

Э.Зайлер

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ СВЯЗИ С КОНСТРУКТИВНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИЕЙ ПОЛЯ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКОЙ

В предлагаемой читателю книге собраны математически строгие результаты, касающиеся построения и свойств калибровочных полей, как решёточных, так и непрерывных. Многие существенные результаты принадлежат здесь самому автору. Книга состоит из двух частей. В первой части изложена теория, относящаяся к фазовым переходам в решёточных моделях, во второй — теория непрерывных калибровочных полей, точнее, та ее часть, которая на сегодняшний день доступна строгому анализу.

В написанном А.А.Мигдалом дополнении приведен ряд нерешенных проблем, важных с точки зрения физики элементарных частиц, и указаны возможные подходы к их исследованию.

Оглавление

От редактора перевода	5
Предисловие	6
Введение	7
Часть I. Решёточные калибровочные теории	9
1. Схема построения решёточных калибровочных теорий	11
2. Основные свойства	19
а. Свойство положительности по Остервальдеру — Шрадеру и его следствия	20
б. Некоторые наблюдаемые и их смысл	24
с. «Диаманитное» неравенство	29
д. Корреляционные неравенства	36
3. Методы разложения в ряд	37
а. Общий алгебраический формализм для полимеров	39
б. Приложение описанного выше формализма к решёточным калибровочным теориям. Сходимость	47
с. Результаты: следствия сходимости кластерного разложения	57
4. Некоторые дальнейшие результаты	74
а. Двумерные абелевы модели Хиггса: θ -вакуумы, фазовый переход и удержание дробных зарядов	75
б. Трёхмерная абелева модель Хиггса: фазовая структура	80
с. Теорема Гута: существование неудерживающей (кулоновой) фазы в четырёхмерной $U(1)$ -модели	82
д. $SU(n)$ удерживает, если удерживает Z_n	93
е. Взаимосвязь электрических и магнитных свойств в проблеме удержания	96
ф. Некоторые грубые соображения о фазовом переходе огрубления поверхности	104

Часть II. Непрерывные калибровочные квантовые теории поля	107
5. Методы построения непрерывных калибровочных квантовых теорий поля	107
а. Скейлинг-предел	107
б. Прямые непрерывные конструкции	112
6. Сходимость к непрерывному пределу во внешних или обрезанных калибровочных полях	120
а. Сходимость бозонных функций Грина	121
б. Сходимость определителей	128
с. Сходимость состояний (средних значений) во внешних калибровочных полях	134
д. Сходимость средних в полностью квантованных теориях с обрезанием калибровочного поля	140
7. Устранение всех обрезаний; проверка аксиом в двумерном случае	143
а. Устойчивое разложение	143
б. Оценки, зависящие и не зависящие от объема	153
с. Термодинамический предел; проверка аксиом	163
8. Общий подход к теории нелокальных калибровочно-инвариантных объектов	174
а. Предположения	175
б. Реконструкция релятивистской квантовой механики	179
с. «Функции Вайтмана» и их аналитичность	187
д. Граничные значения («обобщенные функции Вайтмана»)	189
е. Локальность и теория рассеяния	190
Приложение. Геометрические аспекты калибровочных теорий	193
Добавление. <i>А.А.Мигдал</i> . Задачи и перспективы калибровочных теорий	196
Литература	210
К введению и части I	211
К части II	213
К добавлению	215
Литература, добавленная при переводе	216
Именной указатель	217
Предметный указатель	219

Именной указатель

Балабан (Т. Balaban) 111	Вейнгартен (D. H. Weingarten) 72, 120, 167
Березин Ф. А. 112, 148	Вильсон (К. Wilson) 5, 7, 9, 10, 12
Березинский В. Л. 13, 77	Гавендзкий (К. Gawedzki) 6, 72
Боголюбов Н. 9, 96	Галлавогги (G. Qallavotti) 37, 41, 63, 111
Борге (С. Borgs) 6	Гарсиа (А. М. Garsia) 141
Бриджес (D. С. Brydges) 6, 120	Гейзенберг (W. Heisenberg) 132
Бэнкс (Т. Banks) 85	Гёпферт (М. Gopfert) 64, 74, 109
Вандерс (О. Wanders) 6	
Вегнер (F. Wegner) 7, 9, 58, 63	

- Гилки (P. B. Gilkey) 8
Глазер (V. Glaser) 181
Глимм (J. Glimm) 11, 58, 71, 85, 86,
136, 152, 166
Грубер (C. Gruber) 37
Гут (A. Guth) 82, 85
Гуэрра (F. Guerra) 78
да Сильва (R. N. da Silva) 6
Джаффе (A. Jaffe) 11, 68, 71, 85, 86,
136, 152, 166, 190
Добрушин Р. Л. 96, 105
Друфф (J. Drouffe) 9, 13
Дубровин Б. А. 11
Дюрхюус (B. Durhuus) 74, 104
Жинибр (J. Ginibre) 36, 37
Зайлер (E. Seller) 6
Зиновьев Ю. М. 75
Ито (K. R. Ito) 154
Ициксон (C. Itzykson) 9
Йост (R. Jost) 190
Кавамото (N. Kawamoto) 74
Каданофф (L. P. Kadanoff) 203
Каммарота (C. Cammarota) 55
Кляйн (A. Klein) 181
Когут (J. Kogut) 9, 85
Коноплёва Н. П. 5
Кройц (M. Creutz) 111
Кунц (H. Kunz) 37
Кунце (H. Kunze) 185
Купер (A. Cooper) 166, 169
Ландау (L. J. Landau) 181
Люшер (M. Lfischer) 23, 105
Магнен (J. Magnen) 112, 152, 166
Майерсон (R. Myerson) 85
Макк (G. Mack) 58, 64, 72, 74, 79, 93,
96, 100, 102, 109, 198
Мальшев В. А. 37, 39, 43, 51, 77, 151
Марра (R. Marra) 39, 69
Мартинелли (G. Martinelli) 206
Мартин-Лёф (A. Martjn-L6f) 37,41
Мечер (H. Meyer) 72, 74
Мессаже (A. Messager) 95
Мигдал А. А. 5, 196
Миракль-Соль (S. Miracle-Sole) 37,
39, 41, 69, 95
Мэттьюз (M. T. Matthews) 112
Мюнстер (G. Miinster) 58
Нельсон (E. Nelson) 29, 138, 150
Новиков С. П. 11
Ойлер (H. Euler) 132
Остервальдер (K. Osterwalder) 6
Паризи (G. Parizi) 206
Парк (Y. M. Park) 88
Пенроуз (O. Penrose) 44
Петкова (V. B. Petkova) 93, 96, 100,
102, 198
Поляков А. М 9, 13 75, 177
Попов В. Н. 5, 19, 208
Поттхофф (J. Potthoff) 120, 126, 137
Пфистер (C. Pfister) 95
Рёйсенаарс (S. Ruijsenaars) 6
Розен (L. Rosen) 166, 169
Рота (G.-C Rota) 43
Рюэль (D. Ruelle) 38
Саймон (B. Simon) 29
Салам (A. Salam) 112, 134
Сенеор (R. Seneor) 112, 152, 166
Синай Я. Г. 5
Славнов А. А. 5
Спенсер (T. Spencer) 71, 77, 83, 93,
166
Стейн (E. Stein) 185
Строкки (F. Strocchi) 8
Томбулис (T. Tomboulis) 203
т'Хоофт (G. Ч Hooft) 26, 28, 48, 58,
63, 96, 102, 104
Уленброк (D. Uhlenbrock) 29
Фаддеев Л. Д 5, 19. 208
Фейнман (R. Feynman) 10
Фоменко А. Т. 11
Фрёлих (J. Frohlich) 6, 74, 77, 83, 88,
93, 104, 120, 164, 177, 181
Хесс (J. Hess) 29
Хунцикер (W. Hunziker) 29
Хэнсон (A. J. Hanson) 8
Чэллифор (J. L. Challifour) 72, 120,

167
Шаратчандра (H. S. Sharatchandra)
131
Швингер (J. Schwinger) 115, 116
Шлосман С. Б. 96

адронизация 72
антипериодические граничные
условия 20
асимптотическая свобода 110
Ахаронова — *Бома* поле 36
база 193
беспорядка оператор 26
— переменные 48
Большмана фактор 40 буст 180
— мнимый 181
буста генератор 182
вакуум 179
— унитарный 182
Вегнера — *т'Хоофта* наблюдаемая
беспорядка 28
виковское упорядочение 126
Виллена действие 13
Виллена — *Полякова* действие 13
Вильсона действие 17
— петля 9, 25
вихревая поверхность 49
вихрей линия 28
вихрь 24, 27, 39, 49
— массивный 63
высокотемпературная область 37
г. у. 154
Гарсиа теорема 141
голономии оператор 194
гранесвязность 70
граф 32
— полный 46
Гута теорема 86
дефект 39
дефектная сеть 49
дефектов конденсация 68
диамагнитное неравенство 30, 121
заряд 25

Шрадер (R. Schrader) 29, 108, 120,
126
Эгучи (T. Eguchi) 8, 208
Эйлер (L. Euler) 50
Экманн (J.-P. Eckmann) 6

Предметный указатель

— внешний бесконечно сильный 25
звезда 175
инцидентность 32
калибровка 11, 194
— временная 24
— унитарная 70
калибровочная инвариантность 19,
196
калибровочное преобразование 12
— — сингулярное 26
— пространство 16
квазитеорема (квазирезультат) 7
кластер 42, 60
кластерное разложение 48—49
— свойство сильное 57, 63
конфигурация полевая 11
— решёточного поля *Хиггса* 15
— — спинорного поля 15
Костерлица — *Таулесса* переход 77
кривизна 194
КХД 10, 196
КЭД 8, 80
Кэллена — *Симанзика* решёточная
функция 109
— — уравнения 108
лапласиан 84, 121
Мермина — *Вагнера* теорема 96
монополь 24, 48
мультииндекс 40
Мэттьюза — *Салама* формулы 112
134
низкотемпературная область 39
Остервальдера — *Шрадера* аксиомы
109, 176
ОШ 20
Пайерлса контур 96
парамагнитная гипотеза 36

периметра закон 58, 63
плакет 13
площади закон 26, 27, 63
полимер 38, 39
полимеров активность 38
— несовместимость 39
— совместимость 39
положительность ОШ 20, 21
— по *Остервальдеру* — *Шрадеру* 20
— — *Симаузику* — *Нельсону* 20, 168
пустая область решётки 70
разомкнутая петля 44
расслоение 193
— векторное ассоциированное 193
— главное 193
релятивистская квантовая механика
179
ренорм-отображение 108
решётка конечная 32
связность 192
связь 38, 47
сечение 195
симметрии нарушение 65, 82
слой 193
спектральности условие 179
спиновое пространство 16
статистическая сумма 40
струна 25
термодинамические функции 47
— — модифицированные 47
т'Хоофта петля 9, 48

Урселла функция 41
условие (R) 32
условное материальное среднее 30
устойчивое разложение 148
Фаддеева — *Попова* духи 19
Фарри теорема 115, 127
Фредгольма определитель 114
Хиггса модель 65
— область 69
— поле 15
— решёточное действие 15
— скрытый механизм 38
Ходжа разложение 84
цветность 196
цветовой защитный механизм 58
Черна(= *Чжэня*) класс 195
— число 195
шахматные оценки 23
Швингера функция n -петлевая 176
Эгучи — *Каваи* редукция 208
Янга — *Милса* действие 12
— — тензор напряжённости 194
Н-дефект 70
Н-калибровка 70
U-калибровка 66
Y.M. 12
Y.M.V. 12
Y.M.W. 12
 θ -вакуум 17
 θ -состояние 76

Калибровочные модели квантовой теории поля относятся к одной из наиболее активно исследуемых областей теоретической физики. Особенностью этой области является сочетание методов дифференциальной геометрии, теории групп Ли, функционального анализа и аппарата квантовой теории поля. Общим свойствам калибровочных моделей посвящен целый ряд монографий. Из руководств на русском языке упомянем книги А. А. Славнова и Л. Д. Фаддеева «Введение в квантовую теорию калибровочных полей» (М.: Наука, 1978) и Н. П. Коноплёвой и В. Н. Попова «Калибровочные поля» (М.: Атомиздат, 1980).

После известной работы К. Вильсона 1974 года¹⁾ большую популярность приобрели решёточные модели калибровочных полей. Такие модели можно рассматривать как объекты равновесной статистической механики и применять к ним имеющиеся там методы. На этом пути уже удалось получить ряд новых глубоких результатов. Недавно широкий отклик получили результаты исследования решёточных четырехмерных моделей с помощью метода Монте-Карло на ЭВМ.

В предлагаемой читателю книге собраны математически строгие результаты, касающиеся построения и свойств калибровочных полей, как решёточных, так и непрерывных. Многие существенные результаты принадлежат здесь самому автору. Книга состоит из двух частей. В первой части изложена теория, относящаяся к фазовым переходам в решёточных моделях, во второй — теория непрерывных калибровочных полей, точнее, та ее часть, которая на сегодняшний день доступна строгому анализу.

Перевод осуществлялся в полезном контакте с автором, за что мы хотели бы выразить ему признательность. При переводе были устранены некоторые погрешности и дополнен список литературы, в основном работами советских авторов (добавленные работы помечены звёздочкой). В написанном А. А. Мигдалом дополнении приведен ряд нерешенных проблем, важных с точки зрения физики элементарных частиц, и указаны возможные подходы к их исследованию.

Можно надеяться, что эта книга будет с интересом встречена как физиками-теоретиками, так и математиками, работающими в квантовой теории поля и статистической механике.

Я. Г. Синай

¹⁾ [6] из списка литературы к части I.

Эта книга основана на цикле лекций, прочитанном мной в Лозанне и Женеве в январе — феврале 1981 года в рамках «Третьего физического цикла» (Troisième Cycle de la Physique en Suisse Romande). Предварительный вариант книги был издан в качестве преприита «Третьего цикла». По сравнению с этим вариантом в текст внесены многочисленные изменения и исправления. В частности, ошибочное доказательство комбинаторного следствия 3.9 заменено более простым и, надеюсь, верным доказательством. Я благодарен многим лицам, и в особенности Кристиану Боргсу, Кшиштофу Гавендзкому, Конраду Остервальдеру и Симону Рёйсенаарсу, указавшим различные ошибки в первом варианте книги и предложившим ряд улучшений. Я также весьма обязан Рикардо Невешу да Сильва за помощь при подготовке рукописи.

Более всего я признателен тем, кто сотрудничал со мной в нелегком деле строгого изучения калибровочных квантовых теорий поля, а именно Дэвиду Бриджесу, Юргу Фрëлиху и Конраду Остервальдеру. В основном из бесед с ними я понял высоко- и низкотемпературные разложения; думаю, без их помощи третья глава выглядела бы ужасно (может, она и сейчас так выглядит, но это уже не их вина).

И в заключение приношу свою благодарность Жан-Пьеру Экманну, Жерару Вандерсу и Научной комиссии Третьего физического цикла за их любезное приглашение, благодаря которому состоялись упомянутые лекции.

Э. Зайлер

Построение квантовых калибровочных теорий — проблема, всё еще находящаяся в зачаточном состоянии, несмотря на всеми признанную важность этих теорий в современной физике элементарных частиц. Покуда же пытаются проникнуть в физическое содержание такой теории (в предположении ее существования) другими способами. Во-первых, существует достаточно хорошо развитая перенормировочная теория возмущений [1—3]. Для анализа явлений, не поддающихся теории возмущений, таких как предполагаемое удержание кварков, довольно популярно стало использовать полуклассические приближения к теории. Успехи последнего подхода, по моему мнению, следует всё же отнести больше на счет классической теории, которая сама по себе представляет прекрасный математический предмет, чем на счет понимания квантовой теории; однако нельзя отрицать, что этот подход породил много блестящих идей и помог кое-что понять (см. [4] и указанную там литературу). Во всяком случае, в данной книге я не буду касаться этих двух подходов. Вместо этого я сосредоточу внимание (в первой части книги) на ещё одном не основанном на теории возмущений подходе — на методе решёточной аппроксимации. Со времени изобретения решёточных калибровочных теорий Вегнером [5] и в особенности с тех пор, как Вильсон [6] (по-видимому, не знавший о статье Вегнера) ввел эти теории в физику частиц как способ анализа специфических физических вопросов, эта область стала ареной весьма активных исследований, и просто невозможно дать полный обзор всех появившихся здесь результатов, квазирезультатов¹⁾ и идей. Поэтому я ограничусь строго доказанными результатами, имеющими физическое содержание; все эти результаты основаны на том наблюдении, что решёточная аппроксимация превращает калибровочные теории в своего рода классическую статистическую механику, и ряд

¹⁾ То есть правдоподобных, но не доказанных даже с точки зрения физика утверждений. — *Прим. ред.*

интересных вопросов удастся решить с помощью высокоразвитого аппарата этой области науки.

В последнее время многие авторы пропагандируют ту точку зрения, что этот статистико-механический аспект следует воспринимать более буквально и использовать решёточные теории в качестве моделей для описания статистической механики дефектов в упорядоченной среде [7]. Может произойти и так, что именно это направление станет наиболее реалистической областью приложения решёточных моделей, — интерпретация полученных до сих пор результатов как результатов физики элементарных частиц носит пока в общем метафорический характер.

Но решёточный подход важен и по другой причине. Он дает нам инструмент для построения непрерывных моделей. Хотя и с большим трудом, но на этом пути были достигнуты наибольшие успехи при построении непрерывных теорий. Во второй части книги я достаточно подробно опишу тяжкое путешествие по этому пути к построению двумерной модели Хиггса (модели Ландау — Гинзбурга) и двумерной квантовой электродинамики (КЭД₂). Кроме того, будут кратко обсуждены и некоторые другие пути-программы, либо находящиеся в стадии реализации, либо уже завершённые к настоящему времени. Хотя для упомянутой выше модели Хиггса аксиомы Вайтмана, как было проверено, выполнены, представляется, что эти аксиомы не образуют наиболее естественной базы, в особенности для теорий удержания кварков. Поэтому в конце книги мы обсудим подход, при котором имеют дело с полями, «живущими» не в точках, а на кривых или петлях; тем самым становится возможным исключить пространства состояний с «индефинитной метрикой», используемые в подходе теории возмущений, а также в аксиоматике, предложенной, например, Строкки [8].

Геометрические аспекты калибровочных теорий не играют центральной роли в этой книге. Но так как всегда полезно иметь в виду геометрическую интерпретацию и так как я буду иногда пользоваться геометрическим языком, в помещённом в конце книги приложении дано очень краткое и неформальное описание геометрических понятий, задуманное в основном как глоссарий. Более подробное обсуждение этих вопросов см. в [88, 89] или в прекрасном обзоре Эгучи, Гилки и Хэнсона [4].

Решёточные калибровочные
теории

Решёточные калибровочные теории впервые изучал (под другим именем) Вегнер [5] (для калибровочной группы Z_2). Его интересовали такие обобщения модели Изинга, которые обладали бы фазовыми переходами в отсутствие локального параметра порядка. В указанной работе были введены подходящие наблюдаемые «порядка» и «беспорядка», называемые сегодня соответственно «петля Вильсона» и «петля т'Хоофта», и было исследовано их поведение в разных режимах (по законам площади и периметра соответственно). Спустя несколько лет Вильсон [6] ввел в рассмотрение более общий класс решёточных калибровочных теорий, с тем чтобы объяснить явление постоянного удержания кварков¹⁾. Он сформулировал то, что сегодня известно как «критерий Вильсона»: калибровочная теория удерживает кварки, если соответствующая контурная наблюдаемая (петля Вильсона) подчиняется закону площади. Мы собираемся обсудить смысл и доказательство этого критерия, а также его границы и возможные альтернативы.

Данному предмету посвящены две обзорные статьи; одна из них написана Друффом и Ицксонем [9], другая — Коуттом [10]. В обеих статьях много полезной информации, и они служат чрезвычайно полезным введением в предмет, но большинство математически более строгих результатов в этой области в них не содержится. В некотором смысле материал, представленный в данной книге, может рассматриваться как дополнение к ним.

Я ограничусь обсуждением свойств решёточных калибровочных теорий при нулевой температуре: это просто означает, что вместо сохранения конечных размеров по оси времени с периодическими граничными условиями рассматривается полный термодинамический предел. В конечно-температурных калибровочных теориях имеется много интересной физики,

¹⁾ Примерно в это же время решёточные калибровочные модели ввел Поляков. — *Прим. ред.*

например предлагаемое существование в размерности 4 критической температуры, выше которой кварки перестают удерживаться [84, 85], но, чтобы удержать объём книги в разумных пределах, я не стал касаться этого предмета.

Главная физическая проблема, которую можно изучать в рамках решёточных калибровочных теорий, это всё та же проблема, которая первоначально побудила Вильсона [6] их изобрести — постоянное удержание кварков при нулевой температуре. Несмотря на все усилия, затраченные на решение этой проблемы, всё еще нельзя считать удержание кварков доказанным для четырехмерных неабелевых моделей с произвольным взаимодействием, хотя бы в смысле критерия Вильсона. Однако многие уже полученные частичные результаты и прояснившаяся физическая картина дают основание полагать, что вакуум в теории, удерживающей кварки, напоминает магнитный сверхпроводник и потому «вдавливает» цветное электрическое поле в трубки между зарядами благодаря «двойственному» эффекту Мейсснера, тем самым порождая действующую между ними силу, по существу не зависящую от расстояния¹⁾. Оказывается, этот механизм удержания применим только к тем зарядам, которые нетривиально преобразуются под действием центра калибровочной группы. Для других нетривиальных зарядов (например, обладающих квантовыми числами глюонов), по-видимому, работает другой механизм экранировки этих зарядов, приводящий к тому, что в конце концов все физические состояния будут нейтральными по цвету. Этот механизм также дает объяснение явления «насыщения сил», которое проявляется, например, в том, что не существует удерживающих сил между объектами, состоящими из трех кварков.

Вильсонов критерий удержания относится только к чистой теории Янга — Миллса; такого простого критерия уже нет для моделей, содержащих поля материи, которые нетривиально преобразуются под действием центра калибровочной группы, как, например, в квантовой хромодинамике (КХД). Хотелось бы подчеркнуть, что удержание кварков означает больше, чем только отсутствие состояний с ненулевым цветовым зарядом. Было бы катастрофой для гипотезы удержания, если бы кварки могли экранировать свой цвет и тем самым избавлялись от удерживающей их силы.

Для ознакомления с физической картиной удержания и экранировки кварков я рекомендую [86]. К поднятым здесь вопросам мы будем многократно возвращаться в различных местах этой книги.

¹⁾ См. обсуждение этого вопроса в разделе 4. По поводу эффекта Мейсснера см. Фейнман [1*]. — *Прим. ред.*

1. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ РЕШЁТОЧНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

Эвристическим основанием для таких теорий, которое полезно постоянно иметь в виду, является эвклидов вариант фейнмановского интеграла по траекториям, приведший к заметным успехам в конструктивной квантовой теории поля (обзор вопроса и библиографию можно найти в [11, 12, 80] ¹⁾).

Идея состоит в том, чтобы, используя классическое действие $S(\phi)$, где ϕ обозначает конфигурацию поля модели, построить некоторую вероятностную меру на пространстве «полевых конфигураций» по формуле

$$d\mu(\phi) = \frac{1}{Z} e^{-S(\phi)} \prod_x d\phi(x).$$

Здесь $\prod_x d\phi(x)$ обозначает (несуществующую) меру Лебега на полях, а Z — нормировочный множитель, выбранный так, что $\int d\mu = 1$. Решёточные варианты этой формулы были с большим успехом применены в случае скалярных теорий поля, так как они позволили воспользоваться методами статистической механики [13, 14]: переход к непрерывной модели удалось действительно провести в размерностях 2 и 3 [13, 14].

Прежде чем переходить к решёточным моделям, следует напомнить геометрический смысл калибровочного поля A_μ . Как объясняется в приложении в конце книги, A_μ — это компоненты некоторой формы связности в главном расслоении, выраженные в специальной системе координат (обеспечивающей локальную тривиализацию расслоения)²⁾. Одн.-форма $A \equiv A_\mu dx^\mu$ со значениями в алгебре Ли \mathfrak{g} выбранной калибровочной группы G (которая предполагается компактной группой Ли) показывает, каким образом следует смещаться в пространстве внутренних состояний при сдвиге по некоторому направлению в базе (= эвклидовом пространстве-времени). Она индуцирует (для данной локальной тривиализации \equiv «калибровки») отображение пространства путей C_{xy} , начинающихся в точке x и кончающихся в точке y , в калибровочную группу G по следующему хорошо известному правилу:

$$g(C_{xy}) \equiv \mathbf{P} \exp \int_{C_{xy}} A_\mu dx^\mu, \quad (1.1)$$

¹⁾ См. также Глимм и Джаффе [12]. — *Прим. ред.*

²⁾ См., например, книгу Дубровина, Новикова и Фоменко [2*]. — *Прим. ред.*

где \mathbf{P} обозначает «упорядочение, задаваемое путём». С правой стороны стоит известный интеграл (см. [15]), и использованное здесь физическое обозначение весьма ясно передает его смысл.

Переходя теперь от евклидова пространства-времени \mathbb{R}^d к простой кубической решётке $\varepsilon\mathbb{Z}^d$ (или к любой другой решётке), мы будем понимать под калибровочным полем всякое отображение множества ориентированных «связей», или пар, $\langle xy \rangle$ ближайших соседей решётки в группу G

$$\langle xy \rangle \mapsto g_{xy} \in G, \quad (1.2)$$

обладающее свойством

$$g_{xy} = g_{yx}^{-1}. \quad (1.3)$$

Иногда будет полезно считать, что g_{xy} возникают из «лежащего в основе» непрерывного калибровочного поля по правилу (1.1).

Из нашей конструкции ясно, что мы понимаем под калибровочным преобразованием отображения $\langle xy \rangle \mapsto g_{xy}$. А именно, оно действует на отображениях узлов решётки в G :

$$x \mapsto h_x \quad (1.4a)$$

и преобразует такое отображение по правилу

$$g_{xy} \mapsto h_x g_{xy} h_y^{-1}. \quad (1.4b)$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы определить решёточный аналог непрерывного действия калибровочного поля, которое задается выражением¹⁾

$$S_{\text{Y.M.}}(A) \equiv -\frac{1}{2g_0^2} \int \text{Tr} (F \wedge *F) \equiv -\frac{1}{4g_0^2} \int \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2g_0^2} \|F\|_2^2,$$

где $F \equiv dA + \frac{1}{2}[A, A]$ есть 2-форма кривизны, ассоциированная с A (принимающая значения в \mathfrak{g}); след вычисляется по любому локально-точному представлению: $*F$ — форма, двойственная к F в смысле Ходжа.

Решёточный вариант соотношения (1.5), предложенный Вильсоном, получается следующим образом. Пусть χ — произвольный характер группы G , принадлежащий некоторому локально-точному представлению. Решёточное калибровочное поле связывает с любым замкнутым ориентированным контуром C класс $[g_C]$ сопряженных элементов группы G , содержащий произведение элементов g_{xy} , соответствующих рёбрам пути C , начиная с какой-либо его точки, в порядке, опреде-

¹⁾ Ниже Y. M. W. и Y. M. V. — от Yang — Mills, Yang — Mills — Wilson и Yang — Mills — Villain соответственно. — Прим. ред.

ляемом его ориентацией. В частности, элементарные квадраты — так называемые *плакеты*¹⁾ P нашей решётки (или, лучше сказать, их границы) — отобразятся в классы $[g_{\partial P}]$.

Теперь положим

$$S_{\text{У. м. в.}}(\{g_{xy}\}) = -\frac{1}{2g_0^2} \sum_P \chi(g_{\partial P}), \quad (1.6)$$

где суммирование производится по всем ориентированным плакетам. Оправданием такого определения служит тот факт, что

$$\chi(g_{\partial P}) = \chi(\mathbb{1}) + \frac{\varepsilon^4}{2} \chi(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + O(\varepsilon^6) \quad (1.7)$$

для любого решёточного калибровочного поля, порождаемого (достаточно гладким) непрерывным калибровочным полем.

Конечно, определение (1.6) никоим образом не является единственно возможным: существует много других определений, которые формально имеют тот же самый непрерывный предел. Однако важный вопрос заключается в том, верно ли, что неформальный переход к непрерывному пределу не будет зависеть от выбора решёточной аппроксимации. Как мы увидим ниже, в общем случае ответ оказывается отрицательным. Мы будем в этом вопросе придерживаться прагматической точки зрения и выбирать решёточное действие из соображений удобства; последующий успех должен служить оправданием такого выбора.

Заметим, что (1.6) не является даже однозначным определением, потому что оно зависит от выбора характера χ . Оказывается, это тесно связано с проблемой удержания. В стандартном случае, когда $G = SU(N)$, мы будем «настаивать» на использовании фундаментального представления, так как при этом представление центра Z_N получается точным. Любопытно, что для формальной непрерывной теории это обстоятельство не имеет значения. Однако непрерывный предел решёточной теории будет, по-видимому, сильно зависеть от представления центра.

Мы хотим указать одно отличное от (1.6) определение действия, которое предположительно имеет тот же самый непрерывный предел; назовем его *действием Виллена — Полякова* (ибо оно служит обобщением действия Виллена для модели плоских ротаторов [16]). Это определение было изучено Друффом [17]²⁾.

¹⁾ В оригинале *plaquettes* (франц.); буквально — небольшие металлические пластинки. — *Прим. ред.*

²⁾ Впервые потенциал взаимодействия типа логарифма θ -функции рассматривал В. Л. Березинский (в модели плоских ротаторов; см. [3*]). Поляков неоднократно использовал такой потенциал в других моделях. — *Прим. ред.*

Для компактной полупростой группы Ли G действие Виллена — Полякова задается формулой

$$\exp(-S_{\text{У. м. в.}}(\{g_{xy}\})) \equiv \prod_P \sum_{\tau} \exp\left(-\frac{g_0^2}{2} C_{\tau}\right) \chi_{\tau}(g_{\partial P}) g_{\tau}. \quad (1.8)$$

Здесь суммирование производится по всем неэквивалентным (унитарным) неприводимым представлениям U_{τ} группы G , $\chi_{\tau}(g) = \text{tr } U_{\tau}(g)$, $d_{\tau} = \chi_{\tau}(\mathbb{1})$ и C_{τ} — собственное значение квадратичного оператора Казимира представления τ , т. е. если X_1, \dots, X_n — ортонормированный базис алгебры Ли \mathfrak{g} по отношению к форме Киллинга $k(X, Y) \equiv \text{tr}' U_{\text{adj}}(X) U_{\text{adj}}(Y)$, то

$$C_{\tau} = -\sum_{i=1}^n \text{tr } U_{\tau}(X_i)^2.$$

Это означает, что $\sum_{\tau} \exp\left(-\frac{g_0^2}{2} C_{\tau}\right) \chi_{\tau}(gh^{-1})$ является ядром оператора уравнения теплопроводности $\exp\left(\frac{1}{2} g_0^2 \Delta_B\right)$, где Δ_B — оператор Лапласа — Бельтрами по отношению к метрике Киллинга. Для неполупростой группы G мы можем определить $S_{\text{У. м. в.}}$ с помощью произвольной инвариантной метрики на G и соответствующего этой метрике уравнения теплопроводности.

Заметим, что формальный непрерывный предел имеет вид

$$\begin{aligned} & \log \frac{\sum_{\tau} \exp\left(-\frac{g_0^2}{2} C_{\tau}\right) d_{\tau} \chi_{\tau}(g_{\partial P})}{\sum_{\tau} \exp\left(-\frac{g_0^2}{2} C_{\tau}\right) d_{\tau} \chi_{\tau}(\mathbb{1})} \\ &= \frac{\varepsilon^4}{2} \frac{\sum_{\tau} \exp\left(-\frac{g_0^2}{2} C_{\tau}\right) d_{\tau} \chi_{\tau}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu})}{\sum_{\tau} \exp\left(-\frac{g_0^2}{2} C_{\tau}\right) d_{\tau} \chi_{\tau}(\mathbb{1})} + O(\varepsilon^6) \\ &= \frac{\varepsilon^4}{2} \frac{\sum_{\tau} \exp\left(-\frac{g_0^2}{2} C_{\tau}\right) d_{\tau}^2 C_{\tau}}{\sum_{\tau} \exp\left(-\frac{g_0^2}{2} C_{\tau}\right) d_{\tau}^2} \cdot \frac{\chi_{\text{adj}}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu})}{d_{\text{adj}}} + O(\varepsilon^6) \\ &\sim \frac{\varepsilon^4}{2} \begin{cases} \frac{1}{g_0^2 d_{\text{adj}}} \chi_{\text{adj}}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) & \text{для малых } g_0^2, \\ C_1 d_1 \exp\left(-\frac{g_0^2}{2} C_1\right) \frac{\chi_{\text{adj}}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu})}{d_{\text{adj}}} & \text{для больших } g_0^2, \end{cases} \end{aligned}$$

где χ_{adj} обозначает след присоединенного представления, d_{adj} — его размерность, C_1 — наименьшее собственное значение оператора Казимира и d_1 — размерность пространства соответствующего представления.

Сейчас вполне подходящий момент для того, чтобы ввести в нашу модель поля материи. Их можно ввести двумя основными способами, а именно как

- 1) скалярные поля Хиггса,
- 2) спинорные поля (соответствующие кваркам и/или лептонам).

Поля Хиггса, равно как и спинорные поля, «живут» на узлах решётки; они объединяются с калибровочными полями при помощи решёточного варианта стандартного «минимального спаривания»; кроме того, поля Хиггса будут некоторым подходящим образом взаимодействовать между собой. Во избежание слишком длинных формул мы положим $\epsilon = 1$; в случае необходимости легко вставить ϵ обратно.

Конфигурация решёточного поля Хиггса — это отображение узлов x решётки в конечномерное унитарное (или эвклидово) векторное пространство \mathcal{V}_H ¹⁾, в котором действует некоторое унитарное (ортогональное) представление U_H калибровочной группы G :

$$\phi: x \mapsto \phi(x) \in \mathcal{V}_H.$$

Иногда мы будем требовать, чтобы значения ϕ лежали на сфере фиксированного радиуса R в \mathcal{V}_H , т. е. чтобы $\|\phi(x)\| = R$ для всех x .

Решёточное действие Хиггса определяется так:

$$S_H(\{\phi(x)\}, \{g_{xy}\}) = -\frac{\lambda}{2} \left(\sum_{\langle xy \rangle} (\phi(x), U_H(g_{xy}) \phi(y)) \right) + \sum_x V(\|\phi(x)\|). \quad (1.9)$$

Здесь V — чётный полином степени ≥ 4 с положительным старшим коэффициентом, а первая сумма берется по всем ориентированным рёбрам $\langle xy \rangle$. Действие S_H будет действительно «хиггсовым», если V будет иметь глубокий минимум (абсолютный) в далекой от нуля точке.

Конфигурация решёточного спинорного поля — это отображение ψ множества узлов решётки в подмножество множества ортонормированных реперов некоторого фермионного векторного пространства \mathcal{V}_F .

¹⁾ Индекс H — от Higgs. — Прим. ред.

Пространство \mathcal{V}_F имеет следующую структуру¹⁾:

$$\mathcal{V}_F = \mathcal{V}_S \otimes \mathcal{V}_G, \quad (1.10)$$

где \mathcal{V}_S («спиновое» пространство) — это пространство, в котором действует представление эрмитовыми матрицами алгебры Клиффорда — Дирака, определяемой соотношениями

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, d-1; \quad (1.11)$$

\mathcal{V}_G («калибровочное пространство») — это унитарное пространство, в котором действует унитарное представление U_F калибровочной группы G .

Требуется, чтобы полевая конфигурация ψ учитывала разложение пространства \mathcal{V}_F на тензорные сомножители, т. е. мы предполагаем, что она имеет вид

$$\psi: x \mapsto \{\psi_{\alpha a}(x)\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \dim \mathcal{V}_S, \quad a = 1, 2, \dots, \dim \mathcal{V}_G, \quad (1.12)$$

$$\psi_{\alpha a}(x) = e_\alpha(x) \otimes f_a(x), \quad e_\alpha \in \mathcal{V}_S, \quad f_a \in \mathcal{V}_G,$$

где индекс α отмечает «спиновые», а индекс a — «внутренние» степени свободы.

Затем мы выбираем некоторое антиунитарное отображение I пространства \mathcal{V}_G в его изоморфную копию $\overline{\mathcal{V}}_G$; в соответствии с этим выбором получаем полевую конфигурацию $\bar{\psi} = (\mathbb{1} \otimes I)\psi$:

$$\bar{\psi}: x \mapsto \{\bar{\psi}_{\alpha a}(x)\}. \quad (1.13)$$

На $\overline{\mathcal{V}}_G$ естественным образом индуцируется унитарное представление $U_{\bar{F}} = IU_F I^{-1}$ группы G , эквивалентное U_F . Заметим, что если

$$U_F \psi_a = (U_F)_{ab} \psi_b,$$

то

$$U_{\bar{F}} \bar{\psi}_a = IU_F \psi_a = (\bar{U}_F)_{ab} \bar{\psi}_b = (U_F^{-1})_{ba} \bar{\psi}_b.$$

Теперь рассмотрим ортонормированные векторы $\{\psi_{\alpha a}(x), \bar{\psi}_{\alpha a}(x)\}$ как образующие внешней алгебры над $\bigotimes_x (\mathcal{V}_F \oplus \overline{\mathcal{V}}_F)$,

где $\overline{\mathcal{V}}_F = \mathcal{V}_S \otimes \overline{\mathcal{V}}_G$; тогда мы можем построить функции на конфигурациях спинорного поля со значениями в этой внешней алгебре, образуя полиномы от этих образующих (в смысле внешнего умножения); примером может служить

¹⁾ Индексы F, S и G — от fermionic, spin и gauge (калибровочный) соответственно. — Прим. ред.

фермионное действие вида

$$S_F(\{\Psi_{aa}(x), \bar{\Psi}_{aa}(x)\}, \{g_{xy}\}) \\ \equiv \frac{\kappa}{2} \sum_{\langle xy \rangle} \bar{\Psi}_{aa}(x) \Gamma_{ab}^{xy}(U_F)_{ab} \Psi_{bb}(x) + \frac{1}{2} \sum_x \bar{\Psi}_{aa}(x) \Gamma_{ab} \Psi_{ba}(x). \quad (1.14)$$

«Наивный» выбор $\Gamma \equiv M$ и

$$\Gamma^{xy} \equiv \begin{cases} \gamma_\mu, & \text{если } \langle xy \rangle \text{ имеет положительное } \mu\text{-направление,} \\ -\gamma_\mu, & \text{если } \langle yx \rangle \text{ имеет положительное } \mu\text{-направление} \end{cases}$$

приводит к исчезновению фермионных степеней свободы в непрерывном пределе [18, 51, 92].

Этого удастся избежать, выбрав следующее допустимое двухпараметрическое семейство:

$$\Gamma_\theta \equiv M - r d e^{i\theta \gamma_5}, \\ \Gamma_\theta^{xy} \equiv \begin{cases} r e^{i\theta \gamma_5} + \gamma_\mu, & \text{если } \langle xy \rangle \text{ имеет положительное} \\ & \mu\text{-направление,} \\ r e^{i\theta \gamma_5} - \gamma_\mu, & \text{если } \langle yx \rangle \text{ имеет положительное} \\ & \mu\text{-направление} \end{cases}$$

($0 < r \leq 1$). При $\theta = 0$, $r = 1$ получается действие Вильсона [18], при $\theta = \pi/2$, $r = 1$ — действие, предложенное в [19]. (Напомним, что γ_5 — общепринятое обозначение для эрмитовой матрицы, удовлетворяющей равенствам

$$\gamma_5^2 = 1, \quad \gamma_5 \gamma_i + \gamma_i \gamma_5 = 0 \quad \text{для } i = 0, 1, \dots, d-1;$$

она существует, если размерность выбранного представления клиффордовой алгебры достаточно велика.)

З а м е ч а н и е. Подчеркнем, что при таком выборе (1.14) уже не будет инвариантным при киральных преобразованиях

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha \gamma_5} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha \gamma_5}$$

даже при $M = 0$; это приводит к хорошо известным аксиальным аномалиям в непрерывном пределе (см. [81]).

С предыдущим тесно связан следующий факт. Естественно предположить, что непрерывный предел формально не зависит от θ . Однако более внимательный анализ [95] (см. раздел 5) показывает, что часто в непрерывном пределе остается «память» об угле θ . Соответствующие зависящие от θ состояния известны как θ -вакуумы; в другом контексте мы еще встретимся с ними в разделе 4а.

Предположим теперь, что мы имеем дело с большим, но конечным подмножеством Λ нашей решётки. В таком случае

приведенные выше формальные определения действий $S_{Y.M.}$, S_H , S_F становятся осмысленными. Определим \mathcal{A}_Λ как грасманову алгебру, порожденную образующими $\{\psi_{\alpha a}(x), \bar{\psi}_{\alpha a}(x)\}_{x \in \Lambda}$ с коэффициентами, являющимися ограниченными непрерывными функциями бозонных полей $\{g_{xy}\}$, $\{\phi(x)\}$. Алгебру \mathcal{A}_Λ можно рассматривать как отображение множества полевых конфигураций в грасманову алгебру

$$\mathcal{G}_\Lambda \equiv \Lambda \left(\left(\bigotimes_{x \in \Lambda} \mathcal{V}_F \right) + \left(\bigotimes_{x \in \Lambda} \bar{\mathcal{V}}_F \right) \right).$$

Определим на \mathcal{A}_Λ норму $\|\cdot\|$ следующим образом. Внешняя алгебра \mathcal{G}_Λ разлагается в прямую сумму однородных линейных подпространств

$$\mathcal{G}_\Lambda = \sum_{n \geq 0} \Lambda^n \left(\left(\bigotimes_x \mathcal{V}_F \right) + \left(\bigotimes_x \bar{\mathcal{V}}_F \right) \right) \equiv \sum_{n \geq 0} \mathcal{G}_\Lambda^{(n)}.$$

Каждое подпространство $\mathcal{G}_\Lambda^{(n)}$ наследует положительно-определенное скалярное произведение и норму $\|\cdot\|$, имеющиеся в \mathcal{V}_F ; для $A \in \mathcal{G}$ возможно разложение $A = \sum A^{(n)}$, где $A^{(n)} \in \mathcal{G}_\Lambda^{(n)}$, и мы полагаем $\|A\| \equiv \sum_{n \geq 0} \|A^{(n)}\|$. При таком определении $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Для того чтобы задать норму в \mathcal{A}_Λ , надо только заменить комплексные числа, играющие роль скаляров в \mathcal{G}_Λ , ограниченными непрерывными функциями бозонных полей, снабженными sup -нормой. Так, если $F = \sum_{n \geq 0} F^{(n)}$ — разложение элемента $F \in \mathcal{A}_\Lambda$ на однородные элементы по фермионным переменным, мы полагаем

$$\|F\| = \sum_{n \geq 0} \sup_{\{\phi(x), g_{xy}\}} \|F^{(n)}\|.$$

По-прежнему $\|FG\| \leq \|F\| \cdot \|G\|$.

Наконец, среднее значение определяется как линейный функционал $\langle \cdot \rangle$ на \mathcal{A}_Λ следующим образом (см. [58]). Сначала мы определяем «свободное» среднее $\langle \cdot \rangle_0$ как линейный функционал на \mathcal{A}_Λ , удовлетворяющий двум требованиям:

(а) $\langle P \rangle_{\Lambda, 0} = 0$, если степень элемента P меньше максимальной степени во внешней алгебре;

$$(b) \left\langle F(\{\phi(x)\}, \{g_{xy}\}) \bigwedge_{\substack{\alpha, a \\ x \in \Lambda}} (\bar{\psi}_{\alpha a}(x) \psi_{\alpha a}(x)) \right\rangle_{\Lambda, 0} = \int d\mu_\Lambda^0 F,$$

где $d\mu_\Lambda^0$ — положительная мера вида

$$d\mu_\Lambda^0 = \sum_{(xy) \in \Lambda \times \Lambda} dg_{xy} \prod_{x \in \Lambda} e^{-V(|\phi(x)|)} d\phi(x).$$

Здесь dg — (нормированная) мера Хаара на G , а $d\phi$ — мера Лебега на \mathcal{Y}_H . Легко видеть, что $|\langle F \rangle_0| \leq \|F\|$. Окончательно для $F \in \mathcal{A}_\Lambda$ мы полагаем

$$\langle F \rangle_\Lambda \equiv \frac{1}{Z_\Lambda} \langle F e^{-\overset{\circ}{S}_H - S_Y, \text{м.} - S_F} \rangle_{\Lambda, 0}, \quad Z_\Lambda \equiv \langle e^{-\overset{\circ}{S}_H - S_Y, \text{м.} - S_F} \rangle_{\Lambda, 0}$$

($\overset{\circ}{S}_H$ обозначает действие Хиггса, в котором V заменено на 0).

Заметим, что оба функционала $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, 0}$ и $\langle \cdot \rangle_\Lambda$ калибровочно инвариантны в том смысле, что они не меняются при одновременной замене

$$\begin{aligned} g_{xy} &\text{ на } h_x g_{xy} h_y^{-1}, \\ \phi(x) &\text{ на } U_H(h_x) \phi(x) \\ \psi(x) &\text{ на } U_F(h_x) \psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\text{ на } \bar{\psi}(x) U_F(h_x^{-1}). \end{aligned}$$

Модификации для случая, когда некоторые поля отсутствуют, очевидны.

Последнее замечание. Для решёточных теорий требование, чтобы G была компактной группой Ли, можно ослабить: G может быть любой компактной группой.

То, что мы получили с помощью нашей решёточной аппроксимации, во многом напоминает модели статистической механики более привычных систем, за тем исключением, что здесь появляются несколько непривычные из-за своей «грассмановости» фермионные поля. Мы увидим, что типичную проблему статистической механики, а именно переход к термодинамическому пределу, можно исследовать методами, непосредственно обобщающими имеющиеся стандартные методы; то же верно по отношению ко многим другим представляющим интерес вопросам.

Нужно также подчеркнуть, что мы «интегрируем» по пространству конфигураций *всех* полей, включая калибровочно эквивалентные. В отличие от формального непрерывного случая здесь нет необходимости «фиксировать калибровку», вводя вспомогательные объекты, подобные духам Фаддеева — Попова, хотя при желании это можно сделать (см. [19, 20]).

2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

В этом разделе мы опишем и докажем некоторые основные свойства решёточных калибровочных теорий, не связанные с привлечением таких более тонких методов, как кластерные разложения или «интегральные уравнения».

а. Свойство положительности по Остервальдеру — Шрадериу и его следствия

Это свойство, часто называемое отражательной положительностью, известно и используется для соответствующих решёточных систем уже довольно давно [21, 22]. Его не следует смешивать с положительностью бозонной меры $d\mu_\Lambda$, введенной выше (последнее свойство фигурирует под именем «положительности по Симанзику — Нельсону» в эвклидовой квантовой теории поля). Положительность по Остервальдеру — Шрадериу (или, короче, положительность ОШ) сохраняется даже при включении фермионов в теорию. Это свойство полезно для «технических» целей, однако его главное на-

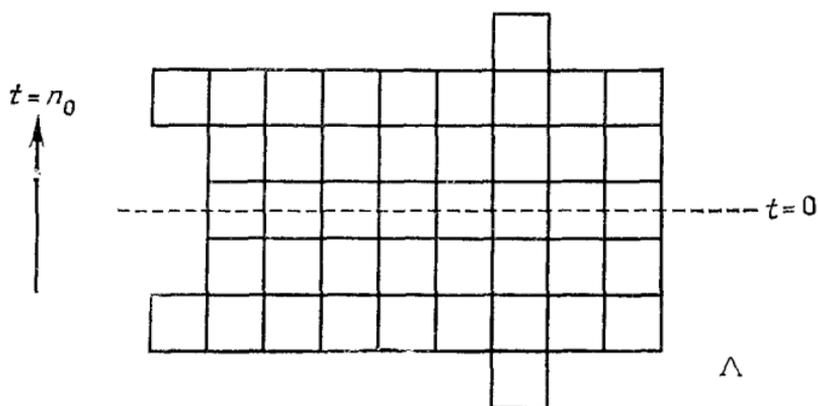


Рис. 1.

значение состоит в том, что оно позволяет строить квантовомеханическое пространство состояний с *положительно-определённым* скалярным произведением. Оно должно сохраняться и в любом разумном непрерывном пределе. Положительность ОШ для решёточных калибровочных теорий была доказана в [19] (см. также [23]).

Мы ограничимся следующими двумя ситуациями:

1) Конечное множество $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ симметрично относительно гиперплоскости $t = 0$, лежащей посередине между гиперплоскостями решетки (рис. 1).

2) Конечное множество Λ свёрнуто в тор или цилиндр. Более точно, это означает, что мы отождествляем точки

$$(n_0, n_1, \dots, n_{d-1}) \text{ и } (n_0 + 2N, n_1, \dots, n_{d-1})$$

и т. д. Если мы имеем дело с фермионами, то они должны подчиняться так называемым *антипериодическим граничным условиям*:

$$\psi(n_0, n_1, \dots, n_{d-1}) = -\psi(n_0 + 2N, n_1, \dots, n_{d-1}); \quad (2.1)$$

бозонные же поля подчиняются обычным периодическим условиям. (Если читателю покажется, что условие (2.1) противоречит только что предположенному отождествлению, то он может рассмотреть обычные периодические условия, но при этом произвести следующее изменение в фермионном действии: знаки членов, связывающих положительные и отрицательные «времена», т. е. членов, содержащих N и $-N$, должны быть изменены на противоположные. Нетрудно показать, что результат не зависит от выбора начала отсчета времени.)

В обоих случаях 1) и 2) существует естественное разложение

$$\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_- \quad (\Lambda_+ \cap \Lambda_- = \emptyset), \quad (2.2)$$

и имеется естественное отображение r («отражение относительно плоскости $t = 0$ »)

$$r: \Lambda_{\pm} \rightarrow \Lambda_{\mp}. \quad (2.3)$$

Это отражение индуцирует антилинейное отображение θ полевой алгебры \mathcal{A}_{Λ} , соответствующей Λ , если потребовать, чтобы

$$(a) \quad \theta F(\{\phi(x)\}) = \overline{F(\{\phi(rx)\})},$$

$$\theta G(\{g_{xy}\}) = \overline{G(\{g_{rx, ry}\})};$$

$$(b) \quad \theta \psi(x) = \bar{\psi}(rx) \gamma_0,$$

$$\theta \bar{\psi}(x) = \gamma_0 \psi(rx);$$

$$(c) \quad \theta(AB) = (\theta B)(\theta A).$$

Ясно, что условия (a)–(c) единственным образом определяют θ как антилинейное отображение \mathcal{A}_{Λ} в \mathcal{A}_{Λ} с дополнительным свойством

$$\theta \upharpoonright \mathcal{A}_{\Lambda_{\pm}} = \mathcal{A}_{\Lambda_{\mp}}. \quad (2.4)$$

Теперь может быть сформулирована

Теорема 2.1 (о положительности ОШ; впервые доказана в [19], однако приведённое там доказательство не вполне корректно). Если $F \in \mathcal{A}_{\Lambda_+}$, то

$$\langle F\theta F \rangle_{\Lambda} \geq 0.$$

Доказательство. Допустим сначала, что F либо чётно, либо нечётно. Заметим, что

$$\langle F\theta F \rangle_{0, \Lambda} = \langle F \rangle_{0, \Lambda_+} \langle \theta F \rangle_{0, \Lambda_-} = |\langle F \rangle_{0, \Lambda_+}|^2 \geq 0.$$

Элементы вида $\sum_{i=1}^n c_i F_i \theta F_i$, где $c_i \geq 0$, $F_i \in \mathcal{A}_{\Lambda_+}$, F_i либо чётно, либо нечётно ($i = 1, 2, \dots, n$), образуют «мультиплика-

тивный конус» \mathcal{P} , т. е. произведения элементов такого вида (и, конечно, линейные комбинации с положительными коэффициентами) опять имеют такой же вид.

Отсюда следует, что если $F \in \mathcal{A}_{\Lambda_+}$ и F либо чётно, либо нечётно, то $\exp(F\theta F)$ принадлежит этому конусу. Действие

$$-S = -\left(\overset{0}{S}_{11} + S_{Y.M.} + S_F\right)$$

можно записать как сумму трех слагаемых:

$$-S = -S_+ - \theta S_+ - S_c,$$

где $-S_+ \in \mathcal{A}_{\Lambda_+}$; $-S_+$ есть совокупность всех членов, «живущих» только в Λ_+ ; $-\theta S_+$ — это все члены из Λ_- , а остаток содержит всё, что связывает Λ_+ и Λ_- . Если бы $\exp(-S_c)$ принадлежало конусу \mathcal{P} , то всё было бы доказано, так как в этом случае $F\theta F e^{-S}$ принадлежало бы \mathcal{P} . К сожалению, элемент $\exp(-S_c)$ в том виде, как он есть, не принадлежит \mathcal{P} . Однако мы можем «перевести» его туда, используя калибровочную свободу. Отложим на время интегрирование по всем g_{xy} , где $x \in \Lambda_+$, $y \in \Lambda_-$ или наоборот. Это соответствует взятию «условного среднего» $\langle \cdot \rangle_{\{g_x, rx\}, \Lambda}$. Мы утверждаем, что если F калибровочно-инвариантно или вовсе не зависит от «опасных» переменных g_x, rx , то

$$\langle F \rangle_{\{g_x, rx\}, \Lambda} = \langle F \rangle_{\Lambda}, \quad (2.5)$$

что оправдывает термин «условное среднее». Доказательство вытекает из следующего наблюдения: $\langle F \rangle_{\{g_x, rx\}, \Lambda}$ является калибровочно-инвариантной функцией своих переменных и существует калибровка, в которой все эти переменные равны $\mathbb{1}$. Таким образом, левая часть равенства (2.5) в действительности не зависит от $\{g_x, rx\}$, и поэтому заключительное интегрирование по этим переменным ничего не меняет. В частности, мы имеем

$$\langle F \rangle_{\Lambda} = \langle F \rangle_{\{g_x, rx = \mathbb{1}\}, \Lambda}. \quad (2.6)$$

Правая часть этого равенства получается из левой простой заменой всех g_x, rx в $-S_c$ на $\mathbb{1}$. Непосредственная проверка показывает, что $\exp(-S_c(\{g_x, rx = \mathbb{1}\}))$ принадлежит \mathcal{P} (подробности см. в [92]). Теперь ясно, что требование, чтобы F было либо чётным, либо нечётным, на самом деле не существенно, так как «смешанные» члены отсутствуют. Тем самым доказательство закончено. \square

Из этой теоремы прямо вытекает существование квантово-механического гильбертова пространства \mathcal{H} . А именно, пусть

$$\mathcal{N} = \{F \in \mathcal{A}_{\Lambda_+} \mid \langle F\theta F \rangle_{\Lambda} = 0\}.$$

Тогда скалярное произведение $\langle F\theta F \rangle_\Lambda$ положительно-определённо на $\mathcal{A}_{\Lambda_+}/\mathcal{N}$. Гильбертово пространство \mathcal{H} определяется как его пополнение:

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{A}_{\Lambda_+}/\mathcal{N}}.$$

Другим непосредственным следствием теоремы является существование положительной трансфер-матрицы. Предположим, что мы умеем строить термодинамический предел по крайней мере во «временном» направлении, и допустим, что он инвариантен относительно сдвигов по времени. Пусть $F \in \mathcal{A}_{\Lambda_+}$. Обозначим через $\tilde{T}F$ эту же функцию, но только от полей, сдвинутых на две единицы в положительном направлении времени. Ясно, что $\langle \tilde{T}^n F \theta F \rangle_\Lambda$ равномерно ограничено по N . Повторно используя неравенство Шварца, получаем¹⁾

$$|\langle \tilde{T} F \theta F \rangle_\Lambda| \leq \langle (\tilde{T}^2 F) \theta F \rangle_\Lambda^{1/2} \langle F \theta F \rangle_\Lambda^{1/2} \leq \langle (\tilde{T}^{2^n} F) \theta F \rangle_\Lambda^{2^{-n}} \langle F \theta F \rangle_\Lambda^{1-2^{-n}}.$$

Так как при $n \rightarrow \infty$ первый множитель стремится к 1, то

$$|\langle \tilde{T} F \theta F \rangle_\Lambda| \leq \langle F \theta F \rangle_\Lambda. \quad (2.7)$$

Отсюда видно, что \tilde{T} индуцирует корректно определенное сжатие T , действующее на классах эквивалентности $\mathcal{A}_{\Lambda_+}/\mathcal{N}$ и, следовательно, на \mathcal{H} . Ясно также, что $\langle (TF) \theta F \rangle_\Lambda \geq 0$, так что $0 \leq T \leq 1$ на \mathcal{H} .

Замечания. 1. Люшер [24] показал, что в действительности (при несколько иных более ограничительных предположениях) $T > 0$.

2. В [23] доказан чуть более общий вариант теоремы о положительности ОШ, связанный с привлечением некоторых вспомогательных полей («частично-калибровочных полей»).

Третьим хорошо известным следствием положительности ОШ являются так называемые шахматные оценки (см. [22, 25] и большую библиографию, приведенную в [23]). В нашей ситуации их можно записать следующим образом.

Пусть F_x — «локальная» функция полей. Это означает, что F_x может зависеть только от полей материи в точке x . Пусть, далее, $\sigma_j = y_j - x_j$ для пары точек x, y , а r_j, θ_j — отражения относительно гиперплоскости $x_j = 0$ (лежащей посередине между двумя плоскостями решетки)²⁾ и τ_{xy} — трансляция из $(\prod_{j=0}^{d-1} r_j^{\sigma_j})x$ в y . Пусть функция $F_{(xy)}$ есть результат сдвига и

¹⁾ С учетом соотношения $\langle \tilde{T} F \theta \tilde{T} F \rangle_\Lambda = \langle \tilde{T}^2 F \theta F \rangle_\Lambda$. — Прим. ред.

²⁾ См. (2.2)–(2.4). — Прим. перев.

отражения функции F_x , определяемый следующим образом:

$$F_{(xy)} = \tau_{xy} \left(\left(\prod_{j=0}^{d-1} \theta_j^{\sigma_j} \right) F_x \right).$$

Тогда и для периодических, и для антипериодических граничных условий справедлива

Теорема 2.2.

$$\left| \left\langle \prod_{x \in \Lambda} F_x \right\rangle_{\Lambda} \right| \leq \prod_{x \in \Lambda} \left\langle \prod_{y \in \Lambda} F_{(xy)} \right\rangle_{\Lambda}^{1/|\Lambda|}.$$

Доказательство по существу состоит в многократном применении неравенства Шварца. Систематическое изложение вопроса имеется в [22, 25].

Этот результат можно распространить на функции от калибровочных полей [23].

в. Некоторые наблюдаемые и их смысл

Положительность ОШ позволяет дать физическую интерпретацию двум типам часто встречающихся наблюдаемых: петлям Вильсона и контурам т'Хоофта (вихри, монополи). Допустим, что выполнен термодинамический предельный переход и мы имеем неотрицательную трансфер-матрицу.

Заметим прежде всего, что физическое гильбертово пространство \mathcal{H} автоматически является калибровочно-инвариантным: так как среднее калибровочно-инвариантно, то два элемента из \mathcal{A}_{Λ_+} , связанные калибровочным преобразованием, различаются лишь на элемент нулевого пространства \mathcal{N} (упражнение!).

Можно, однако, построить большее гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}}$, в котором не зависящие от времени калибровочные преобразования действуют как нетривиальные унитарные операторы. Делается это следующим образом.

Пусть $\tilde{\mathcal{A}}_{\Lambda_+}$ — алгебра функций от полей в Λ_+ , взятых во «временной калибровке»¹⁾. (Это значит, что все калибровочные поля во «временном» направлении равны 1.) Среднее $\langle \cdot \rangle_{t.g.}$ во временной калибровке определяется аналогично: мы заменяем в действии калибровочные поля во временном направлении на 1. Сразу видно, что

$$\langle \tilde{F} \theta \tilde{F} \rangle_{t.g.} \geq 0 \text{ для } \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\Lambda_+},$$

так что мы, как и раньше, можем положить $\tilde{\mathcal{H}} = \overline{\tilde{\mathcal{A}}_{\Lambda_+} / \mathcal{N}}$.

¹⁾ В оригинале temporal gauge. Отсюда индекс t.g. ниже, — Прим. ред.

Наконец, заметим, что если F — калибровочно-инвариантный элемент из \mathcal{A}_Λ , а \tilde{F} — соответствующий объект во временной калибровке, то $\langle F \rangle = \langle \tilde{F} \rangle_{t.g.}$. Это дает естественное вложение \mathcal{H} в $\tilde{\mathcal{H}}$.

Рассмотрим теперь состояние $\psi \in \tilde{\mathcal{H}}$, и пусть $V(h_x)$ — унитарный оператор в $\tilde{\mathcal{H}}$, индуцированный не зависящим от времени калибровочным преобразованием h_x (где x — фиксированная произвольная точка «пространственной» решетки \mathbb{Z}^{d-1}). Запишем фурье-разложение $V(h_x)\psi$ на неприводимые компоненты:

$$V(h_x)\psi = \sum_{\tau} V_{\tau}(h_x)\psi_{\tau},$$

где

$$\psi_{\tau} = \int dh_x V(h_x) \chi_{\tau}(h_x^{-1}) d_{\tau} \psi,$$

$$V_{\tau}(h_x) = \int dg_x V(g_x) \chi_{\tau}(g_x^{-1} h_x) d_{\tau}.$$

Будем говорить, что ψ_{τ} имеет заряд τ в точке x .

Удивительным фактом является то, что получаемое этим путем разложение пространства $\tilde{\mathcal{H}}$ в бесконечное число суперотборных секторов

$$\tilde{\mathcal{H}} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ \tau_{x_1}, \dots, \tau_{x_n}}} \mathcal{H}_{\tau_{x_1}, \dots, \tau_{x_n}}$$

(сумма лишь по нетривиальным τ) инвариантно относительно действия трансфер-матрицы (упражнение!).

По этой причине говорят о *бесконечно сильных внешних зарядах*. Неясно, имеются ли соответствующие ковариантные сектора в непрерывной теории.

Особенно простой и интересный тип состояний представляют собой «струны». Возьмем путь S_{xy} , начинающийся в точке x и кончающийся в точке y , $x, y \in \Lambda_+$. Пусть $g_{S_{xy}} = \mathbf{P} \prod_{\langle x'y' \rangle \in S_{xy}} g_{x'y'}$ (символ \mathbf{P} указывает, что произведение берется в порядке, определяемом путем).

Оператору $U_{\tau}(g_{S_{xy}})_{ab}$ соответствует состояние $\psi_{\tau_x \tau_y}^{ab}(S_{xy})$, имеющее заряд τ в точке x и заряд $\bar{\tau}$ в точке y .

Небольшое вычисление показывает, что

$$(\psi_{\tau_x \tau_y}^{ab}, T^t \psi_{\tau_x \tau_y}^{cd}) = \langle W_{\tau}(C_{xy}, t) \rangle \delta_{ac} \delta_{bd} d_{\tau}^{-2},$$

где $W_{\tau}(C_{xy}, t)$ — наблюдаемая, называемая *петлей Вильсона*:

$$W_{\tau}(C_{xy}, t) = \chi_{\tau} \left(\mathbf{P} \prod_{\langle x'y' \rangle \in C_{xy}, t} g_{x'y'} \right).$$

Здесь $C_{xy, t}$ — замкнутый контур, получающийся из S_{xy} так. Сначала нужно пройти S_{xy} , затем пойти по прямой вверх по времени, затем пройти сдвинутый зеркальный образ S_{xy} в обратном направлении и затем — по прямой вниз по времени к начальной точке (рис. 2).

Начав с прямолинейной «горизонтальной» струны S_{xy} , мы получим прямоугольную петлю Вильсона.

Если мы определим гамильтониан H равенством $T = e^{-2H Q}$, где Q — проектор на дополнение к нуль-пространству оператора T , то можно следующим образом выразить «потенциал» взаимодействия между статическими зарядами.

Пусть

$$V_{\tau_x \bar{\tau}_y}(S_{xy}) = \inf \text{spec } H \upharpoonright \Psi_{\tau_x \bar{\tau}_y}^{ab}(S_{xy})$$

— наименьшая энергия в $\Psi_{\tau_x \bar{\tau}_y}^{ab}(S_{xy})$.

Тогда

$$V_{\tau_x \bar{\tau}_y}(S_{xy}) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log W_{\tau}(C_{xy, t})$$

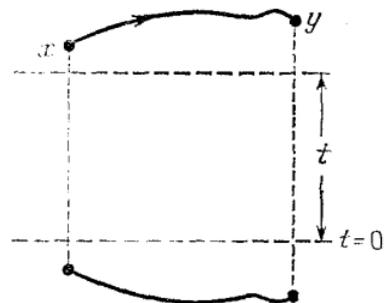


Рис. 2. Петля $C_{xy, t}$.

(предполагается, что S_{xy} — кратчайший путь из x в y).

Если петля Вильсона подчиняется закону площади, т. е. если

$$\langle W_{\tau}(C) \rangle \leq \text{const} \cdot \exp(-\alpha_{\tau} A(C)), \quad \alpha_{\tau} > 0,$$

где $A(C)$ — число плакетов в минимальной поверхности с краем C , то мы получаем $V_{\tau_x \bar{\tau}_y}(S_{xy}) \geq \alpha_{\tau} \text{dist}(x, y)$, т. е. «потенциал» растет с расстоянием линейно. Это дает некоторую мотивировку вильсонову критерию удержания.

Теперь мы хотим определить оператор беспорядка, аналогичный оператору беспорядка, введенному в несколько иной ситуации т'Хоофтом. Пусть T — некоторое множество ориентированных ребер в Λ_+ , а ω — элемент из центра Z группы G . Определим линейный оператор $\hat{B}_{\omega}(T)$ на \mathcal{A}_{Λ_+} как оператор, который переводит функцию $f(\{g_{xy}\})$ в функцию $f(\{\omega_{xy}(T)g_{xy}\})$, где $\omega_{xy}(T) = \omega$, если T содержит ребро $\langle xy \rangle$ с правильной ориентацией, и $\omega_{xy}(T) = \omega^{-1}$, если T содержит ребро $\langle yx \rangle$ с правильной ориентацией.

Локально, например для одного-единственного ребра, это равнозначно калибровочному преобразованию. Однако, вообще говоря, появятся испорченные плакетки. Поэтому эту операцию иногда называют «сингулярным калибровочным преобразованием». Обозначим множество плакеток в Λ_+ , где $\hat{B}_{\omega}(T)$ действует нетривиально, через T' (это — подмножество «ко-

границы» δT множества T , см. [48]). Далее, положим

$$\begin{aligned} B_\omega(T') &\equiv \exp \left\{ \frac{1}{2g_0^2} \sum_{P \in T'} \chi(g_{\partial P}) \left(\frac{\chi(\omega_{\partial P})}{\chi(1)} - 1 \right) \right\} \overset{\circ}{B}_\omega(T) \\ &= \overset{\circ}{B}_\omega(T) \exp \left\{ \frac{1}{2g_0^2} \sum_{P \in T'} \chi(g_{\partial P}) \left(1 - \frac{\chi(\omega_{\partial P}^{-1})}{\chi(1)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где $\omega_{\partial P} = \omega_{+}^{(\partial P \cap T)} - \omega_{-}^{(\partial P \cap T)}$, а $n_{+}(\partial P \cap T)$ (соотв. $n_{-}(\partial P \cap T)$) есть количество рёбер из T , которые содержатся в ∂P с правильной (соотв. неправильной) ориентацией. В действительности $B_\omega(T')$ зависит только от T' . Это отображение опреде-

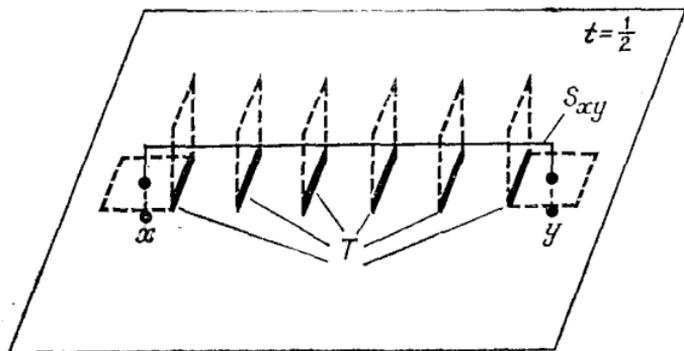


Рис. 3.

лено таким образом, что сохраняет физическое скалярное произведение и потому порождает унитарный оператор в физическом гильбертовом пространстве \mathcal{H} , который мы будем обозначать тем же символом $B_\omega(T')$. (В этом можно убедиться, используя свободное среднее $\langle \cdot \rangle_0$.)

Вычисление показывает, что

$$B_{\omega_1}(T') B_{\omega_2}(T') = B_{\omega_1 \omega_2}(T'),$$

т. е. эти операторы образуют унитарное представление центра Z .

В случае $d=3$ обычно T' будет выбираться как множество всех плакетов, дуальных (= ортогональных) к некоторой струне S_{xy} , идущей из точки x в точку y , причём обе эти точки расположены в дуальной решётке и в плоскости $t=0$. Пример показан на рис. 3. Отмеченные на рисунке рёбра образуют T , а плакетки — T' . Чтобы подчеркнуть дуальную связь между T' и S_{xy} , мы пишем $T' = *S_{xy}$. Концевые точки x и y можно интерпретировать как «вихри». Множество T можно рассматривать как дуальное к поверхности, ограниченной струной S_{xy} и некоторой прямой в плоскости $t=0$.

Если $d=4$, то T' будет обычно состоять из всех плакетов, дуальных к поверхности S_C , лежащей в дуальной решетке и

пересекающей плоскость $t = 0$ по некоторому замкнутому контуру C («линии вихрей»). Множество T будет дуально к объёму, ограниченному поверхностью S_C и некоторой поверхностью, лежащей в гиперплоскости $t = 0$.

Г. т'Хоофт [26] нашёл интересные топологические коммутационные соотношения между операторами петель Вильсона и операторами беспорядка; эти соотношения позволяют интерпретировать одно через другое.

В случае $d = 3$ рассмотрим струну $*T'$, начинающуюся и оканчивающуюся в плоскости $t = 0$. Тогда T дуально к поверхности в Λ_+ , ограниченной струной $*T'$. Пусть $W_\tau(C)$ — петля Вильсона в Λ_+ . Тогда

$$B_\omega(T') W_\tau(C) = \chi_\tau(\omega^{n_{TC}}) W_\tau(C) B_\omega(T'),$$

где n_{TC} — алгебраическое число пересечений C с T или, что эквивалентно, число вращения C вокруг $*T' \cup (*T \cap \{t = 0\})$.

В случае $d = 4$ рассмотрим поверхность $*T' \subset \Lambda_+$, которая начинается с некоторого контура C' , лежащего в гиперплоскости $t = 0$, и расположена выше этой гиперплоскости в смысле направления «времени». Тогда T будет дуально к трехмерному объёму в Λ_+ , ограниченному поверхностью $*T'$. Пусть $W_\tau(C)$ — по-прежнему петля Вильсона в Λ_+ . Тогда опять выполняются прежние коммутационные соотношения. Как и раньше, n_{TC} — алгебраическое число пересечений C с T , однако его можно также интерпретировать как коэффициент зацепления C с $*T' \cup (*T \cap \{t = 0\})$.

Если контур C лежит в плоскости $t = \text{const}$, то можно сказать, что $W_\tau(C)$ измеряет магнитный поток. Поэтому коммутационные соотношения означают, что $B_\omega(T')$ есть оператор рождения для магнитного потока. Аналогично мы можем сказать, что $W_\tau(C)$ порождает электрический поток через C , а $B_\omega(T')$ измеряет его.

Близким, хотя и несколько отличным типом наблюдаемой является наблюдаемая беспорядка Вегнера — т'Хоофта. Она может быть введена в абелевых моделях как наблюдаемая, дуальная к петле Вильсона [5]. По этой причине в случае $d = 4$ она связана с потенциалом взаимодействия между монополями и антимонополями таким же образом, как петля Вильсона связана с потенциалом взаимодействия между зарядами. Полное определение при $d = 4$ таково.

Пусть C — замкнутый контур на дуальной решётке, S — поверхность с границей $\partial S = C$. Определим модифицированную статистическую сумму $Z_\Lambda(\omega, C)$, заменив $g_{\partial P}$ на $g_{\partial P} \omega$ на каждом плакете поверхности $*S$, дуальной к S . Из калибровочной инвариантности вытекает, что на самом деле $Z_\Lambda(\omega, C)$ зависит только от C , а не от S . Среднее контура т'Хоофта

дается формулой

$$\langle D_\omega(S) \rangle_\Lambda = \frac{Z_\Lambda(\omega, S)}{Z_\Lambda(1, S)}.$$

Мы получим точно такой же результат, если будем считать, что $D_\omega(S)$ есть обычная наблюдаемая, а именно (см. [5])

$$D_\omega(S) = \exp \left\{ \frac{1}{2g_0^2} \sum_{P \in *S} \chi(g_{\partial P}) \left(\frac{\chi(\omega)}{\chi(1)} - 1 \right) \right\}.$$

Интерпретация этой наблюдаемой в терминах взаимодействия монополю — антимонополь проводится таким же образом, как интерпретация петли Вильсона в терминах взаимодействия зарядов. Взяв прямоугольный контур в плоскости 01

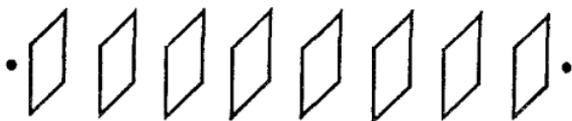


Рис. 4.

и сделав разрез по гиперплоскости $t = \text{const}$, содержащей горизонтальную часть контура, мы получим картинку, подобную представленной на рис. 4, где все нарисованные плакетки модифицированы элементом ω . Это означает, что в концевых точках нарушается «тождество Бьянки», т. е. магнитный поток через поверхность куба, окружающего одну из концевых точек, не равен нулю (в случае неабелевой группы эта интерпретация немного условна). Поэтому концевые точки отождествляются с конфигурацией пары монополю — антимонополь.

с. «Диаманитное» неравенство

Диаманитные свойства бозонных систем, по крайней мере нерелятивистских, хорошо известны. Общие доказательства были даны Саймоном [27, 29] и Хессом, Шрадером и Уленброком [28]. Они основаны на использовании неравенства Като или стохастических интегралов Ито (последний метод восходит к одному замечанию Нельсона, как об этом написано в [29]). Ознакомиться с этими доказательствами и связанными с ними вопросами можно по работе Хунцикера [30].

Здесь мы имеем дело с существенно релятивистскими системами, которые могут также содержать фермионы (спиноры). Доказываемое ниже неравенство выражает совместный эффект диаманитного поведения бозонов и парамагнетизма, обусловленного спином. (Поэтому название неравенства запи-

сано в кавычках.) Поистине замечательно, что эти два противоположных фактора приводят к неравенствам одного типа.

«Диаманитные» неравенства относятся к статистической сумме во внешнем калибровочном поле. Пусть $\langle \cdot \rangle_{0, \Lambda, \{g_{xy}\}}$ — «условное материальное среднее» (отсутствует интегрирование по $\{g_{xy}\}$). Тогда

$$Z_{\Lambda}(\{g_{xy}\}) = \langle e^{-S_H^0 - S_F} \rangle_{0, \Lambda, \{g_{xy}\}}. \quad (2.8)$$

Неравенство, о котором идет речь, состоит просто в том, что

$$|Z_{\Lambda}(\{g_{xy}\})| \leq Z_{\Lambda}(\{\mathbb{1}\}). \quad (2.9)$$

Существуют доказательства различной степени общности, соответственно тому, предполагается группа G абелевой или нет и имеются ли фермионы (см. [23, 31]).

Для доказательства неравенства (2.9) наиболее «естественно» было бы показать, что левая его часть есть положительно-определенная функция от $\{g_{xy}\}$ или хотя бы является полиномом с положительными коэффициентами от вильсоновых петель. К сожалению, если имеются фермионы, то это, по-видимому, неверно. Таким образом, в самом общем случае мы имеем лишь довольно ограниченный результат.

Теорема 2.3. Пусть Λ — гиперкуб с периодическими (антипериодическими) условиями. Тогда справедлива «диаманитная» оценка (2.9).

Доказательство. Пусть

$$C = \sup_{\{g_{xy}\}} |Z_{\Lambda}(\{g_{xy}\})|.$$

Так как пространство $\{g_{xy}\}$ компактно и Z_{Λ} — непрерывная функция на нем, то мы можем считать, что

$$C = |Z_{\Lambda}(\{g_{xy}^0\})|. \quad (2.10)$$

Пусть π — пара гиперплоскостей, зеркально-симметричных относительно гиперплоскости $t = 0$ и лежащих посередине между гиперплоскостями решётки. Как уже обсуждалось при доказательстве теоремы 2.1, мы можем выбрать калибровку таким образом, чтобы $g_{xy}^0 = \mathbb{1}$ на рёбрах, пересекающих π . Это приводит к равенству

$$e^{-S_H^0 - S_F} = e^{-S + \theta_M} \left(e^{-\tilde{S}_+} \right) e^{-S_c},$$

где S_c имеет вид

$$-S_c = \sum_l G_l \theta_M G'_l, \quad G_l, G'_l \in \mathcal{A}_{\Lambda_+}.$$

(Здесь θ_M определяется так же, как θ , только оно не действует на калибровочное поле.)

Очевидно, что среднее $\langle \cdot \rangle_{0, \Lambda, \{g_{xy}\}}$ удовлетворяет условию положительности ОШ относительно θ_M , и мы можем воспользоваться следующей леммой.

Лемма 2.4. Если $\langle \cdot \rangle$ удовлетворяет условию положительности ОШ и $F, G_i \in \mathcal{A}_{\Lambda_+}$ (для всех i), то

$$\left| \langle F \theta_M F' e^{\sum G_i \theta_M G_i} \rangle \right| \leq \langle F \theta_M F e^{\sum G_i \theta_M G_i} \rangle^{1/2} \langle F' \theta_M F' e^{\sum G'_i \theta_M G'_i} \rangle^{1/2}.$$

Доказательство. Левая часть неравенства равна

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i_1, \dots, i_n} \frac{1}{n!} \langle F \theta_M F' G_{i_1} \dots G_{i_n} \theta_M (G'_{i_1} \dots G'_{i_n}) \rangle \right| \\ & \leq \sum_{i_1, \dots, i_n} \frac{1}{n!} \langle F \theta_M F G_{i_1} \dots G_{i_n} \theta_M (G_{i_1} \dots G_{i_n}) \rangle^{1/2} \\ & \quad \times \langle F' \theta_M F' G'_{i_1} \dots G'_{i_n} \theta_M (G'_{i_1} \dots G'_{i_n}) \rangle^{1/2} \\ & \leq \left(\sum_{i_1, \dots, i_n} \frac{1}{n!} \langle F \theta_M F G_{i_1} \dots G_{i_n} \theta_M (G_{i_1} \dots G_{i_n}) \rangle \right)^{1/2} \\ & \quad \times \left(\sum_{i_1, \dots, i_n} \frac{1}{n!} \langle F' \theta_M F' G'_{i_1} \dots G'_{i_n} \theta_M (G'_{i_1} \dots G'_{i_n}) \rangle \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

что равно правой части. \square

Следствие 2.5. Пусть $g_{xy} = \mathbb{1}$ на рёбрах $\langle xy \rangle$, пересекающих Λ . Тогда

$$\begin{aligned} |Z_{\Lambda}(\{g_{xy}\})| & \leq \langle e^{-s + \theta_M} e^{-s + e \sum G_i \theta_M G_i} \rangle^{1/2} \langle e^{-s - \theta_M} e^{-s - e \sum G'_i \theta_M G'_i} \rangle^{1/2} \\ & = Z_{\Lambda}(\{g_{xy}^+ \theta g_{xy}^+\})^{1/2} Z_{\Lambda}(\{(\theta g_{xy}^-) g_{xy}^-\})^{1/2}. \end{aligned}$$

Здесь g_{xy}^{\pm} — это часть конфигурации g_{xy} , принадлежащая Λ_{\pm} ; $g_{xy}^+ \theta g_{xy}^+$ — калибровочное поле, равное полю g_{xy}^+ в Λ_+ и его отражению — в Λ_- .

Доказательство. Это непосредственно следует из леммы. \square

Заметим теперь, что $g_{xy}^+ \theta g_{xy}^+$ тривиально (калибровочно эквивалентно $\mathbb{1}$) на всех плакетах, пересекающих Λ .

Используя (2.10), мы получим

$$|Z_{\Lambda}(\{\overset{\circ}{g}_{xy}\})| \leq Z_{\Lambda}(\{\overset{\circ}{g}_{xy}^+ \theta \overset{\circ}{g}_{xy}^+\}). \quad (2.11)$$

Допустим теперь, что $\overset{\circ}{g}_{xy}$ уже тривиально на N плакетах. Если мы сумеем выбрать пару гиперплоскостей π таким образом, чтобы Λ_+ содержало более чем $N/2$ из этих тривиальных плакетов, то $\overset{\circ}{g}_{xy}^+ \theta \overset{\circ}{g}_{xy}^+$ будет тривиально по крайней мере на $N+1$ плакетах. Если же это невозможно, то, как нетрудно понять, применение неравенства (2.11) сделает распределение тривиальных плакетов несимметричным, и, таким образом, на следующем шаге N может быть увеличено.

Повторяя это рассуждение конечное число раз, мы видим, что $Z_{\Lambda}(\{\overset{\circ}{g}_{xy}\})$ можно оценить сверху через $Z_{\Lambda}(\{\overset{\circ}{g}_{xy}^+\})$, где $\{\overset{\circ}{g}_{xy}^+\}$ имеет только тривиальные плакеты. Так как наша периодическая решётка содержит нетривиальные (нестягиваемые) контуры, отсюда еще не следует, что $\overset{\circ}{g}_{xy}$ калибровочно эквивалентно единице. Однако, производя отражение относительно всех d координатных гиперплоскостей и используя неравенство (2.11), мы получим полностью тривиальное калибровочное поле. Тем самым доказательство теоремы 2.3 завершено. \square

Если мы имеем дело с чисто *бозонной* материей и если представление U_N удовлетворяет определенному условию (R) (см. ниже), то верен следующий более общий результат:

Теорема 2.6. Пусть Λ — произвольная конечная решётка (не обязательно часть регулярной решётки). Если U_N удовлетворяет условию (R), то справедливо неравенство (2.9).

З а м е ч а н и е. Под конечной решёткой мы понимаем конечный граф, т. е. семейство точек (вершин) и рёбер (отрезков) с некоторым отношением инцидентности между ними.

Теперь сформулируем условие (R).

Определение 2.7. Пусть N_0 — наименьшее целое число (если \otimes_{N_0} такое существует), для которого $U_N^{\otimes N_0}$ (N_0 -кратное симметризованное тензорное произведение) есть тривиальное представление; если такого числа не существует, то положим $N_0 = \infty$. Будем говорить, что U_N удовлетворяет условию (R), тогда и только тогда, когда *либо* U_N — вещественное представление

и для любого $\phi \in U_H$, такого что $\|\phi\| = 1$,

$$\int dh \prod_{i=1}^N (U_H(h) \phi)_{a_i} = \begin{cases} 0, & \text{если } N \text{ нечетно,} \\ \text{const} \cdot \sum_{\substack{\text{по спарива-} \\ \text{ниям } \{i, p(i)\}}} \prod \delta_{a_i a_{p(i)}}, & \text{если } N \text{ четно,} \end{cases} \quad (2.12)$$

либо U_H — комплексное представление и для любого $\phi \in U_H$, такого что $\|\phi\| = 1$, и для $N, M < N_0$

$$\begin{aligned} \int dh \prod_{i=1}^N (U_H(h) \phi)_{a_i} \prod_{j=1}^M (U_H(h) \phi)_{b_j} \\ = \delta_{NM} \sum_{\substack{\text{по перестановкам} \\ \pi \in S_N}} \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \delta_{a_i b_{\pi(i)}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

(Термин «условие (R)» выбран потому, что это условие позволяет продолжать «проводить» (route) представления и вильсоновы петли через вершины.) Приведем два класса примеров, где выполнено условие (R):

Лемма 2.8. 1) Если группа G абелева, то любое неприводимое представление удовлетворяет условию (R).

2) Если $G = SU(N)$, то фундаментальное представление удовлетворяет условию (R).

Доказательство. 1) Мы можем ограничиться рассмотрением групп Z_n и $U(1)$, так как любая другая абелева группа получается как прямое произведение этих групп.

а) Z_n : Пусть представление U_H определяется формулой

$$U_H \left(e^{i \frac{2\pi}{n}} \right) = e^{\frac{2\pi i}{n} k}.$$

При $n = 2m$ это представление вещественно; в этом случае условие (R) тривиально. При $n \neq 2m$, как легко проверить, выполнено (2.13).

б) $U(1)$: Достаточно рассмотреть комплексные представления, а для них (2.13), очевидно, выполнено.

2) Фундаментальное представление группы $SU(N)$ комплексное. Пусть

$$V_{\substack{a_1, \dots, a_N \\ b_1, \dots, b_M}} = \int dh \prod_{i=1}^N (U_H(h) \phi)_{a_i} \prod_{j=1}^M \overline{(U_H(h) \phi)_{b_j}}.$$

Эти числа определяют отображение V симметрического подпространства тензорного произведения $\bigotimes_{j=1}^M \mathcal{Y}_H$ в симметрическое подпространство произведения $\bigotimes_{j=1}^N \mathcal{Y}_H$. На каждом из этих пространств действуют неприводимые представления U_M^S или U_N^S соответственно, и

$$U_N^S(g)V = VU_M^S(g).$$

Отсюда сразу следует, что $V = 0$, если $M \neq N$ (лемма Шура). Но если $M = N$, то, очевидно, V коммутирует с U_N^S , и, следовательно, V кратно тождественному оператору. Скалярный множитель можно определить путем взятия следа. \square

Доказательство того, что фундаментальное представление группы $O(N)$ удовлетворяет условию (R) в форме (2.12), мы предоставим читателю. Здесь нужно использовать разложение симметризованного тензорного произведения на неприводимые представления и лемму Шура.

Доказательство теоремы 2.6. Имеем

$$Z_\Lambda(\{g_{xy}\}) = \int e^{-S_H} \prod_{x \in \Lambda} d\rho(|\phi(x)|), \quad (2.14)$$

где $d\rho(|\phi|) = e^{-V(|\phi|)} d\phi$.

Разлагая экспоненту в ряд, получаем

$$\begin{aligned} Z_\Lambda(\{g_{xy}\}) &= \\ &= \sum_{\{n_{xy}\}} \prod_{\langle xy \rangle} \frac{1}{n_{xy}!} \int (\phi(x), U_H(g_{xy}) \phi(y))^{n_{xy}} \prod_x d\rho(|\phi(x)|). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Нам требуется

Лемма 2.9. Если U_H удовлетворяет условию (R), то

$$\begin{aligned} \prod_{\langle xy \rangle} \int (\phi(x), U_H(g_{xy}) \phi(y))^{n_{xy}} \prod_x d\rho(|\phi(x)|) &= \\ &= \sum_{\mathcal{L}} c_{\mathcal{L}} \prod_{C \in \mathcal{L}} \chi_H \left(\mathbf{P} \prod_{\langle xy \rangle \in C} g_{xy} \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $c_{\mathcal{L}} \geq 0$; \mathbf{P} — символ, означающий, что произведение берется в порядке, определяемом траекторией, \mathcal{L} — множество замкнутых контуров $\{C_1, \dots, C_{|\mathcal{L}|}\}$ в Λ ; χ_H — характер представления U_H .

Следствие 2.9'. Если группа G абелева, то $Z(\{g_{xy}\})$ — положительно-определенная функция от $\{g_{xy}\}$.

Заметим, что из леммы 2.9 и равенства (2.15) немедленно следует диамагнитное неравенство (2.9).

Доказательство леммы 2.9. Рассмотрим следующее выражение, фигурирующее в качестве сомножителя в левой части равенства (2.16):

$$\int \prod_{i=1}^N (\phi(x_i), U_H(g_{x_i x}) \phi(x)) \prod_{j=1}^M (\phi(x), U_H(g_{xy_j}) \phi(y_j)) d\rho(\|\phi(x)\|).$$

В силу инвариантности меры $d\rho$ это выражение можно переписать так:

$$\int dh \int \prod_{i=1}^N (\phi(x_i), U_H(g_{x_i x}) U_H(h) \phi(x)) \times \prod_{j=1}^M (U_H(h) \phi(x), U_H(g_{xy_j}) \phi(y_j)) d\rho(\|\phi(x)\|). \quad (2.17)$$

Поскольку U_H удовлетворяет условию (R), то верно либо (2.12), либо (2.13). В первом случае выражение (2.17) может быть записано в виде

$$\text{const} \cdot \sum_{\substack{\text{по спар-} \\ \text{ваным} \\ (i, p(i))}}^{N+M} \prod_{i=1}^{N+M} (\phi(x_i), U_H(g_{x_i x} g_{x p(i)}) \phi(x_{p(i)})) \int d\rho(t) t^{N+M} \quad (2.18)$$

(если $N + M$ четно; в противоположном же случае получается 0); мы положили здесь

$$x_{N+j} = y_j \quad (j = 1, \dots, M).$$

Во втором случае для $N_0 = \infty$ выражение (2.17) принимает вид

$$\delta_{NM} \sum_{\pi \in S_N} \frac{1}{N!} ((\phi(x_i), U_H(g_{x_i x} g_{x \pi(i)}) \phi(y_{\pi(i)})) \int d\rho(t) t^{2N}. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.18) или (2.19) в левую часть равенства (2.16), мы получаем выражение такого типа, какой требуется в лемме (см. (2.16)). Коэффициенты $c_{\mathcal{L}}$ можно было бы явно вычислить, но в любом случае ясно, что они неотрицательны. При $N_0 < \infty$ необходима очевидная модификация. \square

З а м е ч а н и е. Неясно, существует ли какое-либо общее утверждение типа теоремы 2.6, справедливое для фермион-

ных полей. В частности, аналог леммы 2.9, по-видимому, неверен. На самом деле существуют простые замкнутые контуры, дающие отрицательный вклад [32]. Проблема «диамагнитного» неравенства для спиноров еще сложнее; дело зависит от того, преобладает ли «в среднем» парамагнитный эффект спина над диамагнитным эффектом, который также имеет место. Заметим в этой связи, что, как было показано в [33], нерелятивистская «парамагнитная гипотеза» неверна для полей типа полей Ахаронова — Бома [34].

д. Корреляционные неравенства

Достаточно общие корреляционные неравенства найдены лишь для абелевых калибровочных теорий с чисто бозонным полем.

Для действия Вильсона или Виллэна они довольно просто вытекают из общих результатов Жинибра (см. [35, 36]). Для калибровочного поля с гауссовским действием аналогичные неравенства были доказаны в [23]. Общий вид этих неравенств таков:

$$\langle AB \rangle_{\Lambda} - \langle A \rangle_{\Lambda} \langle B \rangle_{\Lambda} = \langle A; B \rangle_{\Lambda} \geq 0,$$

где A, B принадлежат мультипликативному конусу, порожденному функциями

$$\{|\phi(x)| \mid x \in \Lambda\}$$

и

$$\left\{ \cos \left(\sum_x m_x \theta_x + \sum_{\langle xy \rangle} f_{xy} A_{xy} \right) \right\},$$

где $\theta_x = \arg \phi(x)$, $A_{xy} = \arg g_{xy}$, m_x — целое число, f_{xy} — целое число в случае действия Вильсона или Виллэна и вещественное число в случае гауссова действия.

Приведем ряд следствий из этих и некоторых близких неравенств, имеющих важное значение для непрерывной хиггс-2-модели, которая будет обсуждаться во второй части книги.

Теорема 2.10. Пусть $\langle \cdot \rangle_{C, \Lambda}$ — среднее для абелевой модели Хиггса, где мера для калибровочного поля A гауссова с ковариацией C .

Тогда

- 1) $\langle e^{|\phi|^2(g)} e^{iA(f)} \rangle_C$ убывает как функция от C ,
- 2) $\langle e^{-|\phi|^2(g)} e^{A(f)} \rangle_C$ возрастает как функция от C ,
- 3) $\langle e^{|\phi|^2(g)} e^{iA(f)} \rangle_{C, \Lambda}$ возрастает как функция от Λ ,
- 4) $\langle e^{-|\phi|^2(g)} e^{A(f)} \rangle_{C, \Lambda}$ убывает как функция от Λ ,

где $|\phi|^2(g) = \sum_x |\phi(x)|^2 g(x)$, $g \geq 0$, $A_{xy} = \arg g_{xy}$.

По поводу деталей доказательства, элементарного, но длинного, построенного по образцу доказательства Жинибра [35], мы отсылаем к [23].

Заметим, что, используя эти корреляционные неравенства, можно устанавливать некоторые свойства монотонности потенциала между «бесконечно тяжелыми кварками» с противоположными зарядами [31]. Но так как это относится к абелевой теории, то это еще далеко не всё, что требуется для решения проблемы удержания кварков.

В заключение раздела сформулируем две задачи, заслуживающие дальнейшего исследования (при желании их можно считать упражнениями):

1) Дать более общее доказательство диамагнитного неравенства, годное как для хиггсовой материи в произвольном представлении, так и для фермионов.

2) Найти достаточно сильные корреляционные неравенства для неабелевых групп.

3. МЕТОДЫ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД

Метод высоко- и низкотемпературных кластерных разложений — один из наиболее известных методов статистической механики. Сознвая, что «еду в Тулу со своим самоваром»¹⁾, я тем не менее дам общее и замкнутое изложение этого метода с некоторыми собственными вариациями и затем сосредоточусь на приложениях к решеточным калибровочным теориям.

Как показали Грубер и Кунц [37], некий общий класс решёточных систем может быть отображен в класс полимерных систем определенного типа, которые были ими детально изучены. Галлаватти и др. [38] отметили, что это наблюдение полезно при изучении решёточных калибровочных теорий (их короткая статья, однако, очень схематична в отношении комбинаторных аспектов). То, как отображаются решёточные системы в полимерные системы, можно понять из чрезвычайно ясной статьи Галлаватти, Мартин-Лёфа и Миракль-Соля по низкотемпературным разложениям для модели Изинга [39]. Их подходу мы и будем здесь следовать. Наш метод использования комбинаторики во многом навеян работой малышева [42]²⁾.

Идея состоит в следующем. В «высокотемпературной области», т. е. в области параметров, где взаимодействие между различными узлами или различными линиями соответ-

¹⁾ В оригинале — „везу уголь в Ньюкасл“. — Прим. ред.

²⁾ См. также [4*]. — Прим. ред.

ственно является малым, разумно написать

$$e^{\frac{1}{2g_0^2} \chi(g_{\partial P})} = 1 + \rho_{\partial P},$$

$$e^{\frac{\kappa}{2} \bar{\psi}(x) U \Gamma \psi(y)} = 1 + \lambda_{(xy)},$$

$$e^{\frac{\lambda}{2} (\phi(x), U(g_{xy}) \phi(y))} = 1 + \mu_{(xy)}$$

и разложить среднее значение наблюдаемой A в ряд по малым параметрам $\rho_{\partial P}$, $\lambda_{(xy)}$, $\mu_{(xy)}$. (Как мы увидим, для действия Хиггса возможна модификация, дающая значительно более широкую область сходимости; это так называемый скрытый механизм Хиггса.) При этом мы получим средние по свободной мере вида

$$\left\langle A \prod_{P \in \Upsilon_P} \rho_{\partial P} \prod_{(xy) \in \Upsilon_H} \lambda_{(xy)} \prod_{(xy) \in \Upsilon_F} \mu_{(xy)} \right\rangle_{0, \Lambda}, \quad (3.1)$$

где Υ_P — множество плакетов, Υ_H — множество связей Хиггса, Υ_F — множество фермионных линий. Мы называем $\Upsilon_P \cup \Upsilon_H \cup \Upsilon_F$ множеством *связей*. Заметим, что среднее $\langle AB \rangle_{0, \Lambda}$ разлагается в произведение $\langle A \rangle_{0, \Lambda} \langle B \rangle_{0, \Lambda}$, если A и B зависят от непересекающихся множеств переменных. Множество Υ связей, которое не может быть разбито на подмножества, соответствующие непересекающимся множествам полевых переменных, будем называть *полимером* (геометрически это означает, грубо говоря, что Υ должно быть связно; при этом два плакета, имеющие лишь общую вершину, не считаются связными). Конечно, следует принимать в расчет переменные, входящие в A , так что полимер Υ , указанный в (3.1), может быть связным именно через «носитель» наблюдаемой A . Назовем

$$z_A(\Upsilon) \equiv \left\langle A \prod_{P \in \Upsilon} \rho_{\partial P} \prod_{(xy) \in \Upsilon} \lambda_{(xy)} \prod_{(xy) \in \Upsilon} \mu_{(xy)} \right\rangle$$

активностью полимера Υ . Таким образом мы получаем разложение в ряд по активностям полимеров для

$$\langle A \exp(-\overset{\circ}{S}_H - S_F - S_{Y.M.}) \rangle_{0, \Lambda} \text{ и для } Z_\Lambda = \langle \exp(-\overset{\circ}{S}_H - S_F - S_{Y.M.}) \rangle_{0, \Lambda}.$$

Стратегия состоит в том, чтобы

1) используя технику формальных степенных рядов, впервые привлеченную для данного круга вопросов Рюэлем [40], разложить дробь, выражающую полное среднее

$$\langle A \rangle_\Lambda = \frac{1}{Z_\Lambda} \langle A e^{-\overset{\circ}{S}_H - S_F - S_{Y.M.}} \rangle_{0, \Lambda},$$

2) показать, что это разложение имеет конечную область сходимости, не зависящую от объема Λ .

Тогда переход к термодинамическому пределу может быть выполнен легко путем перехода к пределу в каждом члене разложения. При этом получаются единственный термодинамический предел (не зависящий от граничных условий), а также экспоненциальная кластерность, «удержание кварков» и другие желаемые результаты.

Та же самая техника может быть применена подобным же образом к «низкотемпературной» области, в которой обычно g_0^2 , κ и λ малы. Но в этом случае полимеры соответствуют *дефектам*, т. е. множествам, для которых $g_{\text{ЭР}} \neq 1$ (так называемым *вихрям*), и множествам линий Хиггса и фермионных линий, связанных с ними подходящим образом. Ясно, что этот метод может работать только для *дискретной* группы G ; для $G = \mathbb{Z}_2$ это было впервые сделано Марра и Миракль-Содем [41]. Слово «дефект» выбрано не случайно; в действительности решёточные калибровочные теории с дискретной калибровочной группой были предложены в качестве реалистических моделей для дефектов в упорядоченных средах [7].

Существуют и другие типы разложений, такие как $1/d$ -разложения (см., например, [82, 83]), которые не будут здесь обсуждаться.

Мой подход к разложениям, безусловно, неоригинален (иначе, по-видимому, и невозможно!), но он не совпадает полностью ни с одним из подходов, которые я обнаружил в литературе. В частности, я пытался отделить, насколько это возможно, чисто комбинаторные факты от оценок, зависящих от специальной структуры решетки (в частности, от ее размерности), во многом в духе Малышева [42]¹⁾.

а. Общий алгебраический формализм для полимеров

Здесь мы разовьём абстрактную теорию кластерных разложений для полимеров, используя метод формальных степенных рядов; изложение в значительной степени навеяно работой [39].

Пусть Γ_0 — некоторое (конечное) множество, элементы которого $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ называются *полимерами*. Предположим, что задана функция

$$g: \Gamma_0 \times \Gamma_0 \rightarrow \{0, -1\},$$

такая что $g(\gamma, \gamma) = -1$ для всех $\gamma \in \Gamma_0$. Мы говорим, что γ и γ' *совместимы*, если $g(\gamma, \gamma') = 0$, и *несовместимы* — в противном случае.

¹⁾ См. также работы Малышева [4*, 5*]. — Прим. ред.

Далее, для каждого $\gamma \in \Gamma_0$ задана *активность* $z(\gamma)$, которая иногда интерпретируется как неопределенная переменная, а иногда — как комплексное число; из контекста будет ясно, какая интерпретация имеется в виду.

Определение 3.1. Величина

$$Z(\{z(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma_0}) \equiv \sum_{\Gamma \subset \Gamma_0} \prod_{\gamma \in \Gamma} z(\gamma) \prod_{\substack{i < j \\ \gamma_i, \gamma_j \in \Gamma}} (1 + g(\gamma_i, \gamma_j)) \quad (3.2)$$

называется *статистической суммой*. Величина

$$\phi(\Gamma) = \prod_{\substack{i < j \\ \gamma_i, \gamma_j \in \Gamma}} (1 + g(\gamma_i, \gamma_j)) \quad (3.3)$$

называется *фактором Больцмана*.

Через X, Y и т. д. мы будем обозначать функции $\Gamma_0 \rightarrow \mathbb{N}$, т. е. *мультииндексы*. Положим

$$z^X \equiv \prod_{\gamma \in \Gamma_0} z(\gamma)^{X(\gamma)} \quad (3.4)$$

для монома, соответствующего мультииндексу X . Пусть, далее,

$$X! \equiv \prod_{\gamma \in \Gamma_0} X(\gamma)!, \quad n(X) \equiv \sum_{\gamma \in \Gamma_0} X(\gamma). \quad (3.5)$$

Если $X! = 1$, то мы можем отождествить X с подмножеством

$$\Gamma_X = \{\gamma \in \Gamma_0 \mid X(\gamma) = 1\}.$$

Положив

$$\phi(X) = \begin{cases} \phi(\Gamma_X), & \text{если } X! = 1, \\ 0, & \text{если } X! > 1, \end{cases}$$

мы можем написать тогда, что

$$Z = \sum_X z^X \phi(X).$$

Определение 3.2. Пусть f_1, f_2 — функции, определенные на нашем множестве мультииндексов и принимающие значения в \mathbb{C} . Положим

$$(f_1 * f_2)(X) \equiv \sum_{X_1 + X_2 = X} f_1(X_1) f_2(X_2). \quad (3.6)$$

Замечание. Если интерпретировать f_1 и f_2 как *последовательности коэффициентов* формальных степенных рядов, то $f_1 * f_2$ есть последовательность коэффициентов произведения этих рядов.

Определение 3.3. *Функцией Урселла* называется функция

$$\phi^{\Gamma}(X) = (\log \phi)(X),$$

где для любой функции f

$$(\log f)(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (f - 1)^{*n}(X),$$

$$\mathbb{1}(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } X = 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предложение 3.4.

$$\log Z = \sum_X \phi^{\Gamma}(X) z^X.$$

Доказательство. Это вытекает из замечания после определения 3.2. \square

Теперь мы получим явную формулу для $\phi^{\Gamma}(X)$, выведенную в работе Галлаватти, Миракль-Соля и Мартин-Лёфа [39] и известную в теории разложений Майера.

Лемма 3.5.

$$\phi^{\Gamma}(X) = \frac{1}{X!} a(X), \quad (3.7)$$

где

$$a(X) = \sum_{C \subseteq G(X)} (-1)^{l(C)}. \quad (3.8)$$

Здесь $G(X)$ — граф с вершинами $\gamma_1, \dots, \gamma_{n(X)}$ и рёбрами, соединяющими γ и γ' ($\gamma \neq \gamma'$) в том и только том случае, когда $g(\gamma, \gamma') = -1$ (каждая вершина γ берется в количестве экземпляров, равном $X(\gamma)$; суммирование производится по всем связным подграфам C , имеющим те же самые вершины; $l(C)$ — число ребер в C).

Доказательство. Имеем

$$\phi(X) = \prod_{\substack{i < j \\ X(\gamma_i), X(\gamma_j) > 0}} (1 + g(\gamma_i, \gamma_j)) = \sum_G \prod_{\{i, j\} \in G} g(\gamma_i, \gamma_j), \quad (3.9)$$

где суммирование производится по всем графам на $N = \{1, 2, \dots, n(X)\}$, т. е. по всем множествам двухэлементных подмножеств множества N (заметим, что такие графы имеют самое большее одно ребро между любыми двумя вершинами). Пусть множество $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n(X)})$ таково, что в нем имеется

$X(\gamma)$ экземпляров каждого γ . Положим для $M \subset N$

$$g(M) = \begin{cases} \sum_{C_M} \prod_{\substack{i < j \\ i, j \in M}} g(\gamma_i, \gamma_j) & \text{при } |M| \geq 2, \\ 1 & \text{при } |M| = 1, \\ 0 & \text{при } M = \emptyset \end{cases} \quad (3.10)$$

(\sum_{C_M} обозначает сумму по всем связным графам на M , т. е. графам с множеством вершин, совпадающим с M). Тогда

$$\phi(X) = \sum'_{\substack{m \\ \bigcup_{i=1}^m N_i = N}} g(N_1) \dots g(N_m) \quad (3.11)$$

(\sum' обозначает сумму по *различным* разбиениям множества N на подмножества N_1, \dots, N_m ; при фиксированных $|N_1|, \dots, |N_m|$ существует

$$\frac{1}{m!} \frac{n(X)!}{|N_1|! \dots |N_m|!}$$

таких разбиений).

Мы полагаем также

$$g(\gamma_1, \dots, \gamma_N) = \begin{cases} \sum_C \prod_{\{i, j\} \in C} g(\gamma_i, \gamma_j) & \text{при } N \geq 2, \\ 1 & \text{при } N = 1, \\ 0 & \text{при } N = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

(\sum_C обозначает сумму по всем связным графам на $\gamma_1, \dots, \gamma_N$).

Для того чтобы вычислить $(\log \phi)(X) = \phi^\Gamma(X)$, удобно представить формальный степенной ряд для Z в чуть иной форме:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \prod_{i=1}^n z(\gamma_i) \prod_{i < l} (1 + g(\gamma_i, \gamma_l)) \quad (3.13)$$

(суммирование производится по всем *упорядоченным* последовательностям $\gamma_1, \dots, \gamma_n$). Используя (3.11), получаем

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \prod_{i=1}^n z(\gamma_i) \sum_{\sum N_i = n} g(N_1) \dots g(N_m). \quad (3.14)$$

Переупорядочим эту сумму, производя суммирование сначала по тем последовательностям, которые образуют «кластеры», соответствующие N_1, \dots, N_m , при фиксированных зна-

чениях $n_1 = |N_1|, \dots, n_m = |N_m|$. Получим

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_m \\ \sum n_i = n}} \frac{1}{m!} \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} \times \\ \times \prod_{i=1}^m \left(\sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n_i}} g(\gamma_1, \dots, \gamma_{n_i}) \prod_{j=1}^{n_i} z(\gamma_j) \right), \quad (3.15)$$

или

$$Z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_k} g(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \prod_{j=1}^k z(\gamma_j) \right)^m. \quad (3.16)$$

Это означает, что

$$\log Z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_k} g(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \prod_{j=1}^k z(\gamma_j). \quad (3.17)$$

Сравнивая коэффициенты этого ряда с коэффициентами ряда $\log Z = \sum z^X \phi^T(X)$, заключаем, что

$$\phi^T(X) = \frac{1}{X!} g(\gamma_1, \dots, \gamma_{n(X)}), \quad (3.18)$$

где $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n(X)})$ содержит ровно $X(\gamma)$ экземпляров каждого γ . Из (3.12) теперь следуют (3.7) и (3.8). \square

Теперь нам надо оценить выражение

$$a(G) \equiv \sum_{c \in G} (-1)^{l(c)} \quad (3.19)$$

для произвольного графа (суммирование производится по связным подграфам с тем же самым множеством V вершин, что и у G). Это составляет содержание следующей теоремы:

Теорема 3.6. Имеет место неравенство

$$|a(G)| \leq |\mathcal{T}(G)|,$$

где $\mathcal{T}(G)$ — множество всех деревьев в G (т. е. всех деревьев, которые имеют то самое множество V вершин, что и G , и содержатся в G).

З а м е ч а н и е. Доказательство этой теоремы в ее существенной части восходит к Роте [43]; я узнал это из работы Малышева [42]. Однако в обеих указанных работах доказательство запрятано в достаточно тяжелом формализме, связанном

с функциями Мёбиуса, который не будет нам нужен здесь. Еще одно доказательство можно найти в работе Пенроуза [43].

Доказательство. Упорядочим рёбра графа G произвольным образом и зафиксируем этот порядок. Тем самым индуцируется упорядочение в множестве петель (= элементарных 1-циклов) графа следующим образом. Петлю L можно рассматривать как упорядоченную последовательность ребер $L = (l_{i_1}, \dots, l_{i_k})$, такую что $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Будем говорить, что $\tilde{L} \geq L$, если последнее ребро в \tilde{L} имеет индекс $\tilde{i}_k \geq i_k$. При помощи лексикографического упорядочения последовательностей справа налево можно ввести полный порядок в множестве петель L_1, \dots, L_σ .

Определение 3.7. *Разомкнутой петлей* называется петля без старшего ребра.

Заметим, что петлю L можно однозначно восстановить по соответствующей разомкнутой петле L' , так как существует не более одного ребра между каждыми двумя вершинами.

Упорядочим разомкнутые петли L'_1, \dots, L'_σ в соответствии с порядком, введенным для петель.

Идея доказательства состоит в том, чтобы, последовательно исключая разомкнутые петли, свести сумму по связным графам (3.19) к сумме только по деревьям.

Не теряя общности, можно предположить, что $|V| \geq 3$. Пусть

R_j^i — множество связных подграфов графа G из j рёбер, не содержащих L'_1, \dots, L'_i (т. е. не содержащих рёбер, входящих в L'_1, \dots, L'_i);

$R_j^{i,A}$ — множество связных подграфов графа G из j рёбер, не содержащих L'_1, \dots, L'_{i-1} , но содержащих L_i ;

$R_j^{i,B}$ — множество связных подграфов графа G из j рёбер, не содержащих L'_1, \dots, L'_{i-1} , но содержащих L'_i , однако не содержащих L_i .

(Под связным подграфом графа G всегда понимается граф, имеющий то же самое множество вершин, что и G .)

Ясно, чтополучается следующее разложение для R_j^{i-1} :

$$|R_j^{i-1}| = |R_j^i| + |R_j^{i,A}| + |R_j^{i,B}|. \quad (3.20)$$

Мы утверждаем, что для $i = 0, 1, \dots$

$$a(G) = \sum_{j \geq 2} (-1)^j |R_j^i|. \quad (3.21)$$

Для $i=0$ это верно по определению. Предположим, что утверждение уже доказано для $i-1$. Тогда, в силу (3.20),

$$a(G) = \sum_{j \geq 2} (-1)^j |R_j^i| + |R_2^{i,A}| + \sum_{j \geq 2} (-1)^j (|R_j^{i,B}| - |R_{j+1}^{i,A}|). \quad (3.22)$$

Но $R_2^{i,A} = \emptyset$, так как не существует петель, состоящих из двух рёбер. Далее, легко построить биекцию из $R_j^{i,B}$ в $R_{j+1}^{i,A}$, а именно добавляя ребро $L_j \setminus L'_j$ (отметим, что при этом не может нарушиться ни одно из условий, касающихся L'_1, \dots, L'_{i-1} , ибо добавленное ребро имеет больший индекс, чем любое ребро из L'_1, \dots, L'_{i-1}).

Тем самым (3.21) установлено.

Применим это равенство при $i=\sigma$; R_j^σ состоит только из деревьев. Следовательно, все его элементы имеют $|V|-1$ рёбер, и мы получаем

$$a(G) = (-1)^{|V|-1} |R_{|V|-1}^\sigma|. \quad (3.23)$$

Теорема 3.6 доказана. \square

Пусть $C^\sigma(\gamma)$ — число рёбер графа G , инцидентных вершине γ . Справедлива

Теорема 3.8.

$$|\mathcal{T}(G)| \leq \prod_{\gamma \in V} C^\sigma(\gamma).$$

Доказательство. Достаточно построить для каждого дерева T отображение ψ_T множества вершин V в множество $\mathcal{L}(T) = \{\text{рёбер дерева } T\}$, такое что $\psi_T(\gamma)$ инцидентно γ и $\psi_T \neq \psi_{T'}$ для $T \neq T'$.

Наиболее простой способ сделать это состоит в том, чтобы сначала определить некоторое инъективное отображение $\psi_T: \mathcal{L}(T) \rightarrow V$.

Упорядочим рёбра дерева T таким образом, чтобы l_{m+1} имело общую вершину по крайней мере с одним из рёбер l_1, \dots, l_m , а другая вершина ребра l_{m+1} не содержалась среди концевых точек рёбер l_1, \dots, l_m . Отображение ψ_T определяется индуктивно: $\psi_T(l_1)$ — любой конец ребра l_1 ; $\psi_T(l_{m+1})$ совпадает с тем концом ребра l_{m+1} , который является общим с другим ребром из $\{l_1, \dots, l_m\}$, если он еще не встречался среди вершин $\psi_T(l_1), \dots, \psi_T(l_m)$ и совпадает с другим концом в противном случае.

Теперь мы можем положить

$$\psi_T(\gamma) = \begin{cases} \varphi_T^{-1}(\gamma), & \text{если это значение определено;} \\ \text{любому ребру дерева } T, \text{ инцидентному с } \gamma, & \\ \text{в противном случае.} & \end{cases}$$

Ясно, что образ $\psi_T(V)$ состоит из всех рёбер дерева T ; следовательно, различные деревья порождают различные отображения ψ_T , что и доказывает теорему. Таким образом, мы получили следующую оценку для $a(X)$ (см. (3.8)):

Следствие 3.9. Пусть

$$C^X(\gamma) = - \sum_{\gamma'} X(\gamma') g(\gamma, \gamma')^{-1} \quad (3.24)$$

(это — число рёбер, инцидентных вершине γ в графе $G(X)$, соответствующем X). Тогда

$$|a(X)| \leq \prod_{\gamma} C^X(\gamma)^{X(\gamma)}. \quad (3.25)$$

Доказательство. Очевидно. \square

Замечания 1. Для того чтобы проверить, насколько точна оценка, указанная в следствии 3.9, можно рассмотреть систему, содержащую ровно один полимер γ с активностью z . В этом случае статистическая сумма $Z = 1 + z$ и

$$\log Z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = \sum \frac{1}{X!} a(X) z^X,$$

откуда легко получить, что

$$a(X) = (n(X) - 1)! (-1)^{n(X)-1}.$$

Соответствующие графы — это так называемые полные графы (все возможные ребра проводятся), и следствие 3.9 даёт оценку

$$|a(X)| \leq (n(X) - 1)^{n(X)},$$

которая является чересчур завышенной — примерно на множитель $e^{n(X)}$.

2. Следствие 3.9 — наилучшая оценка, которую можно получить с помощью чисто комбинаторных методов. В следующем пункте мы рассмотрим полимеры, «живущие» на конечномерных решетках; в этой ситуации число полимеров, которые могут быть совместимы с данным полимером, ограничено. Это приводит к более точным оценкам, даваемым теоремами 3.12 и 3.13 ниже, что позволит нам затем доказать сходимость кластерных разложений равномерно по объёму.

в. Приложение описанного выше формализма к решёточным калибровочным теориям. Сходимость

В этом пункте мы покажем, как, используя только что развитый общий формализм, вычислять средние значения в случае решёточных калибровочных теорий. Мы уже объяснили главную идею в начале главы. Теперь опишем эту процедуру более подробно.

Сначала рассмотрим снова «высокотемпературное» разложение. Полезный прием состоит в том, чтобы выразить средние значения через «термодинамические функции», например:

$$\langle A \rangle_{\Lambda} = \frac{d}{d\alpha} \log \langle (1 + \alpha A) e^{-S} \rangle_{0, \Lambda} \Big|_{\alpha=0}, \quad (3.26)$$

где $S = S_H + S_F + S_{Y.M.}$, если все поля присутствуют; в противном случае мы просто опускаем соответствующие слагаемые. Аналогичным образом мы можем выразить семиинварианты, например:

$$\begin{aligned} \langle A; B \rangle_{\Lambda} &\equiv \langle AB \rangle_{\Lambda} - \langle A \rangle_{\Lambda} \langle B \rangle_{\Lambda} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \log \langle (1 + \alpha A + \beta B) e^{-S} \rangle_{0, \Lambda} \Big|_{\alpha=\beta=0}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Таким образом, достаточно изучить «модифицированные термодинамические функции» вроде

$$Z_{\Lambda}(A) \equiv \langle A e^{-S} \rangle_{0, \Lambda}. \quad (3.28)$$

Как было объяснено выше, e^{-S} имеет вид $\prod_{b \in \mathcal{B}_{\Lambda}} (1 + \rho_b)$, где \mathcal{B}_{Λ} — множество «связей» (рёбер и плакетов, на которых поля взаимодействуют).

Разлагая в ряд произведение

$$\prod_{b \in \mathcal{B}_{\Lambda}} (1 + \rho_b) = \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_{\Lambda}} \prod_{b \in \mathcal{B}} \rho_b$$

и разбивая каждое произведение на «связные» множители, соответствующие полимерам γ (зависящим, конечно, от A), получаем

$$Z_{\Lambda}(A) = \sum_{\Gamma \subseteq \Gamma_{\Lambda, \Lambda}} \prod_{\gamma \in \Gamma} \langle A^{n(\gamma)} \prod_{b \in \gamma} \rho_b \rangle_{0, \Lambda} \prod_{\substack{i < j \\ \gamma_i, \gamma_j \in \Gamma}} (1 + g(\gamma_i, \gamma_j)), \quad (3.29)$$

где

$$n(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma \text{ связано с носителем} \\ & \text{функции } A, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Конечно, в данном множестве полимеров Γ будет существовать самое большое один такой полимер γ , совместимый с A , если считать любые два полимера γ, γ' несовместимыми в случае, когда каждый из них имеет какую-нибудь переменную, общую с A .

Если положить

$$z_A(\gamma) \equiv \left\langle A^{n(\gamma)} \prod_{b \in \gamma} \rho_b \right\rangle_{0, \Lambda}, \quad (3.30)$$

то (3.29) примет общий вид (3.2).

Используя формализм предыдущего раздела, мы можем написать

$$\log Z_\Lambda(A) = \sum_X z_A^X \frac{a(X)}{X!}, \quad (3.31)$$

и в силу (3.26)

$$\langle A \rangle_\Lambda = \sum_X \frac{d}{d\alpha} z_{\alpha A}^X \Big|_{\alpha=0} \frac{a(X)}{X!},$$

или

$$\langle A \rangle_\Lambda = \sum' \phi_A^\Gamma(X) = \sum' z_A^X \frac{a(X)}{X!}, \quad (3.32)$$

где штрих означает, что суммирование производится по членам, линейным по A . Аналогично

$$\langle A_1; A_2; \dots; A_n \rangle_\Lambda = \sum' z_{A_1, \dots, A_n}^X \frac{a(X)}{X!}, \quad (3.33)$$

где сумма \sum' берется по членам, линейным по A_1, \dots, A_n . Разложения (3.32) и (3.33) представляют собой высокотемпературные разложения для обычных наблюдаемых.

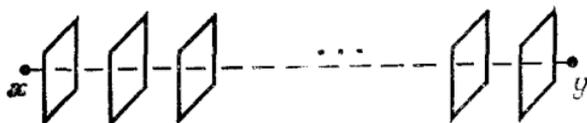


Рис. 5. Множество $*S$ для $d = 3$.

Существуют важные наблюдаемые другого сорта. Это так называемые *переменные беспорядка*, которые в случае калибровочных теорий известны как *монополи* для $d = 3$ и как *петли т'Хоофта* для $d = 4$ (оба типа введены т'Хоофтом [26]; см. пункт 2.b). Один способ введения этих переменных основан на преобразовании дуальности; а именно, они определяются как переменные, дуальные к переменным порядка (спину для $d = 3$, петле Вильсона для $d = 4$). В пункте 2.b мы привели прямое определение, которое сейчас напомним.

Выберем множество плакетов $*S$, двойственное к некоторой кривой, соединяющей точки x, y , для $d = 3$ (рис. 5) или

к некоторому «листу», ограниченному замкнутой петлей, для $d = 4$ (для $d = 2$ множество $*S$ может быть любым множеством плакетов).

Видоизменим блоки для действия Янга — Миллса, соответствующие этим плакетам, заменив

$$\chi(g_{\partial P}) \quad \text{на} \quad \chi(\omega g_{\partial P}) = \chi(\omega) \chi(g_{\partial P}) / \chi(\mathbb{1}),$$

где ω принадлежит центру группы G .

Соответственно определим модифицированную статистическую сумму $Z_{\Lambda}(\omega, S)$. Затем введем «среднее» переменной беспорядка $D_{\omega}(S)$, отвечающей паре (ω, S) , по формуле

$$\langle D_{\omega}(S) \rangle_{\Lambda} \equiv \frac{Z_{\Lambda}(\omega, S)}{Z_{\Lambda}}. \quad (3.34)$$

Для $\log \langle D_{\omega}(S) \rangle_{\Lambda}$ кластерное разложение можно выписать непосредственно, если заметить, что единственная разница между разложениями для $Z_{\Lambda}(\omega, S)$ и $Z_{\Lambda}(\mathbb{1}, \emptyset)$ заключается в значениях активностей некоторых полимеров. Чтобы указать это различие явно, будем далее писать $z_{\omega, S}(\gamma)$. Мы получаем (см. [38])

$$\log \langle D_{\omega}(S) \rangle_{\Lambda} = \sum_X (z_{\omega, S}^X - z_{\mathbb{1}, \emptyset}^X) \frac{a(X)}{X!}. \quad (3.35)$$

Наконец, сделаем несколько замечаний о «низкотемпературном» разложении по дефектам (называемым вихрями для $d = 3$ и вихревыми поверхностями для $d = 4$). Предположим, что группа G дискретна; фактически это означает, что G конечна, так как мы рассматриваем только компактные группы. Будем называть *дефектной сетью* всякое множество S плакетов, которым отвечают нетривиальные значения $g_{\partial P}$ ($g_{\partial P} \neq \mathbb{1}$), вместе с этими значениями $g_{\partial P}$ (в действительности лучше было бы писать $g_{\partial P, x}$, так как выбор начальной точки x имеет значение).

Эта информация эквивалентна заданию всех операторов голономии $g(C_x)$ для любых замкнутых кривых C_x , начинающихся в произвольной точке x .

Статистическая сумма, обычная или модифицированная, представляется в виде суммы членов, каждый из которых соответствует фиксированной дефектной сети D :

$$Z_{\Lambda} = \sum_D Z_{\Lambda}^{(D)}. \quad (3.36)$$

В каждом члене $Z_{\Lambda}^{(D)}$ мы должны, как и раньше, разложить фермионное и хиггсово действия. Факторизационные свойства диктуют полимерную структуру: полимер Λ будет теперь состоять из косвязного (связного на двойственной решетке)

множества дефектов вместе с множеством фермионных и хиггсовых связей, «связанных» с множеством дефектов следующим образом. Из калибровочной инвариантности вытекает, что могут встречаться лишь замкнутые петли, состоящие из ребер (в предположении, что рассматриваемые представления группы G удовлетворяют условию (R)); так как дефекты образуют линии для $d = 3$ (рис. 6) и поверхности для $d = 4$, применимо обычное понятие связности. Для трехмерной

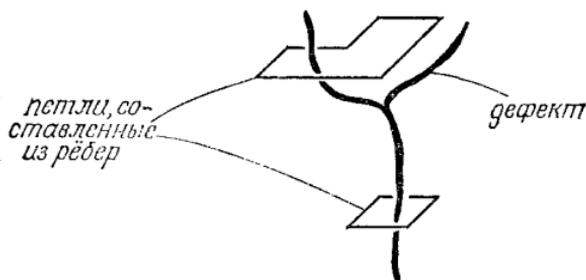


Рис. 6. Полимер в «низкотемпературной области» ($d = 3$).

модели Хиггса с $G = \mathbb{Z}_2$ всё это проделано в [41]. Кластерные разложения (3.33) и (3.35) могут быть также интерпретированы как низкотемпературные разложения; конечно, определения полимеров и их активностей при этом становятся иными.

Наконец, мы хотим показать, что кластерные разложения сходятся равномерно по объему, в предположении что активности достаточно малы. Это нельзя было сделать в общей (не зависящей от размерности) постановке предыдущего раздела, хотя размерность сказывается существенным образом лишь в одном месте — на возможном числе попарно несовместимых («перекрывающихся») полимеров, фигурирующем в оценке величины $a(X)$ (см. следствие 3.9).

Определение 3.10. Через $|\gamma|$ мы обозначаем число связей в полимере γ , рассматриваемом как геометрический объект (т. е. подмножество решетки \mathbb{Z}^d).

Лемма 3.11. Пусть задано γ . Число полимеров размера s , несовместимых с γ , не превосходит $|\gamma| C^s$, где постоянная C зависит от размерности и типа рассматриваемых полимеров.

Доказательство. Этот результат хорошо известен. Он вытекает, например, из задачи Эйлера о кёнигсбергских мостах¹⁾. А именно, произвольный полимер γ есть множество

¹⁾ Размышления Эйлера над задачей о семи кёнигсбергских мостах привели его, как известно, к понятию эйлеровой характеристики. — *Прим. ред.*

связей, связанных в некотором смысле, и, выбрав произвольную связь в γ , мы можем двигаться по γ вдоль пути, который проходит каждую связь не более двух раз. Число таких путей длины L не превосходит $C^{L/2} \leq C^s$. Множитель $|\gamma|$ появляется благодаря свободе в выборе начальной точки. \square

Теорема 3.12 (см. Малышев [42]). Существует такая постоянная $K \leq 4/e + \log C$, что

$$\prod_{\gamma} C^X(\gamma)^{X(\gamma)} \leq X! e^{K \sum_{\gamma} |\gamma| X(\gamma)}.$$

Доказательство. Будем писать n вместо $n(X)$. Положим

$$\sum_{|\gamma|=r} X(\gamma) \equiv n_r, \quad (3.37)$$

$$\sum_r \frac{n_r}{n} r \equiv d \quad (3.38)$$

(«средний размер» полимера в X). Далее, пусть

$$r_0 \equiv \inf_{\gamma} |\gamma|. \quad (3.39)$$

Предыдущая лемма утверждает, что

$$- \sum_{|\gamma|=r} g(\gamma, \gamma') \leq |\gamma'| C^r,$$

и, следовательно,

$$\sum_{|\gamma|=r} C^X(\gamma) < - \sum_{\substack{\gamma' \\ |\gamma'|=r}} g(\gamma, \gamma') X(\gamma') \leq n d C^r. \quad (3.40)$$

В силу неравенства, связывающего среднеарифметическое и среднегеометрическое,

$$\begin{aligned} b(X) &\equiv \sum_{\gamma} X(\gamma) \log C^X(\gamma) - \sum_{\gamma} X(\gamma) \log X(\gamma) \\ &= \sum_{r \geq r_0} n_r \sum_{|\gamma|=r} \frac{X(\gamma)}{n_r} \log \frac{C^X(\gamma)}{X(\gamma)} \\ &\leq \sum_{r \geq r_0} n_r \log \sum_{|\gamma|=r} \frac{1}{n_r} C^X(\gamma) \\ &\leq \sum_{r \geq r_0} n_r \log \frac{n d C^r}{n_r} \end{aligned} \quad (3.41)$$

(на последнем шаге мы воспользовались (3.40)). Перепишем это неравенство в виде

$$\frac{1}{nd} b(X) \leq \log C + \frac{\log d}{d} - \frac{1}{d} \sum_{r \geq r_0} \frac{n_r}{n} \log \frac{n_r}{n}. \quad (3.42)$$

Так как

$$\log X! \geq -n + \sum X(\gamma) \log X(\gamma), \quad (3.43)$$

то нам нужно оценить

$$\begin{aligned} \tilde{K} &\equiv \frac{1}{nd} \sup_{n, d \text{ фиксированы}} \left(\sum_{\gamma} X(\gamma) \log C^{X(\gamma)} - \log X! \right) \\ &\leq \sup_{n, d \text{ фиксированы}} \left(\frac{1 + \log d}{d} + \log C - \frac{1}{d} \sum_{r \geq r_0} \frac{n_r}{n} \log \frac{n_r}{n} \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Это сводится к некоторой энтропийной оценке для идеального бозе-газа. Мы должны максимизировать удельную энтропию

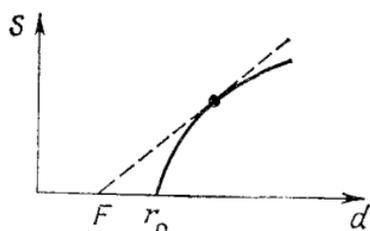


Рис. 7.

$$S \equiv - \sum_{r \geq r_0} \frac{n_r}{n} \log \frac{n_r}{n}$$

при ограничениях

$$\sum n_r = n, \quad \frac{1}{n} \sum r n_r = d$$

(d играет роль удельной внутренней энергии).

Хорошо известно, да и нетрудно показать непосредственно, что это приводит к распределению Гиббса

$$\frac{n_r}{n} = e^{-\beta(r-r_0)} (1 - e^{-\beta}),$$

откуда следует, что

$$S = -\log(1 - e^{-\beta}) + \frac{\beta e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}}, \quad (3.45)$$

$$d = r_0 + \frac{e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}}. \quad (3.46)$$

Отсюда легко вывести следующую оценку (используя тот факт, что $r_0 \geq 1$):

$$\frac{S}{d} \leq \frac{2}{e}. \quad (3.47)$$

[Если стремиться получить постоянные лучше, то нужно проделать немного больше работы. А именно, S является выпуклой функцией от d (рис. 7), так как теплоемкость неот-

рицательна. Следовательно, S/d максимально, когда «свободная энергия»

$$F = d - \frac{S}{\beta} = r_0 + \log(1 - e^{-\beta})$$

обращается в нуль, т. е. при $\beta = \beta_0 = -\log(1 - e^{-r_0})$:

$$\begin{aligned} \sup \frac{S}{d} &= \frac{r_0 e^{r_0} - (e^{r_0} - 1) \log(e^{r_0} - 1)}{e^{r_0} + r_0 - 1} \\ &\leq r_0 e^{-r_0} - (1 - e^{-r_0}) \log(1 - e^{-r_0}). \end{aligned}$$

Учитывая (3.44) и неравенство

$$\frac{1 + \log d}{d} \leq \frac{2}{e},$$

мы видим, что можно взять (для $r_0 \geq 1$)

$$K = \frac{4}{e} + \log C. \quad \square$$

З а м е ч а н и е. Из доказательства видно, что для $r_0 \geq 1$ постоянная K может быть уменьшена, но никогда не может быть взята меньшей $\log C$.

Из теоремы 3.12 вытекает следующий результат о сходимости:

Теорема 3.13. Пусть $|z(\gamma)| \leq \exp(-b|\gamma|)$, $b > b_0 = 2 + K + \log C$, X_0 — фиксированное множество полимеров. Положим

$$|X_0| = \sum_{\gamma \in X_0} |\gamma|.$$

Существует такая постоянная c , что

$$\sum'_X z^X \frac{a(X)}{X!} \leq c |X_0| e^{-b},$$

где \sum' обозначает сумму по всем таким X , для которых

$$\sum_{\gamma_0 \in X_0} g(\gamma, \gamma_0) X(\gamma) \neq 0.$$

Доказательство. По теореме 3.12

$$\sum'_X z^X \frac{a(X)}{X!} \leq \sum'_X \prod_{\gamma} e^{(K-b)|\gamma|} X(\gamma).$$

Выражение справа можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \sum'_{\gamma_1, \dots, \gamma_l} \frac{1}{l!} \sum_{n_1, \dots, n_l \geq 1} \prod_{i=1}^l e^{-(b-K)n_i |\gamma_i|} \\ = \sum_{l \geq 1} \sum'_{\gamma_1, \dots, \gamma_l} \frac{1}{l!} \prod_{i=1}^l \frac{e^{-(b-K)|\gamma_i|}}{1 - e^{-(b-K)|\gamma_i|}} \\ \leq \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l!} (1 - e^{K-b})^{-l} \sum'_{\gamma_1, \dots, \gamma_l} \prod_{i=1}^l e^{-(b-K)|\gamma_i|}, \end{aligned}$$

где \sum' обозначает сумму по всем упорядоченным наборам $\gamma_1, \dots, \gamma_l$, для которых

$$\sum_{\gamma_0 \in X_0} \sum_{i=1}^l g(\gamma_i, \gamma_0) \neq 0$$

(и, конечно, $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ соответствуют связному графу). Если мы зададим размеры полимеров $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ равными $k_1 = |\gamma_1|, \dots, k_l = |\gamma_l|$, то по лемме 3.11 существует самое большое

$$|X_0| l \left(\sum_{i=1}^l k_i \right) C^{\sum_{i=1}^l k_i} \leq l! |X_0| e^{(1+\log C) \sum_{i=1}^l k_i}$$

таких наборов. Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \sum' z^X \frac{a(X)}{X!} \right| &\leq |X_0| \sum_{l \geq 1} l \sum_{\substack{k_1, \dots, k_l \\ k_i \geq 1}} (1 - e^{K-b})^{-l} e^{(1+K+\log C-b) \sum_{i=1}^l k_i} \\ &\leq |X_0| \sum_{l \geq 1} (1 - e^{K-b})^{-l} l \left(\frac{e^{1+K+\log C-b}}{1 - e^{1+K+\log C-b}} \right)^l \\ &= |X_0| \sum_{l \geq 1} l \left(\frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - C^{-1}e^{-2}} \right)^l \cdot e^{l(b_0-b)} \\ &\leq \text{const} \cdot e^{-b+b_0}. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 3.13 дает достаточное условие сходимости кластерного разложения (3.35). Для разложения (3.33) необходимо привлечь небольшое дополнительное соображение. Так как один из полимеров, скажем γ_A , будет состоять из некоторого числа обычных полимеров вместе с носителем наблюдаемой A , нужна оценка числа таких конфигураций для заданного γ_A . Легко видеть, что это число не превосходит

$|A|C^{|Y_A|}$. Далее мы можем действовать, как раньше. Отметим важное следствие полученного результата:

Следствие 3.13'. Пусть

$$|z(\gamma)| \leq e^{-b|\gamma|},$$

где b достаточно велико ($b > 4/e + 2 + 2\log C$). Тогда кластерные разложения (3.33) и (3.35) сходятся абсолютно и равномерно в Λ . Предел при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^d$ существует, не зависит от граничных условий и является аналитической функцией основных констант взаимодействия в области, где выполнена предположенная оценка для $z(\gamma)$.

Доказательство стандартно и после всего сказанного совершенно тривиально. \square

Замечание по корректуре. После того как рукопись этой книги уже была сдана в печать появился препринт К. Каммароты, изданный Римским университетом («Убывание корреляций в системах с неограниченным спином с бесконечным радиусом взаимодействия»; статья должна появиться в *Comm. Math. Phys.*¹⁾. Каммарота следует стратегии, аналогичной использованной здесь при доказательстве сходимости кластерных разложений; он использует комбинаторику в некотором смысле более эффективно. Поэтому я хочу обрисовать его метод применительно к нашей ситуации.

Вместо того чтобы применять теоремы 3.12 и 3.13, можно действовать следующим образом. Сначала произведем суммирование по всем мультииндексам (кластерам) X , возникающим из фиксированного (связного) графа, а затем просуммируем по графам. Суммирование по связным графам может быть заменено двойным суммированием: сначала по всем графам, содержащим фиксированное дерево T , а затем — по деревьям, в предположении что мы подправляем вычисления, деля на $|\mathcal{F}(G(X))|$ (см. теорему 3.6).

В результате получим

$$\sum_X' \frac{a(X)}{X!} z^X = \sum_T \sum_{X: G(X) \supset T} \frac{1}{X!} \frac{a(G(X))}{|\mathcal{F}(G(X))|} z^X,$$

и, следовательно, по теореме 3.6

$$\left| \sum_X' \frac{a(X)}{X!} z^X \right| \leq \sum_T \sum_{X: G(X) \supset T} \frac{1}{X!} |z^X| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{T_n} \omega(T_n),$$

¹⁾ Она уже появилась: 85 (1982), № 4, с. 517–528. — *Прим. ред.*

где \sum_{T_n} обозначает сумму по всем деревьям с n вершинами, а

$$\omega(T_n) \equiv \sum_{X: G(X) \supset T_n} \frac{n!}{X!} |z^X|.$$

Удобно переписать последнее выражение так:

$$\omega(T_n) = \sum'_{G(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \supset T_n} \left| \prod_{i=1}^n z(\gamma_i) \right|.$$

Напомним, что штрих при знаке суммы означает, что один из полимеров должен быть несовместим с фиксированным множеством полимеров X_0 ; поэтому мы можем оценить $\omega(T_n)$, предположив, что такой полимер совпадает с γ_1 , а затем умножив результат на n . Напомним также, что по лемме 3.11

$$\frac{1}{|Y_0|} \sum_{g(\gamma, \gamma_0) = -1} |z(\gamma)| \leq (Ce^{-b})^k \equiv \varepsilon^k.$$

Подставляя это неравенство в формулу для $\omega(T_n)$, получаем

$$\omega(T_n) \leq n \sum_{k, \dots, k_n \geq 1} |X_0| \prod_{i=1}^n e^{k_i} \prod_{i=1}^n k_i^{C^{T_n}(\gamma_i)-1}.$$

Воспользовавшись оценкой

$$\sum_{k \geq 1} e^k k^p \leq p! \frac{e}{1-e},$$

справедливой при $\varepsilon < e^{-1}$, находим, что

$$\omega(T_n) \leq \sum_{i=1}^n (C^{T_n}(\gamma_i) - 1)! \left(\frac{e}{1-\varepsilon} \right)^n |X_0| n.$$

По формуле Кэли число деревьев с вершинами $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ и фиксированными $C^{T_n}(\gamma_i) \equiv d_i$, $i = 1, \dots, n$, равно

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdot \dots \cdot (d_n-1)!},$$

а из одной простой комбинаторной оценки следует, что число последовательностей d_1, \dots, d_n , для которых $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ (что имеет место в нашем случае), не превосходит

$$2^{2n-3}.$$

Собирая всё вместе, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{T_n} \omega(T_n) &\leq \sum_{n > 1} \frac{n(n-2)!}{n!} 4^{n-1} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^n |X_0| \\ &= -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} |X_0| \log \left(1 - \frac{4\varepsilon}{1-\varepsilon} \right), \end{aligned}$$

откуда следует сходимость кластерного разложения, при условии что $\varepsilon < 1/5$, или

$$b > \log C + \log 5.$$

Это — значительное улучшение оценки, данной в следствии 3.13'; последнюю оценку можно еще дальше улучшить, если воспользоваться тем, что размер минимального полимера $r_0 > 1$.

с. Результаты: следствия сходимости кластерного разложения

Сходимость кластерных разложений позволяет получать оценки сверху и снизу для средних значений различных типов наблюдаемых, таких как петли Вильсона или петли г'Хоофта, исходя из оценок для активности полимеров. Мы находим различные области, в которых сходятся разные типы разложений, при этом качественное поведение средних значений тоже может быть различным. Это приводит к разнообразным фазовым диаграммам для наших моделей, которые мы приводим в конце главы. Сначала сосредоточим внимание на чистых теориях Янга — Миллса.

Теорема 3.14. В чистой решёточной теории Янга — Миллса существует «высокотемпературная» фаза (g_0^2 достаточно велико), обладающая следующими свойствами:

1) *Сильное кластерное свойство* (см. [44]):

$$|\langle A_1; \dots; A_n \rangle| \leq C(\|A_1\|, \dots, \|A_n\|) \exp(-mt(A_1, \dots, A_n)),$$

где $C(\cdot, \dots, \cdot)$ зависит от некоторых трансляционно-инвариантных норм наблюдаемых A_1, \dots, A_n ; $t(A_1, \dots, A_n)$ — длина наименьшего дерева, соединяющего A_1, \dots, A_n .

2) Петля Вильсона удовлетворяет закону площади, если она принадлежит представлению группы G , нетривиальному на центре группы G . Более точно, пусть C — замкнутая петля, $[g_C]$ — класс сопряженности соответствующего оператора голономии, χ_τ — характер, нетривиальный на центре группы G , $A(C)$ — минимальное число плакетов, содержащихся в поверхности, имеющей C своей границей. Тогда

$$|\langle \chi_\tau(g_C) \rangle| \equiv |\langle W_\tau(C) \rangle| \leq \text{const} \cdot e^{-\alpha_\tau A(C)} \quad (\alpha_\tau > 0).$$

3) Петля т'Хоофта удовлетворяет закону периметра для $d = 4$, т. е.

$$|\langle D_\omega(C) \rangle| \geq \text{const} \cdot \exp(-\beta_\omega |C|);$$

в случае $d = 3$

$$|\langle D_\omega(S_{xy}) \rangle| \geq \text{const} > 0.$$

4) Если представление τ , фигурирующее в выражении для петли Вильсона, и представление σ , появляющееся в выражении для действия, таковы, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ представление $\tau \times \sigma^n \times \sigma^{-n}$ содержит тривиальное представление, то петля Вильсона удовлетворяет закону периметра:

$$|\langle W_\tau(C) \rangle| \geq \text{const} \cdot e^{-\beta_\tau |C|} \quad (d \geq 3).$$

(Пример: $G = SU(3)$, σ — фундаментальное представление, τ — октетное представление.)

З а м е ч а н и я. Свойство 2) было отмечено уже Вегнером [5] для $G = \mathbb{Z}_2$ и сформулировано в более общей форме Вильсоном [6] (без указания ограничения, касающегося поведения представления на центре группы); доказательство дано в [19].

Свойство 3) установлено т'Хоофтом [26]; для $G = \mathbb{Z}_2$ оно было получено еще Вегнером в [5].

Свойство 4) установлено Глиммом и Джаффе [45].

Свойство 1) означает, конечно, существование массовой щели.

Свойство 2) означает, как объяснялось ранее, «удержание кварков».

Свойство 3) означает разлетание (неудержание) магнитных монополей для $d = 4$ и своего рода «конденсацию дефектов» — для $d = 3$.

Свойство 4) выражает тот факт, что, например, источники внешних глюонов экранированы динамическими глюонами; считается, что этот цветовой защитный механизм мешает физическим глюонам стать наблюдаемыми (см. Макк [86]).

Поведение m («массы»), α («напряжения струны») и β в главном порядке легко может быть вычислено; m , α ведут себя как $O(\log \text{Re } g_0^{-2})$, β — как $O(\text{Re } g_0^{-2})$.

Мюнстер [46] вычислил α с точностью до 7-го порядка по параметру $1/g_0^2$.

Доказательство. Мы приведем доказательство для действия Вильсона; обобщение на другие случаи получается непосредственно.

Свойство 1) следует из сделанного после равенства (3.33) замечания о том, что в кластерное разложение (3.33) вносят

вклад только такие мультииндексы X , для которых $X(\gamma) > 0$ по крайней мере для «дерева» полимеров, соединяющего носители наблюдаемых A_1, \dots, A_n , и из того наблюдения, что

$$|z_{A_1, \dots, A_n}^X| \leq \exp \left\{ -b_{A_1, \dots, A_n} \sum_{\gamma} X(\gamma) |\gamma| \right\},$$

где $b_{A_1, \dots, A_n} = O(1/g_0^2)$, в сочетании с теоремой 3.13.

Свойство 2) аналогичным образом следует из приводимой ниже леммы.

Лемма 3.15. 1) $z_{W_{\tau}(C)}(\gamma) = 0$, если γ не содержит поверхности, граница которой есть C .

$$2) |z_{W_{\tau}(C)}(\gamma)| \leq \exp(-bA(C)).$$

Доказательство. Утверждение 1) следует из того, что

$$\int \prod_{P \in \gamma} \rho_{\partial P} W_{\tau}(C) \prod_{\langle xy \rangle} dg_{xy} = 0, \quad (3.48)$$

если γ таково, как указано в формулировке леммы. Для доказательства (3.48) заметим, что справедлива следующая простая формула (см. [47]):

$$\int_G dg F(g) = \int_G dg \int_Z d\omega F(\omega g),$$

где G — произвольная группа и Z — ее центр. Поэтому (3.48) следует из такого более сильного утверждения:

$$\int \prod_{P \in \gamma} \rho_P(\omega_{\partial P} g_{\partial P}) \chi_{\tau}(\omega_C) \prod_{\langle xy \rangle} d\omega_{xy} = 0, \quad (3.49)$$

если γ имеет указанный выше вид.

Подставим в последнюю формулу разложение Фурье функции $\prod_{P \in \gamma} \rho_P(\omega_{\partial P} g_{\partial P}) \equiv R(\omega)$, рассматриваемой как функция на центре группы $G^{|\gamma|}$. Мы получим линейную комбинацию членов вида

$$\int \prod_{P \in \gamma} \chi_{\tau_P}(\omega_{\partial P}) \prod_{b \in C} \chi_{\tau}(\omega_b) \prod_{\langle xy \rangle} d\omega_{xy}, \quad (3.50)$$

которые отличны от нуля, только если каждому ребру отвечает тривиальное представление.

Определив «границу» $\partial\gamma$ как множество рёбер, для которых

$$\prod_{\substack{P \\ \langle xy \rangle \in P}} \chi_{\tau_P}(\omega) \neq 1,$$

мы видим, что

$$\prod_{P \in \gamma} \chi_{\tau_P}(\omega_{\partial P}) = \prod_{\langle xy \rangle \in \partial \gamma} \left(\sum_{\substack{P \\ \langle xy \rangle \in P}} \chi_{\tau_P}(\omega_{\langle xy \rangle}) \right)$$

(«теорема Стокса»).

Тем самым (3.50) может быть отлично от нуля, только если $\partial \gamma = C$, откуда и следует утверждение 1).

Утверждение 2) вытекает из неравенства $|z_{W(C)}(\gamma)| \leq \leq \exp(-b|\gamma|)$ и из 1).

Доказательство леммы 3.15 окончено. \square

З а м е ч а н и е. Из предыдущего следует также, что $\alpha_\tau = \infty$, если представление τ нетривиально на центре, но представление σ , входящее в выражение для действия, тривиально на центре.

Продолжим доказательство теоремы 3.14.

Для доказательства свойства 3) нам надо воспользоваться разложением (3.35). Рассмотрим случай $d=3$. Пусть $S = = {}^*S_{\langle xy \rangle}$ — множество плакетов, изображенное на рис. 8

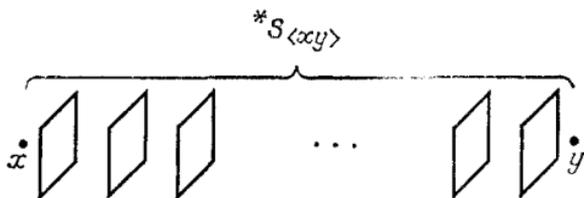


Рис. 8.

(x, y — узлы двойственной решетки). Используя очевидные обозначения, запишем

$$\langle xy \rangle = \partial S_{\langle xy \rangle}$$

(т. е. пара $\langle xy \rangle$ — граница струны $S_{\langle xy \rangle}$). Заметим, что замена $g_{\partial P} \rightarrow \omega g_{\partial P}$ для $P \in {}^*S_{\langle xy \rangle}$ может быть произведена путем умножения некоторых переменных g_{xy} , соответствующих рёбрам, на ω , в предположении что полимер γ не пересекает кограницы множества ${}^*S_{\langle xy \rangle}$ (состоящей из элементарных кубов с центрами в точках x и y). Поэтому, в силу инвариантности меры Хаара, для такого полимера γ

$$z_{\omega, S}(\gamma) = z_{1, \emptyset}(\gamma).$$

Следовательно, главный вклад в разложение (3.35) будут вносить мультииндексы («кластеры») $\delta_{\gamma\gamma_x}$ или $\delta_{\gamma\gamma_y}$, которые обращаются в нуль всюду, кроме единственного полимера γ_x или γ_y , состоящего из элементарного куба, двойственного к x

или y соответственно: $\delta_{\gamma\gamma_x}(\gamma_x) = 1$ и $\delta_{\gamma\gamma_y}(\gamma_y) = 1$. Таким образом, главные члены ведут себя нужным образом.

Для получения оценки снизу нам понадобится один промежуточный результат об остаточном члене.

Предложение 3.16. Пусть $\operatorname{Re}(1/g_0^2)$ достаточно велико. Тогда

$$R \equiv \left| \sum_{X \neq \delta_{\gamma\gamma_x}, \delta_{\gamma\gamma_y}} (z_{\omega, S}^X - z_{\mathbb{1}, \emptyset}^X) \frac{a(X)}{X!} \right| \\ \leq \left| z_{\omega, S}(\delta_{\gamma\gamma_x}) - z_{\mathbb{1}, \emptyset}(\delta_{\gamma\gamma_x}) \right| c e^{-b} \\ (b = O(\operatorname{Re} \log g_0^{-2})).$$

Доказательство представляет собой простую вариацию доказательства теоремы 3.13. Надо только заметить следующее. Пусть $\omega_{\partial P} = \omega$ для $P \in {}^*S$ и $\omega = \mathbb{1}$ для $P \notin {}^*S$. Тогда

$$z_{\omega, S}(\gamma) - z_{\mathbb{1}, \emptyset}(\gamma) = \\ \int dg \left[\prod_{P \in \gamma} \left(e^{\frac{1}{2g_0^2 \chi(\mathbb{1})} \chi(g_{\partial P}) \chi(\omega_{\partial P})} - 1 \right) - \prod_{P \in \gamma} \left(e^{\frac{1}{2g_0^2} \chi(g_{\partial P})} - 1 \right) \right]. \quad (3.51)$$

Представив эту разность произведений в виде суммы разностей произведений, различающихся лишь одним сомножителем, и, воспользовавшись тем фактом, что для больших g_0^2 найдется такое $c > 1$, при котором

$$\left| e^{\frac{1}{2g_0^2} \chi(g) \frac{\chi(\omega)}{\chi(\mathbb{1})}} - 1 \right| \leq c \left| e^{\frac{1}{2g_0^2} \chi(g)} - 1 \right|,$$

получим

$$z_{\omega, S}(\gamma) - z_{\mathbb{1}, \emptyset}(\gamma) | \\ \leq \sum_{P \in {}^*S \cap \gamma} c^{|\gamma|} \int dg \prod_{\substack{P' \in \gamma \\ P' \neq P}} \left| e^{\frac{1}{2g_0^2} \chi(g_{\partial P'})} - 1 \right| \\ \times \left| e^{\frac{1}{2g_0^2} \chi(g_{\partial P}) \frac{\chi(\omega_{\partial P})}{\chi(\mathbb{1})}} - e^{\frac{1}{2g_0^2} \chi(g_{\partial P})} \right| \\ \leq \operatorname{const} \cdot |\gamma| \left| \frac{c}{2g_0^2} \right|^{|\gamma|} \left(1 - \frac{\chi(\omega)}{\chi(\mathbb{1})} \right) \\ \leq \operatorname{const}' \cdot \left| \frac{c}{2} g_0^{-2} \right|^{|\gamma|} \left(1 - \frac{\chi(\omega)}{\chi(\mathbb{1})} \right).$$

Так как

$$|z_{\omega, S}(\delta_{\gamma\gamma_x}) - z_{\mathbb{1}, \emptyset}(\delta_{\gamma\gamma_x})| = O(g_0^{-6}),$$

мы заключаем, что

$$|z_{\omega, S}(\gamma) - z_{\mathbb{1}, \emptyset}(\gamma)| \leq \text{const} \cdot \left| \frac{g_0}{2} \right|^{-2|\gamma|+6} |z_{\omega, S}(\delta_{\gamma\gamma_x}) - z_{\mathbb{1}, \emptyset}(\delta_{\gamma\gamma_x})| c^{|\gamma|}. \quad (8.52)$$

Для оценки разности $z_{\omega, S}^X - z_{\mathbb{1}, \emptyset}^X$ воспользуемся еще раз таким же приемом. В результате получим

$$z_{\omega, S}^X - z_{\mathbb{1}, \emptyset}^X \leq \text{const} \cdot \left| \frac{g_0^2}{2c} \right|^{-\sum_{\gamma} X(\gamma)|\gamma|} |z_{\omega, S}(\delta_{\gamma\gamma_x}) - z_{\mathbb{1}, \emptyset}(\delta_{\gamma\gamma_x})|. \quad (3.53)$$

Теперь можно применить теорему 3.13. Предложение 3.16 доказано. \square

Предложение 3.16 гарантирует, что главные члены действительно вносят основной вклад равномерно по S , так что в

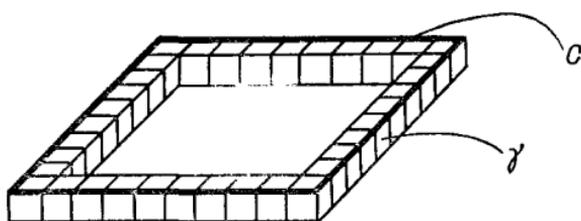


Рис. 9.

трехмерном случае теоремы 3.14 свойство 3) доказано. Для $d = 4$ ситуация вполне аналогична, только геометрия в этом случае несколько сложнее. Главные члены происходят теперь от полимеров, которые являются элементарными кубами, двойственными к рёбрам, содержащимся в C , и число таких членов есть $O(|C|)$. Остаток может быть оценен, как и раньше.

Для доказательства свойства 4) используем тот же метод. При сделанных предположениях существует полимер γ , дающий главный вклад и состоящий из тора, содержащего C (рис. 9), так что $|\gamma| = O(|C|)$. Главный член разложения имеет вид $\exp(-\beta_{\tau}|C|)$. Чтобы оценить остаток, покажем, что для $\gamma' \supseteq \gamma$

$$|z_{W_{\tau}}(\gamma')| \leq |z_{W_{\tau}}(\gamma)| \left(\frac{1}{2g_0^2} \right)^{|\gamma'| - |\gamma|}. \quad (3.54)$$

Ясно, что это неравенство будет выполнено, если вычитанием подходящей постоянной из действия мы добьемся, чтобы $\rho_{\partial P} \geq 0$, ибо тогда

$$z_{W_\tau}(\gamma') = \int \prod_{P \in \gamma} \rho_{\partial P} \prod_{P \in \gamma' \setminus \gamma} \rho_{\partial P} dg \leq \left\| \prod_{P \in \gamma' \setminus \gamma} \rho_{\partial P} \right\|_\infty z_{W_\tau}(\gamma)$$

(заметим, что g_0^2 должно быть здесь вещественным).

Этим завершается доказательство теоремы 3.14. \square

Обратимся теперь к «низкотемпературной» области для чистых теорий Янга — Миллса.

Теорема 3.17. В чистой решёточной теории Янга — Миллса с конечной калибровочной группой G существует «низкотемпературная» фаза ($\text{Re } g_0^{-2}$ достаточно велико) со следующими свойствами:

1) *Сильное кластерное свойство:*

$$|\langle A_1; \dots; A_n \rangle| \leq C(\|A_1\|, \dots, \|A_n\|) \exp(-mt(A_1, \dots, A_n))$$

(обозначения см. в теореме 3.14).

2) Петля Вильсона удовлетворяет закону периметра, т. е.

$$|\langle \chi_\tau(g_C) \rangle| = |\langle W_\tau(C) \rangle| \geq \text{const} \cdot e^{-\beta_\tau |C|}$$

при $d \geq 3$.

3) Для петли т'Хоофта в случае $d = 4$ выполняется закон площади, т. е.

$$|\langle D_\omega(C) \rangle| \leq \text{const} \cdot e^{-\alpha_\omega A(C)} \quad (\alpha_\omega > 0),$$

где $A(C)$ — число плакетов двойственной решетки в минимальной поверхности, ограниченной C . Для $d = 3$ точечные дефекты обладают экспоненциальной кластерностью (вихри являются массивными).

З а м е ч а н и я. Свойство 2) было отмечено для $C = \mathbb{Z}_2$ Вернером [5] и обсуждалось также в качестве одной из возможностей Вильсоном [6]. набросок доказательства для $d = 3$ и $G = \mathbb{Z}_2$ дан Галлавогги и др. [38]. Свойство 3) было сформулировано т'Хоофтом [26]. Для абелевых групп G уже довольно давно было известно, что теорема 3.17 получается с помощью преобразования двойственности из теоремы 3.14 (см. [5]). Для неабелевых групп, однако, это трудно (а может быть, и невозможно) сделать. Интерпретация свойств 2) и 3) следующая: кварки не удерживаются, а монополи удерживаются.

Конечность группы G в действительности не существенна, важна только ее дискретность; но для бесконечных дискрет-

ных групп G разложения должны быть соответствующим образом преобразованы (см. раздел 4с).

Доказательство. Мы укажем лишь некоторые общие идеи, так как детали доказательства те же, что и в случае теоремы 3.14.

Свойство 1) по существу доказывается так же, как и свойство 1) в теореме 3.14.

Свойство 2). В случае $d = 3$ главные полимеры — это вихревые линии, охватывающие петлю (рис. 10) (см. Макк [48], Гёпферт [96]). Воспользуемся кластерным разложением типа

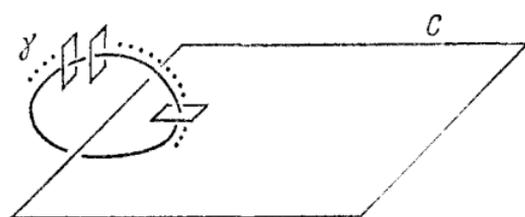


Рис. 10.

разложения (3.35) для петли Т'Хоофта, т. е. запишем

$$\log Z_{\Lambda}(W_{\tau}) - \log Z_{\Lambda} = \sum_X (z_{W_{\tau}}^X - z_1^X) \frac{a(X)}{X!}. \quad (3.55)$$

Число главных членов здесь равно $O(|C|)$; оценка остатка проводится так же, как и в доказательстве свойства 3) в предыдущей теореме (в действительности здесь это даже легче, так как отсутствует интегрирование).

Свойство 3). Применим разложение типа (3.32) для параметра беспорядка:

$$\langle D_{\omega}(S) \rangle_{\Lambda} = Z_{\Lambda}(\omega, S) / Z_{\Lambda} = \frac{d}{d\alpha} \log (Z_{\Lambda} + \alpha Z_{\Lambda}(\omega, S)) \Big|_{\alpha=0}. \quad (3.56)$$

$Z_{\Lambda}(\omega, S)$ разлагается по дефектам аналогично $Z_{\Lambda}(1, S) = Z_{\Lambda}$, но ограничения на границе ∂S будут другими ввиду сингулярности «калибровочного преобразования» ω . В частности, всегда будет присутствовать дефект γ , имеющий ту же границу, что и S .

Разлагая в (3.56) логарифм и дифференцируя, получаем

$$\langle D_{\omega}(S) \rangle_{\Lambda} = \sum'_X z_{\omega, S}^X \frac{a(X)}{X!}, \quad (3.57)$$

где суммирование \sum' производится по всем мультииндексам X , обладающим следующим свойством:

Существует отмеченный полимер (дефект) γ_0 , для которого $X(\gamma_0) = 1$ и который получается из обычного допустимого дефекта при помощи сингулярного калибровочного преобразования ω ; все другие дефекты γ с $X(\gamma) > 0$ подчиняются немодифицированному ограничению (т. е. они должны получаться из калибровочного поля).

Отмеченный дефект дает множитель

$$|z_{\omega, S}(\gamma_0)| = e^{-\frac{\beta}{g_0^2} |\gamma_0|},$$

где

$$\text{для } d=4: |\gamma_0| \geq A(C) \quad (C = \partial S),$$

$$\text{для } d=3: |\gamma_0| \geq \text{dist}(x, y) \quad (\langle xy \rangle = \partial S),$$

так что для $d=4$ мы получаем закон площади, а для $d=3$ — экспоненциальную кластерность, как и утверждалось. \square

Теперь мы хотим включить поля материи в наши модели. Сначала рассмотрим модели Хиггса (без фермионов) с так называемым полным нарушением симметрии. Это значит, что стационарная подгруппа произвольной точки ϕ_0 , минимизирующей $V(|\phi|)$, тривиальна. Мы сделаем также упрощающее (несущественное) предположение, что $U_N(G)$ действует транзитивно на этом пространстве минимумов.

Вот примеры такой ситуации:

1) $G = U(1)$, $\phi(x) \in \mathbb{C}$, ϕ преобразуется по фундаментальному представлению.

2) $G = SU(2)$, ϕ преобразуется по фундаментальному представлению.

3) $G = SO(3)$, ϕ состоит из пары компонент в векторном представлении; предполагается, что потенциал достигает минимума на некоторой ортогональной паре.

Для простоты наложим формально на V следующее ограничение: будем рассматривать поля ϕ фиксированной длины (скажем, $|\phi|=1$). Это несущественно, но позволяет избавиться от некоторых технических усложнений (обсуждение более общей ситуации см. в [19]). Тогда справедлив следующий результат:

Теорема 3.18. В модели Хиггса с полным нарушением симметрии и $|\phi|=1$ «высокотемпературное» кластерное разложение сходится в области $\{\lambda, g_0^2: \lambda \text{ и } g_0^2 \text{ достаточно малы или } \lambda g_0^2 \text{ достаточно велико}\}$.

В этой области имеют место:

1) экспоненциальная кластерность;

2) закон площади для петли т'Хоофта в случае $d=4$, экспоненциальная кластерность для дефектов (монополей) в случае $d=3$ и $\lambda > 0$;

3) закон периметра для петли Вильсона при $\lambda > 0$.

З а м е ч а н и я. 1. Наиболее характерная особенность ситуации состоит в расширении области сходимости кластерного

разложения на малые g_0^2 , в предположении что λ велико. Это — проявление механизма Хиггса. Этот факт был доказан в [19] и обсуждался впоследствии в [49].

2. Благодаря наличию поля Хиггса переменные беспорядка зависят от всего множества S , на котором были модифицированы переменные, отвечающие плакетам, а не только от его кограницы. Поэтому «петля т'Хоофта» в действительности зависит от поверхности, ограниченной этой петлей.

Доказательство. Условие полного нарушения симметрии вместе с нашим предположением о транзитивности означают, что пространство, на котором «живут» поля Хиггса, гомеоморфно группе G , и мы можем заменить поле ϕ полем, принимающим значения в G .

(Зафиксируем $\phi_0 \in \mathcal{U}_H$; тогда однозначно определена точка $h_x \in G$, такая что $U_H(h_x)\phi_0 = \phi(x)$.)

Поле Хиггса может быть полностью уничтожено благодаря так называемой U -калибровке. Последнее означает, что мы делаем калибровочное преобразование

$$\begin{aligned} g_{xy} &\rightarrow h_x^{-1} g_{xy} h_y, \\ \phi(x) &\rightarrow U_H(h_x^{-1}) \phi(x) = \phi_0. \end{aligned}$$

В преобразованных переменных действие Хиггса (с точностью до постоянной) имеет вид

$$S_H(\{g_{xy}\}) = \lambda \sum_{\langle xy \rangle} (1 - (\phi_0, U_H(g_{xy}) \phi_0)). \quad (3.58)$$

Но $1 - (\phi_0, U_H(g_{xy}) \phi_0) \geq 0$ и $= 0$ только для $g = 1$; это значит, что действие Хиггса обладает свойством увеличения веса окрестности единицы в пространстве калибровочных полей, аналогично магнитному полю в спиновых системах. Это приводит к эффективному возрастанию g_0^2 и, следовательно, к возникновению массы даже при малых g_0^2 .

Заметим, что в S_H различные связи не взаимодействуют; поэтому мы можем включить e^{-S_H} в свободное среднее и произвести кластерное разложение только по отношению к действию Янга — Миллса. Введем вероятностную меру

$$d\sigma(g) = \frac{1}{C(\lambda)} e^{\lambda((\phi_0, U_H(g)\phi_0)^{-1})} dg \quad (3.59)$$

и положим

$$\langle A \rangle_{0, \lambda} = \int A \prod_{\langle xy \rangle} d\sigma(g_{xy}). \quad (3.60)$$

Тогда среднее

$$\langle A \rangle_{\Lambda} = \frac{1}{Z_{\Lambda}} \langle A e^{-S_{\gamma, \Lambda}} \rangle_{0, \Lambda}$$

может быть разложено, как и прежде (см. (3.32)). Полимерами будут теперь как раз связные множества плакетов, а активности будут равны

$$z_A(\gamma) = \langle A \prod_{P \in \gamma} \rho_{\partial P} \rangle_{0, \Lambda}. \quad (3.61)$$

Согласно теореме 3.13, условие сходимости состоит в том, что

$$\left| \langle A \prod_{P \in \gamma} \rho_{\partial P} \rangle_{0, \Lambda} \right| \leq e^{-b|\gamma|}, \quad (3.62)$$

где b достаточно велико. В силу неравенства Гёльдера

$$\left| \int A \prod_{P \in \gamma} \rho_{\partial P} \prod_{(xy)} d\sigma(g_{xy}) \right| \leq \|A\|_{\infty} \left(\int |\rho_{\partial P}|^r \prod_{(xy) \in P} d\sigma(g_{xy}) \right)^{|\gamma|/r}. \quad (3.63)$$

Здесь число r показывает, сколько различных плакетов может содержать одну связь, и решающую роль играет тот факт, что это число фиксировано и не растет с ростом $|\gamma|$.

Но, как нетрудно видеть,

$$\int |\rho_{\partial P}|^r \prod_{(xy) \in P} d\sigma(g_{xy})$$

ведет себя как $O(1/g_0^{2r})$ при больших g_0^2 и малых λ и как $O((g_0^2 \lambda)^{-r})$ при больших λ , что и доказывает утверждение о сходимости, сформулированное в теореме.

Для переменных беспорядка мы проводим то же рассуждение, что и в доказательстве теоремы 3.14, но активности $z_{\omega, S}(\gamma)$ определяются теперь так:

$$z_{\omega, S}(\gamma) \equiv \prod_{(xy)} \int d\sigma(g_{xy}) \prod_{\substack{P \in \gamma \\ P \not\subseteq S}} \left(e^{\frac{1}{2g_0^2} \chi(g_{\partial P})} - 1 \right) \times \\ \times \prod_{P \in \gamma \cap S} \left(e^{\frac{1}{2g_0^2} \chi(g_{\partial P \cap \omega})} - 1 \right).$$

Поскольку $d\sigma(g) \neq d\sigma(\omega g)$ для $\lambda > 0$, то уже неверно, что $z_{\omega, S}(\gamma) \neq z_{1, \emptyset}(\gamma)$ лишь для полимеров γ , пересекающих границу множества S . Таким образом, будут существовать

два сорта полимеров, дающих главный вклад: во-первых, как и для чистых теорий Янга — Миллса, элементарные кубы кограницы δ^*S множества *S ; во-вторых, отдельные плакетки $P \in {}^*S$.

Очевидно, полимеры второго сорта дают отрицательный вклад в кластерное разложение $\log \langle D_\omega(S) \rangle$, пропорциональный площади $|S|$, так как

$$z_{\omega, \{P\}}(\{P\}) < z_{\mathbb{1}, \emptyset}(\{P\}).$$

Чтобы это увидеть, используем разложение Фурье

$$e^{\frac{1}{2g_0^2} \chi(g_{\partial P})} - 1 = \sum_{\tau} a_{\tau} \left(\frac{1}{g_0^2} \right) \chi_{\tau}(g_{\partial P}),$$

где $a_{\tau}(1/g_0^2) \geq 0$, и разложение

$$\frac{1}{C(\lambda)} e^{\lambda((\phi_0, U_{\mathbb{H}(g)} \phi_0)^{-1})} = \sum_{\tau} \text{Tr} A_{\tau}(\lambda) U_{\tau}(g),$$

где $A_{\tau}(\lambda) \geq 0$. Имеем

$$z_{\omega, \{P\}}(\{P\}) = \sum_{\tau_1, \dots, \tau_4} \chi_{\tau}(\omega) a_{\tau} \left(\frac{1}{g_0^2} \right) \int \chi_{\tau}(g_1 g_2 g_3 g_4) \times \\ \times \prod_{i=1}^4 \text{Tr} A_{\tau_i}(\lambda) U_{\tau_i}(g_i) dg_i,$$

что равно

$$\sum_{\tau} \chi_{\tau}(\omega) \tilde{a}_{\tau} \left(\frac{1}{g_0^2} \right) \text{Tr} A_{\tau}^4,$$

где $\tilde{a}_{\tau}(1/g_0^2) \geq 0$. Ясно, что последнее выражение имеет максимум при $\omega = \mathbb{1}$.

Итак, главные члены дают закон площади; в том, что остальные члены не нарушают этого свойства, можно убедиться при помощи рассуждений, аналогичных использованным при доказательстве свойства 3) в теореме 3.14. \square

Существует и «низкотемпературный» режим, который может быть проанализирован:

Теорема 3.19. В модели Хиггса с конечной калибровочной группой G (необязательно с полным нарушением симметрии) «низкотемпературное» кластерное разложение сходится в области $\{\lambda, g_0^2: \lambda \text{ и } g_0^2 \text{ малы}\}$.

В этой области имеют место:

- 1) экспоненциальная кластерность;

2) закон периметра для петель Вильсона;

3) закон площади для петель т'Хоофта в случае $d = 4$; экспоненциальная кластерность дефектов в случае $d = 3$.

З а м е ч а н и е. Свойство 1) было доказано для $d = 3$, $G = \mathbb{Z}_2$ Марра и Миракль-Содем [41].

Доказательство теперь уже почти стандартно для нас. Полимеры состоят из связанных дефектных сетей двойственной решетки, к которым добавлены множества ребер исходной решетки, обвивающие их, как описано ранее. \square

Иногда имеется третья область сходимости:

Квазитеорема 3.20. В модели Хиггса с не обязательно дискретной калибровочной группой, обладающей дискретной подгруппой H , содержащейся в центре, которой отвечает ненарушенная симметрия, существует сходящееся «низкотемпературное» разложение в области $\{\lambda, g_0^2: \lambda g_0^2 \text{ достаточно велико, } \lambda \text{ велико}\}$.

В этой области имеют место:

1) экспоненциальная кластерность;

2) закон периметра для петель Вильсона;

3) закон площади для петель т'Хоофта в случае $d = 4$; экспоненциальная кластерность дефектов при $d = 3$.

Теорема 3.20'. В предположениях квазитеоремы 3.20 существует сходящееся «высокотемпературное» разложение в области $\{\lambda, g_0^2: \lambda \text{ и } g_0^2 \text{ малы}\}$, такое что при $\lambda > 0$ имеют место:

1) экспоненциальная кластерность;

2) закон периметра для петель Вильсона, тривиально представляющих подгруппу H , и закон площади для всех других петель («удержание дробных зарядов»);

3) в случае $d = 4$ — закон периметра для петель т'Хоофта, соответствующих $\omega \in H$, и закон площади для остальных петель; аналогичное поведение дефектов при $d = 3$.

З а м е ч а н и я. Это означает, что при «частичном нарушении симметрии» область, указанная в теореме 3.18, разбивается на область удержания кварков (теорема 3.20') и область Хиггса (квазитеорема 3.20). Этот факт считается более или менее признанным среди специалистов на основании некоторых численных результатов (см. [54]), но полное доказательство квазитеоремы 3.20 пока еще отсутствует. Ниже мы опишем возможный путь доказательства.

Доказательство теоремы 3.20'. По существу это комбинация доказательств теоремы 3.14 и 3.18. \square

Набросок доказательства квазитероремы 3.20. Снова воспользуемся «унитарной калибровкой». Здесь поле Хиггса живет в пространстве классов смежности (факторгруппе) $F = G/H$; меру $d\sigma(g)$ можно определить так же, как и прежде, но теперь она будет сосредоточена не в окрестности единицы $1 \in G$, а в окрестности подгруппы H .

В соответствии с этим разобьем G на ряд подмножеств. Сначала выберем достаточно малую окрестность U единицы; она должна быть инвариантна относительно сопряжений, и мы требуем, чтобы $hU \cap h'U \neq \emptyset$ для любых $h, h' \in H$, $h \neq h'$. Множество $E \equiv G \setminus \bigcup_{h \in H} hU$ назовем исключительным.

Чтобы определить полимеры, надо сначала грубо разбить пространство полевых конфигураций в соответствии с разбиением группы G . Мы характеризуем классы полевых конфигураций следующими признаками:

(а) множеством ребер $\langle x, y \rangle$, для которых $g_{xy} \in E$;

(б) множеством H -дефектов, т. е. множеством плакетов, для которых $g_{\partial P}$ лежит в одном из множеств hU с $h \neq 1$; предполагается, что U столь мало, что плакет P не может принадлежать H -дефекту, если все четыре переменные $g_{\langle xy \rangle}$, соответствующие ребрам $\langle xy \rangle \in P$, принадлежат одному и тому же множеству hU .

Для любого плакета P , не принадлежащего множеству H -дефектов, величина $\exp((1/2g_0^2)\chi(g_P))$ будет с большой вероятностью близка к 1 (по мере $d\sigma$), так что мы можем проделать обычное «высокотемпературное» разложение для таких плакетов. Решающий момент в доказательстве состоит в том, чтобы понять, какие факторизационные свойства при этом возникают.

Посмотрим на «пустые» области решетки, т. е. области, в которых все g_{xy} «близки» к H и выражение $\exp((1/2g_0^2)\chi(g_P))$ заменено на 1. Обозначим через h_{xy} элемент подгруппы H , который близок к g_{xy} (т. е. $g_{xy} \in h_{xy}U$). В нашей пустой области конфигурация $\{h_{xy}\}$ определена с точностью до H -калибровочного преобразования. Мы можем, ничего не испортив, фиксировать такую H -калибровку произвольным образом. Это означает, что вклады от двух множеств, которые разделены «пустой» областью, факторизуются.

Следует подчеркнуть, что для того, чтобы некоторое множество могло быть «пустой» областью, оно должно быть *гранесвязным* (т. е. связанным с помощью граней) множеством кубов для $d = 3$ и *гранесвязным* множеством гиперкубов для $d = 4$.

Тогда любой полимер задается косвязным множеством H -дефектов (т. е. множеством, двойственное к которому связ-

но) и множеством плакетов, не разделенными пустой областью.

Ясно, что область параметров определяется таким образом, чтобы полимеры имели малую активность. Поэтому доказательство квазитеоремы 3.20 должно пройти без каких-либо трудностей. Однако полезно провести доказательство со всеми подробностями; мы предоставляем это читателю в качестве упражнения. \square

З а м е ч а н и е. Такого рода комбинирование низко- и высокотемпературных разложений напоминает разложение около среднего поля Глимма, Джаффе и Спенсера [50]¹⁾, но в данной решёточной системе оно, конечно, много проще.

В следующей главе мы вернемся к модели Хиггса и обсудим более детально абелевы модели, которые включают в себя понятие θ -состояний.

В заключение этого обсуждения моделей Хиггса приведем ожидаемые фазовые диаграммы для конечной калибровочной группы G (рис. 11).

З а м е ч а н и я. «Отросток» на левой нижней диаграмме, оканчивающийся в критической точке, подсказан численными результатами, полученными для $d=3$, $G=Z_2$ [54].

Используя соображения двойственности, можно до некоторой степени увеличить заштрихованные области в абелевых теориях ($d=3$).

Для некоторых моделей ($d=3$, $G=Z_n$, $n \geq 5$) границы фаз расширяются за счет включения промежуточной кулоновой фазы [61, 87].

Последнее по порядку, но не по значению замечание касается перехода к фермионным моделям. С точки зрения физики они являются, конечно, наиболее интересными. Однако до сих пор в исследованиях, проводимых методами разложения в ряд, большая часть пространства параметров в расчет не принимается, и, конечно, здесь желательно более глубокое понимание.

Теорема 3.21. Для калибровочной фермионной модели (такой как решеточная квантовая хромодинамика), для которой представление U_F группы G является точным, «высокотемпературное» кластерное разложение сходится в области $\{\kappa, g_0^2; g_0^2 \text{ велико и } \kappa \text{ мало}\}$.

В этой области имеют место:

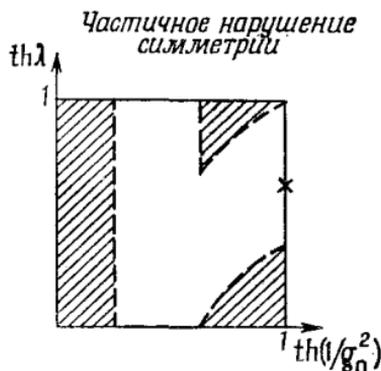
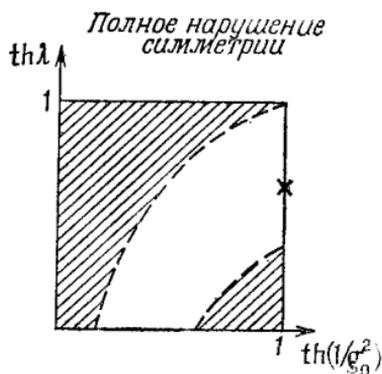
- 1) экспоненциальная кластерность;
- 2) закон периметра для петель Вильсона;

¹⁾ См. также книгу Глимма и Джаффе [12]. — *Прим. ред.*

3) закон площади для петель т'Хоофта при $d=4$; экспоненциальная кластерность дефектов при $d=3$.

З а м е ч а н и я. 1. Аналогичное сходящееся разложение обсуждалось Гавендзким [52] и Чэллифором и Вейнгартеном [53] (однако их критерий удержания кварков не выглядит особенно удачным).

1) $d=2$



2) $d \geq 3$

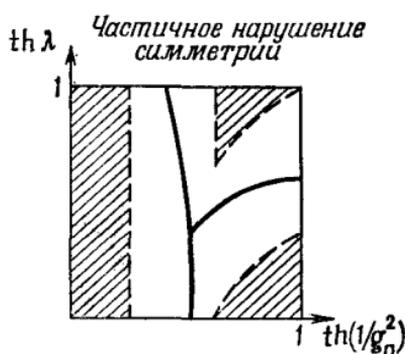
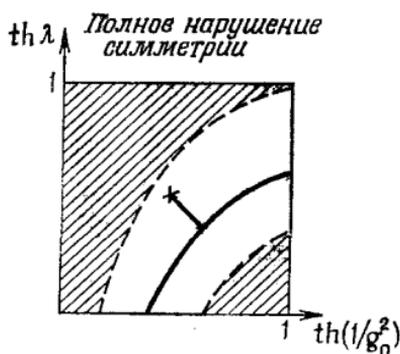


Рис. 11. Заштрихованные области — сходящиеся разложения; сплошные линии — ожидаемые фазовые переходы; крестики — критические точки.

2. Закон периметра для петли Вильсона следует интерпретировать не как опровержение гипотезы об удержании кварков, а как признак *адронизации*. Далеко разведенная пара внешних зарядов будет поляризовать вакуум, порождая пары кварк — антикварк, которые впоследствии образуют адроны; каждая пара способствует защите внешних зарядов. Это означает, что петля Вильсона не дает критерия удержания кварков, когда внешние заряды могут быть экранированы полями материи. К сожалению, мы не располагаем сколько-нибудь простым заменителем этого критерия.

Добавление при корректуре. Один такой критерий недавно был предложен Макком и Мейером [94].

3. Меньшая область сходимости по сравнению с теоремой 3.18 объясняется отсутствием «унитарной калибровки», расщепляющей средние в точке $g_0^2 = \infty$.

Доказательство проводится непосредственно. Полимерами будут связанные множества плакетов и рёбер. При подробном доказательстве полезно использовать нормы для фермионных функций, введенные в разделе 2. Для получения хорошей области сходимости, вероятно, стоит сначала провести интегрирование по калибровочному полю; в таком случае можно вычислить активность полимеров, так как ввиду ортогональности различных представлений происходят взаимные сокращения в выражениях типа

$$\int \exp \left\{ \frac{1}{2} \kappa (\bar{\psi}(x) U(g_{xy}) \Gamma_{xy} \psi(y) + \bar{\psi}(x) U(g_{yx}^{-1}) \Gamma_{yx} \psi(y)) \right\} dg_{xy}.$$

Стоило бы проверить оценки численно, чтобы увидеть, имеет ли место сходимость для $|\kappa| > \kappa_c$, где κ_c соответствует нулевой массе для свободного решеточного фермионного поля. Тем самым можно было бы продемонстрировать возникновение массы благодаря взаимодействию с калибровочным полем, что было бы указанием на удержание кварков. \square

Теорема 3.22. В калибровочной фермионной модели с дискретной калибровочной группой G «низкотемпературное» кластерное разложение сходится в области $\{\kappa, g_0^2: \kappa \text{ и } g_0^2 \text{ малы}\}$.

В этой области имеют место:

- 1) экспоненциальная кластерность;
- 2) закон периметра для петель Вильсона;

3) закон площади для петель т'Хоофта при $d=4$ (т. е. удержание внешних монополей); экспоненциальная кластерность дефектов при $d=3$.

Доказательство по существу совпадает с доказательством теоремы 3.19. \square

Снова подытожим ситуацию с помощью диаграммы (рис. 12). Фазовые границы на этой диаграмме еще более гипотетичны, чем для модели Хиггса; единственное, что достоверно, это то, что при $g_0^2 = \infty$, т. е. для свободного фермионного

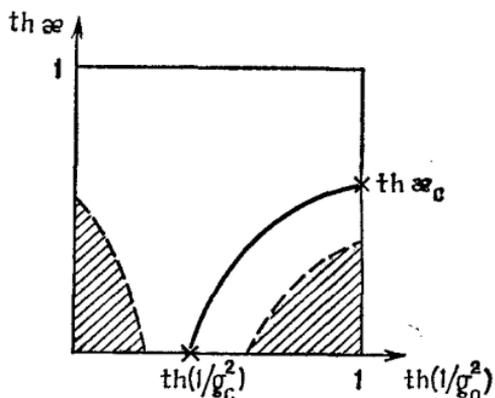


Рис. 12. Фермионная калибровочная модель с дискретной калибровочной группой.

поля, существует критическая точка $\kappa = \kappa_c$ ($= M/dr - 1$ для $\theta = 0$) и что при $\kappa = 0$ существует критическая калибровочная константа взаимодействия $g_0 = g_c$.

Добавление при корректуре. Подробное обсуждение ожидаемой фазовой структуры для фермионных калибровочных теорий можно найти в работе Кавамото [97].

Имеются два важных момента, которые пока недостаточно поняты.

1. Каким критерием можно заменить критерий Вильсона, который служит признаком удержания кварков? Первое, что приходит в голову, а именно петля т'Хоофта, по-видимому, содержит не больше информации: в присутствии полей материи эта петля обнаруживает пагубную тенденцию всегда удовлетворять закону площади точно так же, как петля Вильсона всегда стремится удовлетворять закону периметра. (Однако имеется одно предложение о параметре беспорядка для различения фаз; см. Макк и Мейер [94].)

Конечно, «догма об удержании» говорит: «Проверь, будет ли в чистой теории Янга — Миллса выполняться закон площади для петли Вильсона; если это так, то в полной теории будут удерживаться кварки». Может быть, это верно, но хотелось бы знать точно.

2. Объясняет ли теория массовую щель для $|\kappa| > |\kappa_c|$ в предположении, что g_0^2 велико? Это свойство кажется необходимым для удержания световых кварков. Понимание этого пролило бы также свет на различие между моделью Хиггса и фермионной моделью и тем самым на различие между «экранированием» (или «обесцвечиванием») и удержанием кварков (обсуждение этих вопросов см. в [86]).

4. НЕКОТОРЫЕ ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе мы опишем отдельные физически интересные результаты, полученные разными авторами.

Отбор их неизбежно субъективен. Отчасти он также диктуется ограниченностью имеющегося места (и времени). Так, например, у меня нет возможности детально обсудить очень интересную и сложную работу Дюрхюуса и Фрёлиха [66]; см., однако, замечания, сделанные в пункте 4f (об «огрублении поверхности»).

Другой важный результат, о котором здесь не будет сказано, это красивый результат Гёпферта и Макка [93], работа которых появилась уже после того, как эта книга была закончена. Гёпферт и Макк доказывают, что в трехмерной $U(1)$ -модели (с действием Виллэна) имеется удержание кварков

в смысле Вильсона при всех значениях константы связи¹⁾ и — что, пожалуй, более неожиданно — отношение натяжения струны к массовой щели («массе глюония») стремится к ∞ , когда константа связи g_0^2 стремится к 0. Доказательство основано на замечательной комбинации идей ренорм-группы с техникой из конструктивной квантовой теории поля.

а. Двумерные абелевы модели Хиггса:

θ -вакуумы, фазовый переход и удержание дробных зарядов

Как явствует из самого заголовка, двумерные абелевы модели обладают некоторыми более экстравагантными свойствами, которые, как полагают, существенны и в четырехмерных неабелевых теориях. Одна из причин такой аналогии имеет топологическую природу. Двумерные абелевы теории могут учитывать нетривиальный топологический заряд, а именно первый класс Черна²⁾, а четырехмерные неабелевы теории могут учитывать нетривиальный второй класс Черна (см. приложение). Однако двумерное «удержание дробных зарядов» объясняется гораздо более простым механизмом, чем эффект с таким же названием в четырехмерном случае (а именно неэкранированием линейного кулонова потенциала).

Рассмотрим $U(1)$ -модель Хиггса. Так как эта модель абелева, то мы можем использовать для калибровочного поля гауссовское действие (эта возможность в разделе 1 не обсуждалась)³⁾. Для взаимодействия поля Хиггса и калибровочного поля используем действие типа действия Виллена. Таким образом, полное действие равно

$$S_0 = S_{Y. M. G.} + S_H,$$

где

$$S_{Y. M. G.} = \frac{1}{2g_0^2} \sum_P \Phi_{\partial P}^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \sum_{(x, y)} \Phi_{xy}^2, \quad (4.1)$$

$$S_H = - \sum_{\langle xy \rangle} \log \left\{ \sum_{n_{xy}} e^{-\frac{\lambda}{2} (\Phi_{xy} + 2\pi n_{xy})^2} \right\}, \quad (4.2)$$

где элементы калибровочной группы $U(1)$ очевидным образом параметризованы углами Φ_{xy} . Массовый член в (4.1) соответствует «инфракрасному обрезанию». Впоследствии его можно без всякого ущерба отбросить. Случай $\mu^2 = 0$ формально соответствует действию Виллена (1.8) для калибро-

¹⁾ См. также работу Полякова [6*], где впервые был получен этот результат на физическом уровне строгости. — *Прим. ред.*

²⁾ = Чжени. — *Прим. ред.*

³⁾ Калибровочные модели с гауссовским действием и неограниченными Φ_{xy} рассматривались в работах Зиновьева [7*]. — *Прим. ред.*

вочного поля, так как при интегрировании с периодическими функциями гауссовское распределение можно свести к периодическому. Чтобы понять характер действия S_H (4.2), следует заметить, что качественно оно ведет себя так же, как $\sum \lambda_{(xy)} \cos \varphi_{xy}$ (и имеет такой же формальный непрерывный предел). Это последнее выражение надо было бы считать стандартным $U(1)$ -действием Хиггса для поля Хиггса по модулю 1 в унитарной калибровке (см. (1.9) и замечания, сделанные в ходе доказательства теоремы 3.18). Те, кто не любит работать с гауссовским действием, могут работать с обычным решеточным действием. Для обсуждаемых далее эффектов существенно, что действие Хиггса имеет более короткий период (т. е. больший заряд), чем действие Янга — Миллса (действие (4.1) имеет «бесконечный период»).

Определение 4.1. θ -состояния определяются как термодинамические пределы состояний, отвечающих действию

$$S_\theta = S_0 + i\theta \sum_P \varphi_{\partial P}$$

(где сумма берется, конечно, по всем плакетам с некоторой согласованно выбранной ориентацией, а граничные условия предполагаются свободными, т. е. интегрирование производится по всем переменным, соответствующим данной конечной области Λ).

З а м е ч а н и е. Суть этого определения — в том, что состояния действительно зависят от θ , причем, как мы увидим, эта зависимость периодична по θ . Можно рассматривать θ -состояния как состояния с внешним электрическим полем. Теорема Стокса позволяет интерпретировать θ -состояния как результат действия «бесконечно большой петли Вильсона», намотанной вокруг системы.

Для того чтобы понять роль θ -члена, лучше всего рассмотреть корреляцию точечных «дефектов», получающихся при замене плакетных переменных φ_{P_1} и φ_{P_2} на χ и $-\chi$ соответственно. Обозначим соответствующее среднее значение через $\langle D_\chi(P_1) D_{-\chi}(P_2) \rangle_{\theta, \Lambda}$.

Чтобы его оценить, воспользуемся преобразованием дуальности [55, 56]. А именно заметим, что с точностью до несущественного множителя

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{1}{2\sigma} (\varphi + 2\pi n)^2} \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\sigma}{2} n^2} e^{i\varphi n}. \quad (4.3)$$

Формулу (4.3) можно применить к преобразованию Фурье от e^{-S_θ} и провести в $\langle D_\chi(P_1) D_{-\chi}(P_2) \rangle_{\theta, \Lambda}$ интегрирование по всем

углам φ . После некоторых выкладок получаем

$$\langle D_\chi(P_1) D_{-\chi}(P_2) \rangle_{\theta, \Lambda} = \frac{1}{Z_{\theta, \Lambda}} \sum_{\{n_P\}} e^{-i\chi(n_{P_1} - n_{P_2}) - \frac{g_0^2}{2} \sum_P \left(n_P + \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 - \frac{1}{2\lambda} \sum_{\langle xy \rangle} n_{xy}^2}, \quad (4.4)$$

где $n_{xy} = n_P - n_{P'}$, P и P' — плакеты с общим ребром $\langle xy \rangle$, причем предельный переход $\mu^2 \rightarrow 0$ здесь уже сделан. (Если мы начинаем со свободных граничных условий в исходной модели, то в дуальных переменных следует принять нулевые условия Дирихле. Это просто означает, что $n_P = 0$ вне Λ .) Равенство (4.4) ясно вскрывает физическое содержание модели: она представляет собой в действительности модель целочисленных спинов с ферромагнитным взаимодействием ближайших соседей; θ входит в распределение одиночного спина периодически, оно аналогично магнитному полю. Кроме того, мы видим, что для $\theta = \pi$ максимум распределения одиночного спина вырожден ($n_P = 0$ или 1). При малых λ стандартное низкотемпературное разложение показывает сосуществование двух фаз с экспоненциальным распадом корреляций, что очень похоже на низкотемпературную область модели Изинга (см. [57, 58]). Сосуществование фаз можно, конечно, усмотреть и с помощью стандартного рассуждения Пайерлса¹⁾. Вероятно, имеется критическая точка по λ (зависящая от g_0^2), в которой нет экспоненциального распада корреляций. Это можно интерпретировать как «нарушение механизма Хиггса».

Для больших λ и $g_0^2 > 0$ существует высокотемпературная фаза со сходящимся кластерным разложением (см. разд. 3).

Наконец, при $g_0^2 = 0$, $\theta = 0$ рассматриваемая модель сводится к виллэновой модели плоских ротаторов. Эта модель демонстрирует существование знаменитого перехода Костерлица — Таулесса [59]²⁾, как было строго доказано Фрëлихом и Спенсером [60].

Теперь перейдем к «удержанию дробных зарядов» для $G = U(1)$.

¹⁾ См. работу Малышева [8*]. — *Прим. ред.*

²⁾ Впервые этот фазовый переход был обнаружен Березинским [3*]. Смысл его в том, что существует критическое значение обратной температуры β_{cr} , такое что при $\beta < \beta_{cr}$ (высокотемпературная фаза) бинарные корреляции убывают экспоненциально, в то время как при $\beta > \beta_{cr}$ их убывание становится степенным, причем показатель степени зависит от β . — *Прим. ред.*

Теорема 4.2. Пусть

$$\varepsilon(\theta) = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^2} \frac{1}{|\Lambda|} \log \frac{Z_{\theta, \Lambda}}{Z_{0, \Lambda}}.$$

Тогда

- 1) $\varepsilon(\theta)$ — периодическая функция с периодом 2π ;
- 2) $\varepsilon(\theta) \leq 0$; $\varepsilon(\theta) < 0$ для $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$;
- 3) справедлива оценка

$$|\langle W_{\theta'}(C) \rangle_{\theta}| \leq e^{(\varepsilon(\theta + \theta') - \varepsilon(\theta)) A(C)},$$

где

$$W_{\theta'}(C) = \prod_{(xy) \in C} e^{\frac{i\theta'}{2\pi} \varphi_{xy}},$$

а $A(C)$ — площадь, ограниченная контуром C .

Замечание. В несколько менее общей форме эта теорема доказана в [62]. По существу в том же виде она появилась в [58]. Оценка 3) означает удержание дробных зарядов, если положить $\theta = 0$.

Доказательство. Несмотря на комплексный множитель, фигурирующий в среднем значении, θ -состояния обладают свойством положительности по Остервальдеру — Шрадеру.

Далее, используя положительность по Остервальдеру — Шрадеру для свободного среднего $\langle \cdot \rangle_0$, можно убедиться в существовании предела

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^2} \frac{1}{|\Lambda|} \log Z_{\theta, \Lambda}$$

для прямоугольников Λ . Действительно, пусть Λ — прямоугольник со сторонами L и T , и пусть $Z_{\theta, LT} = Z_{\theta, \Lambda}$. Тогда из неравенства Шварца вытекает (как в доказательстве леммы 2.4), что

$$Z_{\theta, LT} \leq Z_{\theta, LT_1}^{1/2} Z_{\theta, L(2T-T_1)}^{1/2}$$

(L, T, T_1 нечётны).

Это означает, что $\log Z_{\theta, LT}$ — выпуклая функция от T (и L) и, следовательно,

$$\frac{1}{(L-1)(T-1)} \log \frac{Z_{\theta, LT} Z_{\theta, 11}}{Z_{\theta, 1T} Z_{\theta, L1}}$$

возрастает по L и T . Ясно, что величина $(1/LT) \log Z_{\theta, LT}$ равномерно ограничена по L и T , и мы без труда получаем, что существует ее предел при $L, T \rightarrow \infty$.

Тем самым существование $\varepsilon(\theta)$ доказано. (Идея этого доказательства восходит к работе Гуэрры [63].)

Неравенство $\epsilon(\theta) \leq 0$ тривиально. Периодичность устанавливается с помощью преобразования дуальности так же, как в (4.4). Повторно используя неравенство Шварца относительно скалярного произведения Остервальдера — Шрадера, получаем оценку 3).

Единственное, что осталось доказать, это строгое неравенство в 2). Для его доказательства воспользуемся корреляционными неравенствами из пункта 2d. Прежде всего включим в действие член $\sum'_{(xy)} K \phi_{xy}^2$ ($K > 0$), где \sum' обозначает сумму по всем пространственно-подобным рёбрам. Если $K \rightarrow +\infty$, то ковариация убывает, и поэтому, как следует из теоремы 2.10, 1), $\langle W_{\theta'}(C) \rangle_{\theta}$ возрастает. Кроме того, при этом из системы исключаются калибровочные поля, соответствующие пространственно-подобным рёбрам, и «расцепляются» корреляции для конфигураций в разные моменты времени. Мы еще больше увеличиваем $\langle W_{\theta'}(C) \rangle_{\theta}$, устремляя к $+\infty$ константу связи λ действия Хиггса. При этом «замораживаются» оставшиеся калибровочные поля, которые могут принимать лишь значения $2\pi \times$ (целые числа). Теперь перед нами остается набор одномерных спиновых моделей с целочисленными спинами, и для прямоугольной петли Вильсона со сторонами $2L'$ и $2T'$ в ящике со сторонами $2L$ и $2T$ мы получаем

$$\begin{aligned} \langle W_{\theta'}(C) \rangle_{\theta}^{\frac{1}{2T'}} &\leq \frac{1}{Z} \sum_{\{n_x\}} e^{-\frac{2\pi^2}{g_0^2} (n_{x+1} - n_x)^2} e^{i\theta (n_L - n_{-L})} e^{i\theta' (n_{L'} - n_{-L'})} \\ &= \left[\frac{\sum_m e^{-\frac{g_0^2}{8\pi^2} (\theta + \theta' + 2\pi m)^2}}{\sum_m e^{-\frac{g_0^2}{8\pi^2} (\theta + 2\pi m)^2}} \right]^{2L'} \end{aligned} \quad (4.5)$$

(на последнем шаге используется преобразование Фурье, т. е. формула суммирования Пуассона (4.3)). Поэтому

$$\epsilon(\theta) \leq \log \sum_m e^{-\frac{g_0^2}{8\pi^2} (\theta + 2\pi m)^2} - \log \sum_m e^{-\frac{g_0^2}{8\pi^2} m^2}, \quad (4.6)$$

откуда сразу вытекает строгое неравенство в 2). \square

З а м е ч а н и я. 1. В [47] Макк дает простое доказательство утверждения об удержании дробных зарядов в двумерном

случае, которое проходит даже для неабелевых групп. Мы получим этот результат в пункте d, используя другие соображения.

2. θ -состояния существуют также и для неабелевых групп. В этом случае θ должно быть элементом группы, дуальной к центру (см., например, [66]).

3. Что такое θ -состояние в случае четырехмерных решёточных моделей Янга — Миллса или Хиггса, трудно понять, так как не существует естественного решёточного аналога

плотности топологического заряда $F \wedge F$. Если имеются фермионы, то можно использовать углы θ , введенные в разделе 1 (см. раздел 5 и [95]).

4. Есть основания полагать, что сходные результаты верны и для решёточной двумерной квантовой электродинамики (КЭД₂).

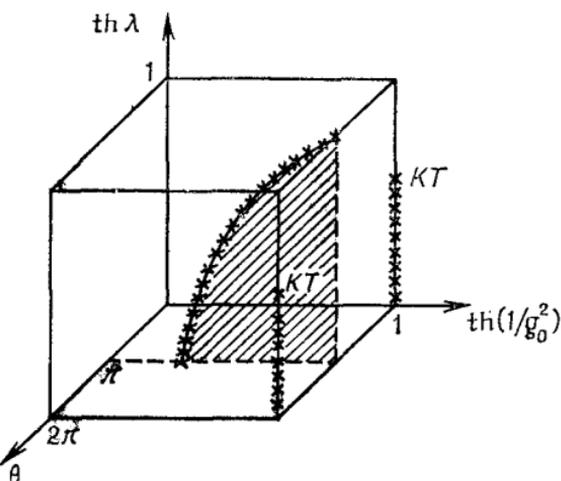


Рис. 18.

Все эти результаты подытожены на диаграмме, приведённой на рис. 13.

Заштрихованная поверхность разделяет фазы и ограничена критической кривой; KT обозначает точку перехода Костерлица — Таулесса, которая к тому же служит конечной точкой критической кривой.

в. Трёхмерная абелева модель Хиггса: фазовая структура

Трёхмерная $U(1)$ -модель Хиггса, известная также как модель Гинзбурга — Ландау, конечно, весьма физична, поскольку служит моделью сверхпроводника.

Поэтому очень интересно то, что для гауссовского варианта этой модели существование по крайней мере двух фаз — «нормальной» и «сверхпроводящей» — можно установить, исходя из корреляционных неравенств [58] и факта существования перехода Костерлица — Таулесса [60]. Для некоторых вариантов этой модели работают разложения раздела 3.

Детальная картина зависит от того, какой вариант модели рассматривается — «компактный» (т. е. вильсонов) или гауссовский. В наименее интересном случае мы имеем полное нарушение симметрии (скорее соответствующее заряду поля Хиггса, чем отсутствию зарядов). Для этого нужно периоди-

ческое действие для калибровочного поля, такое как действие Вильсона или Виллэна. Вероятно, фазового перехода вообще нет, за исключением случая $g_0^2 = 0$. В последнем случае получается модель плоских ротаторов, для которой в [74] доказано существование перехода, нарушающего симметрию (Голдстоун). Если $g_0^2 \neq 0$, то эта модель — всегда сверхпроводник.

Если уменьшить период действия Хиггса, т. е. кратность n элементарного заряда поля Хиггса, то мы получим ситуацию неполного нарушения симметрии, где не нарушается симметрия подгруппы $H = \mathbb{Z}_n$, и можно использовать теорему 3.20' и квазитворему 3.20. Мы обнаруживаем при этом по крайней мере две фазы. Одна из них — «сверхпроводящая» со свободными дробными (относительно поля Хиггса) зарядами и с экспоненциальным распадом корреляций \mathbb{Z}_n -вихрей. Другая — «нормальная» с удержанием дробных зарядов и без распада корреляций вихрей.

В наиболее реалистичном варианте присутствует гауссовское действие, описанное в предыдущем пункте. При $d \geq 3$ и нулевом или малом μ^2 построить высокотемпературное разложение нелегко. В этом случае выручают корреляционные неравенства. Ход рассуждений здесь такой же, как и в пункте а.

А именно, рассмотрим среднее значение дробно-заряженной вильсоновой петли $\langle W_\theta(C) \rangle$ прямоугольной формы со сторонами L (в 1-направлении) и T (в 0-направлении). Так же как в пункте а, оценка сверху устанавливается путем исключения A_1 и A_2 и замораживания A_0 на целочисленных значениях. Тогда, как и раньше, конфигурации в различные моменты времени становятся независимыми, и мы получаем

$$|\langle W_\theta(C) \rangle| \leq (\langle e^{i\theta(n_L - n_0)} \rangle_V)^T, \quad (4.7)$$

где среднее в правой части неравенства — это среднее двумерной спиновой модели с целочисленными значениями спинов (т. е. модели, дуальной к модели Виллэна) с действием

$$\frac{1}{2g_0^2} \sum_{(xy)} (n_x - n_y)^2, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.8)$$

В [60] показано, что $\langle e^{i\theta(n_L - n_0)} \rangle_L$ ведет себя как $e^{c \log L}$, при условии что g_0^2 достаточно велико (а именно $1/g_0^2$ ниже точки перехода Костерлица — Таулесса). Таким образом, мы получаем

$$\langle W_\theta(C) \rangle \leq c' e^{-cT \log L}, \quad (4.9)$$

что дает логарифмический (т. е. двумерный кулонов) удерживающий потенциал взаимодействия между дробными элект-

трическими зарядами. Это значит, что экранирование таких зарядов отсутствует, и мы имеем «нормальную фазу». Используя соображения дуальности, можно показать, что в этой фазе корреляции вихрей убывают степенным образом.

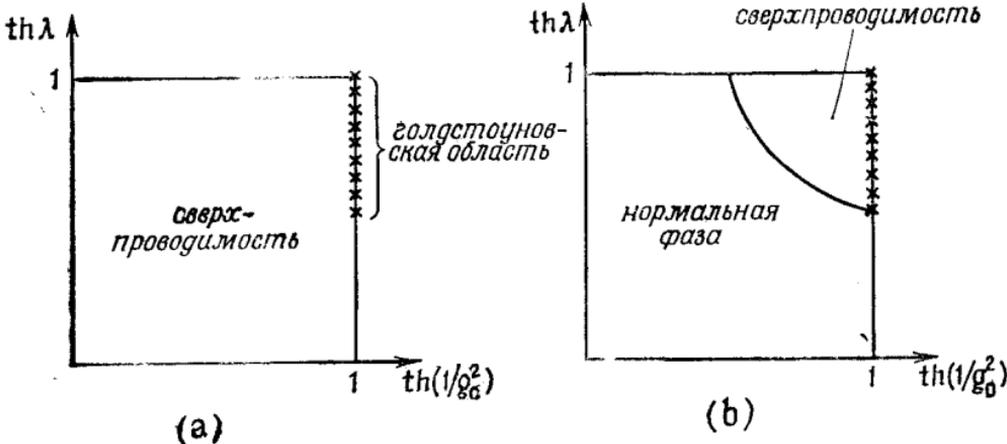


Рис. 14. Компактный случай. (а) Полное нарушение симметрии. (б) Частичное нарушение симметрии.

Существование сверхпроводящей фазы со свободно расходящимися электрическими зарядами (закон периметра для W_θ) и экспоненциальным убыванием корреляций вихрей можно усмотреть с помощью разложения такого же типа, как в квазидоказательстве квазитеремы 3.20.

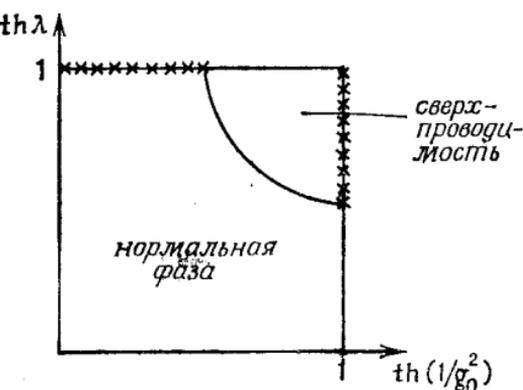


Рис. 15. Гауссовский случай.

В заключение этого пункта приведем предполагаемую фазовую диаграмму (рис. 14 и 15). Заметим, что, как показывают корреляционные неравенства, среднее значение вильсоновой петли всегда возрастает в направлениях направо и вверх. Среднее от вихрей ведет себя противоположным образом. (Из этих корреляционных неравенств, конечно, видно также, что для гауссовской модели

$$\langle W_\theta(C) \rangle \geq e^{-cT \log L.}$$

с. Теорема Гута: существование неудерживающей (кулоновой) фазы в четырехмерной $U(1)$ -модели

Гут [64] дал остроумное доказательство того, что четырехмерная решёточная чистая $U(1)$ -калибровочная модель с действием Виллена ведет себя более или менее похоже на непрерывную модель, если только константа взаимодействия доста-

точно мала. В частности, в ней нет удержания. Этот результат имеет принципиальное значение, так как показывает, что «компактные» решёточные калибровочные теории (с полями, принимающими значения в компактной группе G) могут иметь некоторые свойства, приписываемые обычно непрерывным моделям. Это также показывает, что удержание в смысле Вильсона является тонким эффектом: размерность 4 является критической и, как надеются или полагают физики, водораздел, возможно, проходит между четырехмерными абелевыми и неабелевыми моделями.

Я постараюсь дать по сути дела полное доказательство теоремы Гута, но так как его статья занимает (в виде препринта) около 50 страниц, то мне придется пожертвовать некоторыми подробностями. Многие идеи и большая часть формализма уже использовались ранее в [77]. Доказательство, приведенное ниже, в ряде деталей отличается от оригинального доказательства Гута.

З а м е ч а н и е. Теорема Гута в определенном смысле представляет собой результат того же типа, что и доказательство фазового перехода Костерлица — Таулесса [60]. Фрелих и Спенсер [87], применив метод «ренорм-группы» из [60], дали другое доказательство теоремы Гута. Они доказали также, что даже Z_n -решёточная калибровочная модель в добавление к стандартным высоко- и низкотемпературным фазам имеет «кулонову» фазу при промежуточных значениях константы связи, если только n достаточно велико; соображения в пользу этого были указаны уже в [61].

Прежде всего нам потребуется некоторый формализм. Мы всё время будем работать в конечном объеме Λ , но нам нужны оценки, не зависящие от Λ . Мы по-прежнему будем считать, что Λ есть подмножество простой кубической решетки Z^4 , хотя это и несущественно.

Назовем функции точек (0-клеток) из Λ с целыми или вещественными значениями *0-цепями*, функции плакетов (2-клеток) *2-цепями* и т. д. (Здесь используется аналогия с дифференциальными формами. Некоторые, возможно, предпочли бы называть эти функции коцепями.) В пространстве цепей имеется естественное l^2 -скалярное произведение, так что существует естественный способ отождествления цепей и коцепей.

Определим граничный оператор δ из пространства p -цепей в пространство $(p-1)$ -цепей стандартным образом. Если ω — некоторая p -цепь, то значение $\delta\omega$ на $(p-1)$ -клетке есть сумма значений ω на всех p -клетках, содержащих эту $(p-1)$ -клетку, взятых с надлежащей ориентацией. Оператор δ аналогичен оператору дивергенции. Пример дан на рис. 16.

Оператор, l^2 -сопряженный к δ , обозначается через d . Он соответствует внешней производной. Пример дан на рис. 17.

Используемые нами обозначения отличаются от стандартных обозначений алгебраической топологии, однако в них отражена аналогия с дифференциальными формами.

Заметим, что изменение ориентации клетки меняет знак соответствующей цепи на противоположный.

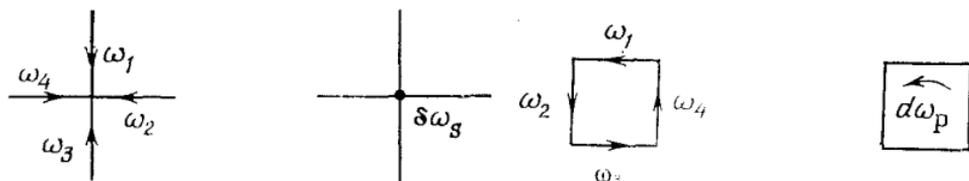


Рис. 16. $\delta\omega_s = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$. Рис. 17. $d\omega_p = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$.

Переходя от Λ к дуальному объему $^*\Lambda$, мы получаем отображение дуализации $*$ из пространства p -цепей в пространство $(4-p)$ -цепей, соответствующее оператору Ходжа. Приведем два основных факта.

Лемма 4.3. $\delta^2 = 0 = d^2$.

Лемма 4.4. (разложение Ходжа). Для всякой p -цепи ω существуют $(p+1)$ -цепь α , $(p-1)$ -цепь β и гармоническая p -цепь h (т. е. цепь, подчиняющаяся соотношениям $\delta h = 0 = dh$), такие что

$$\omega = \delta\alpha + d\beta + h. \quad (4.10)$$

Мы не даем доказательства этих хорошо известных и простых алгебраических фактов (см., например, [98]¹⁾).

Начиная с этого момента, мы ограничимся топологически тривиальными объемами Λ , для которых не существует гармонических цепей. Это эквивалентно тому, что каждая p -цепь ω , удовлетворяющая условию $d\omega = 0$, имеет вид $\omega = d\beta$ («лемма Пуанкаре»), и в этом случае мы говорим, что Λ имеет тривиальные (ко)гомологии. Это ограничение не является необходимым, но приводит к упрощению рассуждений. В частности, можно взять в качестве Λ прямоугольный параллелепипед в \mathbb{Z}^4 , из которого исключены клетки его геометрической границы («граничные условия Дирихле»), или двойственный к нему объем. Теперь определим лапласиан.

Определение 4.5. $\Delta \equiv d\delta + \delta d$. (Обратите внимание на выбор знака!)

¹⁾ Или [9*].— Прим. ред.

Лемма 4.6. На пространстве p -цепей четырехмерного объема Λ с тривиальными когомологиями выполняется неравенство

$$0 < \Delta < 16. \quad (4.11)$$

Доказательство. Оценка снизу (в действительности, как можно показать, нижняя граница имеет порядок $|\Lambda|^{-1/2}$) вытекает из отсутствия гармонических цепей. Оценка сверху объясняется тем, что решётка обеспечивает ультрафиолетовое обрезание. Это легко понять на бесконечной решётке с помощью преобразования Фурье. Конечность объема на самом деле уменьшает Δ , так как она означает замену бесконечно-объемного лапласиана Δ_∞ на $P\Delta_\infty P$, где P — проектор (см. [64], где всё это обсуждается более детально). \square

Теперь перейдем к вильсоновой петле в чистой $U(1)$ -калибровочной модели Виллэна. Вильсонова петля $W_n(C)$ может быть описана 1-цепью j , принимающей некоторое целое значение n на рёбрах из C и значение 0 на остальных рёбрах. (В случае действия Виллэна неразумно рассматривать петли Вильсона с нецелым зарядом.) Можно представлять себе цепь j как поток через C . Имеем

$$\langle W_n(C) \rangle = \frac{1}{Z} \prod_{\langle xy \rangle} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_{xy} \prod_P \sum_{l_P} e^{-\frac{1}{2g_0^2} ((d\theta)_P - 2\pi l_P)^2} \prod_{\langle xy \rangle} e^{i(l_{xy}, \theta_{xy})}. \quad (4.12)$$

Начиная с этого места, Z будет обозначать нормирующий множитель, в каждом случае свой.

Теорема 4.7. (Гут [64]). Если g_0^2 достаточно мало (в действительности, если $g_0^2 < 0.168$), то существует функция $\bar{g}(g_0)$, такая что

$$\langle W_n(C) \rangle \geq \exp\left(-\frac{\bar{g}(g_0)^2}{2}(j, \Delta^{-1}j)\right)$$

и

$$\lim_{g_0 \rightarrow 0} \frac{\bar{g}(g_0)^2}{g_0^2} = 1.$$

З а м е ч а н и е. Отсюда вытекает закон периметра для вильсоновой петли, т. е. отсутствие удержания кварков.

Чтобы доказать эту теорему, запишем сначала $\langle W_n(C) \rangle$ в виде, который был указан Бэнксом, Когутом и Майерсоном [65] и тесно связан с представлением, использованным Глиммом и Джаффе [78].

Лемма 4.8. Имеет место равенство

$$\langle W_n(C) \rangle = A_0(C) E(C),$$

где

$$A_0(C) = \exp\left(-\frac{g_0^2}{2}(j, \Delta^{-1}j)\right),$$

$$E(C) = \frac{1}{Z} \sum_{\substack{m_3 \\ dm_3=0}} \exp\left(-\frac{1}{2g_0^2}(m_3, \Delta^{-1}m_3)\right) \exp(2\pi i(m_3, \Delta^{-1}dG_2));$$

здесь G_2 — целочисленная 2-цепь, удовлетворяющая условию $\delta G_2 = j$ (представьте себе поверхность, ограниченную C); сумма берется по целочисленным 3-цепям m_3 .

Следствие 4.9. Справедлива оценка

$$\langle W_n(C) \rangle \leq \exp\left(-\frac{g_0^2}{2}(j, \Delta^{-1}j)\right).$$

Доказательство тривиально. \square

Замечание. Глимм и Джаффе [78] доказали эту лемму для действия Вильсона.

Доказательство леммы. Прежде всего фиксируем в (4.12) калибровку для θ . Для этого выберем в Λ какое-нибудь максимальное дерево T и положим на нём θ равным нулю. Пусть $\int'_{\theta_1} d\theta_1$ — интеграл по 1-цепям θ_1 , принимающим значения в отрезке $[-\pi, \pi]$ и обращающимся в нуль на T . Тогда

$$\langle W_n(C) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{l_2} \int'_{\theta_1} d\theta_1 e^{i(j, \theta_1)} \exp\left(-\frac{1}{2g_0^2} \|d\theta_1 - 2\pi l_2\|^2\right). \quad (4.13)$$

Если обозначить dl_2 через m_3 , то можно написать

$$l_2 = l_2[m_3] + dl_1,$$

где $l_2[m_3]$ — целочисленное частное решение уравнения $m_3 = dl_2$. Поэтому мы можем заменить

$$\sum_{l_2} \text{ на } \sum_{dm_3=0} \sum_{l_1}',$$

где \sum_{l_1}' — сумма по 1-цепям l_1 , равным нулю на максимальном дереве T (это нужно, чтобы l_1 однозначно определялось

уравнением $dl_1 = l_2 - l_2[m_3]$). Тогда

$$\langle W_n(C) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\substack{m_3 \\ dm_3=0}} \sum'_{l_1} \int'_{\theta_1} d\theta_1 e^{i(j, \theta_1)} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2g_0^2} \|d\theta_1 - 2\pi l_2[m_3] + 2\pi dl_1\|^2\right). \quad (4.14)$$

Из разложения Ходжа и отсутствия гармонических цепей следует, что $1 = \delta\Delta^{-1}d + d\Delta^{-1}\delta$, и поэтому мы имеем

$$l_2[m_3] = d\Delta^{-1}\delta l_2[m_3] + \delta\Delta^{-1}m_3. \quad (4.15)$$

Следовательно,

$$\langle W_n(C) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\substack{m_3 \\ dm_3=0}} \sum'_{l_1} \int'_{\theta_1} d\theta_1 e^{i(j, \theta_1 + 2\pi l_1)} \exp\left(-\frac{1}{2g_0^2} \|\delta\Delta^{-1}m_3\|^2\right) \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2g_0^2} \|d(\theta_1 + 2\pi l_1 + 2\pi\Delta^{-1}\delta l_2[m_3])\|^2\right) \\ = \frac{1}{Z} \sum_{\substack{m_3 \\ dm_3=0}} \int'_{\alpha_1} d\alpha_1 e^{i(j, \alpha_1)} \exp\left(-\frac{1}{2g_0^2} (m_3, \Delta^{-1}m_3)\right) \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2g_0^2} \|d\alpha_1\|^2\right) e^{-i(j, \delta\Delta^{-1}2\pi l_2[m_3])}, \quad (4.16)$$

где мы положили $\alpha_1 = \theta_1 + 2\pi l_1 + 2\pi\delta\Delta^{-1}l_2[m_3]$, а $\int'_{\alpha_1} d\alpha_1$ означает теперь интеграл по всем вещественнозначным 1-цепям, обращающимся в нуль на T . Этот гауссовский интеграл можно вычислить, и мы получаем

$$\langle W_n(C) \rangle = \exp\left(-\frac{g_0^2}{2} (j, \Delta^{-1}j)\right) \\ \times \sum_{\substack{m_3 \\ dm_3=0}} \exp\left(-\frac{1}{2g_0^2} (m_3, \Delta^{-1}m_3)\right) e^{-2\pi i(j, \delta\Delta^{-1}l_2[m_3])}. \quad (4.17)$$

В силу определения G_2 ,

$$(j, \delta\Delta^{-1}l_2[m_3]) = (G_2, d\Delta^{-1}\delta l_2[m_3]) \\ = (G_2, l_2[m_3]) - (G_2, \delta\Delta^{-1}m_3). \quad (4.18)$$

Первый член есть целое число и не дает вклада в экспоненту, так что окончательно мы получаем

$$\langle W_n(C) \rangle = A_0(C) Z^{-1} \sum_{\substack{m_3 \\ dm_3=0}} \exp\left(-\frac{1}{2g_0^2} (m_3, \Delta^{-1}m_3)\right) \\ \times \exp(2\pi i(m_3, \Delta^{-1}dG_2)), \quad (4.19)$$

что и требовалось доказать. \square

Следствие 4.10. Пусть $a_1 = *\Delta^{-1}dG_2$. Тогда

$$E(C) = \frac{1}{Z} \sum_{\substack{m_1 \\ \delta m_1=0}} e^{-\frac{1}{2g_0^2}(m_1, \Delta^{-1}m_1) + 2\pi i(m_1, a_1)}. \quad (4.20)$$

Доказательство тривиально. \square

Теперь оценим $E(C)$ снизу с помощью одного простого корреляционного неравенства (тесно связанного с неравенством Фрёлиха и Парка [79]):

Лемма 4.11. Пусть $0 < A_1 \leq A_2$, где A_1, A_2 — операторы на p -цепях. Тогда

$$\frac{1}{Z_1} \sum_{m_p} e^{-(m_p, A_1 m_p) + i(a_p, m_p)} \leq \frac{1}{Z_2} \sum_{m_p} e^{-(m_p, A_2 m_p) + i(a_p, m_p)}.$$

Следствие 4.12. Справедлива оценка

$$E(C) \geq \frac{1}{Z} \sum_{\substack{m_1 \\ \delta m_1=0}} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{16g_0^2}(m_1, m_1) + 2\pi i(m_1, a_1)} \equiv F(C). \quad (4.21)$$

Доказательство. Эта оценка становится очевидной, если заменить ограничение $\delta m_1 = 0$ подходящим предельным переходом и воспользоваться леммой 4.6. \square

Доказательство леммы. Пусть

$$F(\lambda) = \frac{1}{Z(\lambda)} \sum_{m_p} e^{-(m_p, A(\lambda) m_p) + i(a_p, m_p)},$$

где $A(\lambda) = \lambda A_2 + (1 - \lambda) A_1$. Мы утверждаем, что $F'(\lambda) \geq 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \langle (m_p, (A_1 - A_2) m_p) e^{i(a_p, m_p)} \rangle_\lambda \\ &\quad - \langle (m_p, (A_1 - A_2) m_p) \rangle_\lambda \langle e^{i(a_p, m_p)} \rangle_\lambda \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{Z(\lambda)^2} \sum_{m_p, m'_p} e^{-(m_p, A(\lambda) m_p) - (m'_p, A(\lambda) m'_p)} \\ &\quad \times [(m_p, (A_1 - A_2) m_p) - (m'_p, (A_1 - A_2) m'_p)] (e^{i(a_p, m_p)} - e^{i(a_p, m'_p)}). \end{aligned}$$

Положив

$$m_\pm = m_p \pm m'_p,$$

получаем

$$F'(\lambda) = \frac{i}{Z(\lambda)^2} \sum_{m_+, m_-} e^{-\frac{1}{2}(m_+, A(\lambda)m_+) - \frac{1}{2}(m_-, A(\lambda)m_-)} \\ \times (m_+, (A_1 - A_2)m_-) e^{\frac{i}{2}(a_p, m_+)} \sin\left(\frac{1}{2}(a_p, m_-)\right).$$

Так как $F'(\lambda)$ не меняется при замене $m_+ \rightarrow -m_+$, $m_- \rightarrow -m_-$, то

$$F'(\lambda) = \frac{1}{Z(\lambda)^2} \sum_{m_+, m_-} e^{-\frac{1}{2}(m_+, A(\lambda)m_+) - \frac{1}{2}(m_-, A(\lambda)m_-)} \\ \times \sin\left(\frac{1}{2}(a_p, m_+)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(a_p, m_-)\right) (m_+, (A_2 - A_1)m_-) \geq 0.$$

Последнее неравенство верно, потому что $F'(\lambda)$ имеет вид $(\psi, (A_2 - A_1)\psi)$ и $A_2 \geq A_1$. \square

Определенная в (4.21) величина $F(C)$ может быть записана как среднее значение параметра беспорядка (сильно нелокального) в модели плоских ротаторов при высокой температуре (см. [64]). Однако кластерное разложение для $\log F(C)$ проще получить непосредственно, используя низкотемпературное разложение по «дефектам» (которые в этом случае следует интерпретировать как магнитные токи).

Поэтому применим технику, развитую в разделе 3, и «выжмем» оценку снизу для $F(C)$. Имеем

$$\log F(C) = \sum_X (z_{a_1}^X - z_0^X) \frac{a(X)}{X!} \quad (4.22)$$

(см. (3.35)). В качестве полимеров γ мы берем здесь всевозможные носители 1-цепей m_1 с $\delta m_1 = 0$, т. е. связные сети рёбер решётки без граничных точек. Активность равна

$$z_{a_1}(\gamma) = \sum_{\substack{m_1 \neq 0 \text{ на } \gamma \\ \delta m_1 = 0}} e^{-\frac{1}{32g_0^2} \|m_1\|^2 + 2\pi i(a_1, m_1)}. \quad (4.23)$$

Каждый полимер γ может быть представлен как объединение замкнутых контуров:

$$\gamma = \bigcup_i C_i, \quad (4.24)$$

и для каждого контура C_i найдется поверхность S_i с краем C_i . Пусть

$$S(\gamma) = \bigcup_i S_i. \quad (4.25)$$

Рассматривая S как подобъём, мы можем найти в нём цепь $m_2[m_1]$, удовлетворяющую условию: $\delta m_2[m_1] = 0$ для любой 1-цепи m_1 на γ с $\delta m_1 = 0$. Используя это, можно переписать (4.23) в более «калибровочно-инвариантном» виде. Напомним, что

$$a_1 = {}^* \Delta^{-1} dG_2.$$

Поэтому

$$da_1 = {}^* \delta \Delta^{-1} dG_2 = {}^* G_2 - {}^* d \Delta^{-1} \delta G_2 = {}^* G_2 - {}^* d \Delta^{-1} j. \quad (4.26)$$

Определяя «электромагнитное поле» F_2 , порожденное током j , как

$$F_2 = d \Delta^{-1} j, \quad (4.27)$$

имеем $da_1 = {}^* G_2 - {}^* F_2$ и

$$z_{a_1}(\gamma) = \sum_{\substack{m_1 \neq 0 \text{ на } \gamma \\ \delta m_1 = 0}} e^{-\frac{1}{32g_0^2} \|m_1\|^2 - 2\pi i ({}^* F_2, m_2[m_1])} \quad (4.28)$$

(член, содержащий ${}^* G_2$, пропал, так как цепь ${}^* G_2$ целочисленна).

Решающий момент состоит в том, что можно определить поверхность $S(\gamma)$ таким образом, чтобы для нее выполнялось «изопериметрическое неравенство»

$$|S(\gamma)| \leq \frac{1}{16} |\gamma|^2 \quad (4.29)$$

(«решёточное значение π » равно 4). Отсюда получаем основную оценку:

Лемма 4.14. Существует постоянная K , такая что

$$|z_{a_1}(\gamma) - z_0(\gamma)| \leq K |z_0(\gamma)| |\gamma|^2 \|F_2\|_{S(\gamma)}^2, \quad (4.30)$$

где $\|F_2\|_{S(\gamma)}^2 = \sum_{P \in S(\gamma)} |F_2(P)|^2$ — «электромагнитная энергия поля j на $S(\gamma)$ ».

Доказательство. Имеем

$$|z_{a_1}(\gamma) - z_0(\gamma)| \leq 2\pi \sum_{\substack{m_1 \neq 0 \text{ на } \gamma \\ \delta m_1 = 0}} e^{-\frac{1}{32g_0^2} \|m_1\|^2} |(m_2, {}^* F_2)|^2. \quad (4.31)$$

Далее,

$$\begin{aligned} |(m_2, {}^* F_2)|^2 &\leq \|m_2\|^2 \|F_2\|_{S(\gamma)}^2 \\ &\leq \sup_{m_2 \uparrow S(\gamma)} |m_2|^2 \|F_2\|_{S(\gamma)}^2 |S(\gamma)| \leq \|m_1\|^2 \|F_2\|_{S(\gamma)}^2 \frac{1}{16} |\gamma|^2. \end{aligned}$$

Используя неравенство

$$\sum_{\substack{m_1 \neq 0 \text{ на } \gamma \\ \delta m_1 = 0}} \|m_1\|^2 e^{-\frac{1}{32g_0^2} \|m_1\|^2} \leq \widehat{K} \sum_{\substack{m_1 \neq 0 \text{ на } \gamma \\ \delta m_1 = 0}} e^{-\frac{1}{32g_0^2} \|m_1\|^2} \quad (4.32)$$

для достаточно малых g_0^2 , получаем (4.30); можно взять

$$g_0^2 < \frac{1}{32 \log 8}, \quad \widehat{K} = \sum_{m \neq 0} m^2 8^{-m^2} / \sum_{m \neq 0} 8^{-m^2}.$$

Следствие 4.15. Справедлива оценка

$$|z_{a_i}^X - z_0^X| \leq \sum_{\gamma} z_0^X |\gamma|^2 K \|F_2\|_{S(\gamma)}^2 X(\gamma). \quad (4.33)$$

Доказательство. Это вытекает из леммы и неравенства $|z_{a_i}(\gamma)| \leq z_0(\gamma)$. \square

Следующий шаг состоит в суммировании неравенства (4.33) по всем сдвигам фиксированного X_0 :

Лемма 4.16. Справедливо неравенство

$$\sum_{\substack{X \text{ есть} \\ \text{сдвиг } X_0}} |z_{a_i}^X - z_0^X| \leq K z_0^{X_0} \sum_{\gamma} |\gamma|^3 X_0(\gamma) \|F_2\|_{\Lambda}^2. \quad (4.34)$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{\substack{\gamma \text{ есть} \\ \text{сдвиг } \gamma}} \|F_2\|_{\gamma}^2 \leq |\gamma_0| \|F_2\|^2. \quad \square$$

Теперь остается только заметить, что

$$\sum_{\gamma} |\gamma|^3 X_0(\gamma) \leq \left(\sum_{\gamma} |\gamma| X_0(\gamma) \right)^3 \leq a_{\varepsilon} e^{\varepsilon \sum_{\gamma} |\gamma| X_0(\gamma)}$$

для любого $\varepsilon > 0$, при соответствующем a_{ε} . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sum_X |z_{a_i}^X - z_0^X| a(X) &\leq K \|F_2\|_{\Lambda}^2 a_{\varepsilon} \sum_{0 \in X} z_0^X e^{\varepsilon \sum_{\gamma} |\gamma| X(\gamma)} a(X) \\ &\leq K' \|F_2\|_{\Lambda}^2 e^{-\frac{1}{32g_0^2}} \end{aligned}$$

с некоторой постоянной K' .

Так как $\|F_2\|_{\Lambda}^2 = (j, \Delta^{-1}j)_{\Lambda}$, то мы доказали, что

$$\log F(C) \geq -K' e^{-\frac{1}{32g_0^2}} (j, \Delta^{-1}j)_{\Lambda}, \quad (4.35)$$

чем и завершается доказательство теоремы 4.7. \square

Для полноты стоит отметить следующий результат относительно параметра беспорядка в $U(1)$ -калибровочной модели Виллэна:

Теорема 4.7'. Для любого g_0^2

$$\langle D_\theta(C) \rangle \geq \exp \left[-\frac{\theta^2}{2g_0^2} (j_1, \Delta^{-1} j_1) \right],$$

где j_1 — целочисленная 1-цепь на дуальной решетке, определяемая формулой

$$j_1(\langle xy \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{при } \langle xy \rangle \in C, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. По определению

$$\langle D_\theta(C) \rangle = \frac{1}{Z} \prod_{\langle xy \rangle} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_{xy} \prod_P \sum_{l_P} e^{-\frac{1}{2g_0^2} ((d\theta)_P - 2\pi l_P - \theta G_P)^2},$$

где $G_P = G_2(P)$, а G_2 — целочисленная 2-цепь, удовлетворяющая условию $dG_2 = *j_1$. С помощью преобразования дуальности (= фурье-преобразования) получаем

$$\langle D_\theta(C) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\substack{m_2 \\ \delta m_2 = 0}} e^{-\frac{g_0^2}{2} \|m_2\|^2 - i\theta(m_2, G_2)}$$

Теперь воспользуемся корреляционным неравенством из леммы 4.11 (точнее, чуть более общим неравенством) и заменим сумму по m_2 на интеграл по вещественнозначным 2-цепям ω_2 :

$$\begin{aligned} \langle D_\theta(C) \rangle &\geq \frac{1}{Z} \int_{\delta\omega_2=0} d\omega_2 e^{-\frac{g_0^2}{2} \|\omega_2\|^2 - i\theta(\omega_2, G_2)} \\ &= \exp \left[-\frac{\theta^2}{2g_0^2} (G_2, \delta\Delta^{-1} dG_2) \right] = e^{-\frac{\theta^2}{2g_0^2} (j_1, \Delta^{-1} j_1)}. \quad \square \end{aligned}$$

Итак, мы имеем ситуацию, в которой обе петли подчиняются закону периметра. По-видимому, это является характерным для «кулоновой» фазы.

Замечания. 1. Таким же образом можно доказать существование фазового перехода Костерлица — Таулесса для модели двумерных плоских ротаторов. Вместо петли Вильсона

надо рассмотреть двухточечную функцию

$$S_n(x-y) = \langle e^{in(\theta_x - \theta_y)} \rangle. \quad (4.36)$$

В этом случае

$$S_n(x-y) \geq e^{-\frac{1}{2}g_0^2 V_C(x-y)} F(x-y), \quad (4.37)$$

где V_C — решёточный кулонов потенциал,

$$F(x-y) = \frac{1}{Z} \sum_{m_0} e^{-\frac{1}{8g_0^2}(m_0, m_0) + 2\pi i(m_0, a_0)} \quad (4.38)$$

и, как и раньше,

$$e^{2\pi i(m_0, a_0)} = e^{-2\pi i(m_1, *E_1)}; \quad (4.39)$$

здесь $m_1[m_0]$ таково, что $\delta m_1 = m_0$, а E_1 — электрическое поле, отвечающее заряду $+n$ в точке x и заряду $-n$ в точке y (т. е. определенное таким образом, что оно стремится к нулю по мере удаления от пары зарядов).

Но если кластер расширять, то возникает следующая проблема. Аналог (4.29) теперь не верен, так как длина струны не оценивается через число ее граничных точек. Именно поэтому необходимы более тонкие рассмотрения Фрëлиха и Спенсера [60], в которых используются не корреляционные неравенства, исключаящие кулоново взаимодействие, а электростатические методы, в сочетании с некоторыми идеями метода ренорм-группы (для оценки активности).

2. С помощью аналогичных методов можно доказать существование дальнего порядка (спонтанного нарушения симметрии) для моделей плоских ротаторов в случае $d \geq 3$ (упражнение!).

В определенном смысле этот метод сильнее, чем метод из [74], использующий инфракрасные оценки. Он ясно выявляет доминирующую роль спиновых волн (голдстоуновых мод) и не зависит от регулярности объема.

d. $SU(n)$ удерживает, если удерживает Z_n

Результат такого типа, показывающий, что $SU(n)$ -калибровочные теории идут «в правильном направлении» от абелевых Z_n -теорий, был впервые получен Макком и Петковой [67] для специально подобранной модели, а вскоре после этого — Фрëлихом [68] — для стандартной (вильсоновой) чистой модели Янга — Миллса, или модели Янга — Миллса — Хиггса. Из этого результата следует также упомянутый ранее результат Макка [47], относящийся к двумерным моделям.

Мы рассмотрим модель Янга — Миллса — Хиггса, в которой представление Хиггса U_N тривиально на некоторой подгруппе

Z^0 центра Z_n группы $SU(n)$ (это нужно, чтобы сохранить возможность удержания «дробных зарядов»). Чистую модель Янга — Миллса можно рассматривать как ее частный случай.

Интегрируя по полям Хиггса, мы получим статистическую сумму

$$Z(\{g_{xy}\}), \quad (4.40)$$

изучавшуюся в разделе 2. Заметим, что эта статистическая сумма является вещественной функцией калибровочных полей, принимающих значения в $SU(n)/Z^0$. Отметим также простое тождество

$$\int_G dg F(g) = \int_G dg \int_{Z^0} d\omega F(g\omega), \quad (4.41)$$

верное для любых компактной группы G и центральной подгруппы Z^0 .

Теперь рассмотрим петлю Вильсона $W_\tau(C)$, отвечающую представлению τ , ограничение которого на Z^0 нетривиально (т. е. отвечающую «дробным зарядам»). Имеем

$$\begin{aligned} \langle W_\tau(C) \rangle_\Lambda &= Z_\Lambda^{-1} \int \chi_\tau(g_C) e^{-S_Y. M. (\{g_{xy}\})} Z(\{g_{xy}\}) \prod_{(xy)} dg_{xy} \\ &= Z_\Lambda^{-1} \int \prod_{(xy)} dg_{xy} Z(\{g_{xy}\}) \chi_\tau(g_C) \\ &\quad \times \prod_{(xy)} \int_{Z^0} d\gamma_{xy} \chi_\tau(\gamma_C) e^{-S_Y. M. (\{\gamma_{xy} g_{xy}\})} \end{aligned} \quad (4.42)$$

(мы учли (4.41)). Взяв действие в форме Вильсона, получим (используя в действии фундаментальное представление $SU(n)$)

$$\begin{aligned} \langle W_\tau(C) \rangle_\Lambda &= \frac{1}{Z_\Lambda} \int \prod_{(xy)} dg_{xy} Z(\{g_{xy}\}) \chi_\tau(g_C) \\ &\quad \times \prod_{(xy)} \int_{Z^0} d\gamma_{xy} \frac{\chi_\tau(\gamma_C)}{\chi_\tau(\mathbb{1})} e^{-\frac{1}{g_0^2} \sum_P \operatorname{Re} \chi(g_{\partial P}) \frac{\chi(\gamma_{\partial P})}{\chi(\mathbb{1})}}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Это можно рассматривать как Z^0 -калибровочную теорию с переменной константой связи — точка зрения, которая часто оказывается полезной (см. [67]).

Теперь воспользуемся тем, что

$$\chi(\gamma) = e^{i\theta} \gamma \chi(\mathbb{1}), \quad (4.44)$$

$$\chi_\tau(\gamma) = e^{iq_\tau \theta} \gamma \chi_\tau(\mathbb{1}) \quad (4.45)$$

для некоторого целого q_τ и некоторых углов θ_ν , и перепишем существенную часть действия из (4.43) в следующем виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \chi(g_{\partial P}) \chi(\nu_{\partial P}) / \chi(\mathbb{1}) &= \operatorname{Re} \chi(g_{\partial P}) \cos \theta_{\partial P} - \operatorname{Im} \chi(g_{\partial P}) \sin \theta_{\partial P} \\ &\equiv J_P \cos \theta_{\partial P} + K_P \cos \left(\theta_{\partial P} + \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.46)$$

где мы для простоты обозначим $\theta_{\nu_{\partial P}}$ через $\theta_{\partial P}$.

Введем не зависящую от $\{g_{xy}\}$ вероятностную меру $d\mu(\{\theta_{xy}\})_{J,K}$

$$= \frac{1}{\tilde{Z}(\{g_{xy}\})} \prod_{(xy)} d\lambda(\theta_{xy}) \prod_P e^{-\frac{1}{g_0^2} (J_P \cos \theta_{\partial P} + K_P \cos(\theta_{\partial P} + \frac{\pi}{2}))}, \quad (4.47)$$

где \tilde{Z} — очевидный нормировочный множитель, а $d\lambda(\theta)$ — мера Хаара на группе Z^0 , параметризованной углом θ .

Наша цель теперь — избавиться от флуктуаций констант связи J_P и K_P с помощью некоторого корреляционного неравенства. Подходящее неравенство было получено Мессаже, Миракль-Содем и Пфистером [69] и состоит в том, что для $q \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\pm \int \cos(q\theta_C + \alpha) d\mu_{J,K} \leq \frac{1}{Z'} \int \cos(q\theta_C) e^{-\frac{1}{g'^2} \sum_P \cos \theta_{\partial P}} d\lambda(\{\theta_{xy}\}), \quad (4.48)$$

при условии что

$$\frac{1}{g_0^2} (|J_P| + |K_P|) \leq \frac{1}{g'^2}. \quad (4.49)$$

(В действительности, для того чтобы применить неравенство из [69], нужно записать $d\lambda(\theta)$ как слабый предел мер $z(\mu)^{-1} e^{\mu \cos m\theta} d\theta$ при подходящем m и $\mu \rightarrow \infty$.)

Итак, (4.49) верно, если

$$\frac{1}{g'^2} \geq \frac{2d}{g_0^2}, \quad d = \chi(\mathbb{1}). \quad (4.50)$$

Подставляя (4.48) в (4.43) и используя (4.46) и (4.47), получаем

$$\left| \langle W_\tau(C) \rangle_{\Lambda, g^2}^{SU(n)} \right| \leq 2\chi(\mathbb{1}) \langle \cos q\theta_C \rangle_{\Lambda, g'^2}^{Z^n}. \quad (4.51)$$

Собирая вместе всё доказанное, видим, что справедлива

Теорема 4.17. В решёточной $SU(n)$ -теории Янга — Миллса — Хиггса с константой связи g , в которой представление Хиггса тривиально на подгруппе Z^0 , содержащейся в центре группы $SU(n)$, дробно-заряженная петля Вильсона подчиняется за-

кону площади, при условии что та же петля Вильсона подчиняется закону площади в чистой Z^0 -теории Янга — Миллса с константой связи $g/\sqrt{2\chi(1)}$.

Следствие 4.18. В двумерном случае дробные заряды всегда удерживаются.

е. Взаимосвязь электрических и магнитных свойств в проблеме удержания

Сейчас распространена точка зрения, согласно которой неабелевы калибровочные теории удерживают «электрические» заряды по той причине, что последние ведут себя как магнитные сверхпроводники и сжимают «электрический поток» таким же образом, как сверхпроводник сжимает магнитный поток. Эта качественная картина основывается на некоторых строгих результатах, которые мы собираемся здесь обсудить. Критерий удержания, данный Макком и Петковой [70], показывает, что к удержанию приводит «конденсация вихрей», связанная с расширением магнитного потока. Макк и Петкова [67] показали, кроме того, что введение ограничения, устраняющего монополи некоторого типа, затрудняет расширение магнитного потока и приводит при условии слабой связи к удержанию внешних монополей. Мы покажем также, что это приводит к закону периметра для петли Вильсона определенного типа. Наконец, существует общее электрически-магнитное отношение дуальности, найденное т'Хоофтом [76], которое показывает, что может иметь место сжатие либо электрического, либо магнитного потока, но не обоих сразу. Это, кстати, согласуется с результатами раздела 3.

Критерий Макка и Петковой [70] получен под влиянием работы Добрушина и Шлосмана [71], посвященной двумерным спиновым системам с непрерывной симметрией. Добрушин и Шлосман показали, что теорему Мермина — Вагнера [72] об отсутствии спонтанной намагниченности в таких спиновых системах¹⁾ можно заново получить, используя старую интуитивную идею, заключающуюся в том, что потери свободной энергии на длинных блоховских барьерах (контурах Пайерлса) можно сделать малыми за счет большой толщины барьеров и медленного изменения спинов²⁾.

¹⁾ Впервые результат об отсутствии спонтанной намагниченности в двумерных системах был получен Н. Н. Боголюбовым с помощью выведенного им «неравенства Боголюбова» (см. [10*]). — *Прим. ред.*

²⁾ Содержание этого абзаца не вполне точно. Доказательство Добрушина и Шлосмана основано на несколько иной идее. Способ получения результата, описанный в тексте, использован в работе [11*]. — *Прим. ред.*

В решёточных калибровочных теориях аналогом контуров Пайерлса служат, конечно, дефекты, о которых мы уже так много говорили. Если калибровочная группа непрерывна, то наши низкотемпературные разложения не работают, так как дефекты получаются размазанными. Эта размазанность может привести к закону площади для петли Вильсона даже в случае малых g_0 (если только размерность не слишком велика, а именно ≤ 4).

Рассмотрим в качестве возможного объема, содержащего вихри, конечную область бесконечной решетки Z^d с «торидальной» топологией, т. е. предположим, что граница $\partial\Lambda$

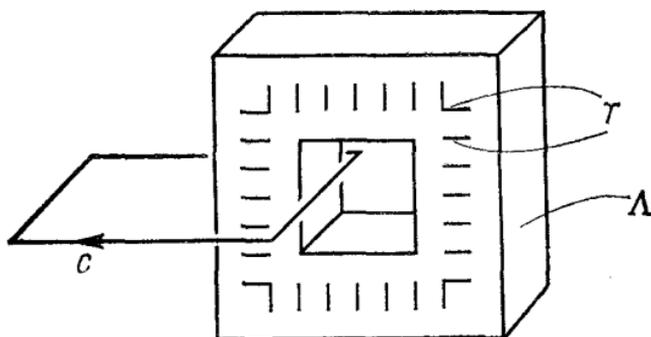


Рис. 18. Трехмерная вихревая область Λ , сцепленная с петлей C .

гомеоморфна $S^{d-2} \times S^1$. Рассмотрим соответствующую статистическую сумму $Z_\Lambda(g_{\partial\Lambda})$ для решеточной чистой теории Янга — Миллса с фиксированными значениями калибровочного поля на границе. Теперь мы хотим возмутить эти граничные условия, действуя на них «сингулярным калибровочным преобразованием» (см. раздел 2) таким образом, чтобы все операторы голономий (= петли Вильсона), соответствующие контурам, которые обегают Λ в «тонком» направлении (см. рис. 18), умножились на некоторый элемент ω из центра нашей калибровочной группы G .

Этого можно достичь путем выбора соответствующего $(d-2)$ -цикла $*T$ на Λ (вспомним, что $\partial\Lambda$ содержит прямым сомножителем S^{d-2}) и умножения всех калибровочных полей, живущих на дуальном множестве T , на элемент ω .

Обозначим соответствующую статистическую сумму через $Z_{\Lambda, \omega}(g_{\partial\Lambda})$. Определим теперь «распределение вероятностей вихрей»:

Определение 4.19.

$$\rho_{\Lambda, g_{\partial\Lambda}}(\omega) = Z_{\Lambda, \omega}(g_{\partial\Lambda}) \left(\int_{\Sigma} d\omega' Z_{\Lambda, \omega'}(g_{\partial\Lambda}) \right)^{-1}, \quad (4.52)$$

где $d\omega$ — нормированная мера Хаара на центре Z группы G (обычно Z — дискретная группа). Заметим, что $Z_{\Lambda, \omega}(g_{\partial\Lambda}) > 0$.

Важно также его преобразование Фурье

$$\hat{\rho}_{\Lambda, g_{\partial\Lambda}}(q) = \int_Z d\omega \chi_q(\omega) \rho_{\Lambda, g_{\partial\Lambda}}(\omega) \quad (4.53)$$

(q пробегает группу, дуальную к Z).

Выберем теперь N попарно непересекающихся вихревых областей, зацепленных с фиксированным замкнутым контуром C , как показано на рисунке. Имеет место

Теорема 4.20 [70]. Справедлива оценка

$$|\langle W_\tau(C) \rangle| \leq \chi_\tau(\mathbb{1}) \prod_{i=1}^N \sup_{g_{\partial\Lambda_i}} |\hat{\rho}_{\Lambda_i, g_{\partial\Lambda_i}}(q_\tau)|, \quad (4.54)$$

где q_τ — ограничение представления τ (которое предполагается неприводимым) на центр группы G .

Доказательство. Пусть $\Lambda^c = \Lambda^d \setminus \bigcup_{i=1}^N \overset{\circ}{\Lambda}_i$, где $\overset{\circ}{\Lambda}_i$ — внутренность Λ_i (рассматриваемого здесь как множество рёбер). Тогда

$$\langle W_\tau(C) \rangle_\Lambda = \left\langle \chi_\tau(g_C) \prod_{i=1}^N Z_{\Lambda_i, \mathbb{1}}(g_{\partial\Lambda_i}) \right\rangle_{\Lambda^c} Z_{\Lambda^c/Z_\Lambda}. \quad (4.55)$$

Произведем в правой части равенства (4.55) замену переменных, которая соответствует сингулярному калибровочному преобразованию (т. е. оставляет все плакетные переменные неизменными) в Λ^c и поворачивает граничные условия $g_{\partial\Lambda_i}$ на элемент ω_i ($i = 1, \dots, N$). Легко видеть, что такая замена существует. Имеем

$$\langle W_\tau(C) \rangle_\Lambda = \left\langle \frac{\chi_\tau\left(\prod_{i=1}^N \omega_i\right)}{\chi_\tau(\mathbb{1})} \chi_\tau(g_C) \prod_{i=1}^N Z_{\Lambda_i, \omega_i}(g_{\partial\Lambda_i}) \right\rangle_{\Lambda^c} Z_{\Lambda^c/Z_\Lambda}.$$

Усредняя по $\omega_1, \dots, \omega_N$, получаем

$$\langle W_\tau(C) \rangle_\Lambda = \left\langle \prod_{i=1}^N \left[\hat{\rho}_{\Lambda_i, g_{\partial\Lambda_i}}(q_\tau) \int d\omega_i Z_{\Lambda_i, \omega_i}(g_{\partial\Lambda_i}) \right] \chi_\tau(g_C) \right\rangle_{\Lambda^c} \frac{Z_{\Lambda^c}}{Z_\Lambda}. \quad (4.56)$$

Так как $|\chi_\tau(g_C)| \leq \chi_\tau(1)$ и

$$\left\langle \prod_{i=1}^N Z_{\Lambda_i, \uparrow}(g_{\partial\Lambda_i}) \right\rangle_{\Lambda^c} = Z_{\Lambda}/Z_{\Lambda^c},$$

то из (4.56) вытекает утверждение теоремы. \square

В целях интерпретации этой теоремы покажем, как с ее помощью удержание (или, что почти то же самое, закон площади для петли Вильсона) выводится из свойств свободной энергии вихрей (это не было доказано в случае слабой связи!).

Допустим, что свободная энергия на единицу длины (в размерности $d = 3$) или на единицу площади поверхности (в размерности $d = 4$) вихревой области быстро становится независимой от поворотов граничных условий при увеличении толщины области. Более точно, предположим, что

$$\left| \log \frac{Z_{\Lambda, \omega}(g_{\partial\Lambda})}{Z_{\Lambda, \uparrow}(g_{\partial\Lambda})} \right| \leq |T| e^{-md}, \quad (4.57)$$

где d — «толщина» Λ . Тогда, выбрав достаточно большое d , мы можем считать, что $|T| e^{-md} \leq \xi$, где ξ достаточно мало.

Для простоты рассмотрим случай $G = SU(2)$. Тогда существует только один нетривиальный характер χ_q , и для этого q мы имеем

$$\hat{\rho}_{\Lambda, g_{\partial\Lambda}}(q) = \frac{Z_{\Lambda, \uparrow}(g_{\partial\Lambda}) - Z_{\Lambda, \downarrow}(g_{\partial\Lambda})}{Z_{\Lambda, \uparrow}(g_{\partial\Lambda}) + Z_{\Lambda, \downarrow}(g_{\partial\Lambda})} = \frac{1 - Z_{\Lambda, \downarrow}(g_{\partial\Lambda})/Z_{\Lambda, \uparrow}(g_{\partial\Lambda})}{1 + Z_{\Lambda, \downarrow}(g_{\partial\Lambda})/Z_{\Lambda, \uparrow}(g_{\partial\Lambda})}.$$

В силу предположения (4.57)

$$\left| \hat{\rho}_{\Lambda, g_{\partial\Lambda}}(q) \right| \leq \frac{e^\xi - 1}{e^{-\xi} - 1} \leq (e^\xi - 1)(e^{-\xi} + 1) = 2 \operatorname{sh} \xi.$$

Если петля Вильсона C настолько велика, что может быть зацеплена с N вихревыми областями нужной толщины, то из теоремы следует оценка

$$|\langle W_\tau(C) \rangle| \leq 2(2 \operatorname{sh} \xi)^N$$

(если τ — фундаментальное представление $SU(2)$).

Остается еще проблема упаковки. Простое рассуждение показывает, что прямоугольный контур со сторонами L и T может быть зацеплен с $LT/(\log L)^2$ вихревыми областями длиной $|T_i|$ и толщиной d_i , удовлетворяющими неравенству $|T_i| e^{-md_i} \leq \xi$ для всех i . Это не совсем дает закон площади, но соответствует потенциалу

$$V(L) = O\left(\frac{L}{(\log L)^2}\right),$$

который является удерживающим.

Следует заметить, что в случае сильной связи предположение (4.57) можно стандартным образом доказать при помощи кластерного разложения. Это было сделано в [73].

В работе [16] Макк и Петкова изучают чистую решёточную теорию Янга — Миллса с калибровочной группой $SU(2)$ и вводят «безобидное» на вид условие

$$\prod_{P \in \partial C} \chi(g_{\partial P}) \geq 0 \quad (4.58)$$

для всех 3-цепей (кубов). Здесь χ — характер, фигурирующий в действии, а именно характер фундаментального представления группы $SU(2)$. Так как в случае слабой связи $g_{\partial P}$ оказывается близким к $\mathbb{1}$, то кажется, что в этом случае условие (4.58) выполняется автоматически. В формальном непрерывном пределе условие (4.58) пропадает. Однако, как показывают Макк и Петкова, для $d \geq 3$ в случае слабой связи условие (4.58) приводит к совершенно особому поведению параметров беспорядка. Например, при $d = 4$ контур т'Хоофта подчиняется закону площади. Это служит указанием на то, что удержание может исчезнуть, а мы непосредственно покажем ниже, что в этой модифицированной модели существует петля Вильсона, подчиняющаяся закону периметра.

Из сказанного следует, что выбор решеточной аппроксимации является существенным и недостаточно проверить формальный непрерывный предел (мы уже видели, как важен выбор характера, фигурирующего в выражении для действия). По-видимому, модифицированная модель имеет критическую точку при ненулевой константе связи, а это вроде бы противоречит асимптотической свободе.

Условие (4.58) имеет вид тождества Бьянки для \mathbb{Z}_2 -переменных $\text{sgn } \chi(g_{\partial P})$. Это неравенство препятствует тонким дефектам вида $\chi(g_{\partial P}) < 0$ расширяться и распространяться.

Условие (4.58) позволяет получить \mathbb{Z}_2 -значную 2-цепь ω_2 , определенную равенством

$$\omega_2(P) = \omega_{\partial P} = \text{sgn } \chi(g_{\partial P}), \quad (4.59)$$

из \mathbb{Z}_2 -значной 1-цепи ω_1 ($\omega_1(\langle xy \rangle) = \omega_{xy}$). Цепь ω_1 определена с точностью до \mathbb{Z}_2 -калибровочного преобразования. Определив h_{xy} равенством

$$g_{xy} = \omega_{xy} h_{xy}, \quad (4.60)$$

можно записать действие Вильсона в виде

$$-S_{\text{Y. M. W.}} = \frac{1}{g_0^2} \sum_P \omega_{\partial P} \chi(h_{\partial P}). \quad (4.61)$$

Мы можем вычислять средние значения, суммируя по всем Z_2 -калибровочным полям ω_1 и всем $SU(2)$ -калибровочным полям $\{h_{xy}\}$, подчиненным условию

$$\chi(h_{\partial P}) \geq 0 \quad (4.62)$$

для всех плакетов P .

Рассмотрим теперь

$$\overset{0}{W}(C) \equiv \omega_C = \prod_{(xy) \in C} \omega_{xy}; \quad (4.63)$$

$\overset{0}{W}(C)$ калибровочно инвариантно и, следовательно, определяется набором $\{g_{xy}\}$; $\overset{0}{W}(C)$ представляет собой Z_2 -петлю Вильсона (в действительности $\overset{0}{W}(C) = \prod_{P \in S} \text{sgn} \chi(g_{\partial P})$, где $\partial S = C$).

Лемма 4.21. В модели с условием (4.58) Z_2 -петля Вильсона $\overset{0}{W}(C)$ для достаточно малых g_0^2 подчиняется закону периметра.

Доказательство. Имеем

$$\langle \overset{0}{W}(C) \rangle_{\Lambda} = \frac{1}{Z_{\Lambda}} \prod_{(xy)} \int dh_{xy} \theta(\{h_{xy}\}) \sum_{\{\omega_{xy}\}} \omega_C \exp \left[\frac{1}{g_0^2} \sum_P \omega_{\partial P} \chi(h_{\partial P}) \right], \quad (4.64)$$

где

$$\theta(\{h_{xy}\}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi(g_{\partial P}) \geq 0 \text{ при всех } P, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если определить вероятностную меру $d\mu$ равенством

$$d\mu(\{h_{xy}\}) = \text{const} \cdot \theta(\{h_{xy}\}) \tilde{Z}(\{h_{xy}\}) \prod_{(xy)} dh_{xy}, \quad (4.65)$$

где

$$\tilde{Z}(\{h_{xy}\}) = \sum_{\{\omega_{xy}\}} e^{\frac{1}{g_0^2} \sum_P \omega_{\partial P} \chi(h_{\partial P})}, \quad (4.66)$$

то мы получим

$$\langle \overset{0}{W}(C) \rangle_{\Lambda} = \int d\mu(\{h_{xy}\}) \langle \overset{0}{W}_C \rangle_{h, \Lambda}, \quad (4.67)$$

где $\langle \overset{0}{W}_C \rangle_{h, \Lambda}$ — среднее значение Z_2 -петли Вильсона со случайными константами связи $g_0^{-2} \chi(h_{\partial P}) \geq 0$.

Из вогнутости логарифма следует, что

$$\log \langle \overset{0}{W}(C) \rangle_{\Lambda} \geq \int d\mu (\{h_{xy}\}) \log \langle \overset{0}{W}_C \rangle_{h, \Lambda}. \quad (4.68)$$

Для последнего выражения можно провести обычное низкотемпературное разложение, так же как в теореме 3.14. Активности дефектов не обязательно малы для всех $\{h_{xy}\}$, но их среднее мало при условии малости g_0^2 , и сходимость легко устанавливается.

З а м е ч а н и я. 1. Этим не доказано, что обычная петля Вильсона $\langle W(C) \rangle = \langle \chi(h_C) \overset{0}{W}(C) \rangle$ подчиняется закону периметра. Весьма правдоподобно, что большие дефекты будут всё еще достаточно «разупорядочивать» систему, чтобы получался закон площади.

2. Макк и Петкова доказывают тем же методом дуальное утверждение

$$|\langle D_{\omega}(C) \rangle| \leq e^{-\alpha_{\omega} A(C)}, \quad \alpha_{\omega} > 0,$$

используя существенным образом шахматную оценку (теорема 2.2).

Теперь кратко поясним соотношение дуальности т'Хоофта [76] для четырехмерной решеточной модели Янга — Миллса. Мы уже обсуждали вихревые области (или области магнитного потока) и важность свободной энергии магнитного потока. Вместо использованной раньше области с топологией $S^2 \times S^2$ т'Хоофт просто рассматривает систему, «живущую» на четырехмерном торе $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 \equiv T_4 \equiv \Lambda$. Магнитный поток вводится с помощью сингулярного калибровочного преобразования следующим образом. Выделим из T_4 два множителя S_{μ}^1, S_{ν}^1 . Выберем элемент $\omega_{\mu\nu}$ из центра группы G и плакет P_0 в $S_{\mu}^1 \times S_{\nu}^1$. Трансформируем действие, умножив g_{DP} на $\omega_{\mu\nu}$ для каждого плакета P из T_4 , который отображается в P_0 при канонической проекции T_4 в $S_{\mu}^1 \times S_{\nu}^1$. Это можно сделать одновременно для всех пар (μ, ν) , и, как легко видеть, получающаяся трансформированная статистическая сумма

$$Z_{\Lambda}(\{\omega_{\mu\nu}\})$$

не зависит от выбора P_0 . Мы скажем, что $Z_{\Lambda}(\{\omega_{\mu\nu}\})$ несет магнитный поток $\omega_{\mu\nu}$ в направлении $*(\mu, \nu)$, дуальном к (μ, ν) .

Электрический поток вводится дуальным образом. Пусть $\{\chi_{\tau}\}_{\tau \in \hat{Z}}$ — полное множество неприводимых характеров

центра Z группы G . Положим

$$\hat{Z}_\Lambda(\{\tau_{\mu\nu}\}) = \int \chi_{\tau_{\mu\nu}}(\omega_{\mu\nu}) Z(\{\omega_{\mu\nu}\}) \prod_{\mu < \nu} d\omega_{\mu\nu} \quad (4.69)$$

и скажем, что $\hat{Z}_\Lambda(\{\tau_{\mu\nu}\})$ имеет электрический поток $\tau_{\mu\nu}$ в направлении (μ, ν) .

Для оправдания этой терминологии рассмотрим изменение (4.69) под действием другого сингулярного калибровочного преобразования $\omega'_{\mu\nu}$. Оно приводит к умножению на $\chi_{\tau_{\mu\nu}}(\omega'_{\mu\nu})$, а это характеризует электрический поток (например, петля Вильсона обнаруживает аналогичное поведение).

Теперь ограничимся группой $G = Z_n$ или $SU(n)$ и рассмотрим возможное поведение $Z(\{\omega_{\mu\nu}\})$ и $\hat{Z}(\{\tau_{\mu\nu}\})$ при увеличении Λ . Обозначим стороны Λ через L_1, \dots, L_4 .

Электрическое удержание соответствует оценке

$$\frac{\hat{Z}_\Lambda(\tau_{12})}{\hat{Z}_\Lambda(1)} \leq c L_3 L_4 e^{-\alpha_{\tau_{12}} L_1 L_2}, \quad (4.70)$$

где $\alpha_{\tau_{12}} > 0$ («натяжение струны»), а c не зависит от L_1, \dots, L_4 ; магнитное же удержание означало бы, например, что

$$\frac{Z_\Lambda(\omega_{34})}{Z_\Lambda(1)} \leq c' L_1 L_2 e^{-\beta_{\omega_{34}} L_3 L_4}. \quad (4.71)$$

Но левую часть неравенства (4.70) можно выразить через величины, входящие в левую часть неравенства (4.71), используя равенство (4.69):

$$\frac{\hat{Z}_\Lambda(\tau_{12})}{\hat{Z}_\Lambda(1)} = \frac{\sum_{\omega} e^{2\pi i \tau_{12} \omega} Z_\Lambda(\omega) / Z_\Lambda(1)}{\sum_{\omega} Z_\Lambda(\omega) / Z_\Lambda(1)}. \quad (4.72)$$

Предполагая, что справедливо (4.71), мы получаем при $L_3, L_4 \rightarrow \infty$

$$\frac{\hat{Z}_\Lambda(\tau_{12})}{\hat{Z}_\Lambda(1)} \rightarrow 1,$$

что противоречит (4.70). Заметим, что в действительности из (4.70) следует оценка вида

$$\left| \log \frac{Z_\Lambda(\omega_{12})}{Z_\Lambda(1)} \right| \leq c'' L_3 L_4 e^{-\alpha L_1 L_2}, \quad (4.73)$$

где $\alpha = \inf_{\tau} \alpha_{\tau}$, и, наоборот, из (4.73) следует оценка вида (4.70) (с $\alpha_{\tau_{12}} = \alpha$). Заметим также, что (4.73) в точности

соответствует (4.57). Это неравенство выражает «расширение магнитного потока».

Мы опять видим, что расширение магнитного потока необходимо для электрического удержания. Очевидна аналогия между этим рассуждением и доказательством теоремы 4.31.

Результаты раздела 3 наводят на мысль, что справедливо следующее более сильное предложение:

Гипотеза. Если имеется массовая щель и магнитные (электрические) заряды не удерживаются (т. е. соответствующая петля подчиняется закону периметра), то электрические (магнитные) заряды удерживаются (см. т'Хофт [76]).

В этой связи заслуживает внимания тот факт, что введение (электрически) заряженной материи разрушает закон площади для петли Вильсона и одновременно приводит к закону площади для петли т'Хофта. Замена слова «электрический» на «магнитный» опять-таки наводит на мысль, что некоторый вид динамических магнитных монополей может играть существенную роль в электрическом удержании.

f. Некоторые грубые соображения о фазовом переходе огрубления поверхности

Недавно Дюрхюус и Фрёлих опубликовали статью [66], содержащую идеи и результаты в таком изобилии, что мы просто не смогли воздать ей должное и попытаться пересказать ее всю в этой книжке. Они нарисовали очень интересную картину, опирающуюся на рассмотрение d -мерной решеточной теории Янга — Миллса как множества $(d - 1)$ -мерных нелинейных $G \times G$ -значных σ -моделей со случайными связями. «Спинами» являются «вертикальные» калибровочные поля. Их случайная связь обеспечивается «вертикальными» плакатами. Тем самым становится возможным рассматривать среднее значение петли Вильсона как временную эволюцию (с мнимым временем) или диффузию струны, которая при этом описывает случайную поверхность.

Наиболее интересно то, что в случае сильной связи удержание вытекает просто из равномерного экспоненциального убывания корреляций для σ -моделей. Но если $d \geq 4$, то такие σ -модели имеют критическую точку и фазовый переход к упорядоченному состоянию. Единственная причина, по которой в этом случае может сохраниться удержание, — это «дико» сильные флуктуации струн и трассируемых ими поверхностей, так как они приводят к взаимным сокращениям случайных фазовых множителей. Таким образом, свойство «огрубления

поверхности», по-видимому, существенно для сохранения удержания.

В последнее время появилось большое количество статей, посвященных фазовому переходу огрубления поверхности (см., например, [75]¹⁾). В одних статьях приводятся численные обоснования (нарушение высокотемпературных разложений), в других предлагаются интуитивные обоснования, в большинстве случаев основанные на аналогии с моделью Изинга. На мой взгляд, наиболее убедительные обоснования последнего рода предложил Люшер [75] — в контексте модели Изинга они хорошо известны; грубо говоря, они сводятся к следующему.

При высокой температуре (сильная связь) кластерное разложение для петли Вильсона определяет распределение вероятностей на множестве поверхностей (т. е., на нашем языке, кластеров полимеров), натянутых на этот контур. Имеется конечное поверхностное натяжение, препятствующее слишком большой подвижности поверхности. При большой константе связи разумно рассматривать лишь простые поверхности, которые в случае $d = 3$ можно описывать с помощью \mathbb{Z} -значной функции h , дающей значение высоты поверхности. Если $d = 4$, то h является \mathbb{Z}^2 -значной функцией. Влияние поверхностного натяжения можно учесть в эффективном действии

$$K \sum_{\langle xy \rangle} (h_x - h_y)^2,$$

где суммирование идет по ближайшим соседям в \mathbb{Z}^2 (в плоскости петли Вильсона). А это есть в точности действие, дуальное к вилленову варианту плоских ротаторов, действие, которое для достаточно малых K в существенном ведет себя как гауссовское и при котором происходит упоминавшийся выше фазовый переход Костерлица — Таулесса [59], существование которого недавно было доказано [60]. Но это означает, что средняя амплитуда флуктуаций логарифмически расходится с ростом петли. Поверхность становится абсолютно делокализованной! В действительности полностью «грубой» она никогда не становится, потому что поверхностное натяжение остается конечным.

Не может быть никаких сомнений в том, что описанный эффект на самом деле имеет место, и это очень неудобно с точки зрения вычислений. По-видимому, это приводит к появлению существенной сингулярности, через которую необхо-

¹⁾ Впервые фазовый переход огрубления поверхности в случае обычных решеточных спиновых моделей был установлен в трехмерном случае Добрушиным (см. [12*]). — *Прим. ред.*

димо проходить при переходе от хорошо проанализированной области сильной связи к критической точке (которой для непрерывных неабелевых групп G и $d \leq 4$ предположительно служит точка $g_0 = 0$). Критическая точка находится как раз там, где должен быть построен переход к непрерывному случаю! Поэтому, как ни печально, не существует легкого способа экстраполировать высокотемпературные разложения на случай слабой связи. Но в принципе это всё ещё остается возможным, покуда не обнаружено естественной границы аналитичности по g_0 .

После этой небольшой разрядки обратимся к непрерывному случаю, точнее к тому немногому, что известно о нем строгого.

Непрерывные калибровочные квантовые теории поля

Теории, указанные в названии, должны бы были быть главным предметом этой книги, но, к сожалению, они значительно менее разработаны, чем решёточные калибровочные теории. Мы опишем сначала основные методы построения таких теорий, разбивающиеся на три класса: непрерывные пределы решёточных теорий, прямые непрерывные конструкции и комбинированный метод. Первые два из них мы проиллюстрируем на простых примерах, а именно на двумерной чистой теории Янга — Миллса и на модели Швингера (безмассовая двумерная электродинамика). Комбинированному методу будет посвящена большая часть оставшихся глав. Он используется для построения двумерной абелевой модели Хиггса, которая будет обсуждена нами достаточно подробно и которая, как будет показано, является квантовой теорией поля в смысле Вайтмана; мы дадим также общий план построения массивной двумерной квантовой электродинамики с помощью этой стратегии. Выяснится, однако, что аксиомы Вайтмана не являются самой естественной основой для калибровочных теорий, по крайней мере в неабелевом случае. Поэтому в конце мы обсудим другие возможные основания, пригодные при рассмотрении обобщенных калибровочно-инвариантных объектов, таких как петли Вильсона, вместо локальных полей.

Философия, стоящая за всем этим, та же самая, что и в случае решёточной аппроксимации, — по возможности избегать обращения с «потусторонним миром» (Hinterwelt, как в [1]) и нефизическими степенями свободы.

5. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ КВАНТОВЫХ ТЕОРИЙ ПОЛЯ

а. Скейлинг-предел

Этот метод выглядит наиболее естественным с концептуальной точки зрения; к сожалению, его трудно провести в общем случае, так как требуется детальная информация о

поведении решёточных теорий вблизи критической точки. Подробное обсуждение метода для случая ϕ^4 -моделей имеется у Шрадера [2].

Произвольная решёточная модель характеризуется числом «голых» параметров (констант взаимодействия) $\lambda = (\lambda_1, \dots, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$, входящих в выражение для действия. Можно попытаться найти такое же число «физических» параметров, описывающих теорию, скажем некоторое число масс, выраженных в физических единицах, например килограммах или ГэВ и, возможно, несколько безразмерных физических постоянных взаимодействия (зарядов); обозначим их все через

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r) \in \mathbb{R}^r.$$

Для любой такой заданной постоянной ε модель порождает некоторое отображение — так называемое *ренорм-отображение* $R(\varepsilon): \mathbb{R}^r \supset G \rightarrow \mathbb{R}^r$:

$$R(\varepsilon)\lambda \equiv \mu(\varepsilon, \lambda). \quad (5.1)$$

Можно попытаться устремить ε к нулю, оставляя μ фиксированным. Это означает, что все длины, измеряемые в единицах решётки, должны стремиться к бесконечности, т. е. мы должны приближаться к критической точке. Конечно, для этого требуется, чтобы отображение $R(\varepsilon)$ было в некотором смысле обратимым, и эта обратимость играет главную роль у Шрадера [2] при исследовании ϕ^4 -моделей.

В предположении, что указанная обратимость имеет место и все рассматриваемые отображения достаточно гладки, (5.1) приводит к некоторому варианту уравнений Кэллена — Симанзика [3]:

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} \mu(\varepsilon, \lambda(\varepsilon)) = \sum_{i=1}^r A_i \frac{d\mu_i}{d\lambda_i} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mu(\varepsilon, \lambda(\varepsilon)), \quad (5.2)$$

где $A_i \equiv \partial \lambda_i / \partial \varepsilon$ обычно рассматриваются снова как функции от ε и μ .

Отображение $R(\varepsilon)$ особенно просто выглядит для чистых теорий Янга — Миллса, так как они зависят лишь от одного голого параметра g_0 . Удобно и принято брать в качестве соответствующей физической величины «натяжение струны»

$$\bar{\alpha}_\tau \equiv - \lim_{A(C) \nearrow \infty} \frac{1}{e^2 A(C)} \log \langle W_\tau(C) \rangle, \quad (5.3)$$

где $A(C)$ — площадь, измеренная в единицах решетки.

$\tilde{\alpha}_\tau$ зависит от ε очевидным образом:

$$\tilde{\alpha}_\tau = \frac{1}{\varepsilon^2} \alpha_\tau, \quad (5.3')$$

где $A(C)$ зависит только от g_0 , но не от ε . Уравнение (5.2) принимает вид

$$0 = -2\alpha_\tau - \beta(g_0) \frac{d\alpha_\tau}{dg_0}, \quad (5.4)$$

где $\beta = -\varepsilon(dg_0/d\varepsilon)$ — решеточная функция Кэллена — Симанзика, рассматриваемая как функция от g_0 .

Наши надежды состоят в том, что скейлинг-пределы средних значений разумных функций полей

1) существуют (конечно, для этого требуется, чтобы скейлинг-преобразование некоторым образом действовало на полях);

2) не зависят от выбора фиксируемых физических параметров (внутри некоторого разумного класса);

3) являются эвклидово-инвариантными и определяют модель релятивистской квантовой теории поля.

Третий пункт можно проверить, например, при помощи аксиом Остервальдера — Шрадера [4] для средних значений (локальных) калибровочно-инвариантных полей или при помощи предположений, сформулированных в разделе 8, для нелокальных калибровочно-инвариантных объектов.

Предостережение. Второй пункт не всегда выполняется, как было показано для чистой решеточной $U(1)$ -калибровочной теории в размерности три в красивой работе Гёпферта и Макка [72].

Посмотрим, как эти идеи работают в тривиальном случае двумерной чистой теории Янга — Миллса. Для получения простых формул (без функций Бесселя) воспользуемся формой Виллэна (1.8). Используя теорему Петера — Вейля [5], непосредственным вычислением получаем

$$\langle W_\tau(C) \rangle = e^{-\frac{1}{2} g_0^2 C_\tau A(C)}. \quad (5.5)$$

(Каждое ребро $\langle xy \rangle$ принадлежит самое большее двум плакетам, так что для интегрирования по g_{xy} требуется, чтобы два соседних плакета были носителями одного и того же неприводимого представления σ , если $\langle xy \rangle \notin C$. Ясно, что для свободных граничных условий $\sigma = \mathbb{1}$ вне петли и $\sigma = \tau$ внутри петли; для других граничных условий в термодинамическом пределе также выживают только эти представления.)

Таким образом, мы имеем

$$\alpha_r = \frac{1}{2} g_0^2 C_r, \quad (5.6)$$

$$\tilde{\alpha}_r = \frac{1}{2} \left(\frac{g_0}{e} \right)^2 C_r, \quad (5.7)$$

и мы получим скейлинг-предел, потребовав, чтобы

$$g_0(\varepsilon) = \varepsilon g_0. \quad (5.8)$$

Это соответствует равенству

$$\beta(g_0) = -g_0. \quad (5.9)$$

Равенства (5.8) и (5.9) выражают тривиальную «асимптотическую свободу» этой суперперенормируемой модели.

Легко выписать среднее значение произведения любого числа непересекающихся петель Вильсона (скейлинг-преобразование действует на петлевые наблюдаемые, просто сохраняя неизменным их размер в физических единицах):

$$\left\langle \prod_{i=1}^N W_{\tau_i}(C_i) \right\rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} g_0^2 \sum_{i=1}^N C_{\tau_i} A(C_i) \right], \quad (5.10)$$

и даже для перекрывающихся петель Вильсона не возникает проблем, за исключением некоторых манипуляций с коэффициентами Клебша—Гордона (см. [6]). Ясно, что выражение (5.10) эвклидово-инвариантно; конечно, в этом случае аксиомы Остервальдера—Шрадера не могут быть проверены, так как здесь мы имеем средние значения полей не в точках, а на петлях. В последнем разделе я рассмотрю одну модификацию аксиом Остервальдера—Шрадера, пригодную в такой ситуации.

Вернемся на момент к (5.4). Обычно предполагают, что поведение в главном порядке (первые два ненулевых коэффициента в разложении Тэйлора) функции β универсально, т. е. не зависит от определения шкалы и параметра обрезания. При таком предположении можно считать, что поведение функции β описывается следующей формулой, полученной при знаменитом вычислении «асимптотической свободы» [7] в размерности 4 в непрерывном случае с помощью стандартной теории возмущений:

$$\beta(g_0) = -c_G g_0^3 + O(g_0^5). \quad (5.11)$$

Здесь c_G — постоянная, пропорциональная значению квадратичного оператора Казимира группы G в присоединенном представлении. Ее точное значение определяется сравнением нормировок в (1.6) и (1.5) (см. [8]).

Подстановка этого выражения в (5.4) позволяет предсказать характер слабого взаимодействия для натяжения струны:

$$\alpha_t = O\left(g_0^q \exp\left(-\frac{1}{c_G g_0^2}\right)\right). \quad (5.12)$$

Поистине замечательно, что Кройц [8] в своей знаменитой работе по исследованию методом Монте-Карло решёточных теорий Янга — Миллса действительно обнаружил совместимость этой асимптотики с правильной постоянной c_G . Этот факт рассматривается как один из сильнейших доводов в защиту разумности решёточной аппроксимации и обоснованности общей веры в то, что КХД удерживает кварки (однако работа [73] наводит, кажется, на более скептические размышления).

Проведённые рассмотрения показывают, как естественно входят идеи ренорм-группы в исследование непрерывного предела. Балабан [9] анонсировал результат, который, по видимому, поведет к значительному продвижению вперед на пути к построению непрерывного предела трехмерных моделей и в котором идеи ренорм-группы используются даже еще более существенным образом, навеянным доказательством устойчивости ϕ^4 -модели в трехмерном случае, принадлежащим Галлаватти и др. [10]. Результат об устойчивости, анонсированный Балабаном, таков:

$$|\log Z_\Lambda| \leq C|\Lambda|,$$

где C — постоянная, не зависящая от шага решётки ε . Метод Балабана основан на использовании последовательных итераций «блок-спинового» преобразования, при которых возникают всё более и более грубые решёточные системы со всё более и более сильным взаимодействием; это асимптотическая свобода, наблюдаемая в обратном направлении. Можно начать эти итерации, переходя ко всё более и более мелким решёткам со всё более и более слабым взаимодействием, так что после достаточно большого числа итераций по существу возникнет теория, которая рассматривалась вначале. Так как в нашем распоряжении пока нет подробного изложения анонсированного результата, мы ограничим обсуждение метода этими замечаниями¹⁾.

Замечание, добавленное при корректуре. Появился препринт [9], в котором Балабан описывает, как его метод работает в случае несколько более простой модели.

¹⁾ См. Балабан [13*]. — Прим. ред.

б. Прямые непрерывные конструкции

Иногда возможно применять более традиционные методы конструктивной квантовой теории поля и в случае калибровочных моделей (о конструктивной КТП см. [11, 12, 69]¹⁾). Например, этими методами уже некоторое время назад [13] был построен вариант теории КЭД₂ (массивная модель Швингера — Тирринга) и было установлено, что эта модель является теорией поля в смысле Вайтмана. Однако это было сделано при помощи трюка: так называемая бозонизация переводит эту модель в обыкновенную скалярную теорию самодействующего поля (массивную синус-гордон-модель), к которой уже применимы стандартные конструктивные методы. При этом калибровочный аспект оказался целиком запрятанным за этим трюком, и к тому же нет никаких шансов на то, что этот трюк будет работать в размерностях, больших двух.

Для КЭД₂ (без члена Тирринга) можно применить более общий подход. Он основан на формуле Мэттьюза — Салама [14], в которой предполагается, что сначала построена функциональная мера «интегрированием» по фермионным полям. Это можно сделать прямо в непрерывном пределе (с соблюдением некоторых предосторожностей) и было успешно сделано для моделей Юкавы [15, 16] (дополнительные ссылки на литературу см. в [42]). Здесь имеется небольшая трудность, связанная с тем, что для перехода к непрерывному пределу обычно необходимо сначала выполнить обрезание (вместо обрезания с помощью решетки), а такие обрезания имеют досадную тенденцию — они нарушают либо калибровочную инвариантность, либо положительность по Остервальдеру — Шрадеру. Однако можно доказать, что достаточно установить все желаемые свойства в пределе в отсутствие обрезания. Магнен и Сенеор анонсировали частичное построение КЭД₃, основанное на такой стратегии [17].

Формулы Мэттьюза — Салама можно получить с помощью формализма, описанного в разделе 1, интегрированием по фермионам, следуя правилу, предложенному Березиным, с последующим переходом к формальному непрерывному пределу. Подробное обсуждение этой процедуры содержится в [74]. Удобно сделать масштабное преобразование калибровочного поля $A \rightarrow eA$. Тогда средние по калибровочным полям определяются с помощью формальной вероятностной меры

$$d\mu(A) = \frac{1}{Z} \det \left(1 + \frac{e}{i\hat{p} + M} \hat{A} \right) dm_{\text{Y.M.}}(A), \quad (5.13)$$

где $dm_{\text{Y.M.}}(A)$ — (формальная) мера непрерывной теории Янга — Миллса. Средние фермионных полей также выражаются

¹⁾ А также [12]. — Прим. ред.

через $d\mu$; типичный пример:

$$\left\langle \bar{\psi}(x) e^{ie \int_x^y A dx'} \psi(y) \right\rangle = \int \text{tr} e^{ie \int_x^y A dx'} (i\hat{\rho} + e\hat{A} + M)^{-1}(y, x) d\mu_{\text{Г. М.}}(A) \quad (5.14)$$

(здесь след берется по дираковским и внутренним индексам).

В принципе формулы (5.13) и (5.14) столь же хороши в качестве эвристической отправной точки, как и обычный эвклидов функциональный интеграл; нужно только проверить в конце выполнение аксиом. Положительность по Остервальдеру — Шрадеру не совсем очевидна; ее можно доказать, взяв «гамильтонову» производную от (5.14) и (5.13), как это сделано (с исправимой ошибкой, см. [74]) в [18] для модели Юкавы, или же вывести более аккуратным образом при помощи решеточных аппроксимаций; это будет сделано в следующем разделе.

Формулы (5.13) и (5.14) указывают на следующее. Сначала нужно изучить интегралы, соответствующие внешним полям, а уже затем беспокоиться об интегрировании по калибровочным полям; в абелевом случае интегрировать надо только по подходящей гауссовской мере (интегрирование может включать в себя обрезания, фиксированную калибровку и т. п.). Прежде всего обсудим определитель в (5.13). Он имеет вид $\det(1 + eK(A))$, где $K(A)$ формальным преобразованием подобия может быть приведено к виду

$$K(A) = (p^2 + M^2)^{-3/4} (i\hat{\rho} + M)\hat{A}(p^2 + M^2)^{-1/4}. \quad (5.15)$$

Подразумевается, что $K(A)$ действует на $\mathcal{H}_F \equiv L^2(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{V}_F$. Для достаточно хорошего внешнего поля A_μ оператор $K(A)$ будет компактным в \mathcal{Y}_q при $q > q_0$, где

$$\mathcal{Y}_q \equiv \{C \mid C \text{ — компактный оператор на } \mathcal{H}_F; \text{Tr}(C^*C)^{q/2} < \infty\}.$$

Лемма 5.1. Пусть $A_\mu \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\mathbb{R}^d)$. Тогда $K(A) \in \mathcal{Y}_q$ при $q > d$.

Доказательство. Как доказано в [19], операторы вида $C = f(x)g(\nabla)$ (композиция умножения на функцию в p -пространстве с умножением на функцию в x -пространстве) удовлетворяют оценке

$$\|C\|_q \equiv \text{const} \|f\|_q \|g\|_q, \quad (5.16)$$

где $q \geq 2$ и $\|C\|_q \equiv (\text{Tr}(C^*C)^{q/2})^{1/q}$. Но $K(A)$ можно записать как произведение унитарных операторов $|A|^{1/2}(p^2 + M^2)^{-1/4}$ и их сопряженных, откуда и вытекает наше утверждение. \square

Отметим, что для операторов вида $1 + K$, $K \in \mathcal{Y}_q$ ($q \geq 1$), существует хорошо развитая теория модифицированных определителей Фредгольма (см. [20, 74]).

Определение 5.2. Пусть $C \in \mathcal{Y}_q$. Тогда

$$\det_p(1 - C) \equiv \det \left[(1 - C) e^{\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \text{Tr} C^k} \right]$$

(для $p > q$).

Замечание. Правая часть имеет вид $\det(1 + B)$, где $B \in \mathcal{Y}_1$ (класс операторов со следом), и, следовательно, корректно определена. Формально (а при условии, что $\|C\| < 1$, и строго) справедливо равенство

$$\log \det_p(1 - C) = - \sum_{k \geq p} \frac{1}{k} \text{Tr} C^k.$$

\det_p обладает многими хорошими свойствами, и среди них следующими:

Лемма 5.3. $\det_p(1 - zC)$ есть целая функция от z порядка p ; ее нули располагаются в точности в точках, обратных собственным значениям оператора C .

Доказательство. См. [20]. \square

Возвращаясь к фермионным калибровочным теориям, заметим, что для того, чтобы определить перенормированный определитель, мы должны восстановить, насколько это возможно, члены $\text{Tr} C^k$ ($k < p$), уничтоженные в \det_p . Не учитывать их было бы неверно, так как это не соответствовало бы локальным контрчленам. Заметим, что $\text{Tr} K(A)^k$ отвечает однопетлевой диаграмме Фейнмана с внешними калибровочными полями в вершинах:

$$\text{Tr} K(A)^k \leftrightarrow \text{Diagram}$$

и мы очень хорошо знаем, как их перенормировать; обозначим¹⁾ перенормированные выражения через $\text{Tr}_{\text{gen}} K(A)^k$. Мы можем ввести следующее определение.

¹⁾ Ниже индекс gen — от genormalized (перенормированный). — Прим. ред.

Определение 5.4.

$$\det_{\text{ren}}(1 + eK(A)) = \det_{d+1}(1 + eK(A)) \times \\ \times \exp \left[- \sum_{k=1}^d \frac{e^k}{k} \text{Tr}_{\text{ren}}(-K(A))^k \right].$$

Замечания. 1. Понятно, что перенормировка делается таким образом, чтобы \det_{ren} оставался калибровочно-инвариантным и вычеты соответствовали локальным контрчленам, так что положительность по Остервальдеру — Шрадеру сохраняется (все эти вопросы следовало бы обсудить более подробно; см. [74]).

2. Без особого труда можно получить для перенормированного определителя замкнутое выражение, основанное фактически на классической статье Швингера [21]; например, для $d = 4$ оно имеет вид

$$\log |\det_{\text{ren}}(1 + eK(A))|^2 \\ = \int_0^\infty dt \log(t\Lambda^2) \text{Tr}(H_F(A)e^{-tH_F(A)} - e^{-tH_F(0)}H_F(0)). \quad (5.17)$$

Здесь Λ — масштабный параметр (имеющий размерность массы), а $H_F(A)$ — четырехмерный гамильтониан Паули:

$$H_F(A) = (i\hat{p} + e\hat{A} + M) * (i\hat{p} + e\hat{A} + M).$$

Подробное доказательство и обсуждение формулы (5.17) увело бы нас слишком в сторону от темы, но формально она выводится совсем непосредственно (строгий вывод см. в [74]).

Вернемся обратно к модели Швингера. Ее тривиальность вытекает из того, что определитель имеет крайне простой вид.

Лемма 5.5. Если $d = 2$, $A_\mu \in L^2$, $M = 0$, то

$$\det_4(1 + eK(A)) = 1.$$

Следствие 5.6. Спектр оператора $K(A)$ сосредоточен в нуле, т. е. $K(A)$ квазинильпотентен.

Доказательство. Это вытекает из следующих трех фактов:

- $\det_4(1 + eK(A))$ калибровочно-инвариантен;
- $\det_4(1 + eK(A))$ — чётная функция от e ;
- $\det_4(1 + eK(A)) = \det_4(1 + ei\gamma_5 K(A))$.

Свойство а) вытекает очевидным образом из конструкции. Свойство б) есть хорошо известная теорема Фарри; она справедлива, потому что определитель инвариантен относительно зарядового сопряжения, которое, однако, меняет e на $-e$.

Свойство с) следует из б):

$$\det_4(1 + eK(A)) = \det_2(1 - eK(A)^2)^{1/2},$$

а

$$K(A)^2 = (i\gamma_5 K(A))^2.$$

Далее, в силу а) мы можем считать, что $\partial_\mu A_\mu = 0$ (заменяв A_μ на $A_\mu + \partial_\mu \Delta^{-1} \partial_\nu A_\nu$). Из с) и того, что $\gamma_5 \hat{A} = iB$, где $B_\mu = \epsilon_{\mu\nu} A_\nu$, следует, что

$$\det_4(1 + eK(A)) = \det_4(1 + eK(B)).$$

Но оператор B чисто калибровочный, так что ввиду а)

$$\det_4(1 + eK(B)) = \det_4(1) = 1. \quad \square$$

З а м е ч а н и е. Конечно, это — результат Швингера [24]; доказательство взято из [23].

Лемма 5.7. Для $d = 2$, $A_\mu \in L^2$ и $M = 0$

$$\det_{\text{ren}}(1 + eK(A)) = \exp\left(-\frac{e^2}{2\pi} \|A^\top\|_2^2\right),$$

где $A_\mu^\top \equiv A_\mu + \partial_\mu \Delta^{-1} \partial_\nu A_\nu$ — «трансверсальная» часть поля A_μ .

Доказательство. Это следует из стандартных вычислений $\text{Tr}_{\text{ren}} K(A)^2$ (поляризация вакуума второго порядка), ср. [24]; см. также (7.64), (7.65). \square

З а м е ч а н и я. 1. Для $\det_{\text{ren}}(1 + eK(A))$ выполнена «диамагнитная» оценка из пункта 1d.

2. $\det_{\text{ren}}(1 + eK(A))$ не равен $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + e\lambda_i)$, где $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ — собственные значения оператора $K(A)$. Это так даже в случае, когда никаких контрчленов нет.

Чтобы завершить построение, надо придать смысл мере $dm_{\gamma, \text{м.}}(A)$. Это будет гауссовская мера с ковариацией, в которой сначала выполнено обрезание. Можно взять $dm_{\gamma, \text{м.}}^t$ с ковариацией

$$\hat{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) e^{-tk^2}.$$

Чтобы сделать меру $dm(A)$ корректно определенной, мы должны также сделать временное пространственно-временное обрезание функций в $K(A)$, например заменив A_μ на $A_\mu \mathbf{g}$,

где $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Тогда непосредственно видно, что

$$\det_{\text{ren}}(1 + eK(Ag)) \in L^1(dm_{Y.M.}^t),$$

и

$$d\mu^{t,g} \equiv \frac{1}{Z_{t,g}} \det_{\text{ren}}(1 + eK(Ag)) dm_{Y.M.}^t,$$

снова является гауссовской мерой с ковариацией

$$\hat{D}_{\mu\nu}^{t,g}(k),$$

которая сходится в слабом смысле (в смысле сходимости моментов и характеристической функции) к мере $d\mu$ с ковариацией

$$\hat{D}_{\mu\nu} \equiv \left(k^2 + \frac{e^2}{\pi}\right)^{-1} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \quad (5.18)$$

при $t \rightarrow 0, g \rightarrow 1$.

Если мы внимательно посмотрим на формулу (5.18), то увидим, что в ней «прячется» свободное скалярное поле ϕ с массой $e/\sqrt{\pi}$ (как каждый, конечно, знает). Чтобы лучше понять его роль, рассмотрим ток j_μ , определенный внешним векторным потенциалом $a_\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$ (пространство Шварца пробных функций) с $\partial_\mu a_\mu = 0$:

$$\begin{aligned} \langle e^{ie j_\mu(a_\mu)} \rangle &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ g \rightarrow 1}} \frac{1}{Z_{t,g}} \int dm_{Y.M.}^t \det_{\text{ren}}(1 + eK(gA + a)) \\ &= \int d\mu \exp\left(-\frac{e^2}{2\pi} \|a\|^2 - \frac{e^2}{\pi} A(a)\right) \\ &= \exp\left[-\frac{e^2}{2\pi} \left(f, \left(-\Delta + \frac{e^2}{\pi}\right)^{-1} f\right)\right], \end{aligned}$$

где $f = \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu a_\nu$. Таким образом, j_μ ведет себя как гауссовское случайное поле, определенное на

$$j_\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu (\phi + \theta) \quad (5.19)$$

с произвольной постоянной θ .

С другой стороны, $F = \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu$ есть гауссовское случайное поле с ковариацией

$$\hat{C}(k) = \frac{k^2}{k^2 + \frac{e^2}{\pi}} = 1 - \frac{e^2}{\pi} \left(k^2 + \frac{e^2}{\pi}\right)^{-1} \quad (5.20)$$

Следовательно, чисто символически

$$F = \omega - i \frac{e}{\sqrt{\pi}} \phi, \quad (5.21)$$

где ω — белый шум (гауссовское обобщенное случайное поле с ковариацией $\langle \omega(f) \omega(g) \rangle = \int f(x) g(x) dx^2$). Смысл формулы (5.21) просто в том, что она выражает соотношение между ковариациями F , ω и ϕ . Ее нельзя, конечно, понимать буквально, потому что все три случайных поля принимают вещественные значения.

Если попытаться интерпретировать F и j_μ совместно как случайные поля, то мы сталкиваемся с небольшим сюрпризом: это невозможно, так как двухточечная функция $\langle j_\mu F \rangle$ оказывается мнимой!

Чтобы увидеть это, вычислим, как и прежде,

$$\begin{aligned} & \langle e^{ie j_\mu(a_\mu) + iF(h)} \rangle \\ &= \int d\mu \exp \left[-\frac{e^2}{2\pi} \|a\|^2 - \frac{e^2}{\pi} A(a) + iF(h) \right] \\ &= \exp \left\{ -\frac{e^2}{2\pi} \left(f, \left(-\Delta + \frac{e^2}{\pi} \right)^{-1} f \right) - \frac{1}{2} \left(h, (-\Delta) \left(-\Delta + \frac{e^2}{\pi} \right)^{-1} h \right) \right. \\ & \quad \left. + i \frac{e^2}{\pi} \left(f, \left(-\Delta + \frac{e^2}{\pi} \right)^{-1} h \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Так как F , j_μ ведут себя в смысле «алгебраической» структуры как гауссовские случайные поля, то ковариации должны были бы иметь вид

$$\langle j_\mu(x) j_\nu(y) \rangle = \frac{1}{\pi} (\delta_{\mu\nu} + \Delta^{-1} \partial_\mu \partial_\nu) \left(-\Delta + \frac{e^2}{\pi} \right)^{-1} (x, y), \quad (5.23a)$$

$$\langle j_\mu(x) F(y) \rangle = -\frac{ie}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \left(-\Delta + \frac{e^2}{\pi} \right)^{-1} (x, y), \quad (5.23b)$$

$$\langle F(x) F(y) \rangle = \left(-\Delta \left(-\Delta + \frac{e^2}{\pi} \right)^{-1} \right) (x, y). \quad (5.23c)$$

Отметим, что вся эта информация уже «зашифрована» в (5.19) и (5.21).

Если мы введем аксиальный ток

$$j_\mu^5 = -\varepsilon_{\mu\nu} j_\nu, \quad (5.24)$$

то получим в качестве следствия

$$\partial_\mu j_\mu^5 - \frac{ie}{\pi} F = 0; \quad (5.25)$$

это — хорошо известное соотношение аксиальной аномалии (см. [53]).

Другое следствие состоит в том, что

$$\partial_\mu F - ie \varepsilon_{\mu\nu} j_\nu = \partial_\mu \omega; \quad (5.26)$$

это равенство следует рассматривать как квантовый вариант неоднородного уравнения Максвелла. В правой части (5.26) стоит лишь «контактный член», который не фигурирует в функциях Вайтмана; появление i станет понятным, если мы вспомним, что $F = iE$, где E — физическое электрическое поле.

Так как уравнения (5.25) и (5.26) уже содержат i и так как аналогичные уравнения должны выполняться в любой калибровочной теории с фермионами (например, КЭД₄ и КХД₄), надо ожидать, что такие модели никогда нельзя будет полностью описать в терминах случайных полей: формально в них присутствуют *комплексные меры* (я не хочу вдаваться в обсуждение того, могут ли они быть настоящими мерами). На языке конструктивной квантовой теории поля это означает: нельзя надеяться на то, что в калибровочных теориях с фермионами имеет место положительность по Нельсону — Симанзику.

θ -состояния можно определить, выбрав некоторое значение в (5.19) или, что эквивалентно, действуя по рецепту, указанному в разделе 4, а именно включив множитель

$$e^{i\theta \int_{\Lambda} \epsilon_{\mu\nu} \partial_{\nu} A_{\mu}} \equiv e^{i\theta \int_{\Lambda} F}$$

в меру и устремив Λ к \mathbb{R}^2 .

Заметим, что *не существует симметрии*, соответствующей преобразованию $\phi \rightarrow \phi + \theta$, которая была бы аксиальной $U(1)$ -симметрией. Традиционная периодичность по θ основана на том факте, что обычно рассматривают периодические по ϕ функции, порожденные полями модели Швингера (такие как $\exp(i\phi/\sqrt{4\pi})$, соответственно $\bar{\psi} e^{i\alpha\gamma_3} \psi$ в схеме бозонизации).

Я не хочу слишком затягивать это обсуждение достаточно простой модели (хотя «модель Швингера неисчерпаема», ср. [25]); то, что я здесь обрисовал, имеет единственной целью убедить читателя, что большинство хорошо известных результатов можно получить без погружения в какой-либо «потусторонний мир».

Последняя стратегия, которую мы обсудим, — это комбинированная стратегия, в которой приходится по-разному действовать с полями материи и с калибровочными полями. Вначале поля материи находятся на решетке и их взаимодействие с непрерывным калибровочным полем обладает некоторыми свойствами регулярности, соответствующими обрезанной мере Янга — Миллса (мы умеем достаточно хорошо это делать только в абелевом случае). Затем мы переходим к непрерыв-

ному пределу для полей материи поточечно в калибровочных полях (т. е. с калибровочными полями мы обращаемся как с внешними полями). В заключение надлежит избавиться от обрезания калибровочного поля.

Эта процедура выглядит неуклюжей, но покуда оказывается самой гибкой. В частности, она позволяет доказать положительность по Остервальдеру — Шрадеру и эвклидову инвариантность, равно как и другие аксиомы ОШ, для абелевых моделей в размерности два. Эта схема была применена Чэллифуrom и Вейнгартеном [26] и Вейнгартеном [27] к массивной модели Швингера, где она позволила построить соответствующую теорию, по крайней мере в конечном объеме, а также Бриджесом, Фрёлыхом и мною [28, 29] — к двумерной модели Хиггса (модели Ландау — Гинзбурга). Последняя работа будет главной темой следующих двух разделов; мы также сделаем ряд замечаний о том, как работают наши методы для КЭД₂. В разделе 6 мы рассматриваем внешние поля, а раздел 7 посвящен устранению всех обрезаний в полной теории и проверке аксиом.

6. СХОДИМОСТЬ К НЕПРЕРЫВНОМУ ПРЕДЕЛУ ВО ВНЕШНИХ ИЛИ ОБРЕЗАННЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЯХ

Внешние калибровочные поля, связанные с моделью $P(\phi)_2$, изучались Шрадером [30], а их аналог для модели ϕ_3^4 — Поттхоффом [31]. Если интересоваться только проблемой внешних полей, то их результаты вполне удовлетворительны. Однако их нелегко распространить на полностью квантованную теорию по следующим причинам:

1) в эти модели не включены члены, соответствующие рождению виртуальных пар калибровочным полем (т. е. определители, которые мы изучим ниже);

2) самодействие скалярного поля, которое в них используется, не является полиномом от калибровочного поля.

В [26] изучается «грубая» модель КЭД₂ с внешним калибровочным полем. Это означает, что обрезание калибровочного поля снимается с самого начала. Сделать так в случае бозонной материи было бы чрезвычайно трудно, и, как мы увидим, это на самом деле и не нужно. Здесь мы будем следовать работе [28], в которой в качестве первого шага используются внешние калибровочные поля, непрерывные по Гёльдеру.

Мы докажем сходимость величин трех типов: ковариантных функций Грина, определителей и средних значений при фиксированном внешнем поле. В заключение будут рассмотрены квантованные калибровочные поля с обрезанием.

а. Сходимость бозонных функций Грина [28]

В значительной мере непрерывный предел может быть сведен к пределу фейнмановских диаграмм. Поэтому важно установить сходимость эвклидовых пропагаторов (функций Грина). Стратегия, которой мы будем следовать в случае бозонной материи, состоит в сведении задачи к установлению почленной сходимости рядов теории возмущений во внешнем калибровочном поле. Это возможно благодаря наличию равномерной оценки для функций Грина, обусловленной диамагнитным неравенством¹⁾ и достаточной аналитичностью по константе связи.

Если задано калибровочное поле $\{g_{xy}^e\}$ на eZ^d , то ковариантный лапласиан Δ_g^e определяется как оператор в пространстве

$$l^2(eZ^d; \mathcal{Y}_H) \quad (6.1)$$

или в зависимости от контекста в пространстве

$$l^2(eZ^d \cap \Lambda; \mathcal{Y}_H), \quad (6.2)$$

где Λ — ограниченное открытое множество в \mathbb{R}^d , а решетка eZ^d считается вложенной в \mathbb{R}^d . Пространства (6.1) и (6.2) состоят из квадратично-суммируемых отображений решетки в хиггсовское векторное пространство \mathcal{Y}_H . Лапласиан Δ_g^e определяется с помощью квадратичной формы

$$-(\phi, \Delta_g^e \phi) = \sum_{(xy)} \|\phi(x) - U_H(g_{xy}) \phi(y)\|^2 \quad (6.3)$$

(где ϕ — поле Хиггса с компактным носителем) и расширения по Фридрихсу (см. [33]).

Функция Грина — это ядро оператора $(-\Delta_g^e + m^2)^{-1}$, т. е. функция

$$C_g^e(x, y) = (-\Delta_g^e + m^2)^{-1}(x, y), \quad (6.4)$$

принимая значения в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{Y}_H)$ линейных операторов в \mathcal{Y}_H .

Прежде всего мы отметим следующее простое диамагнитное неравенство ([32], [27¹—30¹]²⁾):

Теорема 6.1. Пусть $\phi \in \mathcal{Y}_H$. Тогда

$$|(\phi, C_g^e(x, y) \phi)| \leq (\phi, C_{\uparrow}^e(x, y) \phi).$$

¹⁾ См. раздел 2. — Прим. ред.

²⁾ Индексом I помечены работы из списка литературы к части I. — Прим. ред.

Доказательство. Это почти тривиально. Из (6.3), (6.4) следует, что

$$-\Delta_g^e + m^2 = 2d + m^2 - A_g,$$

где A_g «связывает ближайших соседей», а именно:

$$A_g(x, y) = \begin{cases} U_H(g_{xy}), & \text{если } x, y \text{ — ближайшие соседи,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что $\|A_g\| \leq 2d$. Таким образом,

$$\begin{aligned} (-\Delta_g^e + m^2)^{-1} &= (2d + m^2)^{-1} \left(1 - \frac{A_g}{2d + m^2}\right)^{-1} \\ &= (2d + m^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_g}{2d + m^2}\right)^n, \end{aligned}$$

где ряд сходится по операторной норме.

Далее, $A_g^n(x, y)$ представляет собой сумму по путям длины en , идущим из точки x в точку y , каждый член которой является произведением унитарных операторов в \mathcal{Y}_H^n (параллельных переносов из x в y). Следовательно,

$$|(\varphi, A_g^n(x, y) \varphi)| = (\varphi, A_g^n(x, y) \varphi),$$

откуда и вытекает утверждение теоремы. \square

З а м е ч а н и е. Аналогичное предложение для фермионов неверно (из-за их парамагнитности). Действительно, допустим, что оно верно. Тогда в обозначениях, введенных после формулы (6.24), величина

$$\begin{aligned} \log \det \frac{\hat{D}_{A^e}^e + R_{A^e} + m}{\hat{\partial}^e + R_0 + m} &= \text{Tr} \log \frac{\hat{D}_{A^e}^e + R_{A^e} + m}{\hat{\partial}^e + R_0 + m} \\ &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt \text{Tr} \left[(\hat{D}_{A^e}^e + R_{A^e} + m + t)^{-1} - (\hat{\partial}^e + R_0 + m + t)^{-1} \right] \end{aligned}$$

была бы ≥ 0 . Однако по теореме 2.3 эта величина ≤ 0 . Поэтому она равнялась бы нулю, что, вообще говоря, не так. Это замечание показывает, что «диамагнитное» неравенство (теорема 2.3) для фермионов на самом деле является выражением парамагнетизма.

Таким образом, для доказательства сходимости фермионных функций Грина нужно искать другой метод. Поскольку обычные фермионные модели непосредственно не включают в себя самодействие фермионов, можно привлечь формализм Мэттьюза — Салама (см. выше), в котором используются

лишь произведения функций Грина и определителей. Эти произведения легко оценить (см. [15]). Мы вернемся к этому вопросу в пункте, посвященном определителям.

Теперь обратимся к результату об аналитичности, упомянутому выше. Удобно рассмотреть немного более широкий класс функций Грина, заменив $U_H(g_{xy})$ на произвольное ограниченное отображение $1 + A$ множества ребер в пространство $\mathcal{L}(\mathcal{V}_H)$. Соответствующие функции Грина мы обозначаем

$$C_A^e(x, y) \quad (6.5)$$

и используем норму

$$\|A\| = \sup_{(xy)} \|A_{xy}\|. \quad (6.6)$$

Справедлив следующий результат.

Лемма 6.2. Пусть A, B — ограниченные $\mathcal{L}(\mathcal{V}_H)$ -значные функции, определенные на множестве ребер из $\Lambda \cap \varepsilon\mathbb{Z}^d$, и χ_Λ — характеристическая (индикаторная) функция множества Λ . Тогда $\chi_\Lambda(x) C_{A+\lambda B}(x, y) \chi_\Lambda(y)$ — вещественно-аналитическая функция от λ со значениями в

$$l^2((\Lambda \cap \varepsilon\mathbb{Z}^d) \times (\Lambda \cap \varepsilon\mathbb{Z}^d); \mathcal{L}(\mathcal{V}_H)).$$

Она продолжается до функции, аналитической в полосе

$$\frac{2}{m} |\operatorname{Im} \lambda| \|B\| + \left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{m}\right)^2 \|B\|^2 = \xi < 1,$$

и ее продолжение $\chi_\Lambda \tilde{C}_{A+\lambda B} \chi_\Lambda$ удовлетворяет неравенству

$$\|\chi_\Lambda \tilde{C}_{A+\lambda B} \chi_\Lambda\|_2 \leq \| \chi_\Lambda C_{A+B \cdot \operatorname{Re} \lambda} \chi_\Lambda \|_2 \frac{1}{1-\xi}. \quad (6.7)$$

Замечания. 1. Сам оператор C не аналитичен из-за норм, фигурирующих в (6.3).

2. Нормы в (6.7) — это нормы Гильберта — Шмидта, т. е. l^2 -нормы соответствующих ядер.

Доказательство. Эта лемма доказывается путем разложения $\chi_\Lambda C_{A+\lambda B} \chi_\Lambda$ в ряд по степеням $\operatorname{Im} \lambda$. Сходимость в указанной полосе устанавливается стандартными методами, описанными выше. Подробности см. в [28]. \square

Полезность этой леммы видна из следующего результата.

Следствие 6.3. Пусть A^e — функция, определенная на множестве ребер из $\varepsilon\mathbb{Z}^d \cap \Lambda$ и принимающая значения в алгебре Ли группы G . Экспоненциальное отображение индуцирует калиб-

ровочное поле $\{g_{xy}^\varepsilon\} : g_{xy}^\varepsilon \equiv \exp i\varepsilon A_{xy}^\varepsilon$. (Здесь мы придерживаемся физической традиции и считаем, что элементы алгебры Ли антиэрмитовы.) Пусть $g_{xy}^\varepsilon(\lambda) = \exp i\varepsilon\lambda A_{xy}^\varepsilon$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Тогда $\chi_\Lambda C_{g(\lambda)} \chi_\Lambda$ является вещественно-аналитической функцией от λ и продолжается до функции $\tilde{C}_{g(\lambda)}^{\varepsilon, \Lambda}$, аналитической в области

$$\frac{2|\operatorname{Im} \lambda|}{m} f(\varepsilon, \lambda, \|A^\varepsilon\|) + \frac{(\operatorname{Im} \lambda)^2}{m^2} f(\varepsilon, \lambda, \|A^\varepsilon\|^2) = \xi < 1, \quad (6.8)$$

где

$$f(\varepsilon, \lambda, \|A^\varepsilon\|) = \frac{1}{\varepsilon|\lambda|} e^{(\varepsilon/2)|\operatorname{Im} \lambda| \|A^\varepsilon\|} \times \left[4 \left(\operatorname{sh} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\operatorname{Im} \lambda| \|A^\varepsilon\| \right) \right)^2 + \varepsilon^2 (\operatorname{Re} \lambda)^2 \|A^\varepsilon\|^2 \right]^{1/2}, \quad (6.9)$$

и удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{C}_{g(\lambda)}^{\varepsilon, \Lambda}\|_2 \leq \| \chi_\Lambda C_{\mathbb{1}} \chi_\Lambda \|_2 (1 - \xi)^{-1}. \quad (6.10)$$

Замечание. Заметим, что если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|A^\varepsilon - A\| = 0$, то область аналитичности, задаваемая формулами (6.8), (6.9), превращается при $\varepsilon \rightarrow 0$ в полосу

$$\frac{2|\operatorname{Im} \lambda|}{m} \|A\| + \frac{(\operatorname{Im} \lambda)^2}{m^2} \|A\|^2 = \xi < 1. \quad (6.11)$$

Доказательство. Применим лемму, взяв

$$A_{xy} = \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{i\varepsilon A_{xy}^\varepsilon} - \mathbb{1} \right),$$

$$B_{xy} = \frac{1}{\varepsilon\lambda} e^{i\varepsilon A_{xy}^\varepsilon} \left(e^{i\varepsilon\lambda A_{xy}^\varepsilon} - \mathbb{1} \right).$$

Тот факт, что B зависит от λ , не приводит ни к каким трудностям, так как композиция голоморфных функций голоморфна. Для того чтобы получить (6.10), мы используем, кроме того, диамагнитное неравенство из теоремы 6.1. \square

Прежде чем привести главный результат этого пункта, сделаем одно простое, но чрезвычайно важное замечание и приведем одно определение.

Замечание. Существует естественное вложение Q_ε^* решёточного пространства l^2 в непрерывное пространство L^2 с помощью отождествления решёточных функций с кусочно-постоянными функциями. Сопряженный оператор Q_ε , отображающий L^2 и l^2 , представляет собой оператор усреднения функций по элементарным (гипер-)кубам. Оператор Q_ε^* является изометрией, а Q_ε — частичной изометрией. Когда мы

говорим о сходимости решёточных функций, мы всегда молчаливо предполагаем, что используется это вложение.

Определение 6.4. Говорят, что семейство $\{g_{xy}^\varepsilon\}$ решёточных калибровочных полей сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к непрерывному калибровочному полю A_μ , если

$$A_\mu^\varepsilon(x) = \frac{1}{i\varepsilon} (U_\mu(g_{x, x+\hat{e}_\mu}^\varepsilon) - 1) \quad (6.12)$$

сходится к A_μ в L^∞ -норме (\hat{e}_μ — единичный вектор в $+\mu$ -направлении). Типичным примером такой сходимости служит случай, когда решеточное калибровочное поле получается путем интегрирования непрерывного калибровочного поля. Справедлив следующий результат.

Теорема 6.5. Допустим, что решеточные поля $\{g_{xy}^\varepsilon\}$ сходятся к полю A_μ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда функции Грина $\chi_{\Lambda} C_{g^\varepsilon}^\varepsilon \chi_{\Lambda}$ сходятся к $\chi_{\Lambda} C_A \chi_{\Lambda}$ в $L^p(\Lambda \times \Lambda)$, если $1 \leq p < d/(d-2)$ для $d = 2, 3$. Здесь C_A — обозначает непрерывную функцию Грина $(-\Delta_A + m^2)^{-1}(x, y)$.

Замечание. Этот результат, вероятно, верен также и в случае $d > 3$. Для доказательства следовало бы обобщить лемму 6.2 на l^p -случай $p < d/(d-2)$. Это пока не сделано.

Доказательство. 1. Если $p \leq 2$, то L^p -сходимость есть следствие L^2 -сходимости. Если $p \geq 2$, то это также верно, в силу неравенства Гёльдера и равномерной ограниченности $\|C_g^\varepsilon\|_{L^p}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Последняя следует из диамагнитной оценки, при условии что $p < d/(d-2)$.

2. Следствие 6.3 позволяет нам считать, что калибровочное поле $A_\mu^\varepsilon(x)$ произвольно мало. Чтобы показать это, используем рассуждения, аналогичные применяемым при доказательстве теоремы Витали.

А именно, пусть задано произвольное $\delta > 0$. Можно найти λ_0 , такое что $g^\varepsilon(\lambda_0)$ будет настолько близким к 1, что $\|A_\mu^\varepsilon\| < \delta$ для всех $\varepsilon < 1$ (см. следствие 6.3 и формулу (6.12)). Допустим, что для этих «малых» калибровочных полей имеет место сходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из следствия 6.3 вытекает, что функция $\chi_{\Lambda} C_{g^\varepsilon(\lambda)}^\varepsilon \chi_{\Lambda}$ аналитична в некоторой полосе, а из (6.10) следует ее равномерная ограниченность. Для того чтобы установить сходимость при $\lambda = 1$, выберем последовательность открытых шаров D_1, \dots, D_N , лежащих в нашей полосе, таких что центр D_{i+1} содержится в D_i ($i = 1, \dots, N-1$) и $D_1 \ni \lambda_0, D_N \ni 1$. Из сходимости в D_1, \dots, D_k вытекает схо-

димось коэффициентов ряда Тэйлора в центре шара D_{k+1} , а отсюда сходимость в D_{k+1} .

3. Выберем $\|A_\mu^\varepsilon\|$ настолько малым, чтобы разложение $\chi_\Lambda C_{g^\varepsilon}^\varepsilon \chi_\Lambda$ в ряд теории возмущений по степеням A_μ^ε сходилось в l^2 (равномерно по ε). Легко видеть, что это возможно и что члены ряда сходятся к соответствующим членам ряда теории возмущений для непрерывной функции Грина. По поводу деталей см. [28]. \square

Существует еще одна неприятность, связанная с необходимостью вычитания постоянных, стремящихся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$. Хорошо известно, что в случае непрерывного потенциала к $V(|\phi|)$ должно быть применено виновское упорядочение¹⁾. Формально оно соответствует вычитанию членов с расходящимися коэффициентами, таких как $C(0)$. Если имеется внешнее калибровочное поле, то гораздо более удобно и вполне законно использовать при виновском упорядочении ковариацию (или, что то же самое, функцию Грина) S_A . Именно это сделали Шрадер [30] и Поттхофф [31]. Если мы представляем себе «квантование» калибровочного поля как интегрирование, то это входит в противоречие с духом теории перенормировок. В любом случае мы получаем нелокальный неполиномиальный лагранжиан, и очень мало шансов на то, что удастся проверить аксиомы Остервальдера — Шрадера. Поэтому необходимо рассмотреть перенормированные выражения типа

$$\delta C_{g^\varepsilon}^\varepsilon(x, x) = C_{g^\varepsilon}^\varepsilon(x, x) - C_{g^\varepsilon}^\varepsilon(x, x)$$

и показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ они имеют конечные пределы. Это верно в случае $d = 2, 3$:

Теорема 6.6. Если семейство калибровочных полей g^ε сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$\int_\Lambda |\delta C_{g^\varepsilon}^\varepsilon(x, x) - \delta C_{g^{\varepsilon'}}^{\varepsilon'}(x, x)|^p dx \rightarrow 0$$

при $\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0$ и $1 \leq p < \infty$ ($d = 2, 3$).

З а м е ч а н и е. В случае $d = 4$ виновское упорядочивание не устраняет расходимости, и необходима некоторая сверхперенормировка (это обстоятельство не должно сейчас нас беспокоить, так как всё равно никто не знает, как построить полевою

¹⁾ На языке теории вероятностей виновское упорядочение соответствует переходу от степени случайного поля, которое не всегда существует, к соответствующему кратному интегралу Ито (см. [14*]). — *Прим. ред.*

теорию в размерности $d = 4$). Типичные расходящиеся диаграммы, препятствующие справедливости теоремы 6.6, имеют вид, показанный на рис. 19; они вносят вклад в перенормировку заряда.

Доказательство этой теоремы весьма сложно, и мы отсылаем читателя к работе [28], в которой детально разбирается случай $d = 2$. Здесь мы лишь попытаемся наметить схему доказательства.

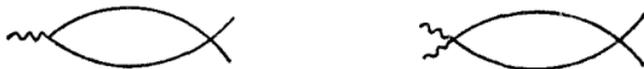


Рис. 19.

Для того чтобы стали ясны взаимные сокращения в $\delta C_{g^e}^e$, запишем опять $g_{xy}^e(\lambda) = \exp i\varepsilon \lambda A_{xy}^e$ и рассмотрим

$$F_x(\lambda) = \delta C_{g^e(\lambda)}^e(x, x). \quad (6.13)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} F_x(0) &= 0, \\ F'_x(0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Первое равенство очевидно. Второе вытекает из четности функции F_x . Это лучше всего видно из разложения по путям, типа использованного в доказательстве теоремы 6.1. Здесь у нас будет сумма по замкнутым путям, начинающимся и оканчивающимся в точке x ; для каждого пути имеется также обратный, соответствующий противоположной ориентации; обращение пути эквивалентно замене λ на $-\lambda$ (это по существу теорема Фарри).

В силу (6.14)

$$F_x(1) = \int_0^1 d\lambda (1 - \lambda) F''_x(\lambda). \quad (6.15)$$

Чтобы понять, что это значит, запишем опять

$$A_{xy}^e(\lambda) = \frac{1}{i\varepsilon} (U_N(g_{xy}^e(\lambda)) - \mathbb{1}), \quad (6.16)$$

$$\Delta_{g^e(\lambda)}^e \equiv \Delta_{\mathbb{1}}^e + W^e, \quad (6.17)$$

где в символической записи,

$$W = i(d^*A + A^*d) - A^*A \quad (6.18)$$

(d — решеточный градиент, $d^* = \delta$; здесь использованы обозначения из раздела 4, поскольку оператор A можно рассматривать как отображение множества 0-цепей в множество 1-цепей).

Далее,

$$F''_x(\lambda) = \frac{d^2}{d\lambda^2} C_{g^e(\lambda)}^e(x, x) \quad (6.19)$$

и

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} C_{g^e(\lambda)}^e = 2C_{\mathbb{1}}^e \frac{dW^e}{d\lambda} C_{\mathbb{1}}^e \frac{dM^e}{d\lambda} C_{\mathbb{1}}^e - C_{\mathbb{1}}^e \frac{d^2W^e}{d\lambda^2} C_{\mathbb{1}}^e. \quad (6.20)$$

Непосредственная проверка показывает, что (6.20) не содержит расходящихся членов. Соображения функционального анализа вместе с диамагнитным неравенством (теорема 6.1) показывают, что $\delta C_{g^e(\lambda)}^e = F''_x(1)$ равномерно (по ε) ограничено в L^p -норме и представляет собой L^1 -последовательность Коши (при $\varepsilon \rightarrow 0$). Теперь для установления справедливости теоремы остается применить неравенство Гёльдера. \square

в. Сходимость определителей

Важность сходимости определителей уже была выяснена нами при обсуждении формализма Мэттьюза — Салама в разделе 5. Эта сходимость существенна также при построении моделей Хиггса. Действительно, формально мера

$$e^{-\frac{1}{2} \int |D\phi|^2 - \frac{1}{2} m^2 \int |\phi|^2} \prod_x d\phi(x)$$

есть *нормированная* гауссовская мера $d\mu(\phi)$ с ковариацией $C_A = (-\Delta_A + m^2)^{-1}$, умноженная на множитель, пропорциональный

$$\det \left(\frac{-\Delta_A + m^2}{-\Delta + m^2} \right)^{-1}.$$

(На нашей решетке все эти предложения становятся уже, конечно, корректными.) Физически в этом множителе содержится рождение виртуальных пар калибровочным полем.

Итак, в этом пункте мы собираемся изучить бозонные и фермионные определители. Мы будем использовать формализм модифицированных определителей и пространств \mathcal{Y}_p , введенных в разделе 5. Операторы, определители которых будут рассматриваться, будем всегда записывать в виде $1 + K(A)$.

Для бозонов полагаем

$$K_H^e(A^e) = (C_{\mathbb{1}}^e)^{1/2} W^e (C_{\mathbb{1}}^e)^{1/2}, \quad (6.21)$$

где

$$W^e = \Delta_{g^e}^e - \Delta_{\mathbb{1}}^e \quad (6.22)$$

и

$$A^e = \frac{1}{i\varepsilon} (U_H(g^e) - \mathbb{1}). \quad (6.23)$$

Для фермионов по аналогии с разделом 5 полагаем

$$K_F^\varepsilon(A^\varepsilon) = (C_{\mathbb{1}, F}^\varepsilon)^{3/4} (\widehat{D}_0^\varepsilon + R_0 + M) (\widehat{D}_{A^\varepsilon}^\varepsilon - \widehat{D}_0^\varepsilon + R_{A^\varepsilon} - R_0) + (C_{\mathbb{1}, F}^\varepsilon)^{1/4}. \quad (6.24)$$

Здесь $\widehat{D}_{A^\varepsilon}^\varepsilon + R_{A^\varepsilon}$ — решеточный оператор Дирака, определяемый равенством

$$M \sum \bar{\psi} \psi + S_F = -K \sum \psi (\widehat{D}_{A^\varepsilon}^\varepsilon + R_{A^\varepsilon}) \psi,$$

а

$$C_{\mathbb{1}, F}^\varepsilon = [(\widehat{D}_0^\varepsilon + R_0 + M)^* (\widehat{D}_0^\varepsilon + R_0 + M)]^{-1}.$$

Таким образом, если обозначить сдвиг на единичный вектор решетки в $+\mu$ -направлении через $e^{i\varepsilon P_\mu}$, а $g_{x, x+\varepsilon e_\mu}$ через g_μ^ε , то в случае $\theta = 0$ мы имеем

$$\widehat{D}_{A^\varepsilon}^\varepsilon + R_{A^\varepsilon} = \sum_\mu \frac{r + \gamma_\mu}{2\varepsilon} U_F(g_\mu^\varepsilon) e^{i\varepsilon P_\mu} + \sum_\mu \frac{r - \gamma_\mu}{2\varepsilon} e^{-i\varepsilon P_\mu} U_F^*(g_\mu^\varepsilon) - \frac{rd}{\varepsilon}. \quad (6.25)$$

Учитывая определение

$$A^\varepsilon = \frac{1}{i\varepsilon} (U_F(g^\varepsilon) - \mathbb{1}), \quad (6.26)$$

получаем

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{A^\varepsilon}^\varepsilon + R_{A^\varepsilon} &= \frac{i}{\varepsilon} \gamma^\mu \sin \varepsilon P_\mu - \frac{i}{2} \gamma^\mu \{A_\mu^\varepsilon \cos \varepsilon P_\mu + \cos \varepsilon P_\mu (A_\mu^\varepsilon)^*\} \\ &- \frac{1}{2} \gamma^\mu \{A_\mu^\varepsilon \sin \varepsilon P_\mu - \sin \varepsilon P_\mu (A_\mu^\varepsilon)^*\} + \frac{r}{\varepsilon} \sum_\mu (\cos \varepsilon P_\mu - 1) \\ &- \frac{r}{2} \{A_\mu^\varepsilon \sin \varepsilon P_\mu + \sin \varepsilon P_\mu (A_\mu^\varepsilon)^*\} + \frac{ir}{2} \{A_\mu^\varepsilon \cos \varepsilon P_\mu - \cos \varepsilon P_\mu (A_\mu^\varepsilon)^*\}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

В случае $\theta \neq 0$ нужно просто умножить R_{A^ε} и R_0 на $e^{i\theta \gamma_\varepsilon}$.

Мы можем теперь сформулировать следующий результат о сходимости:

Теорема 6.7. Если A^ε сходится к A в L^∞ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где A — непрерывное поле Янга — Миллса с компактным носителем, то $K_H^\varepsilon(A^\varepsilon)$ и $K_F^\varepsilon(A^\varepsilon)$ сходятся в \mathcal{Y}_p для любого $p > d$.

Замечания. 1. Предполагается, что все операторы действуют в $\mathcal{H}_i \equiv L^2 \times \mathcal{V}_i$, $i = H, F$.

2. Условие компактности носителя можно заменить условием достаточно быстрого (степенного) убывания. Теорема

и доказательства в основном заимствованы из [28], где, однако, разбирается лишь хиггсовский случай в размерности $d = 2$. О близких «фермионных» результатах см. [26].

Доказательство. Операторы $K_{H, F}^{\varepsilon}(A^{\varepsilon})$ равномерно ограничены в \mathcal{Y}_p ($p > d$), что нетрудно усмотреть, записав их в виде произведения операторов, равномерно ограниченных в \mathcal{Y}_{2p} . Здесь опять используется теорема об операторах вида $A = f(p)g(x)$ (вслед за умножением в x -пространстве на g следует умножение в p -пространстве на f), уже примененная однажды в разделе 5 (см. [19]):

$$\|A\|_q \leq \text{const} \cdot \|f\|_q \|g\|_q, \quad q \geq 2.$$

Для того чтобы установить \mathcal{Y}_p -сходимость, достаточно доказать \mathcal{Y}_{2p} -сходимость для операторов $\chi_{\Lambda} (C_{H, F}^{\varepsilon})^{1/2}$, что элементарно, и воспользоваться следующей леммой:

Лемма 6.8. Пусть $\|A_n - A\|_p \rightarrow 0$ и B_n — равномерно ограниченная последовательность операторов, такая что $B_n \rightarrow B$, $B_n^* \rightarrow B^*$ в сильной топологии. Тогда $A_n B_n \rightarrow AB$ в \mathcal{Y}_p .

Доказательство этой леммы см. в [28]. \square

Теперь должно быть достаточно ясно, как доказывается теорема 6.7. \square

Для нас наиболее интересно

Следствие 6.9. Пусть A^{ε} сходится к A в L^{∞} при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем A имеет компактный носитель. Тогда $\det_p(1 + K_i^{\varepsilon}(A^{\varepsilon}))$ сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ для $p > d$ и $i = H$ или F .

Доказательство. Это следует из стандартного результата, утверждающего, что \det_p удовлетворяет условию Липшица в \mathcal{Y}_p (см. [20, 34]). \square

Итак, осталось только установить сходимость выражений $\text{Tr} K_i^{\varepsilon}(A^{\varepsilon})^q$ в случае $q \leq d$. Самое лучшее, что мы можем здесь предложить, — это провести явные вычисления со всеми необходимыми перенормировками, что, конечно, весьма утомительно, так как решеточные диаграммы Фейнмана — не шутка. Это было проведено до конца во всех деталях для поляризации вакуума второго порядка в моделях КЭД₂ [26] и Хиггс₂ [28]. В этих случаях результаты, не требующие перенормировок, согласуются с результатами, полученными с помощью других калибровочно-инвариантных регуляризаций, таких как регуляризация Паули — Вилларса или размерная регуляризация. Необходимую информацию относительно

моделей КЭД_{3,4} можно получить из обстоятельной работы Шаратчандры [77].

Для полной уверенности следует либо провести все вычисления, либо указать некоторые общие соображения для неабелевых моделей в случае $d > 2$. Однако не существует никаких принципиальных препятствий, мешающих доказать следующую теорему:

Квазитеорема 6.10. Пусть $d = 4$. Существуют функции $g_i(\varepsilon)$ ($i = H, F$), удовлетворяющие условию $g_i(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и такие, что

$$\det(1 + K_i^\varepsilon(A^\varepsilon)) \exp \left[-\frac{1}{g_i(\varepsilon)^2} \sum_P (\chi(g_{\partial P}^\varepsilon) - \chi(\mathbb{1})) \right]$$

сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к ненулевому пределу

$$\det_{\text{ren}}(1 + K_i(A))$$

(который уже фигурировал в определении 5.4 для фермионов), при условии что $A^\varepsilon \rightarrow A$ в некоторой достаточно сильной соболевской топологии.

Еще лучше была бы

Квазитеорема 6.10'. В случае $d = 3$ предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \det(1 + K_i^\varepsilon(A^\varepsilon)) \equiv \det_{\text{ren}}(1 + K_i(A))$$

($i = H, F$) существует и отличен от нуля, если $A^\varepsilon \rightarrow A$ в некоторой достаточно сильной соболевской топологии.

Наконец, доказан такой факт:

Теорема 6.11. Пусть $d = 2$. Тогда если $A^\varepsilon \rightarrow A$ по норме

$$\|A\|_{\infty, \alpha} = \|A\| + \int_{\Lambda \times \Lambda} dx dy \frac{\|A(x) - A(y)\|^2}{|x - y|^{2+\alpha}}$$

для некоторого $\alpha > 0$ (Λ — носитель A^ε, A), то предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \det(1 + K_i^\varepsilon(A^\varepsilon))$ существует и отличен от нуля ($i = H, F$).

Замечание. Топология более сильная, чем в теореме 6.7, нужна лишь для того, чтобы доказать сходимость поляризации вакуума второго порядка. Для $i = H$ теорема доказана в [28], для $i = F$ немного более сильный результат содержится в [26]. (Строго говоря, он не является более сильным, так как относится к случайному полю A , а сходимость доказывается только в смысле сходимости некоторых средних. Однако полю дозволяется быть гораздо более плохим. Оно может быть даже обобщенным полем.)

Доказательство. Мы уже провели большую часть рассуждений. Используемая норма проще выглядит в фурье-пространстве. А именно, она имеет вид

$$\|A\|_{\infty, \alpha} = \|A\| + C_{\alpha} \int |\hat{A}(k)|^2 |k|^{\alpha} d^2k$$

и, конечно, «скроена» так, чтобы обеспечить сходимость

$$\int d^2k \hat{A}_{\mu}^e(k) \hat{A}_{\mu}^e(k) \times \Pi_{\mu\nu}^e(k),$$

где $\Pi_{\mu\nu}^e$ — поляризация вакуума второго порядка, соответствующая фейнмановским диаграммам

для $i = H$,

для $i = F$.

Явное вычисление показывает, что $\Pi_{\mu\nu}^e(k) = O(\log|k|)$ для больших k , если $i = H$, и $O(1)$, если $i = F$. \square

Сказанное дает достаточные основания для выбора нужной соболевской топологии в случае $d > 2$.

Предел \det_{ren} отличен от нуля, так как $\det_3(1 + K_i(A))$ есть функция, обращающаяся в нуль, только если $K_i(A)$ имеет собственное значение -1 , что соответствует нулевому собственному значению оператора $\hat{D}_A + M$ (или $-\Delta_A + m^2$), а это невозможно, ибо

$$(\hat{D}_A + M)^*(\hat{D}_A + M) \geq M^2 > 0$$

(в [15] приведен более строгий, но менее прозрачный вариант этих соображений). В [28] получена более тонкая оценка снизу:

Теорема 6.12. В случае $d = 2, 3$

$$|\det_{\text{ren}}(1 + K_i(A))^{\varepsilon_i}| \leq 1$$

для $i = H, F$, $\varepsilon_H = -1$, $\varepsilon_F = 1$.

Доказательство. Это непосредственно получается из «диамагнитного» неравенства (теорема 2.3) предельным переходом. См. также [22]. \square

Замечания. 1. В случае $d = 4$ аналогичное утверждение заведомо неверно, так как в этом случае необходим «контрчлен». В некоторой форме это было известно уже Гейзенбергу и Ойлеру в 1936 г. [68]. См. [74], где всё это подробно обсуждается.

2. В силу самой конструкции перенормированные определители калибровочно-инвариантны, а потому они удовлетворяют тождествам Уорда, таким как

$$\partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} \det_{\text{ren}}(1 + K_i(A)) = 0$$

для $U(1)$ -теории или, более общим образом,

$$D_\mu(A) \frac{\delta}{\delta A_\mu} \det_{\text{ren}}(1 + K_i(A)) = 0,$$

где $D_\mu(A)$ — ковариантная производная.

3. С помощью обобщения этих определителей, связывающего внешние источники с аксиальными векторными токами, можно получить обычные аномалии Адлера [53, 70, 71].

4. Близкий факт — утверждение об эквивалентности параметра θ , фигурирующего в фермионном действии (см. раздел 1), и параметра θ , фигурирующего в описании θ -состояний, которые определяются путем умножения меры на множитель $\exp\left((i\theta/2\pi) \int F\right)$ в случае КЭД₂-модели или на $\exp\left((i/8\pi^2) \int \text{Tr} F \wedge F\right)$ в случае КХД₄-модели.

Это утверждение вытекает из следующей теоремы:

Теорема 6.13'. Пусть $A^\varepsilon \rightarrow A$ в достаточно сильной топологии, так что сходится и \det_{ren} . Допустим, далее, что A есть непрерывное калибровочное поле с топологическим зарядом $n \in \mathbb{Z}$ (т. е. $\int F = 2\pi n$ в случае КЭД₂-модели или $\int \text{Tr} F \wedge F = 8\pi^2 n$ в случае КХД₄-модели). Тогда

$$e^{i\theta n} \det_{\text{ren}}(1 + K_F(A)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \det(1 + K_{\theta, F}^\varepsilon(A^\varepsilon)),$$

где $K_{\theta, F}^\varepsilon(A^\varepsilon)$ определяется аналогично K_F^ε , только в решёточное фермионное действие вводится произвольный угол θ (см. раздел 1; случаю K_F^ε отвечает $\theta = 0$).

Доказательство можно найти в [71]. \square

Мы упоминали в предыдущем разделе, что определители могут помочь доказать сходимость фермионных функций Грина. Это совсем просто, если использовать тот факт, что произведение функции Грина на определитель удовлетворяет условию Липшица:

Лемма 6.13 [34]. Функция $(1 + K)^{-1} \det_p(1 + K)$ или, более общо,

$$\Lambda^k((1 + K)^{-1}) \det_p(1 + K)$$

липшиц-непрерывна на \mathcal{Y}_p при наделении пространства-образа топологией нормы.

З а м е ч а н и е. $\Lambda^k((1+K)^{-1})$ — это оператор в k -кратном антисимметрическом тензорном произведении гильбертовых пространств \mathcal{H}_F , порожденный оператором $(1+K)^{-1}$.

Мэттьюз и Салам [14] уже дали (очевидные) формулы для фермионных функций Грина:

$$G'_F(x, y; A) = \left((p^2 + M^2)^{-1/4} (1 + K_F(A))^{-1} \frac{-i\hat{p} + M}{(p^2 + M^2)^{3/4}} \right) (x, y), \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} G'_F(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k; A) \\ = \Lambda^k \left[(p^2 + M^2)^{-1/4} (1 + K_F(A))^{-1} \frac{-i\hat{p} + M}{(p^2 + M^2)^{3/4}} \right] \\ \times (x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k), \quad (6.29) \end{aligned}$$

где $G_F = (i\hat{p} + M)^{-1}$.

Таким образом, из леммы 6.13 и конструкции $\det_{\text{ген}}$ мы получаем следующую теорему:

Теорема 6.14. Допустим, что $A^\varepsilon \rightarrow A$ таким образом, что предел решеточных определителей существует и отличен от нуля. Тогда решеточные фермионные функции Грина

$$G'^\varepsilon_F(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k; A^\varepsilon)$$

также сходятся в смысле операторной нормы в $\Lambda^k(\mathcal{H}_F)$ ($p > d$).

Доказательство. Это очевидно после сделанных выше замечаний. \square

с. Сходимость состояний (средних значений) во внешних калибровочных полях

Для случая фермионов это только что обсуждалось в конце предыдущего пункта, и на данном уровне рассмотрения к сказанному добавить больше нечего.

В случае бозе-полей (хиггсовских) ситуация гораздо более трудная, так как здесь мы обязаны допустить внутреннее взаимодействие.

Начиная с этого места, будем трактовать (решеточные или непрерывные) хиггсовские поля как гауссовские поля следующим образом. Для каждого $f \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{Y}_H)$ мы имеем гауссовскую комплексную случайную переменную $\phi^\varepsilon(f)$, ли-

нейно зависящую от f и имеющую нулевое среднее и ковариации

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{Re} \phi^\varepsilon(f) \operatorname{Re} \phi^\varepsilon(g) \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (f, C_{g^\varepsilon}^\varepsilon g), \\ \langle \operatorname{Im} \phi^\varepsilon(f) \operatorname{Im} \phi^\varepsilon(g) \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (f, C_{g^\varepsilon}^\varepsilon g), \\ \langle \operatorname{Im} \phi^\varepsilon(f) \operatorname{Re} \phi^\varepsilon(g) \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} (f, C_{g^\varepsilon}^\varepsilon g),\end{aligned}\quad (6.30)$$

что эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned}\langle \overline{\phi^\varepsilon(f)} \phi^\varepsilon(g) \rangle &= (f, C_{g^\varepsilon}^\varepsilon g), \\ \langle \phi^\varepsilon(f) \phi^\varepsilon(g) \rangle &= 0.\end{aligned}\quad (6.31)$$

(Напомним, что $l^2(\varepsilon\mathbb{Z}^d)$ отождествлено с подпространством в $L^2(\mathbb{R}^d)$.)

Далее, выберем ортонормированный базис $\{e_a\}$ в \mathcal{Y}_H и положим

$$\phi_a^\varepsilon(x) = \phi^\varepsilon(\delta_{x,a}^\varepsilon), \quad (6.32)$$

где $\delta_{x,a}^\varepsilon$ — функция, принимающая значение e_a в точке x и равная нулю во всех остальных точках $\varepsilon\mathbb{Z}^d$ (здесь мы должны предположить, что $\varepsilon > 0$).

Теперь определим виковское упорядочивание (относительно свободной меры) для мономов от ϕ^ε с помощью формулы

$$\begin{aligned}e^{\lambda \operatorname{Re} \phi^\varepsilon(f) + \mu \operatorname{Im} \phi^\varepsilon(f)} :_e \\ = e^{\lambda \operatorname{Re} \phi^\varepsilon(f) + \mu \operatorname{Im} \phi^\varepsilon(f)} e^{-\frac{1}{4}(\lambda^2 + \mu^2) \operatorname{Re} (f, C_{\mathbb{1}}^\varepsilon f)}\end{aligned}\quad (6.33)$$

и разложения в ряд Тэйлора¹⁾. В частности, нас интересуют

$$:|\phi^\varepsilon(f)|^{2n}:_e = :(\operatorname{Re} \phi^\varepsilon(f)^2 + \operatorname{Im} \phi^\varepsilon(f)^2)^n:_e \quad (6.34)$$

и

$$:|\phi^\varepsilon(x)|^{2n}:_e = :(\sum_a (\operatorname{Re} \phi_a^\varepsilon(x)^2 + \operatorname{Im} \phi_a^\varepsilon(x)^2))^n:_e. \quad (6.35)$$

Подчеркнем, что в (6.33) используются ковариации *свободного* поля.

Обозначим гауссовскую вероятностную меру, соответствующую полям ϕ^ε , через $dv_{g^\varepsilon}^\varepsilon(\phi)$, т. е. мера $dv_{g^\varepsilon}^\varepsilon$ опреде-

¹⁾ Имеются в виду равенства типа $:e^\xi:_e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} : \xi^n :_e$. — Прим. ред.

ляется равенствами

$$\int \phi^\varepsilon(f) dv_{g^\varepsilon}^\varepsilon = \int \overline{\phi^\varepsilon(f)} dv_{g^\varepsilon}^\varepsilon = 0, \quad (6.36)$$

$$\int \overline{\phi^\varepsilon(f)} \phi^\varepsilon(g) dv_{g^\varepsilon}^\varepsilon = (f, C_{g^\varepsilon}^\varepsilon g). \quad (6.37)$$

Из результатов пункта а немедленно вытекает, что моменты и характеристические функции мер $dv_{g^\varepsilon}^\varepsilon$ сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это представляет собой аналог упомянутого выше результата для фермионов.

Наши внутренние взаимодействия задаются с помощью «потенциала» V , который является чётным полиномом с положительным старшим коэффициентом и имеет степень, не меньшую 4:

$$V(r) = \sum_{k=0}^p a_{2k} r^{2k}. \quad (6.38)$$

Пусть χ_Λ — индикаторная функция ограниченной открытой области $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$. Мы определяем «взаимодействие в объеме Λ » формулой

$$V_\Lambda^\varepsilon(\phi) = \sum_x \varepsilon^d \sum_{k=0}^p a_{2k} : |\phi^\varepsilon(x)|^{2k} : \chi_\Lambda(x). \quad (6.39)$$

После всех этих определений настал момент сформулировать теорему:

Теорема 6.15 [28]. Пусть $d = 2$. Предположим, что калибровочные поля g^ε сходятся к некоторому непрерывному калибровочному полю в смысле определения 6.4. Тогда вероятностные меры

$$\frac{1}{Z_\Lambda^\varepsilon(g^\varepsilon)} e^{-V_\Lambda^\varepsilon(\phi)} dv_{g^\varepsilon}^\varepsilon(\phi), \quad (6.40)$$

где

$$Z_\Lambda^\varepsilon(g^\varepsilon) = \int e^{-V_\Lambda^\varepsilon(\phi)} dv_{g^\varepsilon}^\varepsilon(\phi), \quad (6.41)$$

сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ в смысле сходимости характеристических функций; все моменты также сходятся. Предел не зависит от ориентации решеток.

З а м е ч а н и я. 1. Здесь удобно считать, что случайные хиггсовские поля «занумерованы» функциями из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2, \mathcal{Y}_N)$, а не из L^2 .

2. Используя технику, развитую Глиммом и Джаффе [35] и другими авторами (см., например, [10]¹⁾) для доказатель-

¹⁾ А также [12]. — Прим. ред.

ства устойчивости модели ϕ_3^4 , а также результаты, собранные в данной книге, по-видимому можно доказать эту теорему также для трехмерного случая. Часть этой задачи решена в работе Поттхоффа [31]. С дополнительными проблемами, связанными с различными виковскими упорядочиваниями, наверное, можно будет справиться, действуя в соответствии со сказанным в пункте а.

Доказательство теоремы 6.15 мы разобьем на несколько шагов. Первый и самый длинный шаг — это

Лемма 6.16. Если выполнены условия теоремы 6.15, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dv_{g^{\varepsilon}e}^{\varepsilon} e^{-\lambda V_{\Lambda}^{\varepsilon}}$$

существует для всех $\lambda \geq 0$.

Доказательство. Мы можем предположить, что $\lambda = 1$. Полезный прием состоит в том, чтобы считать, что все поля ϕ^{ε} для разных ε определены на одном и том же пространстве с вероятностной мерой, а именно мы будем рассматривать их как функции от фиксированного белого шума:

Пусть ψ — это \mathcal{Y}_H -значный белый шум на \mathbb{R}^2 и $d\omega$ — соответствующая вероятностная мера, т. е. для $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2, \mathcal{Y}_H)$

$$\begin{aligned} \int d\omega \overline{\psi(f)} \psi(g) &= (f, g)_{L^2}, \\ \int d\omega \psi(f) \psi(g) &= 0 \end{aligned} \tag{6.42}$$

и т. д.

Пусть Q^{ε} — упоминавшийся ранее оператор усреднения, отображающий L^2 в l^2 , и

$$E^{\varepsilon} = (Q^{\varepsilon*} \chi_{\Lambda} C_{g^{\varepsilon}e}^{\varepsilon} \chi_{\Lambda} Q^{\varepsilon})^{1/2}. \tag{6.43}$$

Легко видеть, что

$$\phi^{\varepsilon} = E^{\varepsilon} \psi, \tag{6.44}$$

где

$$E^{\varepsilon} \psi(f) = \psi(E^{\varepsilon} f). \tag{6.45}$$

Таким образом, мы можем рассматривать $V_{\Lambda}^{\varepsilon}(\phi^{\varepsilon})$ как функцию $\tilde{V}_{\Lambda}^{\varepsilon}(\psi)$ от ψ , причем

$$\int dv_{g^{\varepsilon}e}^{\varepsilon} \exp(-\lambda V_{\Lambda}^{\varepsilon}) = \int d\omega \exp(-\lambda \tilde{V}_{\Lambda}^{\varepsilon}).$$

Для того чтобы доказать сходимость, оценим

$$\begin{aligned} \left| \int d\omega \left(e^{-\hat{V}_\Lambda^e} - e^{-\hat{V}_\Lambda^{e'}} \right) \right| &\leq \int d\omega \left| \hat{V}_\Lambda^e - \hat{V}_\Lambda^{e'} \right| \left(e^{-\hat{V}_\Lambda^e} + e^{-\hat{V}_\Lambda^{e'}} \right) \\ &\leq \left(\int d\omega \left| \hat{V}_\Lambda^e - \hat{V}_\Lambda^{e'} \right| \right)^{1/2} \left\{ \left(\int d\omega e^{-2\hat{V}_\Lambda^e} \right)^{1/2} + \left(\int d\omega e^{-2\hat{V}_\Lambda^{e'}} \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Сначала мы воспользуемся диамагнитным неравенством¹⁾ и оценим члены, стоящие в фигурных скобках. В силу теоремы 2.6

$$\begin{aligned} \int d\omega e^{-2\hat{V}_\Lambda^e} \det(1 + K_H^e(A^e))^{-1} \\ = \int d\nu_{g^e}^e e^{-2V_\Lambda^e} \det(1 + K_H^e(A^e))^{-1} \leq \int d\nu_{g^e}^e e^{-2V_\Lambda^e} \end{aligned} \quad (6.47)$$

(левая часть — это просто $Z(\{g_{xy}\})$). Равномерная (по ϵ) оценка правой части (6.47) впервые была получена Нельсоном [36] и уже давно имеет для специалистов по конструктивной теории поля такое же фундаментальное значение, как неравенство Шварца (см. также [11]). Определитель, который нам пришлось добавить в (6.47), был уже оценен в предыдущем пункте. Тем самым с фигурными скобками мы закончили.

Для того чтобы установить сходимость к нулю первого множителя в (6.46), полезно переписать V_Λ^e в виде суммы виковских мономов относительно $C_{g^e}^e$ (они определяются формулой (6.33), в которой нужно заменить $C_{g^e}^e$ на $C_{g^e}^e$). Это было сделано явно, например, в [37], однако нам достаточно лишь знать, что при этом получаются коэффициенты, являющиеся полиномами по $\delta C_{g^e}^e$, как об этом уже говорилось в пункте 6а. Итак, достаточно показать, что

$$\lim_{\epsilon, \epsilon' \rightarrow 0} \int d\omega \left| P^e(\phi^e) - P^{e'}(\phi^{e'}) \right|^2 = 0, \quad (6.48)$$

где

$$P^e = \int_\Lambda \left| \delta C_{g^e}^e(x, x) \right|^j : \left| \phi^e \right|^{2N} :_{C_{g^e}^e} dx. \quad (6.49)$$

Далее, доказательство соотношения (6.48) сводится к проверке того, что

$$\int d\omega P^e (P^e - P^{e'}) \rightarrow 0, \quad (6.50)$$

¹⁾ См. раздел 2. — *Прим. ред.*

а это соотношение в свою очередь будет следовать из того, что

$$\int_{\Lambda \times \Lambda} dx dy \left| \delta C_{g^e}^e(x, x) \right|^l \left[(E^e)^{2N}(x, y) \left| \delta C_{g^e}^e(y, y) \right|^l - (E^e E^{e'})^N(x, y) \left| \delta C_{g^{e'}}^e(y, y) \right|^l \right] \rightarrow 0, \quad (6.51)$$

на основании правил вычисления гауссовских интегралов.

Раскрывая это выражение и используя несколько раз неравенство Гёльдера, мы заключаем, что нам нужно установить $L^p(\Lambda \times \Lambda)$ -сходимость $(E^e E^{e'})^N(x, y)$ (вспомните теорему 6.6, в которой доказывается L^p -сходимость $\delta C_{g^e}^e$). Имеем

$$\begin{aligned} & \int |(E^e E^{e'})^N(x, y)|^{2p} dx dy \\ & \leq \left(\int |(E^e)^2(x, y)|^{2p} dx dy \right)^{1/2} \left(\int |(E^{e'})^2(x, y)|^{2p} dx dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

В силу диамагнитного неравенства последнее выражение равномерно ограничено. Таким образом, неравенство Гёльдера позволяет свести задачу к проверке $L^2(\Lambda \times \Lambda)$ -сходимости ядер операторов $E^e E^{e'}$, означающей \mathcal{Y}_2 -сходимость самих операторов. Это в свою очередь следует из \mathcal{Y}_4 -сходимости операторов E^e .

Большая часть пункта 6а была потрачена на доказательство утверждений, аналогичных \mathcal{Y}_2 -сходимости операторов $(E^e)^2$. Наконец, в [28] доказано, что отсюда вытекает нужная нам \mathcal{Y}_4 -сходимость E^e . Тем самым лемма 6.16 доказана. \square

Теперь нам надо показать следующее.

Лемма 6.17.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dv_{g^e}^e e^{-V_{\Lambda}^e} > 0.$$

Доказательство. В силу выпуклости экспоненты (неравенство Йенсена) достаточно доказать, что

$$\int dv_{g^e}^e V_{\Lambda}^e < C < \infty,$$

где C не зависит от ε . Это легко получается с помощью явного вычисления гауссовского интеграла. \square

Для того чтобы завершить доказательство теоремы 6.15, рассмотрим

$$\int F(\phi^e) e^{-V_{\Lambda}^e} dv_{g^e}^e, \quad (6.52)$$

где F — полином или экспонента. Сходимость (6.52) следует из леммы 6.16 и сходимости

$$\int |F(\phi^\varepsilon) - F(\phi^{\varepsilon'})|^2 d\nu_{g^\varepsilon}^e, \quad (6.53)$$

которая имеет место, так как гауссовским интегрированием этот вопрос сводится к вопросу о сходимости функций Грина. Тем самым мы покончили и с теоремой 6.15. \square

Итак, после некоторых трудов мы получили состояние (т. е. среднее значение) в непрерывном пределе для двумерного фермионного или хиггсовского поля, взаимодействующего с внешним полем Янга — Миллса, обладающим определенной регулярностью (а именно непрерывным по Гёльдеру, что по существу эквивалентно конечности $\|A\|_{\infty, \alpha}$).

д. Сходимость средних в полностью квантованных теориях с обрезанием калибровочного поля

Результаты предыдущего пункта легко распространить на сходимость в полностью квантованных теориях, при условии что мера калибровочного поля такова, что с вероятностью 1 калибровочные поля удовлетворяют условию Гёльдера. Беда в том, что

1) корректная янг-миллсовская мера (если мы сможем ее построить), несомненно, не будет обладать этим свойством, так что нам придется каким-либо образом ее обрезать;

2) трудно найти обрезания, которые бы не разрушили большую часть структуры теории Янга — Миллса.

Это было основной причиной того, почему мы сначала работали с решеткой, как с обрезанием. Однако для абелевых полей существуют разумные непрерывные обрезания с хорошими свойствами, ими мы и воспользуемся.

Теорема 6.18. Пусть $d = 2$ и dm — вероятностная мера, соответствующая случайному полю Янга — Миллса A_μ , которое с вероятностью 1 существенно равномерно-непрерывно по Гёльдеру с показателем $\alpha > 0$. Пусть $\{g_{xy}\}$ — решеточное калибровочное поле, порожденное полем A_μ . Тогда вероятностные меры

$$\frac{1}{Z_{\varepsilon, \Lambda}} dm \times e^{-V_\Lambda^e} \det_{\text{ren}} (1 + K_N^e(A^\varepsilon))^{-1} d\nu_{g^\varepsilon}^e(\phi)$$

сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ в смысле сходимости характеристических функций и моментов ($Z_{\varepsilon, \Lambda}$ — нормировочный множитель).

Замечания. 1. Существенная равномерная непрерывность по Гёльдеру означает следующее. Для m -почти всех A_μ су-

ществует постоянная c_A , такая что

$$|A_\mu(x) - A_\mu(y)| \leq c_A |x - y|^\alpha, \quad \mu = 0, 1,$$

для почти всех по мере Лебега точек x, y .

2. Если верно, что теорема 6.15 обобщается на трехмерный случай, то эта теорема также обобщается на этот случай.

Имеется ее фермионный аналог:

Теорема 6.19. Пусть мера dm удовлетворяет условию предыдущей теоремы и $d = 2$ или 3 . Тогда вероятностные меры

$$\frac{1}{Z_{\varepsilon, \Lambda}} \det_{\text{ren}} (1 + K_F^\varepsilon(A^\varepsilon)) dm,$$

равно как и меры

$$\frac{1}{Z_{\varepsilon, \Lambda}} \Lambda^k (G_F^\varepsilon (1 + K_F^\varepsilon(A^\varepsilon))^{-1}) \det_{\text{ren}} (1 + K_F^\varepsilon(A^\varepsilon))$$

(последние принимают значения в $\mathcal{L}(\Lambda^k(\mathcal{H}_F))$), сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ в смысле сходимости характеристических функций и моментов.

Доказательство обеих теорем. Доказательство состоит просто в применении теоремы 6.15 (и ее тривиального фермионного аналога) вместе с теоремой о мажорированной сходимости. Равномерная оценка сверху — следствие «диамагнетизма», который позволяет исключить взаимодействие между материальными и калибровочными полями. \square

Следует особо подчеркнуть, что эти две теоремы выглядят лучше, чем они есть на самом деле, так как в случае неабелевых теорий у нас нет нужной меры. Однако в случае абелевых теорий в размерностях $d = 2, 3$ такие меры легко находятся благодаря следующей теореме Гарсиа [79]:

Теорема 6.20. Пусть $\phi(x)$ — гауссовское случайное поле в ограниченной области Λ . Для того чтобы типичная реализация поля была почти наверное существенно равномерно-непрерывна по Гёльдеру с показателем α , достаточно, чтобы функция

$$p(u) = \sup_{|x-y| \leq |u|} \langle (\phi(x) - \phi(y))^2 \rangle^{1/2}$$

удовлетворяла условию Гёльдера с показателем $\beta > \alpha$ в точке $u = 0$.

Доказательство имеется в [79]. Полезность этой теоремы демонстрируется следующим результатом:

Следствие 6.21 [28]. Пусть d произвольно и A_μ есть d -компонентное гауссовское случайное поле с ковариацией

$$\begin{aligned} \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle &= D_{\mu\nu}(x, y), \\ \sum_\mu \int dk \hat{D}_{\mu\mu}(k) |k|^{2\beta} &< \infty. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Тогда для любого $\alpha < \beta$ почти наверное A_μ существенно равномерно-непрерывно по Гёльдеру с показателем α .

Доказательство — простое упражнение на преобразование Фурье. \square

Пример.

$$\hat{D}_{\mu\nu}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \lambda^2} \right) \frac{1}{k^2 + \lambda^2} e^{-t\vec{k}^2}, \quad t > 0, \quad (6.55)$$

Если $\beta < 1/2$, то проверка условия (6.54) тривиальна. Выражение (6.55) представляет собой ковариацию «фотонного поля» с ультрафиолетовым обрезанием t по одним пространственным импульсам, с инфракрасным обрезанием λ и с некоторой калибровкой, близкой к калибровке Ландау. Основное преимущество такого импульсного обрезания состоит в том, что при этом сохраняется положительность по Остервальдеру — Шрадеру:

Теорема 6.22 [28]. Пусть среднее для системы, состоящей из калибровочного и материального полей, определяется либо как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{Z_{\varepsilon, \Lambda}} e^{-V_\Lambda^\varepsilon} \det_{\text{ren}} \left(1 + K_H^\varepsilon (A^\varepsilon) \right)^{-1} dv_{g^\varepsilon}^\varepsilon(\phi)$$

в случае двумерной абелевой модели Хиггса, либо при помощи теоремы 6.19 в случае двух- или трехмерной модели КЭД. Тогда если Λ симметрично относительно $t = 0$, то среднее значение удовлетворяет условию положительности Остервальдера — Шрадера.

Доказательство. По существу это вытекает из положительности ОШ на решетке — надо только правильно организовать предельный переход. А именно, надо ввести импульсное решеточное обрезание ε для калибровочных полей, ε' для материальных полей и устремить сначала ε' , а затем ε к нулю. См. [28]. \square

На этом завершается наше изучение «хороших» калибровочных полей. Всё, что остается, — это снять ультрафиолетовое обрезание калибровочного поля, затем объемное обрезание и проверить аксиомы Остервальдера — Шрадера.

7. УСТРАНЕНИЕ ВСЕХ ОБРЕЗАНИЙ; ПРОВЕРКА АКСИОМ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Ультрафиолетовое обрезание калибровочного поля было устранено для двумерных моделей Хиггса в [29] и для КЭД₂ в [26, 27]; в последнем случае мне неизвестно ни одной подробной публикации, содержащей предельный переход к бесконечному объему и проверку аксиом, как это было проделано для моделей Хиггса в [29]. Однако в принципе нет никаких препятствий для этого даже в фермионном случае (фактически это должно быть даже легче), и мы в основном будем обсуждать обе ситуации параллельно. Для КЭД₂ я дам общие контуры построения термодинамического предела при помощи кластерного разложения, а для Хиггс₂ можно использовать простые соображения, основанные на корреляционных неравенствах.

а. Устойчивое разложение

Чтобы устремить к нулю t -обрезание, присутствующее в мере калибровочного поля (см. (6.55)), удобно использовать так называемое устойчивое разложение (в случае КЭД₂ можно вместо этого воспользоваться одним более простым методом [27], основанным на результатах работы [15]). Мы обсудим модель Хиггса и по ходу обсуждения укажем соответствующие модификации (главным образом упрощения) для КЭД₂. Идея состоит просто в том, чтобы выбрать подходящую последовательность обрезаний $t_0, t_1, t_2, \dots \rightarrow 0$, написать разложение для (модифицированных) статистических сумм вида

$$Z(t_N) = Z(t_0) + \sum_{k=1}^N (Z(t_k) - Z(t_{k-1})) \quad (7.1)$$

и оценить разность между сходящимися диаграммами Фейнмана. Конечно, это приведет к цели лишь при включении соответствующих контрчленов.

Приступим к делу. Прежде всего введем некоторые обозначения. Через

$$dm_t(A)$$

обозначается гауссовская мера, определенная на двухкомпонентных полях A_μ с нулевым средним и с ковариацией $D_{\mu\nu}^t$, задаваемой формулой

$$\widehat{D}_{\mu\nu}^t = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \lambda^2} \right) (k^2 - \lambda^2)^{-1} e^{-tk_1^2} \quad (\mu, \nu = 0, 1) \quad (7.2)$$

(ср. с (6.55)). Нам понадобятся также гауссовские меры с ковариациями

$$D_{\mu\nu}^{tk} - D_{\mu\nu}^{t(k-1)}, \quad (7.3)$$

где $\infty = t_0, t_1, t_2, \dots$ — монотонно убывающая последовательность. Обозначим соответствующие (7.3) меры через $dm^{(k)}(A)$, $k = 1, 2, \dots$.

Можно отождествить $dm_{t_N}(A)$ с произведением мер $\prod_{k=1}^N dm^{(k)}(A)$, а $dm(A)$, с dm_{t_∞} .

Мы будем также использовать некоторые интерполирующие поля для оценки разностей в (7.1). А именно если $A_\mu^{(k)}$ — случайное поле, соответствующее мере $dm^{(k)}(A)$, то мы полагаем

$$A_{\mu, s(t)} = \sum_{i=1}^t \sqrt{s_1 \dots s_i} A_\mu^{(i)} \quad (7.4)$$

$(s_i \in [0, 1], i = 1, 2, 3, \dots)$.

Эта довольно странная на вид интерполяция выбрана таким образом, чтобы ковариации интерполирующих полей были достаточно простыми.

Контрчлен энергии вакуума будет иметь вид

$$E_\Lambda^{(t)} \equiv e^2 \int_{\Lambda \times \Lambda} dx dy \int A_\mu(x) A_\nu(y) \times \Pi_{\mu\nu}(x-y) dm_t(A), \quad (7.5)$$

где $\Pi_{\mu\nu}$ — поляризация вакуума второго порядка. Графически:

$$\Pi_{\mu\nu} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{два соединенных волнистых контура} \\ \text{два соединенных волнистых контура} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{для КЭД}_2, \\ \text{для Хиггс}_2, \end{array}$$

$$E_\Lambda^{(t)} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{два соединенных волнистых контура} \\ \text{два соединенных волнистых контура} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{для КЭД}_2, \\ \text{для Хиггс}_2. \end{array}$$

В модели Хиггс₂ появится еще массовый контрчлен для поля материи, который для нашей ковариации с фиксированной калибровкой можно выбрать в виде

$$\delta m_i^2 = \sum_{\mu} e^2 \int A_\mu(0)^2 dm_t(A) = e^2 \sum_{\mu} D_{\mu\mu}^t(0).$$

Графически:

$$\delta m_t^2 = \text{☼} \quad \text{для Хиггс}_2.$$

Интерполированные контрчлены $E_{\Lambda, s(t)}$, $\delta m_{s(t)}^2$ определяются аналогично.

Наконец, обозначим через $dv_A(\phi)$ непрерывную гауссовскую вероятностную меру со средним нуль и ковариацией

$$C_A(x, y) \equiv (-\Delta_A + m^2)^{-1}(x, y)$$

и положим

$$z(A) \equiv \begin{cases} \det_{\text{ren}}(1 + K_H(A))^{-1} & \text{для Хиггс}_2, \\ \det_{\text{ren}}(1 + K_F(A))^{-1} & \text{для КЭД}_2. \end{cases}$$

Полная ненормированная обрезанная мера для модели Хиггс₂ имеет вид

$$Z_{\Lambda, t} d\mu_{\Lambda, t}(\phi, A) \equiv dm_t(A) z(A) e^{-V_{\Lambda}(\phi) + \frac{1}{2} \delta m_t^2 \int_{\Lambda} |\phi|^2 dx + E_{\Lambda}^t} dv_A(\phi), \quad (7.6)$$

где $V_{\Lambda}(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_{\Lambda}^{\varepsilon}(\phi)$ (см. предыдущий пункт). Для КЭД₂ вместо этой меры можно рассмотреть « $\mathcal{L}(\mathcal{H}^k(\Lambda_F))$ -значные меры»

$$dm_t(A) z(A) \Lambda^k (G_F(1 + K_F(A))^{-1}). \quad (7.7)$$

Мы обозначаем через $Z_{\Lambda, t}$ («статистическая сумма») интегралы от выражений (7.6) и (7.7) соответственно и через $Z_{P, \Lambda, t}$ — модифицированные статистические суммы (ненормированные средние).

Если P — полином от хиггсовского и калибровочного полей, то

$$Z_{P, \Lambda, t} \equiv \int P d\mu_{\Lambda, t}. \quad (7.8)$$

Для КЭД₂ удобно иметь дело с «низлежащей» грассмановой «мерой», входящей в формулу Мэттьюза — Салама. Тогда если P — полиномиальная функция калибровочного и фермионного полей:

$$P = \sum_k \int B_k(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k; A) \prod_{i=1}^k (\bar{\psi}(x_i) \psi(y_i)),$$

то

$$Z_{P, \Lambda, t} \equiv \int dm_t(A) z(A) \times \sum_k \text{Tr} [B_k \Lambda^k (G_F(1 + K_F(A))^{-1})]. \quad (7.9)$$

Теперь, используя интерполирующие поля, основную теорему интегрального и дифференциального исчисления и интегрирование по частям, получим выражение для разности $Z_{P, \Lambda, t_k} - Z_{P, \Lambda, t_{k-1}}$.

Лемма 7.1. Для модели Хиггса

$$Z_{P, \Lambda, t_k} - Z_{P, \Lambda, t_{k-1}} = \int_0^1 ds_1 \dots \int_0^1 ds_k \int d\mu_{s(k)}(A, \phi) K_k \dots K_1 P,$$

где K_1, \dots, K_k — функциональные дифференциальные операторы, действующие на P . Они могут быть представлены графически следующим образом:

$$\begin{aligned} K_l \leftrightarrow & \bar{\phi} \overline{\xi_{A'}} \left(\frac{\delta}{\delta \bar{\phi}} - \frac{\delta V}{\delta \bar{\phi}} \right) + \bar{\phi} \overline{\xi_A} \left(\frac{\delta}{\delta \bar{\phi}} - \frac{\delta V}{\delta \bar{\phi}} \right) \\ & + : \bar{\phi} \overline{\xi_{A'}} \xi_A \phi : + \bar{\phi} \overline{\xi_{A'}} \xi_A \phi \\ & + \bar{\phi} \overline{\xi_A} \xi_A \phi + \bar{\phi} \overline{\xi_A} \xi_A \phi \\ & + : A_\mu \Pi_{\mu\nu} A_\nu : \end{aligned} \quad (7.10)$$

Замечание. Надеемся, что эти графические обозначения будут сами собой понятны всякому, кто знаком с фейнмановскими диаграммами. Действие функциональных производных может быть определено чисто алгебраически, поскольку они действуют только на полиномы (или, возможно, на экспоненты от полиномов). Никакого изощренного функционального анализа при этом не требуется. Подробное объяснение обозначений дано в [28].

A' всегда означает $\frac{\delta}{\delta s_l} A_s(l)$; черный ящик  обо-

значает  $\delta m_s^2(l)$ и  — его производную по s_l ;

— обозначает, конечно, свободную двухточечную функцию Грина поля Хиггса.

Набросок доказательства (подробности см. в [28]). Мы утверждаем, что для $l < k$

$$Z_{P, \Lambda, t_k} - Z_{P, \Lambda, t_{k-1}} = \int_0^1 ds_1 \dots \int_0^1 ds_l \left[\int d\mu_{(s_1, \dots, s_l, 1, \dots, 1)}(A) - \int d\mu_{(s_1, \dots, s_l, 1, \dots, 1, 0)}(A) \right] K_l \dots K_1 P. \quad (7.11)$$

Это доказывается по индукции. Для $l=0$ утверждение тривиально. Чтобы перейти от l к $l+1 < k$, запишем разность мер, фигурирующую в (7.11), следующим образом:

$$\int_0^1 ds_{l+1} \frac{\partial}{\partial s_{l+1}} (d\mu_{(s_1, \dots, s_{l+1}, 1, \dots, 1)} - d\mu_{(s_1, \dots, s_{l+1}, 1, \dots, 1, 0)}); \quad (7.12)$$

так можно сделать, поскольку разность мер в (7.12) обращается в нуль при $s_{l+1} = 0$ в силу определения (7.4) интерполирующих полей.

Производная в (7.12) может быть получена дифференцированием действия:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s_{l+1}} d\mu_{(s_1, \dots, s_{l+1}, \dots)} \\ &= (E'_\Lambda + \bar{\phi} \underset{A}{\overline{}} \phi + \bar{\phi} \underset{A}{\overline{}} \phi) d\mu_{(s_1, \dots, s_{l+1}, \dots)}. \quad (7.13) \end{aligned}$$

Всё остальное — упражнение в интегрировании по частям для гауссовских интегралов; оно «сворачивает» поля, фигурирующие в (7.13), с полями, входящими в действие. Этот процесс заканчивается, когда все выражения, встречающиеся по пути, сводятся к сходящимся фейнмановским интегралам при «самосворачивании» с использованием свободной гауссовской меры. Так появляется K_{l+1} , что и доказывает (7.11) для $l+1$.

Наконец, на последнем шаге $l=k$ появляется выражение, указанное в формулировке леммы. \square

По поводу аккуратного обоснования интегрирования по частям см. [28] (это делается там при помощи решёточной аппроксимации).

Имеется фермионный аналог леммы 7.1:

Лемма 7.2. Для КЭД₂

$$Z_{P, \Lambda, t_k} - Z_{P, \Lambda, t_{k-1}} = \int_0^1 ds_1 \dots \int_0^1 ds_k \int d\mu_{s^{(k)}}(A) K_k \dots K_1 P,$$

где K_k, \dots, K_1 — некоторые (нелинейные) операторы, действующие на P . Снова лучше всего представить их графически, причем всё становится более понятным, если выразить их через исходные фермионные средние:

$$K_l \leftrightarrow : \bar{\psi} \overbrace{\frac{\delta}{\delta \psi}}^{\xi'} \psi : + \bar{\psi} \overbrace{\frac{\delta}{\delta \psi}}^{\xi} + : A_\mu \Pi_{\mu\nu} A_\nu :. \quad (7.14)$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 7.1, только проще. Интегрирование по частям для «интеграла» Березина¹⁾ обсуждается в [74]. \square

Из этих двух лемм вытекает

Следствие 7.3. Для моделей Хиггс₂ или КЭД₂

$$Z_{P, \Lambda, t_N} = \sum_{l=1}^N \int_0^1 ds_1 \dots \int_0^1 ds_l \int d\mu_{s(l)} K_l \dots K_1 P, \quad (7.15)$$

где K_r ($r \in \mathbb{Z}_+$) задается формулой (7.10) в случае Хиггс₂ и формулой (7.14) в случае КЭД₂.

З а м е ч а н и е. Мы называем (7.15) *устойчивым разложением*.

Смысл разложения (7.15), конечно, в том, что можно доказать его равномерную сходимость и, значит, перейти к пределу $N \rightarrow \infty$, если выбрать последовательность обрезаний подходящим образом.

Сначала поговорим о модели Хиггса. Нужные оценки в высшей степени естественны (хотя подробное их доказательство занимает страниц 20 в препринте [29]).

Лемма 7.4. В модели Хиггс₂

$$Z_{P, \Lambda, t_k} - Z_{P, \Lambda, t_{k-1}} \leq C_1 |\log t_k|^{kr} \prod_{j=1}^k t_j^\delta (kj)^p e^{C_2 (\log t_k)^2} \quad (7.16)$$

при некоторых положительных постоянных C_1, C_2, δ, r, p .

Следствие 7.5. Пусть $t_j = \text{const} \cdot e^{-j^\gamma}$ ($0 < \gamma < 1$) для $j = 1, 2, 3, \dots$. Тогда из (7.16) следует абсолютная и равномерная сходимость устойчивого разложения (7.15).

¹⁾ То есть интеграла по антикоммутирующим переменным, теория которого построена в книге Березина [15*]. — *Прим. ред.*

Доказательство следствия 7.5. Если $t_j = \exp(-j^\gamma)$, то

$$\begin{aligned} & |Z_{P, \Lambda, t_k} - Z_{P, \Lambda, t_{k-1}}| \\ & \leq C_1 k^{\gamma k r} \exp\left(-\varepsilon \sum_{j=1}^k j^\gamma\right) k^{p k} \exp(C_2 k^{2\gamma}) \\ & \leq C_1 \exp\left\{(p + r\gamma) k \log k + C_2 k^{2\gamma} - \frac{\varepsilon}{\gamma + 1} k^{\gamma+1}\right\} \\ & \leq C_1 \exp(-C_3 k^{\gamma+1}) \end{aligned}$$

при некотором $C_3 > 0$. Ясно, что это суммируемо по k . \square

Прежде чем перейти к доказательству леммы 7.4, избавимся от оставшихся экспонент, используя неравенство Шварца и диамагнитное неравенство:

$$\begin{aligned} & \left| \int dv_{A_s(l)} (\phi) z A e^{-V_\Lambda + \frac{1}{2} \delta m_s^2(l)} \int_\Lambda :|\phi|^2: + E_s(l) K_l \dots K_1 P \right| \\ & \leq \left(\int dv_{A_s(l)} |K_l \dots K_1 P|^2 \right)^{1/2} \\ & \quad \times \left(\int dv_{A_s(l)} e^{-2V_\Lambda z} (A) e^{\delta m_s^2(l)} \int_\Lambda :|\phi|^2: \right)^{1/2} e^{E_s(l)}. \quad (7.17) \end{aligned}$$

Лемма 7.4 будет вытекать из (7.17) и следующих трех лемм:

Лемма 7.6. $E(s_1, \dots, s_l, 0, \dots) \leq a_1 (\log t_l)^2$.

Лемма 7.7. $\int dv_A z (A) \exp(-2V_\Lambda + \delta m^2 \int_\Lambda :|\phi|^2:) \leq \exp a_2 (\delta m^2)^2$,

если в V входит слагаемое $\lambda \int :(\bar{\phi}\phi)^2:$, $\lambda > 0$ (мы предполагаем это для простоты). Кроме того,

$$\delta m_s^2(l) \leq a_3 |\log t_l|.$$

Лемма 7.8. $\int dm(A) \int dv_A |K_l \dots K_1 P|^2 \leq a_4^l \left(\prod_{j=1}^l t_j^\delta \right) (l!)^p |\log t_l|^{lr}$

при некоторых $\delta > 0$, $p > 0$, $r > 0$.

З а м е ч а н и е. Предположение леммы 7.7 о положительности члена 4-го порядка не является в действительности необходимым; если самый старший член в V имеет вид $\lambda :(\bar{\phi}\phi)^{2N}:$, $\lambda > 0$, то всегда можно получить оценку типа $\exp(a_2 (\delta m^2)^{2N/(2N-2)})$, из которой также следует сходимость

(фактически некоторые шаги доказательства становятся даже проще).

Доказательство леммы 7.6 состоит в простой оценке

фейнмановских диаграмм  +  □

Доказательство леммы 7.7. В силу диамагнитной оценки (теорема 2.6)

$$\int dv_{Az}(A) e^{-2V_{\Lambda} + \delta m^2 \int_{\Lambda} :|\phi|^2:} \leq \int dv_{\phi} e^{-2V_{\Lambda} + \delta m^2 \int_{\Lambda} :|\phi|^2:}.$$

Поэтому нам нужно только оценить гауссовский интеграл со свободной ковариацией. Если бы не было виковского упорядочения, то утверждение леммы получалось бы заменой экспоненты

$$e^{-2V_{\Lambda} + \delta m^2 \int_{\Lambda} :|\phi|^2:}$$

на ее максимум. Но из-за виковского упорядочения это неограниченная функция, хотя вероятность того, что она принимает большие значения, и очень мала. Последний факт составляет суть доказательства устойчивости, принадлежащего Нельсону [36]. Более конкретно, запишем (положив $\alpha = \delta m^2$)

$$2V_{\Lambda} = V_1 + V_2 + \alpha \int_{\Lambda} :|\phi|^2: dx,$$

$$V_1 \equiv \lambda \left(\int_{\Lambda} :|\phi|^2: dx \right)^2 - \alpha \int_{\Lambda} :|\phi|^2: dx,$$

$$V_2 \equiv 2\lambda \int_{\Lambda} :|\phi|^4: dx - \lambda \left(\int_{\Lambda} :|\phi|^2: dx \right)^2.$$

Ясно, что

$$V_1 \geq -\frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{\lambda},$$

и из данного в [36] доказательства устойчивости для $P(\phi)_2$ следует, что

$$dv_{\phi} e^{-V_2} < \infty,$$

что и доказывает лемму. □

Доказательство леммы 7.8. Доказательство состоит «просто» в оценке гауссовского интеграла, который может быть представлен как сумма сходящихся фейнмановских диаграмм. К сожалению, эти фейнмановские диаграммы сколь

угодно велики, и к тому же здесь нельзя обойтись без комбинаторики (так как она ответственна за множитель $(k!)^p$ в (7.16)).

Техника оценки больших фейнмановских диаграмм через фиксированное число «малых» диаграмм хорошо известна в конструктивной теории поля. Для нашего случая такая оценка выполнена в [29] не «графологическим» методом, а методом функциональных интегралов. Результат состоит в том, что

$$\left\| \left(\prod_{i=1}^k K_i \right) P \right\|_2$$

оценивается через $O((k!)^p)$ членов, каждый из которых есть произведение $O(k)$ фейнмановских диаграмм, выбранных из определенного конечного множества. В каждую из этих диаграмм входит по крайней мере одно дифференцирование (по параметру s_i) вдоль фотонной линии, которое определяет «высший момент», т. е. значения $t > t_i$ не дают вклада; так как мы имеем дело с диаграммами, сходящимися как степень, это порождает малый множитель t_i^δ . Заметим, что диаграммы, содержащие ковариантную функцию Грина S_A , надо оценить через такие же диаграммы со свободной функцией Грина. Последнее не вполне тривиально из-за возникающего взаимодействия, но всё же возможно (см. [29]) и дает множители $|\log t_k|$.

Чтобы избавиться от степени t_i^δ , можно применить общую теорему счета степеней, доказанную в [29]¹⁾.

Собрав все вместе, получаем лемму 7.8, чем и завершается доказательство сходимости для Хиггс₂. \square

Обратимся на некоторое время к КЭД₂. Здесь мы имеем следующий результат:

Лемма 7.9. Для КЭД₂

$$\left| Z_{P, \Lambda, t_k} - Z_{P, \Lambda, t_{k-1}} \right| \leq C_1 \prod_{j=1}^k t_j^\delta (k!)^p e^{C_2 |\log t_k|} \quad (7.18)$$

при некоторых положительных постоянных C_1, C_2, δ, ρ .

З а м е ч а н и е. Множитель $(k!)^p$ не является необходимым. Разложение, которое мы используем, это до некоторой степени стрельба из пушек по воробьям, но мы уж привыкли к нему в случае Хиггс₂ и закроем на это глаза. В [74] я описываю значительно более простое устойчивое разложение для КЭД₂, правда при условии, что $e/M \ll 1$.

¹⁾ См. также работу Малышева [16*]. — Прим. ред.

Для фермионной «меры» нет неравенства Шварца, но оно нам и не нужно, так как отсутствует внутреннее взаимодействие.

Будем через $\langle \cdot \rangle_{F, A}$ обозначать «гауссовские» фермионные средние, определяемые следующим образом:

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_{F, A} = G'_F(x, y; A). \quad (7.19)$$

Тогда

$$\left| \int dm(A_{s(l)}) z(A_{s(l)}) \langle K_l \dots K_1 P \rangle_{F, A} e^{E_\Lambda^s(l)} \right| \leq \int dm(A_{s(l)}) \left| \langle K_l \dots K_1 P \rangle_{F, A} \right|^2 e^{E_\Lambda^s(l)}. \quad (7.20)$$

Последнее выражение есть уже сумма фейнмановских диаграмм; некоторые из фермионных линий свободны (те, что идут из K_i); другие соответствуют G_i . К сожалению, не существует иного простого пути избавиться от этой неполиномиальной зависимости от A , кроме как с помощью неравенства

$$\| (i\hat{p} + i\hat{A} + M)^{-1} \| \leq \frac{1}{M}, \quad (7.21)$$

что возможно, если ядра $B_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, A)$, фигурирующие в представлении

$$P = \sum_k \int B_k(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k; A) \prod_{i=1}^k (\bar{\psi}(x_i) \psi(y_i)), \quad (7.22)$$

— достаточно гладкие функции (например, лежат в \mathcal{S}).

Затем нужно еще выполнить операцию разрезания больших диаграмм на малые; использование тех же самых бозонных функциональных методов, что и для модели Хиггса₂, возможно, если оценить все фейнмановские диаграммы, включающие свободные фермионные линии G_F , через диаграммы, в которых G_F заменено «бозонной» ковариацией $(-\Delta + m^2)^{-1/2}$. Конечно, можно также работать и непосредственно с диаграммами. В любом случае получение оценки (7.18) требует заметно меньше труда, чем получение оценки (7.16). \square

Таким образом, для КЭД₂ устойчивое разложение тоже сходится.

З а м е ч а н и я. 1. В такой форме устойчивые разложения, конечно, не работают для $d=3$. Однако правдоподобно, что разложение типа фазовой ячейки (см. [35, 10]) можно заставить здесь работать¹⁾. Магнен и Сенеор [17], скептически

¹⁾ См. книгу Глимма и Джаффе [12]. — Прим. ред.

относящиеся к такой возможности, предлагают взамен обрезание полей материи, которое уничтожает калибровочную инвариантность, но способствует устойчивости; конечно, в конце нужно проверить, что обычные тождества Уорда не нарушаются.

2. Интересно построить устойчивое разложение для калибровочно-инвариантных объектов типа

$$P = \bar{\psi}(x) \left(\exp i \int_x^y A \right) \psi(y).$$

По-видимому, это можно сделать, даже несмотря на то, что ядра таких P не лежат в \mathcal{P} .

в. Оценки, зависящие и не зависящие от объема

Сначала мы установим оценки вида

$$|\log Z_\Lambda| \leq \text{const} \cdot |\Lambda|. \quad (7.23)$$

Они важны при переходе к бесконечному объему и получаются при помощи непрерывного кластерного разложения (см. ниже и [38]), либо при помощи корреляционных неравенств [29].

Затем, применяя шахматную оценку и связанную с ней технику (имеющую долгую историю в конструктивной теории поля, см. [40—44, 18]), мы получим равномерные оценки средних значений экспонент и полиномов от поля.

В зависимости от того, какие граничные условия используются, некоторые из оценок (7.23) могут становиться тривиальными (по крайней мере для прямоугольников Λ).

Например, для свободных граничных условий оценка снизу, содержащаяся в (7.23), просто вытекает из положительности по Остервальдеру — Шрадеру. Действительно, если Λ имеет стороны L и T , то

$$Z_{L, T} \leq Z_{2L, T}^{1/2} \quad (7.24)$$

(в очевидных обозначениях), и, следовательно,

$$\log Z_{L, T}$$

есть выпуклая функция по каждой из переменных L и T и

$$Z_{L, T} \geq (Z_{L/N, T/M})^{NM}. \quad (7.25)$$

Оценка сверху становится наиболее простой при (анти-) периодических граничных условиях. Обозначив (анти-) пе-

риодическую статистическую сумму через $Z_{L,T}^{(a)p}$, имеем формально

$$Z_{L,T}^{a(p)} = \text{Tr} e^{-TH_L^{(a)p}} / \text{Tr} e^{-TH_L^{0(a)p}}, \quad (7.26)$$

где $H_L^{a(p)}$ — гамильтониан с (анти-) периодическими граничными условиями, $H_L^{0(a)p}$ — соответствующий свободный гамильтониан. Чтобы доказать равенство (7.26) или хотя бы вытекающую из него выпуклость, нужно перейти к решеточной аппроксимации; фактически соответствующее рассуждение довольно сложно и требует перехода к непрерывному пределу по времени до перехода к непрерывному пределу по пространству. Подробности см. в [29]. Другое доказательство неравенства (7.23) для КЭД₂ было дано Ито [75].

Отметим, что левая часть равенства (7.26) симметрична по L и T , хотя числитель и знаменатель в правой части по отдельности несимметричны по L и T . Суть равенства (7.26) состоит, конечно, в том, что

$$\text{Tr} e^{-TH} \leq (\text{Tr} e^{-(T/N)H})^N, \quad (7.27)$$

и так как знаменатель в (7.26) легко вычислить явно и для него можно доказать справедливость неравенства

$$\text{Tr} e^{-TH_L^{0(a)p}} \geq e^{-\alpha LT} \quad (7.28)$$

при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$, то, используя симметричность $Z_{L,T}^{(a)p}$ («симметрию Нельсона»), можно заключить на основании (7.26), что

$$Z_{L,T}^{(a)p} \leq e^{cLT}. \quad (7.29)$$

Для завершения доказательства неравенства (7.23) используется тот факт, что след положительного оператора больше любого диагонального элемента, откуда следует, что (анти-) периодические статистические суммы по существу мажорируют все статистические суммы с другими граничными условиями, которые могут быть интерпретированы как средние значения оператора e^{-TH} в некотором (ненормированном) состоянии. Таким образом,

$$Z_{L,T}^X \leq c_1 e^{c_2(L+T)} Z_{L,T}^{a(p)}, \quad (7.30)$$

где X обозначает произвольные граничные условия.

Наиболее полезными граничными условиями (г. у.) являются:

1) свободные г. у. (обозначаемые символом F), которые соответствуют выключению заряда из поля материи вне рас-

смаатриваемой области (эти свободные г. у. отличаются от «свободных граничных условий» раздела 4 для решеточных моделей);

2) смешанные г. у.: нулевые г. у. Дирихле со свободным виковским упорядочением для полей материи, свободные г. у. для калибровочного поля (обозначаеые символом D_M); нулевые г. у. Дирихле для фермионных полей — до некоторой степени обман (см. [39]);

3) смешанные г. у.: свободные г. у. для полей материи, нулевые г. у. Дирихле для калибровочного поля (обозначаеые символом D_G).

При доказательстве оценки (7.30) для этих смешанных г. у. требуется некоторая осторожность, так как «состояния», в которых вычисляются средние значения оператора e^{-TH} , имеют бесконечную норму (подобно плоским волнам). Подробное решение этой задачи для модели Хиггс₂ см. в [29]. Оказывается, во избежание появления бесконечностей надо потребовать, например, чтобы $L, T \geq 1$.

Оценка снизу для смешанных г. у. получается примерно так же, как и для свободных г. у.; снова нужна небольшая осторожность из-за бесконечной нормы появляющихся здесь «состояний». Формально

$$Z_{L,T}^{D_M} = \left(n_L, e^{-TH_L^{D_M}} n_L \right) / \left(\begin{matrix} 0 \\ n_L, e^{-TH_L^{D_M} 0} n_L \end{matrix} \right), \quad (7.31)$$

где $H_L^{D_M}, H_L^{D_M 0}$ — соответствующие гамильтонианы n_L, n_L^0 — «векторы бесконечной нормы». Снова знаменатель вычисляется явно, и можно показать, что

$$Z_{L,T}^{D_M} \geq e^{-cLT}. \quad (7.32)$$

Собираем все эти результаты в виде следующей теоремы:

Теорема 7.10. Для $L, T \geq 1$

$$|\log Z_{L,T}^X| \leq \text{const} \cdot LT, \quad (7.33)$$

где для модели Хиггс₂ X может быть p, D_M или F , а для модели КЭД₂ X может быть ap, D_M или F .

Нам нужны будут также оценки сверху для модифицированных статистических сумм. Они легко получаются с помощью «шахматной оценки» (см. теорему 2.2) и связанной с ней техники. Эта техника работает наилучшим образом для ненормированных средних значений экспоненциальных функций. Введем два определения.

Определение 7.11. Для модели Хиггс₂

$$Z_{g, h; \Lambda}^X \equiv Z_{\Lambda}^X \langle e^{i \int \phi^2 (g) + F(h)} \rangle_{X, \Lambda}.$$

Определение 7.11'. Для модели КЭД₂

$$Z_{B, h; \Lambda}^X \equiv Z_{\Lambda}^X \langle e^{(\bar{\psi}, B\psi) + F(h)} \rangle_{X, \Lambda}.$$

Здесь g, h — пробные функции с носителями в Λ ; B — оператор конечного ранга на \mathcal{Y}_F , так что

$$(\bar{\psi}, B\psi) = \sum_{i=1}^N \bar{\psi}(g_i) \psi(f_i)$$

для соответствующих (спинорных) пробных функций с носителями в Λ ; $F = \varepsilon_{\mu\nu} \partial_{\mu} A_{\nu}$ — (эвклидова) напряженность поля. Справедлива следующая теорема:

Теорема 7.12. В модели Хиггс₂

$$\log |Z_{g, h; L, T}^X| \leq cLT + a (\|g\|_1 + \|g\|_2^2) + \frac{1}{2} \|h\|_2^2 + b \quad (7.34)$$

для $X = D_{\Lambda}$, F или p . В модели КЭД₂

$$\log |Z_{B, h; L, T}^X| \leq cLT + \frac{1}{M} \|B\|_1 + \frac{1}{2} \|h\|_2^2 + b \quad (7.34')$$

для $X = D_M$, F или ap . Здесь a, b, c — постоянные, не зависящие от L и T .

Доказательство. Ввиду аналога оценки (7.30) для модифицированных статистических сумм достаточно рассмотреть случай $X = (a)p$; для этого случая «шахматная оценка» теоремы 2.2 или, точнее, ее предельный вариант дает для Хиггс₂

$$\log |Z_{g, h; L, T}^p| \leq \int d^2x \log Z_{\tilde{g}_x, \tilde{h}_x; L, T}^p, \quad (7.35)$$

где \tilde{g}_x (соотв. \tilde{h}_x) — постоянная функция на Λ с (единственным) значением $g(x)$ (соотв. $h(x)$).

Универсальное слагаемое $(1/2) \|h\|_2^2$ в (7.34) возникает из так называемой инфракрасной оценки (см. [32]). А именно, запишем

$$e^{F(h)} dm(A) = e^{(1/2) \|h\|_2^2, \lambda} dm(A + a(h)), \quad (7.36)$$

где $a(h)$ удовлетворяет уравнениям

$$\varepsilon_{\mu\nu} \partial_{\mu} a_{\nu}(h) = h - \lambda^2 (-\Delta + \lambda^2)^{-1} h, \quad \partial_{\mu} a_{\mu}(h) = 0, \quad (7.37)$$

а

$$\|h\|_{2, \lambda} = (h, (1 - \lambda^2 \Delta)^{-1} h),$$

Следовательно, временно вводя ультрафиолетовое обрезание t , мы можем написать

$$e^{-(1/2)\|h\|_{2,\lambda}^2} \lambda Z_{g,h;L,T}^p = \lim_{t \rightarrow 0} \int dm_t(A) Z_{g;L,T}^p(A-a(h)) e^{\tilde{E}_{L,T}^t}, \quad (7.38)$$

где $Z_{g;L,T}^p(A)$ — статистическая сумма полей материи во внешнем поле A . Из диамагнитного неравенства и его доказательства (теорема 2.6 и лемма 2.9) следует, что $Z_{g;L,T}^p(A)$ есть непрерывный предел положительно-определенных функций от операторов голономии $e^{\int_A \mathcal{L}}$. Следовательно,

$$\left| \int dm_t(A) Z_{g;L,T}^p(A-a(h)) \right| \leq \int Z_{g;L,T}^p(A) dm_t(A), \quad (7.39)$$

и из (7.38) и устойчивого разложения вытекает, что

$$\left| Z_{g,h;L,T}^p \right| \leq \exp\left(\frac{1}{2}\|h\|_{2,\lambda}^2\right) Z_{g,0;L,T}^p. \quad (7.40)$$

Отметим, что $\|h\|_{2,\lambda}^2 \leq \|h\|_2^2$.

Чтобы понять, как появляются в (7.34) нормы $\|g\|_1$, $\|g\|_2$, нужно обратиться к лемме 7.7 и посмотреть на зависимость от δm^2 . Эта лемма говорит, что для больших $g(x)$ (например, ≥ 1)

$$\left| Z_{g_x;L,T}^p(A) \right| \leq O(e^{\text{const} \cdot g(x)^2}).$$

Подставляя эту оценку в устойчивое разложение, получим (ср. [29]) для $g(x)^2 \geq 1$

$$\left| Z_{g_x,0;L,T}^p(A) \right| \leq e^{\text{const} \cdot g(x)^2 LT} \quad (7.41)$$

(здесь для $Z_{g_x,0;L,T}^p$ мы также применили теорему 7.10).

С другой стороны, легко видеть, что $\log \left| Z_{g_x,0;L,T}^p \right|$ — выпуклая функция от $g(x)$, и, следовательно, для $|g(x)| \leq 1$ (см. [29])

$$\left| Z_{g_x,0;L,T}^p \right| \leq e^{\text{const} \cdot |g(x)| LT} Z_{0,0;L,T}^p \quad (7.42)$$

Из этих двух фактов и вытекает (7.34). Для КЭД₂ применима аналогичная стратегия:

Лемма 7.13. Пусть

$$Z_{B;L,T}^{\text{ap}} = \det_{\text{ren}}(1 + K_F(A)) \langle \exp(\psi, B\psi) \rangle_F(A),$$

где $\langle \cdot \rangle_F(A)$ обозначает среднее по фермионным полям во внешнем калибровочном поле (в предположении что оно ограничено и непрерывно по Гёльдеру). Тогда

$$\left| Z_{B;L,T}^{\text{ap}}(A) \right| \leq \exp\left(\frac{1}{M} \|B\|_1\right). \quad (7.43)$$

Доказательство. Мы можем написать

$$\begin{aligned} Z_{B; L, T}^{\text{ap}}(A) &= \det_{\text{ren}}(1 + K_F + G_F B) \\ &= \det_{\text{ren}}(1 + K_F(A)) \cdot \det(1 + K_F G'_F B) \\ &= \det_{\text{ren}}(1 + K_F(A)) \cdot \det\left(1 + \sum_{i=1}^N g_i G'_F f_i\right). \end{aligned} \quad (7.44)$$

Первый множитель ≤ 1 , второй множитель в силу хорошо известного неравенства $|\det(1 + A)| \leq \exp\|A\|_1$ ограничен величиной

$$\exp\left(\frac{1}{M}\|B\|_1\right) = \exp\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^N\|f_i\|_2\|g_i\|_2\right).$$

Снова надо подставить это в устойчивое разложение. Как и в случае модели Хиггс₂, получим

$$e^{-(1/2)\|h\|_2^2} \lambda Z_{B; h; L, T}^{\text{ap}} = \lim_{t \rightarrow 0} \int dm_t(A) Z_{B; h; L, T}^{\text{ap}}(A - a(h)) e^{E_{L, T}^t}.$$

По лемме 7.13 выражение под знаком предела ограничено величиной

$$\int dm_t(A) e^{(1/M)\|B\|_1} e^{E_{L, T}^t} = e^{(1/M)\|B\|_1 + E_{L, T}^t}. \quad (7.45)$$

Подстановка этой оценки в устойчивое разложение дает

$$|Z_{f, g, h; L, T}^{\text{ap}}| \leq e^{(1/2)\|h\|_2^2 + (1/M)\|B\|_1 + b + cLT} \quad (7.46)$$

(здесь также применяется теорема 7.10). Это и есть доказываемая оценка. \square

Теперь мы хотим внимательнее изучить постоянную c из теоремы 7.10. Наша цель — показать, что ее можно выбрать следующим образом:

$$c = \lim_{L, T \rightarrow \infty} \frac{1}{LT} \log Z_{L, T}^X \equiv \alpha_\infty^X \leq \alpha_\infty^{(a)p}. \quad (7.47)$$

Для $X = (a)p$ это следует непосредственно из шахматной оценки и того факта, что $(Z_{L, T}^{(a)p})^{1/LT}$ в существенном убывает по L и T .

Для $X = F$ это можно доказать методом из работы [18], состоящим в простом применении неравенства Шварца к скалярному произведению Остервальдера — Шрадера (и теоремы Рее — Шлидера [47]) и дающим неравенство, которое может быть названо «шахматной оценкой для свободных г. у.». Тем самым мы получаем следующую теорему:

Теорема 7.14. В модели Хиггс₂

$$\log |Z_{g, h; L, T}^X| \leq \alpha_\infty^X (LT - 1) + a (\|g\|_2^2 + \|g\|_1) + \frac{1}{2} \|h\|_2^2 + c. \quad (7.48)$$

В модели КЭД₂

$$\log |Z_{B, h; L, T}^X| \leq \alpha_\infty^X (LT - 1) + \frac{1}{M} \|B\|_1 + \frac{1}{2} \|h\|_2^2 + c \quad (7.48')$$

для $X = (a) p, F$, при условии что носители функций g и B лежат в единичном квадрате Δ . (Это, конечно, означает, что носители функций g_i, f_i лежат в Δ , если $B = \sum_{i=1}^N f_i \otimes g_i$.)

Из этой теоремы вытекает не зависящая от объема оценка нормированных средних:

Следствие 7.15. В модели Хиггс₂

$$\left| \left\langle e^{i\phi | \cdot |^2 : (g)+F(h)} \right\rangle_{L, T}^X \right| \leq e^{(1/2) \|h\|_2^2} e^{a (\|g\|_2^2 + \|g\|_1) - \alpha_\infty^X + c}, \quad (7.49)$$

в модели КЭД₂

$$\left| \left\langle e^{i\bar{\psi}, B\psi + F(h)} \right\rangle_{L, T}^X \right| \leq e^{(1/2) \|h\|_2^2} e^{(1/M) \|B\|_1 - \alpha_\infty^X + c} \quad (7.49')$$

для $X = (a) p, F$; у g и B носители лежат в Δ .

Доказательство. Это вытекает из теоремы 7.14 и зависящих от объема оценок статистических сумм. \square

Тем же методом получается

Следствие 7.16. В модели Хиггс₂

$$\left| \left\langle e^{i\phi | \cdot |^2 : (g)+F(h)} \right\rangle_{L, T}^X \right| \leq c_0 e^{(1/2) \|h\|_2^2} e^{a (\|g\|_1 + \|g\|_2^2)} e^{(-\alpha_\infty^X + c) |\text{supp } g|}, \quad (7.50)$$

в модели КЭД₂

$$\left| \left\langle e^{i\bar{\psi}, B\psi + F(h)} \right\rangle_{L, T}^X \right| \leq c_0 e^{(1/2) \|h\|_2^2} e^{(1/M) \|B\|_1} e^{(-\alpha_\infty^X + c) |\text{supp } B|} \quad (7.50')$$

для $X = (a) p, F$.

В модели Хиггс₂ можно с помощью одного весьма простого приема избавиться от неприятной зависимости от носителя.

Рассмотрим на $\bar{\mathbb{R}}^+ = [0, \infty)$ функцию

$$F(t) \equiv \log \left| \left\langle e^{i\phi^2 : (g)t + F(h)} \right\rangle_{L, T}^X \right|. \quad (7.51)$$

Непосредственно видно, что она непрерывна и выпукла на $[0, \infty)$ и $F(0) \leq (1/2) \|h\|_2^2 + \log c_0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} F(t) \leq a (\|g\|_1 + \|g\|_2^2).$$

Из этих свойств вытекает, что

$$F(t) \leq ta (\|g\|_1 + \|g\|_2^2) + \frac{1}{2} \|h\|_2^2 + \log c_0. \quad (7.52)$$

Если положить (ср. [29])

$$\| \|g\| \| \equiv \sum \|g\chi_\Delta\|_2, \quad (7.53)$$

где Δ пробегает покрытие плоскости \mathbb{R}^2 единичными квадратами, то мы видим, что

$$\left| \left\langle e^{i\phi^2 : (g) + F(h)} \right\rangle_{L, T}^X \right| \leq c_0 e^{(1/2)\|h\|_2^2 + a\| \|g\| \|^2 + a}, \quad (7.54)$$

поскольку $\| \|g\| \| \geq \|g\|_1$, $\| \|g\| \|^2 \geq \|g\|_2^2$ и $1 + \| \|g\| \|^2 \leq \max \times (\| \|g\| \|, \| \|g\| \|^2)$. С помощью аналогичного приема можно исключить также множитель $c_0 e^a$.

Для модели КЭД₂ надо использовать другие соображения. При помощи неравенства Коши можно вывести из (7.50) оценку

$$\left| \left\langle \prod_{i=1}^N \bar{\psi}(g_i \chi_{\Delta_i}) \prod_{j=1}^N \psi(f_j \chi_{\Delta_j}) e^{F(h)} \right\rangle_{L, T}^X \right| \leq c_0 a^N e^{(1/2)\|h\|_2^2} \prod_{i=1}^N \|g_i \chi_{\Delta_i}\|_2 \prod_{j=1}^N \|f_j \chi_{\Delta_j}\|_2. \quad (7.55)$$

Разлагая экспоненту $e^{(\bar{\psi}, B\psi)}$ и используя соотношение

$$(\bar{\psi}, B\psi) = \sum_{i=1}^N \bar{\psi}(g_i) \psi(f_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{\Delta, \Delta'} \bar{\psi}(g_i \chi_\Delta) \psi(f_i \chi_{\Delta'}),$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
 \left| \langle e^{(\bar{\psi}, B\psi) + F(h)} \rangle_{L, T}^X \right| &\leq c_0 e^{\frac{1}{2} \|h\|_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \\
 &\times \sum_{\sum n_{i\Delta\Delta'} = n} \frac{n!}{\prod_{i, \Delta, \Delta'} n_{i\Delta\Delta'}!} \|g_{i\Delta\Delta'}\|_2^{n_{i\Delta\Delta'}} \|f_{i\Delta\Delta'}\|_2^{n_{i\Delta\Delta'}} \\
 &= c_0 e^{(1/2)\|h\|_2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \left(\sum_{i, \Delta, \Delta'} \|g_{i\Delta\Delta'}\|_2 \|f_{i\Delta\Delta'}\|_2 \right)^n \\
 &\leq c_0 e^{(1/2)\|h\|_2^2} \exp \left[a \sum_{i=1}^N \| \|g_i\| \|f_i\| \right] \quad (7.56)
 \end{aligned}$$

с $\| \cdot \|$, определенной в (7.53).

Окончательно мы имеем следующие оценки, не зависящие от объема:

Теорема 7.17. В модели Хиггс₂

$$\left| \langle e^{:\phi|^2 : (g) + F(h)} \rangle_{L, T}^X \right| \leq e^{(1/2)\|h\|_2^2 + a \|g\|^2}, \quad (7.57)$$

в модели КЭД₂

$$\left| \langle e^{(\bar{\psi}, B\psi) + F(h)} \rangle_{L, T}^X \right| \leq c_0 e^{(1/2)\|h\|_2^2} \exp \left[a \sum_{i=1}^N \| \|g_i\| \|f_i\| \right] \quad (7.57')$$

для $X = (a) p, F$.

Замечания. 1. В [29] при помощи подобных методов, а также корреляционных неравенств оценка (7.57) доказана и для $X = D_M$. Ее можно также вывести из приведенных выше доказательств, используя один аналог шахматной оценки, справедливый для г. у. Дирихле, и тот факт, что периодическое «давление» α_{∞}^p мажорирует все «давления» α_{∞}^X с другими г. у. (ср. (7.30)).

2. Теми же методами нетрудно доказать, что для модели Хиггс₂

$$\left| \langle e^{\phi(f) + \bar{\phi}(g) + F(h)} \rangle_{L, T}^X \right| \leq c e^{(1/2)\|h\|_2^2 + (1/m^2)\|f\|_2\|g\|_2}, \quad (7.58)$$

а для модели КЭД₂

$$\left| \langle e^{j_{\mu}(a_{\mu}) + F(h)} \rangle_{L, T}^X \right| \leq e^{(1/2)\|h\|_2^2 + b \|a\|_2^2}, \quad (7.59)$$

где $j_{\mu} = : \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi :$.

3. В силу неравенства Коши, из (7.57) и (7.57') вытекает, что для модели Хиггс₂

$$\left| \left\langle \prod_{i=1}^k : |\phi|^2 : (g_i) \prod_{j=1}^l F(h_j) \right\rangle_{L, T}^X \right| \leq c^{k+l} (kl l!)^{1/2} \prod_{i=1}^k \|g_i\| \prod_{j=1}^l \|h_j\|_2^2, \quad (7.60)$$

а для модели КЭД₂

$$\left| \left\langle \prod_{i=1}^k (\psi(f_i) \bar{\psi}(g_i)) \prod_{j=1}^l F(h_j) \right\rangle_{L, T}^X \right| \leq e^{2k+l} (l!)^{1/2} \prod_{i=1}^k (\|f_i\| \|g_i\|) \prod_{j=1}^l \|h_j\|_2^2. \quad (7.60')$$

Неравенства (7.60), (7.60') показывают, что выполняется нулевая аксиома Остервальдера—Шрадера [4], а именно некая оценка умеренности плюс некое условие роста (по k, l) функций Швингера. Следует, однако, отметить, что реконструкция релятивистской теории поля точно также может быть основана непосредственно на неравенствах (7.57), (7.57').

4. Отметим еще одно следствие неравенств (7.57), (7.57'): они позволяют получить равномерную оценку для средних значений «струн»

$$S(C_{xy}) \equiv \bar{\phi}(x) e^{\int_{C_{xy}}^A} \phi(y) \quad (7.61)$$

или

$$S(C_{xy}) \equiv \bar{\psi}(x) e^{\int_{C_{xy}}^A} \psi(y), \quad (7.61')$$

где C_{xy} — (кусочно-гладкий) путь из x в $y \neq x$. Для модели Хиггс₂ увидеть это совсем легко; для КЭД₂ нужно подставить начальный отрезок разложения по теории возмущений (итерированные уравнения для резольвенты) оператора G'_F в формулы Мэттьюза — Салама (6.28):

$$G'_F = G_F + \tilde{K}G_F + \tilde{K}G_F\tilde{K}G_F + (\tilde{K}G_F)^3 + \tilde{K}G_F\tilde{K}G'_F(\tilde{K}G_F)^2, \quad (7.62)$$

где

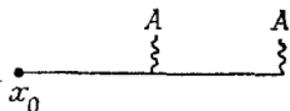
$$\tilde{K} = (\hat{D} + M)^{-1} \hat{A}.$$

После всего, что мы уже доказали, первые четыре слагаемых в (7.62) оцениваются тривиально; что касается последнего слагаемого, то нетрудно видеть, что

$$\int (\tilde{K}G_F \tilde{K}G'_F (\tilde{K}G_F)^2)(x_0, y_0) dm(A)$$

есть среднее значение произведения $\psi(f_{x_0, A}) \bar{\psi}(g_{y_0, A})$, где функции $f_{x_0, A}$, $g_{y_0, A}$ лежат в L^2 при почти каждом A и

$$\int \|f_{x_0, A}\|_2^2 dm(A), \quad \int \|g_{y_0, A}\|_2^2 dm(A) < \infty.$$

Графически $f_{x_0, A}$ соответствует графу , т. е.

$$f_{x_0, A} = \int G_F(x_0, x') \hat{A}(x') G_F(x', x) \hat{A}(x) dx'$$

и т. п.

В последнем разделе мы опишем схему реконструкции, основанную на средних значениях «струн» и аналогичных калибровочно-инвариантных нелокальных объектов.

с. Термодинамический предел; проверка аксиом

Существуют две общие стратегии перехода к термодинамическому пределу. Одна основана на монотонности по объему (корреляционные неравенства), другая, более конструктивная, — на кластерном разложении.

Для модели Хиггс₂ в отношении корреляционных неравенств дела обстоят удачно, однако кластерное разложение для нее до сих пор не построено. Оно могло бы быть очень полезным, но его построение никоим образом не является тривиальным, по крайней мере в «хиггсовском» режиме. Для КЭД₂, напротив, мы не знаем никаких корреляционных неравенств, но мы дадим сейчас набросок того, как построить в этой модели кластерное разложение. Оно должно также работать и для модели Хиггс₂ в режиме типа КЭД: $e/m \ll 1$, $\lambda/m^2 \ll 1$.

Сначала нам придется кое-что сказать об эвклидовой ковариантности. Наши состояния во внешнем калибровочном поле были эвклидово-ковариантны в том смысле, что они были инвариантны относительно общего эвклидова сдвига калибровочного поля и наблюдаемых; как было показано в разделе 6, этот факт не нарушается в решеточном случае.

Но при обрезании мер калибровочного поля эвклидова ковариантность нарушилась из-за выделения временного направления. Значит, надо показать, что после перехода к пределу при $t \rightarrow 0$ это направление перестает быть выделенным.

То что это так, весьма правдоподобно, поскольку

1) нарушение эвклидовой ковариантности происходит только у высших моментов;

2) из сходимости устойчивого разложения следует, что эти высшие моменты вносят произвольно малый вклад.

Фактически доказательство основано на такой идее.

Пусть $D_{\mu\nu}^{0,t}$ — ковариация, соответствующая повороту направления, в котором произведено обрезание, на угол θ , $\langle \cdot \rangle_{t,\theta}$ — соответствующее этому обрезанию среднее значение. Справедлива следующая

Теорема 7.19. Для полиномиальной или экспоненциальной наблюдаемой P

$$\lim_{t \rightarrow 0} \{Z_{t,\theta} \langle P \rangle_{t,\theta} - Z_{t,0} \langle P \rangle_{t,0}\} = 0. \quad (7.63)$$

Доказательство. Введя интерполирующее поле $A(s)$ с ковариацией $sD_{\mu\nu}^{0,t} + (1-s)D_{\mu\nu}^{0,t}$, мы можем записать разность в (7.63) как

$$\int_0^1 ds \int dm_t(A) \int d\mu_{A(s)} KP, \quad (7.64)$$

где K имеет такой же вид, как и в пункте а. Но теперь KP — очень малая наблюдаемая, если t мало, и можно показать, что выражение (7.64) стремится к нулю как t^α , где $\alpha > 0$. Дальнейшие подробности см. в [29]. \square

Теперь о термодинамическом пределе. Сначала с помощью корреляционных неравенств докажем следующую теорему:

Теорема 7.20. В модели Хиггс₂ для произвольной последовательности прямоугольников $\Lambda_n \nearrow \mathbb{R}^2$, $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle e^{-|\phi|^2:(g)+F(h)} \rangle_{\Lambda_n}^{DM}$$

существует и не зависит от последовательности (Λ_n) .

Доказательство. Из корреляционных неравенств пункта 2d вытекает, что $\langle e^{-|\phi|^2:(g)+F(f)} \rangle_{\Lambda}^{DM}$ является убывающей функцией объема Λ , в предположении что $g \geq 0$. В силу оценки (7.55) семейство целых функций на \mathbb{C}^3

$$\{F_n(z_1, z_2, z_3)\} \equiv \left\{ \langle e^{z_1 F(h) + |\phi|^2:(z_2 g_+) - |\phi|^2:(z_3 g_-)} \rangle_{\Lambda_n}^{DM} \right\}$$

является нормальным семейством, и в предположении, что $g_+, g_- \geq 0$, а h вещественна, оно сходится при $z_2 \leq 0$, $z_3 \geq 0$ и вещественных z_1 . Значит, по теореме Витали, оно сходится всюду (это соображение заимствовано из работы Фрелиха [40]).

Эта сходимость равномерна на компактных множествах, и предел не зависит от последовательности (Λ_n) . \square

Следствие 7.21. $\langle e^{-|\phi|^2:(g)+F(h)} \rangle$ эвклидово-инвариантно.

Следствие 7.22. Для функций Швингера в бесконечном объеме

$$g_{m+n}(g_1, \dots, g_m; h_1, \dots, h_n) \equiv \left\langle \prod_{k=1}^m :|\phi|^2:(g_k) \prod_{j=1}^n (iF(h_j)) \right\rangle$$

выполнены все аксиомы Остервальдера — Шрадера, кроме, быть может, аксиомы кластерности.

Доказательство следствия 7.21. Это вытекает из теоремы 7.19 и независимости предела от последовательности (Λ_n) . \square

Доказательство следствия 7.22. 0. Нулевая аксиома, состоящая в требовании некоторой умеренности роста, следует из (7.59).

1. Симметричность очевидна.

2. Эвклидова инвариантность вытекает из следствия 7.21.

3. Положительность по Остервальдеру — Шрадеру устанавливается с помощью решеточной аппроксимации (здесь нужно соблюдать известную осторожность при обращении с рассматриваемой гауссовской мерой, см. [28]). \square

То, что мы построили, в действительности пока еще не соответствует модели Хиггс₂ из-за наличия «фотонной массы» λ . Ее также можно исключить с помощью корреляционных неравенств. Действительно, когда λ^2 убывает, трансверсальная часть ковариации $D_{\mu\nu}$ возрастает; продольная же часть к делу не относится ввиду калибровочной инвариантности взаимодействия между полями материи и калибровочными полями.

Таким образом, в силу корреляционных неравенств пункта 2d, $\langle e^{-:|\phi|^2:(g)+F(h)} \rangle$ убывает при $\lambda^2 \rightarrow 0$ (для $g \geq 0$), и нам нужна только оценка сверху.

Это нетривиально, потому что при $\lambda^2 \rightarrow 0$ ковариация $D_{\mu\nu}$ становится плохо определенной из-за инфракрасной особенности. Причины, по которым оценку сверху всё же удастся получить, состоят в следующем: 1) благодаря корреляционным неравенствам можно перейти к конечному ящику; 2) там опасная нулевая мода ковариации $D_{\mu\nu}$ является изолированной и не взаимодействует с другими в силу тождества Уорда (т. е. в силу калибровочной инвариантности взаимодействия). Этот замечательный факт служит намеком на действие механизма Хиггса, ответственного, как предполагается, за образование массовой цепи. За подробностями довольно хитроумного доказательства отсылаем читателя к [29]. Мы же просто формулируем теорему:

Теорема 7.23. Пределы при $\lambda^2 \rightarrow 0$ функций Швингера, указанных в следствии 7.22, существуют и удовлетворяют всем

аксиомам Остервальдера — Шрадера, за исключением, возможно, аксиомы кластерности.

З а м е ч а н и е. Для получения кластерного разложения, которое полностью вскрыло бы механизм Хиггса указанием на существование массовой щели, требуется (по крайней мере в хиггсовском режиме) глубокое понимание роли, которую играют классические решения (инстантоны) — в данном случае так называемые вихри [49, 50] — или, по меньшей мере, топологические возмущения, лежащие «близко» от этих вихрей. Это — важная проблема, решение которой может пролить некоторый свет на роль классики и топологии также в других калибровочных квантовых теориях поля.

Обратимся теперь к КЭД₂ и дадим набросок кластерного разложения для этой модели. Оно даст нам аксиомы Вайтмана плюс существование массовой щели для калибровочно-инвариантных локальных полей. Непрерывные кластерные разложения были введены Глиммом, Джаффе и Спенсером [38] и применены к фермионным моделям (Юкава₂) Магнетом и Сенеором [46], Купером и Розеном [39] и другими. Эти разложения вписываются также вполне естественно в общую полимерную схему, развитую в разделе 3 (ср. [51, 52]). Они вообще хорошо работают в теориях, которые являются слабыми возмущениями массивных свободных (т. е. гауссовских) моделей.

В непрерывном случае невозможно построить разложение по всем связям, связывающим пары точек, ребер и т. д. Вместо этого используется тот факт, что свободные средние полностью характеризуются функциями Грина (ковариациями); если заменить их модифицированными функциями Грина, в которых различные квадраты (кубы, гиперкубы) покрытия пространства \mathbb{R}^d не взаимодействуют, то соответствующие возмущенные гауссовские средние также не будут связаны.

Этого можно достичь, например, выбором нулевых граничных условий Дирихле на границах квадратов (кубов, гиперкубов). Если отождествить каждую грань квадрата и т. д. с ребром двойственной решетки, то становится очевидным, как имитировать кластерное разложение раздела 3. Погрешность разложения определяется разностью между модифицированной и исходной функциями Грина; полимерами будут связные множества ребер двойственной решетки, или, что эквивалентно, связные множества граней квадратов (кубов, ...) первоначального покрытия.

Чтобы активность $z(\gamma)$ такого полимера γ была малой величиной порядка $e^{-b|\gamma|}$ (b велико), нужно, чтобы

1) разность между средними для взаимодействующего и невзаимодействующего случаев была малой; это условие выполняется, если лежащая в основе свободная теория имеет большую массу, т. е. сильное экспоненциальное убывание;

2) рассматриваемая теория была близка к гауссовской.

Размеры покрытия выбираются так, чтобы сделать сходимость наилучшей.

Для модели КЭД₂ условия 1) и 2) выполнены, если $e/M \ll 1$, где e — заряд фермионного поля (т. е. константа калибровочного взаимодействия, обозначавшаяся ранее g или g_0).

Удобно изменить масштаб калибровочного поля: $A \mapsto eA$. Такая замена переводит зависимость от e в свободном действии в зависимость от e в определителе. Имеем

$$\log \det_{\text{ген}} (1 + K_F(eA)) = \log \det_4 (1 + K_F(eA)) - e^2 \text{Tr}_{\text{ген}} K_F(A)^2. \quad (7.65)$$

След $\text{Tr}_{\text{ген}} K_F(A)^2$ можно явно вычислить (см., например, Чэллифур и Вейнгартен [26]):

$$\text{Tr}_{\text{ген}} K_F(A)^2 = \frac{1}{\pi} \int \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \overline{\hat{A}_\mu(k)} \hat{A}_\nu(k) T(k^2) d^2k, \quad (7.66)$$

где $(k \equiv \sqrt{k^2})$

$$T(k^2) = 1 - \frac{4M^2}{k(4M^2 + k^2)^{1/2}} \text{Arth} \frac{k}{(4M^2 + k^2)^{1/2}} \geq 0. \quad (7.67)$$

Отметим, что

$$T(k^2) = k^2/4M^2 + O(k^4) \quad \text{для малых } k^2,$$

$$T(k^2) = 1 - \frac{2M^2}{k^2} \log \frac{k^2}{M^2} + O(k^{-4}) \quad \text{для больших } k^2.$$

Введем новую гауссовскую меру $dm(F)$ для напряженности $F = \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu A_\mu$, добавляя квадратичный член, отвечающий $T(k^2)$ (это не существенно, но удобно); мера $dm(F)$ имеет среднее нуль и ковариацию $C(x)$, задаваемую формулой

$$\hat{C}(k) = \frac{k^2}{k^2 + T(k^2) e^2/\pi} \equiv G(k^2) \quad (7.68)$$

(чтобы прийти к этой формуле, мы полагаем «фотонную» массу λ равной нулю, так как здесь она не используется).

Легко видеть, что $G(k^2) \equiv \hat{C}(k)$ является аналитической функцией в области $|\text{Im} k^2| < 4M^2$, и, следовательно, по теореме Пэли — Винера [33] ковариация $C(x)$ в существенном убывает как $e^{-2M|x|}$. Чтобы отчетливее выявить аналитиче-

скую структуру, напишем (полагая $z = k^2/4M^2$)

$$\begin{aligned} T(k^2) &= 1 - \frac{1}{z} \sqrt{\frac{z}{1+z}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{z}{1+z}} \\ &= 1 + \frac{1}{2z} \sqrt{\frac{z}{1+z}} \log \frac{\frac{-z}{\sqrt{1+z}} + 1}{\frac{z}{\sqrt{1+z}} + 1}. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Теперь видно, что $G(k^2)$ является функцией Герглотца (т. е. имеет положительную мнимую часть в верхней полуплоскости) и допускает представление Леманна — Кэллена

$$G(k^2) = 1 - \int_{4M^2}^{\infty} d\rho(\mu^2) \frac{1}{\mu^2 + k^2} \quad (7.70)$$

с конечной положительной мерой $d\rho(\mu^2)$. Для $d\rho$ выполнены следующие интегральные условия:

$$\begin{aligned} \int_{4M^2}^{\infty} d\rho(\mu^2) &= \frac{e^2}{\pi}, \\ \int_{4M^2}^{\infty} d\rho(\mu^2) \frac{1}{\mu^2} &= \left(1 + \frac{e^2}{4\pi M^2}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

получаемые подстановкой в (7.70) значений

$$k^2 = \infty \text{ и } k^2 = 0.$$

Отметим, что, как и в безмассовой модели Швингера (см. (5.20)), гауссовское поле F с такой ковариацией является «положительным по Нельсону — Симанзику» (т. е. возникает из некоторой положительной меры), но рассматриваемое как обычное скалярное поле является отрицательным по Остервальдеру — Шрадеру! Так, конечно, и должно быть, потому что, как уже отмечалось ранее, физический смысл имеет поле $E = iF$.

В модели КЭД₂ полная мера для поля F (в области Λ) задается формулой

$$d\mu_{\Lambda}(F) = \frac{1}{Z_{\Lambda}} \operatorname{def}_4 (1 + eK_{F, \Lambda}(A)) dm_{\Lambda}(F), \quad (7.71)$$

где $K_{F, \Lambda}(A)$ определяется подстановкой в G_F нулевого граничного условия Дирихле на $\partial\Lambda$, а dm_{Λ} имеет ковариацию

$$C_{\Lambda}^D(x, y) \equiv \chi_{\Lambda}(x) \delta(x - y) - \int_{4M^2}^{\infty} d\rho(\mu^2) (-\Delta_{\Lambda}^D + \mu^2)^{-1}(x, y), \quad (7.72)$$

где $(-\Delta_\Lambda^D + \mu^2)^{-1}$ удовлетворяет нулевому граничному условию Дирихле на $\partial\Lambda$.

Для того чтобы показать, что мера dm_Λ , определенная равенством (7.71), в действительности совпадает с мерой dm_Λ , определенной ранее, требуются некоторые дополнительные рассуждения; это не очень трудно, но мы не хотим здесь тратить время на эту малоинтересную задачу.

В соответствии с нашей схемой нам следовало бы сделать ультрафиолетовое обрезание по t , но, как легко видеть (и по существу доказано в [26]), \det_4 можно однозначно определить как dm_Λ -измеримую функцию, устремляя t к нулю. Наше устойчивое разложение показывает фактически, что \det_4 лежит в L^1 . Более того, этот определитель калибровочно-инвариантен, что позволяет рассматривать $\det_4(1 + eK_{F, \Lambda}(A))$ как функцию от F .

Как отмечалось ранее, можно рассматривать калибровочно-инвариантные объекты типа «струн», включающие фермионы, которые здесь имеют следующий вид:

$$G'_F(C_{xy}; F) \equiv e^{\int_{C_{xy}} e A_\mu dx_\mu} G'_F(x, y; A). \quad (7.73)$$

Поток электромагнитного поля можно определить, как и для безмассовой модели Швингера, вводя внешний векторный потенциал a и беря функциональные производные. Например,

$$\langle e^{ie \int_\Lambda a_\mu} \rangle_\Lambda = \frac{1}{Z_\Lambda} \int \det_4(1 + K_{F, \Lambda}(A + a)) dm_\Lambda(F + f), \quad (7.74)$$

где $f = \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\mu a_\nu$.

Для определения G_F и G'_F , входящих в (7.73) и (7.74), использованы нулевые г. у. Дирихле; как (7.73), так и подынтегральное выражение в (7.74) можно рассматривать как функции от F .

Поэтому, начиная с этого места, мы ограничим наше обсуждение средними значениями наблюдаемых, являющихся функциями от F .

Для получения кластерного разложения возьмем покрытие области Λ единичными квадратами Δ и определим функции Грина, в которых разные квадраты не взаимодействуют. Чтобы исключить какое-либо беспокойство по поводу калибровочной инвариантности (нарушение которой могло бы испортить всю игру), мы используем нулевые г. у. Дирихле на границах наших единичных квадратов. Выбор г. у. Неймана дал бы более прямую аналогию с решеточным разложением, но эти условия не столь удобны для анализа, как г. у. Дирихле, в особенности для фермионов (см. Купер и Розен [39]).

Чтобы получить наше разложение, обозначим через $C^{\mathcal{B}}$, $G_F^{\mathcal{B}}$ функции Грина с нулевыми г. у. Дирихле на всех ребрах, не входящих в множество \mathcal{B} . Кроме того, положим

$$C(\mathbf{s}) \equiv \sum_{\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\Lambda} \prod_{b \in \mathcal{B}} s_b \prod_{b \notin \mathcal{B}} (1 - s_b) C^{\mathcal{B}}, \quad (7.75)$$

$$G_F(\mathbf{s}) \equiv \sum_{\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\Lambda} \prod_{b \in \mathcal{B}} s_b \prod_{b \notin \mathcal{B}} (1 - s_b) G_F^{\mathcal{B}}, \quad (7.75')$$

где \mathcal{B}_Λ — множество всех ребер, лежащих в Λ .

Отметим, что $C(0)$, $G_F(0)$ имеют нулевые г. у. Дирихле на всех квадратах, а $C(1)$, $G_F(1)$ являются функциями Грина для нулевых г. у. Дирихле только на $\partial\Lambda$.

Следующая формула представляет собой очевидное тождество (основная теорема дифференциального и интегрального исчисления!):

$$C(1) = \left(\sum_{\Gamma} \prod_{\gamma \in \Gamma} \prod_{b \in \gamma} \int_0^1 ds_b \frac{\partial}{\partial s_b} \right) C(\mathbf{s}_\Gamma); \quad (7.76)$$

здесь суммирование производится по всем множествам попарно-непересекающихся полимеров (связных множеств, состоящих из ребер двойственной решетки) в Λ и \mathbf{s}_Γ означает, что $s_b = 0$ для всех b , не принадлежащих никакому $\gamma \in \Gamma$. Конечно, аналогичная формула имеет место для G_F .

Если Γ есть объединение попарно-непересекающихся полимеров $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, то соответствующая статистическая сумма разлагается в произведение:

$$Z_\Gamma = \prod_{i=1}^n Z_{\gamma_i}. \quad (7.77)$$

Для «модифицированных статистических сумм» (ненормированных средних) дело обстоит аналогично, за исключением того, что все члены, пересекающие носитель наблюдаемой, объединяются в один полимер (наблюдаемые, содержащие C'_γ вроде (7.73), также не должны быть связаны).

Активности определяются теперь формулой

$$z(\gamma) \equiv \left(\prod_{b \in \gamma} \int_0^1 ds_b \frac{\partial}{\partial s_b} \right) Z_\gamma(\mathbf{s}_\gamma), \quad (7.78)$$

и аналогично определяются модифицированные активности:

$$z_P(\gamma) \equiv \left(\prod_{b \in \gamma} \int_0^1 ds_b \frac{\partial}{\partial s_b} \right) Z_\gamma(\mathbf{s}_\gamma) \langle P \rangle_{\mathbf{s}_\gamma}. \quad (7.79)$$

Как и в разделе 3, мы получаем

$$\langle P \rangle_{\Lambda} = \sum'_X z_P^X \frac{a(X)}{X!}, \quad (7.80)$$

где \sum' обозначает суммирование по всем мультииндексам (кластерам), связанным с P и линейным по P .

Как мы видели в разделе 3, для доказательства равномерной (по Λ) и абсолютной сходимости разложения (7.80) нужно только установить оценку

$$|z_P(\gamma)| \leq ce^{-b|\gamma|} \quad (7.81)$$

с достаточно большим b .

Для доказательства (7.81), как и в случае устойчивого разложения, воспользуемся интегрированием по частям, чтобы оценить

$$-\frac{\partial}{\partial s_b} Z_{\gamma}(s_{\gamma}) \langle P \rangle_{s_{\gamma}} \equiv \frac{\partial}{\partial s_b} \int d\mu_{s_{\gamma}}(F) P. \quad (7.82)$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial s_b} Z(s_{\gamma}) \langle P \rangle_{s_{\gamma}} = \int d\mu_{s_{\gamma}}(F) K_b P,$$

где на языке диаграмм, использовавшемся ранее,

$$\begin{aligned} K_b \leftarrow & \frac{\delta}{\delta F} \text{---}' \frac{\delta}{\delta F} + \frac{\delta}{\delta \psi} \text{---}' \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} \\ & + \frac{\delta}{\delta F} \text{---}' \begin{array}{c} \bar{\psi} \\ \diagup \\ \psi \end{array} + \begin{array}{c} \bar{\psi} \\ \diagdown \\ \psi \end{array} \text{---}' \frac{\delta}{\delta F} + \begin{array}{c} \bar{\psi} \\ \diagup \\ \psi \end{array} \text{---}' \begin{array}{c} \bar{\psi} \\ \diagdown \\ \psi \end{array} \\ & + \begin{array}{c} \bar{\psi} \\ \diagdown \\ F \end{array} \text{---}' \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\delta}{\delta \psi} \text{---}' \begin{array}{c} \psi \\ \diagup \\ F \end{array} + \dots \end{aligned} \quad (7.83)$$

Здесь $\text{---}'$ означает $\frac{\partial}{\partial s_b} C(s_{\gamma})$, а $\text{---}'$ означает

$$\frac{\partial}{\partial s_b} G_F.$$

В последнем слагаемом виновское упорядочение производится одновременно по отношению к фермионам и «фотонам»; для фермионов виновское упорядочение производится по отношению к свободной функции Грина, и для «фотонного» поля F — по отношению к полю с ковариацией C или по отношению к белому шуму. Это виновское упорядочение возникает из-за того, что мера содержит \det_1 , и оно исключает все опасные (расходящиеся или условно сходящиеся) диаграммы.

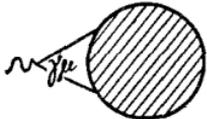
Фермионы в вершине \succsim можно считать виновски упорядоченными (формально их виновская добавка равна нулю).

Нужно сделать важное замечание о вершине  F .

Как уже отмечалось, ей соответствует слагаемое

$$:\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi: (\varepsilon_{\mu\nu}\Delta^{-1}\partial_{\nu}F),$$

которое выглядит опасным из-за дальнего действия. Причина, по которой здесь тем не менее всё хорошо, кроется в калибровочной инвариантности. А именно, $:\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi:$ будет всегда связано с некоторыми другими фермионами, что приведет к сходящейся фейнмановской диаграмме (все потенциально опасные диаграммы включены в ковариацию поля F) вида

 $\equiv f_{\mu},$

для которой выполнено условие

 $= \partial_{\mu}f_{\mu} = 0. \quad (7.84)$

Но последнее означает (поскольку, в силу наших граничных условий, гармонических слагаемых в разложении Ходжа нет), что

$$f_{\mu} = \varepsilon_{\mu\nu}\partial_{\nu}g,$$

так что подозрительно выглядящий член Δ^{-1} в этой вершине всегда сокращается. Конечно, его присутствие существенно для получения хороших теорем типа счёта степеней, т. е. конечных диаграмм.

Это коротенькое обсуждение показывает, что калибровочная инвариантность в форме тождеств Уорда является решающей для возникновения массы в этой модели.

Оценка величины

$$Z_P(\gamma) = \int d\mu_{s_{\gamma}} \left(\prod_{b \in \gamma} K_b \right) P \quad (7.85)$$

проводится теперь способом, хорошо известным в конструктивной теории поля и с точностью до некоторых деталей напоминающим устойчивое разложение. Производные, входящие в K_b , делают величину (7.85) малой по двум причинам:

$$\prod_{b \in \mathfrak{B}} \frac{\partial}{\partial s_b} C(s_{\gamma})(x, y) \quad \text{и} \quad \prod_{b \in \mathfrak{B}} \frac{\partial}{\partial s_b} G_F(s_{\gamma})(x, y)$$

экспоненциально малы по $|\mathcal{B}|$ и экспоненциально убывают с увеличением расстояния точек x и y от множества \mathcal{B} .

За необходимыми оценками производных функций Грина, которые далеко не тривиальны, а также за другими, комбинаторными оценками мы отсылаем читателя к прекрасной статье [39].

Оценить (7.81) удается при условии, что e мало, а M велико. Ввиду масштабной ковариантности важно лишь отношение e/M . (Чтобы убедиться в этом, нужно проварьировать размер квадратов покрытия.) Постоянная b будет порядка $2M$, так как наши наблюдаемые являются четными функциями фермионных полей.

Надеюсь, что теперь становится понятным, как могло бы быть доказано следующее утверждение:

Квазитеорема 7.24. В модели КЭД₂ при малом e/M для полей iF , j_μ выполнены все аксиомы Остервальдера—Шрадера, включая аксиому кластерности. Существует массовая щель порядка $2M$.

Замечания. 1. Отметим, что разложение не работает вблизи тривиального швингеровского предела ($M \rightarrow 0$). Было бы интересно выяснить, что здесь происходит. По-видимому, здесь работает другой механизм возникновения массы. К сожалению, теория возмущений по параметру M является чересчур сингулярной (в противоположность ситуации, исследованной в [13]), как можно понять, рассмотрев хотя бы \mathcal{C} : оно ведет себя как $M^2 \log M$.

2. θ -состояния могут быть определены с помощью добавления к лагранжиану обычного члена $i\theta \int F$. Динамика такой системы будет зависеть от θ (ср. [13]).

3. Петли Вильсона, соответствующие дробным зарядам, удовлетворяют закону площадей (как можно показать, используя кластерное разложение); в случае же безмассовой модели Швингера для них выполнен закон периметра.

4. Структура частиц не вполне ясна. Если бы точка ветвления функции $G(k^2)$ вносила дополнительный вклад в полную двухточечную функцию, то можно было бы предположить, что в модели нет удержания, но экранированные фермионы существуют как частицы. Очевидно, эти вопросы нуждаются в дальнейшем исследовании.

5. По-видимому, кластерное разложение рассмотренного выше типа работает и в модели Хиггс₂, но только в «нехиггсовской» области, когда e^2/m^2 мало (m^2 — положительный массовый член для поля Хиггса) и внутреннее взаимодействие является слабым. Тем самым остается открытым вопрос о поведении модели в хиггсовской области. Решеточная

теория не дает какой-либо информации о фазовом переходе между этими двумя областями.

Здесь мы закончим наше изучение методов построения непрерывных калибровочных теорий. Как мы увидели, достигнутые до сих пор успехи весьма ограничены. Первоначальный план удалось довести до конца (т. е. до аксиом Вайтмана или Остервальдера — Шрадера) лишь в размерности два и для абелевой калибровочной группы. Мы попытались тем не менее показать, что многие промежуточные результаты имеют более общую природу и что намечается прогресс в изучении теорий, далеких от плоского двумерного мира [9, 16].

При построении неабелевой модели, такой как КХД для $d = 2$ или 3 (смею ли я упомянуть о $d = 4$?), возникает, однако, другая проблема, которую нельзя преодолеть за счет одной высокой техники доказательства оценок. Она состоит в том, что отсутствует достаточное число полей, для которых можно ожидать выполнения аксиом Вайтмана. Поэтому представляется естественным поискать более широкие рамки, более приспособленные к специальным свойствам калибровочных теорий. Этому предмету и посвящен последний раздел книги.

8. ОБЩИЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫХ ОБЪЕКТОВ

Хотя в некоторых случаях и удастся, как мы видели, показать, что калибровочно-инвариантные локальные поля удовлетворяют аксиомам Вайтмана, всё равно эти аксиомы не являются, по-видимому, самой естественной базой для теорий типа КХД. Мы уже видели при обсуждении скейлинг-предела, что удобнее всего работать с средними значениями от объектов типа петель Вильсона. Следует подчеркнуть, что нелокальные калибровочно-инвариантные объекты гораздо ближе по духу к тому, что требуется в теории удержания. Так, калибровочно-инвариантная струна

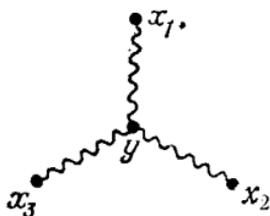
$$S(C_{xy}) = \bar{\psi}(x) \text{Re} \int_A^{xy} \psi(x) \quad (8.1)$$

(изображаемая графически в виде $x \bullet \text{~~~~~} \bullet y$) представляется естественным кандидатом для описания рождения мезонов. Конечно, предполагается, что вильсоновы петли имеют отношение к рождению глюонов (если они существуют) и, возможно, также мезонов, так как состояния $S(C_{xy})\Omega$ и $W(C)\Omega$, вообще говоря, не ортогональны.

Существует также естественный кандидат для описания рождения барнионов в КХД-теории (разумеется, с цветовой группой $SU(3)$):

$$B(C_{x_{1y}}, C_{x_{2y}}, C_{x_{3y}}) = \psi_a(x_1) \psi_b(x_2) \psi_c(x_3) \times \left(P e^{\int_{aa'}^i A} \right) \left(P e^{\int_{bb'}^i A} \right) \left(P e^{\int_{cc'}^i A} \right) \epsilon_{a'b'c'}, \quad (8.2)$$

где индексы относятся к цветовому пространству. Графически B можно представить в виде «звезды»



Если допустить, что мы научились строить эвклидовы средние в непрерывном пределе от таких объектов, например с помощью скейлинг-предела, или решая уравнение Швингера — Дайсона, или любым другим способом [54], перед нами неизбежно встает вопрос: а что это означает? Определяет ли это какую-либо квантово-полевую теорию? Можем ли мы таким образом описать рассеяние частиц?

Различные вопросы такого рода поставлены в работе [55], и мы хотим привести здесь некоторые соображения, каким образом можно было бы дать в сущности положительные ответы на эти вопросы, при условии что мы готовы сделать подходящие предположения (которые, во всяком случае, правдоподобны) относительно средних значений.

Следует подчеркнуть, что это — общая схема, которая может быть пригодна также и для других «теорий поля» нелокальных объектов, таких как «теория дуальной струны» [56, 57] или некоторые «модели мешка» [58].

Чтобы не усложнять обозначений, я буду всё явно формулировать только для петель Вильсона. Иногда я буду говорить, что нужно изменить, если мы хотим иметь дело со «струнами» или «звёздами», но в основном всё переносится на эти случаи без изменений.

а. Предположения

Эти предположения носят довольно сложный технический характер, и вообще к ним следует подходить критически и не считать их незыблемыми (именно потому мы и не называем их аксиомами). Главное то, что существуют предположения, не являющиеся неразумными и позволяющие до-

вести до конца конструкции, которые мы сейчас представим. Вероятно, подобные результаты можно получить и при более общих предположениях, однако ценой гораздо большего числа человеко-часов.

В принципе каждая петля Вильсона имеет некий индекс τ , указывающий тип представления группы, но я буду его опускать. Всегда предполагается, что петли по меньшей мере кусочно-гладки. Назовем

$$S_n(C_1, \dots, C_n) = \left\langle \prod_{i=1}^n W(C_i) \right\rangle \quad (8.3)$$

n-петлевой функцией Швингера.

Вот наши предположения относительно S_n , грубо говоря, параллельные аксиомам Остервальдера — Шрадера [4]:

- (S0) Технические предположения.
- (S1) Симметричность.
- (S2) Эвклидова инвариантность.
- (S3) Положительность по Остервальдеру — Шрадеру.
- (S4) Кластерность.

З а м е ч а н и е. Если имеются «барионные операторы» («звёзды»), то, конечно, (S1) должно быть видоизменено в соответствии с ферми-статистикой.

Теперь сформулируем более подробно эти предположения и объясним, почему мы считаем их правдоподобными.

(S0): а) $S_0 = 1$, S_n определено для кусочно-гладких петель.

б) В некоторой подходящей топологии S_n непрерывно зависит от C_1, \dots, C_n . В случае $d = 4$ такой топологией могла бы быть следующая.

Определим на множестве параметризованных петель функцию расстояния с помощью формулы

$$d(x(\cdot), x'(\cdot)) = \|x - x'\|_2 + \|\dot{x} - \dot{x}'\|_2 + \|\ddot{x} + \ddot{x}'\|_2, \quad (8.4)$$

где точка обозначает производную по s . В случае когда петли имеют точки излома, последний член в (8.4) интерпретируется так: если $\ddot{x} - \ddot{x}'$ содержит δ -функцию, то по определению $d(x(\cdot), x'(\cdot)) = \infty$.

Если теперь отождествить кривые $x(\cdot)$ и $x'(\cdot)$, совпадающие как множества точек (запись: $x(\cdot) \sim x'(\cdot)$), то ясно, что множества $\{x(\cdot) \mid x(\cdot) \sim x_0(\cdot)\}$ замкнуты и поэтому определена фактортопология.

З а м е ч а н и я. 1. Причина выбора этой топологии состоит в следующем. В четырехмерной теории свободного электро-

магнитного поля (КЭД_{4,t}) можно явно построить петлевые средние. Формально

$$\log \langle W(C) \rangle = - \int_C dx^\mu \int_C dy^\nu D_{\mu\nu}(x-y). \quad (8.5)$$

Для того чтобы это выражение было корректно определено, нужно произвести перенормировку, т. е. формально вычесть некоторую бесконечную константу (приближенно пропорциональную $|C|$). Но простая проверка показывает, что каждая точка излома делает необходимой сверхперенормировку, зависящую от величины угла излома. После перенормировки (8.5) не может быть непрерывной в топологии, в которой C^1 -гладкие петли сходятся к петлям с точками излома. Вот (8.4) и предотвращает это, и нетрудно видеть, что (8.5) (перенормированное) действительно обладает нужной непрерывностью (см. Поляков [54], Фрелих и др. [55]).

2. Если выбрать более сильную топологию, например потребовать, чтобы S_n было непрерывно лишь относительно эвклидовых движений петель как твердых тел, то в результате физическое гильбертово пространство (см. ниже) может стать неприемлемо большим (несепарабельным). Заметим, что с нашей топологией пространство петель сепарабельно.

3. Ввиду асимптотической свободы кажется правдоподобным, что эти рассуждения годятся также и для КХД₄-теории.

с) Пусть $C_i^{a_i t}$ — сдвиг петли C_i на вектор $a_i \in \mathbb{R}^d$ и $d_n(C_1^{a_1}, \dots, C_n^{a_n})$ — минимальное эвклидово расстояние в \mathbb{R}^d между этими петлями. Тогда существуют постоянные K_n, c_n, p , такие что

$$|S_n(C_1^{a_1}, \dots, C_n^{a_n})| \leq K_n \exp(c_n d_n^{-p}), \quad (8.6)$$

где p не зависит, а K_n и c_n могут зависеть от выбора петель (но, конечно, не от векторов a_1, \dots, a_n).

З а м е ч а н и е. Анализ примера КЭД_{d,t}-теории и соображения асимптотической свободы приводят к такому предположению: $p = 0$ при $d = 2$; p сколь угодно мало при $d = 3$; $p = 1$ при $d = 4$.

d) Выберем направление, называемое «временем», и определим временное расстояние d_t между любыми двумя петлями C, C' формулой

$$d_t(C, C') = \inf \{ |t - t'| \mid \exists (t, \vec{x}) \in C \text{ и } (t', \vec{x}') \in C' \}$$

(см. рис. 20). Тогда существуют «постоянные» $K_{C, \varepsilon}$ (т. е. функции от C и $\varepsilon > 0$), такие что

$$|S_n(C_1, \dots, C_n)| \leq K_{C_1, \varepsilon} \dots K_{C_n, \varepsilon}, \quad (8.7)$$

если $d_t(C_i, C_k) \geq \varepsilon$ для всех $i, k = 1, \dots, n$.

З а м е ч а н и я. 1. Разумеется, $K_{C, \varepsilon}$ будут расти при $\varepsilon \rightarrow 0$ со скоростью, описанной в с).

2. Оценка (8.7) выражает свойство типа кластерности; главное состоит в том, что $K_{C, \varepsilon}$ не зависят от n .

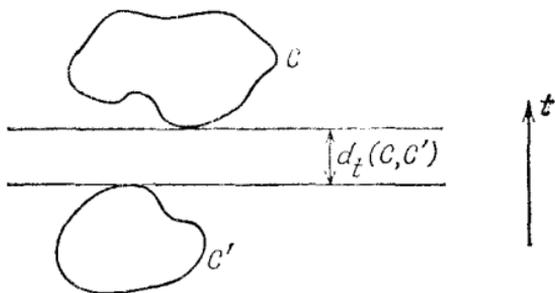


Рис. 20.

3. Для решетки оценка (8.7), конечно, выполнена. Если, как полагают, непрерывные петли Вильсона нуждаются только в индивидуальной мультипликативной перенормировке, то (8.7) выполняется.

4. Оценка (8.7) выполнена для КЭД_{d, f}-теории. Если верен механизм появления массы в КХД-теории, то (8.7) заведомо выполняется.

5. В скалярной теории поля оценка (8.7) соответствовала бы очень слабой форме ϕ -оценки и означала бы, что

$$e^{-\varepsilon H} \phi(x) e^{-\varepsilon H}$$

есть ограниченный оператор. Во всех существующих теориях справедливы гораздо более сильные оценки.

6. Оценка (8.7) выполняется (тривиально) для двумерных моделей, которые мы обсуждали выше. В этом случае $K_{C, \varepsilon} = \chi_\tau(\mathbb{1})$.

Условия (S1), (S2) не нуждаются в комментариях, за исключением одного уже сделанного замечания относительно ферми-статистики «звёзд» $B(C)$.

Условие (S3) хорошо известно, но мы всё же хотим дать точную формулировку. Пусть \mathcal{V}_{\neq} — векторное подпространство в алгебре полиномов $\mathbb{C}[\{W(C)\}]$, порожденное мономами, содержащими лишь невзаимодействующие петли. Тогда множество функций Швингера $\{S_n\}$ порождает линейный функционал S на \mathcal{V}_{\neq} .

Пусть \mathcal{V}_\pm — подпространство в $\mathcal{V} \neq \emptyset$, порожденное мономами, содержащими только петли, лежащие в $\mathbb{R}_\pm^d = \{(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^d \mid t \geq 0\}$, и пусть θ — антилинейное отображение \mathcal{V}_+ на \mathcal{V}_- , отражающее все петли относительно гиперплоскости $t = 0$ и заменяющее все коэффициенты на комплексно-сопряженные. Тогда (S3) означает, что

$$S(A\theta A) \geq 0 \quad \text{для любого } A \in \mathcal{V}_+, \quad (8.8)$$

а (S4) просто утверждает, что

$$\lim_{a \rightarrow \infty} S(AB^a) = S(A)S(B), \quad (8.9)$$

где B^a — сдвиг B на вектор $a \in \mathbb{R}^d$.

в. Реконструкция релятивистской квантовой механики

Этот пункт носит весьма общий характер. Здесь излагается теоретико-групповая теорема реконструкции, которая опирается лишь на предположения (S2) — (S4) (в действительности (S4) можно было бы даже ослабить). Ее легко обобщить на другие системы, описываемые в терминах евклидовых средних значений нелокальных объектов (например, на «модели мешка»).

Мы используем следующее определение:

Определение 8.1. *Релятивистская квантовая механика состоит из*

- 1) сепарабельного гильбертова пространства \mathcal{H} ;
- 2) выделенного вектора $\Omega \in \mathcal{H}$, называемого *вакуумным*;
- 3) непрерывного унитарного представления группы $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ (универсальной накрывающей для собственной ортохронной группы Пуанкаре), которое удовлетворяет *условию спектральности* (спектр генераторов трансляций P_μ лежит в замкнутом переднем световом конусе V_+) и для которого Ω является единственным инвариантным вектором.

Чтобы применить это определение к нашей ситуации, мы должны построить \mathcal{H} . Положим

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{V}_+ \mid S(A\theta A) = 0\}.$$

Тогда

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{V}_+ / \mathcal{N}}$$

— сепарабельное гильбертово пространство.

Это, конечно, стандартная вещь. Так же стандартно и непосредственно (см. [4]) с помощью неравенства Шварца и оценки (8.6) получается, что сдвиги вдоль положительного

направления оси времени индуцируют полугруппу положительных сжатий $\{T_t\}_{t \geq 0}$ в \mathcal{H} и что

$$T_t = e^{-tH}, \quad (8.10)$$

где $H \geq 0$. Кроме того, в \mathcal{H} действует унитарное и непрерывное (в сильной топологии) представление группы пространственных евклидовых движений (a, R) (т. е. подгруппы евклидовых движений пространства \mathbb{R}^d , отображающих гиперплоскость $t = 0$ в себя).

Таким образом, речь идет о бустах.

Рассмотрим подпространство $\mathcal{V}_{\alpha_0, \varepsilon}$ в \mathcal{V}_+ , порожденное мономами, содержащими только петли, лежащие в конусе раствора $\pi - 2\alpha_0$ с вершиной в точке $x_0 = (\varepsilon, \vec{0})$, симметричном относительно вращений вокруг оси времени (см. рис. 21).

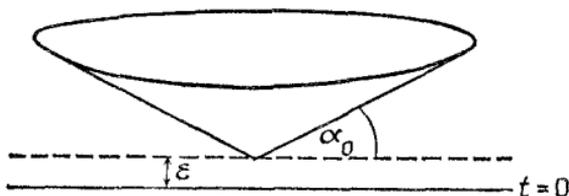


Рис. 21.

Этому подпространству соответствует некоторое подпространство $\mathcal{H}_{\alpha_0, \varepsilon}$ в \mathcal{H} , а так как $\{e^{-tH}\}$ продолжается до полугруппы, голоморфной в правой полуплоскости, то стандартные соображения, связанные с теоремой Рее — Шлидера [47], показывают, что $\mathcal{H}_{\alpha_0, \varepsilon}$ плотно в \mathcal{H} .

Имеется окрестность U единицы группы E_d евклидовых движений пространства \mathbb{R}^d , которая естественно действует на $\mathcal{H}_{\alpha_0, \varepsilon}$ и представляется линейными (возможно, неограниченными) операторами. Сосредоточим внимание на однопараметрической подгруппе $H \subset E_d$ вращений в двумерной плоскости, содержащей ось времени. Назовем H группой *мнимых бустов*.

Пусть, далее, $H_U \equiv H \cap U$.

Лемма 8.2. Группа H_U допускает представление в \mathcal{H} сильнонепрерывной локальной группой симметричных (неограниченных) операторов $\{P_\alpha\}_{|\alpha| < \alpha_0}$, определенных на $\mathcal{H}_{\alpha_0, \varepsilon}$.

Доказательство. Используя структуру группы E_d и инвариантность S , видим, что для $A, B \in \mathcal{V}_{\alpha_0, \varepsilon}$

$$S(A_\alpha \theta B) = S(A(\theta B)_{-\alpha}) = S(A \theta B_\alpha), \quad (8.11)$$

где A_α обозначает образ A при повороте на угол α ($|\alpha| < \alpha_0$).

Из (8.11) следует, что если $A \in \mathcal{A}^2 \cap \mathcal{Y}_{\alpha_0, \varepsilon}^2$, то $A_\alpha \in \mathcal{A}$. Действительно, если $S(A\theta B) = 0$ для всех $B \in \mathcal{Y}_{\alpha_0, \varepsilon}^2$, то

$$S(A_\alpha \theta B) = S(A\theta B_\alpha) = 0$$

для всех $B \in \mathcal{Y}_{\alpha_0, \varepsilon}^2$.

Таким образом, операторы P_α , соответствующие H_U , корректно определены в $\mathcal{H}_{\alpha_0, \varepsilon}$, а ввиду (8.11) они симметричны.

Сильная непрерывность непосредственно вытекает из группового свойства и симметричности P_α , а также из условия непрерывности (S0.b). \square

Теперь самое время привести одну замечательную теорему, которая в той форме, как она здесь будет использоваться, была получена Фрелихом [59]. Фактически ее можно вывести и из более старого результата Глазера [60]; другой ее вариант был доказан также Кляйном и Ландау [59].

Теорема 8.3. Рассмотрим полугруппу $\{P_t\}_{t \geq 0}$ линейных (возможно, неограниченных) операторов P_t в сепарабельном гильбертовом пространстве \mathcal{H} , которая обладает следующим свойством: существует плотное линейное подпространство \mathcal{D} в \mathcal{H} , такое что

1) для каждого $\varphi \in \mathcal{D}$ существует $\varepsilon(\varphi) > 0$, такое что φ лежит в области определения P_t для всех $t \in [0, \varepsilon(\varphi)]$ и, кроме того, $s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} P_t \varphi = \varphi$;

2) если $\varphi \in \mathcal{D}$ и $s, t, s+t \in [0, \varepsilon(\varphi)]$, то $P_s \varphi$ лежит в области определения P_t и

$$P_t P_s \varphi = P_{s+t} \varphi;$$

3) P_t симметричен для каждого $t \geq 0$.

Тогда операторы P_t допускают единственное самосопряженное расширение P_t и $\{P_t\}_{t \geq 0}$ есть полугруппа самосопряженных операторов в \mathcal{H} .

Отсюда немедленно вытекает

Следствие 8.4. Существует единственная группа самосопряженных операторов $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$, такая что P_α является расширением P_α при $|\alpha| < \alpha_0$.

З а м е ч а н и е. Группа $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ задает представление не самой подгруппы H , а ее универсальной накрывающей (изоморфной \mathbb{R}).

Теперь мы можем, конечно, аналитически продолжить группу $\{P_\alpha\}$. Запишем

$$P_\alpha \equiv e^{\alpha B} \quad (8.12)$$

(в действительности доказательство Фрѐлиха проводится путем построения оператора B) и назовем B генератором буста в выбранном направлении. Унитарные бусты определяются тогда как $e^{i\alpha B}$, и для того, чтобы явно выразить зависимость от направления, мы пишем

$$e^{i\vec{\alpha} \vec{B}}.$$

Разумеется, у нас имеются также унитарные сдвиги по времени e^{itH} , так что мы получаем кандидаты для унитарного представления каждого элемента $(\alpha, \Lambda) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$, беря соответствующие произведения трансляций, вращений и бустов.

Что пока не ясно — это имеем ли мы на самом деле представление. Легко видеть, что наши генераторы образуют самосопряженное представление алгебры Ли группы Пуанкаре. Однако хорошо известно, что для того, чтобы экспоненты образовывали представление группы, необходимы некоторые дополнительные условия (см. [61, 62]). Проверить эти условия трудно. Поэтому мы пойдем другим путем. Мы уже знаем, что имеется «смешанное локальное представление» группы E_d в \mathcal{H} , т. е. некоторая окрестность элемента $\mathbb{1} \in E_d$ допускает представление, вообще говоря, неограниченными операторами в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , имеющими область определения $\mathcal{V}_{\alpha, \varepsilon}$. Наш план состоит в том, чтобы с помощью аналитического продолжения закона группового умножения получить унитарное представление группы $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$. Это требует известной аккуратности, так как мы не можем произвольно продолжать по всем групповым параметрам.

Начнем с однородной подгруппы $SO(d)$ группы E_d .

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(d)$ — вещественная алгебра Ли группы $SO(d)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{o}(d-1)$ — ее подалгебра, соответствующая пространственным вращениям, и \mathfrak{m} — векторное подпространство в \mathfrak{g} , порожденное генераторами остальных вращений (которые выше были названы мнимыми бустами). Очевидно, что

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}. \quad (8.13)$$

З а м е ч а н и е. Соотношения (8.13) означают, что пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$, где σ равно -1 на \mathfrak{m} , $+1$ на \mathfrak{h} и линейно, образует так называемую симметрическую алгебру Ли (см. [63]).

Структура (8.13) необходима для любого аналитического продолжения представлений.

Если мы заменим в (8.13) \mathfrak{m} на $i\mathfrak{m}$, то получим соотношения, задающие другую вещественную алгебру Ли, называемую \mathfrak{g}^* . В нашем случае это $\mathfrak{o}(d-1, 1)$.

Нам понадобится несколько простых утверждений.

Предложение 8.5. Каждый элемент g из достаточно малой окрестности U единицы группы $SO(d) \cong G$ можно единственным образом представить в виде

$$g = \exp(tY) \exp(sX), \quad (8.14)$$

где $X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{m}$.

Замечание. Здесь мы записываем экспоненциальное отображение, как это принято у математиков (без i).

Доказательство. Если U достаточно мало, то g принадлежит ровно одному смежному классу (правой орбите) gH , где $H = SO(d-1)$.

G/H является главным расслоенным пространством (см. приложение) с канонической связностью [63]. Геодезические имеют вид $\{e^{\tau Y} H\}_{|\tau| \leq \varepsilon}$ ($Y \in \mathfrak{m}$). Если U достаточно мало, то существует ровно одна геодезическая $\{e^{\tau Y} H\}_{0 \leq \tau \leq t}$, которая соединяет точки $0 = 1H$ и gH и целиком лежит в U , причем (при фиксированном Y) значение t , для которого $e^{tY} H = gH$, определяется однозначно. Элемент $e^{-tY} g$ принадлежит H , и его можно записать в виде e^{sX} , где $X \in \mathfrak{g}$. \square

Чтобы не усложнять обозначений, мы в дальнейшем не будем различать элементы алгебры Ли и представляющие их операторы в гильбертовом пространстве \mathcal{H} .

Предложение 8.6. Подпространство $\mathcal{D} = \mathcal{H}_{\alpha_0, \varepsilon}$ состоит из аналитических векторов для операторов из \mathfrak{m} .

Доказательство. Это следует из того факта, что каждый вектор $\psi \in \mathcal{D}$ лежит в области определения операторов $e^{\pm tY}$ для всех $Y \in \mathfrak{m}$ и всех достаточно малых t . \square

Предложение 8.7. Существует плотное подпространство \mathcal{D}' , состоящее из аналитических векторов для всех $X \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathcal{D}$, τ — неприводимое унитарное представление группы H (конечномерное, так как H компактна) и P_τ — проектор в \mathcal{H} на подпространство этого представления. Мы утверждаем, что $P_\tau \psi$ — аналитический

вектор для всех $Y \in \mathfrak{m}$. Действительно, P_τ можно явно записать следующим образом (см. пункт 2b):

$$P_\tau \psi = d_\tau \int_H dh \chi_\tau(h^{-1}) h \psi, \quad (8.15)$$

где dh — нормированная мера Хаара на H . Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|Y^k P_\tau \psi\| &\leq \chi_\tau(\mathbb{1})^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|Y^k h \psi\| \\ &= \chi_\tau(\mathbb{1})^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|(\text{ad } h)(Y)^k \psi\|. \end{aligned}$$

Этот ряд сходится для достаточно малых t , поскольку ψ — аналитический вектор для операторов $\text{ad } h(Y)$. Очевидно, что $P_\tau \psi$ — целый аналитический вектор для операторов из \mathfrak{h} . \square

Теперь мы можем перейти к построению аналитического продолжения.

Пусть $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ — базис в \mathfrak{m} , $\{X_1, \dots, X_l\}$ — базис в \mathfrak{h} . Существует поликруг $P \subset \mathbb{C}^k$ с центром в 0, такой что отображения

$$\mathfrak{f}: P \rightarrow \mathbb{C}^k, \quad \mathfrak{g}: P \rightarrow \mathbb{C}^l,$$

выражающие (абстрактный) групповой закон умножения

$$e^{z_1 Y_1} \dots e^{z_k Y_k} = e^{\sum_{i=1}^k f_i Y_i} e^{\sum_{i=1}^l g_i X_i}, \quad (8.16)$$

голоморфны.

Если z_1, \dots, z_k — чисто мнимые числа, то \mathfrak{f} принимает чисто мнимые значения, а \mathfrak{g} — вещественные, так что (8.16) выражает также закон умножения в группе G^* (односвязной группе с алгеброй Ли \mathfrak{g}^*).

Теперь будем опять считать $\{X_i\}_{i=1}^l, \{Y_i\}_{i=1}^k$ линейными операторами в гильбертовом пространстве \mathcal{H} и выберем $\varphi, \psi \in \mathcal{D}'$. Рассмотрим две функции

$$F_I(z_1, \dots, z_k) \equiv (\varphi, e^{z_1 Y_1} \dots e^{z_k Y_k} \psi), \quad (8.17)$$

$$F_{II}(z_1, \dots, z_k) \equiv \left(\varphi, e^{\sum_{i=1}^k f_i Y_i} e^{\sum_{i=1}^l g_i X_i} \psi \right). \quad (8.17')$$

Прежде всего, оба эти выражения определены для малых вещественных z_1, \dots, z_k , и в этом случае они равны. Далее, F_I есть аналитическая функция от каждого z_i в вертикальной полосе

$$S_\varepsilon^{(i)} = \{z_i \in \mathbb{C} \mid |\text{Re } z_i| < \varepsilon\},$$

если только все остальные аргументы z_r ($r \neq i$) вещественны и малы.

Голоморфно отобразив эти полосы на горизонтальные полосы

$$\widehat{S}_\varepsilon^{(i)} = \{\omega_i \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} \omega_i| < 2\varepsilon\}$$

(с помощью композиции отображений tg , Arth и подходящим образом выбранного преобразования подобия), мы можем применить теорему Мальгранжа — Цернера — Стейна — Кунце [64] и получить аналитичность функции F_I (а следовательно, и F_{II}) в некотором поликруге \widehat{P} с центром в начале координат, который мы можем отождествить с P .

Если $(z_1, z_2, 0, \dots, 0) \in P$, то

$$F_I(z_1, z_2, 0, \dots, 0) = (e^{\bar{z}_1 Y_1 \varphi}, e^{z_2 Y_2 \psi}), \quad (8.18)$$

и в случае $z_1 = iy_1$, $z_2 = iy_2$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, мы получаем

$$F_I(iy_1, iy_2, 0, \dots, 0) = (e^{-iy_1 Y_1 \varphi}, e^{iy_2 Y_2 \psi}) = (\varphi, e^{iy_1 Y_1} e^{iy_2 Y_2} \psi). \quad (8.19)$$

Я утверждаю, что в P существует голоморфная (непрерывная вплоть до границы) кривая $\mathbf{z}(t)$ с любым вещественным $\mathbf{z}(0)$, удовлетворяющая условию

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}(t)) = e^t \mathbf{f}(\mathbf{z}(0)) \quad (8.20)$$

при $\operatorname{Re} t < 0$.

Доказательство. Действительно, из формулы Бэйкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа следует, что

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} + O(|\mathbf{z}|^2).$$

Поэтому в некоторой окрестности нуля отображение $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{z})$ обратимо, и наша кривая дается просто формулой

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{f}^{-1}(e^t \mathbf{f}(\mathbf{z}(0))). \quad (8.21)$$

Используя теорему 8.3 и равенство

$$F_I(\mathbf{z}(t)) = \left(\exp \left(e^t \sum_I f_i(\mathbf{z}_i(0)) Y_i \right) \varphi, \right. \\ \left. \exp \left(\sum_I g_i X_i \right) \psi \right) = F_{II}(\mathbf{z}(t)), \quad (8.22)$$

справедливое для $\varphi, \psi \in \mathcal{D}'$, мы можем аналитически продолжить F_I и F_{II} вдоль кривой $\mathbf{z}(t)$. Выбрав ее таким образом, чтобы

$$\mathbf{z}(i\pi/2) = (iy_1, iy_2, 0, \dots, 0),$$

или, что равносильно,

$$i\mathbf{f}(\mathbf{z}(0)) = \mathbf{f}(iy_1, iy_2, 0, \dots, 0),$$

мы получим

$$\left(\varphi, \exp \left(\sum_{j=1}^k f_j(iy_1, iy_2, 0, \dots, 0) Y_j \right) \right. \\ \left. \times \exp \left(\sum_{j=1}^l g_j(iy_1, iy_2, 0, \dots, 0) X_j \right) \psi \right) = \left(\varphi, e^{iy_1 Y_1} e^{iy_2 Y_2} \psi \right). \quad (8.23)$$

Так как \mathcal{D}' плотно в \mathcal{H} , то тем самым доказана возможность аналитического продолжения главной части группового закона умножения в G^* (мы предполагаем, что Y_1, Y_2 линейно-независимы, в противном случае всё тривиально).

Для того чтобы получить полный групповой закон умножения, нужно еще показать, что

$$e^X e^{iyY} e^{-X} = e^{iy \operatorname{ad}(e^X)(Y)} \quad (8.24)$$

для любых $X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{m}$. Это легко устанавливается аналитическим продолжением. Итак, мы получаем полный закон умножения в $SO(d-1, 1)$

$$e^{iy_1 Y_1} e^{X_1} e^{iy_2 Y_2} e^{X_2} = e^{iY(y_1, y_2; Y_1, Y_2)} e^{X(y_1, y_2; Y_1, Y_2, X_1, X_2)} \quad (8.25)$$

где $Y(\)$ и $X(\)$ — функции, задающие абстрактный закон умножения в G^* . Равенство (8.25) показывает, что мы имеем представление некоторой окрестности U групповой единицы. Разлагая «большие» элементы группы в произведение «малых» элементов, лежащих в U , и применяя (8.25), мы находим, что то же верно и для всей группы. Тем самым доказана следующая

Теорема 8.8. Существует действующее в гильбертовом пространстве \mathcal{H} унитарное представление собственной ортохронной группы Лоренца (или, точнее, ее универсальной накрывающей). Оно единственным образом определяется по представлению окрестности единицы $U \subset E_d$, индуцированному обычными евклидовыми движениями в $\mathcal{V}_{a_0, c}$.

Нам не хватает еще ковариантности сдвигов. Она устанавливается аналогичным образом, и даже чуть проще. Мы опустим доказательство (см. [55]). В результате получается

Теорема 8.9. Пусть P_μ ($\mu = 0, \dots, d-1$) — генераторы сдвигов, $P_0 = H$. Тогда для любого $\Lambda \in SO(d-1, 1)$ справедливо равенство

$$U(\Lambda)^* e^{i \sum_{\mu} a_{\mu} P_{\mu}} U(\Lambda) = e^{i \sum_{\mu\nu} a_{\mu} \Lambda_{\mu\nu} P_{\nu}} \quad (8.26)$$

Так как $P_0 = H \geq 0$, то из ковариантности (8.26) вытекает условие спектральности. Вакуумным вектором служит еди-

ничная функция, которая очевидным образом инвариантна. Единственность вакуума легко следует из условия кластерности (S4). Таким образом, мы проверили все свойства, требуемые в определении 8.1, и доказали следующую теорему:

Теорема 8.10. Из предположений (S2)—(S4) вытекает существование релятивистской квантовой механики.

с. «Функции Вайтмана» и их аналитичность

Чтобы выявить смысл предположения (S0.d), рассмотрим следующий оператор $W^{(e)}(C)$ в \mathcal{H} . Пусть C — петля в $\bar{\mathbb{R}}_+^d$, касающаяся гиперплоскости $t=0$ и имеющая в направлении

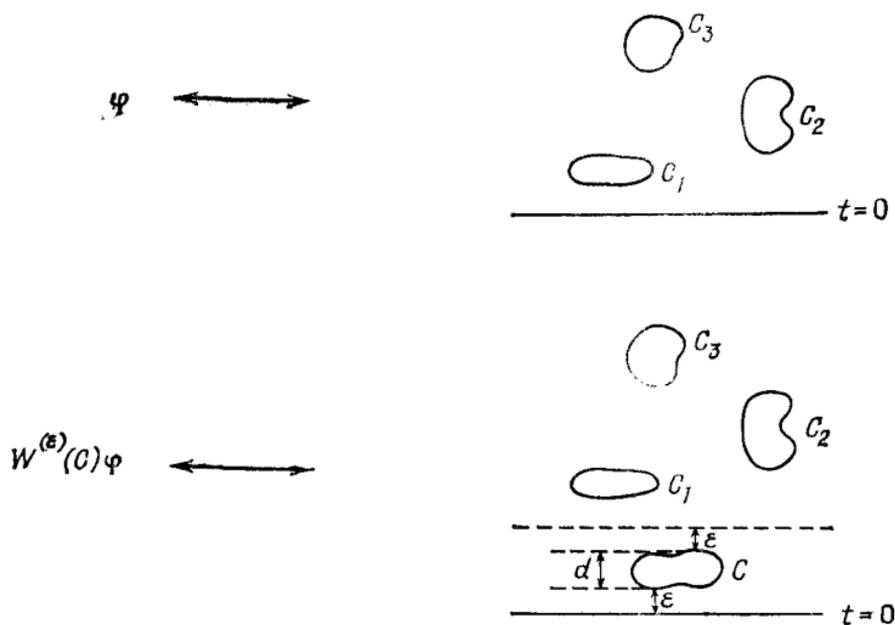


Рис. 22

оси времени размер d (рис. 22). Пусть φ — вектор из \mathcal{H} , определяемый мономом

$$\prod_{i=1}^n W(C_i) \in \mathcal{Y}_+, \quad \text{т. е.} \quad \varphi = \left[\prod_{i=1}^n W(C_i) \right].$$

Тогда по определению

$$W^{(e)}(C)\varphi \equiv \left[W(C^{(e, \vec{0})}) \prod_{i=1}^n W(C_i^{d+2e, \vec{0}_i}) \right] \quad (8.27)$$

(см. рисунок, который, пожалуй, понятнее формулы).

По линейности отображение $W^{(e)}(C)$ продолжается на $\mathcal{Y}_+/\mathcal{N}^e$. Справедлива

Лемма 8.11. $\|W^{(\varepsilon)}(C)\| \leq K_{C, \varepsilon}$.

Доказательство. Эта оценка легко получается с помощью многократного применения неравенства Шварца:

$$|(\varphi, W^{(\varepsilon)}(C)\psi)| \leq \|\varphi\| \|\psi\|^{1-2^{-2n}} (\psi, (W^{(\varepsilon)}(C))^* W^{(\varepsilon)}(C))^n \psi)^{1/2n},$$

а из условия (S0.d) следует, что при $n \rightarrow \infty$ верхний предел последнего множителя не превосходит $K_{C, \varepsilon}$. \square

(Строго говоря, сначала надо проверить ограниченность оператора $W^{(\varepsilon)}(C)$ на \mathcal{V}_+ , чтобы можно было корректно определить его как оператор в $\overline{\mathcal{V}_+/\mathcal{N}^0} = \mathcal{H}$.)

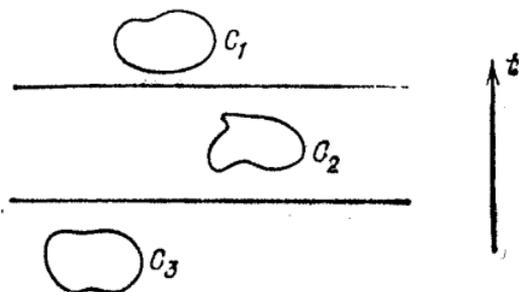


Рис. 23.

Пусть C_1, \dots, C_n — контуры, упорядоченные по времени и удовлетворяющие условию

$$d_t(C_{l-1}, C_l) > 0, \quad l = 2, \dots, n$$

(см. рис. 23). Мы определяем «функцию Вайтмана» следующим образом:

$$\mathcal{W}_{C_1, \dots, C_n}^{\rho}(z_1, \dots, z_n) \equiv S_n(C_1^{z_1}, \dots, C_n^{z_n}), \quad (8.28)$$

где

$$\tilde{z} = (iz_0, \vec{z}), \quad \text{если } z = (z_0, \vec{z}).$$

Из условия спектральности следует, что функция $\mathcal{W}_{C_1, \dots, C_n}^{\rho}(z_1, \dots, z_n)$ аналитична по z_1, \dots, z_n на множестве, где $\text{Im}(z_i - z_{i+1}) \in V_+, i = 1, 2, \dots, n-1$.

Заметим, что при индивидуальных однородных лоренцевых преобразованиях контуров C_1, \dots, C_n $\mathcal{W}_{C_1, \dots, C_n}^{\rho}$ преобразуется нетривиально. Вильсоновы петли содержат все (целые) спины (полуцелые спины появляются в случае «звёзд» $B(C)$). Их следует рассматривать как операторы, которые порождают целые траектории Редже, а не только одни частицы.

Имеет место некоторая совместная аналитичность операторнозначных функций типа

$$e^{i\vec{\alpha}\vec{B}} e^{i\alpha_\mu P_\mu} W^{(\varepsilon)}(C),$$

но подробный анализ этого вопроса завел бы нас слишком далеко.

Более важное обстоятельство состоит в том, что действия унитарных бустов на $W^{(\varepsilon)}(C)$ не портят аналитичность «функций Вайтмана»:

Лемма 8.12. Пусть C — контур, лежащий в гиперплоскости $t = 0$. Тогда билинейная форма

$$Q(\varphi, \psi) = (e^{\varepsilon H} e^{-i\vec{\beta}\vec{B}} e^{-\varepsilon H} \varphi, W^{(\varepsilon)}(C) e^{\varepsilon H} e^{-i\vec{\beta}\vec{B}} e^{-\varepsilon H} \psi), \quad (8.29)$$

определенная на $\mathcal{H}_{\varepsilon, 0} \times \mathcal{H}_{\varepsilon, 0}$, соответствует ограниченному оператору, норма которого не превосходит $K_{C, \varepsilon'}$, где $\varepsilon' = \varepsilon e^{-|\vec{\beta}|}$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon H} e^{-i\vec{\beta}\vec{B}} e^{-\varepsilon H} &= e^{\varepsilon H} (e^{-i\vec{\beta}\vec{B}} e^{-\varepsilon H} e^{i\vec{\beta}\vec{B}}) e^{-i\vec{\beta}\vec{B}} \\ &= e^{\varepsilon H} e^{-(\operatorname{ch} |\vec{\beta}|) \varepsilon H + (1/|\vec{\beta}|) (\operatorname{sh} |\vec{\beta}|) \varepsilon \vec{P} \cdot \vec{\beta}} e^{-i\vec{\beta}\vec{B}} \\ &= e^{\varepsilon (1 - e^{-|\vec{\beta}|}) H} e^{-\varepsilon \operatorname{sh} |\vec{\beta}| (H - (\vec{\beta}/|\vec{\beta}|) \cdot \vec{P})} e^{-i\vec{\beta}\vec{B}}. \end{aligned}$$

Последние два множителя ограничены, и поэтому утверждение леммы вытекает из равенства

$$e^{\varepsilon (1 - e^{-|\vec{\beta}|}) H} W^{(\varepsilon)}(C) e^{\varepsilon (1 - e^{-|\vec{\beta}|}) H} = W^{(\varepsilon')}(C), \quad (8.30)$$

где $\varepsilon' = e^{-|\vec{\beta}|} \varepsilon$. \square

З а м е ч а н и е. Билинейная форма (8.29) соответствует оператору $W^{(\varepsilon)}(C_{(\vec{\beta})})$, где $C_{(\vec{\beta})}$ — образ контура C при действии буста, сохраняющего гиперплоскость контура и имеющего параметр $\vec{\beta}$.

Это означает, что можно таким же образом, как и выше, определить «функции Вайтмана» для петель C_1, \dots, C_n , лежащих в произвольных пространственно-подобных гиперплоскостях пространства Минковского.

d. Граничные значения («обобщенные функции Вайтмана»)

Содержание этого пункта является ныне достаточно стандартным. Нужно лишь помнить, что поскольку из-за условия (S0.c) возможны сильные экспоненциальные сингулярно-

сти, то в качестве пространства пробных функций вместо пространства \mathcal{S} используется некоторое пространство более гладких функций.

Теорема 8.13. Пусть C_1, \dots, C_n — контуры, лежащие в пространственно-подобной гиперплоскости. Тогда граничные значения

$$\lim_{\substack{\eta_1, \dots, \eta_n \rightarrow 0 \\ \eta_i - \eta_{i+1} \in V_+ \\ i=1, \dots, n-1}} \mathcal{W}^{C_1, \dots, C_n}(x_1 + i\eta_1, \dots, x_n + i\eta_n)$$

существуют в смысле ультраобобщенных функций Джаффе (с индикаторной функцией $\omega(x)$, которая при $|x| \rightarrow \infty$ ведет себя как $|x|^{p/(p+1)}$, где p такое же, как в условии (S0.c)).

З а м е ч а н и е. Мы не хотим здесь вдаваться в теорию ультраобобщенных функций Джаффе. Всё, что нам нужно, это то, что в этой теории допустима сильная локализация, а именно для каждого открытого множества существует пробная функция с носителем в этом множестве. Подробности см. в [65].

Доказательство этой теоремы имеется в [55].

е. Локальность и теория рассеяния

Приводимый ниже результат о локальности — по существу непосредственное приложение метода Йоста [47], который доказал, что локальность вытекает из симметричности функций Вайтмана. Из-за протяженности контуров необходима, правда, некоторая дополнительная осторожность. Подробности см. в [55].

Теорема 8.14. Пусть C_1, C_2 — два контура, каждый из которых лежит в (своей) пространственно-подобной гиперплоскости, причем их выпуклые оболочки \bar{C}_1, \bar{C}_2 пространственно-подобны друг другу. Тогда соответствующие вильсоновы петли коммутируют.

З а м е ч а н и я. 1. Я полагаю, что смысл этого предложения ясен и без точного определения всех входящих в него слов.

2. Этот результат о локальности — не самое лучшее из того, что можно ожидать. Так, например, в нём ничего не говорится о парах контуров в гиперплоскости $t=0$, таких как на рис. 24, которые на самом деле также должны коммутировать. Однако и такого результата достаточно для теории рассеяния.

Идея доказательства. По условию все точки множества

$$D_{12} = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$$

представляют собой точки Йоста, и существует генератор буста $\vec{\beta} \cdot \vec{B}$, такой что

$$e^{\varepsilon \vec{\beta} \cdot \vec{B}} \in \begin{cases} V_+ & \text{при } \varepsilon > 0, \\ V_- & \text{при } \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь несколько некорректно определенную «функцию Вайтмана»

$$\mathcal{W}_{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_k, c_1, c_2, \tilde{c}_{k+1}, \dots, \tilde{c}_n}(z_1, \dots, z_k, 0, 0, z_{k+1}, \dots, z_n),$$

где

$$\text{Im}(z_i - z_{i+1}) \in V_+, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{Im} z_k \in V_+,$$

$$\text{Im} z_{k+1} \in V_-.$$

Применяя ко всем аргументам и контурам преобразование буста $e^{\varepsilon \vec{\beta} \cdot \vec{B}}$ и используя некоторые соображения комплексного

$t=0$

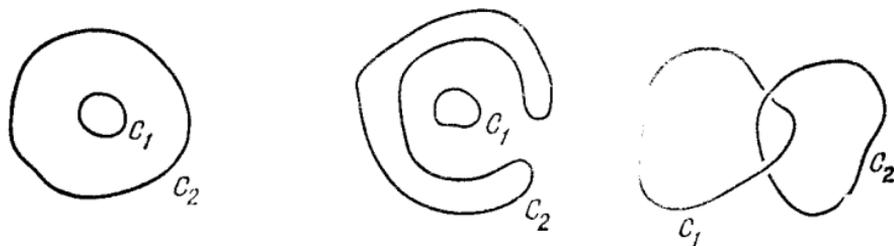


Рис. 24.

анализа (см. [55]), можно показать, что эта функция действительно аналитична. Если мы возьмем $\varepsilon > 0$, то C_1 будет стоять перед C_2 , а если $\varepsilon < 0$, то наоборот. Однако в силу лоренц-инвариантности функция не меняется под действием буста $e^{\varepsilon \vec{\beta} \cdot \vec{B}}$. Устремляя затем ε к нулю и используя непрерывность, мы видим, что можно переставить C_1 и C_2 . \square

Как уже было сказано, основная роль такой локальности заключается в том, что она приводит к быстрому убыванию усеченных функций Вайтмана в пространственно-подобных направлениях, и, следовательно, из теории Хаага — Рюэля вытекает существование сильных асимптотических пределов (in- и out-состояний), при условии что спектр энергии-импульса содержит изолированный однополостный гиперboloид («верхнюю массовую щель»). Поскольку это хорошо известно (см. [47, 66, 78]), мы лишь сформулируем результат:

Теорема 8.15. Если спектр (H, \vec{P}) содержит изолированный однополостный гиперboloид, то мы получаем сильную сходи-

мость асимптотических состояний и изометрических операторов Мёллера Ω^\pm . Соответствующая S -матрица $\Omega^+\Omega^{-*}$ является, вообще говоря, лишь частичной изометрией. Если известно, что рассматриваемая теория обладает асимптотической полнотой, то S -матрица является унитарным оператором.

Эта теорема, конечно, не слишком удовлетворительна, однако дело здесь обстоит не хуже, чем в обычной квантовой теории поля. Имеются методы доказательства существования верхней массовой щели [67, 76], и в принципе можно применить их и в нашей ситуации (наверное, полезно было бы попробовать их на решеточных калибровочных теориях). Ничего не могу сказать об асимптотической полноте, кроме того, что я надеюсь, мир не похож на «black flag roach motel» («the roaches check in, but they don't check out»)¹⁾.

В этом кратком обзоре мы хотели лишь показать, что динамика, основанная на калибровочно-инвариантных протяженных объектах, выглядит ничуть не менее разумной, чем динамика, основанная на обычной квантовой теории поля. И существует по крайней мере некоторая надежда, что в размерности $d = 4$ калибровочно-инвариантные объекты построить немного легче, чем квантовые поля.

¹⁾ Ловушка для тараканов фирмы Black Flag под названием «Тараканий мотель». «Тараканы прописываются, но не выписываются» — фраза из рекламного проспекта к ловушке. — Прим. ред.

ПРИЛОЖЕНИЕ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ
КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИИ

Характерной чертой калибровочных теорий является то, что в каждой точке p рассматриваемого пространственно-временного многообразия M имеется пространство внутренних симметрий \mathcal{Y} . Это либо группа Ли G (если мы имеем дело с самим калибровочным полем), либо векторное пространство, на котором действует группа G (если мы имеем дело с полями материи). Если взять некоторую открытую окрестность U точки $p \in M$, то пространство B , в котором «живут» поля, имеет вид прямого произведения $U \times \mathcal{Y}$. Это локальное разложение в прямое произведение называется локальной тривиализацией, или, на языке физиков, выбором калибровки. Для разных карт U и U' , таких что $U \cap U' \neq \emptyset$, нужна переходная функция $g_{U, U'}$, которая дает связь между калибровками в U и U' . Пусть $p \in U \cap U'$. Тогда точки $(p, f) \in U \times \mathcal{Y}$ и $(p, f') \in U' \times \mathcal{Y}$ представляют собой одну и ту же точку в B , если f и f' связаны между собой посредством $g_{U, U'}$. Атлас на M (т. е. покрытие открытыми множествами) вместе со всеми переходными функциями задает на B структуру расслоения; \mathcal{Y} называется его слоем, M — базой. Если $\mathcal{Y} = G$, то мы говорим о *главном расслоении*, если \mathcal{Y} — векторное пространство, — об *ассоциированном векторном расслоении*. Если M нестягиваемо, например имеет топологию сферы или тора, то B может оказаться не гомеоморфным прямому произведению $M \times \mathcal{Y}$. Тогда мы говорим, что расслоение B нетривиально. В нашем контексте такая ситуация возникает в случае так называемых (анти)периодических граничных условий. Это означает, что базовым многообразием M служит тор.

Понятие калибровочного поля геометрически соответствует понятию *связности* в главном расслоении. Связность дает правило выбора направления движения в расслоении B , если задано определенное направление в базе M . Можно сказать и по-другому: связность дает правило, как поднимать кривые из M в B , при условии что в B выбрана начальная точка. Ещё одно эквивалентное описание таково. Касательное пространство в данной точке расслоения B разлагается в прямую сумму касательного пространства к слою \mathcal{Y} (*вертикальные*

направления) и его алгебраического дополнения (*горизонтальные направления*), которое изоморфно касательному пространству в точке многообразия M . Связность — это просто (гладкий) выбор горизонтального подпространства в каждой точке. Это горизонтальное подпространство может быть получено как нуль-пространство некоторой одной формы ω , принимающей значения в алгебре Ли. Эта форма называется *формой связности*. Если задана локальная тривиализация, то форма ω задается равенством $\omega = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$, где $A = \sum A_\mu dx^\mu$, A_μ лежат в алгебре Ли, $g \in \mathcal{Y} = G$. (Более точно, $g^{-1}Ag + g^{-1}dg$ есть обратный образ формы ω , соответствующий локальной тривиализации $\varphi: U \times \mathcal{Y} \rightarrow B$, $U \subset M$.) На языке физиков компоненты A_μ называются векторным потенциалом Янга — Миллса.

Как правило, при поднятии замкнутая кривая в M не переходит в замкнутую кривую в B . Однако конечная точка лежит в том же слое, что и начальная точка \bar{p}_0 , и, следовательно определяет некоторый элемент $g_{\bar{p}_0}(C)$ группы G . Он называется *оператором голономии*, соответствующим C и \bar{p}_0 . Если локальная тривиализация (калибровка) выбрана таким образом, что $\bar{p}_0 = (p_0, \mathbb{1})$, то, пользуясь физическими обозначениями, можно написать

$$g_{\bar{p}_0}(C) = \mathbf{P} \exp \int_C A,$$

где \mathbf{P} обозначает траекторное упорядочение.

Если $g_{\bar{p}_0}(C)$ не равно тождественно $\mathbb{1}$, то мы называем связность нетривиальной. Если $g_{\bar{p}_0}(C) \neq \mathbb{1}$ для некоторой стягиваемой кривой C , то мы говорим, что связность обладает *кривизной*. *Форма кривизны* — это (горизонтальная) 2-форма на B со значениями в алгебре Ли группы G . Если выбрана локальная тривиализация, то она задается 2-формой F на M со значениями в алгебре Ли:

$$F = dA + \frac{1}{2} [A, A].$$

Компоненты F представляют собой янг-миллсовский *тензор напряженности*. Если $S(C)$ — гладкая поверхность, натянутая на кривую C , то

$$\exp \int_{S(C)} F \approx g_{\bar{p}_0}(C)$$

в главном порядке по $|S(C)|$. Если $g_{\bar{p}_0}(C) = \mathbb{1} \in G$ для всех C , то $F = 0$ и главное расслоение тривиально. С другой стороны, если $F = 0$, то $g_{\bar{p}_0}(C) = \mathbb{1}$ для всех стягиваемых замкнутых кривых C .

Поля материи определяются как *сечения* векторного или спинорного расслоения. Сечение — это просто гладкое соот-

ветствие, которое каждой точке $p \in M$ сопоставляет точку $\tilde{p} \in B$ таким образом, что в локальной тривиализации $\tilde{p} = (p, f)$. Поэтому локально сечение — это просто отображение M в \mathcal{Y} .

Важным является понятие плотности топологического заряда, которое выражается в терминах классов Черна. Классы Черна¹⁾ c_n определяются простым способом [90¹] с помощью равенства

$$\det \left(1 + \frac{\lambda}{2\pi} F \right) = \sum \lambda^n c_n,$$

так что

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} F, \quad c_2 = \frac{1}{8\pi^2} \operatorname{tr} F \wedge F.$$

Можно показать, что $\int_{M_{2n}} c_n$ — всегда целое число, если M_{2n} — компактное $2n$ -мерное подмногообразие без границы (т. е. $2n$ -цикл) в M . Число $\int_{M_{2n}} c_n$ называется *числом Черна* или топологическим зарядом.

Понятия главного расслоения, связности и кривизны можно уяснить на следующем простом «классическом» примере. Рассмотрим шар, который может катиться по поверхности M . Предположим, что на шаре нарисована некоторая сетка, позволяющая следить за его ориентацией. Конфигурационное пространство локально представляет собой прямое произведение пространства M и пространства ориентаций. Пространство ориентаций можно считать пространством ортонормированных реперов, прикрепленных к шару, и его можно отождествить с $SO(3)$. Таким образом, конфигурационное пространство можно рассматривать как главное расслоение B со слоем $SO(3)$ и базой M .

Связность определяется условием качения: перемещение шара вдоль заданной кривой определенным образом меняет его ориентацию. Эта связность нетривиальна. Кривизна F соответствует инфинитезимальным вращениям вокруг оси, проходящей через центр шара и точку контакта с M . Для плоской поверхности при «естественном» выборе калибровки

$$A = \frac{1}{R} (L_1 dx_2 - L_2 dx_1), \quad F = -\frac{1}{R^2} L_3 dx_1 dx_2,$$

где L_1, L_2, L_3 — стандартные антисимметричные генераторы группы $SO(3)$, а R — радиус шара. Мы предоставляем читателю найти для этого примера различные операторы голономий. К сожалению, в этом примере нет ненулевых чисел Черна.

¹⁾ = Чженя. — Прим. ред.

Введение

Все известные взаимодействия в Природе переносятся калибровочными полями. Открытие принципа калибровочной инвариантности — одно из самых великих достижений физики 20-го века.

Вместе с тем методы исследования калибровочных полей, которыми мы располагаем, оставляют желать лучшего. В первую очередь это касается теории адронов — квантовой хромодинамики (КХД). Мы ожидаем, что будущие калибровочные теории Великого Объединения (сильного взаимодействия с электро-слабым) и Суперобъединения (всех взаимодействий, включая гравитационное) также потребуют новых методов количественного описания.

Традиционные методы квантовой теории поля неотделимы от теории возмущений (см. [1]). Поля и вещество описываются наборами осцилляторов — квантов. Пространство квантовомеханических состояний поля содержит наряду с физическим (т. е. калибровочно-инвариантным) сектором множество нефизических состояний, которые описывают удаленные друг от друга «цветные» (т. е. неинвариантные) объекты — кварки, глюоны.

Взаимодействие осцилляторов приводит к кулоновским силам с логарифмическими поправками. Ни в каком порядке теории возмущений эти силы не приводят к удержанию цветных объектов. Мы ожидаем, что удержание происходит из-за глобальных квантовых эффектов, которые вообще не улавливаются формальной теорией возмущений.

Эффекты, приводящие к удержанию, напоминают мейсснер-эффект в сверхпроводнике, с той разницей, что вакуум КХД выталкивает не «магнитные», а «электрические» поля, т. е. поля от цветных зарядов, а не от цветных монополей. Выталкивание цветного электрического поля приводит к знаменитому закону постоянных сил: поле между зарядами сжимается в трубку, так что силы не убывают с расстоянием, как и в обычном конденсаторе.

В нашу задачу сейчас не входит подробное описание и обоснование этой стандартной картины, она описана во многих современных учебниках (см., например, [2]). Речь пойдёт о перестройке языка квантовой теории поля применительно к этому удивительному феномену и о первых результатах, полученных вне рамок теории возмущений.

1. Калибровочные теории на решётке

Прежде всего необходимо иметь *определение* калибровочной теории вне рамок теории возмущений. Использование обычного функционального интеграла с действием, пропорциональным квадрату напряжённости Янга — Миллса (и соответствующими членами калибровок и духов), подразумевает, что пространство состоит из плотно расположенных точек, а производные могут быть аппроксимированы конечными разностями. Во всяком случае, в каждом порядке теории возмущений такое решёточное приближение справедливо: при стремлении к нулю шага решётки можно вернуться к фейнмановским интегралам непрерывной теории.

Тем не менее оказалось, что такое доопределение неприемлемо, как и любое доопределение, в котором нет калибровочной инвариантности. Надо признать, что идеального определения мы до сих пор не имеем. Под идеальным определением подразумевается процедура предельного перехода, сохраняющая *все* свойства инвариантности.

Однако имеется определение, которое нарушает «только» симметрию пространства (глобальную $O(d)$ -симметрию), зато сохраняет калибровочную инвариантность. Это — решёточные калибровочные теории. Не будем останавливаться на технических деталях решёточных теорий, которые достаточно хорошо известны.

Существенным пунктом является появление новой степени свободы — дискретной переменной, соответствующей центру калибровочной группы. Например, в группе $SU(N)$ центр образован из элементов $\sigma \in Z(N)$ (т. е. $\sigma = I \cdot \exp(2\pi i n/N)$).

Появление новых степеней свободы связано с тем, что в качестве динамических переменных используются не элементы алгебры, а элементы самой группы. В наивном локальном пределе, когда матрицы, отвечающие рёбрам решётки, разлагаются в ряд около единичной матрицы:

$$g_{xy} \mapsto I + iA_{\mu}(x)(y_{\mu} - x_{\mu}),$$

переменные центра группы не появляются.

Какова роль этих переменных в явлении удержания кварков? Если оно целиком связано с этими переменными, то возникает проблема неоднозначности теории. Дело в том, что

существует бесконечно много альтернативных форм решёточного действия — с различными решёточными связями и с различными групповыми инвариантами, но с одним и тем же непрерывным пределом.

В частности, в рамках простейших связей (произведение матриц по периметру элементарной грани) можно составлять различные инварианты, вычисляя следы (т. е. характеры) этого произведения в различных представлениях группы.

Если взять суперпозицию двух членов, соответствующих фундаментальному (f) и присоединённому (A) представлениям:

$$S(\{g_{xy}\}) = -\operatorname{Re} \sum_p \beta_f \chi_f(g_{\partial p}) + \beta_A \chi_A(g_{\partial p}), \quad (1)$$

то, хотя в классическом непрерывном пределе это действие переходит в янг-миллсовское с соответствующей константой связи, можно опасаться, что в квантовой теории вне рамок теории возмущений сохранится зависимость от отношения β_f/β_A . Дело в том, что величина этого отношения влияет на роль Z_N -переменных, от которых зависит только χ_f , а χ_A не зависит (напомним, что $\chi_A = |\chi_f|^2 - 1$).

Смешанная теория (1) была достаточно подробно изучена. Имеются как теоретические оценки, так и различные вычисления методом Монте-Карло. В хорошем согласии между собой все эти оценки и вычисления привели к фазовой диаграмме, представленной на рис. 25.

Было проверено, что при достаточно больших β_f, β_A имеет место универсальность: физические величины (фактически вычислялось лишь натяжение струны, т. е. коэффициент при площади в экспоненте вильсоновой петли) зависят только от определённой комбинации β_f, β_A , т. е. от эффективной константы связи.

Что же касается роли переменных центра группы в явлении удержания кварков, то выяснилось следующее. В фазах сильной связи (малые β_f, β_A), действительно, эти переменные играют решающую роль. С заметной вероятностью введённая Макком и Петковой калибровочно-инвариантная величина

$$\operatorname{sign} \prod_{\text{cube}} \chi_f(g_{\partial p})$$

принимает отрицательное значение. Можно ввести плотность Z_N -монополей как долю конфигураций полей на решётке с отрицательным параметром Макка — Петковой. Эта величина «измерялась» в вычислениях по методу Монте-Карло.

Оказалось, что в фазе слабой связи ($\beta_f, \beta_A \rightarrow \infty$), которая нам и нужна в локальном пределе из-за асимптотической свободы, плотность Z_N -монополей (и Z_N -вихрей, определяемых аналогично, см. рис. 26, 27 и основной текст книги, стр. 24)

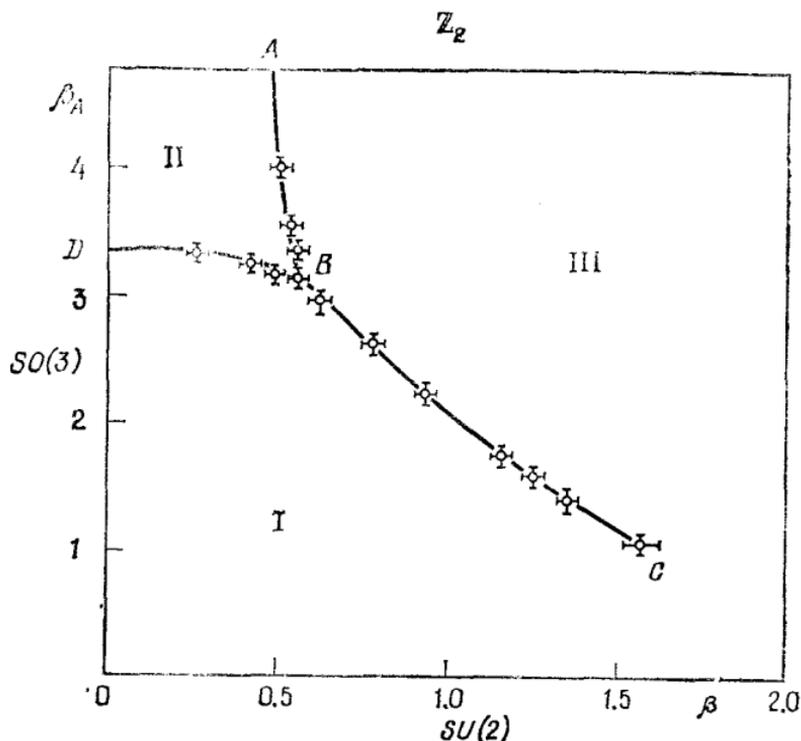


Рис. 25. Фазовая диаграмма решёточной калибровочной теории со смешанным $SU(2)$ - $SO(3)$ -действием. Римской цифрой I обозначена область, где плотности Z_2 -вихрей (E) и Z_2 -монополей (M) принимают значения $E \sim M \sim 0.5$; II — область, где $E \sim 0.5$, $M \sim 0$; III — область, где $E \sim M \sim 0$.

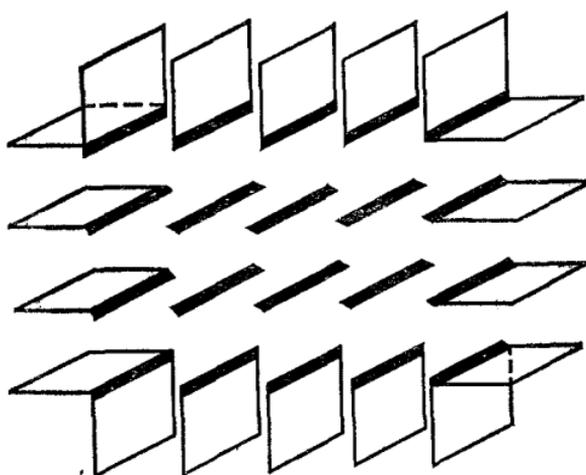


Рис. 26. Замкнутый Z_2 -вихрь на трёхмерной решётке. Обозначены ребра с $g_{xy} = -1$ и грани с $\text{sign tr } g_{\alpha\beta} = -1$.

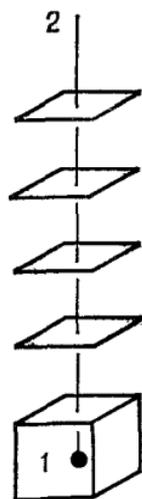


Рис. 27. Z -монополю на трёхмерной решётке; 1 — монополюный источник, 2 — дираковская струна, получающиеся при $a \rightarrow 0$.

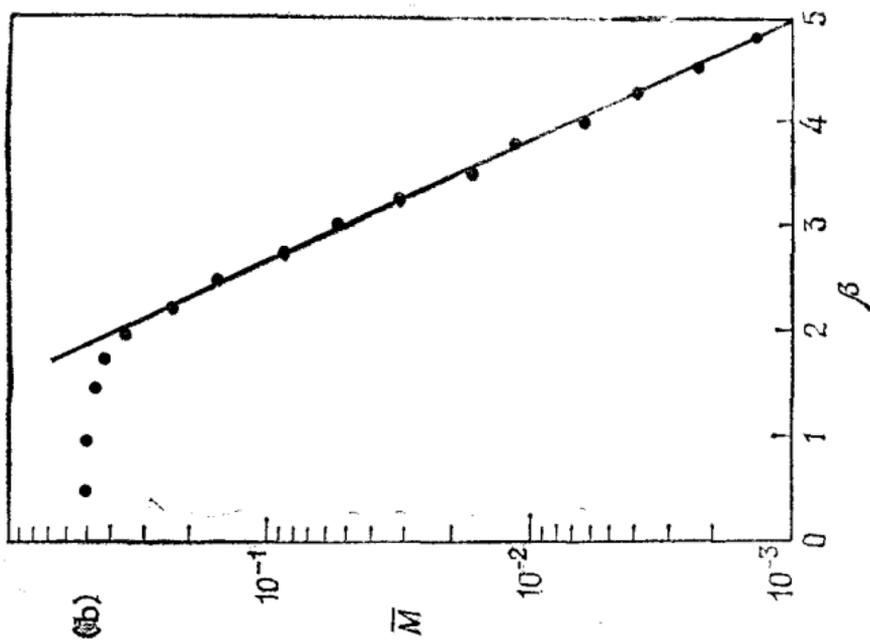
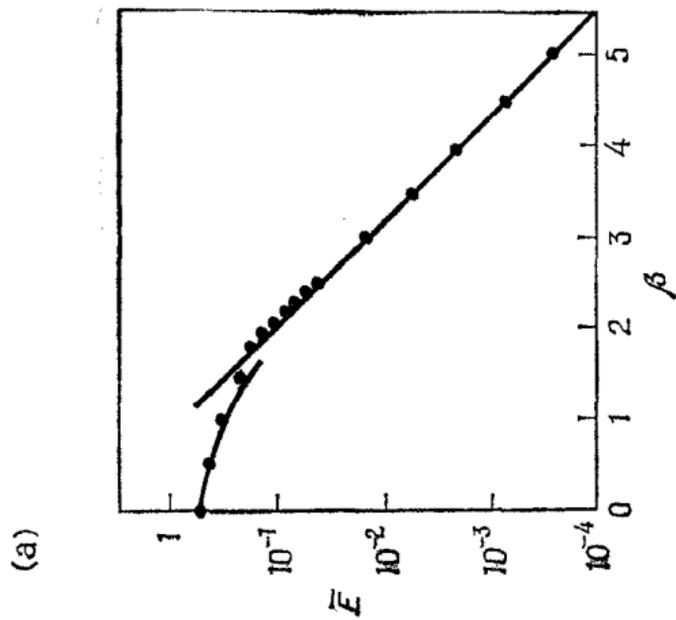


Рис. 28. Экспоненциальное убывание плотности (а) Z_2 -вихрей и (б) Z_2 -монополей в $SU(2)$ -решеточной калибровочной теории.

быстро убывает за линией фазового перехода 1-го рода (рис. 28). Таким образом, вихри и монополи «вымерзают» в интересующей нас фазе.

Вместе с тем явление удержания кварков сохраняется.

Натяжение струны не обращается в нуль при фазовых переходах в 4-мерных неабелевых теориях. По-видимому, в фазе слабой связи существенны конфигурации полей типа больших монополей с размерами, много большими шага решётки. На каждом ребре матрицы g_{xy} близки к 1 (с точностью до калибровочного преобразования), а переменные центра группы возникают в матрицах $g(c)$, отвечающих произведению g_{xy} по большому контуру. Именно потому, что такие матрицы $g(c)$ за много шагов вдоль контура хорошо «размещиваются» по компактному групповому многообразию $SU(N)$, соответствующая петля Вильсона столь быстро стремится к нулю при увеличении размера контура.

Если эти интуитивные представления верны, то должны существовать такие контуры C (возможно, с многократным обходом одной и той же замкнутой кривой), что соответствующая вильсонова петля отрицательна. (Для прямоугольных контуров нетрудно доказать положительность вильсоновой петли.)

Были бы интересны любые ограничения на знак вильсоновых петель сложной геометрии. Дело в том, что отрицательные вильсоновы петли нельзя получить в простейшей теории струны. Если же, как это часто предполагается, КХД эквивалентна теории струны, то отрицательные вильсоновы петли будут указанием на специфические свойства струны.

Вернёмся к проблеме универсальности решёточных калибровочных теорий. В общем случае под универсальностью подразумевается независимость корреляционных функций в локальном пределе от параметров решёточной теории. В частности, не должно оставаться зависимости от выбора направления пространственных осей решётки, так как должна иметь место полная пространственная симметрия, соответствующая группе $O(d)$.

В численных экспериментах была проверена пространственная симметрия в области слабой связи. На рис. 29 приведены эквипотенциальные поверхности взаимодействия тяжёлых кварков. Потенциал $V(R)$ определялся как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (-T^{-1} \ln W(C)),$$

где C — прямоугольник $R \times T$. Видно, как с ростом β вращательная симметрия быстро восстанавливается.

Приведённые рисунки взяты из обзора [3], в котором читатель сможет найти более подробное описание упомянутых

результатов и методов Монте-Карло в калибровочных теориях.

Итак, решёточные калибровочные теории в пределе слабой связи — это разумный подход к теории Янга — Миллса. Численные методы дают интересные результаты, но математическое обоснование однозначности теории пока нет. Это остаётся одной из самых важных нерешённых проблем.

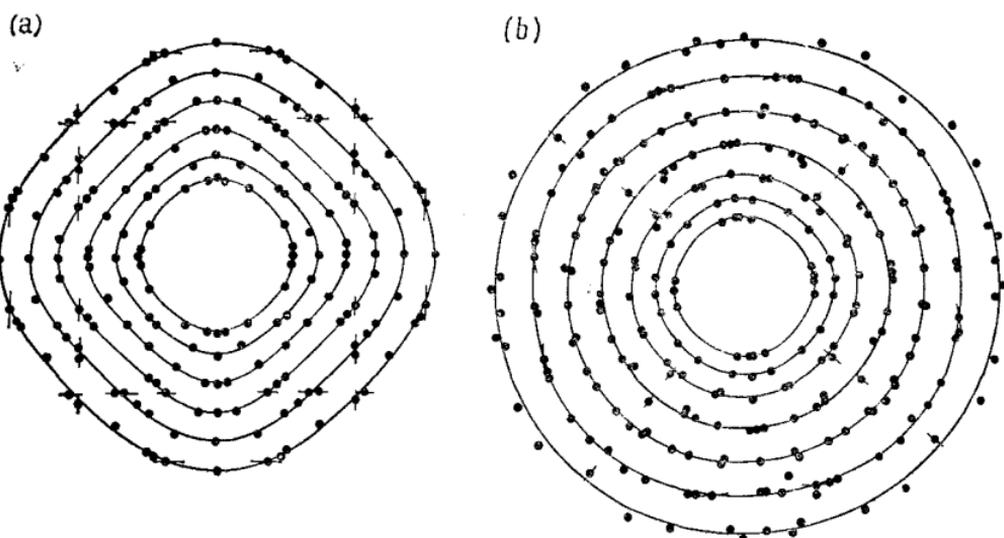


Рис. 29. Результат вычисления эквипотенциальных линий в $SU(2)$ -теории методом Монте-Карло: (а) значение константы связи $\beta = 2$; (б) $\beta = 2.25$.

тического обоснования однозначности теории пока нет. Это остаётся одной из самых важных нерешённых проблем.

2. Ренорм-группа и удержание кварков

Обсудим подробнее центральную проблему калибровочных теорий — проблему удержания кварков. Известный критерий Вильсона связывает силу K , действующую между бесконечно удалёнными кварками, с коэффициентом при площади $S_{\min}(C)$ в экспоненте петлевого среднего

$$W(C) = \left\langle \frac{1}{N} \text{tr} g(C) \right\rangle \sim \exp(-KS_{\min}(C)). \quad (2)$$

Коэффициент K зависит от «затравочной» константы g_0^2 , причём метод ренорм-группы позволяет при $g_0^2 \rightarrow 0$ предсказать эту зависимость с точностью до общей нормировки [5]:

$$K = a^{-2} A (g_0^2)^{-\frac{102}{121}} \exp\left(-\frac{24\pi^2}{11g_0^2}\right) (1 + O(g_0^2)) \quad (3)$$

(здесь a — шаг решётки).

Проблема удержания кварков сводится к доказательству того, что $A > 0$. Невозможно отделаться от впечатления, что

(3) даёт три первых члена квазиклассического разложения, так что коэффициент A можно найти методами теории возмущений. Это было бы замечательным достижением.

Пока что такую программу удаётся провести лишь в двумерных фермионных и спиновых моделях, где аналогичные законы определяют зависимость массовой щели от температуры [11].

В 4-мерной калибровочной теории на решётке сила K взаимодействия между кварками «измерялась» в расчётах по методу Монте-Карло. При этом были проверены закон ренорм-группы (3), а также разложение сильной связи ($g_0^2 \rightarrow \infty$). Результаты изображены на рис. 30.

Видно, что при определённом значении константы связи происходит смена режима (crossover). Это явление объясняется близостью к точке фазового перехода смешанной модели (см. рис. 25, где обычной модели соответствует $\beta_A = 0$). До точки смены режима хорошо работает разложение сильной связи, а затем — закон (3).

Недавно Томбулис [4] анонсировал теорему, согласно которой $A > 0$ в решёточной калибровочной теории с группой $SU(2)$. Доказательство основано на рекурсионном уравнении [5], из которого в своё время была впервые приближённо получена кривая для $K(g_0^2)$. Затем Каданофф [6] заметил, что рекурсионное уравнение позволяет получить оценку сверху для свободной энергии.

В работе Томбулиса утверждается, что сила взаимодействия между кварками также ограничена снизу величиной, полученной из рекурсионного уравнения. Доказательство использует так называемые «шахматные оценки» статистической суммы (см. основной текст, стр. 23).

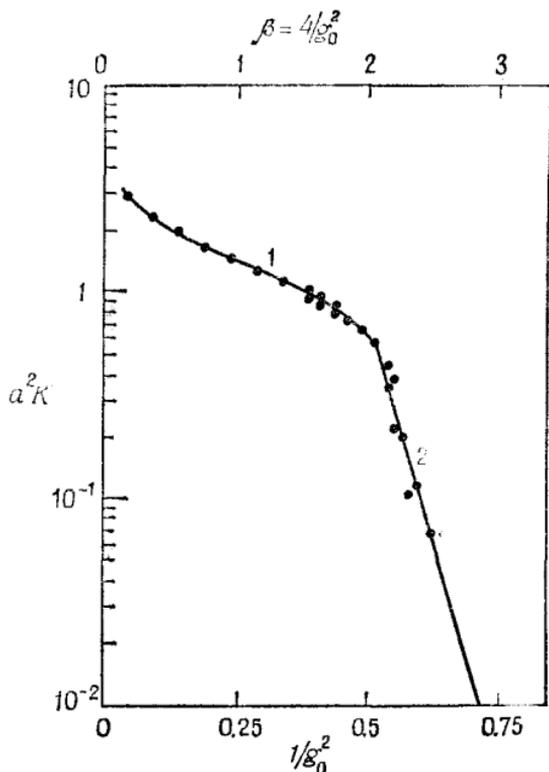


Рис. 30. Результаты расчета коэффициента натяжения струны в $SU(2)$ -теории методом Монте-Карло. Линия 1 соответствует десяти порядкам разложения сильной связи, линия 2 проведена по формуле (3).

Если это доказательство будет окончательно подтверждено, то проблему удержания кварков можно будет снять с повестки дня.

Напомним основные идеи рекурсионного подхода к статистической механике и к калибровочным теориям на решётке. Общая стратегия рекурсионного подхода состоит в том, чтобы последовательно проводить частичные суммирования, закрепляя в статистической сумме некоторые коллективные переменные.

В спиновой системе можно вводить блок-спины как среднее значение нескольких соседних спинов. Суммирование по

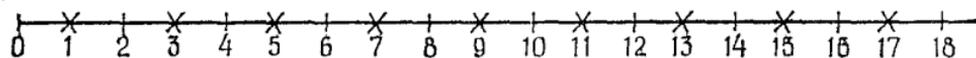


Рис. 31. Одномерная цепочка спинов. Крестиками обозначены нечётные спины, по которым производится суммирование. Оставшиеся чётные спины образуют цепочку вдвое большего шага с изменённым распределением Гиббса.

спинам при закреплённых блок-спинах производится без особого труда, поскольку каждый спин связан с ближайшими соседями, а значит, суммы факторизуются.

На следующих шагах уже приходится делать приближения, пренебрегая связями далеких блок-спинов, иначе кратность сумм возрастает. Типичная схема сводится к нахождению такой структуры функции распределения вероятностей блок-спинов, чтобы при объединении блок-спинов в новые блоки большего размера и суммирования по незакреплённым переменным эта структура сохранялась (в рамках сделанных приближений).

Начальным распределением вероятностей является распределение Гиббса $e^{-\beta E}$ исходной системы. После каждого суммирования эффективный шаг решётки увеличивается в несколько раз, а распределение вероятности для закреплённых переменных меняется.

Если общая структура функции распределения сохраняется (приближённо или точно), то возникают (нелинейные) рекуррентные уравнения для набора параметров, характеризующих это распределение. Решая эти уравнения, можно исследовать критические явления, связанные с бесконечным числом взаимодействующих степеней свободы. Возможное упрощение связано с тем, что эти степени свободы «включаются» бесконечной последовательностью *одинаковых* преобразований параметров.

Приведём тривиальный пример одномерной спиновой цепочки (рис. 31), где распределение вероятностей распадается на произведение множителей $F(s_i, s_{i+1})$, зависящих от пары соседних спинов. При суммировании (скажем) по нечётным

спинам при закреплённых чётных возникает новый фактор F_{2L} вместо F_L , отличающийся от старого преобразованием свёртки:

$$F_{2L}(s_2, s_4) = \int ds_3 F_L(s_2, s_3) F_L(s_3, s_4). \quad (4)$$

В этом примере в качестве блок-спинов выступают чётные спины, а параметрами распределения вероятности могут служить коэффициенты фурье-разложения, диагонализующего преобразование свёртки.

Эти коэффициенты f_n перемножаются:

$$f_n(2L) = f_n^2(L). \quad (5)$$

В калибровочной теории необходимо соблюдать калибровочную инвариантность, поэтому нельзя просто вводить средние рёберные матрицы и вообще фиксировать какие-либо матрицы при интегрировании в статистической сумме.

Выход из положения легко найти в двумерной теории, где каждое ребро связывает только два соседних квадрата (см. рис. 32). Интегрирование по матрице g_{xy} этого ребра также имеет вид свёртки:

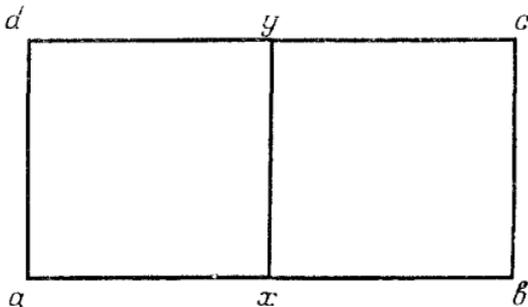


Рис. 32. Две соседние ячейки квадратной решётки. Матрица g_{xy} входит в произведения g_{xbycx} и g_{xydax} по периметру квадратов.

$$F\left(\begin{array}{c|c|c} d & & c \\ \hline & \square & \\ \hline a & & b \end{array}\right) = \int dg_{xy} F\left(\begin{array}{c|c} d & y \\ \hline & \square \\ \hline a & x \end{array}\right) F\left(\begin{array}{c|c} y & c \\ \hline & \square \\ \hline x & b \end{array}\right). \quad (6)$$

Здесь для краткости в качестве аргумента функции F указан контур, вдоль которого расположены соответствующие матрицы, от которых зависит F . Из инвариантности распределения вероятностей следует, что F зависит только от характеристик группового элемента, отвечающего произведению g -матриц по замкнутому контуру.

Пользуясь ортогональностью и нормировкой характеристик, мы, как и в одномерной спиновой системе, приходим к мультипликативности коэффициентов разложения.

При объединении двух соседних квадратов (т. е. при интегрировании по одной матрице g_{xy}) возникает прямоугольник. Два таких соседних прямоугольника можно объединить в квадрат, интегрируя по двум матрицам, соответствующим общей (длинной) стороне. При этом коэффициенты снова пе-

ремножаются, так что

$$f_n(2L) = f_n^2(L). \quad (7)$$

Решая уравнение (5), находим

$$f_n(L) = e^{-mL}, \quad (8)$$

где L — расстояние между спинами, а из уравнения (7) следует, что

$$f_n(L) = e^{-\sigma S}, \quad (9)$$

где $S = L^2$ — площадь внутри контура.

Мы получили соответственно закон экспоненциального убывания спиновых корреляций и закон площадей Вильсона.

В спиновых системах с $d > 1$ и калибровочных с $d > 2$ уже не удаётся диагонализировать рекурсионное уравнение. Число переменных в распределении вероятностей, вообще говоря, бесконечно.

Однако можно исказить системы, добавляя на каждом шаге некоторый внешний потенциал в энергию (т. е. добавляя множитель в распределение вероятностей) так, чтобы оно по-прежнему распадалось на произведение функций от одной переменной (одной матрицы в случае калибровочной теории).

Этот потенциал соответствует передвижению связи: он содержит со знаком минус член, отвечающий одному плакету (в калибровочном случае), и со знаком плюс — член, отвечающий другому. В результате некоторые связи исчезают, а другие в несколько раз усиливаются.

Возникает следующее уравнение [5]:

$$F_{\lambda L}(U) = \sum_n f_n(\lambda L) \chi_n(U) = \left(\sum_n f_n(L^{\lambda^2}) \chi_n(U) \right)^{\lambda^{d-2}}. \quad (10)$$

Здесь $\chi_n(U)$ — характеры калибровочной группы. В простейшем случае $\lambda = 2$, тогда решётка удваивается на каждом шаге.

В спиновой системе возникает точно такое же уравнение, с заменой $\lambda^2 \rightarrow \lambda$, $d \rightarrow 2d$. Таким образом, в рамках сделанных приближений d -мерные спиновые системы эквивалентны $2d$ -мерным калибровочным.

Исследование уравнения (10) показало, что при $d = 4$ для него выполняется закон площадей $f_n(L) \rightarrow \exp(-KL^2)$, причём коэффициент K удовлетворяет закону ренорм-группы, аналогичному (3). Вместо коэффициентов $102/121$, $12\pi^2/11$ в экспоненте и предэкспоненте возникают другие коэффициенты, отличающиеся на $20 \div 30\%$.

Рекурсионное уравнение можно последовательно улучшить, учитывая по теории возмущений поправки от введения дополнительного потенциала. Мартинелли и Паризи [7]

разработали правила такой теории возмущений (они добавляют потенциал с весом $1 - \varepsilon$, разлагают по ε и полагают $\varepsilon = 1$ в конце вычислений). При этом $\varepsilon = 0$ соответствует уравнению (10), а $\varepsilon = 1$ — точной теории.

Эта теория возмущений обобщает разложение сильной и слабой связи: в каждом порядке сосуществуют удержание кварков и асимптотическая свобода.

3. Петлевые уравнения и $1/N$ -разложение

В силу универсальности четырехмерной калибровочной теории в пределе слабой связи все безразмерные величины зависят лишь от калибровочной группы. Зависимость от параметров решёточного действия входит лишь в общие масштабные факторы и исчезает, если выразить все масштабные факторы через натяжение струны K .

Оказывается, что для всех классических групп $SU(N)$, $SP(N)$ и $O(N)$ — с ростом N свойства калибровочных теорий сближаются, и в пределе при $N \rightarrow \infty$ (при фиксированном K) эти теории сводятся к общему нетривиальному пределу. Высказанное утверждение кажется парадоксальным, поскольку представления этих групп вовсе не сближаются при увеличении N . С математической точки зрения нельзя утверждать, что $SU(\infty) = SP(\infty) = SO(\infty)$.

В калибровочных теориях указанное сближение происходит только для петлевых средних — корреляционных функций нормированных инвариантных следов $\Phi(c) = \chi_f(g(c)) / \chi_f(I)$. Оказывается, неприводимые корреляционные функции стремятся к нулю с ростом N , так что имеет место факторизация петлевых средних

$$\langle \Phi(c_1) \dots \Phi(c_k) \rangle = \langle \Phi(c_1) \rangle \dots \langle \Phi(c_k) \rangle + O(N^{-2}). \quad (11)$$

Такая факторизация означает, что $\Phi(c)$ является при $N = \infty$ постоянной величиной, а не случайной. Её флуктуативная часть $\Phi - \langle \Phi \rangle$ убывает обратно пропорционально N .

Этот важный факт был доказан (на физическом уровне строгости) с помощью петлевых уравнений [7]. Петлевые уравнения представляют собой в общем случае цепочку функциональных уравнений для петлевых средних, вытекающих из исходных уравнений Швингера — Дайсона. Были получены и исследованы петлевые уравнения для всех групп как в непрерывной теории, так и на решётке (см. обзор [8]).

При $N \rightarrow \infty$ для классических групп цепочка петлевых уравнений допускает факторизованное решение (4). Причину факторизации можно пояснить так. Петлевое поле $\Phi(c)$ совпадает с арифметическим средним собственных значений

унитарной матрицы $g(c)$. Флуктуации среднего в \sqrt{N} раз меньше, чем флуктуации самих собственных значений (каждое из которых ограничено единицей). На самом деле флуктуации убывают как $1/N$, а не как $1/\sqrt{N}$, но это уже доказывается на основе рассмотрения динамики.

Для предельного классического поля $\Phi(c)$ при $N = \infty$ цепочка петлевых уравнений приводит к нелинейному уравнению следующей структуры:

$$(L\Phi)(c) = \lambda R(\Phi, \Phi)(c), \quad \lambda = Ng_0^2 = \text{const}, \quad (12)$$

где операторы R и L действуют в пространстве петель. Явные выражения для этих операторов и обсуждение свойств уравнения (12) можно найти в обзоре [8]. В этом обзоре приведены также различные результаты, полученные с помощью петлевых уравнений.

В частности, с помощью решёточного варианта петлевых уравнений была доказана так называемая редукция Эгучи — Каваи [9]. Эта редукция состоит в утверждении о независимости предельного поля $\Phi(c)$ от полного размера L решётки. Поэтому вместо бесконечной решётки можно взять единичную решётку, содержащую всего один узел.

Более подробное исследование выяснило, что необходимо вместо условий периодичности налагать «перекрученные» граничные условия [10], для того чтобы избежать фиктивных фазовых переходов в пределе $N = \infty$. С этой оговоркой редукция Эгучи — Каваи была подтверждена как аналитическими, так и численными расчетами.

Помимо предела $N = \infty$ петлевые уравнения дают в принципе возможность для построения ряда по степеням $1/N$. Эта возможность связана с тем, что N^{-1} входит как коэффициент в эти уравнения. Напомним, что петлевые уравнения пишутся для инвариантов, так что N больше никуда не входит. Поэтому аналитическое продолжение на нецелые N достигается непосредственно.

Надо признать, что петлевая динамика в непрерывном пространстве с математической точки зрения плохо обоснована, и хочется обратить внимание математиков на эту интересную проблему.

Что касается решения петлевых уравнений, то пока достигнуты следующие успехи [8].

С помощью итераций по константе связи λ была воспроизведена обычная диаграммная техника Фаддеева — Попова. Кроме того, было показано, что закон площадей Вильсона (2) является асимптотическим решением петлевого уравнения (12). Ввиду нелинейности уравнения это ещё не означает, что решение единственно, поэтому отсюда не сле-

дует, что обязательно имеется удержание кварков в теории с $N = \infty$.

Были также предприняты попытки представить точное решение петлевого уравнения в виде суммы по случайным поверхностям с фермионной структурой (теория фермионной струны). Однако теория случайных поверхностей ещё недостаточно разработана, чтобы можно было придать возникающей статистической сумме однозначный математический смысл. Это ещё одна важная проблема, решение которой требует усилий именно математиков.

Наконец, упомянем о соотношении между решёточной теорией в фазе сильной связи и теорией решёточных поверхностей. Такое соотношение исследовалось в ряде работ. Можно сопоставить членам разложения сильной связи сумму по решёточным поверхностям данной площади с определёнными весовыми факторами, зависящими от внутренней геометрии поверхности (но не от способа вложения).

Однако фазовые переходы при конечных β препятствуют экстраполяции на $\beta = \infty$ и не позволяют сделать вывод об эквивалентности калибровочной теории и теории случайных поверхностей в непрерывном пределе.

Поэтому проблема установления связи между КХД и теорией струны остаётся открытой. Здесь можно ожидать интересных результатов.

Ниже используются следующие нестандартные сокращения:

CMP = Communications in Mathematical Physics.

JMP = Journal of Mathematical Physics.

Brandeis 1965 = *Axiomatic Field Theory*, M. Chretien, S. Deser, eds., Gordon and Breach, New York, 1966 (Brandeis lectures 1965).

Battelle 1971 = *Statistical Mechanics and Mathematical Problems*, Battelle Seattle 1971 Rencontres, A. Lenard, ed., Lecture Notes in Physics 20, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

Erice 1973 = *Constructive Quantum Field Theory*, G. Velo and A. S. Wightman, eds. (Proceedings of the 1973 Erice Summer School), Lecture Notes in Physics 25, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

Erice 1975 = *Renormalization Theory*, G. Velo and A. S. Wightman, eds., D. Reidel, Dordrecht, 1976 (Proceedings of the 1975 Erice School on Mathematical Physics).

Cargèse 1976 = *New Developments in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, M. Lévy and P. K. Mitter, eds., Plenum Press, New York and London, 1977 (Proceedings of the 1976 Cargèse Summer School).

Rome 1977 = *Mathematical Problems in Theoretical Physics* (Proceedings of the Rome $M \cap \phi$ conference 1977), G. dell'Antonio, S. Doplicher, G. Jona-Lasinio, eds., Lecture Notes in Physics 80, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

Schladming 1978 = *Facts and Prospects of Gauge Theories* (Proceedings of the 1978 Schladming Winter School), H. Mitter, ed., Acta Physica Austriaca, Suppl. XIX.

Esztergom 1979 = *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai*, 27, *Random Fields* (Esztergom, Hungary 1979), North-Holland, Amsterdam, 1981.

Kaiserslautern 1979 = *Field Theoretical Methods in Particle Physics*, W. Rühl, ed. (Proceedings of the 1979 Kaiserslautern Summer School), Plenum, New York 1980.

Lausanne 1979 = *Mathematical Problems in Theoretical Physics* (Proceedings of the Lausanne $M \cap \phi$ conference 1979), K. Osterwalder, ed., Lecture Notes in Physics 116, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

Cargèse 1979 = *New Developments in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, M. Lévy and P. K. Mitter, eds., Plenum Press, New York and London 1977 (Proceedings of the 1979 Cargèse Summer School).

Poiana Brasov 1981 = *Gauge Theories: Fundamental Interactions and Rigorous Results* (Proceedings of the 1981 Poiana Brasov Summer School), to appear at Birkhäuser, Boston.

К введению и части I

- [1] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Ann. Phys.* **98**, 287 (1976) and *Erice* 1975.
- [2] P. Breitenlohner and D. Maison, *CMP* **52**, 11, 39, 55 (1977).
- [3] T. Kugo and I. Oshima, *Prog. Theor. Phys.* **60**, 1869 (1978); **61**, 294, 644 (1979).
- [4] R. Jackiw, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 661 (1980); T. Eguchi, P. B. Gilkey, A. J. Hanson, *Phys. Rep.* **66**, 213 (1980).
- [5] F. Wegner, *JMP* **12**, 2259 (1971).
- [6] K. Wilson, *Phys. Rev.* **D10**, 2445 (1974).
- [7] B. Julia and G. Toulouse, *J. de Physique Letters* **16** (1979), L 395; G. Toulouse, *Cargèse* 1979.
- [8] F. Strocchi, *CMP* **56**, 57 (1979).
- [9] J. Drouffe and C. Itzykson, *Phys. Rep.* **38C**, 133 (1978).
- [10] J. Kogut, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 659 (1979).
- [11] Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. — М.: Мир, 1976.
- [12] Глим Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. — М.: Мир, 1984.
- [13] F. Guerra, L. Rosen and B. Simon, *Ann. Math.* **101**, 111 (1975).
- [14] Y. M. Park, *JMP* **16**, 1065 (1975).
- [15] E. Nelson, *Topics in Dynamics I: Flows*, Princeton University Press and University of Tokio Press, Princeton, N. J., 1969.
- [16] Villain, *J. de Physique* **36**, 581 (1975); A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **B59**, 79 (1975).
- [17] J. M. Drouffe, *Phys. Rev.* **D18**, 1174 (1978).
- [18] K. Wilson, *Cargèse* 1976.
- [19] K. Osterwalder and E. Seiler, *Ann. Phys.* **110**, 440 (1978); K. Osterwalder, *Cargèse* 1976; E. Seiler, *Rome* 1977.
- [20] P. Hirschfeld, *Nucl. Phys.* **B157**, 37 (1979).
- [21] J. Fröhlich, B. Simon and T. Spencer, *CMP* **50**, 79 (1976). [Имеется перевод в сб.: Гиббсовские состояния в статистической физике. — М.: Мир, 1978, с. 9—34.]
- [22] J. Fröhlich and E. Lier, *CMP* **60**, 233 (1978).
- [23] D. C. Brydges, J. Fröhlich and E. Seiler, *Ann. Phys.* **121**, 227 (1979).
- [24] M. Lüscher, *CMP* **54**, 283 (1977).
- [25] J. Fröhlich, R. Israel, E. Lieb and B. Simon, *CMP* **62**, 1 (1978).
- [26] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B153**, 141 (1979); **B138**, 1 (1978); *Cargèse* 1979.
- [27] B. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1083 (1976).
- [28] J. Hess, R. Schrader and D. Uhlenbrock, *Duke Math. Journ.* **44**, 893 (1977).
- [29] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, New York, 1979.
- [30] W. Hunziker, *Lausanne* 1979.
- [31] D. C. Brydges, J. Fröhlich and E. Seiler, *Nucl. Phys.* **B152**, 521 (1979).
- [32] I. O. Stamatescu, Max Planck preprint MPI-PAE/PTH 60/80, to appear in *Phys. Rev. D*.
- [33] D. Høegrove, R. Schrader and E. Seiler, *Nucl. Phys.* **B142**, 525 (1978).
- [34] Y. Avron and B. Simon, *Phys. Lett.* **75A**, 41 (1979).
- [35] J. Ginibre, *CMP* **16**, 310 (1970).
- [36] G. F. de Angelis, D. de Falco, F. Guerra, *CMP* **57**, 201 (1977); *Lett. Nuovo Cim.* **18**, 536 (1977); *Phys. Lett.* **68**, 255 (1977); *Phys. Rev.* **D17**, 1624 (1978).
- [37] C. Gruber, H. Kunz, *CMP* **22**, 133 (1971).
- [38] G. Gallavotti, F. Guerra, S. Miracle-Solé, *Rome* 1977.
- [39] G. Gallavotti, A. Martin-Löf, S. Miracle-Solé, *Battelle* 1971.

- [40] Рюэль Д. Статистическая механика. — М.: Мир, 1971.
- [41] R. Marra, S. Miracle-Solé, *CMP* **67**, 233 (1979).
- [42] S. Malyshev, *CMP* **64**, 131 (1979).
- [43] G. C. Rota, *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **2**, 340 (1964); O. Penrose, in *Statistical Mechanics*, T. Bak, ed., Benjamin, New York, 1967.
- [44] J.-P. Eckmann, J. Magnen, R. Sénéor, *CMP* **39**, 251 (1975).
- [45] J. Glimm, A. Jaffe, *Nucl. Phys.* **B149**, 49 (1979).
- [46] G. Münster, *Nucl. Phys.* **B180** [FS 2], 23 (1981); *Phys. Lett.* **95B**, 59 (1980).
- [47] G. Mack, *CMP* **65**, 91 (1979).
- [48] G. Mack, *Cargèse* 1979.
- [49] E. Fradkin, S. Shenker, *Phys. Rev.* **D19**, 3682 (1979).
- [50] J. Glimm, A. Jaffe, T. Spencer, *Ann. Phys.* **101**, 610, 631 (1976). [Имеется перевод в сб.: Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход. — М.: Мир, 1978, с. 65—87, 88—131.]
- [51] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, *Nucl. Phys.* **B185**, 20; **B193**, 173 (1981).
- [52] K. Gawędzki, *CMP* **63**, 31 (1978).
- [53] J. L. Challifour, D. H. Weingarten, *JMP* **19**, 1134 (1978).
- [54] M. Creutz, *Phys. Rev.* **D21**, 1006 (1980); D. J. E. Callaway, L. J. Carson, *Phys. Rev.* **D25**, 531 (1982); K. C. Bowler, G. S. Pawley, B. J. Pendleton, D. J. Wallace, G. W. Thomas, *Phys. Lett.* **104B**, 481 (1981).
- [55] H. A. Kramers, G. Wennier, *Phys. Rev.* **60**, 252 (1941); H. Ceva, L. Kadanoff, *Phys. Rev.* **B3**, 3918 (1971).
- [56] C. Gruber, A. Hintermann, D. Merlini: *Group Analysis of Classical Lattice Systems*, *Lecture Notes in Physics* **60**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.
- [57] G. Gallavotti, A. Martin-Löf, S. Miracle-Solé, *Battelle* 1971.
- [58] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. — М.: Наука, 1965.
- [59] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, *J. Physics* **C6**, 1181 (1973).
- [60] J. Fröhlich, T. Spencer, *CMP* **81**, 527 (1981).
- [61] S. Elitzur, R. B. Pearson, J. Shigemitsu, *Phys. Rev.* **D19**, 3698 (1979).
- [62] R. Israel, C. Nappi, *CMP* **64**, 177 (1979).
- [63] F. Guerra, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1213 (1972).
- [64] A. Guth, *Phys. Rev.* **D21**, 2291 (1980).
- [65] T. Banks, J. Kogut, R. Myerson, *Nucl. Phys.*, **B121**, 493 (1977).
- [66] B. Durhuus, J. Fröhlich, *CMP* **75**, 103 (1980).
- [67] G. Mack, V. B. Petkova, *Ann. Phys.* (N.Y.) **123**, 442 (1979).
- [68] J. Fröhlich, *Phys. Lett.* **83B**, 195 (1979).
- [69] A. Messenger, S. Miracle-Solé, C. Pfister, *CMP* **58**, 19 (1978).
- [70] G. Mack, V. B. Petkova, *Ann. Phys.* (N.Y.) **125**, 117 (1980).
- [71] R. L. Dobrushin, S. B. Shlosman, *CMP* **42**, 31 (1975).
- [72] N. D. Mermin, *J. Math. Phys.* **8**, 1061 (1967).
- [73] N. D. Mermin, H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133 (1966).
- [74] J. Fröhlich, B. Simon, T. Spencer, *CMP* **50**, 79 (1976). [Имеется перевод в сб.: Гиббсовские состояния в статистической физике. — М.: Мир, 1978, с. 9—34.]
- [75] C. Itzykson, M. E. Peskin, J. B. Zuber, *Phys. Lett.* **95B**, 259 (1980); A., E. and P. Hasenfratz, *Nucl. Phys.* **B180** [FS 2], 353 (1981); J. M. Drouffe and J. B. Zuber, *Nucl. Phys.* **B180** [FS 2], 253 and 264 (1980); M. Lüscher, G. Münster, P. Weisz, *Nucl. Phys.* **B180** [FS 2], 1 (1981); G. Münster, P. Weisz, *Nucl. Phys.* **B180** [FS 2], 13 (1981); M. Lüscher, *Nucl. Phys.* **B180** [FS 2], 317 (1981); J. Kogut, R. B. Pearson, J. Shigemitsu, *Phys. Lett.* **98B**, 63 (1981).
- [76] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B153**, 141 (1979); *Cargèse* 1979.
- [77] J. Glimm, A. Jaffe, *CMP* **56**, 195 (1977).
- [78] J. Glimm, A. Jaffe, *Phys. Lett.* **66B**, 67 (1977).
- [79] J. Fröhlich, Y. M. Park, *CMP* **59**, 131 (1977).

- [80] Erice 1973.
- [81] W. Kerler, Phys. Rev. **D23**, 2384 (1981).
- [82] G. Parisi, Cargèse 1979; J. M. Drouffe, G. Parisi, N. Sourlas, Nucl. Phys. **B161**, 397 (1979).
- [83] J. M. Drouffe, Nucl. Phys. **B170** [FS 1], 211 (1980).
- [84] L. Susskind, Phys. Rev. **D20**, 2610 (1979).
- [85] A. M. Polyakov, Phys. Lett. **72B**, 477 (1978).
- [86] G. Mack, Phys. Lett. **78B**, 263 (1978).
- [87] J. Fröhlich, T. Spencer, CMP **83**, 411 (1982).
- [88] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. т. 1, 2. — М.: Наука, 1981.
- [89] A. Trautman, Rep. Math. Phys. (Torun), 29 (1970).
- [90] R. Bott, S. S. Chern, Acta Math. **115**, 71 (1965).
- [91] F. Guerra, Kaiserslautern 1979; G. F. de Angelis, D. de Falco, F. Guerra, R. Marra, Schladming 1978.
- [92] E. Seiler, Poiana Brasov 1981.
- [93] M. Göpfert, G. Mack, CMP **81**, 97 (1981); **82**, 545 (1982).
- [94] G. Mack, H. Meyer, A Disorder Parameter that Tests for Confinement in Gauge Theories With Quark Fields, DESY preprint 81-043 (1981), to appear in Nucl. Phys. B.
- [95] E. Seiler, I. O. Stamatescu, *Lattice Fermions and θ -Vacua*, to appear in Phys. Rev. D.
- [96] M. Göpfert, Nucl. Phys. **B190** [FS 3], 151 (1981).
- [97] N. Kawamoto, Nucl. Phys. **B190** [FS 3], 617 (1981).
- [98] A. P. Wallace, Algebraic Topology, Homology and Cohomology, Benjamin, New York, 1970.

К части II

- [1] F. Nietzsche «Von den Hinterweltlern» in «Also sprach Zarathustra». [Имеется перевод: Ницше Ф. Полн. собр. соч., М., 1909—12.]
- [2] R. Schrader, CMP **49**, 131 (1976); **50**, 97 (1976).
- [3] C. Callan, Phys. Rev. **D2**, 1541 (1970), K. Symanzik, CMP **18**, 227 (1970); Springer tracts in modern physics, **57**, 222 (1971).
- [4] K. Osterwalder, R. Schrader, CMP **31**, 83 (1973); **42**, 281 (1975). [Имеется перевод в сб.: Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход. — М.: Мир, 1978, с. 9—45.]
- [5] Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1975.
- [6] H. G. Dosch, V. F. Müller, Fortschr. Phys. **27**, 547 (1979).
- [7] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973); D. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973); see also D. Marciano, H. Pagels, Phys. Rep. **36**, 137 (1978).
- [8] M. Creutz, Phys. Rev. **D21**, 2308 (1979); Phys. Lett. **45**, 313 (1980).
- [9] T. Bałaban, Lausanne 1979; Ultraviolet Stability for a Model of Interacting Scalar and Vector Fields, Aarhus preprint No. 19, 1981.
- [10] G. Gallavotti, Mem. dell'Accad. dei Lincei XV, 23 (1978); G. Benfatto, M. Cassandro, G. Gallavotti, F. Nicolò, E. Olivieri, E. Presutti, E. Scaciatelli, CMP **59**, 143 (1978); **71**, 95 (1980).
- [11] Саймон В. Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля. — М.: Мир, 1976.
- [12] J. Glimm, A. Jaffe, Cargèse 1976; *Quantum Physics*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1981.
- [13] J. Fröhlich, E. Seiler, Helv. Phys. Acta **49**, 889 (1976).
- [14] M. T. Matthews, A. Salam, Nuovo Cim. **12**, 367 (1948); Phys. Rev. **80**, 440 (1950).
- [15] E. Seiler, CMP **42**, 163 (1975).
- [16] J. Magnen, R. Sénéor, Lausanne 1979; work in preparation.

- [17] J. Magnen, R. Sénéor, private communication; J. Magnen, Esztergom 1979.
- [18] E. Seiler, B. Simon, *Ann. Phys. (N. Y.)* **97**, 470 (1976).
- [19] E. Seiler, B. Simon, *CMP* **45**, 99 (1976); B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications*. Cambridge University Press, 1979.
- [20] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. — М.: Мир, 1982; B. Simon, *Adv. Math.* **24**, 244 (1977); Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 2. — М.: Мир, 1966.
- [21] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
- [22] H. Hogreve, R. Schrader, R. Seiler, *Nucl. Phys.* **B142**, 523 (1978).
- [23] E. Seiler, *Phys. Rev.* **D22**, 2412 (1980).
- [24] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **128**, 2425 (1962).
- [25] Ленин В. И. Материализм и эмпириокритицизм. — Полн. собр. соч.,
- [26] J. Challifour, D. Weingarten, *Ann. Phys. (N. Y.)* **123**, 61 (1979).
- [27] D. Weingarten, *Ann. Phys.* **126**, 154 (1980).
- [28] D. C. Brydges, J. Fröhlich, E. Seiler, *CMP* **71**, 159 (1980).
- [29] D. C. Brydges, J. Fröhlich, E. Seiler, *CMP* **79**, 353 (1981).
- [30] R. Schrader, *CMP* **58**, 229 (1978).
- [31] J. Potthoff, Thesis, F. U., Berlin, 1980.
- [32] D. C. Brydges, J. Fröhlich, E. Seiler, *Ann. Phys. (N. Y.)* **121**, 227 (1979).
- [33] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. — М.: Мир, 1978.
- [34] E. Seiler, B. Simon, *JMP* **16**, 2289 (1975).
- [35] J. Glimm, A. Jaffe, *Fortschr. Phys.* **21**, 327 (1975). [Имеется перевод в сб.: Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход. — М.: Мир, 1978, с. 132—197.]
- [36] E. Nelson, *Erice* 1973. [Имеется перевод в сб.: Конструктивная теория поля. — М.: Мир, 1977, с. 74—98.]
- [37] F. Guerra, L. Rosen, B. Simon, *Adv. Math.* **101**, 111 (1975).
- [38] J. Glimm, A. Jaffe, T. Spencer, *Erice* 1973. [Имеется перевод в сб.: Конструктивная теория поля. — М.: Мир, 1977, с. 169—258.]
- [39] A. Cooper, L. Rosen, *Trans. Amer. Math. Soc.* **234**, 93 (1977).
- [40] J. Fröhlich, *Helv. Phys. Acta* **47**, 265 (1974).
- [41] J. Glimm, A. Jaffe, T. Spencer, *CMP* **45**, 203 (1975). [Имеется перевод в сб.: Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход. — М.: Мир, 1978, с. 46—64.]
- [42] F. Guerra, *Colloq. Int. CNRS* **248** (1975).
- [43] Y. M. Park, *JMP* **18**, 354 (1977).
- [44] J. Fröhlich, B. Simon, *Ann. Math.* **105**, 493 (1977).
- [45] F. Guerra, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1213 (1972).
- [46] J. Magnen, R. Sénéor, *CMP* **51**, 297 (1976).
- [47] Стритер Р., Вайтман А. С. РСТ, спин. статистика и все такое. — М.: Наука, 1966; Йост Р. Общая теория квантованных полей. — М.: Мир, 1967.
- [48] J. Fröhlich, *Ann. Inst. H. Poincaré* **21**, 271 (1974); J. Glimm, A. Jaffe, *Cargèse* 1976.
- [49] B. Plohr, Ph. D. thesis, Princeton 1980; *JMP* **22**, 2184 (1981).
- [50] A. Jaffe, C. Taubes, *Vortices and Monopoles, Progress in Physics*, vol. 2, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [51] J. P. Eckmann, J. Magnen, R. Sénéor, *CMP* **39**, 251 (1975).
- [52] T. Bałaban, K. Gawędzki, A. low temperature expansion for the pseudo-scalar Yukawa model of quantum fields in two space-time dimensions, to appear in *Ann. Inst. H. Poincaré* (Harvard preprint 1980).
- [53] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951), S. L. Adler, *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1967), S. L. Adler, W. Bardeen, *Phys. Rev.* **182**, 1515 (1969).
- [54] J.-L. Gervais, A. Neveu, *Phys. Lett.* **80B**, 255 (1979); *Cargèse* 1979; *Nucl. Phys.* **B153**, 445 (1979); **B163**, 189 (1980); Y. Nambu, *Phys. Lett.* **80B**, 372 (1979); A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **82B**, 247 (1979); *Nucl.*

- Phys. **B164**, 171 (1979); Yu. M. Makeenko, A. A. Migdal, Phys. Lett. **88B**, 135 (1979).
- [55] J. Fröhlich, K. Osterwalder, E. Seiler, in preparation; J. Fröhlich, Cargèse 1979.
- [56] M. Kaku, K. Kikkawa, Phys. Rev. **D10**, 1110 (1974).
- [57] E. Cremmer, J.-L. Gervais, Nucl. Phys. **B76**, 209 (1974).
- [58] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, V. F. Weisskopf, Phys. Rev. **D9**, 3471 (1974).
- [59] J. Fröhlich, Adv. Appl. Math. **1**, 237 (1980); A. Klein, L. J. Landau, J. Funct. Anal. **44**, 121 (1981).
- [60] V. Glaser. — В сб.: Проблемы теоретической физики (посвященном Н. Н. Боголюбову в связи с его 60-летием). — М.: Наука, 1969, с. 69.
- [61] E. Nelson, Ann. Math. **81**, 547 (1959).
- [62] J. Simon, CMP **28**, 39 (1972); M. Flato, J. Simon, H. Snellman, D. Sternheimer, Ann. Sci. ENS (Paris) **5**, 3 (1972).
- [63] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964; Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1981.
- [64] H. Epstein, Brandeis 1965; E. Stein, H. Kunze, Amer. J. Math. **83**, 723 (1960) (Section 8).
- [65] A. Jaffe, Phys. Rev. **158**, 1454 (1967); F. Constantinescu, W. Thalheimer, CMP **38**, 299 (1974).
- [66] K. Hepp, Brandeis 1965.
- [67] T. Spencer, CMP **44**, 143 (1975); J. Glimm, A. Jaffe, T. Spencer, Ann. Math. **100**, 585 (1974); J. Z. Imbrie, CMP **78**, 169 (1980); H. Koch, Ann. Inst. H. Poincaré **31**, 173 (1979).
- [68] H. Euler, W. Heisenberg, Z. Phys. **98**, 714 (1936).
- [69] Erice 1973.
- [70] W. Kerler, Phys. Rev. **D23**, 2384 (1981).
- [71] E. Seiler, I. O. Stamatescu, *Lattice Fermions θ -Vacua*, to appear in Phys. Rev. D.
- [72] M. Göpfert, G. Mack, CMP **82**, 545 (1982).
- [73] A. Patrascioiu, E. Seiler, I. O. Stamatescu, Phys. Lett. **107B**, 364 (1981).
- [74] E. Seiler, Poiana Brasov 1981.
- [75] K. R. Itô, CMP **83**, 537 (1982).
- [76] R. S. Schor, CMP **59**, 213 (1978).
- [77] H. S. Sharatchandra, Phys. Rev. **D18**, 2042 (1978).
- [78] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3. — М.: Мир, 1982.
- [79] A. M. Garsia, in: Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, **2**, L. Le Cam, J. Neyman, E. L. Scott, eds., Univ. of California Press, Berkeley, Cal., 1971.

К добавлению

- [1] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.
- [2] Lee T. D. Particle Physics and Introduction to Field Theory. — Harwood Academic Publishers, 1981.
- [3] Макеенко Ю. М. Метод Монте-Карло в калибровочных теориях на решётке. — УФН (в печати).
- [4] Tomboulis T. — Phys. Rev. Lett., 1983, **50**, p. 885.
- [5] Мигдал А. А. — ЖЭТФ, 1975, **69**, с. 810.
- [6] Kadanoff L. P. — Ann. Phys. (N. Y.) 1976, **100**, p. 359.
- [7] Martinelli G., Parizi G. Nucl. Phys. 1981, **B180**, [FS 2], p. 201,
- [8] Migdal A. A. — Ann. Phys., 1980, **126**, p. 279.

- [9] Migdal A. A. Loop equations and $1/n$ -expansion. — Phys. Rep. (to appear).
- [10] Eguchi T., Kawai H. — P. R. L. 1982, **48**, p. 1063.
- [11] Gonzalies-Aarroyo A., Okawa M. — P. L., 1983, **120B**, p. 174.
- [12] Wiegman P. B., Polyakov A. M. Phys. Lett., 1983, **131B**, p. 121.

Литература, добавленная при переводе

- [1*] Фейнман Р. Статистическая механика. — М.: Мир, 1975.
- [2*] Дубровин В. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
- [3*] Березинский В. Л. Автореф. канд. дисс. — ИТФ им. Л. Д. Ландау, 1974.
- [4*] Малышев В. А. УМН, 1980, **35**, № 2, с. 3—53.
- [5*] Малышев В. А. В сб.: Многокомпонентные случайные системы. — М.: Наука, 1978, с. 258—275.
- [6*] Polyakov A. M. Phys. Lett., 1975, **B59**, p. 79.
- [7*] Зиновьев Ю. М. ТМФ, 1981, **49**, № 2, с. 156—163; 1982, **50**, № 2, с. 207—220.
- [8*] Malyshev V. A. Comm. Math. Phys., 1975, **40**, № 1, p. 75.
- [9*] де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. — М.: ИЛ, 1956.
- [10*] Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И. Некоторые вопросы статистической механики. — М.: Высшая школа, 1975.
- [11*] Pfister C. E. Comm. Math. Phys., 1981, **79**, № 2, 181—188.
- [12*] Добрушин Р. Л. Теория вероятн. и ее прим., 1972, **17**, № 4, с. 612; 1973, **18**, № 2, с. 261.
- [13*] Balaban T. Comm. Math. Phys., 1982, **85**, № 4, p. 555, 603; **88**, № 3, p. 411.
- [14*] Добрушин Р. Л., Минлос Р. А. УМН, 1977, **32**, № 2, с. 67.
- [15*] Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
- [16*] Малышев В. А. ТМФ, 1976, **29**, № 2, с. 171—176.

Именной указатель

- Балабан** (Т. Balaban) 111
Березин Ф. А. 112, 148
Березинский В. Л. 13, 77
Боголюбов Н. 9, 96
Борге (С. Borgs) 6
Бриджес (D. C. Brydges) 6, 120
Бэнкс (Т. Banks) 85
- Вандерс** (G. Wanders) 6
Вегнер (F. Wegner) 7, 9, 58, 63
Вейнгартен (D. H. Weingarten) 72, 120, 167
Вильсон (К. Wilson) 5, 7, 9, 10, 12
- Гавендзкий** (К. Gawędzki) 6, 72
Галлавотти (G. Gallavotti) 37, 41, 63, 111
Гарсиа (А. М. Garsia) 141
Гейзенберг (W. Heisenberg) 132
Гёпферт (M. Göpfert) 64, 74, 109
Гилки (Р. В. Gilkey) 8
Глазер (V. Glaser) 181
Глимм (J. Glimm) 11, 58, 71, 85, 86, 136, 152, 166
Грубер (С. Gruber) 37
Гут (А. Guth) 82, 85
Гуэрра (F. Guerra) 78
- да Сильва** (R. N. da Silva) 6
Джаффе (А. Jaffe) 11, 58, 71, 85, 86, 136, 152, 166, 190
Добрушин Р. Л. 96, 105
Друфф (J. Drouffe) 9, 13
Дубровин Б. А. 11
Дюрхюус (В. Durhuus) 74, 104
- Жинибр** (J. Ginibre) 36, 37
- Зайлер** (E. Seiler) 6
Зиновьев Ю. М. 75
- Ито** (К. R. Ito) 154
- Ициксон** (С. Itzykson) 9
- Иост** (R. Jost) 190
- Кавамото** (N. Kawamoto) 74
Каданофф (L. P. Kadanoff) 203
Каммарота (С. Cammarota) 55
Кляйн (А. Klein) 181
Когут (J. Kogut) 9, 85
Коноплёва Н. П. 5
Кройц (M. Creutz) 111
Кунц (H. Kunz) 37
Кунце (H. Kunze) 185
Купер (А. Cooper) 166, 169
- Ландау** (L. J. Landau) 181
Люшер (M. Lüscher) 23, 105
- Магнен** (J. Magnen) 112, 152, 166
Майерсон (R. Myerson) 85
Макк (G. Mack) 58, 64, 72, 74, 79, 93, 96, 100, 102, 109, 198
Малышев В. А. 37, 39, 43, 51, 77, 151
Марра (R. Marra) 39, 69
Мартинелли (G. Martinelli) 206
Мартин-Лёф (А. Martjn-Löf) 37, 41
Мейер (H. Meyer) 72, 74
Мессаже (А. Messenger) 95
Мигдал А. А. 5, 196
Миракль-Соль (S. Miracle-Solé) 37, 39, 41, 69, 95
Мэттьюз (M. T. Matthews) 112
Мюнстер (G. Münster) 58
- Нельсон** (E. Nelson) 29, 138, 150
Новиков С. П. 11
- Ойлер** (H. Euler) 132
Остервальдер (K. Osterwalder) 6
- Паризи** (G. Parizi) 206
Парк (Y. M. Park) 88
Пенроуз (O. Penrose) 44
Петкова (V. B. Petkova) 93, 96, 100, 102, 198

- Поляков А. М. 9, 13, 75, 177
 Попов В. Н. 5, 19, 208
 Поттхофф (J. Potthoff) 120, 126, 137
 Пфистер (C. Pfister) 95
- Рёйсенаарс (S. Ruijsenaars) 6
 Розен (L. Rosen) 166, 169
 Рота (G.-C Rota) 43
 Рюэль (D. Ruelle) 38
- Саймон (B. Simon) 29
 Салам (A. Salam) 112, 134
 Сенеор (R. Sénéor) 112, 152, 166
 Синай Я. Г. 5
 Славнов А. А. 5
 Спенсер (T. Spencer) 71, 77, 83, 93, 166
 Стейн (E. Stein) 185
 Строкки (F. Strocchi) 8
- Томбулис (T. Tomboulis) 203
 т'Хоофт (G. 't Hooft) 26, 28, 48, 58, 63, 96, 102, 104
- Уленброк (D. Uhlenbrock) 29
- Фаддеев Л. Д. 5, 19, 208
 Фейнман (R. Feynman) 10
 Фоменко А. Т. 11
 Фрёлих (J. Fröhlich) 6, 74, 77, 83, 88, 93, 104, 120, 164, 177, 181
- Хесс (J. Hess) 29
 Хунцикер (W. Hunziker) 29
 Хэнсон (A. J. Hanson) 8
- Чэллифор (J. L. Challifour) 72, 120, 167
- Шаратчандра (H. S. Sharatchandra) 131
 Швингер (J. Schwinger) 115, 116
 Шлосман С. Б. 96
 Шрадер (R. Schrader) 29, 108, 120, 126
- Эгучи (T. Eguchi) 8, 208
 Эйлер (L. Euler) 50
 Экманн (J.-P. Eckmann) 6

Предметный указатель

- адронизация 72
антипериодические граничные условия 20
асимптотическая свобода 110
Ахаронова — *Бома* поле 36
- база 193
беспорядка оператор 26
— переменные 48
Больцмана фактор 40
буст 180
— мнимый 181
буста генератор 182
- вакуум 179
— унитарный 182
Вегнера — *т'Хоофта* наблюдаемая беспорядка 28
виковское упорядочение 126
Виллэна действие 13
Виллэна — *Полякова* действие 13
Вильсона действие 17
— петля 9, 25
вихревая поверхность 49
вихрей линия 28
вихрь 24, 27, 39, 49
— массивный 63
высокотемпературная область 37
- г. у. 154
Гарсия теорема 141
голономии оператор 194
гранесвязность 70
граф 32
— полный 46
Гута теорема 85
- дефект 39
дефектная сеть 49
дефектов конденсация 58
диамагнитное неравенство 30, 121
- заряд 25
— внешний бесконечно сильный 25
звезда 175
- инцидентность 32
- калибровка 11, 194
— временная 24
— унитарная 70
калибровочная инвариантность 19, 196
калибровочное преобразование 12
— — сингулярное 26
— пространство 16
квазитеорема (квазирезультат) 7
кластер 42, 60
кластерное разложение 48—49
— свойство сильное 57, 63
конфигурация полевая 11
— решёточного поля *Хиггса* 15
— — спинорного поля 15
Костерлица — *Таулесса* переход 77
кривизна 194
КХД 10, 196
КЭД 8, 80
Кэллена — *Симанзика* решёточная функция 109
— — уравнения 108
- лапласиан 84, 121
- Мермина* — *Вагнера* теорема 96
монополь 24, 48
мультииндекс 40
Мэттьюза — *Салама* формулы 112, 134
- низкотемпературная область 39
- Остервальдера* — *Шрадера* аксономы 109, 176
ОШ 20

- Пайерлса* контур 96
 парамагнитная гипотеза 36
 периметра закон 58, 63
 плакет 13
 площади закон 26, 27, 63
 полимер 38, 39
 полимеров активность 38
 — несовместимость 39
 — совместимость 39
 положительность ОШ 20, 21
 — по *Остервальдеру* — *Шрадеру* 20
 — — *Симанзику* — *Нельсону* 20,
 168
 пустая область решётки 70
- разомкнутая петля 44
 расслоение 193
 — векторное ассоциированное 193
 — главное 193
 релятивистская квантовая механика
 179
 ренорм-отображение 108
 решётка конечная 32
- связность 192
 связь 38, 47
 сечение 195
 симметрии нарушение 65, 82
 слой 193
 спектральности условие 179
 спиновое пространство 16
 статистическая сумма 40
 струна 25
- термодинамические функции 47
 — — модифицированные 47
т'Хоофта петля 9, 48
- Урселла* функция 41
 условие (R) 32
- условное материальное среднее 30
 устойчивое разложение 148
- Фаддеева* — *Попова* духи 19
Фарри теорема 115, 127
Фредгольма определитель 114
- Хиггса* модель 65
 — область 69
 — поле 15
 — решёточное действие 15
 — скрытый механизм 38
Ходжа разложение 84
- цветность 196
 цветовой защитный механизм 58
- Черна* (= *Чженя*) класс 195
 — число 195
- шахматные оценки 23
Швингера функция n -петлевая 176
- Эгучи* — *Каваи* редукция 208
- Янга* — *Миллса* действие 12
 — — тензор напряжённости 194
- H-дефект 70
 H-калибровка 70
 U-калибровка 66
 Y. M. 12
 Y. M. V. 12
 Y. M. W. 12
 θ -вакуум 17
 θ -состояние 76

Оглавление

От редактора перевода	5
Предисловие	6
Введение	7
Часть I. Решёточные калибровочные теории	9
1. Схема построения решёточных калибровочных теорий	11
2. Основные свойства	19
а. Свойство положительности по Остервальдеру — Шрадеру и его следствия	20
б. Некоторые наблюдаемые и их смысл	24
с. «Диаманитное» неравенство	29
д. Корреляционные неравенства	36
3. Методы разложения в ряд	37
а. Общий алгебраический формализм для полимеров	39
б. Приложение описанного выше формализма к решёточным калибровочным теориям. Сходимость	47
с. Результаты: следствия сходимости кластерного разложения	57
4. Некоторые дальнейшие результаты	74
а. Двумерные абелевы модели Хиггса: θ -вакуумы, фазовый переход и удержание дробных зарядов	75
б. Трёхмерная абелева модель Хиггса: фазовая структура	80
с. Теорема Гута: существование неудерживающей (кулоновой) фазы в четырёхмерной $U(1)$ -модели	82
д. $SU(n)$ удерживает, если удерживает Z_n	93
е. Взаимосвязь электрических и магнитных свойств в проблеме удержания	96
ф. Некоторые грубые соображения о фазовом переходе огрубления поверхности	104
Часть II. Непрерывные калибровочные квантовые теории поля	107
5. Методы построения непрерывных калибровочных квантовых теорий поля	107
а. Скейлинг-предел	107
б. Прямые непрерывные конструкции	112
6. Сходимость к непрерывному пределу во внешних или обрезанных калибровочных полях	120
а. Сходимость бозонных функций Грина	121
б. Сходимость определителей	128
с. Сходимость состояний (средних значений) во внешних калибровочных полях	134
д. Сходимость средних в полностью квантованных теориях с обрезанием калибровочного поля	140
7. Устранение всех обрезаний; проверка аксиом в двумерном случае	143

a. Устойчивое разложение	143
b. Оценки, зависящие и не зависящие от объема	153
c. Термодинамический предел; проверка аксиом	163
8. Общий подход к теории нелокальных калибровочно-инвариантных объектов	174
a. Предположения	175
b. Реконструкция релятивистской квантовой механики	179
c. «Функции Вайтмана» и их аналитичность	187
d. Граничные значения («обобщенные функции Вайтмана»)	189
e. Локальность и теория рассеяния	190

Приложение. Геометрические аспекты калибровочных теорий	193
---	-----

Добавление. А. А. Мигдал. Задачи и перспективы калибровочных теорий	196
---	-----

Литература	210
К введению и части I	211
К части II	213
К добавлению	215
Литература, добавленная при переводе	216

Именной указатель	217
Предметный указатель	219

В предлагаемой читателю книге собраны математически строгие результаты, касающиеся построения и свойств калибровочных полей, как решёточных, так и непрерывных. Многие существенные результаты принадлежат здесь самому автору. Книга состоит из двух частей. В первой части изложена теория, относящаяся к фазовым переходам в решёточных моделях, во второй — теория непрерывных калибровочных полей, точнее, та ее часть, которая на сегодняшний день доступна строгому анализу.

В написанном А. А. Мигдалом дополнении приведен ряд нерешенных проблем, важных с точки зрения физики элементарных частиц, и указаны возможные подходы к их исследованию.

Зайлер Э.

Калибровочные теории. Связи с конструктивной квантовой теорией поля и статистической механикой: Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 224 с.

Монография известного немецкого ученого из ФРГ посвящена квантовым калибровочным моделям, как дискретным, так и непрерывным, и их связи с проблемой неразлетания кварков. При этом предмет рассматривается с точки зрения конструктивной теории поля и статистической механики. Книга не имеет аналогов на русском языке.

Для специалистов в области математической физики, аспирантов и студентов университетов.