии, в главе 5 излагается корневая структура конечномерных алгебр Ли и теория диаграмм Дынкина для полупростых алгебр Ли. В остальные главах обсуждаются применения этого математического аппарата в ряде задач теории поля и гравитации. В главе 4 излагается геометрический подход к описанию калибровочных теорий. В главах 6 и 7 обсуждаются приложения такого подхода к решению задач размерной редукции калибровочных полей и спонтанной компактификации. Выбор этих приложений достаточно субъективен: авторы работали над этими проблемами в течение ряда лет. В то же время эти приложения, во-первых, позволяют продемонстрировать многочисленные преимущества и мощь геометрического подхода, а во-вторых, они, как и сама идея Калуцы и Клейна, сохраняют свою актуальность при построении моделей фундаментальных взаимодействий.

В предлагаемой книге мы попытались найти некий промежуточный, между математически строгим и принятым в физике, стиль изложения, при котором сложный материал преподносится в доступной форме и сразу же иллюстрируется примерами. При этом мы сохраняем строгость в определениях и формулировках теорем, но доказательства теорем приводятся лишь в том случае, когда они могут быть изложены в ясной и короткой форме без привлечения большого количества дополнительного материала или когда они действительно необходимы для понимания материала. В противном случае мы ограничиваемся пояснением идеи доказательства на характерных примерах или просто ссылками на книги, где приводятся соответствующие доказательства. Ряд достаточно простых промежуточных выкладок, опущенных в основном тексте книги, предлагается проделать в качестве задач и упражнений, помещенных в конце книги. Избранным стилем изложения объясняется и выбор физических приложений, о которых мы уже говорили выше. Они скорее носят характер иллюстрирующих примеров, а не являются последним словом применения математических методов в калибровочных теориях. Книга содержит также ряд приложений, делающих ее достаточно замкнутой. В них приводятся некоторые определения и краткие сведения, которые не относятся к дифференциальной геометрии и теории алгебр Ли, но используются в основном тексте.

В значительной своей части книга основана на курсе лекций для студентов IV курса, читавшегося авторами в течение двух лет на кафедре квантовой статистики и теории поля физического факультета МГУ. Авторы благодарны всем слушателям этих лекций, вопросы которых способствовали улучшению изложения материала. Мы также благодарны Герду Рудольфу и Жузе Моурао, нашим друзьям и соавторам многих наших статей, за многочисленные деловые и приятные обсуждения вопросов, нашедших отражение в книге. Мы благодарны руководству Отдела теоретической физики высоких энергий НИИ ядерной физики МГУ за проявленное внимание и поддержку при работе над книгой и ее издании. Один из нас (Ю. К.) хотел бы выразить благодарность своей семье за то понимание, терпение и моральную поддержку, которыми сопровождалась его долгая работа над этой книгой. Наконец, мы благодарим Российский фонд фундаментальных исследований (грант 97–02–30032) за решающую финансовую поддержку при издании книги, без которой она не могла бы увидеть свет.

Глава 1

Введение

Современные исследования по теории поля раскрывают все более сильную зависимость физических свойств моделей от геометрических и топологических свойств пространства-времени M. Такая зависимость проявляется, например, при изучении сложной структуры вакуума в неабелевых калибровочных теориях, механизма перехода между вакуумами и т.д. При этом приходится рассматривать поля на многообразиях с нетривиальной топологией (при анализе монополей и инстантонов или изучении эволюции Вселенной) и/или с числом измерений больше четырех (при изучении размерной редукции и спонтанной компактификации в теориях типа Калуцы—Клейна). Оказывается, что для решения подобных задач более удобным (и, как мы считаем, математически более красивым) является геометрический подход, которому посвящена глава 4. Этот подход использует аппарат дифференциальной геометрии, изложенный в главах 2 и 3. Центральными понятиями при этом являются главное расслоение и связность в нем.

Как правило, при введении новых понятий и нового аппарата для описания тех или иных физических явлений возникает естественный вопрос: являются ли они действительно необходимыми? Очень часто, как и в нашем случае, ответ отрицательный в том смысле, что нет прикладных (расчетных) задач, которые нельзя было бы решить, не используя новые методы. Преимущества геометрического подхода следующие.

1) Он дает естественный и наиболее адекватный язык для описания калибровочных теорий, так как оперирует с такими понятиями как связность, кривизна и т.д., органически присущими этим теориям. Тем самым мы переходим к более фундаментальным понятиям, чем вектор-потенциал и напряженность в стандартном подходе, что в свою очередь позволяет новые нетривиальные обобщения в теории. Удобство использования геометрического языка главных расслоений по сравнению со стандартным в описании калибровочных теорий можно сравнить с удобством использования ковариантных тензорных обозначений по сравнению с работой в компонентах в электродинамике Максвелла. Геометрический язык дает возможность меньше заботиться о технических

деталях, а больше внимания уделять действительно принципиальным проблемам.

2) Геометрический подход позволяет проводить рассмотрение глобально, что важно при изучении топологических свойств теории.

Именно основные идеи и методы геометрического подхода и будут главным предметом обсуждения в следующих главах. Однако прежде чем переходить к ним, мы напомним основные факты из теории калибровочных полей и калибровочных моделей взаимодействий элементарных частиц, введем необходимые обозначения и дадим основные определения.

§ 1. Принцип локальной калибровочной инвариантности и поля Янга—Миллса

Хорошо известно, что вектор-потенциал электромагнитного поля определен с точностью до градиентного, или калибровочного преобразования

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \eta(x). \tag{1.1}$$

Смысл этого преобразования проясняется в рамках классической теории поля. А именно, если рассмотреть взаимодействие электромагнитного поля с заряженным полем, которое описывается комплексной полевой функцией $\Psi(x)$, то преобразования (1.1) обеспечивают инвариантность лагранжиана, а следовательно и ковариантность классического уравнения для $\Psi(x)$, относительно локальных фазовых преобразований $\Psi(x) \to e^{i\,e\eta(x)}\Psi(x)$, где постоянная e играет роль электрического заряда. Поле $A_\mu(x)$ при этом всегда входит в уравнение и лагранжиан в комбинации $D_\mu\Psi(x) = (\partial_\mu - ieA_\mu)\Psi(x)$, которая при фазовых преобразованиях ведет себя так же, как поле $\Psi(x)$:

$$D_\mu\Psi(x) \to (\partial_\mu - ieA_\mu - ie\partial_\mu\eta)e^{ie\eta(x)}\Psi(x) = e^{ie\eta(x)}D_\mu\Psi(x). \tag{1.2}$$

Источником же поля $A_\mu(x)$ является сохраняющийся нетеровский ток $j_\mu(x)$, отвечающий фазовым преобразованиям с не зависящими от точки параметрами. Обобщение этой конструкции на случай более сложного зарядового пространства, в котором задано представление неабелевой группы симметрии, например, пространства изотопического спина, приводит к неабелевым калибровочным полям, или полям Янга—Миллса [ЯМ] (см. также общую теорию калибровочных полей, например, в [СФ], [БШ]).

Пусть в зарядовом пространстве действует представление r некоторой компактной группы Ли G, которую мы будем считать простой. Это предположение не является ограничительным, так как произвольная компактная группа Ли есть прямое произведение конечного числа простых компактных групп Ли и $U(1)$-групп, и ее рассмотрение сводится к рассмотрению каждого сомножителя по отдельности. Для дальнейшего нам необходимо ввести ряд обозначений и привести некоторые результаты из теории компактных групп Ли.

Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G. Действие группы G на самое себя внутренними автоморфизмами $h \to ghg^{-1}$, $g, h \in G$, порождает действие G в линейном пространстве $\mathfrak{g}$. Это представление называется присоединенным представлением группы G, и если эта группа n-параметрическая, то оно может быть реализовано матрицами $n \times n$. Соответственно и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ реализуется $n \times n$-матрицами, при этом действие G сводится к матричному умножению: $X \to gXg^{-1}$, $X \in \mathfrak{g}$, $g \in G$.

С помощью этого представления в $\mathfrak{g}$ можно ввести G-инвариантную симметричную билинейную форму $B(X,Y) = \mathrm{tr}(XY)$ (которая отрицательно определена), а также базис генераторов $\{X_a\}$, $a = 1, 2, \ldots, n$, нормированных условием $\mathrm{tr}(X_a X_b) = -2\delta_{ab}$. Этот базис обладает тем свойством, что в нем структурные константы в коммутационных соотношениях $[X_a, X_b] = C_{ab}^d X_d$ полностью антисимметричны (см. гл. 5, § 2). Например, в случае алгебры Ли группы $SU(2)$ такие генераторы суть 3×3-матрицы с компонентами $(X_a)_{kl} = -\varepsilon_{akl}$, а коммутационные соотношения имеют вид

$$[X_a, X_b] = \varepsilon_{abc} X_c. \tag{1.3}$$

Задание представления r группы G в зарядовом пространстве означает, что для любого элемента $g \in G$ определено преобразование поля

$$\Psi(x) \to r(g)\Psi(x), \tag{1.4}$$

причем матрицы $r(g)$ удовлетворяют условию $r(g_1 g_2) = r(g_1) r(g_2)$.

Мы полагаем, что группа G является (глобальной) группой симметрии теории, т.е. лагранжиан поля материи $\mathscr{L}_f(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x))$ инвариантен относительно преобразований (1.4). По теореме Нетер этой симметрии отвечают сохраняющиеся токи $j_\mu^a(x)$, $a = 1, 2, \ldots, n$.

Локальные преобразования полей $\Psi(x)$, аналогичные локальным фазовым преобразованиям в электродинамике, имеют вид

$$\Psi(x) \to r(g(x))\Psi(x). \tag{1.5}$$

Очевидно, лагранжиан $\mathscr{L}_f(\Psi, \partial_\mu \Psi)$ уже не будет инвариантен относительно таких преобразований, так как входящие в него производные поля $\Psi(x)$ преобразуются неоднородно:

$$\partial_\mu \Psi(x) \to r(g(x)) \left(\partial_\mu + r\left(g(x)^{-1} \partial_\mu g(x)\right) \right) \Psi(x). \tag{1.6}$$

Для компенсации неоднородного члена в производную нужно ввести векторное поле $A_\mu(x) = A^a_\mu(x)X_a$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, которое при преобразованиях (1.5) преобразуется так:

$$A_\mu(x) \to g(x)A_\mu(x)g(x)^{-1} + g(x)\partial_\mu g(x)^{-1}. \tag{1.7}$$

В этом случае удлиненная производная $D_\mu\Psi(x) = (\partial_\mu + r(A_\mu))\Psi(x)$ преобразуется, как и поле $\Psi(x)$, однородно

$$D_\mu\Psi(x) \to r(g(x))D_\mu\Psi(x) \tag{1.8}$$

и поэтому называется ковариантной производной.

Введение взаимодействия с полем $A_\mu(x)$ через ковариантную производную приводит к тому, что полевые конфигурации $\{\Psi(x), A_\mu(x)\}$ и $\left\{r(g(x))\Psi(x), g(x)A_\mu(x)g(x)^{-1} + g(x)\partial_\mu g(x)^{-1}\right\}$ оказываются физически эквивалентными, т.е. описывают одну и ту же физическую ситуацию. Классы физически эквивалентных конфигураций являются орбитами калибровочной группы.

Чтобы работать с классами конфигураций, нужно уметь выбирать в этих классах представителей. Для этого на поля налагают дополнительные условия, устраняющие калибровочный произвол; выбор дополнительного условия называется выбором калибровки. Например, условие $\partial^\mu A_\mu(x) = 0$ называется лоренцевой калибровкой. По аналогии со случаем электромагнитного поля для неабелевых калибровочных полей можно построить тензор напряженности

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \tag{1.9}$$

который при преобразованиях поля (1.7) преобразуется однородно

$$F_{\mu\nu}(x) \to g(x)F_{\mu\nu}(x)g(x)^{-1}. \tag{1.10}$$

Единственным разумным (и, как мы увидим в гл. 4, естественным) обобщением лагранжиана электромагнитного поля на случай неабелевых калибровочных полей является лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8g^2}\operatorname{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \mathcal{L}_f(\Psi, D_\mu\Psi), \tag{1.11}$$

который инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований (1.5), (1.7). Входящая в него величина g называется калибровочной константой связи.

В лагранжиане (1.11) калибровочное поле взято в геометрической нормировке. В физических моделях обычно используется другая нормировка, аналогичная нормировке электромагнитного поля в формуле (1.2). Для перехода к этой нормировке из поля $A_\mu(x)$ нужно выделить константу g, т.е. в лагранжиане нужно сделать замену $A_\mu(x) \to gA_\mu(x)$.

При такой замене g^2 в знаменателе «свободного» лагранжиана калибровочного поля исчезнет, но константа связи появится в тензоре напряженности $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]$ и в ковариантной производной $D_\mu = \partial_\mu + gA_\mu$. Отметим еще, что если тензор напряженности разложить по генераторам $\{X_a\}$, $\mathrm{tr}(X_a X_b) = -2\delta_{ab}$, то «свободный» лагранжиан калибровочного поля запишется в виде

$$\mathscr{L}_g = -\frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}.$$

Варьированием отвечающего лагранжиану (1.11) действия по полю $A_\mu(x)$ получаются уравнения Янга—Миллса

$$D_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}] = j^\nu(x), \tag{1.12}$$

где $j^\nu(x)$ — нетеровский ток поля $\Psi(x)$, отвечающий глобальным преобразованиям (1.4). Из (1.12) следует, что при взаимодействии поля $\Psi(x)$ с калибровочным полем сохраняется не ток $j_\mu(x)$, а комбинация $j_\mu(x) + [A^\nu, F_{\mu\nu}]$. Таким образом, источником неабелева калибровочного поля $A_\mu(x)$ является не только ток поля $\Psi(x)$ (как было в электродинамике), но и оно само, что отражает нелинейность «свободного» лагранжиана этого поля.

§ 2. Калибровочные теории взаимодействий элементарных частиц

По-видимому, из неабелевых калибровочных теорий наибольший успех выпал на долю единой теории электрослабых взаимодействий, созданной С. Вайнбергом [Ва] и А. Саламом [Са] в конце 60-х годов (см. изложение теории, например, в [ВТ], [ЧЛ]). Эта теория основана на калибровочной группе $SU(2) \times U(1)$, и ниже мы достаточно подробно опишем ее калибровочный и хиггсовский секторы, а также сектор фермионов первого поколения.

Пусть e обозначает поле (отрицательно заряженного) электрона, а ν_e — поле нейтрино. Объединим левые нейтрино и электрон в дублет, а правый электрон оставим синглетом:

$$L_e = \frac{1}{2}\left(1 + \gamma^5\right)\begin{pmatrix}\nu_e \\ e\end{pmatrix}, \quad e_R = \frac{1}{2}\left(1 - \gamma^5\right) e. \tag{1.13}$$

Такой выбор мультиплетов объясняется тем, что в слабых взаимодействиях нарушается четность, и правое нейтрино экспериментально не наблюдается.

Группа $SU(2)$ действует на дублет левых частиц (и поэтому ее также обозначают $SU(2)_L$); ее генераторы с коммутационными соотношениями (1.3) в этом представлении выражаются через матрицы Паули $\{\tau_a\}$: $r(X_a) = -i\frac{\tau_a}{2}$. Поэтому преобразование поля L_e можно записать в виде

$$L_e \to \exp\left(-ig\frac{\tau_a}{2}\xi^a\right) L_e. \tag{1.14}$$

Как обычно, связанное с $SU(2)_L$ квантовое число есть собственное значение оператора τ_3.

Обозначим через y квантовое число, связанное с группой $U(1)$-преобразований, и потребуем, чтобы электрический заряд q выражался через него по формуле

$$q = \tau_3 + y. \tag{1.15}$$

Очевидно, для L_e мы имеем $y = -\frac{1}{2}$, а для e_R — $y = -1$, поскольку для него собственное значение τ_3 равно нулю. В соответствии с этим $U(1)$-преобразования полей имеют вид

$$L_e \to \exp\left(-i\,\frac{g'}{2}\,\eta\right) L_e, \quad e_R \to \exp(-ig'\eta)e_R. \tag{1.16}$$

Аналогично, для полей кварков u и d, которые мы обозначаем теми же буквами, можно определить следующие состояния

$$L_q = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \tag{1.17а}$$

$$u_R = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)u, \quad d_R = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)d, \tag{1.17б}$$

причем для полей левых кварков $y = \frac{1}{6}$, для u_R имеем $q = y = \frac{2}{3}$, а для d_R — $q = y = -\frac{1}{3}$. Поэтому $SU(2)\times U(1)$-преобразования для этих полей выглядят так:

$$L_q \to \exp\left(-i\,g\,\frac{\tau_a}{2}\xi^a\right)\exp\left(i\,\frac{g'}{6}\,\eta\right) L_q, \tag{1.18а}$$

$$u_R \to \exp\left(i\,\frac{2g'}{3}\eta\right) u_R, \quad d_R \to \exp\left(-i\,\frac{g'}{3}\,\eta\right) d_R. \tag{1.18б}$$

Ассоциируя с преобразованиями (1.14), (1.16) и (1.18) неабелево калибровочное поле $W_\mu(x) = W_\mu^a(x)X_a$ со значениями в алгебре Ли группы $SU(2)$ и абелево калибровочное поле $Y_\mu(x)$, мы можем стандартным образом построить калибровочно инвариантный лагранжиан, описывающий взаимодействие этих полей с полями лептонов и кварков:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_q, \tag{1.19}$$

где

$$\mathscr{L}_W = \frac{1}{8}\,\mathrm{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}), \quad G_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + g[W_\mu, W_\nu], \tag{1.20а}$$

$$\mathscr{L}_Y = -\frac{1}{4} Y_{\mu\nu}Y^{\mu\nu}, \quad Y_{\mu\nu} = \partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu, \tag{1.20б}$$

$$\mathscr{L}_e = i\,\bar{L}_e\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\,g\,\frac{\tau_a}{2}W_\mu^a + \frac{i\,g'}{2}Y_\mu\right)L_e + i\,\bar{e}_R\gamma^\mu(\partial_\mu + i\,g'Y_\mu)e_R, \tag{1.20в}$$

$$\mathscr{L}_q = i\,\bar{L}_q\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\,g\frac{\tau_a}{2}W_\mu^a - i\,\frac{g'}{6}Y_\mu\right)L_q +$$
$$+ i\,\bar{u}_R\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\,\frac{2g'}{3}Y_\mu\right)u_R + i\,\bar{d}_R\gamma^\mu\left(\partial_\mu + i\frac{g'}{3}Y_\mu\right)d_R, \tag{1.20г}$$

и в лагранжиане для кварков (1.20г) в выражениях вида $\bar{q}(\ )q$ подразумевается суммирование по цветовым индексам, т. е. $\sum_{i=1}^{3}\bar{q}_i(\ )q_i$. Отметим еще, что во всех формулах калибровочные поля взяты в физической нормировке, что согласуется с видом преобразований (1.14), (1.16) и (1.18).

Все поля, входящие в лагранжиан (1.19), имеют нулевую массу. Более того, массовые члены для фермионов, имеющие вид $m(\bar{f}_L f_R + \bar{f}_R f_L)$, оказываются запрещенными требованием инвариантности относительно калибровочных преобразований (1.14), (1.16), (1.18). Поэтому ненулевые массы фермионы могут приобрести, например, за счет эффекта Хиггса [Хи], т. е. за счет взаимодействия со скалярным полем, имеющим ненулевое вакуумное среднее (см. также гл. 4, § 7). При этом все векторные поля, кроме поля фотона, тоже приобретают массу, т. е. группа $SU(2)\times U(1)$ нарушается до группы $U(1)_{em}$, порождаемой оператором q (1.15). Это значит, что ненулевое вакуумное среднее должно иметь поле с нулевым электрическим зарядом. Такая картина спонтанного нарушения симметрии имеет место в случае комплексного скалярного поля φ, преобразующегося по спинорному представлению группы $SU(2)_L$ и имеющего заряд $y = \frac{1}{2}$. Другими словами, при калибровочных преобразованиях поле φ ведет себя так:

$$\varphi \to \exp\left(-i\,g\,\frac{\tau_a}{2}\,\xi^a(x)\right)\exp\left(i\,\frac{g'}{2}\,\eta(x)\right)\varphi. \tag{1.21а}$$

Определим также зарядово сопряженный дублет $\tilde{\varphi} = i\,\tau_2\varphi^*$, который преобразуется следующим образом:

$$\tilde{\varphi} \to \exp\left(-i\,g\,\frac{\tau_a}{2}\,\xi^a(x)\right)\exp\left(-i\,\frac{g'}{2}\,\eta(x)\right)\tilde{\varphi}. \tag{1.21б}$$

Калибровочно инвариантный лагранжиан, описывающий взаимодействие поля φ с полями W_μ и Y_μ, а также самодействие четвертой степени, имеет вид

$$\mathscr{L}_\varphi = \left|\partial_\mu\varphi - ig\frac{\tau_a}{2}W_\mu^a\varphi - \frac{ig'}{2}Y_\mu\varphi\right|^2 - \lambda\left(\varphi^+\varphi - \frac{v^2}{2}\right)^2. \tag{1.22}$$

Калибровочно инвариантное взаимодействие поля φ с фермионами можно записать так:

$$\mathscr{L}_f = -\Gamma_e\left\{(\bar{L}_e\varphi)e_R + \bar{e}_R(\varphi^+L_e)\right\} - \Gamma_u\left\{(\bar{L}_q\tilde{\varphi})u_R + \bar{u}_R(\tilde{\varphi}^+L_q)\right\} - \\ - \Gamma_d\left\{(\bar{L}_q\varphi)d_R + \bar{d}_R(\varphi^+L_q)\right\}. \tag{1.23}$$

Таким образом, полный лагранжиан теории есть

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_W + \mathscr{L}_Y + \mathscr{L}_e + \mathscr{L}_q + \mathscr{L}_\varphi + \mathscr{L}_f. \tag{1.24}$$

Заметим далее, что калибровочным преобразованием поле φ всегда можно привести к виду

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \sigma\end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im}\sigma = 0. \tag{1.25}$$

Множитель $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ выделен для того, чтобы из (1.22) для поля σ получался канонический кинетический член нейтрального скалярного поля.

Это поле, в соответствии с видом его потенциала самодействия, имеет ненулевое вакуумное среднее $\langle\sigma\rangle = v$, минимизирующее этот потенциал.

Выделяя это вакуумное среднее, т. е. заменяя в (1.25) $\sigma \to v + \sigma$, получим лагранжиан модели Вайнберга—Салама в унитарной калибровке.

В результате этой подстановки у всех полей появляются массовые члены. В случае векторных полей они имеют вид

$$\frac{v^2}{8}\left(g^2\left(W_\mu^1\right)^2 + g^2\left(W_\mu^2\right)^2 + \left(gW_\mu^3 - g'Y_\mu\right)^2\right). \tag{1.26}$$

Диагонализация этой квадратичной формы приводит к следующим полям с определенными массами:

Заряженные поля

$$W_\mu^\mp = \frac{W_\mu^1 \pm iW_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad m_W = \frac{gv}{2}. \tag{1.27}$$

Нейтральные поля

$$A_\mu = \cos\theta_W Y_\mu + \sin\theta_W W_\mu^3, \quad m_A = 0, \tag{1.28a}$$

$$Z_\mu = -\sin\theta_W Y_\mu + \cos\theta_W W_\mu^3, \quad m_Z = \frac{v}{2}\left(g^2 + g'^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.28б}$$

где параметр θ_W, называемый углом слабого смешивания или углом Вайнберга, определяется соотношением $\operatorname{tg}\theta_W = g'/g$.

Безмассовое поле A_μ, очевидно, следует отождествить с электромагнитным полем.

Массовые члены для фермионов оказываются следующими ($f = e, u, d$)

$$-\Gamma_f\left(\bar f_R f_L + \bar f_L f_R\right)\frac{v}{\sqrt{2}} = -m_f \bar f f, \quad m_f = \frac{\Gamma_f v}{\sqrt{2}}. \tag{1.29}$$

Наконец, для массы поля σ находим

$$m_\sigma = 2\lambda v^2. \tag{1.30}$$

Введем в рассмотрение фермионные токи

$$j_\mu = \bar e\gamma_\mu e + \frac{2}{3}\bar u\gamma_\mu u - \frac{1}{3}\bar d\gamma_\mu d, \tag{1.31а}$$

$$j_\mu^3 = \bar L_e\gamma_\mu\tau^3 L_e + \bar L_q\gamma_\mu\tau^3 L_q, \tag{1.31б}$$

$$j_\mu^\pm = \bar L_e\gamma_\mu\tau^\mp L_e + \bar L_q\gamma_\mu\tau^\mp L_q. \tag{1.31в}$$

Через них удобно записать взаимодействие фермионов с векторными полями, к которому приводит лагранжиан (1.24):

$$\mathscr{L}_I = \frac{gg'}{\sqrt{g + g'^2}} j_\mu A^\mu + \frac{g}{2\sqrt{2}}\left(j_\mu^- W^{+\mu} + \text{э. с.}\right) + \\ + \frac{\left(g + g'^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\left(j_\mu^3 - 2\sin^2\theta_W j_\mu\right) Z^\mu. \tag{1.32}$$

Очевидно, первое слагаемое описывает электромагнитные взаимодействия лептонов и кварков, поэтому для электрического заряда e имеем

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W. \tag{1.33}$$

Второе слагаемое описывает слабое взаимодействие фермионов через заряженные токи, и из него получается следующее выражение для константы Ферми G_F:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}. \tag{1.34}$$

Третий член приводит к слабому взаимодействию фермионов через нейтральные токи, открытие которых явилось первым экспериментальным подтверждением модели Вайнберга—Салама.

Остановимся кратко на модификации модели при рассмотрении всех трех известных поколений фермионов. Ясно, что калибровочный и хиггсовский секторы останутся неизменными. К лагранжиану добавятся члены вида (1.20в) или (1.20г) для каждого дополнительного типа фермионов, которые приведут к появлению дополнительных вкладов в заряженные и нейтральные токи, имеющих ту же структуру, что и (1.31). Существенные изменения произойдут только в формуле (1.23), описывающей взаимодействие фермионов с полем Хиггса: в ней появятся матрицы, перемешивающие лептоны и кварки одинакового заряда. При диагонализации этих матриц и переходе к состояниям с определенной массой произойдет изменение базисных полей. Это изменение приведет к появлению в заряженных токах матрицы смешивания, называемой также матрицей Кобаяши—Маскавы. Нейтральные же токи и взаимодействия с полем Хиггса останутся диагональными и в этом базисе.

Описанная модель с тремя поколениями фермионов обычно называется стандартной моделью электрослабых взаимодействий. Важной чертой этой модели является отсутствие при ее квантовании γ^5-аномалий, т.е. она представляет собой перенормируемую теорию. Ее предсказания хорошо подтверждаются тремя различными типами экспериментов: нейтринными экспериментами с нейтральными токами, интерференционными экспериментами в глубоко неупругом рассеянии заряженных лептонов и прямым рождением W- и Z-бозонов. Экспериментальное значение угла Вайнберга, извлеченное из результатов этих экспериментов, в настоящее время есть $(\sin^2\theta_W)^{\text{exp}} = 0.2315 \pm 0.0022$.

Обратимся теперь к калибровочной теории сильных взаимодействий. Как мы уже отмечали, каждый тип (или аромат) кварков может существовать в трех разновидностях, отличающихся цветом — квантовым числом, из фермионов присущим только кваркам и отсутствующим у лептонов. В пространстве цветов действует группа $SU(3)$.

Требование инвариантности теории относительно локальных $SU(3)$-преобразований приводит к появлению цветного поля Янга—Миллса, или поля глюонов, за счет обмена которыми осуществляется взаимодействие между кварками. Глюоны образуют цветовой октет и нейтральны по отношению к ароматам. Симметрия $SU(3)^c$ предполагается точной, т.е. поле глюонов остается безмассовым. Таким образом, лагранжиан этой теории имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8}\operatorname{tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) + i\sum_k \bar{q}_k\gamma^\mu\left(\partial_\mu + gr(A_\mu) - m\right)q_k, \tag{1.35}$$

где суммирование ведется по кваркам различных ароматов.

Построенная на основе этого лагранжиана квантовая теория поля называется квантовой хромодинамикой. Ее главной отличительной чертой является асимптотическая свобода [ГВ, Хо], т. е. стремление эффективной константы связи к нулю при стремлении переданных импульсов к бесконечности. Качественно это означает, что взаимодействие кварков, составляющих адроны, стремится к нулю на малых расстояниях. Ряд исследований дает указания на то, что при малых переданных импульсах эффективная константа связи неограниченно возрастает, следовательно взаимодействие кварков неограниченно возрастает с увеличением расстояния. Вследствие этого несущие цветовой заряд частицы не могут разойтись на макроскопические расстояния, . т. е. наблюдаемый спектр адронов порождают только бесцветные состояния. Отметим в заключение, что результаты экспериментов по глубоко-неупругому рассеянию лептонов на адронах, адронным столкновениям при высоких энергиях и др. дают убедительные количественные подтверждения правильности квантовой хромодинамики как теории, описывающей сильные взимодействия (краткое изложение этих вопросов и дальнейшие ссылки можно найти, например, в обзоре "Review of Particle Physics", Phis. Rev. D54, № 1 (1996)).

§ 3. Геометрическая интерпретация калибровочных полей

В заключение этой главы скажем еще несколько слов о геометрическом смысле калибровочных полей. Для этого введем понятие параллельного переноса поля $\Psi(x)$ вдоль контура.

Итак, пусть γ есть контур в пространстве-времени, заданный уравнением $x^\mu = x^\mu(t)$. Векторное поле X с компонентами

$$X^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \tag{1.36}$$

является касательным к γ в каждой точке. Будем говорить, что поле $\Psi(x)$ параллельно переносится вдоль контура γ, если в каждой его точке ковариантная производная в касательном направлении равна нулю, т. е.

$$X^\mu D_\mu \Psi(x)\Big|_{x=x(t)} = 0. \tag{1.37}$$

Это определение является естественным обобщением понятия параллельного переноса векторного поля в смысле линейной связности.

Вычислим изменение поля $\Psi(x)$ при параллельном переносе вдоль бесконечно малого замкнутого контура $(x, x+\varepsilon_1, x+\varepsilon_1+\varepsilon_2, x+\varepsilon_2)$.

Очевидно,

$$\Delta_1\Psi = \Psi(x+\varepsilon_1) - \Psi(x) \simeq \partial_\mu\Psi\varepsilon_1^\mu = -r(A_\mu)\Psi\varepsilon_1^\mu,$$
$$\Delta_2\Psi = \Psi(x+\varepsilon_1+\varepsilon_2) - \Psi(x+\varepsilon_1) \simeq -r(A_\mu(x+\varepsilon_1))\Psi(x+\varepsilon_1)\varepsilon_2^\mu,$$
$$\Delta_3\Psi = \Psi(x+\varepsilon_2) - \Psi(x+\varepsilon_1+\varepsilon_2) \simeq r(A_\mu(x+\varepsilon_2))\Psi(x+\varepsilon_2)\varepsilon_1^\mu,$$
$$\Delta_4\Psi = \Psi(x) - \Psi(x+\varepsilon_2) = r(A_\mu)\Psi\varepsilon_2^\mu.$$

Складывая эти выражения, для полного изменения поля с точностью до членов второго порядка по ε_1, ε_2 получим:

$$\Delta\Psi = -r(F_{\mu\nu})\Psi\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu. \tag{1.38}$$

Если сравнить это выражение с выражением для изменения при параллельном переносе по замкнутому контуру (в смысле линейной связности) векторного поля $\Delta V^\mu = -R^\mu_{\nu\rho\sigma}V^\nu\varepsilon_1^\rho\varepsilon_2^\sigma$, то становится ясно, что тензор $F_{\mu\nu}$ аналогичен тензору кривизны, а потенциал A_μ аналогичен символам Кристофеля $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$. Эта аналогия совершенно четко прослеживается при геометрическом описании калибровочных полей в терминах расслоенных пространств и связностей, которое является предметом главы 3. Геометрическое описание оказывается наиболее адекватным для рассмотрения калибровочных теорий вне рамок теории возмущений, например, для нахождения и изучения в таких теориях точных решений.

Глава 2

Основные понятия дифференциальной геометрии

§ 1. Дифференцируемые многообразия

Понятие дифференцируемого многообразия является обобщением знакомых из курса аналитической геометрии понятий точки, кривой, поверхности в евклидовом пространстве и т. д.

Вещественное (комплексное) многообразие размерности n представляет собой пространство, которое локально, т. е. в окрестности каждой точки, выглядит как евклидово пространство $\mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$. Точное определение следующее.

Вещественное *дифференцируемое многообразие* M размерности $\dim M = n$ есть *хаусдорфово пространство* (см. Приложение 2), обладающее следующими свойствами:

1) M — локально евклидово, т. е. для любой точки $p \in M$ существует *окрестность* (см. Приложение 1) этой точки $U \subset M$ и *гомеоморфизм* (см. Приложение 3) φ окрестности U на открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Этот гомеоморфизм символически будем записывать так: $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, т. е. для $p \in U$ $\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$. Пара (U, φ) называется *картой*. Вещественные числа $x^i(p)$ $(i = 1, \dots, n)$ называются координатами точки $p \in U \subset M$ относительно карты (U, φ).

2) Существует набор карт $\{(U_a, \varphi_a)\}$ такой, что

i) $\bigcup\limits_a U_a = M$;

ii) если множество $U_{ab} = U_a \cap U_b$ не пусто, то отображение $\varphi_{ab} = \varphi_b \circ \varphi_a^{-1}$ (здесь $\circ$ — знак композиции отображений) из $\varphi_a(U_{ab}) \subset \mathbb{R}^n$ в $\varphi_b(U_{ab}) \subset \mathbb{R}^n$ является дифференцируемым отображением (в настоящей книге условимся считать его бесконечно дифференцируемым) (рис. 1).

Набор карт с такими свойствами называется *атласом*.

Рассмотрим некоторые примеры дифференцируемых многообразий.

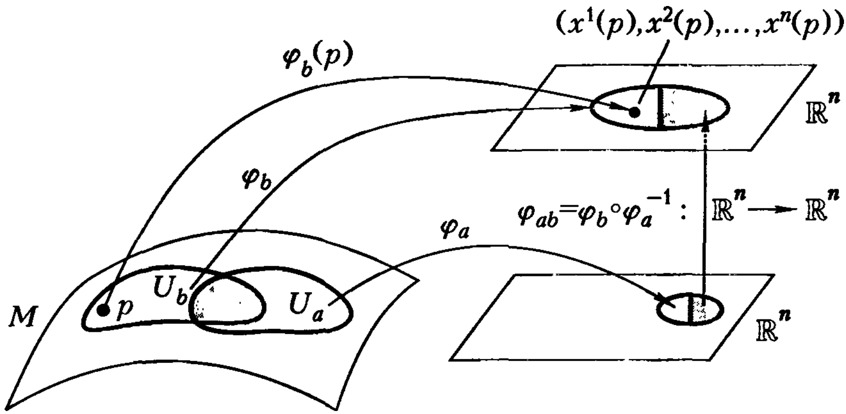

Рис. 1.

1) $\mathbb{R}^1$, отрезок на прямой, незамкнутая кривая являются примерами одномерных многообразий, для которых достаточно одной карты.

2) *Сферу* S^n можно определить уравнением

$$\sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = c^2 = \mathrm{const},$$

где x^i — координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$. «Нульмерная» сфера S^0 есть просто две точки: $x_1 = \pm c$. Сфера S^1 является окружностью, сфера S^2 — обычная сфера в трехмерном пространстве. Для описания каждого из этих многообразий требуется как минимум две карты. Поясним, например, как устроены эти карты для S^2. В качестве окрестности U_1 возьмем сферу без северного полюса (без точки N на рис. 2). Чтобы задать гомеоморфизм $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2$, поместим нашу сферу на плоскость $\mathbb{R}^2$ так, чтобы она касалась своим «южным» полюсом (точкой S) плоскости. Пусть точка $p \in U_1$ обозначена буквой A на рис. 2. Проведем отрезок NA,

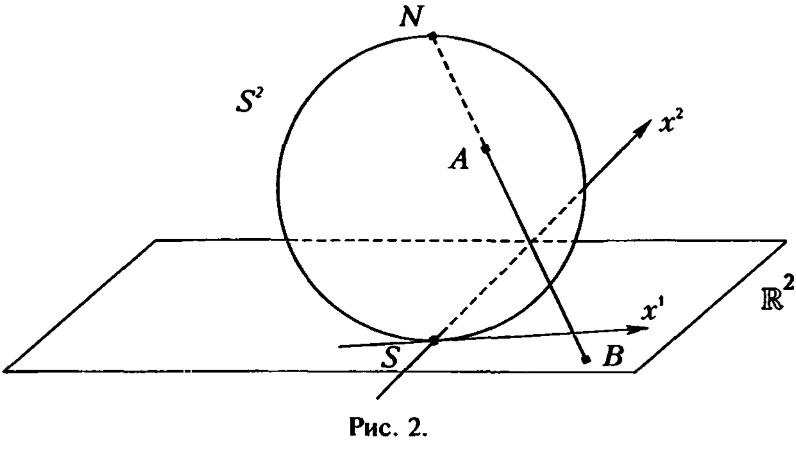

Рис. 2.

продолжим его до пересечения с плоскостью $\mathbb{R}^2$ (B — точка пересечения) и положим $\varphi_1(p) = B = (x^1, x^2)$, где x^1 и x^2 координаты точки B в некоторой системе координат, введенной на $\mathbb{R}^2$. Такое отображение называется *стереографической проекцией*. Ясно, что этим способом можно установить взаимно-однозначное соответствие между точками $\mathbb{R}^2$ и всеми точками S^2 кроме точки N. В качестве второй карты (U_2, φ_2) возьмем сферу без полюса S и стереографическую проекцию из S на плоскость, касающуюся сферы в точке N.

3) Проективные пространства. *Вещественное проективное пространство* размерности n (обозначается $\mathbb{R}P^n$ или $P_n(\mathbb{R})$) представляет собой множество прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Другое эквивалентное определение: $\mathbb{R}P^n$ — это сфера S^n, у которой диаметрально противоположные точки отождествлены, как показано на рис. 3 (штриховой линией соединены тождественные точки). На рис. 4 изображено многообразие $\mathbb{R}P^1$ и «доказано», что оно гомеоморфно S^1.

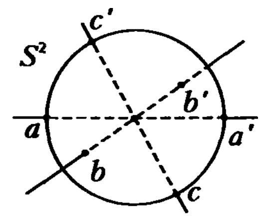

Рис. 3.

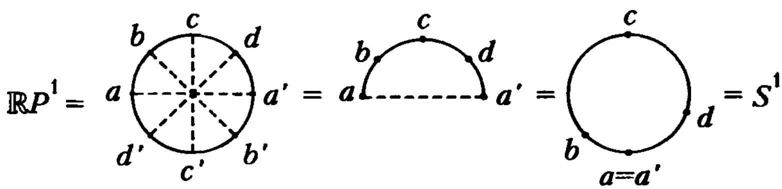

Рис. 4.

Структуру проективного пространства как многообразия мы поясним на примере *комплексного проективного пространства*, обозначаемого $\mathbb{C}P^n$ или $P_n(\mathbb{C})$. Определение комплексного (аналитического) дифференцируемого многообразия аналогично определению вещественного многообразия; требуется сделать лишь очевидные замены понятий вещественного анализа на понятия комплексного (например, $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{C}^n$ и т. д.).

Определим $\mathbb{C}P^n$ как множество прямых в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Пусть $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ и $(z^0, z^1, \ldots, z^n)$ ее координаты. Если $z \neq 0$, то точка z определяет прямую, проходящую через начало координат 0 и точку z. Две точки будем считать эквивалентными, если они лежат на одной прямой, т. е. $z \sim z'$, если $z = cz'$, где $c \in \mathbb{C}^1$ и $c \neq 0$. Тогда комплексное проективное пространство (см. Приложение 4) есть фактор-пространство комплексной плоскости $\mathbb{C}^{n+1}$ с выколотой точкой 0 по этому отношению эквивалентности, $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim$. Координаты $z^i (i = 0, 1, 2 \ldots, n)$ называются однородными координатами на $\mathbb{C}P^n$. Введем теперь на этом пространстве систему окрестностей U_k и гомеоморфизмов φ_k. Пусть U_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — это те прямые, для всех точек которых, кроме начала координат, $z^k \neq 0$. Тогда отображения $\varphi_k : U_k \to \mathbb{C}^n$ зададим формулами: $\varphi_k(z) = (\xi^0_{(k)}, \xi^1_{(k)}, \ldots, \xi^{k-1}_{(k)}, \xi^{k+1}_{(k)}, \ldots, \xi^n_{(k)}) \in \mathbb{C}^n$ и $\xi^i_{(k)} = z^i/z^k$ — локальные неоднородные координаты. Т.к. $U_k \cap U_l$ не пусто, то существует отображение $\varphi_{kl} = \varphi_l \circ \varphi_k^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Его явный вид:

$$\varphi_{kl}(\{\xi^i_{(k)}\}) = (\xi^0_{(kl)}, \ldots, \xi^{l-1}_{(kl)}, \xi^{l+1}_{(kl)}, \ldots, \xi^n_{(kl)}),$$

$$\xi^j_{(kl)}(\{\xi^i_{(k)}\}) = \frac{z^j}{z^l} = \frac{\xi^j_{(k)} z_k}{z^l} = \frac{\xi^j_{(k)}}{\xi^l_{(k)}}.$$

Очевидно, что функции $\xi^j_{(kl)}$ являются бесконечно дифференцируемыми (аналитическими) в своей области определения $\varphi_k(U_k \cap U_l) \subset \mathbb{C}^n$. Следовательно, для задания многообразия $\mathbb{C}P^n$ требуется атлас из $(n+1)$ карты. Можно показать, что $\mathbb{C}P^1$ диффеоморфно сфере S^2 (задача 2.1).

Приведем примеры *групповых многообразий*, т. е. многообразий, на которых дополнительно задана групповая структура.

а) $\mathbb{Z}_2$ — группа, состоящая из двух элементов (-1) и $(+1)$ с обычным законом умножения.

б) унитарная группа $U(1)$, элементами которой являются числа вида $e^{i\theta} (0 \leqslant \theta < 2\pi)$ со стандартным законом умножения.

в) $SU(2)$ — группа комплексных матриц A размера 2×2, являющихся унитарными $(A^+ A = AA^+ = 1)$ и унимодулярными $(\det A = 1)$.

г) $SO(3)$ — группа ортогональных $(\Lambda^T \Lambda = 1)$ унимодулярных $(\det \Lambda = 1)$ матриц, задающих повороты векторов в трехмерном пространстве. Каждому элементу $A \in SU(2)$ можно поставить в соответствие элемент $\lambda(A) = \Lambda \in SO(3)$, удовлетворяющий следующим уравнениям:

$$\sum_{i=1}^{3} \Lambda^i_k \tau_i = A \tau_k A^{-1}, \quad (k = 1, 2, 3),$$

где τ_i $(i = 1, 2, 3)$ — матрицы Паули. Группа $SU(2)$ является универсальной накрывающей группой группы $SO(3)$ (см. Приложение 5), а $\lambda : SU(2) \to SO(3)$ — накрывающий гомоморфизм.

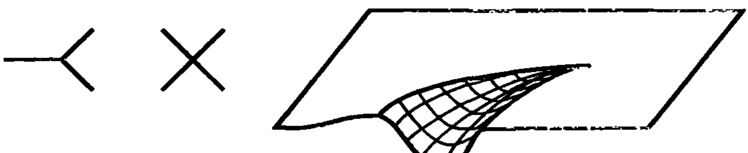

Рис. 5.

В заключение этого параграфа приведем примеры множеств, которые не являются многообразиями (рис. 5).

§ 2. Касательные векторы и векторные поля

Понятие вектора, касательного к многообразию, возникает при абстрагировании понятия производной по направлению, известного из курса математического анализа.

Пусть $\alpha(t)$ — гладкая кривая, проходящая через точку p_0 многообразия M, причем параметр t принимает значения из интервала (a, b), содержащего точку $t = 0$, и $\alpha(0) = p_0$. Возьмем окрестность $U \subset M$ и гомеоморфизм $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$; $\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$. Обозначим $\varphi(\alpha(t)) = (\alpha^1(t), \alpha^2(t), \ldots, \alpha^n(t))$. Пусть $\bar{f}$ — вещественнозначная дифференцируемая функция от n переменных $(x^1, \ldots, x^n)$, заданная на подмножестве $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. По определению производная функции $\bar{f}$ в точке $(x^1(p_0), \ldots, x^n(p_0))$ по направлению, задаваемому кривой $\alpha(t)$, равна

$$\frac{d}{dt} f(\alpha(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \bar{f}(\alpha^1(t), \ldots, \alpha^n(t))\Big|_{t=0} =$$
$$= \frac{d\alpha^i(t)}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial \bar{f}(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^i}\Big|_{p_0}, \qquad (2.1)$$

где мы ввели функцию $f(p) \equiv \bar{f}(x^1(p), \ldots, x^1(p))$ на U со значениями в $\mathbb{R}$. В дальнейшем мы не будем делать различия между этими двумя функциями, так как по смыслу всегда будет понятно, о какой функции идет речь. Если мы обозначим $\xi^i = \frac{d\alpha^i(t)}{dt}\Big|_{t=0}$, то производную по направлению (2.1) можно записать в виде

$$\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{p_0} = \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\Big|_{p_0} f = X_{p_0}(f), \qquad (2.2)$$

где X_{p_0} — линейное отображение из алгебры (бесконечно) дифференцируемых функций f на M (мы будем обозначать эту алгебру $\mathfrak{F}(M)$) в $\mathbb{R}$. Из (2.1) и (2.2) следует, что

$$X_{p_0} f = \frac{d}{dt} f(\alpha(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0}. \qquad (2.3)$$

Отображение X_{p_0} называется вектором, касательным к кривой $\alpha(t)$ в точке p_0. Нетрудно убедиться, что X_p удовлетворяет правилу Лейбница

$$X_p(fg) = (X_p(f))g(p) + f(p)X_p(g).$$

Дадим следующее определение: *касательным вектором* к многообразию M в точке $p \in M$ называется линейное отображение $X_p : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее правилу Лейбница в точке p. При этом значение $X_p(f)$ ($f \in \mathfrak{F}(M)$) есть производная функции f в точке p по некоторому направлению. Линейное пространство, натянутое на всевозможные касательные векторы X_p в точке p, называется *касательным пространством* к M в точке p и обозначается $T_p(M)$. Если $\{x^i\}$ — локальные координаты в окрестности точки p, то элементы $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x^i(p)} \right\}$ образуют базис в $T_p(M)$ и любой касательный вектор $X_p \in T_p(M)$ может быть записан в виде (см. (2.2)):

$$X_p = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p, \tag{2.4}$$

где числа $\{\xi^i\}$ — координаты X_p в этом базисе. Очевидно, что $\dim T_p(M) = \dim M$.

Структуру касательного пространства к прямому произведению многообразий $M \times N$ в точке (p, q) ($p \in M, q \in N$) мы обсудим в §4.

Пусть теперь каждой точке $p \in M$ сопоставлен касательный вектор $X_p \in T_p(M)$, гладко зависящий от p. Тогда говорят, что на M задано векторное поле X. Если f есть дифференцируемая функция на M, то (Xf) есть функция на M, определяемая равенством: $(Xf)(p) = X_p(f)$. В локальных координатах $\{x^i(p)\}$, заданных в некоторой окрестности U многообразия M, $X = \sum\limits_i \xi^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$.

Если для любой дифференцируемой функции $f \in \mathfrak{F}(M)$ функция Xf также является дифференцируемой, то поле X называется дифференцируемым векторным полем. Координаты $\xi^i(p)$ такого поля в локальном базисе являются дифференцируемыми функциями. Множество всех дифференцируемых векторных полей на M будем обозначать $\mathfrak{X}(M)$. Поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ является линейным отображением $X : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$. Определим в $\mathfrak{X}(M)$ скобочную операцию $[X, Y]$:

$$[X,Y](f) = X\left(Y(f)\right) - Y\left(X(f)\right).$$

Относительно этой операции $\mathfrak{X}(M)$ является алгеброй Ли, т. е. выполняются следующие соотношения:

$$1)\quad [X,Y] = -[Y,X]; \tag{2.5а}$$

$$2)\quad [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \tag{2.5б}$$

для $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Соотношение (2.5б) называется тождеством Якоби. В $\mathfrak{X}(M)$ можно также ввести операцию умножения на функции из $\mathfrak{F}(M)$ следующим образом: если $f \in \mathfrak{F}(M)$ и $X \in \mathfrak{X}(M)$, то $(fX)_p = f(p)X_p$.

Познакомившись с понятиями касательного вектора и касательного пространства, мы можем теперь ввести понятия *ориентируемости* и *ориентируемого многообразия*.

Пусть $\{U_a, \varphi_a\}$ — некоторый атлас многообразия M. Рассмотрим окрестности U_a и U_b, такие что $U_a \cap U_b \neq \varnothing$. Для точки $p \in U_a \cap U_b$ мы имеем два набора координат: $\varphi_a(p) = \left(x^1(p), \ldots, x^n(p)\right)$ и $\varphi_b(p) = \left(y^1(p), \ldots, y^n(p)\right)$, и, соответственно, два базиса в касательном пространстве T_pM : $\left\{(X_i)_p = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right\}$ и $\left\{(Y_j)_p = \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p\right\}$. Нетрудно убедиться в том, что эти базисы связаны преобразованием

$$(X_i)_p = A_i^j (Y_j)_p,$$

где матрица $A_i^j = (\partial y^j / \partial x^i)\big|_p$ и якобиан $J = \det A \neq 0$. Если $J > 0$, то говорят, что базисы $\{X_i\}$ и $\{Y_j\}$ имеют одну и ту же ориентацию (ориентированы одинаково), если и $J < 0$, то говорят, что они имеют противоположные ориентации.

Многообразие M называется ориентируемым, если для любых перекрывающихся окрестностей U_a и U_b существуют локальные координаты $\{x^i\}$ для U_a и $\{y^j\}$ для U_b, такие, что якобиан $J = \det(\partial y^j / \partial x^i) > 0$. Это определение совпадает с интуитивно понятным свойством «двухсторонности» двумерных поверхностей D^2 (двумерный диск), сферы S^2, тор T^2 и др. Все эти поверхности ориентируемые. В то же время, например, лента Мёбиуса, рассматриваемая в § 6 настоящей главы, обладает лишь одной стороной и является неориентируемым многообразием (задача 2.26). Для нее всегда найдутся окрестности, в пересечении которых якобиан матрицы преобразования $J < 0$. Другими примерами неориентируемых многообразий являются бутылка Клейна (§ 6 гл. 2) и проективное пространство $\mathbb{R}P^2$.

§ 3. Дифференциальные формы

Рассмотрим линейное пространство $T_p^*(M)$, дуальное (см. Приложение 6) к касательному пространству $T_p(M)$ многообразия M. Оно называется *кокасательным пространством*, а его элементы — *кокасательными векторами* (*ковекторами*). Часто значение ковектора $\omega_p \in T_p^*(M)$ как линейного функционала на касательном векторе $X_p \in T_p(M)$ записывается в виде внутреннего произведения $\langle \omega_p, X_p \rangle$. Таким образом, ковектор ω_p является линейным функционалом: $\omega_p : T_p(M) \to \mathbb{R}$. Пусть $\{x^i\}$ — локальная координатная система в окрестности точки p и $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right\}$ базис касательных векторов в $T_p(M)$. Обозначим через

$\left\{(dx^i)_p\right\}$ базис в $T_p^*(M)$, дуальный к $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right\}$. Тогда

$$\left\langle (dx^i)_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right\rangle = \delta^i_j. \tag{2.6}$$

Функционал dx^i называют полным дифференциалом. Любой ковектор $\omega_p \in T_p^*(M)$ может быть представлен в виде

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} u_i (dx^i)_p, \tag{2.7}$$

где коэффициенты u_i называются компонентами ковектора ω_p и равны

$$u_i = \left\langle \omega_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \right\rangle. \tag{2.8}$$

Для каждой функции $f \in \mathfrak{F}(M)$ мы определим ее дифференциал $(df)_p$ в точке p как такой функционал, что

$$\langle (df)_p, X_p \rangle = X_p(f), \tag{2.9}$$

где $X_p \in T_p(M)$. В формулах (2.6), (2.7) и (2.9) символы dx^i и df использовались просто как обозначение. Но оказывается, что эти дифференциалы обладают теми же свойствами, что и обычные полные дифференциалы функций, изучаемые в курсе математического анализа. В частности, из (2.7)–(2.9) следует, что

$$(df)_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p (dx^i)_p. \tag{2.10}$$

Сопоставим каждой точке p многообразия M ковектор $\omega_p \in T_p^*(M)$. Тогда говорят, что на M задана 1-форма (или *дифференциальная форма* степени 1). Ясно, что 1-форма ω есть линейное отображение, $\omega : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$, причем

$$(\omega(X))_p = \langle \omega_p, X_p \rangle, \quad X \in \mathfrak{X}(M), \quad p \in M, \tag{2.11}$$

(мы будем рассматривать лишь дифференцируемые 1-формы).

Справедливы следующие свойства ($f, g \in \mathfrak{F}(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$):

$$\omega(fX + gY) = f\omega(X) + g\omega(Y), \quad (f\omega)(X) = f\omega(X). \tag{2.12}$$

В терминах локальных координат $\{x^i\}$

$$\omega = \sum_i u_i(x)dx^i, \quad X = \sum_i \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Очевидно, что ω и X не зависят от выбора координат. Базисные элементы dx^i и $\frac{\partial}{\partial x^i}$ при преобразованиях координат $x \to x' = x'(x)$ преобразуются по формулам:

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}dx^j, \quad \frac{\partial}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Отсюда можно вывести закон преобразования для компонент u_i и ξ^i (задача 2.4).

Определим теперь форму ω произвольной целой степени r как кососимметрическое отображение из $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)$ (r раз) в $\mathfrak{F}(M)$, линейное по каждому аргументу. Кососимметричность означает, что

$$\omega(X_1, \ldots, X_r) = (-1)^{\Delta_\pi}\omega(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(r)}),$$

где Δ_π — четность перестановки $\pi : (1, 2, \ldots, r) \to (\pi(1), \ldots, \pi(2))$. Обозначим $D^r(M)$ множество всех дифференциальных r-форм на M для каждого $r > 0$. Ясно, что если $n = \dim M$, то вследствие кососимметричности r-форма $\omega \equiv 0$, если $r > n$. Положим $D^0(M) = \mathfrak{F}(M)$, т.е. дифференцируемые функции на M мы будем считать 0-формами.

Операция *внешнего произведения* $\wedge$ позволяет из форм низших степеней строить формы более высоких степеней. Если $\omega_1 \in D^r(M)$ и $\omega_2 \in D^s(M)$, то $\omega_1 \wedge \omega_2 \in D^{r+s}$, и $r+s$-форма $\omega_1 \wedge \omega_2$ есть следующее отображение:

$$(X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}, \ldots, X_{r+s}) \to A(\omega_1(X_1, \ldots, X_r)\omega_2(X_{r+1}, \ldots, X_{r+s})) =$$
$$= \frac{1}{(r+s)!}\sum_\pi (-1)^{\Delta_\pi}\omega_1(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(r)})\omega_2(X_{\pi(r+1)}, \ldots, X_{\pi(r+s)}), \tag{2.13}$$

где символ A означает альтернирование и суммирование ведется по всем возможным перестановкам π. Например, для $\omega_1 \in D^1(M)$, $\omega_2 \in D^1(M)$ $\omega_1 \wedge \omega_2$ является 2-формой:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(X, Y) = \frac{1}{2}(\omega_1(X)\omega_2(Y) - \omega_1(Y)\omega_2(X)), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.14}$$

Можно показать, что если $\omega \in D^r(M)$, а $\mu \in D^q(M)$, то справедлива формула

$$\omega \wedge \mu = (-1)^{rq}\mu \wedge \omega.$$

В частности, если ω и μ являются 1-формами, то

$$\omega \wedge \mu = -\mu \wedge \omega \quad \text{и} \quad \omega \wedge \omega = 0.$$

Если $\{x^i\}$ — локальные координаты в окрестности $U \subset M$, то дифференциалы dx^i образуют базис 1-форм на U. Аналогично внешние произведения r дифференциалов $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$ образуют базис r-форм на U. Любая дифференциальная r-форма в этой координатной окрестности может быть представлена в виде

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} u_{i_1 i_2 \ldots i_r}(x)\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}, \tag{2.15}$$

где компоненты $u_{i_1 i_2 \ldots i_r}(x)$ — дифференцируемые функции на U, антисимметричные по всем индексам (сравни с формулой (2.7) для ковектора). Отсюда, например, следует, что для 1-формы

$$\omega(X) = \sum_i u_i(x)\xi^i(x),$$

где $\xi^i(x)$ — компоненты векторного поля X в выбранных локальных координатах.

В соответствии с вышесказанным 0-форма характеризуется одной функцией, произвольная 1-форма $\omega = \sum\limits_i u_i(x)\, dx^i$ — n функциями $u_i(x)$ и т. д. Это соответствует тому, что размерность линейного пространства Λ^r антисимметричных тензоров степени r в точке $x \in M$ равна 1 при $r = 0$, n при $r = 1$ и т. д.

Поэтому говорят, что $\dim D^0 = 1$, $\dim D^1 = n$. Можно показать, что $\dim D^2 = n(n-1)/2$ и $\dim D^r = \dim D^{n-r}$, где $n = \dim M$ (задача 2.5).

Часто оказывается полезной следующая формула

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n} = \varepsilon^{i_1 \ldots i_n}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n, \tag{2.16}$$

где $\varepsilon^{i_1 \ldots i_n}$ — полностью антисимметричный тензор ранга n.

Введем операцию *внешнего дифференцирования* форм, которую будем обозначать символом d. Она характеризуется следующими свойствами:

а) d есть линейное отображение из D^r в D^{r+1}, $d(D^r) \subset D^{r+1}$;

б) для функции $f \in D^0(M)$ 1-форма df есть полный дифференциал f и

$$df(X) = X(f), \quad X \in \mathfrak{X}(M) \tag{2.17}$$

(ср. (2.9));

в) если $\omega \in D^r(M)$ и $\mu \in D^s(M)$, то

$$d(\omega \wedge \mu) = d\omega \wedge \mu + (-1)^r \omega \wedge d\mu; \tag{2.18}$$

г)

$$dd = 0. \tag{2.19}$$

Покажем, как операция внешнего дифференцирования записывается в локальных координатах. Пусть поле $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Тогда, в соответствии со свойством (2.17)

$$df(X) = X(f) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \left(\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i(X),$$

т.е. $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) dx^i$ как и для дифференциала функции f (см. (2.10)). Если r-форма $\omega = \sum\limits_{i_1<i_2<\ldots<i_r} u_{i_1\ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$, то $(r+1)$-форма $d\omega$ в этих координатах выглядит так

$$d\omega = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} du_{i_1\ldots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} =$$

$$= \sum_{i_1<\ldots<i_r} \frac{\partial u_{i_1\ldots i_r}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}. \tag{2.20}$$

Если $M = \mathbb{R}^3$, то нетрудно показать, что внешнее дифференцирование эквивалентно вычислению rot и div (задача 2.6). При этом для функции на $\mathbb{R}^3$ тождество ddf следует из равенства смешанных частных производных $\partial_i\partial_j f$ и $\partial_j\partial_i f$ или, эквивалентно, из тождества $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$. Для 1-формы $\omega = \sum\limits_i u_i\, dx^i$ тождество $dd\omega$ соответствует тождеству $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0$ (задача 2.7).

Несложно доказать следующую формулу дифференцирования 1-форм (задача 2.8), которая нам понадобится в дальнейшем. Пусть $\omega \in D^1(M)$ и $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Тогда

$$2\,(d\omega)(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(x)) - \omega([X,Y]), \tag{2.21}$$

где $X(\omega(Y))$ понимается как результат действия векторного поля X на функцию $\omega(Y) \in \mathfrak{F}(M)$.

Определим теперь операцию *интегрирования* дифференциальных форм для ориентируемого многообразия M. Мы приведем здесь лишь основные моменты этой конструкции, строгое изложение можно найти в [Бу] (см. также [На], [НС]).

Можно показать, что для ориентируемого многообразия M размерности n всегда существует n-форма $\Omega \in D^n(M)$, которая нигде не обращается в нуль. Такая форма задает ориентацию M и называется *элементом объема*.

Такая форма не едининственна, другая n-форма $\Omega' = h\Omega$, где h — гладкая функция на M, нигде не обращающаяся в нуль, также является элементом объема. Два элемента объема Ω и Ω' задают одинаковые ориентации, если функция $h > 0$ на M, и противоположные, если $h < 0$. Для $M = \mathbb{R}^n$ примером такой формы является $dv = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$, она задает естественную ориентацию на $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что введенные выше определения являются корректными. Действительно, рассмотрим две карты (U_a, φ_a) и (U_b, φ_b) с пересекающимися окрестностями на M и соответствующие координаты $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$. Тогда любая n-форма $\omega \in D^n(M)$ локально, на U_a, может быть представлена как $\omega = u_a(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ (см. (2.15) и (2.16)). В точке $p \in U_a \cap U_b$ мы имеем также другое локальное представление $\omega = u_b(y)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$. Используя формулу для преобразования базисных форм типа dx^i и результаты задачи 2.4, нетрудно убедиться, что

$$u_a(x) = u_b(\varphi_{ab}(x)) \cdot J,$$

где $J = \det(\partial y^i / \partial x^j)$ — якобиан матрицы преобразования координат. Так как M — ориентируемое многообразие, то $J > 0$. Поэтому знак функции h, связывающей два элемента объема, определен однозначно.

Заметим, что любая n-форма ω может быть записана как $\omega = f\Omega$, где f — функция на M. Возможность определить интеграл от ω по M зависит от гладкости функции f. Для простоты рассмотрим случай, когда f ограничена на M, имеет компактный носитель и ее возможные точки разрыва образуют подмножество меры нуль.

Определим сначала интеграл от ω по окрестности $U \subset M$ карты (U, φ) с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$. Как уже говорилось выше, форма ω локально может быть представлена как $\omega = u(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ (точнее, такое представление имеет форма $(\varphi^{-1})^* \omega$, см. следующий параграф) и может рассматриваться как форма на $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Тогда положим по определению

$$\int\limits_U \omega = \int\limits_{\varphi(U)} u(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int\limits_{\varphi(U)} u(x)\, d^n x, \qquad (2.22\text{a})$$

где последнее выражение есть обычный кратный интеграл в смысле Римана от функции n переменных. Заметим, что согласно (2.22), $dv = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ может рассматриваться формально как элемент объема интегрирования $d^n x$ в обычном смысле. Нетрудно убедиться, что для ориентируемого многообразия M это определение не зависит от выбора локальных координат и согласовано в области пересечения нескольких окрестностей (задача 2.27).

Далее, пусть $\{U_a\}$ — открытое покрытие M такое, что каждая точка покрыта конечным числом окрестностей (для этого предположим, что M паракомпактно, см. Приложение 10). Можно показать, что для такого покрытия существует разбиение единицы, т.е. набор функций $\varepsilon_a \in \mathfrak{F}(M)$ таких, что (1) $0 \leqslant \varepsilon_a(p) \leqslant 1$; (2) $\varepsilon_a(p) = 0$, если $p \notin U_a$ и (3) $\sum\limits_a \varepsilon_a(p) = 1$ для любой точки $p \in M$. Из свойства (3) следует, что $\omega = \sum\limits_a \varepsilon_a \omega$. Тогда интеграл от ω по многообразию M определим как

$$\int\limits_M \omega = \sum_a \int\limits_M \varepsilon_a \omega = \sum_a \int\limits_{U_a} \varepsilon_a \omega. \qquad (2.22б)$$

Сделаем еще одно замечание. Если f — интегрируемая функция на M и Ω — элемент объема, то в общем случае интеграл от f по M можно определить как $\int\limits_M f\Omega$, но т. к. элемент объема, задающий данную ориентацию, не является единственным, то это определение не дает однозначного результата. По этой же причине нельзя однозначно ввести понятие объема M. Ситуация меняется, если многообразие снабжено метрикой, см. гл. 3.

Определим еще *операцию Ходжа* или преобразование дуальности, обозначаемое символом $*$. Эта операция переводит формы из пространства $D^r(M)$ в $D^{n-r}(M)$. Здесь мы рассмотрим эту операцию для плоского евклидова пространства $M = \mathbb{R}^n$:

$$* \, (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}) = \frac{1}{(n-r)!} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r i_{r+1} \ldots i_n} \times$$
$$\times \, dx^{i_{r+1}} \wedge dx^{i_{r+2}} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}. \qquad (2.23а)$$

Если пространство M риманово, то в определении операции Ходжа нужно заменить $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$ на $\sqrt{|\gamma|}\varepsilon_{i_1 \ldots i_r i_{r+1} \ldots i_n}$, где γ — детерминант метрического тензора, и необходимо различать верхние и нижние индексы (см. §4, гл. 3). Нетрудно показать, что в случае евклидова пространства

$$** \omega = (-1)^{r(n-r)} \omega \qquad (2.23б)$$

для $\omega \in D^r(\mathbb{R}^n)$.

Введем теперь понятие *внутреннего произведения* форм. Пусть ω и μ суть r-формы на $M = \mathbb{R}^n$. Определим их внутреннее произведение так:

$$(\omega, \mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega \wedge * \mu. \qquad (2.24)$$

Нетрудно показать, что если $\omega = \sum u_{i_1 \ldots i_r} dx^{i} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$ и $\mu = \sum v_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$, то

$$(\omega, \mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{i_1 \ldots i_r} v_{i_1 \ldots i_r} dv \qquad (2.25)$$

(задача 2.11). Внутреннее произведение симметрично: $(\omega, \mu) = (\mu, \omega)$ так как

$$\omega \wedge *\mu = \mu \wedge *\omega. \tag{2.26}$$

Это равенство следует из определения операции Ходжа.

Для изучения дальнейших свойств дифференциальных форм можно рекомендовать книгу [КН], а также книги и обзоры [Ай], [ЕГХ], [На], [НС], написанные для физиков.

§ 4. Отображения и преобразования

Рассмотрим два многообразия M и N, причем, вообще говоря, $m = \dim M \neq n = \dim N$. Пусть задано отображение $\varphi : M \to N$.

Для выяснения некоторых свойств отображений нам в этом параграфе будет удобно вести рассмотрение в локальных координатах. Выберем в M карту (U, ψ), а в N — (V, χ), причем $\varphi(U) \subset V$. Определим функцию $\chi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ из $\psi(U) \subset \mathbb{R}^m$ в $\chi(V) \subset \mathbb{R}^n$.

Если функции $\chi_i \circ \varphi \circ \psi_j^{-1}$ являются (бесконечно) дифференцируемыми для всех карт (U_j, ψ_j) и (V_i, χ_i) таких, что $\varphi(U_j) \subset V_i$, то говорят что φ — *дифференцируемое отображение.*

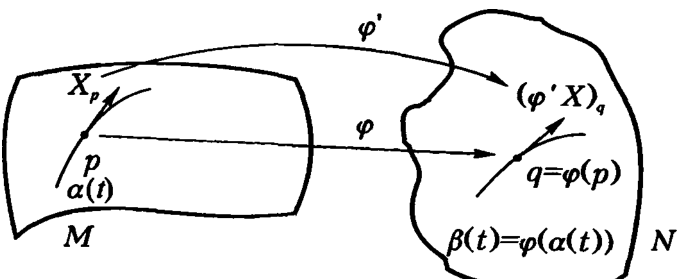

Рис. 6.

Выберем точку $p \in M$ и обозначим ее образ в N через q, $q = \varphi(p) \in N$ (рис. 6). Пусть $\alpha(t)$ — кривая в M, проходящая через точку p, причем $\alpha(0) = p$. Она определяет касательный вектор X_p к M в точке p. Образ этой кривой в N будем обозначать $\beta(t) = \varphi(\alpha(t))$. Кривая $\beta(t)$ определяет касательный вектор X'_q к N в точке q, который является образом X_p при отображении многообразий. Такая процедура определяет *дифференциал отображения* φ, обозначаемый φ' или $d\varphi$. Будем писать

$$X'_q = X'_{\varphi(p)} = \varphi' X_p = d\varphi X_p. \tag{2.27}$$

Для дифференцируемой функции f' на N, $f' \in \mathfrak{F}(N)$, определим функцию $f \in \mathfrak{F}(M)$, являющуюся обратным образом f' при отображении φ, так

$$f \equiv \varphi^* f' = f' \circ \varphi. \tag{2.28}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\varphi' X_p(f') = X'_{\varphi(p)}(f') = \frac{d}{dt} f'(\varphi(\alpha(t)))\Big|_{t=0} =$$
$$= \frac{d}{dt}(f' \circ \varphi)(\alpha(t))\Big|_{t=0} = X_p(f' \circ \varphi) = X_p(\varphi^* f'). \qquad (2.29)$$

Обсудим отображение касательных векторов в терминах локальных координат. Пусть в окрестностях U и V, введенных выше, заданы координаты $\{x^i\}(i = 1, \ldots, m)$ и $\{y^j\}(j = 1, \ldots, n)$ и точка $p \in M$ имеет координаты $\{x_0^1, \ldots, x_0^m\}$, а $q = \varphi(p) \in N$ — $\{y_0^1, \ldots, y_0^n\}$. Таким образом, мы имеем функцию $\tilde{\varphi} = \chi \circ \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to \chi(V)$, причем $y_0^j = \tilde{\varphi}^j(x_0)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Возьмем в качестве X_p вектор $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$. Тогда, для функции f' на V, пользуясь (2.29) и правилом дифференцирования сложной функции, получаем:

$$\tilde{\varphi}' \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f' = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (f' \circ \tilde{\varphi}) = \frac{\partial\left(f'\left(\tilde{\varphi}(x)\right)\right)}{\partial x^i}\Big|_{x=x_0} =$$
$$= \frac{\partial f'}{\partial y^j}\Big|_{y=y_0} \frac{\partial \tilde{\varphi}^j(x)}{\partial x^i}\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial \tilde{\varphi}^j(x)}{\partial x^i}\Big|_{x=x_0} \frac{\partial}{\partial y^j} f'.$$

Следовательно,

$$\tilde{\varphi}' \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{\partial \tilde{\varphi}^j}{\partial x^i}\Big|_{x=x_0} \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_q. \qquad (2.30)$$

Произвольное дифференцируемое отображение φ, вообще говоря, не преобразует векторное поле на M в векторное поле на N. Это связано с тем, что может не существовать обратное отображение φ^{-1} (см. формулу (2.35)).

Теперь мы можем выяснить, как устроено касательное пространство $T_{(p,q)}(M \times N)$ к прямому произведению многообразий $M \times N$ $(\dim M = m, \dim N = n)$ в точке $(p, q) \in M \times N$. Пусть $X_p \in T_p(M)$, $Y_q \in T_q(N)$, а кривые $x(t)$ и $y(t)$ такие, что X_p — касательный вектор к $x(t)$ в точке $p = x(t_0)$, а Y_q — касательный вектор к $y(t)$ в точке $q = y(t_0)$. Возьмем теперь вектор $Z \in T_{(p,q)}(M \times N)$, который касается кривой $(x(t), y(t))$ в $(p, q) = (x(t_0), y(t_0))$. Определим отображение $M \to M \times N$ следующим образом: $\psi_1(p') = (p', q)$, где $p' \in M$. Аналогично, $\psi_2 : N \to M \times N$ и $\psi_2(q') = (p, q')$, $q' \in N$. Обозначим $\mathbf{X}_{(p,q)} = \psi'_1 X_p$, $\mathbf{Y}_{(p,q)} = \psi'_2 Y_q$. Очевидно, что $\mathbf{X}_{(p,q)} \in T_{(p,q)}(M \times N)$ и $\mathbf{Y}_{(p,q)} \in T_{(p,q)}(M \times N)$. Пусть $f \in \mathfrak{F}(M \times N)$. Тогда, согласно (2.3),

$$\mathbf{Z}_{(p,q)}(f) = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))\Big|_{t=t_0} =$$

$$= \frac{d}{dt} f(x(t), q)\Big|_{t=t_0} + \frac{d}{dt} f(p, y(t))\Big|_{t=t_0} = \mathbf{X}_{(p,q)}(f) + \mathbf{Y}_{(p,q)}(f) \tag{2.31}$$

и, значит, $\mathbf{Z}_{(p,q)} = \mathbf{X}_{(p,q)} + \mathbf{Y}_{(p,q)}$. Таким образом касательное пространство $T_{(p,q)}(M \times N)$ может быть отождествлено с прямой суммой векторных пространств $T_p(M) \oplus T_q(N)$.

Пусть теперь задано отображение $\varphi : M \times N \to V$, где M, N, V — некоторые многообразия. Зафиксируем точку $(p, q) \in M \times N$ и определим отображения $\varphi_1 : M \to V$ и $\varphi_2 : N \to V$ следующими формулами: $\varphi_1(p') = \varphi(p', q)$, $\varphi_2(q') = \varphi(p, q')$, где $p' \in M$, $q' \in N$. Тогда можно доказать следующее

Предложение 2.4.1. Если вектор $\mathbf{Z}_{(p,q)} \in T_{(p,q)}(M \times N)$ соответствует $(X_p, Y_q) \in T_p(M) \oplus T_q(N)$, как описано выше, то

$$\varphi' \mathbf{Z}_{(p,q)} = \varphi'_1 X_p + \varphi'_2 Y_q. \tag{2.32}$$

Доказательство. Заметим, что $\varphi_i = \varphi \circ \psi_i$ $(i = 1, 2)$, где ψ_i — отображения, определенные выше. Из определения $\mathbf{X}_{(p,q)}$ и $\mathbf{Y}_{(p,q)}$ следует, что $\varphi' \mathbf{X}_{(p,q)} = \varphi'_1 X_p$, $\varphi' \mathbf{Y}_{(p,q)} = \varphi'_2 \mathbf{Y}_q$. Поэтому $\varphi' \mathbf{Z}_{(p,q)} = \varphi'(\mathbf{X}_{(p,q)} + \mathbf{Y}_{(p,q)}) = \varphi'_1 X_p + \varphi'_2 Y_q$.

Формулу (2.32) часто называют формулой Лейбница.

Обсудим теперь отображение форм. Пусть ω' является r-формой на N. Определим ее обратный образ $\omega = \varphi^* \omega' \in D^r(M)$ следующей формулой

$$(\varphi^* \omega')_p (X_1, \ldots, X_r) = \omega'_{\varphi(p)} (\varphi' X_1, \ldots, \varphi' X_r), \tag{2.33}$$

где $X_i \in T_p(M)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Очевидно, эта формула полностью согласована с (2.28), (2.29), если функции f' и $\varphi^* f'$ рассматривать как формы нулевой степени.

Пусть теперь окрестности U, V, координаты $\{x^i\}$, $\{y^j\}$ и функция $\tilde{\varphi}$ те же, что и выше. По определению (2.33) и согласно (2.30) имеем

$$(\tilde{\varphi}^* dy^i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = (dy^i)_q \left(\tilde{\varphi}' \frac{\partial}{\partial x^j} \right) =$$

$$= (dy^i)_q \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}^k}{\partial x^j}\Big|_{x=x_0} \frac{\partial}{\partial y^k} \right) = \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}^k}{\partial x^j} \right)_{x=x_0} (dy^i)_q \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right) = \frac{\partial \tilde{\varphi}^i}{\partial x^j}\Big|_{x=x_0}.$$

Таким образом, формула (2.33) для дифференциала dy^i приводится к виду

$$(\tilde{\varphi}^* dy^i)_p = \frac{\partial \tilde{\varphi}^i}{\partial x^j}\Big|_{x=x_0} (dx^j)_p.$$

Можно доказать, что внешнее дифференцирование перестановочно с φ^*. Мы покажем это для 1-формы в локальных координатах. Пусть

$\omega' = \sum_j u'_j(y)\,dy^j$ есть 1-форма на V. Тогда $\tilde{\varphi}^*\omega' = \sum_j (u'_j \circ \tilde{\varphi})(x)(\tilde{\varphi}^* dy^j)$ и мы имеем две цепочки равенств:

$$d(\tilde{\varphi}^*\omega') = \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x^k}(u'_j \circ \tilde{\varphi})(x)\,dx^k \wedge (\tilde{\varphi}^* dy^j) =$$

$$= \sum_{j,k,l,i} \frac{\partial u'_j(y)}{\partial y^l} \frac{\partial \tilde{\varphi}^l(x)}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{\varphi}^j}{\partial x^i}(x)\,dx^k \wedge dx^i;$$

$$\tilde{\varphi}^*(d\omega') = \tilde{\varphi}^*\left(\sum_{j,l} \frac{\partial u'_j}{\partial y^l} dy^l \wedge dy^j\right) =$$

$$= \sum_{j,l} \frac{\partial u'_j}{\partial y^l}(\tilde{\varphi}^*\, dy^l) \wedge (\tilde{\varphi}^*\, dy^j) = \sum_{j,l,k,i} \frac{\partial u'_j}{\partial y^l} \frac{\partial \tilde{\varphi}^l}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{\varphi}^j}{\partial x^i}\, dx^k \wedge dx^i.$$

Сравнивая окончательные выражения, приходим к выводу, что

$$d(\tilde{\varphi}^*\omega') = \tilde{\varphi}^*(d\omega'). \tag{2.34}$$

В итоге, после обсуждения действия отображения φ, мы имеем следующую схему:

$$\begin{aligned} \varphi: \qquad & M \xrightarrow{\varphi} N, \\ & \mathfrak{F}(M) \xleftarrow{\varphi^*} \mathfrak{F}(N), \\ & T_p(M) \xrightarrow{\varphi'} T_{\varphi(p)}(N), \\ & D^r(M) \xleftarrow{\varphi^*} D^r(N). \end{aligned}$$

Отображение φ отображает точки M в N и касательные векторы к M в касательные векторы к N. Для функций и форм соответствующее отображение действует в обратном направлении. Обратный образ для форм $\varphi^*\omega'$ часто называют возвра́том формы ω' из N в M (соответствующий термин в английском языке — pullback).

Если в качестве многообразия N выступает само многообразие M и отображение $\varphi : M \to M$ является *диффеоморфизмом*, т. е. φ и φ^{-1} — дифференцируемые отображения, то φ называют *преобразованием* в M. Оно индуцирует автоморфизм (см. Приложение 7) φ' алгебры Ли $\mathfrak{X}(M)$ векторных полей:

$$(\varphi' X)_p = \varphi' X_{\varphi^{-1}(p)}, \tag{2.35}$$

где $X \in \mathfrak{X}(M)$. Выполняются следующие два свойства преобразований:

$$1) \quad \varphi'(fX) = (f \circ \varphi^{-1})\varphi' X; \tag{2.36a}$$

$$2)\quad [\varphi' X, \varphi' Y] = \varphi'([X, Y]). \tag{2.36б}$$

В дальнейшем важную роль будут играть *однопараметрические группы преобразований* M. Однопараметрическая группа преобразований — это множество преобразований φ_t, параметризуемых вещественным числом t, $-\infty < t < \infty$, и обладающих свойствами:

1) $\varphi_t : M \to M$ есть преобразование для любого фиксированного t;

2) отображение $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ дифференцируемое;

3) $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

Оказывается, что каждое векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ локально находится во взаимно-однозначном соответствии с некоторой однопараметрической группой преобразований φ_t. Это соответствие описывается следующими формулами:

$$(Xf)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\varphi_t(p)) - f(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{f \circ \varphi_t - f}{t}\right)(p),$$

где $f \in \mathfrak{F}(M)$. Говорят, что φ_t индуцирует поле X.

Предложение 2.4.2. Пусть X — векторное поле на M, φ_t — его однопараметрическая группа преобразований, а ψ — некоторое преобразование M. Тогда поле $X' = \psi' X$ индуцируется $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$.

Доказательство. Возьмем точку $p \in M$ и $q = \psi(p)$. Вектор $X_p \in T_p(M)$ касается кривой $\alpha(t) = \varphi_t(p)$ в точке $p = \alpha(0)$. Если $f \in \mathfrak{F}(M)$, то

$$(X'f)_q = (X(f \circ \psi))_p = \lim_{t\to 0} \left(\frac{f \circ \psi \circ \varphi_t - f \circ \psi}{t}\right)(\psi^{-1}(q)) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{f \circ (\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}) - f}{t}\right)(q).$$

Отсюда следует, что поле $X' = \psi' X$ порождается однопараметрической группой преобразований $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$.

В заключение параграфа мы приведем без доказательства следующую формулу:

$$[X, Y] = \lim_{t\to 0} \frac{Y - \varphi'_t Y}{t}, \tag{2.37}$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, а φ_t — однопараметрическая группа преобразований, порожденная полем X (доказательство можно найти в книгах [Но], [КН].

§ 5. Группы Ли

Важным классом дифференцируемых многообразий являются группы Ли. *Группа Ли* — это группа, которая одновременно является дифференцируемым многообразием, причем групповая операция

$G \times G \ni (a,b) \to ab^{-1} \in G$ есть дифференцируемое отображение из $G \times G$ в G.

Обозначим через L_a левые сдвиги на группе элементом $a \in G$: $L_a g = ag$, $g \in G$. Аналогично, R_a — правый сдвиг: $R_a g = ga$. L_a и R_a являются преобразованиями на G. Определим также отображение S_a, $a \in G$: $S_a g = L_a R_{a^{-1}} g = aga^{-1}$. S_a есть внутренний автоморфизм (см. Приложение 7) в G.

Рассмотрим множество векторных полей на G, $\mathfrak{X}(G)$. Поле $X \in \mathfrak{X}$ называется *левоинвариантным*, если оно инвариантно относительно всех отображений L'_a, $a \in G$ (L'_a — дифференциал L_a). Это означает, что $L'_a X = X$ или, если указывать точку, в которой рассматривается поле,

$$(L'_a X)_{ag} \equiv L'_a X_g = X_{ag}. \tag{2.38}$$

Обозначим через $\mathfrak{g}$ множество всех левоинвариантных полей на G, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}$.

Пусть e — единица группы Ли G. Рассмотрим произвольный касательный вектор A пространства, касательного к G в точке e, $T_e(G)$. Определим векторное поле X на G формулой: $X_a = L'_a A$. Тогда для этого поля справедливы равенства:

$$X_b = L'_b A_e = L'_{ba^{-1}} L'_a A_e = L'_{ba^{-1}} X_a, \quad (a, b \in G),$$

т.е. поле X является левоинвариантным (ср. (2.38)). Следовательно, линейные пространства $\mathfrak{g}$ и $T_e(G)$ изоморфны, $\mathfrak{g} \cong T_e(G)$, и $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e(G) = \dim G$. Если $X, Y \in \mathfrak{g}$, то из (2.36б) следует, что

$$L'_a[X,Y] = [L'_a X, L'_a Y] = [X,Y] \tag{2.39}$$

и, значит, $[X,Y] \in \mathfrak{g}$. Таким образом, $\mathfrak{g}$ является алгеброй; она называется *алгеброй Ли* группы G (отметим, что для того, чтобы $\mathfrak{g}$ было алгеброй Ли, должны выполняться свойства (2.5а, б); в нашем случае они выполняются). Подробнее свойства алгебр Ли будут изучаться в гл. 5. Элементы $\mathfrak{g}$ будем обозначать $A, B, C \ldots$.

Как уже говорилось в § 4, каждому векторному полю X локально соответствует некоторая однопараметрическая группа преобразований φ_t. Если поле X инвариантно относительно действия некоторого преобразования ψ, т.е. $\psi' X = X$, то из Предложения 2.4.2 следует, что φ_t и ψ коммутируют между собой. Пусть $A \in \mathfrak{g}$ и φ_t — соответствующая однопараметрическая группа преобразований в окрестности e. Тогда

$$\varphi_t(g) = (\varphi_t \circ L_g)(e) = (L_g \circ \varphi_t)(e) = L_g(\varphi_t(e)) = g\varphi_t(e) = R_{\varphi_t(e)} g, \tag{2.40}$$

для любого $g \in G$. Следовательно, φ_t задано глобально на всей группе G. Величина $a_t = \varphi_t(e)$ обладает свойствами:

$$\text{i)} \quad a_{t+s} = a_t a_s; \tag{2.41а}$$

$$\text{ii)} \quad a_0 = e \tag{2.41б}$$

и является однопараметрической подгруппой в G. Таким образом, любое левоинвариантное векторное поле A на G находится во взаимно-однозначном соответствии с однопараметрической подгруппой a_t в G.

Докажем одно важное свойство автоморфизмов (см. Приложение 6) G. Пусть φ — автоморфизм. Тогда

$$(\varphi \circ L_a)(b) = \varphi(L_a(b)) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = L_{\varphi(a)}(\varphi(b)) = (L_{\varphi(a)} \circ \varphi)(b).$$

Используя это свойство, получаем, что если $A \in \mathfrak{g}$, то

$$(\varphi' A)_{\varphi(a)} \equiv \varphi' A_a = \varphi' L'_a A_e = L'_{\varphi(a)} \varphi' A_e = L'_{\varphi(a)} (\varphi' A)_e.$$

Т.к. $(\varphi' A)_e \in T_e(G) \cong \mathfrak{g}$, то $\varphi' A$ является также левоинвариантным полем, $\varphi' A \in \mathfrak{g}$.

Обратимся теперь к автоморфизму S_a, $a \in G$, введенному выше. Дифференциал этого отображения играет важную роль в теории групп и алгебр и для него часто употребляют обозначение $\mathrm{ad}(a) \equiv S'_a$. Отображение $a \to \mathrm{ad}(a)$ задает представление группы G в линейном пространстве $\mathfrak{g}$ и называется присоединенным представлением ad (от слова adjoint — присоединенный). Т.к. $S_a = L_a R_{a^{-1}} = R_{a^{-1}} L_a$, то для $A \in \mathfrak{g}$ имеет место соотношение $\mathrm{ad}(a)A = R'_{a^{-1}} L'_a A = R'_{a^{-1}} A$. Если a_t — однопараметрическая подгруппа в G, отвечающая полю $A \in \mathfrak{g}$, то формулу (2.37) можно переписать в виде:

$$[A, B] = \lim_{t \to 0} \frac{B - R'_{a_t} B}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{B - \mathrm{ad}(a_t^{-1}) B}{t}. \tag{2.42}$$

Отметим еще одно важное свойство однопараметрической подгруппы a_t левоинвариантного поля $A \in \mathfrak{g}$. Она является единственной кривой в G такой, что касательный вектор к ней в точке a_t, который мы обозначим $\dot{a}_t$, равен $L'_{a_t} A_e$ и $a_0 = e$. Обозначим элемент группы $a_t|_{t=1} = a_1 \in G$ через $\exp A$. Таким образом, exp есть *экспоненциальное отображение* из $\mathfrak{g}$ в G, $\exp : \mathfrak{g} \to G$. При этом $\exp tA = a_t$.

Теперь мы перейдем к рассмотрению форм на группе Ли G. Форма ω на G называется левоинвариантной, если $L^*_a \omega = \omega$ для любого $a \in G$. Если ω — левоинвариантная 1-форма, а $A \in \mathfrak{g}$, то

$$(\omega(A))(a) = \omega_a(A_a) = \omega_a(L'_a A_e) = (L^*_a \omega)_e(A_e) = \omega_e(A_e) \tag{2.43}$$

для любого $a \in G$. Функция $\omega(A)$ постоянна на G и мы можем определить пространство $\mathfrak{g}^*$ левоинвариантных форм на G как пространство дуальное к $\mathfrak{g}$. Пользуясь формулой (2.21), можно доказать (задача 2.15) *уравнение Маурера—Картана*:

$$d\omega(A, B) = -\frac{1}{2}\omega([A, B]) \tag{2.44}$$

для $\omega \in \mathfrak{g}^*$, $A, B \in \mathfrak{g}$.

До сих пор мы рассматривали формы со значениями в пространстве вещественных чисел $\mathbb{R}$. В общем случае форма может принимать значения в некотором линейном пространстве. Так, нам часто придется иметь дело с формами на многообразии M со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Мы определим их так: $\omega = \sum_\alpha \omega^\alpha Q_\alpha$, где элементы $\{Q_\alpha\}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, \dim G$) образуют базис в $\mathfrak{g}$, а ω^α — обычные $\mathbb{R}$-значные формы на M. В этом случае выражение $[\omega, \mu]$ понимается следующим образом:

$$[\omega, \mu] = [Q_\alpha, Q_\beta]\omega^\alpha \wedge \mu^\beta, \tag{2.45а}$$

где $\omega = \sum_\alpha \omega^\alpha Q_\alpha$, $\mu = \sum_\alpha \mu^\alpha Q_\alpha$, а $[Q_\alpha, Q_\beta]$ — коммутатор в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Например, если $\omega, \mu \in D^1(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, то

$$[\omega, \mu](X, Y) = [Q_\alpha, Q_\beta](\omega^\alpha \wedge \mu^\beta)(X, Y) = \frac{1}{2}[Q_\alpha, Q_\beta]\big(\omega^\alpha(X)\mu^\beta(Y) - \\ - \omega^\alpha(Y)\mu^\beta(X)\big) = \frac{1}{2}[\omega(X), \mu(Y)] - \frac{1}{2}[\omega(Y), \mu(X)]. \tag{2.45б}$$

Нетрудно доказать следующие свойства:

$$[\omega, \omega](X, Y) = \big[\omega(X), \omega(Y)\big], \quad \omega \in D^1(M); \tag{2.45в}$$

$$[\omega, \mu] = (-1)^{pr+1}[\mu, \omega], \quad \omega \in D^p(M), \quad \mu \in D^r(M); \tag{2.45г}$$

$$d[\omega, \mu] = [d\omega, \mu] + (-1)^p[\omega, d\mu], \quad \omega \in D^p(M), \quad \mu \in D^r(M). \tag{2.45д}$$

Среди различных форм на группе важную роль играет *каноническая левоинвариантная 1-форма θ* (ее называют также формой Маурера—Картана). Это есть левоинвариантная $\mathfrak{g}$-значная 1-форма на G, определяемая формулой

$$\theta(A) = A$$

или

$$(\theta(A))(a) = \theta_a(A) = A_e$$

для $A \in \mathfrak{g}$ (в этой формуле аргумент формы обычно понимают как левоинвариантное векторное поле на группе в некоторой точке $a \in G$, а правую часть формулы как элемент $T_e(G) \cong \mathfrak{g}$). Каноническую форму можно разложить по базису $\{Q_\alpha\}$ алгебры $\mathfrak{g}$: $\theta = \sum_i \theta^\alpha Q_\alpha$, где θ^α образуют базис вещественнозначных левоинвариантных 1-форм на G. Уравнение Маурера—Картана для канонической формы может быть записано как

$$d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta] \tag{2.46а}$$

(см. (2.45)) или

$$d\theta^\alpha = -\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma=1}^{\dim \mathfrak{g}} C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\beta \wedge \theta^\gamma, \tag{2.46б}$$

($\alpha = 1, 2, \ldots, \dim G$), где $C^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ в базисе $\{Q_\alpha\}$, определяемые соотношением:

$$[Q_\beta, Q_\gamma] = \sum_\alpha C^\alpha_{\beta\gamma} Q_\alpha. \tag{2.47}$$

Сокращенно форму θ записывают в виде:

$$\theta = g^{-1}\, dg. \tag{2.48}$$

Если мы имеем матричную реализацию группы G, т.е. $g = g(\xi)$ — матрица, параметризованная координатами ξ^i, то запись (2.48) приобретает буквальный смысл.

Для примера вычислим каноническую форму в случае $G = SU(2)$. В стандартной параметризации углами Эйлера $\{\xi\} = \{\chi, \varphi, \psi\}$

$$g(\chi, \varphi, \psi) = e^{i\frac{\tau_3}{2}\varphi} e^{i\frac{\tau_2}{2}\chi} e^{i\frac{\tau_3}{2}\psi} = \begin{pmatrix} z_1 & \bar{z}_2 \\ -z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, \tag{2.49}$$

где

$$z_1 = \cos\frac{\chi}{2} e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}},$$
$$z_2 = \sin\frac{\chi}{2} e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}},$$

а τ_1, τ_2, τ_3 — матрицы Паули. Несложные вычисления по формуле (2.48) дают

$$\theta = \frac{i\tau_1}{2}(\sin\chi\cos\psi\, d\varphi - \sin\psi\, d\chi) + \frac{i\tau_2}{2}(\sin\chi\sin\psi\, d\varphi + \cos\psi\, d\chi) + \\ + \frac{i\tau_3}{2}(\cos\chi\, d\varphi + d\psi). \tag{2.50}$$

Матрицы $\frac{1}{2i}\tau_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) образуют базис в алгебре Ли $\mathfrak{g} = su(2)$ группы $SU(2)$. Построим также соответствующие левоинвариантные векторные поля A_α на группе $G = SU(2)$. Для этого возьмем линейно-независимые векторные поля $\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial}{\partial\chi}$, $\frac{\partial}{\partial\psi}$, запишем A_α в виде разложений по этим полям и найдем коэффициенты этих разложений из условий $\theta(A_\alpha) = \frac{1}{2i}\tau_\alpha$.

Легко получить, что

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\cos\psi}{\sin\chi}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \sin\psi\frac{\partial}{\partial\chi} - \cos\psi\operatorname{ctg}\chi\frac{\partial}{\partial\psi},\\
A_2 &= \frac{\sin\psi}{\sin\chi}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cos\psi\frac{\partial}{\partial\chi} - \sin\psi\operatorname{ctg}\chi\frac{\partial}{\partial\psi},\\
A_3 &= \frac{\partial}{\partial\psi}.
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

Рассмотрим теперь дифференцируемое многообразие M, на котором действует группа Ли G как группа преобразований. Это означает, что для каждого элемента $a \in G$ определено преобразование M, которое мы будем обозначать ψ_a, $\psi_a : M \to M$. Пусть при этом отображение $G \times M \to M$, переводящее элемент (a, p) в $\psi_a P(a \in G, p \in M)$, является дифференцируемым и для него выполняются условия:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \psi_e \text{ — тождественное преобразование;}\\
&2)\ \psi_{ab}(p) = \psi_b(\psi_a(p)).
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

В этом случае говорят, что G действует на M справа (иногда пишут pa вместо $\psi_a p$). Говорят также, что G действует на M эффективно, если из равенства $\psi_a p = p$ для всех $p \in M$ следует, что $a = e$, и что G действует на M свободно, если из равенства $\psi_a p = p$ для некоторого p следует, что $a = e$. Очевидно, если группа G действует на M свободно, то она действует и эффективно.

Следующая конструкция будет часто встречаться нам в последующих разделах. Мы установим соответствие между левоинвариантными векторными полями на G и векторными полями на M. Пусть $A \in \mathfrak{g}$ и a_t — отвечающая ему однопараметрическая подгруппа в G. Тогда ψ_{a_t} есть однопараметрическая группа преобразований M и она индуцирует векторное поле $A^* \in \mathfrak{X}(M)$. Тем самым мы задали отображение $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$, для которого $\sigma_p(A) = A^*_p$. Оно является производной отображения $\tilde{\sigma}_p : G \to M$, задаваемого формулой $\tilde{\sigma}_p(a) = \psi_a(p)$.

Предложение 2.5.1. Отображение σ является гомоморфизмом (см. Приложение 7). Если G действует эффективно на M, то σ — мономорфизм ($\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{X}(M)$). Если G действует свободно на M, то для любого ненулевого $A \in \mathfrak{g}$ $\sigma(A)$ нигде не обращается в нуль на M.

Доказательство. Покажем, что σ — гомоморфизм. Если $b \in G$, то

$$
\begin{aligned}
\psi_{a_t} \circ \tilde{\sigma}_{\psi_{a_t^{-1}}(p)}(b) &= \psi_{a_t} \circ \psi_b \circ \psi_{a_t^{-1}}(p) = \psi_{a_t^{-1} b a_t}(p) =\\
&= \psi_{S_{a_t^{-1}} b}(p) = \left(\tilde{\sigma}_p \circ S_{a_t^{-1}}\right)(b).
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

Пусть $A, B \in \mathfrak{g}$, а a_t — однопараметрическая подгруппа в G, соответствующая A. Переходя в (2.53) к производным отображений и используя равенства (2.37) и (2.42), получим

$$[A_p^*, B_p^*] = [\sigma_p(A), \sigma_p B]^{\cdot} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\sigma_p B - \psi'_{a_t}\sigma_{\psi_{a_t^{-1}}(p)} B\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[\sigma_p B -$$

$$- \sigma_p \operatorname{ad}(a_t^{-1})B\Big] = \sigma_p \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[B - \operatorname{ad}\left(a_t^{-1}\right)B\right] = \sigma_p\left([A,B]\right) = \left([A,B]\right)_p^*,$$

т.е. σ — гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $\mathfrak{X}(M)$.

Пусть поле $A \in \mathfrak{g}$ принадлежит ядру этого гомоморфизма, т.е. $\sigma(A) = 0$ всюду на M. Это означает, что ψ_{a_t} — тривиальная группа преобразований. Если G действует на M эффективно, то отсюда следует, что $a_t = e$ и $A = 0$. Таким образом, $\ker\sigma = \{0\}$ и σ является изоморфизмом (см. Приложение 7).

Пусть $\sigma(A) = 0$ в некоторой точке $p_0 \in M$. Тогда $\psi_{a_t} p_0 = p_0$. Если G действует на M свободно, то это влечет $a_t = e$ и $A = 0$.

§ 6. Главные расслоения

Понятие расслоенного пространства (или расслоения) играет важную роль в дифференциальной геометрии и ее физических приложениях, в частности, в теории калибровочных полей. Оно возникает, например, тогда, когда на многообразии P вводят структуру слоев. А именно, пусть P разбивается на подмножества, т. н. слои, каждый из которых изоморфен некоторому множеству F. Слои можно «занумеровать» точками некоторого множества M, называемого базой (схематическое изображение расслоения дано на рис. 7).

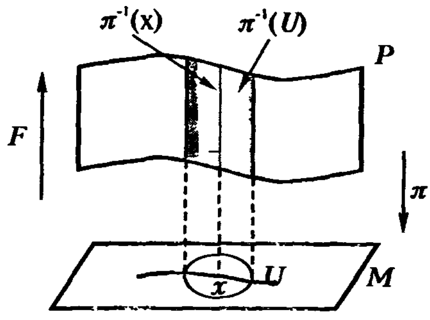

Рис. 7.

Это означает, что задана каноническая проекция $\pi : P \to M$, отображающая все точки одного слоя (и только их) в точку $x \in M$. Таким образом, слой над точкой x можно обозначить $\pi^{-1}(x)$. Кроме того, локально, т.е. над некоторой окрестностью $U \subset M$, расслоенис P устроено так же, как прямое произведение $U \times F$. Но глобальная структура расслоения может быть нетривиальной. Расслоение P над базой M часто обозначают $P \to M$. Можно доказать теорему о том, что любое расслоение над базой, являющейся стягиваемым пространством (т.е. которое можно по себе продеформировать в точку), тривиально. Так, например, тривиальны все расслоения над окрестностью в $\mathbb{R}^n$.

На рис. 8а, б изображены два расслоения над $M = S^1$ с одним и тем же слоем F, являющимся отрезком $[a, b]$ (точка a отождествляется с a', b — с b'). Это обычное кольцо (ограниченный цилиндр) (рис. 8а) и лента Мебиуса (кольцо, перекрученное один раз) (рис. 8б). Их локальные структуры одинаковы, в то время как глобальные явно различаются. Этот пример весьма поучителен: из него видно, что задание базы не определяет расслоение однозначно. Требуется указать еще, каким образом различные части расслоения (порции расслоения над различными локальными окрестностями) «склеиваются» между собой.

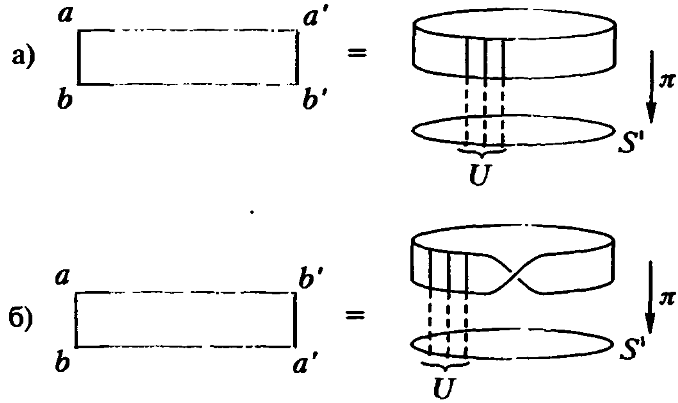

Рис. 8.

Примером расслоения может служить множество P, на котором задано отношение эквивалентности $\sim$ (см. Приложение 4) так, что классы эквивалентности гомеоморфны между собой. В этом случае слой образован точками, эквивалентными друг другу, базой является фактор-множество $P/\sim$, а точками базы — классы эквивалентности.

Понятие расслоения возникает также тогда, когда с каждой точкой многообразия M связано множество объектов, характеризующих M в этой точке. Так например, в каждой точке $x \in M$ существует набор касательных к M векторов, образующих линейное пространство $T_x(M)$. Тогда можно ввести расслоение P над базой M, для которого слой F над точкой x есть множество всех векторов касательных к M в точке x. Оно называется касательным расслоением. Часто при изучении свойств многообразия M оказывается удобным работать именно с этим расслоением.

Мы подробно рассмотрим два важных частных случая расслоений: главное расслоение и расслоение, ассоциированное с главным. В случае главного расслоения слой диффеоморфен некоторой группе. Дадим точное определение главного расслоения.

Пусть имеется многообразие M и группа Ли G. *Главное расслоенное пространство* (или *главное расслоение*) над M есть многообразие P, на котором задано действие группы G; при этом выполняются следующие условия:

1) G действует свободно на P справа:

$$(p,a) \in P \times G \to \Psi_a p \equiv pa \in P; \tag{2.54}$$

2) отображение (2.54) задает отношение эквивалентности на P ($p \sim p'$ если $p = \Psi_a p'$ для некоторого $a \in G$) и M есть факторпространство (см. Приложение 4) для P по этому отношению эквивалентности: $M = P/\sim$ или $M = P/G$, причем каноническая проекция $\pi : P \to M$ дифференцируема;

3) P — локально тривиально. Это означает, что для каждой точки $x \in M$ существует окрестность U, $x \in U \subset M$, такая, что $\pi^{-1}(U)$ (т.е. порция P над U) изоморфно $U \times G$ в том смысле, что существует диффеоморфизм $\chi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, задаваемый формулой: $\chi(p) = (\pi(p), \varphi(p)) \in U \times G$, $p \in \pi^{-1}(U)$, где φ — отображение из $\pi^{-1}(U)$ в G, удовлетворяющее условию: $\varphi(\Psi_a p) = \varphi(p)a$ для всех $p \in \pi^{-1}(U)$, $a \in G$.

Обычно используется следующая терминология: P — пространство расслоения, M — базовое пространство (база), G — структурная группа, π — проекция, $\pi^{-1}(x)$ слой над x, являющийся замкнутым подмногообразием в P. Будем обозначать это главное расслоение так: $P(M,G,\pi)$ или $P(M,G)$. Очевидно, $\dim P = \dim M + \dim G$.

Из определения следует, что $\pi(\Psi_a p) = \pi(p)$ для всех $a \in G$. Если мы выбрали некоторую точку $p_0 \in P$, то слой, проходящий через p_0, представляет собой множество точек вида $\{\Psi_a p_0, a \in G\}$. Так как структурная группа G действует на слое свободно, то слой диффеоморфен G. Локальные окрестности U_p в P, задающие карты, можно выбрать в виде $U_p = U_M \times U_G$, где U_M и U_G — окрестности в M и G соответственно.

Часто главные расслоенные пространства описывают в терминах открытого покрытия на M и функций перехода. В силу свойства локальной тривиальности для $P(M,G)$ можно выбрать такое открытое покрытие $\{U_a\}$ на M (т.е. $\cup_a U_a = M$), что в каждой порции $\pi^{-1}(U_a)$ задан диффеоморфизм $\chi_a : \pi^{-1}(U_a) \to U_a \times G$, $\chi_a(p) = (\pi(p), \varphi_a(p))$, где $p \in \pi^{-1}(U_a)$ и $\varphi_a(\Psi_g p) = \varphi_a(p)g$. Если $U_a \cap U_b \neq \varnothing$, то в $\pi^{-1}(U_a \cap U_b)$ заданы одновременно два отображения: χ_a и χ_b. Для $p \in \pi^{-1}(U_a \cap U_b)$ имеем

$$\varphi_b(\Psi_g p)(\varphi_a(\Psi_g p))^{-1} = \varphi_b(p)g(\varphi_a(p)g)^{-1} = \varphi_b(p)(\varphi_a(p))^{-1}.$$

Это означает, что величина $\varphi_b(p)(\varphi_a(p)^{-1})$ зависит только от $\pi(p)$, и, следовательно, $\varphi_{ba}(\pi(p)) = \varphi_b(p)(\varphi_a(p))^{-1}$ является отображением из $U_a \cap U_b$ в G. Такое отображение называется *функцией перехода*.

Семейство функций перехода φ_{ba} расслоения $P(M,G)$, соответствующих покрытию $\{U_a\}$ на M, задает способ «склейки» различных порций $\pi^{-1}(U_a)$ между собой в единое многообразие. Нетрудно показать, что $\varphi_{ca}(x) = \varphi_{cb}(x)\varphi_{ba}(x)$ для $x \in U_a \cap U_b \cap U_c$.

В соответствии с результатами предыдущего параграфа действие G на P задает гомоморфизм σ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в алгебру Ли $\mathfrak{X}(P)$ векторных полей на P. Поле $A^* = \sigma(A)$, $A \in \mathfrak{g}$ называется *фундаментальным векторным полем*, соответствующим A. Так как отображения Ψ_a переводят каждый слой в себя, то A^*_p касается слоя в точке p. По определению главного расслоения группа G действует на P свободно, следовательно для любого $A \neq 0$ поле A^* нигде не обращается в нуль. Размерность каждого слоя равна $\dim \mathfrak{g}$. Поэтому отображение σ_p из $\mathfrak{g}$ в $T_p(p)$, $\sigma_p(A) = A^*_p$, есть изоморфизм $\mathfrak{g}$ на касательное пространство в точке p к слою, проходящему через p.

Предложение 2.6.1. Если $A^* = \sigma(A)$, то

$$\Psi'_a A^* = \sigma(\mathrm{ad}(a^{-1})A), \tag{2.55}$$

где $a \in G$, $A \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Так как поле A^* индуцируется однопараметрической группой преобразований Ψ_{a_t}, где a_t — однопараметрическая подгруппа в G, отвечающая A, то в соответствии с Предложением 2.4.2, поле $\Psi'_a A^*$ индуцируется $\Psi_a \circ \Psi_{a_t} \circ \Psi_{a^{-1}} = \Psi_{a^{-1}a_t a}$. Выясним теперь, какому элементу из $\mathfrak{g}$ отвечает подгруппа $\tilde{a}_t = a^{-1}a_t a$ или соответствующая ей однопараметрическая группа преобразований в G $\tilde{\varphi}_t = R_{\tilde{a}_t}$ (см. (2.40)). Для $g \in G$ имеем:

$$\tilde{\varphi}_t(g) = R_{\tilde{a}_t} g = g\tilde{a}_t = ga^{-1}a_t a = a^{-1}aga^{-1}a_t a = S\left(a^{-1}\right)\left(aga^{-1}a_t\right) =$$
$$= S\left(a^{-1}\right)\left(R_{a_t}\left(aga^{-1}\right)\right) = \left(S\left(a^{-1}\right) \circ \varphi_t \circ S(a)\right)(g).$$

Таким образом, $\tilde{\varphi}_t = S\left(a^{-1}\right) \circ \varphi_t \circ S(a)$ и, согласно Предложению 2.4.2, такая однопараметрическая группа преобразований индуцирует поле $\mathrm{ad}(a^{-1})A$ (напомним, что $\mathrm{ad} = S'$).

Остановимся теперь на понятии *гомоморфизма расслоений*. Пусть у нас имеется два главных расслоения: $P(M,G)$ и $P'(M',G')$. Гомоморфизм f расслоения $P'(M',G')$ в $P(M,G)$ состоит из отображения $f_P : P' \to P$ и группового гомоморфизма $f_G : G' \to G$ таких, что $f_P(\Psi'_{a'}p') = \Psi_{f_G(a')}f_p(p')$ для всех $p' \in P'$ и $a' \in G'$. Гомоморфизм f отображает слой из P' в слой из P и при этом индуцирует отображение точек базы M' в M $f_M : M' \to M$, причем $f_M(\pi'(p')) = \pi(f_P(p'))$. Если мы отождествляем P' с $f_p(P')$, G' с $f_G(G')$ и M' с $f_M(M')$, то говорят, что $P'(M', G')$ есть подрасслоение в $P(M, G)$. Если кроме того $M' = M$ и f_M суть тождественное преобразование на M, то гомоморфизм $f : P'(M, G') \to P(M, G)$ называется *редукцией* структурной группы G расслоения $P(M, G)$ к подгруппе G'. При этом $P'(M, G')$ называется *редуцированным расслоением* и говорят, что структурная группа G редуцируема к G'.

§ 7. Примеры главных расслоений

Пример 1. Тривиальное расслоение $P(M, G) = M \times G$. Точка расслоения $p = (x, g)$, где $x \in M$, $g \in G$. Действие структурной группы: $\Psi_a(x, g) = (x, ga)$; слой — группа G. Каноническая проекция есть просто проекция на первый сомножитель: $\pi(x, a) = \mathrm{pr}_1(x, a) = x$.

Пример 2. Пусть G — группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа. Тогда $G = P(G/H, H)$, где база G/H — однородное пространство (см. Приложение 9):$\Psi_h g = gh$, $g \in G$, $h \in H$. Каноническая проекция π есть сопоставление каждому элементу g его класса эквивалентности $[g]$: $\pi(g) = [g] \in G/H$. Очевидно, что $\pi(\Psi_h g) = \pi(gh) = [gh] = [g] = \pi(g)$.

Пример 3. Расслоение Хопфа $P(S^2, U(1)) = S^3$. Так как $SU(2) \cong S^3$ (задача 2.2), то точки этого расслоения можно рассматривать как матрицы $g \in SU(2)$. Структурная группа $G = U(1) = \{e^{i\lambda},\ 0 \leqslant \lambda < 2\pi\}$. Ее действие: $\Psi_\lambda g = ge^{i\lambda\tau_3}$. Каноническую проекцию $SU(2) \to S^2$ зададим следующим образом. Нетрудно показать, что для любой матрицы $g \in SU(2)$ справедлива формула $g\tau_3 g^+ = \vec{\tau}\vec{\xi}$, где $\vec{\xi}^2 = 1$ в силу унитарности g. Тогда $\pi(g) = \vec{\xi}$ — точка S^2. Так как $\Psi_\lambda g\tau_3(\Psi_\lambda g)^+ = g\tau_3 g^+$, то $\pi(\Psi_\lambda g) = \pi(g)$.

Пример 4. $S^{2n+1} = P(\mathbb{C}P^n, U(1))$. Сферу S^{2n+1} можно реализовать как множество точек $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$ в $\mathbb{C}^{n+1}$, удовлетворяющих условию $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_{n+1}|^2 = 1$. Структурная группа G действует так: $\Psi_\lambda z = e^{i\lambda} z$. Так как каждой точке $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, $z \neq 0$ соответствует прямая, проходящая через начало координат и точку z, т.е. элемент $\mathbb{C}P^n$, то каноническая проекция π сопоставляет точке $z \in S^{2n+1}$ эту прямую. Действие структурной группы просто перемещает точку вдоль этой прямой.

Пример 5. При описании гравитации на языке расслоенных пространств важную роль играет *расслоение линейных реперов*. Пусть M — дифференцируемое многообразие размерности $\dim M = n$. В каждой точке $x \in M$ можно выбрать n-линейно независимых касательных векторов $X_1, \ldots, X_n$, которые будут базисом касательного пространства $T_x(M)$. Такой упорядоченный базис называют линейным репером $u_x = \{X_{1x}, \ldots, X_{nx}\}$ в точке x. Ясно, что имеется много способов выбора репера в каждой точке многообразия M. Пусть $L(M)$ — множество всех линейных реперов во всех точках M. Оказывается, что $L(M)$ является главным расслоенным пространством со структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$ (группа невырожденных вещественных матриц размером $n \times n$). Действительно, если $a = (a^i_j) \in GL(n; \mathbb{R})$, $u_x = \{X_{1x}, \ldots, X_{nx}\} \in L(M)$, то $\Psi_a U_x$ есть репер $\{Y_{1x}, \ldots, Y_{nx}\}$ в точке x, где $Y_{jx} = a^i_j X_{ix}$. Каноническая проекция π определяется как отображение из $L(M)$ в M, сопоставляющее реперу u_x точку x. Легко проверить, что $GL(n; \mathbb{R})$ действует свободно на $L(M)$ и $\pi(u) = \pi(v)$ тогда и только тогда, когда $v = \Psi_a u$. Если $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальные координаты в некоторой окрестности $U \subset M$, то каждый репер u_x в точке $x \in U$ можно записать в виде $u = \{X_1, \ldots, X_n\}$ с $X_i = X^k_i \frac{\partial}{\partial x^k}$, где X^k_i — невырожденная матрица. Переменные $\{x^i\}$ и $\{X^k_j\}$ $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$ можно взять в качестве локальных координат в $\pi^{-1}(U)$; тем самым $L(M)$ становится дифференцируемым многообразием. Итак, $L(M)$ есть главное расслоение $P(M, GL(n, \mathbb{R}))$, называемое расслоением линейных реперов.

Следующие примеры служат иллюстрацией тому, что могут существовать глобально различные главные расслоения с одинаковой локальной структурой.

Пример 6. $P(S^1, \mathbb{Z}_2)$. Слой состоит из двух точек $\{+1, -1\} = S^0 \cong \mathbb{Z}_2$ и действие структурной группы Ψ_a, $a \in \mathbb{Z}_2$ совпадает с обычным умножением. Выберем на базе $M = S^1$, параметризуемой углом θ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$, две пересекающиеся окрестности U_1 и U_2. Тогда локально расслоение выглядит так:

$$\pi^{-1}(U_1) \cong U_1 \times \mathbb{Z}_2, \qquad \text{координаты } (\theta, a_1);$$

$$\pi^{-1}(U_2) \cong U_2 \times \mathbb{Z}_2, \qquad \text{координаты } (\theta, a_2),$$

где $a_1, a_2 \in G = \mathbb{Z}_2$. Функция перехода φ_{12} зависит лишь от непрерывной переменной θ из области пересечения $U_1 \cap U_2$ и принимает дискретные значения из $\mathbb{Z}_2$. Ясно, что эта функция должна быть постоянной. Возможны два случая: $\varphi_{12} = 1$ и $\varphi_{12} = -1$. В зависимости от выбора функции перехода, «склеивающей» карты в P, получаются топологически неэквивалентные главные расслоения. Первый случай: $\varphi_{12} = 1$, $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$, $p \in P$ (здесь φ_a отображение, задающее диффеоморфизм $\chi_a : \pi^{-1}(U_a) \to U_a \times G$, см. § 6). Тогда расслоение P тривиальное, $P = S^1 \times \mathbb{Z}_2$, и представляет собой две окружности, являющиеся границей обычного кольца (рис. 8 а). Второй случай: $\varphi_{12} = -1$, $\varphi_1 = -\varphi_2$, $P(S^1, \mathbb{Z}_2)$ — нетривиальное расслоенис, представляющее собой кривую, дважды накрывающую базу S^1 и являющуюся границей ленты Мебиуса (рис. 8 б).

Пример 7. Расслоение магнитного монополя $P(S^2, U(1))$. На базе $M = S^2$ удобно ввести сферические координаты (θ, ϕ) $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant$

$\phi < 2\pi$). Точки слоя $U(1) = S^1$ будем параметризовать величинами $e^{i\psi}$. В качестве двух окрестностей на S^2 выбирают верхнюю и нижнюю полусферы H_+ и H_- (см. рис. 9). Их пересечение $H_+ \cap H_-$ представляет собой окружность S^1 («экватор»), параметризуемую углом $0 \leqslant \phi < 2\pi$. Тогда локально наше расслоение выглядит так:

$$H_+ \times U(1), \qquad \text{координаты } (\theta, \phi, e^{i\psi_+}),$$
$$H_- \times U(1), \qquad \text{координаты } (\theta, \phi, e^{i\psi_-}).$$

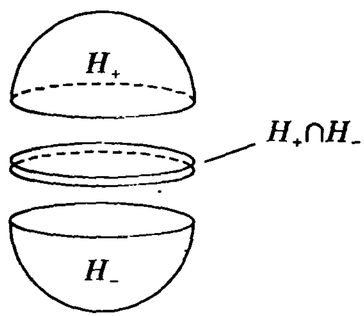

Рис. 9.

Как уже отмечалось выше функция перехода является функцией точек в $H_+ \cap H_-$ (в нашем примере зависит только от ϕ) и принимает значения в $U(1)$. Легко понять, что отображения φ_a, введенные в п.3 определения главного расслоения, имеют следующий простой вид: $\varphi_\pm(p_\pm) = e^{i\psi_\pm}$, где $p_\pm = (\theta, \phi, e^{i\psi_\pm})$ — точка расслоения над $H_\pm$. Тогда функция перехода $\varphi_{+-}(\phi) = \varphi_+(p)\varphi_-^{-1}(p) = e^{i(\psi_+ - \psi_-)}$, $p \in \pi^{-1}(H_+ \cap H_-)$. Мы выберем ее в виде $\varphi_{+-}(\phi) = e^{il\phi}$. Так как функция перехода однозначная функция на $H_+ \cap H$, то l должно быть целым числом. В этом примере видно, что задавая функции перехода с различными l, мы получаем топологически различные главные расслоения над S^2 со структурной группой $U(1)$. При $l = 0$ расслоение тривиально: $P(S^2, U(1), l = 0) = S^2 \times S^1$. Случай $l = 1$ есть расслоение Хопфа $P(S^2, U(1), l = 1) = S^3$ (см. пример 3). Число l соответствует так называемому первому классу Черна и нумерует неэквивалентные расслоения монополя.

Пример 8. Инстантонное расслоение $P(S^4, SU(2))$. Эта конструкция во многом аналогична предыдущему примеру. Пусть $(\theta, \phi, \psi, \rho)$ — сферические координаты в базе $M = S^4$, (α, β, γ) координаты слоя $SU(2) \cong S^3$. Разобьем S^4 на две «полусферы» $H_\pm$, границы которых являются сферами S^3. Тогда область пересечения $H_+ \cap H_-$ вблизи «экватора» S^4 параметризуется углами Эйлера (θ, ϕ, ψ) сферы S^3. Стандартная параметризация элементов $h(\theta, \phi, \psi) \in SU(2) \cong S^3$ углами Эйлера следующая:

$$h(\theta, \phi, \psi) = x_4 - i\vec{\tau}\mathbf{x}, \qquad x_1 + ix_2 = \cos\frac{\theta}{2}\exp\left(i\frac{(\psi+\phi)}{2}\right),$$
$$x_3 + ix_4 = \sin\frac{\theta}{2}\exp\left(i\frac{(\psi-\phi)}{2}\right),$$

где τ_i — матрицы Паули. Элементы g структурной группы $G = SU(2)$ параметризуются углами Эйлера (α, β, γ), $g = g(\alpha, \beta, \gamma)$. Наше расслоение описывается двумя картами:

$$\begin{aligned} &H_+ \times SU(2), \quad \text{координаты } (\theta, \phi, \psi, \rho; \alpha_+, \beta_+, \gamma_+); \\ &H_- \times SU(2), \quad \text{координаты } (\theta, \phi, \psi, \rho; \alpha_-, \beta_-, \gamma_-). \end{aligned}$$

Функцию перехода выберем в виде $\varphi_{+-}(\theta, \phi, \psi) = (h(\theta, \phi, \psi))^k$, где k должно быть целым числом. При $k = 1$ имеем известное расслоение Хопфа $P(S^4, SU(2); k = 1) = S^7$. Мы снова получили бесконечную серию топологически неэквивалентных главных расслоений, характеризуемых числом k. Оно отвечает второму классу Черна.

§ 8. Ассоциированные расслоения

Опишем теперь другой класс расслоений, который часто встречается при описании калибровочных теорий. В расслоениях этого класса в качестве слоя будет выступать не группа, как в случае главного расслоения, а многообразие, на котором задано действие группы. В физических приложениях роль этого многообразия будет играть пространство представления полей материи.

Пусть $P(M, G)$ — главное расслоенное пространство, а F — многообразие, на котором группа Ли G действует слева, т. е. задано представление ρ группы G на F такое, что для любого элемента $a \in G$ определено линейное отображение $\rho(a) : F \to F$, причем $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$. Построим прямое произведение $P \times F$, элементами которого являются пары (p, ξ), $p \in P$, $\xi \in F$, и определим действие G на $P \times F$ справа: $G \ni a : (p, \xi) \in P \times F \to (\Psi_a p, \rho(a)^{-1}\xi) \in P \times F$. Такое действие группы задает отношение эквивалентности. Возьмем фактор-пространство (см. Приложение 4) $P \times F$ по этому отношению эквивалентности; его называют скрученным произведением P и F и обычно обозначают $E = P \times_G F$. Элементами многообразия E являются классы эквивалентности $[(p, \xi)] = \{(\Psi_a p, \rho(a)^{-1}\xi), a \in G\}$. Проекция $\pi_E : E \to M$ определяется из условия замыкания следующей треугольной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} P \times F \arrow[rr, "\tilde{\pi}"] \arrow[dr, "\pi \circ \mathrm{pr}_1"'] & & E \arrow[dl, "\pi_E"] \\ & M & \end{tikzcd},$$

где $\tilde{\pi}$ — это сопоставление элементу $(p, \xi) \in P \times F$ класса $[(p, \xi)] \in E$, π — каноническая проекция в P, а pr_1 — проекция на первый сомножитель в прямом произведении: $\mathrm{pr}_1 : (p, \xi) \to p$.

Установим теперь локальную структуру E. Для любой точки $x \in M$ существует окрестность U такая, что $x \in U \subset M$ и $\pi^{-1}(U)$

изоморфно $U \times G$. Тогда действие группы G на $\pi^{-1}(U) \times F$ задается так: $(x, g, \xi) \in U \times G \times F \to (x, ga, \rho(a)^{-1}\xi) \in U \times G \times F$, где $a \in G$. Факторизация относительно такого группового действия дает: $(x, g, \xi) \to [(x, g, \xi)] = (x, \xi') \in U \times F$. Так как $\pi_E(x, \xi) = x$, то мы получаем, что $\pi_E^{-1}(U) \cong U \times F$, т.е. E локально устроено как $U \times F$.

Описанное выше многообразие E обозначают $E(M, F, G, P)$ и называют расслоением над базой M со стандартным, или типическим слоем F и (структурной) группой G, *ассоциированным* с главным расслоением P.

Каждому элементу $p \in P$ можно сопоставить отображение из F в E, которое мы будем обозначать той же буквой p. Оно задается следующим образом: пусть $\xi \in F$, тогда $p(\xi)$ есть элемент E, совпадающий с классом $[(p, \xi)]$. Другими словами, $p(\xi)$ — это образ элемента $(p, \xi) \in P \times F$ при действии естественной проекции $\bar{\pi} : P \times F \to E$. Нетрудно понять, что на самом деле p есть отображение из F на $F_x = \pi_E^{-1}(x) \subset E$, где $x = \pi(p)$ и $(\Psi_a p)(\xi) = p\left(\rho(a)\xi\right)$, $a \in G$, $\xi \in F$.

Пример 1. В качестве примера ассоциированного расслоения рассмотрим *касательное расслоение.* Пусть $L(M)$ — расслоение линейных реперов над M (см. пример 5 из §7), $\dim M = n$, а $V = \mathbb{R}^n$ есть n-мерное векторное пространство с фиксированным базисом $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Элементы группы $a = (a^i{}_j) \in GL(n; \mathbb{R})$ действуют на V по следующему закону:

$$a : \xi_j \to \rho(a)\xi_j = \sum_{i=1}^{n} a^i_j \xi_i. \tag{2.56}$$

Расслоение, ассоциированное с $L(M)$, со стандартным слоем V называется *касательным расслоением* над M и обозначается $T(M)$. Как мы только что объяснили, репер $u \in L(M)$ в точке x можно рассматривать как отображение из V на $F_x = \pi_{T(M)}^{-1}(x) \subset T(M)$. Это отображение может быть задано следующим образом: $u\xi_i = X_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$, где $u = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Нетрудно показать, что u есть линейный изоморфизм V на $T_x(M)$ и, следовательно, слой в $T(M)$ над $x \in M$ может рассматриваться как $T_x(M)$.

Пример 2. Кроме касательного расслоения, с расслоением линейных реперов ассоциирован целый ряд *тензорных расслоений*, которые мы сейчас опишем. Рассмотрим *тензорную алгебру* линейного пространства $V = \mathbb{R}^n$: $T(V) = \sum\limits_{r,s=0}^{\infty} T^r_s$, где $T^0_0 = \mathbb{R}$, $T^r_0 = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r}$, $T^0_s = \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s}$, и $T^r_s = T^r_0 \otimes T^0_s$. Элементы пространства T^r_s называются тензорами контравариантной степени r и ковариантной степени s.

В этой алгебре стандартно определяются операции тензорного произведения и свертывания тензоров. Хорошо известно также (см. [KH]), что действие $GL(n,\mathbb{R})$ на $V = \mathbb{R}^n$ канонически продолжается на всю алгебру $T(V)$. Поэтому с расслоением линейных реперов можно ассоциировать любое тензорное расслоение типа (r,s), $T^r_s(M) = L(M)\times_{GL(n,\mathbb{R})}T^r_s$, типическим слоем которого является пространство r раз контравариантных и s раз ковариантных тензоров. В случае $r = 1$, $s = 0$ получается касательное расслоение. Расслоение, отвечающее $r = 0$, $s = 1$ называется кокасательным расслоением и обозначается $T^*(M)$. Оно играет важную роль в классической механике. Так же как и в предыдущем примере, для всех тензорных расслоений можно построить явный вид отображения $u : T^r_s \to T^r_s(M)$, $u \in L(M)$.

Пример 3. Следующий пример ассоциированного расслоения будет играть важную роль при размерной редукции симметричных калибровочных полей. Одновременно он позволяет понять свойства главного расслоенного пространства, обладающего некоторой дополнительной симметрией.

Пусть $\widehat{P}(\widehat{M},K)$ — главное расслоенное пространство над $\widehat{M}$ со структурной группой K и канонической проекцией $\hat{\pi}$. Далее, пусть на $\widehat{P}$ задано действие некоторой группы G (группы симметрии), которая является компактной группой Ли. Это означает, что для каждого $g \in G$ существует преобразование Q_g, являющееся элементом группы автоморфизмов (см. Приложение 7) P, $Q_g \in \mathrm{Aut}(P)$, т. е. $Q_g : p \in P \to Q_g p \in P$ и Q_g коммутирует с правыми сдвигами, порождаемыми действием структурной группы K:

$$Q_g(\widehat{\Psi}_k\hat{p}) = \widehat{\Psi}_k(Q_g\hat{p}), \qquad k \in K,\, g \in G,\, \hat{p} \in \widehat{P}. \tag{2.57}$$

Мы будем считать, что Q_g — левое действие: $Q_{g_1g_2} = Q_{g_1} \circ Q_{g_2}$. Так как в общем случае отображения Q_g выводят точку из слоя, то такое действие группы симметрии очевидно порождает преобразование O_g точек базы в соответствии с диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{P} & \xrightarrow{Q_g} & \widehat{P} \\ \hat{\pi}\downarrow & & \downarrow\hat{\pi} \\ \widehat{M} & \xrightarrow{O_g} & \widehat{M} \end{array} \tag{2.58}$$

и $\hat{\pi}(Q_g\hat{p}) = O_g(\hat{\pi}(\hat{p}))$. Предположим для простоты, что

i) $\widehat{M} = M \times G/H$, где H — подгруппа в G, т. е. любая точка $\hat{x} \in \widehat{M}$ представима в виде $\hat{x} = (x,\xi)$, $x \in M$, $\xi \in G/H$;

ii) группа G действует только на однородном пространстве G/H, причем каноническим образом (см. Приложения 8 и 9).

Возьмем теперь подмногообразие $B = M \times \{\xi_0\} \subset \widehat{M}$, где $\xi_0 = [e]$ есть класс эквивалентности, содержащий единицу группы G, обычно называемый началом пространства G/H. Порцию расслоения $\widehat{P}$ над B обозначим через P:

$$P = \hat{\pi}^{-1}(B). \tag{2.59}$$

Очевидно, что она является главным расслоенным пространством $P(B, K)$ с канонической проекцией π, равной ограничению $\hat{\pi}$ на P.

Действие группы симметрии G, вообще говоря, выводит точку из расслоения P. Но, если мы берем элемент $h \in H \subset G$, то $Q_h p \in P$ при $p \in P$, так как $\hat{\pi}(Q_h p) = O_h \hat{\pi}(p) = O_h \big(x, [e]\big) = \big(x, h[e]\big) = \big(x, [e]\big)$, где $x = \pi(p)$. Более того, Q_h смещает точку p вдоль слоя (говорят, что H действует на P как подгруппа группы вертикальных автоморфизмов).

Возьмем прямое произведение $G \times P$, на котором группа H действует следующим образом:

$$h : (g, p) \to \Big(gh^{-1}, Q_h p\Big), \quad g \in G,\ h \in H,\ p \in P,$$

и построим каноническим образом скрученное произведение $G \times_H P$, т.е. расслоение с типическим слоем P, ассоциированное с главным расслоением $G(G/H, H)$ (см. пример 2, §7). Покажем, что $G \times_H P$ диффеоморфно исходному главному расслоению $\widehat{P}(\widehat{M}, K)$, причем диффеоморфизм $\chi : G \times_H P \to \widehat{P}$ задается формулой:

$$\chi : [(g, p)] \to O_g p. \tag{2.60}$$

Это определение не зависит от выбора представителя класса, так как $\chi\Big([(gh^{-1}, O_h p)]\Big) = O_{gh^{-1}} O_h p = O_g p = \chi\Big([(g, p)]\Big)$. Легко проверить, что χ переводит действие структурной группы K на P в действие этой группы на $\widehat{P}$, т.е. $\chi\Big([(g, \Psi_k p)]\Big) = \widehat{\Psi}_k \big([g, p]\big)$. Наконец, убедимся, что каждая точка из $\widehat{P}$ имеет ровно один прообраз в $G \times_H P$. Пусть $\hat{p} \in \widehat{P}$ и $\hat{\pi}(\hat{p}) = (x, \xi)$. Так как группа G на однородном пространстве G/H действует транзитивно, то существует элемент $g \in G$ такой, что $\xi = g[e]$. Очевидно, что таким же свойством обладают все элементы вида gh, $h \in H$. Возьмем теперь любую точку из слоя над $\big(x, [e]\big)$, принадлежащую фактически $P \subset \widehat{P}$; обозначим эту точку p'. Так как

$$\hat{\pi}(Q_g p') = O_g \hat{\pi}(p') = O_g \big(x, [e]\big) = \big(x, g[e]\big) = (x, \xi) = \hat{\pi}(\hat{p}),$$

то $Q_g p'$ лежит в том же слое, что и $\hat{p}$. В силу п. 2 определения главного расслоенного пространства структурная группа действует транзитивно и свободно и, следовательно, существует единственный элемент $k \in K$ такой, что $\hat{p} = \Psi_k Q_g p'$. Итак, $\hat{p} = Q_g p$, где $p = \Psi_k p'$. Если вместо элемента g, переводящего $[e]$ в ξ, взять $gh^{-1}(h \in H)$, то вместо p следует взять $Q_h p \in P$, так как $Q_{gh^{-1}} Q_h p = Q_g p = \hat{p}$. Итак, пары (g,p), для которых $Q_g p = \hat{p}$, имеют вид $(gh^{-1}, Q_h p)$, $h \in H$, т.е. образуют один класс $\left[(g,p)\right]$ в $G \times_H P$.

§ 9. Сечения расслоений и их свойства

Пусть $P(M,G)$ — главное расслоение, а U — окрестность в M. Тогда локальным *сечением* P над U называется отображение $s : U \to P$ такое, что $\pi \circ s$ — тождественное преобразование в U.

Предложение 2.9.1. Глобальное сечение в главном расслоении $P(M,G)$ существует тогда и только тогда, когда P — тривиально.

Доказательство. Пусть в P существует сечение $s : M \to P$. Определим отображение $\varphi : M \times G \to P$ так:

$$\varphi(x,a) = \Psi_a s(x), \quad x \in M,\ a \in G.$$

Можно проверить, что φ — диффеоморфизм, т.е. $P \simeq M \times G$.

Обратно, пусть $P \simeq M \times G$, т.е. существует диффеоморфизм $\chi : P \to M \times G$. Тогда определим отображение $s : M \to P$ следующим образом: для $x \in M$

$$s(x) = \chi^{-1}(x,e),$$

где e — единица группы G. Легко проверить, что

$$\pi(s(x)) = \pi\left(\chi^{-1}(x,e)\right) = x,$$

т.е. s — глобальное сечение.

Аналогично определяются локальные и глобальные сечения ассоциированного расслоения $E(M,F,G,P)$. Но в отличие от предыдущего случая глобальное сечение ассоциированного расслоения может существовать и для нетривиального E (задача 2.25). В дальнейшем для краткости глобальное сечение будем называть просто сечением.

Здесь следует отметить, что векторные поля и формы на многообразии M можно рассматривать как сечения касательного $T(M)$ и кокасательного $T^*(M)$ расслоений. Аналогично, произвольное тензорное поле на M определяется как сечение соответствующего тензорного расслоения $T^r_s(M)$. Легко видеть, что множество $\mathfrak{T}(M) = \sum\limits_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{T}^r_s(M)$ тензорных полей на M образует алгебру, в которой естественно задаются операции тензорного произведения и свертывания тензоров.

Пусть $E(M,F,G,P)$ — расслоение, ассоциированное с главным расслоением $P(M,G)$, и задано отображение $\eta : P \to F$, обладающее свойством

$$\eta \circ \Psi_g = \rho(g^{-1}) \circ \eta, \tag{2.61}$$

где ρ — представление группы G на F. Такие отображения называют *эквивариантными*. Докажем теперь два предложения, которые понадобятся нам в главах 4 и 6.

Предложение 2.9.2.

а) Пусть задано эквивариантное отображение $\eta : P \to F$. Тогда $s\left(\pi(p)\right) = \left[\left(p, \eta(p)\right)\right]$ есть сечение в E.

б) Если $s(x)$ — сечение в E, то $\eta(p) = p^{-1} \circ s\left(\pi(p)\right)$ есть эквивариантное отображение из P в F.

Доказательство. а) Здесь нужно проверить лишь корректность определения сечения. Пусть $p' = \Psi_g p$. Тогда

$$s\left(\pi(p')\right) = s\left(\pi(\Psi_g p)\right) = \left[\left(\Psi_g p, \eta(\Psi_g p)\right)\right] =$$
$$= \left[\left(\Psi_g p, \rho(g^{-1})\eta(p)\right)\right] = \left[\left(p, \eta(p)\right)\right] = s(\pi(p)).$$

б) В условии этого пункта p^{-1} понимается как отображение обратное к отображению $p : F \to F_x \subset E$, $x = \pi(p)$ (см. §8). Следовательно, $p^{-1} : E \to F$ (образ — такой элемент $\xi \in F$ для которого $p(\xi) = \left[(p,\xi)\right]$) и $p^{-1} \circ s \circ \pi : P \to F$. Проверим эквивариантность отображения η. Пусть $\eta(p) = \xi$ и $p\left(\eta(p)\right) = \left[(p,\xi)\right]$ по определению отображения. Тогда, если $p' = \Psi_g p$, $\eta(p') = \xi'$, то

$$p'(\xi') = \left[(p',\xi')\right] = \left[(\Psi_g p, \xi')\right] = \left[(p, \rho(g)\xi')\right],$$

где мы воспользовались определением эквивалентных элементов, относящихся к классу $\left[(p',\xi')\right]$. С другой стороны

$$p'(\xi') = p'\left(\eta(p')\right) = s\left(\pi(\Psi_g p)\right) = s\left(\pi(p)\right).$$

Следовательно, $\xi = \rho(g)\xi'$ или

$$\eta\left(\Psi_g p\right) = \xi' = \rho\left(g^{-1}\right)\xi = \rho\left(g^{-1}\right)\eta(p). \ \square$$

Предложение 2.9.3. Пусть H — замкнутая подгруппа в G. Главное расслоение $P(M,G)$ редуцируется к $Q(M,H)$ тогда и только тогда, когда $E(M,G/H,G,P)$ имеет сечение.

Доказательство. Достаточность. Пусть $s : M \to E$ — глобальное сечение в $E = P \times_G G/H$, где G действует на типическом слое G/H каноническим образом (см. Приложение 8): $\rho(g)\xi = g\xi$, $\xi \in G/H$, и $\xi_0 = [e] = H$ — начало в G/H. Обозначим через Q подмножество в P:

$$Q = \{p \in P : p\xi_0 = s(\pi(p))\}.$$

Проверим, что Q есть главное расслоение над M со структурной группой H. Действительно,

$$(\Psi_h p)(\xi_0) = \left[(\Psi_h p, \xi_0)\right] = [(p, h\xi_0)] = [(p, \xi_0)] = p(\xi_0),$$

т. е. $\Psi_h p$ для любого $h \in H$ также принадлежит Q. Пусть теперь $p \in Q$, $p' \in Q$ и $\pi(p) = \pi(p') = x$. Покажем, что точки p и p' отличаются правым сдвигом на элемент из H. Так как $p(\xi_0) = p'(\xi_0) = s(x)$, $p = \Psi_g p'$ для некоторого $g \in G$, то $[(p, \xi_0)] = [(p', \xi_0)]$ и $[(\Psi_g p', \xi_0)] = [(p', g\xi_0)] = [(p', \xi_0)]$. Значит, элемент g принадлежит стационарной подгруппе (см. Приложение 9) точки ξ_0, т. е. H.

Необходимость. Пусть группа G редуцируется к $H \subset G$, $Q(M, H) \subset P(M, G)$. Положим, как и выше $\xi_0 = [e] = H \in G/H$ и определим отображение из P в $E(M, G/H, G, P)$:

$$\xi_0(p) = [(p, \xi_0)], \quad p \in P.$$

Покажем, что это отображение постоянно на слое в Q.

$$\xi_0(\Psi_h p) = [(\Psi_h p, \xi_0)] = [(p, h\xi_0)] = [(p, \xi_0)] = \xi_0(p),$$

для любого $h \in H$. Обозначим через i вложение Q в P, $i : Q \to P$ и построим отображение $\xi_0 \circ i : Q \to E$. Из вышесказанного следует, что оно постоянно на слое в Q, т. е. является отображением из M в E или сечением в E:

$$s(\pi(q)) = (\xi_0 \circ i)(q), \quad q \in Q. \ \square$$

§ 10. Связности в главных расслоениях

Пусть задано главное расслоенное пространство $P(M, G)$ и $p \in P$. Рассмотрим касательное пространство T_pP к P в этой точке. Оно содержит подпространство V_p, состоящее из векторов касательных к слою. Мы будем называть его ***вертикальным подпространством***. В качестве базиса в V_p можно выбрать систему фундаментальных векторных полей $A^*_\alpha = \sigma(A_\alpha)$, где $\{A_\alpha\}$ — базис в $\mathfrak{g}$ (см. § 6).

Локально главное расслоение P устроено как $U \times G$, где U — окрестность в M. Поэтому и касательный вектор в точке $p \in P$ можно разложить на вектор «вдоль слоя» и вектор «вдоль базы». Вертикальное направление («вдоль слоя») однозначно фиксировано действием структурной группы. Второе направление («вдоль базы») можно выбрать многими способами. *Связностью* Γ в P называется соответствие (правило), сопоставляющее каждой точке $p \in P$ некоторое подпространство H_p из T_pP такое, что

а) $T_pP = V_p \oplus H_p$ (прямая сумма);

б) пространство $H_{p'}$ в точке $p' = \Psi_g p$ есть $\Psi'_g H_p$ для любых $g \in G$ и $p \in P$;

в) H_p зависит от p дифференцируемым образом.

Подпространство H_p называется *горизонтальным подпространством*. Согласно (а), если задана связность Γ, то любой вектор $X \in T_pP$ может быть единственным образом представлен в виде:

$$X = Y + Z, \quad Y \in V_p, \quad Z \in H_p. \tag{2.62}$$

Компоненту Y называют вертикальной и обозначают vX, а Z — горизонтальной и $Z = hX$. Условие (в) означает, что если X — дифференцируемое векторное поле, то vX и hX также являются дифференцируемыми векторными полями. Рис. 10 иллюстрирует зависимость разложения (2.62) от выбора связности (горизонтального подпространства).

Оказывается, что связность Γ в P удобно описывать с помощью 1-формы ω на P со значениями в алгебре Ли группы G. Эта форма называется *формой связности* данной связности Γ и определяется следующим образом. Отображение $\sigma_p : \mathfrak{g} \to T_p(P)$, сопоставляющее каждому $A \in \mathfrak{g}$ фундаментальное векторное поле в точке p, $A_p^* = \sigma_p(A)$, есть линейный изоморфизм $\mathfrak{g}$ на касательное подпространство в точке p к слою (см. §6), т. е. на вертикальное подпространство V_p. Тогда для любого $X \in T_pP$ мы определим $\omega(X)$ как такой элемент $A \in \mathfrak{g}$, что $A_p^* = \sigma_p(A) = (vX)_p$. Очевидно, что $\omega(X) = 0$ в том и только в том случае, если X — горизонтальное поле.

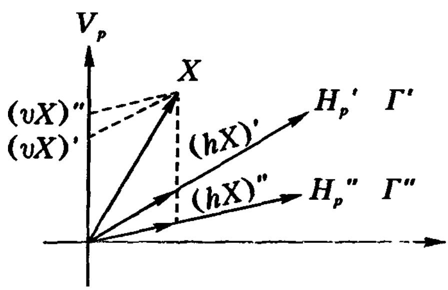

Рис. 10.

Предложение 2.10.1. Форма связности ω удовлетворяет следующим условиям:

1) $\omega(A^*) = A$ для любого $A \in g$;

2) $(\Psi_g^*\omega)(X) = \mathrm{ad}(g^{-1})\omega(X)$ для каждого $g \in G$ и каждого $X \in \mathfrak{X}(P)$. В правой части равенства понимается действие присоединенного представления G на элемент $\omega(X)$ из $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Условие 1) следует из определения. Условие 2) в силу (2.62) достаточно проверить отдельно для горизонтального и вертикального полей.

i) X — горизонтально. По определению $\omega(X) = 0$. Но в силу условия (б) для связности поле $\Psi'_g X$ также горизонтально для любого $g \in G$ и, следовательно, $(\Psi^*_g\omega)(X) = \omega(\Psi'_g X) = 0$.

ii) X — вертикально и мы можем считать, что $X = A^*$ — фундаментальное векторное поле, $A^* = \sigma(A)$, $A \in \mathfrak{g}$. Тогда $(\Psi^*_g\omega)(A^*) = \omega(\Psi'_g A^*) = \mathrm{ad}(g^{-1})A = \mathrm{ad}(g^{-1})\omega(A^*)$, где мы воспользовались Предложением 2.6.1. □

Предложение 2.10.2. Пусть задана 1-форма ω на $P(M, G)$ со значениями в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условиям 1) и 2) предыдущего предложения. Тогда существует единственная связность Γ в P, для которой ω является формой связности.

Доказательство. Определим горизонтальное подпространство в точке $p \in P$ следующим образом: $H_p = \{X \in T_pP : \omega(X) = 0\}$. Проверка условий а) — в) и того, что ω есть форма связности этой связности выполняется просто. □

Каноническая проекция $\pi : P \to M$ индуцирует соответствующее линейное отображение $\pi' : T_pP \to T_xM$, $x = \pi(p)$ для каждого $p \in P$. Если задана связность, то π', ограниченное на горизонтальное подпространство H_p, является изоморфизмом. *Горизонтальным лифтом* (или подъемом) векторного поля X на M называется единственное горизонтальное (при заданной связности) векторное поле X^* на P, которое проектируется на X, $\pi'(X^*_p) = X_{\pi(p)}$ для каждого $p \in P$ (в этом случае говорят, что X^* накрывает X).

Предложение 2.10.3. Пусть в расслоении $P(M, G)$ задана связность Γ. Тогда

а) Для любого векторного поля X на M существует единственный горизонтальный лифт X^*. Лифт X^* инвариантен при действии Ψ'_g для любого $g \in G$.

б) Любое горизонтальное векторное поле X^* на P, инвариантное относительно G, является лифтом некоторого поля X на M.

Доказательство. а) Отображение π' есть линейный изоморфизм из H_p на $T_{\pi(p)}M$ $(p \in P)$. Отсюда следуют существование и единственность лифта X^*. Нетрудно показать, что X^* — дифференцируемое векторное поле. Из условия б) на связность Γ в P (условие инвариантности горизонтальных подпространств относительно G) следует, что лифт X^* инвариантен при действии Ψ'_g для любого $g \in G$.

б) Для любой точки $x \in M$ выберем некоторую точку p в слое $\pi^{-1}(x)$ и положим по определению $X_x = \pi'(X^*_p)$. Это определение корректно, так как, если выбрать другую точку $p' = \Psi_g p$ в том же слое, то в силу инвариантности X^* $\pi'(X^*_{p'}) = \pi(\Psi'_g X^*_p) = \pi'(X^*_p)$. Следовательно, X^* есть лифт векторного поля X. □

Заметим, что если, например, X^* и Y^* — горизонтальные лифты, то поле $fX^* + gY^*$, где $f(p)$ и $g(p)$ суть функции на P, хотя и горизонтально в каждой точке p, но не является в общем случае инвариантным относительно Ψ'_g и, согласно предыдущему Предложению, не является горизонтальным лифтом.

Перечислим некоторые свойства горизонтальных и вертикальных векторных полей. Лифты полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, будем обозначать X^*, Y^*, а фундаментальные векторные поля, отвечающие A, $B \in \mathfrak{g}$, — A^*, B^*.

1. $X^* + Y^*$ — горизонтальный лифт для $X + Y$.

2. f^*X^* есть горизонтальный лифт для fX, где $f(x)$ — функция на M, а f^* функция на P, определяемая так: $f^* = f \circ \pi$.

3. $[X^*, Y^*]$ вообще говоря не есть горизонтальное векторное поле, но $h[X^*, Y^*]$ есть горизонтальный лифт для $[X, Y]$:

$$\pi'\left(h[X^*, Y^*]\right) = \pi'\left([X^*, Y^*]\right) = \left[\pi'X^*, \pi'Y^*\right] = [X, Y].$$

4. Если $A^* = \sigma A$ — фундаментальное векторное поле, а Z — горизонтальное, то $[Z, A]$ горизонтально. Действительно, A^* индуцируется однопараметрической подгруппой преобразований Ψ_{a_t} и по формуле (2.37)

$$[Z, A^*] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\Psi'_{a_t} Z - Z\right). \tag{2.63}$$

Но поле $\Psi'_{a_t} Z$ — горизонтальное и, следовательно, $[Z, A^*]$ — горизонтально (но, вообще говоря, не равно нулю, так как Z может быть неинвариантным горизонтальным полем).

5. Поле $[A^*, B^*]$ есть фундаментальное векторное поле, так как σ — гомоморфизм:

$$[A^*, B^*] = [\sigma A, \sigma B] = \sigma\left([A, B]\right) = \left([A, B]\right)^*.$$

Остановимся теперь на вопросе о *редукции связности* в случае, когда главное расслоение $P(M, G)$ редуцируется к подрасслоению $Q(M, H)$, $H \subset G$ (см. § 6). Касательное пространство к P в точке $q \in Q \subset P$ может быть представлено в виде прямой суммы

$$T_qP = T_qQ \oplus R_q,$$

где R_q есть подпространство вертикального подпространства $V_q \subset T_qP$. Пусть ω — форма связности на P. Обозначим $\tilde{\omega} = \omega|_Q$ сужение ω на Q, т. е. форму ω, взятую в точках $q \in Q$ и на векторах из T_qQ. Будем говорить, что связность в P редуцируема к связности в Q, если форма $\tilde{\omega} = \omega|_Q$ является $\mathfrak{h}$-значной, где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы H.

В качестве иллюстрации обсудим задание связности в $\pi^{-1}(U) \subset P$, где U — окрестность в M. Пусть $\{x^i\}$ ($\{i = 1, 2, \ldots, m\}$) — локальная координатная система, а $\left\{\xi_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ — базис векторных полей в U. Он является координатным (голономным), так как

$$[\xi_i, \xi_j] = 0. \qquad (2.64).$$

В качестве базиса векторных полей в G возьмем n ($n = \dim G$) левоинвариантных векторных полей $A_\alpha \in \mathfrak{g}$. Базис $\{A_\alpha\}$ является некоординатным (неголономным):

$$[A_\alpha, A_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} A_\gamma, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2.65)$$

где $C^\gamma_{\alpha\beta}$ — структурные константы группы G.

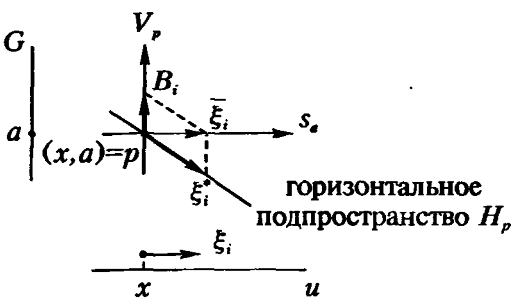

Рис. 11.

Так как подрасслоение $\pi^{-1}(U)$ тривиально, т. е. существует тривиализация $\chi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, то в качестве базиса векторных полей в $\pi^{-1}(U)$ можно выбрать $\{A^*_\alpha, \bar{\xi}_i\}$, где $A^*_\alpha = \sigma A_\alpha$ — фундаментальные векторные поля, касательные к слою, а $(\bar{\xi}_i)_{s_a(x)} = s'_a(\xi_i)_x$ — базис пространства, касательного к сечению $s_a : U \to \pi^{-1}(U)$, определяемому условием $\chi(s_a(x)) = (x, a) \in U \times G$, a — фиксированный элемент из G (см. рис. 11).

Связность Г, заданная во всем расслоении P, индуцирует связность Γ_U на $\pi^{-1}(U)$. Обозначим через ξ^*_i горизонтальный лифт поля ξ_i. Изучим коммутаторы полей A^*_α, $\bar{\xi}_i$ и ξ^*_j.

а) $[A^*_\alpha, A^*_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} A^*_\gamma$ в соответствии со свойством 5 (см. выше) и формулой (2.65).

б) $[A^*_\alpha, \bar{\xi}_i] = 0$ в силу формулы (2.37), так как по определению поле $\bar{\xi}_i$ не меняется при движении вдоль слоя.

в) $[\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_j] = 0$, потому что пространство, касательное к сечению в точке $p = \chi^{-1}(x, a)$, изоморфно пространству, касательному к M в точке x, причем $\bar{\xi}_i$ отвечают ξ_i, а $[\xi_i, \xi_j] = 0$ (см. (2.64)).

Рассмотрим теперь коммутаторы полей A^*_α и ξ^*_i.

г) $[A^*_\alpha, \xi^*_j] = 0$ в силу формулы (2.63) и инвариантности лифта ξ^*_i относительно преобразований Ψ'_a, $a \in G$.

д) $[\xi^*_i, \xi^*_j]$ имеет лишь вертикальную компоненту. Это следует из того, что согласно свойству (3) $h[\xi^*_i, \xi^*_j]$ есть горизонтальный лифт для $[\xi_i, \xi_j] = 0$. Обозначим

$$[\xi^*_i, \xi^*_j] = -F^\alpha_{ij} A^*_\alpha, \qquad (2.66)$$

где F_{ij}^{α} — функция на $\pi^{-1}(U)$. Можно показать, что

$$A_{\alpha}^{*}\left(F_{ij}^{\beta}\right) = -C_{\alpha\gamma}^{\beta}F_{ij}^{\gamma}. \tag{2.67}$$

Разложим теперь горизонтальное векторное поле ξ_i^* по базису $\{A_{\alpha}^{*}, \bar{\xi}_i\}$. Так как $\pi'(\xi_i^*) = \xi_i$ и $\pi'(\bar{\xi}_i) = \xi_i$, то

$$\xi_i^* = \bar{\xi}_i - B_i^{\alpha}A_{\alpha}^{*}, \tag{2.68}$$

где B_i^{α} — некоторые коэффициенты. По определению формы связности $\omega(\xi_i^*) = 0$. Отсюда получаем

$$B_i^{\alpha} = \omega^{\alpha}(\bar{\xi}_i), \tag{2.69}$$

где мы представили $\omega = \omega^{\alpha}A_{\alpha}$. Таким образом, выбор горизонтального подпространства означает выбор функции $B_i^{\alpha}(p) = B_i^{\alpha}(x, a)$ и

$$\xi_i^* = \bar{\xi} - \omega^{\alpha}(\bar{\xi}_i)A_{\alpha}^{*}. \tag{2.70}$$

Например, если $B_j^{\alpha} \equiv 0$, то горизонтальным является направление, задаваемое сечением s_a. Можно показать, что

$$A_{\alpha}^{*}(B_i^{\beta}) = -C_{\alpha\gamma}^{\beta}B_i^{\beta}, \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned} F_{ij}^{\alpha} = \bar{\xi}_i(B_j^{\alpha}) - \bar{\xi}_j(B_i^{\alpha}) + C_{\beta\gamma}^{\alpha}B_i^{\beta}B_j^{\gamma} = \\ = \frac{\partial}{\partial x^i}B_j^{\alpha}(x, a) - \frac{\partial}{\partial x^j}B_i^{\alpha}(x, a) + C_{\beta\gamma}^{\alpha}B_i^{\beta}B_j^{\gamma}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

§ 11. Форма кривизны

Пусть задано главное расслоенное пространство $P(M, G)$. Изучим сначала класс форм на P со значениями в некотором конечномерном векторном пространстве F. Будем считать, что задано также представление ρ структурной группы G на F, т. е. для каждого $g \in G$ определено линейное отображение $\rho(g)$: $F \to F$ такое, что $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)$. F-значная r-форма φ на P называется *псевдотензориальной формой* степени r на P типа (ρ, F), если она обладает свойством

$$\Psi_g^{*}\varphi = \rho(g^{-1})\varphi, \quad g \in G. \tag{2.73}$$

Форма φ на P называется *тензориальной*, если она псевдотензориальна и горизонтальна, т. е. $\varphi(X_1, \ldots, X_r) = 0$, если хотя бы один из касательных векторов X_i вертикален.

Примеры. 1) Форма связности ω есть псевдотензориальная форма типа (ad, $\mathfrak{g}$).

2) Пусть φ_M есть некоторая F-значная r-форма на базе, а $\rho = id$ — тривиальное представление ($\rho(g)$ — тождественное преобразование в F для любого $g \in G$). Тогда $\varphi = \pi^*\varphi_M$ есть тензориальная форма типа (id, F). Действительно, так как

$$\varphi(X_1, \ldots, X_r) = \varphi_M(\pi' X_1, \ldots, \pi' X_r), \quad X_i \in \mathfrak{X}(P), \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

то φ — горизонтальна. Далее,

$$(\Psi_g^* \varphi)(X_1, \ldots, X_r) = \varphi(\Psi_g' X_1, \ldots, \Psi_g' X_r) = \varphi_M(\pi' \Psi_g' X_1, \ldots, \pi' \Psi_g' X_r) =$$
$$= \varphi_M(\pi' X_1, \ldots, \pi' X_r) = \varphi(X_1, \ldots, X_r),$$

т. е. φ — псевдотензориальна.

Введем два новых определения:

i) $(\varphi h)(X_1, \ldots, X_r) = \varphi(hX_1, \ldots, hX_r)$;

ii) $D\varphi = (d\varphi)h$.

Операция D называется *внешним ковариантным дифференцированием*, а $D\varphi$ — внешней ковариантной производной формы φ.

Выясним связь между тензориальными и псевдотензориальными формами на P.

Предложение 2.11.1. Пусть φ — псевдотензориальная r-форма на P типа (ρ, F). Тогда

а) $d\varphi$ — псевдотензориальная $(r+1)$-форма типа (ρ, F),

б) φh — тензориальная r-форма типа (ρ, F),

в) $D\varphi$ — тензориальная $(r+1)$-форма типа (ρ, F).

Доказательство. а) Это свойство просто следует из равенства $\Psi_g^* \circ d = d \circ \Psi_g^*$ (см. (2.34)).

б) Так как $\Psi_g' \circ h = h \circ \Psi_g'$ (в силу инвариантности горизонтальных подпространств), то φh есть псевдотензориальная форма

$$\left(\Psi_g^*(\varphi h)\right)(X_1, \ldots, X_r) = (\varphi h)(\Psi_g' X_1, \ldots, \Psi_g' X_r) =$$
$$= \varphi(h\Psi_g' X_1, \ldots, h\Psi_g' X_r) = \varphi(\Psi_g' hX_1, \ldots, \Psi_g' hX_r) =$$
$$= \rho(g^{-1})\varphi(hX_1, \ldots, hX_r) = \rho(g^{-1})(\varphi h)(X_1, \ldots, X_r).$$

Горизонтальность φh очевидна.

в) Это свойство следует из а) и б). □

Важную роль как в теории расслоенных пространств, так и при геометрическом описании калибровочных полей играет *форма кривизны* $\Omega = D\omega$ формы связности ω. Согласно Предложению 2.11.1 она является тензориальной $\mathfrak{g}$-значной 2-формой $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$. Важная формула для формы кривизны (формула ковариантного дифференцирования формы связности) дается следующим предложением.

Предложение 2.11.2. Форма кривизны Ω формы связности ω удовлетворяет структурному уравнению

$$\Omega(X,Y) = d\omega(X,Y) + \frac{1}{2}[\omega(X),\omega(Y)], \quad X,Y \in T_pP, \quad p \in P. \tag{2.74}$$

Доказательство. Так как любой касательный вектор на P можно разложить на вертикальный и горизонтальный, а все члены в (2.74) билинейны и антисимметричны по X и Y, то достаточно рассмотреть следующие три случая.

i) X, Y — горизонтальны. Тогда $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ и (2.74) совпадает с определением $\Omega = D\omega$.

ii) X, Y — вертикальны и $X = A^* = \sigma(A)$, $Y = B^* = \sigma(B)$. По определению левая часть равенства $\Omega(A^*,B^*) = 0$. В силу формулы (2.21) для дифференцирования 1-форм, имеем

$$d\omega(A^*,B^*) = \frac{1}{2}A^*\left(\omega(B^*)\right) - \frac{1}{2}B^*\left(\omega(A^*)\right) - \frac{1}{2}\omega\left([A^*,B^*]\right).$$

Но $\omega(A^*) = A$, $\omega(B^*) = B$ и не зависят от точки в P. Поэтому

$$d\omega(A^*,B^*) = -\frac{1}{2}\omega\left([A^*,B^*]\right) = -\frac{1}{2}\omega\left([A,B]^*\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}[A,B] = -\frac{1}{2}\left[\omega(A^*),\omega(B^*)\right]$$

и правая часть равенства (2.74) также обращается в нуль.

iii) X — горизонтальный, а $Y = A^* = \sigma(A)$. Тогда $\Omega(X,A) = 0$ и $\omega(X) = 0$. По формуле дифференцирования:

$$2d\omega(X,A^*) = X\left(\omega(A^*)\right) - A^*\left(\omega(X)\right) - \omega\left([X,A^*]\right) = -\omega\left([X,A^*]\right).$$

В силу свойства 4 (см. § 10) коммутатор $[X,A^*]$ горизонтален и, следовательно, $d\omega(X,A^*) = 0$. □

Предложение 2.11.3. Если X и Y — горизонтальные векторные поля на P, то

$$\Omega(X,Y) = -\frac{1}{2}\omega\left([X,Y]\right). \tag{2.75}$$

Доказательство простое:

$$\Omega(X,Y) = d\omega(X,Y) = -\frac{1}{2}\omega\left([X,Y]\right). \; \square$$

Приведем теперь формулы для дифференцирования других форм на P.

Предложение 2.11.4. Пусть φ — псевдотензориальная 0-форма типа (ρ, F) на P. Тогда

$$D\varphi(X) = d\varphi(X) + \rho'(\omega(X))\varphi, \quad X \in \mathfrak{X}(P), \tag{2.76}$$

где ρ' — дифференциал отображения ρ, а ω — форма связности.

Доказательство. По определению, $D\varphi(X) = d\varphi(hX) = d\varphi(X) - d\varphi(vX)$. Пусть $vX = A^*$ — фундаментальное векторное поле, индуцированное однопараметрической группой преобразований Ψ_{a_t}. Тогда

$$d\varphi(vX) = d\varphi(A^*) = A^*(\varphi) = \frac{d}{dt}\varphi \circ \Psi_{a_t}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Psi^*_{a_t}\varphi\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\rho(a_t^{-1})\varphi\Big|_{t=0}.$$

Здесь мы воспользовались псевдотензориальностью φ: $\Psi^*_g\varphi = \rho(g^{-1})\varphi$. Так как касательный вектор к кривой a_t в точке $a_0 = e$ есть $A \in \mathfrak{g}$, прообраз A^* при гомоморфизме σ, то $\frac{d}{dt}a_t^{-1}\big|_{t=0} = -A$. Итак,

$$\varphi(vX) = -\rho'(A)\varphi = -\rho'(\omega(X))\varphi,$$

откуда и следует формула (2.76). □

Можно показать, что если φ — тензориальная 1-форма типа $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$, то

$$D\varphi(X,Y) = d\varphi(X,Y) + \frac{1}{2}\left[\varphi(X), \omega(Y)\right] + \frac{1}{2}\left[\omega(X), \varphi(Y)\right],$$

$$X, Y \in T_p(P), \qquad p \in P. \tag{2.77}$$

(См. [KH], гл. 2, § 5, Предложение 5.5).

Предложение 2.11.5 (тождество Бьянки).

$$D\Omega = 0. \tag{2.78}$$

Для доказательства применим операцию внешнего дифференцирования d к структурному уравнению (2.74). Используя формулы (2.19) и (2.45), получим:

$$d\Omega = \frac{1}{2}[d\omega, \omega] - \frac{1}{2}[\omega, d\omega] = [d\omega, \omega]. \tag{2.79}$$

По определению внешней ковариантной производной имеем

$$D\Omega = (d\Omega)h = [D\omega, \omega h] \equiv 0, \tag{2.80}$$

поскольку для формы связности $\omega h \equiv 0$. □

§ 12. Некоторые примеры

В качестве первого примера связности рассмотрим так называемую каноническую плоскую связность. Пусть $P = M \times G$ — тривиальное главное расслоение. Множество $M \times \{a\}$ для каждого $a \in G$ является подмногообразием в P причем $M \times \{e\}$, где e — единица группы, является подрасслоением в P. Каноническая плоская связность задается тем, что в качестве горизонтального подпространства в каждой точке $p = (x, a) \in P$ выбирается пространство, касательное к $M \times \{a\}$ в точке (x, a). Пусть θ — каноническая левоинвариантная 1-форма на G (см. § 5), а $\mathrm{pr}_2 : M \times G \to G$ естественная проекция на второй сомножитель. Можно проверить, что

$$\omega = (\mathrm{pr}_2)^*\theta \tag{2.81}$$

есть форма связности канонической плоской связности (задача 2.20).

Вычислим кривизну этой связности. Для этого найдем внешний дифференциал от ω:

$$d\omega = d\left(\mathrm{pr}_2^*\theta\right) = (\mathrm{pr}_2)^*\left(-\frac{1}{2}[\theta,\theta]\right) = -\frac{1}{2}\left[(\mathrm{pr}_2)^*\theta, (\mathrm{pr}_2)^*\theta\right] = -\frac{1}{2}[\omega,\omega],$$

где мы воспользовались уравнением Маурера—Картана для канонической формы θ. Тогда, в силу структурного уравнения (2.74) получаем, что $\Omega = D\omega = 0$.

Пусть теперь $P(M,G)$ — произвольное главное расслоение, в котором задана связность Γ. Пусть для любой точки $x \in M$ существует окрестность U такая, что связность на $\pi^{-1}(U)$, индуцированная связностью Γ, изоморфна канонической плоской связности в $U \times G$. Другими словами, существует изоморфизм $\chi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, $\chi(p) = (x, a)$ ($p \in \pi^{-1}(U)$, $x = \pi(p) \in U, a \in G$) такой, что горизонтальное подпространство в каждой точке $p \in \pi^{-1}(U)$ отображается на горизонтальное подпространство канонической плоской связности в точке $\chi(p) \in U \times G$. Тогда связность Γ в P называется *плоской.*

Приведем без доказательства два утверждения о свойствах плоской связности (доказательства приведены в [KH]:

1) Связность в $P(M,G)$ плоская тогда и только тогда, когда $\Omega = 0$.

2) Пусть Γ — связность в $P(M,G)$ и ее форма кривизны равна нулю. Если M паракомпактно (см. [РФ]) и односвязно (см., например, [РФ], [Ko]), то P изоморфно тривиальному расслоению $M \times G$ и Γ изоморфна канонической плоской связности в $M \times G$.

Второй пример. Рассмотрим расслоение Хопфа $P\left(S^2, U(1)\right) = S^3$ (см. § 7). Элементы структурной группы $G = U(1)$ представим в виде $a(\alpha) = e^{i\alpha}$, α — групповой параметр ($0 \leqslant \alpha < 2\pi$). Пусть действие структурной группы задается формулой

$$\psi_{a(\alpha)} g = g e^{i\tau_3 \alpha},$$

где $g(\chi,\varphi,\psi) \in SU(2)$ — элемент расслоения P, реализованный как матрица из $SU(2) \simeq S^3$; явный вид этой матрицы приведен в § 5 (формула (2.49)). Легко проверить, что

$$\psi_{a(\alpha)}g(\chi,\varphi,\psi) = g(\chi,\varphi,\psi + 2\alpha).$$

Выясним теперь, как выглядят фундаментальные векторные поля на расслоении Хопфа. Пусть X поле на G, отвечающее однопараметрической подгруппе $a_t = e^{it}$, а $f(a) \in \mathfrak{F}(G)$ $(a \in G)$ — функция на группе, которая при $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ является фактически функцией параметра α $f(a(\alpha)) = \bar{f}(\alpha)$. Тогда легко показать, что $X_{a(\alpha_0)} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0}$. В частности, $X_e = \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} \in T_e(G) \simeq \mathfrak{g}$. Соответствующий элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть $A = 1$, а каноническая левоинвариантная форма $\theta = d\alpha$. Для того, чтобы понять, какое фундаментальное поле $A^* = \sigma(A)$ отвечает $A = 1$, введем функцию $G\left(g(\chi,\varphi,\psi)\right) \equiv \tilde{G}(\chi,\varphi,\psi)$ на расслоении и вычислим A^*G. По определению

$$A^*G\left(g(\chi,\varphi,\psi)\right) = \frac{d}{dt}G\left(\psi_{a_t}g(\chi,\varphi,\psi)\right)\Big|_{t=0} =$$
$$= \frac{d}{dt}G\left(g(\chi,\varphi,\psi + 2t)\right)\Big|_{t=0} = 2\,\frac{\partial}{\partial\psi}\tilde{G}(\chi,\varphi,\psi),$$

то есть $\sigma(A) = A^* = 2\frac{\partial}{\partial\psi}$.

В координатах $\{\chi,\varphi,\psi\}$ (углы Эйлера, см. § 5) 1-форму связности можно записать в виде $\omega = a\,d\psi + b\,d\varphi + c\,d\chi$. Форма связности должна удовлетворять условию $\omega(A^*) = A$. Отсюда следует, что $a = \frac{1}{2}$. Коэффициенты b и c можно определить лишь после задания связности, т. е. выбора горизонтального подпространства в $T_p(P)$ в каждой точке p. Рассмотрим два случая:

i) Зададим связность, выбрав в качестве горизонтальных подпространств пространства, натянутые на векторы $\frac{\partial}{\partial\chi}$ и $\frac{\partial}{\partial\varphi} - \cos\chi\frac{\partial}{\partial\psi}$. Так как форма связности на этих векторах обращается в нуль, то находим

$$\omega = \frac{1}{2}\left(d\psi + \cos\chi d\varphi\right).$$

ii) Пусть горизонтальное подпространство порождается векторами $\frac{\partial}{\partial\varphi} - \cos\chi\frac{\partial}{\partial\chi}$ и $\frac{\partial}{\partial\chi} - \frac{\partial}{\partial\psi}$. Тогда

$$\omega = \frac{1}{2}(d\psi + d\chi + \cos\chi\, d\varphi).$$

Вычислим теперь для этих двух случаев форму кривизны. Так как структурная группа — абелева, то согласно структурному уравнению

(2.74) $\Omega = d\omega$. Получаем

$$\text{i)}\quad \Omega = \frac{1}{2}\sin\chi\, d\varphi \wedge d\chi,$$

$$\text{ii)}\quad \Omega = \frac{1}{2}\sin\chi\, d\varphi \wedge d\chi.$$

§ 13. Параллельный перенос и ковариантное дифференцирование

Имея заданную связность в расслоении P можно определить понятие параллельного переноса слоев в этом расслоении и в любом ассоциированном с ним. Если ассоциированное расслоение является *векторным*, т. е. его типический слой является векторным пространством, то *параллельный перенос слоев* в нем естественно приводит к понятию ковариантного дифференцирования сечений, которое играет важную роль в теории линейных связностей. Мы начнем обсуждение этих вопросов с понятия параллельного переноса в главном расслоении.

Итак, имея связность Γ в главном расслоенном пространстве $P(M,G)$, определим параллельный перенос слоев вдоль любой кривой τ в базе M. Для этого введем сначала понятие горизонтальной кривой в P. А именно, кривую p_t в P будем называть горизонтальной, если все касательные векторы к ней, $\dot{p}_t$, горизонтальны относительно связности Γ.

Далее, пусть $\tau = x_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, есть дифференцируемая кривая в M. *Горизонтальным лифтом* или *подъемом* кривой τ называется горизонтальная кривая $\tau^* = p_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, в P, такая что $\pi(p_t) = x_t$, $t \in [0,1]$.

Предложение 2.13.1. Для любой дифференцируемой кривой $\tau = x_t$, $t \in [0,1]$, в M и для любой точки $p_0 \in P$ с $\pi(p_0) = x_0$ существует единственный лифт $\tau^* = p_t$ кривой τ, начинающийся в p_0.

Доказательство. Вследствие локальной тривиальности расслоения $P(M,G)$ в нем существует дифференцируемая кривая v_t такая, что $v_0 = p_0$ и $\pi(v_t) = x_t$, $t \in [0,1]$. Поскольку лифт p_t, если он существует, обладает свойством $\pi(p_t) = \pi(v_t)$, то ясно, что в каждой точке t p_t отличается от v_t на преобразование из структурной группы Ψ_{a_t}, где a_t — кривая в структурной группе с $a_0 = e$, т. е.

$$p_t = \Psi_{a_t} v_t. \tag{2.82}$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\dot{p}_t = \Psi'_{a_t}\dot{v}_t + \sigma_{p_t}(a_t^{-1}\dot{a}_t), \tag{2.83}$$

где σ_p обозначает изоморфизм $\sigma_p : \mathfrak{g} \to V_p$ (V_p — вертикальное подпространство в T_pP), порожденный действием структурной группы и введенный в Предложении 2.5.1.

Горизонтальность $\dot{p}_t$ означает, что $\omega(\dot{p}_t) = 0$. Подставляя сюда (2.83), получим

$$\dot{a}_t a_t^{-1} = -A_t, \tag{2.84}$$

где $A_t = \omega(\dot{v}_t)$ — кривая в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Существование решения уравнения (2.84) проще всего показать в матричной реализации группы G. В этом случае единственное решение (2.84) есть просто

$$a_t = T\exp\left(-\int\limits_0^t A_s ds\right),$$

где использована обычная T-экспонента. В соответствии с (2.82) существование единственной кривой a_t эквивалентно существованию и единственности лифта $\tau^* = p_t$. □

Теперь мы можем определить параллельный перенос слоев следующим образом. Пусть $\tau = x_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ есть дифференцируемая кривая в M. Для любой точки $v \in \pi^{-1}(x_0)$ существует лифт $\tau^* = p_t$, начинающийся в этой точке. Поставим в соответствие точке $v \in \pi^{-1}(x_0)$ точку $v' = p_1 \in \pi^{-1}(x_1)$. Обозначая это соответствие той же буквой τ, запишем $v' = \tau(v)$. Поскольку эту процедуру можно провести для любой точки из $\pi^{-1}(x_0)$, мы получаем отображение $\tau : \pi^{-1}(x_0) \to \pi^{-1}(x_1)$, которое называется *параллельным переносом* вдоль кривой τ.

Параллельный перенос вдоль любой кривой τ является изоморфизмом. Это следует из единственности лифта кривой и из того, что параллельный перенос перестановочен с действием структурной группы, т.е. $\tau \circ \Psi_a = \Psi_a \circ \tau$. Последнее объясняется тем, что действие структурной группы переводит горизонтальную кривую в горизонтальную.

Связность Γ в расслоении $P(M,G)$ определяет связность и параллельный перенос в любом ассоциированном с ним расслоении $E(M,F,G,P)$ со стандартным слоем F. Действительно, как мы выяснили в § 8 этой главы, любая точка $p \in P$ определяет изоморфизм из типичного слоя F в слой E над $\pi(p)$, $p : F \to \pi_E^{-1}\left(\pi(p)\right)$. Это отображение позволяет канонически определить в любой точке $w = \left[(p,\xi)\right]$ вертикальное, т.е. касательное к слою, подпространство как $V_w = p'(T_\xi F)$. Ясно, что это определение не зависит от выбора представителя в классе $w = \left[(p,\xi)\right]$. Аналогично, любая точка $\xi \in F$ определяет отображение $\xi : P \to E$, $\xi(p) = \left[(p,\xi)\right]$. Горизонтальное подпространство в точке $w = \left[(p,\xi)\right]$ определяется как образ $H_p \subset T_pP$ при действии дифференциала ξ' отображения ξ, $H_w = \xi'(H_p)$, причем это определение не зависит от выбора представителя. Учитывая структуру $E = P \times_G F$ как скрученного произведения, нетрудно убедиться, что $T_w E = H_w \oplus V_w$. Кривая в E горизонтальна, если касательные к ней векторы горизонтальны в каждой точке. Для любой кривой $\tau = x_t$ в M и точки $w \in \pi_E^{-1}(x_0)$ существует единственный горизонтальный лифт $\tau^* = w_t$, $\pi_E(w_t) = x_t$, с началом в точке w. Этот лифт можно построить следующим образом. Возьмем представитель (p,ξ) в классе $w = \left[(p,\xi)\right]$. Поскольку $\pi_E(w) = \pi(p) = x_0$, существует горизонтальный лифт p_t для τ в расслоении P. Горизонтальный лифт τ^* при этом задается соотношением $w_t = p_t(\xi)$. Нетрудно убедиться, что это определение не зависит от выбора представителя (p,ξ). Последнее означает также единственность лифта.

Дословно повторяя рассуждения, проведенные для случая главного расслоенного пространства, мы придем к заключению, что любая кривая τ в M определяет изоморфное отображение $\tau : \pi_E^{-1}(x_0) \to \pi_E^{-1}(x_1)$, называемое ***параллельным переносом*** в ассоциированном расслоении E.

Параллельный перенос слоев наиболее часто используется в векторных расслоениях, которые отличаются рядом особенностей. Прежде всего отметим, что в каждом слое $\pi_E^{-1}(x)$, $x \in M$, векторного расслоения $E(M,G,V,P)$ имеется структура векторного пространства. Поэтому и множество всех сечений $S(E)$ векторного расслоения E автоматически наделяется структурой векторного пространства (вообще говоря, бесконечномерного). Связность в векторном расслоении и порожденный ей параллельный перенос позволяет сравнивать (и складывать) векторы сечения над разными точками базы. Именно на этом и основано понятие ковариантной производной для сечения векторного расслоения, которую мы сейчас определим точно.

Итак, пусть задана связность Γ в главном расслоении P, сечение $\varphi : M \to E$ ассоциированного с ним векторного расслоения $E(M,G,V,P)$ и некоторая кривая $\tau = x_t$ в M. Тогда для каждого t ковариантная производная $\nabla_{\dot{x}_t}\varphi$ для φ в направлении (или по отношению к) $\dot{x}_t$ определяется так:

$$\nabla_{\dot{x}_t}\varphi = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\tau_t^{t+\Delta t}\big(\varphi(x_t + \Delta t)\big) - \varphi(x_t)\right], \tag{2.85}$$

где $\tau_t^{t+\Delta t} : \pi_E^{-1}(x_{t+\Delta t}) \to \pi_E^{-1}(x_t)$ обозначает параллельный перенос вдоль τ из $x_{t+\Delta t}$ в x_t. Из определения ясно, что для любого t $\nabla_{\dot{x}_t}\varphi \in \pi_E^{-1}(x_t)$ и определяет сечение E над τ.

Поскольку, как мы знаем, любому вектору $X \in T_x M$ можно поставить в соответствие кривую x_t, которой он касается в точке $x = x_{t_0}$ для некоторого t_0, определение ковариантной производной (2.85) можно переформулировать для любого вектора на M, положив $\nabla_X\varphi = \nabla_{\dot{x}_{t_0}}\varphi$. Ясно также, что понятие ковариантной производной можно распространить и на случай, когда X есть векторное поле на M, определив ее в каждой точке как $(\nabla_X\varphi)(x) = \nabla_{X_x}\varphi$. Сечение φ называется параллельным относительно связности Γ, если для любой кривой τ в M кривая $\varphi(\tau)$ горизонтальна, или, эквивалентно, $\nabla_X\varphi = 0$ для любого векторного поля X на M.

Между операцией ковариантного дифференцирования сечений расслоения $E(M, G, V, P)$ и операцией внешнего ковариантного дифференцирования в главном расслоении $P(M, G)$ существует связь, которую мы установим в следующем Предложении.

Предложение 2.13.2. Пусть $X \in T_xM$, $p \in \pi^{-1}(x)$, $\overline{X} \in T_pP$ причем $\pi'(\overline{X}) = X$, и $f(p) = p^{-1}\varphi\left(\pi(p)\right)$ есть функция на P, $f : P \to V$, соответствующая сечению φ (см. Предложение 2.9.2). Тогда

$$\nabla_X\varphi = p\left(Df(\overline{X})\right).$$

Доказательство. Пусть $\tau = x_t$, $-\varepsilon \leqslant t \leqslant \varepsilon$ есть кривая в M, для которой $X = \dot{x}_0$, и пусть $\tau^* = p_t$ есть лифт τ с началом в точке p, $p_0 = p$. Из определения лифта кривой следует, что $\dot{p}_0 = h\overline{X}$. Тогда мы пишем

$$Df(\overline{X}) = df(h\overline{X}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(f(p_{\Delta t}) - f(p)\right) =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[p_{\Delta t}^{-1}\varphi(x_{\Delta t}) - p_0^{-1}\varphi(x_0)\right].$$

Отсюда

$$p\left(Df(\overline{X})\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[p_0 \circ p_{\Delta t}^{-1}\varphi(x_{\Delta t}) - \varphi(x_0)\right]. \tag{2.86}$$

Далее, положим $p_{\Delta t}^{-1}\varphi(x_{\Delta t}) = \xi \in V$ и рассмотрим горизонтальную кривую $p_t(\xi)$ в E. При $t = \Delta t$ $p_{\Delta t}(\xi) = \varphi(x_{\Delta t})$, а при $t = 0$ $p_0(\xi) = p_0 \circ p_{\Delta t}^{-1}\varphi(x_{\Delta t})$. Это означает, что $p_0 \circ p_{\Delta t}^{-1}\varphi(x_{\Delta t})$ есть параллельный перенос $\varphi(x_{\Delta t})$ из $x_{\Delta t}$ в x_0, т. е. $p_0 \circ p_{\Delta t}^{-1}\varphi(x_{\Delta t}) = \tau_0^{\Delta t}\left(\varphi(x_{\Delta t})\right)$. Подставляя это в соотношение (2.86), в его правой части получаем определение ковариантной производной. □

Основные свойства операции ковариантного дифференцирования перечислены в следующем Предложении.

Предложение 2.13.3. Пусть X, Y — векторные поля на M, f — функция на M, а φ и ψ — сечения в E. Тогда

(1) $\nabla_{X+Y}\varphi = \nabla_X\varphi + \nabla_Y\varphi$,
(2) $\nabla_X(\varphi + \psi) = \nabla_X\varphi + \nabla_X\psi$,
(3) $\nabla_{fX}\varphi = f\nabla_X\varphi$,
(4) $\nabla_X(f\varphi) = f\nabla_X\varphi + (Xf)\varphi$.

Доказательство. Свойства (1) и (3) сразу следуют из предыдущего предложения. (2) объясняется тем, что параллельный перенос в векторном расслоении есть линейный изоморфизм слоя на слой. (4) есть простое следствие определения (2.85). □

§ 14. Характеристические классы

В § 7 мы видели, что могут существовать различные главные расслоения с одной и той же базой и одной и той же структурной группой. Более того, эти расслоения нумеруются некоторыми целыми числами (примеры 7 и 8). В этом параграфе мы введем понятие характеристических классов, позволяющих различать неэквивалентные расслоения. Оно играет важную роль при описании инстантонов и монополей в калибровочных теориях.

Рассмотрим группу Ли G и ее алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Прежде всего определим множество $I^k(G)$ симметричных полилинейных отображений

$$f : \underbrace{\mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g}}_{k \text{ раз}} \to \mathbb{R},$$

инвариантных относительно G:

$$f\left((\operatorname{ad} a)A_1, (\operatorname{ad} a)A_2, \ldots, (\operatorname{ad} a)A_k\right) = f(A_1, A_2, \ldots, A_k), \tag{2.87}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathfrak{g}$, $a \in G$.

Пусть теперь $P(M, G)$ — главное расслоение с канонической проекцией π и правым действием структурной группы на расслоении Ψ_g. Выберем связность в P с формой связности ω и формой кривизны Ω. Для каждого $f \in I^k(G)$ определим $2k$-форму $f(\Omega)$ на P следующим образом:

$$f(\Omega)(X_1, \ldots, X_{2k}) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{\pi} (-1)^{\Delta_\pi} f\big(\Omega(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}), \ldots$$
$$\ldots \Omega(X_{\pi(2k-1)}, X_{\pi(2k)})\big), \tag{2.88}$$

где $X_1, \ldots, X_{2k} \in \mathfrak{X}(P)$, Δ_π — четность перестановки $\pi : (1, 2, \ldots 2k) \to \big(\pi(1), \pi(2), \ldots \pi(2k)\big)$, а суммирование ведется по всем возможным перестановкам. Мы изучим формы $f(\Omega)$, которые играют ключевую роль при определении характеристических классов, и попутно докажем ряд предложений о свойствах дифференциальных форм.

Будем говорить, что форма φ степени r на P проектируется в r-форму $\bar{\varphi}$ на M, если

$$\varphi = \pi^* \bar{\varphi}. \tag{2.89}$$

Предложение 2.14.1. r-форма φ на $P(M, G)$ проектируется в единственную r-форму $\bar{\varphi}$ на M, если

i) $\varphi(X_1,\ldots,X_r)=0$ как только хотя бы один из X_i вертикален;
ii) $\varphi(\Psi'_a X_1,\ldots,\Psi'_a X_r)=\varphi(X_1,\ldots,X_r)$, $a\in G$.

Доказательство. Пусть $x\in M$ и $V_{ix}\in T_x(M)$ $(i=1,\ldots,r)$. Возьмем касательные векторы $X_{ip}\in T_p(p)$, $\pi(p)=x$, такие, что $\pi'(X_{ip})=V_{ix}$ и положим

$$\bar\varphi(V_1,\ldots,V_r)=\varphi(X_1,\ldots,X_r). \tag{2.90}$$

Покажем, что это определение корректно, т.е. не зависит от выбора точки p в слое $\pi^{-1}(p)$ и касательных векторов X_{ip}. Пусть $X'_{ip'}\in T_{p'}(P)$ и $\pi'(X'_{ip'})=V_{ix}$, где $p'=\Psi_a p$. Представим векторы $X'_{ip'}$ как $X'_{ip'}=\Psi'_a Y_{ip}$, причем $\pi'(Y_{ip})=V_{ix}$. Согласно пункту (ii)

$$\varphi_{p'}(X'_1,\ldots,X'_r)=\varphi_p(Y_1,\ldots,Y_r).$$

Поскольку вектор $(X_i-Y_i)_p$ вертикален для каждого i, то из (i) следует, что

$$\begin{aligned}\varphi(X_1,\ldots,X_r)&=\varphi(Y_1,X_2,\ldots,X_r)+\varphi(X_1-Y_1,X_2,\ldots,X_r)=\\&=\varphi(Y_1,X_2,\ldots,X_r)=\varphi(Y_1,Y_2,X_3,\ldots,X_r)=\ldots=\varphi(Y_1,Y_2,\ldots,Y_r).\ \square\end{aligned}$$

Предложение 2.14.2. Если $\varphi=\pi^*\bar\varphi$, то $d\varphi=D\varphi$ (D — ковариантный дифференциал, определенный в § 11).

Доказательство. Если $\varphi\in D^r(P)$ и $X_1,\ldots,X_{r+1}\in\mathfrak{X}(P)$, то

$$\begin{aligned}(d\varphi)(X_1,\ldots,X_{r+1})&=(d\pi^*\bar\varphi)(X_1,\ldots,X_{r+1})=(\pi^*d\bar\varphi)(X_1,\ldots,X_{r+1})=\\&=(d\bar\varphi)(\pi'X_1,\ldots,\pi'X_{r+1})=(d\bar\varphi)(\pi'hX_1,\ldots,\pi'hX_{r+1})\\&=(\pi^*d\bar\varphi)(hX_1,\ldots,hX_{r+1})=(d\pi^*\bar\varphi)(hX_1,\ldots,hX_{r+1})=\\&=(d\varphi)(hX_1,\ldots,hX_{r+1})=D\varphi(X_1,\ldots,X_{r+1}).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойством (2.34). □

Пусть $f\in I^k(G)$, и $f(\Omega)$ — $2k$-форма на $P(M,G)$, определенная равенством (2.88).

Предложение 2.14.3. Форма $f(\Omega)$ на P проектируется в единственную $2k$-форму $\bar f(\Omega)$ на M, причем

$$d\bar f(\Omega)=0. \tag{2.91}$$

Доказательство. Форма Ω есть тензориальная форма типа (ad, $\mathfrak{g}$). Отсюда по формуле (2.88) следует, что $f(\Omega)$ удовлетворяет условию (i) Предложения 2.14.1. Так как $\Psi_a^*\Omega=\mathrm{ad}(a^{-1})\Omega$, а f инвариантна при действии G, то удовлетворяется и условие (ii) того же предложения. Значит, $f(\Omega)$ проектируется в единственную $2k$-форму на M. Далее, $df(\Omega)=d\pi^*f(\Omega)=\pi^*d\bar f(\Omega)$ и, чтобы доказать (2.91), достаточно доказать, что $df(\Omega) = 0$. Согласно Предложению 2.14.2 $df(\Omega) = Df(\Omega)$. Так как операция D действует как простое внешнее дифференцирование (т. е. по формуле (2.18)) и $D\Omega = 0$ согласно Предложению 2.11.5 (тождество Бьянки), то $Df(\Omega) = 0$. □

Рассмотрим теперь две формы связности ω_0 и ω_1 на P и положим

$$\alpha = \omega_1 - \omega_0, \tag{2.92а}$$

$$\omega_t = \omega_0 + t\alpha, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{2.92б}$$

Легко проверить следующие свойства:

1) α есть тензориальная форма типа (ad, $\mathfrak{g}$);

2) $\{\omega_t, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ есть однопараметрическое семейство форм связности на P.

Обозначим D_t внешнее ковариантное дифференцирование, а Ω_t форму кривизны, определяемые формой связности ω_t.

Предложение 2.14.4.

$$\frac{d}{dt}\Omega_t = D_t\alpha. \tag{2.93}$$

Доказательство. Согласно структурному уравнению (2.74)

$$\Omega_t = d\omega_t + \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_t] = d\omega_0 + t\,d\alpha + \alpha[\omega_t, \omega_t].$$

Используя равенство $d\omega_t/dt = \alpha$, получаем

$$\frac{d}{dt}\Omega_t = d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \omega_t] + \frac{1}{2}[\omega_t, \alpha]. \tag{2.94}$$

Из формулы (2.77) ковариантного дифференцирования тензориальных 1-форм следует, что правая часть равенства (2.94) есть $D_t\alpha$. □

Прежде чем перейти к следующим свойствам, нам надо рассмотреть случай, когда аргументами отображения $f \in I^k(G)$ являются некоторые $\mathfrak{g}$-значные формы $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ на P степеней $r_1, \ldots, r_k$ соответственно. Тогда форму $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ степени $r = r_1 + \ldots + r_k$ определим так:

$$f(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)(X_1, \ldots, X_r) = \frac{1}{r!}\sum_\pi (-1)^{\Delta_\pi} f\Big(\varphi_1\big(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(r_1)}\big), \ldots$$
$$\ldots, \varphi_k\big(X_{\pi(r_1+\ldots+r_{k-1}+1)}, \ldots, X_{\pi(r)}\big)\Big) \tag{2.95}$$

(ср. (2.88)). Таким образом, определенная выше $2k$-форма $f(\Omega)$ есть просто $f(\Omega, \ldots, \Omega)$. Форму $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ удобно представить в виде:

$$f(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k = 1}^{n} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}\varphi_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_k^{\alpha_k}, \tag{2.96}$$

где r_i-формы φ_i^α возникают при разложении

$$\varphi_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_i^\alpha E_\alpha$$

по базису $\{E_\alpha\}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n = \dim G)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а числа

$$a_{\alpha_1} \ldots a_{\alpha_k} = f(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_k}).$$

Предложение 2.14.5. Пусть $f \in I^k(G)$. $(2k-1)$-форма

$$\Phi = k \int_0^1 dt\, f(\alpha, \Omega_t, \ldots, \Omega_t) \tag{2.97}$$

на P проектируется в единственную $(2k-1)$-форму на M и

$$d\Phi = f(\Omega_1, \ldots, \Omega_1) - f(\Omega_0, \ldots, \Omega_0) \simeq f(\Omega_1) - f(\Omega_0). \tag{2.98}$$

Доказательство. Из тензориальности форм α и Ω_t и из представления (2.96) (или (2.95)) следует, что $f(\alpha, \Omega_t, \ldots, \Omega_t)$ удовлетворяет условиям Предложения 2.14.1 и эта форма, а значит и форма Φ, проектируются в $(2k-1)$-формы на M. Используя Предложения 2.14.2 и 2.14.4, тождество Бьянки $D_t \Omega_t = 0$ и представление (2.96), получаем

$$k\, df(\alpha, \Omega_t, \ldots, \Omega_t) = k\, D_t f(\alpha, \Omega_t, \ldots, \Omega_t) =$$
$$= k\, f(D_t\alpha, \Omega_t, \ldots, \Omega_t) = k\, f(\frac{d}{dt}\Omega_t, \Omega_t, \ldots, \Omega_t) = \frac{d}{dt} f(\Omega_t, \Omega_t, \Omega_t).$$

Следовательно,

$$d\Phi = k \int_0^1 dt\, \big(df(\alpha, \Omega_t, \ldots, \Omega_t)\big) = \int_0^1 dt \frac{d}{dt} f(\Omega_t, \Omega_t, \ldots, \Omega_t) =$$
$$= f(\Omega_1, \Omega_1, \ldots, \Omega_1) - f(\Omega_0, \Omega_0, \ldots, \Omega_0). \quad \square$$

Введем еще несколько определений. Пусть N — дифференцируемое многообразие размерности n. Форма $\omega \in D^r(N)$ называется *замкнутой*, если

$$d\omega = 0, \tag{2.99}$$

и *точной*, если

$$\omega = d\mu, \tag{2.100}$$

где $\mu \in D^{r-1}(N)$. Очевидно, что любая точная форма является замкнутой, но обратное неверно. Обозначим множество замкнутых r-форм на N Z^r, а множество точных r-форм B^r. Будем считать две r-формы ω и ω' эквивалентными, $\omega \sim \omega'$, если $\omega = \omega' + d\alpha$ для некоторой $\alpha \in D^{r-1}(N)$. Множество классов эквивалентности $Z^r/\sim$ образует абелеву группу, называемую *группой когомологии де Рама*, и обозначается $H^r(N;\mathbb{R})$ (также пишут $H^r(N;\mathbb{R}) = Z^r/B^r$). В дальнейшем мы будем опускать указание на поле $\mathbb{R}$, над которым рассматриваются формы. Особый случай представляет пространство $H^0(N)$. Так как не существует форм степени (-1), и $dc = 0$, если c постоянная функция, то $H^0(N)$ представляет собой множество функций, постоянных на N. При этом $\dim H^0(N)$ равна числу связных компонент многообразия N. В частности для евклидова пространства $\dim H^0(\mathbb{R}^n) = 1$. Согласно лемме Пуанкаре при $r \geqslant 1$ $\dim H^r(\mathbb{R}^n) = 0$, т.е. любая замкнутая форма может быть представлена как внешняя производная от формы более низкой степени. Таким образом, когомологии де Рама многообразия N нетривиальны, если локальные окрестности $U_i \subset N$ «склеиваются» в N нетривиальным образом.

Для полноты изложения отметим, что величина

$$b_p = \dim H^p(N)$$

называется p-ым *числом Бетти* многообразия N, а сумма

$$\xi(N) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p b_p$$

($n = \dim N$) является характеристикой Эйлера. По теореме Гаусса—Бонне $\xi(M)$ может быть выражена через кривизну многообразия; в этом проявляется связь между свойствами форм на многообразии и его геометрией.

Для дальнейшего нам понадобится *теорема Стокса*, которую мы приведем без доказательства. Пусть N есть r-мерное многообразие, а ∂N — его граница. Тогда для любой $(r-1)$-формы ω справедливо равенство:

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} \omega, \tag{2.101}$$

где интеграл от формы понимается в том же смысле, как и в формуле (2.22б). Например, если $r = 1$, а N является сегментом $[a,b]$, то (2.101) переходит в хорошо известную формулу

$$\int_N df = \int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = f(b) - f(a).$$

Если многообразие N ($\dim N = r$) не имеет границы, $\partial N = 0$, то интеграл по N не зависит от выбора представителя в классе эквивалентности из $H^r(N)$. Действительно, пусть ω и μ принадлежат одному классу эквивалентности. Тогда $\omega = \mu + d\alpha$, $\alpha \in D^{r-1}(N)$. По теореме Стокса

$$\int\limits_N \omega = \int\limits_N (\mu + d\alpha) = \int\limits_N \mu + \int\limits_N d\alpha = \int\limits_N \mu + \int\limits_{\partial N} \alpha = \int\limits_N \mu.$$

Вернемся теперь к $2k$-формам $f(\Omega)$, где $f \in I^k(G)$. Согласно Предложению 2.14.3 формы $f(\Omega)$ и $\bar{f}(\Omega)$ являются замкнутыми. Из Предложения 2.14.5 следует, что формы $\bar{f}(\Omega)$, отвечающие различным связностям в главном расслоении $P(M,G)$, принадлежат одному и тому же классу эквивалентности в группе когомологии де Рама $H^{2k}(M)$. Следовательно, если N — $2k$-мерное подмногообразие в M, не имеющее границы, то интеграл по N от $\bar{f}(\Omega)$ не зависит от выбора связности в главном расслоении над M. Кроме того, оказывается, что для любого $N \subset M$ с $\partial N = 0$ интеграл от $\bar{f}(\Omega)$ является целым числом.

Если f — симметрическое инвариантное полилинейное отображение, т. е. $f \in I^k(G)$, то линейная комбинация величин $f(A) \equiv f(A, A, \dots, A)$ с вещественными коэффициентами представляет собой инвариантный относительно действия G (в смысле (2.87)) полином (или характеристический полином) $Q(A)$ переменной $A \in \mathfrak{g}$. Как построить такой полином в явном виде?

Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ реализована матрицами размером $l \times l$. Если матрица A имеет собственные значения $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\}$, то инвариантный полином $Q(A)$ является симметричной функцией этих чисел λ_i и его можно записать через симметрические полиномы степени k вида

$$S_k(\lambda) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant l} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_k}. \tag{2.102}$$

Примером инвариантного полинома является выражение $\det(\mathbb{1} + A)$. Предположим, что матрица A может быть приведена к диагональному виду преобразованием типа $A = UA'U^{-1}$, где $A' = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ — диагональная матрица. Тогда можно показать, что

$$\det(\mathbb{1} + A) = \det(\mathbb{1} + A') = 1 + S_1(\lambda) + S_2(\lambda) + S_l(\lambda), \tag{2.103}$$

где

$$S_1(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_l = \operatorname{tr} A' = \operatorname{tr} A, \tag{2.104a}$$

$$S_2(\lambda) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}\Big[(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_l)^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \ldots -$$

$$-\lambda_i^2\Big] = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} A')^2 - \operatorname{tr}(A')^2\right] = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2\right], \quad (2.104\text{б})$$

$$S_3(\lambda) = \frac{1}{3}\left[(\operatorname{tr} A)^3 - 3\operatorname{tr} A^2 \operatorname{tr} A + 2\operatorname{tr} A^3\right] \quad (2.104\text{в})$$

и т. д. Для определения когомологического класса, называемого характером Черна, используется инвариантная функция $\operatorname{tr}(\exp A)$.

Перейдем теперь непосредственно к характеристическим классам. Мы ограничимся рассмотрением классов Черна для главного расслоения P над многообразием M без границы ($\partial M = 0$) и со структурной группой $G \subset GL(k;\mathbb{C})$ (группа невырожденных комплексных матриц размером $k \times k$). Определим с помощью инвариантного полинома $\det(\mathbb{1} + A)$ форму на M, называемую *тотальной формой Черна*, по следующей формуле

$$c(P) = \overline{\det\left(\mathbb{1} + \frac{i}{2\pi}\Omega\right)}, \quad (2.105)$$

где Ω — форма кривизны формы связности в $P(M, G)$, а черта напоминает о том, что мы должны все слагаемые в разложении типа (2.103), (2.104) спроектировать на базу M. Иногда тотальную форму Черна обозначают $c(\Omega)$. Используя (2.103) и (2.104), получаем

$$c(P) = 1 + c_1(P) + c_2(P) + \ldots, \quad (2.106)$$

где $c_i(P)$ являются $2j$-формами на M, определяемыми инвариантными полилинейными отображениями из $I^i(G)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
c_1(P) &= \frac{i}{2\pi}\overline{\operatorname{tr}\Omega};\\
c_2(P) &= \frac{-1}{8\pi^2}(-\overline{\operatorname{tr}\Omega\wedge\Omega} + \overline{\operatorname{tr}\Omega}\wedge\overline{\operatorname{tr}\Omega}); \qquad (2.107)\\
c_3(P) &= \frac{-i}{48\pi^2}\left[\overline{\operatorname{tr}\Omega}\wedge\overline{\operatorname{tr}\Omega}\wedge\overline{\operatorname{tr}\Omega} - 3(\overline{\operatorname{tr}\Omega\wedge\Omega})\wedge\overline{\operatorname{tr}\Omega}) + 2\overline{\operatorname{tr}\Omega\wedge\Omega\wedge\Omega}\right]
\end{aligned}$$

и т. д. (ср. (2.104)). Положим по определению $c_0(P) = 1$. Форма $c_j(P) \in D^{2j}(M)$ называется j-*ой формой Черна*. Очевидно, что $c_j(P) = 0$, если $2j > n = \dim M$. Поэтому сумма (2.106) конечна. Как было показано выше, $c_j(P)$ есть замкнутая форма и j-ые формы Черна, отвечающие различным связностям данного расслоения, принадлежат одному когомологическому классу в $H^{2j}(M)$, называемому *j-ым характеристическим классом* Черна.

Значение интеграла по всему многообразию M от формы, представляющей соответствующий класс Черна или образованной внешним произведением нескольких форм Черна, называется *числом Черна* расслоения $P(M,G)$. Числа Черна являются топологическими характеристиками расслоения. Замечательным является тот факт, что эти числа являются целыми.

Например, при $n=4$ мы имеем два числа Черна:

$$
\begin{aligned}
C_2(P) &= \int_M c_2(P), \\
C_1^2(P) &= \int_M c_1(P)\wedge c_1(P).
\end{aligned}
\tag{2.108}
$$

Пример 1. Расслоение магнитного монополя $P\left(S^2,U(1)\right)$. В этом случае

$$c(P) = 1 + \frac{i}{2\pi}\overline{\Omega},$$

$c_0(P)=1$, $c_1(P)=\left(i/2\pi\right)\overline{\Omega}$ и неэквивалентные расслоения характеризуются первым числом Черна

$$C_1(P) = \int_{S^2} c_1(P) = \frac{i}{2\pi}\int_{S^2}\overline{\Omega}. \tag{2.109}$$

Пример 2. Инстантонные расслоения $P\left(S^4,SU(2)\right)$. Форма кривизны может быть представлена в виде $\Omega=\tau^a\Omega^a$, где τ^a — матрицы Паули и $\operatorname{tr}\tau^a\tau^b=2\delta_{ab}$. Тотальный класс Черна имеет вид

$$c(P) = 1 + \frac{1}{8\pi^2}\overline{\operatorname{tr}\Omega\wedge\Omega} = 1 + \frac{1}{4\pi^2}\overline{\Omega^a}\wedge\overline{\Omega^a},$$

так как $\overline{\operatorname{tr}\Omega} = (\operatorname{tr}\tau^a)\overline{\Omega^a} = 0$. Следовательно,

$$c_0(P)=1,\quad c_1(P)=0,\quad c_2(P)=\frac{1}{8\pi^2}\overline{\operatorname{tr}\Omega\wedge\Omega}.$$

Здесь расслоения характеризуются вторым числом Черна

$$C_2(P) = \int_{S^4} c_2(P) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{S^4}\overline{\operatorname{tr}\Omega\wedge\Omega}. \tag{2.110}$$

Более подробное изложение теории характеристических классов можно найти, например, в [КН], [ДНФ], [ЕГХ].

Глава 3

Линейные и римановы связности

В настоящей главе мы будем изучать линейные и римановы связности, которые широко используются в общей теории относительности. Эти связности требуют особого рассмотрения потому, что в соответствующих главных расслоенных пространствах возникают новые, только им присущие структуры. Сначала мы дадим общее описание линейных связностей в главном расслоении, а потом соотнесем его с эквивалентным описанием в базе в терминах ковариантных производных, которое является стандартным в общей теории относительности.

§ 1. Линейные связности

Пусть M есть дифференцируемое многообразие с $\dim M = n$, и $L(M)$, как обычно, обозначает расслоение линейных реперов над M, т. е. главное расслоенное пространство с базой M и структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$ (см. пример 5 § 7 главы 2). Линейной связностью в M называется связность в расслоении линейных реперов $L(M)$.

Если в $L(M)$ задана линейная связность Γ, то ей стандартным образом можно поставить в соответствие формы связности и кривизны, ω и $\Omega = D\omega$, со значениями в алгебре Ли $gl(n, \mathbb{R})$ структурной группы (см. § 10 главы 2). Однако оказывается, что специфика расслоения линейных реперов позволяет ввести еще одну 2-форму, характеризующую эту связность. Прежде чем перейти к обсуждению этой 2-формы, мы опишем 1-форму, канонически задающуюся на $L(M)$ безотносительно к связности в этом расслоении.

Напомним, что с расслоением линейных реперов $L(M)$ ассоциировано касательное расслоение $T(M)$ (пример 1 § 8 главы 2), при этом любой репер $u \in L(M)$ определяет линейный изоморфизм $u : \mathbb{R}^n \to T_{\pi(u)}M$ из типического слоя $\mathbb{R}^n$ в слой $T(M)$ над $\pi(u)$. Обозначим через u^{-1} обратное отображение, $u^{-1} : T_{\pi(u)}M \to \mathbb{R}^n$. Далее, заметим, что дифференциал π' канонической проекции в $L(M)$ отображает $T_uL(M)$ в $T_{\pi(u)}M$, $\pi' : T_uL(M) \to T_{\pi(u)}M$. Таким образом, комбинируя отображения u^{-1} и π', мы получаем в каждой точке

$u \in L(M)$ отображение $u^{-1} \circ \pi' : T_u L(M) \to \mathbb{R}^n$, т. е. 1-форму на $L(M)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Эта форма называется канонической формой для $L(M)$ и на любом векторе $X \in T_u L(M)$ может быть записана так:

$$\theta(X) = u^{-1}\left(\pi'(X)\right). \tag{3.1}$$

Легко проверить, что форма θ горизонтальна и обладает свойством

$$\Psi_a^* \theta = a^{-1} \theta, \tag{3.2}$$

где $a^{-1}\theta$ обозначает естественное левое действие $GL(n, \mathbb{R})$ на элементы $\mathbb{R}^n$ (см. пример 1 §8 главы 2). Поэтому каноническая форма θ для $L(M)$ есть тензориальная 1-форма типа $(GL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$.

Линейная связность Γ в $L(M)$ позволяет поставить в соответствие каждому вектору $\xi \in \mathbb{R}^n$ стандартное горизонтальное векторное поле $B(\xi)$, которое полностью определяется условиями

$$\omega\left(B(\xi)\right) = 0, \tag{3.3а}$$

$$\theta\left(B(\xi)\right) = \xi. \tag{3.3б}$$

Из определения (3.3) и из (3.2) следует, что для любого $a \in GL(n, \mathbb{R})$

$$\Psi_a' B(\xi) = B(a^{-1}\xi). \tag{3.4}$$

Кроме того, $B(\xi_1 + \xi_2) = B(\xi_1) + B(\xi_2)$ и при $\xi \neq 0$ поле $B(\xi)$ нигде не обращается в нуль. Это сразу видно из соотношения $\pi'(B(\xi)) = u(\xi)$, являющегося следствием определения θ (3.1), если принять во внимание, что $u : \mathbb{R}^n \to T_u L(M)$ есть линейный изоморфизм и $u(\xi) = 0$ только при $\xi = 0$.

Если $A \in gl(n, \mathbb{R})$ и A^* — соответствующее фундаментальное векторное поле, то из (2.37) и (3.4) легко получить, что

$$\left[A^*, B(\xi)\right] = B(A\xi), \tag{3.5}$$

где $A\xi$ обозначает действие матрицы $A \in gl(n, \mathbb{R})$ на $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Введем теперь в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $gl(n, \mathbb{R})$ стандартные базисы. Стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$ состоит из векторов с координатами $a_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ (единица на i-м месте), а стандартный базис A^i_j алгебры Ли $gl(n, \mathbb{R})$ состоит из матриц с компонентами $(A^i_j)^k_l = \delta^k_j \delta^i_l$. С помощью этих базисов в $L(M)$ можно построить $n^2 + n$ векторных полей: стандартные горизонтальные поля $B_i = B(a_i)$ и фундаментальные поля A^{*i}_j, которые вместе, как легко убедиться, образуют базис касательного пространства $T_u L(M)$ в каждой точке $u \in L(M)$. Принято говорить, что $n^2 + n$ векторных полей B_i, A^{*i}_j определяют абсолютный параллелизм в $L(M)$.

Рассмотрим внешний ковариантный дифференциал от θ, $\Theta = D\theta$. Вследствие (3.2) и Предложения 2.11.1 Θ есть тензориальная 2-форма на $L(M)$ типа $(GL(n,\mathbb{R}); \mathbb{R}^n)$, которая называется формой кручения линейной связности Γ.

Предложение 3.1.1. Для форм связности, кривизны и кручения, ω, Ω и Θ, линейной связности Γ в M имеют место следующие уравнения структуры:

$$\Omega(X,Y) = d\omega(X,Y) + \frac{1}{2}\left[\omega(X),\omega(Y)\right], \tag{3.6а}$$

$$\Theta(X,Y) = d\theta(X,Y) + \frac{1}{2}\left(\omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X)\right), \tag{3.6б}$$

$$X, Y \in T_uL(M).$$

Доказательство. Уравнение структуры (3.6а) было доказано в Предложении 2.11.2. Доказательство уравнения (3.6б) проводится аналогично. А именно, это уравнение нужно проверить в трех случаях, из которых нетривиален только тот случай, когда вектор X вертикален, а вектор Y горизонтален. Вследствие линейности Θ по обоим аргументам не ограничивая общности можно считать X фундаментальным векторным полем, а Y — стандартным горизонтальным полем. Выберем $A \in gl(n,\mathbb{R})$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, так, что $A^*_u = X$, $B(\xi)_u = Y$. На этих полях левая часть (3.6б) обращается в нуль, а правую часть можно преобразовать к виду

$$d\theta\left(A^*, B(\xi)\right) + \frac{1}{2}A\xi = \frac{1}{2}\left\{A^*\theta\left(B(\xi)\right) - B(\xi)\theta(A^*) - \theta\left([A^*, B(\xi)]\right)\right\} + \frac{1}{2}A\xi,$$

где мы воспользовались формулой (2.21) для внешнего дифференциала θ. Первый член в фигурных скобках исчезает вследствие постоянства функции $\theta\left(B(\xi)\right) = \xi$, второй — вследствие горизонтальности формы θ. Преобразовав коммутатор в третьем члене с помощью формулы (3.5), мы найдем, что $\frac{1}{2}\theta\left([A^*, B(\xi)]\right) = \frac{1}{2}A\xi$, т. е. правая часть уравнения (3.6б) тоже обращается в нуль. Это и доказывает второе уравнение структуры. □

Рассматривая θ как векторнозначную форму, а ω — как матричнозначную форму, структурные уравнения можно переписать в краткой форме:

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega, \tag{3.7а}$$

$$\Theta = d\theta + \omega \wedge \theta. \tag{3.7б}$$

Разлагая ω и θ по стандартным базисам в $\mathbb{R}^n$ и $gl(n,\mathbb{R})$, уравнения (3.7) можно также записать в компонентах аналогично (2.79).

Предложение 3.1.2. Для линейной связности Γ в M имеют место следующие тождества Бьянки:

$$D\Omega = 0, \tag{3.8а}$$

$$D\Theta = \Omega \wedge \theta. \tag{3.8б}$$

Доказательство. Тождество (3.8а) было доказано в Предложении 2.11.5. Применив операцию внешнего дифференцирования к уравнению (3.7б), мы получим

$$d\Theta = d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta.$$

Если от этого уравнения взять горизонтальную компоненту и заметить, что второй член при этом исчезает, то получится в точности уравнение (3.8б). □

§ 2. Ковариантное дифференцирование

Как мы выяснили в примере 2 § 8 главы 2, с расслоением линейных реперов $L(M)$ ассоциирован целый ряд векторных расслоений, а именно, тензорные расслоения $T^r_s(M)$. В соответствии с результатами § 13 главы 2 задание линейной связности в M определяет в этих расслоениях параллельный перенос, который, в свою очередь, позволяет определить операцию ковариантного дифференцирования сечений этих расслоений, т. е. соответствующих тензорных полей.

Пусть заданы линейная связность Γ в M и тензорное поле K типа (r, s), рассматриваемое как сечение расслоения $T^r_s(M)$. Аналогично рассуждениям § 13 главы 2, мы можем определить ковариантную производную от K либо вдоль кривой x_t в M, $\nabla_{\dot{x}_t} K$, либо для вектора $X \in T_x M$, $\nabla_X K$, либо для векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ на M, $\nabla_X K$. Мы сформулируем свойства операции ковариантного дифференцирования тензорных полей для последнего случая.

Предложение 3.2.1. Пусть $\mathfrak{T}$ есть алгебра тензорных полей на M, и $X, Y \in \mathfrak{T}^1_0(M) = \mathfrak{X}(M)$. Тогда ковариантное дифференцирование имеет следующие свойства:

(1) $\nabla_X : \mathfrak{T}(M) \to \mathfrak{T}(M)$, причем $\nabla_X \left(\mathfrak{T}^r_s(M)\right) \subset \mathfrak{T}^r_s(M)$;

(2) ∇_X перестановочно со свертыванием;

(3) $\nabla_{X+Y} = \nabla_X + \nabla_Y$;

(4) $\nabla_X f = Xf$;

(5) $\nabla_{fX} K = f \nabla_X K$ для любой функции $f \in \mathfrak{T}^0_0(M) = \mathfrak{F}(M)$.

Доказательство. Как мы установили в § 13 главы 2, параллельный перенос в векторном расслоении есть линейный изоморфизм слоя на слой. При этом из того, что действие $GL(n,\mathbb{R})$ на слое $T(V)=\sum\limits_{r,s=0}^{\infty} T^r_s(V)$ является продолжением действия этой группы на V, следует, что параллельный перенос сохраняет тип тензора и перестановочен со свертыванием. Последнее и влечет за собой (1) и (2). Свойства (3)–(5) доказаны в Предложении 2.13.1. □

Замечание. Из общей теории известно (см. [KH]), что операция дифференцирования тензорных полей полностью определяется ее действием на алгебре функций $\mathfrak{F}(M)$ и множестве векторных полей $\mathfrak{X}(M)$. Поскольку действие ∇_X на $\mathfrak{F}(M)$ у нас задано, определение дифференцирования ∇_X эквивалентно заданию его действия на векторных полях, которое, в соответствии с Предложениями 2.13.1 и 3.2.1 для любых $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ имеет вид

$$\nabla_X(Y+Z)=\nabla_XY+\nabla_XZ, \tag{3.9а}$$
$$\nabla_{X+Y}Z=\nabla_XZ+\nabla_YZ, \tag{3.9б}$$
$$\nabla_{fX}Y=f\nabla_XY, \tag{3.9в}$$
$$\nabla_XfY=f\nabla_XY+(Xf)Y. \tag{3.9г}$$

Таким образом, любое отображение $(X,Y)\to\nabla_XY$, удовлетворяющее этим условиям, есть ковариантное дифференцирование относительно некоторой линейной связности в M.

§ 3. Тензоры кривизны и кручения

В § 1 мы определили формы кривизны и кручения, Ω и Θ, линейной связности в $L(M)$. Специфика расслоения линейных реперов позволяет построить на базе M геометрические объекты, точно характеризующие эти формы.

Пусть $X,Y,Z\in T_xM$, $u\in\pi^{-1}(x)$, и $\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}\in T_uL(M)$ такие, что $\pi'(\overline{X})=X$, $\pi'(\overline{Y})=Y$, $\pi'(\overline{Z})=Z$. Определим кручение T и кривизну R линейной связности соотношениями

$$T(X,Y)=u\left(2\Theta(\overline{X},\overline{Y})\right), \tag{3.10а}$$
$$R(X,Y)Z=u\left(\left(2\Omega(\overline{X},\overline{Y})\right)\theta(\overline{Z})\right). \tag{3.10б}$$

В последнем соотношении действие $\Omega(\overline{X},\overline{Y})$ на $\theta(\overline{Z})$ следует понимать как умножение матрицы из $gl(n,\mathbb{R})$ на вектор из $\mathbb{R}^n$.

Из тензориальности форм Ω и Θ и из свойства отображения u следует, что эти определения корректны, т. е. не зависят от выбора точки $u\in\pi^{-1}(x)$ и векторов $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, проекции которых на базу фиксированы. Отметим, что кривизну $R(X,Y)$ следует понимать как линейное преобразование пространства T_xM.

Кручение и кривизну можно записать через ковариантную производную относительно рассматриваемой линейной связности.

Предложение 3.3.1. Кручение T и кривизна R могут быть представлены в виде

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \tag{3.11а}$$

$$R(X,Y)Z = \left[\nabla_X, \nabla_Y\right] Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{3.11б}$$

где X, Y, Z — векторные поля на M.

Доказательство. Докажем сначала (3.11а). Пусть X^*, Y^* — лифты полей X, Y и $u \in \pi^{-1}(x)$. По определению (3.10)

$$T(X,Y) = u\left(2\Theta(X_u^*, Y_u^*)\right) =$$
$$= u\left(X_u^*\theta(Y_u^*) - Y_u^*\theta(X_u^*) - \theta([X_u^*, Y_u^*])\right), \tag{3.12}$$

где мы воспользовались формулой (2.21). Заметим, что по определению θ (3.1) $\theta(Y_u^*) = u^{-1}(Y)$, т.е. $\theta(Y_u^*) \in \mathbb{R}^n$ есть эквивариантное отображение из $L(M)$ в $\mathbb{R}^n$, отвечающее Y как сечению касательного расслоения. В соответствии с Предложением 2.13.2

$$u\left(X_u^*\theta(Y_u^*)\right) = u\left(D\left(\theta(Y_u^*)\right)(X_u^*)\right) = \nabla_X Y. \tag{3.13}$$

Наконец, вспоминая, что $h([X_u^*, Y_u^*]) = ([X,Y])_u^*$, из (3.12) получаем (3.11а).

Формула (3.11б) доказывается аналогично. Преобразовав $\Omega(X^*, Y^*)$ с помощью формулы (2.21), приведем (3.10б) к виду

$$R(X,Y)Z = u\left(\omega([X_u^*, Y_u^*])\theta(Z^*)\right). \tag{3.14}$$

Используя свойство θ (3.2) и инвариантность лифта Z^* относительно действия структурной группы, а также проводя тривиальные преобразования, получим

$$\omega\left([X^*, Y^*]\right)\theta(Z^*) = v\left([X^*, Y^*]\right)\theta(Z^*) =$$
$$= \left([X^*, Y^*] - h([X^*, Y^*])\right)\theta(Z^*) = \left([X^*, Y^*] - ([X,Y])^*\right)\theta(Z^*).$$

Подставляя это в (3.14) и учитывая (3.13), приходим к формуле (3.11б). □

Для форм Ω и Θ в расслоении $L(M)$ имеют место тождества Бьянки (3.8). Подставляя в них векторные поля X^*, Y^*, Z^*, являющиеся лифтами полей X, Y, Z, их можно переписать как тождества для кривизны R и кручения T (см. [KH]).

Мы определили кривизну и кручение линейной связности безотносительно к какому-либо базису в касательном пространстве, т.е. инвариантным образом. Если же на некотором открытом множестве $U \subset M$ задан подвижный репер $\{X_i\}$, то можно перейти к привычной компонентной записи тензоров кривизны и кручения.

Напомним, что подвижный репер на открытом множестве $U \subset M$ — это упорядоченный набор из n векторных полей X_i на U, значения которых в каждой точке $u \in U$ образуют репер. Дуальный к $\{X_i\}$ подвижный корепер будем обозначать $\{E^i\}$; он определяется условием $E^i(X_k) = \delta^i_k$. Если в U заданы локальные координаты $\{x^i\}$, то определен координатный репер $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$; дуальным к нему корепером, очевидно, будет $\{dx^i\}$. Отметим, что коммутатор полей подвижного репера в общем случае может быть отличен от нуля. Такой базис векторных полей называется неголономным, в отличие от голономного координатного базиса, для которого коммутатор полей всегда исчезает.

Рассмотрим кривизну и кручение на векторных полях подвижного репера $\{X_i\}$ и определим их компоненты R^l_{kij} и T^k_{ij} соотношениями

$$T(X_i, X_j) = \sum_k T^k_{ij} X_k, \tag{3.15а}$$

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{kij} X_l. \tag{3.15б}$$

Разлагая ковариантную производную $\nabla_i = \nabla_{X_i}$ базисных полей по тому же базису

$$\nabla_i X_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} X_k, \tag{3.15в}$$

получим набор величин Γ^k_{ij}, которые называются компонентами или символами Кристофеля линейной связности. Подставляя (3.15) в (3.11), нетрудно получить выражения для компонент тензоров кривизны и кручения через символы Кристофеля и структурные функции C^k_{ij} неголономного базиса, определенные соотношениями $[X_i, X_j] = C^k_{ij} X_k$.

Введение подвижного репера на открытом множестве $U \subset M$ задает над U сечение расслоения $L(M)$, $\sigma : U \to L(M)$, которое каждой точке $u \in U$ ставит в соответствие репер в этой точке, $\sigma(U) = \{X_i\}|_u$. Легко показать, что обратный образ формы θ относительно этого сечения есть

$$\sigma^*\theta = \sum_i a_i E^i. \tag{3.16а}$$

Обратные образы форм Θ, Ω и ω выражаются через определенные в (3.15) компоненты по формулам:

$$\sigma^*\Theta = \sum_i T^i a_i = \sum \left(\frac{1}{2} T^i_{kl} E^k \wedge E^l\right) a_i, \tag{3.16б}$$

$$\sigma^*\Omega = \sum R^i_j A^j_i = \sum \left(\frac{1}{2} R^i_{jkl} E^k \wedge E^l\right) A^j_i, \tag{3.16в}$$

$$\sigma^*\omega = \sum \overline{\omega}^i_j A^j_i = \sum \left(\Gamma^i_{kj} E^k\right) A^j_i. \tag{3.16г}$$

Эти соотношения следуют из определения соответствующих форм и компонент. Докажем, например, формулу (3.16г).

Используя результаты Предложения 2.13.2, имеем:

$$(\sigma(u))^{-1} \nabla_i X_j = \left(D\theta\left(\sigma' X_j\right)\right)\left(\sigma' X_i\right), \tag{3.17}$$

где мы приняли во внимание, что отвечающее полю $\sigma' X_j$ эквивариантное отображение есть $\theta(\sigma' X_j)$. По определению символов Кристофеля, в левой части (3.17) получаем $(\sigma(u))^{-1}\nabla_i X_j = \Gamma^k_{ij} a_k$. В соответствии с (3.16а), $\theta(\sigma' X_j) = a_j$. Поэтому в правой части (3.17) получаем $\omega(\sigma' X_i) a_j = \overline{\omega}(X_i)^k_j a_k$. Сравнивая выражения в обеих частях, приходим к формуле (3.16г), у которой в качестве аргумента формы взят вектор X_i.

В физической литературе часто используются уравнения для форм T^i и R^i_k, определенных в (3.16). Эти уравнения получаются взятием обратного образа относительно сечения σ структурных уравнений (3.7) и имеют вид

$$T^i = dE^i + \overline{\omega}^i_j \wedge E^j, \tag{3.18а}$$

$$R^i_j = d\overline{\omega}^i_j + \overline{\omega}^i_k \wedge \overline{\omega}^k_j. \tag{3.18б}$$

Аналогичным образом из (3.8) можно получить тождества Бьянки для этих форм.

§ 4. Римановы связности

Важный класс линейных связностей образуют римановы связности, которые можно задавать на многообразии с помощью (псевдо)римановой метрики. Прежде чем переходить к описанию этих связностей, остановимся кратко на различных определениях метрики, которые нам понадобятся в дальнейшем.

В дифференциальной геометрии можно дать несколько эквивалентных определений метрики. Так, (псевдо) риманову метрику g на M можно определить как невырожденное скалярное произведение g_x в касательном пространстве T_xM, дифференцируемое по x в том смысле, что для любых дифференцируемых векторных полей X, Y на M функция $g(X,Y)$ дифференцируема. Эквивалентно, метрика определяется как симметричное ковариантное тензорное поле степени 2, невырожденное в каждой точке $x \in M$, т.е. из $g(X,Y) = 0$ для всех $X \in T_xM$ следует $Y = 0$. Как мы выяснили в § 9 главы 2, тензорные поля являются сечениями соответствующих тензорных расслоений, и существует однозначное соответствие между сечениями ассоциированных расслоений и эквивариантными отображениями из главного расслоения в типический слой. Поэтому метрику g на M можно рассматривать как нигде не обращающееся в нуль эквивариантное отображение

$$g : L(M) \to S(V^* \otimes V^*), \quad V = \mathbb{R}^n, \tag{3.19}$$

где S означает симметризацию тензорного произведения. Первые два определения оказываются удобными при рассмотрении римановой связности в M, последнее наиболее адекватно при рассмотрении соответствующей связности в $L(M)$.

Напомним еще основные свойства псевдоримановой метрики g, заданной на n-мерном многообразии M. Скалярное произведение g_x в каждой точке $x \in M$ определяет линейный изоморфизм $I : T_xM \to T_x^*M$, задаваемый соотношением

$$\langle I(X), Y\rangle = g_x(X, Y), \quad X, Y \in T_xM, \tag{3.20}$$

(где мы использовали обозначения § 3 главы 2 для внутреннего произведения элементов из T_xM и T_x^*M). Этот изоморфизм определяет скалярное произведение в сопряженном пространстве T_x^*M, которое мы обозначим также g_x и которое задается формулой

$$g_x(\alpha, \beta) = g_x\left(I^{-1}(\alpha), I^{-1}(\beta)\right), \quad \alpha, \beta \in T_x^*M. \tag{3.21}$$

Пусть $\{l_i\}$ — подвижный ортонормальный репер, т. е. набор n линейно независимых векторных полей, заданных на некотором открытом множестве $U \subset M$ и удовлетворяющих условиям

$$g(l_i, l_k) = \varepsilon_i\delta_{ik} = \eta_{ik}, \tag{3.22}$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$ и $\operatorname{sign} g = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ есть сигнатура метрики g. Для дуального ему корепера $\{e^i\}$, $e^i(l_k) = \delta_k^i$ вследствие (3.20) и (3.21) также имеем

$$g\left(e^i, e^k\right) = \varepsilon_i\delta^{ik} = \eta^{ik}. \tag{3.23}$$

Как уже отмечалось в § 3 гл. 2 структура Риманова многообразия, в случае когда оно ориентируемо, позволяет ввести выделенную n-форму, являющуюся элементом объема dv соответствующим метрике g. Она согласована с ортонормальным репером и определяется как

$$dv = e^1 \wedge e^2 \wedge \ldots \wedge e^n, \tag{3.24}$$

что является естественным обобщением элемента объема в (2.22а).

Если в U заданы также локальные координаты $\{x^i\}$, то ковариантные и контравариантные компоненты метрики g определяются как

$$g_{ik} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right), \tag{3.25а}$$

$$g^{ik} = g\left(dx^i, dx^k\right). \tag{3.25б}$$

Определим компоненты отображения I, $I\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = I_{ik}dx^k$. Из (3.20) сразу следует, что $I_{ik} = g_{ik}$ и $g_{ik}g^{kl} = \delta^l_i$. Таким образом, в координатной записи операции I и I^{-1} суть операции опускания и подъема индексов. Ясно также, что эти операции можно продолжить на всю тензорную алгебру.

Ортогональный корепер $\{e^i\}$ можно разложить по координатному кореперу $\{dx^i\}$, $e^i = e^i_k dx^k$, причем из (3.23) следует, что $(\det e^i_k)^2 = |\det g_{ik}| = |g|$. Подставив это разложение в (3.24), получим стандартную формулу для элемента объема

$$dv = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Если D — компактное подмногообразие в M и k_D — характеристическая функция D (т.е. $k_D \equiv 1$ на D и $k_D \equiv 0$ вне D), то определим интеграл от функции f по D как $\int\limits_M f k_D\, dv$, а объем D как $\mathrm{vol}(D) = \int\limits_M k_D\, dv$. Если M компактно, то объем M равен $\mathrm{vol}(M) = \int\limits_M dv$.

Формулы (3.22) и (3.25а) для компонент метрики можно обратить и получить выражение для метрического тензора через кореперы $\{e^i\}$ и $\{dx^i\}$. Оно имеет вид

$$g = \sum_{i,k} \eta_{ik} e^i \otimes e^k = g_{ik} dx^i \otimes dx^k.$$

Из него легко найти связь между компонентами метрики в ортонормальном репере и в координатном базисе:

$$g_{ik} = \eta_{lm} e^l_i e^m_k.$$

Как мы уже упоминали в §3 главы 2, псевдориманова метрика g модифицирует вид операции Ходжа. А именно, для p-формы ω эта операция при наличии метрики определяется так: возьмем отвечающее ω антисимметричное контравариантное тензорное поле степени p, $I^{-1}(\omega)$ и свернем его с n-формой объема dv. В результате получим $(n-p)$-форму, которую и принято обозначать $*\omega$. Компоненты формы $*\omega$ выражаются через компоненты ω по формуле

$$(*\omega)_{j_1\ldots j_{n-p}} = \frac{1}{p!}\,\omega^{i_1\ldots i_p}\sqrt{|g|}\;\varepsilon_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_{n-p}}. \tag{3.26а}$$

Легко проверить, что в отличие от случая евклидова пространства, $*(*\omega) = \varepsilon(-1)^{p(n-p)}\omega$, где $\varepsilon = \prod\limits_i \varepsilon_i$ (см. (3.22)). Отметим еще, что формула (3.26) эквивалентна следующему закону преобразования базисных p-форм $dx^{i_1}\wedge\ldots dx^{i_p}$:

$$*\left(dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\ldots\wedge dx^{i_p}\right) = \frac{1}{(n-p)!}\varepsilon^{i_1\ldots i_p}{}_{j_1\ldots j_{n-p}}dx^{j_1}\wedge\ldots dx^{j_{n-p}}. \tag{3.26б}$$

Вернемся теперь к рассмотрению линейных связностей. Пусть в $L(M)$ задана связность Γ и на M задана (псевдо) риманова метрика g, которую мы будем понимать как функцию на $L(M)$ (3.19). Линейная связность Γ называется метрической, если метрика g параллельна относительно этой связности. В соответствии с Предложением 2.13.2 для функции g на $L(M)$ это условие можно записать как

$$Dg = 0. \tag{3.27}$$

Оказывается, расслоение $L(M)$ слишком велико для описания метрической связности, т. е. эта связность редуцируема к связности в некотором подрасслоении $L(M)$, которое мы сейчас опишем.

Ясно, что ненулевой элемент η пространства $S(V^*\otimes V^*)$, $V=\mathbb{R}^n$, можно представить как симметричную матрицу. Такую матрицу можно привести к диагональному виду преобразованием $GL(n,\mathbb{R}) : \eta \to A^T\eta A$. Если η принадлежит области значений метрики g, рассматриваемой как отображение $g : L(M)\to S(V^*\otimes V^*)$, то в соответствии с (3.22) ее можно привести к виду $\eta = \mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots\varepsilon_n)$.

Рассмотрим подмножество в $L(M)$, определяемое следующим образом:

$$O(M) = \{u\in L(M),\ g(u)=\eta\}. \tag{3.28}$$

Поскольку множество преобразований, оставляющих η инвариантной, есть ортогональная группа, которую мы будем обозначать $O(\eta)$, $O(M)$ есть главное расслоенное пространство с базой M и структурной группой $O(\eta)$, которое называется расслоением ортонормальных реперов псевдориманова многообразия M.

Предложение 3.4.1. Пусть Γ — связность в $L(M)$, g — метрика на M и $O(M)\subset L(M)$ есть редуцированное подрасслоение, определяемое с помощью g. Связность Γ редуцируема к связности в $O(M)$ тогда и только тогда, когда она метрическая.

Доказательство. Пусть Γ редуцируема к связности в $O(M)$. Тогда любая горизонтальная кривая с началом в $O(M)$ лежит в $O(M)$, следовательно, любая горизонтальная кривая в $L(M)$ имеет вид $v_t = \Psi_a u_t$, где $u_t \in O(M)$, $a \in GL(n, \mathbb{R})$. Это означает, что $g(v_t)$ постоянно вдоль любой горизонтальной кривой в $L(M)$, и, следовательно, $Dg = 0$.

Обратно, если Γ — метрическая связность, то из $Dg = 0$ следует, что она постоянна вдоль любой горизонтальной кривой. В этом случае, по определению $O(M)$ (3.28), горизонтальная кривая с началом в $O(M)$ лежит в $O(M)$, т. е. связность Γ редуцируема к связности в $O(M)$. □

Итак, мы выяснили, что для задания метрической связности в $L(M)$ достаточно задать некоторую связность в расслоении ортонормальных реперов $O(M)$. Из всех возможных метрических связностей наиболее важной является связность с нулевым кручением, которая называется римановой связностью или связностью Леви-Чивита.

Предложение 3.4.2. Каждое псевдориманово многообразие допускает единственную метрическую связность с нулевым кручением.

Доказательство. Нам нужно показать, что в $L(M)$ существует единственная связность, удовлетворяющая условиям

$$Dg = 0, \tag{3.29а}$$

$$D\theta = d\theta + \omega \wedge \theta = 0. \tag{3.29б}$$

Построим соответствующее g расслоение ортонормальных реперов $O(M)$. Метрическая связность в $L(M)$ однозначно определяется связностью в этом расслоении. В $O(M)$ (3.29а) выполняется тривиально, поэтому остается показать, что уравнение (3.29б) имеет в $O(M)$ единственное решение.

Пусть $(,)$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, отвечающее $\eta = \mathrm{diag}(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n)$ и $X, Y, Z \in TO(M)$. Рассматривая (3.29б) на векторах X, Y и взяв скалярное произведение с $\theta(Z)$, получим:

$$\big(\theta(Z), \omega(Y)\theta(X)\big) - \big(\theta(Z), \omega(X)\theta(Y)\big) = 2\,\big(\theta(Z), d\theta(X,Y)\big). \tag{3.30}$$

Заметим, что поскольку ограничение ω на $O(M)$ принимает значения в алгебре Ли ортогональной группы $O(\eta)$, а скалярное произведение $(,)$ $O(\eta)$-инвариантно, $\big(\theta(Z), \omega(Y)\theta(X)\big) = -\big(\omega(Y)\theta(Z), \theta(X)\big)$ для любых X, Y, Z. Поэтому, циклически переставляя X, Y, Z в (3.30), складывая два уравнения и вычитая третье, получим

$$\big(\theta(Z), \omega(Y)\theta(X)\big) = \big(\theta(X), d\theta(Y,Z)\big) + \big(\theta(Y), d\theta(Z,X)\big) + \big(\theta(Z), d\theta(X,Y)\big).$$

Это явное выражение для формы связности ω и доказывает существование единственной связности с нулевым кручением в $O(M)$, а значит и единственность метрической связности с нулевым кручением в $L(M)$. □

Рассмотренное построение римановой связности как связности в расслоении линейных реперов практически не используется в физических приложениях. Это связано с тем, что так построенные связности трудно сравнивать для различных метрик, поскольку каждой метрике отвечает свое расслоение ортонормальных реперов. Для физических приложений более удобным оказывается описание римановых связностей в терминах ковариантных производных. Как отмечено в замечании после Предложения 3.2.1, для полного определения линейной связности достаточно задать отвечающую ей ковариантную производную на множестве векторных полей.

Предложение 3.4.3. Для любых векторных полей X, Y, Z на M ковариантная производная $\nabla_X Y$ относительно римановой связности, порожденной метрикой g, задается уравнением

$$2g\left(\nabla_X Y, Z\right) = Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) + \\ + g\left([X,Y],Z\right) + g\left([Z,X],Y\right) + g\left(X,[Z,Y]\right). \quad (3.31)$$

Доказательство. В соответствии с Предложением 3.4.2, риманова связность полностью определяется уравнениями (3.29). Результаты Предложений 2.13.2 и 3.3.1 позволяют переписать эти уравнения в базе так:

$$\nabla_X g = 0, \quad (3.32а)$$

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0. \quad (3.32б)$$

Применяя операцию ковариантного дифференцирования к функции $g(X,Y)$ и учитывая (3.32а), получим

$$Xg(Y,Z) = g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g\left(Y, \nabla_X Z\right).$$

Проводя в этом равенстве циклическую перестановку X, Y, Z, складывая полученные равенства с соответствующими знаками и учитывая (3.32б), получим (3.31). □

Поскольку кручение римановой связности по определению исчезает, эта связность характеризуется только кривизной. А именно, для нее можно определить ковариантное тензорное поле степени 4, называемое тензором римановой кривизны:

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g\left(R(X_3, X_4)\, X_2, X_1\right).$$

Это тензорное поле обладает целым рядом симметрий (см. [KH]), которые следуют из определений кривизны (3.10б) и (3.11б), а также из тождества Бьянки для формы кривизны (3.8а).

Если в окрестности $U \subset M$ введены локальные координаты $\{x^i\}$, то рассмотренные здесь формулы можно записать в привычной компонентной форме. Так, условие метричности связности (3.29а) и (3.32а) сведется к

$$\nabla_i g_{kl} = g_{kl;i} = 0.$$

Требование исчезновения кручения (3.29б) и (3.32б) означает просто симметричность символов Кристофеля, $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$. В этом случае формула (3.31) приведет к стандартному выражению для символов Кристофеля римановой связности через метрику:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}(\partial_k g_{lm} + \partial_l g_{km} - \partial_m g_{kl}).$$

С их помощью из (3.11б) получается стандартное выражение для компонент тензора кривизны. Компоненты тензора римановой кривизны выражаются через эти компоненты по формуле $R_{ijkl} = g_{im} R^m_{jkl}$. Сворачивая тензор римановой кривизны с метрическим тензором, можно построить тензор Риччи $R_{ik} = g^{lm} R_{limk}$ и скалярную кривизну $R = g^{ik} R_{ik}$. Отметим в заключение, что формулы (3.11) и (3.31) являются наиболее общими формулами для тензора кривизны и ковариантной производной римановой связности. Они позволяют получить выражения для символов Кристофеля и тензора кривизны и в неголономном (некоординатном) базисе.

Глава 4

Геометрическое описание калибровочных полей и полей материи

§ 1. Калибровочное поле как связность в главном расслоении

В главе 1 изложен стандартный подход к описанию калибровочных полей и взаимодействий. В рамках этого подхода калибровочное поле является векторной функцией в пространстве-времени M со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ калибровочной группы G. При этом конфигурации A, отличающиеся на калибровочное преобразование, считаются физически эквивалентными. Поэтому для того, чтобы учитывать только физически различные конфигурации (это, например, важно при вычислении функциональных интегралов), необходимо выбрать представитель на каждой орбите калибровочной группы, т. е. фиксировать калибровку.

Наше рассмотрение будем в основном чисто классическим. Мы не будем рассматривать функциональный интеграл и диаграммы Фейнмана, а изложим основные идеи, лежащие в основе геометрического подхода, установим его связь с обычным подходом и переформулируем основные свойства калибровочных теорий на геометрическом языке. Некоторые замечания о квантовой теории в рамках геометрического подхода будут приведены в § 4.

Исходным пунктом геометрического подхода (см. [КП], [ДМ], [Тр1], [ДВ], [ЕГС], [НС]) является понимание того, что задание калибровочной теории с калибровочной группой G (будем считать ее компактной) следует начинать не с выбора лагранжиана калибровочных полей на многообразии M ($\dim M = n$), играющем роль пространства-времени, а с выбора геометрии главного расслоения $P(M, G)$, объединяющего в себе пространственно-временные и калибровочные симметрии теории. Вместо задания конфигурации калибровочного поля на M в обычном подходе здесь первичным является глобальное задание связности Γ в P

или формы связности ω связности Г. Только после этого можно приступить к конструированию лагранжиана теории из геометрических величин (форма связности ω, форма кривизны Ω), руководствуясь при этом как физическими принципами, так и математическими соображениями.

В § 1–6 мы будем рассматривать чисто калибровочные теории (без полей материи) со стандартным лагранжианом

$$L = -\frac{1}{4e^2} \operatorname{tr} \Omega \wedge *\Omega. \tag{4.1}$$

При этом действие задается формулой

$$S = \frac{1}{\operatorname{vol}(G)} \int\limits_{\Omega} L = \frac{1}{4e^2 \operatorname{vol}(G)} \|\Omega\|^2 \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{4e^2 \operatorname{vol}(G)} (\Omega, \Omega) = -\frac{1}{4e^2 \operatorname{vol}(G)} \int\limits_{P} \operatorname{tr} \Omega \wedge *\Omega. \tag{4.2}$$

Здесь e — калибровочная константа связи, $\operatorname{vol}(G)$ — объем калибровочной группы G, а след берется в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Мотивировка такого выбора L и S будет приведена в § 3 и § 4.

Как этот подход соотносится со стандартным? Прежде всего мы от формы связности ω перейдем к 1-форме на базе M (на пространстве-времени). Для этого выберем локальное (если $P(M, G)$ нетривиально) сечение s над окрестностью $U \subset M$, $s : U \to P$ и определим форму $A^{(s)}$ на U со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$:

$$A^{(s)} = s^* \omega. \tag{4.3}$$

Если $\{x^\mu\}$ — локальные координаты в U и $\xi_\mu = \partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ — локальный базис векторных полей, то калибровочное поле в стандартном подходе (как $\mathfrak{g}$-значная функция на U) равно:

$$A_\mu^{(s)}(x) = A_x^{(s)}(\xi_\mu), \quad x \in U. \tag{4.4}$$

Так как в выбранных координатах любая 1-форма может быть записана в виде разложения по базису $\{dx^\mu\}$, то

$$A^{(s)} = A_\mu^{(s)}(x) dx^\mu. \tag{4.5}$$

Очевидно, что функции $A_\mu^{(s)}(x)$ могут быть еще разложены по базису $\{Q_\alpha\}$ в алгебре $\mathfrak{g}$: $A_\mu^{(s)}(x) = A_\mu^{(s)\alpha}(x) Q_\alpha$, где $A_\mu^{(s)\alpha}(x)$ — обычные числовые функции на U, а α — калибровочный (цветовой) индекс.

Пусть, как и выше, Ω — форма кривизны формы связности ω. С помощью выбранного сечения s мы можем определить 2-форму на U

$$F^{(s)} = s^* \Omega. \tag{4.6}$$

В локальной координатной системе

$$F_x^{(s)} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{(s)}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{4.7а}$$

$$F_{\mu\nu}^{(s)}(x) = F_x^{(s)}(\xi_\mu, \xi_\nu). \tag{4.7б}$$

Установим связь между формами $F^{(s)}$ и $A^{(s)}$ и их компонентами $F_{\mu\nu}^{(s)}$ и $A_\mu^{(s)}$. Для этого воспользуемся структурным уравнением (2.74):

$$F^{(s)} = s^*\Omega = s^* D\omega = s^*\left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]\right) =$$
$$= d(s^*\omega) + \frac{1}{2}\left[s^*\omega, s^*\omega\right] = dA^{(s)} + \frac{1}{2}\left[A^{(s)}, A^{(s)}\right], \tag{4.7в}$$

так как s осуществляет изоморфизм из $U \subset M$ в $s(U) \subset P$. Вычислим теперь $dA^{(s)}$, используя свойства операции внешнего дифференцирования и (4.5)

$$dA_x^{(s)}(\xi_\mu, \xi_\nu) = d\left(A_\rho^{(s)}(x) dx^\rho\right)(\xi_\mu, \xi_\nu) = \left(dA_\rho^{(s)}(x) \wedge dx^\rho\right)(\xi_\mu, \xi_\nu) =$$
$$= \partial_\tau A_\rho^{(s)}(x)\left(dx^\tau \wedge dx^\rho\right)(\xi_\mu, \xi_\nu) = \frac{1}{2}\partial_\tau A_\rho^{(s)}(x)\left(\delta_\mu^\tau \delta_\nu^\rho - \delta_\nu^\tau \delta_\mu^\rho\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu^{(s)}(x) - \partial_\nu A_\mu^{(s)}(x)\right).$$

Так как $\left[A_x^{(s)}, A_x^{(s)}\right](\xi_\mu, \xi_\nu) = \left[A_\mu^{(s)}(x), A_\nu^{(s)}(x)\right]$, то

$$F_{\mu\nu}^{(s)}(x) = \partial_\mu A_\nu^{(s)}(x) - \partial_\nu A_\mu^{(s)}(x) + \left[A_\mu^{(s)}(x), A_\nu^{(s)}(x)\right]. \tag{4.8}$$

Чтобы величины $A_\mu^{(s)}(x)$ и $F_{\mu\nu}^{(s)}$ можно было отождествить с компонентами калибровочного поля и тензора напряженности, нужно выяснить, чему в геометрическом подходе отвечают калибровочные преобразования, и показать, что $A_\mu^{(s)}(x)$ и $F_{\mu\nu}^{(s)}$ преобразуются при этом по формулам (1.7) и (1.10). Мы сделаем это в §2, а здесь будем считать этот факт установленным.

Остановимся теперь более подробно на локальных представлениях для формы связности ω и формы кривизны Ω. По определению главного расслоения (см. §5 главы 2) $\pi^{-1}(U) \simeq U \times G$, т.е. $\chi(p) = (\pi(p), \varphi(p))$ для $p \in \pi^{-1}(U)$, где χ — диффеоморфизм, а φ — отображение из $\pi^{-1}(U)$ в G. Как и в §10 главы 2, выберем в качестве базиса векторных полей в $\pi^{-1}(U)$ фундаментальные векторные поля A_α^*, $\alpha = 1, 2, \ldots, k = \dim G$, ($\{A_\alpha\}$ — базис в $\mathfrak{g}$, $A_\alpha^* = \sigma(A_\alpha)$, где σ — изоморфизм $\mathfrak{g}$ на пространство касательное к слою, индуцированный правым действием Ψ_a группы G на слое) и поля $\bar{\xi}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, n = \dim M$, которые мы сейчас определим. В дальнейшем в этом параграфе мы будем отождествлять $p \in \pi^{-1}(U)$ с $\chi(p) = (x, g) \in U \times G$. В каждой точке $p = (x, a) \in \pi^{-1}(U)$ введем вектор $(\bar{\xi}_\mu)_{(x,a)}$, касающийся подмногообразия $U \times \{a\} \subset \pi^{-1}(U)$ (a — фиксированный элемент из G) такой, что $\pi'(\bar{\xi}_\mu) = \xi_\mu$. Другими словами, $(\bar{\xi}_\mu)_{(x,a)} = s'_a \xi_\mu$, где отображение $s_a : x \in M \to (x, a) \in U \times \{a\} \subset \pi^{-1}(U)$ — сечение в $\pi^{-1}(U)$, а ξ_μ — векторное поле, введенное выше (см. (4.4)). Тогда любое векторное поле $L \in \mathfrak{X}\left(\pi^{-1}(U)\right)$ представимо в виде

$$L = C^\alpha A^*_\alpha + C^\mu \bar{\xi}_\mu. \tag{4.9}$$

В частности, горизонтальный лифт ξ^*_μ поля ξ_μ запишем следующим образом:

$$\xi^*_\mu = \bar{\xi}_\mu - B^\alpha_\mu(x, g) A^*_\alpha, \tag{4.10}$$

(ср. (2.68)). Задание связности Γ (т. е. горизонтальных подпространств) осуществляется заданием функций $B^\alpha_\mu(x, g)$.

По определению формы связности $\omega(A^*_\alpha) = A_\alpha$. Так как этому же свойству удовлетворяет форма $\omega_0 = \varphi^* \theta$, где отображение $\varphi : \pi^{-1}(U) \to G$ входит в определение диффеоморфизма χ, а θ — каноническая левоинвариантная 1-форма на группе G, то

$$\omega = \omega_0 + Q_\mu d\bar{x}^\mu.$$

Здесь $(d\bar{x}^\mu)_{(x,g)}$ — ковектор, дуальный к $(\bar{\xi}_\mu)_{(x,g)} : d\bar{x}^\mu(\bar{\xi}_\nu) = \delta^\mu_\nu$. Из условия $\omega(\xi^*_\mu) = 0$ и (4.10) получаем, что

$$\omega = \omega_0 + B, \tag{4.11а}$$

$$B_{(x,g)} \equiv B_\mu(x, g) d\bar{x}^\mu \equiv B^\alpha_\mu(x, g) A_\alpha d\bar{x}^\mu. \tag{4.11б}$$

Отметим также, что форму ω_0 часто записывают в виде

$$\omega_0 = \varphi(p)^{-1} d\varphi(p); \tag{4.11в}$$

если группа G реализована матрицами, то эта запись имеет буквальный смысл.

Для того, чтобы выяснить характер зависимости $B_\mu(x, g)$ от $g \in G$, вычислим величину $(\Psi^*_a \omega)_{(x,g)}(x)$. Согласно Предложению 2.10.1 она должна равняться $\mathrm{ad}(a^{-1}) \omega_{(x,g)}(x)$. Для формы ω_0 это свойство вытекает из Предложения 2.6.1. Это свойство будет выполняться для формы ω (4.11), если $\mathfrak{g}$-значная функция $B_\mu(x, g)$ удовлетворяет условию:

$$B_\mu(x, g) = \mathrm{ad}(g^{-1}) B_\mu(x), \tag{4.12}$$

где мы обозначили $B_\mu(x) \equiv B_\mu(x,e)$ (e — единица группы). Если мы выберем в $\pi^{-1}(U)$ сечение s_a, то соответствующая 1-форма на M, задающая калибровочное поле, равна

$$A_x^{(s_a)} = (s_a^*\omega)_x = (s_a^*\omega_0)_x + B_\mu(x,a)(s_a^* d\overline{x}^\mu)_x = B_\mu(x,a)dx^\mu, \qquad (4.13а)$$

так как $s_a^*(d\overline{x}^\mu)_{(x,a)} = dx^\mu$, и, следовательно,

$$B_\mu(x,a) = A_\mu^{(s_a)}(x). \qquad (4.13б)$$

Вычислим теперь форму кривизны Ω. Используя (4.11а, б) получаем

$$d\omega = d\omega_0 + d(\mathrm{ad}(g^{-1})A_\alpha)B_\mu^\alpha(x)d\overline{x}^\mu + \mathrm{ad}(g^{-1})\, dB.$$

Учитывая, что каноническая форма на группе G $\theta = g^{-1}\,dg$, легко убедиться в том, что

$$d\big(\mathrm{ad}(g^{-1})A_\alpha\big) = -\big[\theta, \mathrm{ad}(g^{-1})A_\alpha\big], \qquad (4.14)$$

где $g \in G$.

Подставляя выражение для $d\omega$ в структурное уравнение (2.74) и используя (4.14) и уравнение Маурера—Картана (2.46а), находим, что

$$\Omega_{(x,g)} = \mathrm{ad}(g^{-1})\left\{dB_{(x,g)} + \frac{1}{2}\left[B_{(x,g)}, B_{(x,g)}\right]\right\} = \frac{1}{2}\,\Omega_{\mu\nu}(x,g)d\overline{x}^\mu \wedge d\overline{x}^\nu, \qquad (4.15а)$$

$$\Omega_{\mu\nu}(x,g) = \mathrm{ad}(g^{-1})\Omega_{\mu\nu}(x), \qquad \Omega_{\mu\nu}(x) \equiv \Omega_{\mu\nu}(x,e). \qquad (4.15б)$$

Аналогично (4.7в), (4.8)

$$\Omega_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x) + \left[B_\mu(x), B_\nu(x)\right]. \qquad (4.16)$$

Очевидно, что компоненты тензора напряженности

$$F_{\mu\nu}^{(s_a)}(x) = \mathrm{ad}(a^{-1})\Omega_{\mu\nu}(x) = \Omega_{\mu\nu}(x,a). \qquad (4.17)$$

Пусть на многообразии P задана метрика γ и индексы $M, N, \ldots$ пробегают значения $1, 2, \ldots, D = \dim P = \dim M + \dim G$. Запишем, как в § 4 главы 3, метрику γ с помощью ортонормированного корепера $\{e^A\}$

$$\gamma = \nu_{AB}\left(e^A \otimes e^B\right), \qquad (4.18)$$

где ν — плоская метрика и $A, B = 1, 2, \ldots, D$ — внутренние индексы. Условимся считать, что первые n значений индекса A, $A = \mu = 1, 2, \ldots, n = \dim M$, нумеруют координаты вдоль подмногообразий вида $U \times \{a\} \subset \pi^{-1}(U)$, а следующие k значений $A = n + \alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, k = \dim G$ — координаты вдоль слоя. Предположим, что сигнатура метрики следующая: $\operatorname{sign}\gamma_{MN} = (-,+,+,\dots,+)$, т. е. ν_{AB} — диагональная матрица с $\nu_{11} = -1$, $\nu_{AA} = 1$ при $A \geqslant 2$. Форму кривизны (4.15) можно записать в виде

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_{A,B=1}^{n} \Omega_{AB} e^A \wedge e^B. \tag{4.19}$$

Вычислим форму $*\Omega$ степени $(D-2)$, дуальную в смысле Ходжа к Ω. По формулам (3.26) имеем

$$*\Omega = \frac{1}{2}\sum_{A,B=1}^{n} \Omega_{AB} * \left(e^A \wedge e^B\right) =$$
$$= \frac{1}{2(D-2)!}\sum_{A,B=1}^{n} \Omega_{AB}\varepsilon^{AB}_{c_3c_4\dots c_D} e^{c_3} \wedge e^{c_4} \wedge \dots \wedge e^{c_p}. \tag{4.20}$$

Тогда лагранжиан (4.1) равен

$$L = -\frac{1}{4e^2}\operatorname{tr}\Omega \wedge *\Omega = \frac{1}{8e^2}\sum_{A,B,C,D}^{n} \operatorname{tr}\Omega_{AB}(x,g)\Omega_{CD}(x,g)\nu^{AC}\nu^{BD} dv_P, \tag{4.21}$$

где dv_P — инвариантный элемент объема в P. Из (4.15б) следует, что выражение (4.21) не зависит от g. Так как $dv_P = d\mu_G dv_M$, dv_M — инвариантный элемент объема в M, $d\mu_G$ — инвариантная мера интегрирования группы G и

$$\operatorname{vol}(G) = \int_G d\mu_G,$$

то вклад в действие (4.2) от подрасслоения $\pi^{-1}(U) \subset P$, $U \subset M$, равен

$$S_{\pi^{-1}(U)} = \frac{1}{8e^2}\int_U \operatorname{tr}\left(\Omega_{\mu\nu}(x,g)\Omega^{\mu\nu}(x,g)\right) dv_M. \tag{4.22}$$

В силу соотношения (4.17) получаем, что

$$S_{\pi^{-1}(U)} = \frac{1}{8e^2}\int \operatorname{tr}\left(F^{(s_a)}_{\mu\nu}(x)F^{(s_g)\mu\nu}(x)\right) dv_M, \tag{4.23}$$

т. е. мы получаем стандартное выражение (1.11) для действия в калибровочной теории Янга—Миллса.

Как уже обсуждалось в § 14 главы 2, могут существовать топологически неэквивалентные главные расслоения $P \to M$ с одной и той же базой M и одной и той же структурной (калибровочной) группой G. Пусть мы имеем расслоения со структурными группами $GL(k,\mathbb{C})$

или $U(k)$. Такие расслоения характеризуются классами Черна. Выясним, как эти классы выражаются через напряженность калибровочного поля $F^{(s)}_{\mu\nu}(x)$ в $U \subset M$. Напомним, что характеристические классы задаются с помощью мультилинейных инвариантных отображений $f \in I^k(G)$. Форма $\overline{f}(\Omega)$, являющаяся проекцией $2k$-формы $f(\Omega)$, согласно Предложению 2.14.1 определяется так

$$\overline{f}(\Omega)(X_1,\ldots,X_{2k}) = f(\Omega)\left(L_1,\ldots,L_{2k}\right).$$

Здесь $X_{ix} \in T_x(M)$, $L_{ip} \in T_p(P)$, где $\pi(p) = x$ и $\pi' L_{ip} = X_{ix}$. Выберем в качестве точки p точку $s(x)$, где $s : M \to P$ — сечение над U, а в качестве $L_{is(x)}$ — касательный вектор $s' X_{ix}$. Это возможно, так как $\pi \circ s = id_U$ — тождественное преобразование и $\pi' s' X_i = X_i$. Получаем, что

$$\begin{aligned}\overline{f}(\Omega)(X_1,\ldots,X_{2k}) &= f(\Omega)\left(s'X_1,\ldots,s'X_{2k}\right) = s^* f(\Omega)\left(X_1,\ldots,X_{2k}\right) = \\ &= f\left(s^*\Omega\right)\left(X_1,\ldots,X_{2k}\right) = f\left(F^{(s)}\right)\left(X_1,\ldots,X_{2k}\right),\end{aligned} \tag{4.24}$$

где мы воспользовались мультилинейностью отображения f. Тогда, например, в случае $\dim M = n = 4$ интеграл (2.108), определяющий второе число Черна $C_2(P)$, разбивается на сумму интегралов по окрестностям $U \subset M$ и вклад каждой из таких окрестностей равен

$$C_2(P)_U = \int\limits_U c_2(P) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_U \left[\operatorname{tr}\left(F^{(s)} \wedge F^{(s)}\right) - \operatorname{tr} F^{(s)} \wedge \operatorname{tr} F^{(s)}\right]. \tag{4.25}$$

В частности, если P — инстантонное расслоение $P\left(S^4, SU(2)\right)$ (см. пример 8 из § 7 главы 2), то

$$C_2(P)_U = \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_U dv_M \operatorname{tr}\left(F^{(s)}_{\mu\nu}\widetilde{F}^{(s)\mu\nu}\right), \tag{4.26}$$

где U — одна из окрестностей, покрывающих S^4, а $\widetilde{F}^{(s)}_{\mu\nu}$ есть тензор дуальный к $F^{(s)}_{\mu\nu}$, т.е. компоненты 2-формы $*F^{(s)}$ на базе:

$$*F^{(s)} = \frac{1}{2}\widetilde{F}^{(s)}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{4.27а}$$

$$\widetilde{F}^{(s)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{(s)\rho\sigma}. \tag{4.27б}$$

Таким образом, калибровочная теория в пространстве-времени M с калибровочной группой G, как говорят, разбивается на множество секторов, каждому из которых отвечает расслоение $P(M,G)$ с определенными характеристическими числами, и для полного изучения всей теории надо рассмотреть все секторы. Стандартная теория возмущений, как правило, описывает поля в секторе с тривиальными характеристическими числами.

§ 2. Калибровочные преобразования

Пусть U — окрестность в M, $s : U \to P(M,G)$ — локальное сечение, а $A^{(s)}$ и $F^{(s)}$ формы на U, определенные по ω и Ω с помощью этого сечения. Предположим теперь, что в U задано также другое сечение t. Выясним вопрос, как связаны между собой 1-формы $A^{(s)}$ и $A^{(t)}$ и 2-формы $F^{(s)}$ и $F^{(t)}$. Очевидно, что существует отображение (калибровочная функция) $g : U \to G$ такое, что

$$t(x) = \Psi_{g(x)} s(x). \tag{4.28}$$

Возьмем касательный вектор $X \in T_x(M)$, $x \in U$ и обозначим $\overline{X}_{s(x)}$ и $\xi_{g(x)}$ касательные векторы в $\pi^{-1}(U)$ и G: $\overline{X}_{s(x)} = s'X \in T_{s(x)}(P)$, $\xi_{g(x)} = g'X \in T_{g(x)}(G)$, где g' — производная отображения $g : U \to G$. Пусть $A \in \mathfrak{g}$ — левоинваринтное векторное поле на G, которое равно $g'X$ в точке $g(x)$. Введем отображение $\chi : P \times G \to P$ вида

$$\chi(p,g) = \Psi_g p, \quad p \in P, \quad g \in G.$$

Мы рассмотрим это отображение в точке $\big(s(x), g(x)\big)$ и определим связанные с ним отображения $\chi_1 : P \to P$ и $\chi_2 : G \to P$ так:

$$\chi_1(p') = \chi\left(p', g(x)\right) = \Psi_{g(x)} p', \quad p' \in P; \tag{4.29а}$$

$$\chi_2(a') = \chi\left(s(x), a'\right) = \Psi_{a'} s(x), \quad a' \in G. \tag{4.29б}$$

Тогда сечение $t(x) = \chi\left(s(x), g(x)\right)$. Обозначим через $Z_{(s(x),g(x))}$ касательный вектор из $T_{(s(x),g(x))}(P \times G)$, соответствующий $\left(\overline{X}_{s(x)}, \xi_{g(x)}\right) \in T_{s(x)}(P) \oplus T_{g(x)}(G)$ (см. § 4 главы 2). Согласно Предложению 2.4.1 (формула Лейбница)

$$t'(X) = \chi'(Z) = \chi_1'(\overline{X}) + \chi_2'(\xi). \tag{4.30}$$

Из (4.29) следует, что $\chi_1' = \Psi_{g(x)}'$, а χ_2' есть гомоморфизм $\sigma_{s(x)}$ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в касательное пространство к слою в точке $s(x) \in P$ (см. § 5 главы 2), т. е.

$$\chi_2'(\xi) = \sigma_{s(x)} \xi = (\xi^*)_{s(x)} \tag{4.31}$$

есть фундаментальное векторное поле. Вычисляя форму ω от обеих частей (4.30), получаем

$$\omega(t'X) = \omega\left(\Psi_{g(x)}' s'X\right) + \omega(\xi^*) = \operatorname{ad}\left(g(x)^{-1}\right)\omega(s'X) + \xi, \tag{4.32}$$

где мы воспользовались результатами Предложения 2.10.1. По определению левоинвариантной канонической 1-формы группы G мы имеем:

$$\theta(g'X) = \theta(\xi) = \xi. \tag{4.33}$$

Учитывая (4.3), (4.32) и (4.33), получаем окончательное соотношение между формами, определенными с помощью различных сечений:

$$A^{(t)} = t^*\omega = \operatorname{ad}\left(g(x)^{-1}\right)A^{(s)} + g^*\theta. \tag{4.34}$$

При матричной реализации группы G форма $g^*\theta$ может быть записана в виде (см. (2.48))

$$g^*\theta = g(x)^{-1}dg(x), \tag{4.35}$$

где $g(x)$ — значение калибровочной функции $g : U \to G$ в точке $x \in U$. По определению $dg(X) = X(g)$ для $X \in \mathfrak{X}(M)$. Компоненты калибровочного поля $A_\mu^{(s)}$ и $A_\mu^{(t)}$ связаны следующим соотношением:

$$A_\mu^{(t)}(x) = \operatorname{ad}\left(g(x)^{-1}\right) A_\mu^{(s)}(x) + g(x)^{-1}\partial_\mu g(x), \tag{4.36}$$

т. е. мы получили формулу для калибровочного преобразования поля (1.7).

Так как касательный вектор $\chi_2'(\xi)$ в (4.30) вертикален (см. (4.31)), а форма кривизны Ω является тензориальной формой типа $(\operatorname{ad}, \mathfrak{g})$ (см. § 11 главы 2), то формулы для 2-формы $F^{(s)}$ и компонент напряженности $F_{\mu\nu}^{(s)}$, аналогичные (4.34) и (4.36), имеют вид

$$F_x^{(t)} = \operatorname{ad}\left(g(x)^{-1}\right)F_x^{(s)}, \tag{4.37а}$$

$$F_{\mu\nu}^{(t)} = \operatorname{ad}\left(g(x)^{-1}\right)F_{\mu\nu}^{(s)}(x). \tag{4.37б}$$

Наши рассуждения показывают, что выбор локального сечения $s : U \to P$ соответствует фиксации калибровки для полей, заданных на U в стандартном подходе. Переход от одного сечения к другому эквивалентен калибровочному преобразованию и переходу к другой калибровке. Невозможность выбора в общем случае глобального сечения в $P(M,G)$ означает невозможность задания калибровочного поля на всем пространстве-времени M глобально; мы вынуждены ограничиться локальными заданиями калибровочных полей на каждой карте многообразия M. В то же время форма связности ω определена глобально, во всем расслоении $P(M,G)$. Она содержит в себе всю информацию о калибровочной конфигурации в теории и является исходным объектом (наряду с расслоением $P(M,G)$, отражающим структуру теории) в геометрическом подходе к описанию калибровочных теорий. Именно связность ω, а не калибровочное поле $A_\mu^{(s)}$, наиболее удобна при изучении глобальных (геометрических, топологических и др.) свойств теории, так как позволяет проводить анализ во внутренних терминах, не прибегая к локальным координатным системам.

Заметим, что формулы (4.34), (4.36), (4.37) полностью согласуются (с учетом свойства (4.12)) с выражениями для форм $A^{(s_a)}$ и $F^{(s_a)}$ (4.13) и (4.17), полученными для сечений специального вида: $s_a(x) = (x, a) \in \pi^{-1}(U)$.

Пусть теперь имеются две окрестности U_α и U_β в M, в каждой из которых форма связности представима в виде (4.11). Выясним, как связаны между собой функции $B_\mu^{(\alpha)}$ и $B_\mu^{(\beta)}$, характеризующие ω над окрестностями U_α и U_β соответственно. Если χ_α и χ_β — диффеоморфизмы, задающие локально структуру прямого произведения на $P(M, G)$, т.е. $\chi_\alpha(p) = \big(\pi(p), \varphi_\alpha(p)\big)$ для $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ и $\chi_\beta(p) = \big(\pi(p), \varphi_\beta(p)\big)$ для $p \in \pi^{-1}(U_\beta)$, то $\varphi_\beta(p) = \varphi_{\beta\alpha}(x)\varphi_\alpha(p)$, где $p \in \pi^{-1}\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$, $x = \pi(p)$, $\varphi_{\beta\alpha}(x)$ — функция перехода (см. § 6 главы 2). Таким образом, для формы связности ω в $\pi^{-1}\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ мы имеем два представления:

$$\omega = \varphi_\alpha(p)^{-1} d\varphi_\alpha(p) + \operatorname{ad}\left(\varphi_\alpha(p)^{-1}\right) B_\mu^{(\alpha)}(x) d\bar{x}^\mu =$$

$$= \varphi_\beta(p)^{-1} d\varphi_\beta(p) + \operatorname{ad}\left(\varphi_\beta(p)^{-1}\right) B_\mu^{(\beta)}(x) d\bar{x}^\mu,$$

(см. (4.11), (4.12)). Так как ω однозначно определена на P, то, используя связь между φ_α и φ_β, получаем, что

$$B_\mu^{(\beta)}(x) = \operatorname{ad}\left(\varphi_{\beta\alpha}(x)\right) B_\mu^{(\alpha)}(x) + \varphi_{\beta\alpha}(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1},$$

($x \in U_\alpha \cap U_\beta$), т.е. $B_\mu^{(\alpha)}$ и $B_\mu^{(\beta)}$ связаны калибровочным преобразованием.

Изучим теперь калибровочные преобразования для форм связности. Обозначим через $\mathfrak{A}$ пространство связностей главного расслоения $P(M, G)$. Для дальнейшего нам понадобится понятие вертикального автоморфизма расслоения, которое мы сейчас определим. Отображение $v_\rho : P \to P$ называется вертикальным автоморфизмом, если оно удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\pi\left(v_\rho(p)\right) = \pi(p)$;

2) v_ρ коммутирует с Ψ_a, т.е. $\Psi_a v_\rho(p) = v_\rho(\Psi_a p)$, для любого $a \in G$.

Из 1) следует, что v_ρ сдвигает точку вдоль слоя. Очевидно, что вертикальный автоморфизм v_ρ можно характеризовать отображением $\rho : P \to G$ таким, что

$$v_\rho(p) = \Psi_{\rho(p)} p, \tag{4.38а}$$

где Ψ_a обозначает действие структурной группы, причем из условия 2) следует, что

$$\rho(\Psi_a p) = a^{-1}\rho(p) a = S(a^{-1})\rho(p), \quad a \in G, \tag{4.38б}$$

т.е. ρ — эквивариантное отображение. Вертикальный автоморфизм v_ρ порождает преобразование в $\mathfrak{A}$ стандартным образом, а именно, если $\omega \in \mathfrak{A}$, то $\left(v_\rho^* \omega\right)_p (X) = \omega_{p'}\left(v'_\rho X\right) \in \mathfrak{A}$, где $X \in T_p(P)$, $p \in P$, $p' = v_\rho(p)$.

Чтобы вычислить $v_\rho^*\omega$, выясним сначала, чему равен касательный вектор $\left(v'_\rho X\right)_{p'}$. Пусть $f \in \mathfrak{F}(P)$, X — векторное поле, порождающее локальную однопараметрическую группу преобразований φ_t. В соответствии с Предложением 2.4.2 поле $v'_p X$ порождается $v_p \circ \varphi_t \circ v_\rho^{-1}$. Имеем следующую цепочку равенств:

$$\left(v'_\rho X\right)_{p'}(f) = \frac{d}{dt} f\left(v_p \circ \varphi_t \circ v_\rho^{-1}\left(v_\rho(p)\right)\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f\left(\left(v_\rho \circ \varphi_t\right)(p)\right)\Big|_{t=0} =$$
$$= \frac{d}{dt} f\left(\Psi_{\rho(\varphi_t(p))}\varphi_t(p)\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f\left(\Psi_{\rho(\varphi_t(p))} p\right)\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} f\left(\Psi_{\rho(p)}\varphi_t(p)\right)\Big|_{t=0} =$$
$$= \frac{d}{dt} f\left(\Psi_{\rho(p)^{-1}\rho(\varphi_t(p))}\Psi_{\rho(p)} p\right)\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} f\left(\Psi_{\rho(p)} \circ \varphi_t \circ \Psi_{\rho(p)^{-1}} \circ \Psi_{\rho(p)} p\right)\Big|_{t=0}.$$

Итак,

$$\left(v'_\rho X\right)_{p'}(f) = \frac{d}{dt} f\left(\Psi_{\rho(p)^{-1}\rho(\varphi_t(p))} v_\rho(p)\right)\Big|_{t=0} + \\ + \frac{d}{dt} f\left(\left(\Psi_{\rho(p)} \circ \varphi_t \circ \Psi_{\rho(p)^{-1}}\right)\left(v_\rho(p)\right)\right)\Big|_{t=0}. \tag{4.39}$$

Обозначим первое слагаемое в правой части равенства через $Y_{p'}(f)$, $p' = v_\rho(p)$. Векторное поле Y порождается однопараметрической группой преобразований $\Psi_{\rho(p)^{-1}\rho(\varphi_t(p))}$ и, следовательно, равно $Y = \sigma(A)$ (см. § 6 главы 2), где A — элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующий однопараметрической подгруппе $\rho^{-1}(p)\rho(\varphi_t p)$ в G. Тогда можно записать:

$$A = \frac{d}{dt}\rho^{-1}(p)\rho(\varphi_t p)\Big|_{t=0} = \rho^{-1}(p) X_p(\rho) = (\rho^{-1} d\rho)_p(X) \equiv (\rho^* \theta)_p(X). \tag{4.40}$$

Второе слагаемое в (4.39) есть не что иное, как

$$\left(\Psi'_{\rho(p)} X\right)_{p'}(f).$$

Вычисляя форму ω от обеих частей равенства (4.39), получаем

$$\left(v_\rho^*\omega\right)_p(X) = \omega_{p'}\left(v'_\rho X\right) = \omega_{p'}\left(Y_{p'}\right) + \omega_{p'}\left(\Psi'_{\rho(p)} X\right) = A + \mathrm{ad}\left(\rho(p)^{-1}\right)\omega_p(X).$$

Учитывая (4.40), приходим к окончательной формуле:

$$v_\rho^*\omega = \mathrm{ad}(\rho^{-1})\omega + \rho^{-1} d\rho, \tag{4.41}$$

которую обычно называют формулой калибровочного преобразования для форм. Как это преобразование соотносится с калибровочным преобразованием для форм на базе, описывающих калибровочные поля? Пусть U — локальная окрестность в M, s — сечение в $\pi^{-1}(U)$.

Если $\omega, \omega' \in \mathfrak{A}$ и ω' и ω связаны калибровочным преобразованием v_ρ, $\omega' = v_\rho^* \omega$, то мы можем построить два поля на базе:

$$A^{(s)} = s^* \omega, \quad A'^{(s)} = s^* \omega'.$$

Однако имеют место соотношения

$$A'^{(s)} = s^* \omega' = s^* \circ v_\rho \omega = \left(v_\rho \circ s\right)^* \omega = t^* \omega = A^{(t)},$$

где новое сечение t определяется формулой $t = v_\rho \circ s$. Следовательно, в соответствии с (4.34) $A^{(s)}$ и $A'^{(s)}$ связаны калибровочным преобразованием, соответствующим переходу от сечения s к сечению $t = v_\rho \circ s$ в $\pi^{-1}(U)$.

Отметим в заключение параграфа, что локальное описание калибровочных преобразований как переходов от одних сечений к другим, является более общим, чем описание калибровочных преобразований как вертикальных автоморфизмов, так как в общем случае может не существовать глобальных вертикальных автоморфизмов, характеризуемых отображением (4.38).

§ 3. Электродинамика Максвелла

В педагогических целях в качестве первого шага в изучении калибровочных теорий в рамках геометрического подхода целесообразно рассмотреть частный случай электродинамики Максвелла. В качестве главного расслоения, на котором задается теория, мы возьмем тривиальное расслоение $P = M^4 \times U(1)$, где M^4 — пространство Минковского, т. е. пространство $\mathbb{R}^4$ с псевдоримановой метрикой, характеризуемой в декартовых координатах диагональным метрическим тензором $\eta_{\mu\nu} : \eta_{00} = -1$, $\eta_{ii} = 1$. Условимся считать, что индексы $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; $i, j = 1, 2, 3$ и x^0 — временная координата. Пусть группа $G = U(1)$ реализуется элементами вида $g = \exp(i\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Так как в расслоении P существует глобальное сечение, скажем $s(x)$, то рассмотрение теории в P эквивалентно ее рассмотрению в базе M^4 в терминах форм $A^{(s)}$ и $F^{(s)}$. Мы условимся дополнительно выделять мнимую единицу из этих форм так, что закон калибровочного преобразования для $A^{(s)}$ в соответствии с (4.36) будет иметь вид:

$$A_x^{(s')} = A_x^{(s)} + d\alpha(x), \tag{4.42}$$

где $\alpha(x)$ — вещественнозначная функция на M^4, задающая калибровочную функцию $g(x) = \exp(i\alpha(x))$. Согласно (4.37) 2-форма $F^{(s)}$ в нашем случае калибровочно инвариантна. В дальнейшем значок (s) мы будем опускать. В соответствии с (4.4) и (4.7)

$$A_x = A_\mu(x)dx^\mu, \tag{4.43а}$$

$$F_x = (dA)_x = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x)dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{4.43б}$$

Напряженности электрического E_i и магнитного B_i полей входят в 2-форму F следующим образом:

$$F_x = E_i(x)dx^i \wedge dx^0 + \frac{1}{2}B_i\varepsilon_{ijk}dx^j \wedge dx^k. \tag{4.43в}$$

Для дальнейшего нам потребуется несколько новых определений. Пусть M некоторое псевдориманово пространство, а $\omega \in D^r(M)$ и $\mu \in D^{r-1}(M)$ — некоторые формы. Введем операцию δ, сопряженную к внешнему дифференцированию, следующим образом

$$(\omega, d\mu) \equiv \int\limits_M \omega \wedge *d\mu = \int\limits_M \delta\omega \wedge *\mu = (\delta\omega, \mu), \tag{4.44}$$

где как и в (2.24) скобки (,) обозначают внутреннее произведение форм на M. Из (4.44) ясно, что $\delta : D^r(M) \to D^{r-1}(M)$. Нетрудно показать, что если $\omega \in D^r(M)$, то

$$\delta\omega = \varepsilon(-1)^{nr+n+1} * d(*\omega), \tag{4.45а}$$

$$\delta\delta\omega = 0, \tag{4.45б}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n$ — произведение факторов, задающих сигнатуру метрики на M: $\operatorname{sign}\gamma = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ (см. § 4 главы 3) и $n = \dim M$. Так же как и в случае внешнего дифференцирования, действие операции δ на формы сводится к стандартным операциям тензорного исчисления на коэффициенты этих форм (задача 4.3). Определим теперь лапласиан (оператор Лапласа)

$$\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d,$$

где мы учли, что $dd = 0$ и $\delta\delta = 0$. Очевидно, что $\Delta : D^r(M) \to D^r(M)$. Форма ω называется гармонической, если $\Delta\omega = 0$. Так как

$$(\omega, \Delta\omega) = (\omega, d\delta\omega) + (\omega, \delta d\omega) = (\delta\omega, \delta\omega) + (d\omega, d\omega),$$

то условие гармоничности формы равносильно условиям замкнутости ($d\omega = 0$) и ко-замкнутости ($\delta\omega = 0$) этой формы.

Вернемся теперь к электродинамике. Введем 1-форму

$$j_x = j_i(x)dx^i + \rho(x)dx^0, \tag{4.46}$$

где $\mathbf{j}(x)$ и $\rho(x)$ играют роль плотности тока и плотности заряда соответственно. Нетрудно показать (задача 4.3), что уравнения

$$\delta F = -j, \tag{4.47а}$$

$$dF = 0 \tag{4.47б}$$

(последнее из них есть тождество Бьянки (2.78) в случае абелевой группы G) сводятся к стандартным уравнениям Максвелла на $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = +\rho, \qquad \partial_0\mathbf{E} - \operatorname{rot}\mathbf{B} = \mathbf{j}, \tag{4.48а}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \partial_0\mathbf{B} + \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \tag{4.48б}$$

Из уравнения (4.47а) и свойства (4.45б) следует, что

$$\delta^2 F = -\delta j = -*d(*j) = 0, \tag{4.49}$$

где 3-форма $*j$ в локальном базисе имеет вид

$$(*j)_x = -\rho(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{1}{6}\varepsilon_{i\mu\nu\rho}j_i(x)dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho. \tag{4.50}$$

Тождество (4.49) эквивалентно уравнению непрерывности для тока в стандартном подходе:

$$-\partial_0\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{4.51}$$

Покажем, как из (4.49) в случае, когда ток $\mathbf{j} = 0$, следует закон сохранения заряда. Пусть D — некоторый объем в трехмерном пространстве. Возьмем четырехмерное подмногообразие $V \subset M^4$, представляющее собой цилиндр, у которого ось и образующие параллельны временной оси, а верхние и нижние основания суть многообразия D, отвечающие моментам времени $x^0 = t_1$ и $x^0 = t_2$; обозначим эти основания D_1 и D_2. Используя теорему Стокса (2.101), представление (4.50) и тождество (4.49), получаем:

$$0 = \int\limits_V d(*j) = -\int\limits_{\partial V} \rho(x)\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 =$$

$$= -\int\limits_{D_2} \rho(x)\,d\mathbf{x} + \int\limits_{D_1} \rho(x)\,d\mathbf{x} = -Q(t_2) + Q(t_1),$$

где $Q(t_2)$ и $Q(t_1)$ — заряды внутри D_2 и D_1 соответственно.

Сделаем еще два замечания о свойствах формы F.

1) Если 1-форма $j = 0$, то из (4.47) следует, что $\delta F = dF = 0$ и форма F является одновременно замкнутой и ко-замкнутой. Следовательно, $\Delta F = 0$, т. е. F — гармоническая 2-форма.

2) Пусть $M = \mathbb{R}^n$. Тогда, согласно лемме Пуанкаре (см. § 14 главы 2), только из условия замкнутости формы F (4.47б) следует, что она является точной, т. е. существует форма $A \in D^1(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$F = dA.$$

Другими словами, в этом случае всегда существует вектор-потенциал $A_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, соответствующий 1-форме $A = A_i dx^i$. Отметим, что эта форма определена с точностью до внешнего дифференциала df функции f на $\mathbb{R}^n$.

Вернемся теперь к электродинамике и обсудим вопрос о выборе лагранжиана и действия. Сначала рассмотрим случай чистой электродинамики, когда отсутствуют поля материи. В рамках геометрического подхода лагранжиан должен представлять собой форму четвертой степени на $M = M^4$, построенную из A и F и форм, полученных из них с помощью операций $*$, d, δ.

Из физических соображений лагранжиан должен быть калибровочно-инвариантным и содержать часть, квадратичную по A, которая отвечает свободному лагранжиану. Так как для электродинамики форма F калибровочно-инвариантна, то лагранжиан должен строиться из F и $*F$. Нетрудно проверить, что существует лишь две 4-формы, удовлетворяющие перечисленным выше требованиям:

$$\mu_1 = F \wedge *F, \tag{4.52а}$$

$$\mu_2 = F \wedge F. \tag{4.52б}$$

Эти формы отвечают двум инвариантам электродинамики $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ и $\mathbf{EB}$:

$$\mu_1 = -(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3;$$
$$\mu_2 = -2\mathbf{EB}\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Форма μ_2 является точной:

$$\mu_2 = F \wedge F = dA \wedge dA = d(A \wedge dA) + A \wedge ddA = d(A \wedge dA) \tag{4.53}$$

и не может служить лагранжианом теории, так как приводит к поверхностным членам в действии. Действительно, интеграл от μ_2 по многообразию M сводится к интегралу по ∂M, который равен нулю, если, как обычно, предполагается, что компоненты $A_\mu(x)$ формы A достаточно быстро убывают на бесконечности. Следовательно, лагранжиан чистой электродинамики пропорционален μ_1 (ср. (4.1), (4.2), (4.21)–(4.23)).

Пусть теперь в теории имеются поля материи, порождающие сохраняющийся ток j. Единственной 4-формой, описывающей взаимодействие электромагнитного поля с током линейное по полю, является форма

$$\mu_3 = A \wedge *j = *A \wedge j.$$

Полное действие теории имеет вид:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{M^4} F \wedge *F + \int\limits_{M^4} *A \wedge j. \tag{4.54}$$

Калибровочная инвариантность второго слагаемого в действии вытекает из следующей цепочки равенств

$$\int\limits_{M^4} *(A + d\alpha) \wedge j = \int\limits_{M^4} *A \wedge j + \int\limits_{M^4} *d\alpha \wedge j = \int\limits_{M^4} *A \wedge j + \int\limits_{M^4} *\alpha \wedge \delta j$$

и уравнения непрерывности тока (4.49). Можно показать, что уравнение (4.47а) получается при варьировании действия (4.54) (задача 4.5).

§ 4. Неабелевы калибровочные теории

В этом параграфе мы вначале обсудим свойства классической неабелевой калибровочной теории в рамках геометрического подхода. Схема рассмотрения будет аналогична схеме предыдущего параграфа. В качестве главного расслоения, на котором задана теория, возьмем $P = M^4 \times G$, где M^4 — пространство Минковского, а G — калибровочная группа. Очевидно, что рассмотрение будет справедливым и для нетривиальных расслоений $P(M, G)$ при условии, что мы работаем в локальной окрестности $U \subset M$. Глобальные свойства калибровочных теорий для некоторых нетривиальных расслоений будут изучаться в следующих параграфах. Итак, в нашем случае, так же как и в предыдущем параграфе, анализ можно проводить в терминах форм $A^{(s)}$ и $F^{(s)}$ (см. (4.4) и (4.7)) на базе; значок (s) при этом будем опускать,

$$A_x = A_\mu(x)\, dx^\mu,$$

$$F_x = (DA)_x \equiv (dA)_x + \frac{1}{2}[A_x, A_x] = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x)dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Уравнения движения в теории Янга—Миллса в стандартном подходе соответствуют следующим соотношениям на форму F (ср. с (4.47)):

$$D * F \equiv d(*F) + [A, *F] = - * j, \tag{4.55а}$$

$$DF = DDA \equiv dF + [A, F] = 0, \tag{4.55б}$$

где форма j, описывающая ток, задается формулой (4.46), обобщенной очевидным образом на случай неабелевой калибровочной группы. Равенство (4.55б) представляет собой тождество Бьянки (см. (2.78)). Из (4.55а) следует, что

$$d(*j) + d\left([A, *F]\right) = 0. \tag{4.56}$$

Первое слагаемое в этом равенстве соответствует дивергенции 4-вектора тока (ср. (4.49) или (4.51)). Второе слагаемое указывает на то, что само неабелевое калибровочное поле переносит заряд.

Так как законы калибровочных преобразований для форм A и F имеют вид (4.36) и (4.37), то действие и лагранжиан для чисто калибровочной теории, удовлетворяющие требованиям, перечисленным в предыдущем параграфе, могут быть построены только из следующих 4-форм:

$$\mu_1 = \operatorname{tr} F \wedge *F; \tag{4.57а}$$

$$\mu_2 = \operatorname{tr} F \wedge F, \tag{4.57б}$$

где след вычисляется от элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Можно показать, что форма μ_2 является точной (задача 4.6). А именно,

$$\operatorname{tr} F \wedge F = d \operatorname{tr}\left(A \wedge dA + \frac{1}{3} A \wedge [A, A]\right).$$

Если форму A разложить по базису $\{Q_\alpha\}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \dim G)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ калибровочной группы G, нормированному условием

$$\operatorname{tr}(Q_\alpha Q_\beta) = C_G \delta_{\alpha\beta},$$

то имеет место соотношение

$$\operatorname{tr} F \wedge F = d\left(C_G \sum_\alpha A^\alpha \wedge dA^\alpha + \frac{1}{3} C_G \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C^\alpha_{\beta\gamma} A^\alpha \wedge A^\beta \wedge A^\gamma\right), \tag{4.58а}$$

где $C^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные константы группы G, антисимметричные по всем индексам. В частности, если $G = SU(2)$ и $Q_\alpha = \frac{1}{2i}\tau_\alpha$, где τ_α — матрицы Паули, то $C_G = -\frac{1}{2}$, $C^\alpha_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ и

$$\operatorname{tr} F \wedge F = -\frac{1}{2} d\left(\sum_\alpha A^\alpha \wedge dA^\alpha + \frac{1}{3} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A^\alpha \wedge A^\beta \wedge A^\gamma\right). \tag{4.58б}$$

Итак, лагранжиан чисто калибровочной теории пропорционален форме μ_1 и мы выбираем его в виде

$$L = -\frac{1}{4e^2} \operatorname{tr} F \wedge *F; \tag{4.59а}$$

при этом действие равно

$$S = -\frac{1}{4e^2} \|F\|^2 \equiv -\frac{1}{4e^2}(F, F) = -\frac{1}{4e^2} \int_{M^4} \operatorname{tr} F \wedge *F \tag{4.59б}$$

(см. (4.1), (4.2), а также (4.21)–(4.23)). Здесь e — калибровочный заряд теории. Взаимодействие калибровочного поля с полями материи обычно строится минимальным образом через ковариантную производную; этот вопрос мы обсудим в § 7 настоящей главы.

Теперь мы кратко остановимся на формулировке квантовой калибровочной теории в рамках геометрического подхода. Квантование калибровочных теорий удобнее всего проводить с помощью метода функционального интегрирования, который позволяет осуществить квантование глобально.

В настоящее время математически удовлетворительная теория существует лишь для функциональных интегралов в евклидовых пространствах, т. е. в пространствах с сигнатурой метрики $(+,\ldots,+)$. При этом физические результаты получают аналитическим продолжением результатов интегрирования из $\mathbb{R}^4$ в M^4. Подробное изложение математической теории функционального интегрирования для скалярных полей можно найти в монографиях [Сай], [ГД].

Пусть имеется калибровочная теория, заданная на главном расслоении $P(M,G)$; здесь M — произвольное евклидово пространство. Согласно постулату квантования с помощью функционального интеграла вакуумное ожидание наблюдаемой величины $f(\omega)$ (из физических соображений она должна быть калибровочно инвариантной) дается выражением

$$\langle f\rangle = \frac{\int\limits_{\mathfrak{A}} e^{-S(\omega)} f(\omega)\{d\omega\}}{\int\limits_{\mathfrak{A}} e^{-S(\omega)}\{d\omega\}}. \tag{4.60}$$

Здесь $\mathfrak{A}$ — пространство связностей главного расслоения $P(M,G)$, введенное в § 2, $S(\omega)$ — действие (4.2) на форме связности ω, $\{d\omega\}$ — мера интегрирования на $\mathfrak{A}$. Для того, чтобы сделать выражения типа (4.60) осмысленными, приходится вводить регуляризацию. Обычно при строгом анализе свойств евклидовых функциональных интегралов вводится решеточная регуляризация, т.е. осуществляется переход от теории в непрерывном пространстве-времени M к теории в дискретном пространстве. Математически строгие результаты, касающиеся построения и свойств калибровочных теорий, изложены, например, в книге [За] и обзоре [БД].

Величины $S(\omega)$ и $f(\omega)$ в (4.60) калибровочно инвариантны. Поэтому функциональные интегралы в этом выражении можно переписать в виде интегралов по калибровочно-неэквивалентным формам связности. Пусть C — группа вертикальных автоморфизмов расслоения $P(M,G)$, т.е. группа локальных калибровочных преобразований, действующих на $\mathfrak{A}$. Фактор-пространство $\eta = \mathfrak{A}/C$ называется пространством калибровочных орбит или пространством модулей. Таким образом, пространство $\mathfrak{A}$ оказывается бесконечномерным расслоением (не обязательно главным) $\mathfrak{A} \to \eta$.

При квантовании калибровочных теорий в рамках стандартного подхода фиксируют калибровку. На геометрическом языке это соответствует выбору сечения $s : \eta \to \mathfrak{A}$ в расслоении $\mathfrak{A} \to \eta$. Интегралы в (4.60) записываются в виде интегралов по $s(\eta) \cong \eta$

$$\langle f \rangle = \frac{\int\limits_{s(\eta)} e^{-S(\sigma)} f(\sigma) \Delta\{d\sigma\}}{\int\limits_{s(\eta)} e^{-S(\sigma)} \Delta\{d\sigma\}}, \tag{4.61}$$

где σ — координаты на $s(\eta)$, а фактор Δ есть детерминант Фаддеева—Попова, возникающий при замене переменных $\omega \to \sigma$.

Укажем некоторые проблемы, возникающие при таком методе квантования. В формуле (4.61) молчаливо предполагается, что сечение $s(\eta)$ пересекает каждую орбиту в $\mathfrak{A}$ и причем только в одной точке. Однако, как было показано в работе [Зи] для калибровочной теории на $M = S^4$ (или S^3) с неабелевой компактной калибровочной группой Ли расслоение $\mathfrak{A} \to \eta$ нетривиально и не существует непрерывного глобального сечения $s : \eta \to \mathfrak{A}$, т.е. нельзя однозначно определить глобальную калибровку. Сечение, отвечающее любому калибровочному условию и проходящее через точку $\omega \in \mathfrak{A}$, пересекает орбиту (слой), содержащую ω, в бесконечном количестве точек (см. рис. 4.1 б). Это явление получило название неоднозначности Грибова, так как впервые было замечено Грибовым в 1977 г. (см. [Гр]) при анализе $SU(2)$-калибровочных теорий в $M = \mathbb{R}^4$ в случае кулоновской калибровки. При этом накладывались дополнительные условия на бесконечности, что фактически замыкало M в сферу S^4. Для неоднозначности Грибова существенными являются топологические свойства пространства M. Так в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ существует непрерывное глобальное сечение.

Возникает естественный вопрос: так как выражение (4.60) хорошо определено после введения решеточной регуляризации, а переход к (4.61) наталкивается на серьезные трудности, то нельзя ли квантовать калибровочную теорию на основе представления (4.60), не фиксируя калибровку. Оказывается (см. [БД]), что фиксация калибровки необходима для формулировки теории возмущений по малой константе связи e (см. (4.2)). Теория возмущений, в свою очередь, необходима нам для установления связи со стандартной физикой, особенно в вопросах перенормировок. Однако, было показано, что для формулировки теории возмущений достаточно локальной фиксации калибровки, т.е. локального сечения расслоения $\mathfrak{A} \to \eta$, и топологические свойства M роли не играют.

§ 5. Магнитный монополь Дирака

Вначале напомним, как вводится монополь Дирака в рамках стандартного подхода (подробнее см., например, [ЧЛ] или [Со]). Уравнения электродинамики (4.47) в пространстве Минковского M^4 допускают следующее симметричное обобщение:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu; \tag{4.62а}$$

$$\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = \tilde{j}^\nu, \tag{4.62б}$$

где $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ — тензор, дуальный к $F_{\mu\nu}$ (см. (4.27б)), $j^\nu = (\rho, \mathbf{j})$ — 4-вектор электрического тока, а $\tilde{j}^\nu = (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{j}})$ — 4-вектор магнитного тока. При этом предполагается, что существуют (экспериментально пока не обнаруженные) магнитные заряды или монополи и $\tilde{\rho}$ есть их плотность. Учитывая, что $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, нетрудно показать, что для того, чтобы удовлетворялось уравнение (4.62) с магнитным током $\tilde{j}^\nu \neq 0$, необходимо, чтобы

$$\partial_\mu \partial_\nu A_\rho \neq \partial_\nu \partial_\mu A_\rho$$

в тех точках, где магнитный ток $\tilde{j}^\nu \neq 0$. Это означает, что потенциал $A_\mu(x)$ сингулярен в M^4. Если мы имеем точечный статический магнитный монополь с магнитным зарядом q_m, расположенный в начале координат ($\mathbf{x} = 0$), то напряженность его магнитного поля равна

$$\mathbf{B} = \frac{q_m}{4\pi r^3}\mathbf{x} \tag{4.63}$$

и может быть представлена с помощью вектор-потенциала A_μ, например, следующим образом:

$$B^i = (\operatorname{rot} \mathbf{A})^i - q_m(-x^3)\,\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,x^3\delta_{i3}.$$

При этом вектор-потенциал A_μ в сферической системе координат (r, θ, φ) равен:

$$A_0 = 0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi \frac{q_m}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \mathbf{e}_\varphi \frac{q_m}{4\pi r}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \tag{4.64}$$

и сингулярен вдоль отрицательной полуоси x^3. Эта линия сингулярности называется дираковской струной. Заметим, что потенциал $\mathbf{A}$ (4.64) равен потенциалу поля, создаваемого бесконечно длинным тонким соленоидом, расположенным вдоль дираковской струны, положительный полюс которого с магнитным зарядом q_m находится в начале координат. Кроме того, как было показано Дираком, заряд q_m может принимать только дискретные значения

$$q_m = q_0 n, \tag{4.65}$$

где q_0 — наименьший магнитный заряд, а n — целое число. Рассматривая электрически заряженные частицы в поле магнитного монополя, можно показать, что q_0 связано с наименьшим электрическим зарядом e_0 соотношением

$$q_0 = \frac{2\pi}{e_0} n_0,$$

n_0 — целое число.

На этом мы закончим краткое введение в теорию магнитного монополя Дирака в рамках стандартного подхода и перейдем к описанию того же объекта, но на геометрическом языке. В методических целях нам удобнее сначала рассмотреть магнитный монополь на сфере S^2.

Будем считать, что радиус сферы равен r ($r > 0$), а θ и φ ($0 \leqslant \theta < \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$) — обычные сферические координаты. Элементы калибровочной группы $U(1)$ будем параметризовать так: $g = \exp(2\pi i\psi/q_0)$, где q_0 пока некоторое число. Теперь рассмотрим главное расслоение $P = P(S^2, U(1))$ и зададим в нем связность, отвечающую монопольной конфигурации. Сделаем это локально. Для этого введем, как и в примере 7 § 7 главы 2, две полусферические окрестности U_+ и U_- в S^2 так, что $U_+ \cap U_- = S^1$ — экваториальная окружность $\theta = \frac{\pi}{2}$, параметризуемая углом φ. Пусть $\big(\theta, \varphi, \exp(2\pi\, i\psi_+/q_0)\big)$ — координаты в $P_+ \equiv \pi^{-1}(U_+) \cong U_+ \times U(1)$, а $\big(\theta, \varphi, \exp(2\pi\, i\psi_-/q_0)\big)$ — в $P_- \equiv \pi^{-1}(U_-) \cong U_- \times U(1)$. По аналогии с тем, как это делалось в вышеупомянутом примере, можно показать, что

$$2\pi \frac{\psi_-}{q_0} = 2\pi \frac{\psi_+}{q_0} + n\varphi, \tag{4.66}$$

где n — целое число, характеризующее способ «склейки» подмногообразий P_+ и P_- в единое расслоение P. Зададим форму связности следующим образом:

$$\omega = \begin{cases} d\psi_+ + \omega_+ & \text{в} \quad P_+, \\ d\psi_- + \omega_- & \text{в} \quad P_-, \end{cases} \tag{4.67}$$

где 1-формы $\omega_\pm$ в $P_\pm$ равны:

$$\omega_\pm = \frac{q_m}{4\pi}(\pm 1 - \cos\theta)\, d\varphi, \tag{4.68}$$

а q_m — некоторая константа. Здесь для удобства мы приняли следующее условие нормировки: ограничение формы связности ω на вертикальное подпространство равно $\omega_0 = -i(q_0/2\pi)\, g^{-1} dg$; такая нормировка допустима для $G = U(1)$. Мы будем использовать одни и те же обозначения $d\theta$ и $d\varphi$ для форм в $U_\pm$ и в $P_\pm$; по смыслу всегда будет понятно, о каких формах идет речь. Выберем в P_+ и P_- сечения s_+ и s_- соответственно следующим образом: $s_\pm(\theta,\varphi) = \left(\theta,\varphi,\exp(2\pi i\widetilde{\psi}_\pm/q_0)\right) \in P_\pm$, где $\widetilde{\psi}_\pm$ — фиксированная величина. Тогда 1-форма на S^2, описывающая калибровочное поле, есть

$$A_\pm \equiv A^{(s_\pm)} = s_\pm^* \omega_\pm = \frac{q_m}{4\pi}(\pm 1 - \cos\theta)\, d\varphi = \tag{4.69а}$$

$$= \frac{q_m}{4\pi r}\frac{x^1 dx^2 - x^2 dx^1}{x^3 \pm r}. \tag{4.69б}$$

Здесь x^i — координаты пространства $\mathbb{R}^3$, в которое погружена сфера S^2, и $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$. Так как угол φ не имеет определенного значения в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, то форма $A_+(A_-)$ регулярна в $U_+(U_-)$, но сингулярна в точке $\theta = \pi (\theta = 0)$. При $\theta = \pi$ $((\theta = 0))$ $x^3 = -r$ $(x^3 = +r)$ и сингулярный характер формы виден и из представления (4.69б).

Поскольку калибровочная группа — абелева, то форма кривизны равна

$$\Omega = d\omega = d\omega_\pm = \frac{q_m}{4\pi}\sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi. \tag{4.70}$$

Она является замкнутой формой, но не является точной, так как формы $d\omega_+$ и $d\omega_-$ заданы лишь локально, в H_+ и H_-. Из однозначности формы связности ω в $P_+ \cap P_- = \pi^{-1}(H_+ \cap H_-)$ и из соотношения (4.66) следует, что формы ω_+ и ω_- должны быть связаны между собой в $P_+ \cap P_-$ следующим калибровочным преобразованием:

$$\omega_+ = \omega_- + \frac{q_0 n}{2\pi} d\varphi.$$

Аналогичная формула справедлива и для A_+ и A_-. Учитывая представления (4.68), приходим к выводу, что параметр q_m принимает дискретные значения $q_m = nq_0$, т.е. получаем формулу (4.65).

В § 14 главы 2 было показано, что расслоения $P\left(S^2, U(1)\right)$ характеризуются первым числом Черна, которое в нашем случае вычисляется по формуле

$$C_1(P) = \int_{S^2} c_1(P) = -\frac{1}{q_0}\int_{S^2} \overline{\Omega}, \tag{4.71}$$

где $\overline{\Omega}$ — проекция формы кривизны на базу. Различие между коэффициентами, стоящими перед интегралами, в формулах (4.71) и (2.109) объясняется различным выбором нормировок формы связности. Подставляя (4.70) в (4.71), получаем

$$C_1(P) = -\frac{n}{4\pi}\int_{S^2} \sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi = -n. \tag{4.72}$$

Рассмотрим теперь магнитный монополь в трехмерном евклидовом пространстве с выколотой точкой $\mathbf{x} = 0$: $M = \mathbb{R}^3 - \{0\}$. В качестве двух координатных окрестностей в M выберем области $H_+ = \{\mathbf{x} \in M : x^3 > 0\}$ и $H_- = \{\mathbf{x} \in M : x^3 < 0\}$. Их пересечение $H_+ \cap H_-$ есть x^1x^2 — плоскость без точки ($x^1 = 0$, $x^2 = 0$). Зададим форму связности в $P(M, U(1))$ формулами (4.67) и (4.68), 1-форма на базе, описывающая калибровочное поле, будет тогда иметь вид (4.69), причем знаки $+$ и $-$ будут относиться к окрестностям H_+ и H_-.

Проанализируем A_+. Эта форма регулярна в H_+, в области своего задания, и описывает калибровочное поле вида (4.64). В области H_- она сингулярна на отрицательной x^3-полуоси. Эта полупрямая и есть дираковская струна. Аналогичными свойствами обладает и форма A_-, но для нее дираковская струна совпадает с положительной x^3-полуосью. 2-формы $F_+ = dA_+$ и $F_- = dA_-$ совпадают друг с другом в $H_+ \cap H_-$ и определяют единую форму F, описывающую напряженность поля:

$$F = dA_\pm = \frac{q_m}{4\pi}\sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi = \frac{q_m}{8\pi r^3}\varepsilon_{ijk}x^i dx^j \wedge dx^k. \tag{4.73}$$

Отсюда получаем, что напряженность магнитного поля монополя в $M = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ равна (4.63). Следовательно, параметр q_m играет роль величины магнитного заряда монополя, а q_0 — наименьший магнитный заряд. Итак, как мы видели, поле точечного монополя Дирака однозначно задается своими значениями на сфере постоянного радиуса S^2 с центром в точке, где расположен монополь, а целое число n, характеризующее величину магнитного заряда $q_m = nq_0$, есть взятое с обратным знаком первое число Черна, классифицирующее расслоения $P(S^2, U(1))$ (см. (4.71, (4.72)). В статье [Тр2] было отмечено следующее: так как когомологические классы для пространства M с евклидовой топологией тривиальны, то экспериментальное обнаружение монополя означало бы, что или пространство-время имеет неевклидову топологию, или описание электромагнетизма с помощью расслоенных пространств является неадекватным.

§ 6. Инстантоны

Формы связности, соответствующие калибровочным полям, удовлетворяющим классическим уравнениям движения, оказываются точками стационарности в пространстве $\mathfrak{A}$ для функциональных интегралов типа (4.60) и поэтому особенно важны при исследовании калибровочных теорий. Если такие классические решения найдены, и действие теории на этих решениях конечно, то мы можем дальше учесть квантовые флуктуации на фоне того или иного классического решения. Хотя физическим пространством-временем является пространство Минковского M^4, для нас важны классические решения калибровочной теории и в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$. Они описывают квантовые туннельные переходы между различными вакуумами теории. Эти вопросы подробно обсуждаются в книгах [ЧЛ], [Ра]. Напомним также, что функциональные интегралы в настоящее время удается строго определить лишь для евклидовых пространств (см. § 4 главы 4).

Решения классических уравнений движения с конечным действием в евклидовом пространстве получили название инстантонов. Мы будем изучать инстантоны в чисто калибровочной теории Янга—Миллса с калибровочной группой $G = SU(2)$. Предположим также, что теория задана на сфере S^4, которая связана с $\mathbb{R}^4$ стереографической проекцией из «южного полюса».

Итак, рассмотрим главное расслоение $P\left(S^4, SU(2)\right)$; его свойства обсуждались в § 7 главы 2 (пример 8). Пусть U_+ и U_- — две четырехмерные «полусферы», покрывающие пространство $M = S^4$, $U_+ \cap U_- = S^3$ (будем считать, что U_+ — «северная полусфера», а U_- — «южная»), $\chi_\pm$ — диффеоморфизмы, устанавливающие связь между точками в $P_\pm = \pi^{-1}(U_\pm)$ и парами $(x, g) \in U_\pm \times G$, т. е. $\chi_\pm(p) = \left(\pi(p), \varphi_\pm(p)\right)$, $p \in P_\pm$. Функция перехода $\varphi_{-+} = \varphi_-(p)\varphi_+(p)^{-1}$ является функцией на многообразии $U_+ \cap U_- = S^3$ со значениями в калибровочной группе $G = SU(2)$. Так как S^3 диффеоморфно $SU(2)$, то функция перехода является отображением $\varphi_{-+} : S^3 \cong SU(2) \mapsto SU(2)$. Пусть θ, φ, ψ — углы Эйлера ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \psi < 2\pi$), параметризующие многообразие $U_+ \cap U_-$, а

$$h(\theta, \varphi, \psi) = e^{i\tau_3 \frac{\varphi}{2}} e^{i\tau_2 \frac{\theta}{2}} e^{i\tau_3 \frac{\psi}{2}}$$

есть элемент калибровочной группы $G = SU(2)$, где τ_a — матрицы Паули. Между координатами точек $\mathbb{R}^4$, отвечающих подмногообразию $U_+ \cap U_- = S^3 \subset S^4$, и углами (θ, φ, ψ) существуют следующие соотношения:

$$x^1 + ix^2 = r\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}},$$

$$x^3 + ix^4 = r\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi-\varphi}{2}},$$

где $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = (2R)^2$. Тогда

$$h(\theta, \varphi, \psi) \equiv h(x)\,|_{x\in U_+\cap U_-} = \frac{x^4 - i\vec{\tau}\mathbf{x}}{r}. \tag{4.74}$$

Из однозначности отображения φ_{-+} получаем, что

$$\varphi_{-+}(x) = (h(x))^k, \quad x \in U_+ \cap U_-, \tag{4.75}$$

где k — целое число. Зададим форму связности на главном расслоении $P\left(S^4, SU(2)\right)$ формулами

$$\omega_p = \operatorname{ad}\left(\varphi_+(p)^{-1}\right)A_+\left(\pi(p)\right) + \varphi_+(p)^{-1}d\varphi_+(p) \quad \text{для} \quad p \in P_+, \tag{4.76а}$$

$$\omega_p = \operatorname{ad}\left(\varphi_-(p)^{-1}\right)A_-\left(\pi(p)\right) + \varphi_-(p)^{-1}d\varphi_-(p) \quad \text{для} \quad p \in P_-. \tag{4.76б}$$

1-формы $A_\pm$ на $U_\pm \subset S^4$ получаются опусканием формы связности ω на базу с помощью сечений $s_\pm(x) = \chi_\pm^{-1}(x, e)$, где e — единица группы G (см. (4.11)–(4.13)). Из однозначности формы связности в подмногообразии $P_+ \cap P_-$ и формулы (4.75) получаем, что $A_+(x)$ и $A_-(x)$ в $U_+ \cap U_-$ должны быть связаны следующим калибровочным преобразованием:

$$A_-(x) = \operatorname{ad}\left(h(x)\right)^k A_+(x) + \left(h(x)\right)^k d\left(h(x)\right)^{-k}. \tag{4.77}$$

2-форма на базе, описывающая напряженность калибровочного поля, в окрестностях U_+ и U_- выражается формулами:

$$F = \begin{cases} F_+ = dA_+ + \dfrac{1}{2}[A_+, A_+] & \text{для} \quad x \in U_+, \\ F_- = dA_- + \dfrac{1}{2}[A_-, A_-] & \text{для} \quad x \in U_-, \end{cases} \tag{4.78}$$

причем в пересечении окрестностей $U_+ \cap U_-$

$$F_- = \operatorname{ad}(h)^k F_+.$$

Действие в рассматриваемой теории запишем в виде

$$S = \frac{1}{4e^2}\|F\|^2 = \frac{1}{4e^2}\int_{S^4} \operatorname{tr} F \wedge *F \tag{4.79}$$

(ср. (4.2) и (4.59б)). Рассмотрим величину

$$\|F \pm *F\|^2 = \int_{S^4} \operatorname{tr}(F \pm *F) \wedge (*F \pm F). \tag{4.80}$$

Используя свойства (2.26) и (2.22), нетрудно показать, что

$$\|F \pm *F\|^2 = 2\int_{S^4} \operatorname{tr} F \wedge *F \pm 2\int_{S^4} \operatorname{tr} F \wedge F.$$

Так как выражение (4.80) неотрицательно, то

$$S \geqslant \frac{2\pi^2}{e^2}\left|C_2(P)\right|, \tag{4.81}$$

где действие S определяется формулой (4.79), а второе число Черна — формулой (2.110) (см также (4.25)). Таким образом для всех конфигураций калибровочной теории, заданной на расслоении $P\left(S^4, SU(2)\right)$ с данным вторым числом Черна $C_2(P)$, действие на этих конфигурациях ограничено снизу величиной $2\pi^2\left|C_2(P)\right|/e^2$, причем минимальное значение достигается на формах связности, удовлетворяющих условию самодуальности

$$F = *F \tag{4.82а}$$

или условию антисамодуальности

$$F = - * F. \tag{4.82б}$$

Из тождества Бьянки (4.55б) следует, что (анти)самодуальные формы связности удовлетворяют уравнению движения (4.55а) с $j = 0$, т. е. такие формы связности являются инстантонными решениями.

Впервые нетривиальное инстантонное решение в теории Янга—Миллса с калибровочной группой $SU(2)$ было найдено Белавиным, Поляковым, Тюпкиным и Шварцем в их работе [БПТШ]. Формулы, описывающие довольно широкий класс инстантонных решений, были предложены в работах [Хо, Ви, КФ]. Для форм над окрестностью U_- они имеют вид:

$$(A_-)_x = \frac{i}{2}\tau_j\bar{\eta}_{j\mu\nu}\left(\partial^\nu \ln\Phi(x)\right)dx^\mu, \tag{4.83а}$$

$$(A'_-)_x = \frac{i}{2}\tau_j\eta_{j\mu\nu}\left(\partial^\nu \ln\Phi(x)\right)dx^\mu. \tag{4.83б}$$

Здесь $\Phi(x)$ — функция, которую еще предстоит определить, а $\eta_{j\mu\nu}$ и $\bar{\eta}_{j\mu\nu}$ — матрицы, введенные 'т Хоофтом:

$$\eta_{jkl} = \varepsilon_{jkl}, \quad \eta_{ji4} = \delta_{ji}, \quad \eta_{j\mu\nu} = -\eta_{j\nu\mu}, \quad \bar{\eta}_{j\mu\nu} = (-1)^{\delta_{\mu 4}+\delta_{\nu 4}}\eta_{j\mu\nu},$$
$$(j,k,l = 1,2,3;\ \mu,\nu = 1,2,3,4). \tag{4.84}$$

Если выражение (4.83а) подставить в условие самодуальности (4.82а), то мы придем к следующему уравнению на функцию $\Phi(x)$:

$$\frac{\partial_\mu\partial^\mu\Phi(x)}{\Phi(x)} = 0. \tag{4.85}$$

Если $\Phi(x)$ является решением (4.85), то 1-форма (4.83б) удовлетворяет условию антисамодуальности (4.82б). Очевидное решение $\Phi = \mathrm{const}$ дает связность $A_- = 0$ с нулевым числом Черна $C_2(P)$. Нетривиальное решение, найденное 'т Хоофтом, имеет вид

$$\Phi(x) = 1 + \sum_{l=1}^{k}\frac{\rho_l^2}{(x-a_l)^2}, \tag{4.86}$$

где ρ_l и $a_{l\mu}$ — произвольные вещественные параметры. При $k = 1$ мы получаем одноинстантонное решение Белавина, Полякова, Тюпкина, Шварца. Оно описывает локализованную конфигурацию (инстантон) с центром в точке a_1 и характерным размером ρ_1. В последующих формулах мы будем считать, что центр инстантона расположен в точке $a_1 = 0$; переход к общему решению с $a_1 \neq 0$ достигается заменой x на $x - a_1$. В окрестности U_- решение имеет вид:

$$(A_-)_x = \frac{i}{2}\tau\bar{\eta}_{j\mu\nu}dx^\mu\partial^\nu \ln\left(1 + \frac{\rho_1^2}{(x)^2}\right) =$$
$$= \frac{i}{2}\tau_j\frac{2\bar{\eta}_{j\mu\nu}(x)^\nu}{(x)^2+\rho_1^2}\frac{\rho_1^2}{(x)^2}dx^\mu = \frac{\rho_1^2}{(x)^2+\rho_1^2}\left(h\,dh^{-1}\right)_x, \tag{4.87}$$

где отображение $h : S^3 \to SU(2)$ определено формулой (4.74) и

$$\left(h\,dh^{-1}\right)_x = i\tau_k\bar{\eta}_{k\mu\nu}x^\mu dx^\nu/r^2.$$

С помощью формулы (4.77) при $k = 1$ легко показать, что соответствующее решение в окрестности U_+ имеет вид

$$(A_+)_x = \frac{(x)^2}{(x)^2+\rho_1^2}\left(h^{-1}\,dh\right)_x = \frac{(x)^2}{(x)^2+\rho_1^2}\frac{i}{2}\tau_j\frac{2\eta_{j\mu\nu}(x)^\mu dx^\nu}{(x)^2}, \tag{4.88}$$

где мы учли, что

$$\left(h^{-1}\,dh\right)_x = i\tau_k\eta_{k\mu\nu}x^\mu dx^\nu/r^2.$$

Формы A_+ и A_- регулярны в областях U_+ и U_- соответственно. Форма A_+ сингулярна в точке $r = \infty$ («южный полюс» сферы S^4), а A_- сингулярна при $r = 0$ («северный полюс»). Решение (4.87), (4.88) является самодуальным. Антисамодуальное решение получается при подстановке (4.86) в выражение (4.83б). Оно равно:

$$\begin{aligned}
&\text{в}\quad U_+ :\quad A_+ = \frac{i}{2}\tau_j\frac{2\bar{\eta}_{j\nu\mu}(x)^\nu}{(x)^2+\rho_1^2}dx^\mu = \frac{(x)^2}{(x)^2+\rho_1^2}(h\,dh^{-1})_x;\\
&\text{в}\quad U_- :\quad A_- = \frac{i}{2}\tau_j\frac{2\eta_{j\nu\mu}(x)^\nu}{(x)^2+\rho_1^2}\frac{\rho_1^2}{(x)^2}dx^\mu = \frac{\rho_1^2}{x^2+\rho_1^2}(h^{-1}\,dh)_x.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Главные расслоения $P\left(S^4, SU(2)\right)$ и формы связности на них характеризуются вторым числом Черна (см. (2.110))

$$C_2(P) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{S^4}\operatorname{tr} F\wedge F = \frac{1}{8\pi^2}\left\{\int\limits_{U_+}\operatorname{tr} F_+\wedge F_+ + \int\limits_{U_-}\operatorname{tr} F_-\wedge F_-\right\}.$$

В частности, форма связности (4.76) с $A_\pm$, вычисляемым по формулам (4.83а), (4.86), дает $C_2(P) = -k$. Такое решение называют k-инстантонным решением. Например, для решения Белавина, Полякова, Тюпкина, Шварца (4.87), (4.88) имеем

$$
\begin{aligned}
F_+ &= i\tau_j \frac{2}{\rho_1^2}\left(e^4 \wedge e^j + \frac{1}{2}\varepsilon_{jil} e^i \wedge e^l\right), \\
F_- &= \mathrm{ad}(h) F_+, \\
C_2(P) &= -\frac{1}{8\pi^2}\frac{48}{\rho_1^2}\int\limits_{S^4} e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 = -1,
\end{aligned}
$$

где мы положили радиус сферы S^4 равным $\rho_1/2$ и выбрали метрику на сфере в виде:

$$
ds^2 = \frac{dx_\mu dx_\mu}{\left(1 + r^2/\rho_1^2\right)^2} = \sum_{a=1}^{4} (e^a)^2.
$$

Антиинстантонное решение (4.89) дает $C_2(P) = +1$. Традиционно в физической литературы в качестве топологической характеристики расслоения и инстантонного решения используют величину $k = -C_2(P)$. Ее называют топологическим индексом, или числом инстантонов, или индексом Понтрягина (в английской литературе часто используется термин winding number). Заметим, что в математических работах классы Понтрягина и числа (индексы) Понтрягина вводятся для векторных расслоений E т. е. (расслоений, у которых слой — векторное пространство) и ассоциированных с ними главных расслоений со структурной группой $GL(k, \mathbb{R})$, которая для (псевдо) римановых многообразий M может быть редуцирована до $O(k)$. Однако, классы Понтрягина $p_j(E)$ выражаются через классы Черна комплексифицированного расслоения E^c со структурной группой $GL(k, \mathbb{C})$:

$$
p_j(E) = (-1)^j C_{2j}(E^c)
$$

(см. [ЕГХ], [КН] т. 2).

Более общее, чем (4.86) решение для $\Phi(x)$ было предложено в работе [ДНР]

$$
\Phi(x) = \sum_{l=1}^{k+1} \frac{\rho_l^2}{(x - a_l)^2}; \tag{4.90}
$$

оно сводится к (4.86) при $a_{k+1} \to \infty$, $\rho_{k+1} \to \infty$ с условием $\rho_{k+1}^2 / a_{k+1}^2 = 1$. Решение, построенное с помощью функции (4.90), описывает k-инстантонную конфигурацию и характеризуется $5k + 4$ параметрами (общий множитель в (4.90) несущественен, см. (4.83)). Случаи $k = 1$ и 2 являются особыми: при $k = 1$ решение характеризуется 5 параметрами, при $k = 2$ — 13 параметрами, если мы исключим параметры, связанные с калибровочными преобразованиями. В работах [Шв], [АХЗ] было показано, что число возможных свободных параметров k-инстантонного решения в теории с калибровочной группой $SU(2)$ равно $8k - 3$. Таким образом, формула Джакива, Нола, Ребби (4.90) дает наиболее общее инстантонное решение для $k = 1$ и $k = 2$. В частности, наиболее общим одноинстантонным решением является решение Белавина, Полякова, Тюпкина, Шварца. Оно является также решением на нетривиальном расслоении с наименьшим действием $S = 2\pi^2/e^2$.

§ 7. Поля материи

Пусть нам задана калибровочная теория с калибровочной группой K на пространстве-времени M размерности $\dim M = d$. Это означает, что мы имеем главное расслоение $P(M, K)$, задающее калибровочную структуру теории. Покажем, как в геометрическом подходе описываются поля материи.

Предположим, что из физических соображений следует, что поле материи должно преобразовываться по конечномерному линейному представлению ρ калибровочной группы K, т. е. оно должно принимать значения в векторном пространстве V_ρ, в котором для каждого элемента $a \in K$ определено линейное преобразование $\rho(a) : V_\rho \to V_\rho$, реализующее представление группы K в V_ρ, причем $\rho(a_1 a_2) = \rho(a_1)\rho(a_2)$. Построим расслоение $E = E(M, V_\rho, K, P)$ над M со стандартным слоем V_ρ и структурной группой K, ассоциированное с главным расслоением $P = P(M, K)$ (см. § 8 главы 2). Тогда поле материи характеризуется сечением в E или, эквивалентно (см. Предложение 2.9.2) отображением $\varphi : P \to V_\rho$, удовлетворяющим условию эквивариантности:

$$\varphi \circ \Psi_a = \rho(a^{-1}) \circ \varphi, \quad a \in K. \tag{4.91}$$

Согласно определению, данному в § 11 главы 2, отображение φ является псевдотензориальной формой типа (ρ, V_ρ).

Пока мы говорили о свойствах поля материи с точки зрения калибровочных преобразований. Но это поле обладает еще определенными тензорными свойствами с точки зрения преобразований пространства-времени M (ниже в качестве приложений общей теории мы рассмотрим скалярные и спинорные поля). Сейчас мы обсудим именно этот аспект геометрического подхода к описанию полей материи. Пространственно-временные свойства теории характеризуются расслоением линейных реперов $L(M) = L\left(M, GL(d; \mathbb{R})\right)$. В физике M обычно рассматривается как псевдориманово пространство, т. е. снабжается метрикой γ (см. § 4 главы 3). Мы будем считать, что сигнатура метрики $\operatorname{sign}\gamma = (-,+,+,\ldots,+)$, т.е. у нас в каждой точке $x \in M$ имеется одна временная координата и $(d-1)$ пространственная. Как уже говорилось, при этом расслоение $L(M)$ редуцируется до расслоения ортонормальных реперов $O(M) = P\big(M, O(1,d-1)\big)$. Если M ориентируемо, то предположим, что группой симметрии теории является группа $SO(1,d-1)$ — связная компонента $O(1,d-1)$, содержащая единицу. Таким образом, мы будем рассматривать расслоение $\widetilde{O} = P\big(M, SO(1,d-1)\big)$. Пусть поле материи преобразуется по представлению T группы $SO(1,d-1)$, действующему в пространстве V_T. Построим расслоение $W = W\left(M, V_T, SO(1,d-1), \widetilde{O}\right)$, ассоциированное с главным расслоением. Поле материи характеризуется сечением в W или отображением $\varphi : \widetilde{O} \to W$, удовлетворяющим условию эквивариантности

$$\varphi \circ \Psi_\Lambda = T(\Lambda^{-1}) \circ \varphi, \tag{4.92}$$

где $\Lambda \in SO(1,d-1)$. Такое описание не встречало бы никаких трудностей, если бы все представления группы $SO(1,d-1)$ были однозначными. Однако хорошо известно, что у этой группы есть двузначные представления, что связано с неодносвязностью (точнее, двусвязностью) самой группы $SO(1,d-1)$ (см. [По]). Для того, чтобы избежать этой трудности, надо с самого начала заменить $SO(1,d-1)$ односвязной группой, устроенной в окрестности единицы так же, как $SO(1,d-1)$. Оказывается, что для любой связной группы Ли G существует связная односвязная группа Ли $\widetilde{G}$, локально изоморфная G. Эта группа $\widetilde{G}$ называется универсальной накрывающей группы G (см. Приложение 5). Для $G = SO(1,d-1)$ универсальная накрывающая группа имеет число накрытия $z = 2$ и обозначается $\widetilde{G} = \mathrm{Spin}(1,d-1)$. Таким образом, мы должны рассматривать главное расслоение $OS = P\big(M, \mathrm{Spin}(1,d-1)\big)$ и ассоциированное с ним расслоение $WS = WS\big(M, V_D, \mathrm{Spin}(1,d-1), OS\big)$, где V_D — пространство представления группы $\mathrm{Spin}(1,d-1)$.

Для иллюстрации материала, изложенного выше, мы рассмотрим сейчас случай, когда $M = M^4$ — пространство Минковского, а γ есть плоская метрика Минковского, $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$. В качестве пространственной группы симметрии теории возьмем собственную группу Лоренца, обозначаемую $L_+^\uparrow$. Ее элементы (матрицы размером 4×4) оставляют инвариантной форму $(x,y) = x^0y^0 - \mathrm{xy} = -\eta_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$ и удовлетворяют условиям $\det\Lambda = +1$, $\Lambda_0^0 \geqslant 1$. Универсальной накрывающей для $L_+^\uparrow$ является группа $SL(2,\mathbb{C})$ — группа всех комплексных матриц 2×2 с детерминантом, равным 1. Накрывающий гомоморфизм λ задается следующим образом. Обозначим через $\underset{\sim}{e}_\mu$ матрицы $\underset{\sim}{e}_0 = 1$,

$\underset{\sim}{e}_i = \tau_i$ $(i = 1, 2, 3)$, τ_i — матрицы Паули, а через $\underset{\sim}{x}$ — матрицу

$$\underset{\sim}{x} = x^\mu \underset{\sim}{e}_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad x \in M^4.$$

Тогда, если $\underset{\sim}{\Lambda} \in SL(2, \mathbb{C})$, то мы поставим ей в соответствие матрицу $\Lambda = \lambda(\underset{\sim}{\Lambda}) \in L_+^\uparrow$, удовлетворяющую соотношению

$$\underset{\sim}{\Lambda x} = \underset{\sim}{\Lambda}\underset{\sim}{x}\underset{\sim}{\Lambda}^+. \tag{4.93}$$

Нетрудно показать, что $\lambda : \underset{\sim}{\Lambda} \to \Lambda$ есть гомоморфизм и локальный изоморфизм и число накрытия $z(\lambda) = 2$.

Если мы имеем некоторое представление $\mathcal{D} : \underset{\sim}{\Lambda} \to \mathcal{D}(\underset{\sim}{\Lambda})$ группы $SL(2, \mathbb{C})$, то представление (однозначное или двузначное) для $L_+^\uparrow$ можно получить, полагая

$$T(\Lambda) = T\big(\lambda(\underset{\sim}{\Lambda})\big) = \mathcal{D}(\underset{\sim}{\Lambda}). \tag{4.94}$$

Представление T группы $L_+^\uparrow$ однозначно тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}(-\underset{\sim}{\Lambda}) = \mathcal{D}(\underset{\sim}{\Lambda})$. Неприводимые конечномерные представления $SL(2, \mathbb{C})$ характеризуются парой (j, k), где j и k — целые или полуцелые неотрицательные числа.

В частности, имеется два неэквивалентных представления $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, действующих в пространстве $\mathbb{C}^2$, т. е. в пространстве двухкомпонентных спиноров. Операторы этих представлений равны $\mathcal{D}^{\left(\frac{1}{2}, 0\right)}(\underset{\sim}{\Lambda}) = \underset{\sim}{\Lambda}$ и $\mathcal{D}^{\left(0, \frac{1}{2}\right)}(\underset{\sim}{\Lambda}) = \underset{\sim}{\Lambda}^*$. Компоненты спиноров представления $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ обозначают ξ_α $(\alpha = 1, 2)$, а представления $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ — $\xi_{\dot\alpha}$ $(\dot\alpha = 1, 2)$. Мы можем рассматривать также и приводимые представления группы $SL(2, \mathbb{C})$. В физике важную роль играет представление Дирака, которое является прямой суммой двух неэквивалентных представлений (такого рода представления называются вполне приводимыми):

$$\mathcal{D}^{\left(\frac{1}{2}, 0\right)} \oplus \mathcal{D}^{\left(0, \frac{1}{2}\right)}. \tag{4.95}$$

Оно действует в пространстве дираковских (четырехкомпонентных) спиноров

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \xi_{\dot\beta} \end{pmatrix}, \qquad (\alpha = 1, 2, \quad \dot\beta = 1, 2).$$

В силу локального изоморфизма групп $L_+^\uparrow$ и $SL(2, \mathbb{C})$ их алгебры Ли совпадают. В окрестности единицы элементы группы $L_+^\uparrow$ можно параметризовать с помощью вещественных антисимметричных 4×4 матриц $\theta \equiv (\theta_{\mu\nu}) = (-\theta_{\nu\mu})$ по формуле

$$\Lambda = e^{\frac{1}{2} l^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu}}, \tag{4.96}$$

где $l^{\mu\nu}$ — элементы алгебры Ли группы $L_+^\uparrow$, называемые операторами инфинитезимальных лоренцовых вращений:

$$(l^{\mu\nu})^\rho_\sigma = -\eta^{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma + \eta^{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma.$$

В этой же окрестности операторы представления имеют вид

$$T(\Lambda) = e^{\frac{1}{2} X^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu}}. \tag{4.97}$$

Равенства (4.96) и (4.97) задают представление алгебры Ли группы $L_+^\uparrow$:

$$X^{\mu\nu} = T'(l^{\mu\nu}), \tag{4.98}$$

соответствующее представлению T. Например, для представления $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$$T'^{\left(\frac{1}{2},0\right)}(l^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}\left(\underset{\sim}{e}^\mu \tilde{e}^\nu - \underset{\sim}{e}^\nu \tilde{e}^\mu\right).$$

Матрицы $\underset{\sim}{e}_\mu$ были определены выше, $\tilde{e}_0 = 1$, $\tilde{e}_j = -\tau_j$, $\underset{\sim}{e}^\mu = \eta^{\mu\nu}\underset{\sim}{e}_\nu$, $\tilde{e}^\mu = \eta^{\mu\nu}\tilde{e}_\nu$. Для представления (4.95)

$$T'^{\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,\frac{1}{2}\right)}(l^{\mu\nu}) = \frac{i}{2}\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\left(\Gamma^\mu\Gamma^\nu - \Gamma^\nu\Gamma^\mu\right), \tag{4.99}$$

где Γ^μ — матрицы Дирака (см. [БШ], [БШ1]). Достаточно подробное обсуждение геометрии пространства Минковского и свойств группы Лоренца можно найти в книге [БЛОТ].

Вернемся снова к общему псевдориманову многообразию размерности d и расслоениям OS и WS, введенным выше. Сейчас мы изложим схему описания полей материи в рамках геометрического подхода, которая учитывает единым образом как калибровочные, так и пространственно-временные свойства теории. Обозначим через C прямое произведение групп $\mathrm{Spin}(1, d-1) \times K$ и построим прямую сумму главных расслоений $Q = OS \oplus P$, которая определяется так:

$$Q(M) = \{(u, p) \in OS \times P : \pi_{OS}(u) = \pi_P(p)\},$$

где π_{OS} и π_P — канонические проекции в OS и P соответственно. Очевидно, $Q(M)$ является главным расслоенным пространством со структурной группой $C = \mathrm{Spin}(1, d-1) \times K$; действие структурной группы в Q будем обозначать Ψ_c, $c \in C$. Пусть поле материи преобразуется по представлению $\delta = (\mathcal{D}, \rho)$ группы C, т.е. оно преобразуется по представлению ρ калибровочной группы K и является спин-тензором, преобразующимся по представлению $\mathcal{D}$ относительно действия группы $\mathrm{Spin}(1, d-1)$. Пространство представления δ обозначим V_δ; очевидно $V_\delta = V_\mathcal{D} \otimes V_\rho$ (тензорное произведение). Построим расслоение $Y(M) = Y(M, V_\delta, C, Q)$, ассоциированное с главным расслоением Q. Поле материи определяется как сечение (вообще говоря, локальное) $Y(M)$ или как эквивариантное отображение

$$\varphi : Q(M) \to V_\delta, \tag{4.100а}$$

$$\varphi \circ \Psi_c = \delta(c^{-1}) \circ \varphi, \quad c \in C \tag{4.100б}$$

(ср.(4.91), (4.92)). Величина $\varphi(q)$, $q \in Q$, является элементом пространства V_δ и характеризуется компонентами $\left(\varphi(q)\right)^i_\alpha$ относительно некоторого базиса в $V_\delta = V_\mathcal{D} \otimes V_\rho$, где индекс α нумеруют векторы базиса пространства $V_\mathcal{D}$ (например, спинорный индекс в случае спиноров или лоренцев индекс для 4-векторов), а индекс i — векторы базиса пространства V_ρ («внутренний» индекс). Тогда действие $\delta(c)$ с $c = (\underset{\sim}{\Lambda}, a) \in \mathrm{Spin}(1, d-1) \times K$ записывается в стандартном виде:

$$\left(\delta(c)\varphi(q)\right)^i_\alpha = \mathcal{D}(\underset{\sim}{\Lambda})^\beta_\alpha \rho(a)^i_j \varphi(q)^j_\beta.$$

Пусть задана калибровочная связность ω в $P(M, K)$ и линейная связность в M, т.е. в нашем случае связность τ в $OS\left(M, \mathrm{Spin}(1, d-1)\right)$. Тем самым задана связность $\mu = (\tau, \omega)$ в $Q(M)$ со значениями в $\mathfrak{c} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{k}$ — алгебре Ли группы C, где $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{k}$ — алгебры Ли групп $\mathrm{Spin}(1, d-1)$ и K ($\mathfrak{s}$ совпадает с $so(1, d-1)$ — алгеброй Ли группы $SO(1, d-1)$)). Согласно Предложению 2.11.4 ковариантная производная этой формы связности равна

$$D\varphi = d\varphi + \delta'(\mu)\varphi, \tag{4.101}$$

где δ' — дифференциал отображения δ, задающий представление алгебры $\mathfrak{c}$ в V_δ, отвечающее представлениям $\mathcal{D}'$ алгебры $\mathfrak{s}$ в V_D и ρ' алгебры $\mathfrak{k}$ в V_ρ:

$$\delta'(\mu)\varphi = \left(\mathcal{D}'(\tau) \otimes \mathbb{1}_{V_\rho}\right)\varphi + \left(\mathbb{1}_{V_D} \otimes \rho'(\omega)\right)\varphi, \tag{4.102}$$

где $\mathbb{1}_{V_\rho}$ и $\mathbb{1}_{V_\mathcal{D}}$ — тождественные преобразования в V_ρ и $V_\mathcal{D}$ соответственно. Если мы теперь построим из (4.101) лагранжиан поля φ, то тем самым мы опишем взаимодействие поля материи с калибровочным и гравитационным полями. Взаимодействия такого типа, как уже говорилось в главе 1, называются минимальными.

Для того, чтобы перейти к обычным полям на M, надо, по аналогии с чисто калибровочной теорией (см. § 1 главы 4), выбрать локальное сечение $\sigma : M \to Q(M)$, что эквивалентно выбору сечений $s : M \to P(M, K)$ и $t : M \to OS\left(M, \mathrm{Spin}(1, d-1)\right)$. Как мы уже знаем, выбор сечения s в P означает выбор калибровки, а выбор сечения t в OS — выбор подвижного ортонормированного репера $\{e_a\}$ в M (т. е. выбор локальной системы координат). Тогда поле материи в M определяется как

$$\varphi^{(\sigma)} = \sigma^*\varphi = \varphi \circ \sigma \tag{4.103}$$

или $\varphi^{(\sigma)}(x) = \varphi(\sigma(x))$, $x \in U$, U — окрестность в M. Пусть $\sigma' : U \to Q(M)$ — другое сечение в $Q(M)$ и $\sigma'(x) = \Psi_{c(x)}\sigma(x)$, где $c(x) \in C$. Пользуясь эквивариантностью (4.100б) отображения φ, получаем

$$\begin{aligned}\varphi^{(\sigma')}(x) = \varphi\left(\sigma'(x)\right) = \varphi\left(\Psi_{c(x)}\sigma(x)\right) = \left(\varphi \circ \Psi_{c(x)}\right)\left(\sigma(x)\right) = \\ = \delta\left(c(x)^{-1}\right)\varphi\left(\sigma(x)\right) = \delta\left(c(x)^{-1}\right)\varphi^{(\sigma)}(x).\end{aligned} \tag{4.104}$$

Преобразование с функцией $c(x) = \left(e, a(x)\right)$ (e — единица в $\mathrm{Spin}(1, d-1)$), при котором изменяется только сечение s в P, соответствует калибровочному преобразованию поля $\varphi^{(\sigma)}(x)$:

$$\varphi^{(\sigma')}(x) = \left(\mathbb{1}_{V_\mathcal{D}} \otimes \rho\left(a(x)^{-1}\right)\right)\varphi^{(\sigma)}(x). \tag{4.105}$$

Преобразование с функцией $c(x) = \left(\underline{\Lambda}(x), e\right)$ (здесь e — единица в K), при котором изменяется только сечение t в OS, соответствует локальному преобразованию системы координат в M:

$$\varphi^{(\sigma')}(x) = \left(\mathcal{D}\left(\underline{\Lambda}(x)^{-1}\right) \otimes \mathbb{1}_{V_\rho}\right)\varphi^{(\sigma)}(x). \tag{4.106}$$

Вычислим теперь ковариантную производную поля $\varphi^{(\sigma)}$. По определению $D\varphi^\sigma = \sigma^* D\varphi$. Тогда, согласно (4.101),

$$\begin{aligned}D\varphi^{(\sigma)} = \sigma^*\left(d\varphi + \delta'(\mu)\varphi\right) = d\varphi^{(\sigma)} + \delta'(\sigma^*\mu)\varphi^{(\sigma)} = \\ = d\varphi^{(\sigma)} + \mathcal{D}'(t^*\tau)\varphi^{(\sigma)} + \rho'(A^{(s)})\varphi^{(\sigma)},\end{aligned} \tag{4.107}$$

где мы очевидным образом упростили запись (4.102). 1-форма $A^{(\sigma)} = s^*\omega$ на M описывает калибровочное поле и была введена в § 1 главы 4. Если $l^{\mu\nu}$ — базис в алгебре Ли $\mathfrak{s}$ группы $SO(1, d-1)$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, d-1$), то ограничивая (3.16г) на расслоение ортонормальных реперов, получаем

$$t^*\tau = \frac{1}{2}\Gamma_{\nu\mu\rho} l^{\nu\rho} dx^\mu,$$

где $\Gamma_{\mu\nu\rho} = \gamma_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}$ — символы Кристофеля. Тогда второе слагаемое в правой части выражения (4.107) равно

$$\mathcal{D}'(t^*\tau)\varphi^\sigma = \frac{1}{2}\Gamma_{\mu\nu\rho}dx^\mu\left(X^{\nu\rho}\varphi^{(\sigma)}\right), \qquad (4.108)$$

где $X^{\nu\rho} = \mathcal{D}'(l^{\nu\rho})$ (ср. (4.98)) — генераторы представления $\mathcal{D}$ группы $\mathrm{Spin}(1, d-1)$, по которому преобразуется поле $\varphi^{(\sigma)}$.

Рассмотрим в качестве примеров скалярные и спинорные поля.

1. Скалярные поля. Скалярное поле на M преобразуется по тривиальному представлению $\mathcal{D}$ группы $\mathrm{Spin}(1, d-1)$ или, эквивалентно, по тривиальному представлению T группы $SO(1, d-1)$, т.е. $T(\Lambda)$ и $\mathcal{D}(\underline{\Lambda})$ суть единичные операторы для всех $\Lambda \in SO(1, d-1)$ и $\underline{\Lambda} \in \mathrm{Spin}(1, d-1)$ соответственно и $\mathcal{D}'(X) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{s}$. Поэтому, в данном случае предыдущие рассуждения можно было бы провести только с использованием расслоений $P(M, K)$ и $E(M, V_\rho, K, P)$. Предположим, что скалярное поле φ преобразуется по нетривиальному представлению калибровочной группы; при этом обычно его называют полем Хиггса. Так, в теории электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама $K = SU(2) \times U(1)$, ρ — фундаментальное представление и $V_\rho = \mathbb{C}^2$. В модели Джорджи—Глэшоу $K = SO(3)$, ρ — присоединенное представление, $V_\rho \cong \mathfrak{k} = so(3)$ (как векторное пространство) — алгебра Ли группы $SO(3)$. Согласно (4.101)

$$D\varphi = d\varphi + \rho'(\omega)\varphi. \qquad (4.109)$$

Форму степени d на M, инвариантную относительно калибровочных преобразований и являющуюся лагранжианом теории, обычно выбирают в виде

$$L = (D\varphi^{(\sigma)})^i \wedge (*D\varphi^{(\sigma)})^j h_{ij} + U(h_{ij}\varphi^{(\sigma)i}\varphi^{(\sigma)j})dv_M, \qquad (4.110)$$

где h_{ij} — метрический тензор ρ-инвариантной метрики в V_ρ (i — индекс, относящийся к пространству представления V_ρ), U — скалярная функция, играющая роль потенциала самодействия, а $dv_M = \sqrt{|\gamma|}dx^0 \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{d-1}$ — элемент объема в M.

В качестве примера рассмотрим абелеву калибровочную теорию, характеризуемую главным расслоением $P = M \times U(1)$ (электродинамика). Скалярное поле в этой теории описывается эквивариантным отображением $\varphi : P \to V_\rho = \mathbb{C}$ (все конечномерные представления группы $U(1)$ одномерны):

$$\varphi \circ \Psi_a = \rho(a^{-1})\varphi, \quad a \in U(1).$$

Мы реализуем представление ρ следующим образом:

$$\rho(a) = e^{iea}.$$

Здесь e — некоторая константа (заряд поля φ). Калибровочное преобразование (4.105) выглядит так:

$$\varphi^{(s')}(x) = \rho\big(a(x)^{-1}\big)\varphi^{(s)}(x) = e^{-iea(x)}\varphi^{(s)}(x), \tag{4.111}$$

где калибровочная функция $a : M \to U(1)$ связывает сечения s и s': $s'(x) = \Psi_{a(x)}s(x)$. Чтобы записать ковариантную производную в явном виде, вычислим величину $\rho'(A)$, где $A \in \mathfrak{k}$. Пусть поле A индуцирует однопараметрическую подгруппу $a_t = \exp(tA)$ в $K = U(1)$. Тогда

$$\rho'(A_e) = \rho'\left(\frac{d}{dt}a_t\bigg|_{t=0}\right) = \frac{d}{dt}\rho(a_t)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{iea_t}\bigg|_{t=0} = ieA.$$

Используя эту формулу, получаем выражение для ковариантной производной (4.109)

$$(D\varphi)(X) = d\varphi(X) + ie\omega(X)\varphi, \tag{4.112}$$

где X — векторное поле на P.

Вернемся к общему случаю скалярного поля в калибровочной теории на M с калибровочной группой K. Важную роль в теории поля играет явление спонтанного нарушения калибровочной симметрии, возникающее в том случае, когда основное состояние системы вырождено. На геометрическом языке спонтанное нарушение симметрии означает, что существует глобальное сечение $\phi : M \to E = E(M, V_\rho, K, P)$ такое, что $\phi(x) = \varphi_0 \in V_\rho$ для всех $x \in M$, где φ_0 — одно из основных состояний в теории. Например, если потенциал скалярного поля в (4.110) имеет вид $U\big(|\varphi|^2\big) = c\big(|\varphi|^2 - \mu^2\big)^2$, где c и μ константы, то $\varphi_0 = \mu\xi$ с единичным вектором $\xi : |\xi|^2 = h_{ij}\xi^i\xi^j = 1$. Пусть H — стационарная подгруппа точки φ_0 в V_ρ, т.е. $H = \{a \in K : \rho(a)\varphi_0 = \varphi_0\}$, и φ_0 является началом однородного пространства (орбиты) K/H. В этом случае сечение ϕ фактически является сечением расслоения $E(M, K/H, K, P)$. Тогда, согласно Предложению 2.9.3, расслоение $P(M, K)$ редуцируется к расслоению $Q = Q(M, H)$. Напомним, что подрасслоение $Q \subset P$ определяется условием $Q = \{q \in P : \varphi(q) = \varphi_0\}$, где φ — отображение из P в V_ρ, описывающее скалярное поле и отвечающее сечению ϕ.

Обычно требуют, чтобы при спонтанном нарушении симметрии для конфигурации φ_0 выполнялось условие $(D\varphi_0)_q(X) = 0$ для всех $q \in Q$ и всех $X \in \mathfrak{X}(Q)$. Так как $(d\varphi_0)_q(X) = 0$, то из (4.109) следует, что $(D\varphi_0)_q(X) = 0$ влечет

$$\rho'\left(\omega_q(X)\right)\varphi_0 = 0. \tag{4.113}$$

Это равенство означает, что ограничение $\tilde{\omega} = \omega|_Q$ формы связности ω на Q есть $\mathfrak{h}$ — значная форма в Q ($\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы H), т.е. связность в P редуцируется к связности в Q (см. § 10 главы 2).

Таким образом, в случае спонтанного нарушения симметрии калибровочная группа K нарушается до своей подгруппы H, теория задается расслоением $Q(M, H)$ и связностью в нем.

В силу Предложения 2.9.3 и равенства (4.113) верно обратное: если расслоение $P(M, K)$ редуцируется к $Q(M, H)$, $H \subset K$ и связность в P редуцируется к связности в Q, то в теории имеет место спонтанное нарушение симметрии и $(D\varphi)_q(X) = 0$ для всех $q \in Q$ и $X \in \mathfrak{X}(Q)$.

В качестве примера рассмотрим спонтанное нарушение симметрии в калибровочной теории, характеризуемой главным расслоением $P = S^2 \times SO(3)$. Пусть скалярное поле преобразуется по векторному трехмерному представлению ρ группы $SO(3)$, при этом $V_\rho = \mathbb{R}^3$. Мы будем параметризовать точки базы $M = S^2$ вектором $\hat{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, где $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Эквивариантное отображение $\varphi : P \to S^2$, описывающее скалярные поля, можно задать следующим образом: для точки $(\hat{r}, a) \in S^2 \times SO(3) = P$ $\left(\hat{r} \in S^2,\ a \in SO(3)\right)$

$$\varphi(\hat{r}, a) = \rho(a^{-1})\hat{r} f(x, y, z).$$

Очевидно, точка $\hat{r}_0 = (0, 0, 1) \in S^2$, являющаяся «северным» полюсом сферы, остается на месте при вращении вокруг z-оси, т.е. при преобразованиях из подгруппы $H = SO(2) \subset SO(3)$. Если в теории есть вакуумное состояние со значениями поля $\varphi_0 = \hat{r}_0 \in S^2 \subset V_\rho$, то происходит спонтанное нарушение симметрии и расслоение $P = S^2 \times SO(3)$ редуцируется к расслоению $Q = \left\{(\hat{r}, a) \in P : a^{-1}\hat{r} = \hat{r}_0\right\}$. Отсюда видно, что точки Q находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами $a \in SO(3)$, т.е. $Q = Q\left(S^2, SO(2)\right) \cong SO(3)$. Таким образом, редуцированное расслоение Q есть расслоение монопольного типа (так как $SO(2) \cong U(1)$), причем нетривиальное, отвечающее первому числу Черна $C_1(Q) = 2$.

2. Спинорные поля. Рассмотрим алгебру матриц Дирака Γ^a ($a = 0, 1, \ldots, d-1$) пространства M, реализованную матрицами размера $2^{[d/2]} \times 2^{[d/2]}$ ($[x]$ — целая часть числа x), удовлетворяющими антикоммутационному условию

$$\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = -2\eta^{ab},$$

где диагональная матрица $\eta^{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ есть метрический тензор плоской метрики. Эти соотношения отличаются от обычно используемых знаками перед η^{ab}. Однако при нашем выборе сигнатуры метрики это определение предпочтительнее, т.к. тогда $(\Gamma^a)^+ = -\Gamma_a$, и матрица Γ^0

5 Зак. 311

эрмитова. Поэтому для спинорного поля ψ можно положить $\bar{\psi} = \psi^+\Gamma^0$, и выражение $\bar{\psi}\Gamma^a\psi$ будет вектором с положительно определенной нулевой компонентой.

Спинорное поле ψ в M преобразуется по спинорному представлению группы $\mathrm{Spin}(1, d-1)$ размерности $2^{[d/2]}$. Если d четно, то это представление приводимо и может быть разложено на два неприводимых представления, отвечающих различным собственным значениям оператора киральности $\Gamma^{d+1} = (i)^{\frac{d+2}{2}}\Gamma^0\Gamma^1 \dots \Gamma^{d-1}$. Пусть $\mathcal{D}$ — спинорное представление группы $\mathrm{Spin}(1, d-1)$, а $\mathcal{D}'$ — соответствующее ему представление алгебры $\mathfrak{S}$; генераторы представления $\mathcal{D}$ получаются равными $\mathcal{D}'(e^{ab}) = -\frac{1}{4}[\Gamma^a, \Gamma^b]$. Выражение (4.108) в этом случае приводится к виду

$$\mathcal{D}'(t^*\tau)\psi^{(\sigma)} = -\frac{1}{8}\Gamma_{\mu ab}dx^\mu\left[\Gamma^a, \Gamma^b\right]\psi^\sigma,$$

где $\Gamma_{\mu ab} = \Gamma_{\mu\nu\rho}e_a^\nu e_b^\rho$, а матрицы e_a^ν связывают подвижный ортонормированный репер $\{e_a\}$ с ∂_μ. Поэтому компонента ковариантной производной (4.107) получается равной

$$D_\mu\psi^{(\sigma)} = \left(D\psi^{(\sigma)}\right)(\partial_\mu) = \partial_\mu\psi^{(\sigma)} + \tau_\mu\psi^{(\sigma)} + \rho'\left(A_\mu^{(s)}\right)\psi^{(\sigma)}, \tag{4.114}$$

где спиновая связность τ_μ есть

$$\tau_\mu = -\frac{1}{8}\Gamma_{\mu ab}\left[\Gamma^a, \Gamma^b\right].$$

При преобразовании системы координат в M с помощью элемента группы $SO(1, d-1)$ преобразование спинора выглядит так:

$$\psi^{(\sigma')}(x) = e^{\frac{1}{4}[\Gamma^a, \Gamma^b]\theta_{ab}}\psi^{(\sigma)}(x),$$

где $\sigma' = \psi_{\underline{\Lambda}}\sigma$ (см. (4.106), ср. (4.97)). Лагранжиан для спинорного поля $\psi^{(\sigma)}(x)$ имеет вид

$$L = \left\{\frac{i}{2}\bar{\psi}^{(\sigma)}\Gamma^a e_a^\mu D_\mu\psi^{(\sigma)} + h.c.\right\} dv_M.$$

Глава 5

Основы теории алгебр Ли

Алгебры Ли вначале возникли при анализе групп Ли, но затем стали объектом самостоятельного изучения. Аппарат теории алгебр Ли является мощным инструментом исследования свойств групп и их представлений. Он интенсивно используется также в современной теории поля, например, при изучении трансформационных свойств полей, при анализе схем нарушения калибровочной симметрии, при исследовании кварковой модели адронов, в задачах о размерной редукции многомерных теорий и т. д. В настоящей главе мы введем основные понятия теории алгебр Ли и обсудим структуру алгебр Ли. В главе 6 этот математический аппарат будет применен к построению моделей Хиггса в рамках метода размерной редукции. Для более глубокого изучения теории алгебр Ли можно рекомендовать книги Джекобсона [Дж], Гото и Гроссханса [ГГ], Барута и Рончки [БР], Кириллова [Ки], Кана [Ка].

§ 1. Основные понятия. Связь групп и алгебр Ли

В § 5 главы 2 мы определили алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G как множество левоинвариантных векторных полей или, эквивалентно, как касательное пространство T_eG. Был определен также коммутатор полей $X, Y \in \mathfrak{g}$ (см. (2.5), (2.39))

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \tag{5.1}$$

для любой гладкой функции f на G. Операцию, сопоставляющую каждой упорядоченной паре элементов X и Y из $\mathfrak{g}$ элемент $[X,Y] \in \mathfrak{g}$ будем рассматривать как произведение в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Нетрудно проверить, что такое произведение обладает следующими свойствами:

1) антикоммутативность: $[X,Y] = -[Y,X]$; (5.2а)

2) тождество Якоби: $\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0,$ (5.2б)

где $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Другие способы построения алгебры Ли по группе Ли обсуждаются, например, в книге [Ки].

Как уже отмечалось, в настоящее время теория алгебр Ли выделилась в самостоятельный раздел. Поэтому часто пользуются определением алгебры Ли, отличным от того, которое было дано в § 5 главы 2, и не связанным с группой, порождающей алгебру. Это определение полезно иметь в виду, поэтому сейчас мы перейдем к его формулировке.

Сначала напомним определение алгебры вообще. Пусть A — векторное пространство над полем P (мы будем рассматривать случаи $P = \mathbb{R}$ и $P = \mathbb{C}$). Введем в A произвольное билинейное отображение $f : A \times A \to A$; оно называется умножением. Тогда A — *алгебра* относительно f. Алгебра A называется *ассоциативной*, если $f(X, f(Y, Z)) = f(f(X, Y), Z)$, $X, Y, Z \in A$.

Определим теперь класс алгебр, называемых *алгебрами Ли*; в этом случае произведение $f(X, Y)$ будем обозначать $[X, Y]$. Алгебра A называется алгеброй Ли, если выполняются условия (5.2а, б). Очевидно, что $[X, X] = 0$.

Пусть L — алгебра Ли. Векторное пространство $K \subset L$ называется подалгеброй в L, если K — алгебра относительно умножения $[,]$, определенного в L, т. е. $[X, Y] \in K$ для всех $X, Y \in K$. В дальнейшем, если K, Q — подмножества в L, то через $[K, Q]$ мы будем обозначать множество всевозможных элементов вида $[X, Y]$, где $X \in K$, $Y \in Q$. Подалгебра I в алгебре Ли L называется *идеалом* алгебры L, если $[L, I] \subset I$. *Центр* алгебры L, обозначаемый обычно $Z(L)$, есть множество элементов $X \in L$ таких, что $[X, Y] = 0$ для всех $Y \in L$. Если K — подалгебра в L, то *централизатор* K в L определяется так: $C_L(K) = \{C \in L : [C, X] = 0$ для всех $X \in K\}$. Таким образом, центр $Z(L)$ есть централизатор всей алгебры. *Нормализатором* подалгебры K в L называется подалгебра, определяемая следующим образом: $N_L(K) = \{X \in L : [X, K] \subset K\}$. Пусть L и L' — алгебры Ли с определенными в них произведениями $[,]_L$ и $[,]_{L'}$ соответственно. Линейное отображение $\varphi : L \to L'$ называется гомоморфизмом алгебр Ли, если $\varphi([X, Y]_L) = [\varphi(X), \varphi(Y)]_{L'}$ для всех $X, Y \in L$.

Рассмотрим алгебры Ли K и Q с произведениями $[,]_K$ и $[,]_Q$. На прямой сумме векторных пространств $L = K \oplus Q$ можно ввести структуру алгебры Ли с произведением $[,]_L$ следующим образом:

$$\left[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)\right]_L = \left([X_1, X_2]_K, [Y_1, Y_2]_Q\right), \quad X_1, X_2 \in K, \quad Y_1, Y_2 \in Q.$$

Тогда L называется *прямой суммой* алгебр K и Q.

Пусть пространство алгебры Ли L представимо в виде прямой суммы $L = L_1 \oplus L_2$, причем каждое из слагаемых L_i ($i = 1, 2$) является подалгеброй относительно ограничения произведения $[,]_L$ на L_i. Если только одна из подалгебр, скажем L_2, является к тому же идеалом алгебры L, то L называется *полупрямой суммой* алгебр L_1 и L_2, $L = L_2 \ni L_1$.

Алгебра Ли называется *абелевой*, если $[L, L] = 0$. Алгебра Ли L называется *простой*, если она неабелева и имеет лишь два (тривиальных) идеала: $\{0\}$ и L. Если же L не содержит нетривиальных абелевых идеалов, то она называется *полупростой*.

Вернемся снова к вопросу о связи между алгебрами Ли и группами Ли. Пусть a_t — однопараметрическая подгруппа группы Ли G (см. § 5 главы 2), а X — вектор, касательный к a_t в точке $a_0 = e$; мы будем писать $X = \dot{a}_0$. Такой вектор $X \in \mathfrak{g}$ называется генератором (или *инфинитезимальным оператором*) однопараметрической группы a_t (ср. (6.2)). Можно доказать (см. [Ки, § 6.4]), что для каждого вектора $X \in \mathfrak{g}$ существует единственная однопараметрическая подгруппа a_t такая, что $X = \dot{a}_0$. В § 5 главы 2 мы уже определили *экспоненциальное отображение* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ следующим образом: для $X \in \mathfrak{g}$

$$\exp(X) = a_1, \tag{5.3}$$

где a_t — однопараметрическая подгруппа, отвечающая вектору X. Тогда элемент $a_t \in G$ можно записать в виде $\exp(tX)$ или e^{tX}.

Экспоненциальное отображение диффеоморфно отображает некоторую окрестность нуля в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ на некоторую окрестность единицы группы G.

Справедлива следующая теорема Адо, которую мы приведем без доказательства: всякая алгебра Ли над полем комплексных чисел изоморфна некоторой матричной алгебре. Для групп Ли соответствующая теорема справедлива лишь локально. Теорема Адо позволяет сводить доказательства многих утверждений об алгебрах Ли к случаю матричных алгебр Ли. При этом полезно иметь в виду следующие свойства матриц. Пусть M — произвольная $n \times n$ матрица с элементами M_{ij}. Если $|M_{ij}| < \infty$ для всех i и j, то

$$\exp(M) = 1 + M + \frac{M^2}{2!} + \ldots + \frac{M^k}{k!} + \ldots \tag{5.4а}$$

всегда существует (ряд (5.4) абсолютно сходится). Приведя матрицу M к нормальной жордановой форме, можно доказать равенство (задача 5.4):

$$\det e^M = e^{\operatorname{tr} M}. \tag{5.4б}$$

Рассмотрим теперь примеры алгебр Ли.

Пример 1. Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра Ли с законом умножения f. Введем в A новое умножение по формуле $\tilde{f}(X,Y) = f(X,Y) - f(Y,X)$, $X, Y \in A$. Алгебра A относительно умножения $\tilde{f}$ становится алгеброй Ли, а $\tilde{f}(\,,)$ обозначают $[\,,]$.

Пример 2. Пусть V — векторное пространство над полем P, а $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n = \dim V)$ — базис векторов в V. Рассмотрим ассоциативную алгебру всех линейных отображений пространства V в себя, обозначаемую обычно $gl(V)$. Для всякого отображения $\varphi : V \to V$ из $gl(V)$ элемент $\varphi(e_j) \in V$ можно снова разложить по выбранному базису. Положим $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} S_{ij} e_i$ $(S_{ij} \in P)$. Существует изоморфизм между $gl(V)$ и ассоциативной алгеброй всех матриц размером $n \times n$, обозначаемой $gl(n, P)$, который задается так:

$$gl(V) \ni \varphi \mapsto S = \begin{pmatrix} S_{11}\, S_{12} \ldots S_{1n} \\ S_{21}\, S_{22} \ldots S_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{n1} S_{n2} \ldots S_{nn} \end{pmatrix} \in gl(n, P).$$

Согласно примеру 1 $gl(V)$ и $gl(n, P)$ являются алгебрами Ли относительно скобочного умножения $[\,,]$ (коммутатора в случае матриц).

Пример 3. В таблице 5.1 приведены группы Ли G, являющиеся подгруппами в $GL(n, P)$, и их алгебры Ли $\mathfrak{g}$, часто используемые в физике (отметим, что таблицы 5.1 и 5.2 основаны на табл. 3 из [ЛБ]). Там же приведены условия, налагаемые на элементы $g \in GL(n, P)$, определяющие данную группу. Условия на элементы соответствующей алгебры получаются из свойств экспоненциального отображения, в частности, из (5.4б). Значок «T» означает транспонирование, матрица F_{2n} определена в (5.5), $P = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Для алгебр из этой таблицы в случае $P = \mathbb{C}$ используются также другие стандартные обозначения (мы тоже будем их широко использовать): $A_n = sl(n+1, \mathbb{C})$, $B_n = so(2n+1, \mathbb{C})$, $C_n = sp(n, \mathbb{C})$, $D_n = so(2n, \mathbb{C})$.

Таблица 5.1.

Группа G	Условия, наложенные на элементы		Алгебра $\mathfrak{g}$
	$g \in GL(n,P)$	$X \in gl(n,P)$	
$SL(n,P)$	$\det g = 1$	$\operatorname{tr} X = 0$	$sl(n,P)$
$SO(n,P)$	$\det g = 1$ $g^{-1} = g^T$	$X^T = -X$	$so(n,P)$
$Sp(n,P)$	$F_{2n}^{-1} g^T F_{2n} = g^{-1}$	$X^T F_{2n} + F_{2n} X = 0$	$sp(n,P)$

Помимо алгебр A_n, B_n, C_n и D_n в физике часто приходится иметь дело с их овеществлениями и вещественными формами. Сейчас мы введем эти понятия.

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{C}$ и его комплексная размерность $\dim_{\mathbb{C}} V = n$. Будем теперь рассматривать V как пространство над $\mathbb{R}$ (например, если $\{v_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — базис в V над $\mathbb{C}$, то $\{v_1, \ldots, v_n, iv_1, \ldots, iv_n\}$ — базис в V над $\mathbb{R}$). Тогда мы получим векторное пространство $V_\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$ вещественной размерности $\dim_\mathbb{R} V_\mathbb{R} = 2n$; $V_\mathbb{R}$ называется *овеществлением* V. Если на V задана структура алгебры Ли, то она тривиально переносится на $V_\mathbb{R}$.

Пусть теперь L — алгебра Ли над $\mathbb{R}$ вещественной размерности $\dim_\mathbb{R} L = n$. Расширяя поле коэффициентов до $\mathbb{C}$, мы получим алгебру Ли L^c над $\mathbb{C}$ комплексной размерности $\dim_C L^c = n$, которая называется *комплексификацией* алгебры L. Очевидно, $L^c = L \underset{\mathbb{R}}{\oplus} iL$ (прямая сумма векторных пространств над $\mathbb{R}$). Произведение $[\,,]$ распространяется на L^c по линейности: если X_1, Y_1, X_2, $Y_2 \in L$, то

$$[X_1 + iY_1, X_2 + iY_2] = [X_1, X_2] - [Y_1, Y_2] + i\left([X_1, Y_2] + [Y_1, X_2]\right).$$

Рассмотрим алгебру Ли $\widetilde{L}$ над $\mathbb{C}$. *Вещественной формой* $\widetilde{L}$ называется подалгебра L в $\widetilde{L}_\mathbb{R}$ такая, что $L^c = \widetilde{L}$. Ясно, что $\dim_C \widetilde{L} = \dim_\mathbb{R} L$ и $\widetilde{L} = L \oplus iL$. Данная алгебра Ли $\widetilde{L}$ над $\mathbb{C}$ может иметь несколько неизоморфных вещественных форм. Это видно из таблицы 5.2, в которой приведены овеществления и вещественные формы для алгебр Ли из таблицы 5.1, там же указаны и условия, налагаемые на элементы этих алгебр. Здесь черта означает комплексное сопряжение, «+» — эрмитово сопряжение, а матрицы $I_{p,q}$, F_{2r} и $K(p,q)$ следующие:

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_q & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_p \end{pmatrix}, \quad F_{2r} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_r \\ -\mathbb{1}_r & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{p,q} = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

где $\mathbb{1}_r$ — единичная матрица размера $r \times r$.

Компактные вещественные формы, к которым относятся два последних столбца таблицы, будут введены в следующем параграфе.

Если L — алгебра Ли над $\mathbb{R}$, то при комплексификации подалгебра (идеал) переходит в подалгебру (идеал) в L^c, если L полупроста, то и L^c полупроста и наоборот. Схематически это можно изобразить так:

$$\begin{gathered} L \longrightarrow L^c \\ \text{подалгебра} \longrightarrow \text{подалгебра} \\ \text{идеал} \longrightarrow \text{идеал} \\ \text{полупростота} \rightleftarrows \text{полупростота}. \end{gathered} \tag{5.6a}$$

Подчеркнем, что подалгебры и идеалы в L^c могут не иметь аналогов в L (см. пример 5 ниже).

Пусть L — алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $L_\mathbb{R}$ — ее овеществление. Схема,

Таблица 5.2.

алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ над $\mathbb{C}$	овеществление $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$	вещественная форма $\mathfrak{g} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$	условия на $X \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$	компактная вещественная форма $\hat{\mathfrak{g}} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$	условия на $X \in \hat{\mathfrak{g}} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$
A_n $n \geqslant 1$	$sl(n+1,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$	$sl(n+1,\mathbb{R})$	$\operatorname{tr} X = 0$	$su(n+1)$	$\operatorname{tr} X = 0$ $X^+ = -X$
		$su(p,q), p+q=n+1$	$\operatorname{tr} X = 0$ $X^+ I_{p,q} + I_{p,q} X = 0$		
		$su^*(n+1)$, $n+1=2k$	$\operatorname{tr} X = 0$ $\bar{X} F_{2k} - F_{2k} X = 0$		
B_n $n \geqslant 1$	$so(2n+1,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$	$so(p,q)$ $p+q=2n+1$	$X^T I_{p,q} + I_{p,q} X = 0$	$so(2n+1)$	$X^T = -X$
C_n $n \geqslant 1$	$sp(n,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$	$sp(n,\mathbb{R})$	$X^T F_{2n} + F_{2n} X = 0$	$sp(n)$	$X^T F_{2n} + F_{2n} X = 0$ $X^+ + X = 0$
		$sp(p,q)$, $p+q=n$	$X^T F_{2n} + F_{2n} X = 0$ $X^+ K_{p,q} + K_{p,q} X = 0$		
D_n $n \geqslant 2$	$so(2n,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$	$so(p,q)$ $p+q=2n$	$X^T I_{p,q} + I_{p,q} X = 0$	$so(2n)$	$X^T + X = 0$
		$so^*(2n)$	$X^T + X = 0$ $\bar{X} F_{2n} - F_{2n} X = 0$		

аналогичная (5.6а), имеет вид:

$$\begin{array}{rcl} L & \longrightarrow & L_{\mathbb{R}} \\ \text{подалгебра} & \longrightarrow & \text{подалгебра} \\ \text{идеал} & \longrightarrow & \text{идеал} \\ \text{полупростота} & \rightleftarrows & \text{полупростота} \\ \text{простота} & \rightleftarrows & \text{простота.} \end{array} \tag{5.6б}$$

Если $\widetilde{L}$ — алгебра Ли над $\mathbb{C}$, а L — ее вещественная форма, то

$$\begin{array}{rcl} L & \longrightarrow & \widetilde{L} \\ \text{подалгебра} & \longrightarrow & \text{подалгебра} \\ \text{идеал} & \longrightarrow & \text{идеал} \\ \text{полупростота} & \rightleftarrows & \text{полупростота,} \end{array} \tag{5.6в}$$

но не всякой подалгебре в $\widetilde{L} = L^c$ соответствует подалгебра в L.

Пример 4. Простая алгебра $so(3,\mathbb{R})$ после комплексификации остается простой алгеброй Ли: $so(3,\mathbb{R})^c \cong so(3,\mathbb{C})$.

Пример 5. Рассмотрим вещественную простую алгебру Ли $\mathfrak{g} = so(3,1)$, являющуюся алгеброй Ли группы Лоренца $G = SO(3,1)$.

Выберем в $\mathfrak{g}$ стандартный базис $\{l_i, n_j\}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, удовлетворяющий коммутационным соотношениям:

$$[l_i, l_j] = \varepsilon_{ijk} l_k, \quad [l_i, n_j] = \varepsilon_{ijk} n_k, \quad [n_i, n_j] = -\varepsilon_{ijk} l_k. \tag{5.7}$$

Подалгебра, натянутая на элементы l_j $(j = 1, 2, 3)$, является алгеброй $so(3)$ и отвечает пространственным вращениям. Выберем в $\mathfrak{g}^c = so(3, 1)^c$ базис $\{u_i, v_j\}$, где $u_i = (l_i + in_i)/2$, $v_j = (l_j - in_j)/2$. Легко проверить, что

$$[u_i, u_j] = \varepsilon_{ijk} u_k, \quad [v_i, v_j] = \varepsilon_{ijk} v_k, \quad [u_i, v_j] = 0,$$

т. е. линейные оболочки элементов $\{u_i\}$ и $\{v_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ являются идеалами в $\mathfrak{g}^c$, изоморфными $so(3, \mathbb{C})$. Т.о. $so(1, 3)^c = so(3, \mathbb{C}) \oplus so(3, \mathbb{C})$ (см. таблицу 5.2), в то время как в исходной алгебре $\mathfrak{g}$ не было нетривиальных идеалов.

Пример 6. Пусть $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C})$, возьмем базис $\{-\frac{i}{2}\tau_j\}$ $(j = 1, 2, 3)$, где τ_j — матрицы Паули. После овеществления базис в $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ выберем в виде $\{l_i, n_j\}$, где $l_i = -\frac{i}{2}\tau_i$, $n_j = \frac{1}{2}\tau_j$. Легко проверить, что коммутационные соотношения в этом базисе совпадают с (5.7). Следовательно, $sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}} \cong so(3, 1)$.

Группы Ли, алгебры которых приведены в таблицах 1 и 2, и сами алгебры называются *классическими*. Классические группы определяются как группы, оставляющие инвариантными те или иные формы χ на векторном пространстве V, т. е. как группы преобразований $g : V \to V$, $g \in G$ таких, что $\chi(g(u), g(v)) = \chi(u, v)$ для всех $u, v \in V$. Так, например, группа $SO(k, \mathbb{C})$ есть группа всех матриц из $SL(k, \mathbb{C})$, которые сохраняют в $\mathbb{C}^k$ форму

$$\chi(z, z') = z_1 z_1' + z_2 z_2' + \ldots + z_k z_k' = z_i (\mathbb{1})_{ij} z_j' = z^T z'.$$

$SO(p, q)$, $p + q = k$ есть группа всех матриц из $SL(k, \mathbb{R})$, сохраняющих в $\mathbb{R}^k$ форму

$$\chi(x, x') = x_1 x_1' + \ldots + x_q x_q' - x_{q+1} x_{q+1}' - \ldots - x_k x_k' = x_i (I_{p,q})_{ij} x_j' = x^T I_{p,q} x'.$$

(Относительно локальных классических групп см., например, [БР, гл. 3]).

В заключение параграфа отметим, что каждой алгебре Ли L (с $\dim L < \infty$) соответствует единственная связная односвязная группа Ли G такая, что ее алгебра Ли есть L. Все остальные связные группы Ли, алгебры Ли которых также совпадают с L, имеют вид G/H, где H — дискретная подгруппа, принадлежащая центру группы G.

§ 2. Представления алгебр и форма Киллинга

Пусть V — векторное пространство над полем P и L — алгебра Ли над P. Будем рассматривать $gl(V)$ (см. пример 2 § 1) как алгебру над P. Всякий гомоморфизм $r : L \to gl(V)$ называется *представлением алгебры Ли* L. Это отображение удовлетворяет следующим условиям:

$$r(aX + bY) = a\,r(X) + b\,r(Y), \tag{5.8а}$$

$$r([X,Y]) = [r(X), r(Y)] = r(X)r(Y) - r(Y)r(X) \tag{5.8б}$$

для всех $X, Y \in L$, $a, b \in P$. Мы будем обозначать такое представление (V, r).

Среди различных представлений алгебр Ли важную роль играет присоединенное представление. В § 5 главы 2 мы определили внутренний автоморфизм S_a группы G формулой

$$S_a g = aga^{-1}, \quad a, g \in G,$$

а также ввели дифференциал этого отображения $\mathrm{ad}(a) = S'_a$, который задает присоединенное представление группы G в линейном пространстве $\mathfrak{g} \cong T_e G$. Заметим, что если G — матричная группа, а $\mathfrak{g}$ — соответствующая матричная реализация ее алгебры, то действие $\mathrm{ad}(a)$, $a \in G$ можно вычислить по формуле:

$$\mathrm{ad}(a)X = aXa^{-1}, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Пусть a_t — однопараметрическая подгруппа, отвечающая вектору $X \in \mathfrak{g}$, т.е. $X = \dot{a}_t|_{t=0}$. Рассмотрим производную отображения $\mathrm{ad}\,a_t$ в точке $t = 0$ и обозначим ее также $\mathrm{ad}\,X$. Используя формулу (2.42), получаем для $Y \in \mathfrak{g}$:

$$\mathrm{ad}\,X(Y) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{ad}(a_t)Y - Y}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Y - \mathrm{ad}(a_t^{-1})Y}{t} = [X, Y] \tag{5.9}$$

С помощью тождества Якоби легко показать, что свойства (5.8) для $r = \mathrm{ad}$ выполняются и, следовательно, отображение $\mathrm{ad} : L \to gl(L)$ задает представление (L, ad), которое называется *присоединенным представлением* алгебры Ли L. Операция $\mathrm{ad}\,X$, $X \in L$ является естественным действием элементов алгебры Ли на самой алгебре и позволяет использовать результаты теории представлений для изучения свойств алгебр Ли.

Рассмотрим теперь две последовательности идеалов в L (см. задачу 5.3):

а) центральная (убывающая) последовательность:

$$L^1 = L, \quad L^2 = [L, L], \quad L^3 = \left[L^2, L\right], \quad \ldots, \quad L^k = \left[L^{k-1}, L\right], \quad \ldots,$$
$$L \supset L^1 \supset L^2 \supset L^3 \supset \ldots;$$

б) производная последовательность:

$$L^{(1)} = [L, L], \quad L^{(2)} = \left[L^{(1)}, L^{(1)}\right], \quad \ldots, \quad L^{(k+1)} = \left[L^{(k)}, L^{(k)}\right], \quad \ldots,$$
$$L \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \ldots .$$

Алгебру L называют *нильпотентной* (*разрешимой*), если $L^k = 0$ ($L^{(k)} = 0$) при некотором k.

Предложение 5.2.1. Всякая нильпотентная алгебра разрешима.

Докажем по индукции, что $L^{(k)} \subset L^{k+1}$. Действительно, $L^{(1)} = L^2$. Предположим, что $L^{(k-1)} \subset L^k$. Тогда

$$L^{(k)} = \left[L^{(k-1)}, L^{(k-1)}\right] \subset \left[L^k, L^{(k-1)}\right] \subset \left[L^k, L\right] = L^{k+1}.$$

Отсюда следует утверждение предложения. □

Частным случаем нильпотентной (и разрешимой) алгебры является абелева алгебра, для которой $L^2 = L^{(1)} = 0$. Если L — разрешима, т. е. $L^{(k)} = 0$ для некоторого k, то $L^{(k-1)}$ — абелев идеал в L. Таким образом, разрешимая алгебра всегда содержит нетривиальный абелев идеал. Наибольший разрешимый идеал в алгебре Ли L называется *радикалом* алгебры Ли L. Можно доказать, что L полупроста тогда и только тогда, когда ее радикал равен нулю. Более того, справедлива следующая фундаментальная теорема Леви—Мальцева (доказательство приведено, например, в [Ше]):

Пусть L — алгебра Ли над P ($P = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с радикалом N. Тогда существует полупростая подалгебра $S \subset L$ такая, что

$$L = N \ni S \quad \text{(полупрямая сумма).} \tag{5.10}$$

Очевидно, что $[N, N] \subset N$, $[S, S] \subset S$, $[N, S] \subset N$.

Пример 1. Алгебра Ли Π группы Пуанкаре состоит из простой алгебры Ли $M = so(3,1)$ группы Лоренца и идеала t^4, образованного линейными комбинациями операторов импульса P_ν ($\nu = 0, 1, 2, 3$). Как хорошо известно, $[M, M] \subset M$, $[t^4, M] \subset t^4$, $[t^4, t^4] = 0$. В соответствии с теоремой Леви—Мальцева $\Pi = t^4 \ni M$.

Эта теорема позволяет свести изучение произвольных алгебр Ли к изучению полупростых и разрешимых алгебр. Структура полупростых будет обсуждаться в следующих параграфах. Разрешимые алгебры Ли, хотя и имеют, как кажется, более простую структуру, до сих пор не поддаются классификации.

Пример 2. Пусть V — векторное пространство над полем P, $\mathbb{1}$ — тождественное отображение в V, а $\mathfrak{Z}(V) = P \cdot \mathbb{1} \subset gl(V)$.

Очевидно, что одномерная подалгебра $\mathfrak{Z}$ принадлежит центру $Z(gl(V))$ и потому является идеалом в $gl(V)$. Если $X \in gl(V)$, то

$$X = X_1 + X_2, \quad X_1 = X - \frac{\operatorname{tr} X}{\dim V}\mathbb{1}, \quad X_2 = \frac{\operatorname{tr} X}{\dim V}\mathbb{1},$$

$X_1 \in sl(V)$, $X_2 \in \mathfrak{Z}(V)$. Так как $sl(V) \cap \mathfrak{Z}(V) = 0$, то $gl(V) = sl(V) \oplus \mathfrak{Z}(V)$.

Пример 3. Аналогично предыдущему, можно показать, что $u(n) = su(n) \oplus \mathfrak{Z}$, где $u(n) = \{X \in gl(n,\mathbb{C}) : X^+ = -X\} \subset gl(n,\mathbb{C})$, а $\mathfrak{Z} = \mathbb{C}\mathbb{1}_n$, $\mathbb{1}_n$ — единичная матрица в $gl(n,\mathbb{C})$.

Справедлива следующая теорема Картана: пусть V — векторное пространство над P и L — подалгебра алгебры $gl(V)$. Тогда L либо полупроста, либо $L = \widetilde{L} \oplus \mathfrak{Z}(V)$, где $\widetilde{L}$ — полупростой идеал.

Важную роль в изучении свойств алгебр играют билинейные формы. Рассмотрим алгебру Ли L как векторное пространство над P. *Симметричная билинейная* форма на L — это отображение $\omega : L \times L \to P$ такое, что

$$\begin{aligned} &1)\quad \omega(X,Y) = \omega(Y,X), \qquad X,Y \in L;\\ &2)\quad \omega \quad \text{билинейно.} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Если ω удовлетворяет условию $\omega([X,Y],Z) = \omega(X,[Y,Z])$, то она называется *инвариантной формой.*

Предложение 5.2.2. Пусть L — алгебра Ли и (V,r) — ее представление. Тогда равенство

$$\omega_r(X,Y) = \mathrm{tr}(r(X)r(Y)), \qquad X,Y \in L \tag{5.12}$$

определяет симметричную инвариантную билинейную форму на L.

Доказательство. Свойства (5.11) очевидны. Проверим инвариантность:

$$\begin{aligned} \omega_r([X,Y],Z) &= \mathrm{tr}(r([X,Y])r(Z)) = \mathrm{tr}([r(X),r(Y)],r(Z)) = \\ &= \mathrm{tr}(r(X)r(Y)r(Z)) - \mathrm{tr}(r(Y)r(X)r(Z)) = \\ &= \mathrm{tr}(r(X),[r(Y),r(Z)]) = \mathrm{tr}(r(X),r([Y,Z])) = \omega_r(X,[Y,Z]). \ \square \end{aligned}$$

Если $(V,r) = (L,\mathrm{ad})$, то форма ω_{ad} называется *формой Киллинга* алгебры L. Мы будем обозначать ее

$$B(X,Y) \equiv \omega_{\mathrm{ad}}(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,X\ \mathrm{ad}\,Y). \tag{5.13}$$

Форма ω называется невырожденной, если равенство $\omega(X,L) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $X = 0$.

Форма Киллинга играет фундаментальную роль в теории алгебр Ли, что видно уже из двух нижеследующих предложений.

Предложение 5.2.3. Алгебра Ли L разрешима тогда и только тогда, когда $B(X,Y) = 0$ для любых $X,Y \in L^{(1)}$. Если L нильпотентна, то $B \equiv 0$ на $L^{(1)}$ (см. [ГГ]).

Предложение 5.2.4 (теорема Картана). Алгебра Ли L полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга невырождена.

Полное доказательство см., например, в [БР]. Здесь мы приведем доказательство в одну сторону, а именно, покажем, что если B — невырождена, то L — полупроста. Предположим противное: пусть L — не полупроста и имеет абелев идеал $I \subset L$. Выберем базис $\{X_i\}$ в L. Тогда $\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y X_i = [X, [Y, X_i]] = \sum\limits_j C_{ij}(X, Y) X_j$, где $C_{ij}(X, Y)$ — некоторые числовые коэффициенты. По определению $B(X, Y) = \sum\limits_i C_{ii}(X, Y)$. Рассмотрим величину $B(Z, X)$ при $Z \in I$, $X \in L$.

i) $\operatorname{ad}(Z)\operatorname{ad}(X)Y = [Z, [X, Y]] = 0$ при $Y \in I$, так как $[X, Y] \in I$;

ii) $\operatorname{ad}(Z)\operatorname{ad}(X)Y = [Z, [X, Y]] \in I$ при $Y \notin I$, так как I — идеал.

Следовательно, коэффициенты $C_{ii}(Z, X) = 0$ для всех i и $B(Z, X) = 0$, т. е. форма Киллинга вырождена. Итак, L — полупроста. □

Билинейная симметричная форма s называется скалярным произведением, если $s(X, X) > 0$ при $X \neq 0$. Алгебра Ли над $\mathbb{R}$ называется *компактной*, если она обладает инвариантным скалярным произведением. Это название оправдывается тем, что алгебра Ли компактной группы Ли компактна. Так как в комплексной алгебре L любая билинейная форма является индефинитной, то всякая комплексная алгебра Ли L некомпактна, а компактная алгебра является некоторой вещественной формой в L. Примеры компактных вещественных форм приведены в таблице 5.2 (их способ построения мы опишем в § 4). Справедливо следующее свойство (см. [БР]): всякая компактная алгебра Ли L является прямой суммой $L = N \oplus \widetilde{L} = N \oplus L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$ идеалов, где N — центр L, $\widetilde{L}$ — полупростая, а L_i — простые алгебры.

Приведем теперь некоторые из обсуждавшихся выше формул в базисе $\{X_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots, \dim L$) в L. Любые элементы алгебры могут быть разложены по этому базису: $X = x^i X_i$, $Y = y^i X_i$. Если C^i_{jk} — структурные константы в этом базисе, т. е. $[X_i, X_j] = C^k_{ij} X_k$, то легко убедиться, что $(\operatorname{ad}(X)Y)^i = [X, Y]^i = C^i_{jk} x^j y^k$ и матрица присоединенного представления $(\operatorname{ad} X)^i_j = C^i_{lj} x^l$. Тогда форма Киллинга может быть записана как

$$B(X, Y) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} X)(\operatorname{ad} Y)) = (\operatorname{ad} X)^i_j (\operatorname{ad} Y)^j_i =$$

$$= C^i_{lj} C^j_{si} x^l y^s = g_{ls} x^l y^s, \qquad (5.14)$$

где $g_{ls} = C^i_{lj} C^j_{si}$ — симметричный тензор второго ранга, называемый метрическим тензором Картана.

Если алгебра Ли компактна, то можно выбрать такой базис, что $(-g_{ls}) = \delta_{ls}$ (см. § 4). Покажем, что при этом структурные константы могут быть представлены полностью антисимметричным тензором третьего ранга. Определим $C_{rsl} = C^i_{rs} g_{il}$. Очевидно, $C_{rsl} = -C_{srl}$. Далее,

$$-C_{srl} = C_{rsl} = \sum_i C^i_{rs} B(X_i, X_l) = B([X_r, X_s], X_l) =$$
$$= B(X_r, [X_s, X_l]) = C^i_{sl} g_{ir} = C_{slr},$$

где мы воспользовались инвариантностью формы Киллинга. Таким образом, тензор C_{rsl} полностью антисимметричен. Если $g_{ir} = -\delta_{ir}$, то

$$C_{slr} = -C^r_{sl}.$$

Согласно (5.10) любая алгебра Ли может быть представлена в виде полупрямой суммы разрешимой и полупростой подалгебр. Задача классификации всех полупростых алгебр Ли сводится к задаче классификации простых алгебр Ли в силу следующего предложения.

Предложение 5.2.5 (теорема Картана). Полупростая алгебра Ли L может быть разложена в прямую сумму попарно ортогональных простых подалгебр L_i:

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k. \tag{5.15}$$

Это разложение единственно.

Доказательство. Пусть N — ненулевой идеал полупростой алгебры Ли L. Обозначим $N^\perp$ его ортогональное дополнение (по отношению к форме Киллинга), т. е. $N^\perp = \{X \in L : B(X, N) = 0\}$. Покажем, что $N^\perp$ — также идеал. Пусть $X \in N^\perp$, тогда для любого $Y \in N$ и $Z \in L$ в силу инвариантности формы Киллинга получаем:

$$B([Z, X], Y) = B(\mathrm{ad}(Z)X, Y) = -B(X, \mathrm{ad}(Z)Y) = -B(X, [Z, Y]) = 0.$$

Таким образом, для любого $Z \in L$ $[Z, X] \in N^\perp$, т. е. $N^\perp$ — идеал в L. Легко понять, что $N \cap N^\perp$ — также идеал в L и, если $X \in N \cap N^\perp$, то $B(X, X) = 0$.

Заметим, что если I — некоторый идеал в L, то, вообще говоря, нужно было бы различать значения формы Киллинга, взятые по отношению к I (будем обозначать их $B(,)_I$) и по отношению ко всей алгебре L (сохраним прежнее обозначение $B(,)$). Мы покажем сейчас, что для $X, Y \in I$ $B(X, Y)_I = B(X, Y)$. Пусть $\{X_{\bar 1}, X_{\bar 2}, \ldots, X_{\bar r}, X_{r+1}, \ldots, X_n\}$ — базис в L, причем $\{X_{\bar 1}, \ldots, X_{\bar r}\}$ — базис в I. Тогда согласно (5.14) для $X, Y \in I$, $X = x^{\bar\imath} X_{\bar\imath}$, $Y = y^{\bar\imath} X_{\bar\imath}$,

$$B(X, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X\ \mathrm{ad}\, Y) = C^i_{\bar l j} C^j_{\bar s i} x^{\bar l} y^{\bar s} =$$
$$= C^{\bar\imath}_{\bar l \bar\jmath} C^{\bar\jmath}_{\bar s \bar\imath} x^{\bar l} y^{\bar s} = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X\ \mathrm{ad}\, Y)_I = B(X, Y)_I.$$

Применяя этот результат для идеала $I = N^\perp \cap N$ и используя Предложение 5.2.3, получаем, что $N \cap N^\perp$ — разрешимый идеал. Так как L

полупроста, то $N \cap N^{\perp} = \varnothing$. Следовательно

$$L = N \oplus N^{\perp}, \quad [N, N^{\perp}] = 0 \quad \text{и} \quad B(N, N^{\perp}) = 0.$$

Если N или $N^{\perp}$ полупросты, то мы повторяем процедуру до тех пор, пока L не разложится в прямую сумму простых попарно ортогональных некоммутативных подалгебр, т. е. пока не представим L в виде (5.15).

Пусть $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_l$ — другое разложение алгебры L на простые идеалы. Возьмем некоторый простой идеал M_s, которого нет среди идеалов L_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Тогда

$$[M_s, L_i] \subset M_s \cap L_i = \varnothing, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Значит, M_s принадлежит центру алгебры L, который равен нулю в силу полупростоты L. Следовательно, разложение (5.15) единственно (с точностью до перестановки). □

§ 3. Подалгебра Картана

Важную информацию об алгебре Ли L можно получить, исследуя характеристические многочлены эндоморфизмов $\operatorname{ad} X$, $X \in L$. Напомним, что, если V — векторное пространство и $\varphi \in gl(V)$, то характеристический многочлен линейного отображения φ есть $\chi(t) = \det(t \cdot \mathbb{1}_V - \varphi)$, где $\mathbb{1}_V$ — тождественное отображение V на себя. В частности, в соответствии с теоремой Кэли—Гамильтона, оператор $\chi(\varphi) \equiv 0$.

Пусть $\{X_1, \ldots, X_n\}$ — базис в L и $X_u = u_1 X_1 + u_2 X_2 + \ldots + u_n X_n$ — элемент из L, где $u_i \in P$, а $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — n-мерный вектор из P^n. Мы изучим свойства характеристического многочлена $\chi(t, u)$ эндоморфизма $\operatorname{ad} X_u$:

$$\chi(t, u) = \det(t \cdot \mathbb{1}_L - \operatorname{ad} X_u) = t^n + g_{n-1}(u) t^{n-1} + \ldots + g_0(u). \qquad (5.16)$$

Здесь $g_i(u)$ являются полиномами от $u_1, \ldots, u_n$. Так как $\operatorname{ad} X_u(X_u) = 0$, то преобразование $\operatorname{ad} X_u$ имеет нулевое собственное значение и, следовательно, $g_0(u) = \chi(0, u) = \det(-\operatorname{ad} X_u) = 0$. Нулевое собственное значение может быть, вообще говоря, вырожденным. Это означает, что существует номер l такой, что $g_0(u) \equiv \ldots \equiv g_{l-1}(u) \equiv 0$ и $g_l(u) \not\equiv 0$, т. е. 0 является собственным значением кратности $\geqslant l$ для всех $X_u \in L$. Число l называется *рангом* алгебры L, $\operatorname{rank} L = l$. Если элемент $X_{\bar u} \in L$ такой, что нулевое собственное значение имеет кратность точно l и $g_l(\bar u) \neq 0$, то он называется ***регулярным элементом*** алгебры L.

Предложение 5.3.1. Пусть L — алгебра Ли ранга l над P и X — регулярный элемент алгебры L. Представим характеристический

многочлен $\chi(t)$ эндоморфизма $\operatorname{ad} X$ в виде $\chi(t) = t^l \chi_1(t)$, где $\chi_1(0) \neq 0$, и определим $H = \chi_1(\operatorname{ad} X)L$ и $L^* = (\operatorname{ad} X)^l L$. Тогда
1) $L = H \oplus L^*$;
2) H — подалгебра в L и $\dim H = l$;
3) $[H, L^*] = [X, L^*] = L^*$;
4) подалгебра H совпадает со своим нормализатором в L, т.е. $N_L(H) = H$;
5) подалгебра H является нильпотентной.

Доказательство этих утверждений можно найти в [ГГ].

Подалгебра H, определенная в Предложении 5.3.1, называется *подалгеброй Картана.*

Ниже нам понадобится понятие обобщенного собственного подпространства; напомним его определение. Пусть A — линейный оператор, действующий в векторном пространстве V, а λ — одно из его собственных значений. Тогда обобщенное собственное подпространство оператора A, отвечающее собственному значению λ, определяется так: $V(\lambda) = \{v \in V$: существует целое число $j > 0$ такое, что $(A - \lambda \cdot \mathbb{1})^j v = 0\}$.

Теперь мы докажем предложение о свойствах представлений алгебры Ли L, которые будут играть ключевую роль в дальнейшем.

Предложение 5.3.2. Пусть V — векторное пространство над P, (V, r) — представление алгебры Ли L и $X \in L$. Пусть $L = L(0) \oplus L(\alpha) \oplus \ldots$ — разложение векторного пространства L на обобщенные собственные подпространства эндоморфизма $\operatorname{ad} X$, а $V = V(\lambda) \oplus V(\mu) \oplus \ldots$ — разложение V на обобщенные собственные подпространства эндоморфизма $r(X)$. Тогда

$$r(L(\alpha))V(\lambda) \subset V(\alpha + \lambda). \tag{5.17}$$

Комментарии: 1) Будем считать $\{0\}$ подпространством в V, отвечающим тем числам, которые не являются собственными значениями. Так, в (5.17) мы имеем $V(\alpha + \lambda) = \{0\}$, если $\alpha + \lambda$ не является собственным значением $r(X)$.

2) Подпространство $L(0)$ всегда присутствует в разложении L, так как, по крайней мере, $X \in L(0)$ ввиду $\operatorname{ad}(X)X = [X, X] = 0$.

Доказательство. Пусть $Y \in L$, $v \in V$. Тогда имеем

$$(r(X) - (\alpha + \lambda))r(Y)v = \{[r(X), r(Y)] + r(Y)r(X) - (\alpha + \lambda)r(Y)\}\, v =$$
$$= r([X, Y] - \alpha Y)v + r(Y)(r(X) - \lambda)v = r((\operatorname{ad}(X) - \alpha)Y)v + r(Y)(r(X) - \lambda)v.$$

Проводя индукцию по k, можно показать, что

$$(r(X) - (\alpha + \lambda))^k r(Y)v = \sum_{i=0}^{k} C_k^i r((\operatorname{ad} X - \alpha)^{k-i} Y)(r(X) - \lambda)^i v, \tag{5.18}$$

где C_k^i — биномиальные коэффициенты. Если $Y \in L(\alpha)$ и $v \in V(\lambda)$, то существует целое число $j > 0$ такое, что $(\operatorname{ad} X - \alpha)^j Y = 0$ и $(r(X) - \lambda)^j v = 0$. Тогда из (5.18) следует

$$(r(X) - (\alpha + \lambda))^{2j} r(Y) v = 0,$$

т. е. $r(Y)v \in V(\alpha + \lambda)$. □

Следствие. Пусть L — алгебра Ли, $X \in L$, и $L = L(0) \oplus L(\alpha) \oplus \ldots$ — разложение L на обобщенные собственные подпространства эндоморфизма $\operatorname{ad} X$. Тогда

1) $[L(\alpha), L(\beta)] \subset L(\alpha + \beta)$;

2) $L(0)$ есть подалгебра в L, содержащая X.

Эти утверждения немедленно следуют из Предложения 5.3.1, если в качестве представления (V, r) взять представление (L, ad) алгебры L. □

Обсудим теперь свойства представлений подалгебры Картана H.

Предложение 5.3.3. Пусть V — векторное пространство над P, H — подалгебра Картана некоторой алгебры Ли L, (V, r) — представление H. Тогда

1) существует набор функций $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ на H со значениями в P и набор подпространств $V_1, \ldots, V_k$ таких, что

а) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$;

б) для любого $X \in H$ и любого номера j ($1 \leqslant j \leqslant k$) V_j содержится в $V(\lambda_j(X))$, в обобщенном собственном подпространстве преобразования $r(X)$, отвечающем собственному значению $\lambda_j(X)$, т. е. $V_j = \{v \in V\colon$ для каждого $X \in H$ найдется целое число $l \geqslant 1$ такое, что $(r(X) - \lambda_j(X))^l v = 0\}$;

2) функции λ_j линейны.

Мы не будем доказывать это предложение (желающие могут найти доказательство в [ГГ]), а ограничимся лишь несколькими замечаниями поясняющего характера.

Так как подалгебра Картана H нильпотентна, то в обозначениях Предложения 5.3.2 $H = H(0)$ относительно $\operatorname{ad} X$ для любого $X \in H$. Следовательно, если $V(\lambda)$ — обобщенное собственное подпространство преобразования $r(X)$ с собственным значением λ, то $r(H)V(\lambda) \subset V(\lambda)$. Этот факт, по существу, и позволяет ввести функции $\lambda_j : H \to P$ и подпространства V_j с указанными выше свойствами (конкретные примеры таких функций приведены в следующем параграфе).

Поясним идею доказательства свойства 2) на примере абелевой алгебры H. В векторном пространстве V мы можем выбрать базис $\{v_j\}$ такой, что оператор $r(X)$ для некоторого $X \in H$ будет диагонален:

$$r(X) v_j = \lambda_j(X) v_j. \tag{5.19a}$$

Тогда $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$, где $V_j = Pv_j$. Пусть Y — некоторый другой элемент из H. В силу абелевости алгебры H $r(Y)V_j \subset V_j$, т. е.

$$r(Y)v_j = \lambda_j(Y)v_j. \tag{5.19б}$$

Это означает, что в выбранном базисе операторы $r(Y)$ для всех $Y \in H$ диагональны. Из (5.19а) и (5.19б) следует, что $\lambda_j(X+Y) = \lambda_j(X)+\lambda_j(Y)$, т. е. функция λ_j — линейна. В случае произвольной нильпотентной алгебры H идея доказательства линейности λ_j также состоит в нахождении общего собственного вектора преобразований $r(X)$, $X \in H$.

Предложение 5.3.3 играет очень важную роль в теории алгебр Ли, так как позволяет понять их общую структуру. Действительно, пусть L — алгебра Ли, а H — ее подалгебра Картана. Применяя это предложение к представлению (L, ad) алгебры H, мы заключаем, что существуют функции $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ из H в P и подпространства $L(\alpha_0)$, $L(\alpha_1), \ldots, L(\alpha_k)$ в L такие, что $L = L(\alpha_0) \oplus L(\alpha_1) \oplus \ldots \oplus L(\alpha_k)$, причем $L(\alpha_j) = \{Y \in L$: для любого $X \in H$ существует целое число $l \geqslant 1$ такое, что $(\mathrm{ad}\, X - \alpha_j(X))^l Y = 0\}$. Так как H — нильпотентна, то для любого $X \in H$ существует собственное подпространство, отвечающее нулевому собственному значению. Мы положим $\alpha_0 \equiv 0$ и $L(0) = \{Y \in L$: для любого $X \in H$ существует целое число $l \geqslant 1$ такое, что $(\mathrm{ad}\, X)^l Y = 0\}$. Очевидно, что $H \subset L(0)$. Можно показать (см. [ГГ]), что на самом деле $L(0) = H$. При этом существенно используется тот факт, что H совпадает со своим нормализатором в L.

Итак, мы приходим к разложению

$$L = H \oplus L(\alpha_1) \oplus \ldots \oplus L(\alpha_k). \tag{5.20}$$

Кроме того, из Предложения 5.3.2 следует, что

$$[L(\alpha_i), L(\alpha_j)] \subset L(\alpha_i + \alpha_j). \tag{5.21}$$

Функции $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ называются *корнями*, а разложение (5.20) — *разложением по корневым подпространствам* алгебры L относительно подалгебры Картана H. Разумеется, функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ мы считаем попарно различными, поэтому существует элемент $X \in H$, что все числа $\alpha_j(X)$ отличны от нуля и друг от друга. Если V — векторное пространство и (V, r) — представление алгебры L, то мы имеем также, в соответствии с Предложением 5.3.3, разложение

$$V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_l), \tag{5.22}$$

где λ_j $(j = 1, 2, \ldots, l)$ — функции из H в P; они называются *весами* представления (V, r) алгебры L относительно подалгебры Картана H.

§ 4. Структура простых алгебр Ли

В силу теоремы Картана (Предложение 5.2.5) любая полупростая алгебра Ли L может быть разложена в прямую сумму попарно ортогональных простых подалгебр. Поэтому нам достаточно изучить свойства простых алгебр Ли.

В этом параграфе мы будем обозначать $\mathfrak{g}$ простую алгебру Ли, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебру Картана, B — форму Киллинга на $\mathfrak{g}$. Мы перечислим основные свойства полупростых алгебр Ли и опишем их структуру. Мы не будем приводить доказательства этих свойств (их можно найти, например, в [Дж], [ГГ]). Справедливость некоторых из свойств предлагается доказать в качестве упражнений к настоящей главе. Кроме того, эти свойства будут проиллюстрированы на примере алгебр $A_1 = sl(2,\mathbb{C})$ и $A_2 = sl(3,\mathbb{C})$. Разложение (5.20) по корневым подпространствам в обозначениях настоящего параграфа принимает вид:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}(\alpha) \oplus \mathfrak{g}(\beta) \oplus \mathfrak{g}(\gamma) \dots, \qquad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}(0), \tag{5.23}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — корни алгебры $\mathfrak{g}$. Обозначим Δ множество $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ всех корней этой алгебры и определим $\widetilde{\Delta} = \Delta \cup \{0\}$. Очевидно, что Δ и $\widetilde{\Delta}$ являются подмножествами в $\mathfrak{h}^*$, в пространстве, дуальном к подалгебре Картана. Начнем перечисление свойств полупростых алгебр.

1) Если $\alpha, \beta \in \widetilde{\Delta}$ и $\alpha + \beta \neq 0$, то $B(\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(\beta)) = 0$.

2) Ограничение $B_{\mathfrak{h}}$ формы Киллинга B на $\mathfrak{h}$ невырождено, т.е. для любого $X \in \mathfrak{h}$ и $X \neq 0$ существует элемент $Y \in \mathfrak{h}$ такой, что $B(X,Y) \neq 0$.

3) Подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ абелева.

4) $\dim \mathfrak{g}(\alpha) = 1$ для любого $\alpha \in \Delta$.

5) Если $\alpha \in \Delta$, то и $(-\alpha) \in \Delta$.

Свойство 4 означает, что подпространство $\mathfrak{g}(\alpha)$, $\alpha \in \Delta$ равно $\mathbb{C}e_\alpha$, где e_α — некоторый элемент, обладающий свойством $\operatorname{ad} X(e_\alpha) = \alpha(X)e_\alpha$ для всех $X \in \mathfrak{h}$. Элемент e_α, порождающий $\mathfrak{g}(\alpha)$, $\alpha \in \Delta$, будем называть *корневым вектором*. Проиллюстрируем перечисленные выше свойства на примерах.

Пример 1. Алгебра A_1. Стандартный базис — матрицы Паули:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Однако, корневая структура алгебры A_1 проявляется наиболее четко в другом базисе:

$$\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \tau_z = \frac{1}{2}\tau_3. \tag{5.24}$$

Коммутационные соотношения в этом базисе имеют следующий вид:

$$[\tau_z, \tau_\pm] = \pm\tau_\pm, \quad [\tau_+, \tau_-] = 2\tau_z. \tag{5.25}$$

Для дальнейшего нам понадобится явный вид операторов присоединенного представления (A_1, ad) алгебры A_1. Если элементу τ_+ векторного пространства $\mathfrak{g} = A_1$ мы сопоставим столбец $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, элементу τ_- — столбец $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, а τ_z — $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, то в таком базисе матрицы, отвечающие эндоморфизмам $\mathrm{ad}\,\tau_+$, $\mathrm{ad}\,\tau_-$, $\mathrm{ad}\,\tau_z$, как следует из (5.25), имеют вид:

$$\mathrm{ad}\,\tau_+ = \begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}\,\tau_- = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\-2&0&0\end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}\,\tau_z = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{5.26}$$

Теперь не составляет труда вычислить по формуле (5.13) значения формы Киллинга на базисных элементах:

$$\begin{aligned} &B(\tau_+, \tau_+) = B(\tau_+, \tau_z) = B(\tau_-, \tau_z) = B(\tau_-, \tau_-) = 0; \\ &B(\tau_+, \tau_-) = 4; \quad B(\tau_z, \tau_z) = 2. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Определим ранг алгебры. Возьмем произвольный элемент $X_u = u_1\tau_+ + u_2\tau_- + u_3\tau_z \in \mathfrak{g}$ и вычислим для него характеристический многочлен $\chi(t, u) = \det(t \cdot \mathbb{1} - \mathrm{ad}\,X_u) = t^3 + g_2(u)t^2 + g_1(u)t + g_0(u)$ (см. § 3). В соответствии с общей теорией $g_0(u) = 0$, а для остальных коэффициентов $g_i(u)$, исходя из (5.26), получаем:

$$g_2(u) = 0, \quad g_1(u) = -(u_3^2 + 4u_1u_2).$$

Следовательно, $\mathrm{rank}\,A_1 = 1$ и τ_z является регулярным элементом. Так как $\dim\mathfrak{h} = \mathrm{rank}\,\mathfrak{g} = 1$, то подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ может быть реализована на элементе τ_z. Построим теперь в явном виде корни алгебры A_1. Произвольный элемент $X \in \mathfrak{h}$ имеет вид: $X = r\tau_z$, $r \in \mathbb{C}$. Тогда, в соответствии с (5.25),

$$\mathrm{ad}\,X(\tau_\pm) = \pm r\tau_\pm, \quad \mathrm{ad}\,X(\tau_z) = 0. \tag{5.28}$$

Для всех $Y \in \mathfrak{g} = A_1$ мы можем записать $\mathrm{ad}\,X(Y) = \alpha_Y(X)Y$ и собственные значения α_Y являются линейными функциями на $\mathfrak{h}$ со значениями в $\mathbb{C}$, т. е. $\alpha_Y \in \mathfrak{h}^*$. Мы имеем два ненулевых корня α_{τ_+} и α_{τ_-} и для любого $r \in \mathbb{C}$

$$\alpha_{\tau_+}(r\tau_z) = r, \quad \alpha_{\tau_-}(r\tau_z) = -r. \tag{5.29}$$

В данном примере множество $\Delta = \{\alpha_{\tau_+}, \alpha_{\tau_-}\}$, а разложение по корневым подпространствам имеет вид:

$$\mathfrak{g} = A_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}\tau_+ \oplus \mathbb{C}\tau_-, \quad \mathfrak{h} = \mathbb{C}\tau_z,$$

т. е. $\mathfrak{g}(\alpha_{\tau_+}) = \mathbb{C}\tau_+$, $\mathfrak{g}(\alpha_{\tau_-}) = \mathbb{C}\tau_-$ (свойство 4). Свойство 3 очевидно. Свойства 1 и 2 следуют из равенств (5.27). Свойство 5 вытекает из того факта, что $\alpha_{\tau_-} = -\alpha_{\tau_+}$ (см. (5.29)).

Пример 2. $\mathfrak{g} = A_2$. Стандартный базис, обычно используемый в физике, следующий:

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для наших целей более удобным оказывается другой базис:

$$t_\pm = \frac{1}{2}(\Lambda_1 \pm i\Lambda_2),\ t_z = \frac{1}{2}\Lambda_3,\ v_\pm = \frac{1}{2}(\Lambda_4 \pm i\Lambda_5),\ u_\pm = \frac{1}{2}(\Lambda_6 \pm i\Lambda_7),\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_8.$$

Приведем коммутационные соотношения, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$\begin{aligned} &[t_z, t_\pm] = \pm t_\pm, \quad [t_z, u_\pm] = \mp\frac{1}{2}u_\pm, \quad [t_z, v_\pm] = \pm\frac{1}{2}v_\pm, \quad [t_z, y] = 0, \\ &[y, t_\pm] = 0, \quad [y, u_\pm] = \pm u_\pm, \quad [y, v_\pm] = \pm v_\pm, \\ &[t_+, t_-] = 2t_z, \quad [u_+, u_-] = \frac{3}{2}y - t_z,\ [v_+, v_-] = \frac{3}{2}y + t_z. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Рассмотрим представление (A_2, ad) алгебры A_2. Пусть s_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ — столбец из $\mathbb{R}^8$, у которого на i-м месте стоит 1, а остальные элементы — нули. Если $t_+, t_-, t_z, u_+, u_-, v_+, v_-, y$ соответствуют $e_1, e_2, \ldots, e_8$, то из (5.30) следует, что $\mathrm{ad}\, t_z$ и $\mathrm{ad}\, y$ суть диагональные матрицы 8×8 вида (задача 5.11)

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}\, t_z &= \mathrm{diag}\left(1, -1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), \\ \mathrm{ad}\, y &= \mathrm{diag}\left(0, 0, 0, 1, -1, 1, -1, 0\right). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Можно показать, что

$$B(t_z,t_z)=3,\quad B(y,y)=4,\quad B(t_z,y)=0,\quad B(t_+,u_\pm)=0\quad \text{и т.д.} \tag{5.32}$$

Исследование характеристического многочлена показывает, что $\operatorname{rank} A_2 = 2$ и t_z и y являются регулярными элементами. Так как $\dim \mathfrak{h} = 2$, то подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ может быть натянута на t_z и y; из (5.30) следует, что $\mathfrak{h}$ — абелева алгебра (свойство 3). Запишем произвольный элемент $X \in \mathfrak{h}$ в виде $X = pt_z + qy$, $p, q \in \mathbb{C}$. Согласно (5.30)

$$\begin{aligned} &\operatorname{ad} X(t_\pm) = \pm p t_\pm, && \operatorname{ad} X(u_\pm) = \pm\left(-\frac{p}{2}+q\right) u_\pm, \\ &\operatorname{ad} X(v_\pm) = \pm\left(\frac{p}{2}+q\right) v_\pm, && \operatorname{ad} X(t_z) = \operatorname{ad} X(y) = 0. \end{aligned} \tag{5.33}$$

В этом случае множество Δ содержит 6 ненулевых корней:

$$\Delta = \{\alpha_{t_\pm},\ \alpha_{u_\pm},\ \alpha_{v_\pm}\},$$

причем

$$\begin{aligned} &\alpha_{t_\pm}(pt_z+qy) = \pm p, \quad \alpha_{u_\pm}(pt_z+qy) = \pm\left(-\frac{p}{2}+q\right), \\ &\alpha_{v_\pm}(pt_z+qy) = \pm\left(\frac{p}{2}+q\right). \end{aligned} \tag{5.34}$$

Обозначим $\alpha_1 \equiv \alpha_{t_+}$, $\alpha_2 \equiv \alpha_{u_+}$, $\alpha_3 \equiv \alpha_{v_+}$. Тогда $\alpha_{t_-} = -\alpha_1$, $\alpha_{u_-} = -\alpha_2$, $\alpha_{v_-} = -\alpha_3$ (свойство 5). Имеем $\mathfrak{g}(\alpha_1) = \mathbb{C}t_+$, $\mathfrak{g}(-\alpha_1) = \mathbb{C}t_-$, $\mathfrak{g}(\alpha_2) = \mathbb{C}u_+$ и т.д. (свойство 4). Свойства 1 и 2 проверяются прямым вычислением (см. (5.32)).

Обычно в теории простых алгебр Ли выбирают некоторую каноническую билинейную форму, которая отличается множителем от формы Киллинга. Мы будем обозначать эту форму $(\,,\,)$:

$$(X,Y) = bB(X,Y), \quad X,Y \in \mathfrak{g}. \tag{5.35}$$

Множитель b будет фиксирован ниже. Определим для любого $\alpha \in \Delta$ элемент $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ следующим образом:

$$\alpha(X) = (h_\alpha, X) \tag{5.36}$$

для любого $X \in \mathfrak{h}$. Это позволяет также определить невырожденную билинейную форму в $\mathfrak{h}^*$ (на самом деле она является скалярным произведением) формулой

$$\langle\alpha,\beta\rangle = (h_\alpha,h_\beta) = \alpha(h_\beta) = \beta(h_\alpha), \quad \alpha,\beta \in \Delta. \tag{5.37}$$

6) Если $\alpha \in \Delta$, то $\langle\alpha,\alpha\rangle$ — положительное число.

Величину $\langle\alpha,\alpha\rangle$ будем называть длиной корня. В алгебре, вообще говоря, могут быть корни различной длины. Мы фиксируем коэффициент b в (5.35) условием, что самые длинные в данной алгебре корни имеют длину 2.

Пример 1. Обозначим в алгебре $\mathfrak{g} = A_1$ $\alpha \equiv \alpha_{\tau_+}$. Легко проверить, что $h_\alpha = 2\tau_z$, $b = \frac{1}{4}$, $\langle\alpha,\alpha\rangle = 2$.

Пример 2. $\mathfrak{g} = A_2$. Получаем $h_{\alpha_1} = 2t_z$, $h_{\alpha_2} = -t_z + \frac{3}{2}y$, $h_{\alpha_3} = t_z + \frac{3}{2}y$, $b = \frac{1}{6}$. При этом

$$\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle = \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle = 2, \quad \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle = -1. \tag{5.38}$$

Так как $\dim\mathfrak{h} = 2$, то в качестве базисных элементов в подалгебре Картана возьмем h_{α_1} и h_{α_2}. Элемент $h_{\alpha_3} = h_{\alpha_1} + h_{\alpha_2}$.

Итак, мы выяснили, что полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из элементов двух типов:

а) Из элементов, образующих абелеву подалгебру Картана $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ с $\dim\mathfrak{h} = \operatorname{rank}\mathfrak{g}$. Для полупростых алгебр Ли $\mathfrak{g}$ подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ часто определяют как максимальную абелеву подалгебру в $\mathfrak{g}$, такую что для произвольного $X \in \mathfrak{h}$ дополнение каждого инвариантного подпространства в $\mathfrak{g}$ относительно $\operatorname{ad}X$ также является инвариантным подпространством в $\mathfrak{g}$ относительно $\operatorname{ad}X$.

б) Из корневых векторов e_α, каждый из которых отвечает одному из корней $\alpha \in \Delta \subset \mathfrak{h}^*$. Отметим, что Δ не является линейным пространством.

Разложение (5.23) по корневым подпространствам имеет вид:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}e_\alpha \oplus \mathbb{C}e_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}_\beta \oplus \mathbb{C}e_{-\beta} \oplus \ldots . \tag{5.39}$$

Коммутаторы между элементами различных подпространств следующие:

а) если $h \in \mathfrak{h}$, e_α — корневой вектор, то

$$[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha, \quad \alpha(h) = (h_\alpha, h); \tag{5.40}$$

б) если e_α и e_β — корневые векторы, то

$$[e_\alpha, e_\beta] = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha+\beta \text{ не есть корень,} \\ \text{элемент из } \mathfrak{h}, & \text{если } \alpha+\beta = 0, \\ N_{\alpha,\beta}e_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha+\beta \in \Delta, \end{cases} \tag{5.41}$$

где $N_{\alpha,\beta}$ — некоторые константы; их значения нам не понадобятся. Уточним, чему равен элемент $[e_\alpha, e_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}$. Имеем для любого $h \in \mathfrak{h}$

$$\big([e_\alpha, e_{-\alpha}], h\big) = \big(e_\alpha, [e_{-\alpha}, h]\big) = \alpha(h)\big(e_\alpha, e_{-\alpha}\big) = \big(h_\alpha, h\big)\big(e_\alpha, e_{-\alpha}\big),$$

где мы воспользовались инвариантностью формы $(\,,)$. Отсюда

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = (e_\alpha, e_{-\alpha})h_\alpha.$$

Обычно корневые векторы нормируют условием $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = -1$. Тогда

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = -h_\alpha. \tag{5.42}$$

Рассмотрим теперь векторное пространство V и представление (V, r) алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть λ — некоторый вес этого представления. Последовательность весов $\lambda - m\alpha$, $\lambda-(m-1)\alpha, \dots, \lambda-\alpha$, λ, $\lambda+\alpha, \dots, \lambda+p\alpha$, где $\alpha \in \Delta$, m и p — неотрицательные целые числа, будем называть α-серией (или α-последовательностью) весов, проходящей через λ.

7) Пусть $\lambda + j\alpha$, $-m \leqslant j \leqslant p$ есть α-серия весов, проходящая через λ. Тогда

$$m - p = 2\frac{\langle\lambda, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}. \tag{5.43}$$

Пример 1. В случае $\mathfrak{g} = A_1$ этот результат воспроизводит известную классификацию представлений. Как мы уже выяснили, $\dim \mathfrak{h}^* = \dim \mathfrak{h} = 1$ и поэтому любой вес λ любого представления A_1 равен $s\alpha$, где $\alpha \in \Delta$, а s — число, характеризующее представление. Пусть представление имеет веса λ_0, $\lambda_0 - \alpha, \dots, \lambda_0 - q\alpha$ и $\lambda_0 = s_0\alpha$. Исходя из (5.43), имеем, что целое число q равно

$$q = 2\frac{\langle\lambda_0, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = 2s_0.$$

Таким образом, $s_0 = \frac{q}{2}$ — спин представления и принимает значения 0, 1/2, 1, 3/2,... Собственные значения (веса) представления со спином s_0 имеют вид $s_0\langle\alpha,\alpha\rangle$, $(s_0 - 1)\langle\alpha,\alpha\rangle, \dots, -s_0\langle\alpha,\alpha\rangle$, а размерность этого представления равна $q + 1 = 2s_0 + 1$.

Очевидно, что формула (5.43) справедлива и для представления $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ алгебры $\mathfrak{g}$.

8) Если $\alpha \in \Delta$ и $k\alpha \in \Delta$ (k — целое число), то возможны лишь значения $k = \pm 1$.

Пусть $X, Y \in \mathfrak{h}$. Нетрудно понять, что

$$B(X, Y) = \sum_{\alpha\in\Delta} (\dim \mathfrak{g}(\alpha))\alpha(X)\alpha(Y). \tag{5.44}$$

С учетом свойства 4 получаем, что если $\alpha, \beta \in \Delta$, то

$$\langle\alpha, \beta\rangle = (h_\alpha, h_\beta) = b\sum_{\gamma\in\Delta} \langle\alpha, \gamma\rangle\langle\gamma, \beta\rangle. \tag{5.45}$$

9) Множество Δ порождает $\mathfrak{h}^*$ (как линейное пространство).

Изучим структуру множества корней Δ. Для этого введем упорядочение среди корней. Оно будет в некоторой степени произвольным, так как естественного упорядочения среди корней не существует. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ некоторый базис в $\mathfrak{h}^*$, так что любой элемент $\rho \in \mathfrak{h}^*$ может быть записан в виде $\rho = \sum_i c_i\alpha_i$, $c_i \in \mathbb{R}$. Мы будем говорить, что элемент ρ положителен, если $c_1 > 0$ или если $c_1 = 0$, а $c_2 > 0$ и т.д. Аналогично, ρ отрицателен, если первый ненулевой коэффициент $c_i < 0$. Тогда $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$, где Δ_+ (Δ_-) — множество положительных (отрицательных) корней. Положительный корень, который нельзя представить в виде суммы двух положительных корней, будем называть *простым корнем*. Обозначим множество простых корней π, $\pi \subset \Delta_+$.

Пример 1. В случае $\mathfrak{g} = A_1$ $\Delta_+ = \{\alpha\}$, $\pi = \{\alpha\}$.

Пример 2. В случае $\mathfrak{g} = A_2$ есть различные возможности. Можно выбрать $\Delta_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Из (5.34) следует, что $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ и $\pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. Другой выбор положительных корней: $\Delta_+ = \{\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3\}$. Так как $\alpha_1 = \alpha_3 + (-\alpha_2)$, то $\pi = \{-\alpha_2, \alpha_3\}$.

10) Если $\alpha, \beta \in \pi$, то $\alpha - \beta$ не является корнем.

11) Если $\alpha, \beta \in \pi$ и $\alpha \neq \beta$, то $\langle \alpha, \beta \rangle \leqslant 0$.

Выше мы определили понятие длины корня. Теперь определим угол $\widehat{\alpha\beta}$ между корнями α и β следующим естественным образом:

$$\cos \widehat{\alpha\beta} = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \, \|\beta\|}. \tag{5.46}$$

Мы можем изобразить корни алгебры в виде векторов с общим началом, причем длины векторов пропорциональны длинам соответствующих корней, а угол между векторами определяется формулой (5.46). Такие схематические изображения корней называются *корневыми диаграммами* алгебр.

Пример 1. $\mathfrak{g} = A_1$. Имеется два корня α и $(-\alpha)$. Их длины равны, а $\cos(\widehat{\alpha(-\alpha)}) = -1$. Корневая диаграмма этой алгебры приведена на рис. 12а.

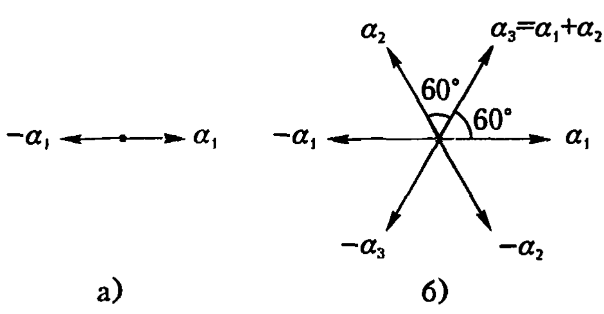

Рис. 12.

Пример 2. Множество Δ алгебры $\mathfrak{g} = A_2$ содержит 6 корней: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_2$ и $-\alpha_3$. Имеем $\widehat{\alpha_1\alpha_2} = 120°$, $\widehat{\alpha_1\alpha_3} = 60°$. Соответствующая корневая диаграмма изображена на рис. 12б.

12) Пусть π совокупность простых корней из Δ. Тогда

а) $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ образует базис в $\mathfrak{h}^*$.

б) если $\beta \in \Delta_+$, то $\beta = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_l\alpha_l$, где n_i — неотрицательные целые числа.

Свойство 12а) означает, что число простых корней алгебры $\mathfrak{g}$ равно $l = \dim \mathfrak{h}^* = \operatorname{rank} \mathfrak{g}$.

Введем теперь *матрицу Картана* A, содержащую в себе всю информацию о структуре алгебры $\mathfrak{g}$. Она имеет размер $l \times l$ и ее элементы определяются формулой

$$A_{ij} = -2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}. \tag{5.47}$$

Отметим некоторые очевидные свойства элементов матрицы Картана:

13) а) $A_{ii} = -2$;

б) если $A_{ij} \neq 0$, то и $A_{ji} \neq 0$;

в) A_{ij} — целое число, причем $A_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$;

г) $A_{ij}A_{ji} = 4\cos(\widehat{\alpha_i\alpha_j}) = 0, 1, 2, 3$ при $i \neq j$.

Множество π простых корней алгебры $\mathfrak{g}$ называется неразложимым, если нельзя указать два непустых его подмножества π_1 и π_2, таких, что $\pi_1 \cup \pi_2 = \pi$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$ и $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$ для любых $\alpha_1 \in \pi_1$ и $\alpha_2 \in \pi_2$.

14) Множество π простых корней неразложимо тогда и только тогда, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста.

Оказывается, что любому множеству $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset \mathbb{R}^l$, состоящему из линейно-независимых элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, такому, что $A_{ij} = -2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$ суть целые числа со свойствами (13), а $\langle\ ,\ \rangle$ — каноническое скалярное произведение в $\mathbb{R}^l$ (такое множество называют π-системой), соответствует полупростая алгебра Ли. Поэтому задача классификации простых алгебр Ли была сведена к классификации всех неразложимых π-систем. В работе [Ды1] было доказано, что существует 4 бесконечные серии простых комплексных алгебр Ли, отвечающих классическим алгебрам, и 5 так называемых исключительных комплексных алгебр Ли. Оказалось также, что множества простых корней этих алгебр удобно изображать в виде графических схем, получивших название *диаграмм Дынкина*. Они строятся по следующему правилу. Сопоставим каждому простому корню $\alpha_i \in \pi$ кружок, около которого укажем величину $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$. Далее, кружки, отвечающие корням α_i и α_j, соединим $A_{ij}A_{ji}$ линиями. Если $A_{ij} = 0$, то эти кружки не соединяются. Диаграммы Дынкина для алгебр классических серий A_n, B_n, C_n и D_n, (см. § 1), а также для исключительных алгебр G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8 приведены на рис. 13 (нижний индекс в обозначении алгебры указывает ее ранг). Отметим, что в литературе часто не указывают на диаграмме квадраты длин корней, а вместо этого на линиях, соединяющих простые корни разной длины, ставят стрелку, направленную в сторону более короткого корня. По диаграмме Дынкина можно восстановить матрицу Картана, а затем и всю алгебру Ли.

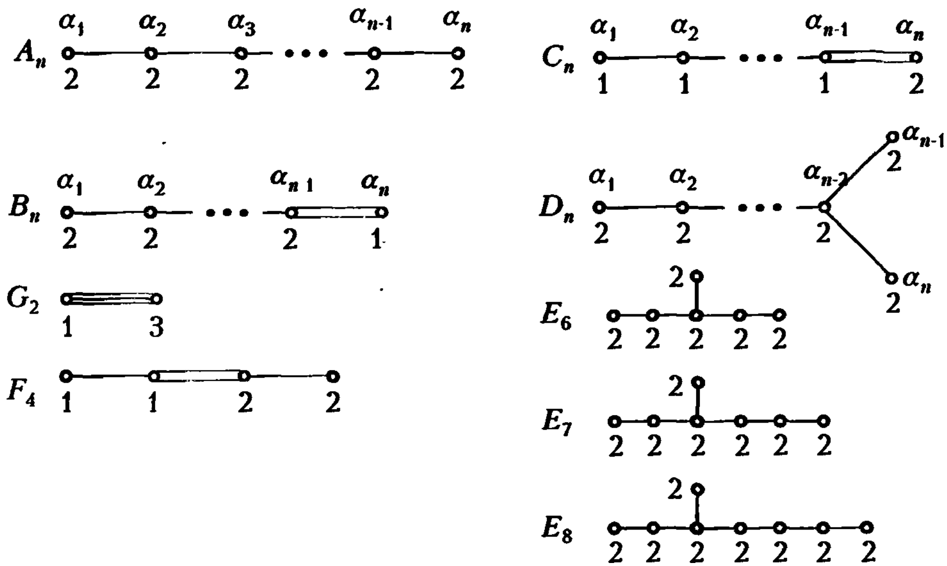

Рис. 13.

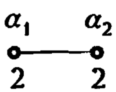

Рис. 14.

Пример 2. Диаграмма Дынкина алгебры $\mathfrak{g} = A_2$ изображена на рис. 14. Из нее следует, что в алгебре два простых корня α_1 и α_2 и $\langle\alpha_1, \alpha_1\rangle = \langle\alpha_2, \alpha_2\rangle = 2$. Величина $A_{12}A_{21} = 1$. Значит, согласно (5.47),

$$\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle^2 = \frac{1}{4} A_{12}A_{21}\langle\alpha_1, \alpha_1\rangle\langle\alpha_2, \alpha_2\rangle = 1,$$

и из свойства 13 в заключаем, что $A_{12} = A_{21} = +1$ и $\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle = -1$. Итак, матрица Картана имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{5.48}$$

Таким образом, подалгебра Картана двумерна и ее базис состоит из элементов h_{α_1} и h_{α_2}. Кроме того в A_2 имеются корневые векторы $e_{\pm\alpha_1}$, $e_{\pm\alpha_2}$. Какие еще имеются корни и корневые векторы? Чтобы выяснить это, рассмотрим α_2-серию, проходящую через $\alpha_1 : \alpha_1 + j\alpha_2$. Из (5.43) и (5.48) получаем, что

$$m - p = 2\frac{\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} = -1.$$

Так как $m = 0$, то $p = 1$, т. е. эта серия состоит из α_1 и $\alpha_1 + \alpha_2$. Изучение α_1-серии, проходящей через α_2, приводит к выводу, что в A_2 есть лишь один непростой положительный корень $\alpha_1 + \alpha_2$. Таким образом, алгебра A_2 включает еще корневые векторы $e_{\alpha_1+\alpha_2}$ и $e_{-(\alpha_1+\alpha_2)}$. Тем самым мы полностью восстановили алгебру Ли A_2; коммутационные соотношения даются формулами (5.40) — (5.42).

В дальнейшем нам понадобятся понятия старшего веса представления и сигнатуры представления; сейчас мы их определим. Пусть (V, r) — конечномерное неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$ и

$$V = V(\lambda) \oplus V(\mu) \oplus \dots$$

есть разложение пространства V по весовым подпространствам, а λ, $\mu, \dots$ — веса представления (см. (5.22)). В силу конечномерности представления всегда существует вес ω, такой что для любого положительного корня $\alpha \in \Delta_+$ алгебры $\mathfrak{g}$ $\omega + \alpha$ уже не является весом. Тогда вес ω называется *старшим весом* представления. Далее, пусть $v \in V(\omega)$ и $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})v \subset \mathbb{C}v$. Такой вектор v называется *старшим (весовым) вектором* представления (V, r), он порождает все пространство V при действии на него операторами $r(X)$, $X \in \mathfrak{g}$. Если ω — старший вес, то *сигнатурой представления* называется совокупность чисел $[m_1, m_2, \dots, m_l]$, вычисляемых по формуле

$$m_i = 2\frac{\langle \omega, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}, \quad i = 1, 2, \dots, l = \operatorname{rank} \mathfrak{g}, \tag{5.49}$$

где α_i — простые корни алгебры $\mathfrak{g}$. Конечномерное неприводимое представление однозначно задается своим старшим весом и сигнатурой.

Покажем теперь, как по данной комплексной алгебре $\mathfrak{g}$ с разложением (5.39) по корневым подпространствам построить ее компактную вещественную форму. Определим элементы:

$$\varkappa_{\alpha_i} = ih_{\alpha_i}, \quad b_\alpha = \frac{e_\alpha + e_{-\alpha}}{\sqrt{2}}, \quad c_\alpha = i\frac{e_\alpha - e_{-\alpha}}{\sqrt{2}}, \tag{5.50}$$

где $\alpha_i \in \pi$, $\alpha \in \Delta$. Возьмем подмножество $\tilde{\mathfrak{g}}$ в $\mathfrak{g}$, образованное элементами вида $X = \sum\limits_{i=1}^{l} \mu_i \varkappa_{\alpha_i} + \sum\limits_{\alpha\in\Delta} \nu_\alpha b_\alpha + \sum\limits_{\alpha\in\Delta} \chi_\alpha c_\alpha$, где $\mu_i, \nu_i, \chi_i \in \mathbb{R}$. Нетрудно показать, что $\tilde{\mathfrak{g}}^c = \mathfrak{g}$ и $B(X, X) \leqslant 0$ для любого $X \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Это означает, что $\tilde{\mathfrak{g}}$ — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$. Отображение σ комплексной алгебры $\mathfrak{g}$ в себя, удовлетворяющее условиям

$$\sigma(pX + qY) = \bar{p}\sigma(X) + \bar{q}\sigma(Y),$$
$$\sigma([X, Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)],$$
$$\sigma^2 = \mathbb{1} \text{ (тождественное преобразование в } \mathfrak{g})$$

для любых X и Y из $\mathfrak{g}$ называется *сопряжением*. Здесь мы рассмотрим лишь сопряжение σ, заданное следующим образом:

$$\sigma(X) \equiv \overline{X} = -X, \text{ если } X \in \mathfrak{h};$$
$$\sigma(e_\alpha) \equiv \bar{e}_\alpha = e_{-\alpha}, \text{ если } e_\alpha \text{ — корневой вектор в } \mathfrak{g}.$$

Согласно (5.50) компактная вещественная форма состоит из элементов, инвариантных относительно такого сопряжения.

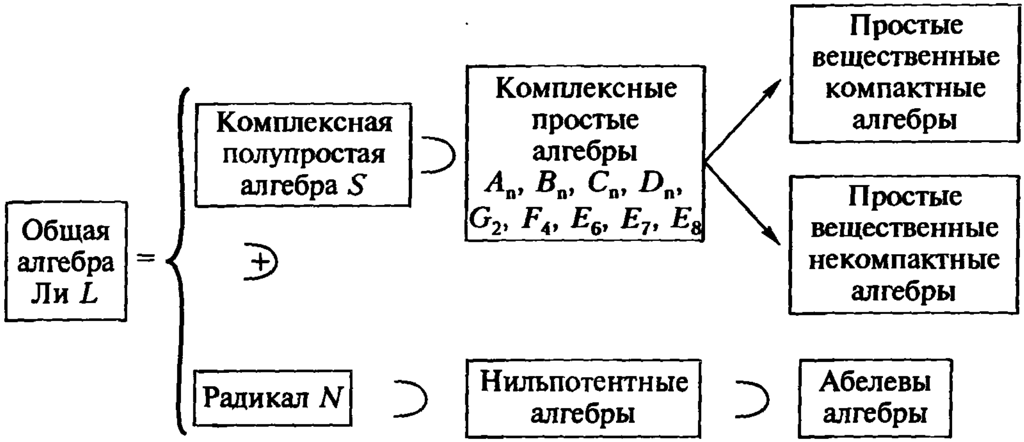

Рис. 15.

В заключение параграфа приведем схему (рис. 15), основанную на результатах этой главы и иллюстрирующую соотношения между различными типами алгебр Ли; эта схема взята из книги [БР].

Глава 6

Размерная редукция симметричных калибровочных полей

В двадцатые годы в работах Т. Калуцы и О. Клейна [КК] была выдвинута гипотеза о том, что в микромире пространство-время имеет размерность больше четырех. А именно, они рассмотрели теорию гравитации в пятимерном пространстве вида $M^4 \times S^1$ и показали, что если на поля наложить требования инвариантности относительного канонического действия группы $U(1)$ на пространстве дополнительного измерения (окружности S^1), то такая теория может быть интерпретирована как четырехмерная теория гравитации, взаимодействующей с электромагнитным полем. Впоследствии эта идея была обобщена на случай произвольных однородных пространств дополнительных измерений G/H, при этом реинтерпретация сектора G-инвариантных полей многомерной теории в терминах четырехмерных полей получила название размерной редукции. Мы еще вернемся к задаче размерной редукции гравитации в главе 7. А здесь отметим, что такое понимание размерной редукции является весьма общим и может применяться не только к гравитационному, но и к другим, в частности, к калибровочным полям.

Однако в последнем случае наложение на многомерные калибровочные поля требования инвариантности оказывается слишком ограничительным. Специфика калибровочных теорий позволяет ослабить это требование и рассматривать класс калибровочных полей, инвариантных относительно действия группы симметрии G с точностью до калибровочного преобразования. Такие поля получили название симметричных калибровочных полей.

Размерная редукции симметричных калибровочных полей оказалась весьма интересной с точки зрения физических приложений, т. к. позволяет получить из многомерных чисто калибровочных теорий четырехмерные модели Хиггса с жестко фиксированными параметрами. Построение методом размерной редукции таких моделей будет подробно обсуждаться в конце этой главы.

Для проведения размерной редукции симметричных калибровочных полей удобно использовать геометрическое описание калибровочных теорий. В геометрическом подходе симметричным калибровочным полям соответствуют инвариантные связности. Поэтому мы сначала установим это соответствие, приведем стандартные математические результаты об инвариантных связностях, а затем применим их к задаче размерной редукции симметричных калибровочных полей.

§ 1. Симметричные калибровочные поля и инвариантные связности

Рассмотрим в пространстве E с фиксированной метрикой γ чисто калибровочную теорию с калибровочной группой K. В соответствии с результатами предыдущей главы, на геометрическом языке это означает, что нам задано некоторое главное расслоенное пространство $P(E, K; \Psi, \pi)$ и связность в нем; соответствующую форму связности обозначим ω.

Пусть на расслоении $P(E, K)$ действует слева группа G как группа автоморфизмов этого расслоения, т. е. действие G коммутирует с действием структурной группы. Обозначая это действие L_g, имеем:

$$L_{g_1 g_2} = L_{g_1} \circ L_{g_2} \tag{6.1а}$$

$$L_g \circ \Psi_k = \Psi_k \circ L_g. \tag{6.1б}$$

Действие G на $P(E, K)$ порождает действие этой группы на E, которое мы считаем нетривиальным и обозначаем O_g; оно определяется из условия

$$\pi \circ L_g = O_g \circ \pi. \tag{6.2}$$

Для того, чтобы группу G можно было рассматривать как группу симметрии теории, необходимо, чтобы метрика γ была G-инвариантна. Связность в расслоении $P(E, K)$ называется G-инвариантной, если форма связности ω инвариантна относительно действия L_g для любого $g \in G$. Таким образом, мы имеем следующие условия G-инвариантности теории:

$$O_g^* \gamma = \gamma, \tag{6.3а}$$

$$L_g^* \omega = \omega. \tag{6.3б}$$

Пусть над окрестностью $U \subset E$ задано сечение $s : U \to P$. Тогда на U определено калибровочное поле $A = s^* \omega$. Не ограничивая общности, будем считать, что действие G оставляет U инвариантной, и рассмотрим трансформационные свойства поля A относительно этого действия. Для этого заметим, что из определения сечения и из (6.2) следует, что

$$\pi \circ (L_g \circ s) = O_g,$$

и поэтому отображение $s_g : U \to P$, определенное как

$$s_g = L_g \circ s \circ O_{g^{-1}} \tag{6.4}$$

тоже есть сечение над U. Поэтому в расслоении $\pi^{-1}(U)$ существует вертикальный автоморфизм V_g, переводящий s в s_g:

$$s_g = V_g \circ s. \tag{6.5}$$

Возьмем обратный образ формы ω относительно сечения s_g. Получим $s_g^*\omega = (L_g \circ s \circ O_{g^{-1}})^*\omega = O_{g^{-1}}^*(s^*(L_g^*\omega)) = O_{g^{-1}}^* A$. Выражение (6.5) дает возможность вычислить $s_g^* A$ другим способом. Вспоминая, что, в соответствии с (4.38), вертикальный автоморфизм V_g характеризуется некоторым эквивариантным отображением $\tau_g : P \to K$, и учитывая (4.41), в этом случае имеем:

$$s_g^*\omega = s^*(V_g^*\omega) = \mathrm{ad}(\rho_g)^{-1} A + (\rho_g)^{-1} d\rho_g,$$

где мы обозначили $s^*\tau_g = \rho_g$. Сравнивая оба результата, мы видим, что для поля A, являющегося обратным образом инвариантной связности, преобразование симметрии эквивалентно калибровочному:

$$O_{g^{-1}}^* A = \mathrm{ad}(\rho_g)^{-1} A + (\rho_g)^{-1} d\rho_g. \tag{6.6}$$

Таким образом, мы установили связь между симметричными калибровочными полями и инвариантными связностями, которая позволяет использовать для описания симметричных калибровочных полей известные математические результаты, к изложению которых мы и переходим.

В математике изучены инвариантные связности в расслоении $P(E, K)$ для случая, когда группа G действует на P слой транзитивно, т. е. для любых двух слоев из P существует элемент из G, переводящий один слой в другой. Это означает, что группа G действует транзитивно на E, и E есть некоторое однородное пространство G/H. Мы ограничимся здесь рассмотрением только редуктивных пространств G/H, т. е. таких пространств, для которых существует разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в прямую сумму алгебры Ли $\mathfrak{h}$ группы H и некоторого линейного пространства $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, обладающее свойством $\mathrm{ad}\, H\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, или, эквивалентно, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$.

Важный специальный случай инвариантной связности дает следующее:

Предложение 6.1.1. Пусть G — связная группа Ли, а H — ее замкнутая подгруппа, такая что однородное пространство G/H редуктивно. Тогда

1) $\mathfrak{h}$-компонента $\theta_{\mathfrak{h}} \equiv \omega$ канонической 1-формы θ в G определяет в расслоении $G\left(G/H, H\right)$ связность, инвариантную относительно левых сдвигов элементами из G;

2) форма кривизны этой связности задается формулой

$$\Omega = -\frac{1}{2}\left[\theta_{\mathfrak{m}}, \theta_{\mathfrak{m}}\right]_{\mathfrak{h}}; \tag{6.7}$$

3) любая связность в $G\left(G/H, H\right)$, инвариантная относительно левого действия G на себя, определяет редуктивное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ и может быть построена описанным в (1) способом.

Доказательство. 1) Определение 1-формы θ (§ 5, гл. 2) и закон ее преобразования при правых сдвигах позволяют легко проверить, что $\omega = \theta_{\mathfrak{h}}$ удовлетворяет условиям (1) и (2), приведенным в Предложении 2.10.1 и налагаемым на форму связности. Горизонтальным подпространством для соответствующей связности будет подпространство, натянутое в каждой точке $g \in G$ на левоинвариантные векторные поля, порожденные элементами из $\mathfrak{m}$.

2) Воспользовавшись для Ω структурным уравнением (2.74), получим

$$\Omega = d\theta_{\mathfrak{h}} + \frac{1}{2}[\theta_{\mathfrak{h}}, \theta_{\mathfrak{h}}] = \left\{ d\theta_{\mathfrak{h}} + \frac{1}{2}[\theta_{\mathfrak{h}}, \theta_{\mathfrak{h}}] + \frac{1}{2}[\theta_{\mathfrak{m}}, \theta_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}} \right\} - \frac{1}{2}[\theta_{\mathfrak{m}}, \theta_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}}.$$

Остается заметить, что выражение в фигурных скобках есть $\mathfrak{h}$-компонента уравнения Маурера—Картана (2.44) для θ и поэтому исчезает.

3) Для произвольной левоинвариантной формы связности ω в $G\left(G/H, H\right)$ определим подпространство $\mathfrak{m}$ как множество левоинвариантных векторных полей X, для которых $\omega(X) = 0$. Очевидно,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}, \text{ и } \omega = \theta_{\mathfrak{h}}. \ \square$$

Инвариантные связности в произвольном расслоении $P\left(G/H, K\right)$ описываются теоремой Вана (см. [KH], глава 2, § 11). Здесь мы приведем доказательство этой теоремы для случая редуктивных однородных пространств G/H в форме, удобной для нашего дальнейшего рассмотрения.

Прежде чем формулировать теорему заметим, что действие группы G на $P\left(G/H, K\right)$, которое мы считаем левым и обозначаем L_g, определяет гомоморфизм $\tau : H \to K$. Действительно, возьмем некоторую точку $p_0 \in \pi^{-1}(o)$, где $o = [e]$ есть начало G/H. Поскольку H есть стационарная подгруппа точки o, то $L_h p_0 \in \pi^{-1}(o)$, и мы можем определить $\tau(h)$ соотношением

$$L_h p_0 = \Psi_{\tau(h)} p_0. \tag{6.8}$$

Разумеется, гомоморфизм τ зависит от выбора точки p_0. Поэтому в дальнейшем мы считаем точку p_0 фиксированной.

Предложение 6.1.2. Если связная группа Ли G действует слой-транзитивно как группа автоморфизмов главного расслоения $P(G/H, K)$, то существует взаимно-однозначное соответствие между G-инвариантными связностями в P и линейными отображениями $\phi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{k}$, удовлетворяющими условию эквивариантности

$$\phi(\mathrm{ad}(h)m) = \mathrm{ad}\,\tau(h)\phi(m), \quad h \in H, \quad m \in \mathfrak{m}, \tag{6.9}$$

где $\tau(h)$ определено в (6.8).

Доказательство. Определим отображение $i : G \to P$ формулой $i(g) = L_g p_0$ и возьмем обратный образ относительно этого отображения некоторой G-инвариантной формы связности ω на P, $i^*\omega = \alpha$. Обозначая левое действие $g \in G$ на $g' \in G$ просто gg' и принимая во внимание вытекающее из определения i соотношение $i \circ g = L_g \circ i$, для α получим:

$$g^*\alpha = (g^* \circ i^*)\omega = (i^* \circ L_g^*)\omega = \alpha.$$

Это означает, что форма α левоинвариантна, и поэтому она однозначно выражается через каноническую 1-форму θ на G, $\alpha = \Lambda(\theta)$, где Λ есть линейное отображение $\Lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$.

Пусть $\bar{b}$ есть левоинвариантное поле на G, порожденное элементом $b \in \mathfrak{g}$. Вычислим $\alpha(\bar{b})$, используя тот факт, что действие подгруппы H в точке p_0 эквивалентно действию подгруппы $\tau(H)$ структурной группы K (см. (6.8)). По определению α имеем $\alpha(\bar{b}) = \omega(i'\bar{b})$. Из определения отображения i и из левоинвариантности $\bar{b}$ следует, что поле $i'\bar{b}$ инвариантно относительно действия L_g. Поэтому функция $\omega(i'\bar{b})$ постоянна, и ее можно вычислить в точке p_0. Вследствие (6.8) в этой точке $i'\bar{b} = (\tau(b))^*$, где $(\tau(b))^*$ обозначает фундаментальное векторное поле в P (и той же буквой τ обозначен гомоморфизм алгебр Ли, отвечающий гомоморфизму $\tau : H \to K$). Окончательно получаем $\alpha(\bar{b}) = \tau(b) = \Lambda(b)$. Отсюда следует, что $\Lambda|_{\mathfrak{h}} = \tau$.

Далее, обозначая правое действие $h \in H$ на G через R_h, по определению отображения i имеем:

$$R_h^* \circ i^* = (i \circ R_h)^* = (\Psi_{\tau(h)} \circ i)^* = i^* \circ \Psi_{\tau(h)}^*.$$

Применяя первое и последнее выражения этой цепочки к ω, учитывая ее закон преобразования при действии структурной группы $\Psi_{\tau(h)}^*$ и трансформационные свойства θ относительно преобразования R_h^*, получим

$$R_h^*\alpha = \Lambda(\mathrm{ad}\,h^{-1}\theta) = \mathrm{ad}\,\tau(h^{-1})\Lambda(\theta).$$

Для ограничения $\Lambda|_{\mathfrak{m}} = \phi$ это и есть условие эквивариантности (6.9), т. е. мы поставили в соответствие форме ω отображение ϕ с требуемыми свойствами.

Обратно, по отображению ϕ (6.9) можно восстановить связность и форму ω.

Пусть $\widetilde{X}$ есть левоинвариантное векторное поле на G, отвечающее элементу $X \in \mathfrak{m}$. Определим в точках подмногообразия $i(G)$ горизонтальное подпространство $H_{i(g)}$ как подпространство, порожденное векторами вида $(\phi(X))^* - i'\widetilde{X}$, где $(\phi(X))^*$ есть фундаментальное векторное поле, порожденное элементом $\phi(X) \in \mathfrak{k}$. Из определения i найдем, что $\pi \circ i$ постоянно на элементах из класса $[g]$, т. е. $\pi \circ i = \pi_G$, где π_G — каноническая проекция в $P\left(G/H, H\right)$. Из этого следует, что $\pi'\left((\phi(X))^* - i'\widetilde{X}\right) = -\pi'_G(\widetilde{X})$. Поэтому касательное пространство $T_{i(g)}P$ есть прямая сумма так определенного горизонтального подпространства и вертикального подпространства.

Поскольку G действует на P слой-транзитивно, $i(G)$ есть подрасслоение в P; нетрудно понять, что его структурная группа есть $\tau(H)$. Любой элемент $p \in P$ можно представить в виде $p = \Psi_a i(g)$, $a \in K$, $g \in G$, причем a и g определены с точностью до умножения на элементы $\tau(h^{-1})$ и h.

Горизонтальное подпространство в p определим как образ горизонтального подпространства в $i(g)$ при отображении Ψ_a. Легко проверить, что, благодаря свойству (6.9) отображения ϕ, это определение не зависит от выбора a и g. Покажем, наконец, что так определенной связности отвечает форма связности ω. Для этого вычислим

$$\omega\left(\Psi'_a\left(\left(\phi(X)\right)^* - i'\widetilde{X}\right)\right) = \operatorname{ad} a^{-1}\left\{\phi(X) - \alpha(\widetilde{X})\right\} = 0.$$

Это означает, что мы восстановили исходную связность по отображению ϕ. □

Замечание. Инвариантная связность в P, для которой $\phi = 0$, называется канонической связностью.

Как видно из доказательства Предложения 6.1.2, горизонтальные компоненты векторов вида $i'\widetilde{X}$, где $\widetilde{X}$ — левоинвариантное векторное поле на G, отвечающее $X \in \mathfrak{m}$, порождают горизонтальные подпространства в точках $i(G)$. Поэтому форма кривизны Ω инвариантной связности полностью характеризуется своим сужением на это подрасслоение, совпадающим, очевидно, с $i^*\Omega$.

Предложение 6.1.3. Для сужения формы кривизны инвариантной связности на подрасслоении $i(G)$ или, эквивалентно, для формы $i^*\Omega$

на G имеет место представление

$$i^*\Omega = \frac{1}{2}\left[\phi(\theta_{\mathfrak{m}}), \phi(\theta_{\mathfrak{m}})\right] - \frac{1}{2}\tau\left(\left[\theta_{\mathfrak{m}}, \theta_{\mathfrak{m}}\right]_{\mathfrak{h}}\right) - \frac{1}{2}\phi\left(\left[\theta_{\mathfrak{m}}, \theta_{\mathfrak{m}}\right]_{\mathfrak{m}}\right). \qquad (6.10)$$

Доказательство. Используя структурное уравнение для Ω и то, что $i^*\omega = \alpha = \Lambda(\theta)$, получаем

$$i^*\Omega = \Lambda(d\theta) + \frac{1}{2}\left[\Lambda(\theta), \Lambda(\theta)\right] = \frac{1}{2}\left[\Lambda(\theta), \Lambda(\theta)\right] - \frac{1}{2}\Lambda([\theta, \theta]).$$

При переходе ко второму равенству мы приняли во внимание уравнение Маурера—Картана. Разлагая затем θ на $\mathfrak{h}$- и $\mathfrak{m}$-компоненты: $\theta = \theta_{\mathfrak{h}} + \theta_{\mathfrak{m}}$, вспоминая, что $\Lambda|_{\mathfrak{h}} = \tau$, $\Lambda|_{\mathfrak{m}} = \varphi$ и обладает свойством (6.9), получаем (6.10). □

Следствие. Инвариантная связность плоская тогда и только тогда, когда отображение $\phi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{k}$ продолжает гомоморфизм $\tau : \mathfrak{h} \to \mathfrak{k}$ до гомоморфизма $\Lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$.

Доказательство. Как мы отмечали в § 12 главы 2, связность плоская тогда и только тогда, когда ее форма кривизны нулевая. Для инвариантной связности обращение в нуль формы кривизны (6.10) эквивалентно тому, что ϕ продолжает τ до гомоморфизма $\Lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$. □

Замечание. Результаты Предложений 6.1.2, 6.1.3 могут быть легко распространены на линейные связности. Действительно, как мы знаем из главы 3, действие G на G/H канонически поднимается до действия G на расслоении линейных реперов $L(G/H)$. Зафиксируем некоторый репер u_o в точке o, т. е. $u_o \in \pi^{-1}(o)$. Действие преобразований из подгруппы H на u_o порождает гомоморфизм $\lambda : H \to GL(n, \mathbb{R})$ ($n = \dim G/H$), который, очевидно, совпадает с представлением изотропии в точке o. Левоинвариантные линейные связности в G/H находятся во взаимно-однозначном соответствии с линейными отображениями $\phi : \mathfrak{m} \to gl(n)$, удовлетворяющими условию

$$\phi(\mathrm{ad}(h)m) = \mathrm{ad}\,\lambda(h)\phi(m), \qquad m \in \mathfrak{m}.$$

Линейная связность, соответствующая $\phi = 0$, называется канонической связностью.

Если G действует на G/H эффективно (т. е. H не содержит нормальных делителей G), то на $L(G/H)$ G действует свободно, и вследствие этого подмножество $Q = \{L_g u_o,\ g \in G\}$ в $L(G/H)$ есть подрасслоение, изоморфное $G(G/H, H)$. Ясно, что каноническая связность в $L(G/H)$ редуцируема к канонической связности в $Q = G(G/H, H)$. Отметим еще, что если на G/H задана G-инвариантная метрика, то каноническая связность G/H является метрической, но в общем случае обладает ненулевым кручением. □

§ 2. Размерная редукция симметричных калибровочных полей

Пусть в пространстве $E = M \times G/H$ с фиксированной метрикой $\hat{\gamma} = \eta \oplus \gamma$ (η — метрика на M, а γ — на G/H) задана калибровочная теория с калибровочной группой K и со стандартным действием. В дальнейшем мы предполагаем группы G и K компактными.

На пространстве E такого вида естественно определено действие группы G, которое сводится к каноническому левому действию G на G/H. Мы будем считать, что метрика γ инвариантна относительно этого действия, а значит, и метрика $\hat{\gamma}$ G-инвариантна, т. е.

$$O_g^* \hat{\gamma} = \hat{\gamma}, \tag{6.11}$$

где мы сохранили обозначения § 1 для действия G на E.

Предположим, что в рассматриваемой теории есть сектор G-симметричных калибровочных полей. В соответствии с результатами § 1 это означает, что существует некоторое главное расслоенное пространство $\widehat{P}(E, K; \Psi, \pi)$, на котором задано действие группы G автоморфизмами L_g, проектирующееся в действие O_g на E (т. е. выполняются соотношения (6.1), (6.2)), и G-симметричным калибровочным полям на E соответствуют инвариантные формы связности $\hat{\omega}$ в этом расслоении, для которых

$$L_g^* \hat{\omega} = \hat{\omega}, \quad \forall g \in G. \tag{6.12}$$

Поскольку для симметричных полей действие группы G сводится к калибровочному преобразованию, лагранжиан на таких полях не зависит от точек пространства G/H, т. е. фактически представляет собой лагранжиан некоторой теории в пространстве M (которое в дальнейшем будет иметь смысл четырехмерного пространства-времени). Чтобы явно построить эту эффективную теорию, нужно выразить G-симметричные конфигурации полей на E в терминах полей, заданных на M, затем подставить это представление в лагранжиан и получить эффективное действие теории в M.

Эта процедура и есть размерная редукция симметричных калибровочных полей. Для ее проведения удобно использовать геометрическое описание таких полей как инвариантных связностей. На этом языке первый шаг размерной редукции — представление симметричных полей на E в терминах полей на M — означает, что нам нужно описать инвариантную форму связности $\hat{\omega}$ на $\hat{P}$ в терминах геометрических объектов, заданных на некотором главном расслоении с базой M.

Обратимся для этого к конструкции примера 3 § 8 главы 2. Обозначая через o начало в G/H, определим подмногообразие $\widetilde{M} \subset E$, $\widetilde{M} = M \times \{o\}$, состоящее из неподвижных точек подгруппы H, т. е. для

$\forall h \in H$ и $\forall z \in \widetilde{M}$ $O_h z = z$. Ясно, что порция P над $\widetilde{M}$, $\widetilde{P} = \pi^{-1}(\widetilde{M})$, есть главное расслоенное пространство со структурной группой K и базой M.

Поскольку преобразование O_h действует на $\widetilde{M}$ тривиально, группа H действует на $\widetilde{P}$ преобразованиями L_h как подгруппа группы вертикальных автоморфизмов этого расслоения. Вследствие этого для любого $\tilde{p} \in \widetilde{P}$ существует отображение $\tau_{\tilde{p}} : H \to K$, задаваемое формулой

$$L_h \tilde{p} = \Psi_{\tau_{\tilde{p}}(h)} \tilde{p} \tag{6.13}$$

и обладающее следующими свойствами

$$\tau_{\tilde{p}}(h_1 h_2) = \tau_{\tilde{p}}(h_1)\tau_{\tilde{p}}(h_2), \tag{6.14а}$$

$$\tau_{\Psi_a \tilde{p}}(h) = \mathrm{ad}(a^{-1})\tau_{\tilde{p}}(h), \tag{6.14б}$$

легко выводимыми из (4.38) и (6.1). Формула (6.14а) означает, что $\tau_{\tilde{p}} : H \to K$ есть гомоморфизм (ср. с (6.8)).

Далее, как показано в примере 3 § 8 главы 2, расслоение $G \times_H \widetilde{P}$ с типическим слоем $\widetilde{P}$, ассоциированное с главным расслоением $G\big(G/H, H\big)$, диффеоморфно $\widehat{P}$, т. е. существует диффеоморфизм

$$\chi : G \times_H \widetilde{P} \to \widehat{P}, \tag{6.15а}$$

определяемый соотношением

$$\chi\big([(g, \tilde{p})]\big) = L_g \tilde{p}, \tag{6.15б}$$

не зависящим от выбора представителей в классе $\big[(g, \tilde{p})\big] = \big[(gh^{-1}, L_h \tilde{p})\big]$. Очевидно, χ переводит каноническое левое действие G на $G \times_H \widetilde{P}$ в действие G на $\widehat{P}$, а действие структурной группы K на $\widetilde{P}$ в действие этой группы на $\widehat{P}$.

Представление $\widehat{P}$ в виде (6.15) позволяет построить отображения

$$i_{\tilde{p}} : G \to \widehat{P}, \quad i_{\tilde{p}}(g) = L_g \tilde{p}, \tag{6.16а}$$

$$i_e : \widetilde{P} \to \widehat{P}. \tag{6.16б}$$

Отображение $i_{\tilde{p}}$ аналогично отображению i, введенному в Предложении 6.1.2; отображение (6.16б) просто представляет $\widetilde{P}$ как подмногообразие в $\widehat{P}$. Из определения $i_{\tilde{p}}$ и из (6.1б) легко следует, что

$$i_{\Psi_a \tilde{p}} = \Psi_a \circ i_{\tilde{p}}, \quad a \in K. \tag{6.17}$$

Нетрудно проверить, что обратный образ формы $\hat{\omega}$ относительно отображения i_e, $\tilde{\omega} = i_e^* \hat{\omega}$, есть форма связности на $\widetilde{P}$, инвариантная относительно действия H,

$$L_h^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}, \quad \forall h \in H, \tag{6.18}$$

что является наследием условия (6.12).

Далее, для любого $\tilde{p} \in \widetilde{P}$ обратный образ

$$i_{\tilde{p}}^{*}\hat{\omega} = \alpha_{\tilde{p}} \tag{6.19}$$

есть 1-форма на G со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{k}$ группы K. Вследствие G-инвариантности $\hat{\omega}$ $\alpha_{\tilde{p}}$ тоже G-инвариантна, и поэтому может быть представлена в виде (см. § 1)

$$\alpha_{\tilde{p}} = \Lambda_{\tilde{p}}(\theta), \quad \Lambda_{\tilde{p}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}, \tag{6.20}$$

где θ есть каноническая левоинвариантная 1-форма на группе G, а отображение $\Lambda_{\tilde{p}}$ линейное (сравни с Предложением 6.1.2). Из (6.17) легко найти, что

$$\Lambda_{\Psi_a\tilde{p}} = \mathrm{ad}(a^{-1}) \circ \Lambda_{\tilde{p}}. \tag{6.21}$$

Обозначим через R_h правое действие H на $G : R_h g = gh$. Тогда из (6.13), (6.16) получим

$$i_{\tilde{p}} \circ R_h = i_{\Psi_{\tau_{\tilde{p}}(h)}\tilde{p}}.$$

Применяя $(i_{\tilde{p}} \circ R_h)^*$ к форме $\hat{\omega}$, учитывая (6.21) и закон преобразования θ при правых сдвигах, находим

$$\Lambda_{\tilde{p}} \circ \mathrm{ad}\, h = \mathrm{ad}\, \tau_{\tilde{p}}(h) \circ \Lambda_{\tilde{p}}. \tag{6.22}$$

Вследствие компактности G однородное пространство G/H редуктивно, т. е. существует редуктивное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Вычисляя форму $\alpha_{\tilde{p}}$ на левоинвариантном векторном поле $\tilde{b}$, порожденном $b \in \mathfrak{h}$, найдем, что ограничение $\Lambda_{\tilde{p}}$ на $\mathfrak{h}$ совпадает с дифференциалом отображения $\tau_{\tilde{p}}$ (который мы будем обозначать той же буквой)

$$\Lambda_{\tilde{p}}|_{\mathfrak{h}} = \tau_{\tilde{p}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{k}, \tag{6.23а}$$

а $\Lambda_{\tilde{p}}|_{\mathfrak{m}} \equiv \phi_{\tilde{p}}$ вследствие (6.21), (6.22) обладает свойствами

$$\phi_{\tilde{p}} : \mathfrak{m} \to \mathfrak{k}, \tag{6.23б}$$

$$\phi_{\Psi_a\tilde{p}} = \mathrm{ad}(a^{-1}) \circ \phi_{\tilde{p}}, \tag{6.23в}$$

$$\phi_{\tilde{p}} \circ \mathrm{ad}\, h = \mathrm{ad}\, \tau_{\tilde{p}}(h) \circ \phi_{\tilde{p}}. \tag{6.23г}$$

Здесь следует отметить, что форма $\tilde{\omega}$ характеризует форму $\hat{\omega}$ на пространстве орбит группы G в $\widehat{P}$, а отображение $\phi_{\tilde{p}}$ характеризует $\hat{\omega}$ на G-орбите через $\tilde{p}$. Фактически, это то же самое отображение (с опорной точкой $\tilde{p}$), которое вводилось в Предложении 6.1.2.

По форме $\tilde{\omega}$ и отображению $\phi_{\tilde{p}}$ можно реконструировать исходную связность и форму $\hat{\omega}$. Действительно, касательные векторы $Y \in T_gG$ и $Z \in T_{\tilde{p}}\widetilde{P}$ определяют касательный вектор к $G \times_H \widetilde{P}$ в точке $[(g, \tilde{p})]$ как класс $[(Y,Z)]$. Соответствующий касательный вектор $X \in T_{\chi\left([(g,\tilde{p})]\right)}\widehat{P}$, $X = \chi'([(Y,Z)])$ имеет вид

$$X = L'_g Z + i'_{\tilde{p}} Y. \tag{6.24}$$

Определим горизонтальное подпространство в точке $\chi\big([(g,\tilde{p})]\big)$ как подпространство, порожденное векторами вида

$$X = L'_g Z + i'_{\tilde{p}} \tilde{m} - \big(\phi_{\tilde{p}}(m)\big)^*, \tag{6.25}$$

где Z горизонтален относительно связности $\tilde{\omega}$ в $\widetilde{P}$, $\tilde{m}$ есть значение в точке g левоинвариантного векторного поля на G, порожденного элементом $m \in \mathfrak{m}$, а $(\phi_{\tilde{p}}(m))^*$ — фундаментальное векторное поле на $\widehat{P}$, порожденное $\phi_{\tilde{p}}(m) \in \mathfrak{k}$. Прямой проверкой можно убедиться, что так определенное горизонтальное подпространство не зависит от выбора представителя в классе $[(g,\tilde{p})]$, благодаря свойствам (6.17) и (6.23в) инвариантно относительно действия структурной группы, а также с очевидностью инвариантно относительно преобразований L_g. Также легко проверить, что на векторах вида (6.25) форма $\hat{\omega}$ обращается в нуль, т. е. по форме $\tilde{\omega}$ и отображению $\phi_{\tilde{p}}$ мы восстановили исходную связность. Таким образом, G-инвариантная форма связности $\hat{\omega}$ на $\widehat{P}$ находится во взаимно однозначном соответствии с парой $(\tilde{\omega},\phi_{\tilde{p}})$ на $\widetilde{P}$.

Оказывается, что вследствие оставшейся H-симметрии (6.18) расслоение $\widetilde{P}$ может быть редуцировано дальше. А именно, выберем некоторую точку $\tilde{p}_0 \in \widetilde{P}$, положим $\tau(h) = \tau_{\tilde{p}_0}(h)$ и рассмотрим подмножество в $\widetilde{P}$, определенное как

$$P = \Big\{\tilde{p} \in \widetilde{P}, \quad \tau_{\tilde{p}}(h) = \tau(h), \quad \forall h \in H\Big\}. \tag{6.26а}$$

Из (6.14б) следует, что P есть подрасслоение в $\widetilde{P}$ со структурной группой

$$C = \Big\{c \in K, \quad c\tau(h)c^{-1} = \tau(h), \quad \forall h \in H\Big\} \tag{6.26б}$$

(централизатор $\tau(H)$ в K). Расслоение $\widetilde{P}$, аналогично (6.15 а), можно представить в виде

$$\widetilde{P} = K \times_C P. \tag{6.27}$$

Сужение $\tilde{\omega}$ на $P(M,C)$ обозначим ω, $\tilde{\omega}|_P = \omega$. Поскольку действие L_h в точках P вследствие (6.13), (6.26) сводится к действию $\Psi_{\tau(h)}$, условие инвариантности (6.18) переписывается для ω так:

$$\omega = L_h^*\tilde{\omega}|_P = \Psi_{\tau(h)}^*\tilde{\omega}|_P = \operatorname{ad}\tau(h^{-1})\tilde{\omega}|_P = \operatorname{ad}\tau(h^{-1})\omega. \tag{6.28}$$

Это означает, что ω принимает значения в алгебре Ли $\mathfrak{c}$ группы C, т.е. ω является формой связности на P, и связность в K-расслоении $\widetilde{P}$ редуцируема к связности в C-расслоении P; форма $\tilde{\omega}$ стандартным образом восстанавливается по форме ω (см. [KH], глава 2, §6).

Отображение $\phi_{\tilde{p}}$ в точках $p \in P$ удовлетворяет условию

$$\phi_p \circ \operatorname{ad} h = \operatorname{ad} \tau(h) \circ \phi_p. \tag{6.29}$$

По отображению ϕ_p отображение $\phi_{\tilde{p}}$ со свойством (6.23в) восстанавливается с помощью представления (6.27).

Окончательно, мы пришли к результату, что G-инвариантная форма связности $\hat{\omega}$ на $\widehat{P}(E,K)$ находится во взаимно однозначном соответствии с парой (ω, ϕ_p) на $P(M,C)$, где ω — форма связности на P, ϕ_p — линейное отображение, удовлетворяющее (6.23в) и (6.29).

Свойство (6.23в) позволяет рассматривать ϕ_p как эквивариантное отображение из P в линейное пространство $\mathfrak{k} \otimes \mathfrak{m}^*$. В этом пространстве естественно определено представление группы H, индуцированное представлениями $\operatorname{ad}(\tau(H))\mathfrak{k}$ и $\operatorname{ad}(H)\mathfrak{m}$. При таком рассмотрении условие (6.29) означает, что $\phi(p)$ принимает значения в подпространстве тривиального представления H, которое мы обозначим $V_0 \subset \mathfrak{k} \otimes \mathfrak{m}^*$.

Для того чтобы доказать это, введем понятие коприсоединенного представления группы Ли G. Пусть задано спаривание $\langle\langle l, r\rangle\rangle$ элементов $l \in \mathfrak{g}^*$ и $r \in \mathfrak{g}$. Тогда присоединенное представление $\operatorname{ad} G$ порождает в $\mathfrak{g}^*$ представление $\operatorname{ad}^! G$, определяемое формулой

$$\langle\langle l, \operatorname{ad} g^{-1} r\rangle\rangle = \langle\langle \operatorname{ad}^! g\, l, r\rangle\rangle, \quad g \in G,$$

и называемое коприсоединенным представлением группы Ли G.

Соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ задается так:

$$\langle\langle l, \operatorname{ad} g\, r\rangle\rangle = -\langle\langle \operatorname{ad}^! g\, l, r\rangle\rangle, \quad g \in \mathfrak{g}.$$

Обозначая тем же символом $\langle\langle\,,\rangle\rangle$ спаривание $\phi \in \mathfrak{k} \otimes \mathfrak{m}^*$ с элементом $m \in \mathfrak{m}$, инфинитезимальную форму условия (6.29) можно переписать в виде

$$\langle\langle \phi, \operatorname{ad} hm\rangle\rangle = -\langle\langle \operatorname{ad}^! h\phi, m\rangle\rangle = \langle\langle \operatorname{ad} \tau(h)\phi, m\rangle\rangle.$$

Отсюда следует, что для любого $h \in \mathfrak{h}$

$$\operatorname{ad} \tau(h)\phi + \operatorname{ad}^! h\phi = 0,$$

т.е. на операторах ϕ, удовлетворяющих условию (6.29), реализуется тривиальное представление алгебры Ли $\mathfrak{h}$ и, соответственно, группы H. Вспоминая результаты главы 2, мы приходим к заключению, что ϕ_p описывает скалярное поле на H со значениями в пространстве V_0.

Установленное соответствие дает решение задачи классификации G-инвариантных связностей или G-симметричных калибровочных полей. Физически оно означает, что чисто калибровочная теория в пространстве $E = M \times G/H$ с калибровочной группой K, обладающая дополнительной группой пространственной симметрии G, сводится к калибровочной теории с калибровочной группой C в пространстве M, которая включает в себя дополнительные скалярные поля, описываемые отображением ϕ. Чтобы полностью характеризовать эту редуцированную теорию, необходимо получить ее действие из действия исходной многомерной теории. Это и будет предметом нашего дальнейшего рассмотрения.

Введем в пространстве E (локальные) координаты $z^M = (x^\mu, \xi^m)$ $\big(M = 0, 1, \ldots, \dim M + \dim G/H - 1\big)$, где $\{x^\mu\}$ $(\mu = 0, 1, \ldots, \dim M - 1)$ — координаты в M, а $\{\xi^m\}$ $\big(m = 1, 2, \ldots, \dim G/H\big)$ — координаты в G/H, и запишем стандартное действие для исходной калибровочной теории в $\widehat{P}(E, K)$ в виде

$$S = \frac{1}{\hat{g}^2} \int\limits_E \left\langle \widehat{F}_{MN}, \widehat{F}^{MN} \right\rangle dv_E, \tag{6.30}$$

где $\hat{g}$ есть константа связи, $\widehat{F}_{MN}$ — компонента обратного образа $\widehat{F} = s^*\widehat{\Omega}$ формы кривизны $\widehat{\Omega} = d\hat{\omega} + \frac{1}{2}[\hat{\omega}, \hat{\omega}]$ относительно некоторого (локального) сечения $s : E \to \widehat{P}$, $\langle\,,\rangle$ — K-инвариантная билинейная форма в $\mathfrak{k}$ (пропорциональная tr в присоединенном представлении и потому отрицательно определенная), а dv_E — элемент объема пространства E, построенный по G-инвариантной метрике $\hat{\gamma} = \eta \oplus \gamma$.

Рассмотрим это действие на G-инвариантных связностях $\hat{\omega}$. Для таких связностей можно получить специальное представление 2-формы кривизны $\widehat{F}$, позволяющее легко преобразовать действие (6.30) в действие некоторой теории в M.

Заметим, что благодаря представлению (6.15a) любое (локальное) сечение $s : E \to P$ можно задать с помощью (локальных) сечений $s_1 : G/H \to G$ и $s_2 : M \to \widetilde{P}$ по формуле

$$s(x, \xi) = \chi\left(\left[\left(s_1(\xi), s_2(x)\right)\right]\right). \tag{6.31}$$

Учитывая (6.24), получим отсюда наиболее общее представление для калибровочного поля на E, отвечающего G-инвариантной форме $\hat{\omega}$:

$$\widehat{A}_{(x,\xi)} = (s^*\hat{\omega})_{(x,\xi)} = (s_2^*\tilde{\omega})_x + \Lambda_{s_2(x)}((s_1^*\theta)_\xi). \tag{6.32}$$

Очевидно, благодаря (6.27) сечение s_2 можно выбрать так, что $s_2(x) \in P$. Для дальнейшего нам удобно также выбрать s_1 удовлетворяющим условиям $s_1(o) = e$, $s_1'\left(T_oG/H\right) = \mathfrak{m}$, которые устанавливают изоморфизм касательного пространства T_oG/H с подпространством $\mathfrak{m}$. При этом дифференциал канонической проекции π_G в расслоении $P(G/H, H)$, взятый в точке $e \in G$, $\pi'_G : \mathfrak{m} \to T_oG/H$, порождает на $\mathfrak{m}$ $\operatorname{ad} H$-инвариантное скалярное произведение, отвечающее метрике γ в точке o. Обозначая $s_1^*\theta = \overline{\theta}$, $\phi_{s_2(x)} = \phi_x$ и $s_2^*\omega = A$, $A \in \mathfrak{c}$, получим выражение для G-симметричного поля на $E = M \times G/H$ в стандартной калибровке:

$$\widehat{A} = A + \tau(\overline{\theta}_{\mathfrak{h}}) + \phi(\overline{\theta}_{\mathfrak{m}}), \tag{6.33}$$

где ϕ_x вследствие (6.29) удовлетворяет условию

$$\phi \circ \operatorname{ad} h = \operatorname{ad} \tau(h) \circ \phi. \tag{6.34}$$

Нетрудно проверить, что преобразование O^*_{g-1} для этого поля эквивалентно калибровочному преобразованию с функцией $\rho_g(\xi) = \tau\big((s_1(\xi))^{-1} g \times s_1(g^{-1}\xi)\big)$, что совпадает с определением G — симметричного калибровочного поля (6.6).

Соответствующая полю $\widehat{A}$ 2-форма напряженности имеет вид

$$\widehat{F} = F + (D\phi)(\overline{\theta}_{\mathfrak{m}}) + \frac{1}{2}\left[\phi(\overline{\theta}_{\mathfrak{m}}), \phi(\overline{\theta}_{\mathfrak{m}})\right] - \\ - \frac{1}{2}\phi\big([\overline{\theta}_{\mathfrak{m}}, \overline{\theta}_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}}\big) - \frac{1}{2}\tau\big([\overline{\theta}_{\mathfrak{m}}, \overline{\theta}_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{h}}\big), \tag{6.35}$$

где $F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$, а ковариантная производная поля ϕ определена как $(D\phi)(\overline{\theta}_{\mathfrak{m}}) = (d\phi \wedge \overline{\theta}_{\mathfrak{m}}) + [A, \phi(\overline{\theta}_{\mathfrak{m}})]$, причем в $(d\phi \wedge \overline{\theta}_{\mathfrak{m}})$ подразумевается спаривание элементов из $\mathfrak{k} \otimes \mathfrak{m}^*$ и $\mathfrak{m}$. Отметим, что последние три члена в (6.35) фактически представляют собой сужение формы $\widetilde{F}$ на пространство дополнительных измерений G/H и в точности соответствуют представлению для формы кривизны инвариантной связности в Предложении 6.3.

Очевидно, что на полях вида (6.33) лагранжиан в действии (6.30) не зависит от точек G/H. Поэтому в (6.30) можно проинтегрировать по этому пространству, а подынтегральное выражение взять в точках $\widetilde{M}$. Выражения для компонент 2-формы $\widehat{F}$ на базисных векторах пространства $T_{(x,o)}E$ легко находятся с помощью представления (6.35). В частности, отождествление T_oG/H с $\mathfrak{m}$ и введение в $\mathfrak{m}$ ортонормированного в смысле метрики $(\gamma)_o$ базиса $\{u_a\}$ ($a = 1, 2, \ldots \dim G/H$) позволяет перейти к скалярным полям $\phi_a(x) \equiv \phi_x(u_a) \in \mathfrak{k}$, на компоненты которых наложены связи (6.34). В результате действие (6.30) принимает вид

$$S = \frac{1}{g^2} \int\limits_M \left\{ \langle F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu} \rangle + 2 \sum_a \langle D_\mu \phi_a(x), D^\mu \phi_a(x) \rangle - V(\phi) \right\} dv_M, \tag{6.36}$$

где $\hat{g}^2/g^2$ равно объему пространства G/H, вычисленному по метрике γ, dv_M — элемент объема пространства M, построенный по метрике η, $D_\mu\phi_a(x) = \partial_\mu\phi_a(x) + [A_\mu(x), \phi_a(x)]$, а потенциал $V(\phi)$ неотрицателен и определяется соотношениями:

$$V(\phi) = -\sum_{a,b}\langle\widehat{F}_{ab}, \widehat{F}_{ab}\rangle \geqslant 0, \tag{6.37а}$$

$$\widehat{F}_{ab} = 2\widehat{F}(u_a, u_b) = \left[\phi_a(x), \phi_b(x)\right] - \phi_x\left([u_a, u_b]_\mathfrak{m}\right) - \tau\left([u_a, u_b]_\mathfrak{h}\right). \tag{6.37б}$$

Мы видим, что редуцированная теория представляет собой калибровочную теорию с калибровочной группой C (6.26б), включающую в себя скалярные поля, минимально взаимодействующие с калибровочным полем и обладающие самодействием не выше четвертой степени, т. е. в случае $\dim M = 4$ редуцированная теория является перенормируемой. При калибровочных преобразованиях с функцией $c(x) \in C$ поле $A_\mu(x)$ преобразуется стандартно, а преобразование скалярных полей определяется преобразованием отображения ϕ_x

$$\phi_x \to \phi'_x = \mathrm{ad}(c(x))\phi_x,$$

которое совместно с условием (6.34).

Отметим еще, что в редуцированном действии в явном виде представлен только чисто калибровочный сектор. Это связано с тем, что скалярные поля подчиняются связям (6.34). Разрешение этих связей, нахождение явного вида скалярных полей и их взаимодействий представляют собой теоретико-групповой аспект задачи размерной редукции, который мы будем обсуждать ниже.

§ 3. Вычисление потенциала скалярных полей в задаче размерной редукции

В этом параграфе мы применим результаты из теории алгебр Ли, приведенные выше в главе 5, для решения задачи, возникающей на заключительном этапе размерной редукции многомерных калибровочных теорий, а именно для вычисления потенциала скалярных полей, нахождения калибровочной группы, до которой спонтанно нарушается симметрия за счет механизма Хиггса, и представления, по которому преобразуется скалярное поле редуцированной теории.

Пусть, как и § 2, исходная теория представляет собой теорию Янга—Миллса с калибровочной группой K в многомерном пространстве $E = M^4 \times G/H$. Предположим, что K и G — простые компактные группы Ли. В дальнейшем будем обозначать $\mathfrak{k}$ алгебру Ли группы K, $\mathfrak{g}$ — алгебру Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — алгебру Ли группы H. При этом часто используют запись $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. В § 2 было показано, что в секторе симметричных полей и при G-инвариантной метрике $\hat{g}$ в E эта теория может быть редуцирована к теории в M^4, содержащей калибровочные и скалярные поля. Для полного описания редуцированной теории необходимо решить следующие задачи:

1) Найти централизатор $\mathfrak{c} = C_{\mathfrak{k}}(\tau(\mathfrak{h}))$ алгебры $\tau(\mathfrak{h})$ в $\mathfrak{k}$, который является алгеброй Ли калибровочной калибровочной группы C редуцированной теории. Здесь τ есть гомоморфизм алгебр $\mathfrak{h} \to \mathfrak{k}$, соответствующий гомоморфизму групп $\tau : H \to K$, введенному в § 2 (мы используем одну и ту же букву в обозначении гомоморфизмов групп и алгебр; по смыслу всегда будет ясно, о каком гомоморфизме идет речь).

2) Мы имеем редуктивное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ (см. § 2). Необходимо разложить представление $(\mathfrak{m}, \mathrm{ad})$ подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ на неприводимые.

3) Аналогично, нужно разложить на неприводимые представления $(\mathfrak{k}, \mathrm{ad})$ подалгебры $\tau(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{k}$.

4) На основании результатов пунктов 2 и 3 построить эквивариантное отображение $\phi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{k}$, описывающее скалярные поля в M^4 (см. § 2).

5) Вычислить скалярный потенциал редуцированной теории по формуле

$$\begin{aligned} V &= -\sum_{m,n}(F_{mn}, F^{mn}), \\ F_{mn} &= \tau\big([u_m, u_n]_{\mathfrak{h}}\big) + \phi\big([u_m, u_n]_{\mathfrak{m}}\big) - \big[\phi(u_m), \phi(u_n)\big], \end{aligned} \tag{6.38}$$

где $\{u_m\}$ — базис в $\mathfrak{m}$, ортонормированный в смысле метрики $\hat{g}$ в E, а $(\,,)$ — каноническая инвариантная билинейная форма в $\mathfrak{h}$, введенная в главе 5.

6) Определить тип представления, по которому преобразуется скалярное поле редуцированной теории относительно группы C.

7) Если потенциал V окажется потенциалом типа Хиггса, то надо найти калибровочную группу после спонтанного нарушения симметрии.

Для решения этих задач удобными оказываются графические схемы, на которых изображены не только простые корни алгебры (как на диаграммах Дынкина), а все положительные корни. Такие схемы мы будем называть ***корневыми решетками.*** Корневые решетки алгебр A_1, A_2, A_3 и A_n приведены на рис. 16. Каждый кружок на этой схеме соответствует тому или иному положительному корню (или отвечающему ему корневому вектору). Корни, лежащие на горизонтальной стороне треугольника, являются простыми и образуют диаграмму Дынкина. Два кружка на корневой решетке, отвечающие корням α и β, соединены отрезком тогда и только тогда, когда существует простой корень $\alpha_i \in \pi$,

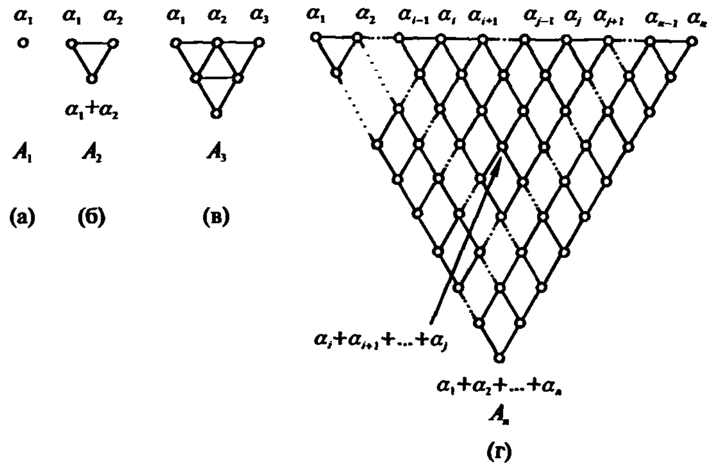

Рис. 16.

такой что $\alpha+\alpha_i=\beta$ и $[e_\alpha,e_{\alpha_i}]=N_{\alpha,\alpha_i}e_\beta$ или $\beta+\alpha_i=\alpha$ и $[e_\beta,e_{\alpha_i}]=N_{\beta,\alpha_i}e_\alpha$, где N_{α,α_i} и N_{β,α_i} — некоторые коэффициенты (см. (5.41)). Кружок, лежащий на пересечении отрезков, выходящих из точек α_i и α_j $(i<j)$, отвечает корню $\alpha_i+\alpha_{i+1}+\ldots+\alpha_j$ (см. рис. 16, корневая решетка для A_n). По видимому, впервые аналогичные схемы были приведены в работе [Ды2]. Корневые решетки для алгебр серии A_n в том виде, в каком они изображены здесь, а также корневые решетки для алгебр других классических серий можно найти в статьях [ВК].

Рассмотрим теперь простую алгебру $\mathfrak{g}$ и ее подалгебру $\mathfrak{h}$; централизатор $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ в этом параграфе будем обозначать $\mathfrak{c}$. Мы покажем на нескольких примерах, как с помощью корневых решеток решаются задачи нахождения централизатора $\mathfrak{c}$ и разложения представления $(\mathfrak{m},\mathrm{ad})$ подалгебры $\mathfrak{h}$ на неприводимые.

Пример 1. $\mathfrak{g}=A_2$, $\mathfrak{h}=A_1$.

Корневые решетки алгебр A_1 и A_2 приведены на рис. 16а и 16б. Базисными элементами алгебры $\mathfrak{g}=A_2$ удобно выбрать элементы h_{α_1} и h_{α_2} ее подалгебры Картана $\bar{\mathfrak{g}}$ и корневые векторы $e_{\pm\alpha_1}$, $e_{\pm\alpha_2}$, $e_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}$. Подалгебру $\mathfrak{h}=A_1$ мы реализуем на элементах $(h_{\alpha_1},e_{\alpha_1},e_{-\alpha_1})$. Такое вложение $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, при котором корневые векторы подалгебры являются корневыми векторами всей алгебры, называется регулярным. Здесь мы будем рассматривать лишь регулярные вложения. Изучим действие эндоморфизмов $\mathrm{ad}\,X$, $X\in\mathfrak{h}$ на элементы e_{α_2} и $e_{\alpha_1+\alpha_2}$. Исходя из (5.40)–(5.41), имеем:

$$\mathrm{ad}\,h_{\alpha_1}(e_{\alpha_2})=-e_{\alpha_2};\ \mathrm{ad}\,e_{\alpha_1}(e_{\alpha_2})=N_{\alpha_1,\alpha_2}e_{\alpha_1+\alpha_2};\ \mathrm{ad}\,e_{-\alpha_1}(e_{\alpha_2})=0; \tag{6.39}$$
$$\mathrm{ad}\,h_{\alpha_1}(e_{\alpha_1+\alpha_2})=e_{\alpha_1+\alpha_2};\ \mathrm{ad}\,e_{\alpha_1}(e_{\alpha_1+\alpha_2})=0;\ \mathrm{ad}\,e_{-\alpha_1}(e_{\alpha_1+\alpha_2})=N_{-\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2}e_{\alpha_2}.$$

Следовательно, подпространство V, натянутое на элементы e_{α_2} и $e_{\alpha_1+\alpha_2}$, которые мы будем также обозначать $V = \{e_{\alpha_2}, e_{\alpha_1+\alpha_2}\}$, является пространством неприводимого представления (V, ad) алгебры $\mathfrak{h}$.

Покажем, как этот результат может быть получен из анализа корневой решетки A_2 (рис. 16б). То, что точки α_2 и $\alpha_1 + \alpha_2$ соединены отрезком, означает, что корневые векторы переводятся друг в друга действием эндоморфизмов $\mathrm{ad}\, e_{\pm\alpha_i}$, где $\alpha_i \in \pi$. Очевидно, что в данном случае это $\mathrm{ad}\, e_{\alpha_1}$ или $\mathrm{ad}\, e_{-\alpha_1}$. Так как $\mathrm{ad}\, h_{\alpha_1}$ оставляет корневые векторы на месте, то подмножество $V = \{e_{\alpha_2}, e_{\alpha_1+\alpha_2}\}$ является неприводимым представлением $\mathfrak{h}$.

Сопряженное подмножество $\bar{V} = \{e_{-\alpha_2}, e_{-(\alpha_1+\alpha_2)}\}$ также является неприводимым представлением алгебры $\mathfrak{h}$. Вспомним теперь, что подалгебра Картана $\bar{\mathfrak{g}}$ алгебры $\mathfrak{g} = A_2$ двумерна; ее элемент h_{α_1} порождает подалгебру Картана алгебры $\mathfrak{h} = A_1$. Запишем второй линейно независимый элемент $\bar{\mathfrak{g}}$ в виде $\bar{h} = a_1 h_{\alpha_1} + a_2 h_{\alpha_2}$. Очевидно, $\mathrm{ad}\, h_{\alpha_1}(\bar{h}) = 0$. Оказывается, что можно выбрать коэффициенты a_1 и a_2 так, что $\mathrm{ad}\, e_{\pm\alpha_1}(\bar{h}) = 0$. Несложные вычисления дают $a_2 = 2a_1$. Мы положим $a_1 = 1$, так что

$$\bar{h} = h_{\alpha_1} + 2h_{\alpha_2}. \tag{6.40}$$

Элемент $\bar{h}$ порождает одномерную подалгебру $\mathfrak{z} = \mathbb{C}\bar{h}$, которая является пространством тривиального представления алгебры $\mathfrak{h} = A_1$ относительно действия эндоморфизмов $\mathrm{ad}\, X$, $X \in \mathfrak{h}$.

Суммируем полученные результаты. Алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, а подпространство $\mathfrak{m}$ в свою очередь представимо в виде:

$$\mathfrak{m} = V \oplus \bar{V} \oplus \mathfrak{z}. \tag{6.41}$$

То, что V, $\bar{V}$ и $\mathfrak{z}$ являются прямыми слагаемыми, следует из свойства 1 полупростых алгебр Ли и равенства

$$(h_{\alpha_1}, \bar{h}) = \langle\alpha_1, \alpha_1\rangle + 2\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle = 0.$$

Очевидно, что $\mathfrak{z} = \mathfrak{c}$. Так как $\dim \mathfrak{z} = 1$, то все ее (конечномерные) представления одномерны. Нетрудно проверить, что $\mathrm{ad}\, \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = 0$, $\mathrm{ad}\, \mathfrak{z}(\mathfrak{z}) = 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}\, \bar{h}(e_{\pm\alpha_2}) &= \pm\langle\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2\rangle e_{\pm\alpha_2} = \pm 3 e_{\pm\alpha_2}, \\ \mathrm{ad}\, \bar{h}(e_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}) &= \pm\langle\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2\rangle e_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)} = \pm 3 e_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Тип представления, с точностью до сопряжения, в большинстве случаев однозначно характеризуется размерностью представления. Поэтому в физической литературе для обозначения типа представления часто пишут его размерность, подчеркнутую снизу. В этих обозначениях пространство $\mathfrak{m}$ размерности $\dim \mathfrak{m} = 5$ разлагается на следующие неприводимые представления алгебры $\mathfrak{h} = A_1$:

$$\underline{5} \to \underline{2} + \underline{2}^* + \underline{1}, \tag{6.43}$$

где $\underline{2}^*$ — представление, сопряженное по отношению к $\underline{2}$.

Если же хотят указать свойства этих пространств относительно некоторой одномерной подлагебры (подалгебры $\mathfrak{Z}$ в нашем примере), то указывают в скобках собственное значение элементов подпространства при действии эндоморфизма $\operatorname{ad}\widetilde{X}$, где $\widetilde{X}$ — некоторый фиксированный элемент одномерной подалгебры. В нашем случае $\widetilde{X} = \tilde{h}$ и разложение (6.43) принимает вид

$$\underline{5} \to \underline{2}(+3) + \underline{2}^*(-3) + \underline{1}(0). \tag{6.44}$$

Аналогично можно написать разложение для присоединенного представления $(\mathfrak{g}, \operatorname{ad})$ алгебры $\mathfrak{g}$ на неприводимые относительно подалгебры $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{Z} \subset \mathfrak{g}$

$$\underline{8} \to \underline{3}(0) + \underline{2}(+3) + \underline{2}^*(-3) + \underline{1}(0).$$

Представление (V, ad) алгебры $\mathfrak{h} = A_1$ имеет старший вес $\omega = \alpha_1 + \alpha_2$ и сигнатуру [1] (см. §4 главы 5 и формулу (5.49)), а представление $(\bar{V}, \operatorname{ad})$ имеет старший вес $\bar{\omega} = -\alpha_2$, и сигнатуру также [1]. Таким образом, представления $\underline{2}$ и $\underline{2}^*$ эквивалентны и являются так называемыми фундаментальными представлениями. Для алгебры A_n фундаментальное представление — это представление размерности $n+1$, для B_n — $2n+1$, для C_n — $2n$, для D_n — $2n$. Ранг алгебры совпадает с числом ее неэквивалентных фундаментальных представлений.

Пример 2. $\mathfrak{g} = A_2$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{h}' = A_1$, а $\mathfrak{Z} = \mathbb{C}\tilde{h}$ — одномерная подалгебра, порожденная элементом (6.40). Весь необходимый анализ был уже проделан при рассмотрении предыдущего примера. Поэтому, мы приведем лишь ответы: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, $\dim \mathfrak{g} = 8$, $\dim \mathfrak{m} = 4$,

$$\mathfrak{m} = V \oplus \bar{V}, \tag{6.45а}$$

$$\underline{4} \to \underline{2}(+3) + \underline{2}(-3), \tag{6.45б}$$

$$\underline{8} \to \underline{3}(0) + \underline{1}(0) + \underline{2}(+3) + \underline{2}(-3). \tag{6.45в}$$

Здесь указаны размерности представлений относительно $\mathfrak{h}' = A_1$, а в скобках — собственное значение оператора $\operatorname{ad}\tilde{h}$. В этом примере $\mathfrak{c} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{Z}$, т.е. $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{c} = \mathfrak{Z} \neq \varnothing$.

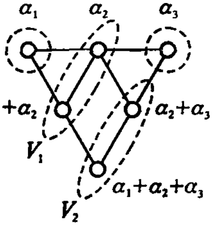

Рис. 17.

Пример 3. $\mathfrak{g} = A_3$, $\mathfrak{h} = A_1$.

Корневая решетка алгебры $\mathfrak{g} = A_3$ приведена на рис. 17. Подалгебра $\mathfrak{h} = A_1$ реализована на базисных элементах e_{α_1}, $e_{-\alpha_1}$ и h_{α_1}. Анализ корневой решетки приводит к выводу, что подмножества $V_1 = \{e_{\alpha_2}, e_{\alpha_1+\alpha_2}\}$ и $V_2 = \{e_{\alpha_2+\alpha_3}, e_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\}$ являются представлениями размерности 2 алгебры $\mathfrak{h}$. Сопряженные представления $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$ реализуются на корневых векторах, отвечающих соответствующим отрицательным корням. Как видно из структуры корневой решетки, каждый из элементов e_{α_3}, $e_{-\alpha_3}$ и h_{α_3} порождает одномерное тривиальное представление алгебры $\mathfrak{h}$, а все вместе они порождают подалгебру $\mathfrak{c}' = A_1$, принадлежащую централизатору $\mathfrak{c} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. По аналогии с примером 1 централизатору $\mathfrak{c}$ принадлежит и подалгебра, натянутая на элемент $\tilde{h}$ подалгебры Картана $\tilde{\mathfrak{g}}$ алгебры $\mathfrak{g}$, линейно независимый с h_{α_1} и h_{α_3}. Запишем его в виде $\tilde{h} = h_{\alpha_1} + a_2 h_{\alpha_2} + a_3 h_{\alpha_3}$. Требование $\mathfrak{z} \equiv \mathbb{C}\tilde{h} \subset \mathfrak{c}$, т.е. $\operatorname{ad}\mathfrak{h}(\tilde{h}) = 0$, приводит к условию $(h_{\alpha_1}\tilde{h}) = 0$. Требование, чтобы $\mathfrak{z}$ являлось прямым дополнением $\mathfrak{c}'$ в $\mathfrak{c}$, приводит к условию $(h_{\alpha_3}, \tilde{h}) = 0$. Из этих условий получаем

$$\tilde{h} = h_{\alpha_1} + 2h_{\alpha_2} + h_{\alpha_3}. \tag{6.46}$$

Итак, $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' \oplus \mathfrak{z} = A_1 \oplus \mathbb{C}\tilde{h}$. Подпространство $\mathfrak{m}$ представимо в виде прямой суммы

$$\mathfrak{m} = V_1 \oplus V_2 \oplus \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2 \oplus \mathfrak{c}' \oplus \mathfrak{z}. \tag{6.47}$$

Соответственно, представление $(\mathfrak{m}, \operatorname{ad})$ алгебры $\mathfrak{h}$ разлагается в сумму неприводимых представлений ($\dim\mathfrak{m} = 12$):

$$\underline{12} \to \underline{2} + \underline{2} + \underline{2} + \underline{2} + 3 \cdot \underline{1} + \underline{1}. \tag{6.48}$$

Покажем теперь, как представление $(\mathfrak{m}, \operatorname{ad})$ разлагается на неприводимые относительно алгебры $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{c}' \oplus \mathfrak{z} = A_1 \oplus A_1 \oplus \mathbb{C}\tilde{h}$. Для этого заметим, что элементы пространств V_1 и V_2 переводятся друг в друга под действием эндоморфизмов $\operatorname{ad} X$, $X \in \mathfrak{c}'$. Точнее, подпространства $W_1 = \{e_{\alpha_2}, e_{\alpha_2+\alpha_3}\}$ и $W_2 = \{e_{\alpha_1+\alpha_2}, e_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\}$ являются пространствами неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{c}'$, эквивалентных фундаментальному. Нетрудно проверить, что $\operatorname{ad}\tilde{h}(v) = 2v$ при $v \in V_1$ или $v \in V_2$. Итак, разложение (6.48) можно переписать в виде:

$$\underline{12} \to (\underline{2}, \underline{2})(2) + (\underline{2}, \underline{2})(-2) + (\underline{1}, \underline{3})(0) + (\underline{1}, \underline{1})(0), \tag{6.49}$$

где $(\underline{m}, \underline{n})$ обозначает тип представления относительно $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{c}'$, причем первое число относится к алгебре $\mathfrak{h}$, а второе к $\mathfrak{c}'$. Аналогичное разложение для $(\mathfrak{g}, \operatorname{ad})$ имеет вид:

$$\underline{15} \to (\underline{3}, \underline{1})(0) + (\underline{2}, \underline{2})(2) + (\underline{2}, \underline{2})(-2) + (\underline{1}, \underline{3})(0), +(\underline{1}, \underline{1})(0). \tag{6.50}$$

Обратимся теперь к задачам построения эквивариантного отображения ϕ и вычисления потенциала скалярных полей редуцированной теории. Пусть исходная теория Янга—Миллса задана в пространстве $E = M^4 \times CP^2$ размерности $\dim E = 8$, где CP^2 — комплексное проективное пространство, которое диффеоморфно следующему однородному пространству $CP^2 = G/H = SU(3)/SU(2) \times U(1)$. Предположим, что калибровочная группа этой теории $K = SU(4)$. Обозначим через $\hat{\mathfrak{g}}$, $\hat{\mathfrak{h}}$, и $\widehat{\mathfrak{k}}$ компактные алгебры Ли групп G, H и K соответственно; $\hat{\mathfrak{g}} = su(3)$, $\hat{\mathfrak{h}} = su(2) \oplus \hat{\mathfrak{z}}$, где $\mathfrak{z}$ — одномерный центр, отвечающий группе $U(1)$, $\widehat{\mathfrak{k}} = su(4)$. Имеет место редуктивное разложение $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{h}} \oplus \hat{\mathfrak{m}}$. Для простоты мы выбрали пространство G/H симметрическим. Это означает, что оно обладает двумя фундаментальными свойствами:

1) $[\hat{\mathfrak{m}}, \hat{\mathfrak{m}}] = \hat{\mathfrak{h}}$; (6.51а)

2) представление $(\hat{\mathfrak{m}}, \mathrm{ad})$ алгебры $\hat{\mathfrak{h}}$ неприводимо. (6.51б)

Задача размерной редукции симметричных калибровочных полей в рассматриваемой теории сводится, как было показано в предыдущем параграфе, к построению линейного отображения $\phi : \hat{\mathfrak{m}} \to \widehat{\mathfrak{k}}$, удовлетворяющего условию эквивариантности (6.34). Рассмотрение этого условия на инфинитезимальных элементах группы H позволяет переписать его в виде:

$$\mathrm{ad}\,\tau(X)(\phi(Y)) = \phi(\mathrm{ad}\,X(Y)) \tag{6.52}$$

для всех $X \in \hat{\mathfrak{h}}$ и $Y \in \hat{\mathfrak{m}}$. Здесь $\tau : \hat{\mathfrak{h}} \to \widehat{\mathfrak{k}}$ — гомоморфизм алгебр, порождаемый гомоморфизмом групп $\tau : H \to K$. Условие (6.52) означает, что отображение ϕ есть оператор, который сплетает представления $(\hat{\mathfrak{m}}, \mathrm{ad})$ алгебры $\hat{\mathfrak{h}}$ и $(\widehat{\mathfrak{k}}, \mathrm{ad})$ алгебры $\tau(\hat{\mathfrak{h}}) \subset \widehat{\mathfrak{k}}$. По лемме Шура сплетающий оператор равен нулю, если он сплетает неэквивалентные представления, и обратим, если он сплетает эквивалентные представления. Наиболее просто сплетающий оператор строится между комплексными представлениями комплексных алгебр: в этом случае он равен просто единичному оператору, осуществляющему изоморфизм между эквивалентными представлениями (см. [Ки]).

Итак, для построения сплетающего оператора удобно комплексифицировать алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$, $\hat{\mathfrak{h}}$ и $\widehat{\mathfrak{k}}$ и распространить на них условие (6.52) по линейности. Обозначим $\mathfrak{g} = \hat{\mathfrak{g}}^c$, $\mathfrak{h} = \hat{\mathfrak{h}}^c$, $\mathfrak{k} = \widehat{\mathfrak{k}}^c$, $\mathfrak{m} = \hat{\mathfrak{m}}^c$. Мы имеем $\mathfrak{g} = A_2$, $\mathfrak{h} = A_1 \oplus \mathfrak{z}$, $\mathfrak{k} = A_3$. Построенный при этом оператор ϕ будет сплетать представления в комплексных пространствах $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{k}$. При ограничении на подпространство $\widehat{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$ он должен давать требуемое эквивариантное отображение, т.е. он должен удовлетворять условию вещественности

$$\overline{\phi(X)} = \phi(\bar{X}), \qquad X \in \mathfrak{m}. \tag{6.53}$$

Проанализируем представления $(\mathfrak{m}, \mathrm{ad})$ алгебры $\mathfrak{h} = A_1 \oplus \mathbb{C}\tilde{h}$, где в качестве $\tilde{h}$ мы возьмем элемент (6.40). Разложение этого представления на неприводимые было получено в примере 2 (см. (6.45б)). В дальнейшем элементы алгебры $\mathfrak{k}$ будем обозначать прописными буквами. Гомоморфизм $\tau : \mathfrak{h} \to \mathfrak{k}$ зададим на базисных элементах алгебры $\mathfrak{h}$ следующим образом:

$$\tau(h_{\alpha_1}) = H_{\alpha_1}, \quad \tau(e_{\pm\alpha_1}) = E_{\pm\alpha_1}, \quad \tau(\tilde{h}) = \widetilde{H},$$

где элемент подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{k}$

$$\widetilde{H} = \frac{3}{2}(H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} + H_{\alpha_3}) \tag{6.54}$$

(ср. (6.46)). Опираясь на результаты примера 3, нетрудно проверить, что централизатором подалгебры $\tau(\mathfrak{h})$ в $\mathfrak{k}$ является $\mathfrak{c} = C_{\mathfrak{k}}(\tau(\mathfrak{h})) = \mathfrak{c}' \oplus \mathbb{C}\widetilde{H}$, где $\mathfrak{c}' = A_1$ — подалгебра, реализованная на элементах E_{α_3}, $E_{-\alpha_3}$, H_{α_3}. Разложения $\mathfrak{k}$ на инвариантные подпространства эндоморфизмов $\mathrm{ad}\,\tau(\mathfrak{h})$, а также разложение представлений $(\mathfrak{k}, \mathrm{ad})$ алгебр $\tau(\mathfrak{h}) = \tau(\mathfrak{h}') \oplus \mathbb{C}\widetilde{H}$, где $\mathfrak{h}' = A_1$, и $\tau(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{c} = \tau(\mathfrak{h}') \oplus \mathfrak{c}' \oplus \mathbb{C}\widetilde{H}$ на неприводимые имеют вид (ср. (6.50) и рис. 17):

$$\mathfrak{k} = \tau(\mathfrak{h}') \oplus \mathfrak{c}' \oplus \mathbb{C}\widetilde{H} \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \bar{V}_1 \oplus \bar{V}_2, \tag{6.55а}$$

$$\underline{15} \to \underline{3}(0) + 3\underline{1}(0) + \underline{1}(0) + \underline{2}(3) + \underline{2}(3) + \underline{2}(-3) + \underline{2}(-3), \tag{6.55б}$$

$$\underline{15} \to (\underline{3}, \underline{1})(0) + (\underline{1}, \underline{3})(0) + (\underline{1}, \underline{1})(0) + (\underline{2}, \underline{2})(3) + (\underline{2}, \underline{2})(-3). \tag{6.55в}$$

Здесь подпространства V_1 и V_2 реализованы на следующих элементах: $V_1 = \{E_{\alpha_2}, E_{\alpha_1+\alpha_2}\}$; $V_2 = \{E_{\alpha_2+\alpha_3}, E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\}$. Сравнивая представления в разложениях (6.45б) и (6.55б), мы видим, что среди них есть эквивалентные. Поэтому сплетающий оператор имеет вид:

$$\phi = f_1(x)[V \to V_1] + f_2(x)[V \to V_2] + g_1(x)[\bar{V} \to \bar{V}_1] + g_2(x)[\bar{V} \to \bar{V}_2], \tag{6.56}$$

где символом $[V \to V_i]$ мы обозначили оператор, устанавливающий изоморфизм между пространствами $V \subset \mathfrak{m}$ и $V_i \subset \mathfrak{k}$ $(i = 1, 2)$, в которых реализуются эквивалентные представления. Аналогичный смысл имеет символ $[\bar{V} \to \bar{V}_i]$. Коэффициенты $f_i(x)$ $(i = 1, 2)$ и $g_i(x)$ $(i = 1, 2)$ являются скалярными функциями; именно они играют роль скалярных полей редуцированной теории в M^4. Как построить в явном виде операторы $[V \to V_i]$?

Учитывая свойство 1 полупростых алгебр Ли (см. §4 гл. 5) и нормировку корневых векторов $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = -1$, получим, что эти операторы имеют вид: $(X \in \mathfrak{m})$

$$\begin{aligned} [V \to V_1](X) &= -E_{\alpha_2}(e_{-\alpha_2}, X) - E_{\alpha_1+\alpha_2}(e_{-(\alpha_1+\alpha_2)}, X), \\ [V \to V_2](X) &= -E_{\alpha_2+\alpha_3}(e_{-\alpha_2}, X) - E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}(e_{-(\alpha_1+\alpha_2)}, X). \end{aligned} \tag{6.57}$$

Вводя упрощающие обозначения: $v_1 = e_{\alpha_2}$, $v_2 = e_{\alpha_1+\alpha_2}$; $V_1^{(1)} = E_{\alpha_2}$, $V_2^{(1)} = E_{\alpha_1+\alpha_2}$; $V_1^{(2)} = E_{\alpha_2+\alpha_3}$, $V_2^{(2)} = E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$ и учитывая, что условие вещественности (6.53) накладывает ограничение $g_i(x) = \bar{f}_i(x)$ $(i = 1, 2)$, получаем окончательное выражение для эквивариантного отображения ϕ:

$$\phi(X) = -\sum_{i=1}^{2} f_i(x) \sum_{j=1}^{2} V_j^{(i)}(\bar{v}_j, X) - \sum_{i=1}^{2} \bar{f}_i(x) \sum_{j=1}^{2} \bar{V}_j^{(i)}(v_j, X), \tag{6.58а}$$

где $X \in \mathfrak{m}$. В частности

$$\phi(v_i) = \sum_{j=1}^{2} f_j(x) V_i^{(j)}, \quad \phi(\bar{v}_i) = \sum_{j=1}^{2} \bar{f}_j(x) \bar{V}_i^{(j)}. \tag{6.58б}$$

Теперь мы приступим к вычислению потенциала скалярных полей, заданному формулой (6.38). Прежде всего выясним, как выглядит инвариантная метрика γ в G/H и базис векторных полей $\{u_m\}$, ортонормированный в смысле этой метрики. Используя результаты главы 3 и свойство (6.51б) симметрического пространства G/H, получаем, что значение метрики $\hat{\gamma}$ в начале G/H на векторных полях X, Y равно

$$\hat{\gamma}_o(X, Y) = -L^2(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

где $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ векторы, касательные к G/H в начале (точке o) и равные X и Y соответственно, но рассматриваемые как элементы подпространства $\hat{\mathfrak{m}} \subset \hat{\mathfrak{g}}$. Фактор L^2 есть коэффициент пропорциональности, характеризующий метрику. Он имеет следующий геометрический смысл: величина L определяет характерный размер внутреннего пространства; она имеет размерность длины. Учитывая формулы (5.50), выражающие элементы компактной вещественной формы через корневые векторы, мы можем выбрать базис $\{u_m\}$ следующим образом:

$$u_1 = \frac{1}{L}\frac{v_1 + \bar{v}_1}{\sqrt{2}}, \quad u_2 = \frac{1}{L}\frac{v_2 + \bar{v}_2}{\sqrt{2}}, \quad u_3 = \frac{i}{L}\frac{v_1 - \bar{v}_1}{\sqrt{2}}, \quad u_4 = \frac{i}{L}\frac{v_2 - \bar{v}_2}{\sqrt{2}}. \tag{6.59}$$

Подставляя (6.59) в (6.38), приведем выражение для скалярного потенциала к следующему виду:

$$\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 + V_3, \\
V_1 &= -2L^{-4} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\tau([v_i, \bar{v}_j]), \tau([\bar{v}_i, v_j])\right), \\
V_2 &= -4L^{-4} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\tau([v_i, \bar{v}_j]), [\phi(\bar{v}_i), \phi(v_j)]\right), \\
V_3 &= -2L^{-4} \sum_{i,j=1}^{2} \left([\phi(v_i), \phi(\bar{v}_j)], [\phi(\bar{v}_i), \phi(v_j)]\right).
\end{aligned} \tag{6.60}$$

При выводе этих выражений мы учли особенности нашего примера, а именно то, что i) $[v_i, v_j] = 0$ для любых $i, j = 1, 2$, ii) $[\phi(v_i), \phi(v_j)] = 0$ также для любых $i, j = 1, 2$ (см. (6.58б)). Вычислим каждое из слагаемых V_k $(k = 1, 2, 3)$ по отдельности.

1) Выражение для V_1 удобно переписать в виде:

$$V_1 = -4L^{-4}\big(\tau\big([v_1,\bar{v}_2]\big),\tau\big([\bar{v}_1,v_2]\big)\big) - 2L^{-4}\sum_{i=1}^{2}\big(\tau\big([v_i,\bar{v}_i]\big),\tau\big([v_i,\bar{v}_i]\big)\big).$$

Рассмотрим первый член в этой сумме. Коммутатор $[v_1,\bar{v}_2] = [e_{\alpha_2},e_{-(\alpha_1+\alpha_2)}] = N_{\alpha_2,-(\alpha_1+\alpha_2)}e_{-\alpha_1}$, где константы $N_{\alpha,\beta}$ задают закон умножения в алгебре Ли $\mathfrak{g} = A_2$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}\big(\tau([v_1,\bar{v}_2]),\tau([\bar{v}_1,v_2])\big) &= N_{\alpha_2,-(\alpha_1+\alpha_2)}N_{-\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2}(\tau(e_{-\alpha_1}),\tau(e_{\alpha_1})) = \\ &= N_{\alpha_2,-(\alpha_1+\alpha_2)}N_{-\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2}(E_{-\alpha_1},E_{\alpha_1}) = -N_{\alpha_2,-(\alpha_1+\alpha_2)}N_{-\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2}.\end{aligned} \tag{6.61}$$

Для вычисления выражения (6.61) можно было бы восстановить константы $N_{\alpha,\beta}$ для алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Однако в нашем примере можно поступить проще. Рассмотрим следующее выражение: $\big([e_{\alpha_2},e_{-(\alpha_1+\alpha_2)}],[e_{-\alpha_2},e_{\alpha_1+\alpha_2}]\big)_{\mathfrak{g}}$, где $(\,,)_{\mathfrak{g}}$ есть скалярное произведение в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (напомним, что скобки $(,)$ у нас сейчас обозначают скалярное произведение в алгебре Ли $\mathfrak{k}$). С одной стороны,

$$\big([e_{\alpha_2},e_{-(\alpha_1+\alpha_2)}],[e_{-\alpha_2},e_{\alpha_1+\alpha_2}]\big)_{\mathfrak{g}} = -N_{\alpha_2,-(\alpha_1+\alpha_2)}N_{-\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2}. \tag{6.62}$$

С другой стороны, учитывая инвариантность скалярного произведения $(\,,)_{\mathfrak{g}}$, имеем

$$\big([e_{\alpha_2},e_{-(\alpha_1+\alpha_2)}],[e_{-\alpha_2},e_{\alpha_1+\alpha_2}]\big)_{\mathfrak{g}} = -\big([e_{\alpha_2},[e_{-\alpha_2},e_{-(\alpha_1+\alpha_2)}]],e_{\alpha_1+\alpha_2}\big)_{\mathfrak{g}}.$$

Так как $-\alpha_2-(\alpha_1+\alpha_2) = -\alpha_1-2\alpha_2$ не является корнем алгебры Ли $\mathfrak{g} = A_2$ и, следовательно, $[e_{-\alpha_2},e_{-(\alpha_1+\alpha_2)}] = 0$, то, применяя тождество Якоби к первому сомножителю в скалярном произведении, получаем

$$\begin{aligned}&\big([e_{\alpha_2},e_{-(\alpha_1+\alpha_2)}],[e_{-\alpha_2}e_{\alpha_1+\alpha_2}]\big)_{\mathfrak{g}} = \\ &\quad= \big([e_{-(\alpha_1+\alpha_2)},[e_{-\alpha_2},e_{\alpha_2}]],e_{\alpha_1+\alpha_2}\big)_{\mathfrak{g}} = \big([e_{-(\alpha_1+\alpha_2)},h_{\alpha_2}],e_{\alpha_1+\alpha_2}\big)_{\mathfrak{g}} = \\ &\qquad= +\langle\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2\rangle_{\mathfrak{g}}(e_{-(\alpha_1+\alpha_2)},e_{\alpha_1+\alpha_2})_{\mathfrak{g}} = -1.\end{aligned} \tag{6.63}$$

Сравнивая (6.62) и (6.63), получаем, что правая часть выражения равна (-1). Второй член в сумме, определяющей V_1, вычисляется просто. Приведем выкладки для слагаемого

$$\begin{aligned}&\big(\tau([v_1,\bar{v}_1]),\tau([\bar{v}_1,v_1])\big) = \big(\tau([e_{\alpha_2},e_{-\alpha_2}]),\tau([e_{-\alpha_2},e_{\alpha_2}])\big) = \\ &\quad= -\Big(\tau(h_{\alpha_2}),\tau(h_{\alpha_2})\Big) = \Big(-\tau\Big(\frac{1}{2}\tilde{h}-\frac{1}{2}h_{\alpha_1}\Big),\tau\Big(\frac{1}{2}\tilde{h}-\frac{1}{2}h_{\alpha_1}\Big)\Big) = \\ &\quad= -\Big(\frac{1}{2}\widetilde{H}-\frac{1}{2}H_{\alpha_1},\frac{1}{2}\widetilde{H}-\frac{1}{2}H_{\alpha_1}\Big) = -\frac{1}{4}\Big\{(\widetilde{H},\widetilde{H})+(H_{\alpha_1},H_{\alpha_1})\Big\} = -\frac{11}{4}.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулами (6.40) и (6.54), определяющими элементы $\tilde{h}$ и $\tilde{\tilde{H}}$, а также соотношениями, задающими вложение $\tau : \mathfrak{h} \to \mathfrak{k}$. Окончательный ответ: $V_1 = 15L^4$.

2) Выражение для потенциала редуцированной теории должно быть инвариантно относительно преобразований из группы C, калибровочной группы редуцированной теории. Поэтому в нашем случае мы проведем дальнейшие выкладки в специальной калибровке: $f_2 = 0$ (см. (6.58)), а затем восстановим ответ в общем случае из соображений инвариантности. Преобразуем выражение для V_2, используя инвариантность скалярного произведения $(\,,)$ и условие (6.52) эквивариантности отображения ϕ:

$$V_2 = 4L^{-4}\sum_{i,j=1}^{2}\left(\phi\left[[v_i,\bar{v}_j],\bar{v}_i\right],\phi(v_j)\right).$$

Используя явный вид отображения ϕ (6.58 а) и учитывая, что $[[v_i,\bar{v}_j],\bar{v}_i]\sim \bar{v}_j$, получаем в специальной калибровке:

$$V_2 = 4L^{-4}\sum_{i,j=1}^{2}\left(\bar{f}_1\bar{V}_j^{(1)}\left(v_j,\left[[v_i,\bar{v}_j],\bar{v}_i\right]\right)\mathfrak{g}, f_1V_j^{(1)}\right) =$$

$$= 4L^{-4}|f_1|^2\sum_{i,j=1}^{2}\left([v_i,\bar{v}_j],[\bar{v}_i,v_j]\right)_{\mathfrak{g}} =$$

$$= 4L^{-4}|f_1|^2\Big\{2\left([e_{\alpha_2},e_{-(\alpha_1+\alpha_2)}],[e_{-\alpha_2},e_{\alpha_1+\alpha_2}]\right)_{\mathfrak{g}} +$$

$$+\left([e_{\alpha_2},e_{-\alpha_2}],[e_{-\alpha_2},e_{\alpha_2}]\right)_{\mathfrak{g}} + \left([e_{\alpha_1+\alpha_2},e_{-(\alpha_1+\alpha_2)}],[e_{-(\alpha_1+\alpha_2)},e_{\alpha_1+\alpha_2}]\right)_{\mathfrak{g}}\Big\}.$$

Проводя выкладки, аналогичные тем, которые выполнялись в п. 1 (см. (6.63)), окончательно имеем: $V_2 = -24L^{-4}|f_1|^2$.

3) Исходя из (6.58б), запишем

$$V_3 = -2L^{-4}\sum_{i,j=1}^{2}\left(\left[f_1V_i^{(1)},\bar{f}_1\bar{V}_j^{(1)}\right],\left[\bar{f}_1\bar{V}_i^{(1)},f_1V_j^{(1)}\right]\right) =$$

$$= -2L^{-4}|f_1|^4\left\{2\left([E_{\alpha_2},E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}],[E_{-\alpha_2},E_{\alpha_1+\alpha_2}]\right) +\right.$$

$$\left.+\left([E_{\alpha_2},E_{-\alpha_2}],[E_{-\alpha_2},E_{\alpha_2}]\right) + \left([E_{\alpha_1+\alpha_2},E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}],[E_{-(\alpha_1+\alpha_2)},E_{\alpha_1+\alpha_2}]\right)\right\}.$$

Дальнейшие выкладки проводятся так же как в п.2. Итак, $V_3 = -12L^{-4}|f_1|^4$.

Выше мы показали, что $\mathfrak{c} = A_1 \oplus \mathbb{C}\tilde{\tilde{H}}$. Возвращаясь к компактной вещественной форме, получаем, что калибровочная группа редуцированной теории $C = SU(2)\times U(1)$. Инвариантами этой группы второй и четвертой степени по полям являются $|f|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2$ и $|f|^4$. Окончательное выражение для потенциала следующее:

$$V = 12L^{-4}\left\{\left(|f|^2 - 1\right)^2 + \frac{1}{4}\right\}. \tag{6.64}$$

Согласно разложению (6.55в) соответствующие элементы пространств V_1 и V_2 преобразуются по фундаментальному представлению алгебры Ли $\mathfrak{c}' = A_1$ при действии эндоморфизмов $\operatorname{ad} X$, $X \in \mathfrak{c}'$. Исходя из выражения (6.58а), эти преобразования можно интерпретировать как преобразование столбца

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, скалярные поля редуцированной теории образуют неприводимый комплексный дублет относительно преобразований неабелевой части $C' = SU(2)$ калибровочной группы $C = SU(2) \times U(1)$.

Потенциал редуцированной теории (6.64) является потенциалом типа Хиггса: он имеет вырожденный минимум при $|f|^2 = 1$ и приводит к спонтанному нарушению симметрии. Чему равна группа R остаточной симметрии? Пусть вакуумное значение скалярного поля характеризуется вектором с компонентами $\tilde{f}_1 = 1$, $\tilde{f}_2 = 0$. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{r}$ группы R является подалгеброй в $\mathfrak{c}$ такой, что эндоморфизмы $\operatorname{ad}\mathfrak{r}$ оставляют инвариантными векторы вида $\tilde{\phi}(X)$, $X \in \mathfrak{m}$, где $\tilde{\phi}$ — отображение, отвечающее вакуумному скалярному полю. Анализ корневой решетки алгебры $\mathfrak{k} = A_3$ (рис. 17) дает, что $\mathfrak{r} = \mathbb{C}Z$, где элемент Z из подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{c}$ равен, например,

$$Z = \frac{3}{2}\left(H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} + 3H_{\alpha_3}\right) = \tilde{H} + 3H_{\alpha_3}.$$

Итак, $R = U(1)$.

Подведем итоги. Размерная редукция симметричного сектора теории Янга—Миллса с калибровочной группой $K = SU(4)$, заданной в многомерном пространстве $E = M^4 \times SU(3)/SU(2) \times U(1)$, дает модель Хиггса в M^4, включающую калибровочные и скалярные поля, с калибровочной группой $C = SU(2) \times U(1)$, которая после спонтанного нарушения симметрии нарушается до $R = U(1)$. По своей структуре редуцированная теория совпадает с бозонным сектором стандартной модели электрослабых взаимодействий Глэшоу—Вайнберга—Салама, (см. § 1 главы 1, а также, например, [ВТ, ЧЛ, БШ1]). Однако, в отличие от традиционного подхода, модель, полученная размерной редукцией, более «жесткая» — она содержит меньше свободных параметров. Действительно, массы частиц и заряды в этой модели выражаются через калибровочный заряд исходной многомерной теории и параметр L, характеризующий размер внутреннего пространства дополнительных измерений G/H. В качестве иллюстрации приведем некоторые результаты, полученные в статье [BK]. Домножая компоненты поля $f_i(x)$ на коэффициент с тем, чтобы добиться канонической нормировки кинетического члена скалярных полей, и используя стандартные формулы для масс W- и Z-бозонов и бозона Хиггса (или H-бозона), получаем, что в нашей модели

$$M_W = \frac{\sqrt{2}}{L}, \quad M_Z = M_H = \frac{2}{L}.$$

При этом угол Вайнберга θ_W удовлетворяет соотношению $\sin^2\theta_W = 1 - M_W^2/M_Z^2$. Это значение далеко от экспериментального ($\sin^2\theta_W^{\exp} = 0.2315 \pm 0.0022$) и, конечно, наша модель не претендует на роль реалистичной, а является чисто иллюстративной. Однако сама идея, идущая еще от Калуцы и Клейна, о том, что низкоэнергетическая физика определяется некоторой многомерной фундаментальной теорией и геометрией дополнительных измерений, является весьма привлекательной, а результаты по размерной редукции калибровочных, гравитационных, суперструнных и других теорий позволяют надеяться на построение реалистической модели. В заключение параграфа отметим, что изложенный выше способ вычисления потенциала скалярных полей не является самым общим. Более общий и более мощный метод вычисления $V(\phi)$, использующий дополнительные сведения из теории алгебр Ли, был развит в статьях [BKM]. С помощью этого метода было получено общее выражение для потенциала $V(\phi)$, когда пространство дополнительных измерений является однородным симметрическим пространством. Было также показано, что в этом случае скалярный потенциал редуцированной теории всегда является потенциалом типа Хиггса и приводит к спонтанному нарушению симметрии.

Глава 7

Спонтанная компактификация

В предыдущих главах мы рассматривали модели, получающиеся размерной редукцией калибровочных теорий, заданных в многомерных пространствах специального вида. При этом факторизованная структура многомерных пространств просто постулировалась, и, соответственно, метрика считалась фиксированной, а не рассматривалась динамически.

Конечно, более последовательным представляется подход, в рамках которого требуемая структура многомерного пространства-времени получается динамически как результат решения уравнений движения многомерной теории. Такой подход был впервые предложен в работах [КШ, Лу] и получил название спонтанной компактификации. Поскольку структура многомерного пространства-времени непосредственно связана с его метрикой, то в рамках этого подхода метрика обязательно должна рассматриваться динамически, т. е. соответствующая многомерная теория обязательно должна включать в себя теорию гравитации. В качестве первого шага реализации программы спонтанной компактификации мы рассмотрим размерную редукцию теории гравитации в предположении, что ее действие есть многомерное обобщение действия Гильберта—Эйнштейна.

§ 1. Размерная редукция теорий гравитации

Рассмотрим в многомерном пространстве E теорию гравитации, инвариантную относительно действия некоторой компактной группы Ли G на E. Как обычно, будем считать это действие левым и обозначать O_g. Тогда инвариантность теории означает, что мы рассматриваем на E класс метрик $\hat{\gamma}$ (сигнатуры $\operatorname{sign}\hat{\gamma} = (-1, 1, \ldots, 1)$), удовлетворяющих условию

$$O_g^*\hat{\gamma} = \hat{\gamma}. \tag{7.1}$$

Аналогично рассмотрению в главе 6, нашей целью будет описание этой теории в терминах объектов, заданных на некотором расслоении с базой $M = E/G$. Оказывается, для того, чтобы такое описание было непротиворечивым, необходимо дополнительно предположить, что G действует на E регулярно, т.е. что все стационарные подгруппы действия G на E сопряжены одной подгруппе $H \subset G$. В этом случае пространство E обладает структурой ассоциированного расслоения.

Пусть $N(H)$ обозначает нормализатор H в G (см. § 1 главы 5). Рассмотрим множество неподвижных точек подгруппы H:

$$P = \{p \in E, \quad O_h p = p, \quad \forall h \in H\}. \tag{7.2}$$

Из определения $N(H)$ ясно, что множество P инвариантно относительно действия этой группы. Более того, можно показать, что в рассматриваемом случае группа $K = N(H)/H$ действует на P свободно и $P/K = M$, т.е. P представляет собой главное расслоенное пространство с базой M и структурной группой K; $P = P(M, K)$ [Бр]. Чтобы перейти к принятому у нас правому действию структурной группы, нужно положить в точках P

$$\Psi_k = O_k^{-1} \quad k \in K. \tag{7.3}$$

Заметим еще, что группа K естественно действует на однородном пространстве G/H справа. А именно, для любых $g \in G$, $h \in H$ и $k \in K$ по определению имеем:

$$[g]k = [gh]k = [ghk] = [gkk^{-1}hk] = [gkh'] = [gk].$$

Поэтому мы можем построить ассоциированное расслоение $P \times_K G/H$, которое диффеоморфно E. Диффеоморфизм

$$\chi : P \times_K G/H \to E, \tag{7.4а}$$

$$\chi\big([(p, [g])]\big) = O_g p \tag{7.4б}$$

очевидно не зависит от выбора представителей в соответствующих классах. Это представление для E позволяет построить отображения, аналогичные отображениям (6.16):

$$i_p : G/H \to E, \quad i_p([g]) = O_g p, \tag{7.5а}$$

$$i_e : P \to E. \tag{7.5б}$$

Последнее отображение просто эквивалентно определению P как подмногообразия в E.

Легко проверить, что отображения (7.5) обладают свойствами:

$$i_p \circ l_g = O_g \circ i_p, \quad g \in G; \tag{7.6а}$$

$$i_{\Psi_k(p)} = i_p \circ r_{k^{-1}}, \quad k \in K; \tag{7.6б}$$

$$i_e \circ \Psi_k = O_{k^{-1}} \circ i_e, \tag{7.6в}$$

где l_g и r_k обозначают левое действие G и правое действие K на G/H. Взяв обратные образы метрики $\hat{\gamma}$ относительно отображений (7.5), можно определить следующие объекты на расслоении P:

$$i_p^*\hat{\gamma} = \gamma_p, \tag{7.7а}$$

$$i_e^*\hat{\gamma} = \gamma. \tag{7.7б}$$

С помощью соотношений (7.6) легко проверить, что γ_p для любого $p \in P$ есть G-инвариантная метрика на однородном пространстве G/H, а γ — K-инвариантная метрика на расслоении P. Отметим, что эти метрики не являются независимыми: из (7.5) нетрудно увидеть, что образ $T_o G/H$ при отображении i'_p включает в себя вертикальное подпространство $V_p \subset T_p P$, а значит γ_p и γ «пересекаются» по вертикальному подпространству расслоения P. Поэтому для описания метрики $\hat{\gamma}$ в терминах независимых объектов, метрику γ на P нужно разложить дальше и отбросить ее вертикальную компоненту. Для этого заметим, что K-инвариантная метрика на главном расслоении $P(M,K)$ порождает в нем связность. Ее горизонтальные подпространства определяются как ортогональные дополнения к вертикальным подпространствам V_p в T_pP. Легко убедиться, что благодаря K-инвариантности метрики γ, это определение удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к связности (см. главу 2, § 10). Соответствующую форму связности обозначим ω.

Теперь мы можем определить метрику η на M соотношением

$$\eta(X,Y) = \gamma(X^*,Y^*), \tag{7.8}$$

где $X,Y \in T_xM$, а X^*, Y^* суть горизонтальные лифты этих векторов в некоторой точке $p \in P$ с $\pi(p) = x$. K-инвариантность γ обеспечивает независимость этого определения от выбора точки p.

Итак, мы поставили в соответствие G-инвариантной метрике $\hat{\gamma}$ на E тройку объектов (η,ω,γ_p), где η — метрика на M, ω — форма связности в главном расслоении $P(M,K)$, а γ_p для любого $p \in P$ есть G-инвариантная метрика на G/H. Покажем теперь, что множество G-инвариантных метрик $\hat{\gamma}$ на E находится во взаимно однозначном соответствии с множеством таких троек. Мы только что объяснили, как метрике $\hat{\gamma}$ однозначно ставится в соответствие тройка (η,ω,γ_p). Покажем теперь, что по такой тройке можно восстановить метрику $\hat{\gamma}$ с требуемыми свойствами. Для этого заметим, что благодаря представлению (7.4) G-инвариантная метрика на E полностью определяется своими значениями в точках P, т. е. для восстановления $\hat{\gamma}$ на E достаточно восстановить ее в точках P.

Изучим подробнее структуру касательного пространства к E в точках $p \in P$, T_pE. Рассмотрим сначала вертикальное подпространство расслоения $E \simeq P \times_K G/H$. В данном случае это подпространство порождается действием группы G, и в соответствии с (7.4), (7.5) в точке $p \in P$ оно может быть представлено как $i'_p(T_oG/H)$.

Выясним теперь структуру касательного пространства T_oG/H. Вследствие компактности группы G пространство G/H редуктивно, т. е. существует редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \tag{7.9}$$

причем, как мы уже отмечали в предыдущей главе, $\mathfrak{m}$ естественно отождествляется с касательным пространством к G/H в начале o, $\mathfrak{m} = T_oG/H$.

В $\mathfrak{m}$ действует представление изотропии группы H, $\mathrm{ad}(H)\mathfrak{m}$. Обозначим через $\mathfrak{k}$ подпространство в $\mathfrak{m}$, в котором реализуется тривиальное представление. Можно показать, что $\mathfrak{k}$ есть алгебра Ли группы K.

Поскольку представление $\mathrm{ad}(H)\mathfrak{m}$ вполне приводимо, существует инвариантное подпространство $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}$, в котором реализуются нетривиальные представления H и которое дополняет $\mathfrak{k}$ до $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}'$. Подставляя это разложение в (7.9), получаем следующее разложение алгебры $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}', \tag{7.10}$$

обладающее свойствами:

$$\mathrm{ad}(H)\mathfrak{k} = 0, \tag{7.11а}$$

$$\mathrm{ad}(H)\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}', \tag{7.11б}$$

$$\mathrm{ad}(K)\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}'. \tag{7.11в}$$

Последнее соотношение вытекает из редуктивности однородного пространства $G/N(H)$.

Для дальнейшего нам понадобится базис генераторов в $\mathfrak{g}$, $\{T_i\}$, $[T_i, T_k] = C^l_{ik}T_l$, согласованный с разложением (7.10). Это означает, что генераторы $\{T_i\}$ распадаются на генераторы $\{T_{\underline{\alpha}}\}$, $T_{\underline{\alpha}} \in \mathfrak{h}$ и $\{T_\alpha\}$, $T_\alpha \in \mathfrak{m}$, а генераторы T_α, в свою очередь, распадаются на генераторы $T_{\underline{a}} \in \mathfrak{k}$ и $T_a \in \mathfrak{m}'$:

$$T_i \to (T_{\underline{\alpha}} \in \mathfrak{h},\ T_\alpha \in \mathfrak{m}),$$

$$T_\alpha \to (T_{\underline{a}} \in \mathfrak{k},\ T_a \in \mathfrak{m}').$$

Из (7.11) получаем общий вид коммутационных соотношений для этих генераторов:

$$\begin{aligned} &[T_{\underline{\alpha}}, T_{\underline{\beta}}] = C^{\underline{\gamma}}_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} T_{\underline{\gamma}}, \qquad [T_{\underline{\alpha}}, T_\beta] = C^{\gamma}_{\underline{\alpha}\beta} T_\gamma, \\ &[T_{\underline{a}}, T_{\underline{b}}] = C^{\underline{d}}_{\underline{a}\underline{b}} T_{\underline{d}}, \qquad [T_{\underline{a}}, T_b] = C^{d}_{\underline{a}b} T_d. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Вернемся теперь к представлению (7.4). Из него легко найдем, что

$$T_pE = T_pP \oplus i'_p(\mathfrak{m}'). \tag{7.13}$$

Оказывается, это разложение ортогонально относительно любой G-инвариантной метрики $\hat{\gamma}$ на E. Этот факт объясняется тем, что любая G-инвариантная метрика $\hat{\gamma}$ на E порождает в точках P (неподвижных точках подгруппы H!) H-инвариантное скалярное произведение. По построению, в подпространстве T_pP реализуется тривиальное представление H, а в подпространстве $i'_p(\mathfrak{m}')$ — нетривиальное. Поэтому по лемме Шура эти подпространства ортогональны.

Покажем, как по тройке (η, ω, γ_p) можно восстановить метрику $\hat{\gamma}$ в точках P. Во-первых, форма связности ω определяет разложение $T_pP = H_p \oplus V_p$. Поэтому, учитывая (7.10), разложение (7.13) можно переписать в виде

$$T_pE = H_p \oplus V_p \oplus i'_p(\mathfrak{m}') = H_p \oplus i'_p(\mathfrak{m}). \tag{7.14}$$

Нетрудно показать, что горизонтальное подпространство связности в E, порожденной связностью в P, в точках $p \in P$, совпадает с H_p. В соответствии с этим разложение векторов $X \in T_pE$ на H_p- и $i'_p(\mathfrak{m})$-компоненты будет записываться как $X = hX + vX$. Далее, пусть $v\widetilde{X}$ обозначает элемент из $\mathfrak{m}$, порождающий vX в точке p, т.е. $vX = i'_p(v\widetilde{X})$. Тогда значение метрики $\hat{\gamma}$ на векторах $X, Y \in T_pE$ восстанавливается по формуле

$$\hat{\gamma}(X, Y) = \pi^*\eta(hX, hY) + \gamma_p(v\widetilde{X}, v\widetilde{Y}), \tag{7.15}$$

где π обозначает каноническую проекцию в расслоении P.

Итак, мы показали, что существует взаимно однозначное соответствие между G-инвариантными метриками на E и тройками (η, ω, γ_p). Физический смысл η и ω вполне ясен: η есть гравитационное поле на M, а ω — калибровочное поле на M с калибровочной группой K. Для выяснения физического смысла γ_p вспомним, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством G-инвариантных метрик на G/H и множеством H-инвариантных билинейных форм на $\mathfrak{m}$ [KH]. Всякую билинейную форму на $\mathfrak{m}$ можно рассматривать как элемент пространства $\mathfrak{m}^* \otimes \mathfrak{m}^*$. Как мы установили в §2 предыдущей главы, на пространстве $\mathfrak{m}^*$ действует коприсоединенное представление $\mathrm{ad}^\sharp H$ группы H. Поэтому на пространстве $\mathfrak{m}^* \otimes \mathfrak{m}^*$ естественно определяется представление δ группы H, задаваемое на разложимых элементах соотношением

$$\delta_h(u \otimes v) = (\mathrm{ad}^\sharp hu) \otimes (\mathrm{ad}^\sharp hv). \tag{7.16}$$

Ясно, что инвариантные билинейные формы принадлежат подпространству $V_0 \subset \mathfrak{m}^* \otimes \mathfrak{m}^*$, в котором реализуется тривиальное представление H. Разложение (7.10) позволяет уточнить структуру V_0. А именно,

$$V_0 = \mathfrak{k}^* \otimes \mathfrak{k}^* \oplus W_0, \tag{7.17}$$

где W_0 есть подпространство тривиального представления H в $(\mathfrak{m}')^* \otimes (\mathfrak{m}')^*$.

Нам осталось выяснить закон преобразования γ_p при действии структурной группы K расслоения P. Из (7.6б) и (7.7а) легко найти, что

$$\gamma_{\Psi_k(p)} = r^*_{k^{-1}}\gamma_p.$$

С учетом левоинвариантности γ_p это можно переписать как

$$\gamma_{\Psi_k(p)} = l^*_k r^*_{k^{-1}}\gamma_p. \tag{7.18}$$

Трактовка метрики γ_p как элемента из $\mathfrak{m}^* \otimes \mathfrak{m}^*$ эквивалентна рассмотрению ее в точке $o = [e] \in G/H$. В этой точке (7.18) сводится к соотношению

$$\gamma_{\Psi_k(p)} = \delta_{k^{-1}}\gamma_p,$$

где представление δ определено аналогично формуле (7.16).

Теперь мы можем заключить, что γ_p есть эквивариантное отображение из P в V_0 и поэтому описывает скалярные поля на M со значениями в V_0.

Итак, мы установили состав полей редуцированной теории. Для полного ее описания нужно вывести действие для этой теории из действия Эйнштейна—Гильберта исходной многомерной теории

$$S = \frac{1}{16\pi\hat{\varkappa}} \int\limits_E \widehat{R}\, dv_E, \tag{7.19}$$

где $\widehat{R}$ и dv_E суть скалярная кривизна пространства E и его элемент объема, вычисленные по метрике $\hat{\gamma}$, а $\hat{\varkappa}$ обозначает многомерную гравитационную постоянную. Другими словами, нам нужно выразить $\widehat{R}$ через (η, ω, γ_p), отвечающие метрике $\hat{\gamma}$.

Чтобы сделать это, удобно локально ввести подвижный репер специального вида. Введем сначала такой репер в некоторой окрестности $U \subset E$ точки $p \in P$.

Действие генераторов T_α на E задает в U векторные поля $e_\alpha = \frac{d}{dt} O_{\exp(T_\alpha t)}\Big|_{t=0}$. В $P \cap U$ эти поля нигде не обращаются в нуль и линейно независимы. Поэтому существует окрестность $U' \subset E$, в которой эти поля также не обращаются в нуль и остаются линейно независимыми. В этой окрестности коммутационные соотношения для полей e_α имеют вид

$$[e_\alpha, e_\beta] = l^{-1} C^\gamma_{\alpha,\beta}(u) e_\gamma, \tag{7.20}$$

причем в точках $p \in P \cap U'$ $C^\gamma_{\alpha\beta}(p)$ совпадают со структурными константами группы $\mathfrak{g}$ (7.12), $C^\gamma_{\alpha\beta}(p) = C^\gamma_{\alpha\beta}$.

Появившаяся в (7.20) константа l имеет размерность длины, поскольку базисные векторные поля на E имеют размерность обратной длины, а элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы безразмерны; эта константа характеризует размер пространства G/H. Поля le_α безразмерны, и к ним применимы все результаты глав 2 и 3. В частности, для полей $le_{\underline{a}}$ в точках $p \in P$ имеем $\omega(le_{\underline{a}}) = T_{\underline{a}}$.

Далее, в окрестности любой точки $x = \pi(p)$ можно ввести локальные координаты $\{x^\mu\}$ и построить векторные поля $\{\partial_\mu\}$. Обозначим горизонтальный лифт этих полей до U' $\{a_\mu\}$. По построению $\hat{\gamma}(a_\mu, e_\alpha) = 0$.

Далее, поскольку $\pi'([a_\mu, a_\nu]) = [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, коммутатор $[a_\mu, a_\nu]$ имеет только вертикальную компоненту

$$[a_\mu, a_\nu] = l f^\alpha_{\mu\nu}(u) e_\alpha. \tag{7.21}$$

Легко проверить, что в точках $p \in P$ $f^a_{\mu\nu}(p) = 0$, а $f^{\underline{a}}_{\mu\nu}(p)$ только знаком отличается от компонент кривизны связности ω в P:

$$f^{\underline{a}}_{\mu\nu}(p) = -F^{\underline{a}}_{\mu\nu}(p) = -2\Omega^{\underline{a}}(a_\mu, a_\nu). \tag{7.22}$$

По определению a_μ имеем также

$$[a_\mu, e_\alpha] = 0. \tag{7.23}$$

Итак, для любой точки $p \in P$ найдется окрестность $U' \subset E$, в которой существуют векторные поля $\{a_\mu, e_\alpha\}$ с коммутационными соотношениями

$$[e_\alpha, e_\beta] = l^{-1} C^\gamma_{\alpha\beta}(u) e_\gamma, \tag{7.24а}$$

$$[a_\mu, e_\alpha] = 0, \tag{7.24б}$$

$$[a_\mu, a_\nu] = l f^\alpha_{\mu\nu}(u) e_\alpha, \tag{7.24в}$$

причем в точках $p \in P \cap U'$

$$C^\gamma_{\alpha\beta}(p) = C^\gamma_{\alpha\beta}, \tag{7.25а}$$

$$f^a_{\mu\nu}(p) = 0, \quad f^{\underline{a}}_{\mu\nu}(p) = -F^{\underline{a}}_{\mu\nu}. \tag{7.25б}$$

Вычислим с использованием этого базиса скалярную кривизну $\widehat{R}$ в точке $p \in P$. Для этого введем сначала следующие обозначения для компонент метрики $\hat{\gamma}$:

$$\hat{\gamma}(a_\mu, a_\nu) = \eta_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu; \tag{7.26а}$$

$$\hat{\gamma}(e_\alpha, e_\beta) = \gamma_{\alpha\beta}, \quad \gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\beta\varepsilon} = \delta^\varepsilon_\alpha. \tag{7.26б}$$

В точке $p \in P$ компоненты $\gamma_{\alpha\beta}$ вследствие H-инвариантности $\hat{\gamma}$ подчинены связям

$$C^{\zeta}_{\underline{\varepsilon}\alpha}\gamma_{\zeta\beta} + C^{\zeta}_{\underline{\varepsilon}\beta}\gamma_{\alpha\zeta} = 0.$$

Как мы уже отмечали, $\hat{\gamma}(a_\mu, e_\alpha) = 0$ по построению.

С помощью формулы (3.31) и коммутационных соотношений (7.24) для символов Кристофеля в точке $p \in P$ получим

$$\widehat{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{l^{-1}}{2}(C_{\alpha\beta,\gamma} - C_{\gamma\alpha,\beta} + C_{\beta\gamma,\alpha}), \tag{7.27а}$$

$$\widehat{\Gamma}_{\mu\alpha,\beta} = \widehat{\Gamma}_{\alpha\mu,\beta} = -\widehat{\Gamma}_{\alpha\beta,\mu} = \frac{1}{2}D_\mu\gamma_{\alpha\beta}, \tag{7.27б}$$

$$\widehat{\Gamma}_{\mu\nu,a} = -\widehat{\Gamma}_{\mu\alpha,\nu} = -\widehat{\Gamma}_{\alpha\mu,\nu} = 0, \tag{7.27в}$$

$$\widehat{\Gamma}_{\mu\nu,\underline{a}} = -\widehat{\Gamma}_{\mu\underline{a},\nu} = -\widehat{\Gamma}_{\underline{a}\mu,\nu} = -\frac{l}{2}F^{\underline{b}}_{\mu\nu}\gamma_{\underline{ab}}, \tag{7.27г}$$

$$\widehat{\Gamma}_{\mu\nu,\rho} = \Gamma_{\mu\nu,\rho}(\eta) \text{ (символы Кристофеля метрики } \eta \text{ на } M). \tag{7.27д}$$

Ковариантная производная в (7.27б) определена как

$$D_\mu\gamma_{\alpha\beta} = a_\mu\gamma_{\alpha\beta} = \left(\partial_\mu - \omega(\partial_\mu)\right)\gamma_{\alpha\beta} =$$
$$= \partial_\mu\gamma_{\alpha\beta} - A^{\underline{a}}_{\mu}e_{\underline{a}}\gamma_{\alpha\beta} = \partial_\mu\gamma_{\alpha\beta} - A^{\underline{a}}_{\mu}C^{\delta}_{\underline{a}\alpha}\gamma_{\delta\beta} - A^{\underline{a}}_{\mu}C^{\delta}_{\underline{a}\beta}\gamma_{\alpha\delta}.$$

Подставляя значения символов Кристофеля в выражение для скалярной кривизны, получим следующее представление для $\widehat{R}$:

$$\widehat{R} = R(M) + R(G/H) - \frac{l^2}{4}F^{\underline{a}}_{\mu\nu}F^{\mu\nu\underline{b}}\gamma_{\underline{ab}} + L_s, \tag{7.28}$$

где $R(H)$ есть скалярная кривизна пространства M, вычисленная по метрике η, кривизна пространства G/H дается формулой

$$R(G/H) = l^{-2}\Big(-\frac{1}{4}C^{\varepsilon}_{\alpha\beta}C^{\varepsilon'}_{\alpha'\beta'}\gamma^{\alpha\alpha'}\gamma^{\beta\beta'}\gamma_{\varepsilon\varepsilon'} -$$
$$- \frac{1}{2}C^{\varepsilon}_{\alpha\beta}C^{\beta}_{\alpha'\varepsilon}\gamma^{\alpha\alpha'} - C^{\underline{a}}_{\beta\alpha}C^{\alpha}_{\beta'\underline{a}}\gamma^{\beta\beta'} - C^{\alpha}_{\varepsilon\alpha}C^{\beta}_{\varepsilon'\beta}\gamma^{\varepsilon\varepsilon'}\Big),$$

а кинетический член скалярных полей есть

$$L_s = -\frac{1}{4}\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\varepsilon\delta}\left(D_\mu\gamma_{\alpha\varepsilon}D^\mu\gamma_{\beta\delta} + D_\mu\gamma_{\alpha\beta}D^\mu\gamma_{\varepsilon\delta}\right) - \nabla_\mu\left(\gamma^{\alpha\beta}D^\mu\gamma_{\alpha\beta}\right).$$

Ясно, что базис векторных полей с коммутационными соотношениями (7.24) можно построить в окрестности любой точки $u = O_g p$, перенося поля a_μ, e_α действием оператора O_g. Поэтому представление (7.28) для скалярной кривизны $\widehat{R}$ справедливо в любой точке E. Отметим еще, что скалярные поля $\gamma_{\alpha\beta}$ взаимодействуют с калибровочным полем неминимально, и что все скалярные поля $\gamma_{\alpha\beta}$ обладают существенно нелинейным самодействием, вследствие чего теорию с лагранжианом (7.28) нельзя рассматривать с помощью стандартных методов теории возмущений.

§ 2. Спонтанная компактификация

Вернемся теперь к вопросу о том, можно ли требуемую факторизованную структуру пространства $E = M \times G/H$ получить динамически как решение уравнений многомерной теории. Рассмотрим сначала случай чистой гравитации. В качестве действия для этой теории опять возьмем многомерное обобщение действия Эйнштейна—Гильберта (7.19), дополнительно введя в него космологическую постоянную Λ (которую при необходимости можно положить равной нулю):

$$S_g = \int\limits_E \frac{1}{16\pi\hat{\varkappa}} (\widehat{R} - \Lambda)\, dv_E. \tag{7.29}$$

Варьируя это действие по метрике $\hat{\gamma}$, получим многомерное уравнение Эйнштейна с космологической постоянной

$$\widehat{R}_{MN} - \frac{1}{2}\hat{\gamma}_{MN}(\widehat{R} - \Lambda) = 0. \tag{7.30}$$

Выясним, имеют ли эти уравнения вакуумные решения, отвечающие факторизации пространства E. Для этого будем искать решение этих уравнений в виде

$$\hat{\gamma} = \eta \oplus \gamma, \tag{7.31}$$

где η есть метрика Минковского, а γ — G-инвариантная метрика на G/H, не зависящая от точек пространства Минковского M^4. В этом случае компоненты $\widehat{R}_{\mu i}$ тензора Риччи и скалярная кривизна R пространства M^4 обращаются в нуль. Поэтому $\widehat{R} = R(G/H)$, и уравнения (7.30) принимают вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(R(G/H) - \Lambda) = 0, \tag{7.32а}$$

$$R(G/H)_{ik} - \frac{1}{2}\gamma_{ik}(R(G/H) - \Lambda) = 0. \tag{7.32б}$$

Из первого уравнения следует, что $R(G/H) = \Lambda$. Подставляя это во второе уравнение, получаем $R(G/H)_{ik} = 0$ и $R(G/H) = 0$. Для однородного пространства с инвариантной метрикой эти равенства эквивалентны тому, что G/H есть тор T^d. Ранее мы установили, что при размерной редукции теории гравитации в пространстве с такой структурой можно получить калибровочную теорию только с абелевой калибровочной группой $(U(1))^d$. Таким образом, для получения нетривиальной компактификации с пространством Минковского в качестве четырехмерного пространства в действие (7.29) нужно добавить поля негравитационной природы. Мы возьмем в качестве таких полей калибровочные поля с калибровочной группой K и со стандартным действием S_f вида (6.30).

Полное действие многомерной теории получается добавлением действия S_f к действию S_g (7.29):

$$S = S_g + S_f. \tag{7.33}$$

Варьированием этого действия по метрике $\hat{\gamma}$ и калибровочному полю $\widehat{A}$ получаются многомерные уравнения Эйнштейна—Янга—Миллса

$$\widehat{R}_{MN} - \frac{1}{2}\hat{\gamma}_{MN}(\widehat{R} - \Lambda) = -\frac{4\pi\hat{\varkappa}}{\tilde{g}^2}\left(\langle F_{ML}, F_N^L\rangle - \frac{1}{4}\hat{\gamma}_{MN}\langle F_{KL}, F^{KL}\rangle\right), \tag{7.34а}$$

$$\partial_M F^{MN} - \Gamma^L_{ML}F^{MN} - \left[A_\mu, F^{MN}\right] = 0. \tag{7.34б}$$

Аналогично предыдущему случаю, будем искать вакуумные решения для метрики в виде (7.31). В соответствии с этим вакуумную конфигурацию калибровочного поля, очевидно, следует искать в виде

$$A_\mu = 0, \quad A_m = A_m(\xi), \tag{7.35}$$

где $\{\xi^m\}$ — некоторые (локальные) координаты в G/H. Подставляя анзацы для метрики (7.31) и поля (7.35) в уравнения (7.34), мы сведем их к уравнениям

$$R_{ik} = -\frac{4\pi\varkappa}{g^2}\langle F_{il}F_k^l\rangle, \tag{7.36а}$$

$$\partial_k F^{km} - \Gamma^l_{kl}F^{km} - \left[A_k, F^{km}\right] = 0, \tag{7.36б}$$

$$\Lambda = -\frac{2\pi\varkappa}{g^2}\langle F_{kl}, F^{kl}\rangle, \tag{7.36в}$$

которые называются уравнениями спонтанной компактификации [КШ], [Лу]. Фигурирующие в них величины $\varkappa$ и g^2 суть четырехмерная гравитационная постоянная и калибровочная константа связи, отличающиеся от $\hat{\varkappa}$ и $\tilde{g}^2$ на объем пространства G/H, вычисленный по метрике γ. Обратимся сначала к уравнению (7.36в). Нетрудно понять, что для выполнения условия $\Lambda = \mathrm{const}$ достаточно потребовать, чтобы поле A_m было G-симметричным калибровочным полем на G/H (см. главу 6), или, что эквивалентно вследствие (7.35), чтобы A_m было G-симметричным калибровочным полем на $E = M^4 \times G/H$.

Рассмотрим теперь уравнение (7.36б). Легко видеть, что это уравнение получается варьированием по A_m эффективного действия

$$S_{\text{эфф}} = -\frac{1}{v(G/H)} \int\limits_{G/H} \langle F_{ik}, F^{ik} \rangle \, dv_{G/H}, \tag{7.37}$$

где $dv_{G/H}$ и $v(G/H)$ — элемент объема и объем G/H, вычисленные по метрике γ.

Известно, что экстремумы функционала в классе симметричных полей являются экстремумами и в классе всех полей [Ко, Па]. Но в классе G-симметричных полей A_M действие $S_{\text{эфф}}$ приводится к виду

$$S_{\text{эфф}} = -\langle F_{ik}, F^{ik} \rangle, \tag{7.38}$$

из которого ясно, что оно фактически представляет собой потенциал скалярных полей редуцированной теории, записанный, в отличие от (6.37), в неортонормальном базисе. Отсюда следует, что полевые конфигурации многомерной теории, отвечающие экстремумам потенциала скалярных полей редуцированной теории, являются экстремумами функционала (7.37) и поэтому удовлетворяют уравнению (7.36б).

Это наблюдение позволяет сформулировать следующий общий метод решения уравнений спонтанной компактификации:

1. Зададим на пространстве G/H G-инвариантную метрику γ общего вида и вычислим для этой метрики по формуле (6.37) потенциал скалярных полей V редуцированной теории. Хорошо известно [KH], что множество G-инвариантных метрик на G/H находится во взаимно однозначном соответствии с множеством H-инвариантных скалярных произведений в $\mathfrak{m}$. Последние определяются разложением на неприводимые компоненты представления изотропии и зависят от конечного числа параметров $\{M_k\}$ $(k = 1, 2, \dots N)$ размерности массы [BKMP]. Поэтому соответствующую метрику мы будем обозначать $\gamma = \gamma(M_k)$. Скалярные поля редуцированной теории обозначим $\{f_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \dots m)$. Тогда потенциал V есть функция от $\{f_i\}$ и $\{M_k\}$: $V = V(f_i; M_k)$.

2. Для каждого набора параметров $\{M_k\}$ найдем экстремумы потенциала $V(f_i; M_k)$, т. е. $\widetilde{f}_i = \widetilde{f}_i(M_k)$. С помощью формул типа (6.56) и формулы (6.33) по этим величинам можно восстановить соответствующие конфигурации многомерного калибровочного поля $\widetilde{A} = \widetilde{A}(M_k)$.

3. Вычисляя по метрике $\gamma(M_k)$ тензор Леви-Чивита R_{ik}, а по полю $\widetilde{A}(M_k)$ — величину $\langle F_{ik}, F^l_k \rangle$ и подставляя их в уравнение (7.36а), мы получим N алгебраических уравнений на N параметров $\{M_k\}$. Если набор параметров $\{M_k^{(0)}\}$ удовлетворяет этим уравнениям, то метрика $\gamma(M_k^{(0)})$ и поле $\widetilde{A}(M_k^{(0)})$ удовлетворяют уравнениям (7.36а, б), уравнение (7.36в) удовлетворяется вследствие G-симметричности поля $\widetilde{A}(M_k^{(0)})$ [BKMP].

Этот метод не только позволяет эффективно решать нелинейные дифференциальные уравнения (7.36), но и дает естественный критерий физической адекватности их решений. А именно, в предыдущей главе мы показали, что потенциал скалярных полей редуцированной теории может быть потенциалом Хиггса. В этом случае естественно предпочесть компактифицирующие решения, отвечающие абсолютному минимуму потенциала (хиггсовскому вакууму), другим решениям, поскольку они оказываются нестабильными по отношению к первым.

В качестве примера рассмотрим в восьмимерной теории Эйнштейна-Янга-Миллса с калибровочной группой $K = SU(4)$ компактифицирующие решения, отвечающие следующей структуре пространства-времени: $E = M^4 \times CP^2$. Размерная редукция калибровочной теории с калибровочной группой $K = SU(4)$ в этом пространстве обсуждалась в § 3 предыдущей главы, и мы можем воспользоваться приведенным там результатом (6.64) для потенциала скалярных полей редуцированной теории

$$V = 12M^4\left\{(|f|^2 - 1)^2 + \frac{1}{4}\right\}, \tag{7.39}$$

в котором мы положили $L = 1/M$. Этот потенциал является стандартным потенциалом Хиггса, и его экстремумы находятся тривиально: $\widetilde{f}^{(1)} = 0$, $|\widetilde{f}^{(2)}|^2 = 1$. Отметим, что в этом простейшем примере они не зависят от M.

В соответствии с нашим рецептом, нахождение экстремумов потенциала эквивалентно решению уравнения (7.36б) при фиксированной метрике γ. Поэтому нам осталось решить уравнение (7.36 а). В данном случае удобно поступить следующим образом. Свернем это уравнение с γ^{ik}. Тогда в левой части мы получим скалярную кривизну пространства CP^2, отвечающую этой метрике, а в правой — потенциал скалярных полей редуцированной теории, умноженный на $4\varkappa/g^2$. Скалярная кривизна пространства CP^2 легко вычисляется по стандартным формулам [KH]: $R = 12M^2$. Подставляя это выражение и значение потенциала (7.39) в точке Хиггсовского вакуума в свернутое уравнение (7.36а), получим соотношение

$$12M^2 = \frac{4\pi\varkappa}{g^2}3M^4, \tag{7.40}$$

из которого для устойчивого решения находим $M = \left(\frac{\pi\varkappa}{g^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Величина $L = M^{-1} = \sqrt{\frac{\pi\varkappa}{g^2}}$ характеризует размер пространства CP^2, который оказывается порядка Планковского. Легко проверить, что для решения, отвечающего $f = 0$, этот размер определяется равенством $L = \sqrt{\frac{5\pi\varkappa}{g^2}}$, т. е. устойчивое решение соответствует меньшему размеру пространства дополнительных измерений.

Приложения

Приложение 1.

Прежде чем определить понятие окрестности, определим понятия топологии и открытого множества.

Пусть S — множество и $\mathfrak{U}$ — совокупность его подмножеств, удовлетворяющая условиям:

1) пустое множество $\varnothing \in \mathfrak{U}$ и $S \in \mathfrak{U}$;

2) пересечение двух множеств из $\mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$;

3) объединение любой совокупности множеств из $\mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$.

Если задана такая совокупность $\mathfrak{U}$ подмножеств S, то говорят, что задана топология в S, а множество S вместе с $\mathfrak{U}$ называется топологическим пространством и обозначается $(S, \mathfrak{U})$ или просто S. Множества $U \in \mathfrak{U}$ называются открытыми множествами топологического пространства $(S, \mathfrak{U})$.

Подмножество $U_x \subset S$, содержащее точку $x \in S$, называется окрестностью точки x, если найдется открытое множество $U \in \mathfrak{U}$ такое, что $x \in U_x \subset U \subset S$.

Подмножество T топологического пространства S называется замкнутым, если $S \backslash T = \{x \in S | x \notin T\}$ — открыто.

Более подробно со свойствами множеств и топологических пространств можно познакомиться по книгам [АМ], [Кос], [РФ].

Приложение 2.

Пусть S — множество элементов, которые мы будем обозначать $x, y, z, \ldots$. Обозначим через $U_x \subset S$ окрестность (см. Приложение 1) элемента $x \in S$. Тогда S называется хаусдорфовым пространством, если выполняются следующие условия.

1. Для любого $x \in S$ существует по крайней мере одна окрестность U_x и $x \in U_x$ для любого U_x.

2. Если $U_x^{(1)}$ и $U_x^{(2)}$ — окрестности x, то существует такая окрестность $U_x^{(3)}$ этого же элемента, что $U_x^{(3)} \subset U_x^{(1)} \cap U_x^{(2)}$.

3. Пусть заданы x, U_x и $y \in U_x$. Тогда существует окрестность U_y элемента y такая, что $U_y \subset U_x$.

4. (Аксиома отделимости). Пусть заданы произвольные $x, y \in S$ и $x \neq y$. Тогда существуют окрестности U_x, U_y такие, что $U_x \cap U_y = \varnothing$ ($\varnothing$ — пустое множество).

Приложение 3.

Пусть S и T — топологические пространства. Гомеоморфизмом называется взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение

$f : S \to T$, т.е. отображение, для которого существует непрерывное отображение $g \equiv f^{-1} : T \to S$ и $f \circ g = \mathbb{1}_T$ (тождественное отображение в T) и $g \circ f = \mathbb{1}_S$. Мы пишем $S \cong T$ и говорим, что S и T — гомеоморфны.

Приложение 4.

Задать на множестве S бинарное отношение (или просто отношение) — значит перечислить некоторое множество пар элементов $(x, x'), x \in S$, $x' \in S$. Нам понадобится лишь понятие отношения эквивалентности. Мы будем обозначать его значком $\sim$, говорить, что элемент x находится в отношении $\sim$ к элементу x' (или x эквивалентен x'), и писать $x \sim x'$.

Бинарное отношение называется отношением эквивалентности, если оно

1) рефлексивно, т.е. $x \sim x$ для каждого $x \in S$,
2) симметрично, т.е. из $x \sim x'$ следует $x' \sim x$,
3) транзитивно, т.е. если $x \sim x'$ и $x' \sim x''$, то $x \sim x''$.

Определим отображение π из S в множество всех подмножеств S следующим образом: каждому элементу $x \in S$ поставим в соответствие множество эквивалентных ему элементов, которое называется класс эквивалентности. Другими словами, $\pi(x)$ есть множество $\{x' \in S | x' \sim x\}$. Нетрудно показать, что если $x' \in \pi(x)$, то $\pi(x) = \pi(x')$, и два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются. Множество классов эквивалентности называется фактор-множеством и обозначается $S/\!\sim$. Таким образом $\pi(S) = S/\!\sim$. Отображение π называется канонической проекцией S на $S/\!\sim$.

Подробное изложение свойств фактор-пространств можно найти, например, в [Ме].

Приложение 5.

Накрывающие группы являются частным случаем накрывающих многообразий. Связное многообразие $\widetilde{M}$, для которого определено непрерывное отображение $\lambda : \widetilde{M} \to M$, называется накрывающим многообразием многообразия M, если любая точка $x \in M$ обладает такой окрестностью u, что

1) полный прообраз $\lambda^{-1}(u) = \bigcup\limits_a \tilde{u}_a \subset \widetilde{M}$ есть объединение попарно непересекающихся компонент $\tilde{u}_a \subset \widetilde{M}$,

2) ограничение $\lambda_a = \lambda|_{\tilde{u}_a}$ отображения λ на $\tilde{u}_a$ есть диффеоморфизм $\tilde{u}_a$ на всю u. Каждая u_a называется правильно накрывающей компонентой. Для всех точек M и их окрестностей u таких, как

описано выше, число правильно накрывающих компонент одинаково, обозначается $z(\lambda)$ и называется числом накрытия.

Односвязное накрывающее многообразие $\widehat{M}$ для данного связного многообразия M называется универсальным накрывающим многообразием.

Пусть, например, $M = S^1$, ϕ — угловая координата точки в M $(0 \leqslant \phi < 2\pi)$. Одним из накрывающих многообразий для M является $\widetilde{M} = S^1$; ее точки будем параметризовать углом ψ $(0 \leqslant \psi < 2\pi)$. Отображение $\lambda : \widetilde{M} \to M$ задается так: $\lambda(\psi) = 2\psi (\operatorname{mod} 2\pi)$ (остаток от деления на 2π) и $z(\lambda) = 2$. Универсальное накрывающее многообразие $\widehat{M} = \mathbb{R}^1$. Для него $\lambda(x) = x (\operatorname{mod} 2\pi)$, где x — координата в $\mathbb{R}^1$ $(-\infty < x < \infty)$, $z(\lambda) = \infty$.

Пусть задана группа G. Многообразие $\widehat{G}$, являющееся универсальным накрывающим, называется универсальной накрывающей группой группы G, если отображение $\lambda : \widehat{G} \to G$ есть гомоморфизм (он называется накрывающим гомоморфизмом) и в то же время локальный изоморфизм (т. е для пары окрестностей $\hat{u} \subset \widehat{G}$ и $u \subset G$, содержащих единицы, $\lambda : \hat{u} \to u$ есть изоморфизм). Например, для $G = SO(3)$ универсальной накрывающей является группа $\widehat{G} = SU(2)$, причем накрывающий гомоморфизм λ реализуется формулой типа (4.93) и $z(\lambda) = 2$ так, что $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$. Для $G = SO(n)$ универсальная накрывающая обозначается $\widehat{G} = \mathrm{Spin}(n)$, для $G = SO(1,n)$ — $\widehat{G} = \mathrm{Spin}(1,n)$; в этих случаях также $z(\lambda) = 2$.

Приложение 6.

Пусть V — векторное пространство, а μ — линейный функционал, т. е. отображение, заданное на V, со значениями в $\mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям

$$\mu(v+u) = \mu(v) + \mu(u),$$
$$\mu(xv) = x\mu(v),$$

где $v, u \in V$, $x \in \mathbb{R}$. Значение функционала μ на v часто записывают в виде внутреннего произведения: $\langle \mu, v \rangle$. Пространство линейных функционалов на V называется пространством дуальным (двойственным) к V и обозначается V^*. Дуальное пространство V^* является линейным пространством и $\dim V = \dim V^*$. Если $\{v_i\}$ — базис в V, то базис $\{\mu^i\}$ в V^* называется дуальным к $\{v_i\}$, если $\langle \mu^i, v_j \rangle = \delta_i{}^j$. Элементы V часто называют контравариантными векторами, а элементы V^* — ковариантными.

Приложение 7.

В этом пункте мы дадим определения некоторых наиболее часто употребляемых типов отображений $\phi : S \to T$, где S и T — некоторые множества.

Отображение ϕ взаимно однозначно (инъективно), если из $x \neq x'$ ($x, x' \in X$) следует $\phi(x) \neq \phi(x')$. Отображение ϕ является отображением S на T (сюръективным), если $\phi(S) = T$. Отображение ϕ, которое инъективно и сюръективно, называется биективным.

Отображение ϕ называется гомоморфизмом, если оно сохраняет математические структуры, введенные на множествах. Так, если $S = G$ и $T = G'$ являются группами, то гомоморфизмом называют однозначное (но не обязательно взаимно однозначное) отображение, сохраняющее групповую композицию:

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \quad a, b \in G.$$

Аналогично, если $S = \mathfrak{g}$ и $T = \mathfrak{g}'$ — алгебры Ли со скобочным законом умножения $[x, y]$, то гомоморфизм алгебр должен удовлетворять условию

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)], \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Если $S = G$ и $T = G'$ — группы, то ядро $\ker\phi$ гомоморфизма ϕ есть подгруппа $\ker\phi = \{g \in G | \phi(g) = e\} \subset G$ (e — единица группы), а образ $\operatorname{Im}\phi$ гомоморфизма ϕ — $\operatorname{Im}\phi = \{\phi(g), g \in G\} \subset G'$.

Гомоморфизм ϕ называется мономорфизмом, если $\ker\phi = \{e\}$ (т. е. ϕ инъективное отображение), и эпиморфизмом, если $\operatorname{Im}\phi = G'$ (т. е. ϕ сюръективно). Если гомоморфизм ϕ биективен, т. е. ϕ — взаимно однозначное отображение G на G' ($\ker\phi = \{e\}$, $\operatorname{Im}\phi = G'/$), то он называется изоморфизмом. В этом случае говорят, что G и G' изоморфны и пишут $G \cong G'$.

Рассмотрим теперь отображение множества в это же множество $\phi : S \to S$. Если $S = G$ — группа и отображение ϕ — гомоморфизм, то ϕ называется эндоморфизмом. Изоморфное отображение группы на себя называется автоморфизмом. Все эти определения очевидным образом переформулируются для алгебр (с заменой e на нулевой элемент).

Часто встречается автоморфизм группы $\phi : G \to G$, задаваемый формулой $\phi(g) = a^{-1}ga$, где $g \in G$, а a — произвольный фиксированный элемент группы. Этот автоморфизм называется внутренним автоморфизмом, порожденным элементом a.

Приложение 8.

Пусть группа G действует на множестве S, т. е. задано отображение $G \times S \to S$, которое обозначается $(g, x) \to g \cdot x$ со следующими свойствами:

i) $e \cdot x = x$ для всех $x \in S$ (e — единица группы);

ii) $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$ для всех $x \in S$ и $g, g' \in G$.

В этом случае множество S часто называют G-множеством. Орбитой точки $x \in S$ называется подмножество $G \cdot x \equiv \{g \cdot x, g \in G\} \subset S$. Можно показать, что две орбиты $G \cdot x$ и $G \cdot y$ либо совпадают, либо не пересекаются, а все G-множество S разлагается в объединение непересекающихся орбит. При этом на S возникает отношение эквивалентности (см. Приложение 4): $x \sim y$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одной орбите.

Приложение 9.

Говорят, что группа G действует на S транзитивно или что G-множество S однородно, если любая точка из S переводится в любую другую преобразованием из группы G. В частности, орбита (см. Приложение 8) является однородным G-пространством, а любое G-множество является объединением однородных пространств.

Зафиксируем точку $x \in S$. Подгруппа $G_x = \{g \in G \,|\, g \cdot x = x\} \subset G$ называется стационарной подгруппой или стабилизатором точки x. Совокупность элементов вида $\{gh, h \in G_x\}$ при фиксированном $g \in G$ называется левым смежным классом. Его обозначают $[g]$ или gG_x. Очевидно, что $[g]$ состоит из всех элементов группы, переводящих точку x в $g \cdot x$. Можно показать, что G-множество S изоморфно пространству левых смежных классов $G/\sim$, где отношение эквивалентности задается так: $g \sim g'$ тогда и только тогда, когда g и g' принадлежат одному классу или $[g] = [g']$. Пространство левых смежных классов будем обозначать G/H, $H \cong G_x$.

Обратно, пусть H — подгруппа G. Совокупность G/H левых смежных классов в G по H вида $[g] = gH = \{gh, h \in H\}$ является однородным G-пространством относительно естественного действия G:

$$g : [g'] = g'H \longrightarrow [gg'] = gg'H.$$

Приложение 10.

Введем понятие компактности. Пусть S и T — два множества и $T \subset S$. Открытым покрытием подмножества T называется семейство открытых подмножеств $\{u_j : j \in J\}$, $u_j \subset S$ такое, что $T \subset \bigcup\limits_{j \in J} u_j$. Если вдобавок индексирующее множество J конечно, то $\{u_j : j \in J\}$

называется конечным открытым покрытием. Пусть $\{u_j : j \in J\}$ и $\{v_k : k \in K\}$ — два покрытия $T \subset S$. Если для любого $j \in J$ найдется $k \in K$ такое, что $u_j = v_k$, то $\{u_j : j \in J\}$ называется подпокрытием покрытия $\{v_k : k \in K\}$. Говорят, что покрытие $\{u_j : j \in J\}$ вписано в покрытие $\{v_k : k \in K\}$, если для любого $j \in J$ найдется $k \in K$ такое, что $u_j \subset v_k$.

Покрытие называется локально конечным, если каждая точка пространства обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом u_j из этого покрытия.

Подмножество T топологического пространства X называется компактным, если всякое открытое покрытие T обладает конечным подпокрытием. Например, пространство $\mathbb{R}$ с обычной топологией некомпактно, потому что открытое покрытие $\{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}$ — целые числа$\}$ не имеет конечных подпокрытий. Единичный отрезок $[0,1]$ и окружность S^1 компактны. Не любое подмножество компактного пространства компактно, например, интервал $(0,1)$ - некомпактное подмножество в $[0,1]$ (рассмотрите покрытие $\{(1/n, 1-1/n) : n$ — натуральные числа$\}$). Но замкнутое (см. Приложение 1) подмножество компактного пространства всегда компактно. Подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ компактно в том и только в том случае, если оно ограничено и замкнуто (теорема Гейне—Бореля).

Если S — метрическое пространство (т. е. определена неотрицательная вещественная функция на $S \times S$, называемая метрикой, такая что $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$; $\rho(x,y) = \rho(y,x)$; $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ для любых $x, y, z \in S$), то его компактное подмножество при любом положительном ϵ может быть накрыто конечным числом открытых шаров радиуса ϵ.

Хаусдорфово пространство (см. Приложение 2) называется паракомпактным, если во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. Компактные хаусдорфовы пространства и все метрические пространства являются паракомпактными.

Задачи

Задачи к главе 2

1. Для сферы S^2 найти карты и локальные гомеоморфизмы $\varphi_i(p)$ (p — точка сферы), воспользовавшись стереографической проекцией. Вычислить функцию $\varphi_{1,2} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$. Записав локальные координаты в комплексном виде (отождествив $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}^1$), показать, что CP^1 диффеоморфно S^2.

2. Показать, что многообразия $\mathbb{Z}_2$, $SU(2)$ изоморфны сферам. Проверить, что $SO(3) \simeq \mathbb{R}P^3$.

3. Выразить коммутатор векторных полей $[fX, gY]$ через поля X, Y и $[X, Y]$. Здесь $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.

4. Исходя из инвариантности $X \in \mathfrak{X}(M)$ и $\omega \in D^1(M)$ относительно общекоординатных преобразований, установить, как преобразуются компоненты ξ^i поля X и компоненты u_i формы ω при этих преобразованиях.

5. Найти размерность пространства r-форм $\dim D^r$. Показать, что $\dim D^r = \dim D^{n-r}$, где $n = \dim M$.

6. Пусть, $M = \mathbb{R}^n$ и $\{x^i\}$ — координаты в $\mathbb{R}^n$. Выписать в этих координатах все возможные формы для $n = 2$ и $n = 3$ (см. (2.15)) и вычислить их внешние производные и их попарные внешние произведения. В случае, когда $n = 3$ для 1-формы $\omega = \sum\limits_i u_i dx^i$ и 2-формы $\mu = \sum\limits_{ij} v_{ij} dx^i \wedge dx^j$ связать $d\omega$ и $d\mu$ с $\operatorname{rot} \vec{u}$ и $\operatorname{div} \vec{s}$, где компоненты вектора s_i определяются величинами v_{ij}: $v_{ij} = \varepsilon_{kij} s_k$.

7. Пусть $M = \mathbb{R}^3$. Используя запись в координатах $\{x^i\}$, показать, что тождества $ddf = 0$ и $dd\omega = 0$ эквивалентны $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ и $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u} = 0$, где $f \in \mathfrak{F}(M)$, а $\omega = \sum\limits_i u_i dx^i$ — 1-форма.

8. Доказать формулу (2.21) в локальных координатах.

9. Пусть $\dim M = 2$. Показать, что при замене локальных координат $x^i \to x'^i(x^1, x^2)$ $(i = 1, 2)$ 2-форма $dx^1 \wedge dx^2$ преобразуется как элемент площади:

$$dx'^1 \wedge dx'^2 = (\text{Якобиан замены})\, dx^1 \wedge dx^2.$$

10. Вычислить $*\omega$ и $**\omega$ для $\omega \in D^r(\mathbb{R}^2)$ при $r = 0, 1, 2$.

11. Доказать формулу (2.25).

12. Доказать равенство (2.26).

13. Показать, что для левых сдвигов L_a и правых сдвигов R_a на группе выполняются равенства $L_{ab} = L_a \circ L_b$, $R_{ab} = R_b \circ R_a$.

14. Показать, что если A — левоинвариантное векторное поле и ϕ_t — его однопараметрическая группа преобразований, то ϕ_t коммутирует с левыми сдвигами L_a для всех $a \in G$.

15. Доказать уравнение Маурера–Картана (2.44) для левоинвариантных форм.

16. Показать, что уравнение Маурера–Картана (2.44) для канонической 1-формы группы G в базисе $\{E_i\}$, удовлетворяющем (2.47), имеет вид (2.46).

17. Найти каноническую 1-форму θ и левоинвариантные векторные поля

i) для $G = SU(2)$ в параметризации $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp\left(i \sum_{k=1}^{3} \sigma_k \alpha_k\right)$;

ii) для $G = U(1)$.

18. Рассмотреть действие $G = SO(3)$ на $M = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3,\ (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$. Определить тип действия (свободное или эффективное). Построить в явном виде гомоморфизм σ из алгебры Ли группы $SO(3)$ в $\mathfrak{X}(S^2)$.

Указания: поля искать в сферических координатах; генераторы $SO(3)$ на сфере являются операторами момента.

19. Доказать формулы (2.67), (2.71), (2.72). Использовать при этом тождество Якоби (2.5б) для полей A^*_α, ξ^*_i, ξ^*_j.

20. Доказать, что $\omega = (\mathrm{pr}_2)^*\theta$ есть форма связности канонической плоской связности в $P = M \times G$ (формула (2.81)).

21. Рассмотреть расслоение Хопфа $S^3 = P(S^2, U(1))$. Показать, что 1-форма θ^3, где $\theta = \sum_i \sigma_i \theta^i$ — каноническая 1-форма на $SU(2)$ (см. (2.50)), есть форма связности, и вычислить ее форму кривизны. Какие векторные поля образуют базис горизонтального пространства?

22. Рассмотреть формулу Стокса (2.101) для $r = 2$ и $\omega = A_i dx^i$ и $r = 3$ и $\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} E_k dx^i \wedge dx^j$. Выяснить к каким известным формулам математического анализа приводится (2.101) в этих случаях.

23. Выразить инвариантную функцию $\mathrm{tr}\,(\exp A)$ через симметрические полиномы $S_j(\lambda)$ (2.99).

24. Вычислить первое число Черна для расслоения Хопфа $S^3 = P(S^2, U(1))$ для форм связности i) и ii) из § 12 и формы связности из задачи 2.21.

25. Объясните, в каком пункте нарушился бы аналог Предложения 2.9.1. для ассоциированного расслоения.

26. Показать, что лента Мёбиуса, определенная в § 6 (см. также Пример 6 в § 7 гл. 2), является неориентируемым многообразием.

27. Показать, что определение интеграла (2.22а), (2.22б) не зависит от выбора локальных координат и согласовано в области пересечения окрестностей, покрывающих многообразие M.

Задачи к главе 3

1) Покажите, что определения (3.10а) и (3.10б) корректны, т.е. не зависят от выбора точки $u \in \pi^{-1}(x)$ и векторов $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ таких, что $\pi'(\bar{X}) = X$, $\pi'(\bar{Y}) = Y$ и $\pi'(\bar{Z}) = Z$.

2) Исходя из (3.15) и пользуясь (3.11) получить выражения для компонент тензоров кривизны и кручения через символы Кристофеля.

3) Покажите, что

$$\theta^k(B_i) = \delta_i^k, \qquad \theta^k(E_i{}^{j*}) = 0,$$
$$\omega^k{}_l(B_i) = 0, \qquad \omega^k{}_l(E^j{}_i{}^*) = \delta_i^k \delta_l^j.$$

4) Для компонент η^i векторного поля Y относительно локальной системы координат $\{x^i\}$, $Y = \sum_i \eta^i X_i$, где $X_i = \partial/\partial x^i$, выразить их ковариантные производные $\eta^i{}_{;j}$, определяемые соотношением

$$\nabla_{X_j} Y = \sum_i \eta^i{}_{;j} X_i,$$

через обычную производную $\partial\eta^i/\partial x^j$, компоненты η^j и символы Кристоффеля.

Задачи к главе 4

1. Получить формулы (4.21) и (4.22) для лагранжиана и действия калибривочной теории.

2. Рассмотреть формы ω_0 и B (см. (4.11)) на подрасслоении $\pi^{-1}(U)$ в локальных координатах. Показать, что для произвольного векторного поля (4.9) на $\pi^{-1}(U)$

$$\omega_0(hY) = -B(Y),$$
$$B(hY) = B(Y),$$

где hY — горизонтальная компонента Y.

3. Рассмотреть электродинамику Максвелла в пространстве-времени Минковского M^4.

а) Выразить 2-форму $*F$ в терминах электрического ($\vec{E}$) и магнитного ($\vec{B}$) полей (см. (4.43)). Показать, что переход $F \to *F$ равносилен замене $\vec{E} \to -\vec{B}$, $\vec{B} \to \vec{E}$.

б) Проверить, что уравнения (4.47) эквивалентны системе уравнений Максвелла (4.48).

в) Получить из (4.49) уравнение непрерывности (4.51).

4. Проверить в случае $M = \mathbb{R}^2$, что $\triangle f$ с $f \in D^0(M)$ сводится к обычному оператору Лапласа, действующему на функцию $f(x)$.

5. Получить уравнения (4.47) из действия (4.54).

6. Доказать формулу (4.58).

7. Показать, что для инстантонного решения (4.87), (4.88)

$$C_2(P) = -1.$$

8. Рассмотреть неабелеву калибровочную теорию на расслоении $P = M^4 \times K$ с калибровочной группой $K = SU(2)$ и скалярным полем в фундаментальном представлении. Получить аналоги формул (4.111) и (4.112).

Задачи к главе 5

1. Рассмотрите элементы группы $SO(3)$ в матричном представлении

$$S(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha}\vec{T}},$$

где $\vec{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, T_x, T_y, T_z — стандартные генераторы вращений. Покажите, по-крайней мере в квадратичном приближении по $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$, что

$$S(\vec{\alpha})S(\vec{\beta}) = S(\vec{\gamma}),$$

где величина $\vec{\gamma}\vec{T}$ строится из $\vec{\alpha}\vec{T}$, $\vec{\beta}\vec{T}$ и их коммутаторов, но не содержит элементы типа $(\vec{\alpha}\vec{T})(\vec{\beta}\vec{T})$.

2. Пусть L — алгера Ли, K — ее подалгебра. Показать, что центр $\mathfrak{Z}(L)$ есть абелев идеал, а централизатор $C_L(K)$ — подалгебра в L.

3. Пусть L — алгебра Ли, A и B — идеалы в L. Покажите, что $[A, B]$ — также идеал в L.

4. Доказать матричное равенство (5.46) $\det e^M = e^{\operatorname{tr} M}$.

Указание: воспользоваться тем фактом, что любая квадратная матрица M может быть приведена к нормальной жордановой форме, т.е. существует невырожденная матрица X такая, что $X^{-1}MX = J$, где J — некоторая жорданова матрица, т.е. блочно-диагональная матрица

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
\mathfrak{J}_{r_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots \\ \hline
0 & \mathfrak{J}_{r_2}(\lambda_2) & 0 & \cdots \\ \hline
\cdots & \cdots & \mathfrak{J}_{r_3}(\lambda_3) & \cdots \\ \hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right),$$

в которой $\mathfrak{J}_r(\lambda)$ есть $r \times r$ матрица вида

$$\mathfrak{J}_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

(См. [КМ]).

5. Найти размерности алгебр в табл. 5.1. Показать, что $sl(n,P)$ является идеалом в $gl(n,P)$.

6. Покажите, что ядро гомоморфизма $\mathrm{ad} : L \to gl(V)$ является центром алгебры Ли L, $\ker \mathrm{ad} = \mathfrak{Z}(L)$.

7. Докажите свойство 1 полупростых алгебр Ли (см. § 4). Для этого рассмотрите выражения вида $\mathrm{ad}\, e_\alpha(\mathrm{ad}\, e_\beta(X))$ для случаев, когда $X \in \mathfrak{H}$ и $X = e_\gamma$, $\gamma \in \Delta$ и покажите, что во всех случаях $\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\, e_\alpha\, \mathrm{ad}\, e_\beta = 0$.

8. Пользуясь результатами предыдущей задачи и невырожденностью формы Киллинга на $\mathfrak{g}$, докажите свойство 2 из § 4.

9. Покажите, что подалгебра Картана полупростой алгебры абелева. Для этого рассмотрите $B(X,Y)$ с $X \in \mathfrak{G}^{(1)} = [\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ и воспользуйтесь формулой (5.44).

10. Докажите свойство 5 из § 4, воспользовавшись свойством 1 и невырожденностью формы Киллинга на $\mathfrak{g}$.

11. Покажите, что для алгебры $\mathfrak{g} = A_3$ справедливы формулы (5.31) и t_z и y являются регулярными элементами.

12. Докажите свойство 8 из § 4. Для этого рассмотрите α — серию корней, проходящую через α и воспользуйтесь формулой (5.43).

13. Проверьте свойство 10 из § 4. Используйте метод доказательства от противного.

14. Докажите свойство 11 из § 4. Для этого рассмотрите α — серию, походящую через β и воспользуйтесь формулой (5.43).

15. Восстановите матрицу Картана и алгебру по диаграмме Дынкина для алгебры B_2.

16. Докажите отрицательную определенность формы Киллинга на вещественой форме $\tilde{\mathfrak{g}}$, порожденной элементами (5.50).

Задачи к главе 6

1. Рассмотрите алгебру $\mathfrak{g} = A_3$ и ее регулярную подалгеру $\mathfrak{H} = A_2$. Разложите представление $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ алгебры $\mathfrak{H}$ на неприводимые и найдите централизатор $C_\mathfrak{g}(\mathfrak{H})$.

2. Рассмотреть задачу о размерной редукции симметрического сектора многомерной теории Янга—Миллса, заданной в шестимерном пространстве вида $E = M^4 \times G/H$, где $G/H = SU(2)/U(1) = CP^1$ (диффеоморфно сфере S^2), с калибровочной группой $K = SU(2)$. Найти калибровочную группу C редуцированной теории и, вычислив потенциал скалярных полей, построить действие редуцированной теории.

Список литературы

[АМ] *Александрян Р. А., Мирзахарян Э. А.* Общая топология. М.: Высшая школа, 1979.

[АХЗ] *Atiyah M., Hitchin N., Singer I.* Proc. Nat. Acad. Sci. V. 74. P. 2662–2663. 1977.

[БД] *Balaban T., Jaffe A.* Constructive Gauge Theory. Fundamental Problems of Gauge Field Theory. Proc. of the 6-th Ettore Majorana Intern. School on Mathematical Physics (Erice, 1985). Ed. by G. Velo, A. S. Wightman. №4. Plenum Press. P. 207–264. 1986.

[БЛОТ] *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. Н., Тодоров И. Т.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.

[БР] *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения. М.: Мир, 1980.

[Бр] *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.

[БШ] *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.

[БШ 1] *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Квантовые поля. М.: Наука, 1980.

[Ва] *Weinberg S.* Phys. Rev. Lett. V. 19. P. 1264. 1967.

[Ви] *Wilczek F.* In: Quark Confinement and Field Theory. N. Y.: John Wiley and Sons, 1977.

[ВК] *Волобуев И. П., Кубышин Ю. А.* ТМФ. Т. 68. №2. 225–235; №3. С. 368–380. 1986.

[ВКМ] *Волобуев И. П., Кубышин Ю. А., Моурао Ж. М.* ТМФ. Т. 78. №1. 58–69; №2. С. 267–280. 1989.

[ВКМР] *Волобуев И. П., Кубышин Ю. А., Моурао Ж. М., Рудольф Г.* ЭЧАЯ. Т. 20. Вып. 3. С. 561–627. 1989.

[ВТ] *Волошин М. Б., Тер-Мартиросян К. А.* Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1984.

[ГВ] *Gross D., Wilczek R.* Phys. Rev. D8. P. 3633. 1973.

[ГГ] *Гото М., Гроссханс Ф.* Полупростые алгебры Ли. М.: Мир, 1981.

[ГД] *Глимм Дж., Джаффе А.* Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. М.: Мир, 1984.

[Гр] *Gribov V. N.* Nucl. Phys. V. B139. № 1. P. 1–19. 1978.

[Дж] *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.

[ДМ] *Drechsler W., Mayer N. E.* Fibre bundie techniques in gauge theories. Lecture Notes in Physics. V. 67. Springer-Verlag. 1977.

[ДНР] *Jackiw R., Nohl C., Rebbi C.* Phys. Rev. D15. P. 1642–1646. 1977.

[ДНФ] *Дубровин В. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. 2 изд. М.: Наука, 1986.

[Ды 1] *Дынкин Е. Б.* Классификация простых алгебр Ли. Мат. сборник, Т. 18. С. 347–352. 1946.

[Ды 2] *Дынкин Е. Б.* Максимальные подгруппы классических групп. Труды Московского математического общества. Т. 1. С. 39–166. 1952.

[ЕГХ] *Eguchi T., Gilkey T. B., Hanson A. I.* Phys. Reports C. V. 66. № 6. P. 213–393. 1980.

[За] *Зайлер Э.* Калибровочные теории. М. 1985.

[Зи] *Singer I. M.* Commun. Math. Phys. 60. P. 7–12. 1978.

[Ка] *Cahn R. N.* Semi-simple Lie algebras and their representations. Reading, MA: Benjamin/Cummings Pub. Com., 1984.

[Ки] *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.

[КК] *Kaluza T.* Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss. Berlin. Math. Phys. K1. 966. 1921.

Klein C. Z. Phys. V. 37. P. 895. 1926.

[КМ] *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.

[КН] *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981.

[Ко] *Coleman S.* Classical lumps and their quantum descendants. New Phenomena in Subnuclear Physics. Proc. of the 1975 Intern. School of Subnuclear Physics. Part A. Ed. by Zichichi, N. Y.—London: Plenum Press. P. 297—421. 1977.

[Кос] *Косневски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983.

[КП] *Коноплева Н. П., Попов В. Н.* Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1972.

[КФ] *Corrigan E. F., Fairlie D. B.* Phys. Lett. V. 67B. P. 69—71. 1977.

[КШ] *Cremmer E., Scherk J.* Nucl. Phys. B. V. 118. № 1/2. P. 61—75. 1977.

[ЛБ] *Ляховский В. Д., Болохов А. А.* Группы симметрии и элементарные частицы. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.

[Лу] *Luciani I. F.* Nucl. Phys. B. V. 135. № 1. P. 111—130. 1978.

[Ме] *Менский М. Б.* Метод индуцированных представлений: пространство, время и концепция частиц. М.: Наука, 1976.

[Но] *Номидзу К.* Группы Ли и дифференциальная геометрия. М.: ИИЛ, 1960.

[Па] *Palais R. S.* Commun. Math. Phys. V. 69. P. 19. 1979.

[По] *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

[Ра] *Раджараман Р.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.

[РФ] *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.

[Са] *Salam A.* Elementary Particle Theory. Ed. by N. Svartholm. Stockholm. Almquist Forlag AB. P. 367. 1968.

[Со] *Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В.* Калибровочные поля. М.: Изд-во МГУ, 1986.

[Сай] *Саймон Б.* Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.

[Тр1] *Trautman A.* Fibre bundles associated with space-time. Rep. Math. Phys. V. 1. № 1. P. 29—62. 1970.

[Тр 2] *Trautman A.* Czechoslovak Journ. of Physics. V. B29. № 1. P. 107–116. 1979.

[Шв] *Schwarz A. S.* Phys. Lett. V. 67B. P. 172–174. 1977.

[Хи] *Higgs P. W.* Phys. Lett. V. 12, P. 132. 1964.

[Хо] *'t Hooft G.* Report at the Conference on Lagrangian field theories. Marseille, 1972.

[ЧЛ] *Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф.* Калибровочные теории в физике элементарных частиц. М.: Мир, 1987.

[Ше] *Шевалле К.* Теория групп Ли. Т. 3. Общая теория алгебр Ли. М.: ИИЛ, 1958.

[ЯМ] *Yang C. N., Mills R. L.* Phys. Rev. V. 96. P. 191. 1954.

Предметный указатель

Содержание