

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

**В.В. Кадили́н, Е.В. Рябева, В.Т. Самоса́дный**

# **ПРИКЛАДНАЯ НЕЙТРОННАЯ ФИЗИКА**

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»  
в качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений*

Москва 2011

УДК 539.1(075)  
ББК 22.386я7  
К13

*Кадилин В.В., Рябева Е.В., Самосадный В.Т.* Прикладная нейтронная физика: учебное пособие. – М.: НИЯУ МИФИ, 2011. – 124 с.

Учебное пособие по курсу «Прикладная нейтронная физика» профессиональных дисциплин специальности «Физика кинетических явлений» направления 651000 «Ядерная физика и технологии» посвящено краткому изложению основ нейтронной физики, в числе которых: нейтронные источники, взаимодействие нейтронов со средой, методы решения уравнения переноса для нейтронов (численные и аналитические). За время обучения по программе курса студенты получают знания о природе нейтрона и основах нейтронной физики, которые необходимы при разработке прикладных ядерных технологий.

Пособие предназначено для студентов, специализирующихся в области прикладной ядерной физики и смежных с ней областях, а также может быть рекомендовано аспирантам широкого профиля для повышения профессионального уровня в области ядерных излучений.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

*Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. С.Е. Улин (НИЯУ МИФИ)*

ISBN 978-5-7262-1515-0

© Национальный исследовательский  
ядерный университет «МИФИ», 2011

## Содержание

Введение .....	6
1. Нейтроны в природе .....	11
1.1. Антропогенные источники .....	11
1.2. Естественные источники.....	12
1.3. Классификация нейтронов по энергиям .....	14
2. Источники нейтронов .....	17
2.2. Изотопные источники нейтронов.....	18
2.1.1. ( $\alpha, n$ ) источники.....	18
2.1.2. Фотонейтронные источники.....	19
2.1.3. Нейтроны деления.....	20
2.2. Нейтроны, получаемые на ускорителях .....	22
2.3. Нейтронные генераторы.....	24
2.4. Реактор как источник нейтронов.....	26
2.5. Исследовательские ядерные реакторы .....	29
2.6. Импульсные реакторы.....	30
2.7. Развитие мощных источников нейтронов .....	34
2.8. Методы получения моноэнергетических нейтронов.....	34
2.8.1. Времяпролетный метод.....	35
2.8.2. Кристаллические монохроматоры .....	36
3. Взаимодействие нейтронов с веществом.....	37
3.1. Упругое рассеяние .....	37
3.2. Сечение упругого рассеяния.....	40
3.2.1. Теория резонансного рассеяния.....	41
3.2.2. Упругое рассеяние при больших энергиях .....	43
3.2.3. Упругое рассеяние и поляризация нейтронов .....	44
3.3. Захват нейтронов .....	45
3.4. Сечение захвата.....	48
4. Основы теории переноса нейтронов .....	51
4.1. Терминология, описывающая нейтронное поле .....	51
4.2. Уравнение баланса нейтронов.....	53
4.2.1. Вывод уравнения переноса излучений.....	53
4.2.2. Уравнение переноса в различных системах координат.....	56
4.2.3. Линейность уравнения переноса.....	58
4.3. Элементарная теория диффузии нейтронов.....	59
4.3.1. Уравнение диффузии нейтронов.....	60

4.3.2. Диффузия в однородной среде для плоского бесконечного источника .....	63
4.3.3. Уравнение диффузии в произвольной геометрии .....	64
4.3.4. Диффузия нейтронов в случае точечного изотропного источника .....	64
4.3.5. Физический смысл длины диффузии .....	65
4.3.6. «Функция влияния» .....	67
4.3.7. Пределы применимости диффузионной теории .....	69
4.3.8. Условия на границе с пустотой .....	70
4.3.9. Альbedo в диффузионной теории .....	72
4.4. Основы теории замедления нейтронов .....	73
4.4.1. Изменение энергии нейтронов при упругом рассеянии .....	74
4.4.2. Уравнение переноса в теории замедления нейтронов .....	77
4.4.3. Замедление в водороде в отсутствие поглощения .....	80
4.4.4. Замедление в водороде с учетом поглощения .....	81
4.4.5. Замедление в тяжелых средах .....	83
4.4.6. Влияние резонансного захвата на замедление нейтронов .....	85
4.4.7. Летаргия .....	88
4.5. Основы возрастной теории .....	89
4.5.1. Уравнение возраста .....	89
4.5.2. Уравнение возраста для плоского изотропного источника .....	92
4.5.3. Физический смысл возраста .....	94
4.5.4. Условия применимости возрастной теории .....	95
4.5.5. Уточнения возрастной теории .....	96
4.6. Численные методы решения уравнения переноса .....	96
4.6.1. Метод сферических гармоник .....	96
4.6.2. Метод моментов .....	100
4.6.3. Двойной $P_N$ -метод .....	102
4.6.4. Метод дискретных ординат .....	104
4.6.5. $S_N$ -метод .....	106
4.6.6. Метод характеристик .....	107
4.6.7. Метод групп .....	107
4.7. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) .....	113
4.7.1. Общие принципы построения алгоритмов по методу Монте-Карло .....	114

4.7.2. Расчет прохождения нейтронов сквозь пластину .....	116
Заключение .....	121
Список литературы .....	122

# Введение

## *Цель и задачи курса*

Наряду с протонами все ядра, за исключением водорода, содержат нейтрон – нейтральную квазистабильную частицу с массой немного большей массы протона.

Так как масса вещества сосредоточена в ядрах, то более половины массы Земли заключается в нейтронах. Основные процессы движения и превращения вещества во Вселенной связаны с физикой атомных ядер и составляющих их протонов и нейтронов – главных носителей энергии во Вселенной.

Цель предлагаемого курса – ознакомление с физикой нейтронного излучения, его свойствами, процессами взаимодействия с веществом.

Почему так важно изучение нейтрона? Какую роль играет именно нейтронная физика в современных физических фундаментальных и прикладных исследованиях? Попытаемся ответить на эти вопросы ниже.

Нейтроны представляют собой идеальный инструмент для исследования различных веществ, высокая эффективность которого обусловлена их уникальными свойствами:

- нейтроны электрически нейтральны, поэтому их проникающая способность значительно превышает проникающую способность электронов и других заряженных частиц. Это позволяет проводить неразрушающий контроль деталей и материалов, находящихся в экстремальных условиях, например внутри ячейки сверхвысокого давления, в высокотемпературной печи или при низкой температуре внутри криостата;

- рентгеновское излучение рассеивается электронной оболочкой атомов, в то время как нейтроны взаимодействуют с ядрами, размер которых намного меньше размера оболочки. Следовательно, нейтроны позволяют с большей точностью определять положение атомов;

- нейтроны обладают магнитным моментом, и это свойство делает их практически единственным инструментом для «прямого» исследования магнитной структуры вещества;

- энергия тепловых нейтронов близка к энергии коллективных возбуждений в кристаллах, например колебаний атомов и их магнитных моментов (фононов и магнонов), поэтому нейтроны являются уникальным инструментом для изучения межатомных взаимодействий и динамики атомов внутри вещества;

- нейтроны взаимодействуют с атомными ядрами, а не с электронами оболочки атомов в отличие от рентгеновских и гамма-лучей. Это обуславливает их большую «контрастность» (чувствительность) в экспериментах по опознаванию атомов близко расположенных в таблице Менделеева элементов. Особенно это относится к легким элементам (водород, кислород и др.), идентификация которых в телах, содержащих тяжелые элементы, почти невозможна рентгеновскими и гамма-методами;

- дальнейшее понижение энергии нейтронов приводит к тому, что их дебройлевская длина волны начинает значительно превышать размеры атомов и становится сравнимой с размерами гигантских молекулярных образований и наноструктур. Таким образом, холодные нейтроны позволяют проводить структурные исследования сложнейших образований, начиная от биологических соединений до наночастиц.

Благодаря перечисленным свойствам нейтроны могут быть использованы в следующих технологиях.

Нейтроны позволяют исследовать **структуру любых веществ** вне зависимости от их атомного веса и плотности. Например, нейтроны активно используются для методов так называемого неразрушающего контроля. Одной из самых важных задач для неразрушающего контроля является проверка прохождения грузов через границы государств.

Человечество с надеждой смотрит на попытки разработать или найти новые источники энергии. Одним из возможных кандидатов на такой источник являются гидраты газов, обнаруженные в природе. **Гидраты газов** существуют только при высоком давлении и/или низких температурах. Они найдены в море на глубине в несколько сотен метров и в областях вечной мерзлоты. Только нейтроны, благодаря их уникальной проникающей способности, по-

зволяют проводить исследования структуры гидратов газов при высоких давлениях. Результаты исследований показывают, как происходит заполнение больших и маленьких клеток молекулами газа и как оно зависит от давления и температуры.

Нейтронные методы исследования незаменимы при решении задач водородной энергетики. Как уже отмечалось выше, здесь важна уникальная способность нейтрона «видеть» легкие атомы водорода, особенно на фоне тяжелых атомов. Именно такая ситуация имеет место при создании **топливных элементов**, когда атомы водорода, как в резервуар для хранения и последующего выведения отсюда, внедряются в материал-носитель, состоящий из тяжелых атомов, обычно металлов.

В последние годы выполнены работы по исследованию свойств материалов, объем которых искусственно ограничен до **наномасштабов** (наночастицы в порах матрицы). Эти работы показали возможность исследования наноматериалов с помощью нейтронов.

Открытые в 1991 г. **фотонные кристаллы** принципиально отличаются от обычных кристаллов тем, что их структура характеризуется строго периодическим изменением коэффициента преломления в масштабах, сопоставимых с длиной волны света. Периодичность структуры фотонных кристаллов обуславливает их основное свойство: будучи прозрачными для широкого спектра электромагнитного излучения, они не пропускают свет с длиной волны, сравнимой с периодом структуры вследствие брэгговской дифракции на границах раздела. Фотонные кристаллы часто рассматриваются в качестве оптических аналогов электронных полупроводников, а значит, могут являться основой создания новых приборов квантовой электроники и телекоммуникационной индустрии. Структурные и магнитные свойства таких кристаллов изучаются методами малоуглового рассеяния поляризованных нейтронов.

Нейтроны являются незаменимым инструментом для изучения свойств **наноматриц, динамики химических процессов**, исследования **внутренних напряжений**, возникающих после обработки конструкционных материалов. Нейтроны применяются для исследования материалов для атомной и термоядерной энергетики.

Нейтроны используются для исследования супермагнитных наночастиц. Исследование супермагнитных наночастиц важно не только для понимания фундаментальных свойств супермагнетизма, но и для применения магнитных жидкостей в практических целях,



таких как создание накопителей информации высокой плотности, использование в медицине для направленной транспортировки лекарственных средств, использование в подшипниках скольжения, в вакуумных уплотнениях подвижных деталей и во многих других технических приложениях.

Даже в **биологии** нейтронные методы исследований находят себе применение. Большое сечение некогерентного рассеяния нейтронов протонами (в отличие от рентгеновских лучей) делает водородсодержащие соединения превосходным объектом для нейтронных исследований. Нейтроны позволяют локализовать положение атомов водорода в биологических объектах, в особенности содержащих воду. Более того, сечение рассеяния на водороде значительно отличается от сечения рассеяния на его более тяжелом изотопе – дейтерии.

Метод радиоуглеродного анализа и датировки образцов получил широкое распространение в **археологии**. Основа этого метода – в знании количества нейтронов в атмосфере и физики нейтронных взаимодействий.

Даже в столь далекой области, как **искусство**, нейтроны помогают исследователям. Нейтронограмма полотна художника может показать состав красок рисунков, из чего можно сделать вывод об авторстве произведения.

Выше перечислены далеко не все «профессии» нейтрона, но уже этот послужной список позволяет убедиться, что нейтроны являются актуальным инструментом в современных технологиях.

### ***История открытия нейтрона***

В 1919 г. Резерфорд осуществил искусственное расщепление ядер азота альфа-частицами. Потом бомбардировке  $\alpha$ -частицами подверглись другие элементы. Реакция ( $\alpha, p$ ) наблюдалась почти на всех элементах. Среди исключений – Be и Li, где протоны не детектировались. В 1930 г. Боте и Беккер обнаружили излучение, очень слабо поглощаемое свинцом, однако регистрируемое с помощью счетчика Гейгера-Мюллера. Если бы это были гамма-кванты, то их энергия должна была бы быть слишком большой (если использовать закон сохранения энергии). Чедвик предположил, что излучение состоит из частиц с отличной от нуля массой покоя

и с зарядом либо очень маленьким, либо нулевым. Поэтому частицу эту назвали нейтроном.

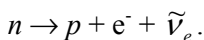
Чедвик поставил опыты по измерению массы нейтрона:

$$m_n = 1,0067 \text{ а.е.м.} = 939,55 \text{ МэВ.}$$

Вскоре после открытия нейтрона советский физик Иваненко Д.Д. и немецкий физик Гейзенберг высказали гипотезу о протон-нейтронном строении ядра, которая решила трудности электронно-протонной модели.

### *Основные характеристики нейтрона*

Время жизни. Избыток массы у нейтрона по сравнению с протоном настолько велик, что энергетически вполне возможно превращение свободного нейтрона в протон путем  $\beta$ -распада:



В этом распаде наряду с заряженными частицами образуется легкая нейтральная частица – антинейтрино массой  $m_{\tilde{\nu}_e} \leq 18 \text{ эВ}$ .

Время жизни нейтрона составляет приблизительно 885,7 с.

Спин нейтрона.  $S_n = \frac{1}{2}$  в единицах постоянной Планка  $\hbar$  и нейтроны подчиняются статистике Ферми-Дирака.

Магнитный момент. Нейтроны подчиняются статистике Ферми-Дирака, поэтому не должны иметь магнитного момента по теории Дирака, как нейтральная частица.

Но это не так:

$$\mu_n = -(1,91304275 \pm 0,00000045)\mu_B.$$

Полагают, что наличие магнитного момента у нейтрона связано с его внутренней структурой и движением составляющих элементов. Возможно, что это связано так же с представлением о движении  $\pi$ -мезонов вокруг нейтрона.

# 1. Нейтроны в природе

Источники нейтронов в природе можно подразделить на антропогенные (те, что появились в результате деятельности человека) и естественные.

## *1.1. Антропогенные источники*

Перечислим антропогенные источники нейтронного излучения: ядерные реакторы – промышленные и исследовательские; источники нейтронов, применяемые в промышленных ядерных технологиях (например, для контроля промышленных изделий, для каротажа скважин в геологии и т.д.); источники нейтронов из установок, применяемых для медицинской диагностики и терапии; используемые и законсервированные объекты по добыче руды (в т.ч. урановые рудники); хранилища и заводы по переработке топлива АЭС; хранилища оружия с ядерными боеголовками; ядерные взрывы.

Величина потоков нейтронов от антропогенных источников зависит, прежде всего, от расстояния до такого источника и его мощности. В целом принято оценивать радиационное воздействие по дозам от радиационного излучения. При этом самый большой вклад в дозу будут иметь естественные источники излучений. Ядерные испытания (для большинства населения Земли) будут иметь вклад не более 2,6 % от общей дозы, атомная энергетика – не более 0,05 %. Поэтому не стоит останавливаться подробно на конкретных значениях потоков от антропогенных источников нейтронов, а следует перейти непосредственно к источникам с большим вкладом в дозу – естественным источникам нейтронов.

## 1.2. Естественные источники

1) Солнечные нейтроны, т.е. нейтроны, которые непосредственно рождаются на Солнце и могут в составе солнечных космических лучей достигнуть поверхности Земли. Но пролететь расстояние от Солнца до Земли могут не все нейтроны, а только те, что не распадутся по пути. Можно легко подсчитать, с какой энергией нейтроны могут долететь до Земли.

Время, затрачиваемое на путь от Солнца до Земли:

$$t = 1,5 \cdot 10^{13} (\text{см}) / v = 1,1 \cdot 10^7 / E^{1/2} (\text{с}),$$

где  $E$  – кинетическая энергия нейтрона в электронвольтах.

Время в полете равно среднему времени жизни нейтронов ( $\tau \approx 10^3$  с) при энергии  $E_n = 100$  МэВ. Это означает, что нейтроны с меньшей энергией распадутся по дороге с вероятностью больше чем 0,63.

2) Галактическое космическое излучение (ГКИ), состоящее в основном из высокоэнергетических протонов, достигая земной атмосферы, порождает по реакциям ( $p, n$ ) вторичные нейтроны. Такие нейтроны называются нейтронами альbedo, так как они наблюдались из околоземного пространства и геометрически кажется, что Земля «отражает» нейтроны. Нейтроны, появившиеся как результат воздействия ГКИ, являются основной компонентой нейтронного излучения в природе на Земле. Спектр таких нейтронов в околоземном пространстве представлен на рис. 1.1. Проходя через атмосферу Земли и доходя до уровня поверхности моря, нейтроны замедляются, вблизи земной коры поток нейтронов имеет энергию порядка тепловой.

3) Солнечное космическое излучение (СКИ) также может взаимодействовать с атмосферой Земли и порождать нейтроны альbedo СКИ. Спектры нейтронов альbedo СКИ похожи на спектры нейтронов альbedo ГКИ. Но надо иметь в виду, что энергии солнечных протонов относительно невелики, потоки таких протонов рождаются во время солнечных вспышек и поток нейтронов СКИ незначителен при усреднении по времени.

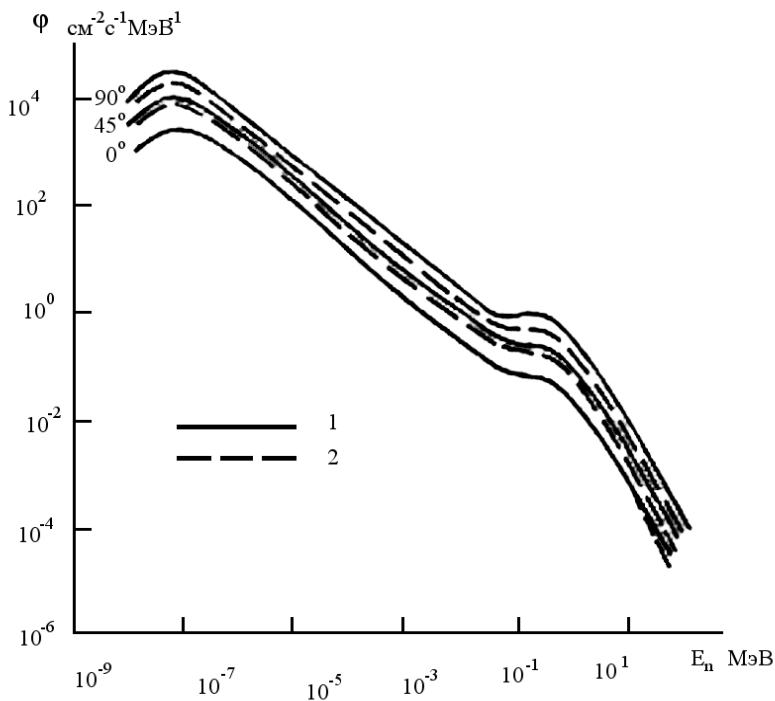


Рис. 1.1. Плотность потока нейтронов альbedo галактических космических лучей на разных геомагнитных широтах в периоды максимума (1) и минимума (2) циклов солнечной активности

4) Источником нейтронов может быть и земная кора. Земная кора является пассивным источником нейтронов как мишень, генерирующая нейтроны при бомбардировке ее энергичными частицами космических лучей. Земная кора является также и активным источником нейтронов. В земной коре есть альфа-активные элементы, входящие в радиоактивные семейства элементов, родоначальниками которых являются уран и торий. Среди них в частности присутствует радон – радиоактивный газ, который испускает альфа-частицы с энергией 5–9 МэВ, что при взаимодействии этих частиц с ядрами элементов атмосферы и земной коры вполне достаточно для генерации нейтронов со средними энергиями, примерно равными 1 МэВ. Распространяясь в атмосфере Земли,

нейтроны такой первоначальной энергии теряют ее при столкновении и достигают тепловых энергий. Изменение потока приземных тепловых нейтронов будет зависеть от концентрации радиоактивных элементов в том или ином районе и условий выхода на поверхность Земли.

Экспериментальные данные, полученные сотрудниками НИИЯФ МГУ в Москве, на Воробьевых горах, в здании физического факультета Московского Университета на высоте порядка 20 м, показывают, что потоки нейтронов имеют значения до величины  $2 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ . Вблизи земной коры более 70 % нейтронов имеют энергию не более 0,45 эВ.

Знание о значении числа нейтронов в атмосфере Земли является основанием для известного метода датировки исторических событий и исторических образцов, получившего название «**радиоуглеродный анализ**». Для его успешной реализации необходимо, чтобы количество нейтронов в атмосфере было постоянным.

Принцип анализа состоит в следующем. Имеющиеся в атмосфере нейтроны захватываются ядрами азота  $^{14}\text{N}$  и вызывают образование  $^{14}\text{C}$  по реакции  $^{14}\text{N}(n,p)^{14}\text{C}$ . Вероятность захвата нейтронов другими ядрами атмосферы мала. Углерод  $^{14}\text{C}$  образует углекислый газ с кислородом атмосферы и в этом виде размещивается по всей атмосфере. Из атмосферы  $^{14}\text{CO}_2$  поглощается растениями и водорослями, поэтому изотопный состав углерода в растениях такой же, как и в атмосфере. Если растение погребено в толще земной коры, то обмен углеродом с атмосферой прекращается и содержание  $^{14}\text{C}$  убывает с периодом полураспада 5570 лет. Это и есть основа радиоуглеродного метода определения возраста.

### ***1.3. Классификация нейтронов по энергиям***

Характер взаимодействия нейтронов с веществом определяется их энергией, поэтому удобно ввести классификацию нейтронов различных энергетических групп. Хотя строгой общепринятой классификации нейтронов по спектральным группам нет, но существуют вполне установившиеся названия отдельных групп, выделяемых из общего класса нейтронов (табл. 1.1).

Таблица 1.1

## Основные энергетические группы нейтронов

N п/п	Название группы ней- тронов	Энергетиче- ский диапа- зон	Признак (физическое явление)
1	Ультрахолод- ные	$E < 10^{-7}$ эВ	Полное отражение от мате- риальной стенки при любых углах падения
2	Холодные	$E < 0,005$ эВ	Находятся в термодинамиче- ском равновесии с атомами охлажденного вещества
3	Тепловые	0,005 – 0,1 эВ	В термодинамическом равно- весии с атомами веществ, на- ходящихся при комнатной температуре. Спектр прибли- зительно максвелловский, средняя энергия $3/2 kT$ при 20 °С равна 0,038 эВ, наибо- лее вероятная – 0,025 эВ
4	Надтепловые	0,1 эВ – 10 эВ	Отклонение от максвеллов- ского распределения
5	Подкадмие- вые	$E \leq 0,4$ эВ	Сильно поглощаются экра- нами из Cd
6	Надкадмие- вые	$E > 0,6$ эВ	Слабо поглощаются экран- ами из Cd
7	Медленные	1 – 100 эВ	Возникают в процессе замед- ления в результате много- кратных столкновений с яд- рами
8	Резонансные	1 – 300 эВ	Взаимодействие нейтронов с ядрами характеризуется от- дельными резонансными пи- ками, в первую очередь с яд- рами $^{238}\text{U}$ , ширина пика кото- рых значительно меньше ин- тервала между ними
9	Промежуточ- ные	0,3 – 200 кэВ	От медленных до быстрых

Продолжение табл. 1.1

10	Быстрые	200 кэВ – 20 МэВ	Испускаются подавляющим большинством источников нейтронов
11	Сверхбыстрые	$E > 20$ МэВ	Возникают при ядерных реакциях с ГКИ и СКИ и на ускорителях
12	Реакторные	0,001 эВ – 15 МэВ	Встречаются в реакторах
13	Деления	Наиболее вероятная энергия 0,8 МэВ, средняя – 2 МэВ	Испускаются в реакциях деления
14	Максвелловские	$E \approx kT$ (0,05÷0,2) эВ	$\frac{E}{(kT_n)^2} e^{-\frac{E}{kT}}$
15	Фермиевские с энергетическим распределением, $\varphi(E) \sim 1/E$		



## 2. Источники нейтронов

С точки зрения использования нейтронных источников в науке и технике, желательно, чтобы идеальные источники удовлетворяли следующим требованиям:

- имели интенсивность нейтронного потока не менее  $10^6 \div 10^7$  нейтрон/с. При этом интенсивность не должна изменяться в течение длительного времени;
- имели известный спектр. В идеальном источнике таким спектром должна быть монолиния;
- имели незначительный вес и определенные (лучше простые) геометрические формы (точка, кольцо, стержень и т.д.);
- сопутствующее излучение ( $\gamma$ -кванты,  $\alpha$ -частицы, протоны, вторичные нейтроны и т.д.) не должно быть слишком велико;
- характеристики источников для разных выпусков должны быть воспроизводимы.

К сожалению, надо отметить, что из существующих стандартных источников нейтронов ни один не удовлетворяет всем этим требованиям.

### Типы источников нейтронов:

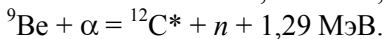
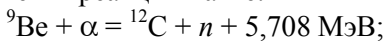
- 1) Изотопные (ампульные) источники.
- 2) Ускоритель как источник нейтронов.
- 3) Нейтронные генераторы.
- 4) Реакторы:
  - а) промышленные;
  - б) исследовательские:
    - непрерывные;
    - импульсные.
- 5) Плазменные ловушки.

## 2.2. Изотопные источники нейтронов

### 2.1.1. ( $\alpha, n$ ) источники

В лабораторной практике ( $\alpha, n$ ) источники нашли обширное применение. Именно бомбардировка Ве альфа-частицами привела к открытию нейтрона.

Существуют две ветви реакции на Ве:



Во второй ветви ядро углерода образуется в возбужденном состоянии, которое снимается испусканием фотона с энергией 4,42 МэВ. Реакция экзоэнергетическая. Высокое значение энергии реакции позволяет получить нейтрон с максимальной энергией от 7,7 до 10,6 МэВ при использовании  $\alpha$ -частиц с энергией от 2 до 5 МэВ. При меньшей энергии выход уменьшается на два порядка.

В качестве источников альфа-частиц используются альфа-активные изотопы  ${}^{210}\text{Po}$ ,  ${}^{226}\text{Ra}$ ,  ${}^{239}\text{Pu}$ ,  ${}^{238}\text{Pu}$ ,  ${}^{241}\text{Am}$ . Как правило, Ве-мишень имеет значительную толщину по сравнению с пробегом  $\alpha$ -частиц.

Спектр нейтронов ( $\alpha, n$ ) источника непрерывен, имеет сложный вид (рис. 2.1). Энергия нейтронов меняется от 0,1 до 12 МэВ. Источник может представлять собой смесь бромистого радия (или другого альфа-активного нуклида) и порошка металлического бериллия.

Недостатками таких источников являются:

- 1) сплошной сложный спектр;
- 2) наличие сопутствующего гамма-излучения;
- 3) для  ${}^{210}\text{Po}$  – небольшой период полураспада.

Энергетические спектры нейтронов Po- $\alpha$ -Ве и Pu- $\alpha$ -Ве источников практически совпадают. Это объясняется тем, что энергии альфа-частиц Po и Pu совпадают с погрешностью около 0,15 МэВ. В Po- $\alpha$ -Ве источнике возбужденное ядро  ${}^{12}\text{C}$  испускает примерно 1 фотон/нейтр. с энергией 4,42 МэВ, а также фотоны с энергией 2,9 и 7,3 МэВ слабой интенсивности. Сам  ${}^{210}\text{Po}$  испускает фотоны с энергией 0,803 МэВ с выходом  $1,2 \cdot 10^{-5}$  фотон/расп.

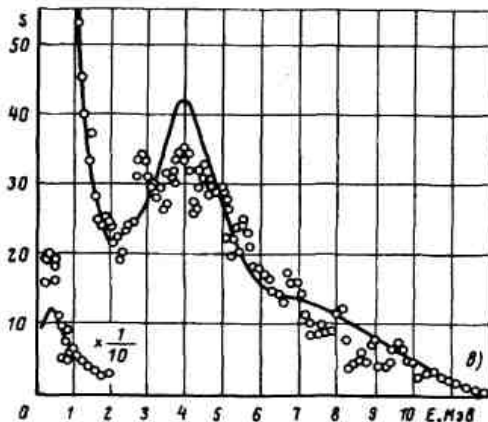
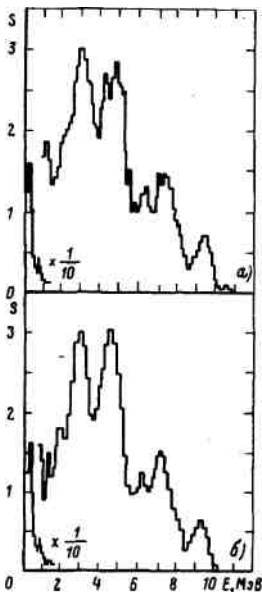


Рис. 2.1. Измеренные энергетические спектры ( $\alpha, n$ )-источников: а) Po- $\alpha$ -Be; Pu- $\alpha$ -Be; б) Ra- $\alpha$ -Be; в) расчетный спектр для Ra- $\alpha$ -Be-источника

## 2.1.2. Фотонейтронные источники

Облучение мишеней фотонами с энергией, превышающей энергию связи нуклона в ядре, приводит к испусканию нейтрона. Два стабильных нуклида имеют наименьшую энергию связи: дейтерий (2,226 МэВ) и бериллий (1,666 МэВ). Радионуклиды, как правило, не испускают фотоны с энергией, большей примерно 3 МэВ, поэтому мишени в нуклидных фотонейтронных источниках изготавливают только из Be и D. Бериллий обычно применяют в элементарном виде, дейтерий – в виде оксида дейтерия D<sub>2</sub>O.

Фотонейтронные источники готовятся путем окружения радионуклида слоем бериллия или дейтерия. На один нейтрон в таких источниках приходится  $10^3 \div 10^4$  фотонов. В качестве радионуклидов используют <sup>24</sup>Na, <sup>88</sup>Y, <sup>124</sup>Sb, Ra (в равновесном состоянии), <sup>140</sup>La. Период полураспада – от нескольких часов до нескольких тысяч лет. Энергия нейтронов несколько десятков килоэлектрон-вольт.

### 2.1.3. Нейтроны деления

Нейтроны деления образуются либо в результате ядерных реакций нейтронов или фотонов с ядрами тяжелых нуклидов, либо в актах спонтанного деления.

Выход нейтронов спонтанного деления U или Pu слишком мал для того, чтобы использовать их в качестве источника.

В настоящее время большое распространение получили источники нейтронов, генерируемые в актах спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$ . Спектр нейтронов мало отличается от спектра нейтронов U, но при детальном рассмотрении видна обогащенность нейтронами высоких энергий.

На рис. 2.2 приведен спектр нейтронов деления  $^{252}\text{Cf}$ . Максимум спектра на интервале 0,6 – 0,8 МэВ.

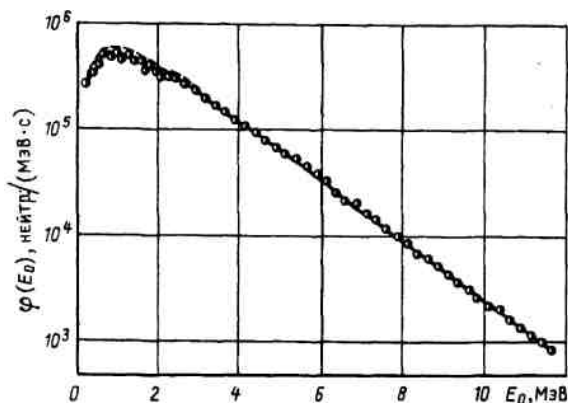


Рис. 2.2. Спектр нейтронов деления изотопа  $^{252}\text{Cf}$

Среднее значение энергии (взятое обычным способом – путем интегрирования по спектру)  $2,26 \pm 0,04$  МэВ для Cf. При энергии выше 2-3 МэВ спектр имеет вид экспоненты, причем число нейтронов убывает в 10 раз с увеличением энергии на 4 МэВ.

Энергетический спектр нейтронов источника  $^{252}\text{Cf}$  близок к спектру нейтронов деления и хорошо описывается зависимостью

$$N(E_0) = \text{const} \cdot \sqrt{E_0} \exp(-E_0 / T),$$

где  $T$  — температура спектра,  $T=(1,40\pm 0,02)$  МэВ.

В грубом приближении для  $E > 3$  МэВ спектр может быть аппроксимирован  $N(E_0) = \text{const} \exp(-k E_0)$ , где  $k = 0,67$  МэВ<sup>-1</sup> (Cf) и  $k = 0,76$  МэВ<sup>-1</sup> (U).

Число нейтронов на распад достигает 3,8, а фотонов – около 3. Выход нейтронов составляет  $2,7 \cdot 10^{12}$  с<sup>-1</sup> в расчете на 1 г <sup>252</sup>Cf. Зависимость выхода от времени определяется  $\alpha$ -распадом, период полураспада <sup>252</sup>Cf относительно  $\alpha$ -распада составляет 2,64 г., а относительно спонтанного деления – 82 г. Следовательно, уменьшение выхода нейтронов источника происходит с периодом полураспада равным 2,56 лет.

Характеристики наиболее распространенных ампульных нейтронных источников приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

**Характеристики наиболее распространенных ампульных нейтронных источников**

Ядерная реакция	Период полураспада	Число нейтронов в 1 с на 1 <i>кюри</i>	Энергия нейтронов, МэВ	Число гамма-квантов на один нейтрон
<b>Реакция (<math>\alpha, n</math>)</b>				
<sup>226</sup> Ra + Ве	1620 лет	$10^7$	Сплошной спектр от 0,1 до 12 с максимумом в области 3-5	$\sim 10^4$
<sup>222</sup> Rn + Ве	3,8 сут.	$10^7$		$\sim 1$
<sup>210</sup> Po + Ве	139 сут.	$10^6$		$\sim 1-40$
<sup>239</sup> Pu + Ве	24 тыс. лет	$10^6$		$\sim 10^2$
<sup>241</sup> Am + Ве	470 лет	$10^6$		-
<b>Реакция (<math>\gamma, n</math>)</b>				
<sup>226</sup> Ra + D <sub>2</sub> O	1620 лет	$10^4-10^5$	0,12	$\sim 10^4$
MsTh + Ве	6,7 года		0,83	
MsTh + D <sub>2</sub> O	6,7 года		0,2	
<sup>140</sup> La + Ве	40 ч		0,62	
<sup>140</sup> La + D <sub>2</sub> O	40 ч		0,15	
<sup>124</sup> Sb + Ве	61 день		24 кэВ/400 кэВ	

Продолжение табл. 2.1

$^{72}\text{Ca} + \text{D}_2\text{O}$	14,1 ч	$10^4\text{-}10^5$	0,13	$\sim 10^4$
$^{24}\text{Na} + \text{Be}$	14,8 ч		0,83	
$^{24}\text{Na} + \text{D}_2\text{O}$	14,8 ч		0,22	
$^{38}\text{Y} + \text{Be}$	104 дня		0,972	
$^{38}\text{Y} + \text{D}_2\text{O}$	104 дня		0,265	
$^{144}\text{Ce} + \text{Be}$	285 дней		0,400	
$^{228}\text{Ra} + \text{D}_2\text{O}$	6,7 года		0,200	
Спонтанное деление		Число нейтронов на 1 мг		
$^{236}\text{Pu}$	2,9 года	26	Сплошной спектр 0,1-12 с максимумом в области 1, 5	3 – 10
$^{240}\text{Pu}$	$6,6 \times 10^3$ лет	1,1		
$^{244}\text{Cm}$	18,4 года	$9 \times 10^3$		
$^{252}\text{Cf}$	2,6 года	$2,7 \times 10^9$		

## 2.2. Нейтроны, получаемые на ускорителях

Конечно, ускоритель нельзя рассматривать как непосредственный источник нейтронов. Для получения нейтронов используются мишени, которые бомбардируются ускоренными частицами. В большинстве случаев используются реакции типа  $(p,n)$ ,  $(d,n)$ ,  $(t,n)$  и  $(\alpha,n)$ . Под определенным фиксированным углом к потоку падающих частиц выходит поток моноэнергетических нейтронов в интервале энергий от нескольких килоэлектронвольт до 20 МэВ.

Для получения какой-либо определенной реакции облучают тонкую мишень достаточно сильным потоком моноэнергетических частиц, и нейтроны, выходящие из мишени под заданным углом по отношению к направлению движения падающих частиц, будут иметь определенную энергию.

Реакции  $(p,n)$  являются эндонергетическими. Вследствие этого при бомбардировке тонких мишеней протонами с энергией, лишь незначительно превышающей порог, можно получить моноэнергетические нейтроны с относительно малой энергией.

Наиболее часто используется реакция  $^7\text{Li}(p,n)^7\text{Be}$ , которая дает нейтроны промежуточных энергий и быстрые 0,5 ÷ 2,0 МэВ.

Быстрые и очень быстрые нейтроны получают по реакции  $(d,n)$ . Эти реакции за исключением  $^{12}\text{C}(d,n)^{13}\text{N}$  являются экзоэнергетическими.

Зависимость энергии нейтронов от угла вылета приведена на рис. 2.3 для реакции  $^2\text{D}(d,n)^3\text{He}$ .

Характеристики некоторых реакций  $(d,n)$ , используемых для получения нейтронов приведены в табл.2.2.

Таблица 2.2

### Характеристики реакций $(d,n)$ , используемых для получения нейтронов

Реакция	Q, МэВ	$E_n (E_d = 0)$ , МэВ
$^2\text{D}(d,n)^3\text{He}$	3,265	2,45
$^3\text{T}(d,n)^4\text{He}$	17,4	14,1
$^7\text{Li}(d,n)^8\text{Be}$	15	13,3
$^{12}\text{C}(d,n)^{13}\text{N}$	-0,281	$E_{\text{пор}} = 0,328$

Эти же реакции (в основном  $^3\text{T}(d,n)^4\text{He}$  и  $^2\text{D}(d,n)^3\text{He}$ ) используются в нейтронных генераторах.

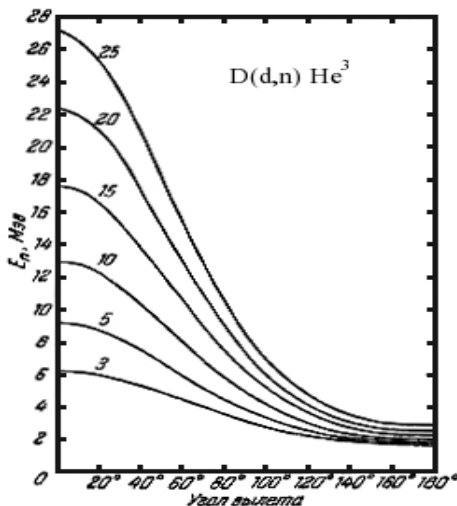


Рис. 2.3. Зависимость энергии нейтронов от угла вылета. Числа у кривых — энергия дейтронов в мегаэлектронвольтах

## 2.3. Нейтронные генераторы

В нейтронном генераторе используются те же ядерно-физические реакции, что и в ускорителе для получения нейтронов.

Наибольшее распространение получили генераторы на реакции  ${}^3\text{T}(d,n){}^4\text{He}$ , реже используются генераторы на реакции  ${}^2\text{D}(d,n){}^3\text{He}$ .

Максимумы сечения этих реакций наблюдаются на небольших энергиях (рис. 2.4), а значит, можно использовать не большие ускорители, а так называемые каскадные генераторы. Как правило, ускоряются дейтроны.

Генератор состоит из ионного источника; ускорительной трубки; мишени-конвертера из трития или дейтерия; блоков питания ионного источника.

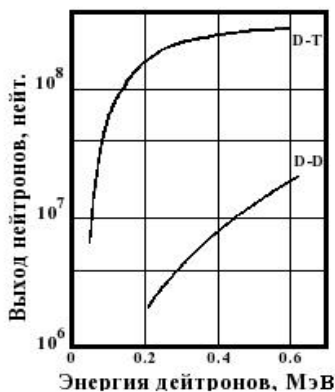


Рис. 2.4. Выход нейтронов из генератора в зависимости от энергии  $d$

Мишени-конвертеры нейтронных генераторов, позволяющих получить высокоинтенсивные потоки нейтронов, обычно твердотельные и представляют собой тонкие слои (до нескольких десятков микрометров) титана, скандия или цинка, нанесенные на медную подложку (рис. 2.5). Эти металлы способны образовывать так называемые металлические гидриды. Так гидриды титана или скандия способны удерживать до двух атомов изотопов водорода на один атом металла. Это свойство металлических гидридов позволяет использовать их в качестве аккумуляторов изотопов водорода и в частности изготавливать из них мишени-конвертеры. Энергия, теряемая пучком заряженных частиц в мишени, может достигать больших величин (до десятков киловатт на квадратный сантиметр). Это требует эффективного охлаждения. Обычно используется водяное охлаждение. Кроме того, мишень часто представляет быстро вращающийся



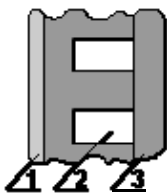


Рис. 2.5. Разрез мишени нейтронного генератора:  
1) слой титана, 2) каналы для охлаждения, 3) медная подложка

диск. Таким образом, увеличивается эффективная площадь, на которую падает пучок.

На рис. 2.6 показана упрощенная схема нейтронного генератора.

При небольших энергиях дейтронов альфа-частицы из реакции  ${}^3\text{T}(d,n){}^4\text{He}$  вылетают из мишени-конвертера под углами, близкими к  $180^\circ$  относительно направления вылета нейтронов. Если регистрировать альфа-частицы, то соответствующие им нейтроны оказываются как бы «меченными». Энергии и направления вылета из мишени-конвертера нейтронов через кинематические соотношения однозначно связаны с энергиями и углами вылета альфа-частиц. Таким образом можно осуществить электронную коллимацию нейтронного пучка. Момент вылета нейтрона из мишени также фиксируется с помощью детектирования сопутствующих альфа-частиц, что может быть использовано во времяпролетной методике.

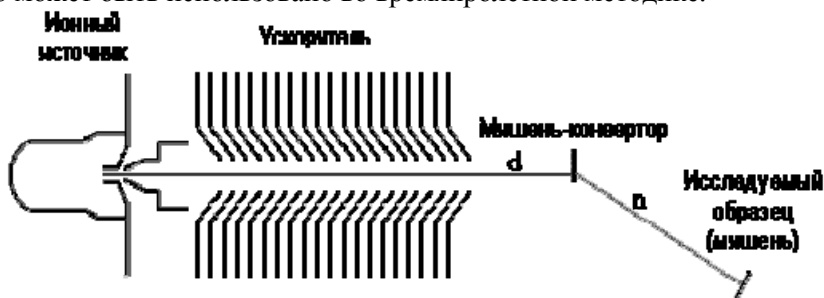


Рис. 2.6. Упрощенная схема нейтронного генератора

На нейтронных генераторах, использующих реакцию  ${}^3\text{T}(d,n){}^4\text{He}$ , удается получить потоки нейтронов до  $\sim 10^{14}$  нейтронов/с на телесный угол  $4\pi$ . У «стандартных» нейтронных генераторов они заметно меньше ( $\sim 10^{10}$  нейтронов/с).

Нейтронные генераторы изготавливают на основе вакуумных и газонаполненных нейтронных трубок и камер с плазменным фокусом (рис. 2.7). Нейтронные генераторы могут быть весьма малогабаритными, например для работы в скважинах. На рис. 2.8 приве-

ден внешний вид нескольких нейтронных генераторов, разработанных ФГУП «ВНИИА» для *аппаратуры радиационного анализа*.



Рис.2.7. Нейтронные трубки и камеры плазменного фокуса, производимые в ФГУП «ВНИИА»

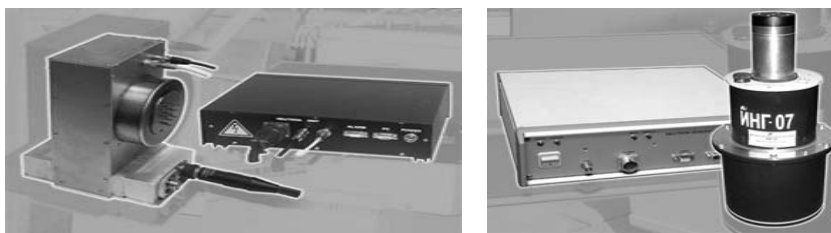


Рис. 2.8. Нейтронные генераторы для аппаратуры радиационного анализа

## ***2.4. Реактор как источник нейтронов***

Один из важнейших источников нейтронов – процесс деления наиболее тяжелых ядер, который сопровождается испусканием быстрых нейтронов. Для этих целей используются ядерные реакторы. Реакторы подразделяются на энергетические (для получения энергии), исследовательские (для исследований по ядерной и нейтронной физике и испытания материалов), воспроизводящие (для получения ядерного горючего). Часто один и тот же реактор используется для выполнения различных функций.

Реакторы бывают также гетерогенные (ядерное горючее распределено в активной зоне дискретно, в виде решетки) и гомогенные (ядерное горючее и замедлитель используется в виде однородной смеси, раствора, суспензии).

Еще реакторы подразделяются по тому, на каких нейтронах идет процесс деления (тепловые, промежуточные, быстрые).

Источником нейтронов в реакторе является реакция деления, поэтому спектр появляющихся в реакторе нейтронов – спектр нейтронов деления  $^{235}\text{U}$  или  $^{239}\text{Pu}$  (среднее значение энергии – около 2 МэВ).

Сталкиваясь с ядрами конструкционных материалов и замедлителя, нейтроны теряют энергию и в большинстве случаев достигают тепловых скоростей прежде, чем снова окажутся захваченными. Значит, внутри реактора на расстояниях от урановых блоков, сравнимых со средним пробегом быстрых нейтронов в замедлителе, имеются как быстрые, так и медленные нейтроны, т.е. нейтроны всех скоростей, начиная от самой маленькой – тепловой и кончая максимальной порядка 15 МэВ.

Распределение по скоростям в тепловой области довольно хорошо совпадает с распределением Максвелла (рис.2.9)

$$N(v)dv = kv^2 \exp(-v/v_0)^2 dv,$$

где  $N(v)$  – число нейтронов со скоростями около  $v$  в интервале  $dv$ ,  $k$  – постоянная,  $v_0 = \sqrt{2kT/m}$  – средняя квадратичная скорость теплового движения.

В области скоростей, больших чем тепловые,  $N(v)$  приблизительно обратно пропорционально квадрату скорости, т.е. энергии нейтрона:

$$N(v)dv = (k_1/v^2)dv = (k_2/E)dv.$$

Спектр нейтронов в реакторе на тепловых нейтронах очень широк. В нем выделяют 3 компоненты – тепловые, эпитепловые (резонансные) и быстрые нейтроны (рис. 2.10).

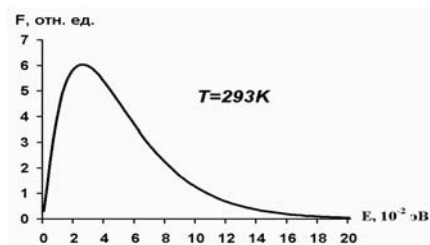


Рис. 2.9. Распределение Максвелла

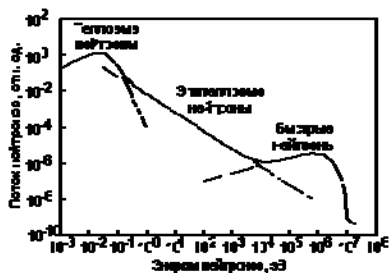


Рис. 2.10. Типичный спектр нейтронов реактора на тепловых нейтронах

Тепловые нейтроны – это нейтроны с энергией  $< 0,5$  эВ. Они находятся в тепловом равновесии с атомами материала реактора. При комнатной температуре они имеют энергетическое распределение Максвелла – Больцмана со средней энергией  $0,025$  эВ и наиболее вероятной скоростью  $2200$  м/с. Как правило,  $90-95\%$  нейтронного потока составляют тепловые нейтроны. Реактор мощностью  $1$  МВт обеспечивает нейтронный поток  $\sim 10^{13}$  (см<sup>2</sup> с<sup>-1</sup>).

Доля быстрых нейтронов ( $>0,5$  МэВ) в реакторе составляет  $\sim 5\%$ . Они вызывают реакции  $(n,p)$ ,  $(n,n')$  и  $(n,2n)$  и практически не вызывают реакции  $(n,\gamma)$ .

Реакторы на быстрых нейтронах типа БР разрабатывались как экспериментальные установки. Пример спектра нейтронов, выходящих из канала реактора на быстрых нейтронах, приведен на рис. 2.11. В качестве топлива использовался монокарбид урана, в качестве теплоносителя – натрий. Отражатель нейтронов выполнен из тонкого слоя природного урана и более толстого слоя никеля.

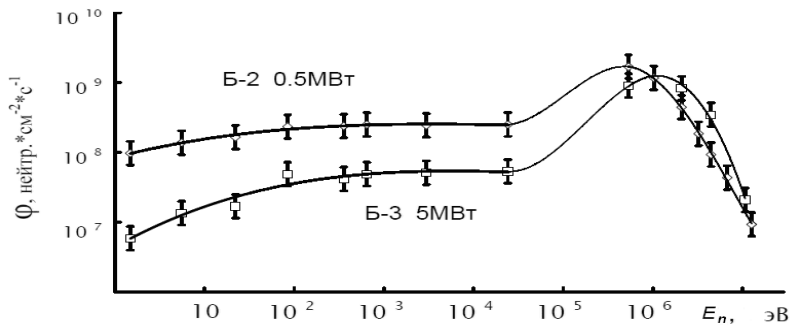


Рис. 2.11. Спектры нейтронов, измеренные в каналах реактора на быстрых нейтронах

Из примеров видно, что спектры нейтронов зависят от устройства реакторов. Даже для одного типа реактора спектры нейтронов внутри экспериментальных устройств различны. Поэтому говорить о типичном спектре какой-либо конструкции реактора можно лишь условно. Создаются специальные опорные облучательные установки на базе исследовательских реакторов. Поле нейтронов внутри такой установки должно быть хорошо известно, а спектр рассчитан и измерен несколькими способами.

## 2.5. Исследовательские ядерные реакторы

Первый ядерный реактор был создан под руководством Э. Ферми в 1942 г. в Чикаго. Первый реактор, предназначенный для пучковых исследований (HFBR), был создан в 1965 г. в Брукхейвене. Сегодня в мире работает несколько десятков исследовательских реакторов. Характеристики реакторов, некоторые из которых уже выведены из эксплуатации, отражены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

**Некоторые исследовательские ядерные реакторы  
с непрерывным потоком**

Реактор	Мощность, МВт	Поток $\times 10^{14}$ , нейтр. $\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}$
ПИК, Гатчина, Россия	100	45
HFIR, Ок-Ридж, США	100	30
HFR-ILL, Гренобль, Франция	58	15
HFBR, Брукхейвен, США	60	9
FRM-2, Мюнхен, ФРГ	20	8
NRU, Чок-Ривер, Канада	125	3
ORPHEE, Сакле, Франция	14	2,5
JRR-3M, Ибараки, Япония	20	2
Dhruva, Бомбей, Индия	100	2
ИР-8, Москва, Россия	8	1
BER-II, Берлин, ФРГ	10	1

Для использования времяпролетной методики на стационарных реакторах устанавливаются прерыватели. С помощью двух прерывателей возможно формирование монохроматического пучка нейтронов. Первый прерыватель служит для получения импульсного пучка. Второй, установленный на некотором расстоянии от первого – для его монохроматизации. Нейтроны больших энергий долетают до второго прерывателя быстрее, чем нейтроны меньших энергий. Подбрав соответствующим образом скорости вращения прерывателей, можно добиться ситуации, когда второй прерыватель будет пропускать нейтроны только в определенном энергетическом диапазоне. На реакторе ПИК (ПИЯФ) механический монохроматор состоит из четырех однотипных модулей, которые размещены вдоль коллимированного пучка нейтронов. Каждый модуль представляет

собой ротор, изготовленный из прочного стального сплава. Энергетическое разрешение прибора зависит от скорости вращения роторов и энергии пропускаемых нейтронов. В частности, при скорости 15000 об./мин и энергии нейтронов  $E \approx 1$  эВ, на которую настроен монохроматор,  $\Delta E/E \approx 0,05$ .

Ядерные реакторы с непрерывным потоком нейтронов имеют ограничения по потоку, связанные в основном с проблемой охлаждения. В импульсных реакторах при той же средней мощности выход используемых для исследований нейтронов многократно возрастает. В последнее время число исследовательских реакторов уменьшается, и будущее интенсивных нейтронных источников связано с использованием ускорителей.

## ***2.6. Импульсные реакторы***

В импульсных реакторах цепная реакция развивается на мгновенных нейтронах. С помощью так называемых **модуляторов реактивности** реактор на короткий промежуток времени (от  $\sim 10^{-4}$  с до нескольких секунд) переводится в надкритическое состояние, когда коэффициент размножения нейтронов без учета запаздывающих нейтронов  $k > 1$ . В реакторе быстро развивается цепная реакция деления. Затем реактор переводится в подкритическое состояние и процесс затухает. В результате генерируются импульсные нейтронные потоки большой интенсивности. Управлять критичностью реактора с помощью мгновенных нейтронов опасное занятие. «Проводить такие эксперименты – все равно, что щекотать хвост спящего дракона!» – сказал Р. Фейнман.

Говорят, что в 40-х гг. импульсный реактор в Лос-Аламосе работал следующим образом. Сверху в вертикальную трубу бросали кусок плутония или урана, который пролетал мимо другого куска ядерного материала. На какое-то время общая масса превышала критическую и генерировался мощный поток нейтронов. Современные импульсные реакторы – более сложные системы и безопасности их эксплуатации уделяется большое внимание.

Различают три типа импульсных реакторов: **самогасящиеся импульсные реакторы, периодические импульсные реакторы и бустеры.**

**В самогасящихся импульсных реакторах** цепная реакция деления гасится за счет отрицательной обратной связи различных процессов, связанных с выделяющимся теплом, с коэффициентом размножения нейтронов. Одним из первых импульсных реакторов был однократный реактор на быстрых нейтронах «Леда Годива» созданный в 1951 г. в Лос-Аламосской лаборатории в США. Длительность нейтронных импульсов в таких реакторах – от нескольких десятков микросекунд до нескольких секунд. Частота повторения импульсов невелика (один импульс в час, а то и 2-3 раза в сутки) и определяется временем, необходимым для охлаждения реактора. В импульсе до  $\sim 10^{18}$  нейтронов (ЯГУАР в ВНИИТФ, Снежинск).

**В периодических импульсных реакторах** нейтронные импульсы инициируются и гасятся за счет периодического движения части активной зоны, части отражателя либо замедлителя. В периодическом – мощность в каждом импульсе меньше, чем в однократном.

Первый периодический импульсный реактор ИБР-1 (импульсный быстрый реактор) был запущен в ОИЯИ (Дубна) в 1960 г. Идея ИБР-1 была предложена Д.И. Блохинцевым: между двумя частями плутония вращается диск с урановым вкладышем. При совпадении всех трех частей возникает мощная цепная реакция, которая быстро затухает. По поводу этого реактора Н. Бор сказал: «Я восхищен мужеством людей, решившихся на сооружение такой замечательной установки!» Д.И. Блохинцев считал, что эксплуатировать импульсный реактор – то же самое, что дразнить тигра в клетке (практически безопасно).

В дальнейшем в ОИЯИ был построен более мощный импульсный реактор ИБР-2 (официальная эксплуатация с 1984 г.). Схема этого реактора приведена на рис. 2.12.

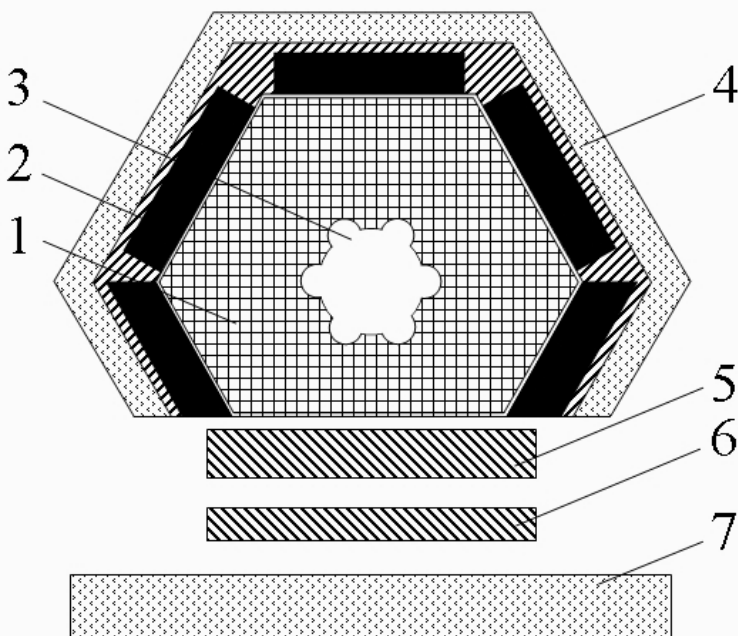


Рис. 2.12 . Схема реактора ИБР-2:

- 1- активная зона,
- 2- стационарный отражатель,
- 3- канал для мишени ускорителя и облучения образцов,
- 4- замедлитель-вода,
- 5- основной подвижный отражатель,
- 6- дополнительный подвижный отражатель,
- 7- замедлитель-вода

Активная зона ИБР-2 объемом 22 л содержит 82 кг двуокиси плутония и охлаждается жидким натрием. Модуляция реактивности осуществляется с помощью подвижного отражателя. С момента пуска работал стальной отражатель, который состоял из двух частей: основной и вспомогательной (так называемый «трезубец»). Эти две части вращались с разными скоростями (1500 и 300 об./мин) около активной зоны. Когда они оказывались одновременно напротив зо-



ны, генерировался нейтронный импульс. «Трезубцы» работали до 2003 г. В 2004 г. был пущен новый решетчатый отражатель из никелевого сплава, который состоит из двух частей, вращающихся в противоположных направлениях с медленной скоростью (600 об./мин). Длительность импульса мощности при этом сохраняется. Этот отражатель будет работать и на модернизированном реакторе ИБР-2М.

Усредненная мощность ИБР-2 составляет 2 МВт; мощность в импульсе – 1500 МВт. Импульсы тепловых нейтронов длительностью ~300 мкс испускаются с периодом в 5 Герц, нейтронный поток в импульсе на поверхности модератора –  $5 \cdot 10^{15}$  нейтронов/(см<sup>2</sup>·с).

Исследовательский импульсный реактор ИБР-2 является одним из самых эффективных в мире источников для исследований на выведенных пучках медленных нейтронов.

Надо сказать, что периодические импульсные реакторы строились и эксплуатировались только в СССР и России, несмотря на то, что проекты таких реакторов разрабатывались и в других странах. В первую очередь это связано с проблемой безопасности эксплуатации. Не зря от момента постройки до официального пуска ИБР-2 (1978-1984) прошло почти столько же времени, как от начала его проектирования до постройки (1966-1978).

**В бустере** мишень-конвертер из тяжелого металла помещена в подкритическую сборку. Импульс мощности инициируется импульсом нейтронов от внешнего источника. В качестве внешних источников используются сильноточные ускорители электронов (30 – 200 МэВ). Электроны из ускорителя рождают в мишени тормозные гамма-кванты, которые в свою очередь вызывают фотоядерные реакции ( $\gamma, n$ ). Фотоядерные нейтроны инициируют цепную реакцию в сборке, что приводит к увеличению потока нейтронов в 10-30 раз. После выключения внешнего источника размножение нейтронов прекращается. **В супербустере** есть возможность модуляции реактивности в размножающей мишени.

В бустере ИРЕН (источник резонансных нейтронов) (ОИЯИ) линейный электронный ускоритель ЛУЭ-200 имеет длительность импульсов 250 нс, значение тока электронов в импульсе ~1,5 А, частоту следования импульсов 150 Гц, энергию электронов ~200 МэВ. Мишень-конвертер – вольфрам. Конвертер окружает оболочка из <sup>239</sup>Pu

в состоянии глубокой подкритичности. Длительность нейтронного импульса 400 нс, интегральный выход нейтронов  $\sim 9 \cdot 10^{14}$  н/с.

## 2.7. Развитие мощных источников нейтронов

Общее развитие мощных источников нейтронов в мире с указанием мощности источника, названия и типа проиллюстрировано на рис. 2.13.

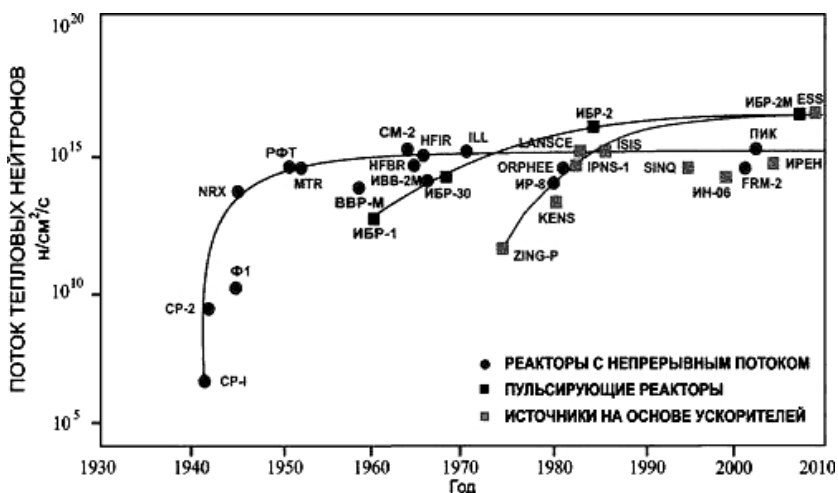


Рис. 2.13. Развитие мощных нейтронных источников

## 2.8. Методы получения моноэнергетических нейтронов

Экспериментатору нужен пучок моноэнергетических нейтронов. Установки для получения моноэнергетических нейтронов являются важной частью нейтронных физических комплексов.

Один принцип основывается на волновых свойствах, другой – на корпускулярных свойствах нейтрона.

### 2.8.1. Времяпролетный метод

Использование корпускулярных свойств предполагает чисто механическое разделение частиц по скоростям  $v$ .

Фактически на некоторой заданной пролетной базе  $L$  производится разделение по времени пролета  $t = L/v$  (т.н. времяпролетный спектрометр):

$$t = 72,3L \cdot E^{-1/2},$$

где  $L$  – в метрах,  $E$  – в мегаэлектронвольтах,  $t$  – в наносекундах.

Очевидно, времяпролетная техника требует обязательного применения коротких импульсов нейтронов, так как иначе время пролета становится неопределенным.

На рис. 2.14 приведен внешний вид нейтронного времяпролетного спектрометра ИЯИ РАН.



Вид пролетной базы 50 м



Вид на нейтронные каналы сверху

Рис. 2.14. Нейтронный времяпролетный спектрометр ИЯИ РАН

## 2.8.2. Кристаллические монохроматоры

Если на плоскую поверхность кристалла, срезанную параллельно одной из систем плоскостей с расстоянием между ними  $d$ , падает пучок нейтронов сплошного спектра под углом скольжения  $\varphi$  (угол между плоскостью и пучком), то под равным ему углом от поверхности отражается пучок, в котором оказываются только такие нейтроны, для которых выполняется условие Брэгга-Вульфа

$$2d \sin \varphi = n\lambda = n \frac{h}{\sqrt{2mE}},$$

где  $\lambda$  – длина волны:  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$ ,

$n$  – порядок отражения.

На практике для монохроматизации используется только отражение первого порядка. Это значит, что в направлении  $\theta$ , где  $\theta$  – угол рассеяния нейтронов, отсчитываемый от начального направления пучка, летят в основном нейтроны с энергией

$$E(\theta) = \frac{n^2}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{h^2}{8md^2} = \frac{n^2}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{h^2}{8md^2}.$$

Для первого порядка  $n = 1$ . Вклад других энергий из-за отражения более высокого порядка резко ослаблен. Кроме того, эти энергии существенно выше и могут отсутствовать в пучке. Наконец, более высокие энергии могут отсекаются с помощью сочетания монокристалла с фильтром или с методикой времени пролета. Все это обеспечит зависимость энергии от угла рассеяния  $\theta$ . В качестве кристаллов используют Ge, Be, Fe, C (графит).

1 - кристалл; 2 - детектор

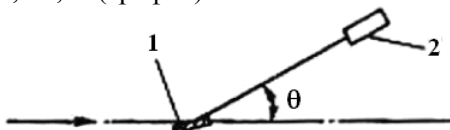
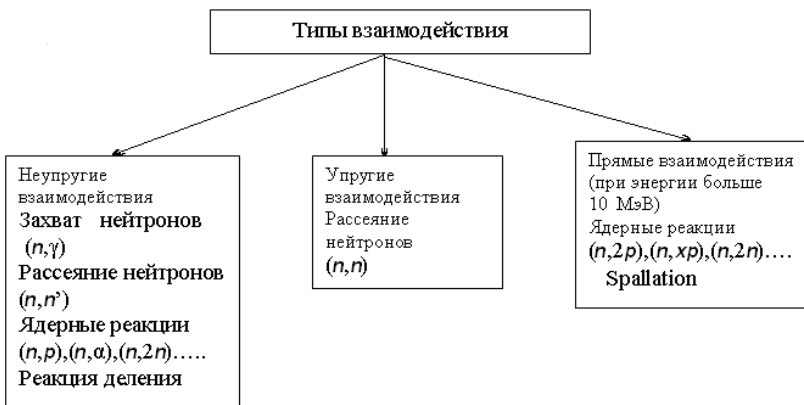


Рис. 2.15. Схема кристаллического монохроматора

## 3. Взаимодействие нейтронов с веществом

Основным видом взаимодействия нейтронов с веществом является их взаимодействие с атомными ядрами. При взаимодействии нейтроны могут вступать в различные процессы, самый общий обзор таких процессов представлен ниже в схеме. Вероятности вступления нейтрона в тот или иной процесс характеризуется сечением взаимодействия, и для нейтронов очень сильна зависимость сечений от энергии. Подробный обзор механизма самых распространенных типов взаимодействия упругого и неупругого рассеяния и захвата нейтронов приведен в последующих разделах.



### 3.1. Упругое рассеяние

Роль упругого рассеяния очень велика, так как замедление нейтронов в основном происходит посредством упругого рассеяния. Часть своей энергии нейтрон передает ядру отдачи, на этом основывается множество методов регистрации быстрых нейтронов (метод ядер отдачи, фотоэмульсии, камера Вильсона, ионизационные камеры).

Мы рассматриваем взаимодействие нейтрона с ядром атома, имеющего энергию теплового движения в образце вещества. Для тепловых и очень медленных нейтронов кинетическую энергию ядра в момент столкновения необходимо учитывать, а для  $E_n > 1,0$  эВ ядро можно уже считать покоящимся.

Вероятность рассеяния на некоторый угол  $\theta$  определяется величиной дифференциального сечения  $\sigma(\theta)$  рассеяния на этот угол. Для характеристики процесса рассеяния необходимо знать зависимость  $\sigma(\theta)$  во всем интервале углов  $0 \div 180^\circ$ .

Изменение энергии однозначно связано с углом рассеяния. Эта связь вытекает из законов сохранения энергии и импульса (рис. 3.1).

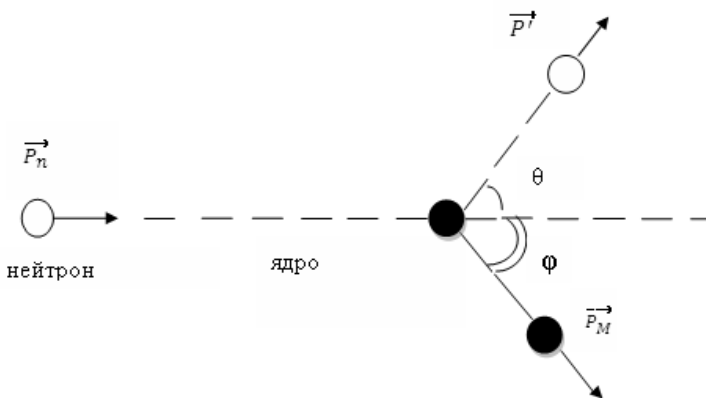


Рис. 3.1. Кинематика упругого рассеяния нейтронов:  $E$  и  $p$  – энергия и импульс нейтрона до столкновения;  $E'$  и  $p'$  – энергия и импульс нейтрона после столкновения;  $E_M$  и  $p_M$  – энергия и импульс ядра после столкновения;  $\theta$  – угол рассеяния нейтрона в ЛСО;  $\phi$  – угол отдачи ядра с массой  $M$

Из законов сохранения энергии и импульса:

$$E = E' + E_M,$$

$$p_M^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta,$$

если добавить соотношение  $p^2/2m = E$  и исключить  $E_M$  и  $p_M$ , можно получить связь между  $E$  и  $E'$ :

$$E' = E \cdot \frac{m^2}{(M+m)^2} \left( \cos \theta + \sqrt{\left(\frac{M}{m}\right)^2 - \sin^2 \theta} \right)^2.$$

Изменение кинетической энергии нейтрона зависит от:

- 1) отношения масс рассеивающего ядра и нейтрона;
- 2) угла рассеяния  $\theta$ .

Рассмотрим частные случаи:

$$\theta = 0, \quad \text{тогда } E' = E;$$

$$\theta = 90^\circ, \quad \text{тогда } E' = \frac{M-m}{M+m} E;$$

$$\theta = 180^\circ, \quad \text{тогда } E' = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 E.$$

Изменение энергии нейтрона тем больше, чем ближе масса ядра к массе нейтрона и чем больше угол рассеяния  $\theta$ . При рассеянии на протоне ( $M = m$ ) на угол, близкий к  $90^\circ$ , нейтрон теряет почти всю свою энергию. При рассеянии на тяжелых ядрах изменение энергии нейтрона невелико и можно считать, что рассеяние происходит без потери энергии.

Энергия рассеивающего ядра после столкновения (энергия отдачи) представляет собой ту долю энергии, что потерял нейтрон. Следовательно,

$$E_M = E - E' = E \left[ 1 - \frac{m^2}{(M+m)^2} \left( \cos \theta + \sqrt{\frac{M^2}{m^2} - \sin^2 \theta} \right)^2 \right].$$

Можно рассматривать  $E_M$  как функцию угла отдачи  $\varphi$ , а не угла рассеяния  $\theta$ . Для получения аналогичной зависимости нужно ввести в уравнение импульсов  $\varphi$  вместо  $\theta$  и, исключив  $E'$  и  $p'$ , получим

$$E_M = \frac{4Mm}{(M+m)^2} E \cos^2 \varphi.$$

Отсюда также очевидно, что энергия отдачи, передаваемая ядру нейтроном, тем больше, чем ближе масса ядра к массе нейтрона и чем меньше угол отдачи  $\varphi$  (следовательно, чем больше угол рассеяния  $\theta$ ).

Связь между углом рассеяния  $\theta$  и углом отдачи  $\varphi$  можно установить на основе вышеприведенных соотношений. Она имеет вид

$$\cos^2 \varphi = \frac{(M + m)^2}{4Mm} - \frac{m}{4M} \left( \cos \theta + \sqrt{\frac{M^2}{m^2} - \sin^2 \theta} \right)^2.$$

В частности, при  $M = m$   $\cos \varphi = \sin \theta$ , т.е. углы  $\varphi$  и  $\theta$  являются дополнительными и сумма их равна  $90^\circ$ .

В общем случае  $M \neq m$ , угол  $\varphi$  растет с уменьшением  $\theta$  и наоборот. При  $M > m$  угол  $\theta$  составляет от  $0$  до  $180^\circ$ , угол  $\varphi$  всегда от  $0$  до  $90^\circ$  и никогда не может быть больше  $90^\circ$ .

При  $M < m$ , например при рассеянии нейтрона на электроне, угол  $\theta$  изменяется от  $0$  до максимального значения  $\theta_{\max}$ , которое определяется соотношением  $\sin \theta_{\max} = M/m$ .

Это означает, что на электроне нейтрон может рассеяться не больше, чем на  $2'$ .

## 3.2. Сечение упругого рассеяния

Характер действующих сил сказывается на вероятности столкновений, т.е. на сечении реакции. Нахождение эффективного сечения является основной задачей теории рассеяния частиц. Основу теории рассеяния составляет решение уравнения Шредингера с определенным потенциалом взаимодействия.

Для многих практических случаев можно предсказать приближенные величины  $\sigma$ , характер их зависимости от энергии нейтрона.

Предположения, которые применяют для решения уравнения Шредингера по сечению взаимодействия:

- радиус взаимодействия нейтрона с ядром очень мал;
- потенциал можно считать сферически симметричным, т.е. зависящим только от расстояния между нейтроном и ядром, но не зависящим от направления.

При условии  $\lambda \gg R$  сечение потенциального рассеяния  $\sigma = 4\pi R^2$ , здесь  $\lambda = 2\pi\lambda$  – длина волны нейтронов,  $R$  – радиус действия ядерных сил.

Когда это условие выполняется?



Для наиболее тяжелых ядер  $R = r_0 A^{1/3} = 1,5 \cdot 10^{-13} (240)^{1/3} \approx 9 \cdot 10^{-13}$  см.

Длина волны нейтрона  $\lambda$  равна этой величине при энергии приблизительно 0,7 МэВ, ( $\lambda = 4,65 \cdot 10^{-13} / \sqrt{E}$  – в сантиметрах,  $E$  – в мегаэлектронвольтах).

Значит, условие  $\lambda \gg R$  выполняется для нейтронов с  $E \ll 0,7$  МэВ при рассеянии на любых ядрах.

### 3.2.1. Теория резонансного рассеяния

Резонансное рассеяние наблюдается тогда, когда энергия нейтрона близка к одному из значений, соответствующих квазистационарному состоянию нейтрон-ядро. Каждое квазистационарное состояние характеризуется не строго определенным значением энергии, а некоторым конечным интервалом энергии – шириной интервала  $\Gamma$ .

Эффективное сечение рассеяния в этом случае – вблизи одиночного резонанса:

$$\begin{aligned} \sigma &= 4\pi R^2 + 4\pi \lambda^2 \cdot \frac{\Gamma^2 - 2 \frac{R}{\lambda_0} \Gamma (E_0 - E)}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2} = \\ &= \sigma_{ps} + \sigma_{res} - 8\pi R \frac{\lambda^2}{\lambda_0} \frac{\Gamma (E_0 - E)}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2}. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое – интерференционный член от сложения амплитуд потенциального и резонансного рассеяния.

При переходе через резонанс этот член меняет знак с отрицательного на положительный, благодаря чему

при  $E < E_0$   $\sigma < \sigma_{ps}$ ,

при  $E > E_0$   $\sigma > \sigma_{ps}$ .

При наличии нескольких близких уровней формула непригодна.

Общие характеристики сечения при  $\lambda \gg R$ .

1) Дифференциальное сечение не зависит от угла в координатах центра инерции, т.е. всегда сферически симметрично:

$$d\sigma = \frac{\sigma}{4\pi} dw = \frac{1}{2} \sigma \sin \theta d\theta.$$

2) Интегральное сечение  $\sigma$  вдали от резонанса равно  $\sigma_{ps} = 4\pi R^2$  и не зависит от энергии нейтрона. Вблизи резонанса имеет сложную зависимость.

При  $E < E_0$  сечение меньше  $4\pi R^2$  и убывает с ростом  $E$ , достигая минимума при  $E = E_0 - \frac{\lambda}{R} \Gamma$ , затем круто возрастает, достигая максимума при  $E \approx E_0 + \frac{R_0}{\lambda} \Gamma$ , и, наконец, убывает, достигая  $\sim 4\pi R^2$  вдали от резонанса.

Типичная зависимость рассеяния от энергии нейтрона наблюдалась для серы S (рис. 3.2). Так как захват в данном случае практически отсутствует, то измеренное полное сечение равно сечению рассеяния.

Сечение потенциального рассеяния равно приблизительно 2,4 барн.

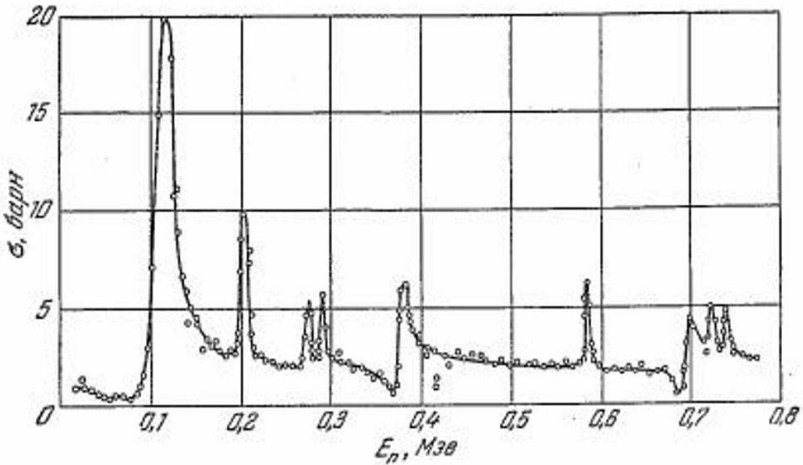


Рис. 3.2. Сечение рассеяния нейтронов для серы

### 3.2.2. Упругое рассеяние при больших энергиях

С увеличением энергии нейтрона условие  $\lambda \gg R$  нарушается. Это ведет к отклонению рассеяния от сферически симметричного.

С наибольшей вероятностью отклонение от сферической симметрии будет иметь вид усиления интенсивности вдоль оси рассеяния, т.е. вперед или назад.

Простейшее предположение, принимавшееся в ранних исследованиях взаимодействия быстрых нейтронов, состояло в предположении о ядре как о черном теле. Абсолютно черное ядро должно захватывать всякий нейтрон, проходящий от него на расстоянии  $\lambda$ . Поэтому сечение захвата должно равняться  $\pi(R + \lambda)^2$ .

Рассеяние на таком ядре аналогично дифракции световых волн на круглом непрозрачном экране. Поэтому угловое распределение рассеянных нейтронов описывается теми же формулами, что и дифракция света.

Для интервала углов  $\lambda/R \ll \theta \ll 1$  можно пользоваться формулой

$$d\sigma(\theta) = \frac{2}{\pi} R\lambda \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{R}{\lambda}\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\theta^3} d\theta.$$

Согласно этой формуле сечение убывает как  $1/\theta^3$ , совершая колебания с периодом  $\lambda/R$ .

Таким образом, нейтроны с длиной волны порядка или меньше радиуса ядра должны испытывать дифракционное упругое рассеяние преимущественно под небольшими углами порядка  $\lambda/R$ , убывающими по мере роста энергии. Результаты опытов подтвердили наличие дифракционного рассеяния.

Если коэффициент поглощения нейтрона ядром считать меньшим 1, то следует ожидать другого соотношения между сечениями захвата и рассеяния.

Дифференциальное сечение рассеяния в этом случае будет результатом дифракции не только волн, огибающих край ядра, но также волн, проходящих сквозь ядро, которое не полностью поглощает нейтрон, а является полупрозрачным. Ядро на самом деле не является абсолютно твердым телом. Так, для нейтронов с  $E = 90$  МэВ пробег в ядерном веществе составит  $L = 6 \cdot 10^{-13}$  см. Эта

величина немного больше радиуса легких ядер, но меньше радиуса тяжелых ядер.

Упругое рассеяние является результатом интерференции падающей волны с волной, прошедшей сквозь ядро. Когда ядро совершенно прозрачно и преломления волны не происходит, тогда для рассеяния нет причины и  $\sigma_d = 0$ . Когда ядро черное, тогда прошедшей сквозь ядро волны нет и сечение дифракционного рассеяния равно геометрическому сечению ядра  $\pi R^2$ . В промежуточных случаях амплитуда прошедшей волны конечна и интерференция задает максимум сечения, положение и величина которого зависят от соотношения длины волны  $\lambda$ , радиуса ядра  $R$  и длины пробега  $L$ .

Такой подход может быть распространен в область больших энергий лишь до тех пор, пока длина волны нейтрона больше расстояния между отдельными нуклонами в ядре.

Так как  $\lambda = 29,2 \cdot 10^{-13} E^{-1/2}$  (в мегаэлектронвольтах) и расстояние между нуклонами  $2r_0 = 3 \cdot 10^{-13}$  см, то этот предел  $\sim 100$  МэВ. При большей энергии нейтрона (при меньшей его длине волны) уже не имеет смысла рассматривать взаимодействие нейтрона с ядром как целым. Если  $\lambda \ll 3 \cdot 10^{-13}$  см, то рассеяние на ядре эквивалентно рассеянию на свободных нуклонах, входящих в состав ядра. В промежуточной области при  $E$  порядка нескольких сот мегаэлектронвольт необходимо рассматривать рассеяние как результат интерференции волн, рассеянных отдельными нуклонами и ядром в целом.

### 3.2.3. Упругое рассеяние и поляризация нейтронов

Наряду с изменением направления и величины скорости при упругом рассеянии меняется также состояние поляризации. Полуцелый спин может иметь направление либо по, либо против заданного направления. В неполяризованном пучке вероятность обеих проекций одинакова. Если же есть направление, в котором одна проекция более вероятна, то пучок поляризован.

Степень поляризации задается формулой

$$P = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}.$$

График сечения, представленный на рис 3.2, для S – частный случай отсутствия захвата и нулевого спина рассеивающего ядра. Это связано с тем, что основной изотоп серы  $^{32}\text{S}$ , имеющий распространенность 95 %, обладает нулевым спином.

Если рассеивающее ядро имеет спин  $i$ , отличный от нуля, то при рассеянии возможны два состояния системы ядро-нейтрон со спином  $i-1/2$  и  $i+1/2$ .

Так как каждый уровень ядра характеризуется вполне определенным значением спина, то резонанс в каждом случае должен наблюдаться только для одного из двух состояний, например для  $i-1/2$ . Тогда для другого состояния нейтрона во всей области резонанса будет наблюдаться чисто потенциальное рассеяние с сечением, не зависящим от энергии нейтрона.

В общем случае сечение рассеяния нейтрона вблизи одиночного резонанса

$$\sigma = \frac{i}{2i+1} \sigma_1 + \frac{i+1}{2i+1} \sigma_2 + 4\pi\lambda_0^2 \frac{i}{2i+1} \frac{\Gamma_n^2 + 2 \frac{R_1}{R_2} \Gamma_n (E - E_0)}{(E - E_0)^2 + \Gamma_n^2},$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – сечения потенциального рассеяния в состояниях с суммарным спином  $(i-1/2)$  и  $(i+1/2)$  соответственно;  $R_1$  – радиус ядра, соответствующий первому состоянию, к которому относится резонанс  $(i-1/2)$ ;  $\Gamma_n$  – нейтронная ширина.

Если, наоборот, резонанс относится к состоянию со спином  $i+1/2$ , то в третьем слагаемом статистический множитель  $i/(2i+1)$  заменим на  $(i+1)/(2i+1)$ , а  $R_1$  – на  $R_2$ .

### 3.3. Захват нейтронов

Вследствие взаимодействия с ядром в целом или с составляющими его нуклонами по отдельности нейтрон с большой вероятностью испытывает неупругие взаимодействия, при которых часть кинетической энергии идет на разрыв ядерных связей и происходит либо испускание ядром частиц, либо возбуждение ядра с последующим излучением гамма-квантов. Простейшим механизмом взаимодействия нейтрона с ядром будет парное взаимодействие нуклона ядра с нейтроном. Это возможно при условии, когда длина волны падающего нейтрона меньше среднего расстояния между нукло-

нами ядра и скорость его больше внутриядерных скоростей. Этому условию удовлетворяют нейтроны с энергией больше 100 МэВ. Длительность таких взаимодействий –  $10^{-22}$  с. Падающий нейтрон при этом не вовлекается во внутриядерное движение, а лишь однажды пересекая ядро, передает одному из его нуклонов (а может быть и коллективу нуклонов) часть своей кинетической энергии. С уменьшением энергии вероятность «прямых» «одноактных» столкновений убывает и растет вероятность запутывания бомбардирующего нейтрона в ядре, вовлечения его во внутриядерное движение и образование возбужденного составного ядра.

Такой процесс более вероятен при энергии нейтрона меньше 100 МэВ.

Энергия возбуждения составного ядра

$$E^* = - \frac{M}{M+m} E + \varepsilon,$$

где  $M$  – масса бомбардируемого ядра,  $\varepsilon$  – энергия связи нейтрона в составном ядре,  $E$  – кинетическая энергия нейтрона до столкновения.

Возбужденное составное ядро переходит в состояние с более низкой энергией путем испускания частиц или гамма-квантов или деления. Так как этот процесс совершается через продолжительное время после захвата нейтрона по сравнению с ядерным временем (порядка  $10^{-22}$  с), то способ перехода не зависит от способа возбуждения ядра, а зависит от состояния возбуждения. Поэтому процесс перехода рассматривают как независимый, только «исторически» связанный с захватом.

Захват нейтрона с последующим испусканием частиц, очевидно, возможен только в том случае, когда энергия связи испускаемой частицы  $\varepsilon_x$  меньше энергии возбуждения составного ядра:

$$E^* = \frac{M}{M+m} E + \varepsilon_n > \varepsilon_x$$

или  $\frac{M}{M+m} E > \varepsilon_x - \varepsilon_n = Q,$

где  $Q$  – энергия реакции.

Так как энергии связи протонов и  $\alpha$ -частиц ( $\varepsilon_p$  и  $\varepsilon_\alpha$ ) могут быть и больше, и меньше  $\varepsilon_n$ , то реакции  $(n,p)$  и  $(n,\alpha)$  могут быть эндотермическими ( $Q < 0$ ) и экзотермическими ( $Q > 0$ ). Экзотермиче-

ские реакции возможны при любой энергии нейтронов. Эндотермические возможны только при энергии нейтронов, превышающей порог

$$\Pi = \frac{M+m}{M} Q = \frac{M+m}{M} (\epsilon_x - \epsilon_n).$$

Минимальная энергия, при которой идет реакция,

$$\frac{M}{M+m} E = \epsilon_x - \epsilon_n \Rightarrow E_{\text{мин}} = \Pi = \frac{M+m}{M} (\epsilon_x - \epsilon_n).$$

Хотя экзотермические реакции  $(n,p)$  и  $(n,\alpha)$  могут идти при любой энергии нейтрона, а эндотермические при  $E > \Pi$ , но если  $Q$  или  $E-\Pi$  малы по сравнению с высотой потенциального барьера ядра, то вероятность этих реакций невелика.

Поскольку высота барьера пропорциональна  $Z^{2/3}$  (где  $Z$  – заряд ядра), то условие тем строже, чем тяжелее ядро. Поэтому для медленных нейтронов реакции  $(n,\alpha)$  и  $(n,p)$  идут на некоторых легких ядрах, а для быстрых нейтронов, хотя и возможны, но не идут из-за конкуренции с другими процессами. Примером реализации реакции  $(n,\alpha)$  может служить реакция  $^{10}\text{B}(n,\alpha)^7\text{Li}$ , которая широко используется для регистрации медленных нейтронов.

Энергетическое условие испускания нейтрона составным ядром выполняется всегда, при любой энергии захватываемого нейтрона. Можно ожидать, что процесс будет весьма вероятным. Но возбуждение оставшегося ядра не может быть любым.

Порог неупругого рассеяния

$$\Pi = \frac{M+m}{M} E_k,$$

где  $E_k$  – энергия возбуждения рассеиваемого ядра.

Нейтроны с энергией  $E_n < \Pi$  неупруго рассеяться не могут. Положение ближайших уровней различно у разных ядер. Общее правило таково, что чем тяжелее ядро, тем ниже уровни. Поэтому неупругое рассеяние на тяжелых ядрах идет при энергии нейтронов порядка нескольких сотен килоэлектронвольт; на легких ядрах – при энергиях порядка нескольких мегаэлектронвольт.

Резонансный захват  $(n,\gamma)$  возможен при любой энергии и любым ядром за редким исключением.

Захват нейтрона, сопровождающийся делением, наблюдается практически только для самых тяжелых ядер. Хотя процесс деле-

ния является экзотермическим для очень большого числа ядер с  $A > 100$ , разлету осколков мешает потенциальный барьер. Нужна еще энергия активации. Bi, Pb, Pt делятся нейтронами с энергией  $\sim 10$  МэВ.

Итак, рассматривая общие характеристики различных процессов, сопровождающих захват нейтронов, можно сказать следующее: наиболее вероятными являются чисто нейтронные процессы, и лишь в области очень малых энергий захватываемого нейтрона наряду с неупругим рассеянием оказывает заметное влияние радиационный захват. Только эти два процесса и будем в дальнейшем учитывать.

### 3.4. Сечение захвата

Захват нейтрона связан с формированием составного ядра, а это ядро, как всякая квантомеханическая система, характеризуется более или менее дискретным спектром квазистационарных состояний, поэтому можно заведомо ожидать, что сечение захвата нейтрона должно резонансным образом зависеть от энергии нейтрона. Наиболее вероятно будет идти захват нейтрона с такой энергией  $E_0$ , которая удовлетворяет условию резонанса  $\varepsilon_n + E_0 = E_i^*$ , где  $E_i^*$  – энергия  $i$ -го уровня.

Вероятность захвата нейтрона с другим значением  $E$  будет тем меньше, чем больше  $|E - E_0|$  по сравнению с шириной  $\Gamma$  соответствующего уровня.

Сечение захвата медленного нейтрона в области одиночного уровня определяется формулой Брейта-Вигнера:

$$\sigma_c = \pi \lambda_0 \lambda \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2},$$

где  $\Gamma$  – полуширина уровня;

$\Gamma = \sum_i \Gamma_i$  – полная полуширина уровня, характеризующая время

жизни составного ядра при возбуждении этого уровня и равная сумме парциальных ширин  $\Gamma_i$ , соответствующих вероятности отдельных процессов;

$\Gamma_n$  – нейтронная полуширина, характеризующая нейтронное неупругое рассеяние;



$\Gamma_\gamma$  – радиационная полуширина, соответствующая радиационному захвату нейтронов, т.е.  $(n,\gamma)$  реакции;

$\lambda_0$  – длина волны, соответствующая резонансному значению энергии  $E_0$ .

Зависимость  $\sigma_c$  от энергии нейтрона  $E$  в формуле Брейта-Вигнера определяется, во-первых, резонансным множителем

$$\frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2}, \text{ во-вторых, множителем } \pi \lambda_0 \lambda. \text{ Этот множитель}$$

обратно пропорционален скорости нейтрона, так как  $\lambda = \frac{\hbar}{mv}$ .

Резонансный множитель существует при энергии нейтрона  $E$ , близкой к  $E_0$ , и дает максимум сечения захвата при  $E = E_0$ , причём

$$\sigma_0 = \sigma(E_0) = \pi \lambda_0^2 \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\Gamma^2}.$$

Ширина максимума на половине высоты –  $2\Gamma$ .

Множитель  $\pi \lambda_0 \lambda$  отражает так называемый закон  $1/v$ , т.е. обратную пропорциональность сечения захвата относительно скорости нейтрона. Этот закон проявляется в тех случаях, когда резонансный член почти не меняется с изменением энергии нейтрона, а именно:

- а) когда  $E \ll \Gamma$ ;
- б) когда  $E \ll E_0$ .

Достаточно выполнение одного из этих условий, чтобы резонансный член не сказывался на ходе сечения.

Если, например, уровень (узкий или широкий – безразлично) расположен при  $E_0$ , равной нескольким электронвольтам, то для тепловых нейтронов ( $E \approx 0,04$  эВ) сечение будет меняться по закону  $1/v$ . Закон  $1/v$  является почти универсальным для захвата ядра медленных нейтронов.

Абсолютная величина сечения в области действия закона  $1/v$  определяется множителем:

$$\frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\sqrt{E_0} (E_0^2 + \Gamma^2)} \quad (E \ll E_0).$$

Если  $E_0 \gg \Gamma$ , то этот множитель  $\approx \Gamma_n \Gamma_\gamma E_0^{-5/2}$ ; если  $E_0 \ll \Gamma$ , то

$$\sigma \sim \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\sqrt{E_0} \Gamma^2} \sim E_0^{-1/2} \frac{\Gamma_n}{\Gamma}, \text{ т.е. обратно пропорциональна ширине.}$$

$$\Gamma_n \Gamma_\gamma / \Gamma^2 \approx \Gamma_n / \Gamma_\gamma, \text{ если } \Gamma_n \ll \Gamma_\gamma;$$

$$\Gamma_n \Gamma_\gamma / \Gamma^2 \approx \Gamma_\gamma / \Gamma_n, \text{ если } \Gamma_n \gg \Gamma_\gamma.$$

Закон  $1/v$  не соблюдается для тепловых нейтронов или в тех редких случаях, когда  $E_0$  близка к  $E_T$ . При этом, если  $E_0 > E_T$ , то сечение растет с уменьшением  $E$  медленней, чем  $1/v$ , или даже убывает. Если же  $E_0 < E_T$ , то сечение растет быстрее, чем  $1/v$ . В частности, может быть  $E_0 < 0$ . Это означает, что энергия возбужденного уровня  $E_i^* < \epsilon_n$  меньше энергии связи нейтрона  $E_0 = E_i^* - \epsilon_n$ . Такой случай можно обнаружить по крутизне кривой в области малых энергий (Hg (ртуть), Eu (европий)).

Общий вид сечения представлен на рис. 3.3 для ядра In.

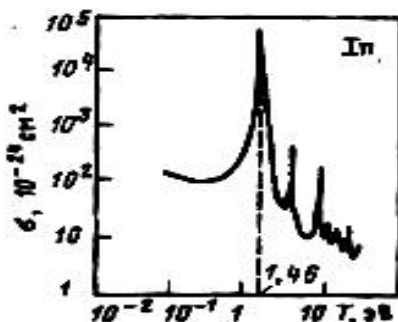


Рис. 3.3. Энергетическая зависимость сечения взаимодействия нейтронов с ядрами In

С увеличением энергии сечение захвата также описывается формулой Брейта-Вигнера. С ростом энергии нейтрона ширина уровней увеличивается и растет плотность уровней. Для взаимодействия быстрых нейтронов с не очень легкими ядрами можно ожидать слияния резонанса в более или менее плавный ход сечения. Вводят понятие эффективного сечения, усредненного

по многим уровням, среднее расстояние между которыми  $D$  меньше или порядка  $\Gamma$ .

Усредненное сечение захвата

$$\sigma_c = \pi \lambda^2 \Gamma_n / D = \pi \lambda^2 S, \text{ где } S = \Gamma_n / D - \text{силовая функция.}$$

## 4. Основы теории переноса нейтронов

### 4.1. Терминология, описывающая нейтронное поле

В дальнейшем изложении будет часто употребляться термин «плотность потока нейтронов»:

$$\varphi \left[ \frac{\text{нейтр}}{\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{МэВ}} \right]; \quad \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}).$$

Что такое плотность потока нейтронов?

$\varphi(\vec{r}, t, E, \vec{\Omega})$  – это отнесенное к единичному энергетическому интервалу число частиц с энергией  $E$ , движущихся в направлении единичного вектора  $\vec{\Omega}$  в единичный телесный угол и пересекающих в момент времени  $t$  за единицу времени помещенную в точке пространства  $\vec{r}$  единичную площадку, нормаль к которой по направлению совпадает с  $\vec{\Omega}$  (рис. 4.1).

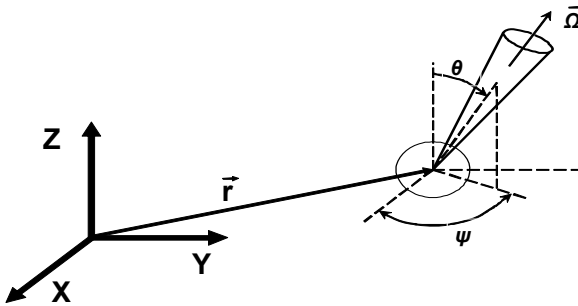


Рис. 4.1. Пространственная иллюстрация к понятию плотности потока нейтронов

Плотность тока

$$\vec{J}_{\text{ср}}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \vec{\Omega} \varphi(\vec{r}, t, E, \vec{\Omega}) \left[ \frac{\text{частиц}}{\text{см}^2 \times \text{с} \times \text{МэВ} \times \text{ср}} \right] -$$

векторная величина, по модулю равная  $\varphi$ .

Также часто используется понятие «сечение взаимодействия».

Дадим определение сечения взаимодействия нейтронов с веществом.

Рассмотрим эксперимент по определению коэффициента ослабления узкого пучка на рис. 4.2. Рассмотрим, как убывает количество нейтронов при прохождении защиты. На расстоянии  $dx$  число нейтронов уменьшается на  $dn$ .

Чему пропорциональна величина  $dn$ ?

$$dn(x) \cong -n(x=0)\Sigma dx;$$

где  $\Sigma$  – коэффициент пропорциональности, характеризующий вещество.

Постоянная величина  $\Sigma$  имеет размерность обратной длины и характеризует среднее число столкновений на единичном пути. Оно определяет вероятность столкновения частиц с атомами вещества на единицу пути.

Рассмотрим составленное уравнение для  $n(x)$  (используем  $n(x=0)$ ):

$$n(x) = n(x=0)\exp(-\Sigma x).$$

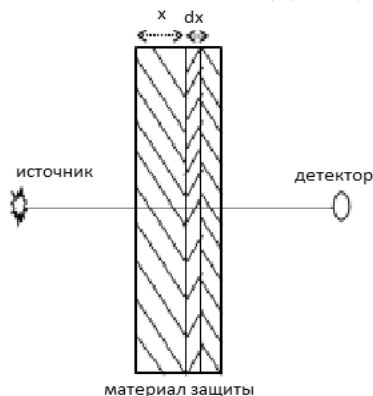


Рис. 4.2. К понятию «полное сечение взаимодействия»

сечение (с учетом всех возможных нейтронных процессов). Единица измерения  $\sigma$  - 1 барн =  $10^{-28}$  м<sup>2</sup>. По аналогии с  $\sigma$  – микроскопическим сечением взаимодействия –  $\Sigma$  называют макроскопическим сечением взаимодействия.

Сама вероятность  $\Sigma$  очевидно пропорциональна количеству ядер в 1 см<sup>3</sup> вещества  $N$ . Число ядер  $N$  может быть выражено через число Авогадро  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>, атомную массу вещества  $A$  и его плотность  $\rho$ , г/см<sup>3</sup>:

$$N = \rho N_A / A, \text{ а } \Sigma = N \cdot \sigma.$$

Здесь  $\sigma$  – коэффициент пропорциональности, имеющий размерность площади; эта величина получила название «микроскопическое сечение взаимодействия». Это полное

Величина «микроскопическое сечение взаимодействия  $\sigma$ » характеризует вероятность взаимодействия одного ядра с одним нейтроном.

Изменение числа нейтронов при прохождении узкого пучка через защиту в этих терминах можно записать как

$$n(x) = n(x=0)\exp(-N\sigma \cdot x).$$

## **4.2. Уравнение баланса нейтронов**

Уравнение переноса излучения, а в курсе нейтронной физики – переноса нейтронов описывает баланс частиц в элементе шестимерного фазового пространства координат и импульсов частиц.

Перед написанием такого уравнения важно договориться о предположениях, при которых уравнение будет справедливым.

Плотность потока частиц много меньше плотности ядер вещества. Таким образом, столкновения нейтронов друг с другом не рассматриваются.

Квантовомеханические эффекты не учитываются. Такие эффекты становятся существенными для медленных нейтронов, когда длина волны становится одного порядка с расстоянием между атомами вещества. Тогда нейтрон-волна взаимодействует не с одним атомом, а со всей атомной решеткой. Кинетическое уравнение для такого взаимодействия будет иметь гораздо более сложный вид. Эффект поляризации частиц при их прохождении в веществе не учитывается. Рассматривается только стационарное уравнение баланса, т.е. считается, что  $\partial\phi/\partial t = 0$ .

### **4.2.1. Вывод уравнения переноса излучений**

Нейтроны, распространяясь в веществе, обладают различными скоростями и перемещаются в различных направлениях. Пространственное, энергетическое и угловое распределение излучения определяется решением стационарного кинетического уравнения Больцмана – уравнения переноса излучения.

Пусть  $\vec{r}$  – радиус-вектор, определяемый тремя пространственными координатами,  $\vec{\Omega}$  – единичный вектор направления движе-

ния нейтрона, определяемый двумя угловыми переменными,  $E$  – энергия нейтрона.

Рассмотрим в объеме  $d\vec{r}$  около точки, характеризуемой радиусом  $\vec{r}$ , баланс числа нейтронов  $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})d\vec{r}dEd\vec{\Omega}$ , движущихся в пучке направлений  $d\vec{\Omega}$  около  $\vec{\Omega}$  и обладающих энергиями в интервале от  $E$  до  $E + dE$ .

Здесь  $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  – дифференциальная плотность потока нейтронов в точке  $\vec{r}$  с энергией  $E$  и направлением движения  $\vec{\Omega}$ ; где  $\varphi$  – функция шести независимых переменных.

Изменение числа нейтронов в элементе фазового пространства  $d\vec{r}dEd\vec{\Omega}$  обусловлено:

- 1) утечкой из данного элемента объема  $\vec{r}$ , которая определяется соотношением  $\text{div}(\vec{\Omega}\varphi)d\vec{r}dEd\vec{\Omega} = \vec{\Omega}\nabla\varphi d\vec{r}d\vec{\Omega}dE$ ;
- 2) убылью нейтронов в результате взаимодействия с ядрами среды  $\Sigma\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})d\vec{r}dEd\vec{\Omega}$ ,

где  $\Sigma$  – полное макроскопическое сечение взаимодействия нейтронов с ядрами среды; оно зависит от энергии нейтрона  $E$  и ядерного состава материалов среды в элементе объема  $\vec{r}$ , т.е.  $\Sigma = \Sigma(\vec{r}, E)$ ;

- 3) излучением источников нейтронов с плотностью  $q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ , обусловленным, например, делением ядер;
- 4) приростом числа нейтронов, вызванным рассеянием (упругим и неупругим)

$$\left\{ \int_E^{\infty} \left[ \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') \right] dE' d\vec{\Omega}' \right\} d\vec{r} dEd\vec{\Omega},$$

где  $\Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$  – дифференциальное сечение рассеяния ядрами среды в окрестности точки  $\vec{r}$ , при котором нейтрон с энергией  $E'$ , имеющий направление  $\vec{\Omega}'$ , рассеивается в интервал направлений  $\vec{\Omega}$ , приобретая при этом энергию  $E$ . Таким образом, нейтроны из точки фазового пространства  $(\vec{r}, E', \vec{\Omega}')$  попадают в точку фазового пространства  $(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ .

Кинетическое уравнение получается для стационарной задачи уравниванием ухода и прихода нейтронов в элементе пространства, в результате чего получается:

$$\begin{aligned} & \vec{\Omega} \nabla \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma(\vec{r}, E) \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \\ & = \int_E d\vec{\Omega}' \int dE' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') + q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}). \end{aligned}$$

Для полной определенности задачи уравнение необходимо дополнить условиями на внешней поверхности защиты  $S$ .

$\vec{n}$  – внешняя нормаль границы  $S$ . Если эта поверхность граничит со средой, отражением излучения от которой можно пренебречь, и поверхность  $S$  не вогнутая (т.е. нейтрон, вылетевший из нее в одном месте, не может снова пересечь ее в другом месте), то отсутствие входящих извне нейтронов описывается условием

$$\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = 0 \text{ на } S \text{ при } (\vec{\Omega} \vec{n}) < 0.$$

Если на внутреннюю поверхность защиты со стороны источника излучения падает поток, то  $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \varphi_{nad}(\vec{r}_{S_0}, E, \vec{\Omega})$  по  $S_0$  ( $\vec{\Omega} \vec{n}_0 < 0$ ).

Важное условие, которое необходимо учитывать – условие непрерывности  $\varphi$  во всех точках рассматриваемой системы.

Решением уравнения переноса является дифференциальная плотность потока излучения  $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  – плотность углового (векторного) потока. Размерность этой величины представляет собой количество нейтронов, проходящих за 1 с через площадку  $1 \text{ см}^2$  с направлением движения в элементе телесного угла (ср) в единичном энергетическом интервале.

Плотность скалярного потока  $\varphi(\vec{r}, E) \equiv \int \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}$ .

Ток  $J(\vec{r}, E) \equiv \int \vec{\Omega} \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}$ .

Кинетическое уравнение:

$$\begin{aligned} & \vec{\Omega} \nabla \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma(\vec{r}, E) \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \\ & = \int_E d\vec{\Omega}' \int dE' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') + \\ & + q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}). \end{aligned}$$

## 4.2.2. Уравнение переноса в различных системах координат

В декартовой системе координат используются скалярные переменные  $(x, y, z, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$\vec{\Omega} = \Omega_x\vec{i} + \Omega_y\vec{j} + \Omega_z\vec{k}.$$

В сферической системе координат используются скалярные переменные  $r, \psi, \theta$ :

$$r_x = x = r\sin\theta\cos\psi,$$

$$r_y = y = r\sin\theta\sin\psi,$$

$$r_z = z = r\cos\theta,$$

где  $\theta$  – орбитальный угол;  $\psi$  – азимутальный угол;  $\Omega_x = \sin\theta\cos\psi$ ;  $\Omega_y = \sin\theta\sin\psi$ ;  $\Omega_z = \cos\theta = \mu$ .

Соотношение между координатами в этих системах приведено на рис. 4.3.

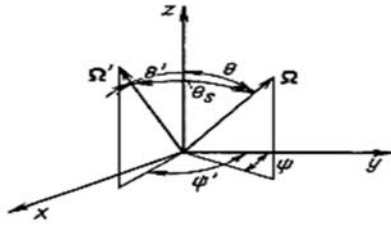


Рис. 4.3. Соотношение между координатами в сферической и декартовой системе координат

В большинстве случаев индикатриса рассеяния зависит только от скалярного произведения  $(\vec{\Omega}' \vec{\Omega}) = \cos\theta_s = \mu_s$ ,  $(\vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') = \mu_s$ .

В сферической системе координат  $\vec{\Omega}$

$$d\vec{\Omega} = d\mu d\psi.$$

Введем обозначение

$$\Sigma_s(\vec{r}, E, \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') d\psi' = \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu).$$



Вдоль луча  $\zeta$ , совпадающего с вектором  $\vec{\Omega}$ , справедливо соотношение

$$\vec{\Omega} \nabla \varphi = d\varphi/d\zeta,$$

где  $\zeta$  – координата точки вдоль луча  $\zeta$ , т.е.  $\vec{\zeta} = \zeta \vec{\Omega}$ .

В декартовой системе координат

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{d\zeta} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{d\zeta} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{d\zeta},$$

$$\text{но } \frac{dx}{d\zeta} = \Omega_x; \frac{dy}{d\zeta} = \Omega_y; \frac{dz}{d\zeta} = \Omega_z$$

Применив полученные выше соотношения, можно записать:

$$\begin{aligned} & \sin \theta \cos \psi \frac{d\varphi}{dx} + \sin \theta \sin \psi \frac{d\varphi}{dy} + \cos \theta \frac{d\varphi}{dz} + \Sigma(x, y, z, E)\varphi = \\ & = \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' \int_E^{\infty} dE' \Sigma_s(x, y, z, E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) \varphi(x, y, z, E', \theta', \psi) + \\ & + q(x, y, z, E, \theta, \psi). \end{aligned}$$

Рассмотрим плоскопараллельные задачи.

Если  $\Sigma$ ,  $\Sigma_s$  и  $q$  не зависят от  $X$  и  $Y$  и являются функциями только  $z, E, \theta, \psi$ , то речь идет о плоскопараллельной задаче.

При этом  $\varphi$  тоже не зависит от  $X$  и  $Y$  и уравнение переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \cos \theta \frac{d\varphi}{dz} + \Sigma(z, E)\varphi = \\ & = \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' \int_E^{\infty} dE' \Sigma_s(z, E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) \varphi(z, E', \theta', \psi) + \\ & + q(z, E, \theta, \psi). \end{aligned}$$

Если источники не зависят от азимутального угла  $\psi$ , то  $q(z, E, \theta)$ .

Введем обозначение

$$\varphi(z, E, \theta) = \int_0^{2\pi} \varphi(z, E, \theta, \psi) d\psi,$$

$$q(z, E, \theta) = \int_0^{2\pi} q(z, E, \theta, \psi) d\psi.$$

Уравнение переноса в плоскопараллельной задаче можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\varphi}{dz} + \Sigma(Z, E)\varphi = \int_{-1}^1 d\mu' \int_E^{\infty} \Sigma_s(z, E' \rightarrow E, \mu' \rightarrow \mu) \varphi(z, E', \mu') + \\ + q(z, E, \mu). \end{aligned}$$

### 4.2.3. Линейность уравнения переноса

Однородное уравнение переноса (без источников) линейно в том смысле, что если  $\varphi^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$  – его решения, то  $\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$  – также его решение. При этом должны выполняться граничные условия.

Для неоднородного уравнения переноса это свойство имеет важное следствие. Если  $\varphi^{(1)}$  соответствует источнику  $q^{(1)}$ , а решение  $\varphi^{(2)}$  соответствует источнику  $q^{(2)}$ , то плотность потока  $\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$  есть решение для источника  $q^{(1)} + q^{(2)}$ .

Вообще, если сложный источник  $q$  можно представить как совокупность источников  $q^{(i)}$ , так что  $q = \sum_i q^{(i)}$ , то плотность потока  $\varphi$ , соответствующая  $q$ , будет  $\varphi = \sum_i \varphi^{(i)}$ , где каждое  $\varphi^{(i)}$  – решение уравнения переноса для источника  $q^{(i)}$ .

#### Односкоростное уравнение переноса

Существенное упрощение можно внести, если пренебречь зависимостью от энергии.

Если все сечения не зависят от энергии, используем интегральную функцию плотности потока:

$$\varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dE.$$

Тогда односкоростное уравнение переноса

$$\vec{\Omega} \nabla \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma(\vec{r}) \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int d\vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}') + q(\vec{r}, \vec{\Omega}),$$

где  $q(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dE$ .

Этому уравнению удовлетворяют моноэнергетические нейтроны энергии  $E$  при двух упрощающих предположениях:

- 1) пренебрежение потерей энергии нейтронами при рассеянии;
- 2) включение описания процесса замедления нейтронов более

высокой энергии до данной энергии  $E$  в источники  $q(\vec{r}, \vec{\Omega})$ .

Если совместить два приведенных выше упрощения, то получим уравнение для моноэнергетических нейтронов при плоской геометрии:

$$\mu \frac{\partial \varphi(z, \mu)}{\partial z} + \Sigma(z) \varphi(z, \mu) = \int_{-1}^{+1} \Sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) \varphi(z, \mu') d\mu' + q(z, \mu).$$

Еще одно упрощение – считаем рассеяние изотропным: при изотропном рассеянии

$$\Sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) = \Sigma_s/2,$$

тогда  $\mu d\varphi(z, \mu)/dz + \Sigma(z) \varphi(z, \mu) = \Sigma_s \varphi_0(z)/2 + q(z, \mu)$ ,

где  $\varphi_0(z) = \int \varphi(z, \mu) d\mu$ .

### **4.3. Элементарная теория диффузии нейтронов**

Статистический процесс диффузии нейтронов в веществе заключается в перемещении нейтронов из областей с большей их плотностью в области с меньшей плотностью, его можно описать уравнением диффузии. Это уравнение, так же как и уравнение переноса нейтронов, представляет собой соотношение баланса нейтронов в элементе объема в единицу времени.

При этом используются упрощающие моменты:

- 1) считается, что все нейтроны имеют одинаковую энергию, т.е. рассматривается односкоростная диффузия нейтронов;
- 2) рассеяние нейтронов близко к изотропному;
- 3) поглощение мало.

Тогда внутри однородных сред угловое распределение плотности потока нейтронов почти изотропно. Это означает, что движение диффундирующих нейтронов равновероятно по любому направлению.

При учете этих предположений уравнение диффузии выводится из уравнения переноса.

Вблизи границы сред диффузия становится неізотропной, особенно на границе с пустотой. В этом случае, если объем областей с заметной анизотропией мал по сравнению со всем объемом, то вводятся поправки к решению уравнения диффузии.

### 4.3.1. Уравнение диффузии нейтронов

Рассмотрим односкоростное уравнение переноса нейтронов в однородной среде для задач с азимутальной симметрией.

Уравнение переноса для односкоростной задачи в этих условиях:

$$\Omega \nabla \varphi(\vec{r}, \mu) + \Sigma(\vec{r}) \varphi(\vec{r}, \mu) = \int d\mu' \Sigma_s(\vec{r}, \mu' \rightarrow \mu) \cdot \varphi(\vec{r}, \mu') d\mu' + q(\vec{r}, \mu).$$

Представим функцию дифференциальной плотности потока нейтронов и функцию сечения рассеяния в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$\varphi(\vec{r}, \mu) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \varphi_l(\vec{r}) P_l(\mu),$$

$$\Sigma_s(\mu^s) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \Sigma_{s,l} P_l(\mu^s).$$

В этом разложении коэффициенты

$$\varphi_l(\vec{r}) = 2\pi \int_{-1}^1 \varphi(\vec{r}, \mu) P_l(\mu) d\mu$$

$$\Sigma_{s,l} = 2\pi \int_{-1}^1 \Sigma_s(\mu^s) P_l(\mu^s) d\mu^s.$$

Выражения для первых полиномов Лежандра:

$$P_0 = 1; P_1(\mu) = \mu; P_2(\mu) = (3\mu^2 - 1)/2; P_3(\mu) = (5\mu^3 - 3\mu)/2.$$

Посчитаем первые моменты дифференциальной плотности потока:

$$\varphi_0(\vec{r}) = 2\pi \int \varphi(\vec{r}, \mu) \cdot 1 \cdot d\mu = 2\pi \int \varphi(\vec{r}, \mu) d\mu,$$

$$\varphi_1(\vec{r}) = 2\pi \int \varphi(\vec{r}, \mu) \cdot \mu \cdot d\mu.$$

Сравнив полученное выражение для  $\varphi_1$  с формулой для тока нейтронов  $\vec{J}$ , отметим, что  $\varphi_1(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})$ .

Посчитаем первые коэффициенты разложения сечения:

$$\Sigma_{s,0} = 2\pi \int \Sigma_s(\mu^s) \cdot 1 \cdot d\mu_s = \Sigma_s;$$

$$\Sigma_{s,1} = 2\pi \int \Sigma_s(\mu^s) \cdot \mu^s d\mu_s = \bar{\mu}^s -$$

средний косинус угла рассеяния в лабораторной системе координат.

В теории диффузии делается главное предположение о слабой анизотропии углового распределения потока. На этом основании можно ограничиться двумя слагаемыми в разложении по полиномам:

$$\varphi(\vec{r}, \mu) = \varphi_0(\vec{r})/4\pi + 3\vec{J}(\vec{r})\mu/4\pi -$$

это уравнение носит название основного уравнения диффузии.

Далее будем рассматривать плоский случай, т.е.  $\Sigma$ ,  $\varphi$  и  $q$  будут зависеть только от одной пространственной переменной –  $x$ . Этот переход не налагает ограничения на теорию диффузии, а служит для иллюстрации вывода последующих уравнений.

Основное уравнение диффузии для плоской (одномерной) задачи выглядит так:

$$\varphi(x, \mu) = \varphi_0(x)/4\pi + 3J(x)\mu/4\pi.$$

Используя формулы:

а) разложения  $\Sigma_s$ ; б) разложения  $\varphi$ ; в) кинетическое уравнение, – можно получить следующее выражение для тока:

$$J = - [3(\Sigma - \Sigma_s \bar{\mu}^s)]^{-1} d\varphi_0/dx = - D d\varphi_0/dx.$$

Это выражение называется законом Фика для диффузии.

В соответствии с законом Фика плотность тока нейтронов пропорциональна градиенту плотности потока. Константа  $D$  называется коэффициентом диффузии.

$$D = \frac{1}{3(\Sigma - \Sigma_s \bar{\mu}^s)} = \frac{1}{\Sigma_{tr}}.$$

В теории диффузии вводят понятие «сечение транспортное  $\Sigma_{tr}$ ».

По определению:

$$\Sigma_{tr} = \Sigma - \Sigma_s \bar{\mu}^s.$$

Закон Фика  $J = -D \frac{d\varphi_0}{dx}$  справедлив лишь для диффузионного

приближения и может быть уточнен в более высоких приближениях.

В основное уравнение диффузии запишем закон Фика и учтем, что  $\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_a$ , получим элементарное уравнение теории диффузии:

$$-D d^2\varphi_0/dx^2 + \Sigma_a \varphi_0(x) = q_0(x).$$

Здесь первое слагаемое левой части описывает утечку нейтронов из единицы объема, второе – поглощение. Правая часть уравнения описывает генерацию нейтронов.

Введем понятие длины диффузии:

$$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}} = \sqrt{\frac{1}{3\Sigma_a(\Sigma - \Sigma_s\bar{\mu}^s)}},$$

тогда основное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d^2 \varphi_0(x)}{dx^2} - \frac{\varphi_0(x)}{L^2} + \frac{q_0(x)}{D} = 0.$$

### Граничные условия

Уравнение диффузии не дает полного описания физической картины, поскольку общее решение его содержит постоянные интегрирования. Для их определения на решение дифференциального уравнения налагаются ограничения в виде граничных условий.

Число их должно быть достаточным для обеспечения единственности решения, которое не должно содержать произвольные постоянные:

а) нейтронный поток должен быть конечным и неотрицательным в области, где применимо уравнение диффузии;

б) на границе двух сред, обладающих различными диффузионными характеристиками, выполняется условие непрерывности функции плотности потока  $\varphi_0(x)$  и плотности тока  $J(x)$ .

$$J_{A+} = J_{B+}; J_{A-} = J_{B-};$$

$$J_{A+} = -D_A \frac{d\varphi_0}{dx} \Big|_A = -D_B \frac{d\varphi_0}{dx} \Big|_B;$$

$$J_{A-} = D_A \frac{d\varphi_0}{dx} \Big|_A = D_B \frac{d\varphi_0}{dx} \Big|_B;$$

$$\varphi_{0A} = \varphi_{0B}.$$

Граничные условия справедливы и для тех кривых поверхностей, для которых нейтронный поток не зависит от угла.

### 4.3.2. Диффузия в однородной среде для плоского бесконечного источника

Рассмотрим **бесконечный плоский изотропный источник нейтронов**, размещенный в бесконечной однородной среде в начале координат, т.е. функцию источника можно записать так:  $q_0(x) = q_s \delta(x)$ .

Уравнение диффузии принимает вид:

$$d^2\varphi_0(x)/dx^2 - \varphi_0(x)/L^2 = -q_s\delta(x)/D.$$

Здесь  $q_s$  – поверхностная плотность источников нейтронов (нейтр/см<sup>2</sup>·с).

Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$\varphi_0(x) = A \exp(-x/L) + B \exp(x/L),$$

где  $A$  и  $B$  – произвольные константы, и его можно рассматривать как относящееся к абсолютным значениям  $x$ , т.е. к  $|x|$ , поскольку плотность потока  $\varphi_0$  симметрична относительно плоскости  $x = 0$ .

1. Условие ограниченности при  $x \rightarrow \infty$   $B \exp(x/L) \rightarrow \infty$ , значит,  $B$  может принимать единственное значение  $B = 0$ .

2. Как найти  $A$ ?

Проинтегрируем уравнение диффузии по пространству в пределах малой окрестности источника ( $-\varepsilon; +\varepsilon$ ):

$$\left. \frac{d\varphi_0}{dx} \right|_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} - \frac{2\varepsilon\varphi_0(0)}{L^2} = -q_s / D.$$

Учитывая  $\varphi_0(x) = A \exp(-x/L)$ , получим  $\frac{d\varphi_0}{dx} = \pm \frac{A}{L} \exp(-\frac{|x|}{L})$ :

+ при  $x < 0$ ; - при  $x > 0$ .

Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $2\varepsilon\varphi_0(0)/L^2 \rightarrow 0$ ;  $-2A/L = -q_s/D$  и, следовательно,  $A = Lq_s/2D$ .

Тогда общий вид решения уравнения диффузии для плоского источника выглядит следующим образом:

$$\varphi_0(x) = \frac{q_s L}{2D} \exp(-\frac{|x|}{L}) = \frac{q_s}{2\Sigma_a L} \exp(-\frac{|x|}{L}),$$

а ток

$$J = -D \frac{d\varphi_0}{dx} = + \frac{D \cdot q_s}{2D} \exp(-\frac{|x|}{L}) = \frac{q_s}{2} \exp(-\frac{|x|}{L}).$$

Для источника, размещенного в плоскости  $x = x_0$ , вид функции источника  $g_0(x) = q_s \delta(x-x_0)$ , функция плотности потока будет выглядеть следующим образом:

$$\varphi_0(x) = \frac{q_s L}{2D} \exp\left(-\frac{|x-x_0|}{L}\right).$$

### 4.3.3. Уравнение диффузии в произвольной геометрии

В отличие от плоской геометрии, ток  $\vec{J}$  представляет собой вектор.

Основное уравнение диффузии принимает вид

$$\varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \varphi_0(\vec{r}) + \frac{3}{4\pi} \vec{\Omega} \vec{J}(\vec{r}).$$

Закон Фика принимает вид

$$\vec{J}(\vec{r}) = -D(\vec{r}) \nabla \varphi_0(\vec{r});$$

элементарное уравнение диффузии –

$$-\nabla D \nabla \varphi_0(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r}) \varphi_0(\vec{r}) = q_0(\vec{r}).$$

### 4.3.4. Диффузия нейтронов в случае точечного изотропного источника

Рассмотрим случаи простых симметричных источников в бесконечной среде.

Пусть точечный изотропный источник расположен в начале координат:  $r = 0$ . В этом случае имеет место сферическая симметрия:

$$-\nabla D \nabla \varphi_0(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r}) \varphi_0(\vec{r}) = q_0(\vec{r}).$$

Функцию источника можно представить в виде

$$q_0(\vec{r}) = q_0 \delta(\vec{r}) / 4\pi r^2.$$

И диффузионное уравнение в записи для скалярных величин принимает вид

$$-\frac{D}{r} \frac{d^2[r\varphi_0(r)]}{dr^2} + \Sigma_a \varphi_0(r) = \frac{q_0 \delta(r)}{4\pi r^2}.$$



Общее решение уравнения:

$$\varphi_0(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{L}\right) + \frac{B}{r} \exp\left(\frac{r}{L}\right).$$

Поскольку плотность потока нейтронов не должна обращаться в бесконечность при  $r \rightarrow \infty$ , то должно выполняться условие  $B = 0$ .

Постоянную  $A$  можно определить из условия, что в стационарном состоянии все нейтроны, испущенные источником, должны поглощаться в среде

$$q_0 = \int \Sigma_a \varphi_0(r) dV = \Sigma_a \int_0^\infty \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{L}\right) 4\pi r^2 dr = 4\pi \Sigma_a A L^2,$$

$$A = \frac{q_0}{4\pi \Sigma_a L^2};$$

откуда

$$\varphi_0(r) = \frac{q_0}{4\pi \Sigma_a L^2 r} \exp\left(-\frac{r}{L}\right) = \frac{4\pi D}{r} \frac{q_0}{L} \exp\left(-\frac{r}{L}\right).$$

Как видно при приближении к источнику  $r \rightarrow 0$ , решение имеет особенность типа  $1/r$ . В то же время известно, что вблизи источника характерна зависимость  $1/r^2$ . В этом состоит неточность диффузионной теории при малых приближениях.

### 4.3.5. Физический смысл длины диффузии

Определим среднее расстояние от источника, на которое переместится нейтрон до момента захвата его ядром среды.

Вероятность захвата на расстоянии  $r \div r+dr$

$$\frac{1}{q_0} \Sigma_a \varphi_0(r) 4\pi r^2 dr.$$

Тогда среднее смещение

$$\bar{r} = \frac{1}{q_0} \int_0^\infty r \cdot \Sigma_a \varphi_0(r) 4\pi r^2 dr.$$

Подставим в эту формулу имеющееся у нас решение для плотности потока для точечного изотропного источника:

$$\varphi(r) = \frac{q_0}{4\pi Dr} \exp\left(-\frac{r}{L}\right) = \frac{q_0}{4\pi \Sigma_a L^2 r} \exp\left(-\frac{r}{L}\right),$$

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{1}{q_0} \int_0^{\infty} r \Sigma_a \frac{q_0}{4\pi \Sigma_a L^2 r} \exp\left(-\frac{r}{L}\right) 4\pi r^2 dr = \\ &= \frac{1}{L^2} \int_0^{\infty} r^2 \exp\left(-\frac{r}{L}\right) dr = 2L. \end{aligned}$$

Таким образом, среднее смещение  $\bar{r} = 2L$ .

Соответственно, можно определить средний **квадрат** смещения нейтрона от источника до места его поглощения:

$$\bar{r}^2 = \frac{1}{q_0} \int_0^{\infty} r^2 \varphi_0(r) \Sigma_a 4\pi r^2 dr = 6L^2.$$

Таким образом, квадрат длины диффузии равен 1/6 среднего квадрата смещения нейтрона от источника.

Можно найти средний квадрат такого смещения и в плоской геометрии (у нас есть и такое решение):

$$\bar{x}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \Sigma_a \varphi_0(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma_a \varphi_0(x) dx} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{|x|}{L}\right) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{|x|}{L}\right) dx} = 2L^2.$$

Вывод. Длина диффузии характеризует с точностью до численного множителя среднее расстояние между точкой образования нейтрона и точкой его поглощения. Величина численного коэффициента зависит от геометрии источника.

Нельзя длину диффузии смешивать со средним расстоянием, в действительности пройденным нейтроном.

Для точечного изотропного источника можно повторить те же вычисления и получить:

$$\bar{r}^2 = \frac{2}{\Sigma_a \Sigma_{tr}},$$

где  $\Sigma_{tr} = \Sigma_a + \Sigma_s(1 - \bar{\mu}_s)$ .

Зависимость от  $\Sigma_a$  простая: чем больше поглощение  $\Sigma_a$ , тем меньше расстояние между рождением и поглощением:

$$\Sigma_a \uparrow \quad \bar{r}^2 \downarrow \text{ и } \Sigma_a \downarrow \quad \bar{r}^2 \uparrow.$$

В непоглощающих средах нейтрон блуждает долго и соответственно, характеристики расстояния от точки, где нейтрон родился до точки, где нейтрон поглотится, очень велики.

Посмотрим, как влияет анизотропия рассеяния на  $\bar{r}^2$ .

По логике, чем более анизотропно (только вперед) рассеяние, тем дальше нейтрон уйдет от источника.

Если рассеяние изотропно, то  $\bar{\mu}_s = 0$  и  $\Sigma_{tr} = \Sigma_a + \Sigma_s = \Sigma_{tot}$  принимает максимально возможное значение, а  $\bar{r}^2$  – минимально возможное.

Напротив, если рассеяние анизотропно (рассеяние преимущественно вперед), то  $\bar{\mu}_s = 1$  и  $\Sigma_{tr} = \Sigma_a$  принимает минимально возможное значение, а  $\bar{r}^2$  – максимально возможное.

$\Sigma_{tr}$  – почти полное сечение, но с поправкой на анизотропию рассеяния. При изотропном рассеянии  $\Sigma_{tr} = \Sigma_{tot}$ , т.е. наличие анизотропии с преимущественным направлением вперед  $\mu_s > 0$  увеличивает эффективный пробег нейтронов  $1/\Sigma_{tr}$ , и чем сильнее анизотропия, т.е. чем больше эффективный пробег, тем дальше удаляется нейтрон, пока не поглотится.

Приведем приблизительные значения длины диффузии для некоторых наиболее распространенных веществ.

Вещество	Длина диффузии, см
Вода	2,77
Тяжелая вода	170
Графит	50

Данные приведены для тепловых нейтронов.

#### 4.3.6. «Функция влияния»

Результат решения уравнения диффузии для точечного изотропного источника можно записать в общем виде так, чтобы он давал

для любой точки  $\vec{r}$  (в бесконечной однородной среде) плотность потока нейтронов, обусловленную точечным источником в точке  $\vec{r}_0$ :

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{q_0(r_0)}{4\pi D} \frac{\exp\left(-\frac{|r-r_0|}{L}\right)}{|r-r_0|}.$$

Это выражение является диффузионной «функцией влияния» точечного источника.

Для объемного распределенного источника нейтронов, характеризуемого плотностью распределения  $q_V(\vec{r}_0)$  [нейтр/см<sup>3</sup>·с] в силу линейности уравнения диффузии (так же как и уравнения переноса) плотность суммарного потока в точке является суперпозицией вкладов отдельных точечных источников, т.е. равна интегралу по объему распределенного источника  $V$ :

$$\Phi_0(\vec{r}) = \int_V q_V(\vec{r}_0) G(\vec{r}_0, \vec{r}) dV = \int_V q_V(\vec{r}_0) \frac{1}{4\pi D |\vec{r} - \vec{r}_0|} \exp\left(-\frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{L}\right) dV.$$

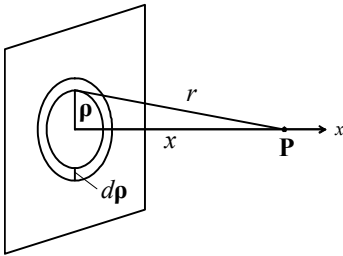


Рис. 4.4. Иллюстрация решения для излучающей плоскости как суперпозиции точечных источников

Рассмотрим задачу по определению плотности потока нейтронов от излучающей изотропно плоскости по схеме, представленной на рис. 4.4.

Для поверхностного источника интенсивностью  $q_S(r_0)$ , распределенного по поверхности  $S$ , формула принимает вид поверхностного интеграла:

$$\Phi_0(\vec{r}) = \int_S q_S(r_0) G_0(\vec{r}, \vec{r}_0) dS = \int_S q_S(\vec{r}_0) \frac{1}{4\pi D |\vec{r} - \vec{r}_0|} \exp\left(-\frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{L}\right) dS.$$

Произведем замену переменных – заменим  $S$  на  $\rho$  и потом на  $r$ :

$$\begin{aligned}\varphi_0^{\text{пл}}(x) &= \int_0^{\infty} G_0(r) 2\pi r dr = \frac{q_s}{2D} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{r}{L}\right) \frac{1}{r} r dr = \\ &= \frac{q_s}{2D} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{r}{L}\right) dr = \frac{q_s L}{2D} \exp\left(-\frac{|x|}{L}\right).\end{aligned}$$

Пределы интегрирования после замены переменных приняли вид  $\rho - \infty \rightarrow r - \infty$ ;  $\rho - 0 \rightarrow r - x$ .

Полученное таким образом при использовании функции влияния решение совпадает с полученной ранее формулой для плоского источника.

Дифференцируя  $\varphi_0^{\text{пл}}(x)$  по  $x$ , можно получить соотношение, связывающее распределение от точечного и плоского изотропных источников:

$$G_0(r) = -\frac{1}{2\pi r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \varphi_0^{\text{пл}}(x) \right]_{x=r}.$$

### 4.3.7. Пределы применимости диффузионной теории

Для справедливости основного соотношения теории диффузии необходима быстрая сходимость разложения по полиномам, а именно, резкое убывание моментов углового потока с ростом их номера.

Для первых моментов такое требование будет выглядеть так:

$$\varphi_1 \ll \varphi_0$$

или

$$|J| = \left| D \frac{d\varphi_0}{dx} \right| \ll \varphi_0, \text{ следовательно } \left| \frac{D}{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{dx} \right| \ll 1.$$

Мы можем использовать решение для плоского изотропного источника  $\varphi_0 = \frac{q_s L}{2D} \exp\left(-\frac{|x|}{L}\right)$ , тогда для производной потока мож-

но написать:

$$\frac{d\varphi_0}{dx} = \frac{\varphi_0}{L}, \text{ поэтому } \left| \frac{D}{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{dx} \right| = \frac{D}{L} \ll 1.$$

Для того чтобы моменты сходились, надо чтобы  $D \ll L$ :

$$D = (1/3)\Sigma_{tr}; \quad L = \sqrt{D/\Sigma_a}.$$

Перейдем к обозначениям сечений для получения того же соотношения:

$$\frac{D}{L} = \frac{1}{3\Sigma_{tr}} \sqrt{3\Sigma_{tr}\Sigma_a}; \quad \sqrt{\frac{\Sigma_a}{3\Sigma_{tr}}} \ll 1;$$

$$\sqrt{\frac{\Sigma_a}{3(\Sigma - \Sigma_s \bar{\mu}^s)}} \ll 1; \quad \Sigma_a \ll \Sigma - \Sigma_s \bar{\mu}^s.$$

В таком смысле поглощение должно быть мало, т.е. задачу можно рассматривать только вдали от поглотителей и границ сред.

### 4.3.8. Условия на границе с пустотой

Рассмотрим полубесконечную однородную среду, простирающуюся в направлении от плоскости  $x = 0$  до  $x = +\infty$  и от  $-\infty$  до  $+\infty$  в направлениях  $y$  и  $z$ . При  $x = x_0 \gg 1/\Sigma$  расположен плоский изотропный источник. При  $x < 0$  находится пустота (под пустотой понимаем среду, отражением от которой можно пренебречь) (рис. 4.5).

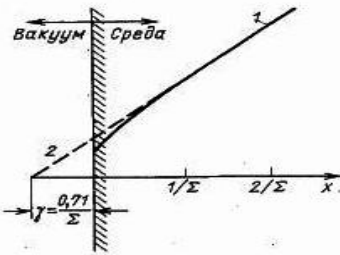


Рис. 4.5. Плотность потока нейтронов по теории диффузии на границе с пустотой

Это значит, что нейтрон, покидающий среду через плоскости  $x = 0$ , не может вернуться обратно. Если экстраполировать распределение нейтронного потока в область пустоты с тем же наклоном  $d\varphi_0/dx$ , что и на границе, то он обратится в 0 на расстоянии  $\gamma$ . Определим  $\gamma$  в диффузионном приближении.

Представим ток в виде двух слагаемых:

$$J = \varphi_1 = J^+ + J^-.$$

$J^+$  и  $J^-$  – компоненты потока в положительном и отрицательном направлениях по оси  $x$  соответственно.

$$J^+ = 2\pi \int_0^1 \mu \varphi(x, \mu) d\mu,$$

$$J^- = 2\pi \int_{-1}^0 \mu \varphi(x, \mu) d\mu,$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \varphi_0(x) - \frac{3D}{4\pi} \frac{d\varphi_0}{dx} \mu -$$

основное уравнение диффузии, вместе с законом Фика.

$$J^+ = \frac{\varphi_0(x)}{4} - \frac{D}{2} \frac{d\varphi_0(x)}{dx},$$

$$J^- = \frac{\varphi_0(x)}{4} + \frac{D}{2} \frac{d\varphi_0(x)}{dx}.$$

Эти выражения точны там, где справедливы условия применимости диффузионной теории. В частности, они точны лишь для области, отстоящей на несколько длин свободного пробега от границы.

Если предположить, что диффузионная теория справедлива вплоть до поверхности среды, то в качестве граничного условия

$J^+(x) = 0$  при  $x = 0$  – потока из вакуума нет.

$$\frac{\varphi_0(x)}{4} - \frac{D}{2} \frac{d\varphi_0}{dx} = 0 \Big|_{x=0},$$

$$\frac{1}{\varphi_0(x)} \frac{d\varphi_0}{dx} = \frac{1}{2D} = \frac{3\Sigma_{tr}}{2} \Big|_{x=0} -$$

получили такое граничное условие.

Решим для такой задачи элементарное уравнение диффузии:

$$-Dd^2\varphi_0/dx^2 + \Sigma_a\varphi_0(x) = q_0(x).$$

Предположим, поглощения нет, тогда  $\Sigma_a = 0$

$$\text{и } q_0(x) = \delta(x-x_0)q_s.$$

Уравнение принимает вид

$$-Dd^2\varphi_0(x)/dx^2 = \delta(x-x_0)q_s,$$

во всех точках, кроме  $x = x_0$ , решение этого уравнения – прямая  $\varphi_0(x) = Ax + B$ .

К решению  $\varphi_0 = Ax + B$  применим граничные условия:

$$\frac{1}{\varphi_0(x)} \frac{d\varphi_0(x)}{dx} = \frac{A}{B} = \frac{3\Sigma_{tr}}{2}.$$

Тогда решение можно представить в виде

$$\varphi_0(x) = A(x + 2/3\Sigma_{tr}).$$

Так что точкой  $x = \gamma$ , в которой поток обратится в 0, будет  $\gamma = -2/(3\Sigma_{tr})$ .

Из кинетической теории известно, что  $\gamma = 0,71/\Sigma_{tr}$ .

Погрешность значения длины экстраполяции в непоглощающей среде  $\sim 5\%$  ( $\Sigma_a = 0$ ); в поглощающей среде может достигать 30÷50%.

### 4.3.9. Альbedo в диффузионной теории

Коэффициент отражения нейтронов от среды (коэффициент альbedo) есть отношение интенсивности отраженного излучения к интенсивности падающего:

$$a = J/J^+,$$

$$a = \frac{\frac{\varphi_0}{4} + \frac{D}{2} \frac{d\varphi_0}{dx}}{\frac{\varphi_0}{4} - \frac{D}{2} \frac{d\varphi_0}{dx}}.$$

Пример. Плоский изотропный источник мощностью  $q_0$  на поверхности полубесконечной среды. Если начало координат расположить в плоскости источника, то общее решение диффузионного уравнения имеет вид

$$\varphi_0(x) = A \exp(-x/L).$$

Константу  $A$  определим с помощью условия, которому удовлетворяет составляющая плотности тока  $J^+$  в направлении в среду:

$$J^+(0) = \frac{\varphi_0(0)}{4} - \frac{D}{2} \frac{d\varphi_0}{dx} = \frac{q_0}{2}.$$

Это условие фактически означает, что число нейтронов, падающих в единицу времени на единичную площадку полубесконечной среды, равно половине мощности источника (другая половина с направленностью в пустоту не попадает в среду). Из этого граничного условия получим константу  $A$ :



$$\varphi_0(x) = \frac{2q_0 \exp(-\frac{x}{L})}{1 + 2D/L}.$$

Составляющая плотности тока наружу из среды на границе имеет вид

$$J^-(0) = \frac{\varphi_0(x=0)}{2} + \frac{D}{2} \frac{d\varphi_0(x=0)}{dx} = \frac{q_0}{2} \frac{L - 2D}{L + 2D}.$$

Отсюда формула для альбедо:

$$a = J/J^+ = (L - 2D)/(L + 2D).$$

При  $D/L \ll 1$  – критерий применимости диффузионной теории  $a = 1 - 4D/L$ , т.е. альбедо близко к 1, значит, почти все нейтроны возвращаются обратно в среду.

$$D = 1/(3\Sigma_{tr}); \quad L = \sqrt{D/\Sigma_a}.$$

$$D/L = \frac{D \cdot \sqrt{\Sigma_a}}{\sqrt{D}} = \sqrt{D \cdot \Sigma_a} = \sqrt{\Sigma_a} / 3\Sigma_{tr},$$

$$a = \frac{1 - 2\sqrt{\Sigma_a / 3\Sigma_{tr}}}{1 + 2\sqrt{\Sigma_a / 3\Sigma_{tr}}}.$$

При  $\Sigma_a = 0$   $a = 1$  – непоглощающая полубесконечная среда (отражаются все нейтроны); при  $\Sigma_{tr} \approx \Sigma_a$  – сильно поглощающая среда и получается, что  $a < 0$  – что не имеет физического смысла, еще раз подтверждая неприменимость диффузионной теории к сильно поглощающим средам.

#### **4.4. Основы теории замедления нейтронов**

Ранее мы рассматривали односкоростные задачи, считая, что все нейтроны имеют одинаковую энергию, однако на самом деле нейтроны имеют самые различные энергии. При этом энергетическая зависимость сечений, а следовательно, и потоков нейтронного излучения, носит сложный характер.

В элементарной теории замедления используются следующие допущения.

Учитывается только упругое столкновение со свободным, первоначально покоящимся ядром. При этом пренебрегаем неупругим столкновением быстрых нейтронов и химическими эффектами (т.е.

рассматриваются нейтроны с энергией  $E > 1$  эВ). Пренебрегаем утечкой из среды, т.е. считаем, что среда бесконечна.

### 4.4.1. Изменение энергии нейтронов при упругом рассеянии

Роль упругого рассеяния в процессе замедления нейтронов определяется, прежде всего, величиной среднего значения энергии ядра отдачи, передаваемой нейтроном рассеивающему ядру.

Если энергия нейтрона до столкновения равна  $E$ , то энергия ядра отдачи после столкновения

$$E_M = E \frac{4Mm}{(M+m)^2} \cos^2 \varphi = \alpha E \cos^2 \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол вылета ядра отдачи,  $\alpha = 4Mm/(M+m)^2$ .

При  $\varphi = 90^\circ \rightarrow \cos^2 \varphi = 0$ ; и  $E_{M\min} = \alpha E \cos^2 \varphi = 0$ , а при  $\varphi = 0^\circ \cos^2 \varphi = 1$  и  $E_{M\max} = \alpha E$ .

Среднее значение  $\bar{E}_M$  можно найти обычным путем:

$$\bar{E}_M = \int_0^{\alpha E} E_M \omega(E_M) dE_M,$$

где  $\omega(E_M)$  – вероятность данного значения  $E_M$  после одного столкновения.

Вероятность  $\omega(E_M)$  должна быть пропорциональна дифференциальному сечению столкновения, приводящему к данному значению  $E_M$ .

Обычно известно  $d\sigma(\theta)$  ( $\theta$  – угол рассеяния нейтрона), надо перейти к  $d\sigma(E_M)$ . Рассеяние считаем изотропным в координатной системе центра инерции. Вероятность вылета ядра отдачи под углом  $\varphi_0$  (угол вылета ядра отдачи в системе центра инерции (СЦИ))

$$\omega(\varphi_0) d\varphi_0 = \frac{1}{2} \sin \varphi_0 d\varphi_0.$$

Так как угол вылета ядра отдачи в СЦИ вдвое больше угла вылета в лабораторной системе отсчета (ЛСО), т.е.  $\varphi_0 = 2\varphi$ , то вероятность вылета ядра отдачи под углом  $\varphi$  равна

$$\omega(\varphi) d\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = d(\cos^2 \varphi).$$

Поскольку  $E_M = \alpha \cos^2 \varphi$ , то вероятность данного значения  $E_M$  равна

$$\begin{aligned} \omega(\varphi)d\varphi &= d(\cos^2 \varphi) = dE_M/\alpha E \Rightarrow \omega(E_M) = \omega(\varphi)d\varphi/dE_M = 1/\alpha E. \\ \omega(E_M)E_M &= E_M/\alpha E, \\ \omega(E_M) &= 1/\alpha E = \text{const.} \end{aligned}$$

Т.е. при изотропном рассеянии вероятность любой энергии ядра отдачи от 0 до  $\alpha E$  одинакова. Следовательно, в результате одного упругого столкновения с ядром нейтрон может с одинаковой вероятностью иметь любое значение энергии в интервале от  $(1-\alpha)E$  до  $E$ .

Средняя потеря в данном случае:

$$\bar{E}_M = \int_0^{\alpha E} E_M \frac{dE_M}{\alpha E} = \frac{1}{2} \alpha E.$$

Среднее значение энергии, оставшейся у нейтрона после одного столкновения,

$$\bar{E}_1 = (1 - \frac{1}{2} \alpha) E = \frac{A^2 + 1}{(1 + A)^2} E = \frac{M^2 + m^2}{(m + M)^2} E.$$

Отношение среднего значения  $\bar{E}_M$ , теряемой при одном столкновении, к начальной энергии  $E$  равно

$$\frac{\bar{E}_M}{E} = \frac{1}{2} \alpha = \frac{2Mm}{(M+m)^2} - \text{средняя относительная потеря энергии.}$$

Эта величина тем больше, чем ближе масса ядра замедляющего вещества  $M$  к массе нейтрона  $m$ .

Наибольшее значение средней относительной потери энергии

$$\frac{\bar{E}_M}{E} = \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \text{ наблюдается при замедлении на водороде, так}$$

как масса протона практически равна массе нейтрона и  $\alpha = 4Mm/(M+m)^2 = 1$ .

Следовательно, при столкновении с протоном (покоящимся) нейтрон теряет в среднем половину своей энергии.

Для других ядер  $\alpha < 1$  и средняя относительная потеря энергии  $\frac{1}{2} \alpha < 1/2$ .

Для ядер с массой  $M \gg m$  величина

$$\frac{1}{2}\alpha = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{4Mm}{M^2 + 2Mm + m^2} \approx \left(\frac{1}{2}\right) \frac{4Mm}{M(M+2)} = \frac{2m}{M} = \frac{2}{A},$$

где  $A$  – массовое число, атомный вес.

Так как средняя относительная потеря энергии нейтрона сохраняется постоянной при изменении абсолютного значения энергии в процессе замедления, то удобно характеризовать ее средним изменением логарифма энергии при одном столкновении:

$$\xi = \ln \frac{E_0}{E_1} = \ln \frac{E_n}{E_{n+1}}.$$

Здесь  $n$  – порядковый номер столкновения, испытанного нейтроном.

Из определения  $\xi$  ясно, что энергия  $E_n$  после  $n$ -го столкновения определяется соотношением

$$E_n = E_0 e^{-n\xi},$$

где  $E_0$  – начальная энергия нейтрона.

Величину  $\xi$  можно найти, усредняя  $\ln(E_0/E_1)$  по распределению  $\omega(E_1)$  – вероятности энергии  $E_1$  после столкновения:

$$\xi = \int_{E_0(1-\alpha)}^{E_0} \ln \frac{E_0}{E_1} \omega(E_1) dE_1.$$

Возможные значения энергии нейтрона после столкновения:  $E_0$  – нейтрон не потерял энергии;  $E_0(1-\alpha)$  – потерял максимум энергии  $\alpha E_0$ .

При изотропном рассеянии

$$\omega(E_1) dE_1 = \frac{dE_1}{\alpha E_0}.$$

$$\xi = \int_{(1-\alpha)E_0}^{E_0} \ln\left(\frac{E_0}{E_1}\right) \frac{dE_1}{\alpha E_0} = 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln(1-\alpha),$$

Поэтому

$$\xi = 1 - \frac{(M-m)^2}{2Mm} \ln \frac{M+m}{M-m} = 1 + \frac{(M-m)^2}{2Mm} \ln \frac{M-m}{M+m},$$

или, если учесть  $m = 1$ ,  $A = M$ , то

$$\xi = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A+1}{A-1} = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A-1}{A+1}.$$

Значения  $\xi$  для различных веществ для  $E_0 = 1$  МэВ и  $E_n = 0,04$  эВ – тепловая энергия  $\left(\frac{3}{2}kT\right)$  приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

**Значения  $\xi$  для различных веществ**

Ядро	$A$	$\xi$	$n = 17/\xi$
H	1	1	17
D	2	0,725	23,5
He	4	0,427	40
Be	9	0,209	81
C	12	0,158	
O	16	0,119	

Пользуясь величиной  $\xi$ , просто вычислить число столкновений  $n$  до замедления до некоторой конкретной энергии  $E_n$ :

$$n = \frac{1}{\xi} \ln \frac{E_0}{E_n}.$$

#### 4.4.2. Уравнение переноса в теории замедления нейтронов

Запишем уравнение переноса в теории замедления:

$$\Sigma(E)\Phi_0(E) = \int_E^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E)\Phi_0(E')dE' + q_0(E). \quad (4.1)$$

$\Phi_0(E)$  – плотность потока нейтронов, усредненная по объему среды.

Уравнение (4.1) представляет собой баланс нейтронов в единичном энергетическом интервале вблизи энергии  $E$ . В левой части записано число нейтронов, покидающих этот интервал вследствие поглощения и рассеяния, а справа приведен прирост числа нейтронов, обусловленный рассеянием и внешним источником.

Представим дифференциальное сечение упругого рассеяния при его изотропности в системе центра инерции следующим образом:

$$\Sigma_s(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E) g(E', E), \quad (4.2)$$

где  $g(E', E)$  – вероятность того, что нейтрон с энергией  $E'$  после столкновения приобретет энергию  $E$ .

При изотропном рассеянии вероятность любой энергии ядра отдачи от 0 до  $\alpha E$  одинакова. Следовательно, в результате одного упругого столкновения с ядром нейтрон может с одинаковой вероятностью иметь любое значение энергии от  $E$  до  $(1-\alpha)E$ .

Значит,

$$g(E' \rightarrow E) = \begin{cases} 1/\alpha E' & \text{при } (1-\alpha)E < E < E'; \\ 0 & \text{вне этого интервала.} \end{cases}$$

Вводим понятие **плотности столкновений**. Плотность столкновений – это число столкновений, испытываемых нейтроном в течение 1 с в 1 см<sup>3</sup>:

$$\psi(E) = \Phi_0(E) \Sigma(E). \quad (4.3)$$

Собирая (4.1), (4.2) и (4.3), получаем

$$\psi(E) = \int_E^{E/(1-\alpha)} dE' \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E')} g(E' \rightarrow E) \psi(E') + q_0(E).$$

Поясним написанные значения для пределов интегрирования:

$E'$  – была энергия нейтрона до взаимодействия, максимальная потеря энергии составляет  $\alpha E'$ :

$$E' - \alpha E' = E.$$

$E' = E/(1-\alpha)$  – верхний предел, самое большое значение энергии нейтрона до столкновения, при котором после столкновения он может иметь энергию  $E'$ .

Запишем уравнение для плотности столкновений в среде, состоящей из ядер водорода. Для водорода  $\alpha = 1$ :

$$1 - \alpha = 0.$$

$$g_H(E' \rightarrow E) = \begin{cases} 1/\alpha E' = 1/E' & \text{при } E \leq E'; \\ 0 & \text{при } E > E'. \end{cases}$$

$$\psi_H(E) = \int_E^{\infty} \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E')} \frac{\psi_H(E')}{E'} dE' + q_0(E).$$

В случае моноэнергетического источника  $q_0(E) = q_0 \delta(E - E_0)$ , верхний предел интегрирования следует заменить на  $E_0$ .

Если в спектре источника  $q_0(E)$  максимальная энергия равна  $E_{\max}$ , то верхний предел интегрирования следует заменить на  $E_{\max}$ .

**Плотность замедления.** Плотность замедления  $q(E)$  – число нейтронов в  $1 \text{ см}^3$ , замедляющихся ежесекундно ниже энергии  $E$ .

Введем понятие  $G$  – вероятность того, что нейтрон с начальной энергией  $E' > E$  окажется после столкновения в области энергии  $E'' < E$ . Такая вероятность определяется соотношением

$$G(E', E) = \int_{(1-\alpha)E'}^E g(E' \rightarrow E'') dE'' = \int_{(1-\alpha)E'}^E \frac{dE''}{\alpha E'} = \frac{E - (1-\alpha)E'}{\alpha E'}.$$

Разберемся с тем, какие пределы интегрирования возможны здесь.

Итак, после столкновения нейтрон, имевший до столкновения энергию  $E'$ , будет иметь энергию  $E''$ , при этом необходимо, чтобы  $E'' < E$ , значит, максимальное значение энергии до столкновения – верхний предел интегрирования  $E$ .

После столкновения нейтрон потеряет максимально возможное количество энергии  $\alpha E'$ , и соответственно останется с минимально возможным значением энергии после столкновения – а это нижний предел интегрирования  $(1-\alpha)E'$ .

Согласно определению плотности замедления

$$\begin{aligned} q(E) &= \int_E^{E/(1-\alpha)} \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E')} \psi(E') G(E', E) dE' = \\ &= \int_E^{E/(1-\alpha)} \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E')} \psi(E') \frac{E - (1-\alpha)E'}{\alpha E'} dE'. \end{aligned}$$

Дифференцируя это выражение и учитывая, что  $\Sigma(E) = \Sigma_s + \Sigma_a$ , получаем

$$\frac{dq}{dE} = \frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma(E)} \psi(E) - q_0(E).$$

Рассмотрим, чему равна плотность замедления в водороде  $\alpha = 1$ , и тогда  $G(E, E) = E/\alpha E' = E/E'$ .

$q_H(E) = E \int_E^{\infty} \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E)} \frac{\psi_H(E')}{E'} dE'$  – из определения плотности замедления.

Уравнение плотности столкновений

$$\Psi_H(E) = \int_E^{\infty} \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E')} \frac{\Psi_H(E')}{E'} dE' + q_0(E) = \frac{g_H(E)}{E} + q_0(E)$$

или  $q_H(E) = E[\Psi_H(E) - q_0(E)]$ ,

а для  $\frac{dq_H}{dE} = \left(\frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma(E)}\right) \frac{q_H(E)}{E} - \frac{\Sigma_s(E)}{\Sigma(E)} q_0(E)$ .

### 4.4.3. Замедление в водороде в отсутствие поглощения

Рассмотрим случай, когда  $\Sigma_a = 0$ . Тогда плотность замедления

$$q_H(E) = E \int_E^{\infty} \frac{\Sigma_s(E')}{\Sigma(E)} \frac{\Psi_H(E')}{E'} dE' = E \int_E^{\infty} \frac{\Psi_H(E')}{E'} dE',$$

а плотность столкновений

$$\Psi_H(E) = \frac{q_H(E)}{E} + q_0(E),$$

тогда

$$q_H(E) = E \int_E^{\infty} \frac{\frac{q_H(E')}{E'} + q_0(E')}{E'} dE'.$$

Для производной плотности замедления

$$\frac{dq_H}{dE} = \frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma(E)} \frac{q_H(E)}{E} - \frac{\Sigma_s(E)}{\Sigma(E)} q_0(E) = q_0(E),$$

отсюда

$$q(E) = \int_E^{t_{\max}} q_0(E') dE'.$$

В случае моноэнергетического источника с энергией  $E_0$  число нейтронов, выпускаемых в  $1 \text{ см}^3$  в  $1 \text{ с}$  с энергией  $E$ :

$$q_0(E) = q_0 \delta(E - E_0),$$

$$q(E) = q_0.$$

Физический смысл этого уравнения таков: для непоглощающего замедлителя плотность замедления нейтронов при энергии  $E$  равна числу нейтронов источника с энергиями выше  $E$ , генерируемых в  $1 \text{ см}^3$  в  $1 \text{ с}$ .

Этот факт очевиден с физической точки зрения.



Таким образом, в случае моноэнергетического источника нейтронов в водороде при пренебрежении поглощением плотность столкновений

$$\psi_H(E) = \frac{q_H(E)}{E} + q_0(E) = \frac{q_0}{E} + q_0\delta(E - E_0),$$

а плотность потока нейтронов, усредненная по объему среды,

$$\Phi_0^H = \frac{\psi(E)}{\Sigma} = \frac{q_0}{\Sigma_s^H(E) \cdot E} + \frac{q_0\delta(E - E_0)}{\Sigma_s(E)}.$$

Значит, при всех энергиях, меньших энергии нейтронов источника,

$$\Phi_0(E) = \frac{q_0}{\Sigma_s(E) \cdot E}.$$

Сечение рассеяния нейтронов в водороде постоянно в области энергий от 1 эВ до 10 кэВ, а сечение поглощения при этом мало, поток замедляющихся нейтронов в этой области следует закону  $1/E$ .

#### 4.4.4. Замедление в водороде с учетом поглощения

Для моноэнергетического источника при  $E < E_0$

$$\frac{dq}{dE} = \frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma(E)} \frac{q(E)}{E},$$

$$\frac{d \ln q}{dE} = \frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma(E)} \frac{1}{E},$$

$$\ln \frac{q(E)}{q(E_0)} = \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma(E')} \frac{dE'}{E'} \rightarrow q(E) = q(E_0) \exp \left[ - \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma(E')} \frac{dE'}{E'} \right].$$

В данном случае

$$q(E_0) = q_0 \frac{\Sigma_s(E_0)}{\Sigma(E_0)},$$

так что

$$q(E) = \frac{\Sigma_s(E_0)}{\Sigma(E_0)} q_0 \exp \left[ - \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma(E')} \frac{dE'}{E'} \right].$$

Величина

$$p(E) = \frac{q(E)}{q(E_0)} = \frac{\Sigma_s(E_0)}{\Sigma(E_0)} \exp \left[ - \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\Sigma(E')} \frac{dE'}{E'} \right]$$

называется вероятностью избежать резонансного захвата при замедлении нейтронов. Она представляет собой вероятность того, что нейтрон, испущенный с энергией  $E_0$ , не будет поглощен в процессе замедления до энергии  $E$ . Причем первый множитель описывает вероятность того, что нейтрон источника не будет поглощен при первом столкновении.

Поскольку при  $E > 1$  эВ для водорода  $\Sigma_a \ll \Sigma_s$ , то  $\Sigma_s/\Sigma \approx 1$ . Отсюда  $p(E) \approx 1$ .

Если отношение сечения поглощения к сечению рассеяния постоянно и равно  $\frac{\Sigma_s}{\Sigma_a} = c$  (например, в смеси водорода с тяжелым поглотителем), то

$$\frac{\Sigma_s}{\Sigma_a + \Sigma_s} = \frac{1}{1 + 1/c} = \frac{c}{c+1}; \quad \frac{\Sigma_a}{\Sigma_s + \Sigma_a} = \frac{d}{c+1},$$

$$q(E) = \frac{\Sigma_s(E_0)}{\Sigma(E_0)} q_0 \exp \left( - \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a}{\Sigma} \frac{dE'}{E'} \right) =$$

$$= \frac{c}{c+1} q_0 \exp \left( - \frac{1}{c+1} \int_E^{E_0} \frac{dE'}{E'} \right) = \frac{c}{c+1} q_0 \left[ \frac{E}{E_0} \right]^{c+1}.$$

Плотность потока нейтронов в этом случае

$$\Phi_0(E) = \frac{\Psi(E)}{\Sigma} = \frac{q(E)}{\Sigma(E) \cdot E} = \frac{c}{c+1} \cdot \frac{q_0}{\Sigma \cdot E} \left[ \frac{E}{E_0} \right]^{c+1};$$

$$E^{\frac{c}{c+1}-1} = E^{\frac{c-1-c}{c+1}} = E^{-\frac{1}{c+1}}.$$

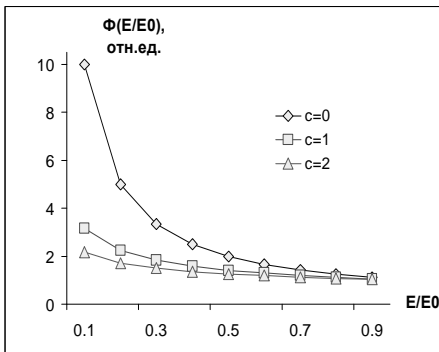


Рис. 4.6. Плотность потока замедляющихся нейтронов:  $c=0$  — в водороде в отсутствие поглощения,  $c=1$  и  $c=2$  — в смеси водорода с тяжелым поглотителем (отношение сечения поглощения к сечению рассеяния равно  $c$ )

Таким образом, плотность потока нейтронов пропорциональна  $(E/E_0)^{-1/(1+c)}$ , т.е. с уменьшением энергии плотность потока возрастает медленнее, чем по закону  $1/E$ .

#### 4.4.5. Замедление в тяжелых средах

В отличие от водорода для среды из тяжелых ядер получить аналитический ответ для  $\Phi_0(E)$  не удастся.

1) Асимптотическое значение (так как около  $E_0$  для моноэнергетического источника есть осцилляции) плотности столкновений нейтронов вдали от  $E_0$  в непоглощающей среде равно

$$\psi(E) = \frac{q_0}{\xi E}.$$

Кроме того, для любого непоглощающего замедлителя  $q(E) = q_0$  (было показано для водорода).

Таким образом, поток нейтронов в непоглощающей среде

$$\Phi_0(E) = \frac{\psi(E)}{\Sigma_s(E)} = \frac{q_0}{\xi \Sigma_s(E) E} = \frac{q(E)}{\xi \Sigma_s(E) \cdot E}.$$

Эта формула справедлива и в случае полиэнергетического источника для энергий ниже минимальной энергии этого источника.

Решение можно записать и для смеси непоглощающих ядер различных элементов, если их сечения рассеяния постоянны или одинаково зависят от энергии.

Так что  $\frac{\Sigma_{si}}{\Sigma_s} = \text{const}$ , где  $i$  – номер элемента.

$$\Sigma_s = \sum_i \Sigma_{si}.$$

Тогда

$$\Phi_0(E) = \frac{q(E)}{\bar{\xi} \Sigma_s(E) \cdot E},$$

где  $\bar{\xi}$  – средняя логарифмическая потеря энергии для смеси ядер.

Эта величина аддитивна в следующем смысле:

$$\bar{\xi} \Sigma_s(E) = \sum_i \xi_i \Sigma_{si}(E).$$

Формула  $\Phi_0(E)$  годится и для слабопоглощающих сред, и ее обычно называют энергетическим распределением (спектром) Ферми.

2) Если сечение захвата мало по сравнению с сечением рассеяния и  $\Sigma_a$  медленно изменяется с энергией (малое изменение на интервале замедления  $\Delta E_{\text{зам}}$ ), то принимают справедливой формулу Грейлинга-Герцеля

$$\Phi_0(E) = \frac{q(E)}{(\xi \Sigma_s(E) + \gamma \Sigma_a(E))E},$$

$$p(E) = \exp \left[ - \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_s(E') + \gamma \Sigma_a(E')} \frac{dE'}{E'} \right].$$

$$\text{Здесь } \gamma = 1 - \frac{(1 - \alpha) \ln^2 \left( \frac{1}{1 - \alpha} \right)}{2\alpha\phi}.$$

Для водорода  $\gamma = \phi = 1$ , для углерода  $\gamma = 0,116$ ;  $\phi = 0,158$ .

В том случае, когда сечение захвата меняется по закону  $\frac{1}{\sqrt{E}}$ , а

$\Sigma_s = \text{const}$ , интегрирование можно провести аналитически.

При достаточно больших  $E_0$

$$p(E) = \left[ 1 + \frac{\gamma \Sigma_a(E_0)}{\xi \Sigma_s(E)} \right]^{-\frac{2}{v}}.$$

3) На практике важен случай резонансного изменения сечений, когда на интервале упругого замедления сечения заметно изменяются.

Здесь опять-таки при не очень сильном поглощении справедливо приближение Вигнера, согласно которому нейтронный поток

$$\Phi_0(E) = \frac{q(E)}{\xi \Sigma(E) \cdot E},$$

а вероятность избежать резонансного захвата

$$p(E) = \frac{q(E)}{q_0} = \exp \left[ - \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma(E') E'} dE' \right].$$

При слабом поглощении  $\Sigma_a \rightarrow 0$ , и  $\Phi_0(E)$  стремится принимать вид спектра Ферми и при  $\Sigma_a \rightarrow 0$   $p(E) \rightarrow 1$ .

Для случая сильного поглощения аналитического выражения получить не удалось.

#### 4.4.6. Влияние резонансного захвата на замедление нейтронов

Для плотности потока нейтронов в поглощающей среде можно использовать приближение Вигнера:

$$\Phi_0(E) = \frac{q(E)}{\xi \Sigma(E) E}.$$

В точке максимума резонанса  $\Sigma(E)$  становится максимальным, соответственно плотность потока  $\Phi_0(E)$  становится минимальной, и произведение этих величин  $\psi(E)$  – плотность столкновений на интервале изменения энергий при упругом замедлении – изменяется слабо (рис. 4.7).

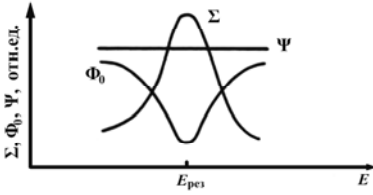


Рис. 4.7. Схема эффекта самоэкранировки сечений

Резонансные эффекты, особенно резонансный захват, имеют большое значение.

Рассматриваем только систему узких «изолированных» резонансов, т.е. ширина  $\Delta E_j$  меньше, чем интервал упругого замедления, т.е. максимальная потеря энергии при упругом рассеянии.

Положим, что в промежутках между резонансами  $\Sigma_a = 0$ . Тогда  $p(E)$  – вероятность избежать резонансного захвата:

$$p(E) = \exp \left[ - \sum_j \frac{\Sigma_a^j \Delta E^j}{\xi \Sigma^j E^j} \right].$$

Индексом  $j$  обозначены характеристики  $j$ -го резонанса.  $\Sigma_a^j$ ,  $\Sigma^j$ ,  $\Delta E^j$  – ширина резонанса,  $E^j$  – значение энергии для  $j$ -го резонанса.

Узкий резонансный максимум действует как отрицательный источник.

Рассмотрим среду, состоящую из различных элементов.

Пусть  $k$  – количество элементов,  $n_k$  – плотность  $k$ -го элемента в среде,  $E_j^k$  – энергия для изолированного резонанса. В области этого резонанса другие резонансы и для других веществ отсутствуют.

Изменение плотности замедления при переходе через этот резонанс:

$$\Delta q_j = \exp \left[ - \left( \frac{n_k}{\xi \Sigma_s} \right) J_{\Phi}^j \right].$$

$J_{\Phi}^j$  называют эффективным резонансным интегралом на резонансе при энергии  $E = E_j$ :

$$J_{\Phi}^j = \int_{E_j-b}^{E_j+b} \sigma_a(E) \cdot \frac{\Sigma_{sn}(E) dE}{\Sigma(E) E},$$

$\bar{\xi}$  – средняя логарифмическая потеря энергии;  $\Sigma_{sn}$  – макроскопическое сечение нерезонансного рассеяния для смеси;  $\Sigma$  – полное сечение. При этом  $\Sigma = \Sigma_a + \Sigma_s$ ;  $\Sigma_s = \Sigma_{sr}$  (сечение резонансного рассеяния) +  $\Sigma_{sn}$ ;  $b$  – некий параметр, выбираемый из условия  $b \gg \Gamma_j$  – ширины резонанса.

В случае, если концентрация рассматриваемого элемента мала, так что  $\Sigma_a + \Sigma_{sr} \ll \Sigma_{sn}$ , можно получить резонансный интеграл

$$J_{\text{рез}}^j = \int_{E_j-b}^{E_j+b} \sigma_a(E) \frac{dE}{E}.$$

Положим, что зависимость функций  $\sigma_a(E)$  и  $\sigma_{sr}(E)$  вблизи резонанса описывается формулой Брейта-Вигнера:

$$\sigma_a(E) = \sigma_0 \frac{\Gamma^2}{4} \left[ (E - E_{\text{рез}})^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \right]^{-1},$$

где  $\Gamma$  – полная ширина уровня,  $E_{\text{рез}}$  – энергия резонанса,  $\sigma_0$  – пик сечения.

Подставив  $\sigma_a(E)$  в формулу для  $J_{\text{эф}}^j$  и проинтегрировав от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим

$$J_{\text{эф}}^j = \frac{\pi \Gamma^j \sigma_a^j}{2 E_j \sqrt{1+t^j}},$$

$$t^j = \frac{\sum_{rs}^j}{\sum_{sn}^j}.$$

При  $t^j \rightarrow 0$  (т.е.  $\sum_{sn} \gg \sum_{rs}^j$ ) получим формулу для резонансного интеграла:

$$J_{\text{рез}}^j = \frac{\pi \Gamma^j}{2 E^j} \sigma_a^j.$$

Таким образом, для Брейт-Вигнеровской формы резонанса сечения эффективный резонансный интеграл  $J_{\text{эф}}^j$  меньше резонансного интеграла  $J_{\text{рез}}^j$  на множитель  $\sqrt{(1+t^j)} = f^j$ . Этот множитель характеризует определенную вероятность нейтрону избежать захвата в процессе замедления в смеси («проскочить резонанс») из-за наличия в ней ядер замедлителя.  $f^j$  называется коэффициентом резонансной самоэкранировки.

Достаточно точно можно положить полный резонансный интеграл:

$$J_j = \int \sigma_a(E) \frac{dE}{E} \approx \sum_j J_{\text{рез}}^j + J^{j(\frac{1}{v})}.$$

$J_j^{1/v}$  учитывает суммарный вклад сечения, подчиняющегося закону  $1/v$ , в резонансный интеграл захвата.

### 4.4.7. Литаргия

Для описания процесса замедления используют безразмерную величину  $u = -\ln(E_0/E)$  – **литаргию**.  $E_0$  – произвольная энергия, выбираемая за начальную.

В случае источника деления  $E_0 = 2$  МэВ или  $E_0 = 10$  МэВ. Для нейтронов с энергией  $E_0$  литаргия равна нулю:

$$u = \ln(E_0/E_0) = 0.$$

Запишем формулу для изменения энергии, используя понятие литаргии:

$$E = E_0 e^{-u}.$$

Связь между энергией и литаргией нейтрона приведена на рис. 4.8. Нейтроны при каждом столкновении теряют в среднем энергию, соответственно,  $q$  и  $\Delta \bar{u} = \xi$ .

Выражения теории замедления в переменной литаргии имеют более простой вид. При этом  $\Phi_0(E)dE = \Phi_0(u)du$ . Т.е.

$$\Phi_0(u) = \frac{\Phi_0(E)}{(dE/du)} = E\Phi_0(E).$$

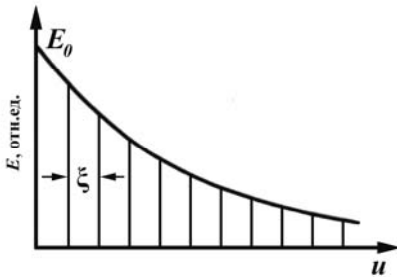


Рис. 4.8. Связь между энергией нейтрона и литаргией

литаргию:

$$\Sigma(u)\Phi_0(u) = \int_{u-\Delta u}^u du' \Sigma_s(u')g(u' \rightarrow u)\Phi_0(u) + q_0(u),$$

$$g(u' \rightarrow u) = \frac{\exp[-(u-u')] - \alpha}{1-\alpha}.$$

Для  $\psi(u)$  те же соотношения

$$\psi(u) = \frac{\psi(E)}{dE/du} = \psi(E) \cdot E.$$

Но для  $q(E)$  соотношение другое, так как плотность замедления характеризует не единичный интервал, а интегральный интервал от 0 до  $E(u)$ :  $q(u) = q(E)$ .

Основное уравнение замедления записывается через



Для производной плотности замедления

$$\frac{dq}{du} + \Sigma_a \Phi_0(u) = q_0(u);$$

плотность замедления

$$q(u) = \int_{u-\Delta u}^u du' \Sigma_s(u') G(u' \rightarrow u) \Phi_0(u'),$$

где  $G(u' \rightarrow u) = \int_u^{u+\Delta u} g(u'' \rightarrow u) du''$

Формула Вигнера имеет следующий вид:

$$\Phi_0(u) = \frac{q(u)}{\xi \Sigma(u)};$$

$$q(u) = q_0 \exp \left[ - \int_0^u \Sigma_a(u') \frac{du'}{\xi \Sigma(u')} \right].$$

## 4.5. Основы возрастной теории

### 4.5.1. Уравнение возраста

Запишем уравнения из теории замедления и теории диффузии:

1) баланс нейтронов в теории замедления

$$dq/du + \Sigma_a \Phi_0(u) = q_0(u); \quad (4.4)$$

2) баланс нейтронов в диффузионной теории

$$\nabla \vec{J}(\vec{r}) + \Sigma_a(\vec{r}) \Phi_0(\vec{r}) = q_0(\vec{r}). \quad (4.5)$$

Скомбинируем оба эти выражения:

$$\frac{\partial q(\vec{r}, u)}{\partial u} + \Sigma_a \Phi_0(\vec{r}, u) + \nabla \vec{J}(\vec{r}, u) = q_0(\vec{r}, u). \quad (4.6)$$

Для решения такого уравнения надо связать плотность замедления  $q$  с плотностью тока  $J$  и плотностью потока  $\Phi_0$ .

Из определения плотности замедления  $q(u)$  через плотность потока:

$$q(\vec{r}, u) = \int_{u-\Delta u_r}^u \Sigma_s(u') \Phi_0(\vec{r}, u') g(u' \rightarrow u) du.$$

Для среды, состоящей из ядер с большим и средним атомным номером из-за малости  $\Delta u$ , можно аппроксимировать величину  $\Sigma_s(u')$  и  $\varphi_0(r, u')$  их значением в точке  $u' = u$  и вынести за знак интеграла:

$$q(\vec{r}, u) = \Sigma_s(u)\varphi_0(\vec{r}, u) = \int_{u-\Delta u}^u g(u' \rightarrow u) du = \xi \Sigma_s \varphi_0(\vec{r}, u).$$

Таким образом, взаимосвязь между плотностью потока нейтронов и плотностью замедления такая же, как и для усредненных значений в бесконечной среде, т.е. эквивалентна приближению Ферми:

$$\varphi_0(\vec{r}, u) = \frac{q(\vec{r}, u)}{\xi \Sigma_s}.$$

Установим теперь связь между потоком и током.

Будем считать справедливым закон Фика:

$$\vec{J}(\vec{r}) = -D(\vec{r})\nabla\varphi_0(\vec{r}).$$

Подставим закон Фика в уравнение (4.6):

$$\frac{\partial q(\vec{r}, u)}{\partial u} + \Sigma_a \varphi_0(\vec{r}, u) - \nabla D(u)\nabla\varphi_0(\vec{r}, u) = q_0(\vec{r}, u).$$

Можем это выражение переписать для  $\varphi_0(\vec{r}, u)$ :

$$-\nabla D \nabla \varphi_0(\vec{r}, u) + \Sigma_a \varphi_0(\vec{r}, u) = -\frac{\partial \xi \Sigma_s \varphi_0(\vec{r}, u)}{\partial u} + q_0(\vec{r}, u)$$

или для плотности замедления:

$$\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{D}{\xi \Sigma_s} \nabla^2 q(\vec{r}, u) - \frac{\Sigma_a(u)q(\vec{r}, u)}{\xi \Sigma_s(u)} + q_0(\vec{r}, u).$$

Введем новую переменную – **возраст**:

$$\tau(u) = \int_0^u \frac{D(u')}{\xi \Sigma_s(u')} du' \quad \text{или} \quad \tau(E) = \int_E^{E_0} \frac{D(E')dE'}{\xi \Sigma_s(E')E'} - \text{возраст.}$$

Перепишем уравнение (4.6) для переменной возраста:

$$\frac{\partial q(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} = \nabla^2 q(\vec{r}, \tau) - \frac{\Sigma_a}{D} q(\vec{r}, \tau) + q_0(\vec{r}, \tau).$$

Выражение  $q(\tau)$  представляет собой число нейтронов, которые замедляются ниже энергии  $E$ , соответствующей возрасту  $\tau$ .

Имеется формальная аналогия между уравнением возраста (особенно для непоглощающей среды) и классическим уравнением теплопроводности, где  $q$  – температура, а  $\tau$  – время. Это сходство и

явилось причиной появления термина «возраст», хотя размерность возраста – [см<sup>2</sup>].

Возраст увеличивается в процессе замедления.

По аналогии с односкоростной диффузионной теорией можно ввести понятие длины диффузии нейтронов с энергией, соответствующей возрасту  $\tau$ :

$$L(\tau) = \left[ \frac{D(\tau)}{\Sigma_a(\tau)} \right]^{1/2}.$$

Тогда уравнение возраста будет иметь вид

$$\frac{\partial q(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} - \nabla^2 q(\vec{r}, \tau) + \frac{q(\vec{r}, \tau)}{L^2(\tau)} = q_0(\vec{r}, \tau).$$

Первый член в этом уравнении характеризует изменение плотности нейтронов при замедлении, второй – изменение  $q(\vec{r}, \tau)$  в результате утечки нейтронов из данного объема; третий – изменение  $q(\vec{r}, \tau)$  вследствие поглощения.

В случае слабого поглощения нейтронов функцию  $q(\vec{r}, \tau)$  можно представить в виде

$$q(\vec{r}, \tau) = \tilde{q}(\vec{r}, \tau) p(\tau),$$

$$\text{где } p(\tau) = p(u) = \exp\left(-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u') du'}{\xi \Sigma_s(u')}\right) = \exp\left(-\int_0^\tau \frac{d\tau}{L^2(\tau)}\right) -$$

вероятность того, что нейтрон избежит поглощения в бесконечной среде.

Тогда при слабом поглощении  $\Sigma \approx \Sigma_s$  уравнение для  $\tilde{q}$  будет таким же, как и для  $q$ , но без слагаемого, отвечающего за поглощение. (Поглощение (не очень сильное – в пределах применения диффузионной теории) можно учесть с помощью  $p(\tau)$  – вероятности избежать поглощения.)

Далее для простоты будем рассматривать только непоглощающую среду, а в решение вводить соответствующую поправку.

## 4.5.2. Уравнение возраста для плоского изотропного источника

Рассмотрим уравнение возраста для конкретной геометрии: для плоского изотропного моноэнергетического источника в бесконечной однородной среде:

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + q_0 \delta(x) \delta(\tau).$$

Решение этого уравнения с учетом ограниченности на бесконечности имеет вид распределения Гаусса, которое расплывается с увеличением возраста  $\tau$ :

$$q(x, \tau) = q_0 p \cdot (4\pi\tau)^{-1/2} \exp(-x^2/4\tau).$$

Плотность потока нейтронов в этом случае

$$\varphi_0(x, \tau) = \frac{q(x, \tau)}{\xi \Sigma_s [u(\tau)]} = \frac{q_0 p(\tau) \exp(-\frac{x^2}{4\tau})}{\xi \Sigma_s(\tau) (4\pi\tau)^{1/2}}.$$

Нейтроны «малого возраста» потеряли небольшую часть своей энергии и в соответствии с этим не успели продиффундировать далеко от источника. Пространственное распределение таких нейтронов описывается высокой и узкой кривой (рис. 4.9). Напротив, большой возраст  $\tau$  – случай сильно замедленных нейтронов, успевших продиффундировать далеко от источника. Кривая распределения таких нейтронов оказывается низкой и широкой.

Для точечного изотропного моноэнергетического источника

$$q(r, \tau) = q_0(r) \delta(r) \delta(\tau) / 4\pi r^2.$$

Решение уравнения возраста описывается формулой:

$$q(r, \tau) = q_0 p (4\pi\tau)^{-3/2} \exp(-r^2/4\tau)$$

Для точечного изотропного источника спектра  $q_0(u)$  решение уравнения возраста в непоглощающей среде

$$q(r, \tau) = \frac{\int_0^u q_0(u') \exp\{-r^2 / 4[\tau(u) - \tau(u')]\} du'}{\{4\pi[\tau(u) - \tau(u')]\}^{3/2}}.$$

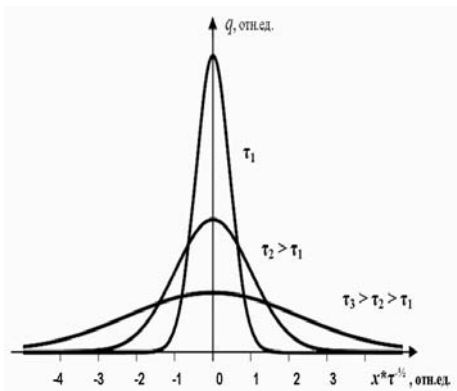


Рис. 4.9. Плотность замедления нейтронов вблизи плоского источника согласно возрастной теории

Поскольку  $\tau$  плавно увеличивается с  $u$ , функция  $q(x, \tau)$  имеет две особенности:

1) для любой летаргии (любого возраста) плотность замедления имеет максимум в координате источника  $x = 0$ ;

2) для любой летаргии (любого возраста) плотность замедления имеет максимум в координате источника  $x = 0$ ;

3) вероятность резонансного поглощения  $p(u)$  всегда снижает  $q(x, u)$  для данной  $u$  или  $\tau$ .

Рассмотрим  $q(x, u)$  как функцию летаргии. В некоторой точке пространства  $x > 0$  плотность замедления нейтронов имеет характер кривой, представленной на рис. 4.10.

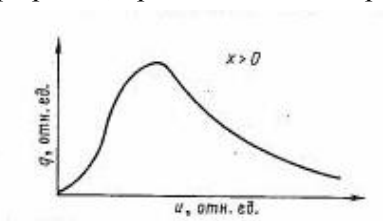


Рис. 4.10. Плотность замедления нейтронов для данной точки пространства в зависимости от летаргии

Плотность замедления (а значит, и плотность потока нейтронов) для высокой энергии (близка к 0) невелика вследствие того, что большинство нейтронов, доходящих до координаты  $x$ , успевают испытать некоторое количество соударений, поэтому их кинетическая энергия уменьшается (и, следовательно, летаргия отличается от 0).

Плотность замедления для нейтронов низкой энергии в точке  $x$  также невелика из-за:

1) влияния резонансного поглощения, в результате которого все меньшее число нейтронов достигает точки  $x$ ;

2) удаления нейтронов с малой энергией на значительные расстояния от источника в процессе диффузии.

### 4.5.3. Физический смысл возраста

Найдем средний квадрат удаления нейтронов от точечного изотропного моноэнергетического источника в процессе замедления (при этом используем полученное ранее решение для такого источника):

$$\overline{r^2(\tau)} = \int_0^{\infty} r^2 [r^2 q(r, \tau)] dr / \int_0^{\infty} r^2 q(r, \tau) dr = 6\tau,$$

$$\overline{x_i^2} = 2\tau.$$

Таким образом, возраст нейтронов характеризует средний квадрат расстояния между местом рождения нейтрона (отвечающим нулевому возрасту) и местом, где нейтрон достигнет данной энергии, отвечающей  $\tau(E)$ .

В теории диффузии  $\overline{r^2} = 6L^2$  – средний квадрат смещения нейтрона от рождения до поглощения, а  $\tau$  играет ту же роль, что  $L^2$  для тепловых нейтронов.

Если посмотреть на выражения

$$L = \sqrt{D} / \Sigma_a \quad \text{и} \quad \tau = \int_0^u \frac{D(u') du'}{\xi \Sigma_s(u')} = \frac{D \cdot u}{\xi \Sigma_s},$$

и если  $\Sigma_s$  не зависит от энергии ( $\Sigma_a \ll \Sigma_s$ ), то величина  $\xi \Sigma_s / u$  играет роль сечения поглощения. Оно равно  $\Sigma_s$ , деленному на среднее число столкновений  $u/\xi$ , в результате которых нейтроны покидают рассматриваемый интервал энергий.

Величину  $\sqrt{\tau}$  для тепловых нейтронов называют длиной замедления и обозначают  $L_s$ .

Среды, состоящие из более тяжелых ядер (малых  $\xi$ ), имеют большой возраст и длину замедления. При этом, чем сильнее степень поглощения в среде, тем меньше длина замедления (табл. 4.2).

**Возраст тепловых нейтронов для источника деления  
и длина диффузии тепловых нейтронов**

Материал	$\tau_m, \text{см}^2$	$L_s, \text{см}$	$L, \text{см}$
Вода – замедлитель	27,7	5,25	2,85
Графит	364	19,0	54,5
Железо	9400	97,0	16,8
Свинец	7100	84,0	13,5
Карбид бора – поглотитель	174	13,2	0,02

$$\tau = Du/\xi\Sigma_s.$$

Для среды, состоящей из смеси ядер, возраст определяется по формуле

$$\tau(u) = \int_0^u D(u') \frac{du'}{\bar{\xi}\Sigma_s(u')},$$

где усредненное по среде из нескольких элементов значение средней логарифмической потери энергии на одно столкновение

$$\bar{\xi} = \frac{\sum_i \xi_i \Sigma_{si}}{\Sigma_s}; \quad \Sigma_s = \sum_i \Sigma_{si}; \quad D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}; \quad \Sigma_{tr} = \sum_i \Sigma_{tri}.$$

Задачи для возрастной теории по определению  $q(r, \tau)$  для ограниченных областей и для двух сред значительно труднее, поскольку возраст не является однозначной функцией энергии. В разных средах для одинаковой энергии возраст будет разным.

#### **4.5.4. Условия применимости возрастной теории**

1. Ограничение на поглощающие свойства среды:

$$\Sigma_a(u) \ll \xi\Sigma_s(u).$$

2. Ограничение на расстояние от источника. Возрастную теорию можно применять только на небольшом расстоянии от источника:

$$x \ll 2\tau/D = 6\tau\Sigma_{tr}-$$

и на достаточном удалении от границ среды  $x > 1/\Sigma_s$ . Иначе угловое распределение будет сильно анизотропно.

3. При вводе зависимости  $q(\vec{r}, u) = \xi \Sigma_s \phi_0(\vec{r}, u)$  предполагаем, что сечение  $\Sigma_s$  мало изменяется на интервале упругого замедления  $\Delta u_r$  (или  $\Delta E_{\text{зам}}$ ).

4. Там же считали, что плотность замедления  $q$  мало изменяется на интервале летаргии (энергии), равной средней логарифмической потере энергии при упругом рассеянии, т.е.  $\frac{dq}{du} \ll \frac{q}{\xi}$  или

$$\frac{\xi}{q} \frac{dq}{du} \ll 1.$$

Т.е. число столкновений в интервале от энергии источника до интересующей нас энергии должно быть много больше 1. Такая ситуация возможна для тяжелой среды.

### 4.5.5. Уточнения возрастной теории

1. В возрастной теории при резонансных изменениях сечений можно использовать формулу Ферми

$$q(\vec{r}, u) = \xi \Sigma_s(u) \phi(\vec{r}, u)$$

или приближение Вигнера

$$q(\vec{r}, u) = \xi \Sigma(u) \phi(\vec{r}, u)$$

с последующим изменением  $\Sigma_s$  на  $\Sigma$  в выражениях.

2. Учитывать пространственное распределение нейтронов, не испытавших ни одного столкновения.

3. Для сред с поглощением можно использовать вместо рассчитанного по формуле возраста  $\tau(E)$  одной шестой части измеренного экспериментально (или рассчитанного более точно другим методом) значения  $r^2$  для точечного изотропного источника.

## 4.6. Численные методы решения уравнения переноса

### 4.6.1. Метод сферических гармоник

Численные методы позволяют решить уравнение переноса:



$$\begin{aligned} & \bar{\Omega} \nabla \varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) + \Sigma(\bar{r}, E) \varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) = \\ & = \int d\Omega' \int_E^{\infty} dE' \Sigma_s(\bar{r}, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \varphi(\bar{r}, E', \bar{\Omega}') + q(\bar{r}, E, \bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Сначала рассмотрим методы для решения плоской односкоростной задачи (с азимутальной симметрией):

$$\mu \frac{\partial \varphi(z, \mu)}{\partial z} + \Sigma(z) \varphi(z, \mu) = \int_{-1}^{+1} \Sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) \varphi(z, \mu') d\mu' + q(z, \mu).$$

Методы полиномиальных разложений заключаются в разложении всех функций угловых переменных в кинетическом уравнении (плотность потока и сечения) по какой-либо системе ортогональных полиномов. В результате интегродифференциальное уравнение переноса сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для различных угловых моментов потока.

В методе сферических гармоник ( $P_N$ -метод) используется разложение по полиномам Лежандра в интервале  $(-1; +1)$ . Ограничения – задача одномерная без азимутальной зависимости источников и решения задачи. Эти ограничения не изменят сути подхода, но снятие их значительно усложнит весь алгоритм.

Для полиномов Лежандра

$$\begin{aligned} \varphi(x, \mu) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \varphi_l(x) P_l(\mu), \\ \Sigma_s(\mu^s) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \Sigma_{s,l} P_l(\mu^s). \end{aligned}$$

Коэффициенты определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \varphi_l(x) &= 2\pi \int \varphi(x, \mu) P_l(\mu) d\mu \\ \Sigma_{s,l} &= 2\pi \int \Sigma_s(\mu^s) P_l(\mu^s) d\mu^s. \end{aligned}$$

Для односкоростной задачи в плоской геометрии:

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \varphi(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma(x) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu+1)}{4\pi} \varphi_{\nu}(x) P_{\nu}(\mu) = \\ & = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[ \frac{(2\nu+1)}{4\pi} \right] \Sigma_{s,\nu}(x) \varphi_{\nu}(x) P_{\nu}(\mu) + q(x, \mu). \end{aligned}$$

Для этого уравнения:

1. Используем разложение  $q$ .

2. Умножаем на  $P_l(\mu)$  (полиномы Лежандра ортогональны).
3. Интегрируем по  $\mu$ .

Получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{ld\varphi_{l-1}(x)}{dx} + \frac{(l+1)d\varphi_{l+1}(x)}{dx} + (2l+1)\Sigma_{tr,l}(x)\varphi_l(x) = \\ = (2l+1)q_l(x); l = 0, 1, \dots, \infty.$$

Величина  $\Sigma_{tr,l} = \Sigma - \Sigma_{s,l}$  при  $l \geq 1$  называется  $l$ -ым моментом транспортного сечения.

$$P_0 = 1, P_1(\mu) = \mu, P_2(\mu) = (3\mu^2 - 1)/2.$$

При  $l = 0$   $\Sigma_{tr,0} = \Sigma - \Sigma_s$ ;  $l = 1$   $\Sigma_{tr,1} = \Sigma_{tr}$  – транспортное сечение в обычном виде.

$P_N$ -приближение метода сферических гармоник получится, если в бесконечной системе уравнений учитываем только  $(N + 1)$  первых уравнений, причем в последнем уравнении полагают

$$\frac{d\varphi_{N+1}(x)}{dx} = 0.$$

Тогда разложение по полиномам Лежандра примет вид

$$\varphi(x, \mu) = \sum_{l=0}^N \frac{2l+1}{4\pi} \varphi_l(x) P_l(\mu),$$

и система из  $(N + 1)$  уравнений будет содержать  $(N + 1)$  неизвестную функцию.

Рассмотрим граничные условия для метода сферических гармоник.

1. Отсутствие входящих извне нейтронов описывается условием:

$$\varphi(d, \mu) = 0 \text{ при } \mu < 0, d - \text{ граница среды.}$$

Это условие заменяют системой интегральных уравнений при нечетном  $N$  (условия Маршака):

$$\int_{-1}^0 P_{2i+1} \varphi(d, \mu) d\mu = 0; \quad i = 0, \dots, \frac{(N-1)}{2}.$$

Для многослойной среды к условиям на границе среды добавляется условие непрерывности плотности углового потока на границе раздела различных материалов, что вытекает из требования сохранения числа нейтронов.

Плотность углового потока на границе раздела слева и справа обозначим  $\varphi^+(x, \mu)$  и  $\varphi^-(x, \mu)$ , тогда условие непрерывности будет:

$$\varphi^+(x, \mu) = \varphi^-(x, \mu).$$

В методе  $P_N$  при нечетном  $N$  это условие означает требование непрерывности всех угловых моментов решения  $\varphi_l$  на границе слоев с различными физическими свойствами. При этом число произвольных постоянных интегрирования совпадает с числом граничных условий, задача решается однозначно.

При четных  $N$  число постоянных интегрирования меньше числа граничных условий. Эти числа совпадают при использовании в качестве граничных условий соблюдения непрерывности функций углового потока:

$$\mu\varphi^+(x, \mu) = \mu\varphi^-(x, \mu).$$

2. В случае бесконечных сред используется условие обращения в нуль при  $x \rightarrow \infty$  плотности потока  $\varphi(x, \mu)$  при любых значениях  $\mu$ .

**$P_1$ -приближение.** Рассмотрим систему в  $P_1$ -приближении.

При  $N = 1$  система принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1(x)}{dx} + \sum_{yb} \varphi_0(x) &= q_0(x), \\ \frac{1}{3} \frac{d\varphi_0(x)}{dx} + \sum_{tr} \varphi_1(x) &= q_1(x). \end{aligned}$$

Эту систему можно свести к одному уравнению типа уравнения диффузии:

$$-D \frac{d^2\varphi_0(x)}{dx^2} + \sum_{yb} \varphi_0(x) = q_0(x) = 3D \frac{dq}{dx}.$$

Можно сравнить с уравнением диффузии:

$$-D \frac{d^2\varphi_0(x)}{dx^2} + \sum_a \varphi_0 = q_0.$$

Граничные условия принимают вид

$$\int_{-1}^0 \mu\varphi(d, \mu) d\mu = 0.$$

Это выражение указывает на тот факт, что односторонний интегральный ток нейтронов через внешнюю поверхность защиты со стороны вакуума в защиту равен нулю.

Учитывая, что в  $P_1$ -приближении

$$\varphi(x, \mu) = \frac{\varphi_0(x)}{4\pi} + \frac{3}{4\pi} \varphi_1(x) \quad (\text{из разложения плотности потока по}$$

полиномам Лежандра), в качестве граничного условия получим выражение:

$$2\varphi_1(d) - \varphi_0(d) = 0.$$

Если в  $P_1$ -приближении положить  $dq_1/dx = 0$ , то получим диффузионное уравнение.

Диффузионное уравнение – более грубое, чем  $P_1$ -приближение.

Очевидно, что в односкоростных задачах для изотропных источников диффузионное и  $P_1$ -приближения совпадают. Оба эти приближения имеют большую погрешность и могут быть использованы лишь при малой анизотропии углового потока, т.е. в основном для нейтронов промежуточных энергий в слабопоглощающих средах вдали от раздела сред.

Бесконечный плоский изотропный источник

$q_0 = q_0 \delta(x)$  в бесконечной однородной среде.

В этом случае решение уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{q_0}{4kD} \exp(-kx), \quad \text{где } k \text{ – характеристическое число.}$$

$$k = \sqrt{\frac{\Sigma_{\text{ув}}}{D}} \quad \text{для } N = 1.$$

Эти формулы совпадают с формулами теории диффузии при  $k = 1/L$ .

## 4.6.2. Метод моментов

Дальнейшее развитие метода сферических гармоник. Опять рассмотрим случай плоской геометрии. Введем понятие пространственно-углового момента плотности потока нейтронов:

$$b_{m,l} = \frac{\sum^{m+1}_{-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_l(x) x^m dx}{m!} = \frac{\sum^{m+1}_{-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m dx \int P_l(\mu) \varphi(x, \mu) d\Omega}{m!}$$

и пространственно-угловой момент источника нейтронов:

$$q_{m,l} = \frac{\sum^{m+1}}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} q_l(x) dx = \frac{\sum^{m+1}}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m dx \int P_l(\mu) q(x, \mu) d\Omega.$$

Бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений из метода сферических гармоник

$$l\varphi_{l-1}(x)/dx + \frac{(l+1)d\varphi_{l+1}}{dx} + (2l+1)\Sigma_{l,r,l}(x)\varphi_l(x) = (2l+1)q_l(x)$$

умножим на  $\frac{\sum^{m+1} x^m}{m!}$ ; проинтегрируем  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx$ , учитывая, что при  $|x| \rightarrow \infty$   $\varphi$  стремится к нулю быстрее, чем  $x^{-m}$ .

Переходим к системе линейных уравнений для моментов  $b_{m,l}$ :

$$-l\Sigma b_{m-1,l-1} - (l+1)\Sigma b_{m-1,l+1} + (2l+1)\Sigma_{l,r,l} b_{m,l} = (2l+1)q_{m,l}.$$

Моменты  $b_{m,l}$  при отрицательных значениях индексов  $m$  и  $l$  обращаются в нуль.

Система уравнений замкнутая и каждый момент может быть определен из конечного числа уравнений. Взаимосвязь такова, что для определения  $b_{m,l}$  нужно знать моменты  $b_{m-1,l-1}$  и  $b_{m-1,l+1}$ . Система уравнений точная.

После вычисления пространственно-угловых моментов  $b_{m,l}$  задача состоит в восстановлении по ним значений угловых моментов плотности потока.

Порядок приближения – наивысший из учитываемых номеров момента  $L$ . Требуемое значение  $L$  зависит от типа задачи, степени поглощения и анизотропии рассеяния и от рассматриваемых расстояний. С ростом номера момента можно увеличивать расстояния от источника. Для расстояний в 50 длин свободного пробега требуется 10-15 моментов.

Ограничение состоит в том, что метод моментов можно использовать лишь для бесконечных сред, так как при получении моментов интегрирование производят по всему объему.

И еще – метод моментов неудовлетворительно описывает поведение плотности потока вблизи источника.

Достоинства – простота и точность.

### 4.6.3. Двойной $P_N$ -метод

Метод сферических гармоник не очень эффективен при расчетах гетерогенных сред, так как он плохо описывает разрыв плотности углового потока при  $\mu = 0$  на границе раздела сред (в плоской геометрии).

Для таких задач более подходит  $2P_N$ -метод или двойной  $P_N$ -метод разложения углового потока по «полуинтервальным» полиномам, ортогональным на полуинтервалах  $(-1,0);(0,1)$ . Эти полиномы  $P_l^\pm(\mu)$  выражаются через полиномы Лежандра следующим образом:

$$P_l^\pm(\mu) = P_l(2\mu \mp 1)H(\mu),$$

$$\text{где } H(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu \geq 0 \\ 0 & \text{при } \mu < 0 \end{cases} \text{ — функция Хевисайда.}$$

Полиномы  $P_l(2\mu \mp 1)H(\mu)$  удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\pm \int_0^{\pm 1} P_l(2\mu \mp 1)P_v(2\mu \mp 1)d\mu = \frac{\delta_{lv}}{2l+1}.$$

Аналогично плотность углового потока  $\varphi(x,\mu)$  разбивается на две функции  $\varphi^\pm(x,\mu)$ , каждая из которых соответствует своему полупространству

$$\varphi^\pm(x,\mu) = \varphi(x,\mu)H(\pm\mu).$$

Эти функции разлагаются по полуинтервальным полиномам:

$$\varphi^\pm(x,\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\varphi_l^\pm(x)P_l^\pm(\mu),$$

$$\text{где } \varphi_l^\pm(\mu) = \pm \int_0^{\pm 1} \varphi(x,\mu)P_l^\pm(\mu)d\mu.$$

В  $2P_N$ -методе для разложения функции  $\varphi(x,\mu)$  и сечения рассеяния (индикатрисы рассеяния) используются различные системы ортогональных полиномов ( $P_n^\pm(\mu)$  и  $P_n(\mu)$  соответственно).

Поэтому между  $\varphi_l^\pm(x)$  и  $\Sigma_{s,l}$  нет такой корреляции, которая бы обеспечивала простой вид интеграла рассеяния  $(2l+1)\Sigma_{s,l}\varphi_l$ , как в классическом методе сферических гармоник.

Уравнение переноса в плоской геометрии сводится с учетом соответствующих разложений к системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{l+1}{2l+1} \frac{d\varphi_{l+1}^{\pm}}{dx} + \frac{l}{2l+1} \frac{d\varphi_{l-1}^{\pm}}{dx} \pm \frac{d\varphi_l^{\pm}}{dx} \right] + \Sigma \varphi_l^{\pm} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^L (2m+1) \alpha_{lm}^{\pm} \sum_{s,l} \sum_{\nu=0}^M (2\nu+1) \mu_{\nu m}^{\pm} \left[ \varphi_{\nu}^{+} + (-1)^{\nu+m} \varphi_{\nu}^{-} \right] + q_l^{\pm}(x),$$

где  $L$  – номер приближения индикатрисы рассеяния,

$$\alpha_{lm}^{\pm} = \pm \int_0^{\pm 1} P_l^{\pm}(\mu) P_m(\mu) d\mu; \text{ можно показать, что } \alpha_{lm}^{-} = (-1)^{l+m} \alpha_{lm}^{+};$$

$\alpha_{l0}^{+} = \delta_{l0}$ . Поэтому при изотропном рассеянии правая часть становится равной  $\Sigma_{s,0}[\varphi_0^{+}(x) + \varphi_0^{-}(x)]$ .

В  $2P_N$ -приближении полагают  $\varphi^{\pm}(x) = 0$  при  $l > N$ .

Рассмотрим  $P_0$ -приближение.

В случае изотропного рассеяния правая часть становится равной  $\Sigma_{s,0}[\varphi_0^{+}(x) + \varphi_0^{-}(x)]$ .

В среде с изотропным рассеянием и изотропным источником

$$\pm \frac{d\varphi_0^{\pm}}{dx} + (2\Sigma - \Sigma_{s,0})\varphi_0^{\pm} - \Sigma_{s,0}\varphi_0^{\mp} = 2q_0^{\pm} = q_0.$$

Вычитая и складывая эти два уравнения и учитывая  $\varphi_0 = \varphi_0^{+} + \varphi_0^{-}$ :

$$\frac{d\varphi_0}{dx} + 2\Sigma(\varphi_0^{+} - \varphi_0^{-}) = 0$$

$$\frac{d(\varphi_0^{+} - \varphi_0^{-})}{dx} + 2(\Sigma - \Sigma_{s,0})\varphi_0 = 2q_0.$$

Эта система сводится к одному уравнению диффузионного типа:

$$-\frac{1}{2\Sigma} \frac{d^2\varphi_0}{dx^2} + 2\Sigma_{y\text{в}}\varphi_0 = 2q_0.$$

Его решение имеет вид

$$\varphi_0(x) = \frac{2q_0\Sigma}{k} \exp(-kx),$$

где характеристическое число  $k = 2\sqrt{\Sigma\Sigma_{y\text{в}}}$ .

В  $P_1$ -приближении  $k = \sqrt{3\Sigma\Sigma_{y\text{в}}}$ .

Результаты  $2P_0$ -приближения грубее данного  $P_1$ -приближения, но точнее  $P_0$ -приближения, согласно которому  $\varphi = 0$ .

В  $2P_N$ -приближении граничные условия могут быть удовлетворены точно.

При облучении внутренней поверхности защиты потоком излучения плотностью  $\varphi_{\text{пад}}(\mu)$  граничное условие имеет вид

$$\varphi_l^{\pm}(0) = \varphi_{l,\text{пад}}$$

На внешней поверхности защиты  $\varphi_i^{\pm}(d) = 0$ .

Основной недостаток метода сферических гармоник – приближенная постановка на границе двух сред, а также плохая сходимость при сильном поглощении и требования применения приближений более высокого порядка, что существенно усложняет рассмотрение задачи.

#### 4.6.4. Метод дискретных ординат

Метод дискретных ординат (или дискретных направлений) состоит в том, что угловой поток излучения аппроксимируется функцией, определенной в дискретных узлах угловой переменной. Выбор узлов зависит от формулы численного интегрирования, используемой при вычислении интеграла рассеяния в кинетическом уравнении.

Для плоской геометрии в однородной среде:

$$\mu \frac{\partial \varphi(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma \varphi(x, \mu) = \int_{-1}^{+1} d\mu' \Sigma_s(\mu^s) \varphi(x, \mu') + q(x, \mu).$$

Интеграл в правой части аппроксимируется формулой численного интегрирования ( $N$  – четное число):

$$\int_{-1}^{+1} d\mu' \Sigma_s(\mu^s) \varphi(x, \mu') = \sum_{j=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} a_j \Sigma_s[\mu^s(\mu, \mu'_j)] \varphi(x, \mu'_j),$$

где веса  $a_j$  и узлы  $\mu_j$  определяются квадратурной формулой и не зависят от подынтегрального выражения.

При этом  $\sum_{j=1}^{N/2} a_j = 1$ .

При использовании такого вида интеграла уравнение переноса можно заменить системой линейных (алгебраических по  $\mu$ , диффе-



ренциальных по  $x$ ) уравнений, которая решается обычными методами:

$$\mu_i \frac{\partial \varphi(x, \mu_i)}{\partial x} + \Sigma \varphi(x, \mu_i) = \sum_{j=-N/2}^{j=N/2} a_j \Sigma_{s,i,j} \varphi(x, \mu_j) + q(x, \mu_i) = Q_i(x),$$

где  $\Sigma_{s,i,j} = \Sigma_s(\mu^s(\mu_i, \mu_j))$ .

Приведенную систему уравнений часто называют системой  $D_N$ -приближения. В отличие от метода сферических гармоник, при применении которого от угловой переменной переходят к моментам плотности углового потока, в методах дискретных ординат непрерывный ряд значений угловой переменной заменяется дискретным рядом переменных  $\mu_i$  (отсюда и название – метод дискретных ординат).

В подготовке констант  $\Sigma_{s,i,j}$  используют следующие методы:

1. Непосредственно используют формулы

$$\Sigma_s(\mu^s) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^L (2l+1) \Sigma_{s,l} P_l(\mu^s).$$

2. Используют явный вид зависимости дифференциального сечения рассеяния от угла.

Рассмотрим граничные условия.

В случае неоднородной защиты на поверхности раздела сред с различными ядерно-физическими свойствами функция  $\varphi(x, \mu_i)$  непрерывна для  $i = -N/2, \dots, N/2$  – и это более точно, чем в методе сферических гармоник, где требуют непрерывности моментов углового потока  $\varphi_l(x)$ .

Для аппроксимации угловой зависимости решения между отдельными узлами (направлениями) функцию  $\varphi(x, \mu)$  выражают в виде интерполяционного полинома

$$\varphi(x, \mu) = \sum_i \varphi(x, \mu_i) L_i(\mu),$$

где  $L_i(\mu)$  – интерполяционные множители Лагранжа:

$$L_i(\mu) = \frac{\prod_{i' \neq i} (\mu - \mu_{i'})}{\prod_{i' \neq i} (\mu_i - \mu_{i'})}.$$

### 4.6.5. $S_N$ -метод

В сферической геометрии уравнение переноса:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \varphi(r, \mu)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \varphi(r, \mu)}{\partial \mu} + \Sigma \varphi(r, \mu) = \\ = \int_{-1}^{+1} d\mu' \Sigma_s(\mu^s) \varphi(r, \mu') + q(r, \mu) = Q(r, \mu). \end{aligned}$$

Интервал изменения  $\mu(-1; +1)$  делится на  $N$  подынтервалов (не обязательно одинаковых) точками  $\mu_j$ , причем  $\mu_{-N/2} = -1$ ;  $\mu_{N/2} = 1$ .

Внутри каждого подынтервала угловой поток аппроксимируется линейной функцией

$$\varphi(r, \mu) = \frac{\mu - \mu_{j-1}}{\mu_j - \mu_{j-1}} \varphi(r, \mu_j) + \frac{\mu_j - \mu}{\mu_j - \mu_{j-1}} \varphi(r, \mu_{j-1}),$$

где  $\mu_{j-1} \leq \mu \leq \mu_j$ .

Подставив это представление в уравнение переноса и проинтегрировав результат по  $\mu$  от  $\mu_{j-1}$  до  $\mu_j$ , получим систему  $N$  обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left( a_j \frac{d}{dr} + \frac{b_j}{r} + \Sigma \right) \varphi(r, \mu_j) + \left( \bar{a}_j \frac{d}{dr} - \frac{b_j}{r} + \Sigma \right) \varphi(r, \mu_{j-1}) = 2Q(r, \mu_{j-1}),$$

где  $a_j = (2\mu_j + \mu_{j-1})/3$ ;  $\bar{a}_j = (\mu_j + 2\mu_{j-1})/3$ ;

$$b_j = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 - \mu_j^2 - \mu_j \mu_{j-1} - \mu_{j-1}^2}{\mu_j - \mu_{j-1}};$$

$$Q(r, \mu_j) = \frac{1}{\mu_j - \mu_{j-1}} \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} Q(r, \mu) d\mu.$$

Величину  $Q(r, \mu_j)$  вычисляют с помощью квадратурной формулы как в методе дискретных ординат.

$$\int_{-1}^{+1} d\mu^i \Sigma_s(\mu^s) \varphi(x, \mu') = \sum_{j=-N/2}^{N/2} a_j \Sigma_s[\mu^s(\mu, \mu'_j)] \varphi(x, \mu'_j).$$

Исходные граничные условия обычно задают на внешней границе системы.

Это означает, что  $(N+1)$ -е уравнение, являющееся необходимым дополнением к системе уравнений, должно включить только функцию при  $\mu_0 = -1$ , т.е.  $\varphi(r, \mu_0 = -1)$ .

Подставим  $\mu_0 = -1$  в уравнение переноса:

$$\left( -\frac{d}{dr} + \Sigma \right) \varphi(r, \mu_0 = -1) = Q(r, \mu_0 = -1).$$

Это и есть последнее уравнение  $S_n$ -преобразования. Самое низшее из приближений –  $S_2(N=2)$ . При этом

$$\varphi_0 = [\varphi(1) + 2\varphi(0) - \varphi(-1)]/2,$$

$$k = \sqrt{3\Sigma_{yb}\Sigma\left(1 + \frac{\Sigma_{yb}}{3\Sigma}\right)}.$$

В этом случае систему уравнений можно свести к диффузионному с характеристическим числом  $k = 1/L$ .

$S_2$  точнее  $P1$ -приближения, но менее точен, чем  $P_2$ -приближение.

Решаются  $S_n$ -уравнения методом итерации функции источника  $Q$ . Численный алгоритм довольно прост и удобен для ЭВМ. Недостаток – плохая сходимость при слабом поглощении и замедлении; но очень хорош на больших расстояниях.

#### 4.6.6. Метод характеристик

Движение нейтрона описывается в методе не в локальной системе координат, а относительно фиксированного направления в пространстве. Численное интегрирование переноса проводится вдоль траектории нейтронов в пространстве характеристических направлений. Метод удобен для криволинейной геометрии.

При решении конечно-разностных уравнений метода дискретных уравнений в большинстве случаев используют итерационный процесс, т.е. последовательно учитывают нерассеянное, однократно, двукратно и так далее рассеянное излучение.

#### 4.6.7. Метод групп

При решении различных задач переноса излучения возникают существенные затруднения в оценке зависимости плотности потока от энергии из-за сложного вида энергетической зависимости ней-

тронных сечений. Наиболее широко используется групповой подход, который состоит в том, что нейтроны с достаточно близкими энергиями объединяются в группы. Вся область изменения энергии разбивается на отдельные групповые интервалы  $\Delta E_i = [E_i; E_{i+1}]$ , и отыскиваются значения дифференциальной плотности потока нейтронов каждой группы:

$$\varphi^i(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{E_i}^{E_{i+1}} \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dE \quad - \text{интеграла по энергии } \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}).$$

При этом в групповой модели энергетическая зависимость сечений и источников аппроксимируется кусочно-постоянными функциями. Т.е. считается, что в пределах каждого энергетического интервала функции сечения и источников имеют постоянное значение.

Общее уравнение переноса:

$$\begin{aligned} & \vec{\Omega} \nabla \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma(\vec{r}, E) \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \\ & = \int d\vec{\Omega}' \int_E^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') + q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}). \end{aligned}$$

Проинтегрируем в пределах  $i$ -ой энергетической группы, получим уравнение для суммарной плотности потока нейтронов в этой группе  $\varphi^i(\vec{r}, \vec{\Omega})$ :

$$\begin{aligned} & \vec{\Omega} \nabla \varphi^i(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma^i(\vec{r}, \vec{\Omega}) \varphi^i(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \\ & = \sum_{j=1}^i d\vec{\Omega}' \Sigma_s^{j \rightarrow i}(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \varphi^j(\vec{r}, \vec{\Omega}') + q^i(\vec{r}, \vec{\Omega}). \end{aligned}$$

Использованы обозначения:

$$\Sigma^i(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\int \Sigma(\vec{r}, E) \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dE}{\int_{\Delta E_i} \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dE};$$

$$\Sigma_s^{j \rightarrow i}(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \frac{\int_{\Delta E_i} dE \int_{\Delta E_j} dE' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \times \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}')}{\int_{\Delta E_j} \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}') dE'};$$

$$g_i(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_{\Delta E_i} g(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dE.$$

Таким образом, полный интеграл по  $dE'$  представлен как сумма интегралов по отдельным группам  $\Delta E_j$ . Тогда полученное уравнение строго тождественно уравнению переноса. Однако групповые сечения получать весьма трудно. Они зависят от неизвестного заранее энергетического и углового распределения нейтронов в каждой точке, т.е. от самого решения. Поэтому проводят усреднение групповых сечений по пространству внутри однородных зон, учитывая постоянство элементарных ядерных сечений (не групповых) внутри зоны.

Погрешности можно компенсировать введением сопряженных функций и теории возмущений. Этот случай здесь не рассматриваем.

#### 4.6.7.1. Дискретно-энергетический подход к решению уравнения переноса излучения

Альтернативой групповой модели является анализ этого уравнения для дискретных узлов по энергии, когда энергия рассматривается как дискретная переменная. Такой анализ имеет смысл при рассмотрении большого числа узлов энергетической переменной, когда удастся описать детально ход энергетической зависимости сечения. Между узлами обычно предполагают линейный ход зависимости сечения от энергии.

Уравнение переноса имеет вид

$$\begin{aligned} & \vec{\Omega} \nabla \varphi(\vec{r}, E_k, \vec{\Omega}) + \Sigma(E_k) \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \\ & = \sum_j \sum_n \frac{2n+1}{4\pi} \Sigma_{s,n}(E_j \rightarrow E_k) \omega_{j(k)} \varphi_n(\vec{r}, E_j) P_n(\mu^s) + q(\vec{r}, E_k, \vec{\Omega}), \end{aligned}$$

где  $E_k$  и  $E_j$  – узлы энергетической переменной,  $\Sigma(E_k)$  и  $\Sigma_s(E_k \rightarrow E_j)$  – сечения в точках  $E_k$ .

Индикатриса рассеяния разложена в ряд по полиномам Лежандра. Квадратурные веса  $\omega_j(k)$  определяются выбором формулы численного интегрирования для интеграла рассеяния.

В простейшем случае

$$\omega_j(k) = \frac{\int \Sigma_s(E \rightarrow E_k) \Phi(E) dE}{\Sigma_s(E_j \rightarrow E_k) \Phi(E_j)},$$

где  $\Delta E_j$  – энергетический интервал, включающий в себя точку  $E_j$  (обычно границы интервалов выбирают посередине между узлами);  $\Phi(E)$  – некий стандартный спектр.

В частности, при  $\Sigma_s(E \rightarrow E_k) = \text{const}$  и  $\Phi(E) = \text{const}$  на интервале  $\Delta E_j \rightarrow \Delta \omega_j(k) = \Delta E_j$ .

Дискретно-энергетическая форма и групповая форма уравнения переноса алгебраически эквивалентны.

#### 4.6.7.2. Групповые константы

**Сечения.** При усреднении сечений для достаточно протяженных зон интегральный энергетический спектр нейтронов в  $\nu$ -ой зоне  $\Phi_0^{(\nu)}(E)$  можно при первом приближении описать равновесным спектром  $\Phi_0(E)$  в бесконечной однородной среде, в которую помещены равномерно распределенные источники спектра:

$$q_0^{(\nu)}(E) = \int d\vec{r} \int d\vec{\Omega} q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}).$$

Функция  $\Phi_0(E)$  удовлетворяет уравнению

$$\Sigma(E) \Phi_0(E) = \int_E^{\infty} dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \Phi_0(E') + q_0(E)$$

(уравнение переноса, проинтегрированное по всем угловым и пространственным переменным).

Это уравнение удастся решить лишь в некоторых частных случаях. Необходимо более сложное рассмотрение. Основной анализ внутригрупповых спектров основан на методе сферических гармоник.

В плоской геометрии:

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{2n+1} \frac{\partial \varphi_{n+1}(x, E)}{\partial x} + \frac{n}{2n+1} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x} + \Sigma(E) \varphi_n(x, E) = \\ & = \int_E^{\infty} dE' \Sigma_{s,n}(E' \rightarrow E) \varphi_n(x, E') + q_n(x, E). \end{aligned}$$

При слабом изменении сечений в интервале упругого замедления  $\Delta E_{\text{зам}}$  в средах из тяжелых и средних ядер спектр нейтронов изменяется тоже мало. Поэтому с небольшой степенью погрешности при  $n > 0$  (для изотропного рассеяния) можно вынести  $\varphi_n(x, E)$  из-под знака интеграла в правой части.

Если принять обозначения

$$\begin{aligned} \Sigma_{tr,n} &= \Sigma(E) - \Sigma_{s,n}(E); \\ \Sigma_{s,n}(E) &= \int_E^{E+\Delta E_{\text{зам}}} dE' \Sigma_{s,n}(E' \rightarrow E), \end{aligned}$$

то уравнение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Sigma_{tr,n}(E) \varphi_n(x, E) &= - \frac{n+1}{2n+1} \frac{\partial \varphi_{n+1}(x, E)}{\partial x} - \\ & - \frac{n}{2n+1} \frac{\partial \varphi_{n-1}(x, E)}{\partial x} + q_n(x, E). \end{aligned}$$

Интегрируя эту систему по пространству и предполагая, что спектр градиента какого-либо момента нейтронного потока подобен спектру самого момента, т.е.

$$\int \frac{\partial \varphi_n(x, E)}{\partial x} dx = \Phi_n(E);$$

$$\Sigma_{tr,n}(E) \Phi_n(E) = - \frac{n+1}{2n+1} \Phi_{n+1}(E) - \frac{n}{2n+1} \Phi_{n-1}(E) + q_n(E).$$

Это система  $P_N$ -уравнений относительно  $\Phi(E)$ , ее можно достаточно точно решить численно.

Если пренебречь влиянием высших моментов на низшие, т.е. первым слагаемым правой части, и влиянием анизотропии источников, то приближенно при  $n > 0$ :

$$\Phi_n(E) \sim \Phi_{n-1}(E) / \Sigma_{tr,n}(E).$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \Phi_1(E) &\sim \Phi_0(E) / \Sigma_{tr}(E); \\ \Phi_2(E) &\sim \Phi_0(E) / \Sigma_{tr}(E) \cdot \Sigma_{tr,2}(E). \end{aligned}$$

В средах, сечения которых изменяются с энергией нейтронов резонансно, нейтронный спектр испытывает резкие резонансные колебания. При этом происходит самоэкранировка резонансов, заключающаяся в снижении значений эффективных сечений с удалением от источника.

Для случая малых градиентов потока в слабопоглощающей среде приближенное выражение для резонансной микроструктуры

$$\Phi_n(E) \approx R(E) \sum_{l=0}^n a_{l-n} / \Sigma^{n+1}(E),$$

где  $R(E)$  – функция энергии.  $a_l$  задается рекуррентным соотношением  $a_l(\frac{\Sigma_s(E' \rightarrow E, \mu^s)}{\Sigma^k(E')})$ , при  $k = 1, 2, \dots, n$ , причем  $a_l$  характеризуют корреляцию дифференциальных и полных сечений.

Эти данные могут быть получены из экспериментов по пропусканию пучков моноэнергетических нейтронов в исследуемых средах в геометрии узкого пучка. Подстановка этих данных в выражение для групповых констант позволяет определять эти константы:

$$\begin{aligned} \Sigma_n^{i(v)} &= \int_{\Delta E} dE \Sigma^{(v)}(E) \cdot \Psi_n^{(v)}(E) / \int_{\Delta E_i} dE \Psi_n^{(v)}(E) \\ \Sigma_{s,n}^{j \rightarrow i(v)} &= \frac{\int_{\Delta E_j} dE' \int_{\Delta E_i} dE \Sigma_{s,n}^{(v)}(E' \rightarrow E) \int_{V_v} d\vec{r} \varphi_n(\vec{r}, E') \varphi_n^*(\vec{r}, E)}{\int_{\Delta E_j} dE' \int_{\Delta E_i} dE \int_{V_v} d\vec{r} \varphi_n(\vec{r}, E') \varphi_n^*(\vec{r}, E)} \end{aligned}$$

где  $\Psi_n^{(v)}(E, \vec{\Omega}) = \int_{V_v} d\vec{r} \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \varphi_p^*(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ ;

$$\Psi_n^{(v)} = \int_{V_v} d\vec{r} \varphi_n(\vec{r}, E) \cdot \varphi_n^*(\vec{r}, E).$$

**Дискретно-угловые групповые константы.** В общем случае для сечения упругого взаимодействия

$$\Sigma_{el}(E' \rightarrow E, \mu^s) = \frac{1}{2\pi} \Sigma_{el}(E') f(E', \mu^s) \delta[E - E'g(\mu^s)],$$

где  $f(E', \mu^s)$  – непосредственно индикатриса рассеяния;

$$f(E', \mu^s) = f_0^{el}[E', \mu^s] t(\mu^s).$$

Для водорода  $g(\mu^s) = (\mu^s)^2$ ;  $t(\mu^s) = 4\mu^s$ .



Если производить усреднение по какому-либо спектру  $\Phi_0(E)$

$$\Sigma_{el}^{j \rightarrow i}(\mu^s) = \int_{\alpha_{ji}(\mu^s)}^{\beta_{ji}(\mu^s)} dE' \Sigma_{el}(E') f(E', \mu^s) \Phi(E') / \Phi^j,$$

где  $\alpha_{ji}(\mu^s) = \max \left\{ \frac{E_i}{g(\mu^s)}; E_j \right\}$

$$\beta_{ji}(\mu^s) = \max \left\{ \frac{E_{i-1}}{g(\mu^s)}; E_{j-1} \right\}.$$

Для тяжелых ядер  $\Sigma_{el}^{j \rightarrow i}(\mu^s) \approx \Sigma_{el}^j f(\mu^s) - \Sigma_{el}^{j \rightarrow j+1}(\mu^s)$ .

Если в качестве  $\Phi_0(E)$  взять спектр Ферми  $\Phi(E) \sim E^{-1}$ , то  $\Sigma_{el}^{j \rightarrow i}(\mu^s) \approx \delta(j-i+1) \Sigma_{el}(E_l + \Delta) f(E_j + \Delta, \mu^s) \cdot 2(1 - \mu^s) / \Delta U_j$ , где  $\Delta U_j = \ln(E_{j-1}/E_j)$  – интервал летаргии для  $j$ -ой группы.

**Решение многогрупповых задач расчета переноса излучения.** Формулировка многогрупповых систем уравнений переноса нейтронов в виде систем последовательных односкоростных уравнений удобна для численного решения с помощью ЭВМ. Например, для плоской геометрии в методе сферических гармоник:

$$\begin{aligned} n \frac{d\varphi_{n-1}^i(x)}{dx} + \frac{(n+1)d\varphi_{n+1}^i}{dx} + (2n+1)\Sigma_{tr,n}^i \varphi_n^i(x) = \\ = (2n+1) \sum_{j=1}^{i-1} \Sigma_{s,n}^{j \rightarrow i} \varphi_n^j(x) + (2n+1)g_n^i(x). \end{aligned}$$

Одни и те же вычислительные программы для ЭВМ используют для расчета нейтронов и гамма-квантов. Универсальность подхода облегчает практическое решение задач, когда один вид излучения (нейтроны) формирует другой вид излучения –  $\gamma$ -кванты.

## **4.7. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)**

В основе метода лежит использование вероятностного характера элементарных актов взаимодействия нейтронов с веществом. Макроскопическое сечение взаимодействия интерпретируется как вероятность взаимодействия на единичном пути частицы.

При определении макроскопического сечения мы использовали понятие «вероятность» и записывали число частиц, испытывающих соударения на пути  $dx$ :

$$n(x) = n(x=0)e^{-\Sigma x}.$$

Длина свободного пробега нейтрона  $\lambda$  (т.е. длина пути от столкновения до столкновения) – тоже случайная величина. Она принимает любые положительные значения с плотностью вероятности:

$$p(x) = \Sigma e^{-\Sigma x}.$$

### 4.7.1. Общие принципы построения алгоритмов по методу Монте-Карло

Случайная величина  $\zeta$  – непрерывная, определяется заданием интервала  $(a, b)$ , содержащего все возможные значения  $\zeta$ , и функцией  $p(x)$  – плотностью вероятности:

$$P(a' < \zeta < b') = \int_{a'}^{b'} p(x) dx.$$

Если  $p(x) = \text{const}$ , то случайную величину называют равномерно распределенной на интервале  $[a, b]$ , причем по условию нормировки всегда можно вычислить эту  $\text{const} = 1/(b-a)$ .

В методах Монте-Карло используют величину  $\gamma$ , равномерно распределенную на отрезке  $[0, 1]$  с  $p(x)=1$ :

$$\int_{a'}^{b'} p(x) dx = b' - a'.$$

Математическое ожидание такой величины

$$M\gamma = \int_0^1 xp(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Последовательность таких чисел  $\gamma$  – датчик случайных чисел (на самом деле это псевдослучайное число).

**Получение последовательностей непрерывной случайной величины с заданной плотностью вероятности.** Нам надо получить значение случайной величины  $\zeta$ , распределенной в интервале  $(a, b)$  с заданной плотностью  $p(x)$ .

В методах Монте-Карло доказывается, что  $\zeta$  можно находить из уравнения  $\int_a^{\zeta} p(x)dx = \gamma$ . Т.е., выбрав очередное значение  $\gamma$ , надо решить данное уравнение и найти очередное значение  $\zeta$ .

Пример 1. Случайная величина  $\eta$  равномерно распределена в интервале  $(a, b)$ , и ее плотность постоянна  $P(x) = 1/(b-a)$  при  $a < x < b$ .

Чтобы разыграть  $\eta$ , составим уравнение:

$$\int_a^{\eta} \frac{dx}{b-a} = \gamma.$$

Интеграл легко вычисляется:

$$\frac{\eta - a}{b - a} = \gamma.$$

Отсюда получается явное выражение  $\eta = a + \gamma(b-a)$ .

Пример 2. Случайная величина  $\tau$  распределена в интервале  $(0; +\infty)$  с плотностью  $p(x) = ae^{-ax}$ .

Легко вычислить математическое ожидание:

$$M\tau = \int_0^{\infty} xp(x)dx = \int_0^{\infty} xa \cdot e^{-ax} dx = \frac{1}{a}.$$

Формула для розыгрыша  $\tau$  легко получается из предыдущего вывода:

$$\int_0^{\tau} ae^{-ax} dx = \gamma.$$

Вычислив интеграл  $1 - a^{-a\tau} = \gamma$ , получим  $\tau = -\frac{1}{a} \ln(1 - \gamma)$  или

$$\tau = -\frac{1}{a} \ln \gamma.$$

Величина  $1-\gamma$  распределена точно так же, как и  $\gamma$ , поэтому мы заменили  $\ln(1-\gamma)$  на  $\ln \gamma$ .

В этих формулах  $p(x)$  – вероятность того, что частица пройдет расстояние  $x$ :  $p(x) = \Sigma e^{-\Sigma x}$ .  $M\tau = 1/\Sigma$  – средняя длина свободного пробега.

## 4.7.2. Расчет прохождения нейтронов сквозь пластину

Пусть на однородную бесконечную пластину  $0 \leq x \leq h$  падает поток нейтронов с энергией  $E_0$ . Угол падения –  $90^\circ$ . При столкновении нейтроны либо поглощаются, либо рассеиваются.

В этой задаче для простоты будем считать, что энергия нейтрона при рассеянии не меняется, а любое направление рассеяния одинаково вероятно.

Возможные «судьбы» нейтрона (а, б, в) приведены на рис. 4.11.

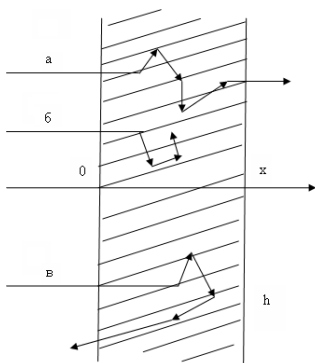


Рис. 4.11. Схема возможных «судеб» нейтрона при прохождении защиты толщиной  $h$ : а – нейтрон проходит защиту, б – нейтрон поглощается в защите, в – нейтрон отражается от защиты

Для разыгрывания длины свободного пробега

$$\lambda = -\frac{1}{\Sigma} \ln \gamma.$$

Остается выбрать случайное направление нейтрона после рассеяния. Так как задача симметрична относительно  $x$ , то направление определяется одним углом  $\varphi$  между скоростью и осью  $OX$ .

Требование равной вероятности любого направления равносильно требованию, чтобы косинус этого угла  $\mu = \cos \varphi$  был равномерно распределен в интервале  $(-1, 1)$ . Для равномерно распределенных величин на отрезке  $[-1, 1]$  правило розыгрыша:

$\gamma = (\mu - (-1)) / (1 - (-1))$ , следовательно,  $\mu = 2\gamma - 1$ .

Задача. Вычислить:

- 1) вероятность прохождения нейтрона через пластину  $p^+$  (случай а);
- 2) вероятность поглощения нейтрона в пластине  $p^0$  (случай б);
- 3) вероятность отражения нейтрона пластиной  $p^-$  (случай в).

Взаимодействие нейтронов с веществом описывается двумя сечениями:  $\Sigma_s$  и  $\Sigma_c$ . Их сумма – полное сечение взаимодействия:  $\Sigma = \Sigma_s + \Sigma_c$ .

Таким образом, при столкновении нейтрона с атомом вероятность поглощения равна  $\Sigma_c / \Sigma$ , а вероятность рассеяния –  $\Sigma_s / \Sigma$ .

## Схема моделирования

Пусть нейтрон испытал  $k$ -ое рассеяние внутри пластины в точке с абсциссой  $x_k$  и после этого начал двигаться в направлении  $\mu_k$ .

Разыграем длину свободного пробега:

$$\lambda_k = -\frac{1}{\Sigma} \ln \gamma.$$

Вычислим абсциссу следующего столкновения:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \mu_k.$$

Проверим условие прохождения через пластинку:  $x_{k+1} > h$ ?

Если это условие выполнено, то траектория заканчивается и добавляется 1 к счетчику прошедших частиц  $N^+$ .

В случае, если условие не выполнено, проверяем условие отражения:  $x_{k+1} < 0$ .

Если да, то добавляется единица к счетчику отраженных частиц  $N^-$ . Если нет, т.е.  $0 \leq x_{k+1} \leq h$ , то нейтрон испытал  $k+1$  столкновение внутри пластины и надо разыграть судьбу нейтрона при столкновении.

Проверяем условие поглощения:  $\gamma < \Sigma_c/\Sigma$ .

Если да, то добавляем единицу к счетчику поглощенных частиц  $N^0$ . Если нет, тогда разыгрываем рассеяние  $\mu_{k+1} = 2\gamma - 1$ , и цикл повторяется снова (но уже с другими значениями  $\gamma$ ).

Все  $\gamma$  написаны без индексов, так как имеется в виду, что каждое значение  $\gamma$  используется всего один раз.

Для расчета одного звена траектории нужны три значения  $\gamma$ .

Начальные значения для каждой траектории  $x_0 = 0$ ,  $\mu_0 = 1$ .

$$p^+ \approx N^+/N; p^- \approx N^-/N; p^0 \approx N^0/N.$$

Такой подход можно распространить на многомерное пространство.

Будем считать, что состояние частицы характеризуется пространственными координатами  $\vec{r}(x, y, z)$ , направлением движения  $\vec{\Omega}(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  и энергией  $E$  или вектором  $\vec{X}(x, y, z, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, E)$ .

1. Сначала моделируют источник излучения. Задаются функцией плотности вероятности  $G(X)$ , характеризующей источник, и реализуют случайную величину  $\vec{X}_0$  с функцией  $G(\vec{X}_0)$ .

## 2. Моделирование перехода частицы в $\vec{X}_1$ .

2.1. Определяем расстояние, которое проходит частица до точки  $r_1(x_1, y_1, z_1)$ , и проверяем, не покинула ли частица интересующую нас область.

2.2. Определяем тип взаимодействия (рассеяние, поглощение, деление...).

2.3. Определяется угол рассеяния и энергия  $E$ .

Каждое событие выбирается случайно в соответствии с известным законом распределения.

### Выбор случайного направления

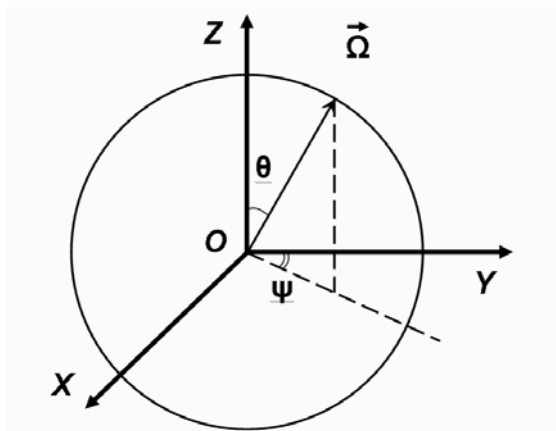


Рис. 4.12. Схема выбора случайного направления в пространстве

Направление задаем единичным вектором. Концы таких векторов расположены на поверхности единичной сферы. Слова «любое направление одинаково вероятно» означают, что конец вектора представляет собой случайную точку  $\Omega$ , равномерно распределенную на поверхности сферы. Вероятность того, что  $\Omega$  окажется в любом элементе поверхности  $dS$ , равна  $dS/4\pi$ .

Выберем на поверхности сферы сферические координаты  $(\varphi, \psi)$  с полярной осью  $OX$  (рис.4.12),  $dS = \sin\varphi d\varphi d\psi$ , причем  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ .

Координаты  $\varphi$  и  $\psi$  независимы, поэтому плотность точки с координатами  $(\varphi, \psi)$   $P(\varphi, \psi) = P_\varphi(\varphi)P_\psi(\psi)$ ,

$$P(\varphi, \psi)d\varphi d\psi = dS/4\pi,$$

$$P_\varphi(\varphi)P_\psi(\psi) = \sin\varphi/4\pi.$$

Принимаем во внимание условие нормировки:

$$\int_0^{2\pi} P_\psi(\psi)d\psi = 1.$$

Проинтегрируем выражение для  $P_\varphi(\varphi)P_\psi(\psi)$  по  $\psi$  от 0 до  $2\pi$ , получим  $P_\varphi(\varphi) = \sin\varphi/2$ .

Итак,  $P_\varphi(\varphi)P_\psi(\psi) = \sin\varphi/4\pi$  и  $P_\varphi(\varphi) = \sin\varphi/2$ .

Поделив почленно  $P_\varphi(\varphi)P_\psi(\psi)$  на  $P_\varphi(\varphi)$ , получаем  $P_\psi = 1/2\pi$ .

Таким образом,  $\psi$  равномерно распределена в интервале  $(0, 2\pi)$  и формула для разыгрывания:  $\psi = \pi 2\gamma$ .

Формула для разыгрывания  $\varphi$ :

$$P(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{2}, \text{ тогда } \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi'}{2} d\varphi' = \gamma, \text{ отсюда } \cos \varphi = 1 - 2\gamma.$$

На рис. 4.13 приведен общий алгоритм по розыгрышу судеб нейтронов при прохождении защиты.

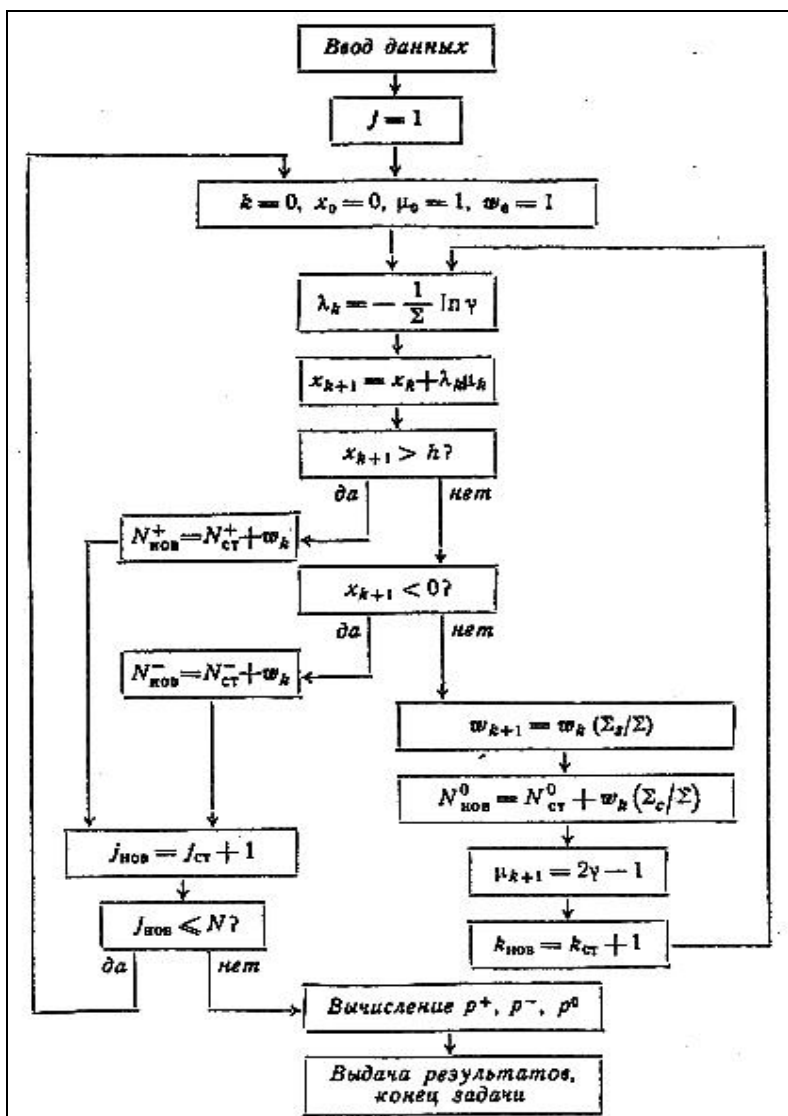


Рис. 4.13. Алгоритм розыгрыша переноса нейтронов



## Заключение

В данном пособии рассмотрены вопросы прикладной нейтронной физики, а именно, источники нейтронов, взаимодействие нейтронов с веществом, и дан обзор методов расчета для задач по взаимодействию нейтронов с веществом. Полученные знания можно применять для решения задач прикладной физики. Нейтронные технологии для народного хозяйства, прежде всего – это технологии неразрушающего контроля конструкционных и других материалов. В медицине также широко используются нейтроны для диагностики терапии заболеваний. Для расчета ядерно-физических основ реакторов, конечно же, нужен расширенный курс по проблемам переноса нейтронного излучения. Изложенный курс прикладной нейтронной физики является открытым для новых исследований и открытий. Продолжают совершенствоваться источники нейтронов (в том числе и источники интенсивных пучков), совершенствуются техники и программы расчета взаимодействия нейтронов с веществом, постоянно проводятся новые эксперименты по измерению сечений взаимодействия нейтронов – нейтронная физика остается актуальной областью науки и ждет своих первооткрывателей и исследователей.

## Список литературы

1. Защита от ионизирующих излучений / Н.Г. Гусев, В.А. Климанов, В.П. Машкович, А.П. Суворов. – Том 1. Физические основы защиты. – М.: Энергоатомиздат, 1989.
2. Власов Н.А. Нейтроны. – М.: Наука, 1974.
3. Экспериментальные методы нейтронных исследований / Е.А. Крамер-Агеев, В.Н. Лавренчик, В.Т. Самосадный, В.П. Протасов. – М.: Энергоатомиздат, 1990.
4. Авкаян С.В., Вдовин А.И., Пустырников В.П. Ионизирующее и проникающее излучение в околоземном космическом пространстве. Справочник. – СПб.: Гидрометеоздат, 1994.
5. Тустановский В.Т. Генераторы нейтронов и контроль технологических процессов. – М.: Атомиздат, 1980.

*Владимир Валериевич Кадилин  
Елена Васильевна Рябева  
Валерий Трофимович Самосадный*

# **ПРИКЛАДНАЯ НЕЙТРОННАЯ ФИЗИКА**

Учебное пособие

Редактор Н.В. Шумакова  
Оригинал-макет подготовлен В.В. Кадилиным

Подписано в печать 15.12.2010. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Печ. л. 8,0. Уч.-изд. л. 10,25. Тираж 100 экз.  
Изд. № 1/4/54. Заказ № 22

---

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».  
115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31.

ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».  
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42

**ДЛЯ ЗАМЕТОК**