

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО**

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ

**КЛАССИЧЕСКАЯ КОСМОЛОГИЯ
И ТЕМНАЯ ЭНЕРГИЯ**



**КАЗАНЬ
2016**

УДК 524
ББК 22.632
И26

*Печатается по рекомендации Ученого совета
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского*

*Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках
государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета
в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых
научно-образовательных центров*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор **В.Г. Багров**;
доктор физико-математических наук, профессор **Д.В. Гальцов**

Игнатъев Ю.Г.

И26 Классическая космология и темная энергия / Ю.Г. Игнатъев. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2016. – 248 с.; 144 ил.

ISBN 978-5-00019-692-2

Цель книги – изложение новых результатов научного коллектива под руководством Ю.Г. Игнатъева в области современной космологии, основанной на классических скалярных полях, являющихся моделью темного сектора энергии Вселенной, и методов математического и компьютерного моделирования исследования космологических моделей. Книга содержит результаты работ автора и его учеников в области теории гравитации, общерелятивистской кинетической теории и космологии, полученных в течение последних трех лет. Особенностью книги является широкое применение методов компьютерного моделирования для исследования космологических моделей. Книга будет полезна студентам старших курсов, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области математики, теоретической физики и астрофизики.

The purpose of the book – a statement of the results of new research team under the guidance of the author in the field of modern cosmology, based on the classical scalar fields, which are a model of dark energy sector of the universe, and methods of mathematical and computer modeling studies of cosmological models. The book contains the results of the author and his students in the theory of gravity, general relativistic kinetic theory and cosmology, received during the last 3 years. A special feature of the book is the extensive use of computer simulation methods for the study of cosmological models. The book will be useful for senior students, undergraduates and graduate students specializing in mathematics, theoretical physics and astrophysics.

УДК 524
ББК 22.632

ISBN 978-5-00019-692-2

© Игнатъев Ю.Г., 2016
© Издательство Казанского университета, 2016

Оглавление

Предисловие	6	
I	Стандартная космологическая модель: качественный и численный анализ	8
I.1	Уравнения Эйнштейна с космологическим членом	8
I.2	Уравнения Эйнштейна для непустой Вселенной	10
I.3	Физическая неустойчивость мира де Ситтера	11
I.4	Качественный анализ динамической системы СКМ	21
I.5	Фазовые портреты динамической системы	24
I.6	Численное интегрирование динамических уравнений	28
II	Качественный и численный анализ космологической модели с Λ - членом	35
II.1	Уравнения Эйнштейна с космологическим членом для Вселенной Фридмана с нулевой трехмерной кривизной	35
II.2	Качественный анализ динамической системы СКМ	36
II.3	Фазовые траектории динамической системы	41
II.4	Численное моделирование динамической системы	43
III	Макроскопические уравнения Эйнштейна и космология ранней Вселенной	49
III.1	Введение	49
III.2	Самосогласованный подход к описанию локальных флуктуаций метрики	51
III.3	Микроскопические уравнения Эйнштейна для Вселенной Фридмана	59
III.4	Усреднение локальных флуктуаций метрики	64

Оглавление

III.5	Уравнения Эйнштейна второго порядка по возмущениям в ВКБ - приближении	67
IV	Неминимальные макроскопические модели скалярного поля	70
IV.1	Введение	70
IV.2	Динамика частиц со скалярным взаимодействием	72
IV.3	Вычисление макроскопических средних	80
IV.4	Скорость изменения динамических средних	84
IV.5	Кинетические уравнения и уравнения переноса	87
IV.6	Термодинамическое равновесие плазмы в гравитационном поле	91
V	Глобальное равновесие в присутствии скалярного поля	101
V.1	Общерелятивистская кинетическая теория и термодинамическое равновесие	101
V.2	Глобальное термодинамическое равновесие	109
VI	Конформно - инвариантная модель неминимального взаимодействия	112
VI.1	Введение	112
VI.2	Строгие макроскопические соотношения релятивистской кинетической теории	113
VI.3	Самосогласованная кинетическая модель самогравитирующей плазмы	120
VI.4	Самосогласованная космологическая модель для локально равновесной плазмы	125
VI.5	Конформные преобразования уравнений космологической модели	128
VII	Бесстолкновительные системы скалярно взаимодействующих частиц	133
VII.1	Введение	133
VII.2	Самосогласованная математическая модель бесстолкновительной плазмы	134
VII.3	Уравнения космологической эволюции	137

VIII	Космологические системы фермионов с фантомным взаимодействием	146
VIII.1	Введение	146
VIII.2	Математическая модель статистических систем	149
VIII.3	Математическая модель равновесной статистической системы	153
VIII.4	Математическая модель релятивистской почти вырожденной Ферми - системы	157
VIII.5	Асимптотическое поведение системы в ультрарелятивистском пределе	164
VIII.6	Космологическая эволюция полностью вырожденной статистической системы	168
VIII.7	Численное моделирование космологической эволюции	176
VIII.8	Примеры случая массивного фантомного скалярного поля с источником	186
VIII.9	Космологическая эволюция термодинамических величин . .	191
IX	Космологическая эволюция несимметричной бозмановской плазмы	200
IX.1	Введение	200
IX.2	Модель несимметричной локально равновесной статистической системы	202
IX.3	Энергетический анализ поведения системы	208
IX.4	Численное моделирование космологической эволюции	213
IX.5	Результаты численного моделирования	215
X	Установление равновесия в космологической модели с произвольным ускорением	219
X.1	Введение	219
X.2	Общие принципы построения и решения уравнения энергобаланса	220
X.3	Кинетическое уравнение для неравновесных частиц	225
X.4	Точная модель перехода с ультрарелятивистской стадии на инфляционную	232
	Литература	235

Предисловие

В 2010 году вышла монография Автора [1], посвященная систематическому изложению общерелятивистской кинетической теории и ее приложениям к проблемам теории гравитации, гравитационного эксперимента, релятивистской астрофизике и космологии. Монография вышла небольшим, «пилотным» тиражом и, по-видимому, поэтому быстро разошлась. Несмотря на то, что монография была опубликована Автором на различных веб-сайтах¹, существует устойчивый спрос на эту книгу в «твердом» формате, поскольку ее можно использовать и в качестве учебника и справочника, который всегда удобно иметь под рукой. В течение последующих 3-х лет Автором был получен ряд серьезных результатов в области общерелятивистской кинетической теории, связанных с обобщением некоторых теоретических моделей на космологические модели с ускорением. В связи с этим возникла идея переработки предыдущей монографии с опусканием некоторых вопросов, не имеющих пока наблюдательного и экспериментального подтверждения и расширением монографии в направлении проблем космологии, которая сейчас переживает настоящий бум в связи с рядом революционных открытий внегалактической астрономии: ускорение Вселенной, темная материя и темная энергия и т.п. В результате в 2013 году вышла монография Автора [2], посвященная вопросам релятивистской кинетики в космологии, в которой нашли отражение оригинальные исследования Автора и его учеников по космологическим моделям со скалярным взаимодействием частиц. В указанной монографии по сравнению с [1] были опущены главы, посвященные взаимодействию гравитационного излучения с релятивистской плазмой, и добавлены главы, посвященные кинетическим моделям ускорения Вселенной и кинетике восстановления термодинамического равновесия в ускоренной Вселенной. За последние 2 - 3 года, однако, научному коллективу института математики и механики им. Н.И. Лобачевского удалось получить ряд новых, весьма интересных для

¹см., например, <http://rgs.vniims.ru/books/kinetics.pdf>

Предисловие

космологии результатов, в связи с чем возникла необходимость написания новой монографии. Как будет видно из дальнейшего, значительная часть результатов была получена с помощью методов математического и численного моделирования, некоторые из которых изложены в монографии автора [3]. Автор, по мере возможностей, старался написать книгу так, чтобы она была доступной для понимания студентам, магистрантам и аспирантам, тем самым сделав ее как бы более профессиональным продолжением учебника [4].

Автор благодарен своим рецензентам, профессорам Владиславу Гавриловичу Багрову и Дмитрию Владимировичу Гальцову за конструктивные замечания, способствующие улучшению качества книги. Кроме того, Автор благодарен Самигуллиной Алсу Ринатовне за помощь по подготовке книги к изданию и своему ученику, к.ф.-м.н. Агафонову Александру Алексеевичу, за подготовку макета обложки книги и выполнение ряда сложных рисунков.

Ниже принята, если это не оговорено особо, система единиц, в которой $G = c = \hbar = 1$; сигнатура метрики $(- - - +)$, латинские индексы пробегают значения от 1 до 4, греческие - от 1 до 3. Ковариантные производные обозначаются запятой либо, где это удобно, символом ∇_i . Тензор Риччи определен через свертку тензора Римана по первому и третьему индексам, как и в книге [124];

$$(p, q) = g_{ik} p^i q^k$$

скалярное произведение векторов p^i и q^k . Соотношение: $A \stackrel{*}{=} B$ будет обозначать, что равенство $A = B$ имеет место в данной системе координат.

Автор

Глава I

Стандартная космологическая модель: математический, качественный и численный анализ

I.1 Уравнения Эйнштейна с космологическим членом

I.1.1 Пространство - время де Ситтера

В 1917 году А. Эйнштейн модифицировал свою теорию гравитации [49], добавив в уравнения гравитационного поля так называемый космологический член (Λ - член) ¹:

$$G_k^i = \Lambda \delta_k^i + 8\pi T_k^i. \quad (\text{I.1})$$

В том же году де Ситтер нашел решение этих уравнений для пространства постоянной кривизны [50]:

$$ds^2 = \cos^2\left(\frac{r}{R}\right) dt^2 - dr^2 - R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (\text{I.2})$$

В 1918 Эйнштейн указал на то, что решение де Ситтера (I.2) имеет истинную сингулярность при $r = \pi/2R$ [51]. Это обстоятельство привело его в дальнейшем к отказу от Λ - члена.

Как оказалось в дальнейшем, сингулярность была вызвана неудачным системы отсчета, в которой все пространство не покрывалось световым конусом. В синхронной системе отсчета метрика (I.2) может быть переписана как метрика Фридмана [52]. Соответствующее решение, называемое инфляцией, описывает экспоненциально быстрое расширение Вселенной:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\{d\chi^2 + \varrho^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\}; \quad (\text{I.3})$$

¹Здесь и в дальнейшем принята Планковская система единиц $\hbar = c = G = 1$; метрика имеет сигнатуру $(-1, -1, -1, +1)$, тензор Риччи получается из тензора Римана сверткой первого и третьего индексов.

I.1. Уравнения Эйнштейна с космологическим членом

$$a(t) = \begin{cases} a_0 H_0^{-1} \cosh H_0 t; & \varrho(\chi) = \sin \chi; & k > 0; \\ a_0 e^{H_0 t}; & \varrho(\chi) = \chi; & k = 0; \\ a_0 \sinh H_0 t; & \varrho(\chi) = \text{sh}(\chi); & k < 0, \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

где k - кривизна трехмерного пространства и

$$H_0 = \sqrt{\Lambda/3}. \quad (\text{I.5})$$

Метрика (I.3) может быть переписана в форме метрики конформно соответствующей пространству постоянной кривизны:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2 + \varrho^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (\text{I.6})$$

где

$$a(\eta)d\eta = dt \Leftrightarrow t = \int a(\eta)d\eta \Leftrightarrow \eta = \int \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{I.7})$$

I.1.2 Уравнения Эйнштейна для пустой Вселенной в случае нулевой кривизны

В случае нулевой кривизны $\varrho = r$ метрика Фридмана (I.3) принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (\text{I.8})$$

и единственное нетривиальное уравнение Эйнштейна для *пустой Вселенной* принимает форму:

$$\frac{a'^2}{a^4} = \Lambda \Rightarrow \frac{a'}{a^2} = \sqrt{\Lambda}. \quad (\text{I.9})$$

Решением этого уравнения является:

$$a = \frac{a_0}{1 - a_0 \sqrt{\Lambda}(\eta - \eta_0)} \quad (\text{I.10})$$

Выбирая константу η_0 так, чтобы сингулярное (нулевое) значение масштабного фактора соответствовало значению $\eta = -\infty$ (т.е., $\eta_0 a_0 \sqrt{\Lambda} = 1$), получим

$$a(\eta) = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda}\eta}, \quad \eta \in (-\infty, -0). \quad (\text{I.11})$$

С помощью (I.7) найдем соотношение между временной переменной η и физическим временем t . Так бесконечно удаленное прошлое соответствует

значению $\eta = -\infty$, и бесконечно удаленное будущее $-\eta = -0$. Интегрируя уравнение (I.6) с помощью решения (I.11), получим

$$t = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \ln(-\eta), \Rightarrow \eta \rightarrow -\infty \leftrightarrow t \rightarrow -\infty; \eta \rightarrow +\infty \leftrightarrow t \rightarrow +\infty. \quad (\text{I.12})$$

Таким образом, история де Ситтеровской вселенной не имеет ни начала, ни конца.

В дальнейшем мы примем следующие стандартные обозначения для производных функций по временным переменным:

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow f' = a\dot{f}; \quad \dot{f} = \frac{f'}{a}. \quad (\text{I.13})$$

I.2 Уравнения Эйнштейна для непустой Вселенной

I.2.1 Тензор энергии - импульса

Учтем теперь вклад материи в правой части уравнений Эйнштейна (II.1). Симметрии метрики по отношению к вращениям и перемещениям трехмерного пространства вследствие уравнений Эйнштейна приводят к аналогичным симметриям тензора энергии - импульса. Поэтому тензор энергии - импульса однородной изотропной вселенной обязан иметь структуру тензора энергии - импульса идеальной жидкости:

$$T_k^i = (\varepsilon + p)\delta_4^i\delta_k^4 - p\delta_k^i. \quad (\text{I.14})$$

Соответственно (VII.34) Э.Б. Глинер [53] дал интерпретацию космологическому члену как плотности энергии вакуума с уравнением состояния:

$$\Lambda = \varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_0 + p_0 = 0. \quad (\text{I.15})$$

В результате остаются два независимых уравнения Эйнштейна, одно из которых вследствие тождеств Бианки может быть заменено дифференциальным следствием – законом сохранения энергии:

$$\varepsilon' + 3\frac{a'}{a}(\varepsilon + p) = 0 \Leftrightarrow \dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) = 0. \quad (\text{I.16})$$

При заданном *уравнении состояния*

$$p = p(\varepsilon) \quad (\text{I.17})$$

1.3. Физическая неустойчивость мира де Ситтера

уравнение (I.16) всегда интегрируется в квадратурах:

$$\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p(\varepsilon)} = -3 \ln a. \quad (\text{I.18})$$

В присутствии материи оставшееся уравнение Эйнштейна принимает вид:

$$3 \frac{a'^2}{a^4} = \Lambda + 8\pi\varepsilon \Rightarrow 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Lambda + 8\pi\varepsilon. \quad (\text{I.19})$$

Замечание: Система уравнений (I.16), (I.19) инвариантна по отношению к масштабному преобразованию

$$a(t) \rightarrow \text{Const} \cdot a(t), \quad (\text{I.20})$$

поэтому масштабную функцию $a(t)$ можно положить равной, например, 1 в произвольный, несингулярный, момент физического времени t .

1.3 Физическая неустойчивость мира де Ситтера

1.3.1 Неустойчивость по отношению к добавлению вещества

Предположим, что мы введем в мир де Ситтера небольшую порцию вещества, так что:

$$\varepsilon \ll \Lambda; \quad p \approx \left. \frac{dp}{d\varepsilon} \right|_0 \varepsilon \Rightarrow p = \kappa\varepsilon, \quad (\text{I.21})$$

где κ есть так называемый коэффициент баротропы. Тогда из закона сохранения энергии (I.18) найдем, полагая $a_0 = 1$:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot a^{-3(1+\kappa)}; \quad (\kappa \neq -1). \quad (\text{I.22})$$

Подставляя (I.22) в уравнение Эйнштейна (I.19), мы найдем, полагая $\varepsilon_0 \neq 0$:

$$a(t) = \left[\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0}{\Lambda}} \sinh \left(\frac{3(1+\kappa)\sqrt{\Lambda}}{2} t \right) \right]^{\frac{2}{3(1+\kappa)}} \sim \begin{cases} t^{\frac{2}{3(1+\kappa)}}, & t \rightarrow 0; \\ e^{\sqrt{\Lambda}t}, & t \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

(инфляция при $t \rightarrow \infty$) и согласно (I.18):

$$\varepsilon \rightarrow \frac{1}{6\pi(1+\kappa)^2 t^2}, \quad (\text{I.24})$$

т.е., при $t \rightarrow 0$ мы получим стандартное космологическое решение с $\Lambda = 0$ для материи с уравнением состояния (I.21).

Что же произошло?

Заметим, во - первых, что начальное значение плотности энергии ε_0 добавленного вещества вообще выпала из формулы для плотности энергии вещества (I.24). Присутствие же этой величины в выражении (I.23) вследствие указанного свойства инвариантности системы уравнений Эйнштейна по отношению к преобразованиям (I.20) может быть устранено путем масштабного преобразования. Поэтому можно утверждать, что формулы космологической модели присутствие вещества определяются лишь уравнением состояния этого вещества, т.е., коэффициентом баратропы k , но при этом не зависят от доли вещества, внесенного в мир де Ситтера. При этом время перехода с “материального режима” расширения на инфляционный, t_λ , вообще не зависит от начальной плотности энергии ε_0 добавленного вещества, а определяется лишь космологической постоянной Λ и уравнением состояния вещества:

$$t_\lambda = \frac{2}{3(1+k)\sqrt{\Lambda}}. \quad (\text{I.25})$$

Во - вторых, мы замечаем еще более “странное” обстоятельство: наличие сколь угодно малого количества вещества с уравнением состояния $\varepsilon + p > 0$ делает конечным прошлое Вселенной: решение уравнений Эйнштейна (I.23) – (I.24) имеет космологическую сингулярность $a = 0$ в момент физического времени $t = 0$. Таким образом, справедливо следующее утверждение [30, 46]:

Утверждение 1 *Мир де Ситтера неустойчив по отношению к добавлению любой материальной “примеси” в сколь угодно малом относительном количестве: бесконечное прошлое становится невозможным, первой космологической стадией стадией становится материальная, которая через время t_λ (I.25) переходит в инфляционную стадию.*

Примечание. Заметим также, что с вероятностной точки зрения вероятность возникновения абсолютно однородного и изотропного чистого вакуумного состояния среди всех возможных состояний, в том числе, неизотропных и неоднородных, а также допускающих наличие других неоднородных и неизотропных физических полей, строго равна нулю. Мощность множества всех возможных начальных состояний, по крайней мере, не менее \mathfrak{M}^6 , где \mathfrak{M} есть мощность множества всех действительных чисел. Поэтому космологам для

1.3. Физическая неустойчивость мира де Ситтера

объяснения этого начального состояния не остается ничего другого, как прибегать к так называемым “эстетическим соображениям”. Но как давно известно, эстетические предпочтения различных людей, в том числе, и физиков - теоретиков, могут существенно отличаться². Обращение к эстетическим доводам в формулировке фундаментальных законов природы уместно только тогда, когда результаты математических моделей, построенных на соответствующих принципах, поддаются однозначной экспериментальной проверке.

1.3.2 Анализ стандартной модели со скалярным вакуумом

1.3.2.1 Уравнения космологической модели со скалярным вакуумом

В стандартной космологической модели ранней вселенной в качестве модели вакуума рассматривается вакуумное массивное скалярное поле Φ , которому соответствует тензор энергии - импульса:

$$T_k^i = 2\Phi^{,i}\Phi_{,k} - \delta_k^i \Phi_{,j}\Phi^{,j} + \delta_k^i m^2 \Phi^2, \quad (\text{I.26})$$

где m - масса квантов этого поля. Уравнение скалярного поля получается из тождеств Бианки $T_{k,i}^i = 0$:

$$\square\Phi + m^2\Phi = 0, \quad (\text{I.27})$$

где

$$\square\Phi = g^{ik}\Phi_{,ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \Phi \quad (\text{I.28})$$

есть оператор D'Alembert. Для однородной вселенной $\Phi = \Phi(t)$, и тензор энергии - импульса скалярного поля принимает изотропную структуру (VII.34), где

$$\varepsilon = \dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2; \quad p = \dot{\Phi}^2 - m^2\Phi^2, \quad (\text{I.29})$$

так что

$$\varepsilon + p = 2\dot{\Phi}^2, \quad (\text{I.30})$$

а уравнение поля (II.4) принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + m^2\Phi = 0. \quad (\text{I.31})$$

²Здесь уместно вспомнить полемику в начале XX-го века крупнейших физиков вокруг принципиальных вопросов квантовой теории.

В тоже время единственное независимое уравнение Эйнштейна есть:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi(\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2). \quad (\text{I.32})$$

Примечание:

Заметим, что если бы $\dot{\Phi} = 0$, то согласно (II.6), мы получили бы вакуумное уравнение состояния $\varepsilon + p = 0$. В этом случае скалярное поле могло бы играть роль эффективного космологического члена.

I.3.2.2 Приближение медленного скатывания

Стандартная модель основана на так называемом *приближении медленного скатывания* в уравнениях (II.8) и (II.9) (см., например, [54])³:

$$|\dot{H}| \ll H^2 \Leftrightarrow |\Omega - 1| \ll 1, \quad (\text{I.33})$$

где $H(t)$ – постоянная Хаббла

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a'}{a^2}, \quad (\text{I.34})$$

и

$$\Omega = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (\text{I.35})$$

есть инвариантное космологическое ускорение. Таким образом, приближение медленного скатывания эквивалентно наложению условия на вторые производные масштабного фактора:

$$a\ddot{a} = \dot{a}^2. \quad (\text{I.36})$$

Соотношение (I.36) является автономным дифференциальным уравнением на масштабный фактор. Производя простейшее преобразование:

$$\ddot{a} \equiv \frac{d\dot{a}}{da}\dot{a}, \quad (\text{I.37})$$

приведем его к виду:

$$\frac{d\dot{a}}{\dot{a}} = \frac{da}{a}$$

³Мы выписываем здесь основные соотношения стандартной космологической модели для случая простейшего потенциала $V(\Phi) = m^2\Phi^2$

1.3. Физическая неустойчивость мира де Ситтера

и найдем его решение:

$$\dot{a} = Ca,$$

где C – произвольная постоянная. Интегрируя еще раз это соотношение, получим инфляционное решение для масштабного фактора:

$$a(t) = a_1 e^{Ct}. \quad (I.38)$$

В этом случае:

$$H = H_0 = C; \quad \Omega = 1. \quad (I.39)$$

Утверждение 2 *Таким образом, так называемое приближение медленного скатывания (I.33) полностью эквивалентно предположению о том, что решение уравнений Эйнштейна является асимптотически инфляционным:*

$$\ddot{H} \ll \dot{H}^2 \Leftrightarrow a(t) \propto e^{H_0 t}. \quad (I.40)$$

1.3.2.3 Решение системы уравнений в приближении медленного скатывания

Теперь надо выяснить, как получить инфляционное решение (I.38) в качестве *асимптотического решения* уравнения Эйнштейна (II.9). Прямая подстановка (I.38) в уравнение Эйнштейна (II.9) приводит к равенству:

$$3H_0^2 = 8\pi(\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2). \quad (I.41)$$

Поскольку левая часть равенства (I.41) постоянна, а правая является суммой квадратов двух функций, общим решением (I.41) является следующее:

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{8\pi} \frac{H_0}{m}} \sin \psi(t); \quad \dot{\Phi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi} \frac{H_0}{m}} \cos \psi(t), \quad (I.42)$$

где $\psi(t)$ – пока произвольная функция. Вычисляя $\dot{\Phi}$ дифференцированием первого из соотношений (I.42) и сравнивая результат со вторым, найдем: $\dot{\psi} = 1 \rightarrow \psi = t$. Подставляя полученный результат в уравнение поля (II.8), мы, естественно, придем к соотношению $H_0/m = 0$, откуда получим для постоянной C в соотношении (I.39) единственно возможное решение, строго соответствующее приближению медленного скатывания и отвечающее пустому евклидовому пространству $C = H_0 = 0, \Phi = 0$.

Утверждение 3 *Таким образом, прямое применение приближения медленного скатывания не дает нужного результата: строго говоря, приближение медленного скатывания дает лишь тривиальное решение системы уравнений Эйнштейна - Клейна - Гордона:*

$$\Omega - 1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow H = 0; \quad \Phi = 0. \quad (I.43)$$

I.3.2.4 Приближение малой массы

Поэтому в стандартной космологической модели для обеспечения ранней инфляции обычно используется еще одно приближение: приближение малой массы квантов скалярного поля:

$$m^2 \ll \frac{\dot{a}^2}{a^2} \equiv H^2. \quad (\text{I.44})$$

В этом случае должно выполняться и условие:

$$m^2\Phi \ll \ddot{\Phi} \leftrightarrow m^2\Phi \ll \frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi}. \quad (\text{I.45})$$

В этом приближении уравнение скалярного поля (II.8) принимает вид

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} = 0 \quad (\text{I.46})$$

и его *частное решение*, приводящее к де Ситтеровскому вакууму, есть

$$\Phi = \Phi_0 = \text{Const}. \quad (\text{I.47})$$

При этом согласно (II.6) получим:

$$\varepsilon = -p = m^2\Phi_0^2 = \text{Const}. \quad (\text{I.48})$$

Подставляя это решение в уравнение Эйнштейна (II.9) и решая его, получим инфляционное решение:

$$a(t) = a_1 e^{H_0 t}, \quad H_0 = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} m |\Phi_0|. \quad (\text{I.49})$$

Решение (I.47) – (I.49) мы будем называть *стандартным решением* уравнений Эйнштейна - Клейна - Гордона соответственно его центральной роли в современном стандартном космологическом сценарии. В этой стандартной модели начало Вселенной, соответствующее космологической сингулярности $a = 0$, находится в бесконечно удаленном прошлом:

$$a(-\infty) = 0. \quad (\text{I.50})$$

Заметим, что уравнение Эйнштейна (II.9) в рассматриваемой модели имеет вид:

$$H^2 = H_0^2, \quad (\text{I.51})$$

I.3. Физическая неустойчивость мира де Ситтера

поэтому согласно (I.49) условие (I.44) эквивалентно условию:

$$|\Phi_0| \gg \sqrt{\frac{3}{8\pi}}, \quad (I.52)$$

т.е., выполняется только для очень больших значений потенциала скалярного поля.

Совершим теперь следующую итерацию для учета массивного члена в уравнении поля (II.8). Для этого подставим инфляционное решение уравнение Эйнштейна (I.49) в исходное уравнение скалярного поля (II.8)

$$\ddot{\Phi} + 3H_0\dot{\Phi} + m^2\Phi = 0 \quad (I.53)$$

и найдем его точное решение:

$$\begin{aligned} \Phi = C_1 \exp \left[-\frac{1}{2}(3H_0 + \sqrt{9H_0^2 - 4m^2})t \right] \\ + C_2 \exp \left[-\frac{1}{2}(3H_0 - \sqrt{9H_0^2 - 4m^2})t \right], \end{aligned} \quad (I.54)$$

в котором затем учтем условие (I.44). В результате получим:

$$\Phi \approx C_1 e^{-3H_0 t} + C_2 e^{-\frac{m^2}{3H_0} t}. \quad (I.55)$$

Первый член в этом решении быстро затухает при $t \rightarrow +\infty$, а второй член при условии малых значений временной переменной

$$|mt| \ll \frac{3H_0}{m} \equiv \sqrt{3}|\Phi_0| \quad (I.56)$$

остается приблизительно постоянным. Именно этот член и создает модель постоянного скалярного поля. Поэтому в согласии более точной модели “постоянного” скалярного поля в приближении (I.44) мы должны положить:

$$\Phi \approx \Phi_0 e^{-\frac{m^2}{3H_0} t}. \quad (I.57)$$

Используя полученное решение вместо стандартного (I.47), проверим выполнение исходного условия (I.45) (условие (I.44), как мы видели, сводится к условию (I.52) на величину скалярного потенциала):

$$\ddot{\Phi} \gg m^2\Phi \rightarrow 9H_0^2 \ll m^2; \quad (I.58)$$

$$\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} \gg m^2\Phi \rightarrow \frac{1}{3} \gg 1. \quad (I.59)$$

Таким образом, первое из этих условий, (I.58), грубо противоречит исходному условию (I.44), а второе условие, (I.59), противоречит элементарной логике. Заметим также, что вблизи космологической сингулярности $t \rightarrow -\infty$ этот член экспоненциально быстро стремится к бесконечности, при больших же временах $t \gg 3H_0/m^2$ экспоненциально быстро стремится к нулю $\Phi \rightarrow 0$. Поэтому при условии (I.56) и одновременно $H_0 t \gg 1$ мы получим:

$$\Phi \approx \Phi_0 e^{-\frac{m^2}{3H_0} t} \approx \Phi_0 \gg 1. \quad (\text{I.60})$$

Заметим, что вследствие (I.44) условие (I.56) гораздо слабее условия (I.45), поэтому инфляционное решение справедливо для времен гораздо больших комптоновских для скалярных бозонов:

$$t \ll t_c = \frac{\sqrt{3}|\Phi_0|}{m} \gg \frac{1}{m}. \quad (\text{I.61})$$

Заметим далее, что первый член в решении (I.55) вблизи космологической сингулярности экспоненциально быстро стремится к бесконечности, что уже указывает на неустойчивость решения (I.47).

Заметим, что поскольку мы имеем дело с космологической моделью, описываемой нелинейной системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений (II.8) и (II.9), то приближение медленного скатывания (I.44) должно распространяться на всю систему этих уравнений, а не на одиночное уравнение скалярного поля (II.8). Но в этом случае в уравнении Эйнштейна мы также сразу должны были бы отбросить массивный член, т.е., вместо (II.9) получить уравнение:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\dot{\Phi}^2. \quad (\text{I.62})$$

Но тогда подстановка решения (I.47) в это уравнение дало бы $\dot{\Phi}_0 = 0 \rightarrow a = \text{Const}$, т.е., вместо инфляции мы получили бы плоский мир Минковского. Таким образом, решение (I.47) $\Phi = \Phi_0$ является математически некорректным даже в приближении медленного скатывания.

Какое же решение является правильным в приближении медленного скатывания? Легко найти первый интеграл дифференциального уравнения (I.46):

$$a^3\dot{\Phi} = C_1 = \text{Const}. \quad (\text{I.63})$$

Решение (I.47) соответствует частному выбору константы $C_1 = 0$ в (I.63). Как это часто бывает в теории систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, частные решения, полученные отбрасыванием произвольных констант, оказываются неустойчивыми. Если мы положим в (I.63)

1.3. Физическая неустойчивость мира де Ситтера

$C_1 \neq 0$ и подставим полученный результат в уравнение Эйнштейна (II.9), то как раз в приближении медленного скатывания, т.е., для уравнения (I.62), сразу получим решение

$$a(t) = a_1 t^{1/3}; \quad a_1 = C_1^{1/3} (24\pi)^{1/6}, \quad (\text{I.64})$$

соответствующее *предельно - жесткому* уравнению состояния $p = \varepsilon$, т.е., $\kappa = +1$. Подстановка найденного масштабного фактора (I.64) в первый интеграл (I.63) дает окончательное решение уравнения поля в приближении медленного скатывания [30, 46]:

$$\Phi = C_2 + \frac{1}{\sqrt{24\pi}} \ln t, \quad (\text{I.65})$$

где C_2 – произвольная константа.

Утверждение 4 *Таким образом, стандартная модель основана на некорректном решении уравнений Эйнштейна - Клейна - Гордона в приближении медленного скатывания. Корректное решение этих уравнений в приближении медленного скатывания приводит к конечному началу Вселенной с предельно - жестким уравнением состояния вблизи космологической сингулярности.*

1.3.2.5 Неустойчивость стандартного решения в приближении медленного скатывания

1.3.3 Устойчивость стандартного решения

Рассмотрим возмущения стандартной модели, зависящие лишь от времени и вызываемые фактором массы m^2 , которую будем считать величиной одного порядка малости вместе с возмущениями $\delta(t)$ и $\phi(t)$:

$$a(t) = a_0(t)(1 + \delta(t)); \quad (\text{I.66})$$

$$\Phi(t) = \Phi_0(1 + \phi(t)), \quad (\text{I.67})$$

где $a_0(t) = a_1 e^{H_0 t}$, $H_0 = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} m |\Phi_0|$ – стандартное решение (I.49). Подставляя (I.67) в уравнение скалярного поля (II.8) и разлагая полученное уравнение в ряд по малости ϕ, δ, m^2 , в линейном приближении получим уравнение:

$$\ddot{\phi} + 3H_0 \dot{\phi} + m^2 = 0, \quad (\text{I.68})$$

решая которое, найдем (для упрощения записи мы положили $\Phi_0 > 0$):

$$\phi = C_1 + C_2 e^{-3H_0 t} - \frac{m^2}{3H_0} t,$$

причем мы должны положить $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, так как мы ищем не все решения волнового уравнения, а только те, которые исчезают при $m = 0$. Таким образом:

$$\phi = -\frac{m^2}{3H_0} t. \quad (\text{I.69})$$

Возмущение уравнения Эйнштейна в линейном по δ приближении приводит к уравнению:

$$\dot{\delta} = \frac{4\pi}{3H_0} \delta \varepsilon. \quad (\text{I.70})$$

Из (II.6) видно, что возмущение плотности энергии квадратично по возмущениям ϕ и m^2 . Подставляя решение (I.69) в уравнение (I.70), получим с учетом (I.49) и (I.52) уравнение на возмущение масштабного фактора:

$$\dot{\delta} = \frac{4\pi\Phi_0^2}{3H_0} \left(\frac{m^4}{9H_0^2} + m^2 \right) \equiv \frac{H_0}{2} \left(1 + \frac{1}{72\pi\Phi_0^2} \right) \approx \frac{H_0}{2} \quad (\text{I.71})$$

и, таким образом, найдем:

$$\delta = \frac{1}{2} H_0 t. \quad (\text{I.72})$$

Для развития инфляции необходимо $H_0 t \gg 1$, таким образом, в течение инфляционного периода *относительное* возмущение масштабного фактора становится большой величиной, следовательно стандартное решение неустойчиво. Это означает неустойчивость инфляционного решения по отношению к фактору массы.

Утверждение 5 *Инфляционное решение уравнений Эйнштейна (I.48) – (I.49) неустойчиво по отношению к фактору массы: возмущения метрики и скалярного поля вырастают до бесконечности в бесконечном прошлом.*

Последнее утверждение означает, что этого бесконечно удаленного прошлого просто не существовало.

I.4 Качественный анализ динамической системы СКМ

I.4.1 Приведение системы уравнений к каноническому виду

Выпишем еще раз систему дифференциальных уравнений СКМ: уравнение поля (II.8)

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + m^2\Phi = 0 \quad (\text{I.73})$$

и уравнение Эйнштейна (II.9)

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi(\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2). \quad (\text{I.74})$$

Во - первых, произведем масштабирование уравнений, переходя к новой безразмерной временной переменной τ

$$\tau = mt, \Rightarrow \dot{f} = mf', \quad (\text{I.75})$$

где $f' = df/d\tau$. Таким образом, получим вместо уравнений (I.73) и (I.74):

$$\Phi'' + 3h\Phi' + \Phi = 0; \quad (\text{I.76})$$

$$3h^2 = 8\pi(\Phi'^2 + \Phi^2), \quad (\text{I.77})$$

где $h(\tau)$ - постоянная Хаббла, измеренная в единицах комптоновского времени:

$$h(\tau) = \frac{a'}{a} = \frac{H}{m}. \quad (\text{I.78})$$

Заметим, что уравнения (II.11) и (II.12) представляют систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, которую с учетом условия

$$\dot{a} \geq 0 \Leftrightarrow H \geq 0 \quad (\text{I.79})$$

стандартной заменой можно привести к виду *нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости*:

$$\Phi' = Z(t); \quad (\text{I.80})$$

$$Z' = -3hZ - \Phi, \quad (\text{I.81})$$

где функция $h(\Phi, Z)$ алгебраически определяется из уравнения Эйнштейна с помощью функций $\Phi(\tau)$ и $Z(\tau)$:

$$h = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \sqrt{Z^2 + \Phi^2}. \quad (\text{I.82})$$

Таким образом, окончательно получим систему автономных дифференциальных уравнений динамической системы на плоскости (Φ, Z) :

$$\begin{cases} \Phi' = Z(t); \\ Z' = -\sqrt{24\pi}\sqrt{Z^2 + \Phi^2}Z - \Phi; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}. \quad (\text{I.83})$$

Эту систему уравнений можно исследовать с помощью качественной теории дифференциальных уравнений и определить асимптотическое поведение решений при $t \rightarrow \pm\infty$. Важным является следующее свойство СКМ.

Утверждение 6 *Эволюция Вселенной в стандартной космологической модели в терминах временной переменной τ не зависит от каких-либо параметров и полностью определяется начальными условиями.*

I.4.2 Особые точки динамической системы

Особые точки динамической системы $M_0(x_0, y_0)$ (II.18) определяются нулями производных (см, например, [56]):

$$P(x_0, y_0) = 0; \quad Q(x_0, y_0) = 0.$$

Нетрудно видеть, что динамическая система (II.18) имеет единственную особую точку:

$$M_0 = (0, 0) \longleftrightarrow \Phi_0 = 0; \quad Z_0 = 0. \quad (\text{I.84})$$

I.4.3 Тип особой точки

Для определения типа особой точки необходимо найти собственные числа характеристического многочлена:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) - \lambda & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{I.85})$$

где частные производные функций $P(x, y), Q(x, y)$ вычисляются в особой точке M_0 . Вычисляя производные от функций P, Q в (II.18), найдем:

$$\begin{aligned} Q'_x(0, 0) &= \lim_{Z \rightarrow 0} \lim_{\Phi \rightarrow 0} \left(-2\sqrt{6\pi} \frac{Z\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + Z^2}} - 1 \right) = \\ &= \lim_{\Phi \rightarrow 0} \lim_{Z \rightarrow 0} \left(-2\sqrt{6\pi} \frac{Z\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + Z^2}} - 1 \right) = -1; \end{aligned} \quad (\text{I.86})$$

I.4. Качественный анализ динамической системы СКМ

$$\begin{aligned} Q'_y(0,0) &= -2\sqrt{6\pi} \lim_{Z \rightarrow 0} \lim_{\Phi \rightarrow 0} \left(\frac{Z^2}{\sqrt{\Phi^2 + Z^2}} - \sqrt{\Phi^2 + Z^2} \right) \\ &= -2\sqrt{6\pi} \lim_{\Phi \rightarrow 0} \lim_{Z \rightarrow 0} \left(\frac{Z^2}{\sqrt{\Phi^2 + Z^2}} - \sqrt{\Phi^2 + Z^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, характеристический многочлен (II.20) равен:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда найдем его корни

$$\lambda = \pm i. \quad (\text{I.87})$$

Поскольку собственные числа оказались чисто мнимыми, то единственная особая точка (II.19) динамической системы (II.18) является центром (см. [56]). В этом случае при $\tau \rightarrow +\infty$ фазовая траектория динамической системы наматывается на этот центр, совершая бесконечное множество витков.

Утверждение 7 Фазовая траектория динамической системы, основанной на уравнении классического массивного скалярного поля (I.73) и уравнении Эйнштейна (I.74), имеет один центр (II.19), в котором:

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \Phi \rightarrow 0; \quad \dot{\Phi} \rightarrow 0 \Rightarrow H \rightarrow 0. \quad (\text{I.88})$$

Таким образом, вопреки широко распространенному мнению система не переходит в режим постоянной инфляции, а, наоборот, расширение останавливается и Вселенная становится плоской (см. Рис. 1).

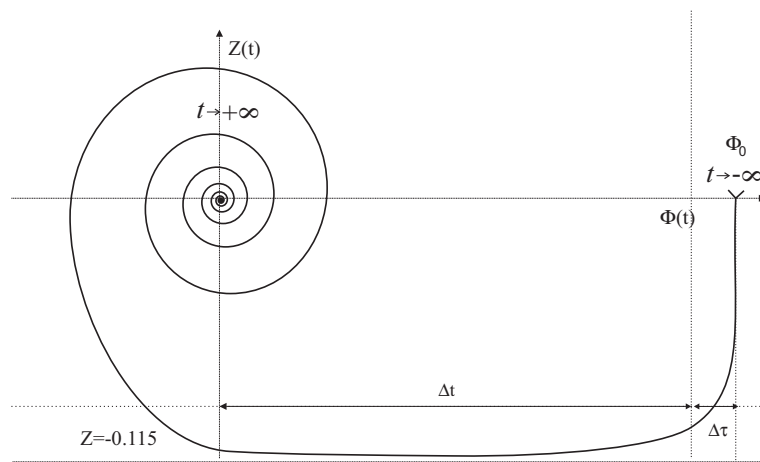


Рис. 1. Качественный вид фазовой траектории динамической системы (II.18).

I.5 Фазовые портреты динамической системы

Необходимо помнить, что временной переменной на всех графиках является τ , т.е., время, измеренное по комптоновской шкале. Поскольку вследствие утверждения 9 эволюция исследуемой динамической системы (II.18) определяется лишь начальными условиями, будем исследовать зависимость деталей эволюции от начальных условий. Далее, примем предположение, согласующееся с СКМ $\dot{\Phi}_0 = 0$. Приведем сначала результаты численного моделирования фазовых портретов динамической системы (II.18) при больших начальных значениях потенциала $\Phi_0 \geq 10$. Напомним, что одним из необходимых условий справедливости приближения медленного скатывания является $\Phi_0 \gg 1$ (I.60). Будем исследовать особенности фазовых траекторий в терминах графика на Рис. 1:

1. Начальная стадия длительностью $\Delta\tau$ с $\Phi \approx \Phi_0$ – правая часть графика; этой стадии характерно быстрое падение производной потенциала от 0 до «таинственного числа» -0.115 . На самом деле в этом числе ничего таинственного нет:

$$Z_0 = -\frac{1}{\sqrt{24\pi}} \approx -0.1151647165. \quad (\text{I.89})$$

На этой стадии, собственно, и происходит инфляция.

2. Средняя стадия длительностью Δt – средняя часть графика; на этой стадии $Z = \Phi' \approx \text{Const} = Z_0$. На этой стадии происходит падение потенциала до весьма малых величин.
3. Заключительная стадия эволюции с бесконечной длительностью; на этой стадии происходят затухающие колебания потенциала и его производной. При этом Вселенная становится асимптотически плоской.

Ниже на графиках представлены результаты численного моделирования динамической системы (II.18) при различных начальных условиях в лицензионном прикладном математическом пакете Maple XVII. Этот пакет позволяет как строить фазовые портреты двумерных динамических систем, так и проводить численное интегрирование различными методами. В данной работе применен метод Розенброка, хорошо приспособленный к интегрированию жестких систем. Поскольку интересующие нас характерные детали фазовых портретов системы (II.18) имеют несопоставимые масштабы, ниже мы представляем фрагменты фазовых портретов на разных временных интервалах.

I.5. Фазовые портреты динамической системы

I.5.1 Начальные условия: $\Phi(-1000) = 10, \dot{\Phi}(-1000) = 0$

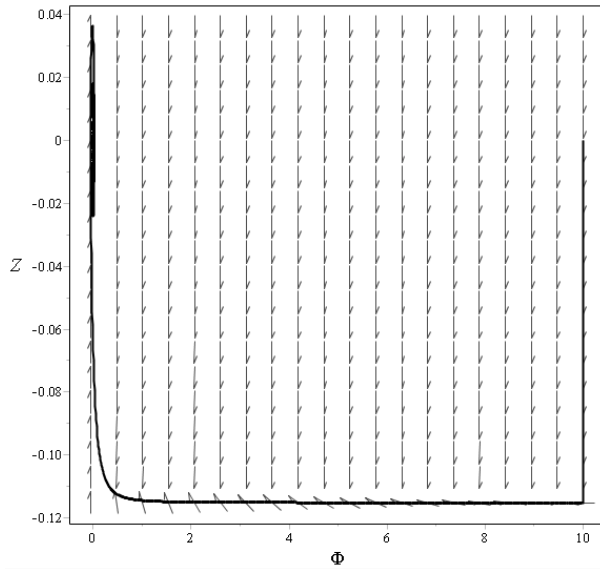


Рис. 2. Крупномасштабный фазовый портрет динамической системы (II.18) $\tau \in [-1000, 1000]$.

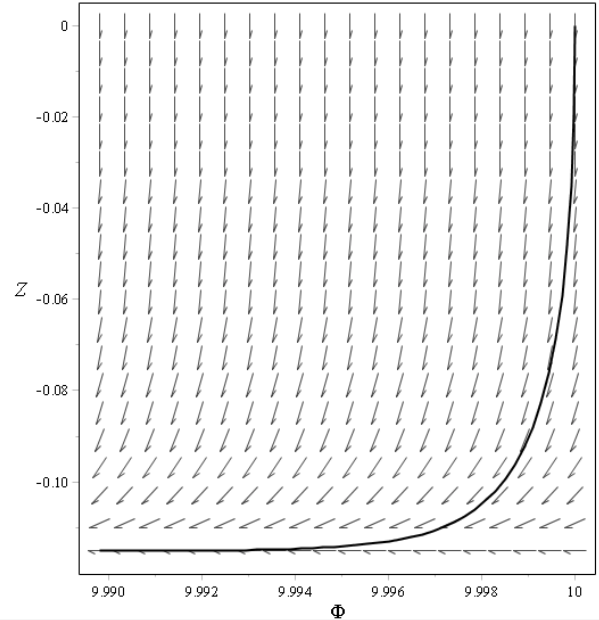


Рис. 3. Начальная стадия спуска динамической системы (II.18) (самая правая часть графика на Рис. 1) $\tau \in [-1000, -999.9]$; $\Delta\tau \lesssim 10^{-1}$.

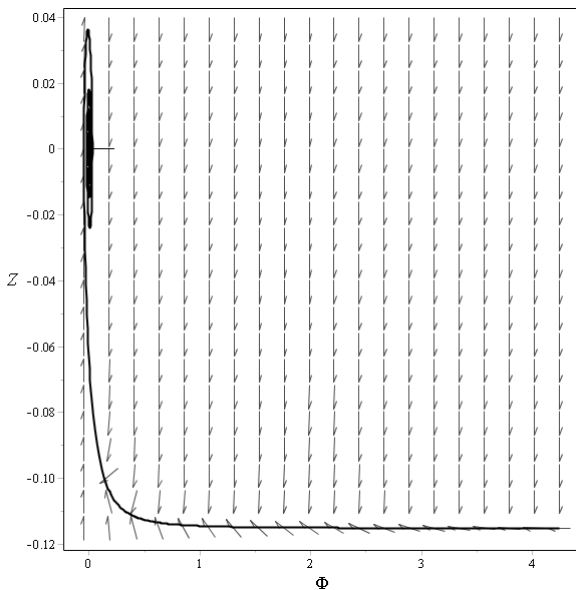


Рис. 4. Средняя стадия динамической системы (II.18) $\Phi' \approx \text{Const} \approx -0.115$ $\tau \in [-950, 100]$.

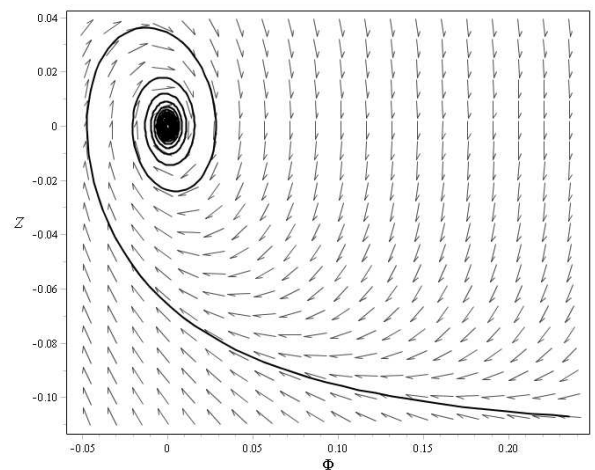


Рис. 5. Накручивание на центр $M_0 = (0, 0)$ динамической системы (II.18) (левая часть графика на Рис. 1) $\tau \in [-915, -700]$.

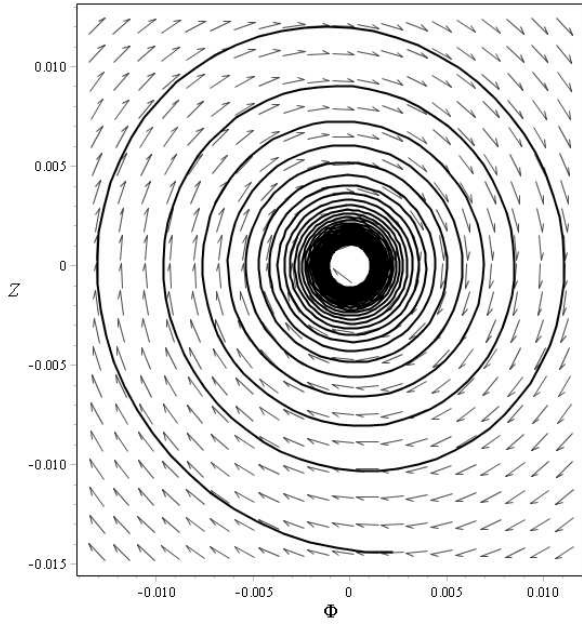


Рис. 6. Конечная стадия динамической системы (II.18): накручивание на центр $M_0 = (0, 0)$ при начальных условиях: $\Phi(-1000) = 10, \dot{\Phi}(-1000) = 0; \tau \in [-900, -700]$.

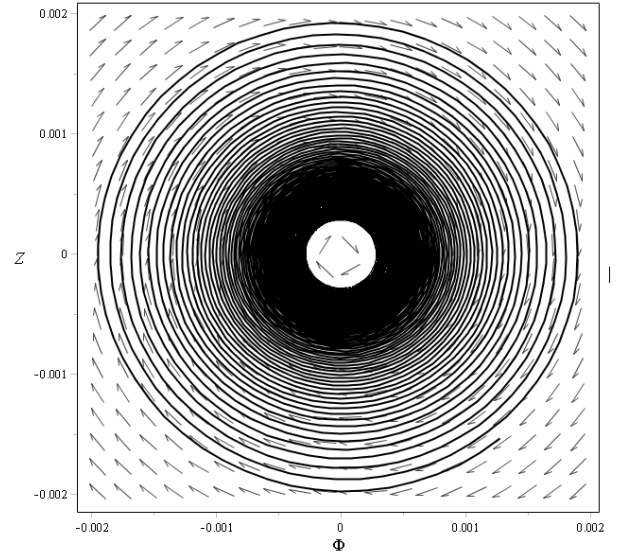


Рис. 7. Конечная стадия динамической системы (II.18): накручивание на центр $M_0 = (0, 0)$ динамической системы (II.18) (левая часть графика на Рис. 1) $\tau \in [-800, -100]$.

I.5.2 Начальные условия: $\Phi(-1000) = 1, \dot{\Phi}(-1000) = 0$

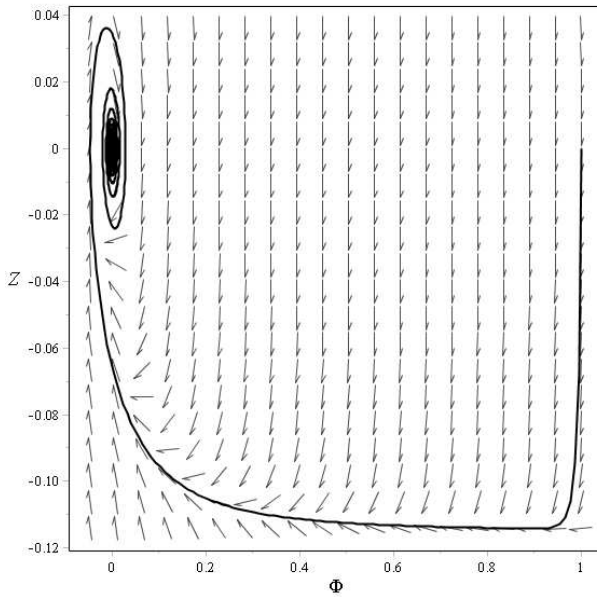


Рис. 8. Крупномасштабный фазовый портрет динамической системы (II.18) $\tau \in [-1000, 0]$.

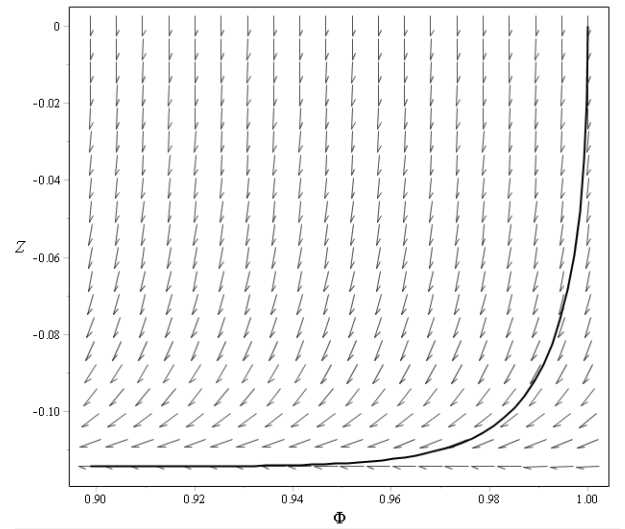


Рис. 9. Начальная стадия спуска динамической системы (II.18) (самая правая часть графика на Рис. 1) $\tau \in [-1000, -999]; \Delta\tau \lesssim 1$.

I.5. Фазовые портреты динамической системы

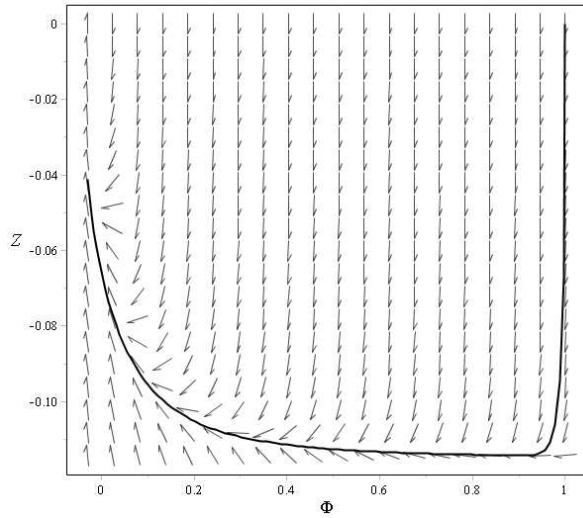


Рис. 10. Средняя стадия динамической системы (II.18) $\Phi' > \text{Const} = -0.115$ $\tau \in [-1000, -990]$.

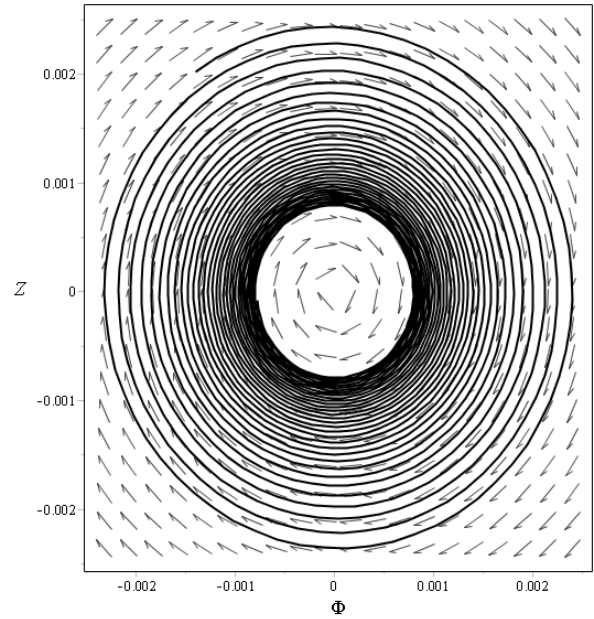


Рис. 11. Накручивание на центр $M_0 = (0,0)$ динамической системы (II.18) (левая часть графика на Рис. 1) $\tau \in [-950, -850]$.

I.5.3 Начальные условия: $\Phi(-1000) = 0.1, \dot{\Phi}(-1000) = 0$

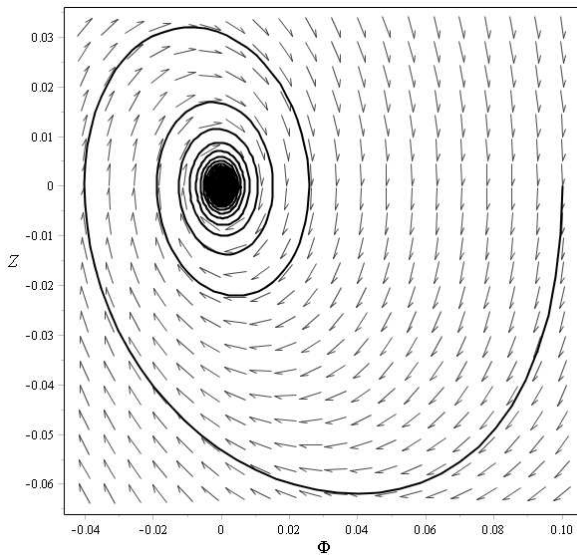


Рис. 12. Крупномасштабный фазовый портрет динамической системы (II.18) $\tau \in [-1000, 1000]$.

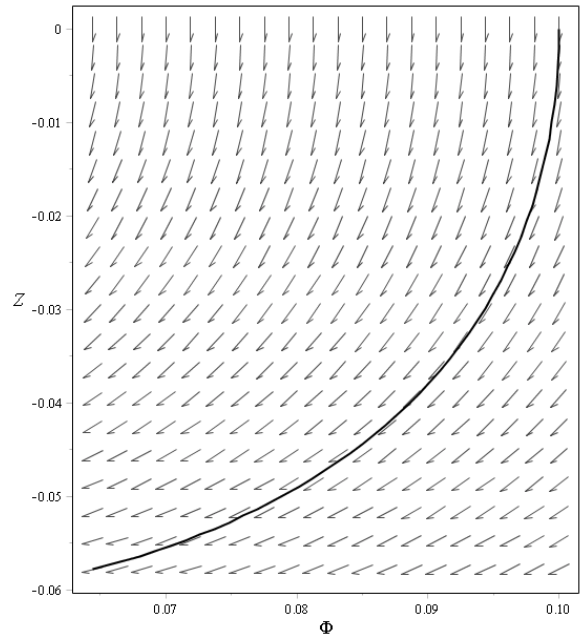


Рис. 13. Начальная стадия спуска динамической системы (II.18) (самая правая часть графика на Рис. 1) $\tau \in [-1000, -999]$; $\Delta\tau \lesssim 1$.

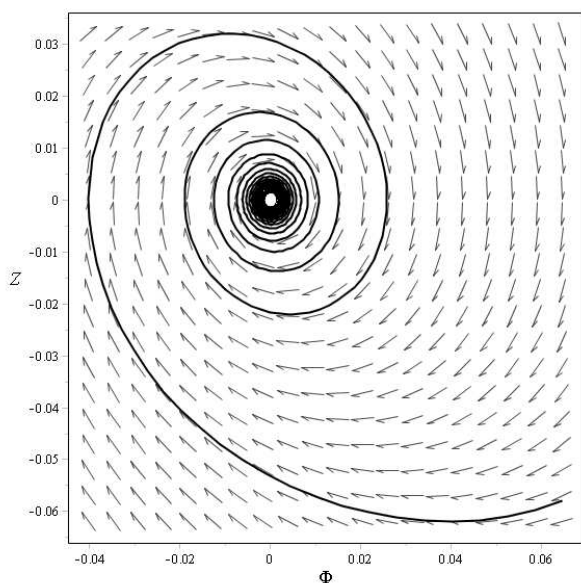


Рис. 14. Средняя стадия динамической системы (II.18) $\Phi' \approx \text{Const} \approx -0.115$ $\tau \in [-999, -850]$.

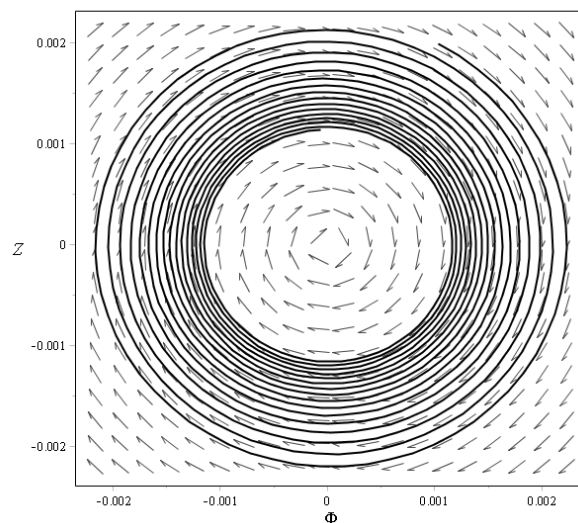


Рис. 15. Накручивание на центр $M_0 = (0,0)$ динамической системы (II.18) (левая часть графика на Рис. 1) $\tau \in [-900, -800]$.

I.6 Численное интегрирование динамических уравнений

I.6.1 Эволюция потенциала и его производной

Фазовые портреты динамической системы (II.18), представленные на Рис. 2 – 15, однако, не дают информацию о некоторых деталях космологической эволюции, которые возможно получить лишь прямым численным интегрированием исходной системы уравнений Эйнштейна - Клейна - Гордона. Ниже мы приведем результаты численного интегрирования этих уравнений методом Розенброка. Прежде всего приведем крупномасштабный фазовый портрет средней и конечной стадии эволюции космологической модели, полученный прямым численным интегрированием системы уравнений (II.18) и, фактически, полностью воспроизводящий эскиз фазового портрета на Рис. 1.

1.6. Численное интегрирование динамических уравнений

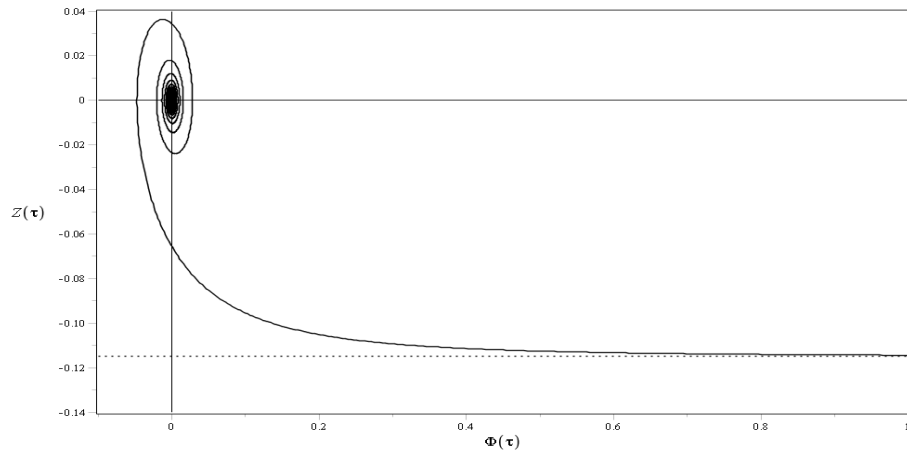


Рис. 16. Фазовый портрет динамической системы (II.18), полученный прямым численным интегрированием методом Розенброка системы (II.18) с начальными условиями: $\Phi(-100) = 100$; $\dot{\Phi}(-100) = 0$; $\tau \in [640, 1000]$.

Далее, приведем графики функций $\Phi(\tau)$ и $Z(\tau)$. Эти графики ввиду их особенностей также приходится просматривать на различных масштабах и интервалах.

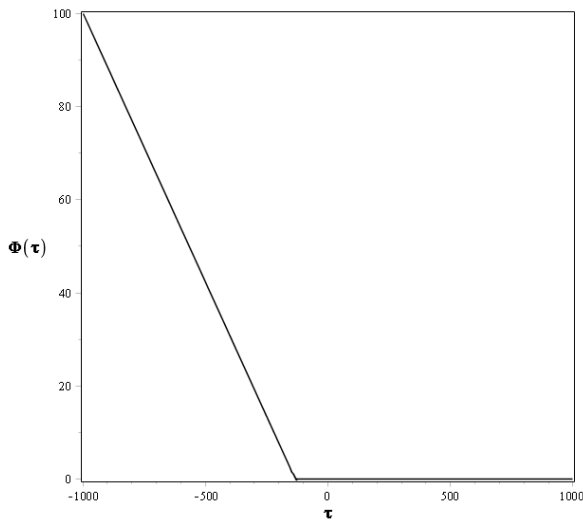


Рис. 17. Крупномасштабное поведение потенциала $\Phi(\tau)$ при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100$, $\dot{\Phi}(-1000) = 0$; $\tau \in [-1000, 1000]$.

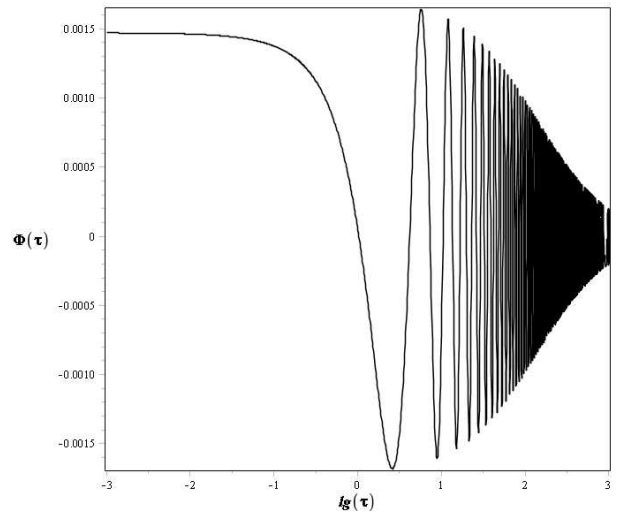


Рис. 18. Заключительная стадия эволюции скалярного потенциала $\Phi(\tau)$ при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100$, $\dot{\Phi}(-1000) = 0$ в логарифмической шкале времени; $\tau \in [0.001, 1000]$.

Как видно из этих и нижеприведенных графиков, величина потенциала падает практически линейно по времени на интервале $\tau \in [-1000, -100]$ по приближенному закону: $\Phi(\tau) = \Phi_0 - 0.1(\tau - \tau_0)\Delta\tau$. С момента $\tau \approx -100$ потенциал эволюционирует по закону затухающих колебаний.

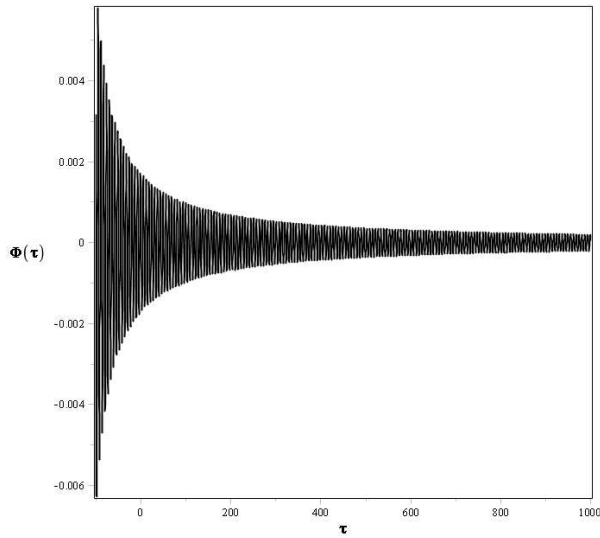


Рис. 19. Переход графика потенциала $\Phi(\tau)$ на колебательный режим при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$; $\tau \in [-100, 1000]$.

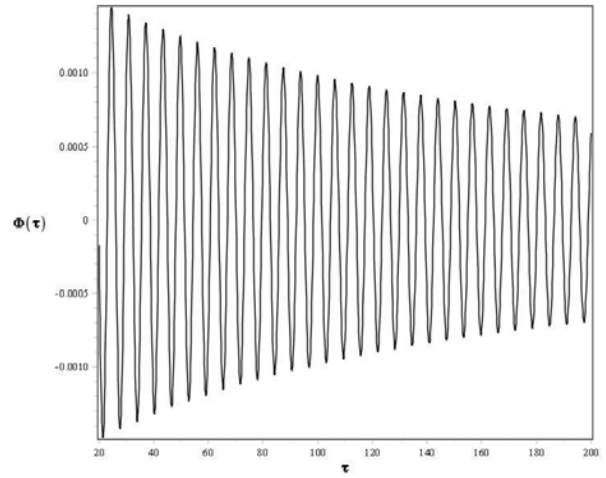


Рис. 20. Режим затухающих колебаний скалярного потенциала $\Phi(\tau)$ при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$; $\tau \in [20, 200]$.

На следующих графиках показаны аналогичные режимы производной потенциала.

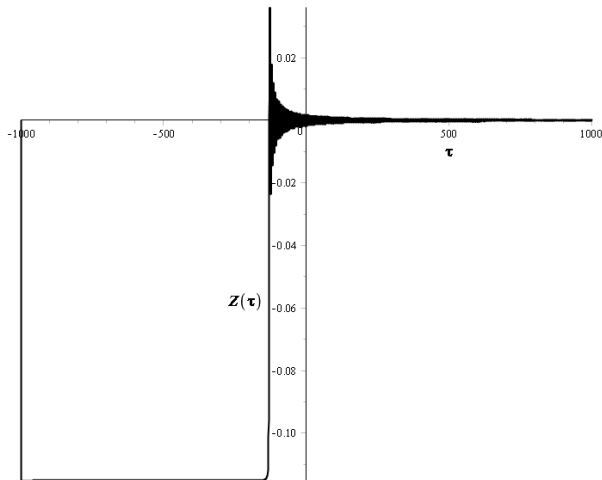


Рис. 21. Крупномасштабное поведение производной потенциала $\Phi'(\tau)$ при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$; $\tau \in [-1000, 1000]$. На дне графика $\Phi'(\tau) \approx Z_0$ в согласии с (VIII.117).

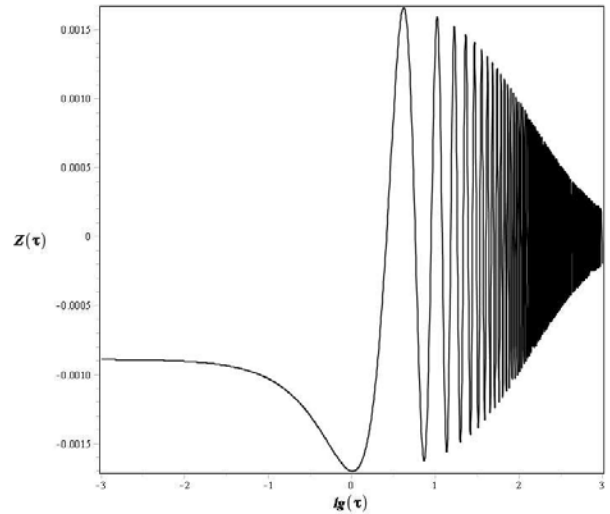


Рис. 22. Заключительная стадия эволюции производной скалярного потенциала $Z(\tau) = \Phi'(\tau)$ при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ в логарифмической шкале времени; $\tau \in [0.001, 1000]$.

I.6.2 Эволюция постоянной Хаббла, космологического ускорения и масштабного фактора

«Постоянная» Хаббла, $H(t)$, связана простым соотношением (II.13) с нормированной на массу скалярного поля m «постоянной» $h(\tau)$, которая вычисля-

1.6. Численное интегрирование динамических уравнений

ется по формуле (II.17). Вследствие инвариантности космологического ускорения Ω относительно масштабирования временной переменной $t = \tau/m$, космологическое ускорение можно вычислить по формуле, совпадающей с (IX.70), делая в ней замену $H(t) \rightarrow h(\tau)$:

$$\Omega = 1 + \frac{h'}{h^2}. \quad (\text{I.90})$$

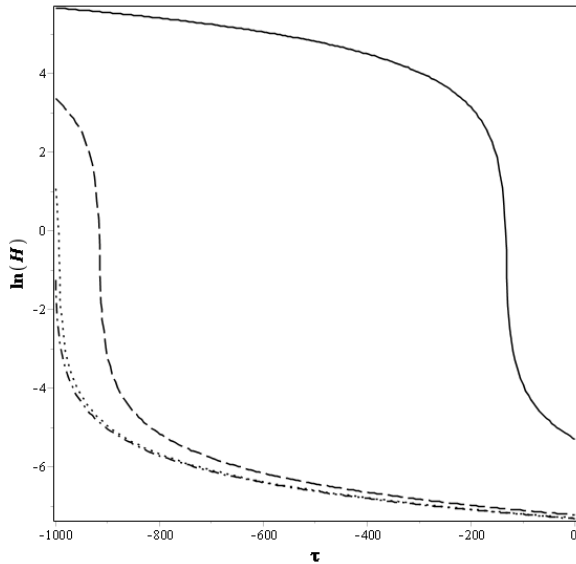


Рис. 23. Крупномасштабное поведение логарифма нормированной постоянной Хаббла $h(\tau)$ при начальных условиях: $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – сплошная линия; $\Phi(-1000) = 10, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – пунктирная линия; $\Phi(-1000) = 1, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – точечная линия; $\Phi(-1000) = 0.1, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – точечно - пунктирная линия.

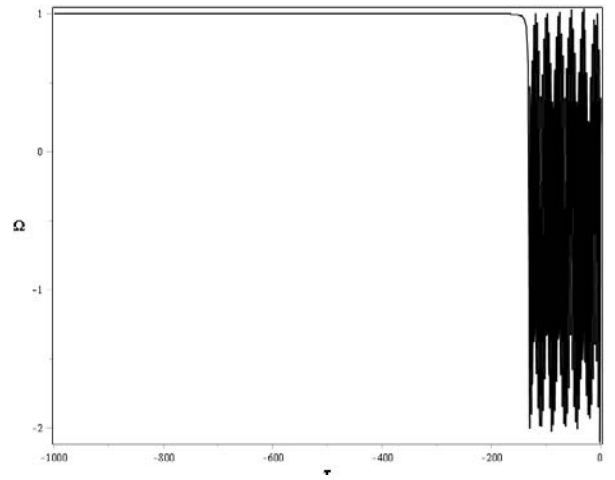


Рис. 24. Крупномасштабное поведение космологического ускорения $\Omega(\tau)$ при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$.

На Рис. 25 показано детальное поведение космологического ускорения. Далее, масштабный фактор находится интегрированием (II.13):

$$L(\tau) \equiv \ln a(\tau) = \int h d\tau.$$

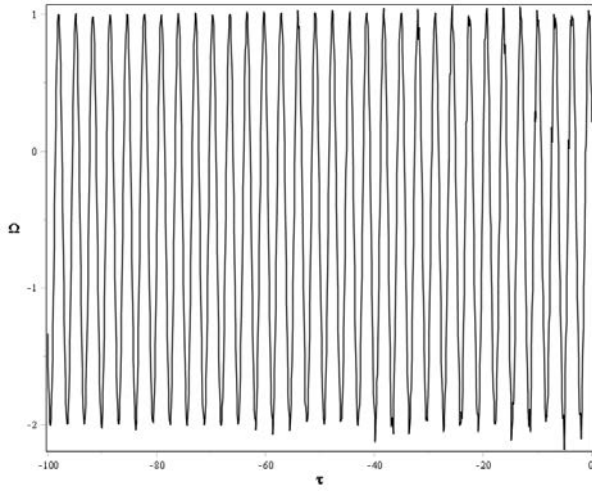


Рис. 25. Детальное поведение космологического ускорения $\Omega(\tau)$ на этапе колебаний при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$.

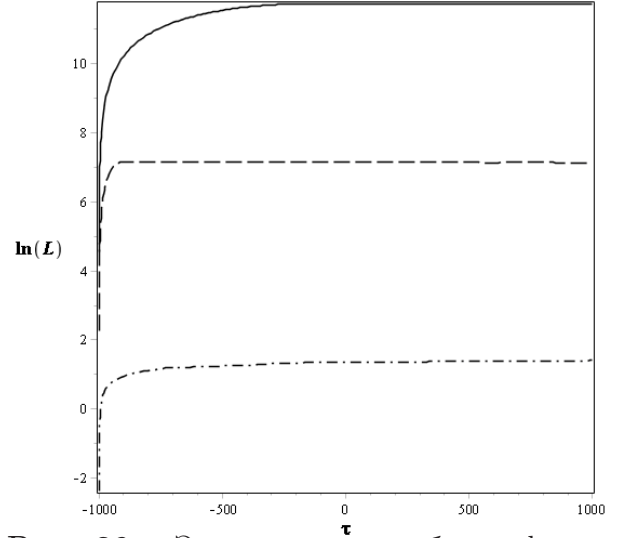


Рис. 26. Эволюция масштабного фактора при начальных условиях: $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – сплошная линия; $\Phi(-1000) = 10, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – пунктирная линия; $\Phi(-1000) = 0.1, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – точечно - пунктирная линия. На графике показаны значения $\ln L$, где $L = \ln a(\tau)$.

I.6.3 Среднее значение космологического ускорения

Тот факт, что инвариантное космологическое ускорения имеет колебательный характер на больших временах (Рис. 25), причем период этих колебаний во временной шкале τ порядка 2π , т.е., в обычной шкале времени t $2\pi/m$ является явно микроскопической величиной побуждает нас ввести среднюю величину инвариантного космологического ускорения, усредненную по достаточно большому числу колебаний, т.е., по достаточно большому промежутку $\Delta\tau \gg 1$:

$$\overline{\Omega(\tau, \Delta\tau)} \equiv \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \Omega(\tau') d\tau'. \quad (\text{I.91})$$

Используя в (I.91) формулу (I.90) и проводя элементарное интегрирование, получим для среднего космологического ускорения следующее выражение:

$$\overline{\Omega(\tau, \Delta\tau)} = 1 + \frac{1}{\Delta\tau} \left(\frac{1}{h(\tau)} - \frac{1}{h(\tau + \Delta\tau)} \right). \quad (\text{I.92})$$

На Рис. 27 приведены графики зависимости среднего ускорения от времени τ .

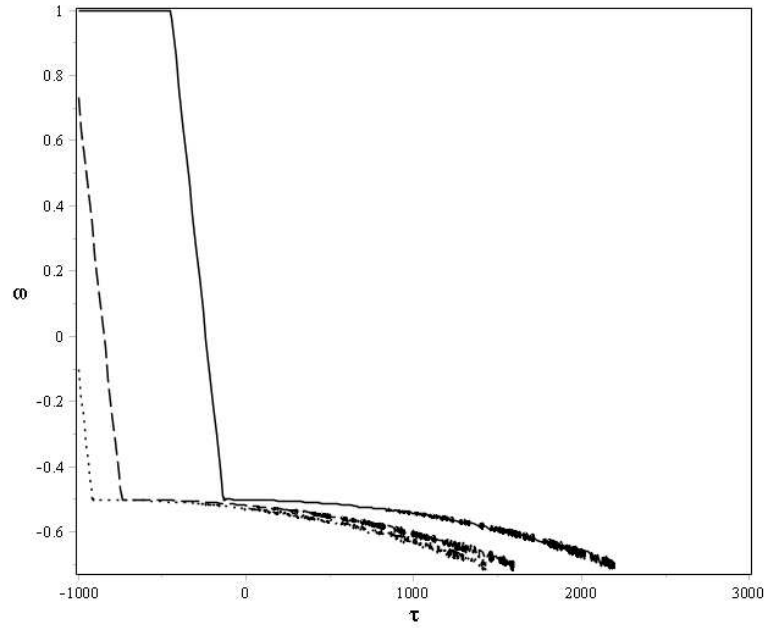


Рис. 27. Зависимость среднего ускорения $\overline{\Omega}(\tau, \Delta\tau)$ (I.91) от времени τ при начальных условиях: $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – сплошная линия; $\Phi(-1000) = 30, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – пунктирная линия; $\Phi(-1000) = 10, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – точечная линия. Всюду принято $\Delta\tau = 20\pi$.

Что можно заключить, рассматривая этот рисунок? Во-первых, мы видим, как макроскопическое космологическое ускорение резко падает по окончании стадии инфляции ($\overline{\Omega} = +1$) до значения $\overline{\Omega} = -\frac{1}{2}$, а затем – медленно стремится к значению $\overline{\Omega} = -1$. Во-вторых, заметим, что инвариантное космологическое ускорение следующим образом связано с коэффициентом баратропы κ :

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\kappa).$$

Отсюда следует, что значение $\Omega = 1$ соответствует значению $\kappa = -1$, значение $\Omega = -1/2$ – значению $\kappa = 0$ и, наконец, значение $\Omega = -1$ – значению $\kappa = 1/3$.

Утверждение 8 Таким образом, космологическая динамическая система, основанная на уравнениях Эйнштейна - Клейна - Гордона, обладает следующим свойством: макроскопическая космологическая эволюция этой системы имеет 3 этапа:

инфляционный этап: $\overline{\Omega} = +1; \overline{\kappa} = -1;$

резкий переход к нерелятивистскому этапу: $\overline{\Omega} = -\frac{1}{2}; \overline{\kappa} = 0;$

Глава I. Стандартная космологическая модель: качественный и численный анализ

постепенное сползание, по - видимому, к ультрарелятивистскому этапу:
 $\bar{\Omega} \rightarrow -1; \bar{\kappa} \rightarrow \frac{1}{3}$.

Глава II

Качественный и численный анализ стандартной космологической модели с Λ - членом

II.1 Уравнения Эйнштейна с космологическим членом для Вселенной Фридмана с нулевой трехмерной кривизной

Рассмотрим уравнения Эйнштейна с космологическим членом¹:

$$G_k^i = \Lambda \delta_k^i + 8\pi T_k^i \quad (\text{II.1})$$

и будем полагать в дальнейшем космологический член неотрицательным:

$$\Lambda \geq 0. \quad (\text{II.2})$$

Как и в предыдущей статье [30]([46]), рассмотрим в качестве материи классическое скалярное массивное поле:

$$T_k^i = 2\Phi^{,i}\Phi_{,k} - \delta_k^i \Phi_{,j}\Phi^{,j} + \delta_k^i m^2 \Phi^2, \quad (\text{II.3})$$

где m - масса квантов этого поля. Уравнение скалярного поля получается из тождеств Бианки $T_{k,i}^i = 0$:

$$\square\Phi + m^2\Phi = 0, \quad (\text{II.4})$$

где

$$\square\Phi = g^{ik}\Phi_{,ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \Phi \quad (\text{II.5})$$

¹Здесь и в дальнейшем принята Планковская система единиц $\hbar = c = G = 1$; метрика имеет сигнатуру $(-1, -1, -1, +1)$, тензор Риччи получается из тензора Римана сверткой первого и третьего индексов.

есть оператор д'Аламбера. Для однородной вселенной $\Phi = \Phi(t)$, и тензор энергии - импульса скалярного поля принимает изотропную структуру, где

$$\varepsilon = \dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2; \quad p = \dot{\Phi}^2 - m^2\Phi^2, \quad (\text{II.6})$$

так что

$$\varepsilon + p = 2\dot{\Phi}^2, \quad (\text{II.7})$$

а уравнение поля (II.4) принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + m^2\Phi = 0. \quad (\text{II.8})$$

В тоже время единственное независимое уравнение Эйнштейна есть²:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Lambda + 8\pi(\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2). \quad (\text{II.9})$$

II.2 Качественный анализ динамической системы СКМ

II.2.1 Приведение системы уравнений к каноническому виду

Во - первых, произведем масштабирование уравнений, переходя к новой безразмерной временной переменной τ

$$\tau = mt, \Rightarrow \dot{f} = mf', \quad (\text{II.10})$$

где $f' = df/d\tau$. Таким образом, получим вместо уравнений (II.8) и (II.9):

$$\Phi'' + 3h\Phi' + \Phi = 0; \quad (\text{II.11})$$

$$3H_m^2 = \Lambda_m + 8\pi(\Phi'^2 + \Phi^2), \quad (\text{II.12})$$

где $H_m(\tau)$ и Λ_m – постоянная Хаббла и космологическая постоянная, измеренные в единицах комптоновского времени:

$$H_m(\tau) = \frac{a'}{a} = \frac{H}{m}; \quad \Lambda_m = \frac{\Lambda}{m^2}. \quad (\text{II.13})$$

Заметим, что уравнения (II.11) и (II.12) представляют систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, которую с учетом условия

$$\dot{a} \geq 0 \Leftrightarrow H \geq 0 \quad (\text{II.14})$$

²В дальнейшем в этой статье мы будем рассматривать модель с $\Lambda = 0$.

II.2. Качественный анализ динамической системы СКМ

стандартной заменой можно привести к виду *нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости*:

$$\Phi' = Z(t); \quad (\text{II.15})$$

$$Z' = -3H_m Z - \Phi, \quad (\text{II.16})$$

где функция $H_m(\Phi, Z)$ алгебраически определяется из уравнения Эйнштейна с помощью функций $\Phi(\tau)$ и $Z(\tau)$:

$$H_m = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\Lambda_m + 8\pi(Z^2 + \Phi^2)}. \quad (\text{II.17})$$

Таким образом, окончательно получим систему автономных дифференциальных уравнений динамической системы на плоскости (Φ, Z) :

$$\begin{cases} \Phi' = Z(t); \\ Z' = -\sqrt{3\pi} \sqrt{\Lambda_m + 8\pi(Z^2 + \Phi^2)} Z - \Phi; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}. \quad (\text{II.18})$$

Эту систему уравнений можно исследовать с помощью качественной теории дифференциальных уравнений и определить асимптотическое поведение решений при $t \rightarrow \pm\infty$. Важным является следующее свойство СКМ.

Утверждение 9 *Эволюция Вселенной в стандартной космологической модели с космологическим членом в терминах временной переменной τ определяется только одним параметра Λ_m и начальными условиями.*

Заметим, что если масса бозонов – квантов скалярного поля намного меньше планковской, т.е., в планковских единицах $m \ll 1$, то $\Lambda_m \gg \Lambda$, следовательно, есть вероятность того, что даже при $\Lambda \ll 1$ нормированная константа Λ_m может быть достаточно большой величиной.

II.2.2 Особые точки динамической системы

Особые точки динамической системы $M_0(x_0, y_0)$ (II.18) определяются нулями производных (см, например, [56]):

$$P(x_0, y_0) = 0; \quad Q(x_0, y_0) = 0.$$

Нетрудно видеть, что динамическая система (II.18), как и в случае $\Lambda \equiv 0$, имеет единственную особую точку:

$$M_0 = (0, 0) \longleftrightarrow x_0 = \Phi_0 = 0; \quad y_0 = Z_0 = 0. \quad (\text{II.19})$$

II.2.3 Тип особой точки

Для определения типа особой точки необходимо найти собственные числа характеристического многочлена:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) - \lambda & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{II.20})$$

где частные производные функций $P(x, y), Q(x, y)$ вычисляются в особой точке M_0 . Вычисляя производные от функций P, Q в (II.18), найдем:

$$\begin{aligned} P'_x(0, 0) &= 0; & Q'_y(0, 0) &= 1; \\ Q'_x(0, 0) &= -1; & Q'_y(0, 0) &= -\sqrt{3\Lambda_m} \end{aligned}$$

Таким образом, характеристический многочлен (II.20) равен:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda - \sqrt{3\Lambda_m} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда найдем его корни

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda_m} + \frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda_m - 4}; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda_m} - \frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda_m - 4}. \quad (\text{II.21})$$

Собственные числа удовлетворяют тождеству:

$$\lambda_1 \lambda_2 \equiv 1. \quad (\text{II.22})$$

Таким образом, возможны три принципиально различных случая (см. [56]):

1. Случай малого значения космологического члена:

$$\Lambda_m < \frac{4}{3} \quad (\text{II.23})$$

– тогда мы имеем два комплексно сопряженных собственных числа, причем

$$\text{Re}(\lambda) = -\frac{\sqrt{3\Lambda_m}}{2} < 0. \quad (\text{II.24})$$

В этом случае согласно качественной теории дифференциальных уравнений точка $M_0 : \Phi = 0, \dot{\Phi} = 0$ является *притягивающим фокусом*, –

II.2. Качественный анализ динамической системы СКМ

все фазовые траектории динамической системы при $\tau \rightarrow +\infty$ являются скручивающимися спиралями, наматывающимися на особую точку и совершающими при этом бесконечное количество витков. Этот случай, фактически, качественно совпадает с рассмотренным ранее [30]([46]).

2. Случай большого значения космологического члена:

$$\Lambda_m > \frac{4}{3} \quad (\text{II.25})$$

– тогда мы имеем два различных вещественных и согласно (II.21) отрицательных собственных числа $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. В этом случае особая точка является *устойчивым притягивающим узлом*. При $\tau \rightarrow +\infty$ все фазовые траектории динамической системы входят в особую точку, причем все траектории, кроме исключительных двух, при входе в особую точку касательны к собственному вектору \mathbf{u}_1 , отвечающему минимальному по модулю собственному числу, т.е., λ_1 . Две исключительные траектории касательны ко второму собственному вектору \mathbf{u}_2 . Указанные собственные векторы равны:

$$\mathbf{u}_1 = (1, \lambda_1); \quad \mathbf{u}_2 = (1, \lambda_2). \quad (\text{II.26})$$

Угол α между собственными векторами определяется соотношением:

$$\cos \alpha \equiv \frac{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2}{\sqrt{\mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2^2}} = \sqrt{\frac{4}{3\Lambda_m}} < 1. \quad (\text{II.27})$$

При очень больших значениях Λ_m угол между собственными векторами стремится к $\pi/2$, при $\Lambda_m \rightarrow 4/3$ угол стремится к нулю.

3. Вырожденный случай:

$$\Lambda_m = \frac{4}{3} \quad (\text{II.28})$$

– Этот случай практически совпадает с предыдущим с учетом лишь того обстоятельства, что все траектории входят в особую точку касательно к единственному собственному вектору – это как раз и соответствует указанному выше предельному случаю $\alpha \rightarrow 0$.

Утверждение 10 Таким образом, главный вывод предыдущей работы [30] ([46]) сохраняется: фазовая траектория динамической системы, основанной на уравнении классического массивного скалярного поля (II.8) и уравнении Эйнштейна (II.9), в плоскости (Φ, Z) имеет одну нулевую особую точку (притягивающий фокус или притягивающий устойчивый узел) (II.19), в котором:

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \Phi \rightarrow 0; \quad \dot{\Phi} \rightarrow 0 \Rightarrow H \rightarrow \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (\text{II.29})$$

Изменяются лишь тип особой точки и вместе с этим детали приближения фазовых траекторий к особой точке $\Phi = 0, \dot{\Phi} = 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

II.2.4 Асимптотическое поведение масштабного фактора

Поскольку при $\tau \rightarrow +\infty$ (или $t \rightarrow +\infty$) $\Phi \rightarrow 0$ и $\dot{\Phi} \rightarrow 0$, то при отсутствии других видов материи, кроме скалярного поля, Вселенная остается наедине с Λ - членом, поэтому вследствие уравнения Эйнштейна (II.9) масштабный фактор эволюционирует по инфляционному закону:

$$a(t) \sim e^{H_0 t}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (\text{II.30})$$

где H_0 – постоянная Хаббла:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \equiv m \sqrt{\frac{\Lambda_m}{3}}. \quad (\text{II.31})$$

На ранних стадиях $\tau \rightarrow -\infty$, до тех пор, пока:

$$\Phi(\tau) \approx \Phi_0 = \text{Const}; \quad \longrightarrow 8\pi\Phi_0^2 \gg \Lambda_m, \quad (\text{II.32})$$

$$H(t) \approx H_1 = \frac{m}{\sqrt{3}} \sqrt{\Lambda_m + 8\pi\Phi_+^2} > H_0 \quad (\text{II.33})$$

имеет место ранняя инфляция:

$$a(t) \sim e^{H_1 t}, \quad t \rightarrow -\infty \quad (\text{II.34})$$

Утверждение 11 Таким образом, инвариантное космологическое ускорение

$$\Omega = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (\text{II.35})$$

II.3. Фазовые траектории динамической системы

при $\Lambda \neq 0$ стремится к единице на ранних и поздних стадиях:

$$\Omega(t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \pm\infty. \quad (\text{II.36})$$

Вместе с тем, «постоянная» Хаббла имеет постоянные значения в этих предельных случаях:

$$H(t) \rightarrow H_1; (t \rightarrow -\infty), \quad H(t) \rightarrow H_0; (t \rightarrow +\infty); \quad (H_1 > H_0). \quad (\text{II.37})$$

II.3 Фазовые траектории динамической системы

Приведем характерные примеры фазовых портретов динамической системы (II.18), полученных методами численного моделирования в прикладном математическом пакете Maple XVII.

II.3.1 Малые значения Λ : $\Lambda_m = 0.1 < \frac{4}{3}$

В этом случае конечным пунктом фазовой траектории является притягивающий фокус (II.19) $\Phi_0 = 0$; $y_0 = Z_0 = 0$.

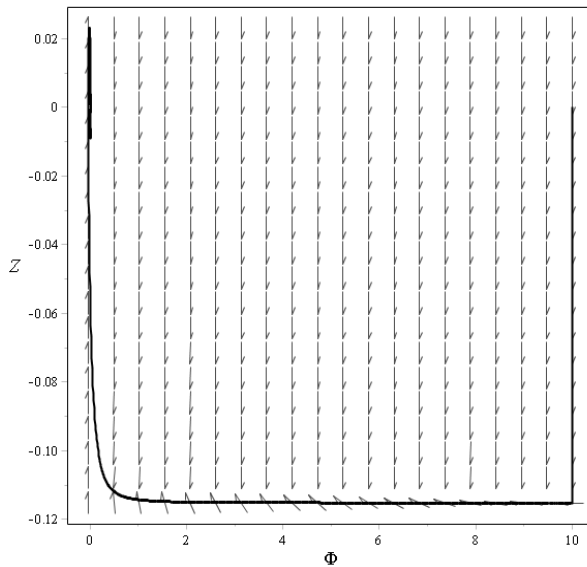


Рис. 28. Крупномасштабная картина фазовой траектории $\tau \in [-1000, 1000]$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

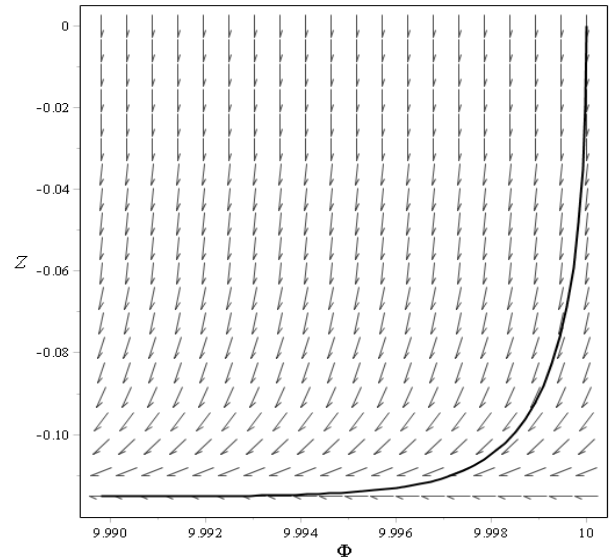


Рис. 29. Этап спуска фазовой траектории на временах $\tau \in [-1000, -999.9]$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

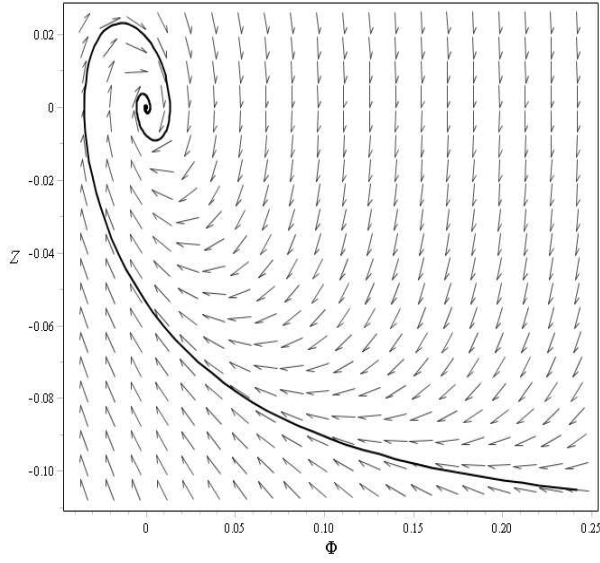


Рис. 30. Этап накручивания фазовой траектории на притягивающий фокус: $\tau \in [-915, -700]$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

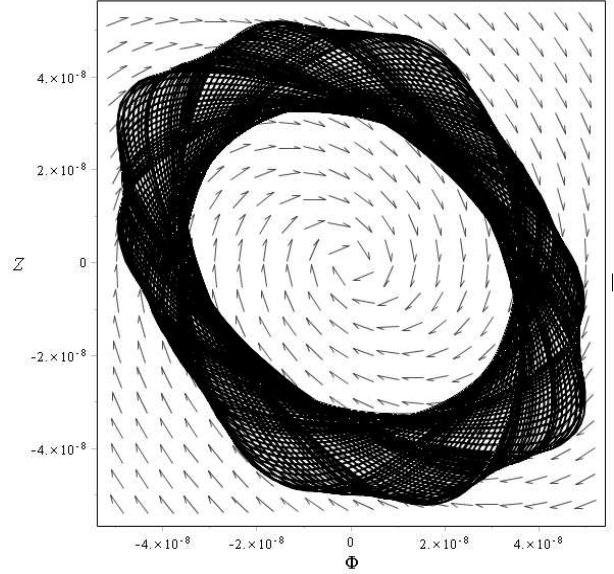


Рис. 31. Конечный этап фазовой траектории – скручивающаяся спиралевидная линия: $\tau \in [-800, -100]$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

II.3.2 Большие значения Λ : $\Lambda_m = 10 > \frac{4}{3}$

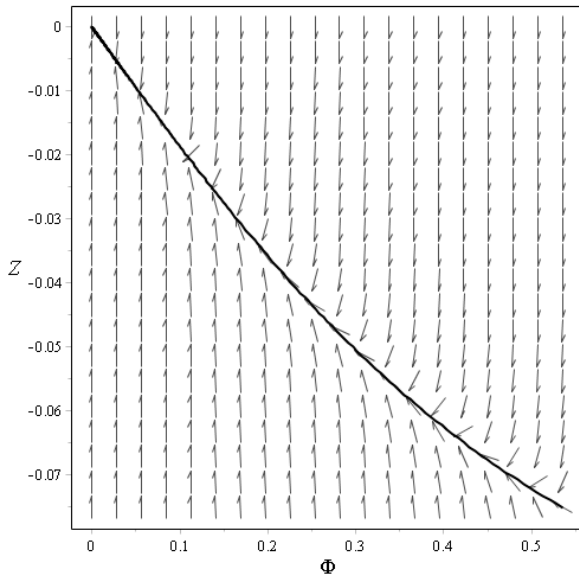


Рис. 32. Приближение к притягивающему узлу фазовой траектории: $\tau \in [85, 1000]$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

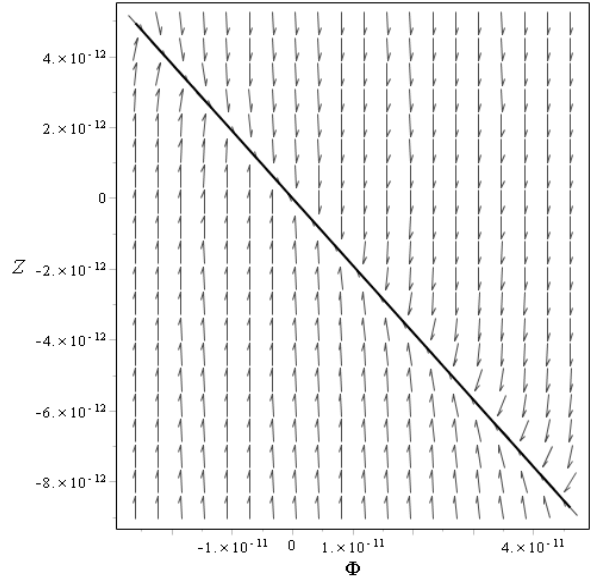


Рис. 33. Прохождение через притягивающий узел фазовой траектории: $\tau \in [900, 1000]$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

В этом случае конечным пунктом фазовой траектории является устойчивый притягивающий узел (II.19) $\Phi_0 = 0$; $y_0 = Z_0 = 0$. Крупномасштабная картина фазовой траектории качественно не отличается от предыдущей, однако,

способ вхождения в особую точку изменяется (Рис. 32 – 33).

II.4 Численное моделирование динамической системы

Фазовые портреты динамической системы (II.18), представленные на Рис. 28 – 31, однако, не дают информацию о некоторых деталях космологической эволюции, которые возможно получить лишь прямым численным интегрированием исходной системы уравнений Эйнштейна - Клейна - Гордона. Кроме того, они не дают информации об исходной трехмерной динамической системе, включающей также и уравнение Эйнштейна (II.9), а также о наблюдаемых космологических скалярах $H(t)$ и $\Omega(t)$. Для получения этой информации необходимо применить методы прямого численного интегрирования исходной системы дифференциальных уравнений. Ниже мы приведем результаты численного интегрирования этих уравнений методом Розенброка, хорошо приспособленного для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих признаками жесткости. В ряде более простых случаев мы применяли стандартный метод Рунге - Кутта - Фелхберга 4 - 5 порядков, а в ряде более сложных случаев – метод Рунге - Кутта 7 - 8 порядков.

II.4.1 Эволюция скалярного поля $\Phi(t), \dot{\Phi}(t)$

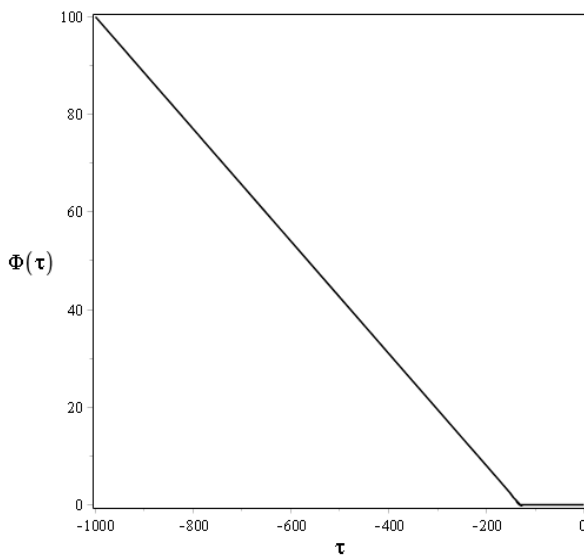


Рис. 34. Эволюция потенциала на ранних стадиях $\Phi(-1000) = 100$ при малом значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.001$.

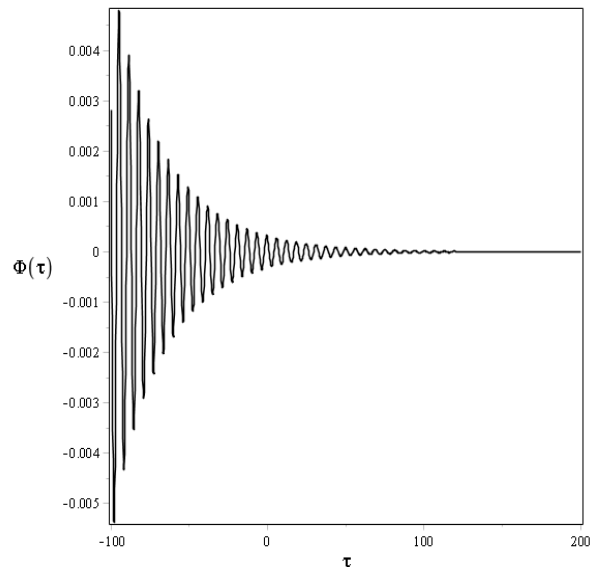


Рис. 35. Эволюция потенциала на поздних стадиях $\Phi(-1000) = 100$ при малом значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.001$.

На начальных стадиях $\tau \rightarrow \infty$ при достаточно больших значениях потенциала скалярное поле эволюционирует также, как и в случае $\Lambda = 0$: значение потенциала скалярного поля падает линейно со временем. Затем происходит переход на колебательный режим. На Рис. 36 – 37 показана эволюция потенциала на стадии затухающих колебаний в случае нулевого и малого значения космологической постоянной. Видно, что при одних и тех же начальных значениях скалярного потенциала на этой стадии амплитуда колебаний потенциала в одно и то же значение времени на порядок больше в случае нулевого значения космологической постоянной.

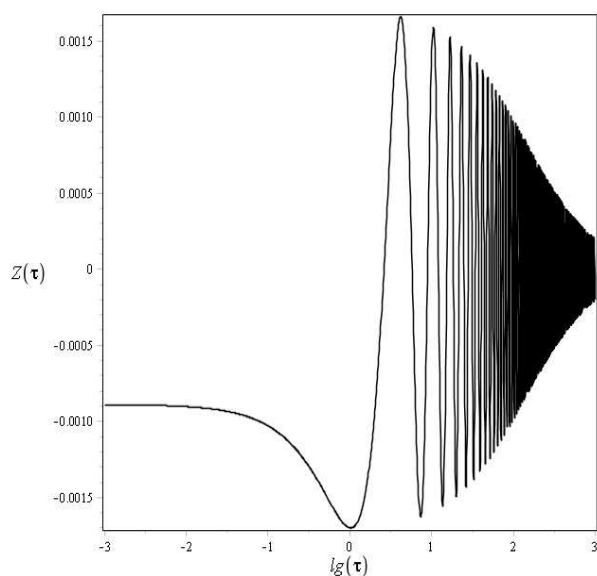


Рис. 36. Эволюция потенциала на стадии колебаний при нулевом значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0$ в логарифмической шкале времени; $\Phi(-1000) = 100$.

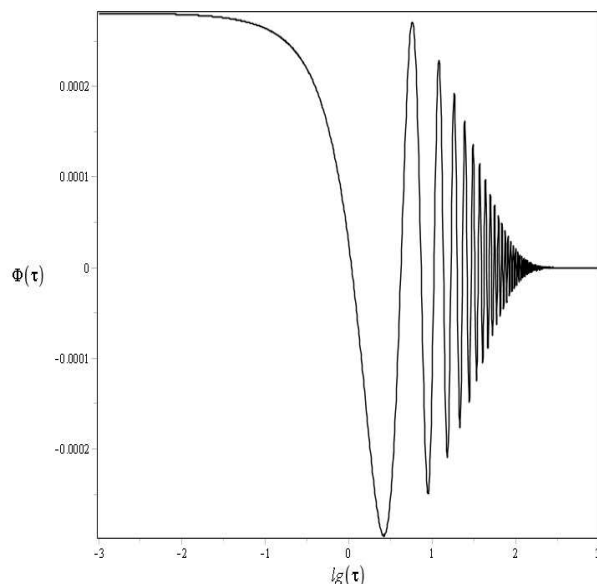


Рис. 37. Эволюция потенциала на стадии колебаний в логарифмической шкале времени при малом значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.001$; $\Phi(-1000) = 100$.

II.4.2 Эволюция постоянной Хаббла $H(t)$

Падение величины постоянной Хаббла от значения H_1 (II.33) до значения H_0 (II.31) начинается тем позже, чем больше начальное значение потенциала скалярного поля $\Phi_0 = \Phi(-\infty)$ (Рис. 38 – 39).

II.4. Численное моделирование динамической системы

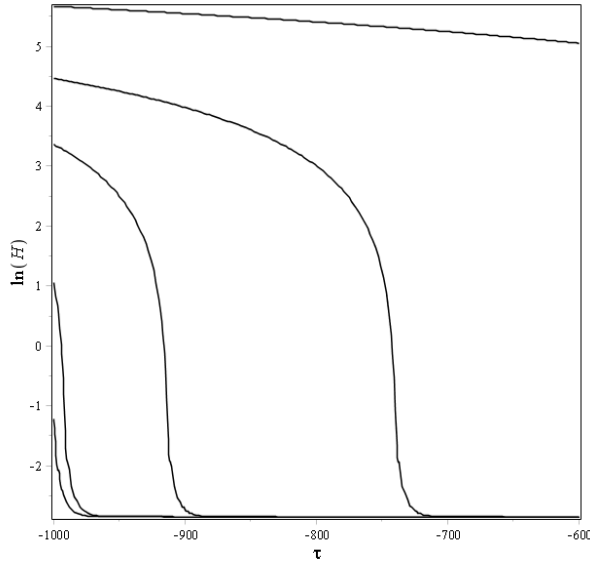


Рис. 38. Зависимость эволюции постоянной Хаббла от начального значения скалярного потенциала: снизу - вверх: $\Phi(-1000) = 0.1; 1; 10; 30; 100$ при малом значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.01$.

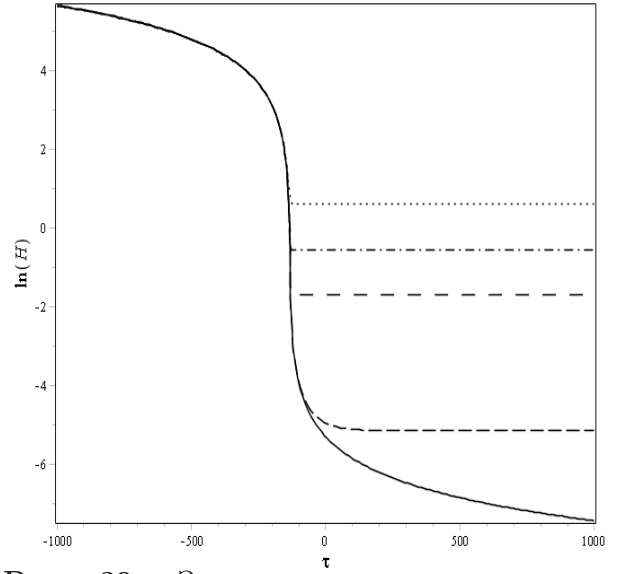


Рис. 39. Зависимость эволюции постоянной Хаббла от величины космологической постоянной: снизу - вверх: $\Lambda_m = 0; 0.0001; 0.1; 1; 10$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 100; Z(-1000) = 0$.

II.4.3 Масштабный фактор

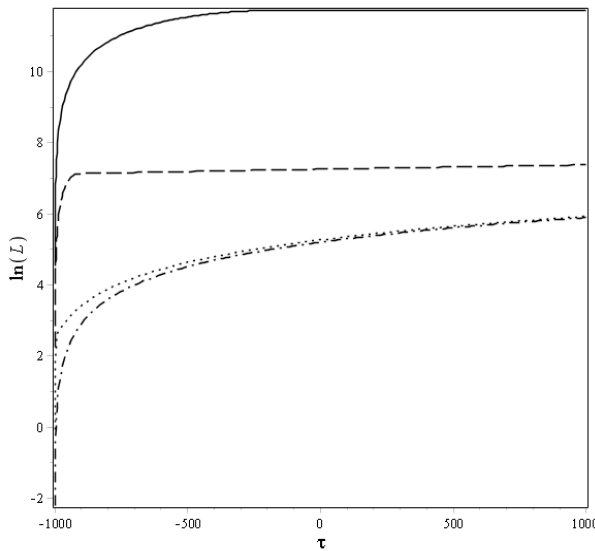


Рис. 40. Зависимость эволюции масштабного фактора от начального значения скалярного потенциала: снизу - вверх: $\Phi(-1000) = 0.1; 1; 10; 100$ при малом значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.1$.

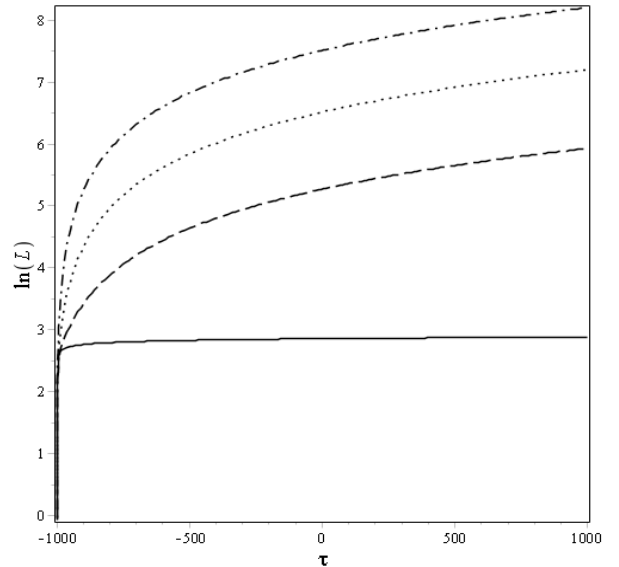


Рис. 41. Зависимость эволюции масштабного фактора от величины космологической постоянной: снизу - вверх: $\Lambda_m = 0; 0.1; 4/3; 10$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 1; Z(-1000) = 0$.

Эволюция масштабного фактора показана на Рис. 40 – 41. На оси ординат графиков на этих рисунках отложены значения \ln функции

$$L(\tau) = \ln(a(\tau)).$$

Поэтому значение $\ln L = 10$ соответствует значению $L \sim 10^4$ и значению масштабного фактора $a/a_0 \sim 10^{9566}$.

II.4.4 Эволюция инвариантного космологического ускорения

Космологическое ускорение Ω подсчитывается по формуле:

$$\Omega(\tau) = 1 + \frac{H'_m(\tau)}{H_m^2(\tau)}. \quad (\text{II.38})$$

Величина космологического ускорения также осциллирует с периодом $\sim 2\pi$ после стадии первичной инфляции. На Рис. 42 – 43 показана стадия колебаний космологического ускорения. В частности, на графике Рис. 43 можно видеть, как среднее значение космологического ускорения растет примерно от $-1/2$ до 1.

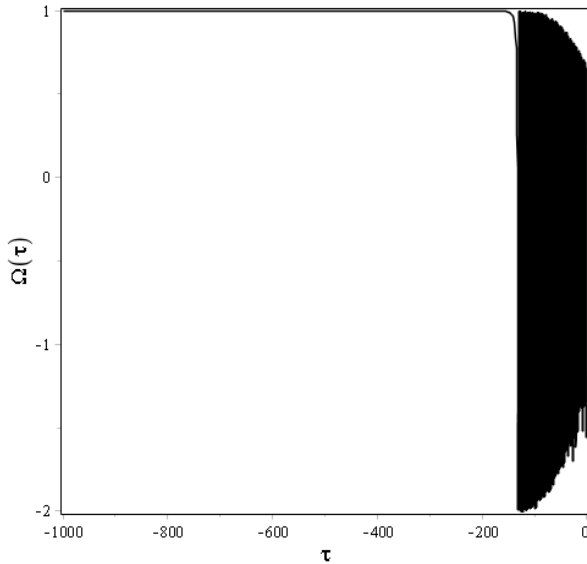


Рис. 42. Крупномасштабная эволюция космологического ускорения: $\Phi(-1000) = 100$ при малом значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.00001$. Черная область графика представляет затухающие колебания.

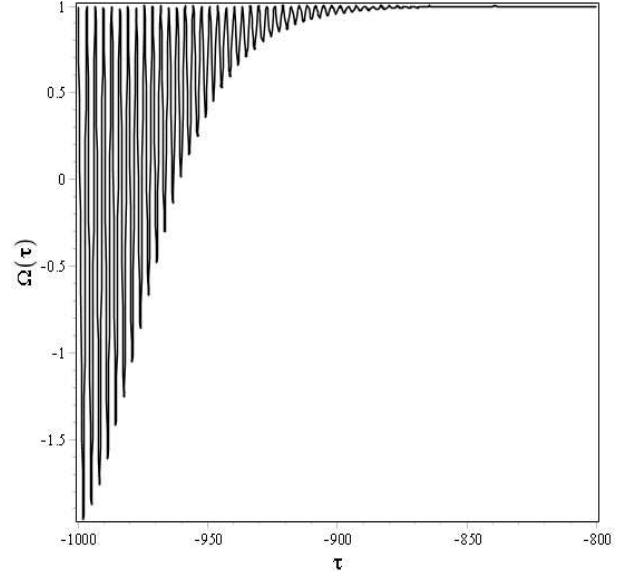


Рис. 43. Участок колебательной стадии эволюции космологического ускорения: $\Lambda_m = 0.001$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 0.1$; $Z(-1000) = 0$.

II.4.5 Среднее значение космологического ускорения

Как отмечалось в [30]([46]), микроскопический характер колебания³ вынуждает перейти к наблюдаемому среднему значению космологического ускорения, вычисляемого по формуле [30] ([46]):

$$\overline{\Omega(\tau, \Delta\tau)} = 1 + \frac{1}{\Delta\tau} \left(\frac{1}{h(\tau)} - \frac{1}{h(\tau + \Delta\tau)} \right), \quad (\text{II.39})$$

где $\Delta\tau = 2\pi N$ – длительность интервала усреднения.

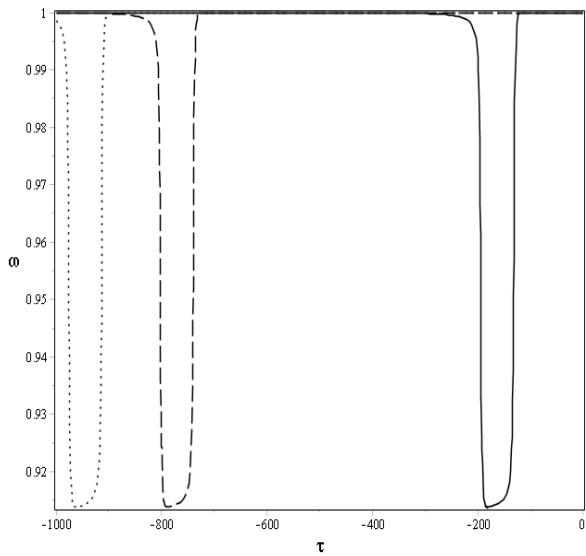


Рис. 44. Эволюция среднего космологического ускорения: $\Phi(-1000) = 100$ при значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.1$. Длительность интервала усреднения $\Delta\tau = 20\pi$.

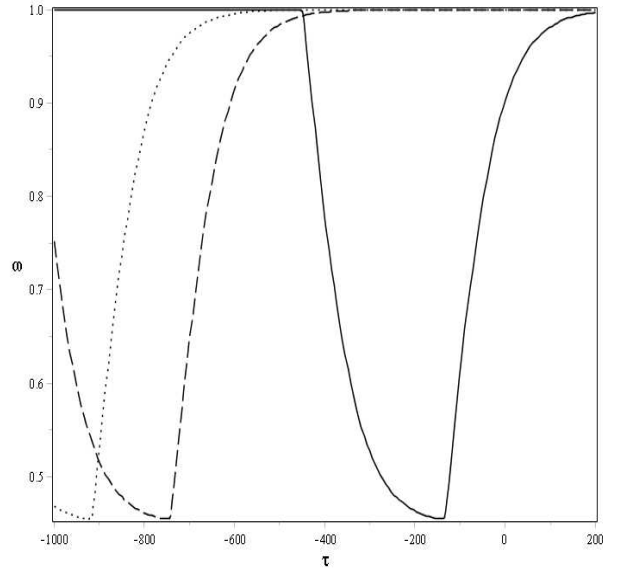


Рис. 45. Эволюция среднего космологического ускорения: $\Phi(-1000) = 100$ при значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.0001$. Длительность интервала усреднения $\Delta\tau = 100\pi$.

³Период колебаний космологического ускорения Ω во временном масштабе τ порядка 2π . Поэтому в обычной шкале времени – это комптоновский масштаб $T \sim 2\pi m^{-1}$, поэтому эти колебания согласно принципу неопределенности недоступны наблюдениям. В принципе, этот фактор побуждает нас перейти к квантово - полевым вычислениям скалярного поля и космологического ускорения.

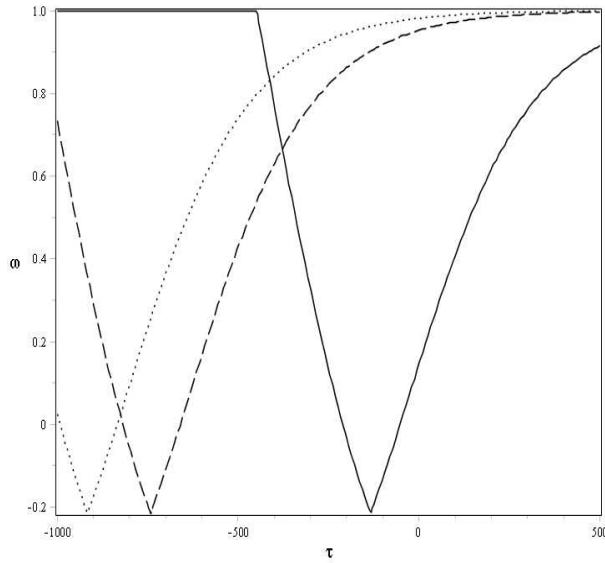


Рис. 46. Эволюция среднего космологического ускорения: $\Phi(-1000) = 100$ значения космологической постоянной $\Lambda_m = 0.00001$. Длительность интервала усреднения $\Delta\tau = 100\pi$.

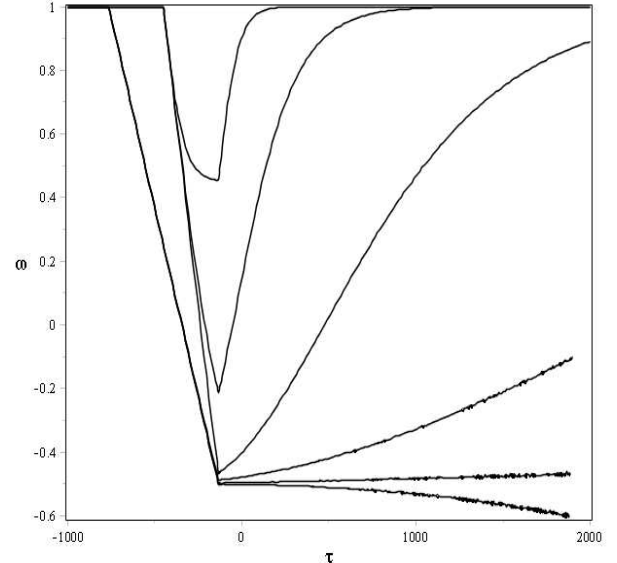


Рис. 47. Эволюция среднего космологического ускорения: $\Phi(-1000) = 100$ при значениях космологической постоянной — снизу — вверх: $\Lambda_m = 10^{-8}; 3 \cdot 10^{-8}; 10^{-7}; 10^{-6}; 10^{-5}; 10^{-4}$. Длительность интервала усреднения $\Delta\tau = 100\pi \div 200\pi$.

Заключение

Таким образом, можно констатировать, что при малых значениях космологической постоянной $\Lambda_m \leq 3 \cdot 10^{-8}$ эволюция динамической системы, положенной в основание СКС, на больших временных интервалах весьма слабо отличается от эволюции динамической системы без учета космологической постоянной. В частности, и в такой системе возникает достаточно длительная нерелятивистская стадия. Следует заметить, что при использовании в качестве базовой стандартной модели элементарных частиц с массой Хиггсова бозона порядка $10 \text{ Tev} \sim 10^{-15} m_{pl}$ это ограничение дает $\Lambda \leq 3 \cdot 10^{-38}$. Как известно, значение космологической постоянной оценивается как 10^{-123} , так что реальная космологическая ситуация относится именно к рассматриваемому случаю, отвечающему первому типу особой точки — притягивающего полюса. Как мы отмечали выше, конечной стадией такой космологической модели является инфляционная, а на промежуточных стадиях расширения автоматически возникает нерелятивистский режим.

Глава III

Макроскопические уравнения Эйнштейна и космология ранней Вселенной

III.1 Введение

В [26], [27] на основе усреднения микроскопических локальных флуктуаций гравитационного поля вокруг метрики Фридмана во втором порядке теории возмущений были получены макроскопические уравнения Эйнштейна, найдено точное решение полученных уравнений в ВКБ-приближении, аналитически описывающее переход с ультрарелятивистской стадии расширения на инфляционную. В более поздней работе [28] с помощью более строгой операции усреднения результаты предыдущих работ были уточнены в численном отношении.

Рассмотрим самосогласованную систему уравнений Эйнштейна и массивного скалярного поля Φ с массой квантов $m^{1,2}$:

$$G_k^i \equiv R_k^i - \frac{1}{2}R\delta_k^i = T_k^i(g, \Phi) + \Lambda g_{ik}, \quad (1)$$

$$\square\Phi + m^2\Phi = 0, \quad (2)$$

где Λ – космологическая постоянная, которую мы добавили для общности,

$$\square\Phi = g^{ik}\Phi_{,ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\Phi \quad (3)$$

¹В этой статье всюду $G = \hbar = c = 1$, сигнатура метрики $(-, -, -, +)$, тензор Риччи получается сверткой первого и третьего индексов.

²В отличие от предыдущих работ мы будем рассматривать здесь уравнения Эйнштейна для смешанных компонент, форма которых оказывается более компактной.

– оператор Д’Аламбера и

$$T_k^i = 2\Phi^{,i}\Phi_{,k} - \delta_k^i \Phi_{,j}\Phi^{,j} + \delta_k^i m^2 \Phi^2 \quad (4)$$

– тензор энергии-импульса скалярного поля. Уравнения (1) – (2) в дальнейшем для краткости будем называть просто – *уравнениями поля*. Эта система уравнений является простейшей математической моделью космологии ранней Вселенной, которая в той или иной модификации является базовой моделью инфляции в огромном количестве работ.

В работе [30] было показано, что, во-первых, космологическая модель с де-Ситтеровским началом является физически неустойчивой по отношению к добавлению к тензору энергии-импульса любой материальной добавки, во-вторых, модель с инфляционным началом, основанная на модели с постоянным скалярным полем вблизи сингулярности, неустойчива в смысле Ляпунова и, наконец, в-третьих, эта модель гравитационно неустойчива по отношению к первичным слабым гравитационным волнам, которые являются необходимым элементом так называемой «квантовой космологии»³. Поскольку, как известно, во-первых, все космологические модели имеют сингулярность во временной шкале, когда масштабный фактор обращается в нуль, а, во-вторых, амплитуда коротковолновых поперечных гравитационных возмущений падает обратно пропорционально масштабному фактору [32], [33], то локальные гравитационные флуктуации метрики велики вблизи космологической сингулярности и могут оказать существенное влияние на эволюцию ранней Вселенной. Поэтому важное значение приобретают исследования, направленные на создание адекватной макроскопической модели гравитации. В этой главе мы опишем метод статистического усреднения гравитационных полей по локальным гравитационным флуктуациям и применим его к формулированию и исследованию макроскопической модели ранней Вселенной. Результаты этой главы опубликованы в статьях [26], [27], [28]. Кроме того, необходимо отметить, что достаточно громоздкие вычисления в теории возмущений уравнений Эйнштейна проводились в прикладном математическом пакете Maple XVII, в котором была создана специальная программа вычисления возмущений 2-го порядка для произвольных метрик [29].

³См. например обзор [31].

III.2 Самосогласованный статистический подход к описанию локальных флуктуаций метрики

III.2.1 Метод самосогласованного поля

Статистическую теорию получения *макроскопических уравнений Эйнштейна* можно развить по аналогии с теорией многих частиц в рамках подхода *самосогласованного поля*, первоначально возникшего в небесной механике, а затем примененного в теории многих частиц (P. Weiss, 1907; I. Langmuir, 1913; L. Thomas, 1927; E. Fermi, 1928; D. Hartree, 1928; В. А. Фок, 1930). Особую роль в развитии метода самосогласованного поля принадлежит советскому физику-теоретику Анатолию Александровичу Власову, который в своих фундаментальных работах (1938) [36]⁴ впервые дал глубокий анализ физических свойств заряженных частиц плазмы, показал неприменимость к описанию плазмы газокINETического уравнения Больцмана и предложил новое кинетическое уравнение плазмы (уравнение Власова), описывающее коллективное взаимодействие частиц плазмы через самосогласованное поле. В дальнейшем теория Власова была уточнена в статье Л. Д. Ландау⁵ (1946), а затем строго обоснована и обобщена в работах Н. Н. Боголюбова (1946) и блестяще приложена им к квантовой статистике и теории сверхтекучести (1947). Следует отметить классическую монографию Чандрассекара [39] (1942), в которой на основе метода самосогласованного поля были сформулированы принципы звездной динамики и фактически построена теория образования галактических структур.

Согласно методу самосогласованного поля движение отдельной частицы можно описать как движение в суммарном усредненном поле остальных частиц системы, пренебрегая влиянием одной частицы на динамику системы. Условиями применимости метода самосогласованного поля являются дальнедействующий характер межчастичных взаимодействий и большое число взаимодействующих частиц $N \gg 1$. Аналогично можно рассматривать метод самосогласованного поля применительно к нелинейным чисто полевым системам. При этом роль одной частицы играет отдельная малая полевая мода, характеризуемая некоторыми полевыми степенями свободы, а условием применимости метода самосогласованного поля является дальнедействи-

⁴См. также [37], [38].

⁵Так называемое «затухание Ландау», связанное с неучтенным в работе Власова полюсом в решении бесстолкновительного кинетического уравнения.

ющий характер поля и большое число его степеней свободы. Этим условиям как нельзя лучше соответствует гравитационное взаимодействие: закон сохранения полной энергии-массы и отсутствие отрицательных «гравитационных зарядов» гарантирует его далекодействующий характер, а большое число степеней свободы заложено в самой полевой природе взаимодействия. Поэтому мы имеем право рассматривать системы с гравитационным взаимодействием методом самосогласованного поля, в котором каждая микроскопическая мода гравитационного возмущения мала, тогда как макроскопическое самосогласованное гравитационное поле велико.

III.2.2 Усреднение локальных флуктуаций метрики

Предположим, что точную микроскопическую метрику риманова пространства - времени V_4 можно записать в форме [41, 1]:

$$g_{ik}(x) = \overline{g_{ik}(x)} + \delta g_{ik}(x), \quad (\text{III.1})$$

где $\overline{g_{ik}(x)}$ – некоторая средняя макроскопическая метрика, соответствующая макроскопическому пространству - времени \overline{V}_4 , а $\delta g_{ik}(x)$ – малые микроскопические флуктуации метрики, так что

$$\overline{\delta g_{ik} \delta g^{jk}} \ll 1, \quad (\text{III.2})$$

и

$$\overline{\delta g_{ik}} = 0. \quad (\text{III.3})$$

Чертой сверху мы обозначаем здесь и в дальнейшем некоторую операцию усреднения метрики и сопутствующих ей величин, пока не конкретизируя ее. Заметим лишь, что эта операция является весьма деликатной процедурой, существенно зависящей от способа измерения (детали см. в [41, 1]). Заметим также, что «пионерские» методы статистического усреднения метрики, применяемые некоторыми исследователями и заключающиеся в переносе методов классического усреднения путем интегрирования метрических величин по пространственному объему, в релятивистской гравитации явно не пригодны. Во-первых, как известно из римановой геометрии, результат интегрирования тензора по объему является неоднозначной операцией и не является тензорной величиной. Во-вторых, поскольку синхронизация наблюдений возможна лишь в синхронной системе отсчета, физический смысл результата интегрирования метрического тензора по объему также невозможно определить. В-третьих, макроскопический прибор, измеряющий метрику

III.2. Самосогласованный подход к описанию локальных флуктуаций метрики

Вселенной, попросту, нереализуем. Поэтому, следуя методам, развитым в работах [41, 1], мы будем усреднять метрику по некоторым случайным величинам, например, волновым векторам, фазам колебаний и тому подобным. Так, например, в указанных работах метрика генерировалась массивными частицами, а ее усреднение проводилось по координатам этих частиц, не являющимися аргументами тензорных полей. Вообще же говоря, корректное усреднение метрики, как и других тензорных полей может быть осуществлено следующим образом. Из функционального анализа известна генеральная теорема о том, что любая функция в метрическом пространстве может быть разложена по *полному* ортогональному набору собственных функций линейного самосопряженного оператора этого пространства. Как известно, таким оператором в римановом пространстве является оператор Д'Аламбера (3). Поэтому мы можем определить этот набор собственными функциями оператора Д'Аламбера, являющимся самосопряженным линейным оператором на римановом V_4 , отвечающими собственным значениям λ , следующим образом:

$$\bar{\square}\psi_\lambda = \lambda, \quad (\text{III.4})$$

где $\bar{\square}$ – оператор Д'Аламбера, определенный на метрике $\overline{g_{ik}}$. Надо помнить, что на самом деле собственные функции λ определяются некоторым n -мерным набором чисел, $[l_1, l_2, \dots, l_n]$, то есть, *вектором состояния* $\vec{\lambda} = [l_1, l_2, \dots, l_n]$. По этому вектору состояния $\vec{\lambda}$ и следует проводить статистическое усреднение. Отметим, что такая процедура усреднения полностью адекватна и усреднению в квантовой теории поля. В частности, например, в декартовых координатах плоского трехмерного пространства таким полным ортогональным собственным функциям являются $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, а в сферических координатах – система, построенная на шаровых функциях: $J_\nu(r)Y_\lambda^\nu(\theta, \varphi)$. Поэтому в первом случае усреднение должно проводиться по случайным значениям волнового вектора, а во втором – по значениям чисел $\{\lambda, \mu, \nu\}$ – и в том, и в другом случаях указанные числа принимают бесконечное множество значений. При этом приходится налагать определенные требования на *функцию распределения* $f(x^i, \vec{\lambda})$, которые должны отражать макроскопические свойства симметрии усредняемых тензорных полей.

Надо понимать, что вместе с флуктуациями метрики существуют и сопутствующие им малые флуктуации физических полей, $\delta\phi_a$ ⁶,

$$\phi_a = \bar{\phi}_a + \delta\phi_a, \quad (\text{III.5})$$

⁶В рассматриваемом нами случае это единственное поле $\phi_a = \Phi(x)$, хотя сказанное справедливо и для любого числа физических полей любой природы.

так что

$$\overline{\delta\phi_a\delta\phi_a} \ll \overline{\phi_a^2}, \quad (III.6)$$

и

$$\overline{\delta\phi_a} = 0. \quad (III.7)$$

Усредняя уравнения Эйнштейна с помощью аналогичной процедуры, получим:

$$\overline{G_k^i(g)} = 8\pi\overline{T_k^i(g, \phi_a)} + \Lambda\delta_k^i. \quad (III.8)$$

Вследствие нелинейности тензора Эйнштейна и тензора энергии - импульса:

$$\overline{G_k^i(g)} \neq G_k^i(\overline{g}); \quad \overline{T_k^i(g, \phi_a)} \neq T_k^i(\overline{g}, \overline{\phi_a}), \quad (III.9)$$

то есть, макроскопический источник не соответствует макроскопической метрике, как это имеет место в электродинамике.

Как в этом случае получить уравнения, определяющие макроскопическую метрику? Общие принципы усреднения микроскопической метрики в ВКБ-приближении и получении макроскопических уравнений Эйнштейна были изложены в работах Исааксона [34, 35] (1968), а затем применены для построения теории релятивистских статистических систем с гравитационным взаимодействием в работах Автора [40] (1983)⁷. В работах [43, 42] (1990) эта теория была применена к выводу кинетического уравнения для фотонов, распространяющихся в гравитационно флуктуирующем мире Фридмана, в котором локальные флуктуации порождались массивными «частицами». В частности, в работах [43, 42] (1990) было показано, что «учет локальных флуктуаций гравитационного поля эквивалентен добавлению к фридмановской пыли жидкости с предельно жестким уравнением состояния, или добавлению в макроскопические уравнения Эйнштейна Λ - члена»⁸.

Итак, будем усреднять уравнения Эйнштейна и сопутствующие уравнения физических полей. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Для начала процесса усреднения нам необходимо иметь некоторую «затравочную» стартовую макроскопическую метрику $g_{ik}^{(0)}(x)$ и некоторые затравочные стартовые физические поля $\phi_a^{(0)}$, с которых в качестве нулевого приближения

⁷ Английская версия - [41] (2007), см. также монографии [1, 2] (2010,2013).

⁸ В этих работах Автора с А. А. Поповым уравнение состояния $p = -\varepsilon$ по аналогии с уравнением состояния $p = \varepsilon$ было названо «предельно - жестким уравнением состояния», так как на то время еще не было соответствующей общепринятой терминологии.

III.2. Самосогласованный подход к описанию локальных флуктуаций метрики

можно начинать процесс последовательных итераций процедуры усреднения. Эти затравочные поля удовлетворяют самосогласованной системе уравнений поля:

$$G_k^i(g_{jm}^{(0)}) = 8\pi T_k^i(g_{jm}^{(0)}, \phi_a^{(0)}) + \Lambda \delta_k^i; \quad (\text{III.10})$$

$$\overset{(0)}{\nabla}_k T_i^k(g^{(0)}, \phi_a^{(0)}) = 0. \quad (\text{III.11})$$

Итак, в согласии с общим подходом к усреднению гравитационных полей рассмотрим некоторое макроскопическое риманово пространство, и пусть теперь $g_{ik}^{(0)}(x) \equiv \overline{g_{ik}(x)}$, $\phi_a^{(0)}(x) \equiv \overline{\phi_a(x)}$ некоторые пока неизвестные макроскопические средние полевых величин.

Предположение 1 В дальнейшем будем предполагать, что операции дифференцирования или интегрирования по координатам перестановочны с операцией усреднения:

$$\overline{\partial_i \phi(x)} = \partial_i \overline{\phi(x)}; \quad (\text{III.12})$$

$$\overline{\int \phi(x) dx} = \int \overline{\phi(x)} dx. \quad (\text{III.13})$$

Заметим, что определенная выше операция усреднения полностью удовлетворяет предположению 1.

Пусть далее:

$$\delta g_{ik} = g_{ik} - g_{ik}^{(0)}; \quad \delta \phi_a = \phi_a - \phi_a^{(0)}, \quad (\text{III.14})$$

– малые локальные отклонения метрики и физических полей от их средних значений, такие, что:

$$\overline{\delta g_{ik}} = 0; \quad \overline{\partial_j \delta g_{ik}} = 0; \quad (\text{III.15})$$

$$\overline{\delta \phi} = 0; \quad \overline{\partial_j \delta \phi} = 0. \quad (\text{III.16})$$

Разложим уравнения поля в ряд Тейлора по малости отклонений метрики и физических полей от этих средних значений до второго порядка по возмущениям:

$$G_k^{(0)i} + G_k^{(1)i} + G_k^{(2)i} = 8\pi (T_k^{(0)i} + T_k^{(1)i} + T_k^{(2)i}) + \Lambda \delta_k^i, \quad (\text{III.17})$$

и усредним эти уравнения с учетом (III.3), (III.7), а также линейности операторов $G_{ik}^{(1)}$ и $T_{ik}^{(1)}$ по отношению к флуктуациям:

$$\overline{G_k^{(1)i}(\delta g)} = G_k^{(1)i}(\overline{\delta g}) = 0; \quad (\text{III.18})$$

$$\overline{T_k^{(1)i}(\delta g, \delta \phi)} = T_k^{(1)i}(\overline{\delta g}, \overline{\delta \phi}) = 0. \quad (\text{III.19})$$

Таким образом, в первом порядке теории возмущений мы получим микроскопические линейные уравнения первого порядка по возмущениям метрики и физических полей

$$G^{(1)i}_k(\delta g) = 8\pi T^{(1)i}_k(\delta g, \delta\phi) + \Lambda\delta^i_k; \quad (\text{III.20})$$

$$\nabla_k T^{(1)i}_k(\delta g, \delta\phi) = 0, \quad (\text{III.21})$$

которые мы будем называть *микроскопическими эволюционными уравнениями для возмущений*. Полагая⁹

$$g_{ik}^{(0)} = \overline{g_{ik}}, \quad (\text{III.22})$$

во втором порядке теории возмущений после усреднения мы получим макроскопические уравнения Эйнштейна для макроскопической метрики

$$G^{(0)i}_k(\overline{g}) = -\overline{G^{(2)i}_k(\delta g)} + 8\pi(T^{(0)i}_k(\overline{g}, \overline{\phi}) + \overline{T^{(2)i}_k(\delta g, \delta\phi)}) + \Lambda\delta^i_k, \quad (\text{III.23})$$

согласно которым макроскопическую метрику во втором порядке по теории возмущений определяют уравнения Эйнштейна с космологическим членом и суммарным эффективным тензором энергии импульса:

$$\tilde{T}^i_k = T^{(0)i}_k(\overline{g}, \overline{\phi}) + \mathcal{T}^{(2)i}_k, \quad (\text{III.24})$$

где

$$\mathcal{T}^{(2)i}_k \equiv \overline{T^{(2)i}_k} - \frac{1}{8\pi}\overline{G^{(2)i}_k}. \quad (\text{III.25})$$

Таким образом, макроскопические уравнения Эйнштейна второго порядка по возмущениям принимают стандартный вид:

$$G^i_k(\overline{g}) = 8\pi\tilde{T}^i_k + \Lambda\delta^i_k. \quad (\text{III.26})$$

Для замыкания макроскопических уравнений Эйнштейна необходимо вычислить макроскопические средние, квадратичные по локальным флуктуациям метрики и физических полей, определяемые эволюционными уравнениями (III.20) – (III.21).

⁹Отметим, что подстановка (III.22) является формальным приемом перенормировки метрики.

III.2.3 Макроскопические симметрии

Производной Ли от объекта Ω_k^i в направлении векторного поля ξ^i называется объект [44].

$$\mathbb{L}_\xi U_k^i = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\Omega_k^i(x^i + \xi^i dt) - \Omega_k^i(x^i)}{dt}, \quad (\text{III.27})$$

так что:

$$\mathbb{L}_\xi U_k^i = \xi^j \partial_j U_k^i - U_k^j \partial_j \xi^i + U_j^i \partial_k \xi^j. \quad (\text{III.28})$$

В частности, если U_k^i является тензором, в формуле (III.28) можно заменить частные производные на ковариантные:

$$\mathbb{L}_\xi U_k^i = \xi^j \nabla_j U_k^i - U_k^j \nabla_j \xi^i + U_j^i \nabla_k \xi^j \quad (\text{III.29})$$

– этот объект является тензором той же валентности, что и исходный.

Рассмотрим в качестве затравочного пространства псевдориманово V_4 , допускающее некоторую группу движений, G^r с векторами Киллинга ξ , определяющих макроскопическую симметрию: (α)

$$\mathbb{L}_\alpha g_{ik}^{(0)} = 0; \quad \mathbb{L}_\alpha \phi_a^{(0)} = 0; \quad (\mathbb{L} \equiv \mathbb{L}_{\xi_\alpha}). \quad (\text{III.30})$$

Примем далее следующее предположение.

Предположение 2 *Макроскопическое среднее тензора Эйнштейна наследует свойства симметрии макроскопической метрики:*

$$\mathbb{L}_\xi \overline{g_{ik}} = \sigma \overline{g_{ik}} \implies \mathbb{L}_\xi \overline{G_{ik}} = \sigma_1 \overline{g_{ik}}, \quad (\text{III.31})$$

где \mathbb{L}_ξ – производная Ли (см., например, [44]), $\sigma(x), \sigma_1(x)$ – некоторые скалярные функции.

Заметим, что при $\sigma = 0, \sigma_1 = 0$ мы получаем группу движений \bar{V}_4 , а при ненулевых значениях этих скаляров – группу конформных преобразований. Поясним предположение 2. Как известно из римановой геометрии (см. [1]), все геометрические объекты наследуют свойства симметрии метрического тензора, например:

$$\mathbb{L}_\xi g_{ik} = 0 \implies \mathbb{L}_\xi \Gamma_{ik}^j = 0; \quad \mathbb{L}_\xi R_{ijkl} = 0; \quad \mathbb{L}_\xi T_{ik} = 0. \quad (\text{III.32})$$

Отсюда следует, например, что все симметричные ковариантные тензоры второй валентности имеют такую же алгебраическую структуру, как и метрический тензор. Логично поэтому предположить, что алгебраическая структура макроскопических тензоров также будет одинакова. Заметим далее, что, поскольку выполняются очевидные равенства:

$$\mathbb{L}_\alpha G^{(0)i}_k = 0; \quad \mathbb{L}_\alpha \Lambda \delta_k^i = 0; \quad \mathbb{L}_\alpha T^{(0)i}_k(\bar{g}, \bar{\phi}) = 0, \quad (\text{III.33})$$

то вследствие предположения 2 суммарный тензор энергии - импульса второго порядка по возмущениям при усреднении также должен наследовать симметрии макроскопической метрики:

$$\mathbb{L}_\alpha \overline{\mathcal{T}^{(2)i}_k} = 0 \Rightarrow \mathbb{L}_\alpha \tilde{T}^i_k = 0. \quad (\text{III.34})$$

Заметим, что предположение 2 налагает определенные необходимые условия на симметрию скалярной функции распределения случайных тензорных полей $f(x^i, \vec{\lambda})$, в частности:

$$\mathbb{L}_\alpha f(x^i, \vec{\lambda}) = 0. \quad (\text{III.35})$$

III.2.4 Макроскопические уравнения Эйнштейна второго порядка

Выпишем окончательно систему уравнений, определяющих макроскопическую метрику во втором порядке теории возмущений. Эти уравнения состоят из системы линейных уравнений для локальных возмущений метрики и физических полей:

1. Уравнения для локальных возмущений:

$$G^{(1)i}_k(\delta g) = 8\pi T^{(1)i}_k(\delta g, \delta \phi); \quad (\text{III.36})$$

$$\nabla_k T^{(1)i}_k(\delta g, \delta \phi) = 0. \quad (\text{III.37})$$

2. Макроскопические уравнения Эйнштейна:

$$G^i_k(\bar{g}) - \Lambda \delta_k^i = -\overline{G^{(2)i}_k(\delta g)} + 8\pi(T^{(0)i}_k(\bar{g}, \bar{\phi}) + \overline{T^{(2)i}_k(\delta g, \delta \phi)}), \quad (\text{III.38})$$

где величины $G_{ik}(\bar{g})$ вычисляются по стандартным правилам вычисления компонент тензора Эйнштейна относительно макроскопической метрики.

Сделаем следующее важное замечание. При получении макроскопических уравнений Эйнштейна мы произвели перенормировку метрики $g_{ik}^{(0)} \rightarrow \bar{g}_{ik}$.

III.3. Микроскопические уравнения Эйнштейна для Вселенной Фридмана

При этом теперь, во-первых, согласно методу самосогласованного поля макроскопические средние $\overline{G_{ik}^{(2)}}(\delta g)$ не обязаны быть малыми по сравнению с $G_{ik}(\overline{g})$, так как являются результатом суммирования бесконечного числа степеней свободы гравитационных возмущений¹⁰. Во-вторых, указанная перенормировка метрики приводит к замене $G_{ik}(g^{(0)}) \rightarrow G_{ik}(\overline{g})$. Это, в свою очередь, означает, что макроскопические уравнения Эйнштейна (III.38) решаются сразу относительно макроскопической метрики, а не методом последовательных итераций:

$$\overline{g_{ik}} = g_{ik}^{(0)} + \overline{\delta g_{ik}} + \dots$$

– это и является одним из основных преимуществ метода самосогласованного поля Хартри - Фока - Власова - Боголюбова. Метод последовательных приближений увел бы нас совсем в другую сторону – для понимания этого достаточно представить уравнения Эйнштейна для Фридмановской Вселенной, в которой тензор энергии-импульса определялся бы газом бесконечного числа «маленьких фотонов». Следуя методу последовательных приближений, мы должны были бы положить в качестве нулевого приближения тензор Минковского. Ясно, что при таком подходе мы никогда бы не получили космологическую сингулярность, учитывая малость гравитационных возмущений, вносимых «маленькими фотонами», по сравнению с единицами метрики Минковского. Этот пример наглядно показывает, что в релятивистской теории гравитации все исследователи бессознательно используют метод самосогласованного поля, не пытаясь обосновать его.

III.3 Микроскопические уравнения Эйнштейна для Вселенной Фридмана со скалярным полем

Итак, будем рассматривать однородную, изотропную, пространственно - плоскую модель Фридмана:

$$ds_0^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) \equiv dt^2 - a^2 dl_0^2; \quad (\text{III.39})$$

Метрику с гравитационными возмущениями запишем в виде (см., например, [124]):

$$ds^2 = ds_0^2 + a^2(\eta)h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \quad (\text{III.40})$$

¹⁰При отсутствии негравитационных полей эти тензоры равны.

Введем, как это принято, более удобные для вычислений смешанные компоненты возмущений метрики:

$$h_{\beta}^{\alpha} = h_{\gamma\beta}g_0^{\alpha\gamma} \equiv -\frac{1}{a^2}h_{\alpha\beta}; \quad (\text{III.41})$$

$$h \equiv h_{\alpha}^{\alpha} \equiv g_0^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} = -\frac{1}{a^2}(h_{11} + h_{22} + h_{33}). \quad (\text{III.42})$$

III.3.1 Общие соотношения для отдельных мод возмущений

Поскольку трехмерное пространство V_3^0 в метрике (III.39) с метрикой dl_0^2 является плоским, собственные функции оператора Лапласа на этом пространстве

$$\Delta_0\psi_n = n^2\psi_n \quad (\text{III.43})$$

равны:

$$\psi_n(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{n}\mathbf{r}+i\alpha}, \quad (\text{III.44})$$

где \mathbf{n} – произвольный *волновой вектор*, α – произвольное число, *фаза колебаний*. Четверка произвольных чисел $\{n_1, n_2, n_3, \alpha\}$ и являются теми степенями свободы, по которым мы будем усреднять локальную метрику. Далее, представим возмущения метрики в виде отдельных гармоник с заданным волновым вектором, разлагая их на два алгебраических типа – поперечные и продольные возмущения [124].

Для поперечных возмущений:

$$h_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}S_n(\eta)e^{i\mathbf{n}\mathbf{r}}, \quad (\text{III.45})$$

где $S(\eta)$ – амплитуда возмущений, в которой мы во избежание громоздких обозначений учли зависимость от фазы α , то есть,

$$S(\eta) \rightarrow e^{i\alpha}S(\eta); \quad (\text{III.46})$$

$$h_{\beta}^{\alpha}n_{\alpha} = 0; \quad (\text{III.47})$$

$$h = 0. \quad (\text{III.48})$$

Вследствие (III.48) в линейном по h приближении:

$$\sqrt{-g} \approx \sqrt{-g_0} = a^4. \quad (\text{III.49})$$

III.3. Микроскопические уравнения Эйнштейна для Вселенной Фридмана

В произвольной декартовой системе координат трехмерного евклидова пространства E_3 тензор поляризации $e_{\alpha\beta}$ формулы (III.45) имеет вид:

$$e_{\alpha\beta} = 2s_\alpha s_\beta + \frac{n_\alpha n_\beta}{n^2} - \delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{III.50})$$

$$\mathbf{s}^2 = 1; \quad \mathbf{sn} = 0; \quad \mathbf{n}^2 = n^2. \quad (\text{III.51})$$

Легко проверить, что автоматически выполняется калибровочное условие (III.47).

Для продольных возмущений:

$$h_{\alpha\beta} = e^{i\mathbf{nr}} [\mu(\eta)P_{\alpha\beta} + \nu(\eta)Q_{\alpha\beta}], \quad (\text{III.52})$$

где

$$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} - \frac{n_\alpha n_\beta}{n^2}; \quad Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{III.53})$$

Выбор системы координат. Будем разлагать в ряд тензор Эйнштейна, тензор энергии - импульса скалярного поля и уравнения скалярного поля в ряд по малости амплитуды гравитационных и скалярных возмущений $S(\eta)$, $\mu(\eta)$, $\nu(\eta)$, $\phi(\eta)$. При этом, пользуясь изотропией невозмущенной метрики, удобно ввести локальную систему координат, в которой¹¹:

$$\mathbf{n} = n(0, 0, 1); \quad \mathbf{s} = (1, 0, 0), \quad (\text{III.54})$$

где \mathbf{s} - единичный вектор поляризации поперечных возмущений. В этой системе координат

$$h_{12} = 0; \quad h_{11} = \left[S(\eta) + \frac{1}{3}\mu(\eta) + \frac{1}{3}\nu(\eta) \right] e^{inz}; \quad (\text{III.55})$$

$$h_{22} = \left[-S(\eta) + \frac{1}{3}\mu(\eta) + \frac{1}{3}\nu(\eta) \right] e^{inz}; \quad (\text{III.56})$$

$$h_{33} = \left[-\frac{2}{3}\mu(\eta) + \frac{1}{3}\nu(\eta) \right] e^{inz}; \quad h = \nu e^{inz}. \quad (\text{III.57})$$

Далее, потенциал скалярного поля $\Phi(\mathbf{r}, t)$ представим в виде:

$$\Phi(r, \eta) = \Phi_0(\eta) + \phi(\eta)e^{i\mathbf{nr}}; \quad \phi(\eta) \ll \Phi_0(\eta). \quad (\text{III.58})$$

В этой статье мы будем учитывать только поперечные возмущения гравитационного поля.

¹¹Мы рассматриваем здесь только одну моду возмущений. Как перейти к спектру возмущений показано в [26].

III.3.2 Нулевое приближение

Разлагая тензор Эйнштейна по возмущениям метрики, в нулевом приближении получим известные выражения:

$$G^{(0)1}_1 = G^{(0)2}_2 = G^{(0)3}_3 = -\frac{a'^2}{a^4} + 2\frac{a''}{a^3}; \quad (\text{III.59})$$

$$G^{(0)4}_4 = 3\frac{a'^2}{a^4}. \quad (\text{III.60})$$

Для левой части уравнения скалярного поля (2) в нулевом приближении получим:

$$\square_0 \Phi_0 + m^2 \Phi_0 = \frac{\Phi_0''}{a^2} + 2\frac{a'}{a^3} \Phi_0' + m^2 \Phi_0. \quad (\text{III.61})$$

При этом ненулевые компоненты тензора энергии - импульса скалярного поля равны:

$$T^{(0)1}_1 = T^{(0)2}_2 = T^{(0)3}_3 = m^2 a^2 \Phi_0^2 - \frac{\Phi_0'^2}{a^2};$$

$$T^{(0)4}_4 = m^2 a^2 \Phi_0^2 + \frac{\Phi_0'^2}{a^2}. \quad (\text{III.62})$$

Таким образом, в нулевом по гравитационным возмущениям приближении мы получили бы одно независимое уравнение Эйнштейна

$$3\frac{a'^2}{a^4} - \Lambda = \frac{\Phi_0'^2}{a^2} + m^2 \Phi_0^2 \quad (\text{III.63})$$

и уравнение поля

$$\Phi_0'' + 2\frac{a'}{a} \Phi_0' + m^2 \Phi_0 = 0.$$

Второе уравнение Эйнштейна при этом явилось бы дифференциальным следствием этих двух. Указанные два уравнения составляют систему уравнений стандартной космологической модели для квадратичного потенциала $U(\Phi) = m^2 \Phi^2 / 2$. Также отметим и следствие этих уравнений, которое является уравнением Эйнштейна для трехмерных компонент:

$$2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} - \Lambda = 8\pi \left(m^2 a^2 \Phi_0^2 - \frac{\Phi_0'^2}{a^2} \right). \quad (\text{III.64})$$

Подчеркнем еще раз, что мы не будем решать указанные уравнения нулевого приближения, так как такой итерационный подход противоречит методу самосогласованного поля.

III.3.3 Уравнения первого приближения – эволюционные уравнения для возмущений

В линейном по $S, \mu, \nu\phi$ приближении получим, во-первых, уравнение для возмущения скалярного поля

$$\phi'' + 2\frac{a'}{a}\phi' + (n^2 + a^2m^2)\phi = 0 \quad (\text{III.65})$$

и ненулевые компоненты тензора Эйнштейна $G^{(1)1}_1, G^{(1)2}_2, G^{(1)4}_4$ и соответствующие им компоненты тензора энергии - импульса¹². При этом оказывается, что:

$$\begin{aligned} G^{(1)1}_1 &= -G^{(1)2}_2 = -\frac{1}{2}\frac{Sn^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{S''}{a^2} - \frac{a'S'}{a^2}; \\ G^{(1)1}_3 &= G^{(1)1}_4 = G^{(1)2}_3 = G^{(1)1}_4 = G^{(1)4}_4 = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.66})$$

Далее, отличные от нуля компоненты тензора энергии-импульса:

$$\begin{aligned} T^{(1)1}_1 &= T^{(1)2}_2 = T^{(1)3}_3 = 2\Phi_0\phi m^2 - 2\frac{\Phi'_0}{a^2}\phi'; \\ T^{(1)4}_4 &= 2\Phi_0\phi m^2 + 2\frac{\Phi'_0}{a^2}\phi'. \end{aligned} \quad (\text{III.67})$$

Сравнивая с учетом уравнений Эйнштейна первого порядка (III.66) и (III.67), найдем¹³:

$$\phi = 0. \quad (\text{III.68})$$

Таким образом, в первом порядке теории возмущений получаем лишь одно уравнение на амплитуду гравитационных возмущений:

$$S'' + 2\frac{a'}{a}S' + Sn^2 = 0, \quad (\text{III.69})$$

которое мы будем называть *эволюционным уравнением для гравитационных возмущений*.

¹²Мы опускаем общий экспоненциальный множитель для возмущений первого порядка e^{ikz} и множитель e^{2ikz} для возмущений второго порядка.

¹³Отличные от нуля возмущения скалярного поля допустимы лишь при наличии продольных возмущений гравитационного поля. Их мы рассмотрим в следующей статье.

III.3.4 Уравнения второго порядка

Во втором порядке теории возмущений в уравнение для скалярного поля добавится член, квадратичный по амплитуде гравитационных волн. Таким образом, во втором порядке теории возмущений уравнение скалярного поля примет вид:

$$\Phi_0'' + 2\frac{a'}{a}\Phi_0' + m^2\Phi_0 - SS'\Phi_0' = 0. \quad (\text{III.70})$$

Результат усреднения этого уравнения по случайным параметрам флуктуаций метрики и даст нам уравнение для макроскопического скалярного поля второго порядка теории возмущений.

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна второго порядка с учетом эволюционного уравнения на амплитуду гравитационных возмущений (III.69) равны:

$$G^{(2)1}_1 = G^{(2)2}_2 = -\frac{1}{4}\frac{S^2n^2}{a^2} - \frac{1}{4}\frac{S'^2}{a^2}; \quad (\text{III.71})$$

$$G^{(2)3}_3 = \frac{3}{4}\frac{S^2n^2}{a^2} - \frac{3}{4}\frac{S'^2}{a^2}; \quad (\text{III.72})$$

$$G^{(2)4}_4 = -\frac{7}{4}\frac{S^2n^2}{a^2} - \frac{1}{4}\frac{S'^2}{a^2} - 2\frac{a'SS'}{a^2}; \quad G^{(2)3}_4 = \frac{3}{2}in\frac{S'S}{a^2}; \quad (\text{III.73})$$

$$G^{(2)1}_1 + G^{(2)2}_2 + G^{(2)3}_3 = \frac{1}{4}\frac{S^2n^2}{a^2} - \frac{5}{4}\frac{S'^2}{a^2}; \quad (\text{III.74})$$

$$\text{Sp}(G^{(2)i}_k) = G^{(2)1}_1 + G^{(2)2}_2 + G^{(2)3}_3 + G^{(2)1}_1 + G^{(2)4}_4 = -\frac{3}{2}\frac{S^2n^2}{a^2} - \frac{3}{2}\frac{S'^2}{a^2} - 2\frac{a'SS'}{a^2}. \quad (\text{III.75})$$

Относительно ненулевой компоненты $G^{(2)3}_4$ мы поговорим ниже.

Все возмущения второго порядка тензора энергии - импульса в случае поперечных возмущений оказываются строго равными нулю:

$$T^{(2)i}_k = 0. \quad (\text{III.76})$$

III.4 Усреднение локальных флуктуаций метрики

III.4.1 Усреднение по направлениям волнового вектора

Заметим, что на фоне изотропного пространства Фридмана операция усреднения метрики сводится к усреднению по всем направлениям сводится волно-

III.4. Усреднение локальных флуктуаций метрики

вого вектора \mathbf{n} , произвольным направлениям вектора поляризации \mathbf{s} и произвольной фазе колебаний α . Вследствие принятых предположений об усреднении 1, 2 функция распределения флуктуаций метрики и полевых величин должна быть инвариантной по отношению к поворотам и трансляциям, то есть, все направления волнового вектора \mathbf{n} и поляризации \mathbf{s} должны быть равновероятными, также равновероятными должны быть флуктуации с произвольной фазой. Это означает, что усреднение по направлениям волнового вектора \mathbf{n} определяется следующим образом:

$$\overline{\psi(n, \mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi} \int \psi(\mathbf{n}, \mathbf{r}) d\Omega_n, \quad (\text{III.77})$$

то есть, сводится к интегрированию по сфере единичного радиуса¹⁴. Аналогично проводится усреднение и по поляризациям гравитационных волн \mathbf{s} . Заметим, с учетом ортогональности вектора поляризации и волнового вектора (III.51) у нас имеется всего 5 степеней свободы. Перейдем с помощью соотношений (III.50) и (III.51) от выделенной системы координат (III.54) к произвольной декартовой, производя замены

$$nz \rightarrow \mathbf{nr}; \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}; \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{s}, \quad (\text{III.78})$$

разлагая в произвольных декартовых координатах симметричный трехмерный тензор по векторам \mathbf{s} , \mathbf{n} и симметричному тензору $\delta_{\alpha\beta}$:

$$G^{(2)\alpha}_{\beta} = A s_{\alpha} s_{\beta} + B (s_{\alpha} n_{\beta} + s_{\beta} n_{\alpha}) + C n_{\alpha} n_{\beta} + D \delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{III.79})$$

где A, B, C, D – некоторые инварианты. Таким образом, в системе координат (III.50) найдем: $A = B = 0$;

$$D = G^{(2)1}_{1}; \quad C = G^{(2)3}_{3} - G^{(2)1}_{1} \quad (\text{III.80})$$

и

$$G^{(2)\alpha}_{\beta} = (G^{(2)3}_{3} - G^{(2)1}_{1}) C n_{\alpha} n_{\beta} + G^{(2)1}_{1} \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{III.81})$$

Вычисляя, найдем:

$$G^{(2)3}_{3} - G^{(2)1}_{1} = \frac{S^2 n^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{S'^2}{a^2}. \quad (\text{III.82})$$

¹⁴Можно было бы также усреднить и по всем длинам волновых векторов, но эта операция не дает дополнительной информации. О процедуре усреднения и получения макроскопических уравнений Эйнштейна см. [41, 1].

Таким образом, для средних получим:

$$\overline{s_\alpha s_\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}; \quad \frac{\overline{n_\alpha n_\beta}}{n^2} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}; \quad \overline{s_\alpha n_\beta} = 0. \quad (\text{III.83})$$

и окончательно:

$$\overline{G^{(2)\alpha}_\beta} = \frac{1}{3}(G^{(2)1}_1 + G^{(2)2}_2 + G^{(2)3}_3)\delta^\alpha_\beta = \left(-\frac{1}{4}\frac{S^2 n^2}{a^2} + \frac{5}{4}\frac{S'^2}{a^2}\right)\delta^\alpha_\beta. \quad (\text{III.84})$$

Возвращаясь к соотношению (III.73), получим:

$$\overline{G^{(2)3}_4} \rightarrow \overline{G^{(2)\alpha}_4} \sim \overline{n^\alpha} = 0. \quad (\text{III.85})$$

Вследствие изотропии макроскопической метрики и (III.34) усредненный таким образом суммарный тензор энергии - импульса также имеет явно изотропную структуру, то есть, структуру тензора энергии - импульса идеальной жидкости:

$$\mathcal{T}^{(2)\alpha}_\beta = -\overline{G^{(2)\alpha}_\beta} = (\overline{\mathcal{E}} + \overline{\mathcal{P}})\delta^i_k \delta^k_i - \delta^i_k \overline{\mathcal{P}}, \quad (\text{III.86})$$

где

$$\overline{\mathcal{E}} = -\frac{1}{8\pi}\overline{G^{(2)4}_4} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{7}{4}\frac{S^2 n^2}{a^2} + \frac{1}{4}\frac{S'^2}{a^2} + 2\frac{a' S S'}{a a^2}\right), \quad (\text{III.87})$$

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{8\pi}\frac{1}{3}\overline{G^{(2)\alpha}_\alpha} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{12}\frac{S^2 n^2}{a^2} - \frac{5}{12}\frac{S'^2}{a^2}\right), \quad (\text{III.88})$$

есть макроскопические плотность энергии и давление поперечных гравитационных возмущений, соответственно. Кроме того имеет место соотношение:

$$\overline{\mathcal{E}} - 3\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{3}{2}\frac{S^2 n^2}{a^2} + \frac{3}{2}\frac{S'^2}{a^2} + 2\frac{a' S S'}{a a^2}\right). \quad (\text{III.89})$$

Вследствие изотропии и однородности макроскопической метрики вследствие (III.76) после такой операции усреднения в соответствии с методом самосогласованного поля мы получим для нее макроскопические уравнения Эйнштейна (III.23) второго порядка по возмущениям:

$$3\frac{a'^2}{a^4} - \Lambda = 8\pi\overline{\mathcal{E}}_s + \frac{7}{4}\frac{\overline{S^2} n^2}{a^2} + \frac{1}{4}\frac{\overline{S'^2}}{a^2} + 2\frac{a' \overline{S S'}}{a a^2}; \quad (\text{III.90})$$

$$\frac{a'^2}{a^4} - 2\frac{a''}{a^3} = \overline{\mathcal{P}}_s + \frac{1}{12}\frac{\overline{S^2} n^2}{a^2} - \frac{5}{12}\frac{\overline{S'^2}}{a^2}, \quad (\text{III.91})$$

III.5. Уравнения Эйнштейна второго порядка по возмущениям в ВКБ - приближении

где $\overline{\mathcal{E}}_s$ и $\overline{\mathcal{P}}_s$ – плотность энергии и давление *макроскопического* скалярного поля, вычисленные по формулам (III.62), в которых необходимо подставить значение макроскопического потенциала Φ , полученного из усредненного по гравитационным возмущениям уравнения (III.92).

$$\Phi'' + 2\frac{a'}{a}\Phi' + m^2\Phi - \overline{SS'}\Phi' = 0. \quad (\text{III.92})$$

Заметим, что в этих уравнениях масштабный фактор $a(\eta)$ является уже макроскопической величиной. Таким образом:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}}_s &= -m^2 a^2 \Phi^2 + \frac{\Phi'^2}{a^2}; \\ \overline{\mathcal{E}}_s &= m^2 a^2 \Phi^2 + \frac{\Phi'^2}{a^2}. \end{aligned} \quad (\text{III.93})$$

Система уравнений (III.90) – (III.92) совместно с соотношениями (III.93) и эволюционным уравнением (III.69) на гравитационные возмущения и являются самосогласованной системой уравнений, определяющих макроскопическую метрику и макроскопическое скалярное поле во втором порядке теории возмущений по локальным флуктуациям метрики. Эти уравнения необходимо еще усреднить по случайной фазе гравитационных возмущений.

III.5 Уравнения Эйнштейна второго порядка по возмущениям в ВКБ - приближении

III.5.1 ВКБ-решение эволюционного уравнения

Для получения макроскопических уравнений Эйнштейна необходимо решить эволюционное уравнение для поперечных гравитационных возмущениях при *произвольном* масштабном факторе $a(\eta)$. Несмотря на внешнюю простоту эволюционного уравнения, найти его общее решение не представляется возможным. Поэтому здесь мы рассмотрим ВКБ-приближение этого уравнения, полагая:

$$S(\eta) = \tilde{S}(\eta)e^{i\psi(\eta)}; \quad (\text{III.94})$$

$$\psi' \gg \tilde{S}'_0; \quad n \gg 1; \quad \psi'' \ll \phi'. \quad (\text{III.95})$$

Подставляя $S(\eta)$ из (III.94) в эволюционное уравнение (III.69), приведем его к виду:

$$\tilde{S}''' + 2\tilde{S}'\left(\frac{a'}{a} + i\psi'\right) + \tilde{S}\left(n^2 - \psi'^2 + 2i\frac{a'}{a}\psi' + i\psi''\right) = 0. \quad (\text{III.96})$$

В нулевом порядке ВКБ-приближения получим уравнение:

$$n^2 - \psi'^2 = 0 \Rightarrow \psi' = \pm n \Rightarrow \psi = \pm i\eta + \alpha. \quad (\text{III.97})$$

Подставляя таким образом найденную фазу в уравнение (III.96), получим в следующем порядке ВКБ-приближения уравнение на амплитуду $S_0(\eta)$:

$$2in \left(\tilde{S}' + \frac{a'}{a} \tilde{S} \right) = 0. \quad (\text{III.98})$$

Таким образом, получим окончательно решение эволюционного уравнения в ВКБ-приближении:

$$S = \frac{e^{i\alpha}}{a(\eta)} (S_0^+ e^{in\eta} + S_0^- e^{-in\eta}) \equiv \frac{C_1 \cos(n\eta + \alpha)}{a} + \frac{C_2 \sin(n\eta + \alpha)}{a}, \quad (\text{III.99})$$

где C_1, C_2 – некоторые произвольные вещественные константы.

III.5.2 Усреднение амплитуд по фазе

В дальнейшем в эволюционном уравнении для макроскопического масштабного фактора (III.90) и в уравнении для макроскопического потенциала (III.92) нам понадобятся значения квадратов амплитуд S и их производных. Для этого нам необходимо усреднить полученные величины по фазе α . Таким образом, реальную часть величин типа S^2 мы будем вычислять по следующему правилу:

$$\langle S^2 \rangle_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S^2 d\alpha. \quad (\text{III.100})$$

Таким образом, учитывая соотношения (III.99), найдем согласно (III.100):

$$\begin{aligned} \langle S^2 \rangle_\alpha &= \frac{1}{2} \frac{S_0^2}{a^2}; \quad \langle SS' \rangle_\alpha = -\frac{1}{2} \frac{a'}{a} \frac{S_0^2}{a^2}; \\ \langle S'^2 \rangle_\alpha &= \frac{1}{2} \frac{S_0^2}{a^2} \left(n^2 + \frac{a'^2}{a^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{III.101})$$

где

$$S_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}.$$

III.5. Уравнения Эйнштейна второго порядка по возмущениям в ВКБ - приближении

Подставляя эти выражения в уравнение эволюции масштабного фактора (III.90), получим окончательно макроскопическое уравнение эволюции в ВКБ-приближении:

$$3\frac{a'^2}{a^4}\left(1 + \frac{7}{24}S_0^2\right) = \Lambda + 8\pi\left(m^2a^2\Phi^2 + \frac{\Phi'^2}{a^2}\right) + \frac{S_0^2n^2}{a^4}. \quad (\text{III.102})$$

Для макроскопического уравнения поля (III.92) получим аналогично:

$$\Phi'' + 2\frac{a'}{a}\Phi'\left(1 + \frac{S_0^2}{2a^2}\right) + m^2\Phi = 0. \quad (\text{III.103})$$

Уравнения (III.104) и (III.103) и являются искомыми уравнениями макроскопической космологии со скалярным полем в ВКБ-приближении. Заметим, что вблизи космологической сингулярности ($a(\eta) \rightarrow 0$) второй член в круглых скобках этого уравнения стремится к бесконечности также и в случае инфляционного решения ($a \sim -1/\eta$, $\eta \rightarrow -\infty$) как η^2 .

В случае пустой вселенной ($\Phi \equiv 0$) уравнение (III.104) принимает простой вид:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda + \frac{S_0^2n^2}{a^4}}{3\left(1 + \frac{7}{24}S_0^2\right)}, \quad (\text{III.104})$$

и интегрируется в элементарных функциях:

$$a(t) = \frac{\sqrt{S_0n}}{\Lambda^{1/4}} \sqrt{\text{sh}\left(\frac{2\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3b}}t\right)}; \quad b = 1 + \frac{7}{24}S_0^2. \quad (\text{III.105})$$

Это решение относится к классу решений, ранее полученных Автором и описывает плавный переход с ультрарелятивистской стадии расширения на инфляционную.

Глава IV

Неминимальные макроскопические модели скалярного поля, основанные на микроскопической динамике

IV.1 Введение

В последнее время опубликовано большое количество работ по позднему ускорению Вселенной. Для решения проблемы вторичного ускорения Вселенной во многих работах предлагается коренным образом изменить фундаментальные принципы физики. Однако, сейчас появляются некоторые аргументы в пользу того, что сложные, многокомпонентные, классические физические системы также могут приводить ко вторичному ускорению Вселенной. В отличие от двухкомпонентной системы «скалярное поле + идеальная жидкость», в которой взаимодействие компонентов осуществляется лишь через гравитацию¹, мы рассмотрим статистические системы скалярно заряженных частиц, в которой некоторые сорта частиц могут прямым образом взаимодействовать со скалярным полем через некоторый фундаментальный *скалярный заряд*. С другой стороны, статистическая система, обладая, вообще говоря, ненулевым скалярным зарядом и сама являясь источником скалярного поля, может эффективно влиять на скалярное поле, управляя его поведением. Такое скалярное взаимодействие было введено в общерелятивистскую кинетическую теорию в 1983 г автором статьи [6, 58, 59, 60] и несколько позже – Г.Г. Ивановым [125]. В частности, в работах [58, 59] на основе кинетической теории получена самосогласованная система уравнений, описывающая статистическую систему частиц со скалярным взаимодействием. Следует от-

¹т.е., от минимальной модели взаимодействия

IV.1. Введение

метить, что в настоящее время создано множество моделей неминимального взаимодействия скалярного поля с обычной материей. В частности, рассматривались модели связи посредством кинетического члена лагранжиана взаимодействия. Однако, все рассматриваемые модели имеют один существенный недостаток – они являются полностью феноменологическими. В отличие от этих моделей мы рассмотрим строгую динамическую модель взаимодействия скалярного поля с элементарными частицами, основанную на микроскопических уравнениях движения Гамильтона и последующей процедурой статистического усреднения. При этом оказывается, что взаимодействие скалярного поля с частицами можно ввести единственным образом, также и макроскопические уравнения материи и скалярного поля с помощью процедур усреднения получаются однозначным образом. Тем самым, устанавливается тесная связь между микро – и макро – уровнями описания скалярного взаимодействия. Вполне естественно, что получающаяся на таком пути модель скалярного взаимодействия должна иметь более сложную конструкцию, чем аналогичные феноменологические модели, но при этом она обнаруживает и более богатые возможности поведения.

В предыдущих работах Автора были рассмотрены статистические системы скалярно заряженных частиц, в том числе были построены космологические модели основанные на таких системах [6, 58, 59, 60]. В частности, в работах [58, 59] на основе кинетической теории получена самосогласованная система уравнений, описывающая статистическую систему частиц со скалярным взаимодействием. В последних работах Автора [61, 62, 63]² макроскопическая теория статистических систем со скалярным взаимодействием была значительно усовершенствована в части развития формализма и расширена на случай фантомных скалярных полей³. В работах [64, 66] был поднят вопрос о возможности включения в теорию отрицательных эффективных масс частиц. В работе [66] на этот вопрос был дан отрицательный ответ, так для плотности числа частиц в статистической теории получались при этом отрицательные значения. Однако, как показали более глубокие исследования, этот отрицательный ответ был получен некорректно. Как оказалось, для строгого решения вопроса о возможности включения отрицательных эффективных масс частиц в релятивистскую кинетическую теорию необходимо пересмотреть ряд ее ключевых моментов, зависящих от знака эффектив-

²см. также монографии [1, 2].

³см. также [64] и обзор [65].

ной массы частиц, возникающих на ее более ранних этапах, предшествующих определению макроскопических моментов. В этой статье мы рассмотрим обобщение теории на случай нескольких скалярных полей. При попытке такого обобщения оказывается, что развитая теория вступает в противоречие с фундаментальным принципом аддитивности функционала действия. Положением теории, приводящем к противоречию, как раз и оказывается предположение о неотрицательности эффективной массы частиц. Таким образом, возникла необходимость ревизии кинетической теории систем скалярно заряженных частиц, результаты которой и представлены в данной главе. Результаты, представленные в данной главе, опубликованы в статьях [26], [27], [28].

IV.2 Динамика частиц со скалярным взаимодействием

IV.2.1 Канонические уравнения движения

Нормированный инвариантный элемент объема 8-ми мерного фазового пространства релятивистской частицы Γ , являющегося векторным расслоением $\Gamma = X \times P$ с римановой базой $X(g)$ и векторным слоем $P(X)$ относительно пары канонически сопряженных динамических переменных x^i (конфигурационных координат) и P_i (координат обобщенного импульса) есть [41]⁴:

$$d\Gamma = \frac{\varrho}{(2\pi)^3} dX dP \equiv \frac{\varrho}{(2\pi)^3} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 dP_1 dP_2 dP_3 dP_4, \quad (\text{IV.1})$$

где

$$dX = \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4; \quad (\text{IV.2})$$

$$dP = \frac{1}{\sqrt{-g}} dP_1 dP_2 dP_3 dP_4 \quad (\text{IV.3})$$

есть инвариантные элементы объемов конфигурационного и импульсного пространств, соответственно, а ϱ есть фактор вырождения; для частиц со спином S $\varrho = 2S + 1$. В дальнейшем для сокращения записи мы также будем использовать одноименные фазовые координаты η_a , $a = \overline{1, 8}$:

$$\eta_i \equiv x^i, \quad \eta_{i+4} = P_i, \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (\text{IV.4})$$

⁴Здесь и в дальнейшем принята универсальная система единиц $G = c = \hbar = 1$. В обычных единицах $2\pi \rightarrow 2\pi\hbar$.

IV.2. Динамика частиц со скалярным взаимодействием

в которых выражение для элемента объема фазового пространства (IV.1) принимает максимально простой вид:

$$d\Gamma = \frac{\varrho}{(2\pi)^3} \prod_{a=1}^8 d\eta_a. \quad (\text{IV.5})$$

Канонические уравнения движения релятивистской частицы в фазовом пространстве Γ имеют вид (см., например, [6]):

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial P_i}; \quad \frac{dP_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad (\text{IV.6})$$

где $H(x, P)$ - релятивистски инвариантная функция Гамильтона, $u^i = dx^i/ds$ - вектор скорости частицы.

Вследствие антисимметричности канонических уравнений движения (VI.1) и симметричности фазового объема (IV.1) выполняется дифференциальное соотношение [41], в классической динамике известное как *теорема Лиувилля*

$$\frac{d\Gamma}{ds} = 0, \quad (\text{IV.7})$$

согласно которому фазовый объем мировой трубки частиц постоянен.

Вычисляя полную производную от функции динамических переменных $\Psi(x^i, P_k)$, с учетом (VI.1) найдем:

$$\frac{d\Psi}{ds} = [H, \Psi], \quad (\text{IV.8})$$

где введены инвариантные скобки Пуассона:

$$[H, \Psi] = \frac{\partial H}{\partial P_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}. \quad (\text{IV.9})$$

Заметим, что скобку Пуассона (VI.5) можно переписать в явно ковариантном виде с использованием *оператора ковариантного дифференцирования по Картану*, $\tilde{\nabla}_i$,⁵ (см., например, [41])⁶:

$$\tilde{\nabla}_i = \nabla_i + \Gamma_{ij}^k P_k \frac{\partial}{\partial P_j}, \quad (\text{IV.10})$$

⁵Ковариантная производная в расслоении Γ [70].

⁶Впервые в релятивистскую статистику ковариантные производные по Картану были введены А.А. Власовым [71].

где ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования по Риччи, а Γ_{ij}^k – символы Кристоффеля 2-го рода относительно метрики g_{ij} базы X . Оператор $\tilde{\nabla}$ определен таким образом, что

$$\tilde{\nabla}_i P_k \equiv 0 \quad (\text{IV.11})$$

и выполняется следующее *символическое* правило дифференцирования функций:

$$\tilde{\nabla}_i \Psi(x, P) = \nabla_i [\Psi(x), P], \quad (\text{IV.12})$$

которое означает, что для вычисления производной Картана от функции $\Psi(x, P)$ достаточно вычислить от нее обычную ковариантную производную так, как если бы вектор импульса был ковариантно постоянным. Благодаря этому равенству введенный оператор весьма удобен для выполнения дифференциальных и интегральных операций в фазовом пространстве Γ . Таким образом, запишем скобку Пуассона (VI.5) в явно ковариантном виде:

$$[H, \Psi] \equiv \frac{\partial H}{\partial P_i} \tilde{\nabla}_i \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial P_i} \tilde{\nabla}_i H, \quad (\text{IV.13})$$

Далее, вследствие (VI.5) функция Гамильтона является интегралом движения частицы:

$$\frac{dH}{ds} = [H, H] = 0, \Rightarrow H = \text{Const}. \quad (\text{IV.14})$$

Соотношение (IV.77) можно назвать соотношением нормировки. Вследствие линейности скобки Пуассона любая непрерывно дифференцируемая функция $f(H)$ также является функцией Гамильтона. Единственная возможность введения инвариантной функции Гамильтона, квадратичной по обобщенному импульсу частицы, при наличии только гравитационных и скалярных полей есть следующая:

$$H(x, P) = \frac{1}{2} [\psi(x)(P, P) - \varphi(x)], \quad (\text{IV.15})$$

где (a, b) здесь и в дальнейшем есть скалярное произведение векторов a и b относительно метрики базы:

$$(a, b) = g_{ik} a^i b^k, \quad (\text{IV.16})$$

IV.2. Динамика частиц со скалярным взаимодействием

а $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ – некоторые скалярные функции скалярных потенциалов. Выберем нулевую нормировку функции Гамильтона в соотношении (IV.77) [61, 42]:

$$H(x, P) = \frac{1}{2} [\psi(x)(P, P) - \varphi(x)] = 0, \quad (\text{IV.17})$$

откуда найдем:

$$(P, P) = \frac{\varphi}{\psi}, \quad (\text{IV.18})$$

а из первой группы канонических уравнений движения (VI.1) получим связь между обобщенным импульсом и вектором скорости частицы:

$$u^i \equiv \frac{dx^i}{ds} = \psi P^i \Rightarrow P^i = \psi^{-1} u^i, \quad (\text{IV.19})$$

Подставляя (IV.19) в соотношение нормировки (IV.18), получим:

$$(u, u) = \psi\varphi. \quad (\text{IV.20})$$

Поэтому для выполнения соотношения нормировки вектора скорости частицы

$$(u, u) = 1. \quad (\text{IV.21})$$

должно быть:

$$\psi\varphi = 1 \Rightarrow \psi = \varphi^{-1}, \quad (\text{IV.22})$$

– таким образом, инвариантная функция Гамильтона частицы может определяться лишь одной скалярной функцией $\varphi(x)$. Учитывая последнее соотношение, запишем функцию Гамильтона в окончательной форме:

$$H(x, P) = \frac{1}{2} [\varphi^{-1}(x)(P, P) - \varphi(x)] = 0, \quad (\text{IV.23})$$

и из канонических уравнений (VI.1) получим связь между обобщенным импульсом и вектором скорости частицы:

$$P^i = \varphi \frac{dx^i}{ds}. \quad (\text{IV.24})$$

Из соотношения (IV.18) следует, что вектор обобщенного импульса времени-подобен:

$$(P, P) = \varphi^2 \geq 0. \quad (\text{IV.25})$$

Отметим полезное для дальнейшего соотношение, являющееся следствием (VII.8), (IV.15) и (IV.25):

$$[H, P^k] = \nabla^k \varphi \equiv g^{ik} \partial_i \varphi; \quad (IV.26)$$

где $\nabla^i \equiv g^{ik} \nabla_k$ – символ ковариантной производной.

IV.2.2 Уравнения движения в Лагранжевой формулировке

Из второй группы канонических уравнений (VI.1) получим уравнения движения в Лагранжевой формулировке [1]:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \partial_{,k} \ln |\varphi| \mathcal{P}^{ik}, \quad (IV.27)$$

где:

$$\mathcal{P}^{ik} = \mathcal{P}^{ki} = g^{ik} - u^i u^k \quad (IV.28)$$

– тензор ортогонального проектирования на направление u , такой что:

$$\mathcal{P}^{ik} u_k \equiv 0; \quad \mathcal{P}^{ik} g_{ik} \equiv 3. \quad (IV.29)$$

Из этих соотношений и уравнений Лагранжа (IV.27) вытекает строгое следствие ортогональности векторов скорости и ускорения:

$$g_{ik} u^i \frac{du^k}{ds} \equiv 0. \quad (IV.30)$$

Заметим, что лагранжевы уравнения движения (IV.27) инвариантны относительно знака скалярной функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x). \quad (IV.31)$$

Также инвариантна относительно преобразования (IV.31) и функция Гамильтона (IV.23) при нулевой ее нормировке. Поэтому из соотношений (IV.25), (IV.24), а также уравнений Лагранжа - Эйлера (IV.27) следует, что квадрат скаляра φ имеет смысл квадрата *эффективной инертной массы частицы, m_* , в скалярном поле*:

$$\varphi^2 = m_*^2. \quad (IV.32)$$

Заметим, что указанному выбору функции Гамильтона соответствует следующая функция действия:

$$S = \int m_* ds, \quad (IV.33)$$

формально совпадающая с функцией Лагранжа релятивистской частицы с массой покоя m_* в гравитационном поле (см., например, [124]).

IV.2.3 Выбор функции массы

Пусть теперь в системе имеются n различных скалярных полей, Φ_r , а каждая частица обладает n соответствующими фундаментальными скалярными зарядами, q_r ($r = \overline{1, n}$), среди которых могут быть и нулевые. Возникает вопрос о выборе функции $m_*(\Phi_r)$. Не конкретизируя пока эту функцию, отметим следующее важное обстоятельство. Для того, чтобы уравнения движения (VI.1) допускали линейный интеграл движения $\Psi = (\xi, P) = \text{Const}$, согласно (VI.4) необходимо и достаточно, чтобы $[H, \Psi] = 0$, что, в свою очередь, возможно тогда и только тогда, когда [64]:

$$(\xi, P) = \text{Const} \iff \underset{\xi}{L} \varphi g_{ik} = 0, \quad (\text{IV.34})$$

где $\underset{\xi}{L}$ – производная Ли в направлении ξ (см., например, [44]).

Рассмотрим статические поля g_{ik} и Φ_r , допускающие времениподобный вектор Киллинга $\xi^i = \delta_4^i$, когда сохраняется полная энергия заряженной частицы, $P_4 = E_0 = \text{Const} > 0$. Выберем систему отсчета, в которой $g_{\alpha 4} = 0$, $\alpha, \beta = \overline{1, 3}$, так что координата x^4 совпадает с мировым временем t . Тогда из соотношений связи между вектором кинематической скорости u^i и вектором полного импульса частицы P_i (IV.24) следует:

$$P_4 ds = \varphi dt. \quad (\text{IV.35})$$

Поэтому, если мы *хотим* сохранить одинаковую ориентацию мирового, t , и собственного, s , времени (т.е., $u^4 = dt/ds > 0$), необходимо выбрать такую функцию массы, которая всегда бы оставалась неотрицательной:

$$m_* = |\varphi| > 0. \quad (\text{IV.36})$$

Однако, такой консервативный и, на первый взгляд, правильный подход, использованный в работах Автора [6], [58]– [60], противоречит более фундаментальному принципу аддитивности функции Лагранжа. Как показано в работе

[64], отрицательность функции эффективной массы частицы не приводит к каким-либо противоречиям на уровне микроскопической динамики, так как наблюдаемый импульс частицы (как и наблюдаемая трехмерная скорость $v^\alpha = u^\alpha/u^4$), в отличие от ненаблюдаемой кинематической 4-скорости частицы, u^i , сохраняет свою ориентацию:

$$p^i = m_* \frac{dx^i}{ds} \equiv P^i. \quad (\text{IV.37})$$

Принципу же аддитивности функции действия соответствует выбор линейной функции массы в (IV.33):

$$m_* = m_0 + \sum_r q^{(r)} \Phi_r, \quad (\text{IV.38})$$

где m_0 – некоторая начальная масса покоя, а $q^{(r)}$ – заряд частицы относительно скалярного поля Φ_r , которые мы будем полагать функционально независимыми. В частности, для скалярного синглета $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \equiv \Phi$

$$m_* = m_0 + q\Phi. \quad (\text{IV.39})$$

При $m_0 = 0$ вся масса покоя частиц будет обеспечиваться взаимодействием со скалярными полями:

$$m_* = \varphi = \sum_r q_r \Phi_r. \quad (\text{IV.40})$$

Этот выбор отвечает и эстетическим критериям, так как в этом случае функция Гамильтона (IV.15) не зависит от массы покоя. С другой стороны видно, что при выборе функции $\varphi(\Phi)$ в форме (IV.38) уравнения Лагранжа (IV.27) становятся симметричными относительно замены $\Phi_r \rightarrow -\Phi_r$ или $q_r \rightarrow -q_r$. Поэтому, если частицы a и античастицы \bar{a} отличаются знаком скалярных зарядов, то $\bar{m}_* = -m_*$, но траектории частицы и античастицы в гравитационном и скалярных полях отличаться не будут. При этом согласно (IV.19) 4-векторы их кинематической скорости будут отличаться знаком: $\bar{u}^i = -u^i$, а векторы наблюдаемого обобщенного импульса будут совпадать $\bar{P}^i = P^i$. Заметим, что при этом векторы трехмерной скорости $v^\alpha = u^\alpha/u^4$ ($\alpha = \overline{1,3}$) частиц и античастиц также совпадают: $\bar{v}^\alpha = v^\alpha$. Тем не менее, пока мы не будем полагать $m_0 = 0$, а возвратимся к этому вопросу позже.

При выборе эффективной массы в форме (IV.38) функция Гамильтона (IV.23) и соотношение нормировки (IV.25) для обобщенного импульса принимают вид:

$$H(x, P) = \frac{1}{2} [m_*^{-1}(x)(P, P) - m_*] = 0, \quad (\text{IV.41})$$

$$(P, P) = m_*^2. \quad (\text{IV.42})$$

Отметим полезные в дальнейшем тождества, справедливые для функции Гамильтона (VII.6):

$$\tilde{\nabla}_i H = -\nabla_i m_*, \quad (\text{IV.43})$$

IV.2. Динамика частиц со скалярным взаимодействием

$$[H, \Psi] = \frac{1}{m_*} P^i \tilde{\nabla}_i \Psi + \partial_i m_* \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}, \quad (\text{IV.44})$$

где $\Psi(x, P)$ есть произвольная функция.

IV.2.4 Квантовые уравнения

Из классической функции Гамильтона (VII.6) с помощью стандартной подстановки:⁷

$$P_i \rightarrow i\hbar \nabla_i \quad (\text{IV.45})$$

получим оператор Гамильтона:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} m_*^{-1} (\hbar^2 g^{ik} \nabla_i \nabla_k + m_*^2). \quad (\text{IV.46})$$

Таким образом, для свободного массивного скалярного поля мы получим волновые уравнения в форме стандартных уравнений Клейна-Гордона с той лишь разницей, что масса покоя бозонов должна замениться на эффективную массу [64]:

$$(\square + m_*^2/\hbar^2)\Psi = 0, \quad (\text{IV.47})$$

а для свободных фермионов – соответствующие уравнения Дирака:

$$(\hbar \gamma^i \nabla_i + m_*)\Psi = 0, \quad (\text{IV.48})$$

где γ – спиноры.

Заметим, также что из (IV.47) при подстановке $\Psi = \Phi$ и выборе простейшей функции массы $m_* = q\Phi$, как и для функции массы $m = |q\Phi|$, сразу следует уравнение свободного скалярного поля с кубической нелинейностью:

$$\square\Phi + (q^2/\hbar^2)\Phi^3 = 0. \quad (\text{IV.49})$$

Таким образом, константа самодействия в уравнении скалярного поля принимает вполне определенный смысл:

$$\lambda = \frac{q^2}{\hbar^2}, \quad (\text{IV.50})$$

т.е., определяется аналогично постоянной тонкой структуры для электромагнитного поля.

⁷В этом разделе мы временно отступаем от универсальной системы единиц, в которой $\hbar = 1$.

IV.3 Вычисление макроскопических средних

Для расширения общерелятивистской кинетической теории на случай отрицательных эффективных масс элементарных частиц необходимо заново пересмотреть те ключевые моменты релятивистской кинетической теории, которые могут зависеть от знака массы частицы. Как оказалось таких ключевых момента всего два, и они определяются двумя обстоятельствами: связью собственного микроскопического времени частицы с собственным временем макроскопических наблюдателей и связью между вектором скорости частицы и ее обобщенным импульсом.

IV.3.1 Инвариантная функция распределения

Общий формализм инвариантных функций распределения развивался в работах [1, 41]. Для учета возможности отрицательного знака эффективной массы частиц необходимо аккуратно применить этот формализм к рассматриваемому случаю. Согласно этому формализму для определения макроскопических средних в релятивистском фазовом пространстве необходимо определить на его базе единичное времениподобное поле макроскопических наблюдателей, $U_i(x) : (U, U) = 1$, по часам которых будет проводиться синхронизация актов измерения отдельных частиц. Это времениподобное поле, в свою очередь, определяет некоторую пространственноподобную трехмерную поверхность, V_3 , смещения вдоль которой, δx^i , ортогональны этому полю:

$$V_3 : \delta x^i U_i = 0, \quad (IV.51)$$

а смещения вдоль этого поля dx^i определяют синхронизированное собственное время τ наблюдателей:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = U^i \Leftrightarrow \frac{dx^i}{d\tau} U_i = 1 \Rightarrow d\tau = dx^i U_i. \quad (IV.52)$$

Таким образом, в макроскопической системе отсчета наблюдателей:

$$X = V \times T \Rightarrow dX = dV d\tau. \quad (IV.53)$$

Очевидно, что связь собственного времени частицы, s , с синхронизированным собственным временем τ наблюдателей в каждой точке конфигурационного пространства устанавливается соотношением:

$$\frac{d\tau}{ds} = U_i \frac{dx^i}{ds}. \quad (IV.54)$$

IV.3. Вычисление макроскопических средних

Учитывая теперь соотношение (IV.37), являющееся следствием канонических уравнений (VI.1), получим окончательно:

$$\frac{d\tau}{ds} = m_*^{-1}(U, P) \Rightarrow \frac{1}{m_*(s)} \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{(U(\tau), P(s))}. \quad (\text{IV.55})$$

Соотношение (IV.55) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно функции $s(\tau)$, разрешая которое, мы можем определить связь между собственным временем частицы и временем, измеренным по часам синхронизированных наблюдателей:

$$s = s(\tau). \quad (\text{IV.56})$$

Инвариантная 8-ми мерная функция распределения тождественных частиц $F(x, P)$ вводится следующим образом [1, 41]. Пусть фазовая траектория частицы, определяемая каноническими уравнениями (VI.1) в фазовом пространстве $\Gamma = P(X) \times X$ есть:

$$x^i = x^i(s); \quad P_i = P_i(s) \Rightarrow \eta_a = \eta_a(s) \quad (a = \overline{1, 8}), \quad (\text{IV.57})$$

где s есть собственное время частицы. Тогда число частиц, регистрируемых наблюдателями в области $d\Gamma$ фазового пространства, можно определить как [1, 41]:

$$dN(\tau) = F(x, P)\delta(s - s(\tau))d\Gamma. \quad (\text{IV.58})$$

Заметим, что число частиц есть скаляр, зависящий, однако, от выбора поля наблюдателей U^i , т.е., от выбора системы отсчета в римановом пространстве X , тогда как сама 8-ми мерная функция распределения $F(x, P)$, вводимая соотношением (IV.80), является инвариантной в фазовом пространстве Γ . Заметим также, что невозможно дать другого определения инвариантной функции распределения в 8-ми мерном фазовом пространстве. Все вводимые ранее определения этой функции являются частными случаями (IV.80), реализованными в выделенных системах отсчета.

IV.3.2 Макроскопические средние динамических функций

Определение инвариантной функции распределения (IV.80), а вместе с ней и других динамических функций, и является первым ключевым моментом

релятивистской кинетической теории, который зависит от знака массы частиц. Пусть $\psi(x, P) \equiv \psi(\eta)$ есть некоторая скалярная функция динамических переменных. Тогда согласно (IV.80) ее макроскопическое среднее $\Psi(\tau)$ в области $\Omega \subset \Gamma$ определяется следующим образом:

$$\Psi(\tau) = \int_{\Omega} \psi(\eta(s)) dN = \int_{\Omega} F(\eta(s)) \psi(\eta(s)) \delta(s - s(\tau)) d\Gamma. \quad (\text{IV.59})$$

Подчеркнем еще раз, что функция распределения $F(x, P)$ в отличие от макроскопических средних, определяемых всегда по отношению к полю наблюдателей U , является инвариантной в фазовом пространстве. Полагая далее в соответствии с (IV.51), (IV.52) $X = V \times T \Rightarrow dX = dV dt$, запишем выражение (IV.74) в явном виде:

$$\Psi(\tau) = \frac{2S + 1}{(2\pi)^3} \int_V dV \int_T dt \int_{P(X)} dP \psi(\eta) F(\eta) \psi(\eta) \delta(s - s(\tau)) \quad (\text{IV.60})$$

Для проведения интегрирования по t в (IV.60) учтем связь $t(s)$ (IV.37) и $\tau(s)$ (IV.56) и свойства δ -функции Дирака:

$$\delta(s - s(\tau)) dt = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| \delta(t - \tau) ds \equiv |m_*|^{-1}(U, P) \delta(t - \tau) dt. \quad (\text{IV.61})$$

При выводе (IV.61) мы учли тот факт, что ориентация обобщенного импульса в отличие от ориентации вектора кинематической скорости не зависит от знака эффективной массы. Учитывая теперь (IV.61) в (IV.60) и проводя интегрирование по временной координате, получим окончательно:

$$\Psi(\tau) = \frac{2S + 1}{(2\pi)^3} \int_V U_i dV \frac{1}{|m_*|} \int_{P(X)} P^i dP \psi(\eta) F(\eta) \psi(\eta) \quad (\text{IV.62})$$

В частности, полагая $\psi = 1$, получим полное число частиц в области V :

$$N(V) = \frac{2S + 1}{(2\pi)^3} \int_V U_i dV \frac{1}{|m_*|} \int_{P(X)} P^i F(\eta) dP \equiv \int_V (U, n) dV, \quad (\text{IV.63})$$

где введен вектор плотности потока частиц:

$$n^i(x) = \frac{2S + 1}{(2\pi)^3 |m_*|} \int_{P(X)} P^i F(\eta) dP \quad (\text{IV.64})$$

Этот фактор модуля эффективной массы не был учтен в предыдущих работах по вышеупомянутой причине консерватизма.

IV.3. Вычисление макроскопических средних

IV.3.3 Переход к семимерной функции распределения

Вследствие соотношения нормировки обобщенного импульса (VII.7) инвариантная 8-мерная функция распределения $F(x, P)$ сингулярна на массовой поверхности. Поэтому необходимо ввести несингулярную на этой поверхности функцию распределения $f(x, P)$ с помощью соотношения:

$$F(x, P) = \delta(H(x, P))f(x, P). \quad (IV.65)$$

Вычисляя соотношение

$$F(x, P)dP \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}dP_1dP_2dP_3dP_4\delta(H(x, P))f(x, P) \quad (IV.66)$$

с помощью свойств δ -функции Дирака и явного вида функции Гамильтона (VII.6), получим:

$$\begin{aligned} F(x, P)dP &= \\ \frac{1}{\sqrt{-g}}dP_1dP_2dP_3\frac{|m_*|}{P_+^4}\delta(P_4 - P_4^+)f(x, P) \times \\ &\equiv |m_*|dP_0\delta(P_4 - P_4^+)f(x, P), \end{aligned} \quad (IV.67)$$

где $P_4^+ \equiv P_4$ есть положительный корень уравнения нормировки (VII.7), а

$$dP_0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{dP_1dP_2dP_3}{P_+^4} \quad (IV.68)$$

есть элемент объема трехмерного пространства импульсов.

В результате формулы для макроскопических средних (IV.62) можно записать через семимерную функцию распределения $f(x, P)$ следующим образом:

$$\Psi(\tau) = \frac{2S + 1}{(2\pi)^3} \int_V U_i dV \int_{P_+(X)} P^i dP_0 \psi(\eta) f(\eta), \quad (IV.69)$$

куда необходимо подставить вместо P_4 положительный корень уравнения массовой поверхности, а P_+ есть верхняя часть псевдосферы массовой поверхности. Таким образом, при переходе к 7-мерной функции распределения явная зависимость от эффективной массы в этих формулах исчезает.

Таким образом, справедливо следующее символическое правило, понимаемое в смысле интегрирования по соответствующим фазовым объемам:

$$\psi(\eta)F(\eta)\delta(s - s(\tau))d\Gamma \rightarrow \psi(\tilde{\eta})f(\tilde{\eta})(U, P)dVdP_0, \quad (IV.70)$$

где $\tilde{\eta}$ есть динамические переменные на шестимерном подпространстве $\Gamma_0(\tau) = V \times P_0 \subset \Gamma$ с элементом объема:

$$d\Gamma_0 = dV dP_0. \quad (\text{IV.71})$$

В частности, для вектора плотности потока числа частиц⁸ (VIII.15) получим из (IV.69):

$$n^i(x) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_{P_0(x)} P^i f(\eta) dP, \quad (\text{IV.72})$$

так что:

$$N(\tau) = \int_V n^i U_i dV \quad (\text{IV.73})$$

есть полное число частиц в объеме V в момент времени τ .

Заметим, что в [64] был сделан неправильный вывод о том что вектор плотности потока числа частиц зависит от знака эффективной массы. Такой вывод был получен вследствие того, что вычисление макроскопических средних было начато с вычисления моментов функции распределения, тогда как в случае отрицательных масс корректные вычисления необходимо было начинать на более раннем этапе, а именно с интегральных соотношений вида (IV.74).

Снятие ограничения на знак эффективной массы скалярно заряженной частицы позволяет сделать динамическую теорию совместимой с принципом аддитивности действия. В данной статье мы построим полную непротиворечивую систему макроскопических уравнений для статистической системы скалярно заряженных частиц при снятии ограничения на знак эффективной массы и уточним вид массовой функции.

IV.4 Скорость изменения динамических средних

Вычислим теперь скорость изменения среднего значения динамической функции $\psi(s)$ [57]

$$\Psi(\tau) = \int_{\Omega} F(\eta(s)) \psi(\eta(s)) \delta(s - s(\tau)) d\Gamma. \quad (\text{IV.74})$$

⁸Согласно J. Synge [73].

IV.4. Скорость изменения динамических средних

Вычисляя производную по времени τ от обеих частей (IV.74) с учетом символического правила дифференцирования δ -функции Дирака

$$\frac{d}{dx}\delta(g(x)) = \delta(g(x))\frac{d}{dx},$$

найдем:

$$\frac{d\Psi(\tau)}{d\tau} = \int_{\Omega} \delta(s - s(\tau)) \frac{ds}{d\tau} \frac{d}{ds} \left(F(\eta(s))\psi(\eta(s))d\Gamma \right). \quad (\text{IV.75})$$

Учтем в интеграле (IV.75) постоянство фазового объема частицы [57] $d\Gamma/ds = 0$ и соотношение для полной производной динамической функции

$$\frac{d\Psi}{ds} = [H, \Psi]. \quad (\text{IV.76})$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi(\tau)}{d\tau} &= \int_{\Omega} \frac{d}{ds} \left(F(\eta(s))\psi(\eta(s)) \right) \times \\ &\delta(s - s(\tau)) \frac{ds}{d\tau} d\Gamma = \int_{\Omega} [H, F\psi] \delta(s - s(\tau)) \frac{ds}{d\tau} d\Gamma \end{aligned}$$

Учтем далее соотношение [57]

$$\frac{dH}{ds} = [H, H] = 0, \Rightarrow H = \text{Const}. \quad (\text{IV.77})$$

и линейность скобки Пуассона:

$$[H, F\psi] = [H, f\delta(H)\psi] = \delta(H)[H, f\psi]. \quad (\text{IV.78})$$

Тогда, проводя интегрирование по временной координате и массовой поверхности, получим:

$$\frac{d\Psi(\tau)}{d\tau} = \int_{\Omega_0} m_* [H, f\psi] d\Gamma_0 \quad (\text{IV.79})$$

В частности, для скорости изменения числа частиц

$$dN(\tau) = F(x, P)\delta(s - s(\tau))d\Gamma \quad (\text{IV.80})$$

получим, полагая в (IV.79) $\psi = 1$:

$$\frac{dN(\tau)}{d\tau} = \int_{\Omega_0} m_* [H, f] d\Gamma_0 \quad (\text{IV.81})$$

Учтем теперь дифференциальное соотношение [57] для функции Гамильтона скалярно заряженных частиц

$$[H, \Psi] = \frac{1}{m_*} P^i \tilde{\nabla}_i \Psi + \partial_i m_* \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}. \quad (\text{IV.82})$$

Тогда получим окончательно:

$$\frac{d\Psi(\tau)}{d\tau} = \int_{\Omega_0} \left(P^i \tilde{\nabla}_i + \frac{1}{2} \partial_i m_*^2 \frac{\partial}{\partial P_i} \right) f \psi d\Gamma_0. \quad (\text{IV.83})$$

Таким образом, соотношение для скорости изменения динамических средних также не зависит от знака массовой функции.

Пусть теперь область Ω_0 охватывает все шестимерное фазовое пространство Γ_0 . Для упрощения первого интеграла в (IV.83) необходимо воспользоваться интегральным соотношением для производной Картана (см., например, [6]):

$$\int_{P(X)} \tilde{\nabla}_i \psi(x, P) dP \equiv \nabla_i \int_{P(X)} \psi(x, P) dP. \quad (\text{IV.84})$$

Далее, примем предположение относительно свойств динамических функций на бесконечной сфере $\Sigma_P(X)$, охватывающей трехмерное пространство импульсов:

$$f(x, P) \psi(x, P)|_{\Sigma_P(X)} \rightarrow 0. \quad (\text{IV.85})$$

Тогда, интегрируя по частям, получим интегральное соотношение:

$$\int_{P_0(X)} \frac{\partial}{\partial P_i} f(x, P) \psi(x, P) dP_0 = 0. \quad (\text{IV.86})$$

Таким образом, получим для (IV.83):

$$\frac{d\Psi(\tau)}{d\tau} = \int_V dV \nabla_i \int_{P_0} P^i f \psi dP_0. \quad (\text{IV.87})$$

IV.5 Кинетические уравнения и уравнения переноса

IV.5.1 Общерелятивистские кинетические уравнения

Поскольку фактор знака эффективной массы не влияет явно на форму инвариантных общерелятивистских кинетических уравнений, ограничимся краткими сведениями о релятивистских кинетических уравнениях (см., например, [59, 60, 1]). Вследствие принципа локального соответствия и предположения о 4-х мерной точечности столкновений частиц, в каждом акте межчастичного взаимодействия сохраняется обобщенный импульс системы взаимодействующих частиц:

$$\sum_I P_i = \sum_F P'_i, \quad (IV.88)$$

где суммирование проводится по всем начальным, P_i , и конечным, P'_i , состояниям. Пусть в плазме протекают реакции:

$$\sum_{A=1}^m \nu_A a_A \rightleftharpoons \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B a'_B, \quad (IV.89)$$

где a_A – символы частиц, а ν_A – их числа в каждом канале реакций. Таким образом, обобщенные импульсы начального и конечного состояний равны:

$$P_I = \sum_{A=1}^m \sum_{\alpha}^{\nu_A} P_A^{\alpha}, \quad P_F = \sum_{B=1}^{m'} \sum_{\alpha'}^{\nu'_B} P'^{\alpha'}_B. \quad (IV.90)$$

Функции распределения частиц определяются инвариантными кинетическими уравнениями [59]⁹:

$$m_*[H_a, f_a] = I_a(x, P), \quad (IV.91)$$

где $I_a(x, P_a)$ – интеграл столкновений:

$$I_a(x, P_a) = - \sum \nu_A \int_a' \delta^4(P_F - P_I) W_{IF} (Z_{IF} - Z_{FI}) \prod_{I,F}' dP; \quad (IV.92)$$

где

$$W_{FI} = (2\pi)^4 |M_{IF}|^2 2^{-\sum \nu_A + \sum \nu'_b}$$

⁹Нормировочный множитель m_* в левой части (IV.90) учитывает нормировку функции Гамильтона (VII.10).

– матрица рассеяния канала реакций (V.9), ($|M_{IF}|$ – инвариантные амплитуды рассеяния); I – начальное состояние, F – конечное;

$$Z_{IF} = \prod_I f(P_A^\alpha) \prod_F [1 \pm f(P_B^{\alpha'})];$$

$$Z_{FI} = \prod_I [1 \pm f(P_A^\alpha)] \prod_F f(P_B^{\alpha'}),$$

знак “+” соответствует бозонам, “-” – фермионам (подробности см. в [59, 60]).

IV.5.2 Уравнения переноса динамических величин

Перейдем теперь к выводу уравнений переноса динамических величин. Используя линейность скобки Пуассона и приравнявая правые части равенств (IV.79) и (IV.87), получим интегральное соотношение:

$$\int_V dV \left(\nabla_i \int_{P_0} P^i f \psi dP_0 - \int_{P_0} \psi m_*[H, f] dP_0 - \int_{P_0} f m_*[H, \psi] dP_0 \right) = 0. \quad (IV.93)$$

Вследствие произвольности области V получим отсюда интегро - дифференциальное соотношение:

$$\nabla_i \int_{P_0} P^i f \psi dP_0 - \int_{P_0} \psi m_*[H, f] dP_0 - \int_{P_0} f m_*[H, \psi] dP_0 = 0. \quad (IV.94)$$

Подставляя во второй интеграл (IV.94) вместо скобки Пуассона ее выражение из кинетических уравнений (VII.1), получим;

$$\nabla_i \int_{P_0} P^i f \psi dP_0 - \int_{P_0} \psi I_\alpha dP_0 - \int_{P_0} f m_*[H, \psi] dP_0 = 0. \quad (IV.95)$$

Суммируя теперь (IV.95) по всем сортам частиц и учитывая выражение для интеграла столкновений, получим в качестве строгих следствий общерелятивистских кинетических уравнений (VII.1) *уравнения переноса динамических*

IV.5. Кинетические уравнения и уравнения переноса

величин $\psi_a(x, P_a)$:

$$\begin{aligned} \nabla_i \sum_a \int_{P_0} \Psi_a f_a P^i dP_a - \sum_a \int_{P_0} f_a m_* [H_a, \Psi_a] dP_a = \\ - \sum_{\text{by channels}} \int \left(\sum_{A=1}^m \nu_A \Psi_A - \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \Psi'_B \right) \times \\ \delta^4(P_F - P_I) (Z_{IF} W_{IF} - Z_{FI} W_{FI}) \prod_{I,F} dP, \end{aligned} \quad (\text{IV.96})$$

где суммирование проводится по всем каналам реакций (V.9).

Полагая в (IV.96) $\Psi_a = g_a$, где g_a – некоторые фундаментальные заряды, сохраняющиеся в реакциях (V.9), получим с учетом (VI.10), (IV.90) и (IV.96) уравнения переноса плотностей потоков числа частиц плазмы:

$$\nabla_i J_G^i = 0, \quad (\text{IV.97})$$

где:

$$J_G^i = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} g_a \int_{P_0} f_a(x, P) P^i dP_0. \quad (\text{IV.98})$$

– вектор плотности фундаментального тока, соответствующего зарядам g_a . В частности, закон сохранения (VI.15) всегда имеет место для каждого сорта частиц b ($g_a = \delta_a^b$) при условии упругости их столкновений.

Положим в (IV.96) $\Psi_a = P^k$, тогда подынтегральное выражение в больших круглых скобках (IV.96) вследствие закона сохранения обобщенного импульса при столкновениях (VI.10) равно:

$$\sum_{A=1}^m \nu_A \Psi_A - \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \Psi'_B \equiv P_I - P_F = 0. \quad (\text{IV.99})$$

Таким образом, получим с учетом [65]

$$[H, P^k] = \nabla^k \varphi \equiv g^{ik} \partial_i \varphi; \quad (\text{IV.100})$$

и (VI.10) уравнения переноса энергии-импульса плазмы:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sum_r \sigma_{(r)} \nabla^i \Phi_r = 0, \quad (\text{IV.101})$$

где введены тензор энергии - импульса плазмы

$$T_p^{ik} = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_{P_0} f_a(x, P) P^i P^k dP_0 \quad (\text{IV.102})$$

и скалярные плотности заряда плазмы относительно скалярного поля Φ_r , $\sigma^{(r)}$:

$$\sigma^{(r)} = \sum_a \sigma_a^{(r)}, \quad (\text{IV.103})$$

где $\sigma_a^{(r)}$ – скалярные плотности заряда a -той компоненты плазмы относительно скалярного поля Φ_r :

$$\sigma_a^{(r)} = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} m_a^* q_a^{(r)} \int_{P_0} f_a(x, P) dP_0, \quad (\text{IV.104})$$

В частности, для зарядового синглета (q, Φ) закон сохранения (VI.17) принимает вид:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sigma \nabla^i \Phi = 0, \quad (\text{IV.105})$$

где (см. [59, 65]):

$$\sigma = \Phi \frac{2S+1}{(2\pi)^3} q^2 \int_{P_0} f(x, P) dP_0. \quad (\text{IV.106})$$

Следует отметить, что форма ТЭИ (VII.12), а также скалярной плотности заряда (VI.20), найденная для скалярно заряженных частиц, при заданной функции Гамильтона является однозначным следствием канонических уравнений и предположения о сохранении полного импульса в локальных столкновениях частиц.

IV.5.3 Закон сохранения полного тензора энергии - импульса

Полная система макроскопических уравнений состоит, во-первых, из уравнений Эйнштейна:

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} = 8\pi (T_p^{ik} + T_s^{ik}), \quad (\text{IV.107})$$

IV.6. Термодинамическое равновесие плазмы в гравитационном поле

где T_p^{ik} – определенный выше ТЭИ статистической системы, а T_s^{ik} – ТЭИ системы N независимых скалярных полей:

$$T_s^{ik} = \sum_r \frac{\epsilon_1^{(r)}}{8\pi} \left[2\Phi_{(r),i}^i \Phi_{(r),k}^k - g^{ik} \Phi_{(r),j}^j \Phi_{(r)}^j + \epsilon_2^{(r)} m_s^{(r)2} g^{ik} \Phi_{(r)}^2 \right], \quad (\text{IV.108})$$

где для классического скалярного поля $\epsilon_2 = 1$, для фантомного скалярного поля $\epsilon_2 = -1$; для поля с отталкиванием одноименно заряженных частиц $\epsilon_1 = 1$, для поля с притяжением одноименно заряженных частиц $\epsilon_1 = -1$. Отметим, что ТЭИ скалярного поля в форме (VIII.2) получается из Лагранжиана [63]:

$$L_s = \sum_r \frac{\epsilon_1^{(r)}}{8\pi} (\Phi_{(r),i}^i \Phi_{(r)}^i - \epsilon_2^{(r)} m_s^{(r)2} \Phi_{(r)}^2). \quad (\text{IV.109})$$

Вычисляя ковариантную производную ∇_k от суммарного тензора энергии импульса

$$T^{ik} = T_p^{ik} + T_s^{ik}, \quad (\text{IV.110})$$

найдем с учетом (VI.21) и (VIII.2):

$$\nabla_k T_i^k = \frac{1}{4\pi} \sum_r \left[\epsilon_1^{(r)} \left(\square \Phi_{(r)} + \epsilon_2^{(r)} m_s^{(r)2} \Phi_{(r)} \right) + 4\pi \sigma^{(r)} \right] \nabla_i \Phi_{(r)} = 0. \quad (\text{IV.111})$$

Вследствие функциональной независимости производных скалярных потенциалов $\partial_i \Phi_{(r)}$ необходимым и достаточным условием выполнения (IV.111) является выполнение серии условий:

$$\square \Phi_{(r)} + \epsilon_2^{(r)} m_s^{(r)2} \Phi_{(r)} = -4\pi \epsilon_1^{(r)} \sigma^{(r)}. \quad (\text{IV.112})$$

Таким образом, мы получаем систему уравнения для потенциалов скалярного поля типа уравнений Клейна-Гордона (с точностью до знаков) с источниками.

IV.6 Термодинамическое равновесие плазмы в гравитационном поле

IV.6.1 Локально равновесное распределение

В условиях термодинамического равновесия:

$$\frac{dS}{d\tau} = 0. \quad (\text{IV.113})$$

Предположим сначала, что взаимодействие всех частиц T - инвариантно. Тогда равенство (IV.113) может выполняться лишь при выполнении условий (см. [1]):

$$Z_{fi} - Z_{if} = 0 \quad (\text{IV.114})$$

в каждом канале реакций (V.9). Уравнения (IV.114) являются аналогом функциональных уравнений Больцмана [75]. Для их решения сделаем замену:

$$F_a = e^{-\phi_a} (e^{-\phi_a} \mp 1)^{-1} \equiv (1 \mp e^{\phi_a})^{-1}, \quad (\text{IV.115})$$

в результате которой величины Z_{if} и Z_{fi} примут вид:

$$Z_{if} = \frac{\prod_i e^{-\phi_a}}{\prod_{i,f} (e^{-\phi_a} \mp 1)}; Z_{fi} = \frac{\prod_f e^{-\phi_a}}{\prod_{i,f} (e^{-\phi_a} \mp 1)}. \quad (\text{IV.116})$$

Тогда после логарифмирования уравнения (IV.114) примут вид:

$$\sum_{A=1}^m \sum_{\alpha=1}^{\nu_A} \phi_A(P_A^\alpha) = \sum_{B=1}^{m'} \sum_{\beta=1}^{\nu'_B} \phi'_B(P_B'^\beta), \quad (\text{IV.117})$$

причем, эти соотношения должны выполняться в каждом канале реакций (V.9). Единственным решением (IV.117) при произвольных значениях импульсов частиц являются линейные функции импульсов:

$$\phi_A(P_A^\alpha) = -\lambda_A(x) + (\xi_A, P_A^\alpha), \quad (\text{IV.118})$$

где вследствие инвариантности функции распределения: $\lambda_A(x)$ - скаляры в конфигурационном пространстве, $\xi^i(x)$ - векторы. Подставляя (IV.118) в уравнения (IV.117) и учитывая закон сохранения обобщенного импульса при столкновениях, получим вследствие произвольности импульсов частиц:

$$\xi_A^i(x) = \xi^i(x); \quad (\text{IV.119})$$

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^k \lambda_A = 0, \quad (\text{IV.120})$$

где $||\nu_A^k||$ - целочисленная матрица, введенная в [1]. Вследствие очевидного условия замкнутости всех циклов реакций

$$\text{rank}||\nu_A^k|| < N \quad (\text{IV.121})$$

IV.6. Термодинамическое равновесие плазмы в гравитационном поле

уравнения (IV.120) всегда имеют нетривиальное решение.

Условия (IV.119), (IV.120) являются условиями локального термодинамического равновесия (ЛТР); скаляры $\lambda_A(x)$ называются химическими потенциалами статистической системы.

Подставляя решения (IV.118) в (IV.115) с учетом (IV.119) получим локально - равновесные функции распределения:

$$f_a^0(x, P_a) = \{ \exp[-\lambda_a + (\xi, P_a)] \mp 1 \}^{-1}, \quad (\text{IV.122})$$

где верхний знак, как и ранее, соответствует бозонам, нижний - фермионам.

Для сходимости моментов от распределения (VI.23) необходима времениподобность вектора

$\xi^i(x)$:

$$\xi^2 \equiv (\xi, \xi) > 0. \quad (\text{IV.123})$$

Введем с помощью $\xi^i(x)$ единичное времениподобное поле $v^i(x)$:

$$v^i = \frac{\xi^i}{\xi}; \quad (v, v) = 1, \quad (\text{IV.124})$$

локальную температуру $\theta(x)$ [75]:

$$\theta(x) = \xi^{-1} \quad (\text{IV.125})$$

и химические потенциалы, $\mu_a(x)$, в обычной нормировке:

$$\mu_a(x) = \theta(x)\lambda_a(x). \quad (\text{IV.126})$$

Тогда распределение (VI.23) может быть записано в виде:

$$f_a^0(x, P_a) = \left\{ \exp \left[\frac{-\mu_a + (v, P_a)}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1}. \quad (\text{IV.127})$$

IV.6.2 Моменты равновесного распределения

Вычислим моменты распределения (VI.23). При этом удобно перейти в локально лоренцевый репер, временная компонента которого направлена вдоль вектора v^i , в котором уравнение массовой поверхности (см. [65])

$$(P, P) = m_*^2. \quad (\text{IV.128})$$

принимает вид:

$$P_4^2 = P^2 + m_*^2. \quad (\text{IV.129})$$

Затем необходимо перейти к сферической системе координат в пространстве импульсов $P(X)$ и ковариантно обобщить полученные результаты. В итоге получим выражения для компонент вектора плотности числа частиц, $n_a^i(x)$, и ТЭИ a -той компоненты плазмы, T_a^{ik} , [59], [76]:

$$n_a^i(x) = n_a(x)v^i; \quad (\text{IV.130})$$

$$T_a^{ik}(x) = (\mathcal{E}_a + P_a)v^i v^k - P_a g^{ik}. \quad (\text{IV.131})$$

Вычисляя введенные выше макроскопические скаляры для каждого сорта частиц, получим:

$$n_a(x) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{P^2 dP}{\exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta}\right) \mp 1}; \quad (\text{IV.132})$$

$$\mathcal{E}_a(x) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{m_*^2 + P^2} P^2 dP}{\exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta}\right) \mp 1}; \quad (\text{IV.133})$$

$$P_a(x) = \frac{\rho}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{P^4 dP}{\sqrt{m_*^2 + P^2} \exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta}\right) \mp 1}; \quad (\text{IV.134})$$

$$\sigma_a^{(r)}(x) = \frac{\rho m_* q_a^{(r)}}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{P^2 dP}{\sqrt{m_*^2 + P^2} \exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta}\right) \mp 1}. \quad (\text{IV.135})$$

При этом:

$$\mathcal{E} = \sum_a \mathcal{E}_a; \quad P = \sum_a P_a; \quad \sigma^{(r)} = \sum_a \sigma_a^{(r)}. \quad (\text{IV.136})$$

Заметим, что единичный вектор в направлении вектора плотности потока числа частиц называется *кинематической скоростью среды*, а собственный времениподобный единичный вектор ТЭИ частиц называется *динамической скоростью среды*, собственное же значение ТЭИ, соответствующее этому вектору, называется *плотностью энергии среды* (см., например, [73]). Таким образом в состоянии ЛТР кинематическая скорость частиц совпадает с их динамической скоростью и равна v^i .

IV.6.3 Симметрии термодинамического равновесия

Химический потенциал безмассовых частиц, обладающих нулевыми фундаментальными зарядами, в состоянии ЛТР равен нулю. Этот вывод следует из того, что числа ν_A^k таких частиц, участвующих в реакциях (IV.120), могут быть совершенно произвольными. Тогда из факта существования реакции аннигиляции частиц и античастиц следует известное соотношение [77]:

$$\bar{\mu}_a = -\mu_a. \quad (\text{IV.137})$$

Пусть далее имеется N -плет скалярных полей:

$$\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}. \quad (\text{IV.138})$$

Выясним, как преобразуются макроскопические скалярные плотности (VI.32) – (VI.36) по отношению к преобразованию:

$$\Phi : \Phi \rightarrow -\Phi. \quad (\text{IV.139})$$

При преобразованиях Φ (IV.139) эффективная масса частиц (см. [65])

$$m_*^a = m_0^a + \sum_r q_a^{(r)} \Phi_r \quad (\text{IV.140})$$

преобразуется по закону:

$$m_*(-\Phi) = m_0 - \sum_r q_a^{(r)} \Phi_{(r)} = 2m_0 - m_*(\Phi). \quad (\text{IV.141})$$

Поэтому при преобразованиях Φ (IV.139) эффективные массы частиц и античастиц связаны соотношением:

$$m_*(-\Phi) = \bar{m}_*(\Phi). \quad (\text{IV.142})$$

Таким образом, получим законы преобразования макроскопических скалярных плотностей (VI.32) – (VI.36) по отношению к преобразованию Φ (IV.139):

$$n_a(-\Phi) = \bar{n}_a(\Phi); \quad \mathcal{E}_a(-\Phi) = \bar{\mathcal{E}}_a(\Phi); \quad (\text{IV.143})$$

$$P_a(-\Phi) = \bar{P}_a(\Phi); \quad \sigma_a^{(r)}(-\Phi) = \bar{\sigma}_a^{(r)}(\Phi), \quad (\text{IV.144})$$

т.е., макроскопические скалярные плотности инвариантны по отношению к преобразованию (IV.139).

Рассмотрим теперь преобразование зарядового сопряжения:

$$\mathbf{Q}: q_a^{(r)} \longleftrightarrow -q_a^{(r)}, \Rightarrow \mathbf{q} \longleftrightarrow -\mathbf{q}, \quad (\text{IV.145})$$

где \mathbf{q} – зарядовая матрица размером $n \times N$:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1^{(1)} & q_2^{(1)} & \cdots & q_n^{(1)} \\ q_1^{(2)} & q_2^{(2)} & \cdots & q_n^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_1^{(N)} & q_2^{(N)} & \cdots & q_n^{(N)} \end{pmatrix}.$$

Исследуем закон преобразования скалярных плотностей (VI.32) – (VI.36) при к зарядовом преобразовании \mathbf{Q} (IV.145). Получим закон преобразования эффективной массы:

$$m_*(-\mathbf{q}) = 2m_0 - m_*(\mathbf{q}) \quad (\text{IV.146})$$

и аналогично (IV.142):

$$m_*(-\mathbf{q}) = -\bar{m}_*(\mathbf{q}), \quad (\text{IV.147})$$

Рассмотрим теперь частицы и античастицы в термодинамическом равновесии. При этом необходимо учесть связь химических потенциалов частиц и античастиц (VIII.23), а также тот факт, что в суммах по сортам частиц встречаются в одинаковых позициях, как частицы, так и античастицы. Тогда мы можем получить законы преобразования суммарных плотностей:

$$n_a(-\mathbf{q}, -\mu) = \bar{n}_a(\mathbf{q}, \mu); \quad (\text{IV.148})$$

$$P_a(-\mathbf{q}, -\mu) = \bar{P}_a(\mathbf{q}, \mu) \quad (\text{IV.149})$$

$$\mathcal{E}_a(-\mathbf{q}, -\mu) = \bar{\mathcal{E}}_a(\mathbf{q}, \mu); \quad (\text{IV.150})$$

$$\sigma_a^{(r)}(-\mathbf{q}, -\mu) = \bar{\sigma}_a^{(r)}(\mathbf{q}, \mu), \quad (\text{IV.151})$$

т.е., скалярные плотности инвариантны и по отношению к зарядовому сопряжению \mathbf{Q} с учетом замены $\mu \rightarrow \bar{\mu} = -\mu$. Таким образом, по крайней мере, в условиях локального термодинамического равновесия кинетическая теория статистических систем со скалярным взаимодействием частиц при расширении теории на область отрицательных масс является инвариантной по отношению к скалярно - зарядовому сопряжению.

Заметим далее, что формула для эффективной массы инвариантна по отношению к произведению преобразований (IV.139) и (IV.145) $\mathbf{Q} \times \Phi$:

$$m_*(-\mathbf{q}, -\Phi) = m_*(\mathbf{q}, \Phi). \quad (\text{IV.152})$$

IV.6. Термодинамическое равновесие плазмы в гравитационном поле

Поэтому по отношению к композиции преобразований $\mathbf{Q} \times \Phi$ получим следующие формулы преобразования скалярных плотностей:

$$n_a(-\mathbf{q}, -\Phi) = n_a(\mathbf{q}, \Phi); \quad (\text{IV.153})$$

$$P_a(-\mathbf{q}, -\Phi) = P_a(\mathbf{q}, \Phi) \quad (\text{IV.154})$$

$$\mathcal{E}_a(-\mathbf{q}, -\Phi) = \mathcal{E}_a(\mathbf{q}, \Phi); \quad (\text{IV.155})$$

$$\sigma_a^{(r)}(-\mathbf{q}, -\Phi) = -\sigma_a^{(r)}(\mathbf{q}, \Phi), \quad (\text{IV.156})$$

таким образом, плотность скалярного заряда меняет знак.

Последнее свойство обеспечивает внутреннюю непротиворечивость теории. Действительно, подвергая уравнения скалярных полей (IV.112) преобразованию $\mathbf{Q} \times \Phi$ с учетом (IV.156) и линейности левой части уравнений (IV.112), получим исходные уравнения. Таким образом, уравнения скалярных полей (IV.112) также инвариантны по отношению к композиции преобразований $\mathbf{Q} \times \Phi$. Аналогичная ситуация имеется, как в теории Максвелла, так и в теории классического гравитационного поля.

IV.6.4 Случай нулевой затравочной массы

Как показано в [65] при выборе функции эффективной массы в виде

$$m_0 = 0 \Rightarrow m_* = \sum_r q_a^{(r)} \Phi_{(r)}, \quad (\text{IV.157})$$

т.е., при выборе затравочной массы равной нулю, теория уже на уровне микроскопической динамики становится симметричной по отношению к каждому из преобразований (IV.139) и (IV.145):

$$m_*(-\mathbf{q}) = -m_*(\mathbf{q}), \quad m_*(-\Phi) = -m_*(\Phi). \quad (\text{IV.158})$$

Таким образом, имеют место законы преобразования:

$$n_a(-\mathbf{q}) = n_a(\mathbf{q}); \quad P_a(-\mathbf{q}) = P_a(\mathbf{q}) \quad (\text{IV.159})$$

$$\mathcal{E}_a(-\mathbf{q}) = \mathcal{E}_a(\mathbf{q}); \quad \sigma_a^{(r)}(-\mathbf{q}) = \sigma_a^{(r)}(\mathbf{q}), \quad (\text{IV.160})$$

а также:

$$n_a(-\Phi) = n_a(\Phi); \quad P_a(-\Phi) = P_a(\Phi) \quad (\text{IV.161})$$

$$\mathcal{E}_a(-\Phi) = \mathcal{E}_a(\Phi); \quad \sigma_a^{(r)}(-\Phi) = -\sigma_a^{(r)}(\Phi), \quad (\text{IV.162})$$

таким образом, плотность скалярного заряда меняет знак по отношению к преобразованию Φ .

IV.6.5 T-неинвариантные взаимодействия

Рассмотрим теперь T-неинвариантные взаимодействия, предполагая, однако, что распределение частиц остается локально равновесным, т.е., (VI.23). Но тогда тождественно выполняются функциональные соотношения (IV.114). Но тогда скорость изменения энтропии равна нулю, т.е., мы снова получаем условие ЛТР (IV.113). Итак, энтропия системы всегда сохраняется, если распределение частиц является локально равновесным.

Обратимся теперь к уравнениям переноса (IV.96). В условиях ЛТР вследствие (IV.115) эти уравнения принимают более простую форму:

$$\begin{aligned} \nabla_i \sum_A \int_{\mathbb{P}} \psi f p^i d\pi - \sum_A \int_{\mathbb{P}} f [\mathcal{H}, \Psi] d\pi = \\ - \sum_k \int_{\mathbb{P}} \delta^{(4)}(P_F - P_I) \times \\ \sum_A \nu_A^k \psi_A Z_{if} (W_{if} - W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi . \end{aligned} \quad (\text{IV.163})$$

Полагая, в частности, $\psi_A = \delta_A^a$, получим из (IV.163):

$$\begin{aligned} \nabla_i n_a^i = - \sum_k \nu_A^k \int_{\mathbb{P}} \delta^{(4)}(P_F - P_I) \times \\ Z_{if} (W_{if} - W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi . \end{aligned} \quad (\text{IV.164})$$

Проведем в правой части (IV.164) интегрирование по конечным состояниям частиц:

$$\sum \nu_A^k \int \prod_f (1 \pm f) (W_{if} - W_{fi}) d\pi_f .$$

Вследствие унитарности S-матрицы и оптической теоремы (см. [1]) этот интеграл равен нулю. Поэтому в условиях ЛТР имеет место закон сохранения каждого сорта частиц:

$$\nabla_i n_a^i = 0 \Leftrightarrow N_a = \text{Const} . \quad (\text{IV.165})$$

В соотношении (IV.165) под n_a необходимо понимать разность плотностей потоков частиц и античастиц:

$$N_a^+ - N_a^- = \text{Const} . \quad (\text{IV.166})$$

IV.6.6 Глобальное термодинамическое равновесие

Теория глобального термодинамического равновесия тривиально обобщается на случай возможности отрицательных эффективных масс, поэтому мы приведем здесь лишь основные соотношения, отсылая читателя к ранним работам Автора [60, 76]. В случае, когда функции распределения (VI.23) (или (VI.29)) являются точными решениями кинетических уравнений, статистическая система находится в строгом *глобальном термодинамическом равновесии*. В условиях глобального термодинамического равновесия выполняются строгие законы сохранения частиц каждого сорта (IV.165), и энтропия системы строго постоянна $S = \text{Const}$. Для нахождения условий глобального термодинамического равновесия в случае T-инвариантных взаимодействий, подставим решения (VI.23) в кинетические уравнения. Поскольку интеграл T-инвариантных взаимодействий обращается в нуль на локально равновесных распределениях, приведем кинетические уравнения к виду:

$$[H_a, \phi_a] = 0, \quad (\text{IV.167})$$

куда необходимо подставить выражение для ϕ_a из (IV.118). С учетом соотношения (VII.10), получим:

$$[H_a, \phi_a] = \frac{1}{m_*} (P^i P^k \xi_{(i,k)} - P^i \lambda_a + \partial_i m_* \xi^i) = 0. \quad (\text{IV.168})$$

Таким образом, для обеспечения ГТР должен существовать линейный интеграл движения, причем ξ^i - времениподобный вектор. Учитывая произвольность вектора импульса, получим при $m_* \neq 0$ необходимые и достаточные условия существования глобального термодинамического равновесия:

$$\int_{\xi} g_{ik} = 0; \quad (\text{IV.169})$$

$$\int_{\xi} m_* = 0; \quad (\text{IV.170})$$

$$\lambda_a = \text{Const}. \quad (\text{IV.171})$$

Вследствие определения эффективной массы (IV.157) и функциональной независимости скалярных полей, получим из (IV.170) более жесткие условия глобального термодинамического равновесия:

$$\int_{\xi} \Phi_{(r)} = 0, \quad (r = \overline{1, N}). \quad (\text{IV.172})$$

Поскольку далее все моменты равновесной функции распределения определяются с помощью скаляров ξ^2 , λ_a , $\Phi_{(r)}$ и тензоров ξ^i , g^{ik} , $\xi^i \xi^k$, ..., то выполняются и законы сохранения моментов функции распределения [59]:

$$\mathbb{L}_{\xi} n_a^i = 0; \quad (\text{IV.173})$$

$$\mathbb{L}_{\xi} T^{ik} = 0 \quad (\text{IV.174})$$

и т.д. Вследствие этих уравнений вдоль направления ξ^i сохраняются компоненты тензора Римана, Риччи и тензора Эйнштейна:

$$\mathbb{L}_{\xi} R_{ijkl} = 0; \quad \mathbb{L}_{\xi} R_{ij} = 0; \quad \mathbb{L}_{\xi} G_{ij} = 0. \quad (\text{IV.175})$$

Поэтому вследствие уравнений Эйнштейна должны выполняться соотношения:

$$\mathbb{L}_{\xi} T_{ij} = 0. \quad (\text{IV.176})$$

Заключение

Таким образом, мы расширили кинетическую теорию скалярно взаимодействующих частиц на случай произвольного числа скалярных полей, сняв при этом искусственное предположение о неотрицательности эффективной массы частиц. Для корректного обобщения кинетической теории на отрицательные эффективные массы частиц пришлось пересмотреть ряд ключевых положений этой теории. В результате мы получили естественное, непротиворечивое обобщение макроскопической теории взаимодействия вещества со скалярными полями, в которой не возникает никаких проблем в случае отрицательных эффективных масс частиц. Следует заметить, что в случае нулевой затравочной массы теория становится полностью инвариантной по отношению к зарядовому сопряжению. Надо подчеркнуть, что знак функции эффективной массы частиц не влияет на положительную определенность плотности числа частиц, давления и плотности энергии, а лишь на знак плотности скалярного заряда. В следующих статьях мы применим полученные результаты к космологическим и астрофизическим задачам.

Глава V

Возможность строгого глобального термодинамического равновесия в расширяющейся Вселенной в присутствии фундаментального скалярного поля

V.1 Общерелятивистская кинетическая теория и термодинамическое равновесие

Основы общерелятивистской кинетической теории (GRKT) были сформулированы в 60-е годы в работах Н.А. Черникова [78], Г. Таубера и Дж. Вайнберга [80], Н.А. Черникова [79] - [75], А.А. Власова [38], Р. Линдквиста [90]. и других. В рамках GRKT были сформулированы общерелятивистские кинетические уравнения, на основе которых построены макроскопические уравнения переноса и развита теория локального (LTE) и глобального (GTE) термодинамического равновесия статистической системы в гравитационном и электромагнитном полях¹. В наиболее полном и строгом виде результаты этих исследований изложены в работах Автора [90, 6, 58, 59, 60]. В этом разделе мы резюмируем результаты этих исследований в сжатой форме. При этом мы будем пользоваться более современной канонической, явно инвариантной формулировкой кинетической теории, развитой в работах Автора [1]. Результаты этой главы опубликованы в статьях [9].

¹Под электромагнитными полями здесь можно понимать и любые векторные поля.

V.1.1 Канонические уравнения движения в гравитационном и электромагнитном полях и макроскопические потоки

Канонические уравнения движения частицы относительно канонически сопряженных переменных – координат x^i и обобщенного импульса P_i имеют вид:

$$p^i \equiv \frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial H_a}{\partial P_i}; \quad \frac{dP_i}{ds} = -\frac{\partial H_a}{\partial x^i}, \quad (\text{V.1})$$

где $H_a(x, P)$ – релятивистски - инвариантная функция Гамильтона, p^i – кинематический импульс. Полная производная произвольной функции динамических переменных $\Psi_a(x, P)$ по каноническому параметру s определяется скобками Пуассона:

$$\frac{d\Psi_a}{ds} = [H_a, \Psi_a] \equiv \left[\frac{\partial H_a}{\partial P_i} \frac{\partial \Psi_a}{\partial x^i} - \frac{\partial H_a}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi_a}{\partial P_i} \right]. \quad (\text{V.2})$$

Вследствие уравнений (V.2) сама функция Гамильтона является интегралом движения:

$$H_a(x, P) = \text{Const} = \frac{1}{2}m_a^2, \Rightarrow (p, p) = m_a^2, \quad (\text{V.3})$$

где m_a -масса покоя частиц. Соотношение (V.3) называется соотношением нормировки импульса, или уравнением массовой поверхности².

Для заряженных частиц с массами m_a и электрическими зарядами e_a в гравитационном поле с метрикой $g_{ik}(x)$ и электромагнитном поле с векторным потенциалом $A_i(x)$ функцию Гамильтона можно задать в виде³:

$$\begin{aligned} H_a(x, P) &= \frac{1}{2}g^{ik}(P_i - e_a A_i)(P_k - e_a A_k) \\ &\equiv \frac{1}{2}(P - e_a A, P - e_a A) \equiv \frac{1}{2}(P - e_a A)^2. \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

Пусть статистическая система в гравитационном поле с метрикой g_{ik} и электромагнитном с потенциалом A_i состоит из N сортов тождественных частиц и $f_a(x, p)$ – инвариантные функции распределения этих частиц в фазовом пространстве $X \times P$, (x^i – координаты, p^i – импульс, так что:

$$n_a^i(x) = \int_{P(x)} f_a(x, p) p^i dP_a \quad (\text{V.5})$$

²Здесь и в дальнейшем $(a, b) = g_{ik}a^i b^k$ есть скалярное произведение векторов a и b относительно метрики g_{ik} .

³Всюду использована универсальная система единиц $G = c = \hbar = k = 1$, где k – постоянная Больцмана.

V.1. Общерелятивистская кинетическая теория и термодинамическое равновесие

есть плотности потока числа частиц сорта a и

$$N_a(\tau) = \int_V n_a^i dV_i \equiv \int_V dV_i \int_{P(x)} f_a(x, p) p^i dP_a \quad (V.6)$$

есть число частиц сорта a на пространственно-подобной гиперповерхности $V : dx^i u_i = 0$, где

$$\begin{aligned} dP_a &= \frac{2S+1}{8\pi^3 \sqrt{-g}} dp^1 dp^2 dp^3 dp^4 \delta(H_a) \\ \Rightarrow dP_a &= \frac{2S+1}{4\pi^3 \sqrt{-g}} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{p_4}, \end{aligned} \quad (V.7)$$

$H_a(x, P)$ – функция Гамильтона частицы сорта a в гравитационном, g_{ik} , и электромагнитном, A_i , полях S – спин, p_4 – положительный корень уравнения массовой поверхности (ковариантная временная компонента импульса):

$$H_a(x, P) = \frac{1}{2} m_a^2 \Rightarrow (p, p) = m_a^2. \quad (V.8)$$

V.1.2 Общерелятивистские кинетические уравнения для заряженных частиц

Пусть далее, в статистической системе протекают межчастичные реакции:

$$\sum_{A=1}^m \nu_A a_A \rightleftharpoons \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B a'_B \Rightarrow \sum_k \sum_{A=1}^N \nu_A^k a_A = 0, \quad (V.9)$$

где ν_A – числа частиц сорта a_A , участвующих в реакции; A – номер частицы, $\|\nu_A^k\|$ – целочисленная матрица с рангом, меньшим N , суммирование происходит по всем каналам реакций, в которых участвуют частицы сорта a .

Функции распределения частиц $f_a(x, p)$ определяются релятивистскими кинетическими уравнениями:

$$[H_a, f_a] = I_a(x, P_a), \quad (V.10)$$

где $J_a(x, P_a)$ – интегралы столкновений:

$$\begin{aligned} I_a(x, P_a) &= - \sum_a \nu_a \int_a' \delta^4(P_F - P_I) \\ &\quad \times W_{IF}(Z_{IF} - Z_{FI}) \prod_{I, F}' dP; \end{aligned} \quad (V.11)$$

где

$$W_{FI} = (2\pi)^4 2^{-\sum \nu_A + \sum \nu'_b} |M_{IF}|^2$$

– матрица рассеяния для канала реакций (V.9), ($|M_{IF}|$ – инвариантные амплитуды рассеяния);

$$Z_{IF} = \prod_I f(P_A^\alpha) \prod_F [1 \pm f(P_B^{\alpha'})];$$

$$Z_{FI} = \prod_I [1 \pm f(P_A^\alpha)] \prod_F f(P_B^{\alpha'}),$$

знак “+” соответствует бозонам, “-” – фермионам (подробности см. в [58, 59]).

V.1.3 Энтропия статистической системы

Энтропия статистической системы на гиперповерхности $V(\tau)$ равна:

$$S(\tau) = \sum_a S_a(\tau) = \sum_a \int_{V(\tau)} u^i dV_i \times \int_{P_a(X)} [\pm(1 \pm f_a) \ln(1 \pm f_a) - f_a \ln f_a] dP_a, \quad (V.12)$$

где $\tau = \int u_i dx^i$ – собственное время наблюдателя. Полную производную по времени τ энтропии системы с учетом оптической теоремы можно записать в виде [1]⁴:

$$\frac{dS}{d\tau} = \sum \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \times \ln \left(\frac{Z_{if}}{Z_{fi}} \right) (Z_{if} - Z_{fi}) W_{if} \prod_{i,f} dP dV \quad (V.13)$$

Поэтому необходимым условием термодинамического равновесия $dS/d\tau = 0$ является выполнение функциональных уравнений Больцмана:

$$Z_{if} - Z_{fi} = 0. \quad (V.14)$$

⁴Как для T - инвариантных, так и для T - неинвариантных взаимодействий.

V.1.4 Локальное термодинамическое равновесие системы электрически заряженных частиц

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1 *Для того, чтобы статистическая система, состоящая из N сортов тождественных частиц, находилась в состоянии LTE в гравитационном поле, необходимо и достаточно, чтобы*

1. *инвариантная функция распределения этих частиц, $f_a(x, p)$, имела локально - равновесный вид:*

$$f_a^0(x, p) = [\exp(-\gamma_a + (\xi, p)) \pm 1]^{-1}, \quad (\text{V.15})$$

где

$$\xi^i = \xi^i(x) \quad (\xi, \xi) > 0 \quad (\text{V.16})$$

есть времениподобный вектор,

2. *приведенные химические потенциалы $\gamma_a(x)$ удовлетворяли серии условий химического равновесия*

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^k \gamma_A = 0, \quad (\text{V.17})$$

Локально - равновесные функции распределения (V.15) являются единственными положительно определенными решениями функциональных уравнений Больцмана (V.14). Вводя с помощью времениподобного вектора $\xi^i(x)$ макроскопическую кинематическую скорость [73], v^i

$$v^i \equiv \frac{\xi^i}{\xi}, \quad \xi \equiv \sqrt{(\xi, \xi)}; \Rightarrow (v, v) = 1, \quad (\text{V.18})$$

и локальную температуру статистической системы, θ :

$$\theta(x) = \frac{1}{\xi(x)}, \quad (\text{V.19})$$

а с помощью приведенного химического потенциала – химический потенциал в стандартной нормировке:

$$\mu_a(x) = \gamma_a \theta, \quad (\text{V.20})$$

запишем в стандартных обозначениях равновесную функцию распределения и условия химического равновесия:

$$f_a^0(x, p) = \left[\exp \left(\frac{-\mu_a + (v, P)}{\theta} \right) \pm 1 \right]^{-1}; \quad (\text{V.21})$$

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^k \mu_A = 0. \quad (\text{V.22})$$

V.1.5 Глобальное термодинамическое равновесие системы электрически заряженных частиц

Локально-равновесные функции распределения (V.15), (V.21) обращают в тождественный нуль интеграл столкновений (V.11). В случае, когда функции распределения (V.15) или (V.21) являются точными решениями кинетических уравнений (VII.5), статистическая система находится в строгом *глобальном термодинамическом равновесии* (GTE). В условиях GTE выполняются строгие законы сохранения частиц каждого сорта, и энтропия системы строго постоянна $S = \text{Const}$. Подстановка (V.15) в кинетические уравнения (VII.5) приводит их к виду:

$$[H_a, \phi_a] = 0, \quad (\text{V.23})$$

где

$$\phi_a(x, P) = \gamma_a(x) + (\xi, P_a) \quad (\text{V.24})$$

есть аргумент равновесной функции распределения (V.15). Таким образом, для обеспечения GTE должен существовать линейный интеграл движения, причем ξ^i - времениподобный вектор. При разрешении (V.23) получается система необходимых и достаточных условий существования GTE [80], [88, 75], [90, 60]:

$$\mathbb{L}_\xi g_{ik} = \begin{cases} 0, & m_a \neq 0; \\ \rho g_{ik}, & m_a = 0, \end{cases} \quad (\text{V.25})$$

$$e_a \mathbb{L}_\xi A_i = \gamma_{a,i}, \quad (\text{V.26})$$

где \mathbb{L}_ξ - производная Ли по направлению ξ , $\rho(x)$ - произвольная скалярная функция.

Заметим следующий весьма замечательный для космологии строгий факт, следующий из (V.25) и имеющий силу теоремы.

Теорема 2 *Если массы покоя всех частиц статистической системы равны нулю, то состояние глобального термодинамического равновесия статистической системы возможно тогда и только тогда, когда метрика конформно стационарна. Если в статистической системе присутствует хотя бы один сорт массивных частиц, состояние GTE статистической системы возможно только для стационарных полей тяготения.*

Таким образом, если в статистической системе с электромагнитным взаимодействием имеется хотя бы один сорт частиц с ненулевой массой покоя, вектор ее движения ξ^i должен быть *временноподобным вектором Киллинга* (V.25).

Далее, для космологии чрезвычайно важное значение имеет свойство асимптотической конформной инвариантности релятивистской теории статистических систем с электромагнитным взаимодействием, доказанный в работе Автора [6]:

Теорема 3 *В ультрарелятивистском пределе*

$$m_a / \langle p_a \rangle \rightarrow 0 \quad (\text{V.27})$$

кинетическая теория асимптотически конформно инвариантна, т.е., кинетические уравнения с точностью до величин второго порядка малости по параметру (VIII.96) инвариантны по отношению к конформным преобразованиям:

$$d\bar{s}^2 = \rho^2 ds^2; \quad (\text{V.28})$$

$$\bar{A}_i = A_i + \partial_i \varphi; \quad (\text{V.29})$$

$$\bar{P}_i = P_i - e \partial_i \varphi. \quad (\text{V.30})$$

Вследствие асимптотической конформной инвариантности релятивистской кинетической теории в ультрарелятивистской космологической плазме асимптотически достижимо состояние ГТР. Нарушение этого состояния вследствие охлаждения плазмы и нарушения условия (VIII.96) включает механизм спонтанного нарушения различных симметрий Вселенной, в том числе и барионной. Такие механизмы были рассмотрены рядом авторов в 79–80 годах [92], [93] и др., а более строгая кинетическая теория спонтанного нарушения барионной симметрии была развита в работах Автора [94, 95, 96, 97, 98].

V.1.6 Равновесные самогравитирующие статистические системы

Поскольку все моменты равновесной функции распределения определяются с помощью скаляров ξ^2 , λ , Φ и тензоров ξ^i , g^{ik} , $\xi^i \xi^k$, ..., то выполняются и законы сохранения моментов функции распределения [60]:

$$\mathbb{L}_{\xi} n_a^i = 0; \quad (V.31)$$

$$\mathbb{L}_{\xi} T_a^{ik} = 0 \quad (V.32)$$

и т.д.

Вследствие первой группы уравнений (V.25) вдоль направления ξ^i сохраняются компоненты тензора Римана, Риччи и тензора Эйнштейна:

$$\mathbb{L}_{\xi} R_{ijkl} = 0; \quad \mathbb{L}_{\xi} R_{ij} = 0; \quad \mathbb{L}_{\xi} G_{ij} = 0. \quad (V.33)$$

Поэтому вследствие уравнений Эйнштейна должны выполняться соотношения:

$$\mathbb{L}_{\xi} T_{ij} = 0. \quad (V.34)$$

Это позволяет провести строгую классификацию всех равновесных самогравитирующих конфигураций с электромагнитным взаимодействием [99]:

Теорема 4 Пусть $\xi^i(x)$ – времениподобный вектор Киллинга в равновесной функции распределения (V.15) и гравитационное поле равновесной конфигурации допускает группу движения порядка r , G^r , так что:

$$\mathbb{L}_{\lambda} g_{ik} = 0; \quad \lambda = \overline{1, r}, \quad (V.35)$$

где $\mathbb{L}_{\lambda} \equiv \mathbb{L}_{\xi_{\lambda}}$. Разложим вектор Киллинга по векторам группы G^r :

$$\xi^i = \sum_{\lambda=1}^r \alpha_{\lambda} \xi_{\lambda}^i; \quad (\alpha_{\lambda} = \text{Const}). \quad (V.36)$$

Тогда для глобального равновесия самогравитирующей статистической системы частиц с электромагнитным взаимодействием необходимо и достаточно, чтобы вектор Киллинга движения системы ξ^i и тензор электромагнитного поля F_{ik} сохранялись при движениях вдоль группы G^r :

$$\mathbb{L}_{\lambda} \xi^i = 0 \Rightarrow \nabla_k \sum_{\lambda, \lambda' \neq [\lambda \lambda']} \xi_{[\lambda}^k \xi_{\lambda']}^i; \quad (V.37)$$

$$\mathbb{L}_{\lambda} F_{ik} = 0; \quad \lambda, \lambda' = \overline{1, r}. \quad (V.38)$$

V.2. Глобальное термодинамическое равновесие

На языке генераторов группы Ли $X_\lambda = \xi^\lambda \partial_i$ условие (V.37) означает, что группа движений равновесной самогравитирующей конфигурации заряженных частиц должна иметь времениподобный центр [100].

V.2 Глобальное термодинамическое равновесие статистических систем со скалярным взаимодействием

Общерелятивистская кинетическая теория статистических систем со скалярным взаимодействием впервые была сформулирована Автором в цитированных выше работах [6, 58, 59, 60], а в более современной форме, учитывающей и фантомные скалярные поля, эта теория была переформулирована в работах [61] – [66]. В частности, в этих работах показано, что инвариантную функцию Гамильтона частицы в скалярном поле Φ с точностью до автоморфизмов необходимо выбрать в форме:

$$H(x, P) = \frac{1}{2} [(m^*)^{-1}(\Phi)(P, P) - m^*(\Phi)] = 0, \quad (\text{V.39})$$

где

$$m^*(\Phi) = |m + q\Phi| \equiv |\phi|, \quad (\text{V.40})$$

m – голая масса частицы, q – ее скалярный заряд. Функцию $m^*(\Phi)$ можно назвать эффективной массой частицы. Таким образом, выполняется соотношение нормировки для обобщенного импульса:

$$(P, P) = m^{*2}. \quad (\text{V.41})$$

При этом кинетические уравнения (VII.5) сохраняют свою форму. Также сохраняют свою форму и соотношение для энтропии (V.12), ее производной (V.13) и тем самым сохраняется формула для локально-равновесной функции распределения (V.15). Подстановка этой функции в кинетические уравнения (VII.5) с учетом явного вида функции Гамильтона (V.39) приводят к следующему соотношению:

$$-\gamma_{a,i} \frac{P^i}{m_a^*} + \frac{1}{m_a^*} \xi_{i,k} P^i P^k - \text{sgn}(\phi_a) q_a \xi^i \Phi_{,i} = 0,$$

необходимые и достаточные условия выполнения которого вследствие произвольности обобщенного импульса есть:

$$\partial_i \gamma_a = 0 \Rightarrow \gamma_a = \text{Const}; \quad (\text{V.42})$$

$$\mathbb{L}_\xi g_{ik} = \sigma g_{ik}; \Rightarrow \quad (\text{V.43})$$

$$\sigma = \mathbb{L}_\xi \ln m_a^*. \quad (\text{V.44})$$

Подстановка (V.44) в (V.43) приводит к условию:

$$\mathbb{L}_\xi \frac{1}{m_a^*} g_{ik} = 0. \quad (\text{V.45})$$

В случае, если голые массы частиц $m \equiv m_a$ в формуле (V.40) отличны от нуля, то вследствие различия голых масс и зарядов частиц остается единственная возможность разрешения соотношений (V.43) – (V.44):

$$\mathbb{L}_\xi g_{ik} = 0; \quad (\text{V.46})$$

$$\mathbb{L}_\xi \Phi = 0. \quad (\text{V.47})$$

Этот вывод и был сделан в более ранних работах Автора citeMono55 и др. Таким образом, и в случае скалярных взаимодействий для поддержания глобального термодинамического равновесия в этом случае была необходима стационарность гравитационного и скалярного полей. Однако, вывод этот не является совершенно строгим. Действительно, в случае, если голые массы всех частиц равны нулю, то существует еще одна возможность глобального термодинамического равновесия, так как в этом случае $m_a^* = |q_a \Phi|$:

$$\mathbb{L}_\xi \frac{1}{\Phi} g_{ik} = 0. \quad (\text{V.48})$$

По-видимому, Автора остановило в 1982-1983 годах от рассмотрения этого случая чрезмерная экзотичность предположения о том, что голые массы всех элементарных частиц могут быть равными нулю. Однако, в 2014 году после открытия бозона Хиггса такое предположение уже является естественным. Таким образом, сформулируем утверждение о глобальном термодинамическом равновесии статистической системы со скалярным взаимодействием.

V.2. Глобальное термодинамическое равновесие

Теорема 5 *Если эффективные массы всех частиц статистической системы обязаны исключительно скалярному взаимодействию, то для глобального термодинамического равновесия такой системы необходимо, чтобы конформная метрика пространства - времени*

$$\bar{g}_{ik} \equiv \frac{1}{|\Phi|} g_{ik} \quad (\text{V.49})$$

являлась стационарной, а химические потенциалы статистической системы были постоянны.

Это свойство статистических систем со скалярным взаимодействием может дать далеко идущие следствия для космологии. Заметим, что если рассмотреть, например, космологические модели с постоянной кривизной:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dl^2), \quad (\text{V.50})$$

где dl^2 – метрика 3-х мерного пространства постоянной кривизны, то условие (V.49) приведет к следующему соотношению для потенциала скалярного поля:

$$|\Phi| \sim a^2(t). \quad (\text{V.51})$$

В такой системе всегда будет поддерживаться строгое глобальное термодинамическое равновесие. Заметим, что наличие векторных взаимодействий не может изменить этот вывод, что можно усмотреть из цитированных выше работ Автора. Наличие такого этапа в эволюции Вселенной может привести к восстановлению барионной и других симметрий на этом этапе.

Глава VI

Конформно - инвариантная модель неминимального взаимодействия, основанная на микроскопической динамике скалярно заряженных частиц

VI.1 Введение

В начале 1980-х годов в работах Автора были сформулированы основы релятивистской кинетической теории статистических систем со скалярным взаимодействием [6, 58, 59, 60, 76]. В те годы релятивистская кинетическая теория частиц со скалярным взаимодействием казалась умозрительной теоретической конструкцией, необходимой лишь для достижения полноты кинетической теории. Однако, в последнее десятилетие в связи открытием фактора темной энергии в космологии и Хиггсовых бозонов развитие этой теории представляется актуальным и необходимым для развития самой теоретической физики. С одной стороны, релятивистская кинетическая теория является мостом, связывающим микроскопический и макроскопический уровни описания материи, а с другой является достаточно жесткой теоретической конструкцией, существенно ограничивающей возможность спекулятивных построений. В ряде последних работ Автора была сформулирована строгая релятивистская кинетическая теория статистических систем скалярно заряженных частиц, основанная на канонической микроскопической динамике и последующими аккуратными процедурами макроскопического усреднения, расширяющая эту теорию на случай фантомных полей и отрицательных эффективных масс ча-

VI.2. Строгие макроскопические соотношения релятивистской кинетической теории

стиц [61, 62, 63, 64, 66, 65, 101, 91, 69, 102]¹. В том числе были построены космологические модели, основанные на таких системах [103, 104, 105, 106, 107]. В этих последних работах рассматривались модели с конформно инвариантным скалярным полем. Отметим, что в первой работе по кинетической теории статистических систем со скалярным взаимодействием [6] был поставлен вопрос об асимптотической конформной инвариантности кинетической теории в ультрарелятивистском пределе, но не был получен однозначный ответ на этот вопрос. Важность решения этой проблемы для современной космологии и степень современного развития кинетической теории статистических систем с межчастичным скалярным взаимодействием являются мотивацией проведения представленного здесь исследования. Под конформно инвариантными скалярными полями мы будем подразумевать скалярные поля, уравнения которых содержат “конформный член” $-R/6$. Результаты этой главы опубликованы в статьях [108], [111].

VI.2 Строгие макроскопические соотношения релятивистской кинетической теории

В этом разделе мы в сжатой форме выпишем строгие соотношения релятивистской кинетической теории, не зависящие от трансформационных свойств скалярного поля, полученные в цитированных выше статьях.

VI.2.1 Канонические уравнения движения частиц в скалярном поле

Канонические уравнения движения релятивистской частицы в фазовом пространстве Γ имеют вид (см., например, [58]):

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad (\text{VI.1})$$

где $H_a(x, p)$ - релятивистски инвариантная функция Гамильтона частицы сорта a со скалярным зарядом $q_a^{(r)}$ в скалярном поле $\Phi_r(x)$:

$$H(x, p) = \frac{1}{2} [m_*^{-1}(x)(p, p) - m_*] = 0, \quad (\text{VI.2})$$

¹см. также монографии [1, 2].

$$m_* = \sum_r q_a^{(r)} \Phi_r \quad (\text{VI.3})$$

– эффективная масса частицы, $u^i = dx^i/ds$ – вектор скорости частицы. Полную производную от функции динамических переменных $\Psi(x^i, p_k)$ с учетом (VI.1) можно представить в виде:

$$\frac{d\Psi}{ds} = [H, \Psi], \quad (\text{VI.4})$$

где введены инвариантные скобки Пуассона:

$$[H, \Psi] = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial p_i}; \quad (\text{VI.5})$$

$$\equiv \frac{1}{m_*} p^i \tilde{\nabla}_i \Psi + \partial_i m_* \frac{\partial \Psi}{\partial p_i}, \quad (\text{VI.6})$$

где $\tilde{\nabla}_i$ – оператор ковариантного дифференцирования по Картану² (см., например, [41])³:

$$\tilde{\nabla}_i = \nabla_i + \Gamma_{ij}^k p_k \frac{\partial}{\partial p_j}, \quad (\text{VI.7})$$

где ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования по Риччи, а Γ_{ij}^k – символы Кристоффеля 2-го рода относительно метрики g_{ij} базы X . Оператор $\tilde{\nabla}$ определен таким образом, что

$$\tilde{\nabla}_i p_k \equiv 0 \quad (\text{VI.8})$$

VI.2.2 Релятивистские кинетические уравнения

Пусть в плазме протекают реакции:

$$\sum_{A=1}^m n_A a_A \rightleftharpoons \sum_{B=1}^{m'} n'_B a'_B, \quad (\text{VI.9})$$

²Ковариантная производная в расслоении Γ [70].

³Впервые в релятивистскую статистику ковариантные производные по Картану были введены А.А. Vlasov [38].

VI.2. Строгие макроскопические соотношения релятивистской кинетической теории

где a_A – символы частиц, а n_A – их числа в каждом канале реакций. Вследствие принципа локального соответствия и предположения о 4-х мерной точности столкновений частиц в каждом акте межчастичного взаимодействия сохраняется обобщенный импульс системы взаимодействующих частиц:

$$\sum_I p_i = \sum_F p'_i, \quad (\text{VI.10})$$

где суммирование проводится по всем начальным (I), p_i , и конечным (F), p'_i , состояниям. Таким образом, обобщенные импульсы начального и конечного состояний равны:

$$p_I = \sum_{A=1}^m \sum_{\alpha}^{n_A} p_A^{\alpha}, \quad p_F = \sum_{B=1}^{m'} \sum_{\alpha'}^{n'_B} p_B^{\alpha'}. \quad (\text{VI.11})$$

Функции распределения частиц определяются инвариантными кинетическими уравнениями [59]:

$$m_*[H_a, f_a] = I_a(x, p), \quad (\text{VI.12})$$

где $I_a(x, p_a)$ – интеграл столкновений:

$$I_a(x, p_a) = - \sum n_A \int_a' \delta^4(p_F - p_I) W_{IF} (Z_{IF} - Z_{FI}) \prod_{I,F}' dP; \quad (\text{VI.13})$$

где

$$W_{FI} = (2\pi)^4 |M_{IF}|^2 \cdot 2^{-(\sum n_A + \sum n'_b)}$$

– матрица рассеяния канала реакций (VI.9), $|M_{IF}|$ – инвариантные амплитуды рассеяния из начального состояния I в конечное F ;

$$Z_{IF} = \prod_I f(p_A^{\alpha}) \prod_F [1 \pm f(p_B^{\alpha'})];$$

$$Z_{FI} = \prod_I [1 \pm f(p_A^{\alpha})] \prod_F f(p_B^{\alpha'}),$$

начальное состояние знак “+” соответствует бозонам, “-” – фермионам (подробности см. в [59, 60]).

VI.2.3 Уравнения переноса динамических величин

Уравнения переноса динамических величин являются строгими интегро - дифференциальными следствиями релятивистских кинетических уравнений в предположении сохранения 4-вектора обобщенного импульса (VI.11) во всех каналах взаимодействия элементарных частиц:

$$\begin{aligned} \nabla_i \sum_a \int_{P_0} \Psi_a f_a p^i dP_a - \sum_a \int_{P_0} f_a m_* [H_a, \Psi_a] dP_a = - \sum_{\text{by chanel}s} \times \\ \int \left(\sum_{A=1}^m n_A \Psi_A - \sum_{B=1}^{m'} n'_B \Psi'_B \right) \delta^4(p_F - p_I) (Z_{IF} W_{IF} - Z_{FI} W_{FI}) \prod_{I,F} dP, \end{aligned} \quad (\text{VI.14})$$

где суммирование проводится по всем каналам реакций (VI.9).

При $\Psi_a = g_a$, где g_a – некоторые фундаментальные заряды, сохраняющиеся в реакциях (VI.9), получим с учетом (VI.10), (VI.11) и (VI.14) уравнения переноса плотностей потоков числа частиц плазмы:

$$\nabla_i J_G^i = 0, \quad (\text{VI.15})$$

где:

$$J_G^i = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} g_a \int_{P_0} f_a(x, p) p^i dP_0. \quad (\text{VI.16})$$

– вектор плотности фундаментального тока, соответствующего зарядам g_a .

Полагая в (VI.14) $\Psi_a = P^k$, получим уравнения переноса энергии-импульса плазмы:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sum_r \sigma^{(r)} \nabla^i \Phi_r = 0, \quad (\text{VI.17})$$

где введены *тензор энергии - импульса плазмы*

$$T_p^{ik} = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_{P_0} f_a(x, p) p^i p^k dP_0 \quad (\text{VI.18})$$

и *скалярные плотности заряда плазмы относительно скалярного поля Φ_r , $\sigma^{(r)}$* :

$$\sigma^{(r)} = \sum_a \sigma_a^{(r)}, \quad (\text{VI.19})$$

VI.2. Строгие макроскопические соотношения релятивистской кинетической теории

где $\sigma_a^{(r)}$ – скалярные плотности заряда a -той компоненты плазмы относительно скалярного поля Φ_r :

$$\sigma_a^{(r)} = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} m_a^* q_a^{(r)} \int_{P_0} f_a(x, p) dP_0, \quad (\text{VI.20})$$

В частности, для зарядового синглета (q, Φ) закон сохранения (VI.17) принимает вид:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sigma \nabla^i \Phi = 0, \quad (\text{VI.21})$$

где (см. [59, 65]):

$$\sigma = \Phi \frac{2S+1}{(2\pi)^3} q^2 \int_{P_0} f(x, p) dP_0. \quad (\text{VI.22})$$

Следует отметить, что форма ТЭИ (VII.12), а также скалярной плотности заряда (VI.20), найденная для скалярно заряженных частиц, при заданной функции Гамильтона является однозначным следствием канонических уравнений и предположения о сохранении полного импульса в локальных столкновениях частиц.

VI.2.4 Термодинамическое равновесие плазмы в гравитационном поле

В условиях термодинамического равновесия вследствие так называемых функциональных уравнений Больцмана функции распределения принимают *локально - равновесную* форму:

$$f_a^0(x, p_a) = \frac{1}{e^{-\nu_a + (\xi, p_a)} \mp 1}, \quad (\text{VI.23})$$

где верхний знак соответствует бозонам, нижний – фермионам, причем вектор $\xi^i(x)$ должен быть времениподобен:

$$\xi^2 \equiv (\xi, \xi) > 0, \quad (\text{VI.24})$$

а приведенные химические потенциалы ν_a должны удовлетворять серии условий *химического равновесия*:

$$\sum_{A=1}^m n_A \nu_A = \sum_{B=1}^{m'} n'_B \nu'_B \quad (\text{VI.25})$$

соответственно реакциям (VI.9). Времениподобный вектор $\xi^i(x)$ определяет макроскопические кинематическую и динамическую скорости системы $v^i(x)$:

$$v^i = \frac{\xi^i}{\xi}; \quad (v, v) = 1, \quad (\text{VI.26})$$

и ее локальную температуру $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \xi^{-1}, \quad (\text{VI.27})$$

с помощью которой определяются химические потенциалы, $\mu_a(x)$, в обычной нормировке:

$$\mu_a(x) = \theta(x)\nu_a(x). \quad (\text{VI.28})$$

В этих терминах распределение (VI.23) может быть записано в виде:

$$f_a^0(x, p_a) = \frac{1}{\frac{-\mu_a + (v, p_a)}{\theta} \mp 1}, \quad (\text{VI.29})$$

а моменты распределения принимают вид [59], [76]:

$$n_a^i(x) = n_a(x)v^i; \quad (\text{VI.30})$$

$$T_a^{ik}(x) = (\mathcal{E}_a + P_a)v^i v^k - P_a g^{ik}, \quad (\text{VI.31})$$

где:⁴

$$n_a(x) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta}\right) \mp 1}; \quad (\text{VI.32})$$

$$\mathcal{E}_a(x) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{m_*^2 + p^2} p^2 dp}{\exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta}\right) \mp 1}; \quad (\text{VI.33})$$

$$P_a(x) = \frac{\rho}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{\sqrt{m_*^2 + p^2}} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta}\right) \mp 1}; \quad (\text{VI.34})$$

⁴ $\rho = 2S + 1$

VI.2. Строгие макроскопические соотношения релятивистской кинетической теории

$$T_p = \mathcal{E}_a(x) - 3P_a(x) = \frac{\rho m_*^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\sqrt{m_*^2 + p^2}} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + p^2}}{\theta}\right) \mp 1}; \quad (\text{VI.35})$$

$$\sigma_a^{(r)}(x) = \frac{\rho m_* q_a^{(r)}}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\sqrt{m_*^2 + p^2}} \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + p^2}}{\theta}\right) \mp 1} \equiv \frac{q_r^{(a)}}{m_*} T_p. \quad (\text{VI.36})$$

При этом все макроскопические скаляры аддитивны:

$$\mathcal{E} = \sum_a \mathcal{E}_a; \quad P = \sum_a P_a; \quad \sigma^{(r)} = \sum_a \sigma_a^{(r)}. \quad (\text{VI.37})$$

VI.2.5 Ультррелятивистский предел

В ультррелятивистском пределе

$$\frac{p}{m_*} \rightarrow \infty; \Rightarrow \mathcal{E}_{pl} - 3P_{pl} \rightarrow 0; \quad \sigma \rightarrow 0 \quad (\text{VI.38})$$

асимптотические выражения для макроскопических скаляров (VI.32) – (VI.36) принимают вид:

$$n(x) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\frac{-\mu+p}{\theta}} \mp 1} = \theta^3 \phi_2(\nu); \quad (\text{VI.39})$$

$$\mathcal{E}_{pl} = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{\frac{-\mu+p}{\theta}} \mp 1} = \theta^4 \phi_3(\nu); \quad (\text{VI.40})$$

$$\sigma = \Phi \frac{q^2 \rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p dp}{e^{\frac{-\mu+p}{\theta}} \mp 1} = q^2 \Phi \theta^2 \phi_1(\nu), \quad (\text{VI.41})$$

где введены функции приведенного химического потенциала $\nu = \mu/\theta$:

$$\phi_n(\nu) = \frac{\rho \nu^{n+1}}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{\nu(-1+x)} \mp 1}. \quad (\text{VI.42})$$

VI.3 Самосогласованная кинетическая модель самогравитирующей плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием

VI.3.1 Лагранжев формализм

В этой главе в целях методической простоты мы рассмотрим систему из одного скалярного поля, Φ . Обобщение результатов на случай n скалярных полей с учетом вышеприведенных формул и аддитивности функции Лагранжа не требует особых усилий.

Рассмотрим сначала функцию Лагранжа классического массивного вещественного скалярного поля Φ . В этом случае Лагранжиан вещественного скалярного поля можно выбрать в виде:

$$L_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi} (g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - \epsilon_2 m_s^2 \Phi^2), \quad (\text{VI.43})$$

где m_s – масса квантов скалярного поля, $\epsilon_2 = 1$ для классического скалярного поля, $\epsilon_2 = -1$ для фантомного (в смысле отрицательности кинетической энергии) скалярного поля; для поля с отталкиванием одноименно заряженных частиц $\epsilon_1 = 1$, для поля с притяжением одноименно заряженных частиц $\epsilon_1 = -1$.

Для получения уравнения Эйлера-Лагранжа для скалярного поля запишем инвариантную функцию действия для системы “скалярно заряженные частицы + скалярное поле” [104]:

$$S = S_p + S_s = \int_{\Omega} d\Omega \left(\sum_a \int_{-\infty}^{+\infty} m_*^{(a)} \delta^4(x, x_a(s_a)) ds_a + L_s \right), \quad (\text{VI.44})$$

где $x_a(s_a) \equiv x_a^i(s_a)$ есть параметрические уравнения движения частиц, определяемые их собственными временами s_a , Ω есть четырехмерный объем риманова пространства. Для получения уравнения Эйлера-Лагранжа скалярного поля согласно стандартной процедуре необходимо вычислить вариацию S при заданной траектории частиц, учитывая при этом формулы для эффективной массы (VI.3) и функции Лагранжа скалярного поля (VIII.1), а также произвольность вариаций скалярного поля. В результате стандартных вычислений получим:

$$\square\Phi + m_s^2\Phi = -4\pi\epsilon_1\sigma, \quad (\text{VI.45})$$

VI.3. Самосогласованная кинетическая модель самогравитирующей плазмы

где

$$\square\Phi \equiv g^{ik}\nabla_i\nabla_k\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\Phi$$

– оператор д'Аламбера, а скалярная плотность заряда системы частиц, движущихся по заданным траекториям, σ , описывается формулой

$$\sigma = \sum_a q_a \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^4(x, x_a(s_a)) ds_a. \quad (\text{VI.46})$$

Статистическое усреднение последнего выражения с учетом свойств δ -функции Дирака (методику аналогичных вычислений с помощью инвариантных функций источников см., например, [41]) приводит его к форме (VI.36).

Рассмотрим теперь функцию Лагранжа классического массивного вещественного конформного скалярного поля Φ^5 (см., например, [63]; для массивного скалярного поля конформная инвариантность понимается как асимптотическое свойство при ($m_s \rightarrow 0$)):

$$L_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left(g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} + \frac{R}{6}\Phi^2 - \epsilon_2 m_s^2 \Phi^2 \right). \quad (\text{VI.47})$$

Функция Лагранжа отличается от стандартной (см., например, [113]) наличием множителя $1/8\pi$, а также введенными единичными индикаторами ϵ_α . Используя эту функцию в интеграле действия (VI.44) аналогично получим уравнение для скалярного поля:

$$\square\Phi - \frac{R}{6}\Phi + \epsilon_2 m_s^2 \Phi = -4\pi\epsilon_1\sigma. \quad (\text{VI.48})$$

VI.3.2 Тензор энергии-импульса и законы сохранения

Тензор энергии-импульса скалярного поля относительно функции Лагранжа (VIII.1) есть:

$$T_s^{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left(2\Phi^{,i}\Phi^{,k} - g^{ik}\Phi^{,j}\Phi_{,j} + \epsilon_2 g^{ik} m_s^2 \Phi^2 \right). \quad (\text{VI.49})$$

Уравнения Эйнштейна для статистической системы скалярно заряженных частиц имеют вид:

$$R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = 8\pi(T_p^{ik} + T_s^{ik}), \quad (\text{VI.50})$$

⁵конформную инвариантность мы понимаем здесь как симптотическое свойство, достигаемое в ультрарелятивистском пределе $m_s \rightarrow 0$

куда необходимо подставить выражения для компонент тензоров энергии импульса плазмы (VI.31), (VI.33), (VI.34) и скалярного поля (VII.16). Вычисляя ковариантные дивергенции от обеих частей уравнений Эйнштейна (VI.50), получим из (VI.17) и (VII.16) законы сохранения суммарных энергии - импульса:

$$\begin{aligned} \nabla_k(T_p^{ik} + T_s^{ik}) = \\ \frac{1}{4\pi} \nabla^i \Phi [\epsilon_1(\square\Phi + \epsilon_2 m_s^2 \Phi) + 4\pi\sigma] = 0, \end{aligned} \quad (\text{VI.51})$$

откуда, полагая $\Phi \neq \text{Const}$, снова получим уравнение массивного неконформного скалярного поля с источником (VI.74) [59].

След тензора энергии-импульса скалярного поля (VII.16) равен:

$$T_s = \frac{\epsilon_1}{4\pi} (-\Phi^{,j} \Phi_{,j} + 2\epsilon_2 m_s^2 \Phi^2). \quad (\text{VI.52})$$

Компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля относительно функции Лагранжа (VII.18) равны [113]:

$$\begin{aligned} T_s^{ik} = \frac{\epsilon_1}{4\pi} \left[\Phi^{,i} \Phi^{,k} - \frac{1}{2} g^{ik} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + \frac{1}{2} \epsilon_2 m_s^2 g^{ik} \Phi^2 + \right. \\ \left. \frac{1}{6} \left(R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} \right) \Phi^2 - \frac{1}{6} (\nabla^i \nabla^k - g^{ik} \square) \Phi^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{VI.53})$$

Если провести дифференцирование Φ^2 в этом выражении, то мы получим другую форму записи тензора энергии - импульса скалярного поля (см., например, [1])

$$\begin{aligned} T_s^{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left[\frac{4}{3} \Phi^{,i} \Phi^{,k} - \frac{1}{3} g^{ik} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + \epsilon_2 m_s^2 g^{ik} \Phi^2 + \right. \\ \left. \frac{1}{3} \left(R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} \right) \Phi^2 - \frac{2}{3} \Phi \Phi^{,ik} + \frac{2}{3} g^{ik} \Phi \square \Phi \right]. \end{aligned} \quad (\text{VI.54})$$

Ковариантная дивергенция от тензора (VI.54) с учетом коммутационных соотношений для вторых ковариантных производных вектора (см., например, [72]):

$$u_{i,kl} - u_{i,lk} = R_{ikl}^m u_m \Rightarrow g^{kl} \nabla_k (\nabla_l \Phi_{,i}) = \nabla_i \square \Phi + R_i^k \nabla_k \Phi$$

равна:

$$\nabla_k T_s^{ik} = \frac{\epsilon_1}{4\pi} \nabla^i \Phi \left(\square \Phi - \frac{R}{6} \Phi + \epsilon_2 m_s^2 \Phi \right), \quad (\text{VI.55})$$

VI.3. Самосогласованная кинетическая модель самогравитирующей плазмы

Вычисляя ковариантные дивергенции от обеих частей уравнений Эйнштейна (VI.50), получим из (VI.17) и (VI.55) законы сохранения суммарных энергии - импульса:

$$\nabla_k(T_p^{ik} + T_s^{ik}) = \frac{1}{4\pi}\nabla^i\Phi \left[\epsilon_1 \left(\square\Phi - \frac{R}{6}\Phi + \epsilon_2 m_s^2 \Phi \right) + 4\pi\sigma \right] = 0, \quad (\text{VI.56})$$

откуда, полагая $\Phi \neq \text{Const}$, получим уравнение (VII.20) массивного скалярного поля с источником.

Вычисляя след тензора энергии-импульса скалярного поля (VI.54), найдем:

$$T_s \equiv g_{ik}T_s^{ik} = \frac{\epsilon_1}{4\pi}\Phi \left(\square\Phi - \frac{R}{6}\Phi + 2\epsilon_2 m_s^2 \Phi \right), \quad (\text{VI.57})$$

откуда с учетом уравнения поля (VII.20) получим более простое выражение:

$$T_s = \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{4\pi}m_s^2\Phi^2 - \sigma\Phi. \quad (\text{VI.58})$$

VI.3.3 Полная система уравнений кинетической модели самогравитирующей системы скалярно взаимодействующих частиц в состоянии локального термодинамического равновесия

Таким образом, полная система уравнений кинетической модели самогравитирующей системы скалярно взаимодействующих частиц в состоянии локального термодинамического равновесия включает уравнения Эйнштейна (VI.50), уравнения переноса энергии-импульса частиц (VI.17), закон сохранения скалярного заряда (VI.15) (если этот заряд сохраняется), уравнения химического равновесия (VI.25), уравнения скалярного поля (или полей) (VI.74) или (VII.20) совместно с определениями вектора тока (VI.30), тензора энергии-импульса статистической системы (VI.31), макроскопических скаляров (VI.32) – (VI.36), а также тензора энергии-импульса скалярного поля (VII.16) или (VI.54).

Здесь уместно сделать следующее замечание. Законы сохранения суммарного тензора энергии-импульса системы “частицы + скалярные поля” (VI.51) или (VI.55) тождественно выполняются при постоянных скалярных полях

$$\nabla_i\Phi = 0 \Leftrightarrow \Phi = \Phi_0 = \text{Const} \quad (\text{VI.59})$$

Однако, наложение условия (VI.59) на скалярные поля противоречит принципу наименьшего действия для таких полей, который является одним из фундаментальных принципов теоретической физики. Сказанное справедливо для физических скалярных полей. Однако, если такие “скалярные поля” генерируются космологической постоянной или теориями гравитации типа $f(R)$, такое условие вполне правомерно, но такие поля не являются физическими, а имеют геометрическое происхождение. В этой главе мы рассматриваем именно физические скалярные поля с источниками.

VI.3.4 Генерация массы конформно - инвариантного скалярного поля источником

Рассмотрим уравнение конформно - инвариантного скалярного поля (VII.20) в случае локально равновесной системы ультрарелятивистских скалярно заряженных частиц. Используя выражение для плотности скалярного заряда (VI.41) приведем это уравнение к виду:

$$\square\Phi - \frac{R}{6}\Phi + (\epsilon_2 m_s^2 + \epsilon_1 m_{ef}^2)\Phi = 0, \quad (\text{VI.60})$$

где введено обозначение:

$$m_{ef}^2 = 4\pi q^2 \theta^2 \phi_1(\nu). \quad (\text{VI.61})$$

Теорема 6 1. *Плотность скалярного заряда, σ , для ультрарелятивистской локально равновесной системы частиц играет роль эффективной массы скалярного поля, вообще говоря, зависящей от координат.*

2. *При этом индикатор ϵ_1 играет такую же роль, как и индикатор ϵ_2 для стандартного массивного члена в уравнении скалярного поля: значению $\epsilon_1 = +1$ соответствует случай отталкивания одноименно заряженных частиц, значению $\epsilon_1 = -1$ соответствует случай притяжения одноименно заряженных частиц.*

3. *При $\epsilon_1\epsilon_2 = -1$ существует гипотетическая возможность полного обнуления суммарного массивного члена $m_s^2 - m_{ef}^2 = 0$ и строгое восстановления конформной инвариантности уравнения скалярного поля.*

VI.4 Самосогласованная космологическая модель для локально равновесной плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием

VI.4.1 Модель локального термодинамического равновесия

В случае выполнения условия локально термодинамического равновесия (ЛТР)

$$t \gg \tau_{ef}, \quad (\text{VI.62})$$

где t есть характерный временной масштаб статистической системы, τ_{ef} – эффективное время межчастичных взаимодействий) интеграл столкновений в правой части кинетических уравнений становится большой величиной, поэтому для локально равновесной плазмы вместо решения кинетических уравнений необходимо воспользоваться определением тензора энергии - импульса жидкости (VI.31), а также соотношениями (VI.32) – (VI.34), определяющими макроскопические скаляры, и уравнениями химического равновесия (VI.25). При этом необходимо учитывать, что локально - равновесные функции распределения (VI.23) при выполнении условий химического равновесия автоматически обращают в нуль интеграл столкновений (VI.13). Однако, согласно логике гидродинамического приближения (см., например, [1]) равенство нулю правой части кинетических уравнений в этом случае необходимо понимать лишь как приближенное соотношение, справедливое лишь для макроскопических моментов локально равновесной функции распределения. Отметим следующее важное обстоятельство. Как известно, формально в случае ЛТР материальные уравнения, полученные на основе кинетической теории, не отличаются от уравнений гидродинамики. Однако, как известно, уравнения гидродинамики не являются замкнутой системой уравнений. Для замыкания этой системы уравнений к ним необходимо добавлять соотношения связи между макроскопическими скалярами. При кинетическом подходе этого не требуются, так как соответствующие функциональные соотношения фактически содержатся в интегральных определениях макроскопических скаляров, что не оставляет места для спекуляций.

Далее, заметим, что вопрос об установлении ЛТР по отношению к конкретным взаимодействиям в расширяющейся Вселенной является достаточно тонким, требующим специального исследования. Условие (VI.62), как оказывается, определяется зависимостью полного сечения взаимодействия частиц

от первого кинематического инварианта $s = (p_a + p_b)^2$ парных взаимодействий частиц. Если аппроксимировать значение полного сечения взаимодействий частиц в области высоких энергий степенной зависимостью $\sigma_{tot} \sim s^\alpha$, то для ультрарелятивистских частиц в ранней Вселенной в случае суммарного баротропного уравнения состояния $P = \kappa \mathcal{E}$ условие (VI.62) приводит к следующему утверждению [8]:⁶

Теорема 7 1. При $\kappa \neq -1$ и выполнении условия

$$\alpha > -\frac{3}{4}(1 - \kappa) \quad (\text{VI.63})$$

LTE поддерживается на ранних стадиях расширения, а на поздних нарушается, а при выполнении условия обратного к (VI.63) ЛТР нарушается на ранних стадиях и восстанавливается на поздних.

2. В случае инфляции ($\kappa = -1$) при:

$$\alpha > -\frac{3}{2} \quad (\text{VI.64})$$

LTE поддерживается на ранних стадиях и нарушается на поздних.

VI.4.2 Самосогласованная система уравнений для изотропной однородной пространственно - плоской Вселенной

Рассмотрим пространственно - плоскую космологическую модель Фридмана

$$ds^2 = a^2(\eta)d\bar{s}^2 \equiv a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2), \quad (\text{VI.65})$$

когда материя состоит из равновесной плазмы скалярно взаимодействующих частиц и массивного скалярного поля, зависящего лишь от космологического времени, $\Phi(t)$. Состоянию покоя плазмы относительно синхронной в метрике (VI.65) системы отсчета соответствует вектор макроскопической скорости:

$$v^i = a^{-1}\delta_4^i. \quad (\text{VI.66})$$

Компоненты тензора Эйнштейна относительно метрики (VI.65) равны:

$$G_k^i = 2\frac{2a'^2 - aa''}{a^4}v^i v_k + \frac{2aa'' - a'^2}{a^4}\delta_k^i. \quad (\text{VI.67})$$

⁶при этом предполагается, что концентрация частиц определяется локально-равновесной формулой (VI.32)

VI.4. Самосогласованная космологическая модель для локально равновесной плазмы

Далее, вычисляя компоненты $\Phi'^i_{,k}$, найдем:

$$\Phi'^i_{,k} = \left(\Phi'' - 2\frac{a'}{a}\Phi' \right) \frac{v^i v_k}{a^2} + \frac{a'\Phi'}{a^3} \delta^i_k. \quad (\text{VI.68})$$

Из (VI.67) и (VI.58) следует:

$$-R = 6\frac{a''}{a^3} = -8\pi\sigma\Phi + 2\epsilon_1\epsilon_2 m_s^2 \Phi^2. \quad (\text{VI.69})$$

Учитывая соотношения (VI.67)–(VI.69), вычислим компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля и представим их в виде компонент тензора энергии-импульса идеальной жидкости

$$T_s^i{}^k = (\mathcal{E}_s + P_s)v^i v_k - P_s \delta^i_k, \quad (\text{VI.70})$$

При этом для неконформно инвариантного скалярного поля найдем из (VII.16):

$$\mathcal{E}_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left(\frac{\Phi'^2}{a^2} + m_s^2 \Phi^2 \right); \quad P_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left(\frac{\Phi'^2}{a^2} - m_s^2 \Phi^2 \right). \quad (\text{VI.71})$$

Кроме того, получим соотношение:

$$T_s = \mathcal{E}_s - 3P_s = \frac{\epsilon_1}{4\pi} \left(-\frac{\Phi'^2}{a^2} + 2m_s^2 \Phi^2 \right), \quad (\text{VI.72})$$

а также:

$$\mathcal{E}_s + P_s = \frac{\epsilon_1}{4\pi} \frac{\Phi'^2}{a^2}. \quad (\text{VI.73})$$

При этом уравнение скалярного поля (VI.74) принимает вид:

$$\frac{1}{a^4} \frac{d}{d\eta} a^2 \frac{d}{d\eta} \Phi + m_s^2 \Phi = -4\pi\epsilon_1\sigma. \quad (\text{VI.74})$$

Описанная выше математическая модель космологической эволюции в случае конформно неинвариантного скалярного поля подробно исследовалась в ряде цитированных выше работ, в частности, в статье [104]. Модели такого типа обеспечивают ускорение Вселенной, даже допускают возможность аномально большого ускорения.

VI.5 Конформные преобразования уравнений космологической модели

В этой главе мы будем исследовать конформно инвариантные модели скалярного поля. В случае конформно инвариантного скалярного поля отметим полезное для дальнейшего соотношение:

$$\left(\square - \frac{R}{6}\right)\frac{\phi}{a} = \frac{\phi''}{a^3}, \quad (\text{VI.75})$$

с помощью которого уравнение конформно инвариантного скалярного поля (VII.20) $\Phi(\eta)$ в метрике (VI.65) может быть записано в виде:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d^2}{d\eta^2} a\Phi + \epsilon_2 m_s^2 \Phi = -4\pi\epsilon_1 \sigma. \quad (\text{VI.76})$$

Учитывая соотношения (VI.67)–(VI.69), вычислим компоненты тензора энергии-импульса конформного скалярного поля (VI.53) и найдем:

$$\mathcal{E}_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left[\frac{1}{a^4} (a\Phi)'^2 + \epsilon_2 m_s^2 \Phi^2 \right]; \quad (\text{VI.77})$$

$$P_s = \frac{\epsilon_1}{24\pi} \left[\frac{1}{a^4} (a\Phi)'^2 - \epsilon_2 m_s^2 \Phi^2 + 8\pi\epsilon_1 \Phi\sigma \right]. \quad (\text{VI.78})$$

VI.5.1 Конформные преобразования макроскопических скаляров

Исследуем трансформационные свойства макроскопических скаляров (VI.32) – (VI.36) по отношению к конформным преобразованиям:

$$ds^2 = a^2(\eta) d\bar{s}^2; \quad \Phi(\eta) = \frac{\bar{\Phi}(\eta)}{a(\eta)}. \quad (\text{VI.79})$$

При преобразовании импульса и термодинамических скаляров по закону:

$$p = \frac{\bar{p}}{a(\eta)}; \quad \theta = \frac{\bar{\theta}}{a(\eta)}; \quad \mu = \frac{\bar{\mu}}{a(\eta)} \quad (\text{VI.80})$$

макроскопические скаляры (VI.32) – (VI.36) преобразуются по законам:

$$\begin{aligned} n_a &= \frac{\bar{n}_a}{a^3(\eta)}; & \mathcal{E}_a &= \frac{\bar{\mathcal{E}}_a}{a^4(\eta)}; \\ P_a &= \frac{\bar{P}_a}{a^4(\eta)}; & \sigma_a &= \frac{\bar{\sigma}_a}{a^3(\eta)}. \end{aligned} \quad (\text{VI.81})$$

VI.5. Конформные преобразования уравнений космологической модели

Тогда закон сохранения некоторого фундаментального заряда Q принимает вид:

$$\frac{1}{a^4} \frac{d}{d\eta} a^3 \sum_a q_a n_a = 0 \Rightarrow \sum_a q_a \bar{n}_a = \text{Const.} \quad (\text{VI.82})$$

Уравнение переноса энергии-импульса частиц (VI.17) в метрике (VI.65) можно записать в виде:

$$\mathcal{E}'_{pl} + 3 \frac{a'}{a} (\mathcal{E}_{pl} + P_{pl}) = \sigma \Phi'. \quad (\text{VI.83})$$

Далее, учитывая точное соотношение (VI.36), найдем:

$$\sigma = \frac{\mathcal{E}_{pl} - 3P_{pl}}{\Phi}. \quad (\text{VI.84})$$

Производя в уравнении (VI.83) конформные преобразования (VI.79) – (VI.80) с учетом (VI.81) и (VI.84) получим:

$$\bar{\mathcal{E}}'_{pl} - (\bar{\mathcal{E}}_{pl} - 3\bar{P}_{pl}) \frac{\bar{\Phi}'}{\bar{\Phi}} = 0. \quad (\text{VI.85})$$

В ультрарелятивистском пределе

$$\frac{p}{m_*} \rightarrow \infty; \Rightarrow \bar{\mathcal{E}}_{pl} - 3\bar{P}_{pl} \rightarrow 0; \quad \bar{\sigma} \rightarrow 0 \quad (\text{VI.86})$$

уравнение (VI.85) сводится к уравнению

$$\bar{\mathcal{E}}'_{pl} = 0 \Rightarrow \bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}_0 = \text{Const} \Rightarrow \mathcal{E}_a = \frac{\text{Const}}{a^4}. \quad (\text{VI.87})$$

Из закона сохранения скалярно заряженных частиц найдем

$$\bar{n} = \bar{\theta}^3 \gamma^3 \phi_2(\gamma) = \text{Const}, \quad (\text{VI.88})$$

а также из (VI.87):

$$\bar{\mathcal{E}}_{pl} = \bar{\theta}^4 \gamma^4 \phi_3(\gamma) = \text{Const}. \quad (\text{VI.89})$$

Таким образом, имеем два функционально независимых уравнения (VI.88) и (VI.89) на две функции: $\bar{\gamma}(\eta)$ и $\bar{\theta}(\eta)$. Единственным решением этих уравнений могут быть произвольные константы:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} = \text{Const}; \quad \bar{\theta} = \text{Const} \Rightarrow \\ \theta = \frac{\bar{\theta}_0}{a(\eta)}; \quad \mu = \frac{\bar{\mu}_0}{a(\eta)}, \end{aligned} \quad (\text{VI.90})$$

что обеспечивает конформную инвариантность материальных уравнений в ультрарелятивистском пределе.

VI.5.2 Конформные преобразования уравнения скалярного поля

Обратимся теперь к уравнениям поля. При нулевом массивном члене в уравнении скалярного поля (VII.42) получим закон преобразования полевого уравнения:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d^2}{d\eta^2} a\Phi = -4\pi\epsilon_1\sigma \Rightarrow \frac{d^2}{d\eta^2} \bar{\Phi} = -4\pi\epsilon_1\bar{\sigma}, \quad (\text{VI.91})$$

где

$$\bar{\sigma} = q^2 \bar{\theta}^2 \gamma^2 \phi_1(\gamma) \bar{\Phi} \equiv \frac{\omega_0^2}{4\pi} \bar{\Phi}, \quad (\text{VI.92})$$

где

$$\omega_0 = |q| \bar{\theta} \gamma \sqrt{4\pi\phi_1(\gamma)} = \text{Const}. \quad (\text{VI.93})$$

Таким образом, в ультрарелятивистском пределе $\bar{\sigma}$ зависит от η лишь посредством $\bar{\Phi}(\eta)$ и уравнение (VI.91) имеет своим решением в ультрарелятивистском пределе:

$$\bar{\Phi} = C_1 \cos \omega_0 \eta + C_2 \sin \omega_0 \eta; \quad \epsilon_1 = +1; \quad (\text{VI.94})$$

$$\bar{\Phi} = C_1 e^{\omega_0 \eta} + C_2 e^{-\omega_0 \eta}; \quad \epsilon_1 = -1, \quad (\text{VI.95})$$

Заметим, что в ультрарелятивистском пределе (VI.86) $\omega_0 \rightarrow 0$, поэтому согласно (VI.94) и (VI.95) в этом приближении можно положить:

$$\omega_0 \eta \rightarrow 0, \quad (\text{VI.96})$$

следовательно, в ультрарелятивистском пределе (VI.86) имеет место асимптотическое решение:

$$\bar{\Phi} \simeq \bar{\Phi}_0 = \text{Const} \Rightarrow \Phi \simeq \frac{\bar{\Phi}_0}{a(\eta)}, \quad (\text{VI.97})$$

т.е., и для скалярного поля также восстанавливается асимптотическая конформная инвариантность.

Далее заметим, что в этом приближении согласно (VI.77) плотность энергии скалярного поля и его давление равны нулю $\mathcal{E}_s = 0$, а единственное нетривиальное уравнение Эйнштейна:

$$3 \frac{a'^2}{a^4} = 8\pi \mathcal{E}_{pl}; \quad (\text{VI.98})$$

VI.5. Конформные преобразования уравнений космологической модели

принимает вид:

$$3\frac{a'^2}{a^4} = 8\pi\frac{\bar{\mathcal{E}}_{pl}}{a^4} \Rightarrow; a' = \text{Const}, \quad (\text{VI.99})$$

т.е., имеет своим решением ультрарелятивистское решение $a = a_1\eta$.

Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение:

Теорема 8 1. *Для безмассового конформно инвариантного скалярного поля в ультрарелятивистском пределе (VI.86) и (VI.96) имеется асимптотически точное решение уравнений Эйнштейна*

$$\begin{aligned} a(\eta) &= a_0\eta & \Phi &= \frac{\Phi_0}{\eta} & \theta &= \frac{\theta_0}{\eta}; \\ n &= \frac{n_0}{\eta^3} & \sigma &= \frac{\sigma_0}{\eta^3} & \mathcal{E}_{pl} &= \frac{\mathcal{E}_{pl}^0}{\eta^4}. \end{aligned} \quad (\text{VI.100})$$

2. При этом согласно (VI.3) и (VI.90) фактор ультрарелятивизма остается постоянным:

$$\frac{\langle p \rangle}{m_*} \sim \max\left(\frac{\theta}{m_*}, \frac{\mu}{m_*}\right) = \text{Const}. \quad (\text{VI.101})$$

Обсуждение результатов

Подводя результаты исследования сконструированной на базе общерелятивистской кинетической теории и теории гравитации математической модели статистической системы с межчастичным конформно инвариантным скалярным взаимодействием, отметим наиболее важные свойства этой модели.

1. В случае ультрарелятивистской локально равновесной статистической системы плотность ее скалярного заряда, σ , играет роль массового члена в конформно инвариантном уравнении скалярного поля. В частности, согласно (VI.61) в случае однородной изотропной Вселенной эффективная масса квантов скалярного поля обратно пропорциональна масштабному фактору:

$$m_{ef} = \frac{\omega_0}{a(\eta)}, \quad (\text{VI.102})$$

т.е., изменяется по такому же закону, как и эффективная масса скалярно заряженных частиц при условии (VI.96).

2. При этом фактор ультрарелятивизма $\langle p \rangle / m_*$ остается постоянным и сохраняет свою большую величину.
3. При этих же условиях и вся Вселенная эволюционирует по ультрарелятивистскому закону.

Как известно, в полностью конформно инвариантных теориях не существует фиксированного масштаба, вследствие этого свойства, по-видимому, конформно - инвариантные теории были отброшены в свое время космологами. Однако, как это видно из предыдущих результатов, такой характерный масштаб появляется в таких теориях благодаря скалярному заряду. Этот характерный масштаб массы равен ω_0 и возникает при нарушении условия (VI.96) одновременно с нарушением конформной инвариантности теории.

Глава VII

Бесстолкновительные самогравитирующие статистические системы скалярно взаимодействующих частиц

VII.1 Введение

Как широко известно, кинетическая модель материи является моделью более глубокого уровня, чем гидродинамическая. Гидродинамическая модель получается из кинетической в результате предельного перехода при больших значениях интеграла столкновений частиц. Основы общерелятивистской кинетической теории были сформулированы в 60-х годах в работах Н.А. Черникова [78, 79, 75], Tauber G. E. и Weinberg J.W. [80], А.А. Власова [38] и др. В данной статье нам, в первую очередь, будет важна именно работа Власова [38]. В отличие от феноменологического гидродинамического подхода динамический кинетический подход дает гораздо большую информацию о веществе, например, об уравнении состояния, даже в чисто гидродинамических ситуациях. Поэтому в экстремальных гравитационных полях, в которых легко может нарушаться локальное термодинамическое равновесие, кинетический подход дает более достоверную информацию о веществе. В последние годы в связи с обнаружением космологического ускорения в теоретическую космологию все чаще привлекаются модели основанные на скалярных полях (см., например, [81]). В релятивистскую кинетику скалярные поля впервые были введены в работах Автора [6, 59]. В ряде работ Автора [59], [63], [65] и др. сформулирована математическая модель самогравитирующей статистической системы скалярно заряженных частиц. В частности, в [82] эта модель

расширена на сектор отрицательных эффективных масс скалярно заряженных частиц. Однако, в этих работах, как и в других работах Автора с учениками, обычно рассматривалась локально равновесная статистическая система. Как известно, на инфляционной стадии локально термодинамическое равновесие нарушается [20], поэтому логично рассмотреть реализующуюся на такой стадии бесстолкновительную ситуацию, которая описывается соответствующими общерелятивистскими уравнениями Власова, состоящими из бесстолкновительных кинетических уравнений, уравнения скалярного поля с источником и уравнений Эйнштейна. Этому вопросу и посвящена данная глава. Результаты главы опубликованы в статьях [83], [84].

VII.2 Самосогласованная математическая модель бесстолкновительной плазмы скалярно заряженных частиц

VII.2.1 Бесстолкновительные кинетические уравнения и уравнения переноса

Функции распределения $f_a(x, P)$ частиц сорта “ a ”, обладающих скалярным зарядом q_a , определяются инвариантными бесстолкновительными кинетическими уравнениями [59]¹:

$$[H_a, f_a] = 0, \quad (\text{VII.1})$$

где $[H_a, f_a]$ – скобка Пуассона, которую можно записать с помощью оператора ковариантного дифференцирования Картана $\tilde{\nabla}$ в форме²:

$$[H, \Psi] \equiv \frac{\partial H}{\partial P_i} \tilde{\nabla}_i \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial P_i} \tilde{\nabla}_i H, \quad (\text{VII.2})$$

функция Гамильтона частицы в скалярном поле и соотношение нормировки для обобщенного импульса имеют вид:

$$H(x, P) = \frac{1}{2} [m_*^{-1}(x)(P, P) - m_*] = 0, \quad (\text{VII.3})$$

$$(P, P) = m_*^2 \equiv (q_a a \Phi)^2. \quad (\text{VII.4})$$

¹т.е., уравнениями Власова.

²Подробности см. в [82]

VII.2. Самосогласованная математическая модель бесстолкновительной плазмы

Функции распределения $f_a(x, P)$ частиц сорта “ a ”, обладающих скалярным зарядом q_a , определяются инвариантными бесстолкновительными кинетическими уравнениями [59]:

$$[H_a, f_a] = 0, \quad (\text{VII.5})$$

где функция Гамильтона и соотношение нормировки для обобщенного импульса имеют вид:

$$H(x, P) = \frac{1}{2} [m_*^{-1}(x)(P, P) - m_*] = 0, \quad (\text{VII.6})$$

$$(P, P) = m_*^2 \equiv (q_a a \Phi)^2. \quad (\text{VII.7})$$

$$[H, \Psi] \equiv \frac{\partial H}{\partial P_i} \tilde{\nabla}_i \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial P_i} \tilde{\nabla}_i H, \quad (\text{VII.8})$$

Отметим полезные в дальнейшем тождества, справедливые для функции Гамильтона (VII.6):

$$\tilde{\nabla}_i H = -\nabla_i m_*, \quad (\text{VII.9})$$

$$[H, \Psi] = \frac{1}{m_*} P^i \tilde{\nabla}_i \Psi + \partial_i m_* \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}, \quad (\text{VII.10})$$

где $\Psi(x, P)$ есть произвольная функция.

Далее, определим с помощью функций распределения макроскопические моменты:

$$n_a^i = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} g_a \int_{P_0} f_a(x, P) P^i dP_0. \quad (\text{VII.11})$$

– векторы плотности числа частиц, которые тождественно сохраняются вследствие кинетических уравнений (VII.5); тензор энергии - импульса плазмы

$$T_p^{ik} = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_{P_0} f_a(x, P) P^i P^k dP_0 \quad (\text{VII.12})$$

и скалярную плотность заряда плазмы

$$\sigma = \Phi \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} q_a^2 \int_{P_0} f_a(x, P) dP_0, \quad (\text{VII.13})$$

которые связаны уравнениями переноса (законом сохранения энергии-импульса)

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sigma \nabla^i \Phi = 0. \quad (\text{VII.14})$$

VII.2.2 Уравнение скалярного поля

Рассмотрим сначала функцию Лагранжа классического массивного вещественного скалярного поля Φ . В этом случае Лагранжиан вещественного скалярного поля можно выбрать в виде:

$$L_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi} (g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} - \epsilon_2 m_s^2 \Phi^2), \quad (\text{VII.15})$$

где m_s – масса квантов скалярного поля, $\epsilon_2 = 1$ для классического скалярного поля, для фантомного скалярного поля $\epsilon_2 = -1$; для поля с отталкиванием одноименно заряженных частиц $\epsilon_1 = 1$, для поля с притяжением одноименно заряженных частиц $\epsilon_1 = -1$. Тогда тензор энергии-импульса скалярного поля есть:

$$T_s^{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi} (2\Phi^{,i}\Phi^{,k} - g^{ik}\Phi_{,j}\Phi_{,j} + \epsilon_2 g^{ik} m_s^2 \Phi^2). \quad (\text{VII.16})$$

уравнение массивного неконформного скалярного поля с источником [59]:

$$\square\Phi + m_s^2\Phi = -4\pi\epsilon_1\sigma, \quad (\text{VII.17})$$

где

$$\square\Phi \equiv g^{ik}\nabla_i\nabla_k\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\Phi$$

Рассмотрим теперь функцию Лагранжа классического массивного вещественного конформного скалярного поля Φ (см., например, [4,5]; для массивного скалярного поля конформная инвариантность понимается как асимптотическое свойство при ($m_s \rightarrow 0$)):

$$L_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left(g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} - \epsilon_2 m_s^2 \Phi^2 + \frac{R}{6}\Phi^2 \right). \quad (\text{VII.18})$$

Функция Лагранжа отличается от стандартной (см., например, [20]) наличием множителя $1/8\pi$, а также введенными единичными индикаторами ϵ_α . Кроме того, в нашей работе тензор Риччи получается сверткой первого и третьего индексов тензора Римана $R_{jl} = g^{ik}R_{ijkl}$. Компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля относительно функции Лагранжа (VII.18) равны [20, 1]:

$$T_s^{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left[\frac{4}{3}\Phi^{,i}\Phi^{,k} - \frac{1}{3}g^{ik}\Phi_{,j}\Phi_{,j} + \epsilon_2 m_s^2 g^{ik}\Phi^2 + \frac{1}{3}(R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik})\Phi^2 - \frac{2}{3}\Phi\Phi^{,ik} + \frac{2}{3}g^{ik}\Phi\square\Phi \right]. \quad (\text{VII.19})$$

VII.3. Уравнения космологической эволюции

полагая $\Phi \neq \text{Const}$, получим уравнение массивного скалярного поля с источником (см. [1]):

$$\square\Phi + \epsilon_2 m_s^2 \Phi - \frac{R}{6}\Phi = -4\pi\epsilon_1\sigma. \quad (\text{VII.20})$$

VII.2.3 Уравнения Эйнштейна

Полная система макроскопических уравнений состоит, во-первых, из уравнений Эйнштейна:

$$R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = 8\pi(T_p^{ik} + T_s^{ik}), \quad (\text{VII.21})$$

где T_p^{ik} – определенный выше ТЭИ статистической системы, а T_s^{ik} – ТЭИ скалярного поля (VII.16) или (VII.19), кинетических уравнений (VII.5) и уравнений поля (VIII.4) или (VII.20). Ковариантная дивергенция от уравнений Эйнштейна превращает их в тождества вследствие уравнения переноса (VII.14) и уравнения поля (VIII.4) или (VII.20).

VII.3 Уравнения космологической эволюции

VII.3.1 Кинетические уравнения

Для пространственно плоской Вселенной Фридмана:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) \equiv a^2(\eta)ds_0^2 \quad (\text{VII.22})$$

будем полагать скалярный потенциал функцией только времени $\Phi(\eta)$, а функцию распределения, зависящей лишь от времени и квадрата пространственного импульса:

$$f_a = f_a(\eta, P); \quad P_0^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2, \quad (\text{VII.23})$$

так что кинетическая энергия частиц равна

$$E = \sqrt{P_4 P^4} = \frac{P_4}{a} = \sqrt{q^2 \Phi^2(\eta) + \frac{P_0^2}{a^2}}. \quad (\text{VII.24})$$

Вычисляя скобку Пуассона (VII.10), приведем кинетические уравнения (VII.5) к виду:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0. \quad (\text{VII.25})$$

Таким образом, однородное, изотропное решение бесстолкновительного кинетического уравнения в метрике Фридмана не зависит явно от временной переменной, как это имело место быть и для газа нейтральных частиц [85, 86]:

$$f(\eta, P_0) = f(P_0). \quad (\text{VII.26})$$

VII.3.2 Сшивка решения с равновесным

Для нахождения конкретного распределения в плазме, в которой ранее поддерживалось термодинамическое равновесие, применим следующий прием [85, 86]. Предположим, что до некоторого момента η_0 в плазме поддерживалось локальное термодинамическое равновесие, которое было мгновенно нарушено в этот момент времени. Таким образом, при $\eta < \eta_0$ функции распределения были локально равновесными, т.е.:

$$f_0(\eta, P_4) = \left[\exp\left(-\frac{\mu(\eta)}{\theta} + \frac{\sqrt{a^2 q^2 \Phi^2 + P_0^2}}{a\theta(\eta)}\right) \pm 1 \right]^{-1}, \quad \eta < \eta_0 \quad (\text{VII.27})$$

(μ – химические потенциалы, θ – температура), а при $\eta \geq \eta_0$ они описывались бесстолкновительными кинетическими уравнениями. Таким образом, в момент времени $\eta = \eta_0$ должно иметь место равенство:

$$f(P_0) = \left[\exp\left(-\frac{\mu(\eta_0)}{\theta(\eta_0)} + \frac{\sqrt{q^2 a^2(\eta_0) \Phi^2(\eta_0) + P_0^2}}{\theta(\eta_0) a(\eta_0)}\right) \pm 1 \right], \quad \eta = \eta_0. \quad (\text{VII.28})$$

Единственная возможность выполнить это условие заключается в том, что P_0^2 в равновесном распределении необходимо заменить на интеграл:

$$\mathcal{P}_0^2(\eta, P_0) = P_0^2 - \int_{\eta_0}^{\eta} a^2 \frac{d\Phi^2}{d\eta} d\eta. \quad (\text{VII.29})$$

Таким образом, точное решение бесстолкновительных кинетических уравнений (VII.5), при $\eta = \eta_0$ переходящее в равновесное, есть:

$$f(\eta, P_0) = \left[\exp\left(-\frac{\mu_0}{\theta_0} + \frac{\sqrt{m_0^2 + p^2}}{\theta_0}\right) \pm 1 \right]^{-1}, \quad (\text{VII.30})$$

VII.3. Уравнения космологической эволюции

где мы ввели обозначения:

$$m_0 = a_0 q \Phi_0; \quad a_0 = a(\eta_0); \quad \mu_0 = \mu(\eta_0); \quad (\text{VII.31})$$

$$\theta_0 = \theta(\eta_0); \quad \Phi_0 = \Phi(\eta_0); \quad P_0 = a_0 p. \quad (\text{VII.32})$$

Таким образом, m_0 – эффективная масса частиц на момент нарушения равновесия. В дальнейшем решение (VII.30) для краткости будем называть *квазиравновесным*.

VII.3.3 Моменты квазиравновесной функции распределения

Легко видеть, что интересующие нас моменты (VII.11) и (VII.12) квазиравновесной функции распределения по своей алгебраической структуре совпадают с соответствующими моментами локально - равновесного распределения:

$$n^i = u^i n; \quad u^i = \frac{1}{a} \delta_4^i; \quad (\text{VII.33})$$

$$T_{pl}^{ik} = (\mathcal{E}_{pl} + P_{pl}) u^i u^k - P_{pl} g^{ik}, \quad (\text{VII.34})$$

где u^i – единичный времениподобный вектор синхронного наблюдателя. Однако, макроскопические скаляры $n, P, \mathcal{E}, \sigma$ относительно квазиравновесного распределения (VII.30) не совпадают с соответствующими скалярами относительно равновесной функции распределения. Вычисляя, найдем³:

$$n = \frac{\rho a_0^3}{2\pi^2 a^3(\eta)} \int_0^\infty \exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta}\right) \mp 1 p^2 dp, \quad (\text{VII.35})$$

таким образом:

$$n a^3 = \text{Const}, \quad (\text{VII.36})$$

что обеспечивает закон сохранения числа частиц. Таким образом, выражение для плотности числа частиц с точностью до умножения на масштабный фактор $(a_0/a)^3$ совпадает со стандартным равновесным с постоянными массой, температурой и химическим потенциалом.

Выражения для остальных трех скаляров уже не совпадают с равновесными:

$$\mathcal{E}_{pl} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta}\right) \mp 1 p^2 \sqrt{\bar{m}^2 + p^2} dp; \quad (\text{VII.37})$$

³ $\gamma = \mu/\theta$ – приведенный химический потенциал

$$P_{pl} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \frac{\rho}{6\pi^2} \times \int_0^\infty \frac{p^4}{\sqrt{\bar{m}^2 + p^2}} \exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta}\right) \mp 1 dp; \quad (\text{VII.38})$$

$$\sigma = \Phi \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \frac{\rho q^2}{2\pi^2} \times \int_0^\infty \frac{p^2}{\sqrt{\bar{m}^2 + p^2}} \exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta}\right) \mp 1 dp, \quad (\text{VII.39})$$

где:

$$\bar{m} = m_* \frac{a}{a_0} \equiv \frac{a\Phi}{a_0\Phi_0} m_0 = \bar{m}(\bar{\Phi}). \quad (\text{VII.40})$$

Поведение этих трех скаляров существенно определяется поведением инварианта:

$$\bar{\Phi} \equiv a(\eta)\Phi(\eta). \quad (\text{VII.41})$$

Заметим, что при $\bar{\Phi} = \text{Const}$ интегралы в выражениях для всех трех скаляров являются постоянными величинами.

VII.3.4 Уравнения поля

В случае конформно неинвариантного поля (VIII.1) уравнение поля (VIII.4) в метрике Фрийдмана принимает вид:

$$\frac{1}{a^4} \frac{d}{d\eta} a^2 \frac{d}{d\eta} \Phi + \epsilon_2 m_s^2 \Phi = -4\pi\epsilon_1 \sigma. \quad (\text{VII.42})$$

В случае конформно инвариантного скалярного поля (VII.18) это уравнение необходимо заменить на следующее:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d^2}{d\eta^2} a\Phi + \epsilon_2 m_s^2 \Phi = -4\pi\epsilon_1 \sigma. \quad (\text{VII.43})$$

Рассмотрим конформно инвариантный случай *безмассового* скалярного поля. Перепишем скалярную плотность заряда (VII.39) в виде:

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma}(\bar{\Phi})}{a^3}, \quad (\text{VII.44})$$

VII.3. Уравнения космологической эволюции

где

$$\bar{\sigma}(\bar{\Phi}) = \bar{\Phi} \frac{\rho q^2 a_0^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{\sqrt{\bar{m}^2 + p^2}} \exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta}\right) \mp 1 dp, \quad (\text{VII.45})$$

Таким образом, конформно инвариантное уравнение (VII.46) для безмассового скалярного поля принимает вид:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \bar{\Phi} = -4\pi\epsilon_1 \bar{\sigma}(\bar{\Phi}). \quad (\text{VII.46})$$

Т.е., уравнение для скалярного конформно инвариантного безмассового поля с источником становится автономным обыкновенным интегро - дифференциальным уравнением 2-го порядка. Можно найти решения этого уравнения в различных предельных случаях.

Рассмотрим сначала *ультрарелятивистский случай*:

$$\langle p \rangle \gg \max(m_0, \bar{m}). \quad (\text{VII.47})$$

В этом случае уравнение (VII.46) становится линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \bar{\Phi} + \epsilon_1 \omega_0^2 \bar{\Phi} = 0, \quad (\text{VII.48})$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{\rho q^2 a_0^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p dp}{\exp\left(\frac{-mu_0 + p}{\theta_0}\right) \pm 1}. \quad (\text{VII.49})$$

В случае отталкивания одноименно заряженных частиц ($e_1 = +1$) это уравнение имеет своим общим решением:

$$\Phi = C_1 \frac{\cos(\omega_0 \eta)}{a(\eta)} + C_2 \frac{\sin(\omega_0 \eta)}{a(\eta)}, \quad (\text{VII.50})$$

а в случае притяжения ($e_1 = -1$) –

$$\Phi = C_1 \frac{\cosh(\omega_0 \eta)}{a(\eta)} + C_2 \frac{\sinh(\omega_0 \eta)}{a(\eta)}. \quad (\text{VII.51})$$

Отметим, что точно такое же решение было найдено в [68] для ультрарелятивистской равновесной плазмы. Это совпадение легко объяснить, так как

в ультрарелятивистском пределе квазиравновесное распределение (VII.30) совпадает с равновесным.

Рассмотрим теперь *нерелятивистский случай*⁴:

$$\langle p \rangle \ll \bar{m}. \quad (\text{VII.52})$$

Тогда вместо однородного уравнения (VII.48) получим неоднородное уравнение:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \bar{\Phi} = -4\pi\epsilon_1\sigma_0, \quad (\text{VII.53})$$

где

$$\sigma_0 = \frac{\rho q^2 a_0 \Phi_0}{2\pi^2 m_0} \int_0^\infty \frac{p dp}{\exp\left(\frac{-mu_0 + \sqrt{m_0^2 + p^2}}{\theta_0}\right) \pm 1}, \quad (\text{VII.54})$$

Решение этого уравнения есть:

$$\bar{\Phi} = \frac{C_1}{a} + C_2 \frac{\eta}{a} - 2\pi\epsilon_1\sigma_0 \frac{\eta^2}{a}. \quad (\text{VII.55})$$

VII.3.5 Уравнение Эйнштейна

Нетрудно видеть, что тензор энергии-импульса конформно - инвариантного безмассового скалярного поля $\bar{\Phi}(\eta)$ имеет вид тензора энергии - импульса идеальной жидкости ($e_1 = +1$)

$$T_{(s)}^{ik} = (\mathcal{E}_s + P_s)v^i v^k - P_s g^{ik}, \quad (\text{VII.56})$$

где

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{8\pi a^4} \bar{\Phi}'^2; \quad (\text{VII.57})$$

$$P_s = \frac{1}{24\pi a^4} [\bar{\Phi}'^2 + 8\pi\epsilon_1 \bar{\Phi} \bar{\sigma}(\bar{\Phi})]. \quad (\text{VII.58})$$

так что:

$$T_s = \mathcal{E}_s - 3P_s = \frac{1}{a^4} \bar{\Phi} \bar{\sigma}(\bar{\Phi}). \quad (\text{VII.59})$$

⁴Заметим, что требуется малость среднего импульса только по отношению к \bar{m} , но не к m_0 .

VII.3. Уравнения космологической эволюции

Единственное нетривиальное уравнение Эйнштейна в метрике Фридмана принимает вид:

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi}{3}(\mathcal{E}_s + \mathcal{E}_{pl}). \quad (\text{VII.60})$$

Подставляя в это уравнение выражения для плотности энергии из (VII.37) и (VII.57), приведем его к виду:

$$a'^2 = \frac{1}{3}\bar{\Phi}'^2 + \frac{8\pi}{3}\bar{\mathcal{E}}_{pl}(\bar{\Phi}), \quad (\text{VII.61})$$

$$\bar{\mathcal{E}}_{pl}(\bar{\Phi}) = \frac{a_0^4 \rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \exp\left(\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta}\right) \mp 1 p^2 \sqrt{\bar{m}^2 + p^2} dp. \quad (\text{VII.62})$$

Таким образом, космологическая модель в случае безмассового конформно инвариантного скалярного поля с бесстолкновительным источником сводится к двум обыкновенным интегро - дифференциальным уравнениям второго порядка (VII.46) и первого порядка (VII.61) относительно функций $a(\eta)$ и $\bar{\Phi}(\eta)$.

В частности, для ультрарелятивистского случая имеем $\bar{\mathcal{E}}_{pl}(\bar{\Phi}) = \bar{\mathcal{E}}_0 = \text{Const}$. Выбирая сходящееся решение уравнения скалярного поля (VII.50)

$$\bar{\Phi} = \phi_0 \sin(\omega_0 \eta) \quad (\text{VII.63})$$

и подставляя его в уравнение Эйнштейна (VII.61), приведем его к виду

$$a'^2 = \frac{8\pi}{3}\phi_0^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 \eta + \frac{8\pi}{3}\bar{\mathcal{E}}_0. \quad (\text{VII.64})$$

Решение этого простого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{8\pi}{3}} |\Phi_0| \frac{1}{k} \int_0^{\omega_0 \eta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx \\ &\equiv \sqrt{\frac{8\pi}{3}} |\Phi_0| \frac{1}{k} \Psi(x), \quad x = \omega_0 \eta \end{aligned} \quad (\text{VII.65})$$

$$k^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} < 1; \quad \alpha^2 = \phi_0^2 \omega_0^2; \quad \beta^2 = \bar{\mathcal{E}}_0. \quad (\text{VII.66})$$

Интеграл в (VII.65) выражается через эллиптический интеграл второго рода, $E(x, k)$:

$$E(x, k) = \int_0^x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx. \quad (\text{VII.67})$$

На Рис. 48 показана зависимость *приведенного масштабного фактора*

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{k}{|\Phi_0|} xa(x) \quad (\text{VII.68})$$

от безразмерной временной переменной $x = \omega_0 \eta$ и безразмерного параметра $k < 1$. Таким образом, масштабный фактор растет со временем примерно по закону $a \sim \eta$, подправленному затухающими колебаниями с периодом $2\pi/\omega_0$, что в асимптотическом пределе $\omega_0 \eta \rightarrow \infty$ соответствует ультрарелятивистскому закону расширения.

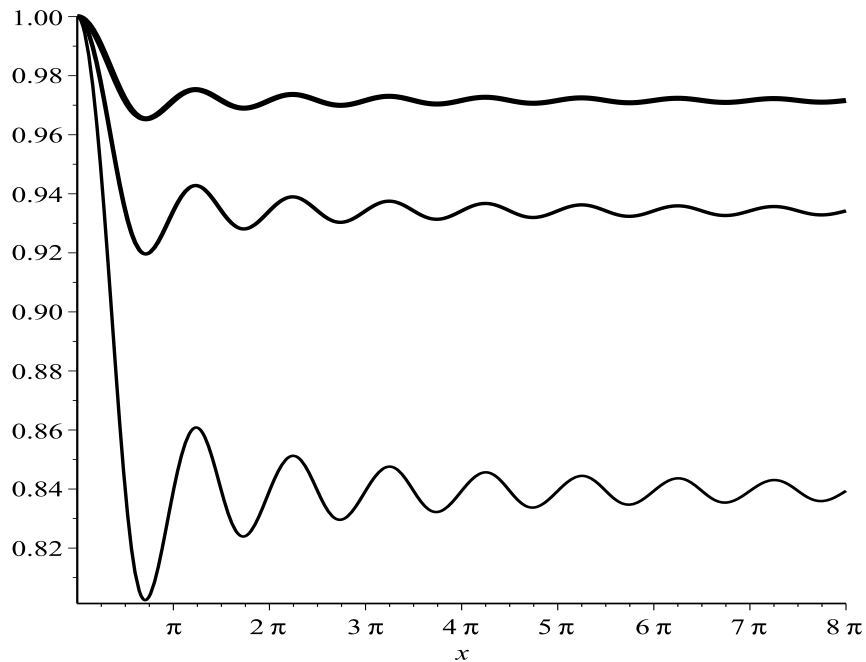


Рис. 48. Тонкая линия: $k = 3/4$; средняя линия: $k = 1/2$, жирная линия: $k = 1/3$.

Заключение

Подводя итоги главы, отметим наиболее важные ее результаты:

VII.3. Уравнения космологической эволюции

1. Получено точное изотропное решение бесстолкновительного кинетического уравнения для газа скалярно заряженных частиц во Вселенной Фрийдмана, на ранних временах переходящее в локально равновесное распределение.
2. Показано, что в случае конформно инвариантного безмассового скалярного поля самосогласованное уравнение скалярного поля с источником становится автономным.
3. Показано, что в случае ультрарелятивистской плазмы самосогласованное уравнение безмассового скалярного поля принимает вид уравнения Клейна-Гордона с массивным членом – положительным в случае притяжения одноименно заряженных бозонов и отрицательным – в противоположном случае (VII.48) – (VII.49). Этот результат находится в полном согласии с аналогичным результатом, полученным для локально равновесной плазмы скалярно заряженных частиц [68].
4. Найдено самосогласованное решение уравнений Эйнштейна для ультрарелятивистской плазмы. Полученное решение описывает затухающие осцилляции вокруг стандартного ультрарелятивистского решения с частотой, определяемой параметрами плазмы, и пропорциональной скалярному заряду частиц.

Глава VIII

Статистические космологические системы фермионов с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием

VIII.1 Введение

Фундаментальные скалярные поля играют важную роль в понимании динамики ранней Вселенной (см., например, [126], [81]) и с помощью различных модификаций теории гравитации, предложенных как самим Эйнштейном [49] (космологический Λ - член), так впоследствии R. Utiyama and T. Fukuyama [127], A. Minkevich [128], [129] (Poincarè gauge theory of gravity), A. Starobinsky [55] ($f(R)$ - гравитация), по-видимому, способны объяснить некоторые основные наблюдательные факты космологии. Тем не менее, некоторые важные факты наблюдательной космологии до сих пор не нашли достаточно убедительного объяснения в рамках стандартного космологического сценария. К таким очевидным фактам, относится, например, существование нерелятивистского этапа расширения Вселенной, необходимого для образования ее структуры. В связи, в частности, и с этим обстоятельством в настоящее время рассматривается широкий спектр *феноменологических теорий* фундаментального неминимально связанного скалярного поля, в которых вводятся различные связи между скалярным и гравитационным полями (потенциальная, кинетическая, комбинированная). Соответствующие теоретико - полевые конструкции преследуют обычно следующую цель: подобрать такой феноменологический Лагранжиан взаимодействия и его параметры, который обеспечивает космологический сценарий всеми необходимыми эта-

VIII.1. Введение

пами: инфляция \rightarrow ультрарелятивистский этап \rightarrow нерелятивистский этап \rightarrow вторичное ускорение. При этом, предшествующий стандартный космологический сценарий, общепринятый в 60-80-е годы XX-го столетия (горячая модель Гамова) встраивается между этапами раннего и позднего космологического ускорения.

В этой статье мы рассматриваем космологические модели, построенные на фундаментальном скалярном взаимодействии. В отличие от феноменологических неминимальных моделей скалярного взаимодействия мы рассмотрим динамические модели статистических систем скалярно заряженных частиц, в которых некоторые сорта частиц могут прямым образом взаимодействовать со скалярным полем через некоторый фундаментальный *скалярный заряд*. Статистическая система, обладая, скалярным зарядом и сама являясь источником скалярного поля, может эффективно влиять на скалярное поле, управляя его поведением. Такое скалярное взаимодействие было введено в общерелятивистскую кинетическую теорию в 1982 г одним из авторов статьи [114], [115], [116], [117] и несколько позже – Г.Г. Ивановым [125]. В частности, в работах [115], [116] на основе кинетической теории получена самосогласованная система уравнений, описывающая статистическую систему частиц со скалярным взаимодействием. В работе [76] были исследованы групповые свойства равновесных статистических конфигураций со скалярным взаимодействием. В работах [118], [103] были сформулированы уравнения космологической модели на основе статистических Ферми - систем со скалярным взаимодействием и осуществлены попытки численного моделирования таких систем. В работах [61], [62], [63], [64], [66]¹ макроскопическая теория статистических систем со скалярным взаимодействием была значительно усовершенствована и расширена на случай фантомных скалярных полей, а в работах [101], [67] – на сектор отрицательных эффективных масс скалярно взаимодействующих частиц, в этих же работах были изучены трансформационные свойства математических моделей статистических систем со скалярным взаимодействиям по отношению к преобразованиям заряда, химического потенциала и других параметров модели. В работах [84], [111] математическая модель космологических систем со скалярным взаимодействием была расширена на случай конформно инвариантного скалярного поля и изучены асимптотические трансформационные свойства этой модели, а также исследована бесстолкновительная кинетиче-

¹см. также монографии [1], [2] и обзор [65].

ская модель Власова. В работе [112] исследованы асимптотические свойства космологической модели, основанные на статистической системе почти вырожденных фермионов с межчастичным скалярным взаимодействием.

Перейдем теперь к вопросам численного моделирования космологической эволюции статистических систем с межчастичным *фантомным скалярным взаимодействием*, обладающим отрицательной «кинетической» энергией. С математической точки зрения система дифференциальных уравнений, описывающих космологическую эволюцию таких динамических систем относится к классу жестких систем, численное моделирование которых сопряжено с весьма большими вычислительными трудностями. Жесткий характер системы обусловлен, в первую очередь, уравнениями Эйнштейна, в левой части которых содержится квадрат «постоянной» Хаббла, а в правой содержится знакопеременное выражение, знак которого определяется игрой двух факторов – отрицательной кинетической энергии и положительной потенциальной. Некоторые результаты численного моделирования таких систем были получены в работах [104] (космологическая эволюция вырожденного Ферми-газа), [107] (космологическая эволюция однокомпонентного Больцмановского газа), [106] (комплексное исследование).

Результаты численного моделирования позволили выявить ряд уникальных свойств космологических статистических моделей с межчастичным фантомным взаимодействием, в частности, (см., например, [106]):

1. *всплески ускорения* – наличие резких фантомных всплесков инвариантного космологического ускорения в достаточно широкой области параметров модели;
2. *этапы постоянного ускорения* – возникновение космологических этапов с постоянным ускорением;
3. *всплеск разогрева плазмы* – быстрый разогрев статистической системы на определенных этапах эволюции.

Эти, а также и другие особенности фантомного скалярного взаимодействия резко отличают его от классического скалярного взаимодействия, сводящегося, фактически, к модели затухающих колебаний осциллятора в потенциальной яме. Указанные особенности космологических статистических моделей с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, возможно, могут объяснить ряд не совсем понятных в настоящее время наблюдательных фак-

VIII.2. Математическая модель статистических систем

тов, относящимся, как к ранним, так и поздним эпохам космологической эволюции, а также выявить природу темной энергии и темной материи. Данная статья как раз и посвящена выявлению устойчивых особенностей космологических статистических моделей с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, которые могут быть использованы в конструировании моделей темных секторов энергии и материи. Поскольку, как было показано ранее (см. цитированные выше работы) космологическая эволюция статистических систем со скалярным взаимодействием весьма слабо зависит от типа статистики, в этой статье численное моделирование мы будем проводить для вырожденные или почти вырожденных систем фермионов в качестве носителя скалярного заряда.

Результаты главы опубликованы в статьях [104], [106], [109]. Кроме того, необходимо отметить, что численное моделирование в этой главе проводилось в прикладном математическом пакете Mathematica, в котором был создан комплекс программ численного моделирования космологических моделей [110].

VIII.2 Математическая модель статистических систем с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием

Микроскопическая динамика скалярно заряженных частиц во внешнем скалярном поле не зависит от типа скалярного взаимодействия (классическое / фантомное). Заметим, что эффективная масса частицы (VI.3) может быть и отрицательной величиной, однако это никак не сказывается ни на уравнениях движения, ни на определении макроскопических потоков динамических величин [67], поскольку в эти величины и соответствующие им уравнения входит лишь абсолютная величина эффективной массы частицы. Поэтому мы будем всюду ссылаться на соответствующие соотношения Главы IV.

VIII.2.1 Фантомные скалярные поля с притяжением

Функция Лагранжа массивного фантомного скалярного поля с притяжением одноименно заряженных частиц имеет вид

[66]²:

$$L_s = -\frac{1}{8\pi} (g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} + m_s^2 \Phi^2), \quad (\text{VIII.1})$$

а соответствующий тензор энергии-импульса равен:

$$T_s^{ik} = \frac{1}{8\pi} (-2\Phi^{,i} \Phi^{,k} + g^{ik} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + g^{ik} m_s^2 \Phi^2). \quad (\text{VIII.2})$$

В этой главе мы будем рассматривать скалярный синглет. В этом случае закон сохранения суммарного тензора энергии-импульса системы “скалярно заряженные частицы + скалярное поле” $T^{ik} = T_p^{ik} + T_s^{ik}$ имеет вид:

$$\nabla_k T^{ik} = -\frac{1}{4\pi} (\square \Phi - m_s^2 \Phi - 4\pi \sigma) \nabla^i \Phi = 0, \quad (\text{VIII.3})$$

откуда мы получаем уравнение для скалярного поля с источником (VIII.4.

$$\square \Phi - m_s^2 \Phi = 4\pi \sigma. \quad (\text{VIII.4})$$

Решение уравнения поля для точечного скалярного источника, покоящегося в начале координат евклидового пространства

$$f(x, p) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \delta^{(3)}(\mathbf{p}),$$

имеет вид [63]:

$$\Phi = q \frac{\sin m_s r}{r}, \quad (\text{VIII.5})$$

и, фактически, совпадает с решением уравнений Эйнштейна для малых сферических гравитационных возмущений на фоне метрики Фридмана [42]. Из (VIII.5) следует, что собственная масса скалярной частицы при $m_0 = 0$ определяется ее потенциальной энергией в собственном скалярном поле³:

$$m_*^0 = \lim_{r \rightarrow 0} q \Phi(r) = q m_s. \quad (\text{VIII.6})$$

Заметим, что решение полевого уравнения для фантомного поля в случае одиночного отличается от соответствующего решения полевого уравнения для классического поля заменой $\sin m_s r \rightarrow e^{-m_s r}$.

²В [63] показано, что классические скалярные поля с притяжением одноименно скалярно заряженных частиц несовместимы с уравнениями Эйнштейна, как и фантомные скалярные поля с отталкиванием одноименно заряженных частиц.

³Заметим, что скалярный заряд частицы является безразмерной величиной ($[q] = 0$).

VIII.2. Математическая модель статистических систем

Далее, сила взаимодействия двух скалярно заряженных частиц с зарядами q_1 и q_2 , находящихся на расстоянии r , согласно (IV.27) и (IV.28) равна:

$$\mathbf{F}_{12} = -q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} (m_s r \cos m_s r - \sin m_s r). \quad (\text{VIII.7})$$

На малых расстояниях

$$\mathbf{F}_{12} = -q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{3} m_s^3, \quad (r m_s \ll 1) \quad (\text{VIII.8})$$

эта сила является силой притяжения для одноименно скалярно заряженных частиц и действует подобно упругой силе с модулем упругости $k = q_1 q_2 m_s^3 / 3$. Поэтому можно утверждать, что при малых расстояниях пары одноименно скалярно заряженных частиц будут подобно осциллятору совершать гармонические колебания с частотой $\sqrt{k/m_*} = m_s \sqrt{q/3}$. На больших расстояниях

$$\mathbf{F}_{12} = -q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{r^2} \cos m_s r, \quad (r m_s \gg 1) \quad (\text{VIII.9})$$

сила знакопеременна и падает пропорционально $1/r$. Для разноименно скалярно заряженных частиц сила F_{12} на малых расстояниях соответствует отталкиванию. Вакуумные решения уравнения (VIII.4) соответствуют запаздывающим и опережающим волнам при волновых числах \mathbf{k} , больших комптоновских,

$$\Phi = \sum_{\pm} C_{\pm} + e^{\pm i \sqrt{\mathbf{k}^2 - m_s^2} t + i \mathbf{k} \mathbf{r}}; \quad \mathbf{k}^2 > m_s^2, \quad (\text{VIII.10})$$

распространяющимся с фазовой скоростью, меньшей скорости света. Для волновых чисел \mathbf{k} , меньших комптоновских, вакуумные решения соответствуют растущим и затухающим стоячим волнам⁴:

$$\Phi = \sum_{\pm} C_{\pm} e^{\pm \sqrt{m_s^2 - \mathbf{k}^2} t + i \mathbf{k} \mathbf{r}}; \quad \mathbf{k}^2 < m_s^2. \quad (\text{VIII.11})$$

VIII.2.2 Локально равновесные статистические системы скалярно взаимодействующих частиц

В случае локального термодинамического равновесия (ЛТР), который только и будет рассматриваться в данной главе⁵, функция распределения частиц

⁴Эти особенности решений еще раз подчеркивают уникальный, “экзотический” характер фантомного скалярного поля.

⁵Бесстолкновительная кинетическая модель рассматривалась в работах [84], [111]

имеет локально - равновесный вид:

$$f_{(a)}^0(x, p_a) = \left\{ \exp \left[\frac{-\mu_a + (v, P_a)}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1}, \quad (\text{VIII.12})$$

где знаки $-$ и $+$ соответствуют частицам с целым и полуцелым спином, v^i – времениподобный вектор макроскопической скорости статистической системы, так что:

$$(v, v) = 1, \quad (\text{VIII.13})$$

θ – локальная температура статистической системы. Далее, μ_a – химический потенциал a -го сорта частиц, при этом химические потенциалы должны удовлетворять условиям химического равновесия:

$$\sum_{A=1}^m \nu_A \mu_A = \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \mu'_B. \quad (\text{VIII.14})$$

VIII.2.3 Моменты равновесного распределения

Моменты распределения (VIII.12) равны [67]:

$$n_{(a)}^i(x) = n_{(a)}(x)v^i; \quad (\text{VIII.15})$$

$$T_p^{ik}(x) = (\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p)v^i v^k - \mathcal{P}_p g^{ik}, \quad (\text{VIII.16})$$

где $n_{(a)}$ есть плотность числа частиц сорта “ a ”, $\mathcal{E}_p = \sum \mathcal{E}_{(a)}$ и $\mathcal{P}_p = \sum \mathcal{P}_{(a)}$ есть суммарные плотность энергии и давление статистической системы:

$$n_{(a)} = \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch} x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (\text{VIII.17})$$

$$\mathcal{E}_p = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (\text{VIII.18})$$

$$\mathcal{P}_p = \sum_a \frac{2S+1}{6\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^4 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (\text{VIII.19})$$

$$T_p = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^2 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (\text{VIII.20})$$

$$\sigma = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} q(m + q_{(a)}\Phi)^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}, \quad (\text{VIII.21})$$

VIII.3. Математическая модель равновесной статистической системы

где введены две безразмерные скалярные функции:

$$\lambda_* = \frac{m_*}{\theta}; \quad \gamma_{(a)} = \frac{\mu_{(a)}}{\theta}, \quad (\text{VIII.22})$$

а макроскопические скаляры \mathcal{E}_p , \mathcal{P}_p , T_p и σ получаются суммированием соответствующих величин по компонентам системы.

Заметим, что химический потенциал безмассовых частиц, обладающих нулевыми фундаментальными зарядами, в состоянии ЛТР равен нулю. Этот вывод следует из того, что числа ν_A^a таких частиц, участвующих в реакциях (V.9), могут быть совершенно произвольными. Тогда из факта существования реакции аннигиляции частиц и античастиц следует известное соотношение [77]:

$$\bar{\mu}_{(a)} = -\mu_{(a)}. \quad (\text{VIII.23})$$

Заметим также, что релятивистский химический потенциал связан с импульсом Ферми p_f стандартным релятивистским соотношением:

$$\mu = \sqrt{m_*^2 + p_f^2}. \quad (\text{VIII.24})$$

VIII.3 Математическая модель локально равновесной самогравитирующей статистической системы скалярно заряженных частиц

VIII.3.1 Полная система уравнений

Полная система самосогласованных макроскопических уравнений, описывающих самогравитирующую статистическую систему скалярно заряженных частиц, состоит:

- Во-первых, из уравнений Эйнштейна:

$$R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = 8\pi(T_p^{ik} + T_s^{ik}), \quad (\text{VIII.25})$$

где T_p^{ik} – определенный выше тензор энергии - импульса статистической системы (VIII.16), (VIII.18), (VIII.19), а T_s^{ik} тензор энергии - импульса скалярного поля (VIII.2).

- Во-вторых, из уравнений переноса тензора энергии - импульса частиц (VI.17).
- В-третьих, из уравнения скалярного поля с источником (VIII.4).
- В-четвертых, из закона сохранения частиц (VI.15).

$$\nabla_i \sum_{(a)} e_{(a)} n_{(a)}^i = 0, \quad (\text{VIII.26})$$

Выясним, к чему приводят законы сохранения (VI.15) и (VIII.26) в условиях LTE (см. [106]). С помощью (VIII.15) приведем закон сохранения числа частиц VIII.26) к виду:

$$\nabla_k (\Delta n v^k) = 0, \quad \Delta n \equiv \sum_{(a)} e_{(a)} n_{(a)}. \quad (\text{VIII.27})$$

Из соотношения нормировки вектора скорости (VIII.13) вытекает известное тождество:

$$v^k_{,i} v_k \equiv 0. \quad (\text{VIII.28})$$

Далее, с учетом определения (VIII.16) законы сохранения тензора энергии - импульса статистической системы (VI.15) можно привести к виду:

$$(\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) v^i_{,k} v^k = (g^{ik} - v^i v^k) (\mathcal{P}_{p,k} + \sigma \Phi_{,k}); \quad (\text{VIII.29})$$

$$\nabla_k (\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) v^k = (\mathcal{P}_{p,k} + \sigma \Phi_{,k}) v^k, \quad (\text{VIII.30})$$

Таким образом, формально на 3 макроскопические скалярные функции $\mathcal{E}_p, \mathcal{P}_p, n_e$ и 3 независимые компоненты вектора скорости v^i макроскопические законы сохранения дают 5 независимых уравнений (VIII.27) – (VIII.30), так как одно из уравнений (VIII.29) является зависимым от остальных вследствие тождества (VIII.28). Однако, не все указанные макроскопические скаляры функционально независимы, поскольку все они определяются локально равновесными функциями распределения (VIII.12). При разрешенной серии условий химического равновесия, когда независимым остается лишь один химический потенциал, разрешенном уравнении массовой поверхности и заданных скалярном потенциале и масштабном факторе четыре макроскопические скаляра, $\mathcal{E}_p, \mathcal{P}_p, n_e, \sigma$, определяются двумя термодинамическими скалярами — некоторым химическим потенциалом μ и локальной температурой θ . Таким образом, система уравнений (VIII.27) – (VIII.30) оказывается полностью определенной.

VIII.3.2 Космологическая модель

Рассмотрим сформулированную выше самосогласованную математическую модель применительно к космологической ситуации для пространственно - плоской модели Фридмана:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

В этом случае все термодинамические функции зависят только от времени. Нетрудно убедиться, что $v^i = \delta_4^i$ обращает уравнения (VIII.29) в тождества, система уравнений (VIII.27) – (VIII.30) сводятся к двум дифференциальным уравнениям относительно двух термодинамических функций μ и θ .а :

$$\dot{\mathcal{E}}_p + 3\frac{\dot{a}}{a}(\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) = \sigma\dot{\Phi}; \quad (\text{VIII.31})$$

$$\Delta\dot{n} + 3\frac{\dot{a}}{a}\Delta n = 0 \Rightarrow \Delta na^3 = \text{Const.} \quad (\text{VIII.32})$$

При $\Phi = \Phi(t)$ тензор энергии - импульса скалярного поля также принимает вид тензора энергии - импульса изотропной однородной жидкости:

$$T_s^{ik} = (\mathcal{E}_s + \mathcal{P}_s)v^i v^k - \mathcal{P}_s g^{ik}, \quad (\text{VIII.33})$$

где

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{8\pi}(-\dot{\Phi}^2 + m_s^2\Phi^2); \quad (\text{VIII.34})$$

$$\mathcal{P}_s = -\frac{1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 + m_s^2\Phi^2), \quad (\text{VIII.35})$$

так что:

$$\mathcal{E}_s + \mathcal{P}_s = -\frac{\dot{\Phi}^2}{4\pi}. \quad (\text{VIII.36})$$

Уравнение скалярного поля в метрике Фридмана принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - m_s^2\Phi = 4\pi\sigma. \quad (\text{VIII.37})$$

К этим уравнениям необходимо добавить нетривиальное уравнение Эйнштейна:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\mathcal{E}, \quad (\text{VIII.38})$$

где \mathcal{E} – суммарная плотность энергии фермионов и скалярного поля. Эта система уравнений (VIII.31), (VIII.32), (IX.31) и (IX.33) относительно переменных $\theta(t)$, $\mu(t)$, $\Phi(t)$, $a(t)$ описывает замкнутую математическую модель космологической эволюции статистической системы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием⁶. В этих уравнениях одно, (VIII.32), является алгебраическим, два, (VIII.31) и (IX.33), являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка и одно уравнение, (IX.31), является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Таким образом, при приведении этой системы к нормальному виду мы получим систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с алгебраической связью относительно пяти функций:

$$\mu(t); \theta(t); \Phi(t); Z(t) = \dot{\Phi}; a(t). \quad (\text{VIII.39})$$

VIII.3.3 Упрощение уравнений космологической модели

Заметим следующие важные обстоятельства:

1. Система уравнений (VIII.31), (IX.31) и (IX.33) с учетом определений (VIII.17) – (VIII.21), а также (IX.28) и (IX.29) является автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций (VIII.39), так как временная переменная явно не входит в эти уравнения. Следовательно, эту переменную можно исключить, переходя к новой системе переменных:

$$\mu(a); \theta(a); \Phi(a); \Phi'_a; \dot{a}(a), \quad (\text{VIII.40})$$

полагая

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(t)}{dt} &= \frac{d\phi}{da} \dot{a}; & \ddot{a} &= \frac{d\dot{a}}{da} \dot{a} \equiv \frac{1}{2} \frac{d\dot{a}^2}{da}; \\ \frac{d^2\phi}{dt^2} &= \frac{d^2\phi}{da^2} + \frac{1}{2} \frac{d\phi}{da} \frac{d\dot{a}^2}{da}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.41})$$

2. В этих переменных закон сохранения энергии-импульса статистической системы (VIII.31) принимает вид:

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{da} + \frac{3}{a}(\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) = \sigma \Phi'_a. \quad (\text{VIII.42})$$

⁶см. [66]

VIII.4. Математическая модель релятивистской почти вырожденной Ферми - системы

3. В этих переменных уравнение скалярного поля (IX.31) принимает вид:

$$\Phi''_{aa}\dot{a}^2 + \frac{1}{2}\Phi'_a \frac{d\dot{a}^2}{da} + 3\frac{\dot{a}^2}{a}\Phi'_a - m_s^2\Phi = 4\pi\sigma. \quad (\text{VIII.43})$$

4. Наконец, уравнение Эйнштейна (IX.33) становится алгебраическим уравнением относительно переменных (VIII.40):

$$\left(\frac{3}{a^2} + \Phi_a'^2\right)\dot{a}^2 = m_s^2\Phi^2 + 8\pi\mathcal{E}_p. \quad (\text{VIII.44})$$

В принципе, это последнее уравнение легко разрешить относительно \dot{a} и результат подставить в уравнение поля (VIII.43). В результате у нас останется система трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных $\Phi(a)$, $\Phi'_a(a)$ и одной из термодинамических функций. Найдя решение этих уравнений, мы должны разрешить уравнение

$$\frac{da}{dt} = \dot{a} \Rightarrow a = a(t). \quad (\text{VIII.45})$$

VIII.4 Математическая модель релятивистской почти вырожденной Ферми - системы

VIII.4.1 Макроскопические скаляры для почти вырожденной однокомпонентной Ферми-системы

В этом разделе мы более подробно исследуем аналитические свойства почти вырожденной локально равновесной Ферми - системы с межчастичным скалярным взаимодействием. Заметим, что эти свойства, относящиеся непосредственно к частицам, не зависят от характера скалярного взаимодействия: они совпадают для систем с классическим и фантомным скалярным взаимодействием. Поскольку в этой главе мы рассматриваем космологические модели с ультрарелятивистским стартом, необходимо учитывать в состоянии термодинамического равновесия частицы и античастицы одновременно. Рассмотрим вопрос о необходимости учета античастиц для простоты в симметричной модели, в которой $m_*^+ = m_*^- = |q\Phi|$ (см., например, [106]). Согласно (VIII.23) в условиях ЛТР должно выполняться условие антисимметрии химических потенциалов частиц и античастиц. Таким образом, для макроскопических ска-

ляров (VIII.17) – (VIII.19) имеем:

$$n_{\pm} = \frac{2S+1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\mp\gamma + \frac{\sqrt{m_*^2 + p^2}}{\theta}} + 1} p^2 dp; \quad (\text{VIII.46})$$

$$\mathcal{E}_{\pm} = \frac{2S+1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{p^2 \sqrt{m_*^2 + p^2} dp}{e^{\mp\gamma + \frac{\sqrt{m_*^2 + p^2}}{\theta}} + 1}; \quad (\text{VIII.47})$$

$$\mathcal{P}_{\pm} = \frac{2S+1}{6\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\mp\gamma + \frac{\sqrt{m_*^2 + p^2}}{\theta}} + 1} \frac{p^4 dp}{\sqrt{m_*^2 + p^2}}. \quad (\text{VIII.48})$$

Предполагая выполненным закон сохранения скалярного заряда фермионов (VIII.32), запишем:

$$\Delta n = \frac{2S+1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \left(\frac{p^2}{e^{-\gamma + \frac{\varepsilon(p)}{\theta}} + 1} - \frac{p^2}{e^{\gamma + \frac{\varepsilon(p)}{\theta}} + 1} \right) dp, \quad (\text{VIII.49})$$

где Δn – константа в правой части (VIII.32), пропорциональная избытку фермионов над антифермионами; $\varepsilon(p) = \sqrt{m_*^2 + p^2}$ – кинетическая энергия частиц. Будем далее полагать выполненным условие сильного вырождения:

$$\gamma \gg 1 \Rightarrow e^{-\gamma} \ll 1. \quad (\text{VIII.50})$$

Будем разлагать соответствующие интегралы по этой малой экспоненте. Вследствие (VIII.50) в подинтегральных выражениях для античастиц член с экспонентой является большим по сравнению с единицей, которую можно отбросить. Как следует из (VIII.50) в условиях сильного вырождения число античастиц экспоненциально мало в статистической системе даже, если она является ультрарелятивистской.

Античастицы:

Таким образом, макроскопические плотности для античастиц в условиях сильного вырождения легко находятся [112] и сводятся к классическим вы-

VIII.4. Математическая модель релятивистской почти вырожденной Ферми - системы

ражениям для соответствующих плотностей с учетом множителя $e^{-\gamma}$:

$$n_- = \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 e^{-\gamma} \frac{K_2(\lambda)}{\lambda}; \quad (\text{VIII.51})$$

$$\mathcal{E}_- = \frac{(2S+1)}{2\pi^2} m_*^4 e^{-\gamma} \left(\frac{K_3(\lambda)}{\lambda} - \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2} \right); \quad (\text{VIII.52})$$

$$\mathcal{P}_- = \frac{(2S+1)}{2\pi^2} m_*^4 e^{-\gamma} \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2}; \quad (\text{VIII.53})$$

$$\sigma_- = \frac{2S+1}{2\pi^2} q m_*^3 e^{-\gamma} \frac{K_1(\lambda)}{\lambda}, \quad (\text{VIII.54})$$

где

$$K_n(z) = \frac{\sqrt{\pi} z^n}{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{sh}^{2n} t dt \quad (\text{VIII.55})$$

– функции Бесселя мнимого аргумента (см., например, [48]), $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Частицы:

Для нахождения макроскопических скаляров для скалярно заряженных фермионов используем метод Зоммерфельда⁷ приближенного вычисления интеграла вида:

$$\int_0^\infty \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{-\gamma+\varepsilon/\theta} + 1} \approx \int_0^\mu f(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} \theta^2 f'_\varepsilon(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} \theta^4 f'''_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}(\mu) + \dots \quad (\text{VIII.56})$$

для малых θ . При этом необходимо учесть релятивистскую связь (VIII.24) в интегралах (VIII.56), что приведет к изменению пределов интегрирования. В случае плотности числа частиц n_+ функция $f(\varepsilon)$ принимает вид:

$$f(\varepsilon) = \frac{2S+1}{2\pi^2} \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - m_*^2}, \quad (\text{VIII.57})$$

поэтому интеграл (VIII.46) с точностью до θ^2 можно аппроксимировать выражением:

$$n_+ = \frac{m_*^3 \psi^3}{3\pi^2} + \theta^2 \frac{m_* (1 + 2\psi^2)}{6 \psi}, \quad (\text{VIII.58})$$

⁷см., например, [77]

где введена безразмерная функция

$$\psi = \frac{pf}{m_*}. \quad (\text{VIII.59})$$

Вычислим теперь плотность энергии Ферми частиц (VIII.47). В этом случае функция $f(\varepsilon)$ для интеграла (VIII.56) принимает вид:

$$f(\varepsilon) = \frac{2S+1}{2\pi^2} \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon^2 - m_*^2}. \quad (\text{VIII.60})$$

Тогда с точностью до квадратичного по температуре слагаемого плотность энергии фермионов равна:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_+ = \frac{m_*^4}{8\pi^2} & \left[\psi \sqrt{1 + \psi^2} (1 + 2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right] \\ & + \theta^2 \frac{m_*^2}{6} \frac{\sqrt{1 + \psi^2} (1 + 3\psi^2)}{\psi}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.61})$$

Вычислим, наконец, давление Ферми - частиц (VIII.48). В этом случае функция $f(\varepsilon)$ для интеграла (VIII.56) равна:

$$f(\varepsilon) = \frac{2S+1}{6\pi^2} (\varepsilon^2 - m_*^2)^{3/2}, \quad (\text{VIII.62})$$

и с точностью до квадратичного по температуре слагаемого давление фермионов равно:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_+ = \frac{m_*^4}{24\pi^2} & \left[\psi \sqrt{1 + \psi^2} (2\psi^2 - 3) \right. \\ & \left. + 3 \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right] + \theta^2 \frac{m_*^2}{6} \psi \sqrt{1 + \psi^2}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.63})$$

Слагаемые в квадратных скобках (VIII.61) и (VIII.63) совпадают с соответствующими выражениями для полностью вырожденной однокомпонентной Ферми - системы. Из (VIII.58) следует, что условие малости температурных поправок эквивалентно условию (VIII.50), т.е.,

$$\gamma \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{pf}{\theta} \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda\psi \gg 1. \quad (\text{VIII.64})$$

Фотонь:

VIII.4. Математическая модель релятивистской почти вырожденной Ферми - системы

Для установления термодинамического равновесия между частицами и античастицами при высоких энергиях необходимо учитывать фотоны и другие безмассовые частицы, которые могут быть продуктами аннигиляции фермионов: именно, условие (VIII.23) справедливо при учете реакций аннигиляции частиц и античастиц. При этом в реакциях аннигиляции рождаются фотоны, которые необходимо учитывать в модели двухкомпонентной Ферми системы.

В условиях ЛТР плотность энергии и давление фотонов задаются выражениями:

$$\mathcal{E}_\gamma = \frac{\pi^2}{15}\theta^4, \quad \mathcal{P}_\gamma = \frac{\pi^2}{45}\theta^4. \quad (\text{VIII.65})$$

VIII.4.2 Закон сохранения заряда фермионов

В рассматриваемом приближении (VIII.50) закон сохранения числа фермионов (VIII.32) примет вид:

$$a^3 \Delta n = a^3 (n_+ - n_-) = a^3 \left[\frac{m_*^3 \psi^3}{3\pi^2} + \frac{m_*^3 (1 + 2\psi^2)}{6\lambda^2} \frac{1}{\psi} - \frac{m_*^3 e^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}} K_2(\lambda)}{\pi^2} \frac{1}{\lambda} \right] = \text{Const}. \quad (\text{VIII.66})$$

Разложим Δn по малости температурной поправки:

$$\Delta n = n_0 + \delta n(\theta), \quad (\text{VIII.67})$$

где

$$n_0 = \frac{m_*^3 \psi^3}{3\pi^2} \quad (\text{VIII.68})$$

есть плотность числа частиц полностью вырожденной Ферми - системы. Вычисляя поправку δn , найдем:

$$\delta n = \frac{m_*^3 (1 + 2\psi^2)}{6\lambda^2} \frac{1}{\psi} - \frac{m_*^3 e^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}} K_2(\lambda)}{\pi^2} \frac{1}{\lambda}. \quad (\text{VIII.69})$$

В нулевом по $1/\gamma$ приближении вследствие закона сохранения числа частиц (VIII.66) и (VIII.68) получим интеграл движения:

$$m_* \psi a = \text{Const} \Rightarrow p_f a = \text{Const}. \quad (\text{VIII.70})$$

VIII.4.3 Закон сохранения энергии-импульса

Найдем суммарные плотность энергии и давление Ферми - системы, состоящей из скалярно заряженных фермионов, антифермионов и фотонов. Используя соотношения (IX.12), (IX.13), (VIII.61), (VIII.63) и (VIII.65), получим выражение для полной плотности энергии статистической системы:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p = \frac{m_*^4}{8\pi^2} & \left[\psi \sqrt{1 + \psi^2} (1 + 2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right] \\ & + \theta^2 \frac{m_*^2}{6} \frac{\sqrt{1 + \psi^2} (1 + 3\psi^2)}{\psi} \\ & + e^{-\gamma} \frac{m_*^4}{\pi^2} \left(\frac{K_3(\lambda)}{\lambda} - \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2} \right) + \frac{\pi^2}{15} \theta^4 \end{aligned} \quad (\text{VIII.71})$$

и ее давления:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p = \frac{m_*^4}{24\pi^2} & \left[\psi \sqrt{1 + \psi^2} (2\psi^2 - 3) + \right. \\ & \left. 3 \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right] + \theta^2 \frac{m_*^2}{6} \psi \sqrt{1 + \psi^2} \\ & + e^{-\gamma} \frac{m_*^4}{\pi^2} \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{45} \theta^4. \end{aligned} \quad (\text{VIII.72})$$

Переходя к безразмерным функциям λ , ψ

$$\theta = \frac{m_*}{\lambda}, \quad \gamma = \lambda \sqrt{1 + \psi^2}, \quad (\text{VIII.73})$$

с учетом рекуррентных соотношений для функций Бесселя

$$K_3(\lambda) = K_1(\lambda) + \frac{4K_2(\lambda)}{\lambda} \quad (\text{VIII.74})$$

получим окончательные выражения для макроскопических скаляров \mathcal{E}_p , \mathcal{P}_p :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p = \frac{m_*^4}{8\pi^2} & \left[\psi \sqrt{1 + \psi^2} (1 + 2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right] \\ & + \frac{m_*^4}{6\lambda^2} \frac{\sqrt{1 + \psi^2} (1 + 3\psi^2)}{\psi} + \\ & \frac{m_*^4 e^{-\lambda \sqrt{1 + \psi^2}}}{\pi^2} \frac{\lambda K_1(\lambda) + 3K_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\pi^2 m_*^4}{15 \lambda^4}; \end{aligned} \quad (\text{VIII.75})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p = \frac{m_*^4}{24\pi^2} & \left[\psi \sqrt{1 + \psi^2} (2\psi^2 - 3) + \right. \\ & \left. 3 \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right] + \frac{m_*^4}{6\lambda^2} \psi \sqrt{1 + \psi^2} + \\ & \frac{m_*^4 e^{-\lambda \sqrt{1 + \psi^2}}}{\pi^2} \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\pi^2 m_*^4}{45 \lambda^4}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.76})$$

Аналогично найдем скалярную плотность заряда:

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{qm_*^3}{2\pi^2} & \left[\psi \sqrt{1 + \psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2}) \right] + \\ & \frac{qm_*^3}{6\lambda^2} \frac{\sqrt{1 + \psi^2}}{\psi} + \frac{qm_*^3 e^{-\lambda \sqrt{1 + \psi^2}}}{\pi^2} \frac{K_1(\lambda)}{\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.77})$$

Разложим полученные макроскопические скаляры по малости температурных поправок:

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_0 + \delta\mathcal{E}(\theta); \quad \mathcal{P}_p = \mathcal{P}_0 + \delta\mathcal{P}(\theta); \quad \sigma = \sigma_0 + \delta\sigma(\theta),$$

где \mathcal{E}_0 , \mathcal{P}_0 и σ_0 – первые члены в правых частях соотношений (VIII.75), (VIII.76) и (VIII.77), соответствующие полностью вырожденной Ферми - системе. Таким образом, для полностью вырожденной Ферми - системы закон сохранения энергии - импульса частиц (VIII.31) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_0 + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\mathcal{E}_0 + \mathcal{P}_0) - \sigma_0 \dot{\Phi} = 0 \Rightarrow \\ \frac{m_*^4 \psi^3 \sqrt{1 + \psi^2}}{\pi^2} \frac{d}{dt} \ln(m_* \psi a) = 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.78})$$

и тождественно выполняется вследствие интеграла движения (VIII.70). Полученный интеграл движения необходимо использовать в температурных поправках. Важно подчеркнуть, что интеграл движения (VIII.70) получается

как интеграл закона сохранения энергии полностью вырожденной Ферми - системы, закон сохранения числа фермионов можно получить из этого закона. Таким образом, снимается кажущееся противоречие между числом независимых уравнений и числом неизвестных функций в условиях полного вырождения⁸.

Таким образом, автономная система уравнений (VIII.31), (IX.31) и (IX.33) с учетом определений (VIII.75) – (VIII.77), а также интеграла (VIII.70) описывает самосогласованную космологическую модель на основе релятивистской статистической системы, состоящей из почти вырожденных скалярно заряженных фермионов, фотонов и фантомного скалярного поля.

VIII.5 Асимптотическое поведение системы в ультрарелятивистском пределе

VIII.5.1 Ультрарелятивистский предел и условие сильного вырождения

Исследуем теперь асимптотическое поведение системы в ультрарелятивистском пределе, когда $p_F \gg m$, $\theta \gg m$. Тогда:

$$\mu \rightarrow p_f, \quad \gamma \rightarrow \frac{p_f}{\theta}. \quad (\text{VIII.79})$$

Условие сильного вырождения фермионов $\gamma \gg 1$ приводит к ограничению на функции:

$$\gamma = \frac{p_f}{\theta} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad p_f \gg \theta. \quad (\text{VIII.80})$$

Разложим макроскопические скаляры статистической системы (VIII.75) – (VIII.77) по малому параметру отклонения от вырождения релятивистской Ферми - системы:

$$\xi = \left(\frac{\theta}{p_f} \right)^2 \equiv \frac{1}{\psi^2 \lambda^2} \ll 1. \quad (\text{VIII.81})$$

⁸пропала локальная температура $\theta = 0$

VIII.5. Асимптотическое поведение системы в ультрарелятивистском пределе

В линейном приближении по ξ макроскопические скаляры для Ферми - системы (VIII.75) – (VIII.77) принимают вид:

$$\begin{aligned}\Delta n &= \frac{p_f^3}{3\pi^2} + \xi \frac{p_f^3}{3}, \\ \mathcal{E}_p &= \frac{p_f^4}{4\pi^2} + \xi \frac{p_f^4}{2} + \frac{\pi^2}{15} (p_f^2 \xi)^2, \\ \mathcal{P}_p &= \frac{p_f^4}{12\pi^2} + \xi \frac{p_f^4}{6} + \frac{\pi^2}{45} (p_f^2 \xi)^2, \\ \sigma &= 0.\end{aligned}\tag{VIII.82}$$

Таким образом, в этом приближении $\sigma = 0$, а, значит, ультрарелятивистские почти вырожденные фермионы взаимодействуют со скалярным полем минимально, т.е. скалярное поле становится свободным.

VIII.5.2 Законы сохранения

1. Из закона сохранения числа фермионов (VIII.32) следует:

$$\begin{aligned}a^3 p_f^3 (1 + \pi^2 \xi) &= \text{Const} \Rightarrow \\ p_f &= \frac{p_0}{a} (1 + \pi^2 \xi)^{-1/3}.\end{aligned}\tag{VIII.83}$$

Таким образом, окончательно получим для импульса Ферми соотношение:

$$p_f = \frac{p_0}{a} \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \xi \right)\tag{VIII.84}$$

2. Закон сохранения энергии-импульса переписется как:

$$\begin{aligned}\frac{p_f^4}{\pi^2} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{p}_F}{p_f} + 2\pi^2 \xi \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{p}_F}{p_f} + \frac{\dot{\xi}}{4\xi} \right) \right] \\ + \frac{4\pi^2}{15} (p_f^2 \xi)^2 \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{p}_F}{p_f} + \frac{\dot{\xi}}{2\xi} \right] = 0.\end{aligned}$$

Раскладывая полученное выражение по малости параметра ξ , получим окончательно:

$$\begin{aligned} \frac{p_f^4}{\pi^2} \left[\frac{d}{dt} \ln(ap_f) + 2\pi^2 \xi \frac{d}{dt} \ln(ap_f \xi^{1/4}) \right] \\ + \frac{4\pi^2}{15} (p_f^2 \xi)^2 \frac{d}{dt} \ln(ap_f \xi^{1/2}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.85})$$

В случае полного вырождения $\xi = 0$ выражение (VIII.84) приводит к полученному выше интегралу (VIII.70). В линейном по малости ξ приближении выражение (VIII.85) перепишем как:

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{a^4} \left[-\frac{\pi^2}{3} \dot{\xi} \left(1 + \frac{\pi^2}{3} \xi \right) + 2\pi^2 \xi \dot{\xi} \left(\frac{1}{4\xi} - \frac{\pi^4}{9} \xi - \frac{\pi^2}{3} \right) \right] \\ + \frac{C_2}{a^4} \left(\xi^2 - \frac{4\pi^2}{3} \xi^3 \right) \dot{\xi} \left(\frac{1}{2\xi} - \frac{\pi^4}{9} \xi - \frac{\pi^2}{3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{VIII.86})$$

Так как параметр вырождения ξ является свободным параметром и не зависит от других функций, входящих в соотношение (VIII.86), последнее может выполняться лишь в случае:

$$\dot{\xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \text{Const}, \quad (\text{VIII.87})$$

откуда получим закон эволюции импульса Ферми и температуры в ультрарелятивистском пределе:

$$p_f = \frac{p_0}{a} \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \xi \right) = \frac{\bar{p}_0}{a}, \quad \theta = \frac{\theta_0}{a}. \quad (\text{VIII.88})$$

VIII.5.3 Учет нерелятивистских поправок

В ультрарелятивистском пределе для почти вырожденных фермионов должны выполняться соотношения

$$p_f \gg m_* \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\psi} = \frac{m_*}{p_f} \rightarrow 0. \quad (\text{VIII.89})$$

Для почти вырожденных фермионов $\gamma \gg 1$ имеем:

$$\gamma = \frac{\mu}{\theta} = \frac{\sqrt{m_*^2 + p_f^2}}{\theta} \equiv \frac{p_f \sqrt{1 + (1/\psi)^2}}{\theta}. \quad (\text{VIII.90})$$

VIII.5. Асимптотическое поведение системы в ультрарелятивистском пределе

В ультрарелятивистском пределе ($1/\psi \rightarrow 0$):

$$\gamma \rightarrow \bar{\gamma} \equiv \frac{pf}{\theta}. \quad (\text{VIII.91})$$

Разложим макроскопические скаляры по малости нерелятивистских поправок:

$$\begin{aligned} \Delta n &= \frac{m_*^3 \psi^3}{3\pi^2} (1 + \pi^2 \xi), \\ \mathcal{E}_p &= \frac{m_*^4 \psi^4}{4\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\psi^2} + 2\pi^2 \xi \right) + \frac{\pi^2}{15} (m_*^2 \psi^2 \xi)^2, \\ \mathcal{P}_p &= \frac{m_*^4 \psi^4}{12\pi^2} \left(1 - \frac{1}{\psi^2} + 2\pi^2 \xi \right) + \frac{\pi^2}{45} (m_*^2 \psi^2 \xi)^2, \\ \sigma &= \frac{qm_*^3 \psi^4}{2\pi^2} \frac{1}{\psi^2}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.92})$$

Доля античастиц в приближении $\psi \gg 1$, $\lambda \rightarrow 0$ равна:

$$\frac{n_-}{n_+} = 6e^{-1/\sqrt{\xi}} \xi^{3/2} \ll 1 \quad (\text{VIII.93})$$

и зависит только от ξ , поэтому вследствие (VIII.87) относительная концентрация античастиц остается постоянной.

Подводя итоги этому разделу, отметим следующие особенности поведения *почти вырожденной* статистической системы:

1. В ходе космологической эволюции импульс Ферми изменяется по закону (VIII.70):

$$ap_f = \text{Const}. \quad (\text{VIII.94})$$

2. В ходе космологической эволюции температура почти вырожденной Ферми - системы меняется по закону:

$$a\theta = \text{Const}, \quad (\text{VIII.95})$$

а степень ее вырожденности остается постоянной.

3. В ходе космологической эволюции степень поляризации ультрарелятивистской почти вырожденной Ферми - системы (VIII.93) остается малой и постоянной.

Заметим далее следующее обстоятельство. Степень релятивизма почти вырожденной статистической системы, очевидно, определяется условием:

$$p_f^2 + \theta^2 \gg m_*^2 \Rightarrow \psi^2(1 + \xi^2) \gg 1, \quad (\text{VIII.96})$$

т.е., в условиях сильного вырождения ($\xi \rightarrow 0$) сводится, фактически, к одному условию:

$$\psi \gg 1 \Rightarrow p_f \gg m_*. \quad (\text{VIII.97})$$

Поэтому условие релятивизма статистической системы почти вырожденных фермионов легко может быть нарушено, если только потенциал скалярного поля не падает пропорционально $1/a$, как в случае конформно инвариантного скалярного поля [84], [111]. Как будет видно ниже, условие релятивизма, действительно, достаточно быстро нарушается вследствие роста потенциала скалярного поля. Вместе с этим статистическая система становится нерелятивистской, а степень ее вырождения растет.

VIII.6 Математическая модель космологической эволюции полностью вырожденной статистической системы с фантомным скалярным взаимодействием

VIII.6.1 Полная система уравнений

Итак, в условиях полного вырождения макроскопические скаляры однокомпонентной теперь статистической системы равны:

$$n = \frac{p_f^3}{3\pi^2} \equiv \frac{m_*^3 \psi^3}{3\pi^2}; \quad (\text{VIII.98})$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{m_*^4}{8\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} (1 + 2\psi^2) \quad (\text{VIII.99})$$

$$- \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (\text{VIII.100})$$

$$\mathcal{P}_p = \frac{m_*^4}{24\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} (2\psi^2 - 3) \quad (\text{VIII.101})$$

$$+ 3 \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (\text{VIII.102})$$

$$\sigma = q \frac{m_*^3}{2\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})], \quad (\text{VIII.103})$$

причем:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{p_f}{m_*} \quad m_* = |m_0 + q\Phi|; \\ p_f &= \frac{p_0}{a}, \quad p_0 = p_f|_{a=1}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.104})$$

Таким образом, в условиях полного вырождения все макроскопические скаляры явно определяются элементарными скалярными функциями $\Phi(t)$ и $a(t)$.

В ультрарелятивистском пределе значения этих скаляров определены формулами (VIII.82), в которых надо положить $\xi = 0$, в нерелятивистском пределе

$$m_* \gg p_F \Rightarrow \quad \psi \ll 1 \quad (\text{VIII.105})$$

формулы (VIII.99) – (VIII.103) имеют следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p &= \frac{m_* p_f^3}{3\pi^2} = \frac{|m_0 + q\Phi|^3 p_0^3}{3\pi^2 a^3}; \\ \mathcal{P}_p &= 0; \quad \sigma = \frac{q p_f^3}{3\pi^2} = \frac{q p_0^3}{\pi^2 a^3}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.106})$$

В свою очередь, скалярные функции $\Phi(t)$ и $a(t)$ определяются системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений, (IX.31) и (IX.33):

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - m_s^2\Phi = 4\pi\sigma; \quad (\text{VIII.107})$$

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi(\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s), \quad (\text{VIII.108})$$

где \mathcal{E}_p – плотность энергии Ферми - системы (VIII.99), а \mathcal{E}_s – плотность энергии фантомного скалярного поля (IX.28):

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{8\pi}(-\dot{\Phi}^2 + m_s^2\Phi^2). \quad (\text{VIII.109})$$

Вводя переменные:

$$Z(t) = \dot{\Phi}; \quad \Lambda(t) = \ln a \Leftrightarrow a = e^\Lambda, \quad (\text{VIII.110})$$

приведем уравнения (VIII.107) и (VIII.109) к виду:

$$\dot{Z} = -3\dot{\Lambda}Z + m^2\Phi + 4\pi\sigma(\Lambda, \Phi); \quad (\text{VIII.111})$$

$$\dot{\Lambda} = 8\pi\mathcal{E}_p(\Lambda, \Phi) - Z^2 + m_s^2\Phi^2. \quad (\text{VIII.112})$$

Для того, чтобы получить из этой системы нормальную систему дифференциальных уравнений, удобную для численного моделирования, необходимо подставить в левую часть уравнения (VIII.111) выражение для $\dot{\Lambda}$ из уравнения (VIII.112).

VIII.6.2 Задача Коши

Сформулируем теперь задачу Коши для системы (VIII.110), (VIII.111) и (VIII.112). Пользуясь допустимыми преобразованиями, выберем масштабный фактор и время таким образом, чтобы было:

$$\Lambda(0) = 0; p_f(0) = p_0; \Phi(0) = \Phi_0; Z(0) = Z_0. \quad (\text{VIII.113})$$

Поскольку $a(0) = 1$, выбранный момент времени не совпадает с временной сингулярностью. Для того, чтобы окончательные результаты переформулировать в терминах космологического времени t , отсчитываемого от космологической сингулярности, можно предложить два алгоритма. В первом необходимо распространить численное интегрирование на отрицательный интервал времени до тех пор, пока не получим $a(-t_0) = 0$. Тогда все вычисленные функции необходимо преобразовать следующим образом: $\Psi(t) \rightarrow \psi(t + t_0)$. Второй алгоритм заключается в следующем. Поскольку мы рассматриваем здесь класс космологических моделей с ультрарелятивистским стартом, в котором на ранних стадиях космологической эволюции вклад скалярного поля в энергобаланс исчезающе мал, мы можем воспользоваться известным соотношением для ультрарелятивистской вселенной (см., например, [33]):

$$\mathcal{E} = \frac{3}{32\pi\tau^2}, \quad (\text{VIII.114})$$

где τ – истинно космологическое время. Тогда мы можем осуществить следующую перекалибровку нашей временной переменной t . Пусть $\mathcal{E}(t_0)$ есть величина полной плотной плотности энергии на ранних стадиях, полученная в результате численного интегрирования. Тогда должно быть:

$$\mathcal{E}(t_0) = \frac{3}{32\pi\tau_0^2} \Rightarrow \tau_0 = \sqrt{\frac{3}{32\pi\mathcal{E}(t_0)}}. \quad (\text{VIII.115})$$

Заметим, что подобная перекалибровка времени к космологическому времени не была произведена в цитированных выше работах⁹. Временная пере-

⁹см. [104] – [106]

VIII.6. Космологическая эволюция полностью вырожденной статистической системы

менная t на графиках космологической эволюции этих работ имеет относительный смысл. Для приведения этих графиков к космологическому времени необходимо произвести указанный сдвиг временной шкалы:

$$t \rightarrow t + (\tau_0 - t_0). \quad (\text{VIII.116})$$

В данной главе мы будем производить указанную перекалибровку временной шкалы на всех графиках, таким образом, время t всюду будет отсчитываться от космологической сингулярности. Далее для простоты будем всюду полагать:

$$Z_0 = 0. \quad (\text{VIII.117})$$

VIII.6.3 Анализ математической модели на малых временах:

$$m_s t \ll 1$$

Как указано выше, мы рассматриваем космологические модели с ультрарелятивистским стартом, в котором инфляционный режим расширения может реализовываться на более поздних стадиях. В самом крайнем, ультрарелятивистском пределе $\psi \rightarrow \infty$ формулы (VIII.82) для макроскопических скаляров принимают вид:

$$\mathcal{E}_p = \frac{p_F^4}{4\pi^2}; \quad \mathcal{P}_p = \frac{p_F^4}{12\pi^2}; \quad \sigma = 0. \quad (\text{VIII.118})$$

Далее, ранним стадиям соответствует условие:

$$m_s t \ll 1. \quad (\text{VIII.119})$$

В этом случае уравнение поля принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} = 0 \quad (\text{VIII.120})$$

и имеет своим первым интегралом

$$a^3\dot{\Phi} = C_1, \quad (\text{VIII.121})$$

где C_1 – произвольная константа. В этом же приближении плотность энергии скалярного поля (VIII.109) равна:

$$\mathcal{E}_s = -\frac{C_1^2}{8\pi a^6} \quad (\text{VIII.122})$$

и уравнение Эйнштейна (VIII.108) с учетом (VIII.118) и (VIII.104) принимает вид

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{C_1^2}{a^6} + \frac{2p_0^4}{a^4}. \quad (\text{VIII.123})$$

В случае классического скалярного поля главный вклад вблизи сингулярности вносит скалярное поле, имеющее в этом случае предельно жесткое уравнение состояния $\mathcal{E}_s = \mathcal{P}_s$ и приводящее к закону эволюции масштабного фактора $a \sim t^{1/3}$ [30]. Для фантомного же скалярного поля такой возможности $C_1 \neq 0$ не существует именно вследствие преобладания в этом случае вклада отрицательного скалярного поля вблизи сингулярности. Поэтому для фантомного поля, в отличие от классического, вблизи сингулярности остается единственная возможность:

$$\Phi = \Phi_0 = \text{Const}, \quad (m_s t \ll 1). \quad (\text{VIII.124})$$

В этом случае уравнение Эйнштейна принимает вид:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = m_s^2 \Phi_0^2 + \frac{2p_0^4}{a^4}. \quad (\text{VIII.125})$$

и имеет своим решением

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{2}p_0^2}{m_s \Phi_0}} \sqrt{\sinh\left(\frac{2m_s \Phi_0}{\sqrt{3}}t\right)}. \quad (\text{VIII.126})$$

Решение (VIII.126) принадлежит к классу решений, полученных в [20] и описывающих плавный переход с ультрарелятивистской стадии $a \sim t^{1/2}$ на стадию инфляции $a \sim e^{v_0 t}$. Как видно из решения (VIII.125), переход на инфляционную стадию происходит во времена порядка:

$$t \gtrsim t_{inf} = \frac{\sqrt{3}}{4m_s \Phi_0}. \quad (\text{VIII.127})$$

С другой стороны, условием корректности рассматриваемого приближения является (VIII.119). Отсюда можно сделать следующий вывод: при $t_{inf} m_s < 1$ инфляция может развиваться на рассматриваемом промежутке времени, в противном случае вся ранняя эпоха вселенной является ультрарелятивистской. Итак, условием возникновения ранней инфляции (во времена, меньшие

m_s^{-1}) в случае системы с фантомным полем является малость начального скалярного потенциала¹⁰:

$$\Phi_0 \ll \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (\text{VIII.128})$$

VIII.6.4 Безмассовое фантомное поле

Очевидно, что к случаю малого времени $m_s t \ll 1$ целиком относится и случай безмассового фантомного поля. Замечательным является тот факт, что масса скалярного поля m_s выпадает из условия (VIII.128). В частности, для безмассового скалярного поля, полагая в (VIII.126) $m_s \rightarrow 0$ получим:

$$a(t) = \left(\frac{8}{3}\right)^{1/4} \sqrt{t} \quad (\text{VIII.129})$$

ультрарелятивистскую асимптотику ($\Omega = -1$). Как видно из предыдущего анализа, ультрарелятивистская асимптотика будет справедлива для безмассового фантомного поля до тех пор, пока фермионы остаются ультрарелятивистскими.

Рассмотрим теперь случай нерелятивистской статистической системы для безмассового скалярного поля. В нерелятивистском пределе $\psi \rightarrow 0$ формулы (VIII.82) для макроскопических скаляров принимают вид:

$$\mathcal{E}_p = \frac{m_* p_f^3}{3\pi^2} = \frac{|m_0 + q\Phi|^3 p_0^3}{3\pi^2 a^3}; \quad (\text{VIII.130})$$

$$\mathcal{P}_p = 0; \quad \sigma = \frac{q p_f^3}{3\pi^2} = \frac{q p_0^3}{3\pi^2 a^3}. \quad (\text{VIII.131})$$

В этом случае мы опять получаем уравнение безмассового скалярного поля без источника (VIII.120) и, следовательно, по указанным выше причинам его единственно допустимое постоянное решение (VIII.124) $\Phi = \Phi_0$. Таким образом, вклад в энергию вносит лишь нерелятивистские фермионы, в результате чего мы получим решение

$$a(t) = \sqrt{\frac{2m_*^{(0)3} p_0^3}{\pi}} t^{2/3} \quad (m_*^{(0)} = |m_0 + q\Phi_0|), \quad (\text{VIII.132})$$

¹⁰как это ни представляется, на первый взгляд, парадоксальным

соответствующее нерелятивистскому режиму расширения ($\Omega = -1/2$). Таким образом, в случае безмассового скалярного поля космологическая эволюция может стартовать с ультрарелятивистского режима и окончить нерелятивистским. Для исследования поведения модели с безмассовым фантомным полем на промежуточных этапах необходимо численное интегрирование.

VIII.6.5 Свойства космологической модели с массивным фантомным полем на больших временах $m_s t \gg 1$

Пусть теперь $m_s \neq 0$. Рассмотрим поведение космологической модели при больших временах

$$m_s t \gg 1, \quad (\text{VIII.133})$$

предполагая, что на этих временах Ферми - система уже станет нерелятивистской. Поскольку, однако, на таких временах масштабный фактор станет большой величиной, то согласно (VIII.131) плотность скалярного заряда σ снова станет малой величиной, и ее можно отбросить. Но в уравнении поля (VIII.107) при этом нельзя отбросить первые и вторые производные по сравнению с массивным членом, так как мы получили бы $m^2 \Phi = 0$.

$$\ddot{\Phi} + 3\dot{\Lambda}\dot{\Phi} - m_s^2 \Phi = 0; \quad (\text{VIII.134})$$

В уравнении Эйнштейна (VIII.108) по этой же причине можно отбросить вклад частиц в плотность энергии:

$$3\dot{\Lambda}^2 = -\dot{\Phi}^2 + m_s^2 \Phi^2. \quad (\text{VIII.135})$$

Эта система имеет следующее асимптотическое при $m_s t \rightarrow \infty$ решение:

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(t) &= \frac{m_s t}{\sqrt{3}} + \Phi_0, \quad (m_s \neq 0); \\ \Lambda^{(0)}(t) &= \frac{m_s^2 t^2}{6} + \Phi_0 \frac{m_s t}{\sqrt{3}}, \end{aligned} \quad (\text{VIII.136})$$

где $\Phi_0 = \text{Const}$ – произвольная константа. Отметим, что решение (VIII.136) обращает в тождество уравнение поля (VIII.134), а при подстановке в уравнение Эйнштейна (VIII.135) приводит к относительной погрешности порядка $(m_s t)^{-2}$.

VIII.6. Космологическая эволюция полностью вырожденной статистической системы

Вычислим инвариантное космологическое ускорение относительно найденного решения:

$$\Omega = \frac{\ddot{a}^{(0)} a^{(0)}}{\dot{a}^{(0)2}} = 1 + \frac{\ddot{\Lambda}^{(0)}}{\dot{\Lambda}^{(0)2}} = 1 + \frac{1}{(\Phi^{(0)}(t))^2}. \quad (\text{VIII.137})$$

Таким образом, при больших временах ($m_s t \rightarrow \infty$) система выходит на режим инфляционного расширения ($\Omega \rightarrow 1$). Отметим, что можно доказать устойчивость полученного асимптотического решения при больших временах.

Нетрудно видеть, что эффективная масса фермионов при этом растет линейно со временем:

$$m_* \equiv |m + q\Phi| \approx q \frac{m_s t}{\sqrt{3}}, \quad (\text{VIII.138})$$

так что фермионы быстро становятся нерелятивистскими ($\Psi \rightarrow 0$). В связи с этим сделаем следующие важные замечания:

1. Холодная полностью вырожденная Ферми - система с очень большими эффективными массами скалярно заряженных фермионов может стать хорошей моделью темной материи.
2. На определенном этапе космологической эволюции гравитационные неустойчивости в нерелятивистской материи могут привести к возникновению обособленных областей с темной материей.
3. Стандартные Куперовские механизмы в Ферми - системах с притяжением частиц могут привести к образованию бозонов из пар фермионов и, тем самым, к сверхтекучести областей темной материи.
4. При росте эффективных масс фермионов выше планковского значения, т.е., согласно (VIII.138) при

$$m_* \gg m_{\text{Pl}} \Leftrightarrow q \frac{m_s t}{\sqrt{3}} \gg 1, \quad (\text{VIII.139})$$

массивные фермионы могут, в принципе, могут образовать устойчивые первичные черные дыры, скорее всего, с учетом теорем Хоукинга о черных дырах, в варианте со сверхтекучими квази-бозонами с нулевым спином.

VIII.7 Численное моделирование космологической эволюции

Итак, перейдем теперь к результатам численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (VIII.107), (VIII.108 с начальными условиями (VIII.113) и определениями плотностей энергии и скалярного заряда (VIII.99), (VIII.103) и (VIII.109). При этом, мы должны помнить замечание в разделе VIII.6.2 о перекалибровке момента времени t_0 . На представленных ниже графиках эта перекалибровка произведена, так что всюду время отсчитывается от момента космологической сингулярности в Планковской шкале времени. Все представленные на графиках величины также измеряются в Планковских единицах. Далее, коэффициентом баратропы, κ , мы будем называть отношение полного давления системы к ее полной плотности энергии:

$$\kappa = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{P}_p + \mathcal{P}_s}{\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s}. \quad (\text{VIII.140})$$

Как известно (см., например, [106]), величина инвариантного космологического ускорения Ω связана с коэффициентом баратропы κ соотношением:

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\kappa), \quad (\text{VIII.141})$$

так что ультрарелятивистскому уравнению состояния $\kappa = 1/3$ соответствует значение $\Omega = -1$; нерелятивистскому уравнению состояния $\kappa = 0$ соответствует $\Omega = -1/2$; значению $\kappa = -1/3$ соответствует $\Omega = 0$; инфляционному (вакуумному) уравнению состояния $\kappa = -1$ соответствует $\Omega = +1$, значениям $\kappa < -1$ соответствует гиперинфляция $\Omega > 1$.

Также введем важный для дальнейшего безразмерный параметр

$$\eta_s = \frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p}, \quad (\text{VIII.142})$$

равный отношению плотности энергии скалярного поля к плотности энергии фермионов.

Введем следующие характерные моменты времени, важные для понимания механизма космологической эволюции системы фермионов с фантомным скалярным полем:

1. Комптоновский момент времени по отношению к массе квантов скалярного поля:

$$t_s = \frac{1}{m_s}, \quad m_s \neq 0. \quad (\text{VIII.143})$$

VIII.7. Численное моделирование космологической эволюции

2. Для безмассового скалярного поля с источником можно определить аналогичный момент времени по отношению к эффективной массе скалярного поля. В работах [84], [111]¹¹ аналитическими методами показано, что плотность скалярного заряда σ при определенных условиях может играть роль массивного члена в уравнении скалярного поля. При этом можно ввести эффективную массу скалярного поля даже в случае $m_s = 0$:

$$m_s^* = \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\Phi}}, \quad (\text{VIII.144})$$

Поэтому, даже при нулевой массе квантов скалярного поля при наличии функции источника σ скалярное поле ведет себя во многих случаях как массивное скалярное поле с той лишь разницей, что эффективная масса (VIII.144) зависит от космологического времени $m_s^*(t)$. Соответственно эффективной массе введем комптоновский момент времени:

$$t_s^* = \frac{1}{m_s^*}, \quad m_s = 0. \quad (\text{VIII.145})$$

3. Момент времени t_η , когда становятся равными плотности энергии фермионов и скалярного поля:

$$\mathcal{E}_s(t_\eta) = \mathcal{E}_p(t_\eta) \Leftrightarrow \eta_s(t_\eta) = 1. \quad (\text{VIII.146})$$

Заметим, что таких момента времени может быть два.

4. Момент времени t_r перехода фермионов от ультрарелятивистского состояния к нерелятивистскому:

$$\psi(t_r) = 1. \quad (\text{VIII.147})$$

Далее, в графическом представлении результатов моделирования будет использована авторская функция [105]):

$$\text{Lig}(x) \equiv \text{sgn}(x) \lg(1 + |x|), \quad (\text{VIII.148})$$

необходимая для представления результатов в логарифмической шкале в тех случаях, когда отображаемая функция может менять знак. Эта при малых

¹¹а также в [112]

значениях аргумента функция совпадает со значением аргумента, а при больших значениях аргумента – с его десятичным логарифмом, взятом со знаком аргумента:

$$\text{Lig}(x) \approx \begin{cases} x, & |x| \rightarrow 0; \\ \text{sgn}(x) \ln |x|, & |x| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Эта функция является монотонно возрастающей

$$\frac{d\text{Lig}(x)}{dx} \geq 0,$$

что обеспечивает непрерывную дифференцируемость функции $\text{Lig}(x)$ и тем самым – биективность отображения (VIII.148). Обратный пересчет осуществляется по формуле:

$$x = \begin{cases} 10^{\text{Lig}(x)} - 1, & x \geq 0; \\ 1 - 10^{-\text{Lig}(x)}, & x < 0. \end{cases}$$

VIII.7.1 Случай массивного фантомного скалярного поля с минимальным взаимодействием ($\sigma = 0$)

Численное интегрирование выявило три характерные стадии космологической эволюции в этом случае:¹²

1. $t \lesssim t_s$: доминирование фермионов

Характерные особенности: Малые значений потенциала скалярного поля и его производной – влияние поля на эволюцию системы незначительно.

2. $t_s \lesssim t \lesssim t_\eta$: конкуренция фермионов и скалярного поля

Характерные особенности: Резкий рост потенциала скалярного поля и его производной в момент времени t_η (VIII.146) (Рис. 51). В этот момент времени достигают экстремума следующие функции: $\dot{\Phi}$ (максимум); коэффициент баротропы, κ , (минимум); инвариантное космологическое ускорение, Ω , (максимум); плотность полной энергии, $\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{E}_s$, (минимум). В момент пика коэффициент баротропы становится меньше -1 – фантомное уравнение состояния.

¹²Основные закономерности эволюции на ранних и поздних стадиях подтверждают приведенные выше результаты аналитического исследования.

VIII.7. Численное моделирование космологической эволюции

3. $t_\eta \lesssim t < +\infty$): доминирование скалярного поля

Характерные особенности: Производная потенциала скалярного поля стремится к константе $m_s/\sqrt{3}$; потенциал линейно возрастает; плотность энергии скалярного поля намного превосходит энергию фермионов и определяет дальнейшую эволюцию системы; коэффициент баротропии $\kappa \rightarrow -1$; инвариантное космологическое ускорение $\Omega \rightarrow 1$ – выход на инфляцию.

Ниже приведены графики численного моделирования системы со следующими параметрами:

$p_0 = 100$, $m_0 = 0.001$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-7}$. Всюду на графиках Рис. 49 – Рис. 58: жирная линия – $m_s = 10^{-2}$, тонкая линия – $m_s = 10^{-4}$, средне - пунктирная линия – $m_s = 10^{-6}$, мелко - пунктирная линия – $m_s = 10^{-8}$. Также всюду на этих графиках, как и на всех остальных, по оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма времени от момента космологической сингулярности в Планковской шкале, $\log_{10} t$.

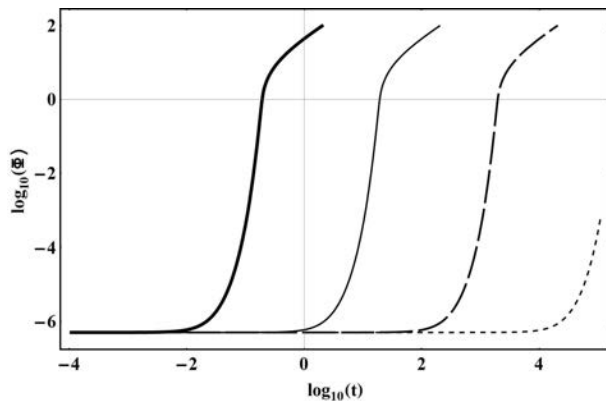


Рис. 49. Эволюция потенциала Φ . По оси ординат отложены значения десятичного логарифма скалярного потенциала, $\log_{10} \Phi$.

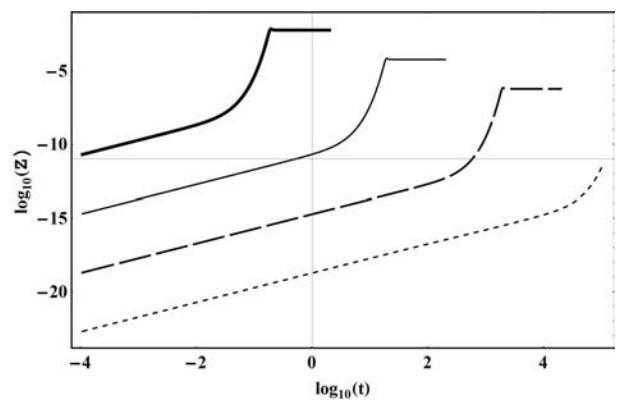


Рис. 50. Эволюция производной потенциала $Z = \dot{\Phi}$. По оси ординат отложены значения десятичного логарифма скалярного потенциала, $\log_{10} \Phi$.

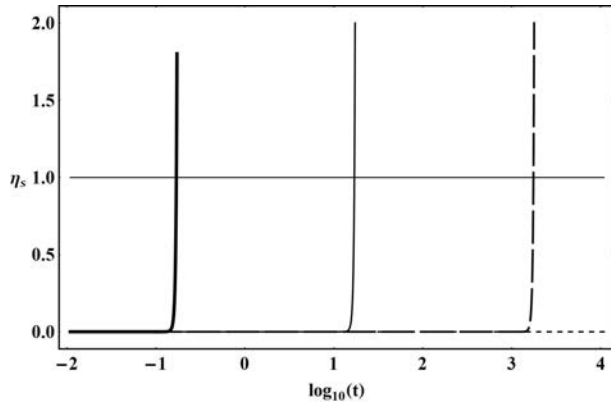


Рис. 51. Эволюция отношения плотностей энергии скалярного поля и фермионов η_s .

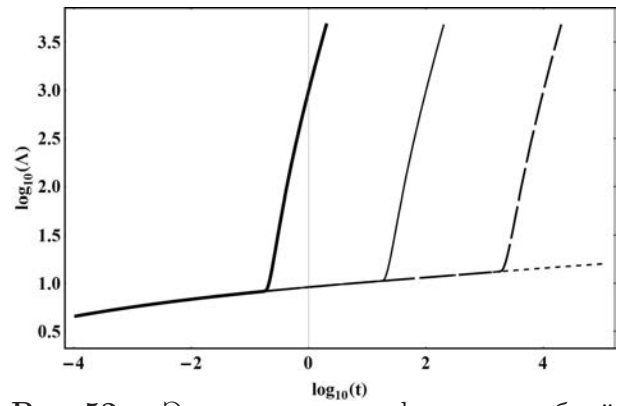


Рис. 52. Эволюция логарифма масштабной функции $\Lambda(t) = \exp a(t)$. По оси ординат отложены значения значения десятичного логарифма, $\log_{10} \Lambda$, т.е., $\log_{10}(\ln a(t))$.

Ниже, на фазовой диаграмме Рис. 57, можно отчетливо увидеть все три вышеуказанные стадии космологической эволюции. Далее, на Рис. 51 можно увидеть моменты космологического времени t_η , в которые $\eta_s(t_\eta) = 1$. Сравнение с Рис. 50 показывает, что момент времени t_η соответствует экстремуму производной потенциала скалярного поля, Z .

На Рис. 53 – 55 показаны графики эволюции коэффициента баратропы $\kappa(t)$ и связанным с ним инвариантным космологическим ускорением $\Omega(t)$. Эти всплески возникают именно в моменты времени t_η .

Как видно из графиков на Рис. 54, всплескам предшествует ультрарелятивистский режим расширения, который после всплеска сменяется инфляцией. На Рис. 55 показана детальная структура всплеска космологического ускорения. Этот рисунок наглядно демонстрирует, что всплеск не является компьютерным фантомом.

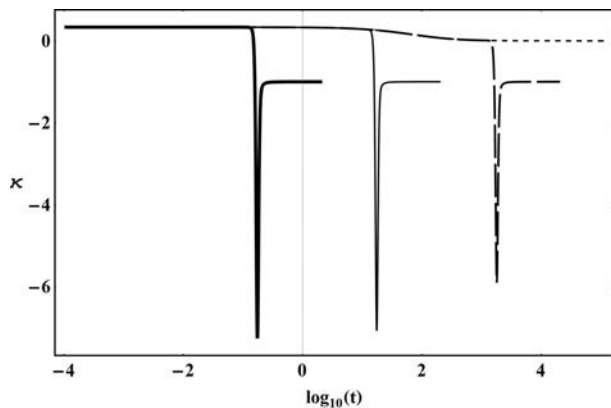


Рис. 53. Эволюция коэффициента баратропы κ .

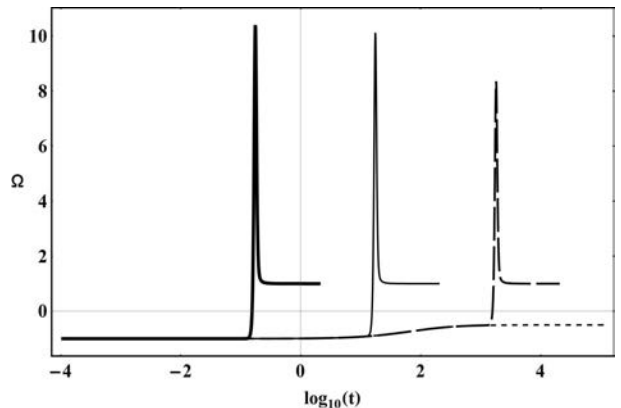


Рис. 54. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

VIII.7. Численное моделирование космологической эволюции

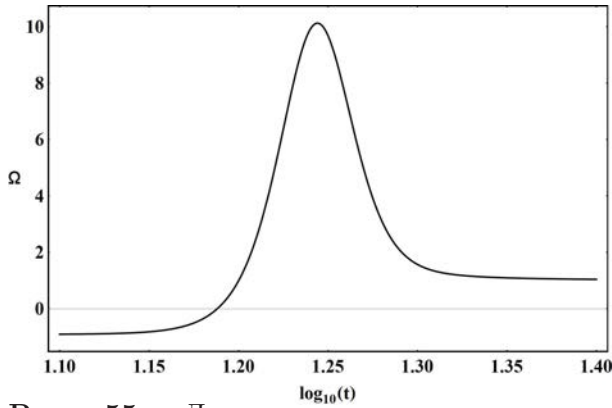


Рис. 55. Детальная структура второго фантомного всплеска инвариантного космологического ускорения Ω на Рис. 54: $p_0 = 100$, $m_0 = 0.001$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-7}$, $m_s = 10^{-4}$.

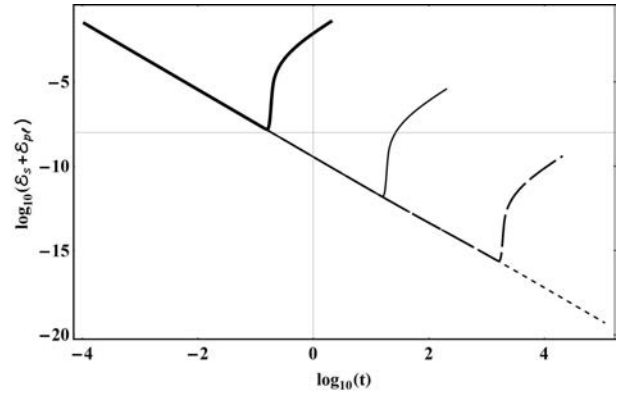


Рис. 56. Эволюция логарифма суммарной плотности энергии $\log_{10} \mathcal{E}$.

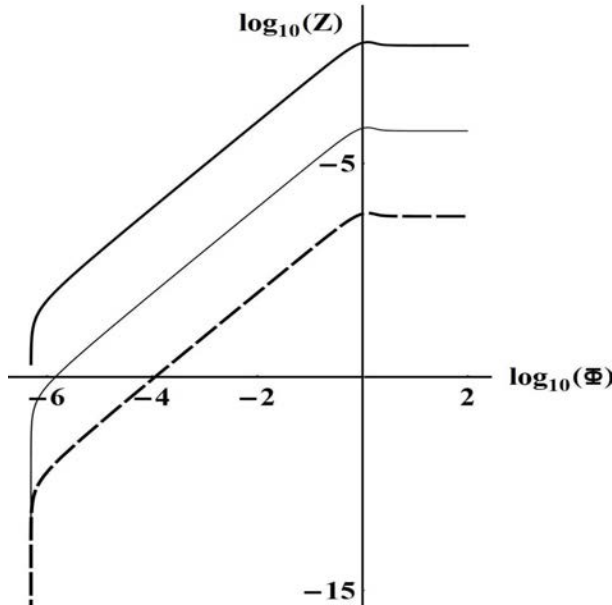


Рис. 57. Фазовый портрет. Левые вертикальные ветви графиков соответствуют первой стадии эволюции системы, наклонные части – второй стадии, горизонтальные правые ветви – третьей стадии.

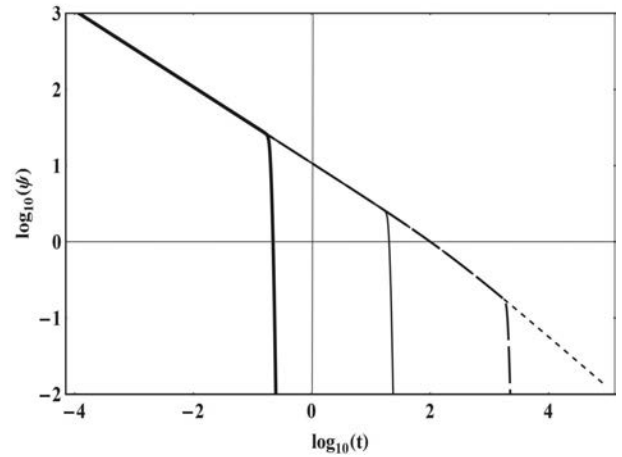


Рис. 58. Эволюция функции $\psi = p_f/m_*$. Горизонтальная линия соответствует значению $\log_{10} \psi = 0 \rightarrow \psi = 1$, т.е., переходу с ультрарелятивистского уравнения состояния фермионов на нерелятивистское.

VIII.7.2 Случай безмассового ($m_s = 0$) фантомного скалярного поля с источником

В этом случае система дифференциальных уравнений примет вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\dot{\Lambda}\dot{\Phi} - 4\pi\sigma = 0; \quad (\text{VIII.149})$$

$$\dot{\Lambda}^2 = \frac{8\pi}{3}(\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s), \quad (\text{VIII.150})$$

где плотность энергии скалярного поля равна

$$\mathcal{E}_s = -\frac{\dot{\Phi}^2}{8\pi}. \quad (\text{VIII.151})$$

и может быть только отрицательной, причем в начальный момент времени $t = 0$ она равна нулю. В результате, космологический сценарий для массивного скалярного поля раздела VIII.7.1 изменился, в нем по-прежнему присутствуют три стадии, но на последней стадии доминируют фермионы:

1. $t \lesssim t_s^*$: доминирование ультррелятивистских фермионов.

Характерные особенности: малые значения потенциала скалярного поля и его производной – вклад поля в эволюцию системы незначителен.

2. $t_s^* < t \lesssim t_r$: доминирование скалярного поля.

Характерные особенности: Резкий рост потенциала скалярного поля и его производной, максимальное влияние скалярного поля на эволюцию системы. В момент времени перехода фермионов от релятивистского состояния к нерелятивистскому, t_r , плотность скалярного заряда достигает максимума, в этот момент достигают экстремума функции: $Z = \dot{\Phi}$ (максимум); коэффициент баротропы, κ , (минимум); инвариантное космологическое ускорение, Ω , (максимум); плотность полной энергии, $\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s$, (максимум). В момент пика коэффициент баротропы в зависимости от параметров системы может становиться меньше -1 – фантомное уравнение состояния и инфляция. Следует отметить важный факт: на этом этапе вклад фермионов в плотность энергии незначителен, но именно фермионы управляют скалярным полем с помощью скалярной плотности зарядов σ . В этом смысле можно провести аналогию между фермионами и катализаторами химических реакций.

3. $t_r < t < +\infty$): доминирование нерелятивистских фермионов

Характерные особенности: Плотность скалярного заряда падает, при этом влияние на космологическую эволюцию скалярного поля становится исчезающе малым. Производная потенциала скалярного поля стремится к нулю ($m_s^* \rightarrow 0$), потенциал стремиться к постоянному значению; нерелятивистские фермионы определяют дальнейшую эволюцию системы, коэффициент баротропы $\kappa \rightarrow 0$ ¹³.

¹³Таким образом, рассмотренный случай показывает, что данная модель может снять проблему оста-

VIII.7. Численное моделирование космологической эволюции

На приведенных ниже графиках (Рис. 59 – 66) представлены результаты численного моделирования космологической эволюции системы вырожденных фермионов с безмассовым фантомным скалярным полем. Вюду на указанных графиках приняты следующие значения параметров:

$p_0 = 0.01$, $m_0 = 0$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-7}$. Жирная линия – $q = 0.01$, тонкая линия – $q = 0.1$, средне - пунктирная линия – $q = 1$, мелко - пунктирная линия – $q = 5$.

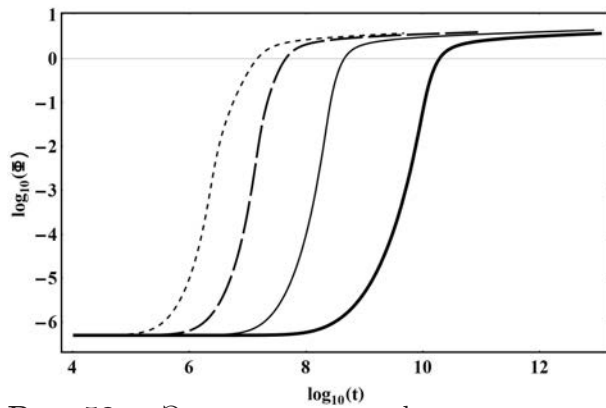


Рис. 59. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

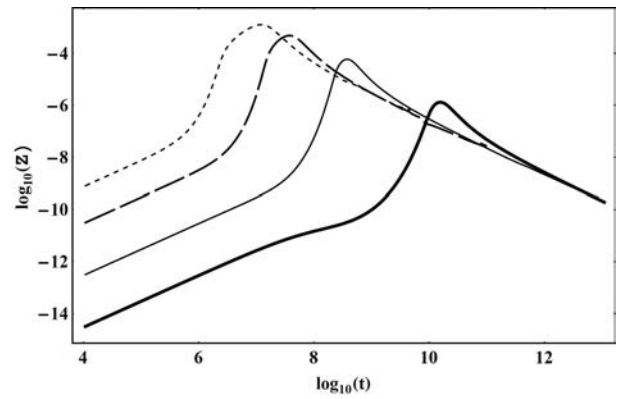


Рис. 60. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

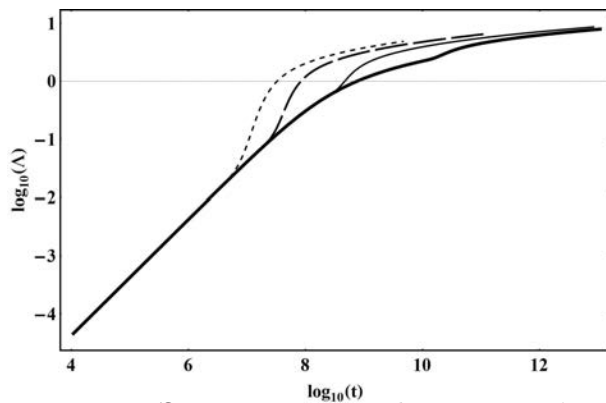


Рис. 61. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

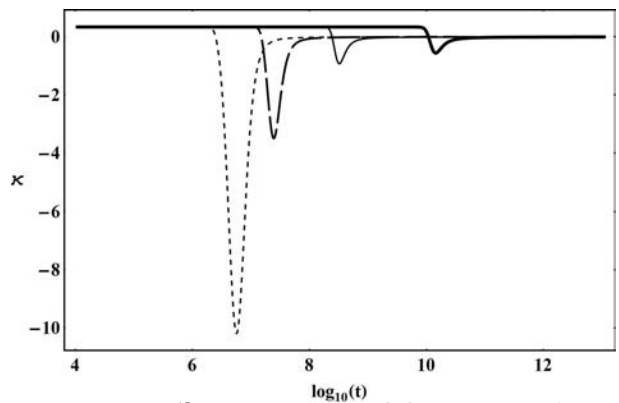


Рис. 62. Эволюция коэффициента баротропии κ .

новки ранней инфляции и тем самым – обеспечить необходимый для образования структуры нерелятивистский этап эволюции вселенной.

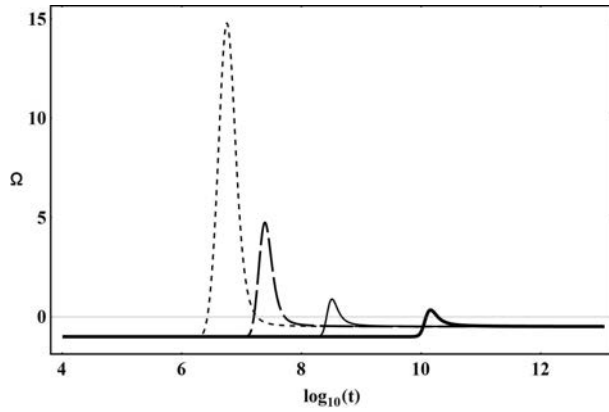


Рис. 63. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

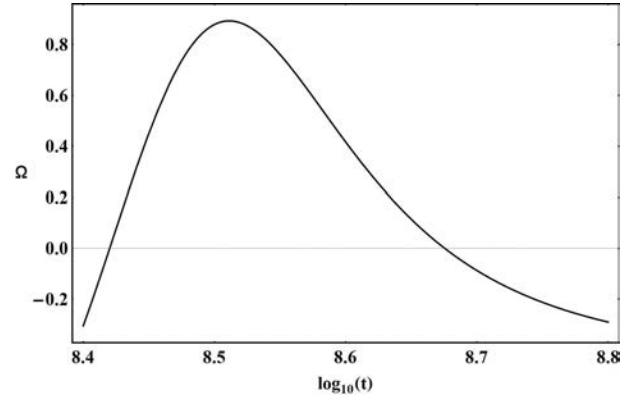


Рис. 64. Детальная структура третьего фантомного всплеска инвариантного космологического ускорения на фигуре Рис. 63: Ω ; $q = 1$.

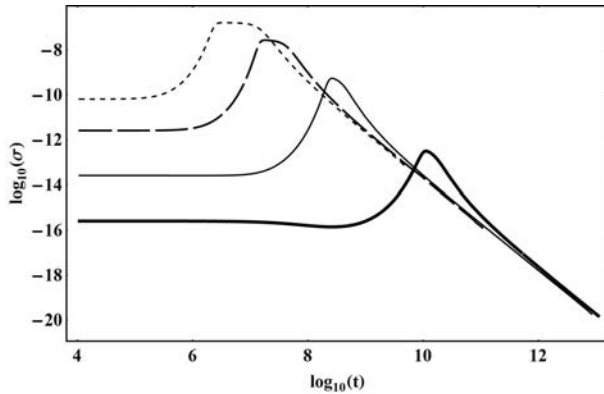


Рис. 65. Эволюция логарифма плотности скалярного заряда $\log_{10} \sigma$.

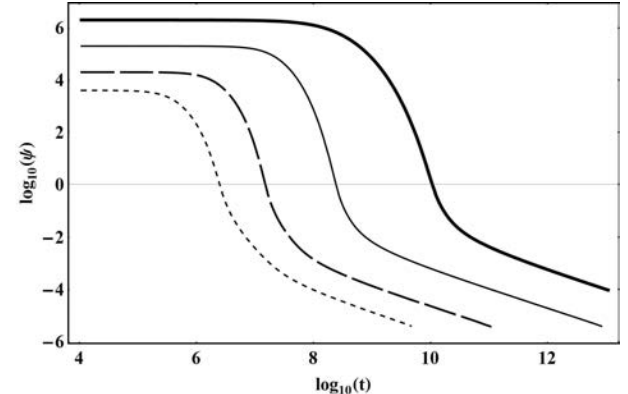


Рис. 66. Эволюция логарифма функции $\psi = p_0/m_* a$

VIII.7.3 Случай массивного фантомного скалярного поля ($m_s \neq 0$) с источником ($\sigma \neq 0$)

В этом, наиболее общем случае, нам необходимо решать систему обыкновенных дифференциальных уравнений (VIII.110), (VIII.111) и (VIII.112) с начальными условиями (VIII.113) с учетом определений (VIII.99) – (VIII.103) и (VIII.109). Ниже (Рис. 67 – 74) представлены результаты численного интегрирования системы со следующими параметрами: $p_0 = 0.01$, $m_0 = 0.001$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-7}$. Жирная линия – $m_s = 10^{-4}$, $q = 0$; тонкая линия – $m_s = 10^{-4}$, $q = 0.1$; мелко пунктирная линия – $m_s = 0$, $q = 0.01$.

VIII.7. Численное моделирование космологической эволюции

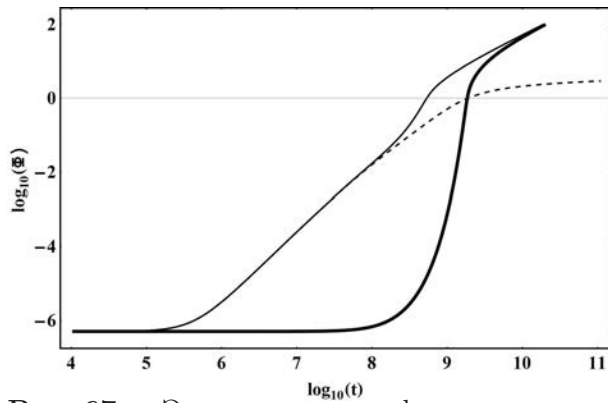


Рис. 67. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

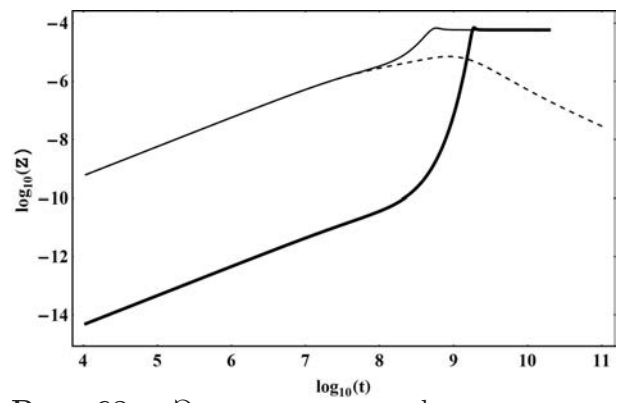


Рис. 68. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

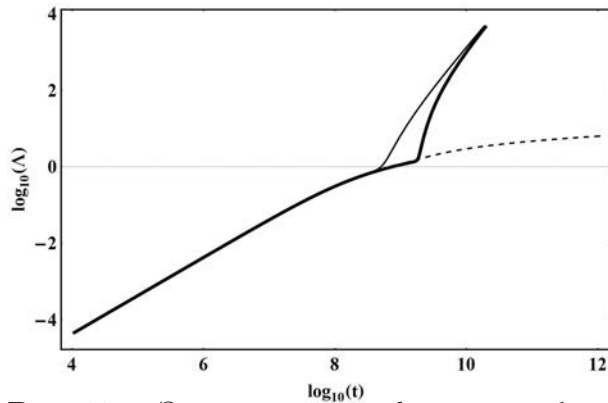


Рис. 69. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

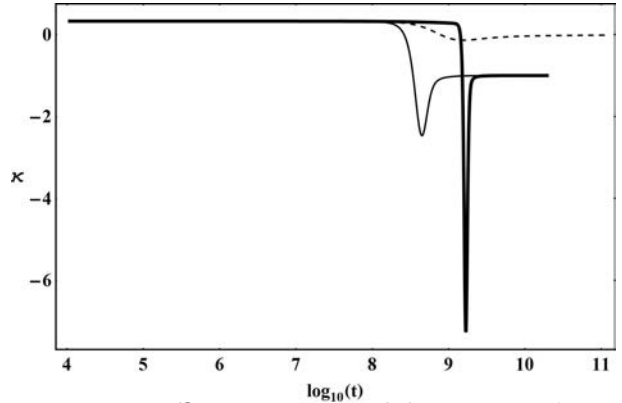


Рис. 70. Эволюция коэффициента баротропии κ .

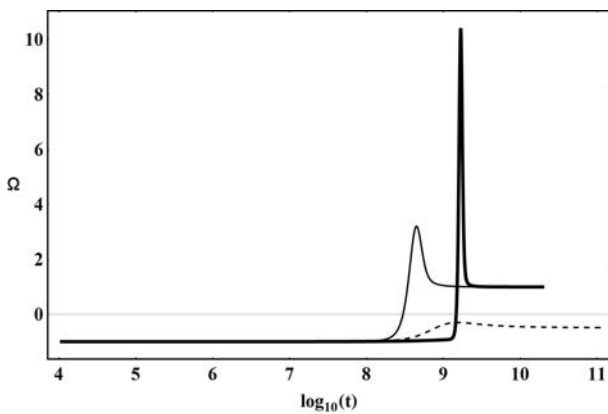


Рис. 71. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

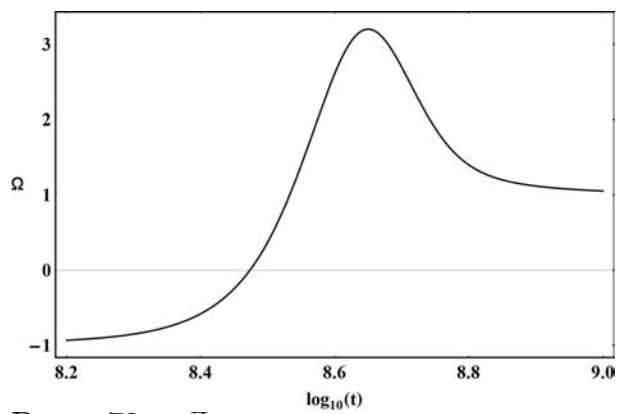


Рис. 72. Детальная структура первого фантомного всплеска инвариантного космологического ускорения на Рис. 71: Ω ; $m_s = 10^{-4}$, $q = 0.1$.

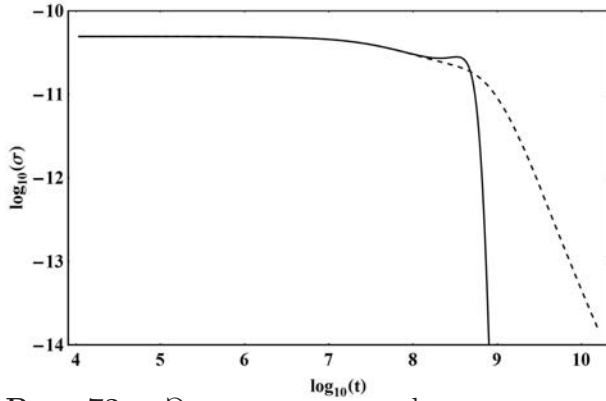


Рис. 73. Эволюция логарифма плотности скалярного заряда $\log_{10} \sigma$.

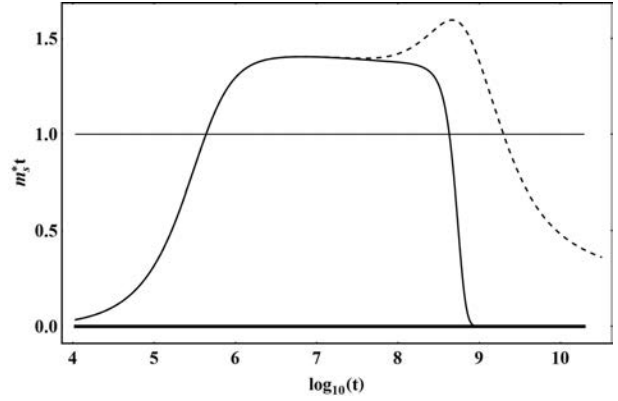


Рис. 74. График функции $m_s^* t$

VIII.8 Характерные примеры случая массивного фантомного скалярного поля ($m_s \neq 0$) с источником ($\sigma \neq 0$)

VIII.8.1 Случай перехода от релятивистской стадии к инфляции через нерелятивистское плато

При малых значениях m_s переход к инфляционной стадии отодвигается на поздние времена и ферми - система успевает к этому моменту стать нерелятивистской. На графике коэффициента баротропии появляется характерное нерелятивистское плато ($\kappa = 0$) перед фантомным всплеском. При увеличении m_s всплеск сдвигается к малым временам, обрезая плато вплоть до его полного исчезновения. В этом случае происходит переход от релятивистской стадии к инфляции через фантомный всплеск.

Приведем графики численного моделирования системы со следующими параметрами:

$p_0 = 1$, $m_0 = 0.1$, $q = 0.001$, $\Phi(0) = 0.05$. Жирная линия – $m_s = 10^{-8}$, тонкая линия – $m_s = 10^{-6}$, средне - пунктирная линия – $m_s = 10^{-3}$, мелко - пунктирная линия – $m_s = 10^{-1}$.

VIII.8. Примеры случая массивного фантомного скалярного поля с источником

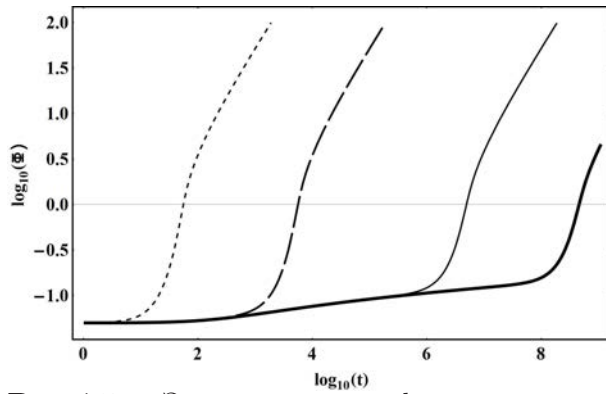


Рис. 75. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

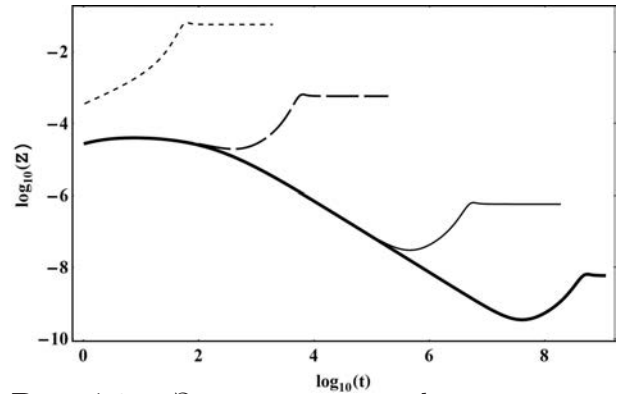


Рис. 76. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

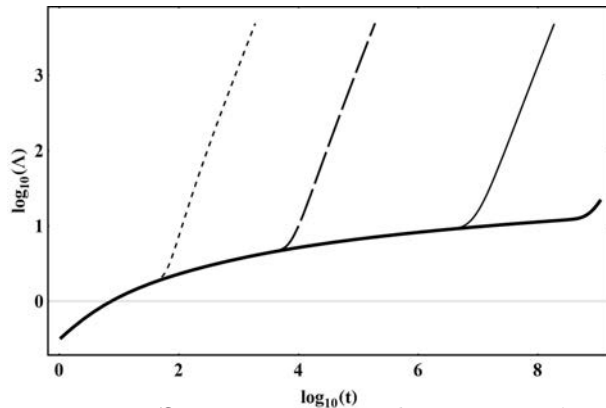


Рис. 77. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

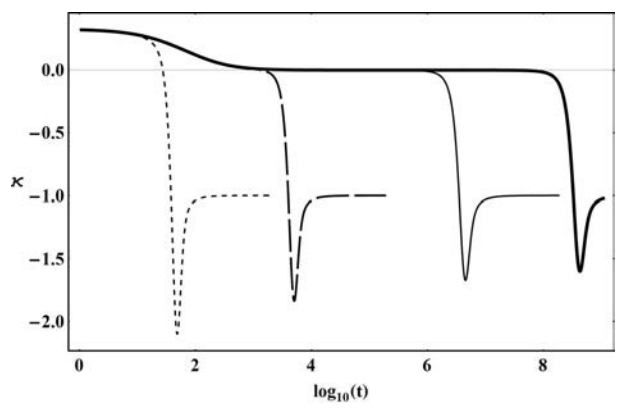


Рис. 78. Эволюция коэффициента баротропии κ .

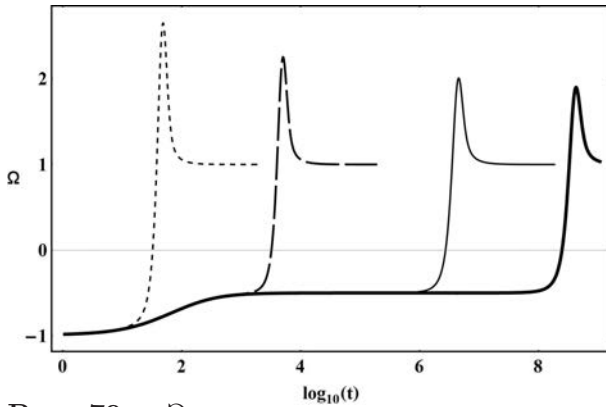


Рис. 79. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

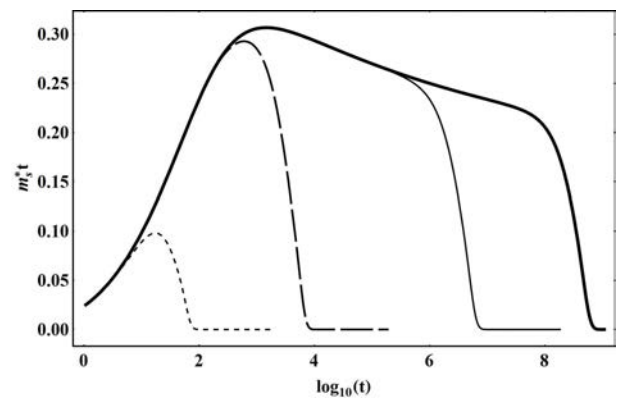


Рис. 80. Эволюция функции $m_s^* t$

VIII.8.2 Случай двух стадий ускорения с промежуточной нерелятивистской стадией

При определенных значениях параметров системы можно наблюдать две стадии ускорения: первая – временное доминирование скалярного поля за счет достаточно больших значений эффективной массы скалярного поля m_s^* на

соответствующих временах ($m_s^* t > 1$) и вторая – устойчивое доминирование скалярного поля на временах $m_s t > 1$. Между инфляционными стадиями может возникать нерелятивистское плато ($\kappa = 0$, $\Omega = -1/2$).

VIII.8.2.1 Зависимость от скалярного заряда

Меняя значение скалярного заряда q при постоянном значении массы скалярного поля m_s , можно наблюдать сдвиг первого инфляционного всплеска и соответствующее изменение длительности нерелятивистской стадии.

Приведем графики численного моделирования системы со следующими параметрами:

$p_0 = 1$, $m = 0$, $m_s = 10^{-8}$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-8}$. Жирная линия – $q = 1$, тонкая линия – $q = 0.1$, средне - пунктирная линия – $q = 0.01$, мелко - пунктирная линия – $q = 0.001$.

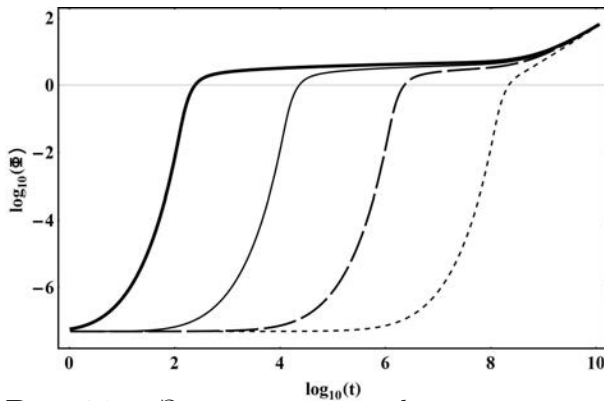


Рис. 81. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

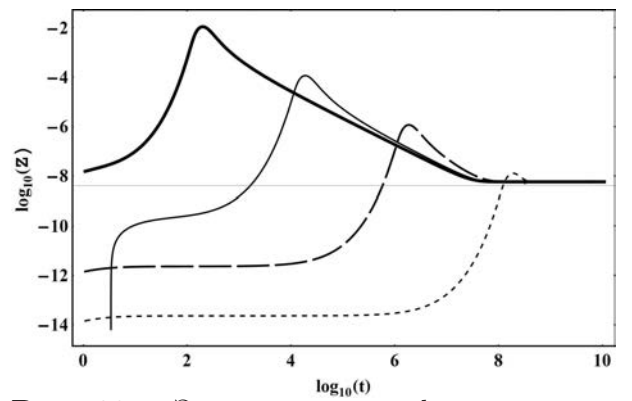


Рис. 82. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

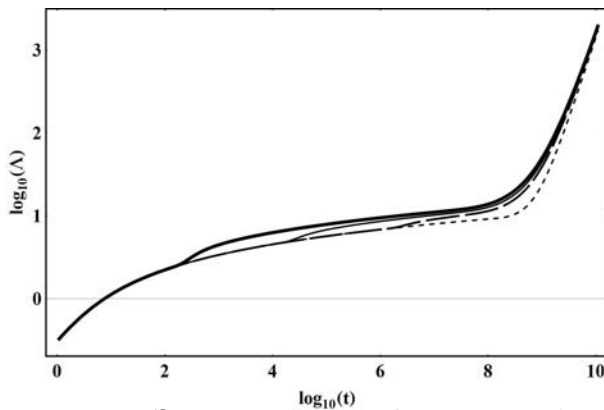


Рис. 83. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

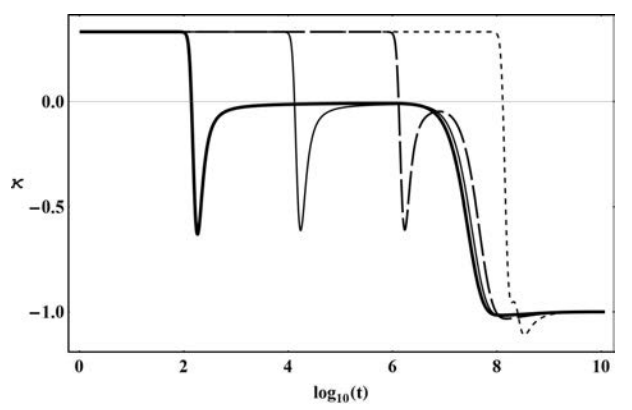


Рис. 84. Эволюция коэффициента баротропии κ .

VIII.8. Примеры случая массивного фантомного скалярного поля с источником

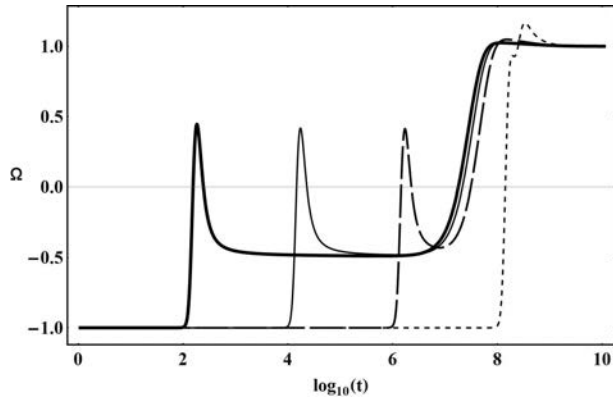


Рис. 85. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

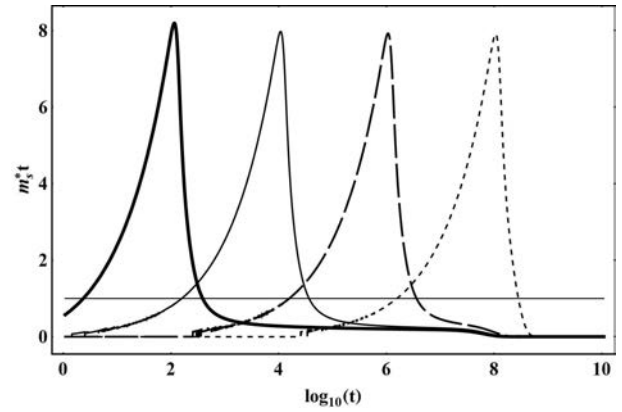


Рис. 86. График функции $m_s^* t$

VIII.8.2.2 Зависимость космологической эволюции от начального значения потенциала скалярного поля

Меняя начальное значение потенциала скалярного поля Φ_0 , можно наблюдать сдвиг первой инфляционной стадии и изменение амплитуды всплеска космологического ускорения.

Малые начальные значения потенциала скалярного поля $\Phi_0 = 10^{-4} \div 10^{-14}$. Приведем графики численного моделирования системы со следующими параметрами:

$p_0 = 1$, $m = 0$, $m_s = 10^{-8}$, $q = 1$. Жирная линия – $\Phi(0) = 10^{-4}$, тонкая линия – $\Phi(0) = 10^{-8}$, средне пунктирная линия – $\Phi(0) = 10^{-14}$, мелко пунктирная линия – $\Phi(0) = 10^{-20}$.

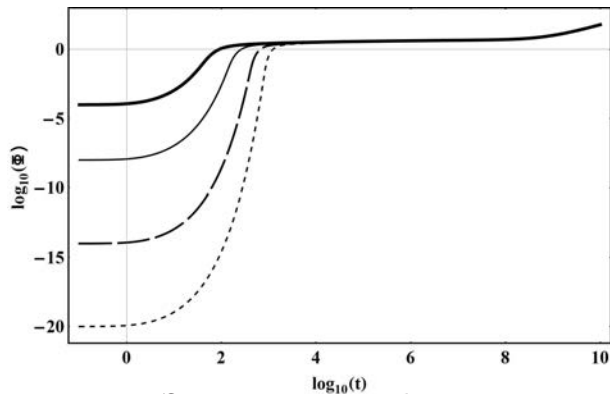


Рис. 87. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

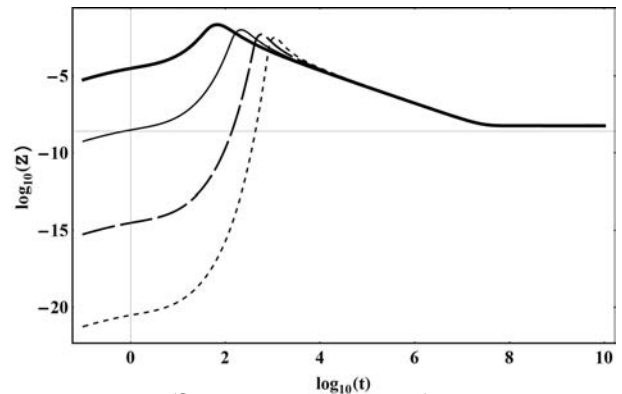


Рис. 88. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

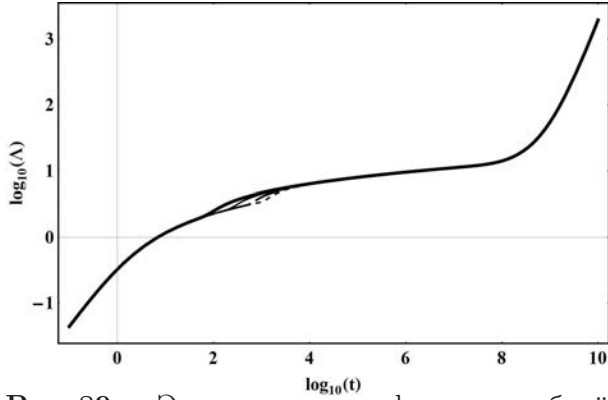


Рис. 89. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

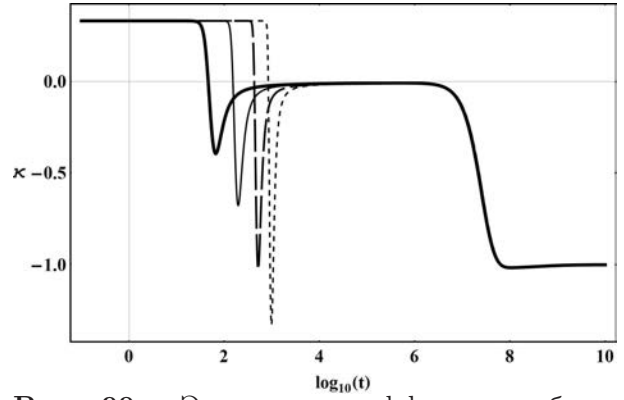


Рис. 90. Эволюция коэффициента баротропы κ .

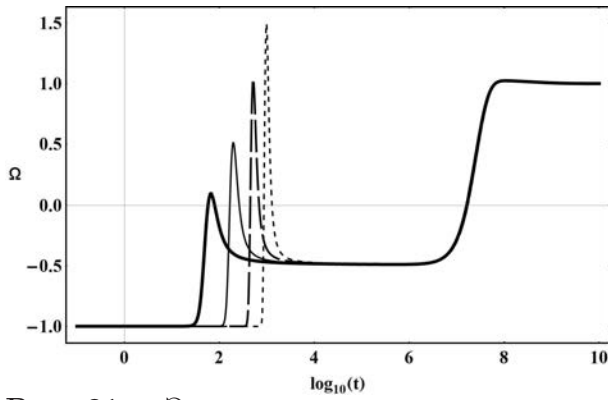


Рис. 91. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

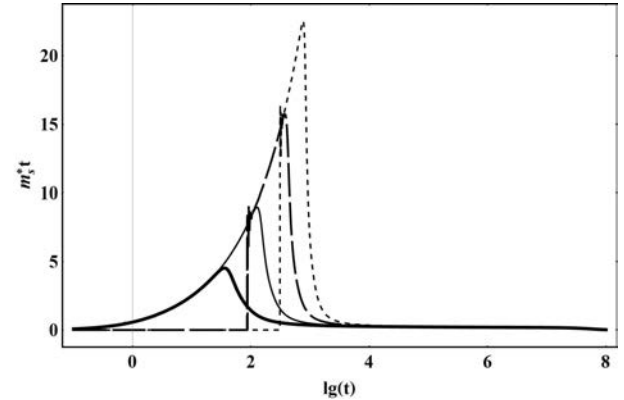


Рис. 92. График функции $m_s^* t$

Еще меньшие начальные значения потенциала скалярного поля $\Phi_0 = 10^{-50} \div 10^{-300}$.

Приведем графики численного моделирования системы со следующими параметрами: $p_0 = 0.1$, $m = 0$, $m_s = 10^{-10}$, $q = 5$. Жирная черная линия – $\Phi(0) = 10^{-50}$, тонкая черная линия – $\Phi(0) = 10^{-150}$, средне пунктирная линия – $\Phi(0) = 10^{-250}$, мелко пунктирная линия – $\Phi(0) = 10^{-300}$.

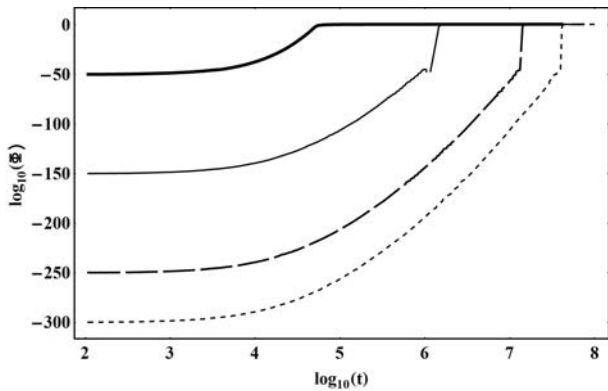


Рис. 93. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

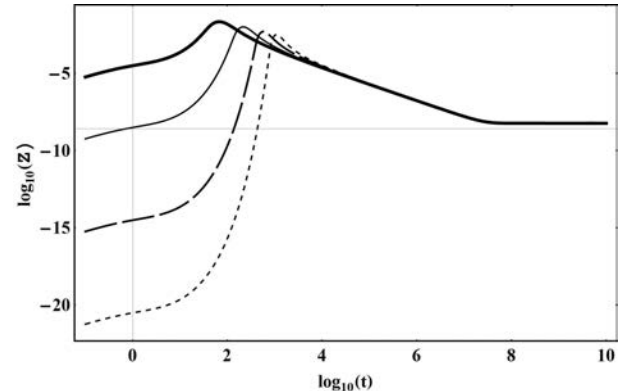


Рис. 94. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

VIII.9. Космологическая эволюция термодинамических величин

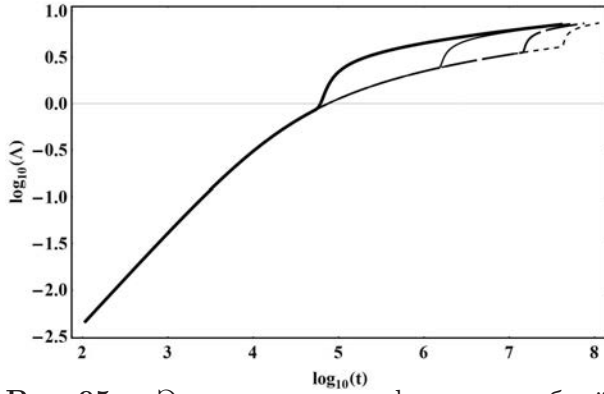


Рис. 95. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

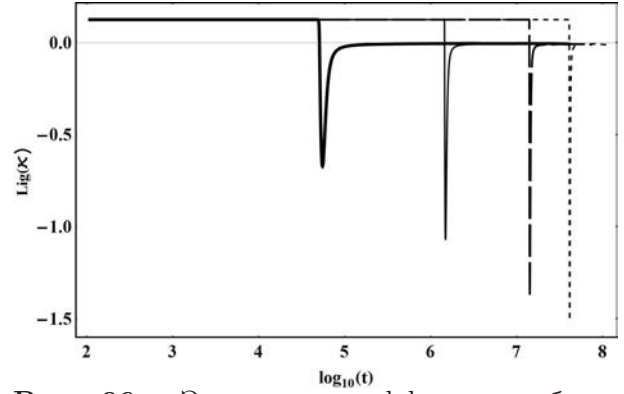


Рис. 96. Эволюция коэффициента баротропы κ .

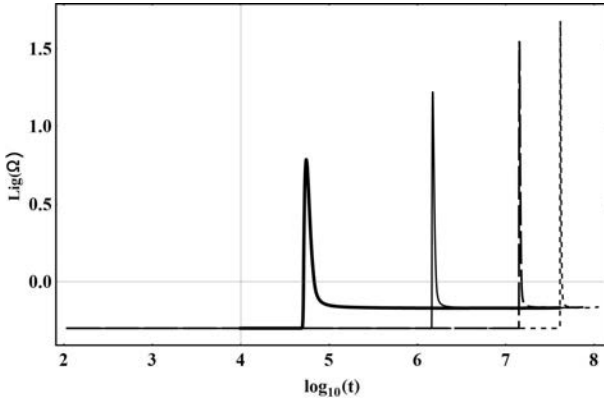


Рис. 97. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

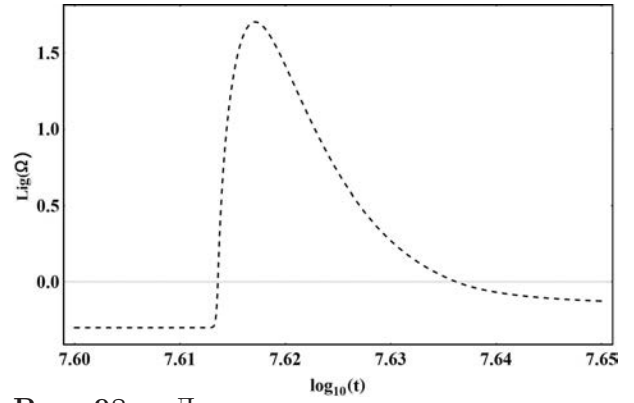


Рис. 98. Детальная структура четвертого фантомного всплеска инвариантного космологического ускорения на Рис. 97

VIII.9 Космологическая эволюция термодинамических величин

Исследуем теперь влияние тепловых поправок на космологическую эволюцию почти вырожденной Ферми - системы с фантомным скалярным взаимодействием. В этом случае в уравнениях поля и уравнении Эйнштейна (VIII.110) – (VIII.112) вместо выражений (VIII.99) – (VIII.103) для макроскопических скаляров полностью вырожденной Ферми - системы необходимо использовать выражения для макроскопических скаляров почти вырожденной Ферми - системы (VIII.75) – (VIII.77). К начальным данным задачи Коши добавится еще и начальное значение обратной температуры $\lambda = m_*/\theta$.

$$\begin{aligned} \Lambda(0) = 0; \quad p_f(0) = p_0; \quad \lambda(0) = \lambda_0; \\ \Phi(0) = \Phi_0; \quad (0) = Z_0. \end{aligned} \tag{VIII.152}$$

При этом безразмерный химический потенциал γ определяется с помощью двух безразмерных функций $\lambda = m_*/\theta$ (VIII.73) и $\psi = p_f/m_*$ (VIII.59) как $\gamma = \lambda\sqrt{1 + \psi^2}$.

Таким образом для определения четырех неизвестных скалярных функций $\Lambda(t)$, Φ , $Z(t)$, ψ , λ имеем полностью определенную систему пяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\Delta\dot{n} + 3\dot{\Lambda}\Delta n = 0; \quad (\text{VIII.153})$$

$$\dot{\Phi} = Z; \quad (\text{VIII.154})$$

$$\dot{Z} = -3\dot{\Lambda}Z + m^2\Phi + 4\pi\sigma(\Lambda, \Phi); \quad (\text{VIII.155})$$

$$\dot{\Lambda} = 8\pi\mathcal{E}_p - Z^2 + m_s^2\Phi^2; \quad (\text{VIII.156})$$

$$\dot{\mathcal{E}}_p + 3\dot{\Lambda}(\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) = \sigma\dot{\Phi}. \quad (\text{VIII.157})$$

Перейдем к результатам численного интегрирования этой системы.

VIII.9.1 Случай безмассового фантомного скалярного поля ($m_s = 0$) с источником $\sigma \neq 0$

На Рис. 99 – 107 приведены результаты численного моделирования системы со следующими параметрами:

$$\lambda_0 = 10^{-6}; \quad \Phi(0) = 5 \cdot 10^{-7}; \quad q = 0.01; \quad \psi_0 = 2 \cdot 10^6.$$

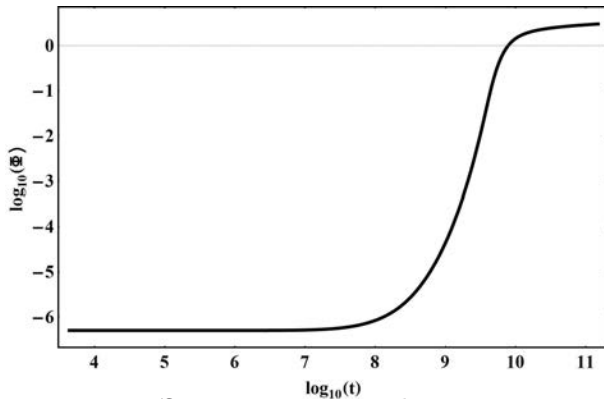


Рис. 99. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

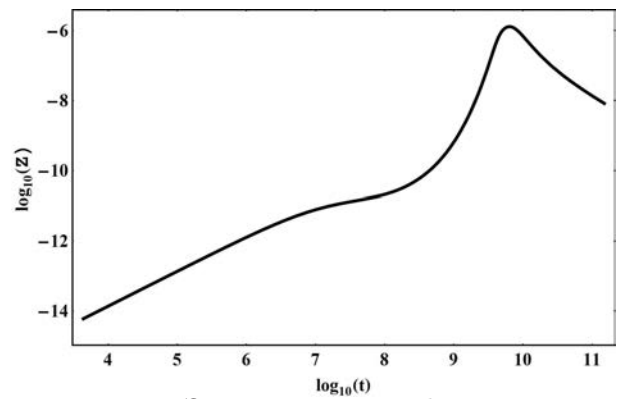


Рис. 100. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

VIII.9. Космологическая эволюция термодинамических величин

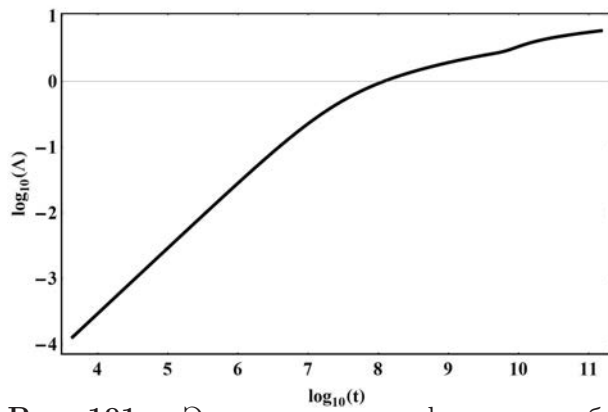


Рис. 101. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

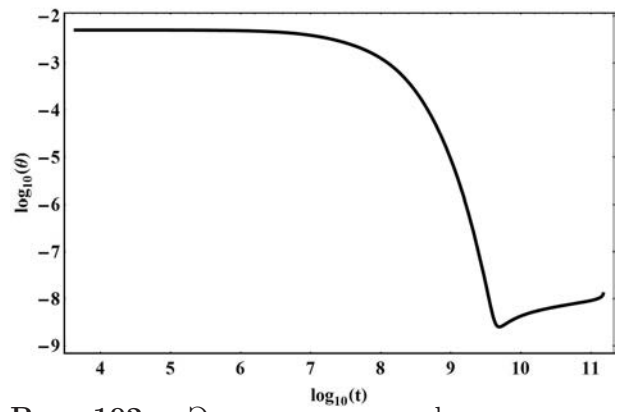


Рис. 102. Эволюция логарифма температуры $\log_{10} \theta(t)$.

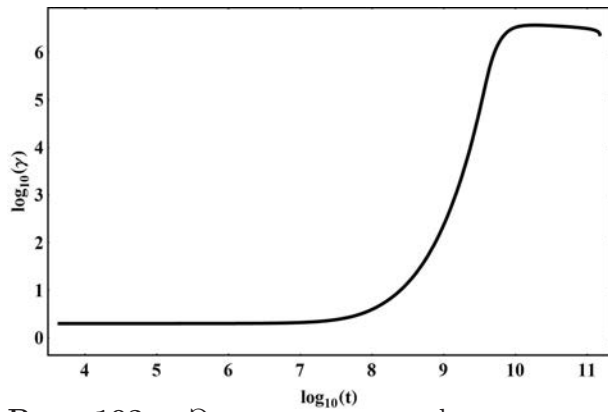


Рис. 103. Эволюция логарифма химического потенциала $\log_{10} \mu(t)$.

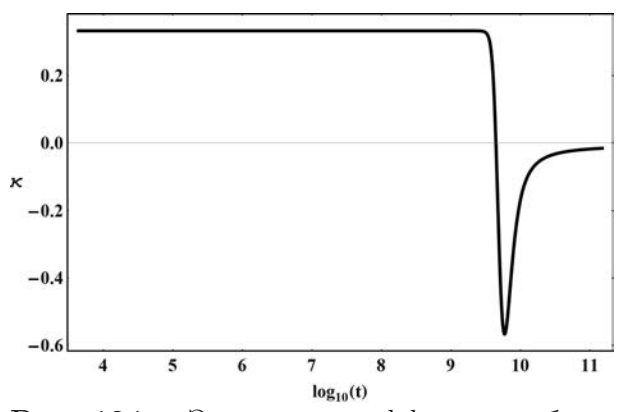


Рис. 104. Эволюция коэффициента баротропы κ .

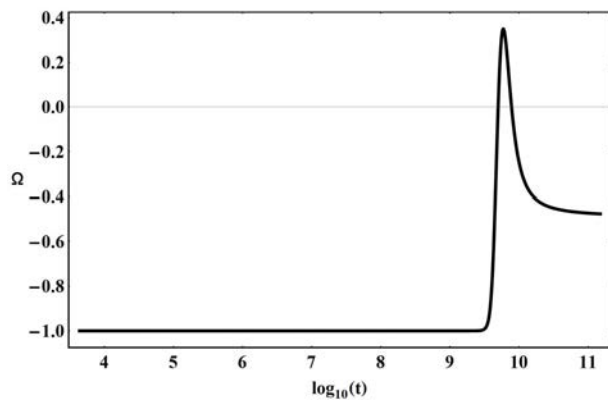


Рис. 105. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

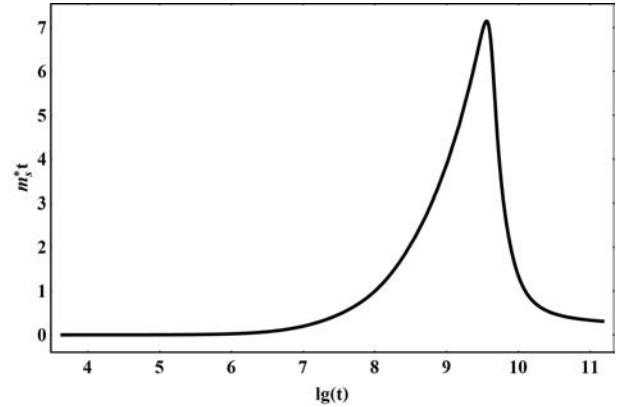


Рис. 106. График функции $m_s^* t$

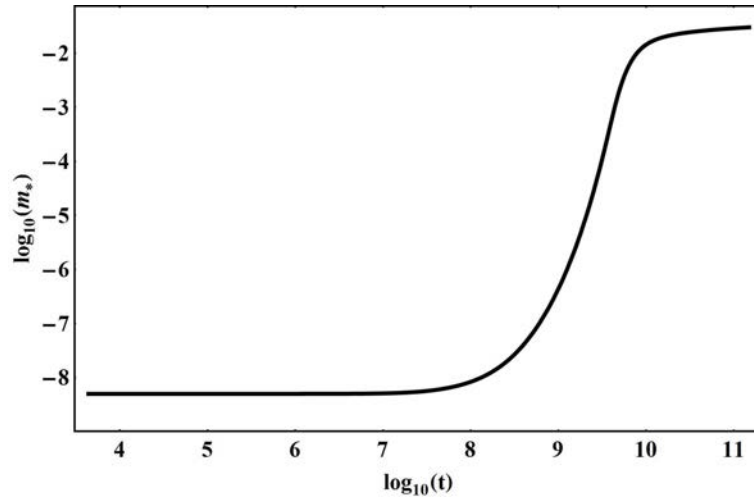


Рис. 107. Эволюция логарифма эффективной массы $\log_{10} m_*$.

На приведенных выше графиках можно обнаружить следующие закономерности:

1. На этапе роста $Z = \dot{\Phi}$ ($t > 10^8$) наблюдается одновременный рост химического потенциала μ и падение температуры θ
2. С момента максимума Z и одновременного максимума ускорения Ω и эффективной массы скалярного поля m_s^* ($t \approx 3 \cdot 10^9$) химический потенциал становится приблизительно постоянным, а температура начинает расти, все-таки, оставаясь малой.
3. Таким образом, в целом, степень вырождения Ферми - системы растет со временем.

VIII.9.2 Случай массивного фантомного скалярного поля ($m_s \neq 0$) с источником $\sigma \neq 0$

На Рис. 108 – 115 приведены результаты численного моделирования системы со следующими параметрами: $m_s = 10^{-6}$, $\lambda_0 = 10^{-7}$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-8}$. Жирная линия – $q = 1$, $\psi_0 = 2 \cdot 10^7$; тонкая линия – $q = 0.1$, $\psi_0 = 2 \cdot 10^8$; средне - пунктирная линия – $q = 0.01$, $\psi_0 = 2 \cdot 10^9$; мелко - пунктирная линия – $q = 0.001$, $\psi_0 = 2 \cdot 10^{10}$.

VIII.9. Космологическая эволюция термодинамических величин

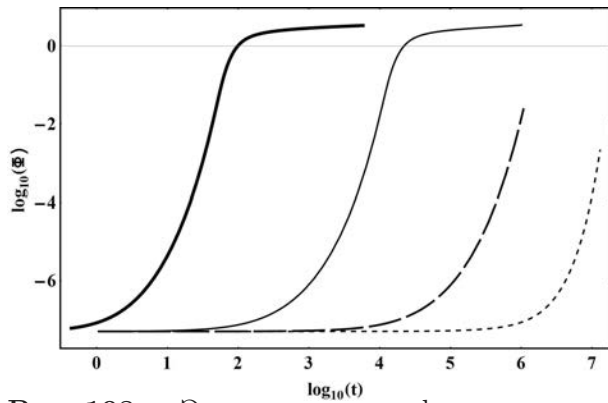


Рис. 108. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

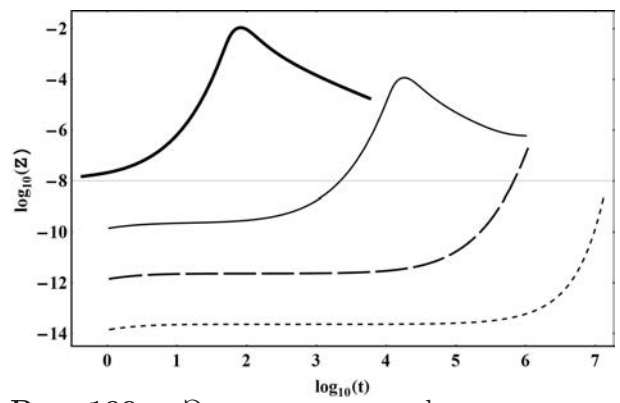


Рис. 109. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

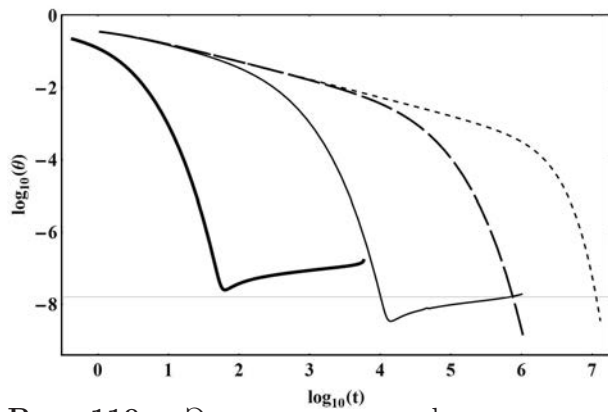


Рис. 110. Эволюция логарифма температуры $\log_{10} \theta(t)$.

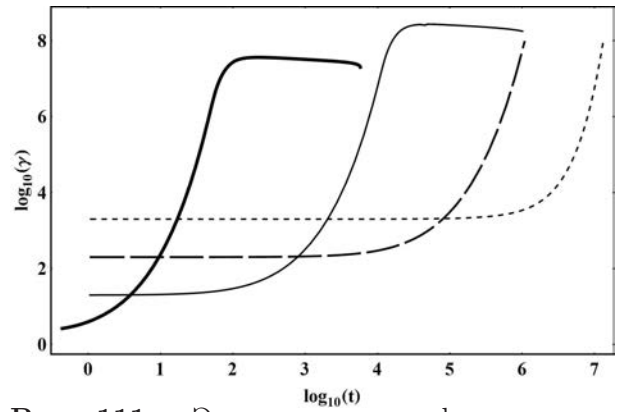


Рис. 111. Эволюция логарифма химического потенциала $\log_{10} \mu(t)$.

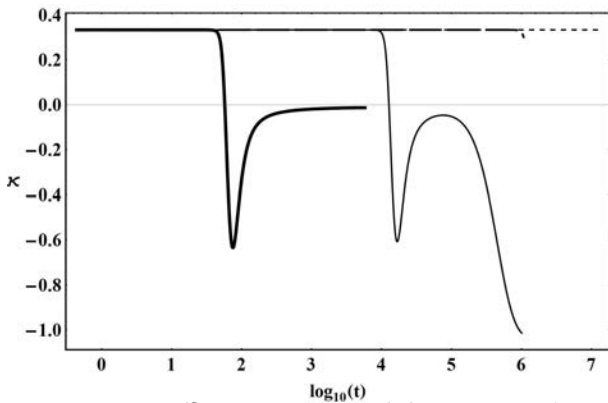


Рис. 112. Эволюция коэффициента баротропы κ .

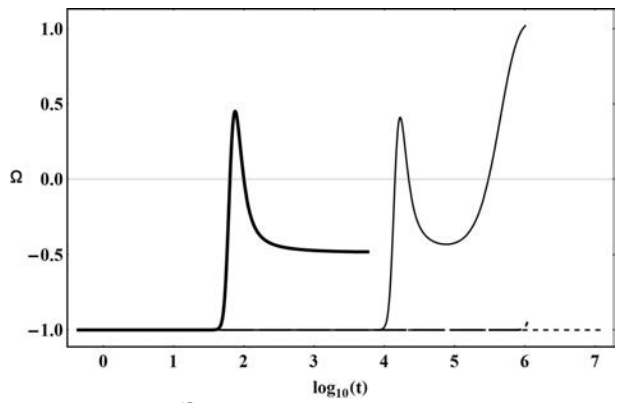


Рис. 113. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

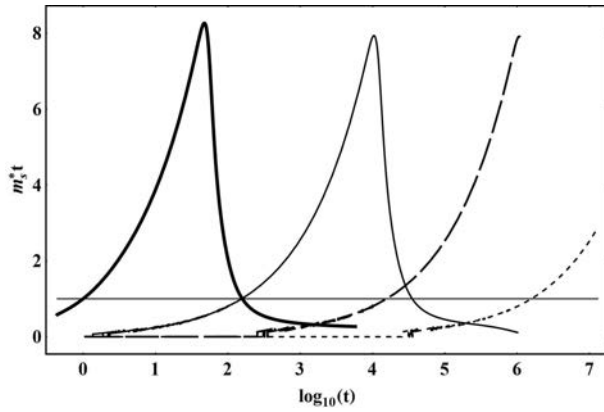


Рис. 114. График функции $m_s^* t$

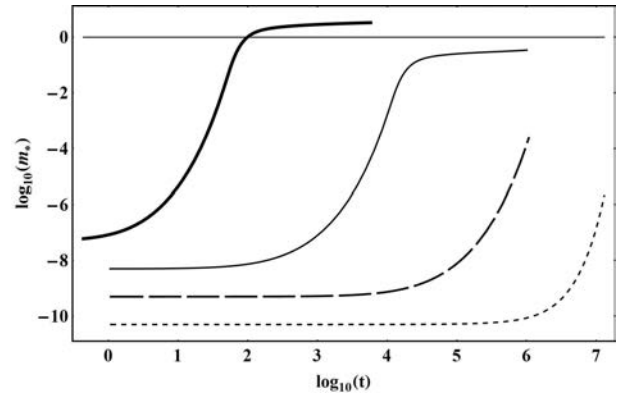


Рис. 115. Эволюция логарифма эффективной массы $\log_{10} m_*$.

Обсуждение результатов

Таким образом, проведенные исследования выявили следующие закономерности космологической эволюции статистических систем фермионов с фантомным скалярным взаимодействием.

1. В процессе космологической эволюции в таких системах обязательно возникают всплески ускорения Ω , которые можно охарактеризовать тремя параметрами: моментом времени максимума всплеска t_m , полушириной всплеска Δt и высотой h всплеска в максимуме.
2. Статистические системы фермионов с фантомным скалярным взаимодействием обнаруживают тенденцию к образованию устойчивых режимов с постоянным ускорением (этапов космологической эволюции) $\Omega = -1$ ($\kappa = 1/3$, ультрарелятивистское состояние), $\Omega = -1/2$ ($\kappa = 0$, нерелятивистское состояние) и $\Omega = 1$ ($\kappa = -1$, инфляционное, вакуумное состояние).
3. Динамические особенности статистических систем с фантомным скалярным взаимодействием слабо зависят от типа статистики систем частиц [106].
4. Четко выявляются 4 различных типа принципиально различных космологических сценариев для статистических систем частиц с фантомным скалярным взаимодействием в зависимости от параметров системы (фундаментальных констант и начальных условий):

VIII.9. Космологическая эволюция термодинамических величин

- 1-й тип. Ультррелятивистский старт \rightarrow всплеск ускорения \rightarrow инфляционная стадия (Рис. 116). Этот сценарий осуществляется для случая минимального взаимодействия ($\sigma = 0 \rightarrow q = 0$) массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$).

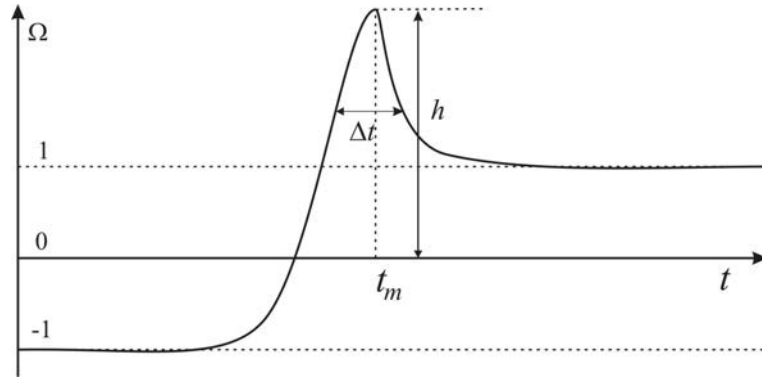


Рис. 116. Первый тип космологического сценария.

Этому сценарию отвечают следующие характерные параметры: $t_m \sim 10^{-1} \div 10^3$; $\Delta t \sim 2$; $h \sim 10$, т.е., ранний всплеск ускорения и ранний переход на инфляционную стадию.

- 2-й тип. Ультррелятивистский старт \rightarrow всплеск ускорения \rightarrow нерелятивистская стадия (Рис. 117). Этот сценарий осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и безмассового скалярного поля ($m_s = 0$).

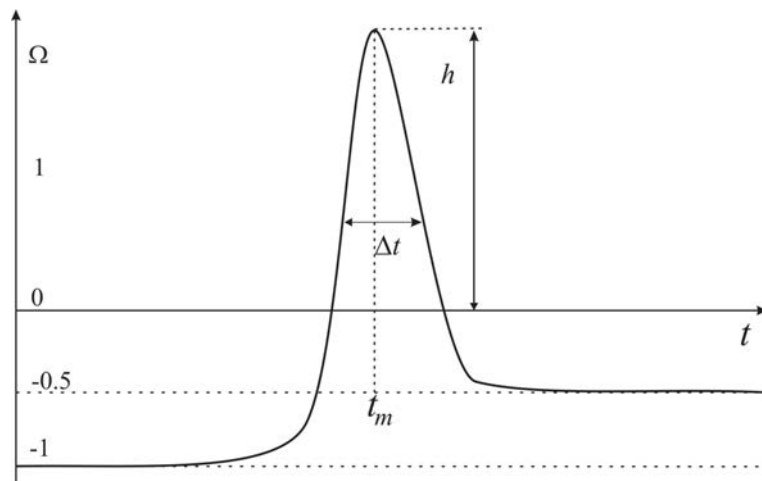


Рис. 117. Второй тип космологического сценария.

Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_m \sim 10^6 \div 10^9$; $\Delta t \sim 10^6$; $h \sim 10$, т.е., достаточно длительный промежуточный этап сверхускорения с окончательным переходом на нерелятивистскую стадию.

- 3-й тип. Ультррелятивистский старт \rightarrow плавный переход на нерелятивистскую стадию \rightarrow небольшой всплеск ускорения \rightarrow инфляционная стадия (Рис. 118). Этот сценарий осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$).

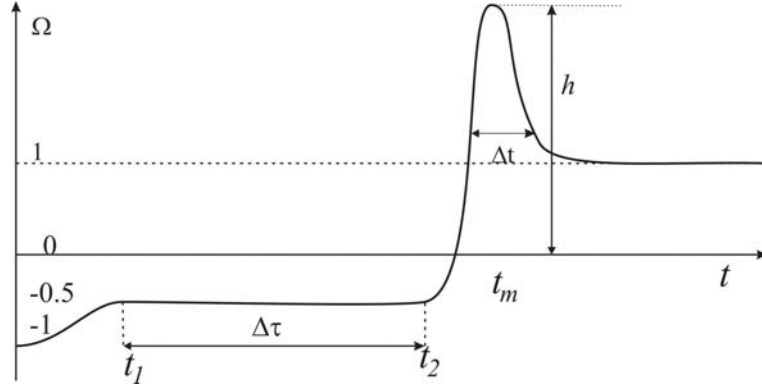


Рис. 118. Третий тип космологического сценария.

Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_1 \sim 10^2$ (время смены ультррелятивистской стадии на нерелятивистскую стадию); $\Delta\tau = 10^3 \div 10^8$ (длительность нерелятивистской стадии), $t_m \sim 10^2 \div 10^9 \div 10^9$, $h \sim 2 \div 3$, $\Delta t \sim 10^6 \div 10^8$.

- 4-й тип. Ультррелятивистский старт \rightarrow небольшой всплеск ускорения \rightarrow нерелятивистская стадия \rightarrow переход на инфляционную стадию (Рис. 119). Этот сценарий также осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$).

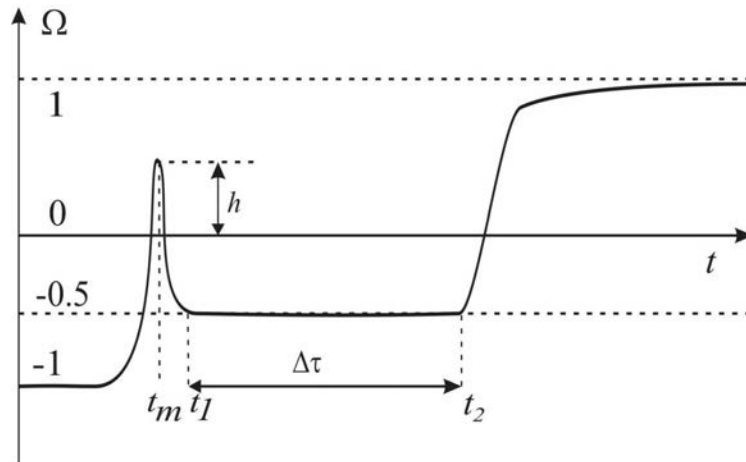


Рис. 119. Четвертый тип космологического сценария.

Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_m \sim 10^2 \div$

VIII.9. Космологическая эволюция термодинамических величин

$10^6 \div 10^9$, $t_1 \sim 10^2 \div 10^6$ (начало нерелятивистской стадии); $\Delta\tau \sim 10^7$
(длительность нерелятивистской стадии), $h \sim 0.5$.

5. Самые большие и вместе с тем поздние всплески космологического ускорения (порядка $\Omega \sim 10^2$ и даже больше)¹⁴ во времена $t_m \sim 10^5 \div 10^9$ присущи космологическому сценарию 1-го типа.

Отметим, что, фактически, все рассмотренные выше явления имеют место быть на постпланковских временах, когда необходимость квантования гравитации исчезает. Заметим, что как известно (см., например, [81]), согласно современным наблюдениям для решения проблем горизонта и плоскостности вселенной достаточна длительность инфляции $10^{-42} \div 10^{-9}$ s (см., например, [81]), т.е., достаточна послепланковская инфляция $t \sim 10 \div 10^{24}$ в планковских масштабах времени. В эти масштабы укладываются даже длительности всплесков космологического ускорения. Далее отметим очень важный факт, выявленный в данном исследовании. В ходе космологической эволюции естественно образуются нерелятивистские этапы, как ранние (3-й тип сценария), так промежуточные (четвертый тип сценария) и конечные (2-й тип сценария). Существование этих этапов даст возможность развития гравитационной неустойчивости, следовательно, образование космической структуры. При этом 2-й и 4-й типы сценария ограничивают сверху и снизу масштаб неустойчивых мод $kt > 1$. Таким образом, на основе модели с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, по-видимому, возможно создание более полной космологической модели, способной описать основные наблюдательные данные.

¹⁴В работе [106] приводятся примеры всплесков космологического ускорения до $\Omega \sim 10^8 \div 10^{10}$.

Глава IX

Космологическая эволюция несимметричной бoльцмановской плазмы с межчастичным классическим скалярным взаимодействием

IX.1 Введение

В 1982 – 1983 гг Автором были сформулированы основные принципы релятивистской кинетической теории статистических систем со скалярным взаимодействием [6] – [60, 117], а также [76]. Второе дыхание кинетическая теория статистических систем получила в начале 2000-х годов в связи с обнаружением ускорения Вселенной [118, 102]. В этих работах, в частности, было показано, что статистические системы скалярно заряженных частиц с классическим скалярным взаимодействием могут обеспечить ускорение Вселенной. В последующей серии работ одного из Авторов кинетическая теория релятивистских самогравитирующих систем со скалярным взаимодействием была обобщена на случай фантомных скалярных полей¹ [61, 119], [62, 120], [63, 121], [64], [66], [65], а затем – на случай отрицательных эффективных масс скалярно заряженных частиц [101], [67].

Особенностью скалярного взаимодействия с элементарными частицами является, в первую очередь, возможность прямого влияния потенциала скалярного поля Φ на эффективную массу частицы m_* посредством некоторого фундаментального скалярного заряда q . При этом можно рассмотреть раз-

¹Под фантомными скалярными полями мы будем понимать скалярные поля с отрицательной кинетической энергией, причем мы будем рассматривать именно физические поля, индивидуально взаимодействующие с каждым типом частиц, а не так называемые, дилатонные, или аналоги скалярных полей, возникающие в теориях с космологическим членом или в теориях гравитации $f(R)$.

IX.1. Введение

личные варианты такого взаимодействия, следующие из микроканонических уравнений движения и непротиворечиво встраиваемые в структуру макроскопической релятивистской кинетической теории:

$$m_* = |q\Phi| \quad - \text{симметричная неотрицательная масса}; \quad (\text{IX.1})$$

$$m_* = q\Phi \quad - \text{симметричная знаковазисимая масса}; \quad (\text{IX.2})$$

$$m_* = |m_0 + q\Phi| \quad - \text{несимметричная неотрицательная масса}; \quad (\text{IX.3})$$

$$m_* = m_0 + q\Phi \quad - \text{несимметричная знаковазисимая масса}, \quad (\text{IX.4})$$

где m_0 – некоторая голая (затравочная) масса. В работах [105], [105], [67], [104] было проведено численное моделирование космологической эволюции статистической системы частиц, как с фантомным, так и классическим, скалярным взаимодействием для случая симметричного скалярного взаимодействия. Эти исследования выявили аномальное поведение таких космологических систем с фантомным скалярным полем, проявляющееся в коротких гигантских всплесках космологического ускорения

Конечно, с теоретической зрения наиболее изящным представляется симметричный вариант, в котором, во-первых, существует симметрия между частицами и античастицами, а, во-вторых, масса покоя частиц полностью объясняется Хиггсовым механизмом. Тем не менее, рассмотрение несимметричного случая вызвано не только академическим интересом. Действительно, можно предположить, что существуют скалярные взаимодействия более фундаментального уровня, чем стандартные, которые, возможно, проявляются на более ранних стадиях космологической эволюции. В этом случае под m_0 можно понимать эффективную массу частицы, индуцированную этими полями. При таком подходе, возможен, в принципе, и случай $m_* = |\pm m_0 + q\Phi|$, как и $m_* = \pm m_0 + q\Phi$, где знак голой массы противоположен у частиц и античастиц. Оба эти случая относятся к классу симметричных моделей. В этой главе мы рассмотрим несимметричную знаконе-зависимую модель (IX.3). Результаты главы опубликованы в статьях [105], [105], [104].

IX.2 Математическая модель несимметричной локально равновесной статистической системы со скалярным взаимодействием частиц

IX.2.1 Макроскопические скаляры в условиях термодинамического равновесия

Как отмечалось, математическая модель несимметричной статистической системы скалярно заряженных частиц была сформулирована в работах [61, 119], [62, 120], [63, 121], [64], [66], [65]. Приведем основные соотношения этой модели для локально равновесной космологической плазмы.

В случае локально термодинамического равновесия (ЛТР) в сопутствующей плазме системе отсчета

$$u^i = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} \delta_4^i \quad (\text{IX.5})$$

бoльцмановская функция распределения имеет вид:

$$f_a^0 = e^{\frac{\mu_a - \sqrt{m_a^2 + p^2}}{\theta}}, \quad (\text{IX.6})$$

где $\mu_a \equiv \gamma_a \theta$ – химический потенциал, γ_a – приведенный химический потенциал, θ – локальная температура, $m_a \equiv m_*$ – эффективная масса частицы, которую мы будем описывать формулой (IX.3), полагая для античастиц $\bar{q} = -q$, $\bar{m} = m$.² В условиях ЛТР вектор плотности потока числа частиц

$$n_a^i = \frac{2S + 1}{(2\pi)^3} \int_P p^i f_a(x, p) dP \quad (\text{IX.7})$$

и тензор энергии - импульса плазмы

$$T_{pl}^{ik} = \sum_a \frac{2S + 1}{(2\pi)^3} \int_P p^i p^k f_a(x, p) dP \quad (\text{IX.8})$$

имеют гидродинамическую структуру:

$$n_a^i = n_a u^i, \quad (\text{IX.9})$$

$$T_{pl}^{ik} = (\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{P}_{pl}) u^i u^k - \mathcal{P}_{pl} g^{ik}, \quad (\text{IX.10})$$

где u^1 – времениподобный единичный вектор скорости плазмы, $(u, u) = 1$.

²Надчеркнутые величины соответствуют античастицам.

IX.2. Модель несимметричной локально равновесной статистической системы

Аддитивные макроскопические скаляры $n_a, \mathcal{E}_a, \mathcal{P}_a, \sigma_a$ для локально равновесной плазмы скалярно заряженных частиц в общем виде определены в [60, 117, 76], для вырожденной Ферми - системы в [118], для бoльцмановской плазмы они не отличаются от известных классических моментов равновесной функции распределения [88] с учетом замены $m \rightarrow m_*$. Исключение составляет лишь плотность скалярного заряда, определенная уже в первой работе по статистическим системам со скалярным взаимодействием с помощью следа тензора энергии - импульса скалярно заряженных частиц [6] и поэтому также выражающаяся через низшие моменты этой функции. Ниже мы воспользуемся результатами работы [105]):

$$n_a = \frac{2S+1}{\pi^2} m_a^3 \frac{K_2(\lambda_a)}{\lambda_a} e^{\gamma_a}; \quad (\text{IX.11})$$

$$\mathcal{E}_{pl} = \sum_a \mathcal{E}_a = \frac{1}{2\pi^2} \sum_a (2S+1) m_a^4 e^{\gamma_a} \left(\frac{K_3(\lambda_a)}{\lambda_a} - \frac{K_2(\lambda_a)}{\lambda_a^2} \right); \quad (\text{IX.12})$$

$$\mathcal{P}_{pl} = \sum_a \mathcal{P}_a = \frac{1}{2\pi^2} \sum_a (2S+1) m_a^4 e^{\gamma_a} \frac{K_2(\lambda_a)}{\lambda_a^2}; \quad (\text{IX.13})$$

$$\sigma = \sum_a \sigma_a = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} q_a (m + q_a \Phi)^3 e^{\gamma_a} \frac{K_1(\lambda_a)}{\lambda_a}, \quad (\text{IX.14})$$

где n_a – плотность числа частиц сорта «а», \mathcal{E}_{pl} – плотность энергии плазмы, \mathcal{P}_{pl} – давление плазмы, σ – плотность скалярного заряда, $\lambda_a = m_a/\theta$. Далее,

$$K_n(z) = \frac{\sqrt{\pi} z^n}{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{sh}^{2n} t dt \quad (\text{IX.15})$$

– функции Бесселя мнимого аргумента, $\Gamma(z)$ – гамма - функция (см., например, [48]).

IX.2.2 Условия химического равновесия

В условиях локального термодинамического равновесия должна выполняться серия алгебраических условий химического равновесия, согласно которым в каждом канале реакций суммы химических потенциалов слева и справа должны совпадать. Поскольку при высоких температурах в плазме должны присутствовать безмассовые частицы (фотоны γ и нейтрино ν), а также и античастицы для каждого сорта частиц, находящихся в термодинамическом

равновесии, для химических потенциалов этих частиц должны выполняться соотношения (см., например, [123]):

$$\gamma_\gamma = \gamma_\nu = 0; \quad \bar{\gamma} = -\gamma. \quad (\text{IX.16})$$

Таким образом, для безмассовых частиц равновесные плотность числа частиц, $\overset{0}{n}$, и энергия, $\overset{0}{\varepsilon}$, равны соответственно (см., например, [123]):

$$n^0 = \sum_a n_a^0 = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{p\theta} \pm 1} = \frac{\rho\theta^3}{\pi^2} g_n \zeta(3); \quad (\text{IX.17})$$

$$\varepsilon^0 = \sum_a \varepsilon_a^0 = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p\theta} \pm 1} = \frac{\rho\pi^2\theta^4}{30} g_e, \quad (\text{IX.18})$$

где $\rho = 2S + 1$ – статистический фактор, $\zeta(z)$ – ζ – функция Римана, $g_n = g_e = 1$ для бозонов, $g_n = 3/4$, $g_e = 7/8$ для фермионов.

Поэтому к плотности энергии и давлению плазмы в общем балансе энергии необходимо добавить плотность энергии, \mathcal{E}_0 , и давление, $\mathcal{P}_0 = 1/3 \mathcal{E}_0$, безмассовых частиц:

$$\mathcal{E}_0 = N \frac{\pi^2 \theta^4}{15}; \quad (\text{IX.19})$$

$$N = \frac{1}{2} \left(\sum_B (2S + 1) + \frac{7}{8} \sum_F (2S + 1) \right), \quad (\text{IX.20})$$

где суммирование проводится по всем безмассовым бозонам (B) и фермионам (F).

Далее, разность плотностей скалярных зарядов частиц и античастиц равна:

$$\Delta n = \frac{2S + 1}{\pi^2} q_a \left[e^{\gamma_a} m_a^3 \frac{K_2(\lambda_a)}{\lambda_a} - e^{-\gamma_a} \bar{m}_a^3 \frac{K_2(\bar{\lambda}_a)}{\bar{\lambda}_a} \right], \quad (\text{IX.21})$$

где $\bar{\lambda}_a = \bar{m}_a/\theta$. Поэтому закон сохранения скалярного заряда в сопутствующей системе отсчета имеет вид³:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sqrt{\frac{-g}{g_{44}}} \sum_a \frac{2S + 1}{\pi^2} q_a \left[e^{\gamma_a} m_a^3 \frac{K_2(\lambda_a)}{\lambda_a} - e^{-\gamma_a} \bar{m}_a^3 \frac{K_2(\bar{\lambda}_a)}{\bar{\lambda}_a} \right] \right\} = 0. \quad (\text{IX.22})$$

³ $\Delta n^4 = \Delta n u^4 = 1/\sqrt{g_{44}} \Delta n$

IX.2. Модель несимметричной локально равновесной статистической системы

В симметричной модели $\bar{m}_a = m_a$, $\bar{\lambda}_a = \lambda_a$, поэтому выражение в квадратных скобках (IX.21) и (IX.22) оказывается пропорциональным $\text{sh}\gamma_a$, благодаря чему модель значительно упрощается. В случае несимметричной модели взаимодействия это не так. В частности, для плазмы, содержащей только один сорт скалярно заряженных частиц, закон сохранения скалярного заряда (IX.22) примет вид:

$$\sqrt{-\frac{g}{g_{44}} \frac{2S+1}{\pi^2}} \left[e^{\gamma} m_*^3 \frac{K_2(\lambda_*)}{\lambda_*} - e^{-\gamma} \bar{m}_*^3 \frac{K_2(\bar{\lambda}_*)}{\bar{\lambda}_*} \right] = \sqrt{-\frac{g^0}{g_{44}^0}} \Delta n_0, \quad (\text{IX.23})$$

где $g_{ik}^0 \equiv g_{ik}(t_0, x^1, x^2, x^3)$ – метрика на гиперповерхности Коши $\Sigma : t = t_0$ в сопутствующей системе отсчета, g^0 – определитель этой метрики, $\Delta n_0 \equiv \Delta n(t_0, x^1, x^2, x^3)$ – разность плотности числа скалярно заряженных частиц и античастиц на этой гиперповерхности, так что

$$Q = q \int_{\Sigma} \Delta n \sqrt{-g} d^3x = \text{Const} \quad (\text{IX.24})$$

есть полный сохраняющийся скалярный заряд.

IX.2.3 Космологическая модель

Рассмотрим самосогласованную модель самогравитирующей скалярно заряженной бозе-газовой плазмы для пространственно - плоской модели Фридмана:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (\text{IX.25})$$

В этом случае все функции зависят только от времени, алгебраическая структура тензора энергии - импульса скалярного поля, а, вместе с ним, и суммарного тензора энергии - импульса совпадают с алгебраической структурой тензора энергии - импульса идеальной жидкости:

$$T_s^{ik} = (\mathcal{E} + \mathcal{P})v^i v^k - \mathcal{P}g^{ik}, \quad (\text{IX.26})$$

где

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_{pl}; \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}_s + \mathcal{P}_{pl} \quad (\text{IX.27})$$

– суммарная плотность энергии плазмы и скалярного поля;

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 + m_s^2\Phi^2); \quad (\text{IX.28})$$

$$\mathcal{P}_s = \frac{1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 - m_s^2\Phi^2), \quad (\text{IX.29})$$

причем

$$\mathcal{E}_s + \mathcal{P}_s = \frac{1}{4\pi}\dot{\Phi}^2. \quad (\text{IX.30})$$

Уравнение классического скалярного поля с отталкиванием одноименно заряженных частиц, в метрике (IX.25) принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + m_s^2\Phi = -4\pi\sigma(t), \quad (\text{IX.31})$$

где m_s – масса квантов скалярного поля. Кроме того, сюда необходимо добавить закон сохранения полной энергии - импульса, который является строгим интегральным следствием кинетических уравнений:

$$\dot{\mathcal{E}}_{pl} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{P}_{pl}) = \sigma\dot{\Phi}; \quad (\text{IX.32})$$

Единственное нетривиальное уравнение Эйнштейна примет вид:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\mathcal{E}, \quad (\text{IX.33})$$

К этим уравнениям необходимо добавить закон сохранения скалярного заряда (IX.23), который в метрике Фридмана (IX.25) примет вид:

$$a^3\frac{2S+1}{\pi^2}\left[e^{\gamma}m_*^3\frac{K_2(\lambda_*)}{\lambda_*} - e^{-\gamma}\bar{m}_*^3\frac{K_2(\bar{\lambda}_*)}{\bar{\lambda}_*}\right] = \Delta n_0, \quad (\text{IX.34})$$

где мы положили, воспользовавшись свободой выбора масштаба,

$$a(t_0) = 1. \quad (\text{IX.35})$$

Введем далее для удобства равновесную плотность фотонов в момент времени t_0 :

$$n_{\gamma}^0{}_{(0)} = n_{\gamma}^0(t_0) = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2}\theta_0^3, \quad (\text{IX.36})$$

IX.2. Модель несимметричной локально равновесной статистической системы

где $\theta_0 = \theta(t_0)$ и безразмерную константу – относительную плотность скалярного заряда на этот момент времени:

$$\delta n_0 \equiv \frac{\Delta n_0}{n_{\gamma(0)}^0} \Rightarrow \frac{\Delta n_0}{a^3} = \delta n_0 \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{\theta_0}{a} \right)^3. \quad (\text{IX.37})$$

Тогда соотношение (IX.34) можно записать в виде алгебраического уравнения относительно приведенного химического потенциала скалярно заряженных частиц (в дальнейшем мы полагаем $2S + 1 = 2$):

$$e^{\gamma} m_*^3 \frac{K_2(\lambda_*)}{\lambda_*} - e^{-\gamma} \bar{m}_*^3 \frac{K_2(\bar{\lambda}_*)}{\bar{\lambda}_*} = \delta n_0 \zeta(3) \left(\frac{\theta_0}{a} \right)^3, \quad (\text{IX.38})$$

решая которое с учетом $\exp(\gamma) > 0$, найдем:

$$e^{\gamma} = \frac{1}{2\theta(m + q\Phi)^2 K_2(\lambda_*)} \left[\delta + \sqrt{\delta^2 + 4(m^2 - q^2\Phi^2)^2 \theta^2 K_2(\lambda_*) K_2(\bar{\lambda}_*)} \right], \quad (\text{IX.39})$$

где

$$\delta \equiv \delta n_0 \zeta(3) \bar{\theta}^3. \quad (\text{IX.40})$$

и

$$\bar{\theta}(t) = \frac{\theta_0}{a} \quad (\text{IX.41})$$

– температура некоторой идеальной безмассовой реликтовой компоненты. Заметим, что из свойств симметрии уравнения (IX.38) следует, что решение для химического потенциала для античастиц получается подстановкой $\delta \rightarrow -\delta$, $m_* \leftrightarrow \bar{m}_*$, $\lambda_* \leftrightarrow \bar{\lambda}_*$:

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{2\theta(m - q\Phi)^2 K_2(\bar{\lambda}_*)} \left[-\delta + \sqrt{\delta^2 + 4(m^2 - q^2\Phi^2)^2 \theta^2 K_2(\lambda_*) K_2(\bar{\lambda}_*)} \right], \quad (\text{IX.42})$$

– при этом выражение под корнем не изменяется. Очевидно, что это свойство инвариантности распространяется и непосредственно на химические потенциалы частиц и античастиц $\mu, \bar{\mu}$.

Таким образом, приведенные химические потенциалы определяются тремя скалярными функциями $\Phi(t), \theta(t), \bar{\theta}(t)$ или, что эквивалентно, $\Phi(t), \theta(t)$,

$a(t)$. На эти же функции имеем 3 обыкновенных дифференциальных уравнения: уравнение поля (IX.31), закон сохранения энергии (IX.32) и уравнение Эйнштейна (IX.33). В результате получаем самосогласованную систему дифференциальных уравнений второго порядка, описывающей математическую модель космологической эволюции статистической системы с классическим скалярным взаимодействием.

IX.3 Энергетический анализ поведения системы

IX.3.1 Полная плотность энергии

Таким образом, плотность полной энергии системы «Скалярное поле + Скалярно заряженные частицы + Фотоны» описывается формулой:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_\gamma + \mathcal{E}_{pl} = & \frac{1}{8\pi} \left(\dot{\Phi}^2 + m_s^2 \Phi^2 \right) + N \frac{\pi^2}{15} \theta^4 + \\ & + \frac{\theta}{2\pi^2} \left[\left(\frac{\lambda_* K_3(\lambda_*)}{K_2(\lambda_*)} - 1 \right) \left(\delta + \sqrt{\delta^2 + 4(m^2 - q^2 \Phi^2)^2 \theta^2 K_2(\lambda_*) K_2(\bar{\lambda}_*)} \right) + \right. \\ & \left. \left(\frac{\bar{\lambda}_* K_3(\bar{\lambda}_*)}{K_2(\bar{\lambda}_*)} - 1 \right) \left(-\delta + \sqrt{\delta^2 + 4(m^2 - q^2 \Phi^2)^2 \theta^2 K_2(\lambda_*) K_2(\bar{\lambda}_*)} \right) \right]. \quad (\text{IX.43}) \end{aligned}$$

Рассмотрим полную энергию системы на гиперповерхности Коши $t = t_0$, когда

$$\theta(t_0) = \theta_0; \quad \delta = \delta n_0 \zeta(3) \theta_0^3. \quad (\text{IX.44})$$

Запишем эту величину как функцию потенциала скалярного поля и его временной производной:

$$\mathcal{E}_0 = K(\dot{\Phi}) + U(\Phi) + \text{Const}, \quad (\text{IX.45})$$

где кинетическая энергия $K(\dot{\Phi})$ равна:

$$K(\dot{\Phi}) = \frac{1}{8\pi} \dot{\Phi}^2; \quad (\text{IX.46})$$

IX.3. Энергетический анализ поведения системы

потенциальная энергия $U(\Phi)$ равна:

$$U(\Phi) = \frac{m_s^2}{8\pi} \Phi^2 + \frac{\delta\zeta(3)\theta_0^4}{2\pi^2} \times \left[\left(\frac{\lambda_*^0 K_3(\lambda_*^0)}{K_2(\lambda_*^0)} - 1 \right) \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{(m^2 - q^2 \Phi^2)^2 K_2(\lambda_*^0) K_2(\bar{\lambda}_*^0)}{\delta^2 \zeta^2(3) \theta_0^4}} \right) + \left(\frac{\bar{\lambda}_*^0 K_3(\bar{\lambda}_*^0)}{K_2(\bar{\lambda}_*^0)} - 1 \right) \left(-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{(m^2 - q^2 \Phi^2)^2 K_2(\lambda_*^0) K_2(\bar{\lambda}_*^0)}{\delta^2 \zeta^2(3) \theta_0^4}} \right) \right], \quad (\text{IX.47})$$

и постоянная добавка равна:

$$\text{Const} = N \frac{\pi^2}{15} \theta_0^4, \quad (\text{IX.48})$$

а

$$\lambda_*^0 = \frac{|m + q\Phi|}{\theta_0}; \quad \bar{\lambda}_*^0 = \frac{|m - q\Phi|}{\theta_0} \quad (\text{IX.49})$$

обратная приведенная температура.

IX.3.2 Энергетический анализ

Проведем энергетический анализ поведения системы в зависимости от ее фазовых координат Φ , $\dot{\Phi}$, отбрасывая постоянное слагаемое.

1. Очевидно, что функция $U(\Phi)$ есть четная функция Φ :

$$U(-\Phi) = U(\Phi). \quad (\text{IX.50})$$

2. При $\Phi = 0$ потенциальная энергия равна:

$$U(0) \equiv U_0(\theta_0, \delta n) = m^4 \frac{\delta\zeta(3)}{\lambda_0^4 \pi^2} \left(\frac{\lambda_0 K_3(\lambda_0)}{K_2(\lambda_0)} - 1 \right) \times \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\lambda_0^4 K_2^2(\lambda_0)}{\delta^2 \zeta^2(3)}} \right), \quad (\text{IX.51})$$

где

$$\lambda_0 = \frac{m}{\theta_0}. \quad (\text{IX.52})$$

3. $U_0(\theta_0)$ является монотонно возрастающей функцией θ_0 :

$$\frac{d}{d\theta_0}U_0(\theta_0) > 0 \quad (\text{IX.53})$$

и монотонно возрастающей функцией δ :

$$\frac{d}{d\delta}U_0(\delta) > 0 \quad (\text{IX.54})$$

4. При $\theta_0 \rightarrow \infty$:

$$U(\Phi, \theta_0 \rightarrow \infty) = \frac{m_s^2}{8\pi}\Phi^2 + \frac{3\delta\zeta(3)\theta_0^4}{\pi^2} \sqrt{1 + \frac{16}{\delta^2\zeta^2(3)}}, \quad (\rightarrow \infty). \quad (\text{IX.55})$$

5. $\theta_0 \rightarrow 0$:

$$U(\Phi, \theta_0 \rightarrow 0) = \frac{m_s^2}{8\pi}\Phi^2 + \frac{\delta\zeta(3)\theta_0^3}{2\pi^2}(m_* + \bar{m}_*), \quad (\rightarrow \frac{m_s^2}{8\pi}\Phi^2). \quad (\text{IX.56})$$

6. При $\Phi \rightarrow \infty$:

$$U(\Phi \rightarrow \infty, \theta_0) = \frac{m_s^2}{8\pi}\Phi^2 + \frac{\delta\zeta(3)\theta_0^3}{\pi^2}|q\Phi|, \quad (\rightarrow \infty). \quad (\text{IX.57})$$

– таким образом и при $\theta_0 \rightarrow \infty$ и при $\Phi \rightarrow \infty$ график потенциальной энергии ведет себя квадратичная парабола.

7. При $m \rightarrow 0$:

$$U(\Phi) = \frac{m_s^2}{8\pi}\Phi^2 + \frac{\delta\zeta(3)\theta_0^4}{\pi^2} \left(\frac{\lambda K_3(\lambda)}{K_2(\lambda)} - 1 \right) \sqrt{1 + 4 \frac{q^4\Phi^4 K_2^2(\lambda)}{\delta^2\zeta^2(3)\theta_0^4}}, \quad (\text{IX.58})$$

где

$$\lambda = \frac{|q\Phi|}{\theta_0}.$$

Подкоренное выражение в правой части (IX.58) при $\Phi \rightarrow 0$ стремится к постоянному значению, большему 1, а при $\Phi \rightarrow \infty$ – к единице.

8. На интервалах $\Phi \in (+0, +\infty)$ и $\Phi \in (-\infty, -0)$ при $\theta_0 \neq 0$ потенциальная энергия может иметь минимумы. Таким образом, график функции потенциальной энергии подобен графику параболы 4-го порядка.

IX.3.3 Графики потенциальной энергии

Всюду, где не меняется значение соответствующего параметра, значения остальных параметров равны: $m_s = 0.001, m = 0.1, q = 0.1, \delta n_0 = 0.001, \theta_0 = 1$. На Рис. 120, 121 видно что в полном согласии с (IX.57) с уменьшением температуры график стремится занять предельную форму параболы в зависимости от температуры плазмы. По умолчанию, всюду, где не меняется значение соответствующего параметра, эти значения равны: $m_s = 0.001, m = 0.1, q = 0.1, \delta n_0 = 0.001, \theta = 0.78$.

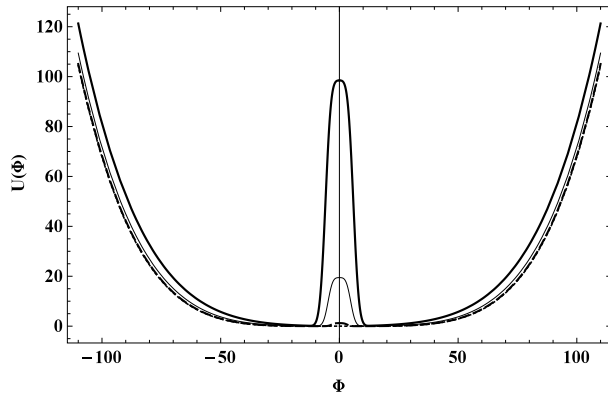


Рис. 120. Зависимость потенциальной энергии, $U(\Phi)$, от температуры, θ_0 . Снизу – верх: $\theta_0 = 0.3; 1; 2; 3$.

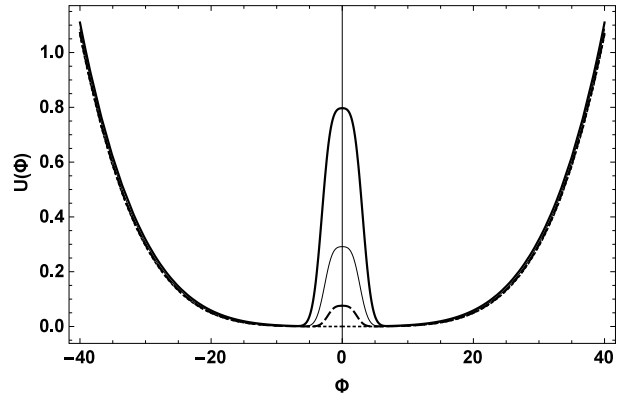


Рис. 121. Зависимость потенциальной энергии, $U(\Phi)$, от температуры, θ_0 . Снизу – верх: $\theta_0 = 0.1, 0.5, 0.7, 0.9$.

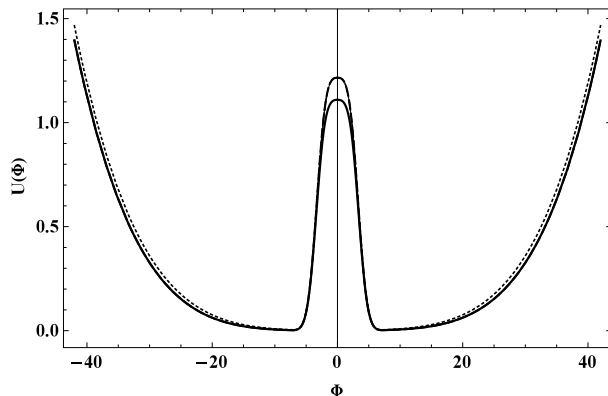


Рис. 122. Зависимость потенциальной энергии, $U(\Phi)$, от затравочной массы, m . Сверху – вниз: $m = 0; 0.001; 0.1; 1$. Три первые графика сливаются в точке $\Phi = 0$

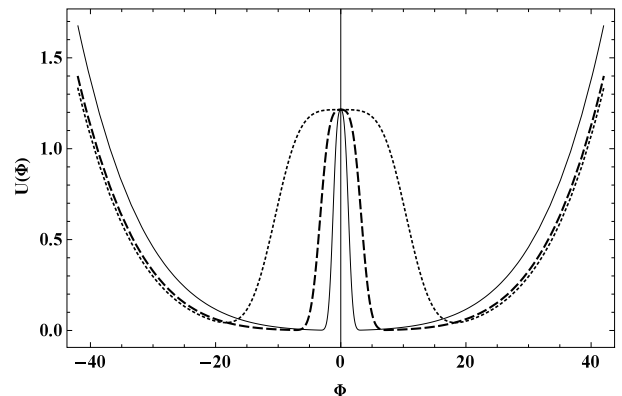


Рис. 123. Зависимость потенциальной энергии, $U(\Phi)$, от величины скалярного заряда частиц заряда, q . Графики с наибольшей полушириной в центральном пике соответствуют меньшим значениям заряда, с наименьшей полушириной – большим значениям заряда: $q = 0.01, 0.1, 0.5$.

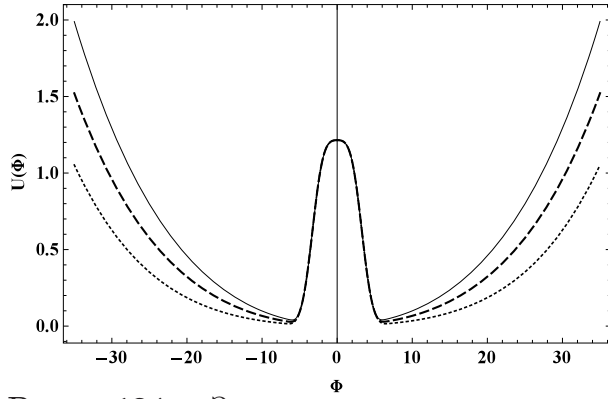


Рис. 124. Зависимость потенциальной энергии, $U(\Phi)$, от относительной доли избытка скалярно заряженных частиц над античастицами, δ . Снизу – вверх: $\delta = 0.01, 0.02, 0.03$. При $\delta \rightarrow 0$ все графики сливаются с нижним.

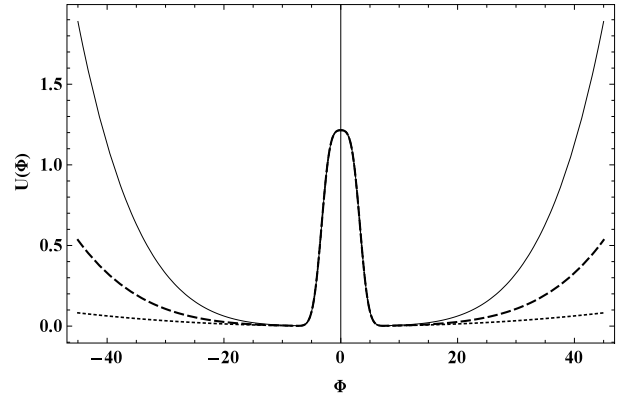


Рис. 125. Зависимость потенциальной энергии, $U(\Phi)$, от массы квантов скалярного поля, μ . Снизу – вверх: $\mu = 0.000001, 0.0005, 0.001$.

Характерный вид зависимости потенциальной энергии $U(\Phi)$ свидетельствует о том, что в ходе эволюции первоначальная симметрия системы относительно $\Phi = 0$ может нарушаться, в результате чего система окажется либо в левой, либо правой потенциальной яме с симметричными значениями минимума $\Phi = \Phi_{\mp} = \mp \Phi_{min}$, чему будут соответствовать зафиксированные массы частиц и античастиц $m_* = (m - q\Phi_{min}), \bar{m}_* = (m + q\Phi_{min})$ (нарушение симметрии влево) или $m_* = (m + q\Phi_{min}), \bar{m}_* = (m - q\Phi_{min})$ (нарушение симметрии вправо). Эти переходы из начального симметричного состояния в антисимметричное являются, по сути, фазовыми переходами второго рода.

IX.3.4 Скалярная плотность заряда

Рассмотрим зависимость скалярной плотности заряда от значений параметров модели – фундаментальных констант: $m, q, \delta n_0$; и температуры: θ :

$$\sigma = \frac{q\theta}{\pi^2} (m_*(m + q\Phi)K_1(\lambda_*)e^\gamma - \bar{m}_*(m - q\Phi)K_1(\bar{\lambda}_*)e^{-\gamma}). \quad (\text{IX.59})$$

Далее всюду, где не меняется значение соответствующего параметра, равны значениям: $m = 0.1, q = 0.1, \delta n_0 = 0.001, \theta = 0.78$; мелко-пунктирная линия соответствует малым значениям.

IX.4. Численное моделирование космологической эволюции

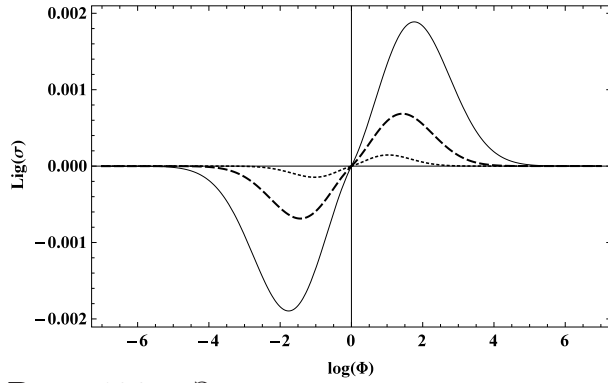


Рис. 126. Зависимость скалярной плотности заряда от температуры, θ , — $\theta = 0.3; 0.5; 0.7$.

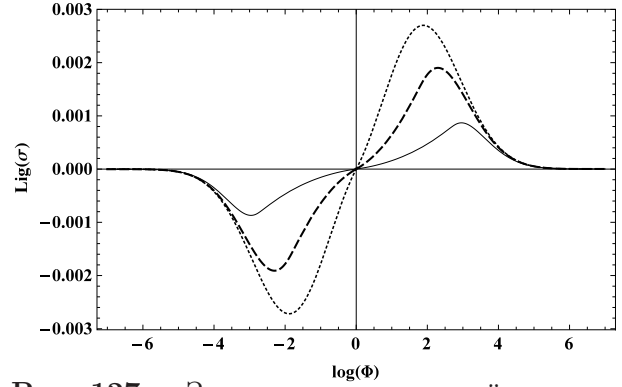


Рис. 127. Зависимость скалярной плотности заряда от массы частиц, m , — $m = 0.001; 1; 2$.

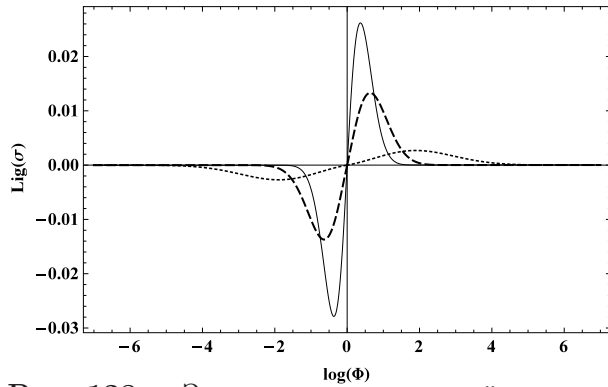


Рис. 128. Зависимость скалярной плотности заряда от заряда частиц, q ; $q = 0.1; 0.5; 1$.

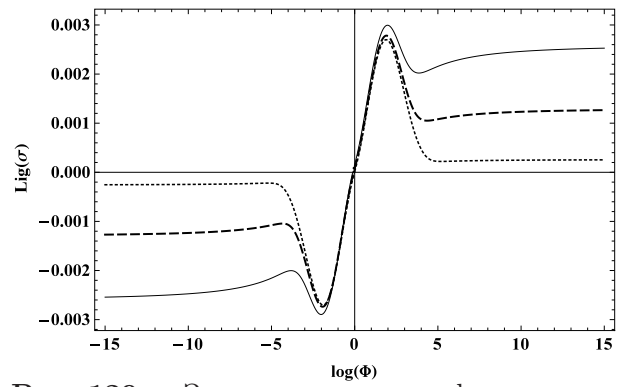


Рис. 129. Зависимость логарифма скалярной плотности заряда от δ ; $\delta = 0.1; 0.5; 1$.

IX.4 Численное моделирование космологической эволюции

В этом разделе мы рассмотрим несколько усеченную космологическую модель, основанную на соотношении:

$$\bar{\theta} = \theta \quad (\text{IX.60})$$

в формуле для относительной доли скалярных зарядов (IX.40), что соответствует чисто ультрарелятивистской плазме.

IX.4.1 Задача Коши

Для постановки задачи Коши для системы (IX.31), (IX.33), (IX.32) необходимо задать начальные условия для величин $a(t_0)$, $\Phi(t_0)$, $\dot{\Phi}(t_0)$, $\theta(t_0)$. Будем полагать в дальнейшем:

$$t_0 = 0; \quad a(0) = 1; \quad \dot{\Phi}(0) = 0. \quad (\text{IX.61})$$

В космологическом сценарии, соответствующем начальным условиям (IX.61), в момент времени $t = 0$ кинетическая энергия скалярного поля обращается в нуль, а уравнение состояния скалярного поля принимает вид:

$$\mathcal{P}_s(0) + \mathcal{E}_s(0) = 0. \quad (\text{IX.62})$$

Заметим, что выбор начального момента времени t_0 произволен, а второе из условий (IX.62) фактически определяет лишь единицу масштаба и всегда реализуемо. Поэтому, фактически, необходимо задать лишь начальные условия для потенциальной функции $\Phi(0)$ и температуры плазмы $\theta(0)$. Однако, задание в качестве начальных условий размерных функций θ_0 и Φ_0 не очень удобно для численного моделирования. Вместо них мы зададим две безразмерные скалярные функции, имеющие явный физический смысл:

$$\kappa_{pl}(t) = \frac{\mathcal{P}_{pl}(t)}{\mathcal{E}_{pl}(t)} \Rightarrow \kappa_{pl}^0 = \kappa_{pl}(0); \in [0, 1/3]; \quad (\text{IX.63})$$

$$\eta_S = \frac{\mathcal{E}_S(t)}{\mathcal{E}_{pl}(t)} \Rightarrow \eta_S^0 = \eta_S(0); \in (-\infty, +\infty). \quad (\text{IX.64})$$

Задавая отношение κ_{pl}^0 , мы можем определить θ_0 , а задавая затем η_S^0 , мы можем определить Φ_0 . Введем также необходимые для анализа безразмерные скалярные функции $\kappa(\mathcal{E})$:

$$\mathcal{P} = \kappa(\mathcal{E})\mathcal{E} \Rightarrow (\mathcal{P}_s + \mathcal{P}_{pl}) = \kappa(\mathcal{E})(\mathcal{E}_s + \mathcal{E}_{pl}) \quad (\text{IX.65})$$

– суммарный коэффициент баротропы и $\Omega(\mathcal{E})$:

$$\Omega = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{1}{2}(1 + 3\kappa) \quad (\text{IX.66})$$

– инвариантное космологическое ускорение. В такой постановке задача определяется четырьмя независимыми начальными условиями – неизменяемыми вторым и третьим условиями (IX.61), изменяемыми (IX.63) и (IX.64), а также тремя параметрами – фундаментальными константами: $m, q, m_s, \delta n_0$. Таким образом, в задаче 6 произвольных параметров.

IX.4.2 Размерность физических величин

Из определения эффективной массы, а также из определения плотности энергии скалярного поля следует размерность этих величин в единицах комптоновской длины

$$\begin{aligned} [t] &= l/c \rightarrow \ell; & [m] &= [\mu] = \hbar/lc \rightarrow \ell^{-1}; \\ [\mathcal{E}] &\rightarrow \ell^{-4}; & [\Phi] &= [m] = [\mu] \rightarrow \ell^{-1}; & [q] &\rightarrow 1. \end{aligned} \quad (\text{IX.67})$$

IX.5. Результаты численного моделирования

В обычных единицах $[m, l, t]$ заряд q имеет размерность $m^{1/2}l^{3/2}t^{-1}$, а потенциал скалярного поля $-\Phi = m^{1/2}l^{1/2}t^{-1}$. Таким образом, в планковских единицах, которые используются в книге, значение $q\Phi \sim 1$ соответствует эффективной массе скалярно заряженных частиц порядка планковской массы.

Далее, поскольку при численном решении задачи приходится иметь дело с очень большими числами, необходимо предварительно масштабировать задачу. Введем вместо масштабного фактора безразмерную функцию:

$$\Lambda = \ln a(t); \quad \Lambda(0) = 0, \quad (\text{IX.68})$$

так что:

$$\dot{\Lambda} = \frac{\dot{a}}{a} = H(t) \quad (\text{IX.69})$$

есть постоянная Хаббла, а инвариантное космологическое ускорение выражается через Λ следующим образом:

$$\Omega = 1 + \frac{\ddot{\Lambda}}{\dot{\Lambda}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (\text{IX.70})$$

Заметим, что часто используемое в космологических моделях приближение *медленного скатывания*, которое мы здесь нигде не используем:

$$|\dot{H}| \ll H^2, \quad (\text{IX.71})$$

можно записать в виде с учетом (IX.70):

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} \equiv |\Omega - 1| \ll 1 \Rightarrow \Omega \rightarrow 1 \Rightarrow \varkappa \rightarrow -1. \quad (\text{IX.72})$$

IX.5 Результаты численного моделирования

IX.5.1 Алгоритмы численного моделирования

Система уравнений ((IX.33)-(IX.32)) с помощью замены $Z = \dot{\Phi}$ приводится к нормальному виду, но в силу громоздкости получающихся выражений мы здесь их приводить не будем. Численное интегрирование системы уравнений ((IX.33)-(IX.32)) проводилась в прикладном математическом пакете “Mathematica, v.10”. Поскольку система дифференциальных уравнений обнаруживает признаки жесткости, использовался численный метод для решения жёстких систем,

Method ->BDF,

AccuracyGoal -> 20, PrecisionGoal -> 5,

MaxSteps ->200000.

IX.5.2 Ультррелятивистские частицы: $\varkappa_{pl}^0 = 1/3$, **затравочная масса:** $m = 0.001$, **фантомное скалярное поле:** $m_s = 10^{-9}$, **плазменнодоминированная система:** $\eta_S^0 = 0.0001$, $\delta n_0 = 0.001$

Для бoльцмановской плазмы начальными значениями и параметрами являются $[q, \Phi_0, \theta_0]$, для которых получаются следующие начальные значения, соответствующие заданным начальным параметрам и константам:

$$[0.01, 0.0536953, 0.00787758], [0.1, 0.00536953, 0.00787758], [1, 0.000536953, 0.00787758], [10, 0.0000536953, 0, 0.00787758].$$

Приведем результаты численного моделирования для указанных выше случаев. Всюду мелкопунктирная линия соответствует малому значению заряда.

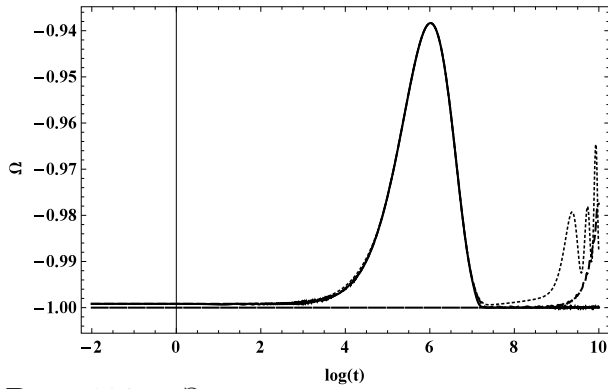


Рис. 130. Зависимость эволюции инвариантного космологического ускорения Ω от величины скалярного заряда. Сверху – вниз: $q = 0.01; 0.1; 1; 10$. Горизонтальные пунктирные прямые соответствуют значениям $\Omega = -1$ (нижняя).

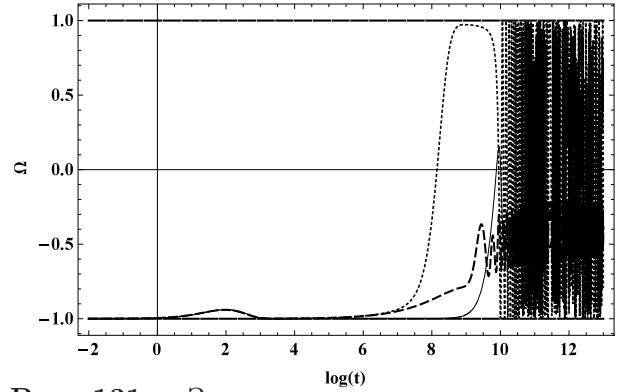


Рис. 131. Зависимость эволюции инвариантного космологического ускорения Ω от величины скалярного заряда. Сверху – вниз: $q = 0.01; 0.1; 1$. Горизонтальные пунктирные прямые соответствуют значениям $\Omega = -1$ (нижняя) и $\Omega = +1$ (верхняя).

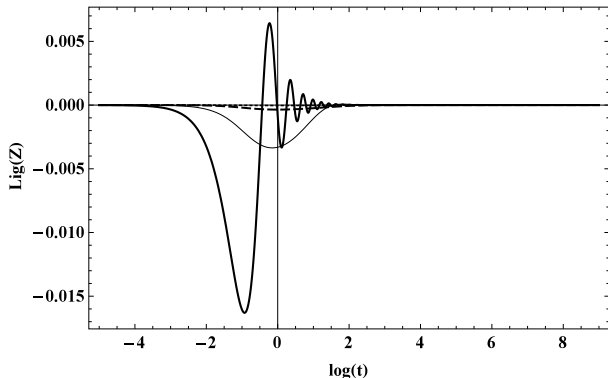


Рис. 132. Зависимость эволюции производной потенциала $Lig(Z)$ от величины скалярного заряда. Сверху –вниз: $q = 0.01; 0.1; 1; 10$.

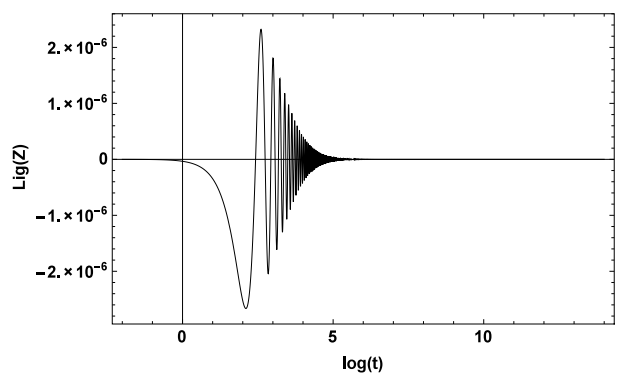


Рис. 133. Зависимость эволюции производной потенциала $Lig(Z)$ от величины скалярного заряда: $q = 1$.

IX.5. Результаты численного моделирования

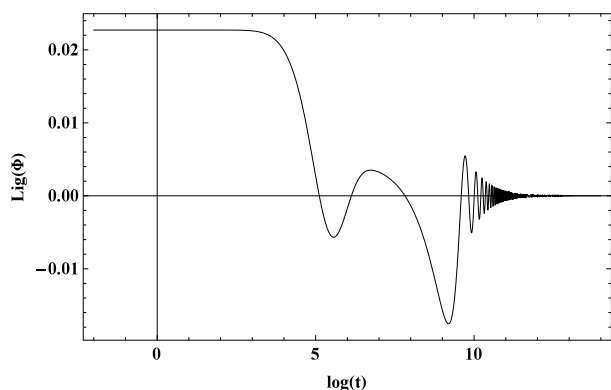


Рис. 134. Зависимость эволюции потенциала поля $Lig(\Phi)$ от величины скалярного заряда: $q = 0.01$.

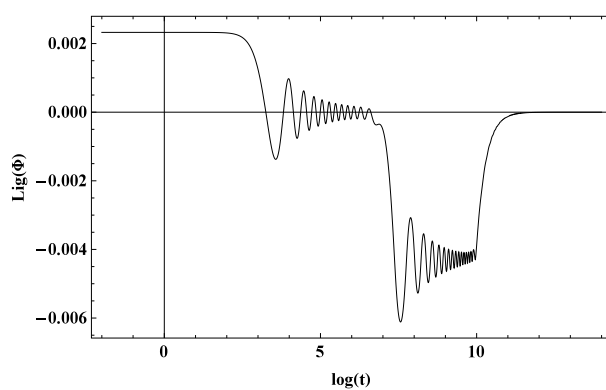


Рис. 135. Зависимость эволюции потенциала поля $Lig(\Phi)$ от величины скалярного заряда: $q = 0.1$.

На нижеприведенных рисунках Рис.136 и Рис. 137 можно наблюдать реализацию отмеченных выше фазовых переходах в эволюции потенциала скалярного поля и химического потенциала скалярно заряженных частиц.

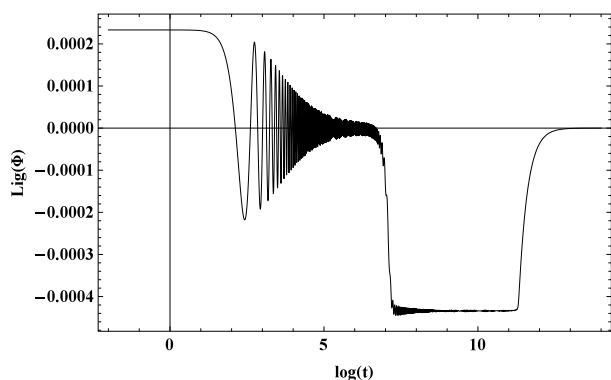


Рис. 136. Зависимость эволюции потенциала поля $Lig(\Phi)$ от величины скалярного заряда: $q = 1$.

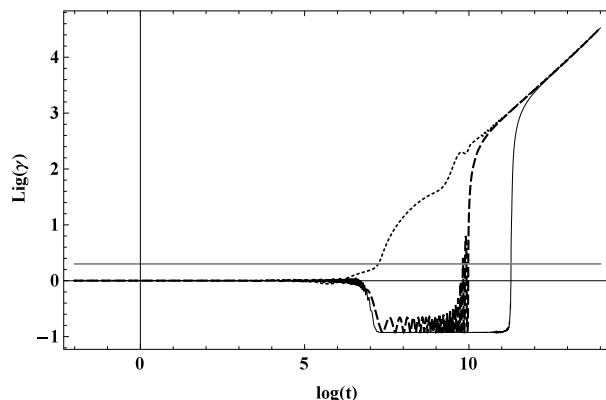


Рис. 137. Зависимость эволюции приведенного химического потенциала, $Lig(\gamma)$ от величины скалярного заряда: $q = 0.01; 0.1; 1$.

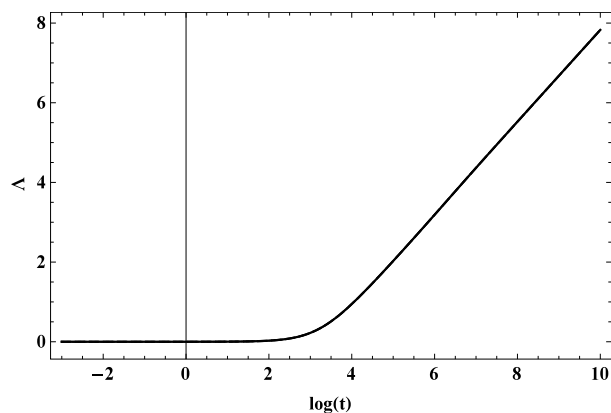


Рис. 138. Зависимость эволюции масштабной функции $\Lambda(t)$ от величины скалярного заряда: $q = 0.01; 0.1; 1; 10$.

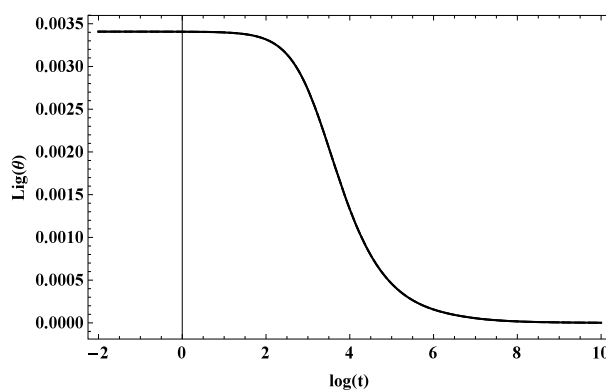


Рис. 139. Зависимость эволюции температуры плазмы θ от величины скалярного заряда: $q = 0.01; 0.1; 1; 10$.

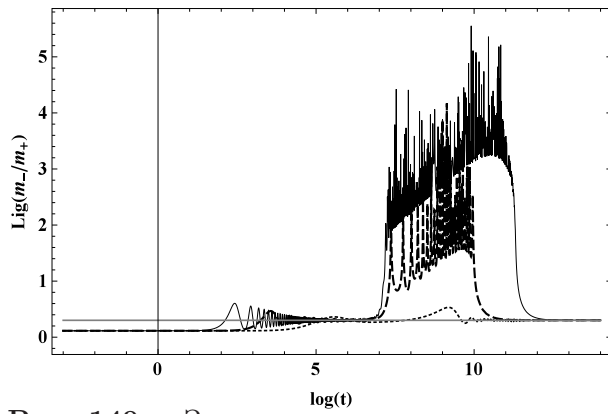


Рис. 140. Зависимость эволюции отношения масс античастиц к частицам $\text{Log}(m_-/m_+)$ от величины скалярного заряда: $q = 0.01; 0.1; 1$.

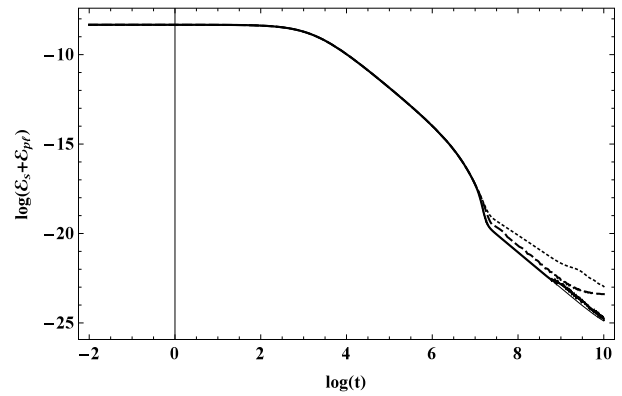


Рис. 141. Зависимость эволюции логарифма полной плотности энергии $\log(\mathcal{E}_s + \mathcal{E}_{pl})$ от величины скалярного заряда: $q = 0.01; 0.1; 1; 10$.

Глава X

Установление термодинамического равновесия в космологической модели с произвольным ускорением

X.1 Введение

В 1986 г. Автором на основе анализа результатов аксиоматической теории S -матрицы и экспериментальных данных по сечениям рассеяния частиц сверхвысоких энергий была выдвинута гипотеза о восстановлении скейлинга взаимодействий элементарных частиц при энергиях выше унитарного предела [7] и предложена формула асимптотического сечения рассеяния за унитарным пределом, имеющая скейлинговое поведение и составленная из трех фундаментальных констант - [5]. Восстановление скейлинга элементарных частиц в области сверхвысоких энергий эквивалентно восстановлению конформной инвариантности полевых уравнений в коротковолновом, квазиклассическом пределе. При этом восстанавливается и конформная инвариантность релятивистской кинетической теории в ультрарелятивистском пределе [6]. В [5] были сформулированы основные положения теории восстановления термодинамического равновесия в ультрарелятивистской космологической плазме, а в [8] — [10] на основе этих положений была построена численная модель восстановления термодинамического равновесия в ультрарелятивистской космологической плазме на ультрарелятивистском этапе расширения Вселенной и сформулированы основные результаты этой теории. Развита в указанных работах теория выявила ряд интересных особенностей процесса восстановления термодинамического равновесия в космологической плазме в ультрарелятивистской Вселенной и позволила наложить ряд наблюдатель-

ных ограничений на параметры начального неравновесного распределения частиц. В частности, было показано, что частицы, имеющие в современной Вселенной энергии выше $10^{12} \div 10^{13}$ Gev, могут быть реликтовыми, несущими информацию о космологической сингулярности. В работах [5], [11] — [13] была сформулирована диффузионная и исследована модель эволюции спектра частиц сверхвысоких энергий в ультрарелятивистской Вселенной. На семинаре «Gracos» (Yalchik, 2009) профессор В.Н. Мельников задал Автору вопрос, какие коррективы в неравновесные модели Вселенной может внести фактор ускорения Вселенной, обнаруженного в 1998 году и ставшего теперь общепризнанным фактом. Попытка ответа на это вопрос растянулась на 3 года и неожиданно привела к значительному обобщению и развитию теории восстановления термодинамического равновесия Вселенной и выявлению ряда весьма интересных фактов. Данная глава как раз и посвящена ответу на вышеуказанный вопрос, за который Автор весьма благодарен профессору В.Н. Мельникову.

Результаты главы опубликованы в статьях [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25].

Х.2 Общие принципы построения и решения уравнения энергодбаланса

Х.2.1 Модель материи

Как известно, уравнения Эйнштейна в случае изотропной однородной космологической модели с нулевой трехмерной кривизной сводятся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\varepsilon; \quad (\text{X.1})$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p(\varepsilon)) = 0. \quad (\text{X.2})$$

Далее:

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_s; \quad p = p_p + p_s, \quad (\text{X.3})$$

где ε_p, p_p — плотность энергии и давление космологической плазмы, ε_s, p_s — плотность энергии и давление всевозможных фундаментальных полей, возможно, скалярных, приводящих к ускорению Вселенной.

Х.2. Общие принципы построения и решения уравнения энергобаланса

Инвариантное ускорение Вселенной

$$\Omega = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (\text{X.4})$$

связано с *эффективным коэффициентом баротропии* материи, $\varkappa \equiv p/\varepsilon$, соотношением:

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\varkappa). \quad (\text{X.5})$$

Таким образом, на стадии ускорения ($t > t_1$):

$$0 < \Omega < 1, \Rightarrow -1 < \varkappa < -\frac{1}{3}. \quad (\text{X.6})$$

До этого момента $\varkappa \in [1/3, -1/3]$. Согласно (X.1) – (X.2) масштабный фактор и суммарная плотность энергии *при заданном постоянном коэффициенте баротропии* меняются по закону:

$$a = a_1 t^{2/3(\varkappa+1)}; \quad \varepsilon = \frac{1}{6\pi(\varkappa+1)^2 t^2}, \quad \varkappa + 1 \neq 0 \quad (\text{X.7})$$

Используя связь (X.5), перепишем соотношения (X.7) в более удобном для нас виде:

$$a = a_1 t^{1/(1-\Omega)}; \quad \varepsilon = \frac{3}{8\pi(1-\Omega)^2 t^2}, \quad \Omega < 1. \quad (\text{X.8})$$

Заметим, что при любых значениях инвариантного ускорения $\Omega = \text{Const} \in [-1, 1)$ плотность энергии пропорциональна t^{-2} .

Х.2.2 Основные предположения модели

Сформулируем *основные предположения*, которые положены в основу представленной ниже математической модели восстановления термодинамического равновесия в расширяющейся Вселенной:

1^о. Асимптотический характер взаимодействий элементарных частиц в области сверхвысоких энергий:

1^оа. *восстановление скейлинга взаимодействий* элементарных частиц при энергиях выше *унитарного предела*¹:

$$\sigma|_{s>s_u} \sim \frac{1}{s}, \quad (\text{X.9})$$

¹ $s_u \simeq m_u^2$, где m_u - масса самой тяжелой, «последней», промежуточной частицы, участвующей в четырехчастичных взаимодействиях, типа X - бозона

где s – первый кинематический инвариант – релятивистский квадрат импульса сталкивающихся частиц (см, например, [14]):

$$s = (p_a + p_b)^2 \equiv g_{ik}(p_a^i + p_b^i)(p_a^k + p_b^k);$$

1^ов. *унификация всех межчастичных взаимодействий* на основе фундаментальных постоянных G, \hbar, c при энергиях выше унитарного предела, что приводит с учетом (X.9) к формуле *универсального асимптотического сечения рассеяния* (подробности см. в [8]):

$$\sigma_0(s) = \frac{8\pi}{s\Lambda(s)}, \quad (\text{X.10})$$

$$\Lambda(s) = \ln^2 \left(1 + \frac{s_0}{s} \right), \quad (\text{X.11})$$

$s_0 = 4$ - квадрат полной энергии двух сталкивающихся планковских масс².

2^о. *Минимальность связи фундаментальных полей с космологической плазмой*. Это автоматически означает, что «закон сохранения энергии» (X.8) выполняется по отдельности для фундаментальных полей и плазмы:

$$\dot{\varepsilon}_s + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_s + p_s(\varepsilon_s)) = 0, \quad (\text{X.12})$$

$$\dot{\varepsilon}_p + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_p + p_p(\varepsilon_p)) = 0. \quad (\text{X.13})$$

3^о. *Ультррелятивистское уравнение состояния космологической плазмы* на рассматриваемой стадии расширения:

$$p_p = \frac{1}{3}\varepsilon_p, \quad (\text{X.13}) \Rightarrow \varepsilon_p a^4 = \text{Const}. \quad (\text{X.14})$$

4^о. *Ультррелятивистское начало Вселенной*:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varkappa = \frac{1}{3}. \quad (\text{X.15})$$

X.2.3 Баланс энергии космологической плазмы

Из (X.13) с учетом (X.14) сразу следует:

$$\varepsilon_p a^4 \equiv \tilde{\varepsilon}_p = \text{Const}, \quad (\text{X.16})$$

²В универсальной системе единиц $G = \hbar = c = 1$, которая и используется в книге; в обычных единицах $s_0 = 4\hbar c^5/G$

Х.2. Общие принципы построения и решения уравнения энергобаланса

где $\tilde{\varepsilon}_p$ — конформная плотность энергии космологической плазмы. Определим эту константу, полагая согласно (X.8) на начальной ультрарелятивистской стадии расширения:

$$a(t)|_{t \rightarrow 0} = \sqrt{t}. \quad (\text{X.17})$$

Тогда для конформной плотности энергии плазмы получим, предполагая, что космологическая плазма является единственной ультрарелятивистской компонентной материи, —

$$\tilde{\varepsilon}_p = \frac{3}{32\pi}. \quad (\text{X.18})$$

Введем далее температуру $T_0(t)$ космологической плазмы в идеальной Вселенной, в которой на данный момент космологического времени t вся плазма является локально равновесной. Таким образом, плотность энергии этой плазмы равна

$$\varepsilon_p^0 = \frac{N_0 \pi^2}{15} T_0^4(t), \quad (\text{X.19})$$

где $N_0 = N_B^0 + 1/2 N_F^0$ — эффективное число типов равновесных частиц (бозонов и фермионов) в плазме с температурой T_0 .

Отсюда с учетом (X.18) получаем закон эволюции температуры плазмы в равновесной Вселенной:

$$T_0(t) = \frac{1}{a(t)} \left(\frac{45}{32\pi^3 N_0} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (\text{X.20})$$

Относительно величины N_0 — *эффективного числа типов частиц*, находящихся в термодинамическом равновесии, мы будем полагать, что $N_0(t)$ — медленно меняющаяся функция космологического времени:

$$\dot{N}_0 t \ll 1. \quad (\text{X.21})$$

Пусть теперь $T(t)$ — истинная температура равновесной компоненты космологической плазмы, а $\Delta f_a(p, t)$ — функция распределения «а»-го сорта неравновесных частиц плазмы. Тогда найдем плотности энергии равновесной, ε_e , и неравновесной, ε_{ne} , компонент:

$$\varepsilon_e = \frac{N \pi^2}{15} T^4(t); \quad (\text{X.22})$$

$$\varepsilon_{ne} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_a (2S + 1) \int_0^\infty p^3 \Delta f_a(p, t) dp, \quad (\text{X.23})$$

где S – спин частиц; $N(t) = N_B + 1/2N_F$ – эффективное число типов равновесных частиц (бозонов и фермионов) в плазме с температурой $T(t)$. Выражая далее с помощью (X.20) масштабный фактор через температуру $T_0(t)$ и вводя новую *безразмерную* конформную импульсную переменную \tilde{p} :³

$$p = \left(\frac{45}{32\pi^3} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\tilde{p}}{a(t)} = T_0(t) N_0^{\frac{1}{4}} \tilde{p}, \quad (\text{X.24})$$

получим для (X.23):

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} = \frac{45}{64\pi^5} \sum_a (2S + 1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a(\tilde{p}, t) d\tilde{p}. \quad (\text{X.25})$$

Далее, из (X.20) и (X.22) получим для конформной плотности энергии равновесной компоненты плазмы:

$$\tilde{\varepsilon}_e = \frac{3}{32\pi} y^4, \quad (\text{X.26})$$

где введена безразмерная функция, $y(t)$ – *относительная температура* [9]:

$$y(t) = \frac{T(t)}{T_0(t)} \leq 1. \quad (\text{X.27})$$

Из (X.26) можно получить соотношение:

$$\sigma(t) \equiv y^4(t) \equiv \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_p} \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}_e}{\tilde{\varepsilon}_e + \tilde{\varepsilon}_{ne}}. \quad (\text{X.28})$$

Таким образом, закон сохранения энергии космологической плазмы (X.18) с помощью соотношений (X.23) и (X.26) можно переписать в виде:

$$y^4 + \frac{15}{2\pi^4} \sum_a (2S + 1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a(\tilde{p}, t) d\tilde{p} = 1. \quad (\text{X.29})$$

Соотношение (X.29) и называется *уравнением энергобаланса плазмы*. Оно получено нами при использовании трех предположений модели – 2^о, 3^о, 5^о. Заметим, что в предыдущих статьях это основное соотношение математической

³В отличие от импульсной переменной, p , давление обозначается римским шрифтом, – р.

Х.3. Кинетическое уравнение для неравновесных частиц

модели восстановления термодинамического равновесия выводилось при более частных предположениях. При заданной зависимости функции распределения неравновесных частиц от температуры равновесной компоненты плазмы и космологического времени уравнение энергодбаланса становится нелинейным интегральным уравнением относительно температуры равновесной компоненты. Следовательно, для получения этого уравнения в явной форме необходимо решить кинетическое уравнение для неравновесных частиц.

Х.3 Кинетическое уравнение для неравновесных частиц

Х.3.1 Решение кинетического уравнения

Как было показано в [9], кинетическое уравнение для сверхтепловых частиц в ультрарелятивистской плазме имеет вид:

$$p \frac{\partial \Delta f_a}{\partial t} = - \frac{4\pi N}{3} \frac{T^2(t)}{\Lambda(pT/2)} \Delta f_a, \quad (\text{X.30})$$

где $\Delta f_a = \Delta f_a(\tilde{p}, t)$, $\Lambda = \Lambda(s)$. Используя здесь соотношение (X.24), приведем (X.30) к виду:

$$\frac{\partial \Delta f_a}{\partial t} = - \frac{8\pi N}{3\tilde{p}\Lambda(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N^{1/4})} \times \left(\frac{2\pi^3}{45}\right)^{1/4} T^2(t) a(t) \Delta f_a. \quad (\text{X.31})$$

Решая (X.31), получим:

$$\Delta f_a(t, \tilde{p}) = \Delta f_a^0(\tilde{p}) \times \exp \left[- \frac{8\pi}{3\tilde{p}} \left(\frac{2\pi^3}{45}\right)^{1/4} \int_0^t \frac{NaT^2 dt}{\Lambda(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N_0^{1/4})} \right], \quad (\text{X.32})$$

где

$$\Delta f_a^0(\tilde{p}) \equiv \Delta f_a(0, \tilde{p}). \quad (\text{X.33})$$

Х.3.2 Переход к безразмерным нормированным переменным

Введем среднюю конформную энергию неравновесной компоненты ультрарелятивистских частиц в начальный момент времени, $\langle \tilde{p} \rangle_0$, –

$$\langle \tilde{p} \rangle_0 = \frac{\tilde{\varepsilon}(0)}{\tilde{n}(0)} \equiv \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\tilde{p}) \tilde{p}^3 d\tilde{p}}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\tilde{p}) \tilde{p}^2 d\tilde{p}} \quad (\text{X.34})$$

и безразмерную нормированную импульсную переменную, ρ , –

$$\rho \equiv \frac{\tilde{p}}{\langle \tilde{p} \rangle_0}, \quad (\text{X.35})$$

так что

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle_0 &= \frac{\tilde{\varepsilon}(0)}{\langle \tilde{p} \rangle_0 \tilde{n}(0)} \equiv 1 \Rightarrow \\ \langle \rho \rangle_0 &= \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\rho) \rho^3 d\rho}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\rho) \rho^2 d\rho} = 1. \end{aligned} \quad (\text{X.36})$$

Согласно математической модели неравновесной плазмы средняя энергия частиц в первоначальном неравновесном распределении должна больше и даже значительно больше тепловой энергии частиц, таким образом согласно (X.24), (X.34) в рассматриваемой нашей модели:

$$\langle \tilde{p} \rangle_0 \gg 1. \quad (\text{X.37})$$

Фактически величина $\langle \tilde{p} \rangle_0$ является *независимым параметром* рассматриваемой здесь модели, – физический смысл этого безразмерного параметра – отношение средней энергии частиц первоначального неравновесного распределения к температуре плазмы в равновесной Вселенной в начальный момент времени⁴. В отличие от конформной импульсной \tilde{p} переменной среднее значение безразмерной конформной импульсной переменной ρ в начальном распределении тождественно равно 1.

⁴Сами эти величины бесконечно, но их отношение конечно.

Х.3. Кинетическое уравнение для неравновесных частиц

Преобразуем выражение в экспоненте (X.32), переходя к безразмерным переменным y, ρ . Учитывая слабую зависимость логарифмического фактора Λ от своих аргументов, а также убывающий характер подынтегральной функции в (X.32), примем следующую оценку логарифмического фактора:

$$\Lambda \left(\frac{1}{2} \tilde{p} T_0 T N_0^{1/4} \right) \simeq \Lambda(\langle \tilde{p} \rangle_0 T_0^2) \equiv \Lambda_0(t). \quad (\text{X.38})$$

Таким образом, с логарифмической точностью представим решение (X.32) в компактной форме:

$$\Delta f_a(t, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \exp \left(-\frac{2}{\rho} \int_0^t \xi \frac{y^2}{a} dt \right), \quad (\text{X.39})$$

где введено обозначение:

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \xi(t) = \left(\frac{5\pi}{18} \right)^{1/4} \frac{N}{N_0^{1/2} \Lambda_0(t)} \\ &\approx 0.967 \frac{N}{N_0^{1/2} \Lambda_0(t)} \approx \frac{N}{N_0^{1/2} \Lambda_0(t)}. \end{aligned} \quad (\text{X.40})$$

Вводя теперь новую безразмерную временную переменную, τ ,

$$\tau = 2 \int_0^t \frac{\xi}{a} dt, \quad (\text{X.41})$$

такую, что:

$$\frac{d\tau}{dt} \equiv 2 \frac{\xi}{a} > 0, \quad (\text{X.42})$$

и новую безразмерную функцию, $Z(\tau)$,

$$Z(\tau) = \int_0^\tau y^2(\tau) d\tau, \quad (\text{X.43})$$

приведем решение кинетического уравнения (X.39) к виду:

$$\Delta f_a(\tau, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \cdot e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}. \quad (\text{X.44})$$

Исследуем более детально *уравнение связи* (X.41) безразмерной временной переменной τ и космологическим временем t . Полагая в (X.41) степенную зависимость масштабного фактора $a(t)$ от космологического времени и принимая во внимание слабую зависимость от времени фактора ξ , получим:

$$a \sim t^\alpha, \quad (\alpha \neq 1, 0) \Rightarrow \tau \sim t^{1-\alpha}; \quad \alpha = 1 \Rightarrow \tau \sim \ln t. \quad (\text{X.45})$$

Отсюда следует, что при $\alpha \leq 1 \rightarrow \tau(\infty) = \infty$, а при $\alpha < 1 \rightarrow \tau(\infty) = \tau_\infty < \infty$. Сравнивая соотношение (X.45) с соотношениями (X.5) – (X.8), приходим к следующему важному выводу:

$$\kappa \geq -\frac{1}{3} \quad (\Omega \leq 0) \Rightarrow \tau(\infty) = +\infty; \quad (\text{X.46})$$

$$\kappa < -\frac{1}{3} \quad (\Omega > 0) \Rightarrow \tau(\infty) = \tau_\infty < +\infty. \quad (\text{X.47})$$

Поскольку функция распределения неравновесной компоненты космологической плазмы (X.44) зависит от времени лишь посредством *монотонно возрастающей функции* безразмерной временной переменной $Z(\tau)$, то соотношения (X.46) – (X.47) означают, что в ультрарелятивистской космологической плазме во Вселенной с отрицательным ускорением асимптотически достигается полное термодинамическое равновесие, тогда как *в ускоряющейся Вселенной термодинамическое равновесие никогда строго не достигается*.

X.3.3 Конформная плотность энергии неравновесной компоненты

Подставляя решение кинетического уравнения в форме (X.44) в выражение для конформной плотности энергии неравновесных частиц, получим

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} = \frac{45}{64\pi^5} \sum_a (2S + 1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a^0(\rho) e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}. \quad (\text{X.48})$$

Произведем тождественное преобразование с этим выражением, учитывая что согласно определению (X.28) и уравнению энергобаланса (X.29):

$$\tilde{\varepsilon}_{ne}^0 = (1 - \sigma_0) \frac{3}{32\pi}; \quad (\text{X.49})$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}_{ne}}{\tilde{\varepsilon}_{ne}^0} \tilde{\varepsilon}_{ne}^0 = (1 - \sigma_0) \Phi(Z) \frac{3}{32\pi}, \quad (\text{X.50})$$

Х.3. Кинетическое уравнение для неравновесных частиц

где мы с учетом преобразования к безразмерной импульсной переменной ρ (X.35) ввели новую безразмерную функцию $\Phi(Z)$:

$$\Phi(Z) \equiv \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho) e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho)}. \quad (\text{X.51})$$

Х.3.4 Решение и исследование уравнения энергобаланса

Вследствие определения (X.43) функция $Z(\tau)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$Z'(\tau) = y^2(\tau) \Rightarrow Z'^2 = \sigma(\tau); \quad (\text{X.52})$$

$$Z(0) = 0; \quad Z'(0) = y^2(0) = \sqrt{\sigma_0}, \quad (\text{X.53})$$

где

$$Z' \equiv \frac{dZ}{d\tau} > 0. \quad (\text{X.54})$$

Таким образом, с учетом (X.50) – (X.52) уравнение энергобаланса (X.29) можно переписать в виде дифференциального уравнения относительно функции $Z(\tau)$:

$$\begin{aligned} y^2 + (1 - \sigma_0)\Phi(Z) &= 1 \Rightarrow \\ Z'^2 + (1 - \sigma_0)\Phi(Z) &= 1, \end{aligned} \quad (\text{X.55})$$

решая которое с учетом соотношений (X.53) – (X.54), найдем формальное решение в неявном виде:

$$\int_0^Z \frac{du}{\sqrt{1 - (1 - \sigma_0)\Phi(u)}} = \tau. \quad (\text{X.56})$$

Согласно определению (X.51) функция $\Phi(Z)$ неотрицательна:

$$\Phi(Z) > 0, \quad (Z \in [0, +\infty)), \quad (\text{X.57})$$

причем

$$\Phi(0) = 1; \quad \lim_{Z \rightarrow +\infty} \Phi(Z) = 0. \quad (\text{X.58})$$

Вычисляя первую и вторую производную по Z от функции $\Phi(Z)$, дифференцируя соотношение (X.51) по Z , получим:

$$\Phi(Z)'_Z < 0, \quad (Z \in [0, +\infty)); \quad (\text{X.59})$$

$$\Phi(Z)'' > 0, \quad (Z \in [0, +\infty)). \quad (\text{X.60})$$

Вследствие (X.59) функция $\Phi(Z)$ является строго монотонно убывающей, но тогда вследствие соотношений (X.58) эта функция ограничена на интервале:

$$\Phi(Z) \in [0, 1]; \quad (Z \in [0, +\infty)), \quad (\text{X.61})$$

причем график функции $\Phi(Z)$ вогнутый. Вследствие этих свойств функции $\Phi(Z)$ уравнение $\Phi(Z) = \Phi_0$ на рассматриваемом интервале значений всегда имеет одно и только одно решение $Z = Z_0$, т.е., *отображение $Y = \Phi(Z)$ на множестве неотрицательных чисел является биективным.*

Далее, из соотношения (X.52) следует, что функция $Z(\tau)$ является монотонно возрастающей на интервале $\tau \in [0, \tau_\infty]$. Дифференцируя соотношение (X.55) по τ как сложную функцию, получим:

$$Z'[2Z'' + (1 - \sigma_0)\Phi'_Z] = 0. \quad (\text{X.62})$$

Отсюда вследствие положительности Z' (X.55) найдем вторую производную:

$$Z'' = -\frac{1}{2}(1 - \sigma_0)\Phi'_Z. \quad (\text{X.63})$$

Поэтому вследствие (X.59) и (X.27) – (X.28) получим из (X.63):

$$Z'' > 0, \quad (\text{X.64})$$

т.е., график функции $Z(\tau)$ также является вогнутым. Далее, дифференцируя (IV.53), получим с учетом (X.64):

$$y' > 0, \quad (\text{X.65})$$

— т.е. функция $y(\tau)$ (а вместе с ней и функция $\sigma(\tau)$) является монотонно возрастающей. С другой стороны, она ограничена снизу начальным значением y_0 (σ_0), а сверху — значением 1:

$$y' > 0, y \in [y_0, 1); \quad \sigma' > 0, \sigma \in [\sigma_0, 1). \quad (\text{X.66})$$

Перечисленные свойства функций $y(\tau)$, $Z(\tau)$ и $\Phi(Z)$ обеспечивают биективность цепочки отображений $\tau \leftrightarrow y$, $y \leftrightarrow Z$, $Z \leftrightarrow \Phi$. В итоге, каждому

Х.3. Кинетическое уравнение для неравновесных частиц

значению Φ соответствует одно и только одно значение Z и одно и только одно значение τ : $\tau \leftrightarrow \Phi$. Для замыкания этой цепочки достаточно определить связь функций $y(\tau)$ и $Z(\tau)$ с помощью уравнения энергодбаланса (X.56):

$$y = [1 - (1 - \sigma_0)\Phi(Z)]^{1/4}. \quad (\text{X.67})$$

Уравнения (X.56) и (X.67) являются параметрическим решением уравнения энергодбаланса (X.55), а вышеперечисленные свойства функций $\Phi(Z)$ и $Z(\tau)$ обеспечивают единственность его решения. Согласно (X.51) функция $\Phi(Z)$ полностью определяется начальным распределением неравновесных частиц $\Delta f_a^0(\rho)$. Поэтому с математической точки зрения задача о восстановлении термодинамического равновесия во Вселенной с произвольным ускорением полностью решена. Конкретные модели определяются моделью темной материи и моделью первоначального неравновесного распределения частиц.

Продифференцируем теперь соотношение (X.63) по τ и учтем связь (X.52) между функциями $y(\tau)$ и $Z(\tau)$:

$$\begin{aligned} Z''' &= -\frac{1}{2}(1 - \sigma_0)\Phi''_{ZZ}Z' \\ \Rightarrow y''y &= -y'^2 - \frac{1}{4}(1 - \sigma_0)\Phi''_{ZZ}y^2. \end{aligned}$$

Таким образом, вследствие (X.60):

$$y'' < 0, \quad (\text{X.68})$$

— т.е., график функции $y(\tau)$, а вместе с ним и $\sigma(\tau)$, является выпуклым. Далее, поскольку $\Phi_Z(Z \rightarrow \infty) = 0$, из (X.63) следует:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y'(\tau) = 0 \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma'(\tau) = 0, \quad (\text{X.69})$$

— т.е., значение $\sigma = 1$ достигается асимптотически при $\tau \rightarrow \infty$. Это позволяет нарисовать качественный график функции $y(\tau)$ (Рис. X.3.4). Конечность безразмерного времени τ_∞ приводит к установлению предельного значения функции $y(\tau)$:

$$y(\tau_\infty) = y_\infty < 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_\infty < 1. \quad (\text{X.70})$$

Вследствие этого часть энергии космологической плазмы навсегда консервируется в неравновесной сверхтепловой компоненте:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{ne}(t)}{\varepsilon_p(t)} = 1 - \sigma_\infty = \begin{cases} = 0, & \tau_\infty = \infty \\ > 0, & \tau_\infty < \infty \end{cases}. \quad (\text{X.71})$$

Согласно (X.46) – (X.47) это возможно лишь для ускоренно расширяющейся Вселенной.

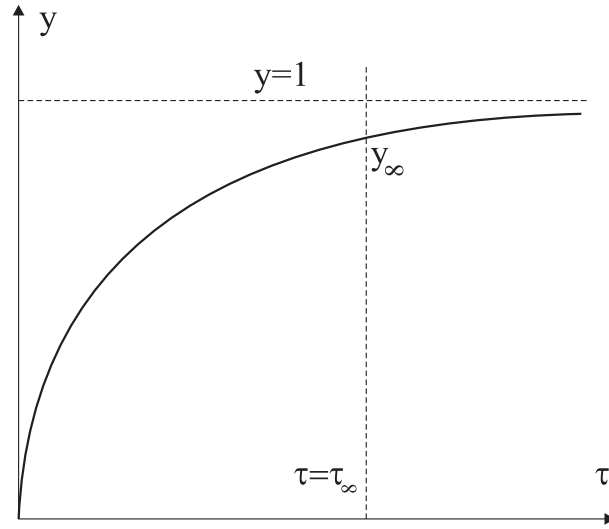


Рис. 142. 6

Качественный вид графика функции $y(\tau)$.

X.4 Точная модель перехода с ультрарелятивистской стадии на инфляционную

Рассмотрим следующую простую модель материи, состоящей из двух компонент – минимально связанного массивного скалярного поля (космологический член) с уравнением состояния:

$$p_s = -\varepsilon_s, \quad (X.72)$$

и ультрарелятивистской плазмы с уравнением состояния (X.14). Тогда суммарный коэффициент баротропы и инвариантное ускорение можно записать в виде:

$$\varkappa(t) = \frac{1}{3} \frac{1 - 3\delta}{1 + \delta}; \quad \Omega(t) = -\frac{1 - \delta}{1 + \delta}, \quad (X.73)$$

где

$$\delta = \delta(t) = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}. \quad (X.74)$$

Таким образом, при $\delta = \text{Const}$ формулы (X.7) можно записать в следующем удобном виде:

$$a = a_1 t^{(1+\delta)/2}; \quad \varepsilon = \frac{3}{32\pi} \frac{(1 + \delta)^2}{t^2}, \quad \Omega < 1. \quad (X.75)$$

Х.4. Точная модель перехода с ультрарелятивистской стадии на инфляционную

Законы сохранения энергии (X.12) – (X.13) принимают вид:

$$\varepsilon_s = \text{Const} = \frac{3\Xi^2}{8\pi}; \quad (\text{X.76})$$

$$\varepsilon_p a^4 \equiv \tilde{\varepsilon}_p = \text{Const} \simeq \frac{3}{32\pi}. \quad (\text{X.77})$$

Подставляя (X.76)-(X.77) в уравнение (X.1) и интегрируя его, получим:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(t_0 + \sqrt{t_0^2 + b^2} \right) e^{(t-t_0)/2\Xi} - \frac{b^2}{t_0 + \sqrt{t_0^2 + b^2}} e^{-(t-t_0)/2\Xi} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{X.78})$$

где:

$$b^2 = \frac{3}{32\pi\Xi^2}. \quad (\text{X.79})$$

В частности, при $t_0 = 0$ для масштабного фактора имеем отсюда:

$$a(t) = \frac{1}{\Xi} \sqrt{\frac{3}{32\pi} \text{sh} \frac{t}{2\Xi}} \quad (\text{X.80})$$

Вычисляя согласно (X.74), (X.76), (X.77) и (X.80) отношение δ , найдем:

$$\delta(t) = \left(\frac{3}{16\pi\Xi} \text{sh} \frac{t}{2\Xi} \right)^2. \quad (\text{X.81})$$

Далее, согласно (X.74) можно вычислить эффективный коэффициент баротропы и инвариантное ускорение (см. Рис. 143).

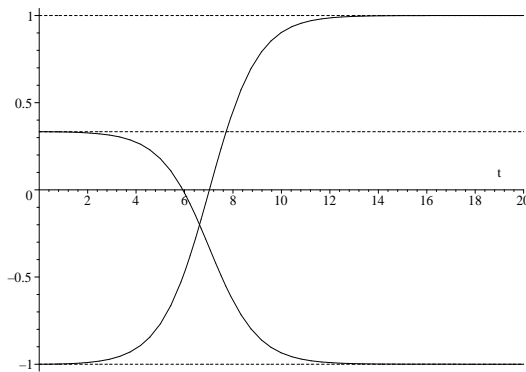


Рис. 143. Эволюция эффективного коэффициента баротропы $\kappa(t)$ (тонкая линия) и инвариантного ускорения $\Omega(t)$ (жирная линия) относительно точного решения (X.80) при $\Xi = 1$. Пунктирными линиями показаны асимптоты -1 ; $1/3$; 1 .

Следующий рисунок показывает, что с помощью параметра Ξ можно легко управлять временем перехода на инфляционный режим ускорения $\kappa \rightarrow -1$. Напомним, что космологическое время t измеряется в планковских единицах.

Таким образом, согласно (X.41) определим новую безразмерную временную переменную, τ :

$$\tau = \frac{2\Xi\langle\xi\rangle}{\langle\tilde{p}\rangle_0} F(\varphi, 1/\sqrt{2}), \quad (\text{X.82})$$

где:

$$\varphi = \arccos \frac{1 - \text{sh } t/2\Xi}{1 + \text{sh } t/2\Xi}; \quad (\text{X.83})$$

$F(\varphi, k)$ – эллиптический интеграл первого рода (см., например, [15]):

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}; \quad (k^2 < 1). \quad (\text{X.84})$$

Таким образом:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{2\Xi} \frac{1}{\text{sh } \varphi} \frac{\text{ch } \varphi}{1 + \text{sh } \varphi} > 0; \quad \tau \in [0, \tau_\infty), \quad (\text{X.85})$$

где⁵

$$\tau_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) = \frac{2\Xi\langle\xi\rangle}{\langle\tilde{p}\rangle_0} F(1, 1/\sqrt{2}). \quad (\text{X.86})$$

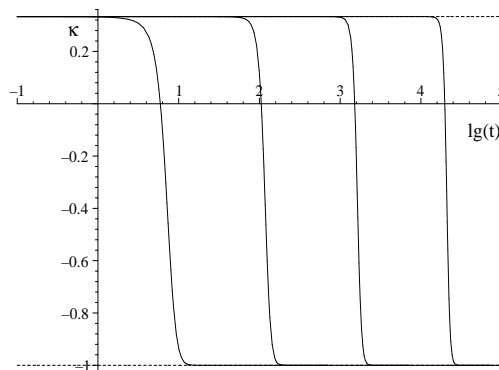


Рис. 144. Эволюция эффективного коэффициента баротропы $\kappa(t)$ при $\Xi = 1; 10; 100; 1000$ (слева направо) относительно точного решения (X.80). Пунктирными линиями показаны асимптоты $\kappa = -1$; $\kappa = 1/3$. Вдоль оси абсцисс отложены значения $\log_{10} t$.

⁵ $F(1, 1/\sqrt{2}) \approx 1.083216773$.

Литература

- [1] Игнатъев, Ю.Г. Релятивистская кинетическая теория неравновесных процессов в гравитационных полях / Ю.Г. Игнатъев. – Казань: Фолиант, 2010. – 506 с. – Режим доступа: <http://rgs.vniims.ru/books/kinetics.pdf>.
- [2] Игнатъев, Ю.Г. Неравновесная Вселенная: кинетические модели космологической эволюции / Ю.Г. Игнатъев. – Казань: Казанский университет, 2013. – 316 с. – Режим доступа: http://www.stfi.ru/rpha/2013_2_Ignatiev.pdf; <http://rgs.vniims.ru/books/universe.pdf>.
- [3] Игнатъев, Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию / Ю.Г. Игнатъев. – Казань: Казанский университет, . – 298 с.
- [4] Игнатъев, Ю.Г. Математические основы физики: Математические модели теоретической физики с примерами решения задач в СКМ Maple / Ю.Г. Игнатъев, А.А. Агафонов. – Казань: Казанский университет, 2016. – 244 с.
- [5] Ignat'ev, Yu.G. A possibility of a violation of a thermodynamic equilibrium in the early universe / Yu.G. Ignat'ev // Soviet Physics Journal. – 1986. – Vol. 29, No 2. – P. 104–108.
- [6] Ignat'ev, Yu.G. Relativistic kinetic theory and conformal transformations / Yu.G. Ignat'ev // Soviet Physics Journal. – 1982. – Vol. 25, No 4. – P. 372–375.
- [7] Landau, L.D. Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1949. – Vol. 10. – P. 718.

Литература

- [8] Ignatyev, Yu.G. Kinetics of the nonequilibrium Universe. I. Local thermodynamic equilibrium condition / Yu.G. Ignatyev // *Gravitation and Cosmology*. – 2007. – Vol. 13, No. 1. – P. 31–42.
- [9] Ignatyev, Yu.G. Kinetics of the nonequilibrium Universe. II. Kinetics of Local thermodynamic equilibrium recovery / Yu.G. Ignatyev, D.Yu. Ignatyev // *Gravitation and Cosmology*. – 2007. – Vol. 13, No. 2. – P. 101–113.
- [10] Ignatyev, Yu.G. Kinetics of non-equilibrium Universe. III. Stability of non-equilibrium scenario / Yu.G. Ignatyev, D.Yu. Ignatyev // *Gravitation and Cosmology*. – 2008. – Vol. 14, No. 4. – P. 309–313.
- [11] Ignatyev, Yu.G. Diffuzion model of evolution of superthermal high-energy particles under scalling in the early universe / Yu.G. Ignatyev, R.A. Ziatdinov // *Gravitation and Cosmology*. – 2006. – Vol. 12, No. 4. – P. 293–302.
- [12] Ignatyev, Yu.G. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles under scaling in the early Universe. II. Early stages / Yu.G. Ignatyev, R.A. Ziatdinov // *Gravitation and Cosmology*. – 2008. – Vol. 14, No. 4. – P. 301–308.
- [13] Ignat'ev, Yu.G. An asymptotic approximation of the Fokker-Planck model of evolution of superthermal ultrarelativistic particles in the presence of interaction scaling / Yu.G. Ignat'ev, R.A. Ziatdinov // *Russian Physics Journal*. – 2009. – Vol. 52, No. 2. – P. 210–215.
- [14] Pilkuhn, H.M. *Relativistic Particle Physics*. – 1979. – P. 544
- [15] Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
- [16] Ignat'ev, Yu.G. Impossibility of strict thermodynamic equilibrium establishment in the accelerated Universe. – <http://arxiv.org/pdf/1308.1569v3.pdf>.
- [17] Ignatyev, Yu.G. Numerical Simulation of Establishment of thermodynamic equilibrium in cosmological model with an arbitrary acceleration. – <http://arxiv.org/pdf/1310.2183.pdf>.

Литература

- [18] Игнатъев, Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. III. Модель энергодбаланса для инфляционной стадии / Ю.Г. Игнатъев // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. – 2013. – № 2. – С. 5–10.
- [19] Игнатъев, Ю.Г. Строгая кинетическая модель восстановления термодинамического равновесия в ускоряющейся Вселенной / Ю.Г. Игнатъев // *Известия Вузов. Физика*. – 2013. – Т. 56, № 6. – С. 80–90.
- [20] Ignatyev, Yu.G. Establishment of Thermodynamic Equilibrium in a Cosmological Model with Arbitrary Acceleration / Yu.G. Ignatyev // *Gravitation and Cosmology*. – 2013. – Vol. 19, No. 4. – P. 232–239.
- [21] Ignatev, Yu. G. Exact kinetic model of restoration of thermodynamic equilibrium in an accelerating Universe / Yu. G. Ignat'ev // *Russian Physics Journal*. – 2013. – Vol. 56, No. 6. – P. 693–706.
- [22] Игнатъев, Ю.Г. Термодинамическое равновесие в ускоренной Вселенной недостижимо? / Ю.Г. Игнатъев // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. – 2013. – № 4. – С. 28–55.
- [23] Игнатъев, Ю.Г. Численные модели процесса восстановления термодинамического равновесия в ускоряющейся Вселенной / Ю.Г. Игнатъев // *Известия Вузов. Физика*. – 2014. – Т. 57, № 1. – С. 26–31.
- [24] Ignatyev, Yu. G. Numerical Simulation of Thermodynamic Equilibrium Establishment in a Cosmological Model with Arbitrary Acceleration / Yu. G. Ignatyev // *Gravitation and Cosmology*. – 2014. – Vol. 20, No. 1. – P. 99–105.
- [25] Ignat'ev Yu. G. Numerical models of the process of restoration of thermodynamic equilibrium in an accelerated Universe / Yu. G. Ignat'ev // *Russian Physics Journal*. – 2014. – Vol. 57, No. 1. – P. 28–34.
- [26] Игнатъев, Ю.Г. Макроскопическая космология ранней Вселенной / Ю.Г. Игнатъев // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. – 2015. – № 3. – С. 16–22.
- [27] Ignat'ev, Yu.G. Macroscopic Einstein Equations for a Cosmological Model with Λ -term. – <http://arXiv:1509.01235v1>.

Литература

- [28] Ignat'ev, Yu.G. Macroscopic Einstein Equations for a Cosmological Model with Λ - Term / Yu.G. Ignat'ev // Gravitation and Cosmology. – 2016. – Vol. 22, No 3. – P. 32–37.
- [29] Игнат'ев, Ю.Г. Программа аналитических вычислений в теории возмущений второго порядка уравнений Эйнштейна в прикладном математическом пакете Maple / Ю.Г. Игнат'ев, А.А. Агафонов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. – 2016. – № 2016616385. – Федеральная служба по интеллектуальной собственности.
- [30] Игнат'ев, Ю.Г. Физическая неустойчивость модели Вселенной с инфляционным (де-Ситтеровским) началом / Ю.Г. Игнат'ев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2015. – № 3. – С. 5–15.
- [31] Starobinsky, A.A. Lectures on modern problems of cosmology / A.A. Starobinsky // Труды международной школы по гравитации и космологии – «Gracos-2014». – 2014. – Казань: Казанский университет. – С. 48–59.
- [32] Lifshitz, E.M. JETP. – 1946. – Vol. 16. – P. 697.
- [33] Landau, L.D. The Classical Theory of Fields. Oxford-New York-Toronto-Sydney-Paris-Frankfurt: Pergamon Press. – 1971.
- [34] Isaacson, R.A. Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics / R.A. Isaacson // Physical Review. – 1966. – Vol. 166. – P. 1263.
- [35] Isaacson, R.A. Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Nonlinear Terms and the Effective Stress Tensor / R.A. Isaacson // Physical Review. – 1966. – Vol. 166. – P. 1272.
- [36] Власов, А.А. О вибрационных свойствах электронного газа / А.А. Власов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1938. – Т. 8, № 3. – С. 291.

Литература

- [37] Власов, А.А. Теория вибрационных свойств электронного газа и её приложения / А.А. Власов // Ученые записки. Физика. МГУ. – 1945. – Вып. 75, Кн. 2., Ч. 1. – С.195.
- [38] Власов, А.А. Статистические функции распределения / А.А. Власов. – М: Наука, 1966. – 356 с.
- [39] Чандрасекар, С. Принципы звездной динамики / С. Чандрасекар. – М: ИЛ, 1948. – 264 с.
- [40] Игнат'ев, Ю.Г. Статистическая динамика ансамбля классических частиц в гравитационном поле / Ю.Г. Игнат'ев // Гравитация и теория относительности: сборник статей / под ред. В.Р. Кайгородова. 1983. – Казань, Вып. 20. – С. 50–109.
- [41] Ignat'ev, Yu.G. Statistical dynamics of a classical particle ensemble in the gravitational field / Yu.G. Ignat'ev // Gravitation and Cosmology. – 2007. – Vol. 13, No1. – P. 59–79.
- [42] Ignat'ev, Yu.G. Kinetic equations for ultrarelativistic particles in a Robertson - Walker universe and isotropization of relic radiation by gravitational interactions / Yu.G. Ignat'ev, A.A. Popov // Astrophysics and Space Science. – 1990. – Vol. 163. – P. 153–174. – <https://arxiv.org/pdf/1101.4303.pdf>.
- [43] Игнат'ев, Ю.Г. О статистическом описании ансамбля ультрарелятивистских частиц в пространственно - плоской Вселенной / Ю.Г. Игнат'ев, А.А. Попов // Известия ВУЗов. Физика. – 1989. – № 5. – С. 34–39.
- [44] Петров, А.З. Новые методы в общей теории относительности / А.З. Петров. – М: Наука, 1966. – 496 с.
- [45] Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. – СПб.: Лань, 2003. – 447 с.
- [46] Ignat'ev, Yu.G. Instability Model of the Universe with De Sitter Beginning / Yu.G. Ignat'ev. – 2015. – <http://arxiv.org/abs/1508.05375>.
- [47] Ho Ch. M., Hsu S.D.H. Instability of Quantum de Sitter Spacetime. – <http://arXiv:1501.00708v2>.

Литература

- [48] Лебедев, Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. – М: ГИФМЛ, 1963. – 360 с.
- [49] Einstein, A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie / A. Einstein // Sitzungsber preus, Akad. Wiss. – 1917. – Vol.1. – P. 142–152.
- [50] Sitter, De. // Proc. Acad. Amsterdam. – 1917.
- [51] Einstein, A. // Sitzungsber preus, Akad. Wiss. – 1918. – No 1. – P. 270.
- [52] Friedmann, A. // Z. Phys. – 1922. – No 11. – P. 326.
- [53] Глинер, Э. Б. Алгебраические свойства тензора энергии-импульса и вакуумоподобные состояния вещества / Э. Б. Глинер // ЖЭТФ. – 1965. – Т. 49, вып. 2. – С. 542.
- [54] Starobinsky, A. A. // Sov. Astron. Lett. – 1978. – Vol. 4. – P. 82.
- [55] Starobinsky, A.A. // Phys. Lett. B. – 1980. – Vol. 91, No. 1. – P. 99.
- [56] Богоявленский, О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике / О.И. Богоявленский. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
- [57] Ignat'ev, Yu.G. Стандартная космологическая модель: математический, качественный и численный анализ. Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2016. (в печати)
- [58] Ignat'ev, Yu.G. Relativistic canonical formalism and the invariant single-particle distribution function in the general theory of relativity / Yu.G. Ignat'ev // Soviet Physics Journal. – 1983. – Vol.26. – P. 686–690.
- [59] Ignat'ev, Yu.G. Relativistic kinetic equations for inelastically interacting particles in a gravitational field Russ / Yu.G. Ignat'ev // Soviet Physics Journal. – 1983. – Vol.26. – P. 690–694.
- [60] Ignat'ev, Yu.G. Conservation laws and thermodynamic equilibrium in the general relativistic kinetic theory of inelastically interacting particles / Yu.G. Ignat'ev // Soviet Physics Journal. – 1983. – Vol. 26. – P. 1068–1072.

Литература

- [61] Ignat'ev, Yu.G. Cosmological evolution of plasma with scalar interparticle interaction. I. Canonical formulation of classical scalar interaction / Yu.G. Ignat'ev // Soviet Physics Journal. – 2012 – Vol. 55, No. 2. – P. 166–172. – <http://arxiv.org/abs/1307.1787v1>.
- [62] Ignatiev Yu.G. Cosmological evolution of the degenerated plasma with interparticle scalar interaction. II. Formulation of mathematical model / Yu. G. Ignatiev // Soviet Physics Journal. – 2012 – Vol. 55, No. 5. – P. 550–560. – <http://arxiv.org/abs/1307.2472>.
- [63] Ignatyev, Yu.G. Cosmological evolution of the plasma with interparticle scalar interaction. III. model with attraction of like-charged scalar particles / Yu.G. Ignatyev // Soviet Physics Journal. – 2013 – Vol. 55, No. 11. – P. 1345–1350. – <http://arxiv.org/abs/1307.2509>.
- [64] Ignatyev, Yu.G. Statistical Systems with Phantom Scalar Interaction in Gravitation Theory. I. Microscopic Dynamics / Yu.G. Ignatyev, D.Yu. Ignatyev // Gravitation and Cosmology. – 2014. – Vol. 20, No. 4. – P. 299–303. – <http://arxiv.org/abs/1408.3404>.
- [65] Игнат'ев, Ю.Г. Неминимальные макроскопические модели скалярного поля, основанные на микроскопической динамике / Ю.Г. Игнат'ев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2014. – No 1. – С. 47–69.
- [66] Ignatyev, Yu.G. Statistical Systems with Phantom Scalar Interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models / Yu.G. Ignatyev, A.A. Agathonov, D.Yu. Ignatyev // Gravitation and Cosmology. – 2014. – Vol. 20, No. 4. – P. 304–308. – <http://arxiv.org/abs/1408.3419>.
- [67] Ignatyev, Yu.G. Nonminimal Macroscopic Models of a Scalar Field Based on Microscopic Dynamics: Extension of the Theory to Negative Masses / Yu G. Ignatyev // Gravitation and Cosmology. – 2015. – Vol. 21, No. 4. – P. 296–308.
- [68] Игнат'ев, Ю.Г. Неминимальные макроскопические модели скалярного поля, основанные на микроскопической динамике. IV. Расширение теории на отрицательные массы / Ю.Г. Игнат'ев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2015. – № 2. – С. 28–37.

Литература

- [69] Ignat'ev, Yu.G. Nonminimal Macroscopic Models of a Scalar Field Based on Microscopic Dynamics. I. Extension of the Theory for Negative Masses / Yu.G. Ignat'ev. – 2015. – <http://arxiv.org/abs/1504.02768>.
- [70] Cartan, E. Les espaces de Finsler, Paris. – 1934.
- [71] Vlasov, A.A. Statistical Distribution Functions. Moskow: Nauka, 1966.
- [72] Petrov, A.Z. Einstein spaces / A.Z. Petrov // Published by Pergamon Press. – 1969.
- [73] Synge, J.L. The relativistic gas. Amsterdam, North-Holland / J.L. Synge// Publishing Company. – 1957.
- [74] Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev), Grav. and Cosmol., (in print).
- [75] Chernikov, N.A. // Acta Phys. Polon. – 1965. – Vol. 27. – P. 723.
- [76] Игнат'ев, Ю.Г. Магнитоактивная бесстолкновительная плазма в поле длинноволнового гравитационного излучения / Ю.Г. Игнат'ев, Р.Р. Кузеев // Украинский физический журнал. – 1984. – Т. 29., № 7. – С. 1021–1026.
- [77] Landau, L.D., Lifshitz E.M. // Statistical Physics. – 1980. – Vol. 5.
- [78] Черников, Н.А. Релятивистское кинетическое уравнение и равновесное состояние газа в статическом сферически-симметричном гравитационном поле / Н.А. Черников // Докл. Акад. Наук СССР. – 1960. – Т.133. – С. 333–336.
- [79] Черников, Н.А. Кинетическое уравнение для релятивистского газа в произвольном гравитационном поле / Н.А. Черников // Докл. Акад. Наук СССР. – 1962. – Т. 144. – С. 89–92.
- [80] Tauber G.E., Weinberg J.W. //Phys. Rev. – 1961 Vol. 122. P. 1342–1365. A.A. Vlasov. Statistical Distribution Functions. Moskow, Nauka (1966).
- [81] Gorbunov, D.S. Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory / D.S. Gorbunov, V.A. Rubakov. – Singapore: World Scientific, 2011. – 504 p.
- [82] Ignatyev, Yu.G. // Grav. and Cosmol.(in print).

Литература

- [83] Ignat'ev, Yu.G. Collisionless self-gravitating statistical systems of scalar interacting particles. – 2015. – <http://arxiv.org/abs/1509.06038>.
- [84] Ignat'ev, Yu.G. Collisionless Self-Gravitating Statistical Systems of Scalarly Interacting Particles / Yu.G. Ignat'ev // Gravitation and Cosmology. – 2016. – Vol. 22, No. 1. – P. 20–25.
- [85] Ignat'ev, Yu.G. Relativistic kinetics and cosmology / Yu.G. Ignat'ev // Soviet Physics Journal. – 1980. – Vol. 23, No 8. – P. 682–687.
- [86] Ignat'ev, Yu.G. Relativistic kinetics and cosmology. II / Yu.G. Ignat'ev // Soviet Physics Journal. – 1980. – Vol. 23, No 9. – P. 771–775.
- [Synge(1960)] Synge J.L. // Relativity: The General Theory, Amsterdam. – 1960.
- [87] Черников, Н.А. Вектор потока и тензор массы релятивистского идеального газа / Н.А. Черников // Докл. Акад. Наук СССР. – 1962. – Т. 144. – С. 314–317.
- [88] Черников, Н.А. Релятивистское распределение Максвелла-Больцмана и интегральная форма законов сохранения / Н.А. Черников // Докл. Акад. Наук СССР. – 1962. – Vol. 144. – С. 544–547.
- [89] Lindquist, E.W. // Ann. Phys. – 1966. – Vol. 37. – P. 487.
- [90] Ignat'ev, Yu.G. The propagation of electro- magnetic plasma oscillations in the gravitational field / Yu.G. Ignat'ev // Acta Physica, Polonica. – 1975. – Vol. 6. – P. 203–221.
- [91] Ignatyev, Yu.G. The Possibility of a Strict Global Thermodynamic Equilibrium in the Expanding Universe in the Presence of a Fundamental Scalar Field / Yu.G. Ignatyev // Gravitation and Cosmology. – 2015. – Vol. 21, No. 2. – P. 113–117. – <http://arxiv.org/abs/1410.2487>. .
- [92] Weinberg, S. // Phys. Rev. Lett. – 1979. – Vol. 42. – P. 850.
- [93] Fry, J.M., Olive, K.A., Turner, M.S. // Phys. Rev. D. – 1980. – Vol. 22. – P. 2953.
- [94] Игнат'ев, Ю.Г. Релятивистская кинетика бариогенезиса в горячей Вселенной / Ю.Г. Игнат'ев // Астрономический журнал. – 1985. – Т. 62. № 4. С. 633.

Литература

- [95] Ignat'ev, Yu.G. Relativistic kinetic of barion production in the big band / Yu.G. Ignat'ev // American Institute of Physics USA, Provided by the NASA Astrophysics Data System. – 1986. – Vol. 19B5SVA. – P. 371.
- [96] Ignatyev, Yu.G. A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. I. Exact model / Yu.G. Ignatyev, K. Alsmadi // Gravitation and Cosmology. – 2005. – Vol. 11, No 3. – P. 252.
- [97] Ignatyev, Yu.G. A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. II. Numerical model / Yu.G. Ignatyev, K. Alsmadi // Gravitation and Cosmology. – 2005. – Vol. 11, No 4. – P. 363.
- [98] Ignatyev, Yu.G. A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. III. Specific Entropy Calculations / Yu.G. Ignatyev, K. Alsmadi // Gravitation and Cosmology. – 2007. – Vol. 13, No 2. – P. 114–118.
- [99] Игнат'ев, Ю.Г. Равновесные состояния релятивистского заряженного газа в рамках общей теории относительности / Ю.Г. Игнат'ев // Украинский физический журнал. – 1976. – Т.21, № 12.
- [100] Ivanov, G.G. Stationary macroscopic motions of a relativistic gas and its relation to the symmetries of the gravitational field / G.G. Ivanov // Soviet Physics Journal. – 1979. – Vol. 22, No. 6. – P. 579–584.
- [101] Игнат'ев, Ю.Г. Неминимальные макроскопические модели скалярного поля, основанные на микроскопической динамике. III. Расширение теории на отрицательные массы / Ю.Г. Игнат'ев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2015. — № 1. — С. 5–23.
- [102] Ignatyev, Yu.G. Nonminimal Macroscopic Models of a Scalar Field Based on Microscopic Dynamics. II. Transport Equations / Yu.G. Ignatyev // Gravitation and Cosmology (in print). – <http://arxiv.org/abs/1504.03649>.
- [103] Ignatyev, Yu.G. Cosmological Evolutions of a Completely Degenerate Fermi System with Scalar Interactions Between Particles / Yu.G. Ignatyev, R.F. Miftakhov // Gravitation and Cosmology. – 2011. – Vol. 17, No. 2. – P. 190–193. – <http://arXiv:1011.5774>.

Литература

- [104] Ignatyev, Yu.G. Numerical Models of Cosmological Evolution of a Degenerate Fermi-System of Scalar Charged Particles / Yu.G. Ignatyev, A.A. Agathonov // *Gravitation and Cosmology*. – 2015. – Vol. 21, No. 2. P. 105–112. – <http://arXiv:1408.4738v1>.
- [105] Игнатъев, Ю.Г. Неминимальные макроскопические модели скалярного поля, основанные на микроскопической динамике. II. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным фантомным взаимодействием / Ю.Г. Игнатъев, А.А. Агафонов, Д.Ю. Игнатъев, М.Л. Михайлов // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. – 2014. № 3. – С. 16–31.
- [106] Ignat'ev, Yu.G. Cosmological evolution of statistical system of scalar charged particles / Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov, M.L. Mikhailov, D.Yu. Ignatyev // *Astrophys Space Sci*. – 2015. – P. 357:61. – <http://arXiv:1411.6244v1>.
- [107] Ignat'ev, Yu.G. Cosmological Evolution of a Boltzmann Plasma with Interparticle Phantom Scalar Interaction. I. Symmetric Cases / Yu.G. Ignat'ev, M.L. Mikhailov // *Russian Physics Journal*. – 2015. – Vol. 57, No 12. – P. 1743–1752.
- [108] Ignat'ev, Yu.G. Statistical Model with Interparticle Scalar Conformally Invariant Interaction. 2015. – arXiv:1508.03028v1.
- [109] Ignat'ev, Yu.G. Statistical Cosmological Fermion Systems With Interparticle Phantom Scalar Interaction // A.A. Agathonov, D.Yu. Ignatyev // – arXiv:1608.05020.
- [110] Игнатъев Ю.Г., Агафонов А.А., Михайлов М.Л. Программный комплекс автоматизированного численного моделирования процессов взаимодействия космологической плазмы со скалярными полями темного сектора и выводом результатов графическом формате с управляемыми параметрами в прикладном математическом пакете Wolfram Mathematica (программа для ЭВМ) // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015618191. – 03.08.2015. – Федеральная служба по интеллектуальной собственности.
- [111] Ignat'ev, Yu.G. Relativistic Kinetic Theory of Statistical Systems with

Литература

- Conformally Invariant Interparticle Scalar Interaction / Yu.G. Ignat'ev // Russian Physics Journal. – 2016. – Vol. 59, No 1. – P. 20–28.
- [112] Игнат'ев, Ю.Г. // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2016. – №1(14). – С. 91.
- [113] Melnikov, V.N. // Fields and Constants in the Theory of Gravitation, CBPF-MO-002/02, Rio de Janeiro. – 2002.
- [114] Игнат'ев, Ю.Г. Релятивистская кинетическая теория и конформные преобразования / Ю.Г. Игнат'ев // Известия вузов. Физика. – 1982. – № 4. – С. 92–93.
- [115] Игнат'ев, Ю.Г. Релятивистский канонический формализм и инвариантная одночастичная функция распределения / Ю.Г. Игнат'ев // Известия вузов. Физика. – 1983. – Vol. 26, No 8. – С. 15–19.
- [116] Игнат'ев, Ю.Г. Релятивистские кинетические уравнения для неупруго взаимодействующих частиц в гравитационном поле / Ю.Г. Игнат'ев // Известия ВУЗов. Физика. – 1983. – Т. 26, № 8. – С. 19–23.
- [117] Игнат'ев, Ю.Г. Законы сохранения и термодинамическое равновесие в общерелятивистской кинетической теории неупруго взаимодействующих частиц / Ю.Г. Игнат'ев // Известия ВУЗов. Физика. – 1983. – Т. 26, № 12. – С. 9–14.
- [118] Ignatyev, Yu.G. Statistical systems of particles with scalar interaction in cosmology / Yu.G. Ignatyev, R.F. Miftakhov // Gravitation and Cosmology. – 2006. – Vol. 12, No 2-3. – P. 179–185.
- [119] Игнат'ев, Ю.Г. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. I. Каноническая формулировка классического скалярного взаимодействия / Ю.Г. Игнат'ев // Известия Вузов. Физика. – 2012. – Т. 55, № 2. – С. 36–40.
- [120] Игнат'ев, Ю.Г. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. II. Формулировка математической модели / Ю.Г. Игнат'ев // Известия Вузов. Физика. – 2002. – Т. 55, № 5. – С. 71–78.

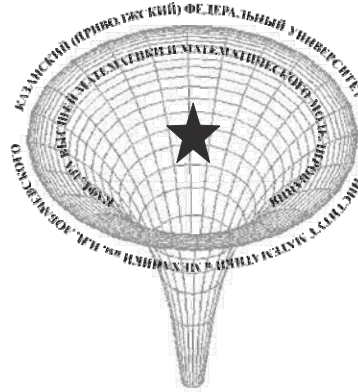
Литература

- [121] Игнатъев, Ю.Г. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. III. Модель с притяжением одноименно заряженных скалярных частиц / Ю.Г. Игнатъев // Известия Вузов. Физика. – 2002. – Т. 55, № 11. – С. 94–97.
- [122] Игнатъев, Ю.Г. Космологическая эволюция бoльцмановской плазмы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием. I. Симметричные случаи / Ю.Г. Игнатъев, М.Л. Михайлов // Известия Вузов. Физика. – 2014. – Т. 57, № 12. – С. 112–119. 144 (1962) – с. 544 – 547.
- [123] Ландау, Л.Д. Статистическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // М: Наука, 1964. – 568 с.
- [124] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля // М.: Наука, 1973. – 504 с.; Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. // Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т II. Теория поля. – 8-е изд., стереот. – М.: Физматлит, 2006. – 536 с.
- [125] Ivanov, G.G. // Russ. Phys. J. – 1983. – Vol. 26, No 1. – P. 32.
- [126] Weinberg, S. // Cosmology. Oxford University Press. – 2008.
- [127] Utiyama, R., Fukuyama, T. // Progr. Theor. Phys. – 1971. – Vol. 45. – P. 612.
- [128] Minkevich, A.V. // Gravitation and Cosmology. – 2006. Vol. 12. – P. 11.
- [129] Minkevich, A.V., Garkun, A.S., Kudin, V.I. // Class. Quantum Grav. – 2007. – Vol. 24. P. 5835.

Научное издание

Игнатъев Юрий Геннадиевич

КЛАССИЧЕСКАЯ КОСМОЛОГИЯ И ТЕМНАЯ ЭНЕРГИЯ



Набор монографии осуществлен виздательском пакете LaTeX2ε в научно-исследовательской лаборатории "Информационных технологий в математическом образовании" КФУ

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления

Ю.Г. Игнатъев

Техническая редакция, набор и верстка:

Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина

Оформление обложки **А.А. Агафонов**

Подписано в печать 05.09.2016.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Формат 60x84 1/16. Гарнитура «SFR M1440».

Усл. печ. л. 14,42. Тираж 500 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37

тел. (843) 233-73-59, 233-73-28